UMA FORMULAÇÃO BI-DIMENSIONAL PARA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Isaias Quaresma Masetti

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

Prof. Luiz Carlos Wrobel
(Presidente)

Prof. Sérgio Hamilton Sphaier

Prof. Luiz Bevilacqua

Prof. José Claudio Faria Telles

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1984

MASETTI, ISAIAS QUARESMA

Uma formulação Bi-dimensional para Interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos de Contorno (Rio de Janeiro) 1984.

X ,134 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1984).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Hidrodinâmica; Elemento de Contorno; Interação Fluido-Estrutura; Estruturas Off - shore I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Minha Família

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos que colaboraram ou incentivaram a realização deste trabalho. E de um modo especial:

Ao Professor Luiz Carlos Wrobel pela orientação e estímulo em todas as etapas deste trabalho.

Ao Professor Sérgio Hamilton Sphaier por sua valiosa colaboração e amizade dispensada.

À Sra. Nilda de Almeida Piergiorgi pelo esmerado trabalho de datilografia.

À PETROBRÁS, na pessoa do Dr. Sérgio Müeller pelo incentivo dado aos cursos de pós-graduação.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

UMA FORMULAÇÃO BI-DIMENSIONAL PARA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Isaias Quaresma Masetti

Março, 1984

Orientador: Luiz Carlos Wrobel

Programa: Engenharia Civil

O propósito deste trabalho é estimar as cargas de onda sobre estruturas marítimas de grande volume, grupos de pilares com seção transversal arbitrária e outras estruturas compostas por uma base submersa com um grupo de pilares repousando sobre ela.

Inicialmente, é feita uma revisão dos conceitos fundamentais da hidrodinâmica e são estabelecidas as hipóteses simplificadoras necessárias para reduzir o problema a uma forma bidimensional.

O problema de valor de contorno que governa o fenômeno é transformado em uma equação integral através do uso de uma formulação direta de elementos de contorno.

A solução numérica desta equação integral fornece os valores do potencial da onda na superfície dos cor-

pos e então as forças são facilmente avaliadas.

A aplicação do programa a vários casos mostra uma boa concordância com outros valores experimentais e teóricos.

Este método é útil para avaliar as forças de onda sobre estruturas tipicamente tridimensionais, como as plataformas gravitacionais do tipo "Condeep", nas fases iniciais de projeto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

A TWO-DIMENSIONAL FORMULATION FOR FLUID-STRUCTURE INTERACTION USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Isaias Quaresma Masetti

March, 1984

Chairman: Prof. Luiz Carlos Wrobel

Department: Civil Engineering

The purpose of this work is to estimate the wave loads on large volume offshore structures, groups of piles with arbitrary cross sections and other structures compounded of a submerged base with a group of columns over it.

At first, a review of the fundamental concepts of hydrodynamics is made and the simplifications needed to reduce the problem to a two-dimensional one are set up.

The boundary value problem that governs the phenomenon is transformed into an integral equation by using a direct boundary element formulation.

The numerical solution of this integral equation yields the wave potential values at the bodies surface and then the forces on it are easily evaluated.

The application of the program to several cases shows a good agreement with other experimental and theoretical results.

This method underestimates the wave loads upon typical three-dimensional structures, as "Condeep" platforms, but it can be useful in the initial fases of a project.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO 01

I.1 - CLASSES DE ESTRUTURAS MARÍTIMAS 01

I.2 - O PROBLEMA DAS ESTRUTURAS DE GRANDE VOLUME .. 05

II - REVISÃO DOS CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE HIDRODINÂMICA 10

II.1 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO 10

II.2 - O POTENCIAL DE VELOCIDADES 15

II.3 - CÁLCULO DAS PRESSÕES 16

III - FORÇAS DE ONDA SOBRE ELEMENTOS DE GRANDE VOLUME .. 20

III.1 - ESCOLHA DO REGIME DE CARGA 20

III.2 - FORMULAÇÃO GERAL DA TEORIA DA DIFRAÇÃO ... 24

III.3 - INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE POTENCIAL REDUZIDO - EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ 30

III.4 - CONDIÇÃO DE RADIAÇÃO 34

IV - TEORIAS DE ONDA 40

IV.1 - ABORDAGEM QUALITATIVA 40

IV.2 - CRITÉRIOS DE VALIDADE DAS PRINCIPAIS TEORIAS DE ONDA 45

IV.3 - COMPARAÇÃO E VALIDADE DAS TEORIAS DE ONDA. 50

IV.4 - CONCLUSÃO 53

V - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SOLUÇÃO DO PVC ASSOCIADO 56

V.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA POTENCIAL 56

V.2 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ .. 61

V.3 - TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E AS IDENTIDADES DE GREEN 63

V.4 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA DIFRAÇÃO, APLICANDO-SE A SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN 67

V.5 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO 77

V.6 - INTEGRAÇÃO SOBRE CADA ELEMENTO 81

VI - FORÇAS DE ONDA SOBRE ESTRUTURAS COMPOSTAS - UMA APROXIMAÇÃO BI-DIMENSIONAL 91

VI.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA 92

VI.2 - DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À SUB-REGIÃO Ω_1 93

VI.3 - DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À SUB-REGIÃO Ω_2 96

VI.4 - ACOPLAMENTO DOS DOIS PVC'S 101

VII - APLICAÇÕES 104

VII.1 - APLICAÇÃO DO MEC A PILARES DE SEÇÃO ARBITRÁRIA CONSTANTE EM TODA A PROFUNDIDADE . 104

VII.2 - APLICAÇÕES DO MEC A ESTRUTURAS COMPOSTAS 115

VIII - CONCLUSÕES 129

BIBLIOGRAFIA 131

I - INTRODUÇÃO

Este capítulo se destina a dar uma visão geral dos principais tipos de plataformas marítimas para a explotação de petróleo e, assim, mostrar a quais tipos a aproximação aqui desenvolvida melhor se aplica.

I.1 - Classes de Estruturas Marítimas

A tecnologia necessária para o projeto e construção de estruturas marítimas para explotação de petróleo teve um crescimento considerável nestas últimas décadas.

Até o presente, uma grande variedade de estruturas marítimas estão sendo usadas nas mais diversas condições ambientais. A alta dos preços do petróleo, causada pelo aumento vertiginoso do consumo, viabilizou a explotação de campos cada vez mais profundos em regiões com condições ambientais mais severas.

Nestas condições, uma maior certeza na determinação dos efeitos da interação onda-estrutura torna-se um fator de importância vital para se ter um projeto seguro e viável economicamente.

Assim, surgiram várias classes de plataformas a serem usadas conforme a fase em que se esteja (produção, perfuração, perfuração exploratória) e a profundidade da região.

Entre estas classes de plataformas encontram-se:

a - as plataformas fixas que podem ser usadas tanto para produção como perfuração, sendo que a maior já construída foi

para o campo de Cognac, com uma profundidade de 340 m (ver figura I.1).

b - as plataformas móveis do tipo semi-submersíveis, geralmente utilizadas na perfuração exploratória, as quais operam muito bem em profundidades em torno dos 300 m (ver figura I.2).

c - as plataformas gravitacionais são um outro tipo de estrutura fixa que dependem de seu grande peso, ao invés de estacas, pra manter sua estabilidade. Estas plataformas são normalmente construídas de concreto e podem possuir grandes volumes para armazenar óleo em sua base. Estas plataformas se caracterizam, também, por possuirem grandes dimensões horizontais e poderem ser usadas em regiões com profundidades de até 200 m (ver figura I.3).

d - as plataformas do tipo ilha artificial possuem também uma dimensão lateral relativamente grande, caracterizando-se, portanto, por apresentar grande área de convés. Porém, ao contrário das gravitacionais, são somente usadas para águas rasas (ver figura I.4).

e - finalmente, tem-se as plataformas móveis do tipo torre estaiada e TLP (plataformas de pernas tensionadas) que se caracterizam por resistirem dinamicamente às cargas ambientais e poderem ser empregadas para lâminas d'água muito profundas (ver figura I.5).

Dos tipos apresentados, verifica-se que a dificuldade para a determinação das cargas ambientais cresce conforme a dimensão horizontal característica da estrutura e esta dificuldade se torna ainda maior quando se está diante de

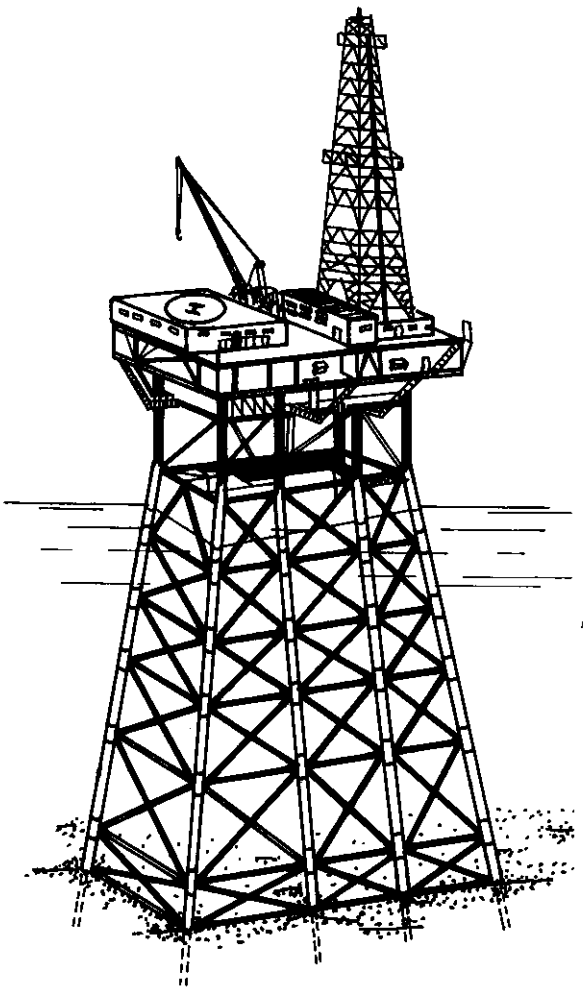


Fig.I-1_Plataforma fixa tipo jaqueta

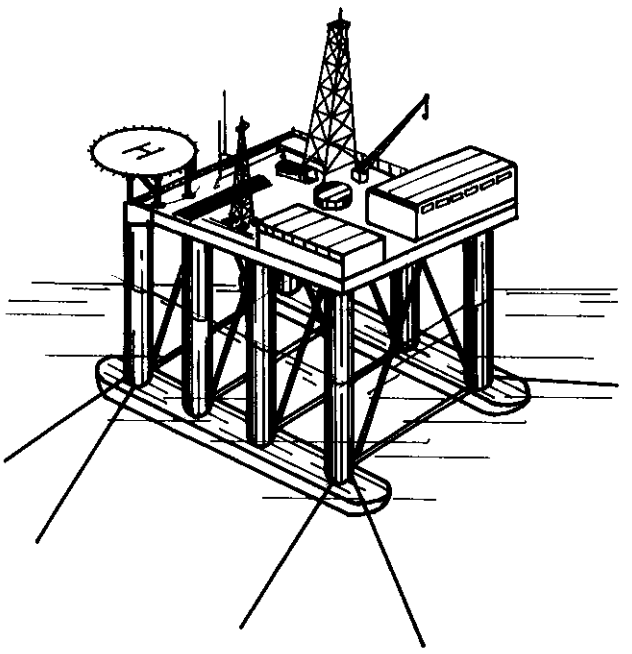


Fig. I-2_Plataforma semi-submersivel

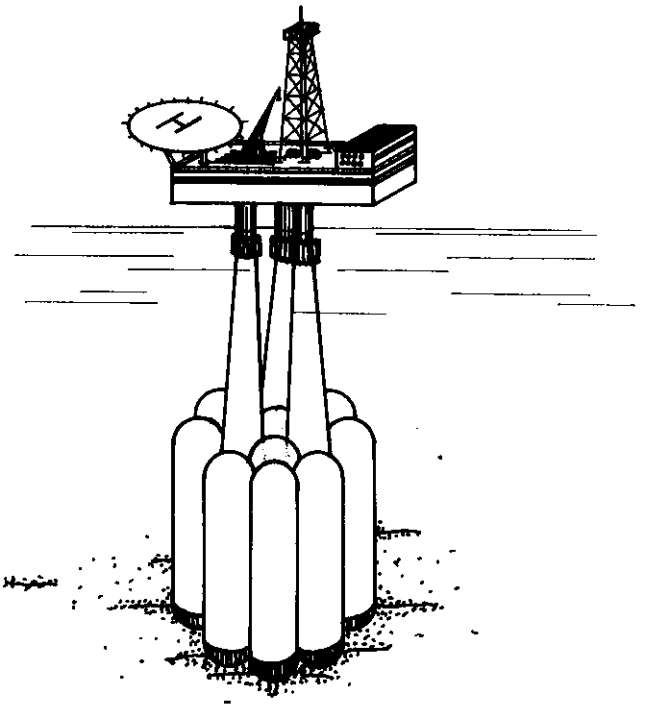


Fig. I-3_Plataforma gravitacional tipo "Condeep"

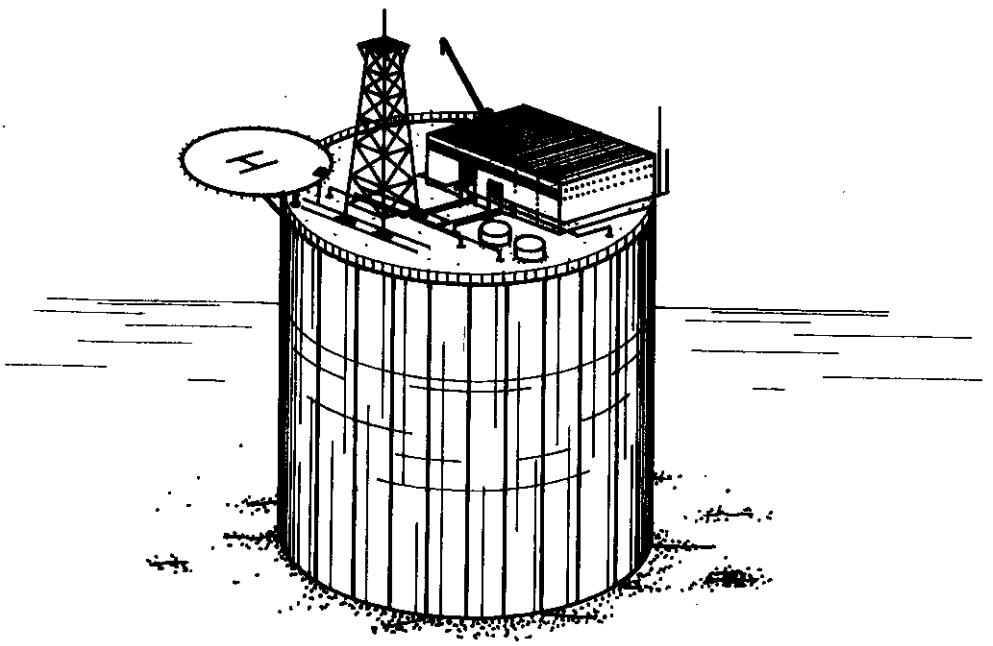
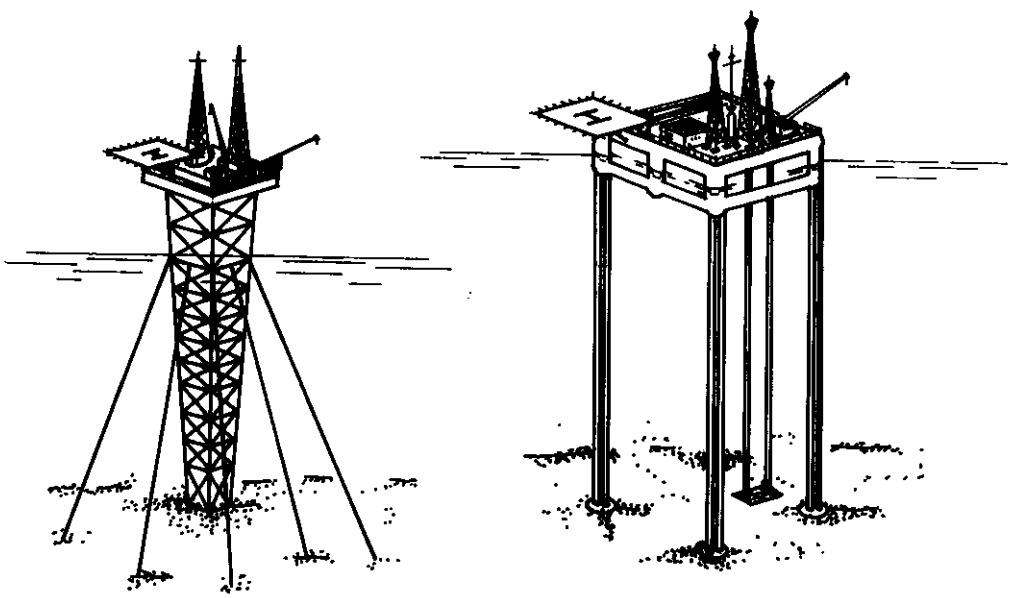


Fig.I-4_Plataforma tipo ilha artificial



(a)Torre estaiada (b) T L P

Fig.I-5_Plataformas móveis

um projeto de uma estrutura que seja, também, móvel (flutuante).

Ou seja, a determinação das cargas de onda se torna mais difícil quando se está num caso no qual não se possa utilizar a formulação de MORISON (34).

I.2 - O Problema das Estruturas de Grande Volume

Quando a dimensão característica da estrutura torna-se uma parcela considerável do comprimento de onda, não se pode desprezar a perturbação que esta causa no fluxo da onda incidente.

Nestes casos, os efeitos viscosos são desprezíveis frente aos gravitacionais, isto é, ficam restritos a pequenas regiões onde haja mudanças bruscas na geometria.

Então, usando-se a teoria da difração, que pode ser deduzida da teoria de escoamentos potenciais, obtem-se a função distribuição de pressões. A avaliação das forças e momentos é feita através de integrações desta função sobre a superfície do corpo.

Há duas maneiras de se resolver o Problema de Valor de Contorno (PVC) associado a este fenômeno hidrodinâmico.

Uma delas é através de métodos analíticos, que consistem em encontrar funções que representem os movimentos da onda e consequentemente a distribuição de pressões em torno do corpo submerso. Estes métodos apresentam uma maior dificuldade para o desenvolvimento das equações, porém, conso-

mem pouquíssimo tempo de computador. Suas aplicações, no entanto, ficam restritas a objetos de geometria simples, tais como cilindros circulares, quebra-ondas, hemisférios repousando no fundo, etc.

A outra maneira de resolver este PVC é através de métodos numéricos, como por exemplo o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Os métodos numéricos, geralmente, podem resolver o PVC para qualquer objeto de formas arbitrárias, porém consomem mais tempo de computador que os métodos analíticos.

Para se conseguir análises mais eficientes desenvolvem-se formulações particulares, como as axissimétricas e bi-dimensionais, que porém ficam restritas a determinadas configurações geométricas.

Pois, para muitas estruturas offshore, como dutos submarinos, quebra mares e cilíndros verticais, uma análise completa tri-dimensional torna-se anti-econômica. Por outro lado, ainda com o objetivo de reduzir o esforço computacional, foram desenvolvidas técnicas que aproveitam a simetria de carregamento, otimizando o tempo necessário para a formação das matrizes e diminuindo a dimensão do sistema a ser resolvido.

O MEC, como será mostrado, é uma técnica numérica que consiste, basicamente, na transformação da equação diferencial parcial que governa o problema, relacionando as variáveis em toda a região, em uma equação integral relacionando somente os valores das variáveis nos contornos do meio fluido; esta equação integral é, então, discretizada e resol-

vida numericamente. A técnica é muito eficiente para a determinação da solução do problema de interação fluido-estrutura, já que os valores de interesse podem ser avaliados somente na superfície da estrutura.

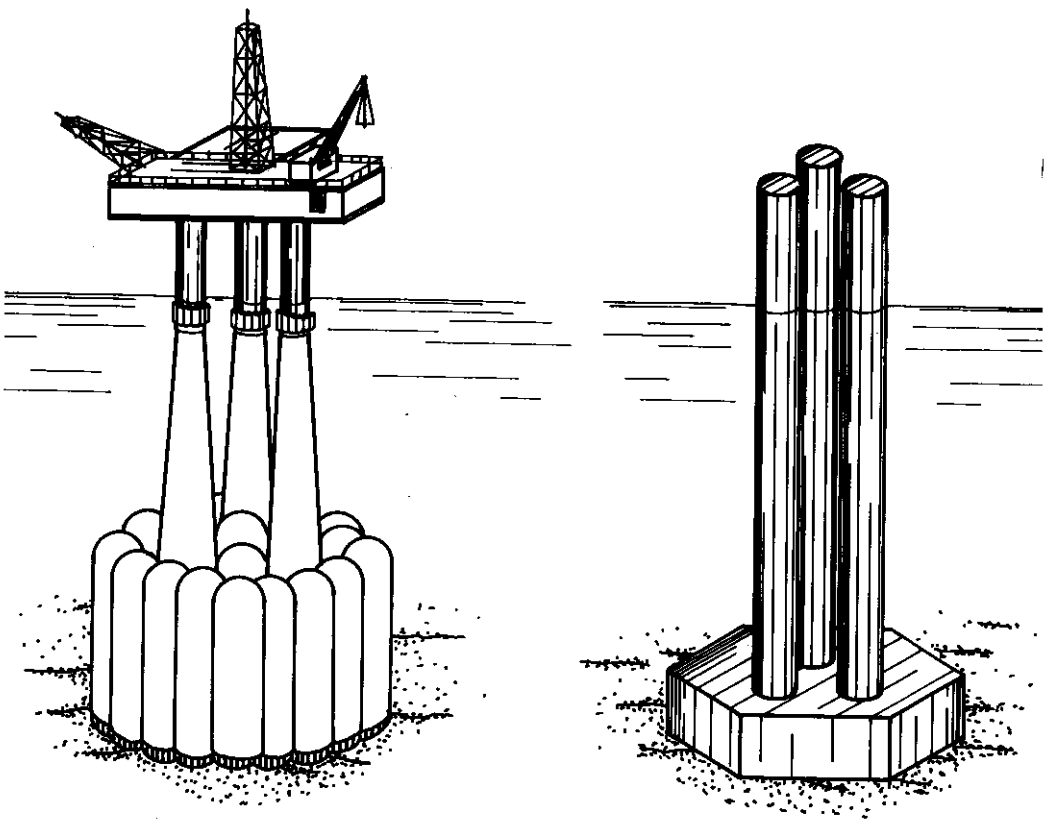
Uma investigação cuidadosa do fenômeno de difração pode ser achada em SARPKAYA e ISAACSON (1981) (1), onde o problema geral tridimensional é discutido juntamente com outras configurações mais simples, dando-se ênfase à, assim chamada, formulação indireta do método dos elementos de contorno, a qual emprega uma distribuição de fontes fictícias de densidade desconhecida ao longo da superfície da estrutura.

Com esta motivação, foi desenvolvida esta dissertação que apresenta aplicações da formulação direta do método dos elementos de contorno para resolver o problema da difração de ondas em obstáculos fixos submersos, usando uma aproximação bi-dimensional e sendo deduzida a partir da formulação geral dos resíduos ponderados.

A primeira formulação desenvolvida pode calcular as forças de onda sobre pilares ou grupo deles, apenas com a discretização do seu contorno transversal. Assim, foi possível testar a influência nas forças do efeito de grupo, as reduções do tempo de execução devido às considerações de simetria geométrica e de carregamento e, também, verificar a convergência do método em função das várias geometrias da seção.

Desenvolveu-se a segunda formulação ao notar-se que algumas estruturas consideradas não-esbeltas eram formadas, geralmente, por uma base plana da qual nascem uma ou mais colunas, ou seja, são as plataformas gravitacionais do

do tipo "Condeep" - e que o primeiro programa não poderia ser usado para este caso (ver figura I.6).



(a) plataforma gravitacional

(b) modelo aproximado

Figura I-6

Convencionalmente, este problema vem sendo resolvido através de programas gerais tri-dimensionais, que permitem a análise independentemente da geometria do corpo.

Estes programas gerais, de acordo com o método adotado, podem exigir uma discretização completa do contínuo ou de todos os seus contornos, ou, ainda, a utilização de funções bastante complexas. Assim, acabam por acarretar a formação de uma malha extensa de elementos e/ou consumirem um tempo computacional excessivo, o que pode não ser desejado nas fases preliminares de um determinado projeto.

Assim, através da aplicação do MEC à sub-regiões do meio fluido, conseguiu-se desenvolver um novo programa que seria capaz de resolver este problema e também os seus casos limites, que são os pilares indo do fundo à superfície, com seções transversais constantes e o tronco de pilar totalmente submerso (ver Figura VI.2), através de uma aproximação bi-dimensional de fácil discretização e consumindo pouco tempo computacional.

Os resultados numéricos foram apresentados de forma a mostrar a aplicabilidade do método para o projeto hidrodinâmico preliminar de estruturas "offshore" dos tipos ilha artificial, plataformas gravitacionais, e a parte imersa de certos tipos de semi-submersíveis.

II - REVISÃO DOS CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE HIDRODINÂMICA

Este capítulo se destina à revisão de alguns conceitos e hipóteses básicas da hidrodinâmica, necessários para se estabelecer a equação de LAPLACE, como a equação que governa os meios fluidos, e também à expressão da equação de BERNOULLI para determinação das pressões.

II.1 - Equações do Movimento

Quando estudamos problemas da mecânica dos meios contínuos pela descrição Euleriana, a primeira definição que aparece é a de derivada substantiva, cujo operador pode ser apresentado como:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{U}$$

onde,

D/Dt	é a derivada substantiva
$\vec{U}$	é um vetor genérico
$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$	é o operador gradiente

Ao aplicar-se a derivada substantiva à velocidade $\vec{q}$ da partícula fluida, obtem-se a aceleração substantiva, que consiste da aceleração local, devido à mudança de velocidade em um dado ponto com o tempo, e a aceleração de convecção devida à translação. Assim, na forma vetorial, pode-se formular a seguinte equação:

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{q} \qquad \text{(II.1)}$$

onde,

$\vec{q} = (u, v, w)^T$ é o vetor velocidade.

Tomando-se o equilíbrio das forças atuantes no volume de controle fundamental e o conceito de que as tensões viscosas são proporcionais à razão de variação no tempo da deformação angular, através de um desenvolvimento análogo as das leis de Hooke para corpos sólidos conforme referência (2), pode-se chegar a expressão:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{q} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p + \rho gh) + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{q} \qquad \text{(II.2)}$$

onde,

- $-gh$ é o potencial gravitacional
- p é a pressão no meio fluido
- ν é a viscosidade cinemática do fluido
- ρ é a densidade do fluido.

A equação acima é conhecida como a *equação de Navier-Stokes*, na qual a principal hipótese assumida é que o fluido imediatamente adjacente à superfície do corpo e a própria superfície têm a mesma velocidade. Assim, conclui-se que a equação de Navier-Stokes é uma aplicação direta da Lei de

Newton a sistemas contínuos.

Considerando-se a hipótese de fluido incompressível, o balanço de vazões em um elemento de controle fundamental fornece:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \qquad \text{ou,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{(II.3)}$$

que é conhecida como *equação da continuidade para fluidos incompressíveis*.

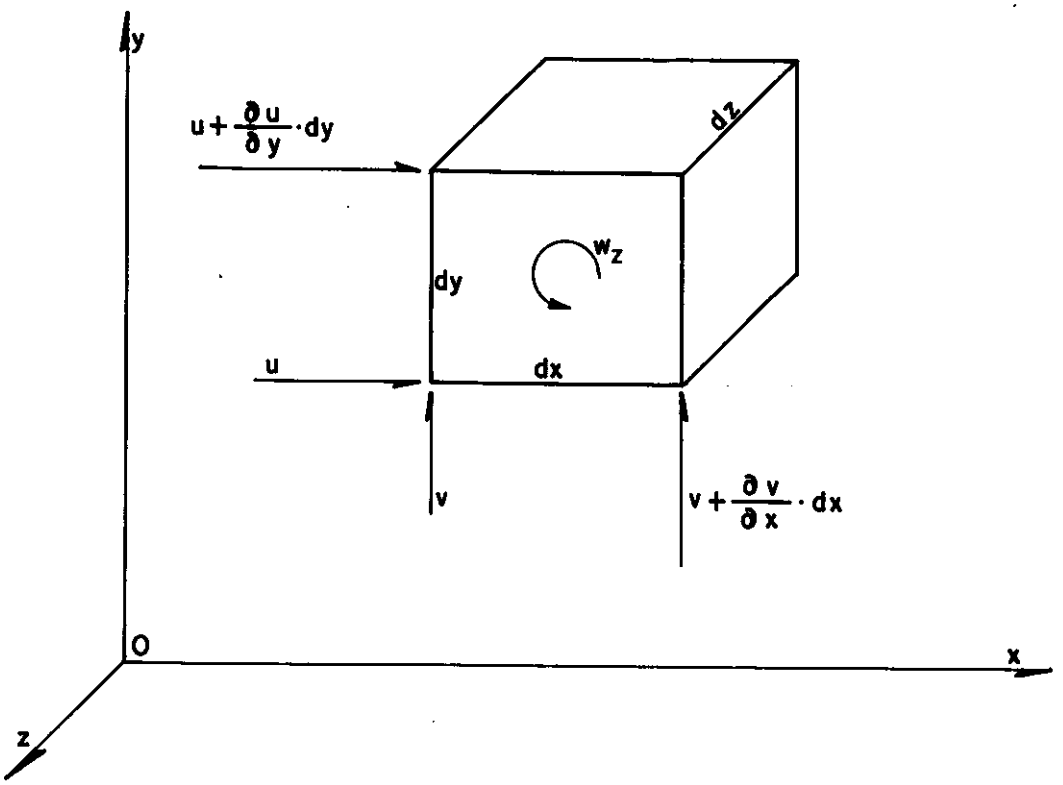
Outro conceito fundamental é o de *escoamento rotacional e irrotacional*, cuja definição, baseada na rotação da partícula fluida, pode ser expressa matematicamente usando-se o vetor velocidade $\vec{q}$ e suas derivadas espaciais, como se vê a seguir.

Diz-se que um escoamento é irrotacional quando o movimento de um elemento infinitesimal num meio fluido, bem como o de todos os outros elementos, tiver velocidade angular em torno de si próprio nula.

Considerando-se deslocamentos infinitesimais, o ângulo em radianos é aproximado pela tangente e tem-se:

$$wz = \frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy}{dy} + \frac{\frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx}{dx} \right) \therefore$$

$$wz = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



Analogamente, para as outras direções, teremos:

$$wy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$wx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Ou seja, o vetor rotação $\vec{w}$ é definido como

$$\vec{w} = (wx, wy, wz)^T$$

ou,

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \text{ rot } \vec{q}$$

ou, ainda

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{q}$$

onde o operador "x" representa um produto vetorial.

Assim, a condição de irrotacionalidade pode ser expressa como:

$$\vec{w} = \vec{0}$$

ou,

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Nota-se que a irrotacionalidade não implica necessariamente em um fluido invíscido pois, conforme o regime, na ausência de forças cortantes associadas com o movimento relativo entre as partículas, um fluido real poderia apresentar um escoamento irrotacional.

Assumindo-se a hipótese de fluido invíscido, a

ausência de viscosidade implicaria na inexistência de atrito entre as camadas do fluido e, em geral, na impossibilidade de rotação das partículas, chegando-se assim à condição de irrotacionalidade.

II.2 - O Potencial de Velocidade

Como visto anteriormente, se o escoamento for irrotacional, o vetor rotação é nulo, implicando nas equações (II.4).

Com estas condições, é possível achar uma função escalar Φ (x, y, z, t), contínua e diferenciável, tal que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v \qquad \text{(II.5)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = w$$

A esta função Φ, assim definida, dá-se o nome de função potencial de velocidades.

A introdução das velocidades, definidas em termos da função potencial Φ, na equação da continuidade (II.3) fornece:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

ou

(II.6)

$$\nabla^2\Phi = 0$$

que é conhecida por *equação de Laplace*.

A unicidade da solução da equação de Laplace é garantida unicamente pelas condições de contorno, uma vez que uma característica essencial do fluxo irrotacional é que ele representa a resposta instantânea do fluido, não influenciado pela sua história prévia.

A solução da equação de Laplace para meios fluidos necessitará da definição de condições de contorno cinemáticas para simular as superfícies em contato com o fluido, condição de fluxo se propagando para o infinito e da superfície livre, cuja definição necessitará ainda de uma condição de contorno dinâmica. Estas condições serão desenvolvidas no capítulo IV.

A solução de tal equação, sujeita a certas condições de contorno físicas, dependendo da geometria, pode-se tornar inviável analiticamente, Assim sendo, faz-se uso de diversos métodos numéricos, tais como diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno, etc.

II.3 - Cálculo das Pressões

Desprezando-se os efeitos da viscosidade, $\nu = 0$,

as equações de Navier-Stokes (II.2) reduzem-se à:

$$\frac{D}{Dt}\vec{q} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho gh)$$

onde se considera a pressão hidrodinâmica e a pressão hidrostática.

Desenvolvendo a equação vetorial acima, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho gh)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(p + \rho gh)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho gh)$$

Introduzindo-se a condição de irrotacionalidade,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0$$

conclui-se que a função

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gh$$

não depende das coordenadas x, y, z, logo,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + g\, h = F(t) \qquad \text{(II.7)}$$

onde

$$q^2 = |\vec{q}|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2$$

p - pressão hidrodinâmica

h - profundidade do ponto em análise, que no caso de se assumir o eixo z com origem na linha de nível médio do mar e apontando para baixo, coincide com a própria coordenada z do mesmo.

F(t) - função que depende unicamente do tempo.

Nota-se na equação (II.7) que o lado esquerdo desta tem, para um determinado instante de tempo, o mesmo valor para qualquer ponto (x, y, z) da região cujo regime seja irrotacional.

Num regime permanente, isto é,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

tem-se

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{constante}, \qquad (II.8)$$

que é conhecida como *equação de Bernoulli*.

Convém observar que a expressão acima é idêntica à usada para escoamento permanente e rotacional, desde que os cálculos das pressões sejam feitos para pontos sobre a mesma linha de fluxo.

III - FORÇAS DE ONDA SOBRE ELEMENTOS DE GRANDE VOLUME

Este capítulo se destina a comentar as hipóteses assumidas para o desenvolvimento da teoria potencial, bem como a acompanhar o equacionamento do PVC associado.

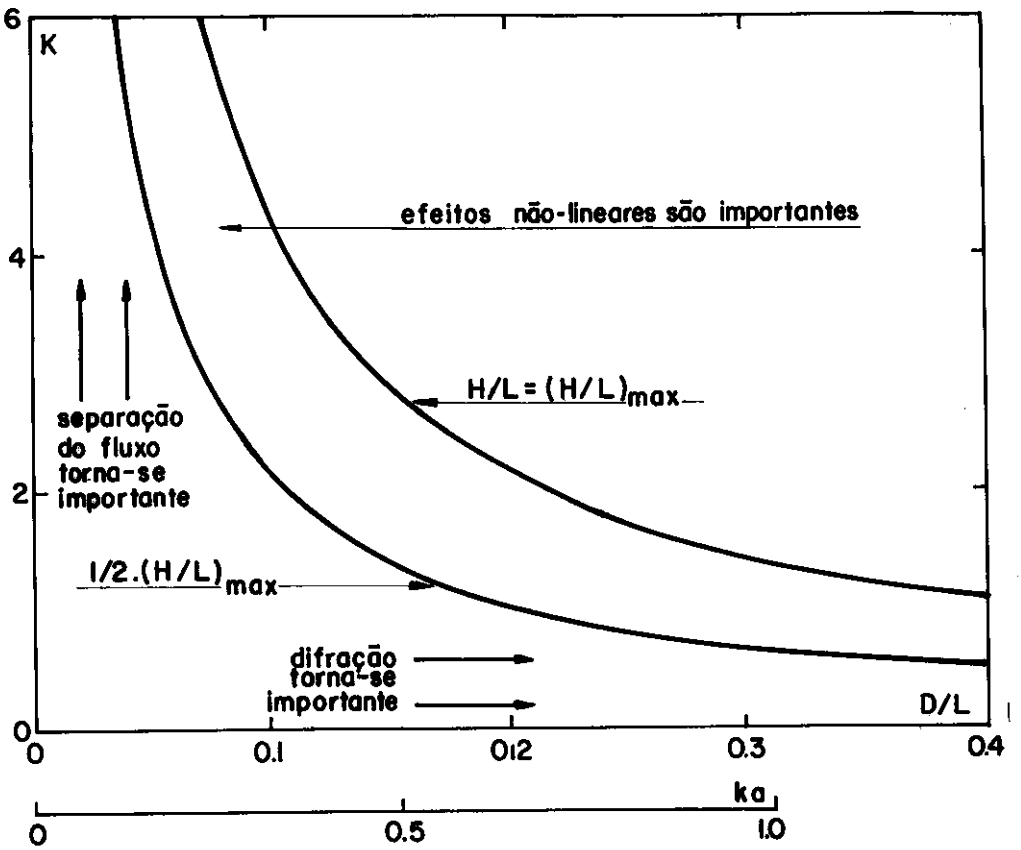
III.1 - Escolha do Regime de Carga

A aplicação da equação de MORISON (34) está fundamentada na hipótese de que a presença do elemento não perturba o campo de velocidades e acelerações da onda incidente.

Como se vê, o coeficiente que exprime esta relação é D/L, onde D é uma dimensão característica da estrutura e L é o comprimento da onda. Assim, a formulação de MORISON se aplica aos casos em que D/L é suficientemente pequeno; ou seja, o corpo é considerado esbelto quando $D/L \leq 0.2$.

Para estes casos, os efeitos de difração são desprezíveis. Porém, a separação do fluxo é importante e os parâmetros que apresentam um melhor significado físico são os números de Reynolds e de Keulegan-Carpenter. Este último representa uma medida do deslocamento horizontal da partícula em relação a dimensão característica da estrutura.

A figura III.1, tomada de SARPKAYA (1), fornece uma indicação conveniente das condições sob as quais difração, separação de fluxo e efeitos não-lineares podem ser importantes, no caso específico de cilindros verticais de seção circular.

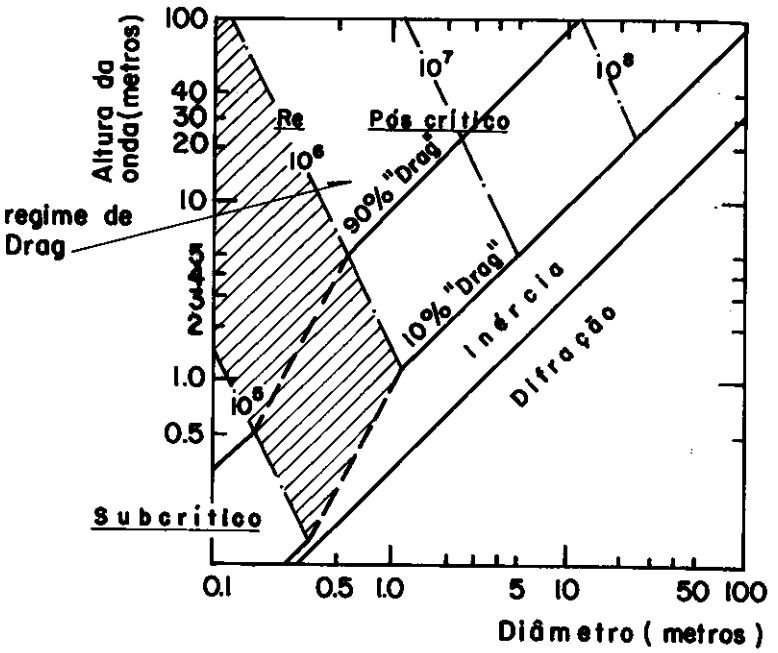


Número de Keulegan-Carpenter : $K = \pi . (H/L)/((D/L).\tanh(kd))$
Máxima declividade da onda: $H/L = 0.14 . \tanh(kd)$

Fig. III-1 _ Regime de carga para cilindros em águas profundas

Nesse problema de interação de ondas com elementos esbeltos, o fenômeno da separação de fluxo domina completamente o comportamento do fluido, porém, não além da vizinhança imediata do elemento. Assim, o trem-de-ondas incidente permanece inalterado.

Existem, também, outras maneiras de se saber qual é o regime de carga que está atuando sobre a estrutura, como pode-se ver na figura III.2, tirada de H.H. PEARWY (1979 Shaw) (15), que dá uma maior ênfase para região de alto número de KEULEGAN-CARPENTER, mostrando como o carregamento se divide em função do arraste e da inércia.



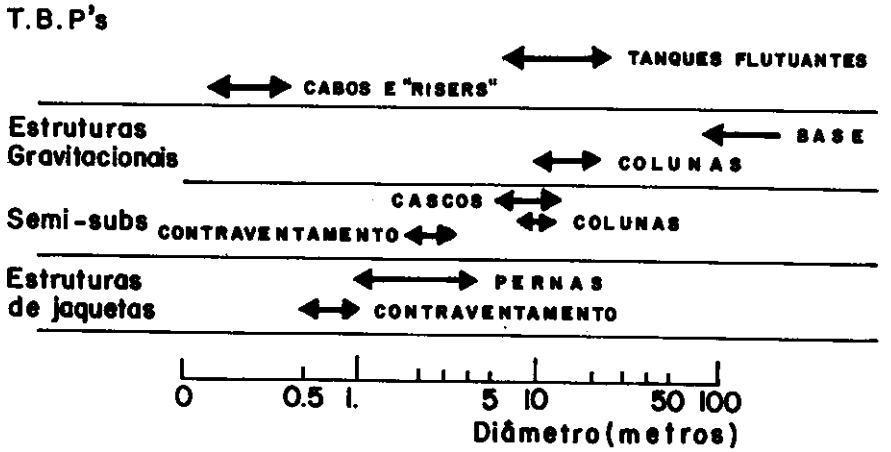


Fig.III-2_Regimes de carga

Estas considerações anteriores sobre elementos esbeltos referem-se unicamente ao fluxo incidente, o qual não é significativamente alterado. Porém, podem existir outros fenômenos tais como efeitos de grupo, onde a presença de outros elementos causa modificações nos coeficientes da equação de MORISON e no próprio campo cinemático, conforme SARPKAYA (1979 T.L. Shaw, p.532) (15).

Quando a dimensão característica da estrutura representa uma parcela significativa do comprimento de onda, a presença do elemento perturba o fluxo incidente através do fenômeno da difração.

Quando se está neste regime, a órbita da partícula fluida torna-se pequena em relação a dimensão principal do corpo, logo os efeitos de separação deixam de existir ou se reduzem a pontos localizados onde há mudanças bruscas na geometria.

Observa-se que ao se alterar a cinemática das partículas, fazendo incidir ondas de um menor comprimento, o coeficiente de inércia Cm tende a diminuir, conforme varia o campo de acelerações ao redor do corpo.

Estes efeitos somados provocam carregamentos menores do que aqueles que seriam previstos pelo equacionamento de MORISON.

Como os efeitos da viscosidade e separação do fluxo ficam restritos à região da camada limite, é usual assumir as hipóteses de fluido invíscido, que implicam em um fluxo irrotacional, como base para o desenvolvimento da teoria potencial, e que as ondas incidentes são lineares (ondas

de Airy), isto é, ondas senoidais de pequena amplitude, que permitem um tratamento matemático mais simplificado.

Uma investigação mais aprofundada deve ser levada avante na análise dinâmica, avaliando as condições de ressonância da estrutura, quando os efeitos de amortecimento viscoso aparecem associados à camada limite independente de haver ou não separação do fluxo.

III.2 - Formulação Geral da Teoria da Difração

Como foi feito no capítulo II, assumindo-se que o fluido seja invíscido, incompressível e o fluxo irrotacional, mostra-se que a equação que rege o comportamento hidrodinâmico é a equação de LAPLACE (II.7),

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

onde Φ é uma função escalar potencial que representa o campo cinemático das partículas no meio fluido.

Para que esta equação represente o problema, deve-se submetê-la a determinadas condições de contorno, com o que este sistema de equações diferenciais passa a se chamar, em linguagem matemática, de Problema de Valor de Contorno (PVC), e que enunciaremos a seguir.

a - *Condição de contorno dinâmica*

Esta condição é obtida aplicando-se a equação de BERNOULLI (II.8) na superfície livre do fluido, onde a pressão do fluido deve se igualar à pressão atmosférica, logo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g \zeta = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

em $z = \zeta (x,y,t)$

onde

$\Phi = \Phi (x,y,z,t)$: é o potencial de velocidades

b - Condição de contorno cinemática

Nesta condição, o movimento tem que ser tal que as componentes das velocidades das partículas e da própria superfície, na direção normal, sejam as mesmas naquele ponto e naquele instante. Ou seja, sendo a equação da superfície dada por:

$$S(x,y,z,t) = \zeta(x,y,t) - z = 0$$

tem-se que

$$\frac{D}{Dt} S = 0$$

logo

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mu \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

que é a equação de contorno cinemática em $z = \zeta$.

c - *Condição de impermeabilidade*

Na condição de impermeabilidade, supõe-se que o fluido não passa através das superfícies que estão em contato e, mais do que isso, que não haja descolamento do fluxo.

Assim, aplica-se uma condição cinemática para o fundo, o qual considera-se plano, e para os obstáculos, que impõe que a velocidade normal das partículas seja a mesma que a das superfícies que estão em contato com o meio fluido, logo:

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{V}_b \cdot \vec{n} \qquad \text{(III.3)}$$

onde

$\vec{q}$ - velocidade das partículas fluidas

$\vec{V}_b$ - velocidade da superfície dos corpos

$\vec{n}$ - normal externa à superfície

Para as superfícies fixas, tem-se

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$$

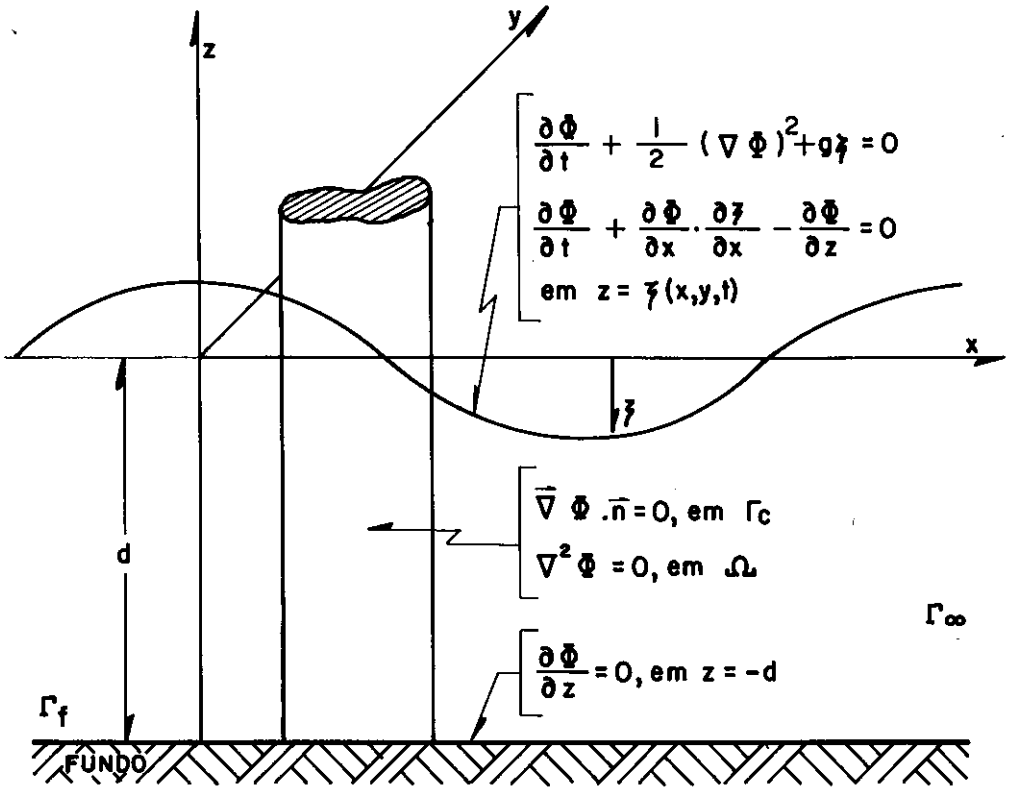
donde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ no fundo, } z = -d \qquad \text{(III.4)}$$

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ para um corpo qualquer obstruindo o fluxo} \qquad \text{(III.5)}$$

Estas condições de contorno estão ilustradas na figura III.3,

onde está definido também o sistema de coordenadas que será adotado neste texto.



Ω : meio fluido (espaço em R^3)
Γ_c : superfície de contorno do corpo
d : profundidade média do mar
$\Phi = \Phi(x,y,z,t)$: potencial de velocidades
$\hat{n}$: normal externa ao corpo
Γ_f : superfície do fundo
Γ_∞ : superfície de contorno infinitamente distante do corpo em questão

Fig.III-3_Condições de contorno

O conjunto formado por estas equações de contorno e a equação de LAPLACE, é o que chamaremos de Problema de Valor de Contorno (PVC).

d - Linearização do problema de valor de contorno

No capítulo anterior, foi formulado o PVC não linear, o qual transcrevemos abaixo:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

em Ω (meio fluido)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 1/2\ (\nabla\Phi)^2 + g\ \zeta = 0$$

em $z = \zeta$ (superfície livre)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

em $z = \zeta$ (superfície livre)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

em $z = -d$ (superfície do fundo)

$$\vec{\nabla\Phi} \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

em Γ_c (superfície do corpo)

Se às hipóteses de fluido invíscido, incompressível e movimento irrotacional acrescentar-se a hipótese do trem de ondas incidente ser senoidal de amplitude infinitesimal (onda de AIRY, com aplitude muito menor que a profundidade), pode-se linearizar o PVC, eliminando-se os termos de $2^{\underline{a}}$ ordem, conf. (1).

Isto também pode ser feito, considerando-se as expansões em torno do ponto $z = 0$, por série de TAYLOR, para as diversas parcelas que formam as condições em $z = \zeta$, (3), e apanhar os termos de $1^{\underline{a}}$ ordem em ζ.

Assim, o PVC linearizado será:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

em Ω (meio fluido)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = 0$$

em $z = 0$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{(III.7)}$$

em $z = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

em $z = -d$ (fundo)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} = 0$$

em Γ_c (superfície do corpo)

Este ainda pode ser simplificado unindo-se as duas condições para $z = 0$ numa única. Então,

$$\nabla^2\Phi = 0$$

em Ω (meio fluido)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$$

em $z = 0$ (superfície livre)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$$

em $z = -d$ (fundo)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

em Γ_c (superfície do corpo)

III.3 - Introdução do Conceito de Potencial Reduzido - Equação de HELMHOLTZ

Uma grande simplificação pode ser feita se o problema permitir considerar a seguinte separação de variáveis

$$\Phi(x,y,z,t) = A \cdot \phi(x,y) \cdot f(z) \cdot e^{-iwt} \qquad \text{(III.9)}$$

onde

$A = \frac{-i\ g\ H}{2w}$ - é uma constante, que pode ser introduzida sem perda de generalidade.

$f(z) = \frac{\cosh\left[k(z+d)\right]}{\cosh\left[kd\right]}$ - representa uma variação hiperbólica com a profundidade

e^{-iwt} - é a dependência harmônica do tempo

$\phi(x,y)$ - potencial reduzido bi-dimensional

Substituindo (III.9) em (III.8), tem-se:

$$\nabla^2\phi + k^2\,\phi = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega$$

que é a conhecida *EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ*, sujeita as condições de contorno:

1º - C.C. linearizada na superfície livre, $z = 0$

$$-A.\phi.f(z)\Big|_{z=0} w^2\ e^{-iwt} + g.\ A.\ \phi.\ \frac{\partial f(z)}{\partial z}\Big|_{z=0} e^{-iwt} = 0$$

$$-Aw^2\,\phi + Ag\,k\,\tanh(kd)\,.\,\phi = 0$$

$$\phi\,.\left[-w^2 + g\,k\,\tanh(kd)\right] = 0$$

$$\therefore\ \frac{w^2}{g} = k\,\tanh(kd)$$

que é a *RELAÇÃO DE DISPERSÃO*.

2º - C.C. no fundo do mar, $z = -d$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = A.\ \phi.\ k.\ \frac{\sinh\left(k\ (z+d)\right)}{\cosh\ (kd)}\Bigg|_{z\ =\ -d} e^{-iwt} = 0$$

pois,

$$\sinh\ (0) = 0$$

que é automaticamente satisfeita.

3º - C.C. na superfície de corpos fixos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\phi\ .\ \vec{n} = 0 \quad , \quad \text{em} \quad \Gamma_c$$

se o corpo tiver seção transversal constante ao longo da profundidade, onde $\vec{n} = \left(nx,\ ny,\ 0\right)^T$ seria a normal.

Sob estas hipóteses, o sistema (III.8) torna-se

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0, \quad \text{em} \quad \Omega$$

(Equação de Helmholtz)

(III.10)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underset{\sim}{n}} = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma_c$$

(Corpo cilíndrico vertical)

onde os coeficientes w, k e d devem obedecer à *relação de dispersão*.

$$\frac{w^2}{g} = k \tanh \left(kd\right)$$

Por outro lado, como o problema é linear, ainda pode-se supor que a função potencial total seja constituída da soma de um potencial incidente mais um potencial difratado. Assim,

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_D$$

e, também,

(III.11)

$$\phi = \phi_I + \phi_D$$

onde, o potencial da onda incidente Φ_I, conforme SARPKAYA (1), é dado por

$$\Phi_I = A \cdot \phi_I \cdot \frac{\cosh \left(k \cdot (z + d)\right)}{\cosh \left(kd\right)} \cdot e^{-iwt} \qquad \text{(III.12)}$$

onde,

$\phi_I = \phi_I(x,y) = e^{ik(\cos \alpha \cdot x + \text{sen } \alpha \cdot y)}$ é o potencial reduzido bi-dimensional.

α é o ângulo de ataque da onda incidente.

O potencial Φ_I foi montado de forma a satis

fazer à equação de LAPLACE e às condições de contorno no fundo e na superfície livre.

III.4 - Condição de Radiação

Esta condição, que é aplicável ao potencial da onda difratada, é formalmente dada por:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_D}{\partial r} - ik\, \Phi_D \right) = 0 \qquad \text{(III.13)}$$

onde r é a ordenada radial.

É uma condição necessária para obter-se uma única solução para o potencial difratado. Ou seja, existiriam duas soluções viáveis; uma seria o potencial devido às ondas que se aproximassem da estrutura e a outra, que interessa, é devida às ondas que se afastam da estrutura para se anular no infinito. A condição de radiação seleciona esta última solução.

Sem se ater aos rigores matemáticos, pode-se mostrar como a condição de radiação é satisfeita num contorno infinitamente distante do corpo em estudo. SOMMERFELD (17) dá uma abordagem mais precisa e embasada em conceitos matemáticos.

A figura III.4 abaixo define a geometria e a figura III.5 mostra um elemento do contorno externo, Γ_∞.

Por estar infinitamente distante e considerando

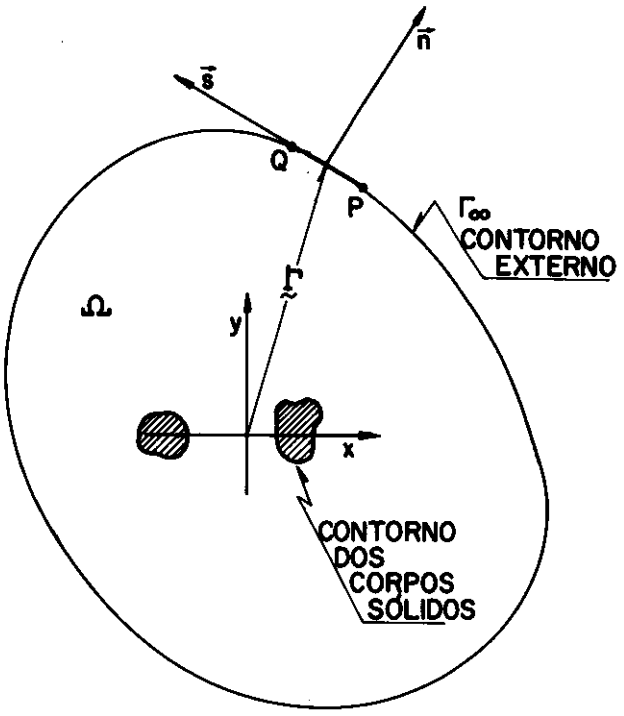


Fig. III-4 _ Definição das regiões e contornos para o estudo da difração

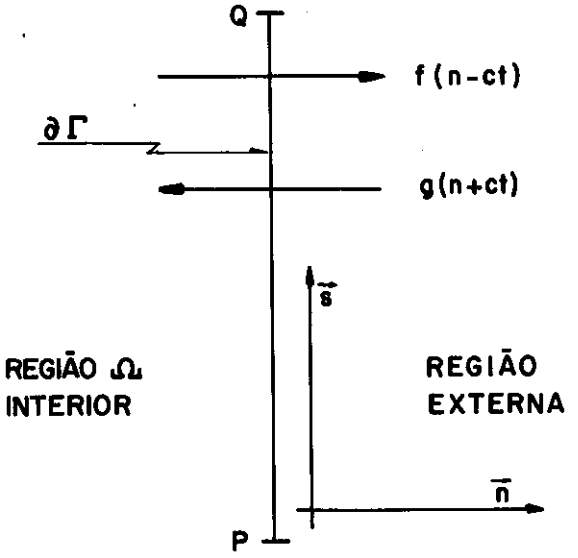


Fig. III-5 _ Elemento linear do contorno externo Γ_∞

o elemento $\partial\Gamma$ suficientemente pequeno, pode-se assumir o potencial difratado Φ_D constante ao longo do elemento e que este se propaga na direção $\vec{n}$ perpendicular ao mesmo.

Como já foi comentado, as duas soluções viáveis, devido à característica do fluxo obedecer à equação de HELMHOLTZ, podem ser agrupadas em uma única, da seguinte forma:

$$\phi_D(\eta, \zeta) = g(\eta) + f(\zeta) \qquad \text{(III.14)}$$

onde

$\eta = n + ct$, representa a onda que entra em Ω

$\zeta = n - ct$, representa a onda que sai de Ω

t , é o tempo, e

$c = \frac{L}{T} = \frac{w}{k}$, celeridade da onda.

Esta substituição é basicamente uma mudança de sistema. Veja, por exemplo, o caso do potencial da onda incidente

$$\begin{aligned} \phi_I &= A \cdot e^{ikn} \cdot e^{-iwt} \\ &= A\, e^{ik(n - \frac{w}{k} \cdot t)} \\ &= A \cdot e^{ik(n - ct)} \end{aligned} \qquad \text{(III.15)}$$

Logo,

$$\phi_I(\zeta) = A \cdot e^{ik\zeta} \qquad \text{(III.16)}$$

Assim, a função $f(\zeta)$ representa uma onda saindo da região Ω, através do elemento $\partial\Gamma$.

A condição de radiação aparece ao excluirmos a solução $g(\eta)$. Logo,

$$g(\eta) = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\Gamma$$

e também,

$$\frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\Gamma \qquad \text{(III.17)}$$

Devido a separação de variáveis, (III.17) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\Gamma \qquad \text{(III.18)}$$

Do cálculo diferencial básico, tem-se que:

$$\eta = n + ct \qquad \text{(III.19)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Aplicando (III.19) em (III.18), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{(III.20)}$$

Como é suposta uma dependência harmônica com o tempo, isto é,

$$\phi(n, t) = \phi(n) \cdot e^{-iwt} \qquad \text{(III.21)}$$

então, usando (III.21) em (III.20), tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - ik\phi = 0 \qquad \text{em} \quad \Gamma_\infty \qquad \text{(III.22)}$$

E, como estamos infinitamente distantes da origem (ver figura III.4), a direção local $\vec{n}$ coincide com a radial global $\vec{r}$, logo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi = 0 \qquad \text{em} \quad \Gamma_\infty \qquad \text{(III.23)}$$

O fator $\sqrt{r}$, que aparece na equação (III.13), é para compensar o espalhamento bi-dimensional da energia da onda.

Ou seja, para um dado elemento $\partial\Gamma$, quanto maior a sua distância da origem, menor a energia que passa por ele.

Assim, para o elemento $\partial\Gamma$, a energia de onda por unidade de comprimento do elemento decresce na proporção

de 1/r, pois a energia que passa por círculos concêntricos de raio r é constante e, assim, as relações de proporcionalidade tornam-se:

$$E_{onda} \alpha 1/r$$

$$E_{onda} \alpha H^2 \alpha \phi_D{}^2 , \qquad \text{(III.24)}$$

$$H\alpha \phi_D \alpha 1/\sqrt{r}$$

A condição (III.23) justifica o fator que aparece na condição de radiação (III.13) e, também, requer que o limite

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \cdot | \phi_D | < \infty \qquad \text{(III.25)}$$

isto é, tenha valor finito.

gura IV.1, como:

$\zeta = \zeta(x)$ - elevação da onda na superfície

H - altura da onda, definida como a distância entre crista e cavado

L - comprimento de onda, que é a distância entre duas cristas sucessivas

T - período de onda, que é o intervalo de tempo entre a passagem de duas cristas sucessivas num determinado ponto

$w = \frac{2\pi}{T}$ - é a frequência angular

$k = \frac{2\pi}{L}$ - é o número de onda

$c = \frac{L}{T} = \frac{w}{k}$ - é a celeridade ou velocidade de avanço do trem de ondas

d - é a lâmina d'água na região

a - grandeza característica da estrutura

g - aceleração da gravidade.

Os parâmetros adimensionais que são normalmente utilizados para caracterizar um trem de ondas e estão definidos a seguir, serão posteriormente usados para se analisar o desenvolvimento básico e a validade de algumas das principais teorias.

Os principais parâmetros adimensionais são:

$H/g\,T^2$ ou H/L - que indicam a *inclinação da onda* para águas profundas.

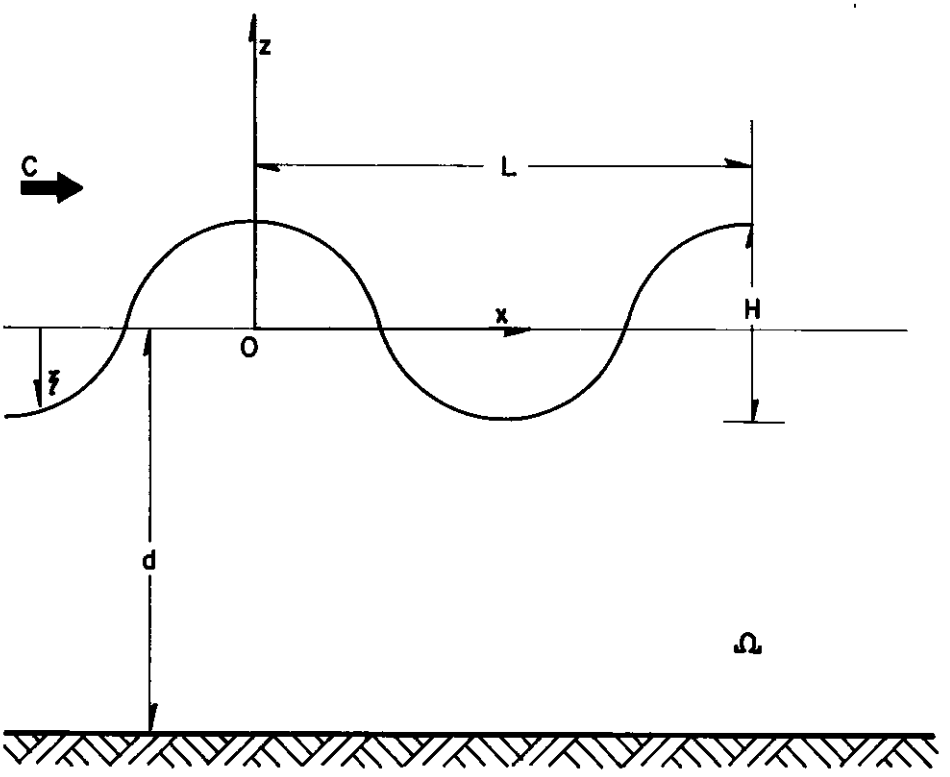


Fig. IV-1 _ Características que definem um trem de ondas num determinado instante

$U_R = \frac{H}{L}\left(\frac{L}{a}\right)^3$ - que também expressa a *inclinação* da onda, porém para águas rasas. É o chamado *número de Ursell* que representa a razão entre as parcelas de 1ª e 2ª ordens.

$d/g\,T^2$ ou kd - que são os chamados *parâmetros de profundidade*.

Assim, uma determinada onda de projeto, caracterizada por H, L e d, poderia ser convenientemente descrita pelos adimensionais H/gT^2 e d/gT^2.

O que caracteriza cada uma das diversas teorias são as hipóteses simplificadoras adotadas no seu desenvolvimento.

Para facilitar o desenvolvimento, aplicam-se os seguintes números adimensionais:

$$\varepsilon = H/d$$

$$\mu = d/L$$

Uma mudança para coordenadas adimensionais, na forma:

$$x = L \cdot X$$

$$z = d\ Z$$

$$\zeta = \frac{H}{2}\ \xi$$

$$t = \frac{L}{\sqrt{gd}}\ t'$$

$$\Phi = \frac{L}{\sqrt{gd}} \cdot g \cdot \frac{H}{2} \Phi$$

aplicada às equações (III.6) do PVC bi-dimensional e não-linear, fornece as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0 \qquad \text{em} \quad Z = -1$$

$$\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{-\varepsilon}{\mu^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \qquad \text{em} \quad Z = \frac{\varepsilon}{2} \xi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}^2 + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Z}^2 \right) + \xi = 0 \qquad \text{em } Z = \frac{\varepsilon}{2} \xi$$

(IV.1)

cujo sistema fornece uma indicação das simplificações que poderão ser adotadas.

Assim, pode-se distinguir três casos:

1º - *Ondas de pequena amplitude*

μ é na ordem de grandeza de 1, logo $\varepsilon = \frac{H}{2d} \cong \frac{H}{2L} <<< 1$ é de ordem muito inferior a 1.

Esta simplificação sugere uma solução do tipo $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Phi^{(n)}$ que é basicamente o esquema proposto

por *Stokes*.

2º - *Ondas de amplitude finita em águas rasas*

Quando ε é na ordem de 1 e $\mu = \frac{d}{L} <<< 1$, isto é, é de ordem muito inferior a 1, que sugere uma solução do tipo

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{2n} \Phi^{(n)}.$$

3º - *Ondas relativamente longas, fracamente não-lineares em águas rasas*

Quando ε é na ordem de μ^2 e μ é de ordem inferior a 1, a solução sugerida é do mesmo tipo que a do segundo caso. Estes dois últimos casos de simplificações servem para o entendimento das teorias de águas rasas e intermediárias como a *cnoidal* e *solitária*.

IV.2 - Critérios de Validade das Principais Teorias de Onda

a - Introdução

O problema da seleção da teoria de onda mais apropriada aparece frequentemente no projeto de estruturas offshore, uma vez que, especificadas as características principais da onda, como o período (T), a altura (H) e a profundidade da região (d), a escolha da teoria de onda dependerá das variáveis de interesse no cálculo. Por exemplo, se a variável de interesse fosse apenas o perfil da onda, a teoria escolhida poderia ser diferente se estivéssemos interessados apenas na avaliação das forças.

Outro aspecto importante é que para as análises

preliminares de um determinado projeto, usa-se a teoria linear que pode fornecer um bom resultado com um mais baixo esforço computacional.

Há também, em alguns casos, a recomendação das sociedades classificadoras, para que os cálculos sejam feitos por mais de uma teoria para possibilitar posteriores análises comparativas.

b - Apresentação breve das teorias mais usadas

A solução mais elementar para o problema é a teoria linear de AIRY (1). Sua validade é restrita aos casos em que a altura de onda é relativamente pequena em comparação com o comprimento de onda e a profundidade, isto é, H/L e $H/d \ll 1$.

Já quando a altura de onda tem uma dimensão finita, os efeitos não lineares não podem ser mais desprezados. Assim, STOKES (4) desenvolveu uma teoria baseada em séries trigonométricas para ondas de amplitude finita, cuja validade se restringe à águas intermediárias e profundas. A tabela IV.1, resume as hipóteses assumidas no desenvolvimento das teorias de AIRY e STOKES.

Uma apresentação das teorias de STOKES é feita em SARPKAYA (1), onde podemos observar que, devido as faixas de aplicação, têm especial importância as de 1ª e 5ª ordens.

Seguindo a solução proposta por STOKES, muitos autores apresentaram tratamento numérico do problema. Devido à grande quantidade de cálculos exigidos, muitos trabalhos

apresentam erros.

Mais recentemente SKJELBREIA e HENDRICKSON (5) e CHAPPELEAR (6) apresentaram as equações completas para a teoria de STOKES de 5ª ordem.

Para o desenvolvimento da teoria de onda solitária, que se caracteriza por uma simples intumescência sobre o nível de águas tranquilas, com movimento de translação e que aparece em águas rasas, particularmente em canais, é que MCCOWAN (7) introduziu a função potencial complexa na forma de série de potências.

Posteriormente, ainda para águas rasas, apareceu a teoria cnoidal, que difere da onda solitária por seu comportamento periódico. A figura IV.2 apresenta esquematicamente a diferença entre uma onda puramente oscilatória e uma que, como a solitária ou a cnoidal, apresenta transporte de massa.

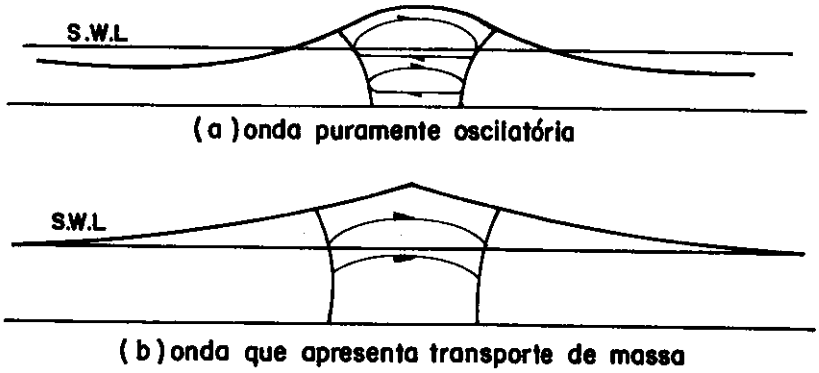


Fig. IV-2_ Diferença entre ondas, quanto ao transporte de massa

Uma solução aproximada para o problema foi apresentada por KEULEGAN e PATTERSON (8) que, juntamente com a de MCCOWAN, apresentaram os melhores resultados quando comparados com os resultados experimentais.

Assim, até o momento, para o tratamento das cargas atuantes sobre estruturas "off-shore", dois grupos de soluções foram apresentados:

1º - para águas intermediárias e profundas, as teorias de STOKES, incluindo naturalmente a de AIRY que é a STOKES de 1ª ordem.

2º - para águas intermediárias e rasas, as teorias Cnoidal e Solitária.

A figura IV.3 abaixo, mostra o perfil de uma onda cnoidal e suas formas limítrofes, que são a solitária, por um lado, e a linear por outro.

Visando uma faixa de aplicação mais ampla, DEAN em 1965 (9) introduziu um método numérico para prever as características de ondas bi-dimensionais, baseado na representação do fluxo por meio da função de corrente ("stream function").

A aproximação proposta fundamenta-se em minimizar o erro que aparece ao tentar satisfazer a condição de contorno dinâmica na superfície, que é a única condição não satisfeita integralmente pela função de corrente na sua forma original.

Mais recentemente, DALRYMPLE (10) e (11) estendeu a teoria de função de corrente para permitir a inclusão de correnteza não uniforme. Também, LAMBRAKOS e BRANNON

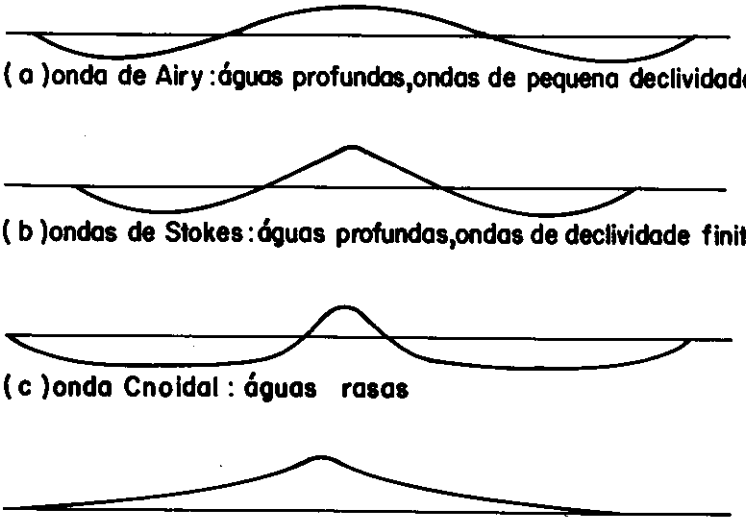


Fig. IV-3 _ Apresentação esquemática dos vários perfis de onda

(12) desenvolveram um método de potencial de velocidades que permite o tratamento de perfis arbitrários de onda que variam durante a sua propagação.

Neste último procedimento, o potencial de velocidades foi desenvolvido em séries duplas de FOURIER cujos coeficientes são determinados pelo método dos mínimos quadrados aplicado às condições de contorno na superfície livre.

Esta técnica é útil para lidar com séries consecutivas de ondas com características independentes.

IV.3 - Comparação e Validade das Teorias de Onda

Antes de se iniciar os comentários sobre as diversas teorias e os critérios usados para a escolha das mesmas, deve-se definir matematicamente os principais limites para o adimensional d/L, ou seja, a razão entre a profundidade e o comprimento de onda. Assim, diz-se que se está em:

1º - Águas profundas:

quando $d/L > 0.5$

onde $\tanh(2\pi\, d/L) \cong 0.996 \cong 1$

2º - Águas intermediárias:

quando $0.5 > d/L > 0.05$ e,

3º - Águas rasas

quando $d/L < 0.05$

onde $\tanh(2\pi\, d/L) \cong 2\pi\, d/L$

A figura IV.4, abaixo ilustra as diferenças que existem na órbita e nas velocidades da partícula para as diversas faixas de profundidade.

Como já foi dito anteriormente, do ponto de vista estritamente teórico, as teorias de onda deveriam ser divididas em dois grupos, de acordo com a sua validade em função da profundidade e da altura.

Assim, as teorias de STOKES, incluindo a 1ª ordem (ou teoria de AIRY) deveriam valer para águas intermediárias e profundas. A ordem a ser empregada dependeria, em águas profundas, da relação H/L e, em águas intermediárias, das relações H/L e H/d ou, em outros termos, do número de URSELL, Ur. Já a teoria cnoidal, tendo como limite a solitária para a região de arrebentação, deveria ser aplicada em águas de intermediárias para rasas.

A dúvida aparece quando se necessita quantificar velocidades e acelerações, a partir de valores para as relações entre profundidade, altura e comprimento de ondas que não tendem assintoticamente para zero.

Assim, fica difícil a escolha da teoria, uma vez que faltam especificações dos limites em águas intermediárias dessas teorias.

A figura IV.5 apresenta uma proposta sobre os limites esperados de validade das diversas teorias, baseado em DEAN (1970) (35), que fez inicialmente a comparação das diversas teorias, usando como critério a aderência dos resultados aplicados à superfície livre, e que chegou à conclusão de

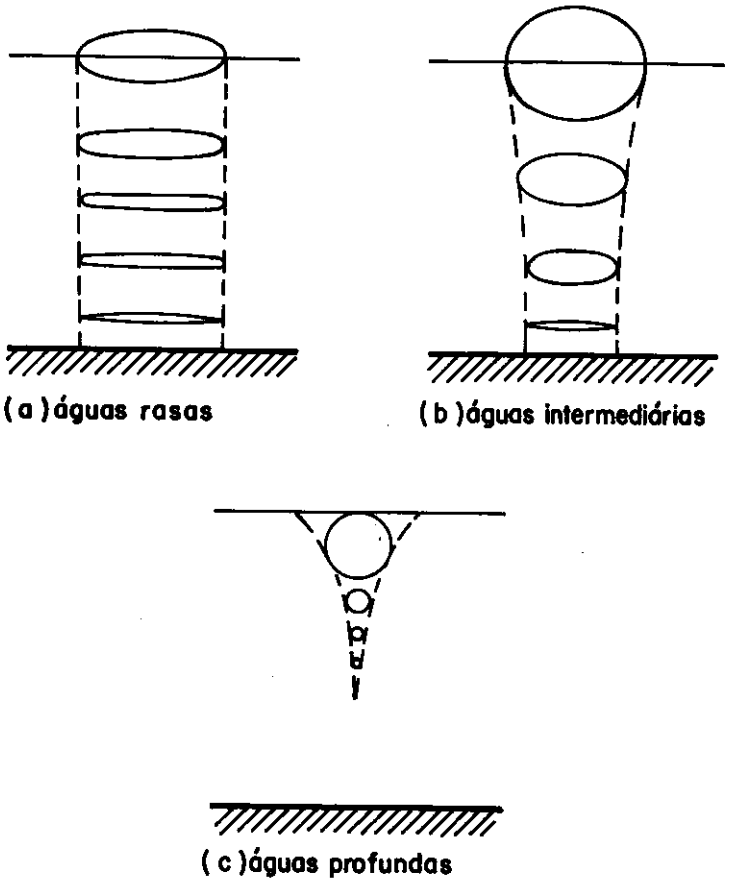


Fig. IV-4 - Órbitas das partículas fluidas em função da profundidade

que para águas rasas recomenda-se a teoria cnoidal e para águas profundas a teoria de Stokes de 5ª ordem.

A figura IV.6 mostra a aplicabilidade das diversas teorias, segundo apresentado por LE MÉHAUTE (3), onde vê-se as faixas de validade para a cnoidal em águas rasas e as diversas ordens da teoria de Stokes em águas profundas, conforme o valor do parâmetro H/L ou H/gT^2.

Como era de se esperar, a "stream function theory" desenvolvida por DEAN (1965) (9), apresenta um campo muito grande de aplicação, deixando porém definidas áreas para a aplicação das teorias cnoidal e Stokes de 1ª e 2ª ordens.

IV.4 - Conclusão

Paralelamente ao fato de a teoria linear de AIRY apresentar uma formulação bastante simples, facilitando os desenvolvimentos das equações que representam o problema da difração, a escolha desta teoria também está fundamentada nos seguintes fatos:

a - a sua faixa de aplicação, segundo os gráficos mostrados por DEAN (1970) (35) e por LE MÉHAUTÉ (1976) (3), é para ondas não muito altas, em águas de profundidade intermediária. Sendo assim, nestes casos poderia ser viável o uso de algumas estruturas gravitacionais, onde as forças de onda seriam avaliadas através da teoria da difração.

b - para as análises preliminares de um projeto de estrutura "offshore" é interessante usar a teoria linear, por fornecer um bom resultado com baixo esforço computacional.

c - há projetos para os quais as Sociedades Classificadoras recomendam que os cálculos das forças ambientais sejam feitos por mais de uma teoria (entre elas a linear) para possibilitar posteriores análises comparativas.

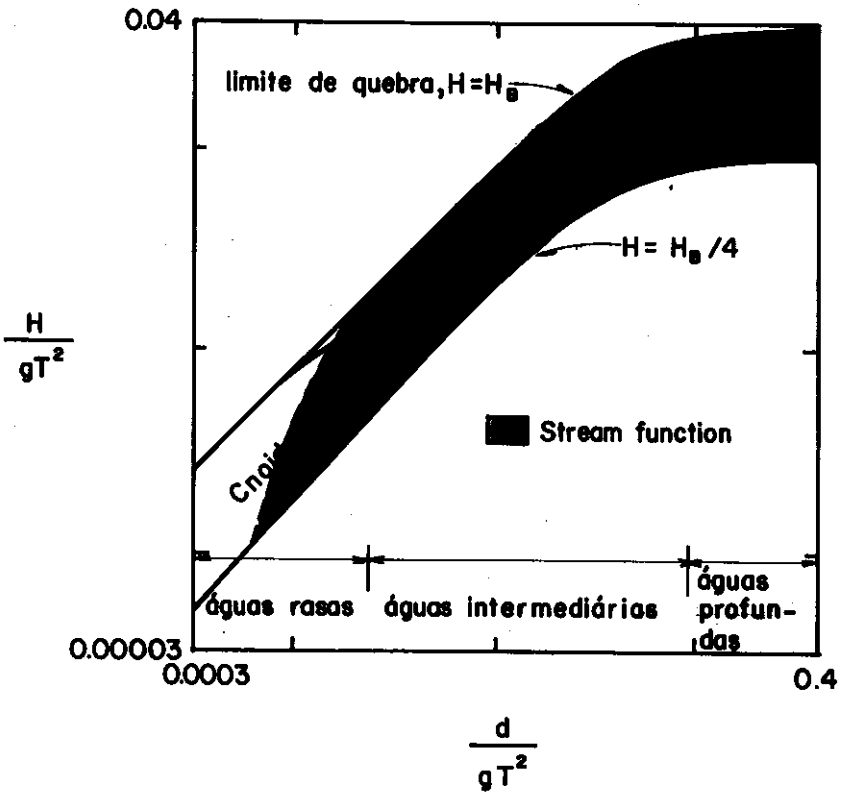


Fig. IV-5 - Campo de utilização das teorias de onda, tendo como critério de comparação a condição de contorno dinâmica na superfície livre

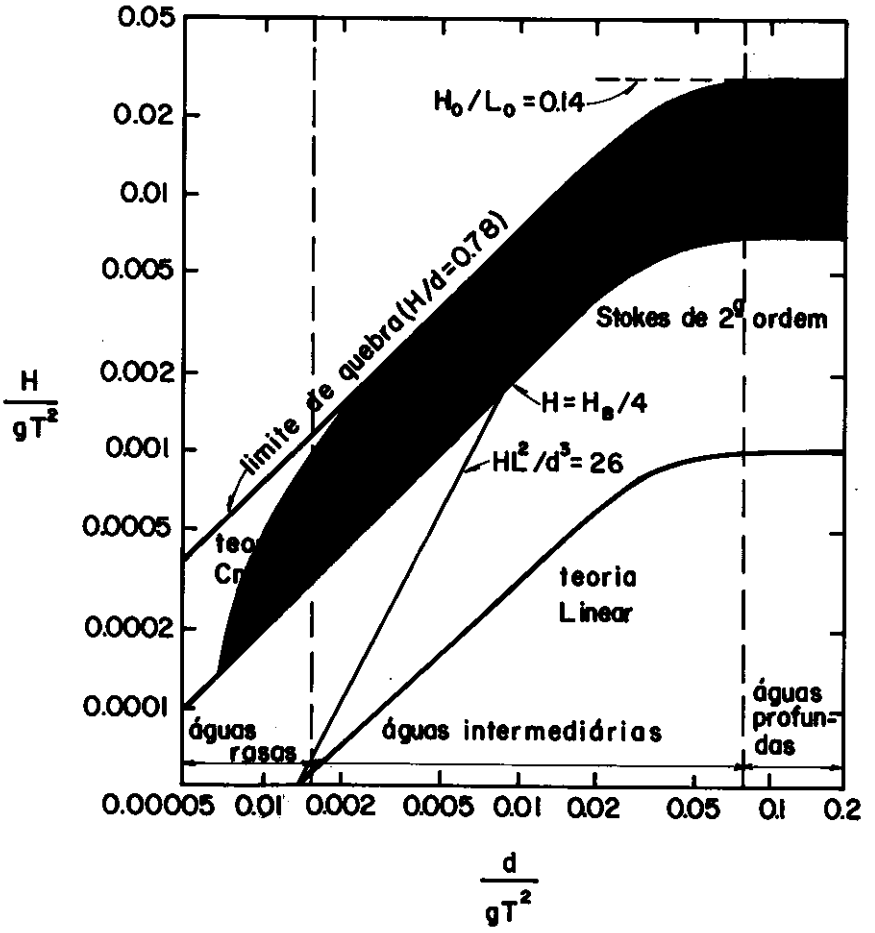


Fig. IV-6_Campo de aplicação de diversas teorias, Le Méhaute (1976) [3]

V - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SOLUÇÃO DO PVC ASSOCIADO

Este capítulo se destina a apresentação do desenvolvimento do método até a formação do sistema linear a ser resolvido para se determinar os potenciais e, consequentemente, as forças de onda sobre cilindros verticais de seção transversal arbitrária, porém constante ao longo da profundidade.

V.1 - Definição do Problema Potencial

Se, conforme descrito no capítulo anterior e ilustrado na figura V.1, considerarmos as seguintes hipóteses:

1 - trem de ondas regulares de Airy
2 - região com profundidade constante
3 - fluido invíscido e incompressível
4 - fluxo irrotacional
5 - obstáculos cilíndricos de seção transversal constante

o PVC que representa este escoamento pode ser descrito pela equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \phi_D + k^2 \phi_D = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \tag{V.1}$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial \underset{\sim}{\eta}} = - \frac{\partial \phi_I}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \qquad \text{em} \quad \Gamma_c \tag{V.2}$$

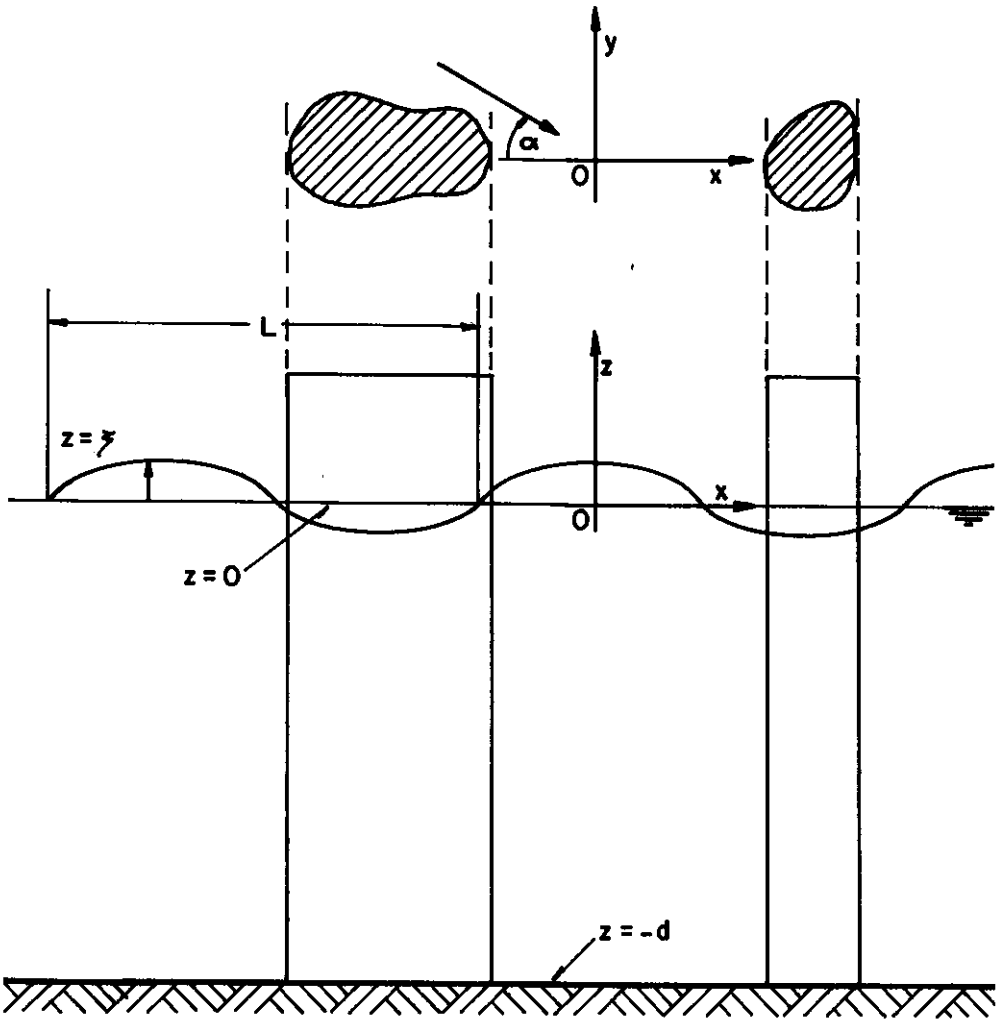


Fig. V-1 _ Definição do problema

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial \eta} - ik\,\phi_D = 0 \qquad \text{em} \qquad \Gamma_\infty \tag{V.3}$$

onde

$\Phi(x,y,z,t) = \Phi_I(x,y,z,t) + \Phi_D(x,y,z,t)$

é o potencial total;

$\Phi_I = A \cdot f(z) \cdot \phi_I(x,y) \cdot e^{-iwt}$

é o potencial da onda incidente; e,

$\Phi_D = A \cdot f(z) \cdot \phi_D(x,y) \cdot e^{-iwt}$

é o potencial da onda difratada.

Para que o PVC acima represente completamente o fluxo ao redor dos obstáculos cilíndricos, os coeficientes k, w, d e g devem obedecer a *condição de dispersão*, dada por:

$$\frac{w^2}{g} = k \tanh\left(k \cdot d\right) \tag{V.4}$$

Como normalmente são dados o período da onda incidente e a profundidade, pode-se determinar o valor do número de onda usando-se o processo iterativo de Newton-Raphson direto na equação acima.

Uma vez conhecido ϕ_D, pode-se escrever a expressão para as pressões, a partir da equação de Bernoulli, como:

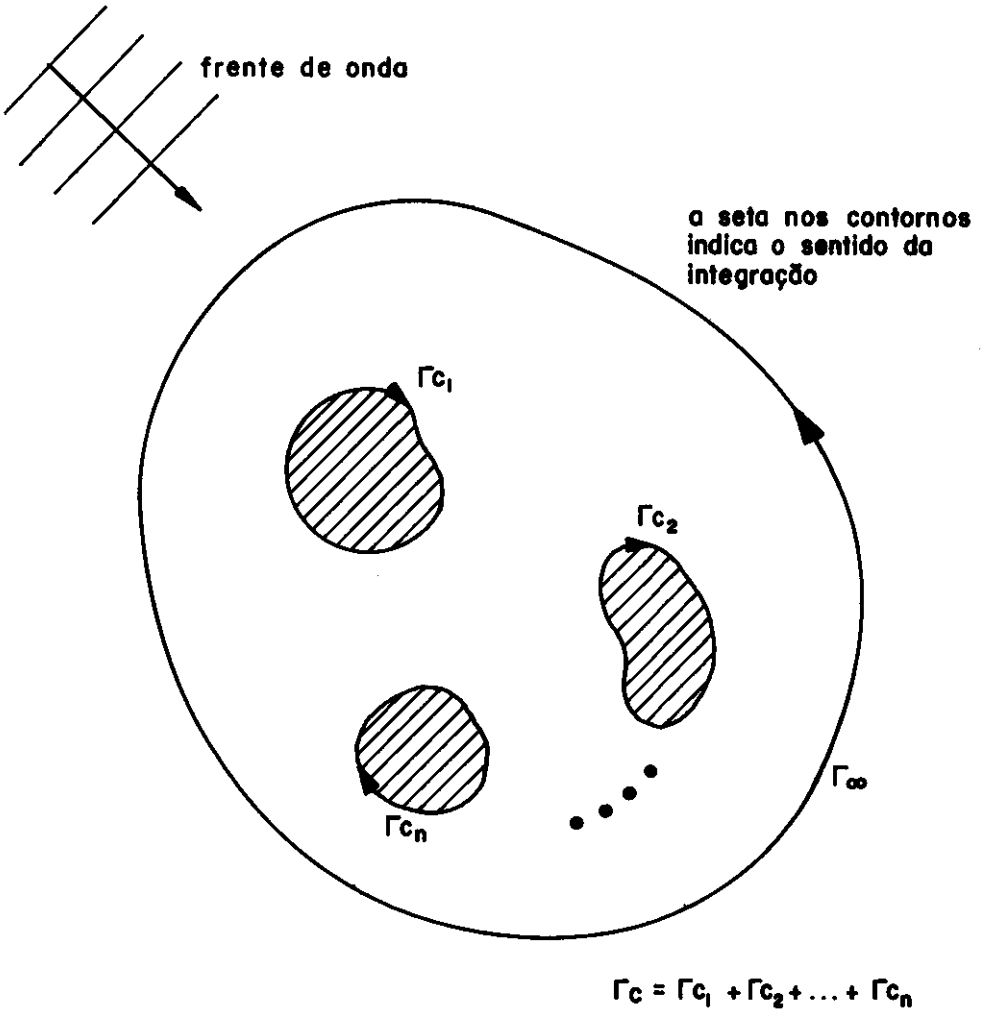


Fig.V-2 _ Definição dos contornos da região

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (V.5)$$

A força por unidade vertical de comprimento é:

$$\underset{\sim}{F}_z = \int_{\Gamma_c} p \, \underset{\sim}{\eta} \, d\Gamma \qquad (V.6)$$

e a força cortante e momento tombante na base dos pilares são:

$$\underset{\sim}{F} = \int_{-d}^{o} \underset{\sim}{F}_z \, dz \qquad (V.7)$$

$$\underset{\sim}{M} = \int_{-d}^{o} \underset{\sim}{F}_z \cdot (z+d) \, dz \qquad (V.8)$$

onde observa-se que as integrais vão até $z = 0$ e não até $z = \xi$, por se estar assumindo uma teoria linear com ondas senoidais de amplitude infinitesimal.

Desde que foi assumido para o potencial de velocidades uma variação hiperbólica com a profundidade, estas variáveis podem ser escritas como:

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho g H \cdot \frac{\cosh\left[k(z+d)\right]}{\cosh\left[kd\right]} \phi \; e^{-iwt} \qquad (V.9)$$

$$\underset{\sim}{F}_z = \frac{\rho g H}{k} \frac{\cosh\left[k\,(z+d)\right]}{\cosh\left[kd\right]} \underset{\sim}{\Psi} \cdot e^{-iwt} \qquad (V.10)$$

$$\underset{\sim}{F} = \frac{\rho g H d}{k} \frac{\tanh (kd)}{kd} \underset{\sim}{\Psi} \cdot e^{-iwt} \qquad (V.11)$$

$$\underset{\sim}{M} = \frac{\rho g H d^2}{k} \left\{ \frac{kd \sinh(kd) + 1 - \cosh (kd)}{(kd)^2 \cosh (kd)} \right\} \cdot \underset{\sim}{\Psi} \cdot e^{-iwt} \qquad (V.12)$$

na qual $\phi = \phi_D + \phi_I$ e $\underset{\sim}{\Psi}$ é um vetor no plano horizontal, dado por:

$$\underset{\sim}{\Psi} = \frac{-k}{2} \int_{\Gamma_c} \phi \, \underset{\sim}{\eta} \, d\Gamma_c \qquad (V.13)$$

V.2 - Solução Fundamental da Equação de Helmholtz

Define-se a solução fundamental da equação de Helmholtz, como a função que satisfaz a equação de Helmholtz com uma singularidade discreta.

$$\nabla^2 \phi^* + k^2 \phi^* = - \delta (p, Q)$$

$$\phi^* (p, Q) = \frac{i}{4} H_o^1 (k |r|) \qquad (V.14)$$

onde,

$|r| = \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right)^{1/2}$: distância entre os pontos p e Q.

$\delta (p, Q)$: é a função impulso unitário

H_o^1 : é a função de Hankel do 1º tipo e de ordem zero

$Q = (x,y)$ ponto campo

$p = (\xi,\eta)$ ponto fonte

Por sua vez, a função impulso unitário ou Delta de DIRAC é definida de forma a apresentar as seguintes propriedades:

$$\delta(p, Q) = 0 \qquad \text{para} \qquad Q \neq p;$$

$$\delta(p, Q) = \infty \qquad \text{para} \qquad Q = p; \text{ e,}$$

$$\int_{\Omega} \mu(Q) \cdot \delta(p, Q)\, d\Omega(Q) = \mu(p) \tag{V.15}$$

onde Ω é um domínio plano.

A função ϕ^*, assim definida, satisfaz a condição de radiação. Para mostrar, considera-se as expansões assintóticas da função de Hankel para $r \to \infty$, dadas por ABRAMOWITZ e STEGUN (18), como se segue:

$$\phi^* \cong \frac{i}{4} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cdot e^{i(kr - \pi/4)}$$

onde, para $r \to \infty$, tem-se

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi^*}{\partial r} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr) \cong -\frac{k}{4} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} e^{i(kr-\pi/4)}$$

Assim,

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \underset{\sim}{\eta}} - ik\phi^* = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_\infty \qquad (V.16)$$

V.3 - Teorema da Divergência e as Identidades de Green

O teorema da divergência é uma ferramenta útil para relacionar as integrais de volume e superfície. Um desenvolvimento completo pode ser achado em (17).

Este teorema estabelece que o fluxo do vetor $\underset{\sim}{F}$ através da superfície fechada (Γ) é igual à integral do divergente de $\underset{\sim}{F}$ em todo o volume (Ω) circundado por (Γ). Isto é,

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F} \, d\Omega = \int_\Gamma \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\eta} \, d\Gamma$$

onde,

$\underset{\sim}{F}$ é um campo vetorial e

$\underset{\sim}{\eta}$ é a normal à superfície Γ

Chamam-se solenoidais os campos $\underset{\sim}{F}$ tal que:

$$\text{div } \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F} = 0$$

tendo como consequência um fluxo nulo através de qualquer superfície fechada.

Em particular se $\underset{\sim}{F}$ é um rotacional, então

$$\underset{\sim}{F} = \text{rot } \underset{\sim}{Q}$$

e, como

$$\text{div } \underset{\sim}{F} = \text{div Rot } \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{0}$$

Os campos que derivam de um potencial são irrotacionais, ou seja

$$\underset{\sim}{F} = \text{grad } \phi = \underset{\sim}{\nabla}\phi \quad \therefore$$

$$\text{Rot grad } \phi = 0$$

onde

ϕ é o potencial escalar.

As fórmulas de Green são achadas ao se aplicar o teorema da divergência em um campo potencial do tipo

$$\underset{\sim}{F} = \phi \,.\, \text{grad } \Psi = \phi \, \underset{\sim}{\nabla} \Psi$$

onde

ϕ e $\Psi \in c^2$. Assim,

$$\text{div } \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla} \,.\, \underset{\sim}{F} = \nabla \, (\phi \, \underset{\sim}{\nabla} \, \Psi) = \underset{\sim}{\nabla}\phi \,.\, \underset{\sim}{\nabla}\Psi + \phi \,.\, \nabla^2\Psi$$

para $\nabla^2 = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\nabla}$ = div. grad e

$$\underset{\sim}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\underset{\sim}{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\underset{\sim}{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\underset{\sim}{k}$$

Este operador ∇^2 é conhecido como Laplaciano. Substituindo-se na primeira expressão obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left\{ \underset{\sim}{\nabla}\phi \cdot \underset{\sim}{\nabla}\Psi + \phi\ \nabla^2\Psi \right\} d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ \phi\ \nabla\Psi \right\} \cdot \underset{\sim}{\eta}\ d\Gamma$$

Como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underset{\sim}{\eta}} = \underset{\sim}{\nabla}\Psi \cdot \underset{\sim}{\eta}\ , \text{ então}$$

$$\int_{\Omega} \underset{\sim}{\nabla}\phi \cdot \underset{\sim}{\nabla}\Psi\ d\Omega = \int_{\Gamma} \phi\ \frac{\partial \Psi}{\partial \underset{\sim}{\eta}}\ d\Gamma - \int_{\Omega} \phi\ \nabla^2\Psi\ d\Omega$$

que é conhecida como *primeira identidade de Green*.

A *segunda identidade de Green* obtém-se observando, que por simetria, poderíamos trocar a posição dos potenciais ϕ e Ψ no primeiro membro da equação acima. Logo,

$$\int_{\Omega} \underset{\sim}{\nabla}\psi \cdot \underset{\sim}{\nabla}\phi\ d\Omega = \int_{\Gamma} \psi\ \frac{\partial \phi}{\partial \underset{\sim}{\eta}}\ d\Gamma - \int_{\Omega} \psi\ \nabla^2\ \psi\ d\Omega$$

Subtraindo uma expressão da outra e reordenando, obtem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\phi \, \nabla^2 \psi - \psi \, \nabla^2 \phi \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\phi \, \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \, \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma \qquad (V.17)$$

Por este desenvolvimento simplificado, nota-se que as funções ϕ e ψ não podem ser singulares em pontos dentro do domínio Ω, ou sobre o seu contorno.

Caso ocorram singularidades, devemos isolá-las através de contornos adicionais Γ_ε e calcular os limites quando $\varepsilon \to 0$. (Ver referência (19) e figura V.3).

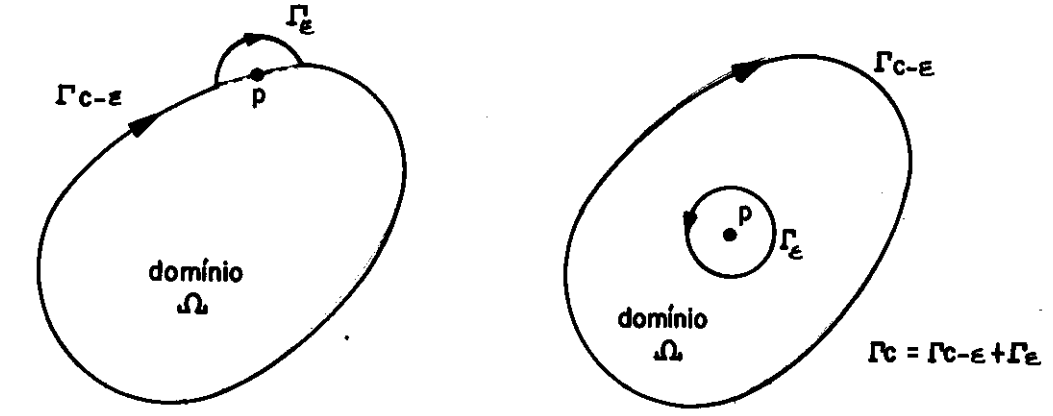


Figura V-3

V.4 - Solução do Problema da Difração, Aplicando-se a Segunda Identidade de Green.

Para formular a solução do problema de difração, necessita-se achar uma equação integral equivalente a expressão (V.1).

Assim, pode-se iniciar escrevendo a seguinte equação de resíduos ponderados, referência (21), usando a equação (V.1) e suas condições de contorno (V.2) e (V.3):

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi_D + k^2 \phi_D) \cdot \phi^* \cdot d\Omega = \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial \underset{\sim}{\eta}} + \frac{\partial \phi_I}{\partial \underset{\sim}{\eta}}\right) \phi^* \, d\Gamma + \tag{V.18}$$

$$+ \int_{\Gamma_\infty} \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial \underset{\sim}{\eta}} - ik\,\phi_D\right) \phi^* \, d\Gamma$$

onde,

Ω - é a região ocupada pelo fluido

Γ_c - é a superfície do corpo

Γ_∞ - é a superfície de contorno no infinito

ϕ^* - é a função de ponderação

Aplicando-se o teorema de Green na sua segunda forma, obtem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \phi^* + k^2 \phi^*\right) \phi_D \, d\Omega + \int_{\Gamma_c+\Gamma_\infty} \left(\phi^* \frac{\partial \phi_D}{\partial \eta} - \phi_D \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}\right) d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma_c} \left(\phi^* \frac{\partial \phi_D}{\partial \eta} + \phi^* \frac{\partial \phi_I}{\partial \eta}\right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} \left(\phi^* \frac{\partial \phi_D}{\partial \eta} - i\, k\, \phi_D\, \phi^*\right) d\Gamma$$

que simplificando, torna-se

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \phi^* + k^2 \phi^*\right) \phi_D \, d\Omega = \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \phi_I}{\partial \eta} \phi^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c+\Gamma_\infty} \phi_D \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_\infty} ik\phi^* \, \phi_D \, d\Gamma$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \phi^* + k^2 \phi^*\right) \cdot \phi_D \cdot d\Omega = \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial \phi_I}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \phi^* + \phi_D \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \underset{\sim}{\eta}}\right) d\Gamma + \tag{V.19}$$

$$+ \int_{\Gamma_\infty} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \underset{\sim}{\eta}} - i\, k\, \phi^*\right) \cdot \phi_D \cdot d\Gamma$$

Substituindo-se (V.15), (V.16) e (V.17) em (V.19), tem-se, para um ponto "p" pertencente ao meio fluido Ω, que:

$$\phi_D(p) = - \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial \phi_I}{\partial \eta}(Q) \cdot \phi^*(p,Q) + \phi_D(Q) \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q) \right) d\Gamma(Q) \qquad (V.20)$$

onde,

$\underset{\sim}{\eta}$ - é a normal externa ao meio fluido no ponto "Q"

Q - é um ponto sobre o contorno Γ_c.

Esta equação é conhecida como solução de WEBER para a equação de HELMHOLTZ, conforme BAKER e COPSON (1950) (22).

A equação (V.20) permite a avaliação do potencial em qualquer ponto da região Ω através da integração sobre o contorno dos obstáculos, Γ_c.

Como neste PVC os valores de $\phi_D(Q)$ não são prescritos, a equação (V.20) deve inicialmente ser empregada para se calcular os valores das incógnitas $\phi_D(Q)$ nos contornos. Então, deve-se tomar cuidado com as integrais que aparecem em (V.20), uma vez que elas possuem termos compostos por funções descontínuas na origem, como por exemplo, as funções de Bessel de segunda espécie e ordens zero e um (Y0(x) e Y1(x)), onde

$$\lim_{x \to 0} Y0(x) \to - \infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to 0} Y1(x) \to - \infty$$

Assim, para o caso bi-dimensional, assume-se que o contorno Γ_c é acrescido de um pequeno contorno Γ_ε, parte de um círculo de raio ε centrado no ponto "p" pertencente ao contorno Γ_c (ver figura V.4).

A equação integral (V.20) pode ser escrita como:

$$\phi_D(p) + \lim_{\varepsilon \to o} \int_{\Gamma_c - \Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q) \cdot \phi_D(Q) + \phi^*(p,Q) \cdot \frac{\partial \phi_I}{\partial \eta}(Q) \right) d\Gamma(Q)$$

$$+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q) \cdot \phi_D(Q) + \phi^*(p,Q) \cdot \frac{\partial \phi_I}{\partial \eta}(Q) \right) d\Gamma(Q) = 0 \qquad (V.21)$$

A integral definida em $\Gamma_c - \Gamma_\varepsilon$ é continua quando $\varepsilon \to 0$, transformando-se novamente na equação (V.20), uma vez que o contorno passa a ser o próprio Γ_c.

Já para análise da integral sobre Γ_ε assume-se, inicialmente, que a função ϕ_D satisfaz a condição de HÖLDER (19) no ponto "p", ou seja, que

$$| \phi_D(p) - \phi_D(Q) | \leq A \cdot r(p,Q)^\alpha \qquad (V.22)$$

onde A e α são constantes positivas com $\alpha > 1$; e $r(p,Q)$ é a distância entre os pontos "p" e "Q".

Ainda, com o objetivo de calcular os limites da equação (V.21) podemos usar uma expansão da função de Hankel até a ordem $(k.r(p,Q))^2$, que é dada por

$$\phi^* (k \cdot r(p,Q)) = \frac{-1}{2\pi} \left(\gamma + \ell n \frac{k\, r(p,Q)}{2} \right) + \frac{i}{4} \qquad (V.23)$$

onde

γ é a constante de Euler (0.577216 ...)

k é o número de onda

$r(p,Q)$ é a distância entre os pontos "p" e "Q"

Derivando-se a expressão (V.23) obtém-se:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = - \frac{1}{2\pi \cdot r} \qquad (V.24)$$

Tomando-se o primeiro termo da integral sobre Γ_ε da equação (V.21), somando e subtraindo o valor do potencial difratado no ponto p, obtém-se:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} (p,Q) \cdot \phi_D(Q)\, d\Gamma(Q) =$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\phi_D(Q) - \phi_D(p) \right) \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} (p,Q)\, d\Gamma(Q) + \phi_D(p) \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} (p,Q)\, d\Gamma(Q) \qquad (V.25)$$

onde a primeira integral do segundo lado da expressão vai pa-

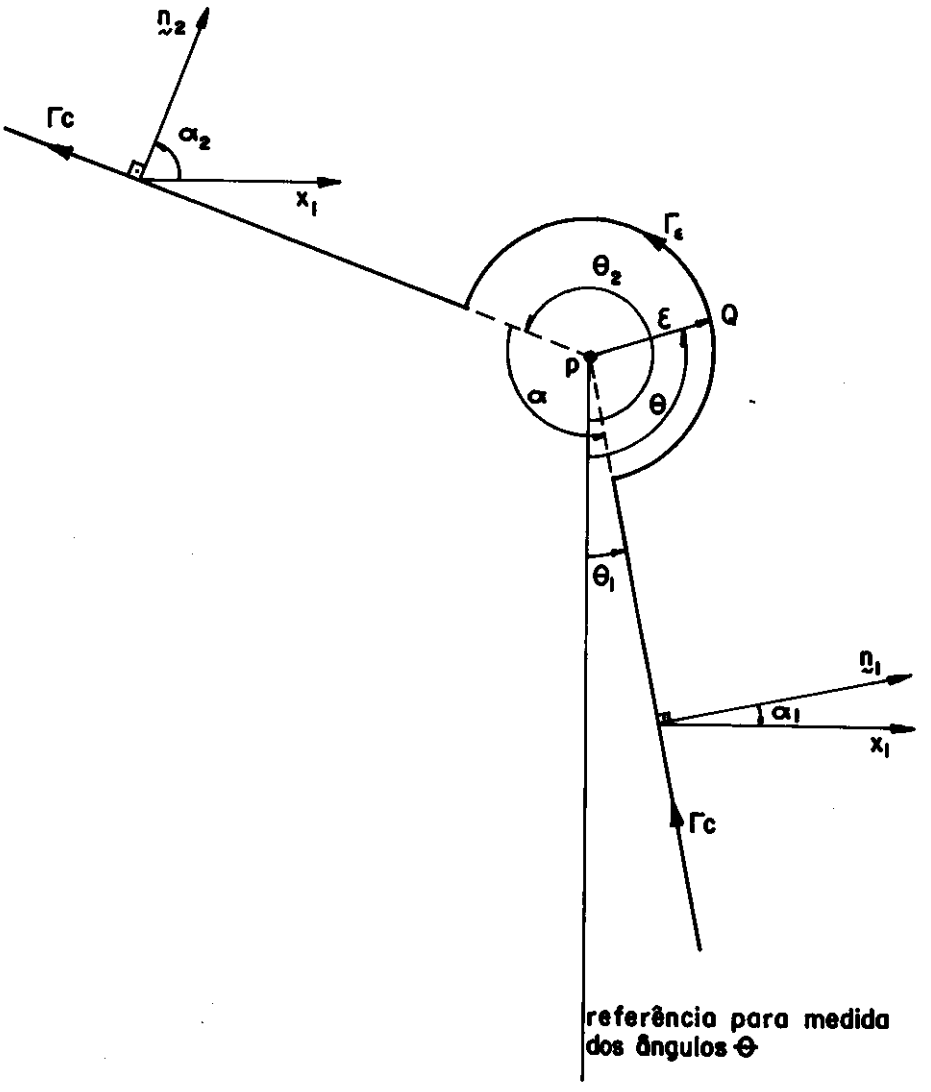


Fig. V-4 - Aumento do contorno Γc por causa de uma singularidade em p

ra zero, devido à condição de HÖLDER no limite quando $\varepsilon \to 0$, logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q) \cdot \phi_D(Q)\, d\Gamma(Q) = \tag{V.26}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q) \cdot d\Gamma(Q) \cdot \phi_D(p)$$

Como estamos sobre o arco Γ_ε.

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q) = \frac{\partial \phi^*}{\partial r}(p.Q)$$

e

$$r = \varepsilon \quad \forall \quad Q \in \Gamma_\varepsilon$$

Logo, usando-se a aproximação dada por (V.24) e a mesma nomenclatura de ângulo da figura V.4, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta}(p,Q)\, d\Gamma(Q) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon\, d\theta =$$

$$= -\frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = -\frac{(2\pi - \alpha)}{2\pi} = -1 + \frac{\alpha}{2\pi}$$

onde α é o ângulo formado entre as normais $\underset{\sim}{\eta}_1$ e $\underset{\sim}{\eta}_2$.

De forma análoga pode-se mostrar que o segundo termo da integral sobre Γ_ε da expressão (V.20) recai em:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi^*(p,Q) \cdot \frac{\partial \phi_I}{\partial \eta}(Q) \cdot d\Gamma(Q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi^*(p,Q) \cdot d\Gamma(Q) \cdot \frac{\partial \phi_I(p)}{\partial \eta} \tag{V.27}$$

Usando a aproximação (V.23) no limite acima, e a mesma nomenclatura de ângulos dada pela Figura V.4, obtem-se:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi^*(p,Q)\, d\Gamma(Q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{2\pi} (\gamma + \ell n \frac{k\varepsilon}{2}) + \frac{i}{4} \right) \varepsilon \, d\theta = 0 \tag{V.28}$$

Portanto, levando-se estes resultados na expressão (V.21), obtêm-se a formulação da integral de contorno para um ponto sobre o próprio contorno, como:

$$C(p) \cdot \phi_D(p) + \int_{\Gamma_C} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \underline{\eta}}(p,Q) \cdot \phi_D(Q) + \phi^*(p,Q) \cdot \frac{\partial \phi_I}{\partial \underline{\eta}}(Q) \right) d\Gamma(Q) = 0 \tag{V.29}$$

onde,

$$C(p) = \frac{\alpha(p)}{2\pi}$$

$\alpha(p)$ é o ângulo entre as normais $\underset{\sim}{\eta}_1$ e $\underset{\sim}{\eta}_2$, ou em outras palavras, o ângulo que o contorno forma no ponto "p".

Nota-se de imediato, os seguintes valores particulares do coeficiente $C(p)$,

$C(p) = 1$ para pontos $p \in \Omega$

$1/2$ para pontos $p \in \Gamma_c$ em partes não angulares do contorno Γ_c $(\alpha = \pi)$

0 para pontos externos à Ω

Se for de interesse, pode-se calcular o valor do potencial em qualquer ponto do domínio, fazendo-se $C(p) = 1$ na equação (V.29) ou tomando-se diretamente a equação (V.20), logo

$$\phi_D(p) = - \int_{\Gamma_c} \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial \underset{\sim}{\eta}}(p,Q) \cdot \phi_D(Q) + \phi^*(p,Q) \cdot \frac{\partial \phi_I(Q)}{\partial \underset{\sim}{\eta}} \right\} d\Gamma(Q)$$

onde

$p \in \Omega$ e $Q \in \Gamma_c$

Como se vê, esta equação acha os valores de $\phi_D(p)$ para $p \in \Omega$ (domínio) usando os valores, anteriormen

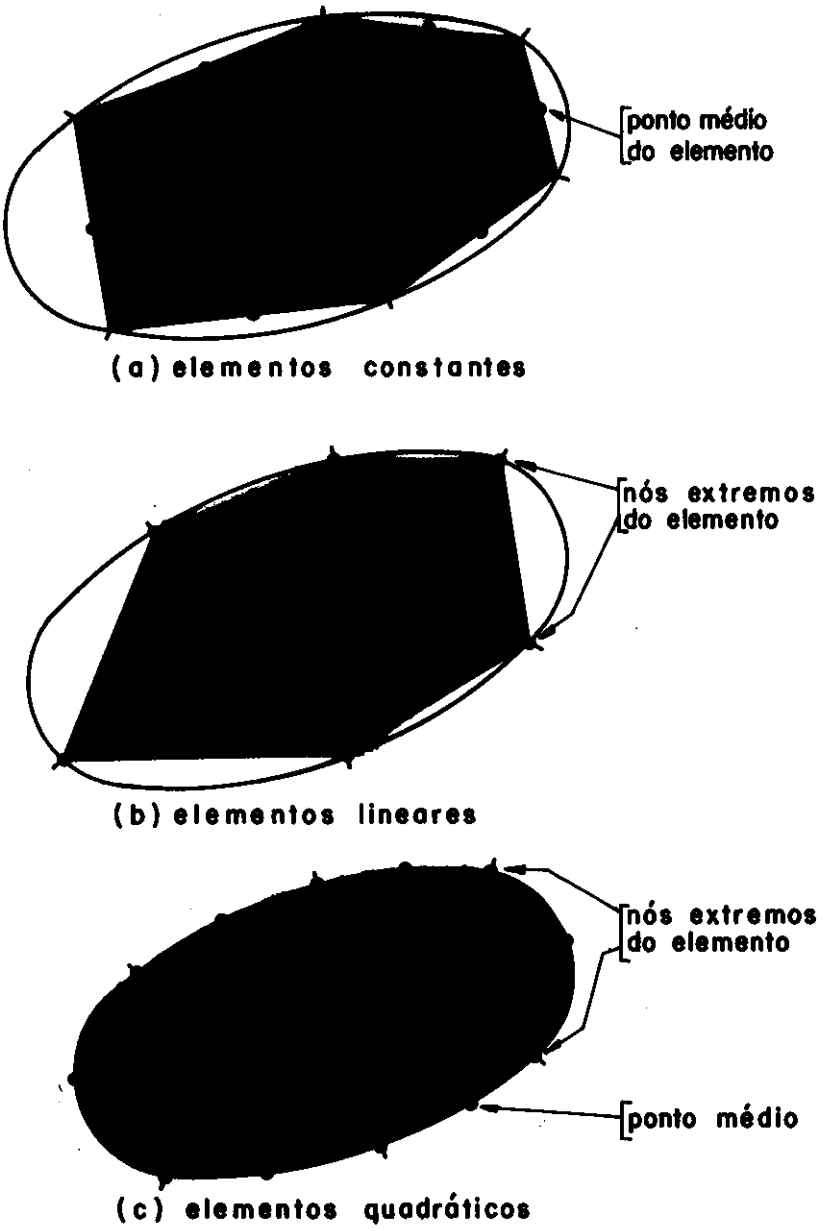


Fig.V-5_Discretização dos contornos

te calculados, de $\phi_D(Q)$ para $Q \in \Gamma_c$ (contorno).

A equação (V.29) pode ser discretizada e resolvida numericamente. AU e BREBBIA (21) testaram diferentes tipos de elementos de contorno, como constantes, lineares e quadráticos e mostraram uma eficiência satisfatória do elemento constante para os casos práticos. (Ver Figura V.5).

Este, também, é o mesmo tipo de elemento que normalmente se usa para o desenvolvimento da formulação pelo método indireto, conforme mostram SARPKAYA e ISAACSON (1).

V.5 - Discretização do Contorno

O contorno Γ_c pode ser discretizado em M elementos de contorno para os quais as variáveis ϕ_D e $\frac{\partial \phi_I}{\partial \underline{n}}$ podem ser interpoladas usando-se funções de interpolação $[N]$.

Assim, para o elemento "j", tem-se

$$\begin{aligned} \phi_D(j) &= [N] \cdot \underline{\phi}_D^n(j) \\ \bar{q}(j) &= [N] \cdot \underline{\bar{q}}^n(j) \end{aligned} \qquad \text{(V.30)}$$

onde $\underline{\phi}_D^n(j)$ e $\underline{\bar{q}}^n(j)$ são os valores das variáveis nos nós do elemento "j".

A equação integral (V.29) torna-se

$$C(p) \cdot \phi_D(p) + \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*(p,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} \cdot [N] \cdot d\Gamma(Q) \cdot \underset{\sim}{\phi}_D^{\,n}(j) =$$

$$= - \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} \phi^*(p,Q) \cdot [N] \cdot d\Gamma(Q) \cdot \underset{\sim}{\bar{q}}^n(j) \qquad (V.31)$$

onde

$$\underset{\sim}{\bar{q}}^n(j) = \frac{\partial \phi^n I(j)}{\partial \underset{\sim}{n}_j}$$

Para o caso de se assumir a discretização do contorno Γ_c em M elementos constantes, pode-se fazer algumas simplificações em cima da equação (V.31).

Assim, conforme mostrado na Figura V.6, para o elemento constante a função potencial $\phi_D(j)$ tem um único valor sobre o elemento "j", que é normalmente calculado como sendo o valor de ϕ_D no ponto médio do elemento.

Por sua vez, a função de interpolação $[N]$ torna-se igual a 1 e a constante $C(p) = 1/2$, pois o ponto usado para o cálculo está no meio do elemento e tem $\alpha = \pi$, ver Figura V.3

$$1/2 \cdot \phi_D(i) + \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*(i,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} \, d\Gamma_j(Q) \cdot \phi_D(j) =$$

$$= - \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} \phi^*(i,Q) \, d\Gamma_j(Q) \cdot \frac{\partial \phi_I(j)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} \qquad (V.32)$$

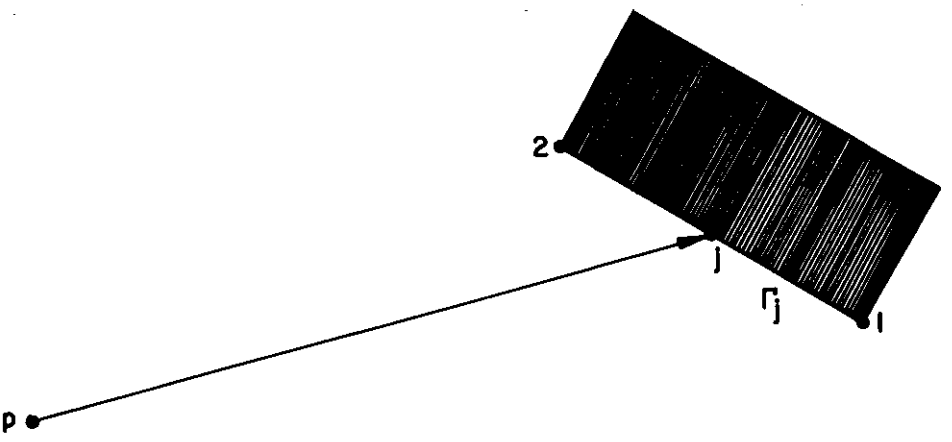


Fig.V-6_ Distribuição das funções ϕ_D e $\bar{q}$ ao longo de Γ_j

para $1 \leq i \leq M$, sendo $\underset{\sim}{n}_j$ o vetor unitário normal ao elemento "j" e apontando para fora do meio fluido.

Pode-se escrever esta equação na forma matricial como

$$\underset{\approx}{H} \cdot \underset{\sim}{\phi}_D = \underset{\approx}{G} \cdot \underset{\sim}{\bar{Q}}_I \qquad (V.33)$$

onde

$$\underset{\sim}{\phi}_D = \begin{Bmatrix} \phi_D(1) \\ \phi_D(2) \\ \vdots \\ \phi_D(M) \end{Bmatrix}$$

são os potenciais desconhecidos para cada ponto médio de cada elemento Γ_j;

$$\underset{\sim}{Q}_I = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \phi_I(1)}{\partial \underset{\sim}{n}_1} \\ \dfrac{\partial \phi_I(2)}{\partial \underset{\sim}{n}_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_I(M)}{\partial \underset{\sim}{n}_M} \end{array} \right\}$$

são valores prescritos, avaliados igualmente em cada ponto médio de Γ_j;

$$H_{ij} = 1/2 \cdot \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*(i,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} \, d\,\Gamma_j(Q)$$

é um coeficiente da matriz $\underset{\sim}{H}$ e representa a influência de uma fonte no ponto "i" sobre o elemento "j".

$$G_{ij} = - \int_{\Gamma_j} \phi^*(i,Q) \, d\,\Gamma_j(Q)$$

é um coeficiente da matriz $\underset{\sim}{G}$ que, analogamente a H_{ij}, pode ser entendido como a influência de uma fonte no ponto "i" sobre o elemento "j".

$$\delta_{ij} = \begin{array}{ll} 1 & \text{para} \quad i = j \\ 0 & \text{para} \quad i \neq j \end{array}$$

Ainda, separando-se a parte real e imaginária de cada coeficiente, tem-se:

$$\underset{\sim}{\phi}_D = \underset{\sim}{U} + i\,\underset{\sim}{V}$$

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}_I = \underset{\sim}{R} + i\,\underset{\sim}{S}$$

$$\underset{\approx}{H} = \underset{\approx}{H}_1 + i\,\underset{\approx}{H}_2$$

$$\underset{\approx}{G} = \underset{\approx}{G}_1 + i\,\underset{\approx}{G}_2$$

A equação matricial (V.33) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \underset{\approx}{H}_1 & -\underset{\approx}{H}_2 \\ \underset{\approx}{H}_2 & \underset{\approx}{H}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{G}_1 & -\underset{\approx}{G}_2 \\ \underset{\approx}{G}_2 & \underset{\approx}{G}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{R} \\ \underset{\sim}{S} \end{Bmatrix} \qquad (V.34)$$

Assim, a dimensão do sistema passou a ser (2M x 2M), porém apresentando vantagens em relação ao uso de variáveis complexas no computador.

A solução do sistema acima permite descobrir o valor do potencial difratado ao longo do contorno, ou melhor, das seções planas dos obstáculos, para $z = 0$.

A partir daí, calcula-se o potencial total e expande-se através da altura z, com o que pode-se avaliar a força cortante e momento de tombamento para cada pilar de seção arbitrária, considerado conforme o proposto.

V.6 - Integração Sobre Cada Elemento

Para elementos constantes as integrais que aparecem na equação (V.32), são:

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*(i,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} \, d\Gamma_j(Q) \qquad , e$$

$$\int_{\Gamma_j} \phi^*(i,Q) \cdot d\Gamma_j(Q)$$

(V.35)

onde a solução fundamental e sua derivada em relação à normal ao elemento "j" são dadas por:

$$\phi^*(i,Q) = \frac{1}{4}\left[- Y_0(k\, r(i,Q)) + i\, J_0(k \cdot r(i,Q))\right]$$

$$\frac{\partial \phi^*(i,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} = \frac{k}{4}\left[Y_1(k\, r(i,Q)) - i\, J_1(k \cdot r(i,Q))\right] \cdot \frac{\partial\, r(i,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j}$$

(V.36)

onde

$r(i,Q)$ é a distância entre o ponto fonte "i" e os pontos "Q" sobre o elemento "j".

Para as funções de Bessel, foram adotadas as aproximações polinomiais dadas por ABRAMOVITZ e STEGUN (18), por fornecerem um erro compatível com a precisão computacional.

As expressões polinomiais estão reproduzidas a baixo:

a - Função de Bessel de primeira espécie e ordem zero

Para $-3 \leq x \leq 3$

$$J_0(x) = 1 - 2,24999\ 97(x/3)^2 + 1,26562\ 08(x/3)^4$$

$$- 0,31638\ 66(x/3)^6 + 0,04444\ 79(x/3)^8$$

$$- 0,00394\ 44(x/3)^{10} + 0,00021\ 00(x/3)^{12} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 5 \times 10^{-8}$$

Para $3 \leq x \leq \infty$

$$J_0(x) = x^{-1/2} \cdot f_0 \cdot \cos \theta_0$$

b - Função de Bessel de segunda espécie e ordem zero

Para $0 < x \leq 3$

$$Y_0(x) = (2/\pi)\ \ln(\tfrac{1}{2} x)\ J_0(x) + ,36746\ 691$$

$$+ 0,60559\ 366(x/3)^2 - 0,74350\ 384(x/3)^4$$

$$+ 0,25300\ 117(x/3)^6 - 0,04261\ 214(x/3)^8$$

$$+ 0,00427\ 916(x/3)^{10} - 0,00024\ 846(x/3)^{12} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1.4 \times 10^{-8}$$

Para $3 \leq x < \infty$

$$Y_o(x) = x^{-1/2} \cdot f_o \cdot \sin \theta_o$$

c - *Função de Bessel de primeira espécie e ordem 1*

Para $-3 \leq x \leq 3$

$$x^{-1} J_1(x) = \frac{1}{2} - 0{,}56249\ 985(x/3)^2 + 0{,}21093\ 573(x/3)^4$$

$$- 0{,}03954\ 289(x/3)^6 + 0{,}00443\ 319(x/3)^8$$

$$- 0{,}00031\ 761(x/3)^{10} + 0{,}00001\ 109(x/3)^{12} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1.3 \times 10^{-8}$$

Para $3 \leq x < \infty$

$$J_1(x) = x^{-1/2} \cdot f_1 \cdot \cos \theta_1$$

d - *Função de Bessel de segunda espécie e ordem 1*

Para $0 < x < 3$

$$x\, Y_1(x) = (2/\pi) \times \ln \left(\frac{1}{2} x\right) J_1(x) - 0{,}63661\ 98$$

$$+ 0{,}22120\ 91(x/3)^2 + 2.16827\ 09(x/3)^4$$

$$- 1.31648\ 27(x/3)^6 + 0{,}31239\ 51(x/3)^8$$

$$- 0{,}04009\ 76(x/3)^{10} + 0{,}00278\ 73(x/3)^{12} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1.1 \times 10^{-7}$$

Para $3 \leq x \leq \infty$

$$Y_1(x) = x^{-1/2} \cdot f_1 \cdot \sin \theta_1$$

Onde as funções f_o, f_1, θ_o e θ_1 são dadas por:

$$f_o = 0,79788\ 456 - 0,00000\ 077(3/x) - 0,00552\ 740(3/x)^2$$

$$- 0,00009\ 512(3/x)^3 + 0,00137\ 237(x/x)^4$$

$$- 0,00072\ 805(3/x)^5 + 0,00014\ 476(3/x)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1.6 \times 10^{-8}$$

$$f_1 = 0,79788\ 456 + 0,00000\ 156(3/x) + 0,01659\ 667(3/x)^2$$

$$+ 0,00017\ 105(3/x)^3 - 0,00249\ 511(3/x)^4$$

$$+ 0,00113\ 653(3/x)^5 - 0,00020\ 033(3/x)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 4 \times 10^{-8}$$

$$\theta_o = x - 0,78539\ 816 - 0,04166\ 397(3/x)$$

$$- 0,00003\ 954(3/x)^2 + 0,00262\ 573(3/x)^3$$

$$- 0,00054\ 125(3/x)^4 - 0,00029\ 333(3/x)^5$$

$$+ 0,00013\ 558(3/x)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 7 \times 10^{-8}$$

$$\theta_1 = x - 2{,}35619\ 449 + 0{,}12499\ 612(3/x)$$

$$+ 0{,}00005\ 650(3/x)^2 - 0{,}00637\ 879(3/x)^3$$

$$+ 0{,}00074\ 348(3/x)^4 + 0{,}00079\ 824(3/x)^5$$

$$- 0{,}00029\ 166(3/x)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 9 \times 10^{-8}$$

O comportamento destas funções de Bessel pode ser apreciado na figura V.7, abaixo, onde nota-se que para x tendendo a zero, $Y_0(x)$ e $Y_1(x)$ tendem a $-\infty$.

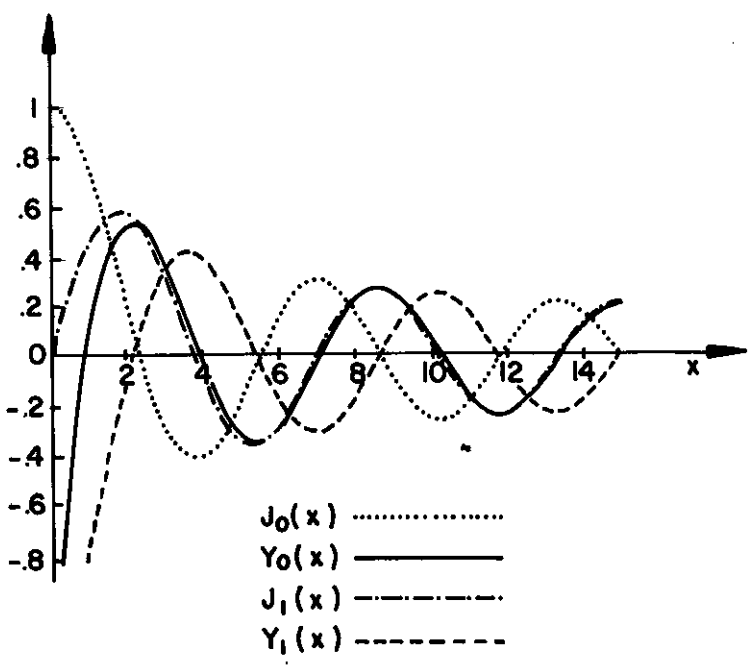


Fig.V-7_ Funções de Bessel

Tomando-se $i \neq j$, as equações dadas em (V.35) podem ser integradas usando-se o método normal de integração de Gauss para funções não-singulares.

Sendo que, o número de pontos necessários a esta integração é escolhido seletivamente em função da distância e do tamanho do elemento Γ_j. Assim, quanto mais próximo está o ponto "i" do elemento Γ_j e quanto maior for o tamanho Γ_j, maior o número de pontos de integração usados no método de Gauss.

As integrais (V.35), mudando de coordenadas cartesianas para coordenadas locais (ξ), tornam-se:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi^*}{\partial n_j}(i,\xi) \; . \; |J| \; . \; d\xi \qquad ,e$$

$$\int_{-1}^{1} \phi^*(i, \xi) \; . \; |J| \; . \; d\xi \qquad (V.37)$$

onde $|J|$ é o Jacobiano que muda o sistema de coordenadas globais para o sistema local, que para o caso de elementos constantes vale $\ell_j/2$, sendo ℓ_j o comprimento do elemento Γ_j.

O critério adotado para integração foi:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \; dx \cong \sum_{i=1}^{n} w_i \; f(x_i)$$

sendo

$$n = 6 \qquad \text{para} \qquad \ell_j / r(i,j) \geq 0.25$$

e

$$n = 4 \qquad \text{caso contrário}$$

Os valores correspondes de w_i e x_i foram tirados de ABRAMOVITZ e STEGUN (18) e estão reproduzidos na tabela V.2.

Já, para $i = j$, tem-se

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*}{\partial \underset{\sim}{n}_j} (i,Q)\, d\,\Gamma_j(Q) = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} (i,Q) \cdot \frac{\partial r}{\partial \underset{\sim}{n}_j} \cdot d\,\Gamma_j(Q) = 0 \qquad \text{(V.38)}$$

devido à própria ortogonalidade entre o elemento Γ_j e sua normal, assim $\frac{\partial r(i,Q)}{\partial \underset{\sim}{n}_j} = 0$.

Então, conclui-se que os coeficientes da diagonal da matriz $\underset{\approx}{H}$ dada em (V.35) são:

$$H_{ii} = 1/2 \qquad \text{para} \qquad 1 \leq i \leq M$$

A segunda integral dada em (V.37) foi integrada fazendo-se a separação da singularidade logarítmica de Y0 e integrando-se cada termo separadamente.

O termo que a contém foi integrado usando-se o

método da quadratura de Gauss, uma vez que a singularidade que aparece é do tipo logarítmica.

Transcreve-se a seguir o método de Gauss utilizado:

$$\int_0^1 f(x) \cdot \ell n\, x \cdot dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i) + |\varepsilon|$$

onde,

x_i são as abscissas dos pontos envolvidos

w_i são os fatores de peso

$|\varepsilon| = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} K_n$ - é a função que dá o erro devido à aproximação

Os fatores de peso adotados foram, para uma integração com 4 pontos, dados na Tabela V.1 abaixo.

NÚMERO n	ABSCISSA x_i	FATOR DE PESO - w_i	K_n
4	0.041448	0.383464	0.00001
	0.245275	0.386875	
	0.556165	0.190435	
	0.848982	0.039225	

TABELA V.1

Abscissas e fatores de peso para a integração de Gauss com singularidade logarítmica.

Nº DE PONTOS INTEGRAÇÃO n	ABSCISSAS x_i	FATORES DE PESO w_i
4	-0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	-0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
6	-0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
	-0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	-0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
	0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
	0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170

TABELA V.2

Abscissas e fatores de peso para integração de Gauss de funções não-singulares

VI - FORÇAS DE ONDA SOBRE ESTRUTURAS COMPOSTAS - UMA APROXIMAÇÃO BI-DIMENSIONAL

Este capítulo se destina a formular o problema de estruturas compostas por um ou mais cilíndros de seção transversal qualquer, constante ao longo da profundidade e que se apoiam sobre uma base também cilíndrica de seção qualquer e constante até a profundidade máxima. A Figura VI.1 ilustra exemplos deste tipo de estrutura composta.

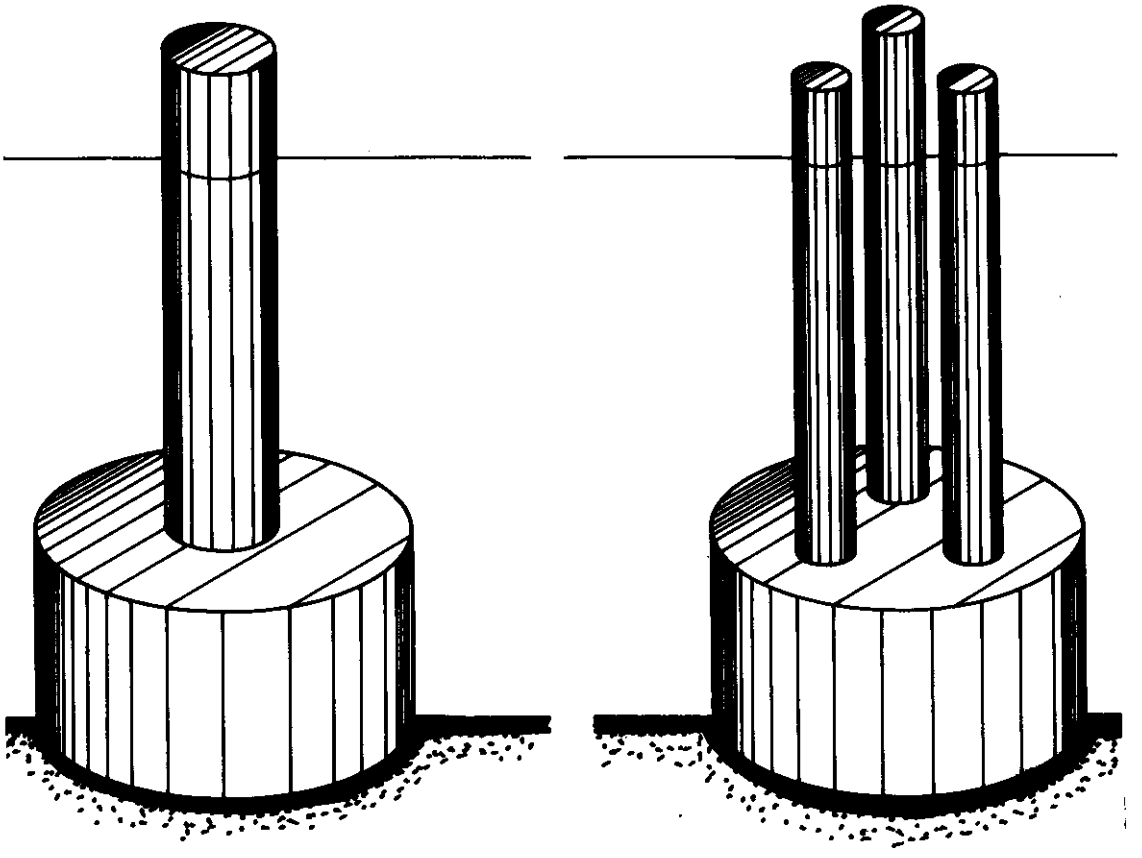


Fig.VI-1_Tipos de estruturas compostas

Com base nestes desenvolvimentos teóricos, foi feito um programa de computador que permite também a análise dos casos limites da estrutura composta previamente descrita, que seriam: o cilindro totalmente submerso e o grupo de ci-

lindros com seção constante ao longo de toda a profundidade da região, conforme mostra a Figura V.2 abaixo:

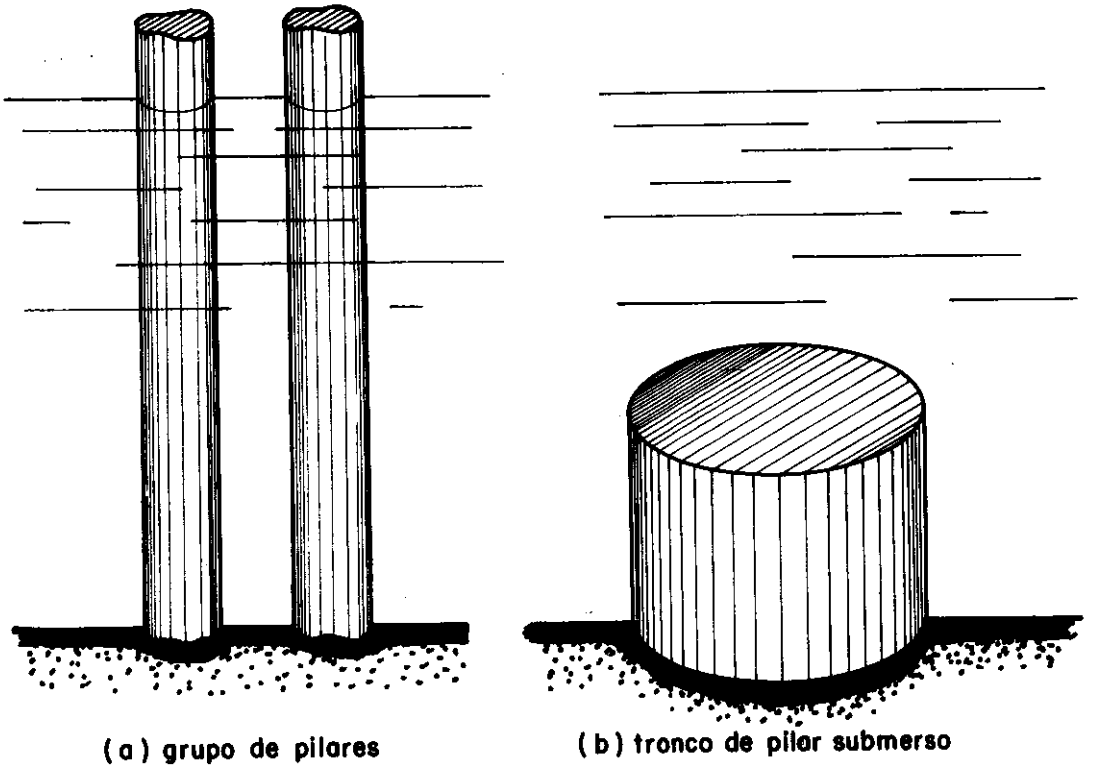


Figura VI-2

VI.1 - Definição do Problema

A Figura VI.3, abaixo, define a geometria usada no desenvolvimento.

Esta aproximação propõe a divisão do meio fluido em duas sub-regiões de profundidades constantes, Ω_1 e Ω_2.

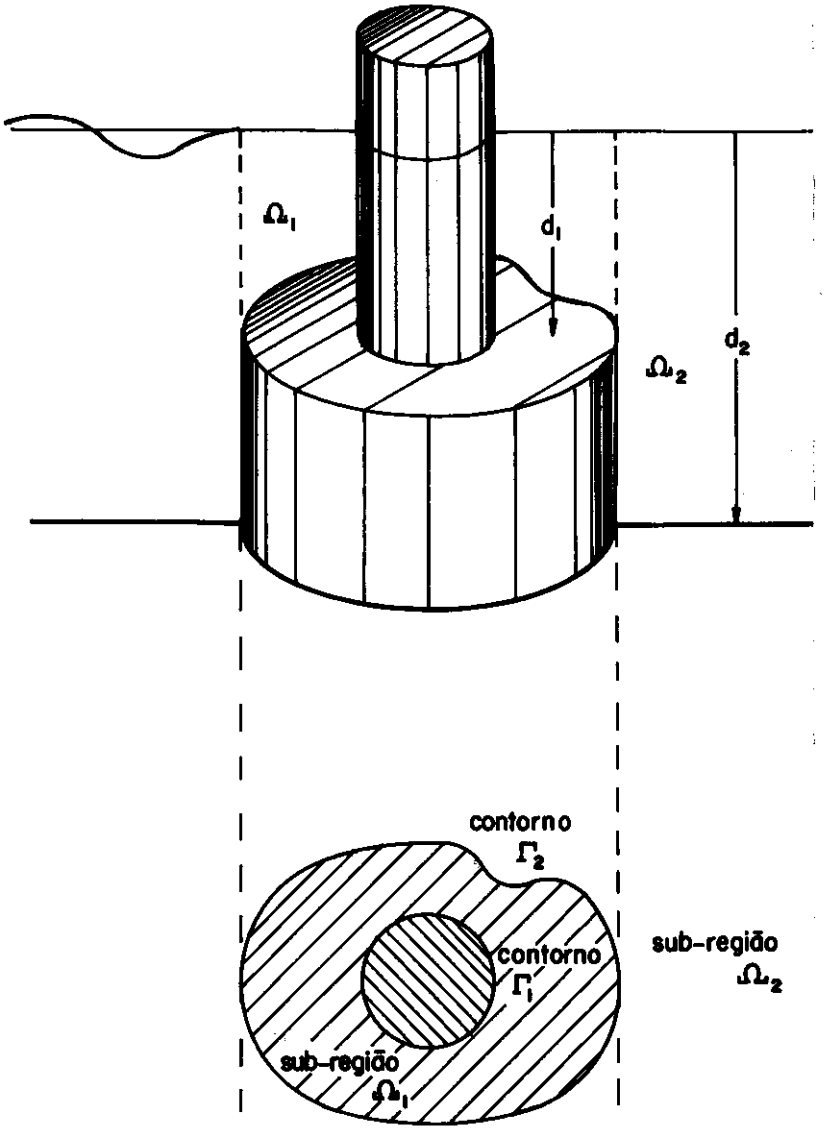


Fig.VI-3_Definição de contornos

Estas sub-regiões devem satisfazer, independentemente, a equação de Helmholtz, uma vez que é suposta uma variação hiperbólica dos potenciais com a profundidade, sujeita a outras condições de contorno.

VI.2 - Desenvolvimento das Equações Diferenciais Aplicadas a Sub-região Ω_1

A sub-região Ω_1 tem uma profundidade d_1 e

está limitada pelos contornos Γ_1 e Γ_2.

Para esta sub-região, pode-se escrever:

$$\nabla^2 \phi_t^I + k_1^2 \phi_t^I = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega_1; \tag{VI.1}$$

$$q_{t,\Gamma_1}^I = \frac{\partial \phi_t^I}{\partial \underset{\sim}{n}_1} = 0 \qquad \text{no contorno } \Gamma_1; \text{ e} \tag{VI.2}$$

$$q_{t,\Gamma_2}^I = \frac{\partial \phi_t^I}{\partial \underset{\sim}{n}_1} = V_n \text{ , no contorno } \Gamma_2, \tag{VI.3}$$

onde se supõe haver uma permeabilidade deste. Isto é, há uma certa velocidade das partículas fluidas cruzando o contorno Γ_2.

Nas equações acima, tem-se

ϕ_t^I é o potencial total

$q_{t,\Gamma}^I = \frac{\partial \phi_t^I}{\partial \underset{\sim}{n}_1}$ é o vetor velocidade calculado segundo a normal $\underset{\sim}{n}_1$ ao contorno Γ.

Convém observar que o vetor normal $\underset{\sim}{n}_1$ é calculado assumindo-se como sendo um vetor unitário perpendicular a cada elemento dos contornos e externo a sub-região Ω_1, como se pode ver na Figura VI.4.

Conforme o desenvolvimento no Capítulo V, pode-se montar o sistema:

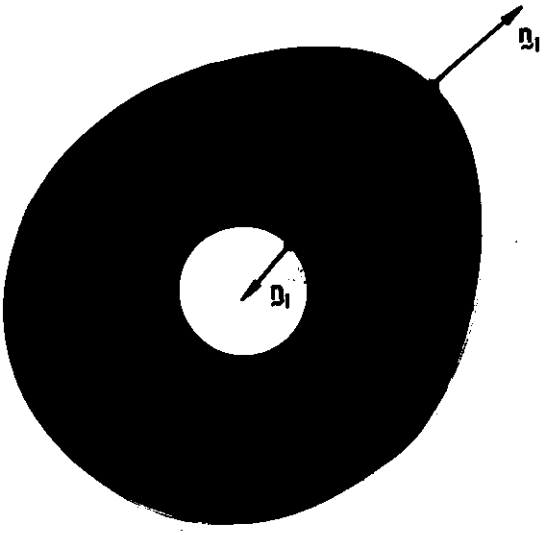


Fig.VI-4_Definição do vetor normal η_1 para a sub-região Ω_1

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{H}^{I}_{\Gamma_1,\Gamma_1} & \underset{\sim}{H}^{I}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \\ \underset{\sim}{H}^{I}_{\Gamma_2,\Gamma_1} & \underset{\sim}{H}^{I}_{\Gamma_2,\Gamma_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{I}_{t,\Gamma_1} \\ \underset{\sim}{\phi}^{I}_{t,\Gamma_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{G}^{I}_{\Gamma_1,\Gamma_1} & \underset{\sim}{G}^{I}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \\ \underset{\sim}{G}^{I}_{\Gamma_2,\Gamma_1} & \underset{\sim}{G}^{I}_{\Gamma_2,\Gamma_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ -\underset{\sim}{V}_n \end{Bmatrix} \tag{VI.4}$$

onde,

$\underset{\sim}{H}^{I}_{\Gamma_i\Gamma_j}$ e $\underset{\sim}{G}^{I}_{\Gamma_i\Gamma_j}$ representam a matriz de influência de fontes localizadas nos pontos médios de cada elemento de Γ_i sobre os elementos de Γ_j.

VI.3 - Desenvolvimento das Equações Diferenciais para a Região Ω_2

Por sua vez a sub-região Ω_2 tem uma profundidade d_2 e está limitada pelos contornos Γ_2 e Γ_∞. Assim, analogamente ao que foi feito no Capítulo V, pode-se dividir o potencial total em difratado mais incidente e aplicá-lo à equação de Helmholtz. Ou seja,

$$\phi_t^{II} = \phi_o^{II} + \phi_D^{II} \qquad (VI.5)$$

onde,

ϕ_t^{II} é o potencial total na região Ω_2;

ϕ_o^{II} é o potencial incidente na região Ω_2; e

ϕ_D^{II} é o potencial difratado.

Em pontos do contorno Γ_2, usa-se a notação:

$$\phi_{t,\Gamma_2}^{II} = \phi_{o,\Gamma_2}^{II} + \phi_{D,\Gamma_2}^{II} \qquad (VI.6)$$

que, ao aplicar na equação de Helmholtz, obtem-se:

$$\nabla^2 \phi_{D,\Gamma_2}^{II} + k_2^2 \phi_{D,\Gamma_2}^{II} = 0 \quad , \quad \text{em} \quad \Omega_2 \qquad (VI.7)$$

sujeita à condição de contorno de radiação, que como já foi

visto é automaticamente satisfeita, e à condição de contorno no contorno Γ_2.

Assim, para simular um comportamento único para o contorno ficticio Γ_2, supõe-se que haja um equilíbrio de vazões por elemento. Isto é, a vazão num determinado elemento i, é a mesma calculada pela região Ω_1 ou pela região Ω_2.

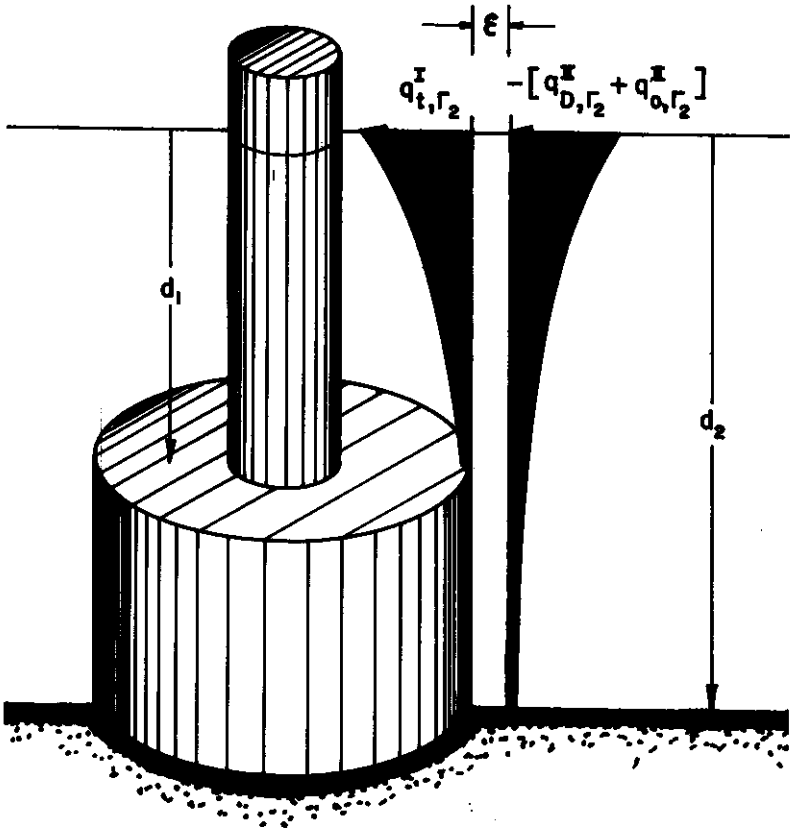


Fig. VI-5 _ Compatibilidade no contorno Γ_2

A Figura VI.5 acima mostra os perfis de velocidade, antes e depois do contorno da base submersa.

Então, tomando-se o fluxo constante através do conjunto do elemento, tem-se:

$$q^{I}_{t,\Gamma_2} \int_{-d_1}^{o} \frac{\cosh\left[K_1 \cdot (z+d_1)\right]}{\cosh\left(k_1 \cdot d_1\right)} dz \cdot \ell_i =$$

(VI.8)

$$= - \; q^{II}_{D,\Gamma_2} - q^{II}_{o,\Gamma_2} \int_{-d_2}^{o} \frac{\cosh\left(k_2 \cdot (z+d_2)\right.}{\cosh\left(k_2 \cdot d_2\right)} dz \cdot \ell_i$$

onde o sinal negativo aparece por causa das normais calculadas para a região Ω_1, $\underset{\sim}{n}_1$, e para a região Ω_2, $\underset{\sim}{n}_2$, terem sentidos opostos.

Resolvendo-se as integrais e reagrupando, obtem-se:

$$cc \cdot q^{I}_{t,\Gamma_2} + q^{II}_{D,\Gamma_2} + q^{II}_{o,\Gamma_2} = 0 \qquad (VI.9)$$

onde a constante cc é

$$cc = \frac{\tanh\,(k_1 d_1)}{\tanh\,(k_2 d_2)} \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

e

$$\underset{\sim}{q}^{I}_{t,\Gamma_2} = \underset{\sim}{V}_n$$

Logo, o sistema para a região Ω_2, será:

$$\nabla^2 \phi^{II}_{D,\Gamma_2} + k^2_2 \phi^{II}_{D,\Gamma_2} = 0 \quad , \quad \text{em} \quad \Omega_2 \qquad \text{(VI.10)}$$

$$q^{II}_{D,\Gamma_2} + q^{II}_{o,\Gamma_2} + cc \cdot V_n = 0 \quad , \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \qquad \text{(VI.11)}$$

que, na forma matricial, torna-se:

$$\left(\underset{\approx}{H}^{II}_{\Gamma_2,\Gamma_2} \right) \cdot \left\{ \underset{\sim}{\phi}^{II}_{D,\Gamma_2} \right\} = \left(\underset{\approx}{G}^{II}_{\Gamma_2\Gamma_2} \right) \cdot \left\{ \underset{\sim}{q}^{II}_{0,\Gamma_2} + cc \cdot \underset{\sim}{V}_n \right\} \qquad \text{(VI.12)}$$

onde,

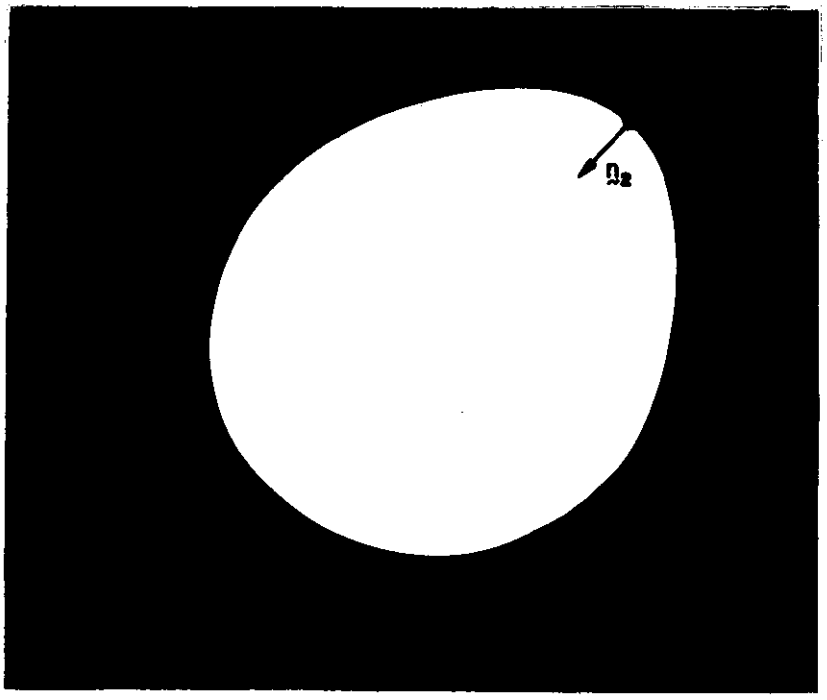
$$\underset{\sim}{q}^{II}_{0,\Gamma_2} = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{n}_2} \underset{\sim}{\phi}^{II}_{0,\Gamma_2}$$

$$cc = \frac{\tanh (k_1 d_1)}{\tanh (k_2 d_2)} \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

$$\underset{\sim}{V}_n = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{n}_1} \underset{\sim}{\phi}^{I}_{t,\Gamma_2}$$

Deve ser observado que a normal considerada para a região Ω_2, $\underset{\sim}{n}_2$, difere da normal $\underset{\sim}{n}_1$ segundo a região Ω_1, sobre o mesmo contorno Γ_2, como mostram as Figuras VI.4 e VI.6. Isto é, se calculada, usando-se a mesma

definição (vetor unitário normal ao contorno Γ_2 e externo ao meio fluido Ω_2).



Por sua vez, as constantes k_1 e k_2 devem ser calculadas usando-se a relação de dispersão, equação (V.4), como:

$$\frac{w^2}{g} = k_1 \tanh (k_1 d_1) \quad ; \quad \text{e} \qquad \text{(VI.13)}$$

$$\frac{w^2}{g} = k_2 \tanh (k_2 d_2) \qquad \text{(VI.14)}$$

onde,

$w = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular da onda incidente

g - é aceleração da gravidade

$k_1 = \frac{2\pi}{L_1}$ é o número de onda, calculado na região Ω_1 de profundidade d_1

$k_2 = \frac{2\pi}{L_2}$ é o número de onda, calculado na região Ω_2 de profundidade d_2

Assim, está se assumindo implicitamente que a onda ao mudar de profundidade, isto é. ela se propagava em Ω_2 com profundidade d_2 e passou a se propagar em Ω_1 com profundidade d_1, manteve o mesmo período, porém variou o seu comprimento.

VI.4 - Acoplamento dos Dois PVC's

Para a região Ω_1, pode-se reescrever a equação (VI.4), como

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{H}^I_{\Gamma_1\Gamma_1} & \underset{\sim}{H}^I_{\Gamma_1\Gamma_2} \\ \underset{\sim}{H}_{\Gamma_2\Gamma_1} & \underset{\sim}{H}_{\Gamma_2\Gamma_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^I_{t,\Gamma_1} \\ \underset{\sim}{\phi}^I_{t,\Gamma_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{G}^I_{\Gamma_1\Gamma_1} & -\underset{\sim}{G}^I_{\Gamma_1\Gamma_2} \\ \underset{\sim}{G}^I_{\Gamma_2\Gamma_1} & -\underset{\sim}{G}_{\Gamma_2\Gamma_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{V}_n \end{Bmatrix}$$

(VI.15)

e, analogamente, para a região Ω_2, toma-se a equação (VI.12) como:

$$\left[\underset{\sim}{H}^{II}{}_{\Gamma_2,\Gamma_2}\right] \cdot \left\{\underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_2} \; -\underset{\sim}{\phi}^{II}{}_{0,\Gamma_2}\right\} = \left[\underset{\sim}{G}^{II}{}_{\Gamma_2\Gamma_2}\right] \cdot \left\{q^{II}{}_{0,\Gamma_2} + cc \cdot \underset{\sim}{V}_n\right\}$$

(VI.16)

onde, assumiu-se a continuidade dos potenciais ao longo do contorno Γ_2, isto é, que:

$$\underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_2} = \underset{\sim}{\phi}^{II}{}_{D,\Gamma_2} + \underset{\sim}{\phi}^{II}{}_{0,\Gamma_2}$$

ou (VI.17)

$$\underset{\sim}{\phi}^{II}{}_{D,\Gamma_2} = \underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_2} - \underset{\sim}{\phi}^{II}{}_{0,\Gamma_2}$$

Como as incógnitas, $\underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_1}$, $\underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_2}$ e $\underset{\sim}{V}_n$ aparecem tanto na equação (VI.15) quanto na equação (VI.16), pode-se acoplá-las num único sistema de forma:

$$\begin{bmatrix} \underset{\approx}{H}^{I}{}_{\Gamma_1\Gamma_1} & \underset{\approx}{H}^{I}{}_{\Gamma_1\Gamma_2} & \underset{\approx}{G}^{I}{}_{\Gamma_1\Gamma_2} \\ \underset{\approx}{H}^{I}{}_{\Gamma_2\Gamma_1} & \underset{\approx}{H}^{I}{}_{\Gamma_2\Gamma_2} & \underset{\approx}{G}^{I}{}_{\Gamma_2\Gamma_2} \\ \underset{\approx}{0} & \underset{\approx}{H}^{II}{}_{\Gamma_2\Gamma_2} & -cc.\underset{\approx}{G}^{II}{}_{\Gamma_2\Gamma_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_1} \\ \underset{\sim}{\phi}^{I}{}_{t,\Gamma_2} \\ \underset{\sim}{V}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{G}^{I}{}_{\Gamma_1\Gamma_1} & \underset{\approx}{0} & \underset{\approx}{0} \\ \underset{\approx}{G}^{I}{}_{\Gamma_2\Gamma_1} & \underset{\approx}{0} & \underset{\approx}{0} \\ \underset{\approx}{0} & \underset{\approx}{G}^{II}{}_{\Gamma_2\Gamma_2} & \underset{\approx}{H}^{II}{}_{\Gamma_2\Gamma_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ q^{II}{}_{0,\Gamma_2} \\ \underset{\sim}{\phi}^{II}{}_{0,\Gamma_2} \end{Bmatrix}$$

(VI.18)

Assim, resolvendo-se este sistema linear, obtem se os valores dos potenciais totais ao longo dos contornos Γ_1 e Γ_2. E, conforme já foi visto no Capítulo V, com as

equações (V.9), (V.10), (V.11), (V.12) e (V.13), pode-se obter os valores de pressão, força e momento atuantes sobre o obstáculo.

Para esse sistema, analogamente ao que foi feito para o caso de termos uma única região Ω, pode-se separar a parte real da imaginária, com o objetivo de se obter uma melhor eficiência computacional.

VII - APLICAÇÕES

VII.1 - Aplicação do MEC a Pilares de Seção Arbitrária Constante em Toda a Profundidade

O método dos elementos de contorno foi aplicado a uma série de problemas de difração de ondas. Com o objetivo de avaliar a precisão dos programas desenvolvidos, iniciou-se por analisar estruturas isoladas de seções circulares, quadradas e elípticas, das quais se conhecem soluções clássicas.

- *Pilar circular isolado*

O primeiro exemplo considerado foi o pilar circular isolado, para o qual se conhece a solução analítica dada por MACCAMY e FUCHS (1954) (32). As Figuras VII.1 e VII.2 apresentam o coeficiente efetivo de inércia e a fase da força na direção do eixo "x", obtida usando-se uma malha de 24 elementos de contorno, para vários valores de "ka".

Como pode ser visto nas figuras, os resultados aproximam-se bem da solução exata, inclusive para os pontos com um baixo número de onda (ka < 0.1) para o qual algumas funções de Bessel não se comportam bem. Por exemplo, a solução exata quando ka tende a zero é $C_m = 2$ e obteve-se $C_m = 1.978$ para ka = 0.0001.

- *Pilar quadrado isolado*

Esta situação é de considerável importância no projeto de estruturas costeiras e de certos tipos de reserva-

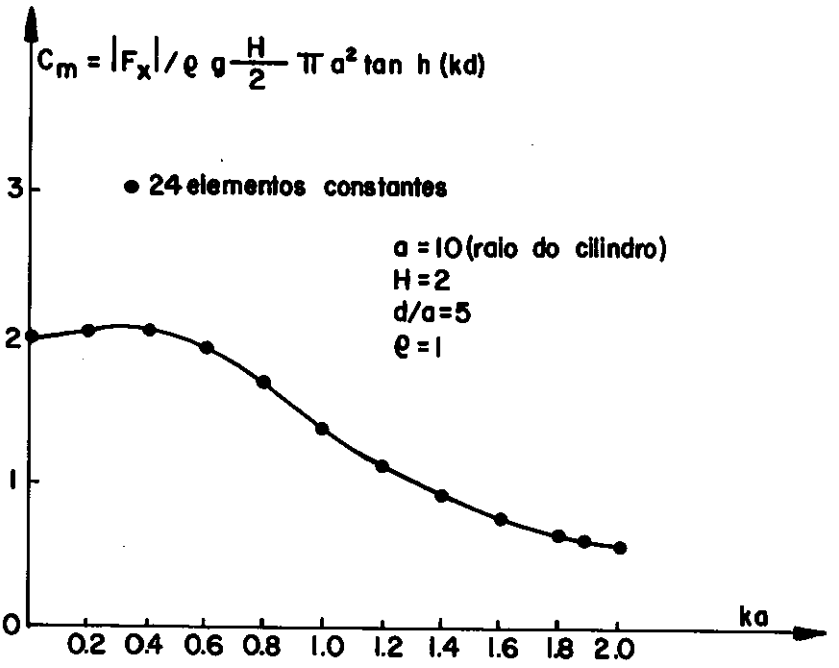


Fig. VII-1 _ Coeficiente de inércia efetivo da força horizontal sobre um cilindro circular, $\alpha = 0°$

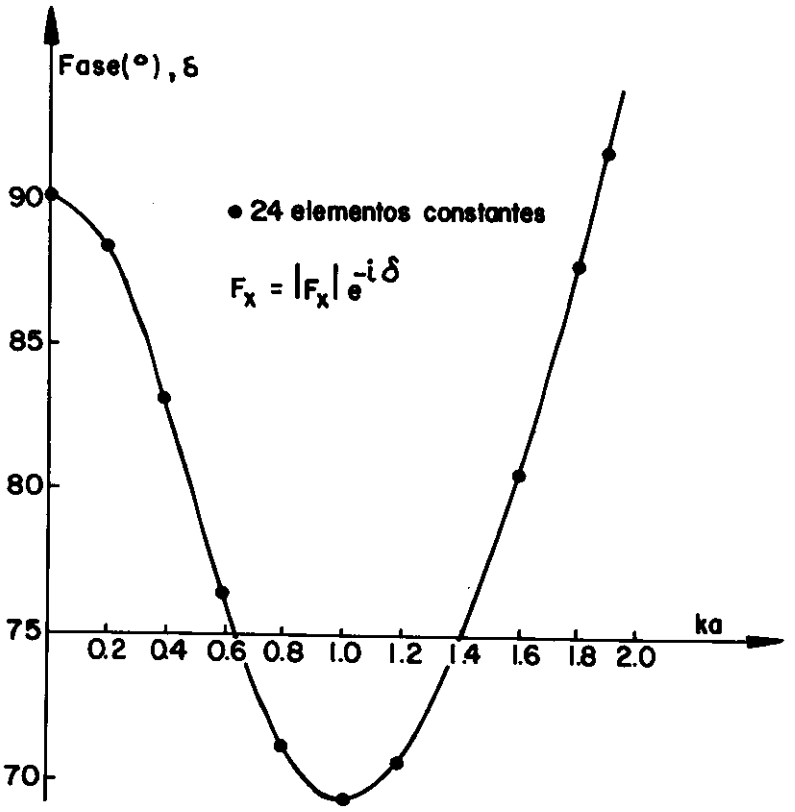


Fig. VII-2 _ Fase da força horizontal sobre um cilindro circular, $\alpha = 0°$

tórios de óleo. Apesar de não se ter disponível uma solução exata, foram feitas comparações com programas mais gerais e resultados experimentais.

Os resultados de amplitude e fase da força horizontal, obtidos com malhas de 24 e 48 elementos, estão mostrados nas Figuras VII.3 a VII.6, para ângulos de incidência de 0^0 e 45^0.

Estes resultados apresentam boa concordância com os apresentados por MOGRIDGE e JAMIESON (1976) (33), ISAACSON (1979,b) (30) e AU e BREBBIA (1983) (21).

Nota-se que a intensidade da força horizontal varia pouco com o ângulo de ataque, enquanto o mesmo não acontece com a fase. Também, conforme k tende a zero, o coeficiente C_m tende ao valor do coeficiente de inércia verdadeiro 2,19 dado por BRATTER e outros (1958) (23).

- *Pilar elíptico isolado*

Os resultados obtidos para dois ângulos de incidência, $\alpha = 30^0$ e $\alpha = 60^0$, estão plotados nas Figuras VII.8 e VII.9 respectivamente, e apresentaram uma boa aproximação da solução analítica de GODA e YOSHIMURA (1972) (27), que usaram separação de variáveis, e com os resultados numéricos de AU e BREBBIA (1983) (21) para uma malha de 16 elementos de contorno quadráticos.

Este problema é mais complexo que os anteriores, e uma diferença considerável pode ser notada entre os resultados obtidos usando uma discretização mais grosseira ou

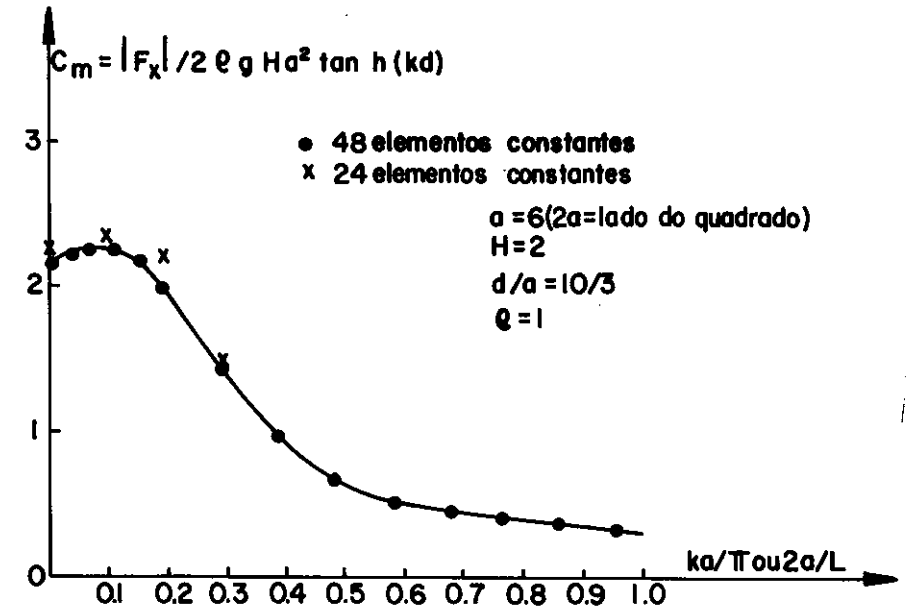


Fig. VII – 3 _ Coeficiente de inércia efetivo da força horizontal sobre um pilar quadrado, $\alpha = 0°$

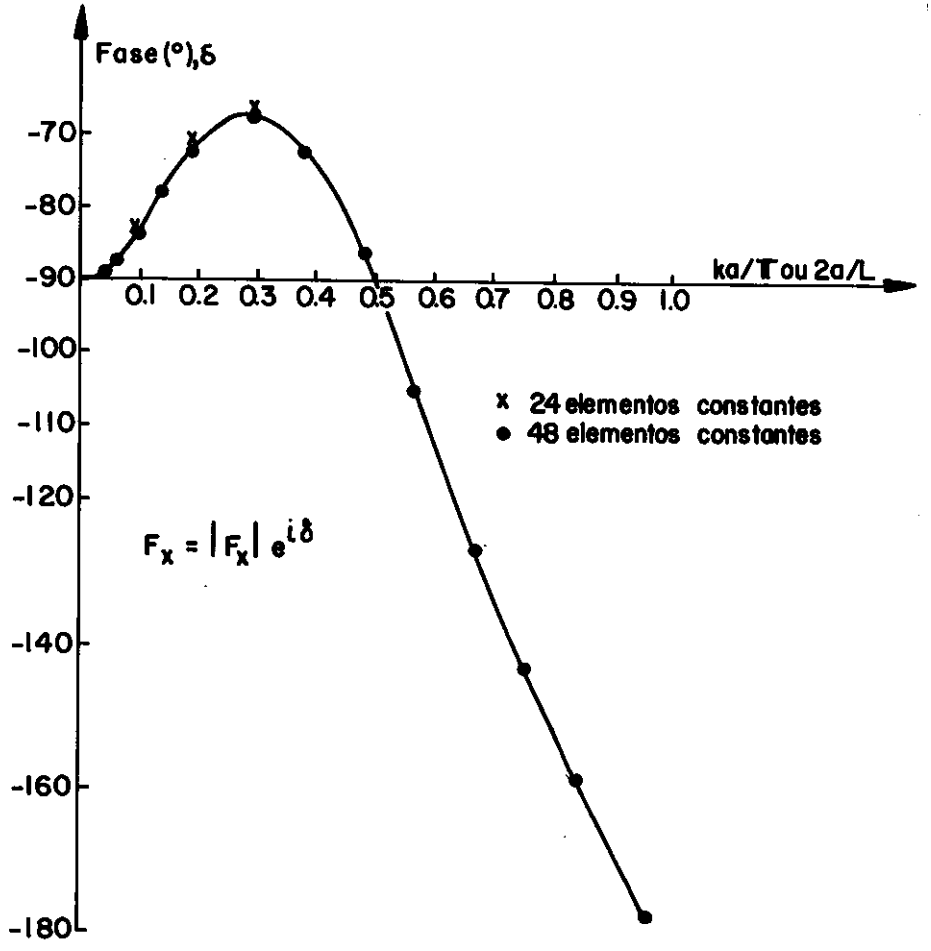


Fig. VII – 4 _ Fase da força horizontal sobre um pilar quadrado, $\alpha = 0°$

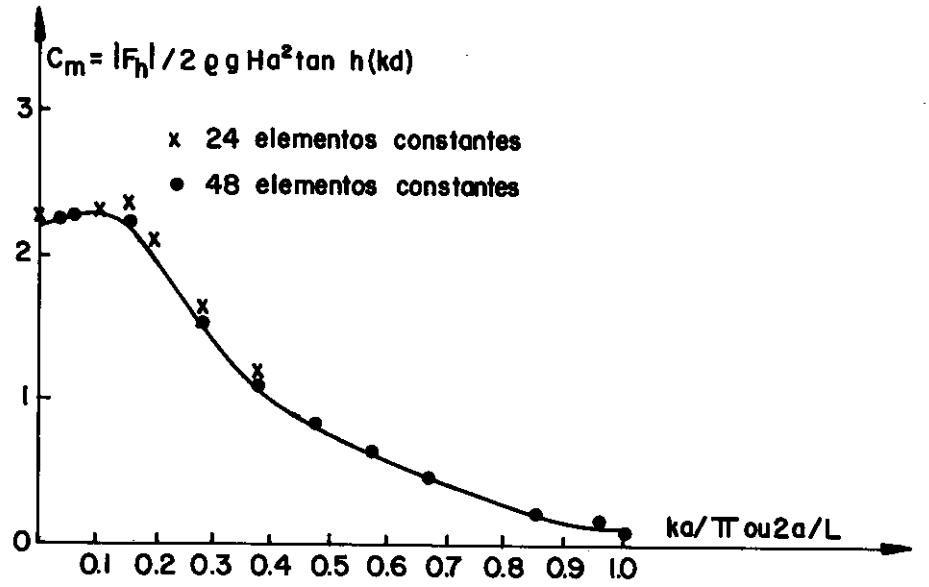


Fig. VII-5 _ Coeficiente de inércia efetivo da força horizontal sobre um pilar quadrado, $\alpha = 45°$

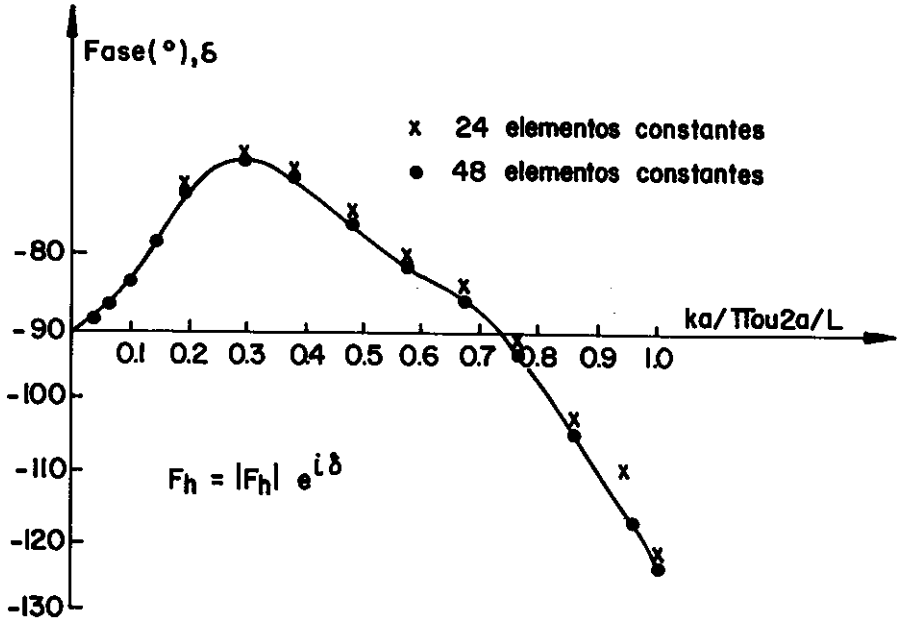
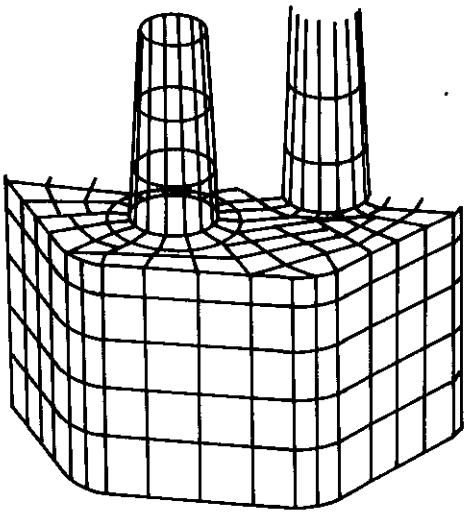
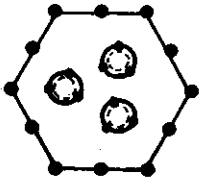


Fig. VII-6 _ Fase da força horizontal sobre um pilar quadrado, $\alpha = 45°$



(a) exemplo de malha para análise tridimensional de uma plataforma gravitacional



(b) exemplo de uma malha para uma análise bidimensional

Figura VII-7

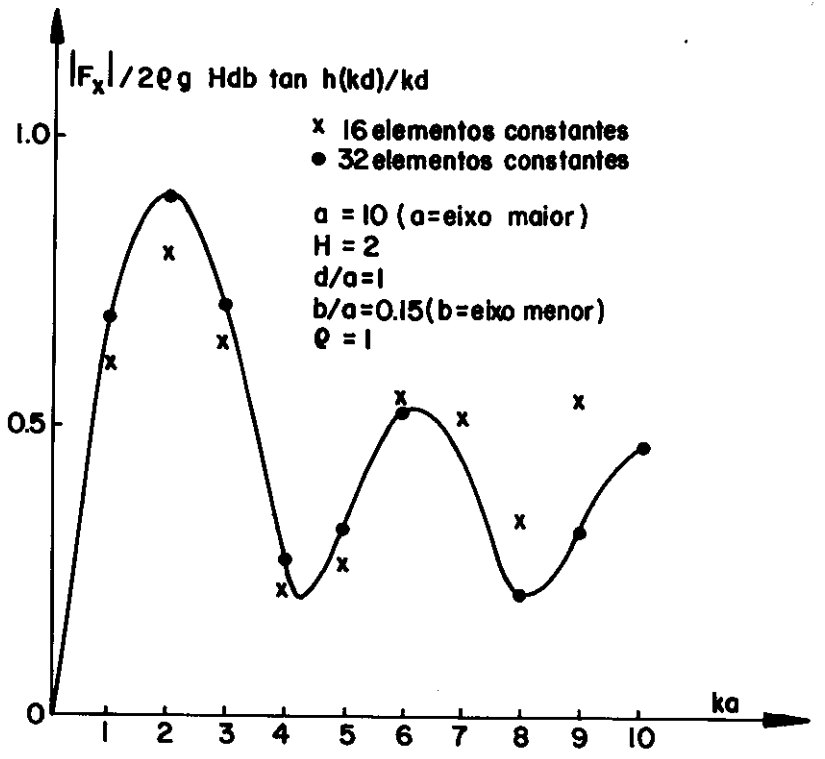


Fig. VII-8 _ Coeficiente adimensional de força na direção de X para um pilar elíptico, $\alpha = 30°$

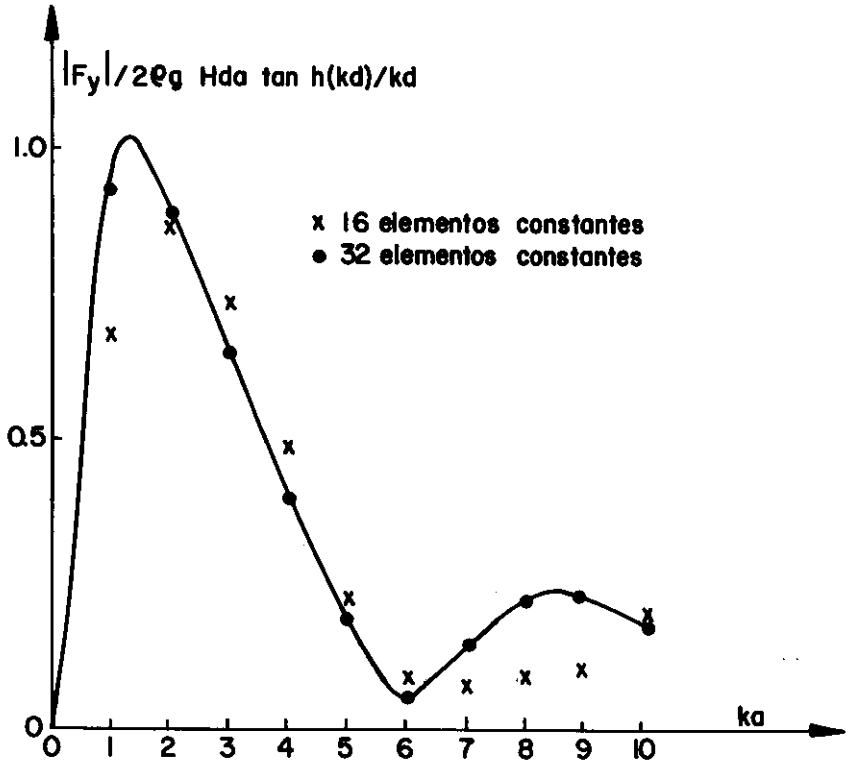


Fig. VII-9 _ Coeficiente adimensional de força na direção de Y para um pilar elíptico, $\alpha = 60°$

mais refinada.

Como mostrado por AU e BREBBIA (1983) (21), resultados melhores podem ser conseguidos para um mesmo número de elementos, quando se refina a discretização perto do eixo maior da elipse, onde há uma variação maior na geometria da seção.

- *Interação entre pilares circulares*

Este exemplo foi iniciado considerando-se um par de cilindros de mesmo raio, conforme esquema da Figura VII.10; o objetivo é mostrar como as cargas em um cilindro são influenciadas pela presença do outro, através de um coeficiente que é a razão entre a força sobre o cilindro de teste e a força sobre um cilindro isolado, nas mesmas condições.

Resultados foram obtidos usando uma malha de 24 elementos de contorno para cada pilar, para três diferentes ângulos de incidência ($\alpha = 0^0$, 45^0, 90^0), ver Figuras VII.12 a VII.15. Estes resultados comparam bem com os apresentados por SPRING e MONKMEYER (1974) (36) e ISAACSON (1979.c) (31).

Como pode ser visto nestas figuras, o aumento da força é mais significativo quando o cilíndro vizinho está diretamente atrás do de teste. Neste caso, a força sobre o cilindro de teste pode ser aumentada em até 50%. Observou-se também que quando $k \to 0$ o coeficiente R não converge para 1.0, conforme sugerido por ISAACSON (1979.c) (31).

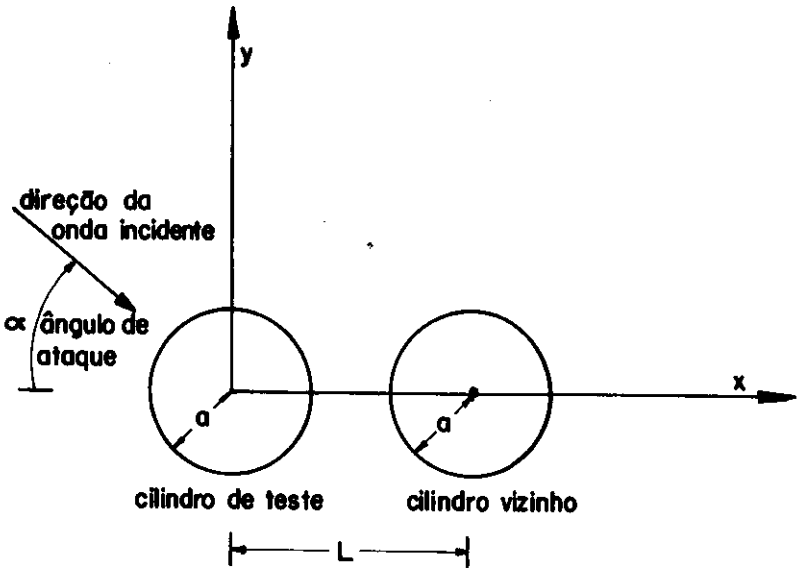


Fig. VII-10 _ Esquema para análise de interação entre um par de cilindros circulares

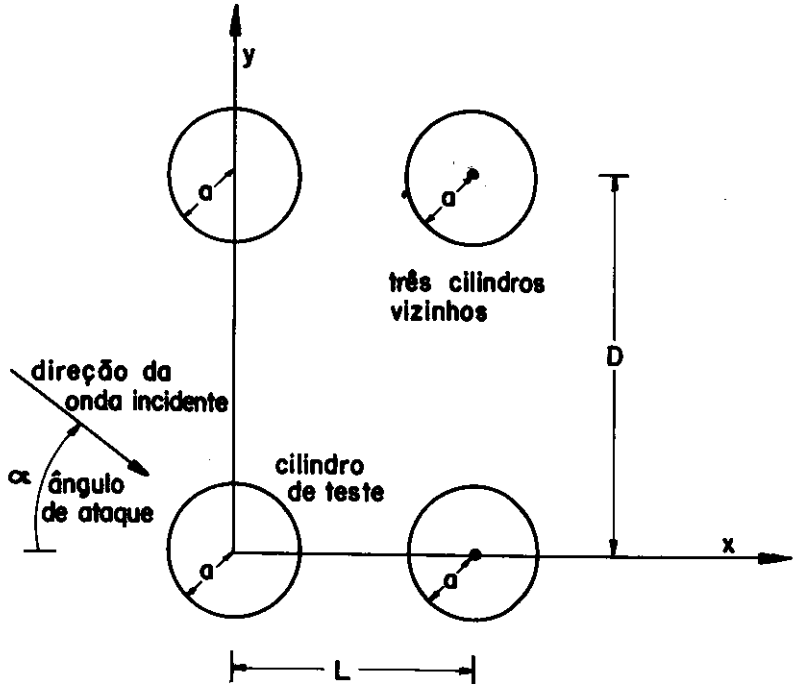


Fig. VII-11 _ Esquema para análise da interação entre quatro cilindros circulares

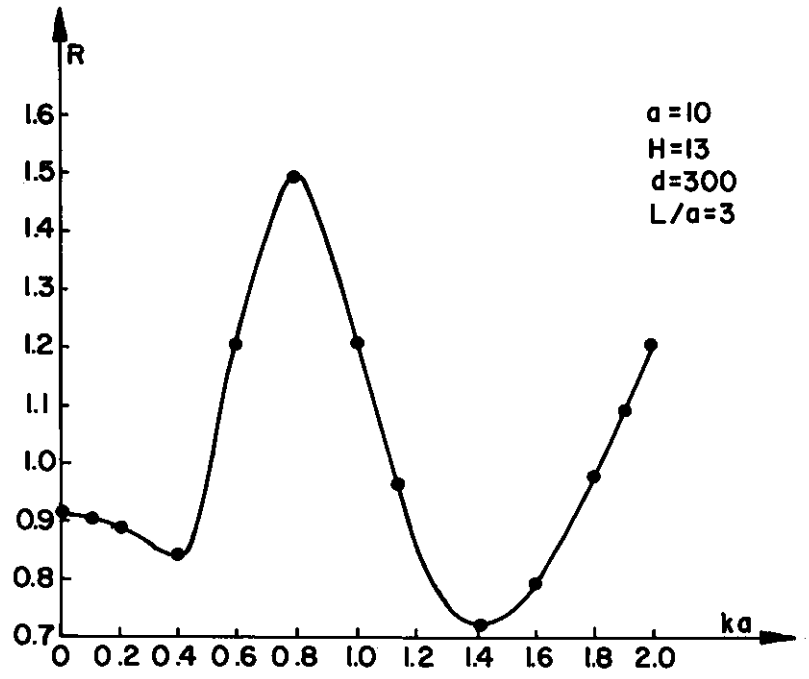


Fig.VII-12 _Razão de forças para um par de pilares circulares, $\alpha = 0°$ (R-razão entre a força horizontal sobre o pilar de teste e a força sobre um pilar isolado nas mesmas condições)

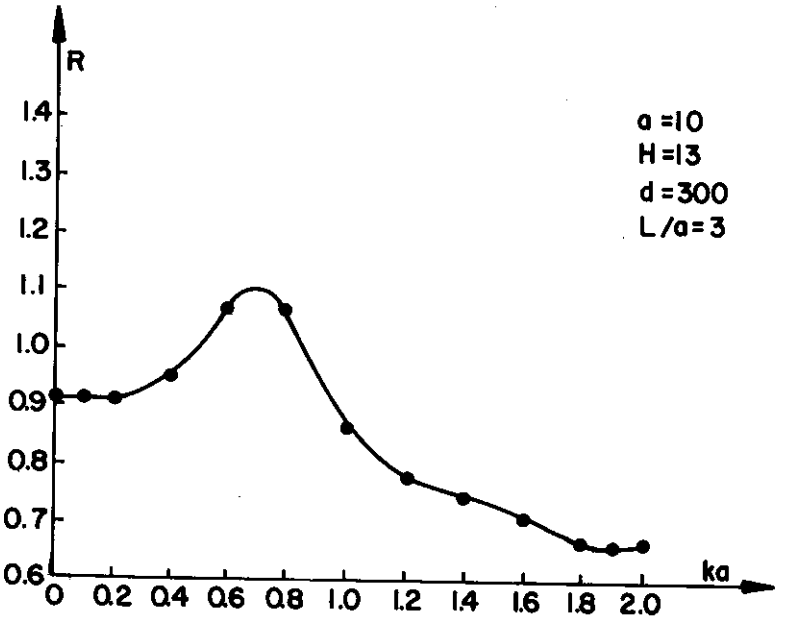


Fig.VII-13 _Razão de forças para um par de pilares circulares, $\alpha = 0°$ (R-razão entre a força horizontal sobre o pilar vizinho e a força sobre um pilar isolado nas mesmas condições)

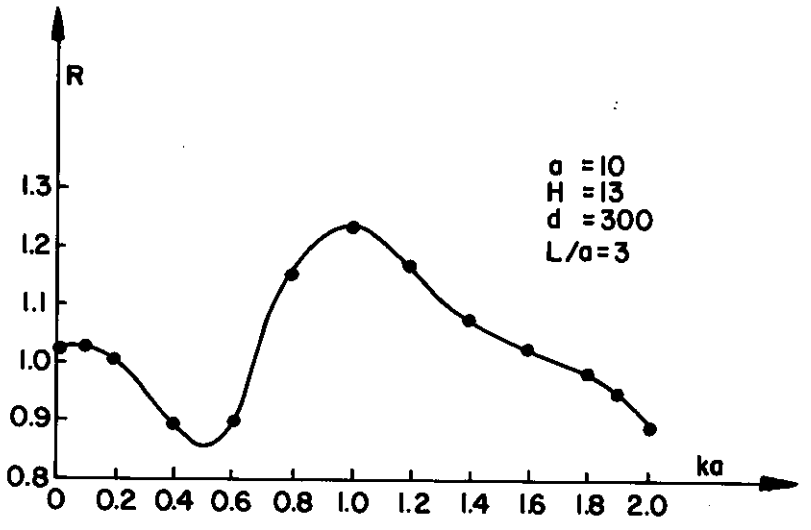


Fig.VII-14 _Razão de forças para um par de pilares circulares, $\alpha = 45°$ (R-razão entre a força horizontal sobre o pilar de teste e a força sobre um pilar isolado nas mesmas condições)

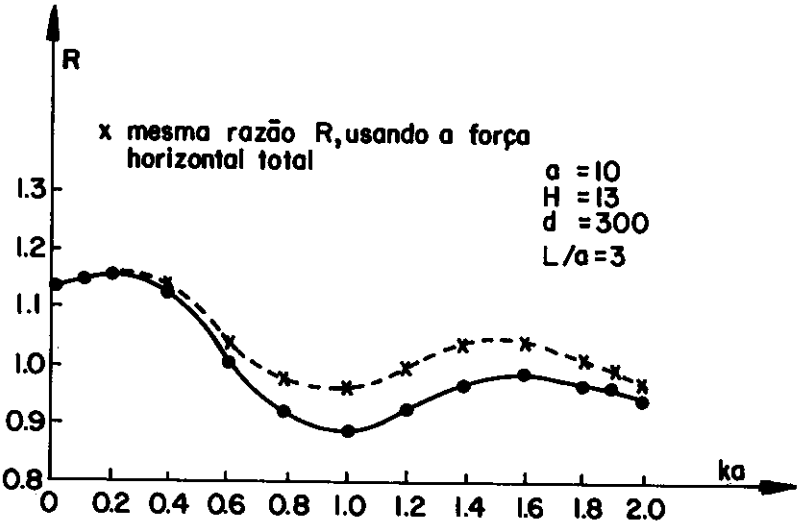


Fig.VII-15 _Razão de forças para um par de pilares circulares, $\alpha = 90°$ (R-razão entre a força na direção y sobre o pilar de teste e a força sobre um pilar isolado nas mesmas condições)

No caso de $\alpha = 90^0$ a força na direção do eixo "y" sobre cada pilar tem a mesma intensidade e o mesmo sentido, enquanto que as forças na direção de "x" têm a mesma intensidade porém sentidos opostos, por causa da simetria. As forças na direção de "x" são geralmente pequenas, particularmente para pequenos valores de ka.

Outra configuração de interesse prático é o caso de quatro cilindros, conforme o esquema da Figura VII.11. Muitas plataformas de perfuração e produção têm quatro grandes pernas relativamente próximas. Estes casos foram estudados por CHAKRABARTY (1978) (25) através de uma solução analítica envolvendo expansões da função de Bessel, sendo o método empregado uma extensão do apresentado por SPRING e MONKMEYER (1974) (36).

O MEC pode ser aplicado com igual facilidade para tais problemas. Resultados obtidos para uma malha de 24 elementos para cada pilar estão apresentados nas Figuras VII.16 e VII.17, mostrando os efeitos de interferência sobre o cilindro de teste para $\alpha = 0^0$ e $\alpha = 45^0$ e vários valores de ka.

VII.2 - Aplicações do MEC a Estruturas Compostas

Este item foi desenvolvido com base na divisão da região fluida em sub-regiões onde a profundidade é constante.

Assim, apareceu um outro fator de aproximação, além de se assumir a variação hiperbólica do potencial com a profundidade, que é a condição de compatibilidade de fluxo no

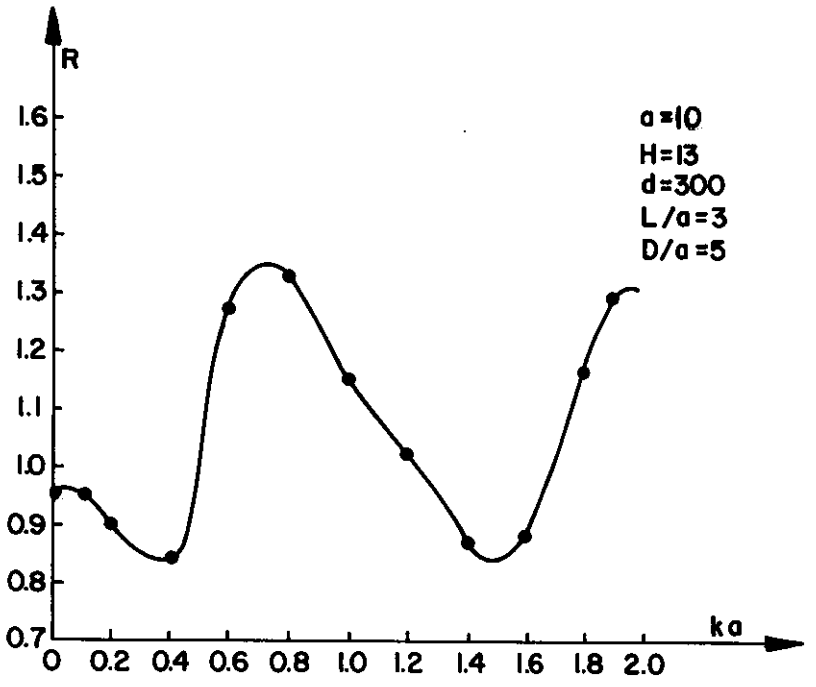


Fig.VII-16 - Razão de forças para quatro pilares circulares, $\alpha = 0°$ (R - razão entre a força horizontal sobre o pilar de teste e a força sobre um pilar isolado nas mesmas condições)

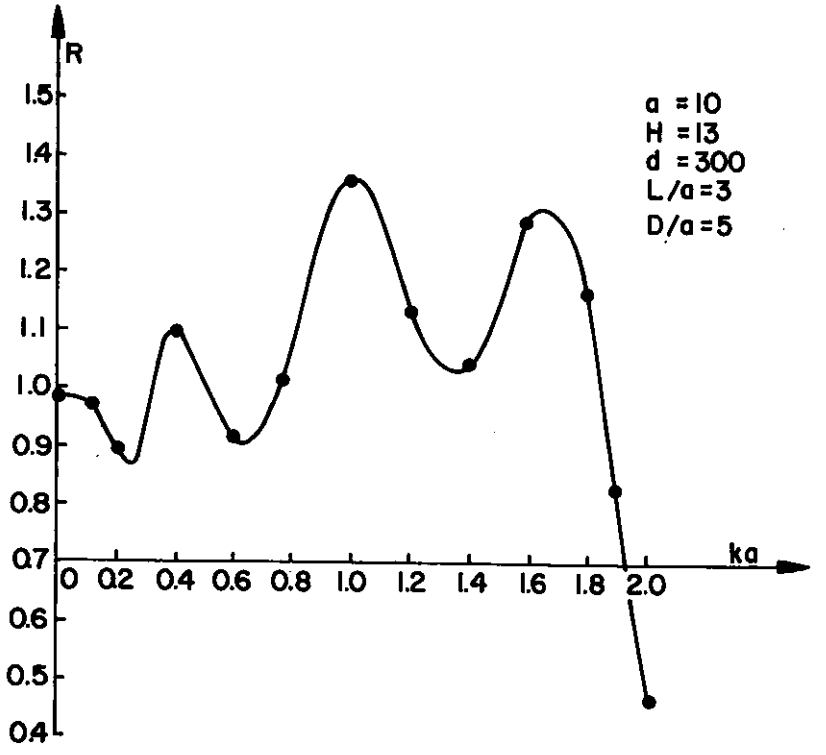


Fig.VII-17 - Razão de forças para quatro pilares circulares, $\alpha = 45°$ (R - razão entre a força horizontal sobre o pilar de teste e a força sobre um pilar isolado nas mesmas condições)

contorno entre as duas regiões de profundidades distintas.

Então, foram rodados alguns exemplos e os resultados obtidos comparados com os apresentados na literatura, tanto com métodos bi-dimensionais como tri-dimensionais.

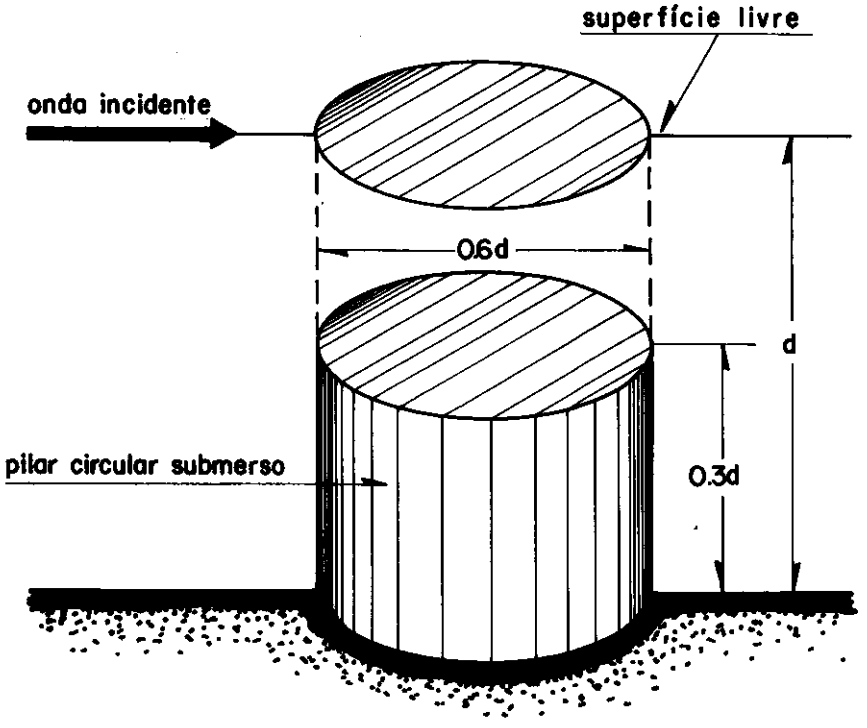
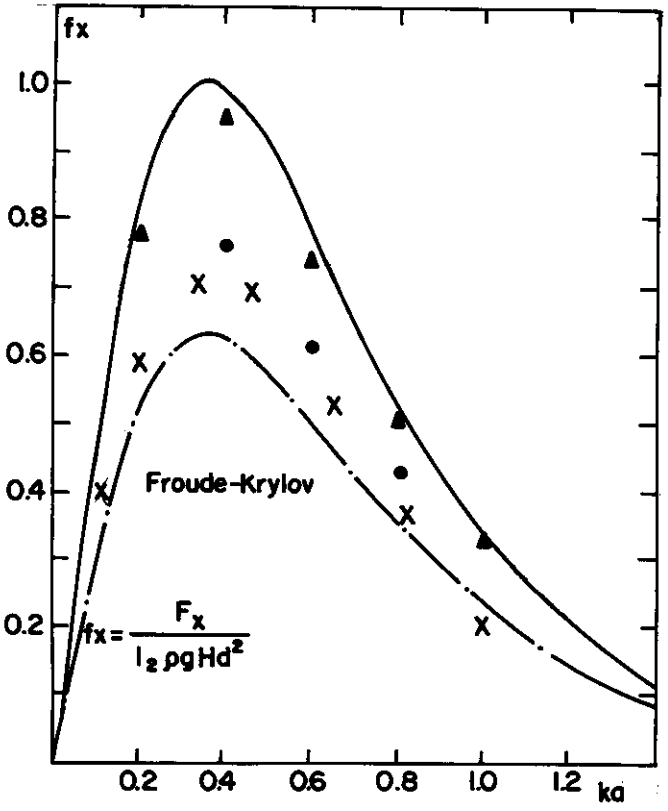


Fig. VII-18_Pilar Submerso

- *Pilar cilíndrico submerso*

O exemplo considerado é o de um pilar circular submerso, cuja configuração obedece ao esquema da Figura VII.18.

Foi usada inicialmente uma malha de 12 elementos constantes. Os resultados foram comparados com os apre-



▲ 3-D Elementos finitos, Zienkiewicz e Bettess [ ]

● 2-D Elementos finitos, Zienkiewicz e Bettess [ ]

x 2-D Elementos de contorno (calculado)

—— Resultados de Hogben e Standing

Fig. VII-19_Coeficiente adimensional para a força horizontal sobre um pilar submerso

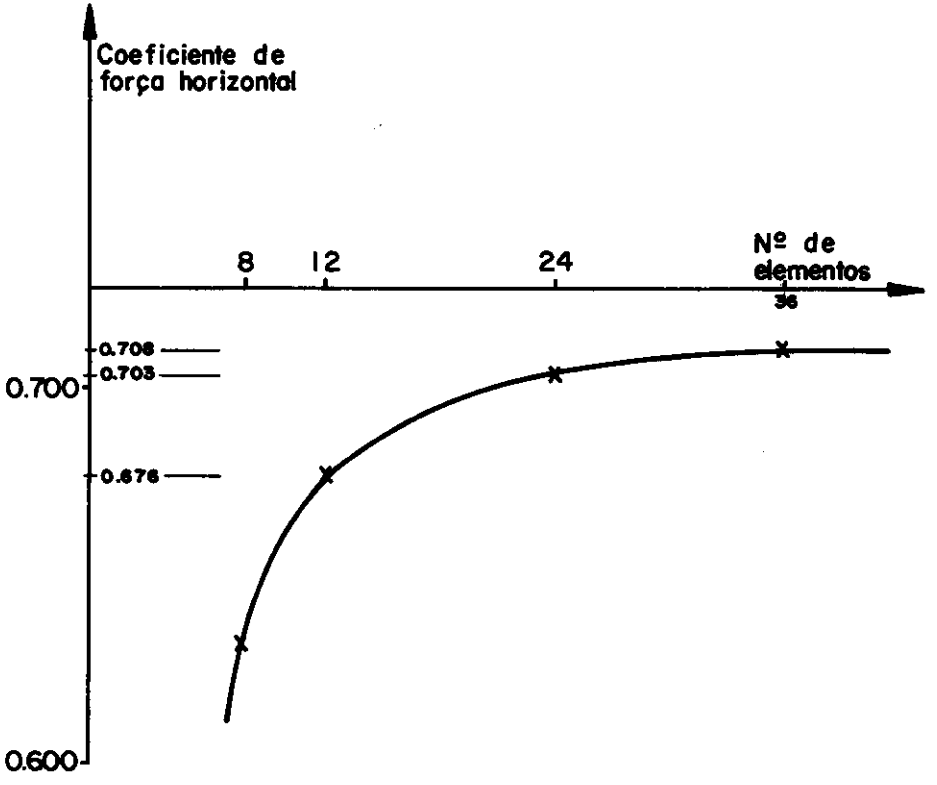


Fig. VII-20_Convergência para o pilar circular submerso com onda de 12 segundos

PERÍODO (seg)	NÚMERO DE ONDA	COEFICIENTES DE FORÇA HORIZONTAL				ÂNGULO DE FASE
T	K	fx/8 elem	fx/12 elem	fx/24 elem	fx/36 elem	ρ/24 elem
30	0.011885	0.360	0.385	0.401	0.403	-89.893
20	0.018417		0.537	0.558	0.562	-89.759
15				0.664	0.669	-89.575
12	0.034297	0.597	0.676	0.703	0.708	-89.357
10	0.044607	0.631	0.641	0.666	0.671	-89.153
9	0.052752	0.599	0.581		0.608	
8	0.064624		0.478	0.496	0.500	-89.056
7	0.082820	0.310	0.331	0.343	0.346	-89.234
6	0.11195	0.160	0.170	0.175	0.176	-89.619

TABELA VII.1 - Pilar Submerso. Coeficiente de Força Horizontal para Diferentes Malhas de Elementos.

sentados pelos programas de elementos finitos bi-dimensionais e tri-dimensional usados por ZIENKIEWICZ e BETTESS (37) e com os resultados do programa que usa a função de Green tri-dimensional dados por HOGBEN e STANDING (28).

Como pode ser observado na Figura VII.19, os resultados na análise pelo MEC apresentam uma boa concordância com os resultados da análise pelo MEF bi-dimensional. Porém, como era de se esperar, para este tipo de problema uma aproximação bi-dimensional subestima a solução exata em aproximadamente 20%, no seu ponto de força máxima.

Por outro lado, por o cilindro possuir uma seção transversal circular, a convergência foi bastante rápida, sendo satisfatórios os resultados obtidos com a malha de apenas 12 elementos, como pode ser visto na Tabela VII.1 e Figura VII.20.

- *Pilares compostos*

Neste exemplo foram analisadas duas estruturas compostas por um pilar circular que se apoia em uma base hexagonal, conforme os esquemas da Figura VII.21.

Nas Figuras VII.22 e VII.23 foram plotados os resultados, junto com os valores obtidos por HOGBEN e STANDING (28) e os de elementos finitos bi e tri-dimensionais de ZIENKIEWICZ e BETTESS (37).

Observa-se, novamente, que os resultados obtidos com o MEC concordam bem com os resultados do MEF bi-dimensional e que ambos subestimam a força total combinada em aproximadamente 14%.

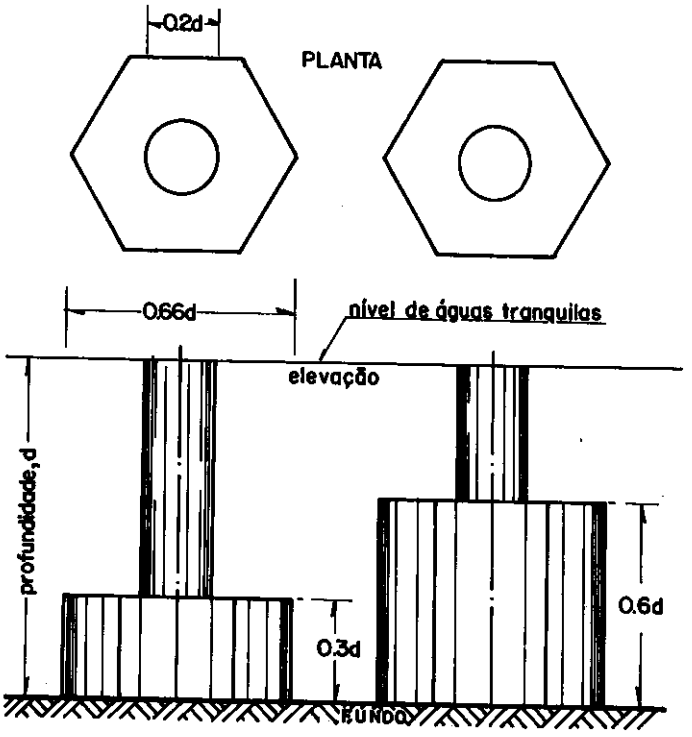
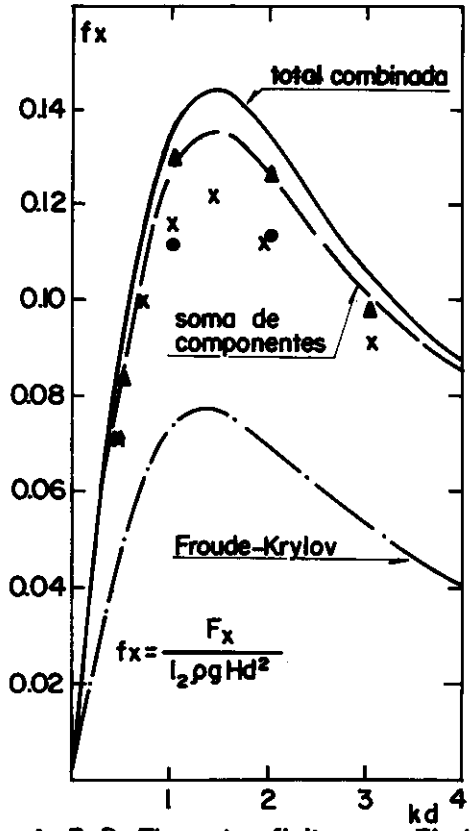
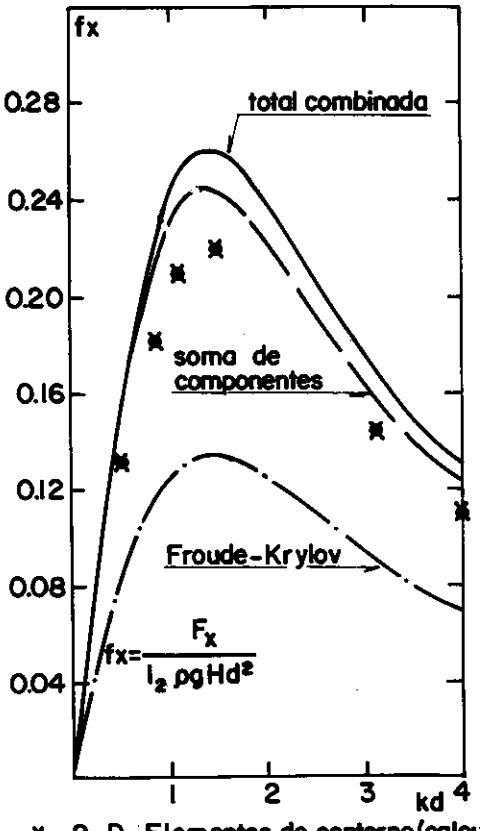


Fig. VII-21_Colunas compostas



▲ 3-D Elementos finitos por Zienkiewikz[ ]
● 2-D Elementos finitos por Zienkiewikz[ ]
x 2-D Elementos de contorno(calculado)
Resultados de Hogben e Standing [ ]

Fig. VII-22 _ Coeficiente adimensional para a força horizontal sobre a estrutura com base de 0.3d



x 2-D Elementos de contorno(calculado)
Resultados de Hogben e Standing [ ]

Fig. VII-23 _ Coeficiente adimensional para a força horizontal sobre a estrutura com base de 0.6d

Ficou também aparente que os efeitos de difração na base submersa são crescentes com o aumento de sua dimensão transversal. Isto porque somente as ondas relativamente longas, que correspondem a pequenos valores de k, penetram o suficiente para causar uma força significativa na base que repousa no fundo.

Os resultados apresentados para colunas compostas mostram que os efeitos de interação são pequenos. Esta característica pode ser observada nos resultados dados por HOGBEN e STANDING (28) e plotados nas Figuras VII.22 e VII.23, onde a força horizontal máxima é subestimada em aproximadamente 5% para os cálculos feitos por soma de componentes. Isto pode trazer vantagens consideráveis em termos de redução de área e de tempo de execução por computador, desde que a estrutura possa ser dividida em um certo número de componentes e os cálculos das forças serem feitos separadamente para cada uma das partes e posteriormente somados.

- *Plataforma gravitacional para águas profundas do tipo CONDEEP.*

Este tipo de plataforma, esquematizado na Figura VII.24, é bastante importante uma vez que emprega simultâneamente os conceitos de produção, armazenagem e transferência de óleo.

Um dos fatores críticos em tais projetos é que a onda de tormenta induz valores excessivos para as forças horizontal e vertical e para o momento de tombamento.

O exemplo estudado é uma plataforma de produ-

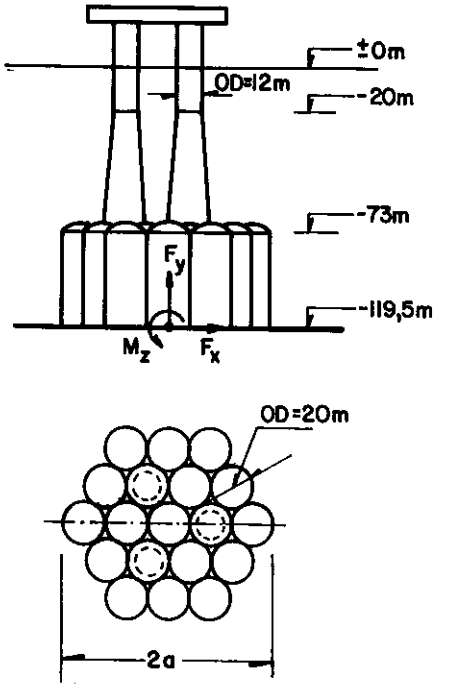


Fig.VII-24_Definição de uma plataforma tipo CONDEEP

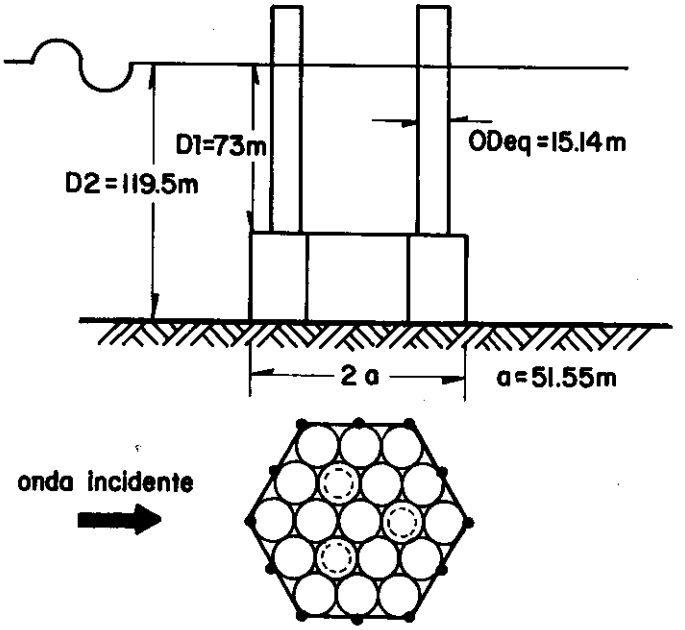


Fig.VII-25_Modelo usado na discretização da estrutura

ção do tipo CONDEEP projetada para uma lâmina d'água de 119,5m a ser instalada no campo de Beryl no Mar do Norte. Os resultados foram comparados com os valores teóricos e experimentais obtidos por GARRISON e outros (26).

A plataforma consiste de uma grande base aproximadamente hexagonal composta por 19 cilindros, três dos quais se estendem até a superfície livre, sendo o diâmetro destes cilindros de 20 metros. As demais dimensões estão especificadas na Figura VII.24.

Analogamente ao que foi feito por GARRISON e outros (26), as condições de projeto escolhidas para a onda correspondem a uma variação no período de 14,0 à 17,0 segundos e uma variação na altura de 21,0 à 29,0 metros.

A Figura VII.25 mostra o modelo usado para representar esta estrutura. A base foi representada por um tronco de pilar hexagonal que envolve os cilindros que a compõe. Já a representação da superestrutura, que é formada por três colunas, cada uma composta por um cilindro superior circular de 12 metros de diâmetro e um tronco de cone inferior com uma base de 20 metros de diâmetro, exigiu que se aproximassem estas colunas por pilares com um diâmetro equivalente porém com seção constante ao longo da profundidade. O critério realizado nesta aproximação foi fazer o volume deslocado pela coluna igual ao volume deslocado pelo pilar equivalente, que fornece:

$$OD_{eq} = \frac{V \cdot 4}{\pi \cdot D_1} = 15.14 \text{ m}$$

onde,

OD_{eq} = diâmetro externo equivalente

V = volume deslocado pela coluna

D_1 = altura molhada da coluna

A Figura VII.26, mostra os resultados em função dos seguintes adimensionais:

$$F_{x(max)}/\rho\ g\ a^3\ ;$$

$$H/2a\ ;\qquad e,$$

$$g\ T^2/a$$

onde convém observar que a força cortante máxima que ocorre na base da estrutura coincide com o módulo desta mesma força complexa. Isto é, se:

$$F = \rho\ .\ e^{i\delta}$$

e,

$$F(t) = \rho\ .\ e^{i\delta}\ .\ e^{-iwt}$$

então,

$$F(t) = \rho\ .\ e^{i(\delta - wt)}$$

e para $t = \frac{\delta}{w}$ obtém-se a força máxima:

$$F_{max} = \rho \quad \text{(módulo do nº complexo)}$$

A análise dos valores encontrados para esta configuração fornece as seguintes conclusões:

a - os resultados obtidos são muito sensíveis à geometria escolhida para representar as três colunas que chegam até a superfície.

b - segundo o critério adotado para representar tais colunas, o resultado usando o MEC em uma formulação bi-dimensional subestima a solução experimental em um máximo de 20%.

c - a eficiência computacional e a facilidade de se formar o modelo aumentam bastante se levarmos em consideração as simetrias geométrica e de carregamento que existem na estrutura.

d - convém ressaltar que, embora o método adotado aproxime a solução, ele pode ser bastante útil para as fases iniciais de um projeto devido ao baixo esforço computacional requerido e à facilidade de se discretizar um modelo bidimensional.

e - uma outra diferença existente entre o modelo proposto e o utilizado por GARRISON (26) é que este último utiliza a teoria de Morison para avaliar as forças nas três colunas que compõem a superestrutura, desde que elas apresentam uma dimensão característica muito inferior ao comprimento de onda, enquanto que o primeiro utiliza a teoria linear da difração para todos os casos.

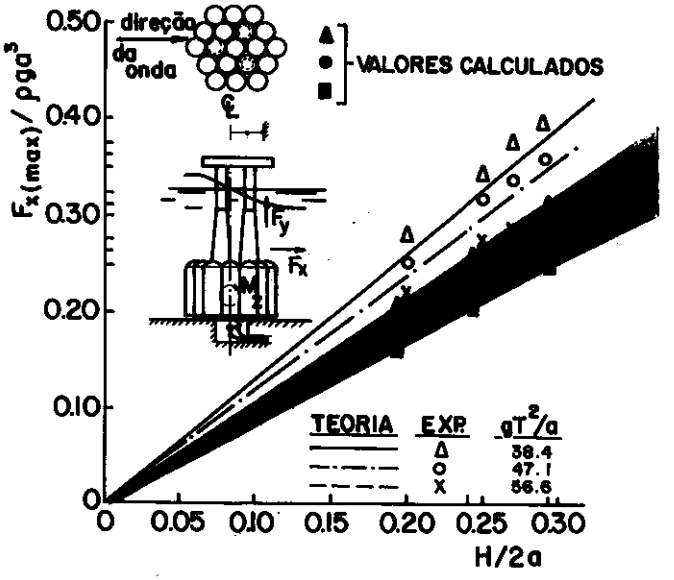


Fig. VII-26_Coeficiente de força horizontal segundo GARRISON [26]

VIII - CONCLUSÕES

Os estudos desenvolvidos e a análise das diversas aplicações permitiram que se tirasse as seguintes conclusões:

1ª - o método proposto é bastante eficiente para se analisar problemas de fluxo potencial, nos quais a formulação bi-dimensional possa ser aplicada, como é o caso dos pilares de seção transversal constante.

2ª - a eficiência computacional e a facilidade de se formar o modelo aumentam bastante se levarmos em conta a simetria geométrica, que diminui o número de coeficientes a serem calculados, e a simetria de carregamento, que diminui a dimensão do sistema linear a ser resolvido.

3ª - as aplicações a estruturas compostas por uma base plana e pilares de seção constante revelaram que a formulação bi-dimensional empregada subestima a solução exata de 14% à 20%, para os casos estudados;

4ª - embora o método adotado subestime a solução, ele pode ser bastante útil para as fases iniciais de um projeto devido ao baixo esforço computacional requerido e a facilidade de se discretizar um modelo bidimensional.

5ª - uma proposta para continuação deste estudo seria montar um algorítmo para solucionar problemas tridimensionais usando a técnica de divisão em sub-regiões, conforme o esquema da Figura VIII.1. Assim, para a região Ω_1 se adotaria uma malha tridimensional discretizando todos os

seus contornos e na qual se usaria como solução fundamental a função $1/r\ (p, Q)$. Já para a região Ω_2, seria usada uma malha bi-dimensional como a que foi desenvolvida neste trabalho. A condição de compatibilidade de fluxo na superfície entre as duas regiões seria dada em termos de igualdade de potenciais e suas derivadas.

Com este modelo, evitar-se-ia o problema de discretização do contorno no infinito e não se restringiria a aplicação a configurações geométricas particulares.

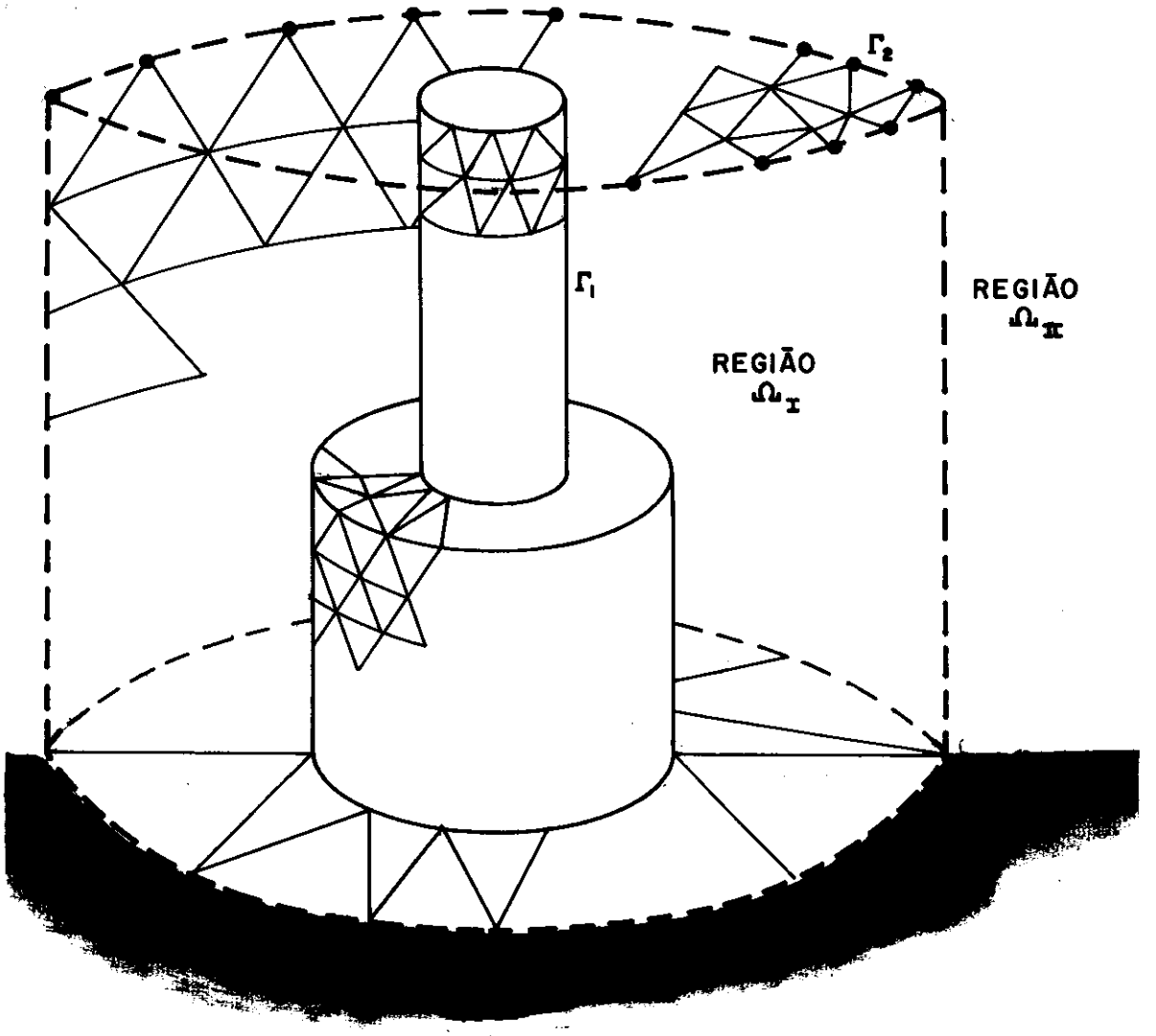


Fig.VIII-1 _ Esquema para cálculo de forças em estruturas tipicamente tridimensionais

BIBLIOGRAFIA

(1) SARPKAYA, T. e ISAACSON, M - 1981. "Mechanics of Wave Forças on Offshore Structures" - Van Nostrand Reinhold Company. New York.

(2) SCHLICHTING, H. - 1968. "Boundary Layer Theory" - Mc Graw-Hill. New York.

(3) LE MÉHAUTÉ, B. - 1976. "An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves" - Springer-Verlag, Dusseldorf.

(4) STOKES, G.G. - 1847. "On the Theory of Oscillatory Waves" - Trans. Comb, Phil. Soc. Vol. 8.

(5) SKJELBREIA, L. e HENDRICKSON, J.A. - 1960. "Fith Order Gravity Wave Theory" - Proc. 7th. Coastal Eng. Conf., The Hague, pp. 184-196.

(6) CHAPPELEAR, J.E. - 1959. "On the Theory of the Highest Waves" - U.S. Army Corps of Engineers, Beach Erasion Board, Tech. Memo No. 116.

(7) McCOWAN, J. - 1891. "On the Solitary Waves". Phil. Mag., Vol. 32, pp.45-58.

(8) KEULEGAN, G.H. e PATTERSON, G.W. - 1940. "Mathematical Theory of Irrotacional Translation Waves" - J.Res. Nat. Bureau Standards, Vol. 24, pp. 46-101.

(9) DEAN, R.G. - 1965. "Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves" - J. Geophys. Res., Vol.70, pp. 4561-4572.

(10) DALRYMPLE, R.A. - 1974. "A Finite Amplitude Wave on a Linear Shear Current" - J.Geophys, Res., Vol. 79, pp. 4498-4504.

(11) DALRYMPLE, R.A. - 1974. "Models for Nonlinear Water Waves in Shear Currents" - Offshore Tech. Conf., Houston, Paper No. OTC 2114, pp.843-856.

(12) LAMBRAKOS, K.F. e BRANNON, H.R. - 1974. "Wave Force Calculations for Stokes and Non-Stokes Waves" -

Proc. Offshore Tech. Conf., Houston, Paper No. OTC 2039, pp. 47-60.

(13) HOGBEN, N. - 1976. "Wave Loads on Structures" - BOSS' 76, Trondheim, Vol. 1, pp. 187-219.

(14) HOGBEN, N., MILLER, B.L., SEARK, J.W. e WORD, G. - 1977. "Estimation of Fluid Loading on Offshore Structures" - Proc. Institution of Civil Engrs., Vol. 63, part 2, pp. 515-560.

(15) SHAW, T.L. - 1979. "Mechanics of Wave-induced forces on Cylinders". Pitman, London.

(16) MADSON, O.S. - 1976. "Coastal Waves Hydrodynamics Theory and Engineering Applications" - MIT Summer Course, Cap. 1.

(17) SOMMERFELD, A. - 1949. "Partial Differential Equations in Physics" - Academic Press, New York.

(18) ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I.A. - 1965. "Handbook of Mathematical Functions" - Dover, New York.

(19) ROSS, S.L. - 1964. "Differential Equations" - WALTHAM, Massachusetts.

(20) SPHAIER, SERGIO HAMILTON - 1981. "Notas de aula da disciplina COV729, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

(21) AU, M.C. and BREBBIA, C.A. - 1983. "Diffraction of Water Waves for Vertical Cylinders Using Boundary Elements" - Appl. Math. Modelling, Vol.7, 106-114.

(22) BAKER, B.B. and COPSON, E.T. - 1950. "The Mathematical Theory of Huygen's Principle" - 2nd edn, Oxford University Press, London.

(23) BRATTER, E.F., Mc NOWN, J.S. and STAIR, L.D. - 1958. "Wave Forces on Submerged Structures" - J. Hyd. Div. ASCE, Vol. 84, 1833/1 - 1833/26.

(24) BREBBIA, C.A. and WALKER, S. - 1979. "Dynamic Analysis of Offshore Structures" - Newnes-Butterworths, London.

(25) CHAKRABARTY, S.K. - 1978. "Wave Forces on Multiple Vertical Cylinders" - J. Waterway Port Coastal and Ocean Div. ASCE, Vol. 104, 147-161.

(26) GARRISON, C.J. et alli - 1974. "Waves Forces on Large Volume Structures - A Comparison Between Theory and Model Tests", OFF. Tech. Conf., OTC 2137, Dallas, Texas.

(27) GODA, Y. and IOSHIMURA, T. - 1972. "Wave Force on a Vessel Tied at Offshore Dolphins" - Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vol. III, 1723-1742.

(28) HOGBEN, N. and STANDING, R.G. - 1976. "Wave Loads on Large Bodies" - Ship Division, National Physical Division, Faggs Road, Feltham, Midllesex.

(29) ISAACSON, M. de St. Q. - 1979.a. "Wave Forces on the Diffraction Regime" - in Mechanics of Wave-Induced Forces on Cylinders, ed. T.L. Shaw, Pitman, London, 68-69.

(30) ISAACSON, M. de St. Q. - 1979.b. "Wave Forces on Large Square Cylinders" - in Mechanics of Wave - Induced Forces on Cylinders, ed. T.L. Shaw, Pitman, London 608-622.

(31) ISAACSON, M. de St. Q. - 1979.c. "Interference Effects Between Large Cylinders in Waves" - J.Petrol. Tech. Vol. 31, 505-512.

(32) MACCAMY, R.C. and FUCHS, R.A. - 1954. "Wave Forces on a Pile: A Diffraction Theory" - Tech. Memo. 69, U. S.Army Corps of Engineers Beach Erosion Board, Washington DC.

(33) MOGRIDGE G,R. and JAMIESON, W.W. - 1976. "Wave Forces on Square Caissons" - Proc. 15th Coastal Eng. Conf., Vol. III, 2271-2289.

(34) MORISON, J.R., O'BRIEN, M.P., JOHNSON, J.W. and SCHAAF, S.A. - 1950. "The Force Exerted by Surface Waves on Piles" - Petrol. Trans. ASCE, Vol. 189 - 149-154.

(35) DEAN, R.G. - 1970. "Relative Validities of Water Wave Theories" - J. Waterways Harbors and Coastal Eng. Div., ASCE, Vol. 96, No. WW1. pp. 105-119.

(36) SPRING, B.H. and MONKMEYER, P.L. - 1974. "Interaction of Plane Waves with Vertical Cylinders" - Proc. 14th Coastal Eng. Conf., Vol. III, 1828-1847.

(37) ZIENKIEWICZ, O.C., BETTESS, P. and KELLY, D.W. - 1978. "The Finite Element Method for Determining Fluid Loadings on Rigid Structures: Two - and Three - Dimensional Formulations, in Numerical Methods in Offshore Engineering, Edited by O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis and K.G. Stagg, Wiley, Chichester.

(38) WROBEL, L.C. - 1981. "Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method, Ph.D. Thesis, University of Southampton.

(39) MASETTI, I.Q. and WROBEL, L.C. - 1984. "A Study of the Interaction Between Cylinders in Wave Using Boundary Elements, Offshore Engineering, Vol.4, Ed. Carneiro, F.L.L.B., Ferrante, A.J. e Batista, R.C., Pentech Press, London.