DETERMINAÇÃO DA CAPACIDADE PORTANTE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DA COLUNA-MODELO

Vera Regina Polillo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:

Antonio Claudio Ferraro Maia
(Presidente)

Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

Lidia da Conceição D. Shehata

Benjamin Ernani Díaz

RIO DE JANEIRO, RJ. - BRASIL

MARÇO DE 1983

POLILLO, VERA REGINA

Determinação da Capacidade Portante de Pilares de Concreto Armado pelo Método da Coluna-Modelo [Rio de Janeiro] 1983.

xii, 211 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Método da Colúna-Modelo do CEB-FIP 2. Flambagem de pilares de concreto armado

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

Aos meus pais

e

ao meu irmão

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Antonio Claudio Ferraro Maia pelo apoio e orientação dispensados na realização deste trabalho.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro pelo estímulo durante todo o curso.

Aos Professores Luiz Fernando Taborda Garcia e Nelson Francisco Favilla Ebecken pela ajuda em várias ocasiões.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear e ao Conselho Nacional de Pesquisas pelo apoio concedido.

À Sueli e à Dina pelo trabalho de datilografia e ao Gilmar pela confecção dos desenhos.

S I N O P S E

Este trabalho apresenta um programa de computador para a determinação da capacidade portante de pilares de concreto armado de acordo com o método da coluna-modelo do CEB-FIP.

Este programa emprega dois procedimentos incrementais-iterativos: um com controle de carga e outro com controle de curvatura. O segundo procedimento é utilizado quando a convergência do primeiro se torna muito lenta e também para a obtenção do ramo descendente da curva carga-flecha.

Tanto a influência das flechas no equilíbrio do pilar como as relações não-lineares tensão-deformação dos materiais são consideradas na análise.

O método do "reduced modulus" é empregado para levar em conta os efeitos da fluência.

O programa de computador é diretamente aplicável a pilar isostático sujeito a esforço normal constante ao longo de seu comprimento, cuja seção transversal (concreto e armadura) é constante e simétrica em relação ao plano das cargas e cuja deformada não apresenta ponto de inflexão e é tangente à vertical na seção mais solicitada.

Este programa pode ser utilizado para determinar, para um dado pilar, a capacidade portante em curta, em longa ou em longa e curta duração. Ele fornece os valores da capacidade portante de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado.

São apresentados alguns exemplos ilustrativos e algumas tabelas que fornecem o momento último de primeira ordem.

S Y N O P S I S

This thesis presents a computer program for the determination of the load-bearing capacity of reinforced concrete columns according to the CEB-FIP's model column method.

This program employs two incremental-iterative procedures: a load controlled procedure and a curvature controlled one. The second procedure is used when the convergence of the first one becomes slow and also in the determination of the descending branch of the load-displacement curve.

Both the influence of the displacements on the equilibrium of the column and the non-linear stress-strain relations for the materials are considered in the analysis.

The reduced modulus method is used to account for the creep effects.

The computer program is directly applicable to an isostatic column subjected to a constant axial force along its length, whose cross-section (concrete and reinforcement) is constant and symmetrical with respect to the plane of the loads and whose deflection curve doesn't have an inflection point and is tangent to the vertical line in the most heavily stressed section.

This program can be used to determine the load-bearing capacity for a given column under the action of either short, long or long-short-time loading. It gives the values of the load-bearing capacity according to both the model column method and the improved model column method.

Some illustrative examples and some tables giving the first order moment capacities are presented.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE COLUNAS 7

II.1 - Introdução 7

II.2 - Carga crítica de Euler 9

II.3 - Comportamento de colunas esbeltas linearmente elásticas comprimidas excentricamente 15

II.4 - Domínio de aplicação da teoria de Euler 18

II.5 - Flambagem inelástica de colunas 20

II.6 - Comportamento das colunas de concreto armado 24

CAPÍTULO III - MÉTODOS PARA ANÁLISE E/OU PROJETO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO RECOMENDADOS PELO CEB 29

III.1 - Introdução 29

III.2 - Método geral 33

III.3 - Método da coluna-modelo 40

III.3.1 - Definição de coluna-modelo 40

III.3.2 - Fundamento do método 42

III.3.3 - Formulação do problema 43

III.3.3.1 - Relação geométrica 44

III.3.3.2 - Relação física 46

III.3.3.3 - Condição de equilíbrio 47

III.3.3.4 - Condição de compatibilidade 47

III.3.3.5 - Critério de instabilidade 48

III.3.3.6 - Tipos de análise 48

III.3.4 - Representação gráfica das condições de equilíbrio 49

III.3.5 - Tabelas e diagramas para a apresentação de resultados numéricos 53

III.3.6 - Domínio de aplicação do método 55

III.3.7 - Método da coluna-modelo melhorado 58

III.3.7.1 - Valor corrigido do momento último de primeira ordem para uma carga axial dada 59

III.3.7.2 - Valor corrigido da carga axial última para uma excentricidade de primeira ordem dada 63

III.3.7.3 - Expressão do fator corretivo α_c 65

III.4 - Método simplificado baseado no estado de equilíbrio 68

III.5 - Método aproximado para o cálculo do momento complementar 71

CAPÍTULO IV - HIPÓTESES E MÉTODO DE CÁLCULO 73

IV.1 - Hipóteses de base 73

IV.1.1 - Hipótese da coluna-modelo 73

IV.1.2 - Seção transversal 74

IV.1.3 - Hipótese das seções planas 75

IV.1.4 - Hipótese das armaduras aderentes 76

IV.1.5 - Hipótese de pequenas mudanças de forma 76

IV.1.6 - Não-linearidade geométrica 76

IV.1.7 - Não-linearidade física 77

IV.1.8 - Comportamento reológico do concreto 78

IV.2 - Hipóteses visando à aplicação numérica 83

IV.2.1 - Diagramas tensão-deformação dos materiais 83

IV.2.1.1 - Concreto 83

IV.2.1.2 - Aço 87

IV.2.2 - Esgotamento da capacidade resistente da seção transversal 92

IV.3 - Método de Cálculo 94

IV.3.1 - Ações e esforços externos 94

IV.3.1.1 - Acréscimos das ações 95

IV.3.1.2 - Acréscimos dos esforços externos 96

IV.3.2 - Análise seccional 98

IV.3.2.1 - Esforços internos 98

IV.3.2.2 - Relação matricial entre os acréscimos dos esforços internos e os acréscimos dos parâmetros de deformação 102

IV.3.3 - Equação de equilíbrio 106

IV.3.4 - Resolução da equação 109

IV.3.4.1 - Cálculo de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$ para $\Delta\lambda$ conhecido 109

IV.3.4.2 - Cálculo de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$ para $\Delta\phi$ conhecido 110

IV.3.5 - Descrição do método de cálculo 112

CAPÍTULO V - PROGRAMA DE COMPUTADOR 125

V.1 - Fluxograma 125

V.2 - Descrição do programa 130

V.2.1 - Dados 130

V.2.2 - Inicialização 134

V.2.3 - Etapas e processos iterativos do cálculo 135

V.2.4 - Impressão dos resultados 137

V.3 - Passos recomendados para os parâmetros controlados 138

V.4 - Precisão do cálculo 139

V.5 - Aplicações do programa 139

CAPÍTULO VI - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 141

VI.1 - Exemplo nº 1 142

VI.2 - Exemplo nº 2 145

VI.3 - Exemplo nº 3 147

VI.4 - Exemplo nº 4 156

CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES 169

Referências bibliográficas 172

Apêndice I - Manual de entrada e saída do programa COLMOD 175

AI.1 - Dados do programa 175

AI.2 - Exemplo de arquivo de dados 180

AI.3 - Saída do programa 182

AI.4 - Exemplo de saída do programa 184

Apêndice II - Listagem do programa COLMOD 191

Nomenclatura 206

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Devido a pressões de ordem técnica e econômica, os engenheiros têm sido levados a projetar estruturas cada vez mais leves. Ao lado da vantagem da redução dos custos diretos e indiretos da construção, existe, no entanto, um aspecto desfavorável: estruturas mais leves resultam, múitas vezes, em estruturas esbeltas, suscetíveis de apresentar o fenômeno da flambagem. A estrutura esbelta requer, portanto, a verificação da segurança contra este fenômeno de instabilidade do equilíbrio. Daí a necessidade de se conhecer a carga de flambagem da estrutura: valor máximo da carga sobre a trajetória de equilíbrio que, a partir de então, se torna instável.

Examina-se, neste trabalho, o problema da determinação da capacidade portante de pilares esbeltos de concreto armado. Trata-se de um problema de difícil resolução, devido à necessidade de consideração da influência das flechas experimentadas pelo pilar no equilíbrio do mesmo (a qual produz uma não-linearidade geométrica) e às relações não-lineares tensão-deformação dos materiais (responsáveis pela não-linearidade física).

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um método de cálculo incremental-iterativo, baseado na hipótese da coluna-modelo apresentada pelo Código-modelo do CEB-FIP/1978[7], para a determinação da capacidade portante de pilares isostáti-

cos de concreto armado e a elaboração de um programa de computador para a aplicação do método. A hipótese da coluna-modelo admite uma deformada senoidal para uma coluna em balanço, fletida em curvatura simples. Deste modo, o cálculo se reduz à determinação de estados de equilíbrio sucessivos para a seção mais solicitada da coluna. Consegue-se, assim, uma grande economia de operações de cálculo em relação ao método "exato" (método geral),que determina a deformada do pilar seção por seção e por iterações sucessivas.

A não-linearidade geométrica acha-se incorporada na análise através da consideração de um momento de segunda ordem cuja expressão foi deduzida com base nas hipóteses da deformada senoidal e de pequenas mudanças de forma.

A não-linearidade física é levada em conta através da consideração de diagramas não-lineares tensão - deformação para o concreto e para o aço. Admite-se, no entanto, que a curva de descarga coincida com a de carga. São desprezadas as tensões de tração no concreto, a variação das características físicas do concreto com o tempo e a retração.

Os efeitos da fluência são considerados de modo aproximado pelo método do "reduced modulus", que utiliza um coeficiente de fluência reduzido. Este é obtido multiplicando-se o coeficiente de fluência por dois outros coeficientes que permitem levar em conta a história do carregamento de longa e/ou curta duração. O método empregado baseia-se nas hipóteses de que em cada fibra de concreto a deformação lenta é proporcional à deformação instantânea e de que o coeficiente de fluência é indepen-

dente da tensão aplicada. Ele permite conduzir a análise para sistemas de ações de longa e de longa e curta duração como no caso de curta duração. Assim, em qualquer destes dois casos, é obtida uma curva fictícia em lugar da curva "real" representativa da relação entre ações e flechas.

O cálculo é feito por etapas e dois processos iterativos são empregados: um para as etapas em que é controlado o parâmetro das ações e outro para as etapas com controle da curvatura. O segundo procedimento é empregado quando a convergência do primeiro se torna muito lenta e para obter o ramo descendente da curva relacionando ações e flechas. Qualquer dos dois processos tem como ponto básico a avaliação, a cada iteração, do módulo "corda" de deformação longitudinal do material para cada uma das diversas fibras de concreto e de aço consideradas na seção, obtido diretamente a partir do diagrama tensão-deformação do respectivo material.

O programa tem aplicação direta limitada a pilar isostático, de seção transversal (concreto e armadura) constante e simétrica em relação ao plano das ações, submetido a esforço normal constante e cuja deformada não apresenta ponto de inflexão e é tangente à vertical na seção mais solicitada. No entanto, de acordo com os parágrafos 14.2 e 14.3 do Código-modelo do CEB-FIP/1978[7] e com o parágrafo 4.2 do Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5], programas baseados na hipótese da coluna-modelo também podem ser utilizados para analisar pilares isolados de pórticos indeslocáveis e deslocáveis.

Para um certo pilar, conhecido seu comprimento de flambagem, as condições de apoio nas suas extremidades, a forma e as dimensões da seção transversal, a quantidade e distribuição de armadura, as propriedades físicas dos materiais e os dados que definem o sistema de ações, o programa fornece, a cada etapa de cálculo, os valores do parâmetro das ações, da maior flecha do pilar e dos esforços e deformações na seção mais solicitada. Ele permite determinar os valores da capacidade portante em curta duração, da carga de flambagem por fluência ou da capacidade residual em curta duração após um período definido de ações de longa duração, de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado. Os valores do método melhorado são obtidos a partir daqueles determinados segundo o método da coluna-modelo, corrigindo-os de acordo com um fator que leva em conta, de modo aproximado, a influência da distribuição do momento fletor de primeira ordem ao longo do pilar no valor da maior flecha do pilar.

O Manual de flambagem do CEB/1974[4] também apresenta um programa de computador baseado no método da coluna-modelo. No entanto, o programa aqui elaborado difere do referido programa quanto ao tipo de processo de cálculo utilizado e, além disso, possui a vantagem sobre aquele de poder fazer dois tipos de determinação:

- a dos valores últimos da excentricidade da carga axial e/ou da força horizontal concentrada e/ou da força horizontal distribuída correspondentes a um dado valor da carga axial;

- a dos valores últimos da carga axial e, eventualmente também, da força horizontal concentrada e/ou da força horizontal distribuída correspondentes a uma excentricidade de primeira ordem fixada.

O programa elaborado neste trabalho oferece, ainda, outra vantagem: a de fornecer estes valores de acordo com o método da coluna-modelo e também com o método da coluna-modelo melhorado. Isto se torna possível graças ao fato do programa trabalhar com ações ao invés de trabalhar diretamente com esforços solicitantes.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. O capítulo II apresenta, visando uma melhor compreensão do problema tratado, uma análise do comportamento de colunas constituídas de material elástico linear e elasto-plástico e, finalmente, das colunas de concreto armado.

O capítulo III aborda os métodos para a análise e/ou projeto de pilares de concreto armado sugeridos pelo Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5].

No capítulo IV são apresentadas as hipóteses de cálculo e é desenvolvido o método de cálculo.

O capítulo V descreve o programa de computador, cujo manual de entrada e saída de dados e cuja listagem encontram-se, respectivamente, nos apêndices I e II.

No capítulo VI são apresentados três exemplos a título de ilustração da aplicação do programa de computador e de verificação da eficiência das hipóteses adotadas. Num quarto exemplo, apresentam-se tabelas organizadas em função de parâmetros adimensionais, a fim de ilustrar uma outra forma de utilização do programa e de verificar a eficiência do método de cálculo desenvolvido neste trabalho, comparando-se os resultados destas tabelas com os das tabelas análogas contidas no Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5].

O capítulo VII apresenta conclusões a respeito do trabalho desenvolvido e sugestões para possíveis futuros melhoramentos do programa.

CAPÍTULO II

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE COLUNAS

II.1 - INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste capítulo, uma análise do comportamento de colunas, comprimidas por cargas centradas e excêntricas, constituídas de material elástico linear e elasto-plástico, abordando-se, posteriormente, o caso de colunas de concreto armado.

A influência das flechas experimentadas por um pilar no equilíbrio do mesmo pode ser comprovada observando-se o comportamento do pilar da figura II-1, livre no topo e engastado na base. Este pilar está sujeito a uma carga axial P excêntrica de e_o (o que equivale a uma carga axial P centrada e a um momento $M_o = P\, e_o$) e a uma força horizontal H, ambas aplicadas no seu topo, e, ainda, a uma força horizontal w uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento.

Ele está submetido em sua seção da base aos seguintes esforços de primeira ordem

$$N = - P \qquad \text{(II-1)}$$

e

$$M_1 = P\, e_o + H\ell + \frac{w\ell^2}{2} \qquad \text{(II-2)}$$

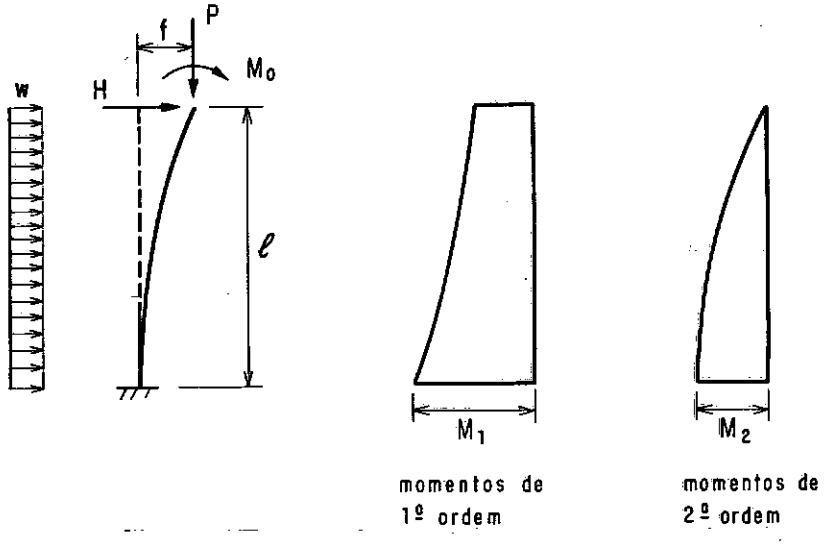


FIGURA II-1 - Momentos num pilar esbelto, livre no topo e engastado na base.

Solicitado pelo carregamento, o pilar inicia um encurvamento lateral. A presença de pequenas flechas não influenciaria o cálculo dos momentos fletores se sobre o pilar agissem apenas o momento M_o e as forças H e w. Entretanto, como sobre ele atua também a carga axial, a parcela do momento fletor por ela produzida em cada seção sofre um acréscimo. Isto ocasiona um aumento das flechas que, por sua vez, faz com que cresçam os momentos fletores. Desde que não seja ultrapassada a capacidade portante do pilar, o processo continuará até que seja alcançado um estado de equilíbrio entre esforços externos e internos em todas as seções deste pilar.

Uma vez atingido o estado de equilíbrio, o pilar apresentará uma flecha f no seu topo e sua seção da base estará solicitada pelo momento fletor total

$$M = M_1 + M_2 \qquad \text{(II-3)}$$

onde

$$M_2 = Pf \qquad \text{(II-4)}$$

é o momento fletor de segunda ordem.

Conclui-se, então, que os momentos fletores não podem ser obtidos independentemente das flechas, resultando, assim, uma relação não-linear entre forças e deslocamentos.

II.2 - CARGA CRÍTICA DE EULER

A compreensão do comportamento das colunas esbeltas teve início com os trabalhos de Leonhard Euler[10,11]. Foi ele quem apresentou, em 1744, a primeira análise rigorosa do problema de estabilidade de uma coluna e, em 1759, a dedução da carga crítica para uma coluna ideal, perfeitamente elástica.

A carga crítica de Euler pode ser determinada investigando-se o comportamento de uma coluna ideal (isto é, coluna de eixo perfeitamente retilíneo e vertical, comprimida por cargas axiais P rigorosamente centradas), esbelta, de seção transversal constante, constituída de material linearmente elástico.

Embora Euler tenha analisado o comportamento de uma coluna em balanço, considera-se, neste trabalho, o caso de uma coluna bi-apoiada (figura II-2), onde o apoio da extremidade infe-

rior é fixo e o da superior, móvel na direção vertical.

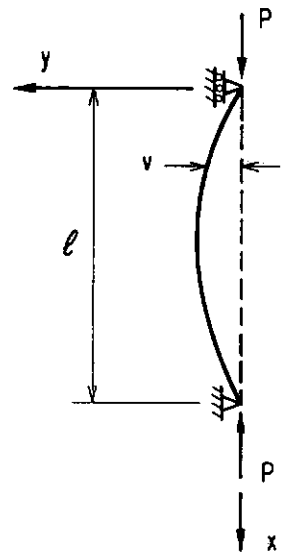


FIGURA II-2 - Coluna ideal, esbelta, simplesmente apoiada

Enquanto a carga P for relativamente pequena, a coluna permanecerá reta, sofrendo encurtamento uniforme. Entretanto, uma vez alcançada uma certa carga crítica, a coluna poderá experimentar um encurvamento lateral, bastando para isso que haja uma pequena perturbação lateral. Supõe-se que esta flexão ocorrerá no plano xy e que este seja um plano de simetria da coluna.

Para uma dada configuração fletida, a coluna estará submetida, numa seção distante x da extremidade superior, a um momento externo

$$M = Pv \qquad \text{(II-5)}$$

onde v é o deslocamento da coluna na direção y.

Admite-se a hipótese de que as mudanças de forma são suficientemente pequenas para que o termo $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ possa ser desprezado, quando comparado com a unidade, na expressão exata da curvatura $\left[-\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right] \Big/ \left[1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$. Desta forma, a curvatura, denotada por $\frac{1}{\rho}$, será aproximada por

$$\frac{1}{\rho} = -\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \qquad \text{(II-6)}$$

Assim, o momento interno resistente numa seção situada a uma distância x da origem será dado por

$$M_i = EI\,\frac{1}{\rho} = -\,EI\,\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{(II-7)}$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e I, o momento de inércia da seção transversal com respeito ao eixo z.

A coluna estará em equilíbrio numa configuração fletida se, em cada seção, os momentos externo e interno forem iguais. Da igualdade resulta a equação

$$EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + P\,v = 0 \qquad \text{(II-8)}$$

Trata-se de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem a coeficientes constantes e, portanto, de fácil resolução.

A solução da equação (II-8) conduz ao diagrama carga-flecha representado na figura II-3

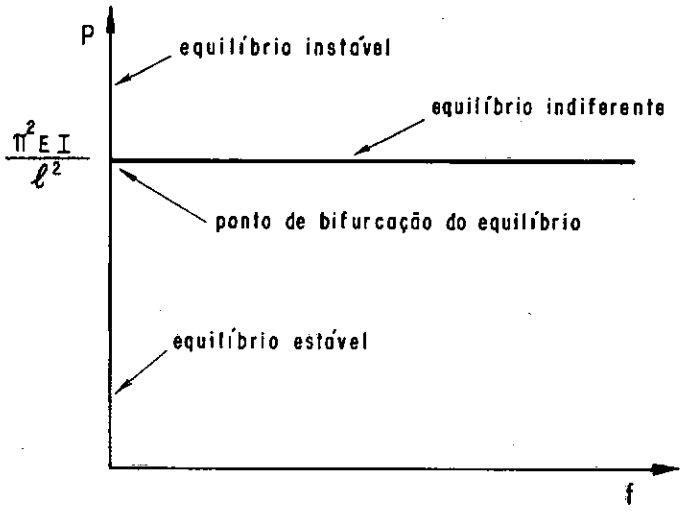


FIGURA II-3 - Diagrama carga-flecha para uma coluna ideal, esbelta, linearmente elástica segundo a teoria de pequenas mudanças de forma.

Sob a carga axial de valor dado por

$$P = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \qquad \text{(II-9)}$$

a coluna poderá estar em equilíbrio numa configuração levemente fletida cuja forma é expressa por

$$v = f \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \qquad \text{(II-10)}$$

No entanto, a amplitude da deformada, ou seja, a flecha máxima f, que ocorre para a seção à meia-altura da coluna, é indeterminada.

O valor de P dado pela equação (II-9) é conhecido como carga crítica de Euler (P_{cr}): valor da carga acima do qual o equilíbrio da coluna deixa de ser estável para a configuração reta. Para esta carga ocorre bifurcação do equilíbrio, pois há cruzamento de duas trajetórias de equilíbrio: uma procedente da origem, a chamada trajetória primária, que coincide com o eixo das cargas, e outra denominada trajetória secundária, que é paralela ao eixo das flechas.

A configuração reta é, para a coluna, uma configuração de equilíbrio estável para valores da carga axial inferiores a P_{cr} e uma configuração de equilíbrio instável para valores de P superiores a P_{cr}. Para a carga crítica, o equilíbrio da coluna é indiferente, isto é, ela pode permanecer reta ou assumir uma configuração fletida com qualquer pequena amplitude.

A indeterminação das flechas para a carga crítica é apenas uma conseqüência da linearização da equação diferencial que rege o problema, efetuada ao se empregar a expressão aproximada da curvatura.

Efetivamente, isto pode ser comprovado ao se observar o diagrama carga-flecha da figura II-4 que representa a solução da equação diferencial não-linear, obtida ao se adotar a expressão exata da curvatura. A carga crítica obtida tem o mesmo valor dado pela equação (II-9) e a flecha f a ela correspondente não é indeterminada. A curva carga-flecha é tangente à reta horizontal $P=P_{cr}$ no ponto onde esta intercepta o eixo das cargas, portanto em f=0. Assim, o acréscimo de P correspondente a um pequeno acréscimo da flecha é uma quantidade de segunda ordem,

o que explica a indeterminação das flechas quando se usa a expressão aproximada da curvatura.

Para valores de P inferiores a P_{cr}, a posição reta é uma configuração de equilíbrio estável para a coluna. Sob a carga crítica, a coluna permanece reta em equilíbrio estável. Para cargas superiores à crítica, são possíveis duas configurações de equilíbrio; a reta é instável e a fletida, estável.

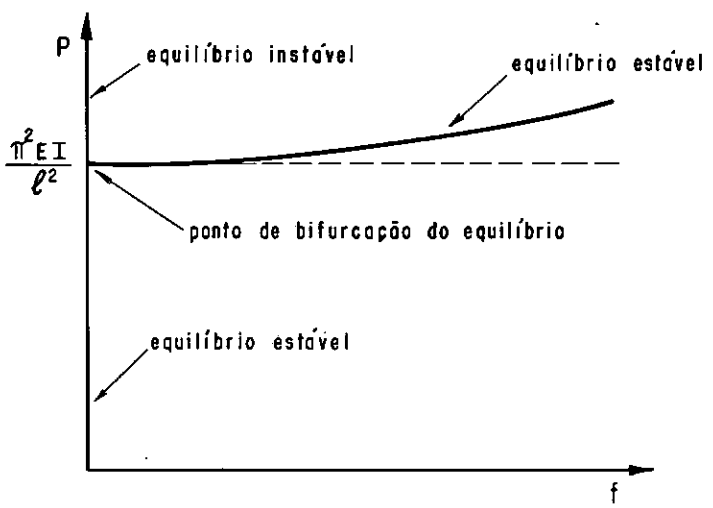


FIGURA II-4 - Diagrama carga-flecha para uma coluna ideal, esbelta, linearmente elástica segundo a teoria de grandes mudanças de forma.

Pode-se concluir que o comportamento das colunas ideais, esbeltas, linearmente elásticas apresenta o fenômeno de bifurcação simétrica estável: simétrica porque a coluna pode fletir indiferentemente tanto para um lado como para o outro, uma vez que as características de carga e de estabilidade são as mesmas para ambos os lados, e estável porque a trajetória secundária é estável.

II.3 - COMPORTAMENTO DE COLUNAS ESBELTAS LINEARMENTE ELÁSTICAS COMPRIMIDAS EXCENTRICAMENTE

Na dedução da carga de Euler, supõe-se que a coluna tenha eixo perfeitamente retilíneo e vertical e que a carga axial seja rigorosamente centrada. Estas idealizações são feitas para simplificar a resolução do problema. As colunas reais, no entanto, sempre apresentam imperfeições geométricas e excentricidade de carga.

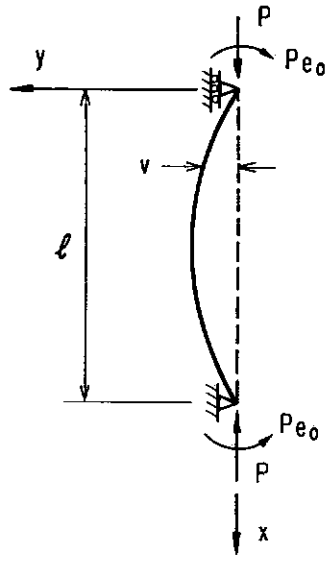


FIGURA II-5 - Coluna esbelta, simplesmente apoiada, comprimida excentricamente.

Examina-se, então, neste parágrafo, o comportamento de uma coluna esbelta, simplesmente apoiada, de eixo inicialmente reto e seção transversal constante, constituída de material que obedece à lei de Hooke, submetida a cargas axiais de compressão P, aplicadas com a mesma excentricidade e_0 nas duas extremida

des (figura II-5). Supõe-se que o plano xy onde atuam as cargas seja um plano de simetria da coluna, portanto ela fletirá neste mesmo plano. Novamente admite-se a hipótese de pequenas mudanças de forma.

O momento externo numa seção distante x da origem será

$$M = P\,(e_o + v) \qquad \text{(II-11)}$$

e o momento interno nesta mesma seção será, também neste caso, expresso pela equação (II-7). Igualando-se as expressões destes dois momentos, obtém-se a equação

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = -\,P\,e_o \qquad \text{(II-12)}$$

Trata-se de uma equação diferencial linear não-homogênea de segunda ordem a coeficientes constantes.

Resolvendo-se a equação (II-12), será possível determinar os valores das flechas nas diversas seções da coluna em função dos valores de P e de e_o. Esta solução poderá ser representada graficamente por uma coleção de curvas carga-flecha, uma para cada valor da excentricidade e_o. A figura II-6 apresenta duas destas curvas para as excentricidades e_I e e_{II} maior que e_I. Comparando-se as mesmas, conclui-se que quanto maior for a excentricidade, maior será a flecha para a mesma carga aplicada. Observando-se qualquer das duas curvas, nota-se que a coluna flete lateralmente assim que a carga é aplicada e, também, que a flecha au

menta com a carga segundo uma relação não-linear, como havia sido visto no parágrafo II.1. Percebe-se, ainda, que a flecha cresce sem limite quando a carga se aproxima da carga crítica, cujo valor é dado na equação (II-9).

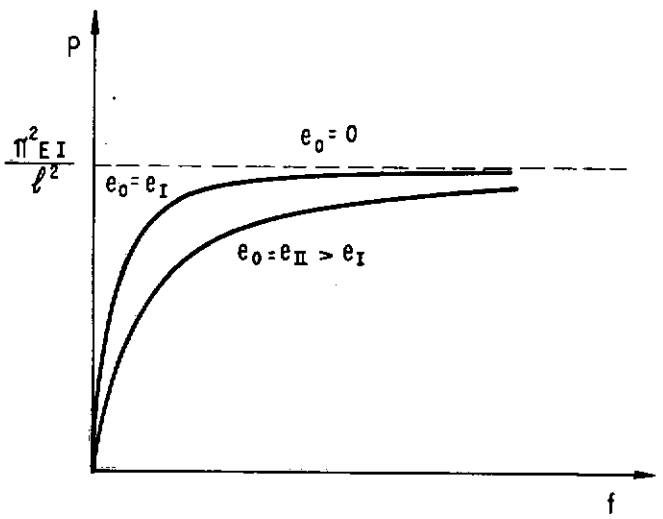


FIGURA II-6 - Diagrama carga-flecha para uma coluna esbelta, linearmente elástica, comprimida excentricamente

De acordo com a figura II-6, só há equilíbrio para a coluna para valores de P inferiores a P_{cr}, sendo a configuração de equilíbrio fletida e estável. Conclui-se, portanto, que o comportamento das colunas esbeltas, linearmente elásticas, comprimidas excentricamente não apresenta o fenômeno de instabilidade do equilíbrio.

II.4 - DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DA TEORIA DE EULER

Nos parágrafos anteriores foi considerado o caso fundamental de flambagem de uma coluna prismática: o da coluna simplesmente apoiada. Os resultados obtidos para este caso podem ser usados para colunas com outras condições de extremidade, desde que se use o comprimento de flambagem em lugar do comprimento real da coluna nas equações (II-9) e (II-10).

A figura II-7 fornece alguns valores do comprimento de flambagem, denotado por ℓ_e, para colunas de comprimento ℓ com diferentes tipos de apoio.

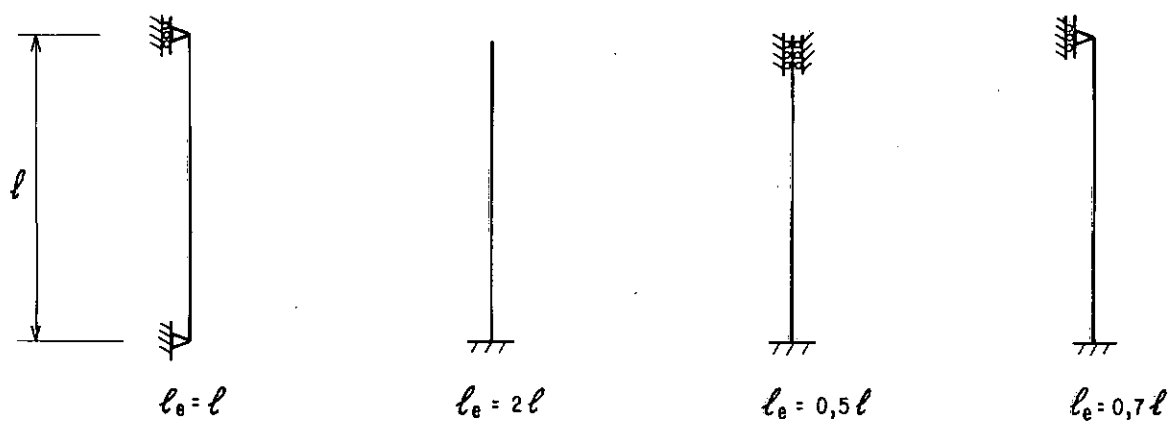


FIGURA II-7 - Comprimento de flambagem para colunas com diferentes condições de extremidade

A fórmula que permite a determinação da carga crítica para uma coluna com quaisquer condições de extremidade fica então

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2} \qquad \text{(II-13)}$$

A tensão relativa à carga crítica, ou tensão crítica, é dada por

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\ell_e/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \text{(II-14)}$$

onde

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad \text{(II-15)}$$

é o raio de giração da seção transversal com respeito ao eixo perpendicular ao plano de flambagem e

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \qquad \text{(II-16)}$$

é o índice de esbeltez da coluna.

Observando-se a equação (II-14) conclui-se que uma coluna sujeita a carga centrada flambará no plano em que tiver maior índice de esbeltez e no qual a carga crítica será menor.

A fórmula de Euler, ou seja, a equação (II-13) só poderá ser aplicada se a tensão crítica for inferior ou igual a σ_p, limite de proporcionalidade do material, condição, esta, necessária para que se verifique a hipótese de que o material da coluna obedece à lei de Hooke.

Para σ_{cr} igual a σ_p, obter-se-á

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \qquad \text{(II-17)}$$

Portanto, a fórmula de Euler é válida apenas para colunas com índices de esbeltez superiores ou iguais a λ_1.

Colunas menos esbeltas, com λ inferior a λ_1, alcançam tensões normais superiores ao limite de proporcionalidade do material antes que a carga de Euler seja atingida. Estas colunas podem flambar inelasticamente sob carga inferior à carga de Euler ou, se os índices de esbeltez forem bem pequenos, romper.

II.5 - FLAMBAGEM INELÁSTICA DE COLUNAS

No final do século passado e início deste, surgiram duas teorias que permitem aplicar a fórmula de Euler a colunas com $\lambda < \lambda_1$, desde que se substitua o módulo de elasticidade constante E por um módulo efetivo que é função da tensão crítica. A primeira, apresentada por Engesser[9] em 1889, é a teoria do "tangent modulus" que utiliza o módulo de elasticidade tangente, cujo

valor depende apenas das propriedades elasto-plásticas do material. A segunda, conhecida como teoria do "double modulus", foi desenvolvida por Engesser[8] em 1895 e reapresentada por von Kármán[15] em 1908. Esta teoria utiliza um módulo efetivo que é função do módulo de elasticidade tangente e do módulo de elasticidade constante e cujo valor depende não só das propriedades elasto-plásticas do material como também da forma da seção transversal.

Em 1947, Shanley[18] apresentou o estudo do comportamento inelástico de um modelo teórico simples de uma coluna, que consistia de duas barras infinitamente rígidas ligadas, à meia-altura da coluna, por uma célula deformável. Este estudo indicou que a coluna começa a fletir tão logo a carga crítica determinada pela teoria do "tangent modulus" é ultrapassada. Este estudo mostrou também que à medida que a flexão progride, a carga axial cresce até um valor máximo, situado entre as cargas determinadas de acordo com as teorias do "tangent modulus" e do "double modulus" e mais próximo da primeira.

Quando se deseja investigar o comportamento inelástico de uma coluna, deve-se levar em conta o modo como varia a relação tensão-deformação no plano de sua seção transversal bem como ao longo de seu comprimento. Uma vez que é impossível expressar esta variação analiticamente, este problema só pode ser resolvido por meio de um procedimento numérico. Um método deste tipo foi desenvolvido por von Kármán[16], que apresentou, em 1910, a análise do comportamento de uma coluna isostática de seção retangular, baseada na relação não-linear tensão-deformação do material.

Admitindo a hipótese de que seções planas permanecem planas e normais ao eixo da barra após a flexão, ele integrou as tensões internas sobre a seção e obteve relações momento-curvatura. Integrando numericamente a curvatura ao longo do comprimento da coluna, determinou sua deformada. O diagrama carga-flecha da figura II-8 ilustra a solução obtida por von Kármán para o problema.

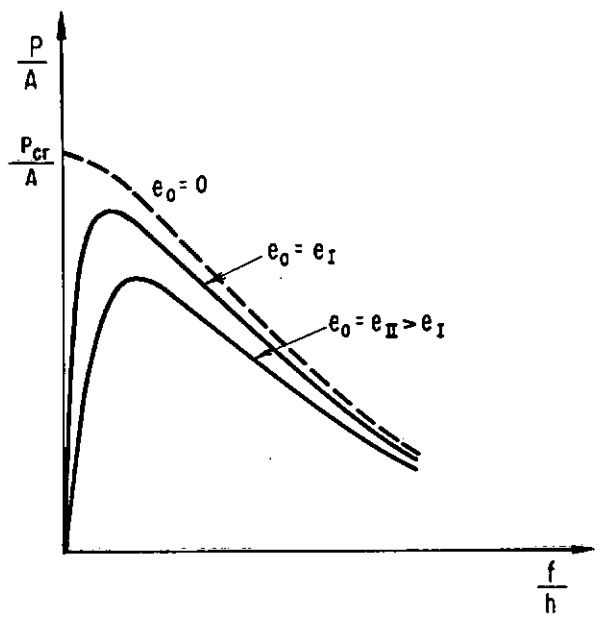


FIGURA II-8 - Diagrama carga-flecha para uma coluna constituída de material elasto-plástico.

Percebe-se que o fenômeno de bifurcação do equilíbrio para uma certa carga crítica, que caracteriza o comportamento das colunas ideais, também se verifica para tensão crítica superior ao limite de proporcionalidade do material. Neste caso, porém, poderá ocorrer bifurcação simétrica instável. E, então, para carga superior à carga crítica, a configuração de equilíbrio reta é instável e a configuração fletida, impossível.

Comparando-se os diagramas carga-flecha das figuras II-6 e II-8, representativos do comportamento de colunas constituídas de material, respectivamente, elástico linear e elasto-plástico e comprimidas por cargas excêntricas, conclui-se que o fato do material elasto-plástico apresentar um módulo de deformação longitudinal decrescente é o responsável pelo aparecimento de um ponto máximo em cada uma das curvas da figura II-8. A carga relativa a este ponto é a carga teórica de flambagem, $P_{f\ell}$, para a coluna. Ela representa o valor limite de carga, associado a uma determinada excentricidade, que uma coluna com um dado índice de esbeltez pode suportar. A carga de flambagem para uma certa coluna será tanto menor quanto maior for a excentricidade da carga. Quanto maior for o índice de esbeltez de uma coluna, menor será sua carga de flambagem.

Para valores de P inferiores a $P_{f\ell}$, a configuração de equilíbrio é fletida, sendo estável no ramo ascendente da curva carga-flecha e instável no ramo descendente. Após o ponto máximo, a manutenção do equilíbrio só será possível com controle de deslocamento. Para valores de P superiores a $P_{f\ell}$, o equilíbrio é impossível.

O fenômeno de instabilidade das colunas comprimidas inelasticamente por cargas excêntricas se caracteriza, portanto, pelo fato de que, associado a cada valor de excentricidade, existe um valor limite para a carga axial acima do qual o equilíbrio é impossível. Entretanto, as colunas muito curtas chegarão à ruptura antes de atingirem um valor máximo para a carga.

II.6 - COMPORTAMENTO DAS COLUNAS DE CONCRETO ARMADO

As colunas reais de concreto armado estão muito longe das idealizações feitas por Euler. Todas apresentam imperfeições na forma como defeitos na retidão e afastamento da vertical. As cargas, por sua vez, sempre apresentam uma excentricidade, devido à incerteza no seu ponto de passagem bem como na posição do centro de gravidade das seções transversais (por causa da não-homogeneidade do concreto e da incerteza na posição das armaduras).

Além disto, estas colunas são constituídas por dois materiais que têm comportamento não-linear: concreto e aço. O aço é um material que resiste bem à tração e à compressão e cujo módulo de deformação longitudinal é, inicialmente, constante, sofrendo, posteriormente, uma redução. O concreto apresenta, na compressão, uma relação tensão-deformação não-linear, com módulo de deformação longitudinal decrescente. É um material que não resiste bem à tração, apresentando fissuras quando seu limite de resistência é ultrapassado, o que ocasiona uma redução do momento de inércia da seção transversal. Ainda mais, suas propriedades variam no tempo e ele está sujeito aos fenômenos de fluência e retração. Assim, o tempo de duração das cargas tem importância pois a flecha cresce com o tempo devido à fluência.

Um pilar sujeito a carga axial excêntrica (figura II-9) sofre encurvamento lateral. Este encurvamento pode alterar de maneira significativa a distribuição e grandeza dos esforços internos e, conseqüentemente, a capacidade portante do pilar.

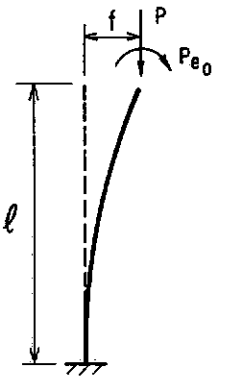


FIGURA II-9 - Pilar em balanço comprimido por carga excêntrica

No caso de uma carga rapidamente crescente (carga de curta-duração), um pilar de concreto armado poderá apresentar um dos dois tipos de diagrama carga-flecha que aparecem na figura II-10, dependendo, principalmente, do índice de esbeltez do pilar e da excentricidade da carga.

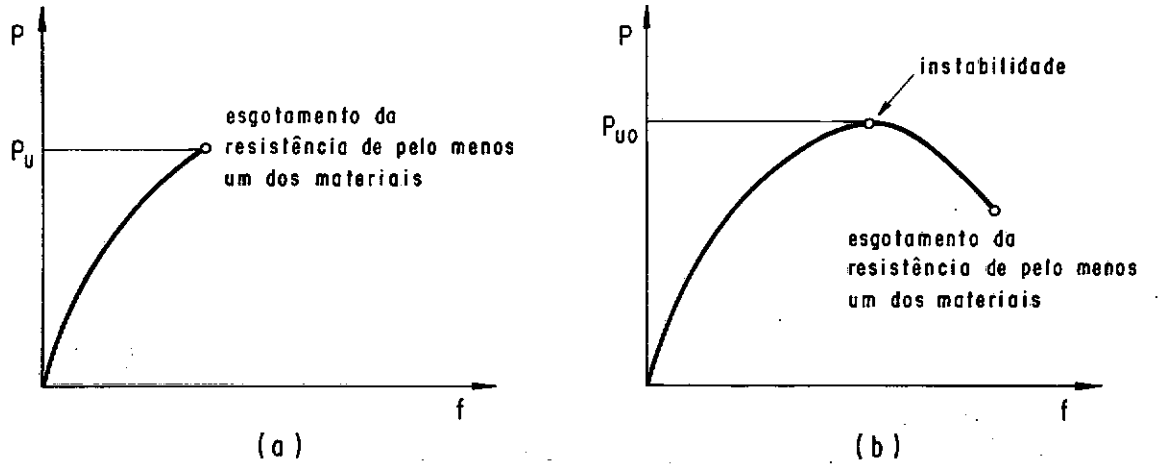


FIGURA II-10 - Diagramas carga-flecha para pilares curtos(a) e esbeltos (b).

Num diagrama carga-flecha como o da figura II -10 a, típico de pilares curtos, a carga última, P_u, é alcançada por esgotamento da resistência de um dos materiais na seção mais solicitada do pilar, ou seja, por esmagamento do concreto ou por escoamento excessivo da armadura mais tracionada.

Num diagrama carga-flecha como o da figura II -10 b, típico de pilares esbeltos, a carga cresce até um valor máximo, P_{u0}, sob o qual a coluna atinge o estado limite último de ruína por instabilidade. Trata-se de um caso de flambagem sob carga de curta duração. No ponto correspondente à carga última, P_{u0}, nenhum dos materiais alcançou o limite de sua resistência, não tendo sido esgotada, portanto, a capacidade resistente da seção mais solicitada do pilar. A partir deste ponto existem apenas estados de equilíbrio instáveis, sob carga decrescente, que só podem ser obtidos com controle de deslocamento. Se o deslocamento não for controlado haverá um fenômeno dinâmico com aumento da flecha até a ruptura sob carga quase constante. A ruptura na seção mais solicitada será somente uma conseqüência da instabilidade.

Na prática, um pilar como o da figura II-9 poderá estar submetido a uma carga axial de longa duração, P_L, aplicada rapidamente na idade t_o e depois mantida constante ao longo do tempo, e a uma carga axial de curta duração, P_C, aplicada de modo rápido, numa idade t posterior a t_o. Num pilar sob a ação de uma carga de longa duração, as flechas produzidas no instante da aplicação da carga e, conseqüentemente, os momentos de segunda ordem aumentam com o tempo devido à fluência do concreto. Dois outros tipos de estado limite último de ruína por instabilidade podem

ocorrer quando o pilar é submetido, inicialmente, a uma carga de longa duração.

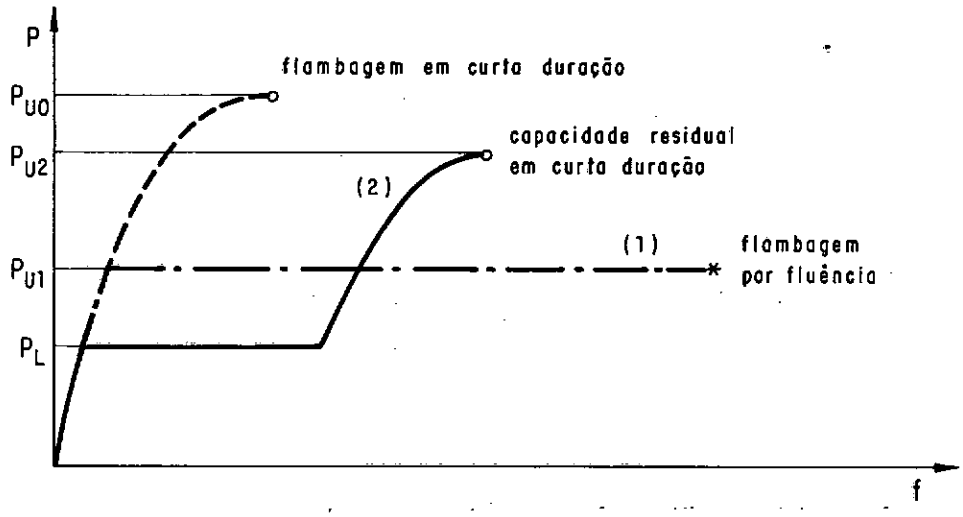


FIGURA II-11 - Três tipos de estado limite último de ruína por instabilidade

Se a relação entre a carga de longa duração, P_L, e a carga de flambagem em curta duração, P_{u0}, for grande, as flechas crescerão continuamente com o tempo, por causa da fluência do concreto, até que, num tempo t_u, sobrevirá a instabilidade, sem qualquer acréscimo de carga. Trata-se de um caso de flambagem por fluência sob a carga $P_L = P_{ul}$, representado pela curva (1) da figura II-11. O menor valor de P_L para o qual a coluna flamba por fluência, denotado por $P_{u\infty}$, corresponde à carga para a qual ocorre flambagem por fluência num tempo $t_u = \infty$, ou seja, à maior carga que a coluna pode suportar indefinidamente.

Se, ao contrário, a relação entre a carga de longa duração, P_L, e a carga de flambagem em curta duração, P_{u0}, for pequena, isto é, se o valor de P_L for inferior a $P_{u\infty}$, as flechas, inicialmente crescentes com o tempo, tenderão a valores finitos ao final de um determinado intervalo de tempo. Então, como se vê na curva (2) da figura II-11, será possível acrescer rapidamente a carga até o valor máximo P_{u2}, sob o qual a coluna atinge o estado limite último de ruína por instabilidade. Existe, portanto, neste caso, uma capacidade residual em curta duração após um período de carga de longa duração. Se forem desprezadas as variações da resistência do concreto com o tempo e com as condições de carregamento, P_{u2} será sempre menor que a capacidade de carga de curta duração, P_{u0}.

Os fatores que têm grande influência no comportamento dos pilares são os seguintes:

- índice de esbeltez do pilar
- sistema de ações
- forma da seção transversal do pilar
- condições de extremidade do pilar
- propriedades físicas dos materiais
- quantidade e distribuição de armadura
- duração e intensidade das ações de longa duração.

CAPÍTULO III

MÉTODOS PARA A ANÁLISE E/OU PROJETO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO RECOMENDADOS PELO CEB-FIP

III.1 - INTRODUÇÃO

Como já se sabe, a dificuldade da análise e projeto de pilares esbeltos de concreto armado, considerados isoladamente ou dentro das estruturas reticuladas planas, advém de dois tipos de não-linearidade que afetam seu comportamento:

- a não-linearidade geométrica, proveniente da influência dos deslocamentos no cálculo dos momentos fletores, ou seja, do chamado "efeito de segunda ordem";

- a não-linearidade física, devida às relações não lineares tensão-deformação dos materiais empregados, concreto e aço, e por causa da qual o comportamento da seção é representado por uma coleção de curvas momento-curvatura que têm como parâmetro o esforço normal.

O Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5] sugere quatro métodos para a análise e/ou projeto de pilares nos quais os efeitos de torção podem ser desprezados. Estes métodos se distinguem pelo grau de aproximação com que os resultados são obtidos, pela quantidade de trabalho numérico requeri-

dá para a aplicação do método e pela complexidade dos casos que eles permitem tratar. São eles:

a) Método Geral

É o método que utiliza o menor número de hipóteses de cálculo e que, por isso, permite simular com a melhor aproximação o comportamento real do pilar considerado e obter a melhor estimativa para a carga de flambagem do mesmo.

O comportamento de um pilar é julgado conhecido se se conhecem a flecha e os esforços e deformações, em um número razoável de seções ao longo de seu comprimento, para diversos estados de equilíbrio possíveis até o estado limite último de ruína. Devido à grande quantidade de operações de cálculo envolvidas na resolução do problema, este método necessita da utilização de um computador. Entretanto, ele também pode ser aplicado à mão com o emprego de tabelas ou diagramas adequados, construídos a partir de soluções gerais obtidas com o auxílio de um computador.

O método geral é bastante flexível, pois através dele é possível examinar a estabilidade de um pilar de seção variável, com quaisquer condições de extremidade e solicitado por qualquer sistema de ações, ou até mesmo a de um pórtico.

b) Método da coluna-modelo

Essencialmente, este não é um método novo, mas uma aplicação especial do método geral à chamada coluna-modelo: coluna livre no topo e engastada na base, fletida em curvatura sim-

ples, cuja flecha no topo pode ser suposta dependente apenas do comprimento da coluna e da curvatura na base. Assim, com a utilização desta hipótese simplificadora, faz-se uma grande economia de tempo em relação ao método geral, evitando-se uma quantidade considerável de operações de cálculo, inerente às determinações da curvatura em cada seção e da deformada da coluna. Não obstante, ainda é necessário o emprego de computador para aplicar o método. No entanto, ele também pode ser aplicado à mão com o auxílio de tabelas apropriadas, organizadas em função de parâmetros adimensionais para os tipos de seção transversal mais freqüentes na prática.

O método da coluna-modelo se aplica a pilares isostáticos, de seção constante, cujas deformadas não apresentam ponto de inflexão e são tangentes à vertical na seção mais solicitada. Este método poderá fornecer resultados com aproximação comparável à do método geral mediante a aplicação de um fator corretivo que leva em conta a influência da distribuição do momento de primeira ordem na magnitude da flecha no topo da coluna-modelo. Neste trabalho, a exemplo do Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5], o método da coluna-modelo com esta correção será chamado método da coluna-modelo melhorado.

c) Método simplificado baseado no estado de equilíbrio

Este método também se baseia na hipótese da coluna-modelo e permite provar que existe um estado de equilíbrio estável entre esforços externos e esforços internos para uma dada

coluna submetida a um certo sistema de ações, sem determiná-lo. O método não fornece, no entanto, uma solução ótima, pois não se tem idéia de quão distante este estado de equilíbrio está do estado limite último de ruína por instabilidade.

O método do equilíbrio pode ser aplicado através de cálculo manual, com a ajuda de uma tabela que fornece dois coeficientes que definem o valor e a posição da resultante das tensões internas no concreto, em função da deformação apresentada pela fibra extrema. Ele permite analisar os casos nos quais é válida a hipótese da coluna-modelo.

d) Método aproximado para o cálculo do momento complementar

Trata-se de um método semi-empírico, que não se acha incluído no Código-modelo do CEB-FIP/1978[7]. Ele pode ser empregado à mão e tem o mesmo domínio de aplicação do método da coluna-modelo.

Este método fornece uma expressão deduzida com base na hipótese da coluna-modelo e em resultados de ensaios para a avaliação de um momento complementar na seção mais solicitada da coluna. Acrescendo, aos esforços de primeira ordem desta seção, o momento complementar, que leva em conta os efeitos de segunda ordem, o método permite determinar a quantidade de armadura necessária, conduzindo os cálculos como no caso de uma coluna curta ($\ell_e/h=0$). Uma vez que a expressão aproximada do momento complementar independe da quantidade de armadura, este método é apropriado para cálculos de ante-projeto.

A seguir aborda-se cada método mais detalhadamente.

III.2 - MÉTODO GERAL

A análise do comportamento de um pilar pode ser considerada como a articulação de dois problemas, cada qual resolvido por um método apropriado:

- obtenção da relação entre esforços internos e deformações na seção transversal;
- determinação da deformada do pilar.

A deformada de um pilar isostático pode ser determinada, por exemplo, através do método das diferenças finitas. De posse de diagramas esforço normal-momento fletor-curvatura, organizados com valores adimensionais e que dependem da forma da seção transversal, da taxa e distribuição de armadura e das propriedades físicas dos materiais, a determinação da deformada do pilar pode ser feita através de cálculo manual.

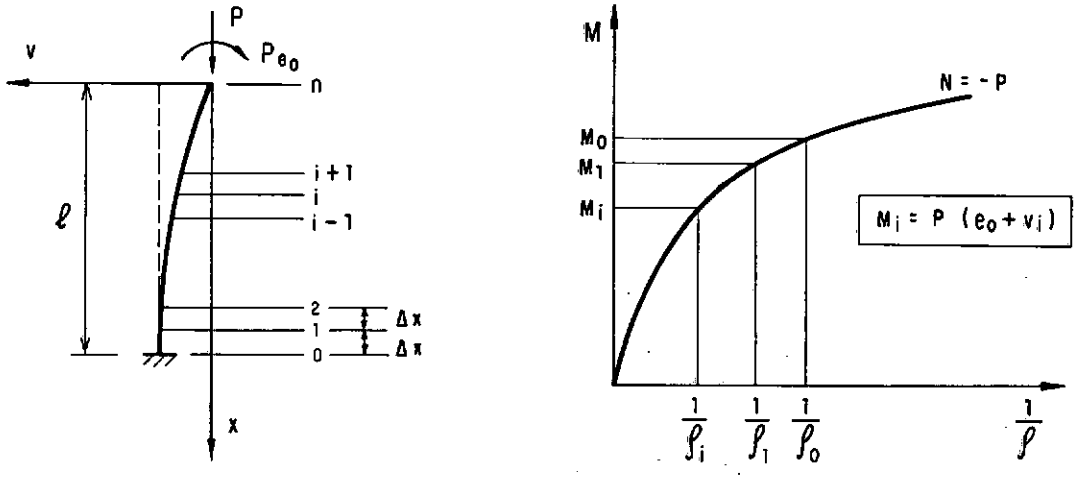


FIGURA III-1 - Determinação da deformada de um pilar pelo método das diferenças finitas.

A título de ilustração, mostra-se aqui a análise do comportamento de uma coluna como a da figura III-1, livre no topo e engastada na base, submetida a uma carga axial P de excentricidade e_o, utilizando o método das diferenças finitas. A coluna, de comprimento ℓ, é dividida em n elementos de mesmo comprimento Δx. O deslocamento transversal numa seção i arbitrária, v_i, é medido em relação a um eixo de referência fixado ao topo da coluna e, portanto, deslocável com a mesma. É possível obter por diferenças finitas a seguinte expressão aproximada para a derivada segunda do deslocamento na seção i

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta x)^2} \qquad \text{(III-1)}$$

A teoria de pequenas mudanças de forma permite aproximar a curvatura nesta seção, $\frac{1}{\rho_i}$, por

$$\frac{1}{\rho_i} = - \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_i \qquad \text{(III-2)}$$

Pode-se, então, exprimi-la pela seguinte equação

$$\frac{1}{\rho_i} = - \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta x)^2} \qquad \text{(III-3)}$$

a qual define o aspecto geométrico do problema. Uma vez que esta equação será utilizada para o cálculo do deslocamento na seção i+1, é conveniente apresentá-la na forma

$$v_{i+1} = 2\,v_i - v_{i-1} - (\Delta x)^2 \frac{1}{\rho_i} \qquad \text{(III-4)}$$

O deslocamento v_{i+1} é, portanto, calculado em função dos deslocamentos v_i e v_{i-1} computados anteriormente e da curvatura $\frac{1}{\rho_i}$ fornecida, pela curva momento-curvatura de parâmetro N = - P, para o momento previamente avaliado por

$$M_i = P(e_o + v_i) \qquad \text{(III-5)}$$

Para pesquisar o possível estado de equilíbrio correspondente a um determinado par de valores conhecidos da carga axial, P, e da excentricidade, e_o, emprega-se um procedimento que determina, seção por seção e por iterações sucessivas, a deformada da coluna. Começa-se por arbitrar um valor razoável para o deslocamento v_0, o que permite computar o momento $M_0 = P(e_o+v_0)$ e, em seguida, obter, com o auxílio do diagrama esforço normal-momento-curvatura, a curvatura $\frac{1}{\rho_0}$ a este correspondente. O engastamento da coluna na seção 0 permite supor que $v_{-1} = v_1$. É, então, possível avaliar o deslocamento na seção 1 de acordo com a expressão

$$v_1 = v_0 - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{1}{\rho_0} \qquad \text{(III-6)}$$

Conhecido o valor deste deslocamento, pode-se calcular o momento $M_1 = P(e_o+v_1)$ e, posteriormente, determinar, através do diagrama esforço normal-momento-curvatura, a curvatura $\frac{1}{\rho_1}$. Têm-se, assim, todos os dados necessários para computar, de acordo com a equação (III-4), o deslocamento v_2. Procedendo-se desta

maneira, avaliam-se, paulatinamente, os deslocamentos v_i nas diversas seções. Enquanto o valor que resulta para v_n não for nulo, o cálculo deverá ser repetido para um valor de v_0 mais adequado. Uma vez atendida a referida condição de extremidade, ter-se-á obtido um estado de equilíbrio, o que representa um ponto da curva carga-deslocamento (figura III-2).

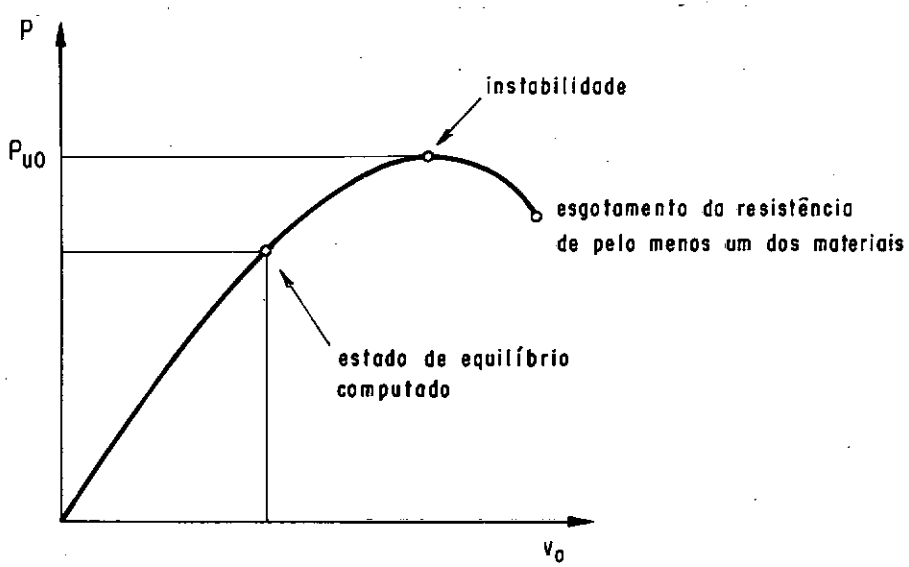


FIGURA III-2 - Curva carga-deslocamento para um pilar esbelto de concreto armado.

Buscam-se deste modo sucessivos estados de equilíbrio para valores crescentes da carga axial, mantendo-se constante o valor da excentricidade, até a obtenção de um valor máximo da carga P em função do deslocamento v_0, que caracteriza o estado limite último de ruína por instabilidade. A carga P_{u0} é, portanto, a carga correspondente ao ponto onde

$$\frac{d\,P}{dv_0} = 0 \qquad \text{(III-7)}$$

O ramo descendente da curva carga-deslocamento só pode ser obtido com controle de deslocamento, ou seja, pesquisando-se, através de um procedimento iterativo, os valores de P correspondentes aos valores estipulados para o deslocamento v_0 e ao valor constante da excentricidade.

O método das diferenças finitas é indicado para a análise de colunas isostáticas, de seção variável e/ou carga axial variável, cujas deformadas não apresentam ponto de inflexão e são tangentes à vertical na seção mais solicitada.

Para a análise de casos mais complexos como, por exemplo, colunas hiperestáticas e pórticos planos esbeltos, torna-se necessária a formulação da equação que governa o problema sob forma matricial, utilizando-se o método dos elementos finitos como ferramenta fundamental de discretização da estrutura. Cada membro da estrutura, viga ou pilar, é dividido em elementos, conectados nas suas extremidades por nós. Adotando-se um número suficiente de elementos, pode-se conseguir resultados tão próximos dos "exatos" quanto se queira.

Tanto a não-linearidade geométrica quanto a não-linearidade física são consideradas de maneira adequada na análise destas estruturas esbeltas. A relação não-linear entre ações e deslocamentos, resultante destas duas não-linearidades, requer o emprego de um procedimento iterativo que obtém nova solução para a equação que governa o problema enquanto o estado de equilíbrio procurado não for encontrado. A cada iteração efetuam - se simultaneamente as correções associadas a cada um dos tipos de

não-linearidade mencionados, aplicadas aos valores das grandezas que não se conhecem previamente e das quais depende a análise.

A análise de um pórtico plano esbelto de concreto armado, conhecida a sua geometria, o sistema das ações, suas seções transversais (concreto e aço) e as propriedades físicas dos materiais, é realizada em duas etapas, cada qual levando em consideração um tipo de não-linearidade:

1ª) Análise estrutural elástica de segunda ordem, através da qual se considera a não-linearidade geométrica, formulando-se a equação que governa o problema para a geometria deformada do pórtico. Esta análise fornece os esforços externos e a correspondente distribuição de deformações para todas as seções consideradas.

2ª) Análise seccional, na qual se leva em conta a não-linearidade física através do emprego das relações reais tensão-deformação-tempo dos materiais. Por meio dela obtêm-se os esforços internos, ou seja, as resultantes das tensões internas sobre uma seção transversal, correspondentes a uma dada distribuição de deformações.

Estas duas análises são articuladas pela exigência de equilíbrio de esforços e compatibilidade de deformações entre elas, condições estas que devem ser verificadas em todas as

seções. Deste modo, fica definido um estado de equilíbrio para o pórtico e, portanto, um ponto da curva carga-deslocamento.

A capacidade portante do pórtico plano esbelto de concreto armado corresponde ao valor máximo da carga em função do deslocamento, conforme se pode observar na figura III-3. Ela pode ser determinada obtendo-se sucessivos estados de equilíbrio, através de um procedimento incremental-iterativo com controle de carga ou de um outro com controle de deslocamento. No primeiro destes, a carga é incrementada passo a passo e o deslocamento correspondente é determinado paralelamente. Sua convergência é lenta na região da curva carga-deslocamento próxima à carga máxima. No segundo procedimento um deslocamento característico é incrementado passo a passo, a cada um dos quais é calculada a carga correspondente. Além de não ter qualquer problema de convergência, este procedimento permite reproduzir também o ramo descendente da curva carga-deslocamento.

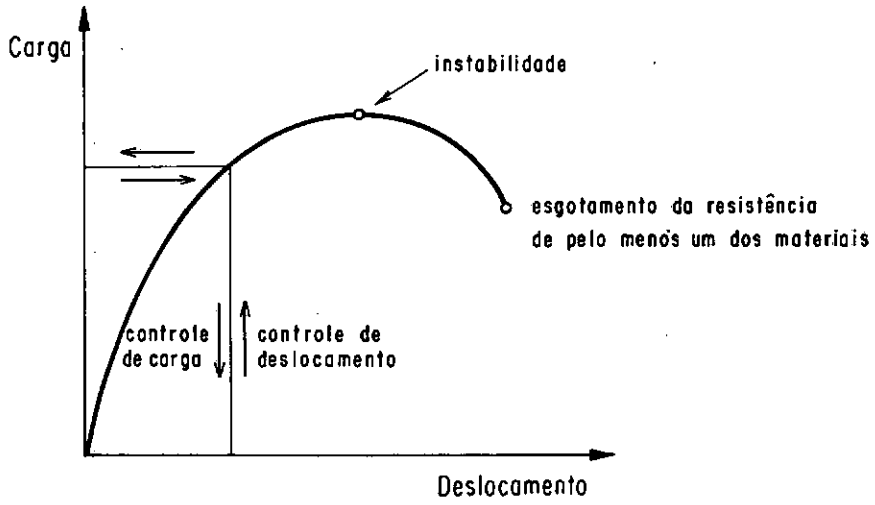


FIGURA III-3 - Curva carga-deslocamento para um pórtico plano esbelto de concreto armado.

III.3 - MÉTODO DA COLUNA-MODELO

O grande inconveniente do método geral é a extraordinária quantidade de operações de cálculo requerida para aplicá-lo. Isto se deve principalmente ao comportamento não-linear dos materiais que determina a necessidade de dividir a coluna em seções e utilizar um procedimento de cálculo iterativo. No caso de colunas isostáticas, de seção constante, cujas deformadas não apresentam ponto de inflexão e são tangentes à vertical na seção mais solicitada, o volume de operações de cálculo necessário pode ser consideravelmente reduzido, substituindo-se a pesquisa da deformada por uma hipótese sobre a sua equação. Esta hipótese conduz a uma relação linear entre a flecha máxima e a curvatura na seção mais solicitada. O equilíbrio de conjunto da coluna será, então, regido pelo equilíbrio entre esforços externos (levando em conta as flechas) e esforços internos (levando em consideração as relações não-lineares tensão-deformação dos materiais) numa única seção.

III.3.1 - Definição de coluna-modelo

De acordo com o parágrafo 14.4.3.1 do Código-modelo do CEB-FIP/1978[7], coluna-modelo (figura III-4) é um membro comprimido:

- livre no topo e engastado na base;
- fletido em curvatura simples sob a ação de cargas paralelas ao eixo (excêntricas ou não), de

forças horizontais (concentradas e/ou distribuídas) e/ou de um momento aplicado no topo;

- cuja flecha máxima e a curvatura na base podem ser supostas relacionadas de modo aproximado pela expressão

$$f = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = 0{,}4\ \ell^2 \frac{1}{r} \qquad \text{(III-8)}$$

onde

f é a flecha na extremidade livre,

$\frac{1}{r}$ é a curvatura na seção da base,

ℓ é o comprimento da coluna,

ℓ_e é o comprimento de flambagem, $\ell_e = 2\ \ell$.

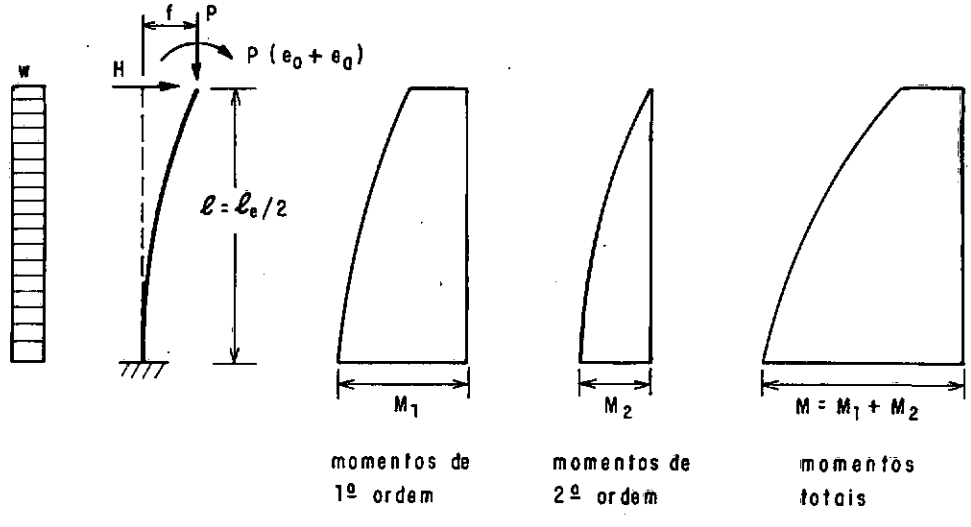


FIGURA III-4 - Coluna-modelo

III.3.2 - Fundamento do método

A hipótese fundamental do método da coluna-modelo é expressa pela equação (III-8). Esta equação foi obtida com base na suposição de que o plano das ações é um plano de simetria da coluna e de que a deformada da coluna, contida, portanto, neste plano, é um quarto de onda de uma senóide.

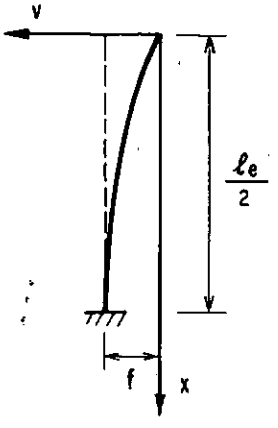


FIGURA III-5 - Deformada da coluna-modelo

De acordo com esta hipótese, a equação da deformada da coluna é

$$v(x) = f \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell_e} \qquad \text{(III-9)}$$

A expressão aproximada da curvatura

$$\frac{1}{\rho(x)} = - \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \qquad \text{(III-10)}$$

conduz a

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{\pi^2}{\ell_e^2} \; f \; \text{sen} \; \frac{\pi x}{\ell_e} \qquad \text{(III-11)}$$

Percebe-se, então, que a curvatura tem uma variação senoidal ao longo da coluna.

Avaliando-se a equação (III-11) para $x = \frac{\ell_e}{2}$, chega-se à seguinte relação:

$$f = \frac{\ell_e^2}{\pi^2} \; \frac{1}{r} \qquad \text{(III-12)}$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho(\ell_e/2)}$ representa a curvatura na seção da base da coluna.

Finalmente, admitindo-se que $\pi^2 \cong 10$, obtém-se a equação (III-8).

Conclui-se, assim, que a relação expressa pela equação (III-8) se verifica quando a distribuição da curvatura é senoidal. Todavia, ela também pode ser reproduzida para outras distribuições da curvatura.

III.3.3 - Formulação do problema

O problema da determinação da capacidade portante de uma dada coluna-modelo pode ser formulado através de um sistema de equações estabelecidas para a seção mais solicitada da

coluna, que traduzem, respectivamente, uma relação geométrica, uma relação física, uma condição de equilíbrio, uma condição de compatibilidade e um critério de instabilidade.

III.3.3.1-Relação Geométrica

A coluna-modelo representada na figura III-4 está submetida em sua seção mais solicitada, ou seja, na seção da base, ao esforço normal

$$N = - P \qquad \text{(III-13)}$$

e ao momento fletor total

$$M = M_1 + M_2 \qquad \text{(III-14)}$$

soma, portanto, do momento fletor de primeira ordem

$$M_1 = P(e_o + e_a) + \frac{H\ \ell_e}{2} + \frac{w\ \ell_e^2}{8} \qquad \text{(III-15)}$$

e do momento fletor de segunda ordem

$$M_2 = Pf \qquad \text{(III-16)}$$

O momento fletor total, M, pode ser expresso por

$$M = P\ e \qquad \text{(III-17)}$$

isto é, como o produto da carga axial, P, por uma excentricidade

total

$$e = e_1 + e_2 \qquad \text{(III-18)}$$

constituída, portanto, de duas parcelas, uma de primeira ordem e outra de segunda ordem.

A excentricidade de primeira ordem, e_1, é dada pela seguinte soma:

$$e_1 = e_o + e_a + \frac{H\,\ell_e}{2P} + \frac{w\,\ell_e^2}{8P} \qquad \text{(III-19)}$$

onde

e_o é a excentricidade da carga axial P na seção do topo,

e_a é a excentricidade adicional (não-intencional) da carga axial P para prever possíveis imperfeições geométricas,

$\frac{H\,\ell_e}{2P} = e_H$ é a excentricidade devida à força horizontal H aplicada no topo da coluna,

$\frac{w\,\ell_e^2}{8P} = e_w$ é a excentricidade devida à força horizontal w uniformemente distribuída ao longo do comprimento da coluna.

A excentricidade de segunda ordem, e_2, é a flecha experimentada pela coluna no topo

$$e_2 = f \qquad \text{(III-20)}$$

Combinando-se as equações (III-8), (III-14) e (III-16) ou as equações (III-8), (III-18) e (III-20), obtém-se uma relação de ordem geométrica:

$$M = M_1 + P \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \quad \text{ou} \quad e = e_1 + \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \qquad \text{(III-21)}$$

onde todas as variáveis são referentes à seção da base.

III.3.3.2-Relação Física

Os esforços internos na seção da base são obtidos pelas equações que os definem como resultantes das tensões internas que, por sua vez, dependem da distribuição de deformações na seção. A consideração da hipótese das seções planas permite admitir uma distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção, que pode, então, ser representada por dois parâmetros: ε_{cg}, deformação longitudinal ao nível do centro geométrico da seção, e ϕ, curvatura. Devido ao comportamento não-linear dos materiais, o esforço normal interno

$$N_i = F_1 (\varepsilon_{cg}, \phi) \qquad \text{(III-22)}$$

e o momento fletor interno ou a excentricidade interna, respectivamente,

$$M_i = F_2 (\varepsilon_{cg}, \phi) \quad \text{ou} \quad e_i = F_3 (\varepsilon_{cg}, \phi) \qquad \text{(III-23)}$$

são funções não-lineares de ε_{cg} e ϕ, que não podem ser expressas analiticamente e, por isso, devem ser obtidas por meio de um procedimento de cálculo iterativo. Estas funções fornecem a relação física entre esforços internos e deformações na seção mais solicitada.

III.3.3.3-Condição de Equilíbrio

Deve ser verificado o equilíbrio entre os esforços internos e os esforços externos na seção mais solicitada, condição, esta, expressa pelas equações:

$$N_i = - P \qquad \text{(III-24)}$$

e

$$M_i = Pe \quad \text{donde } e_i = e \qquad \text{(III-25)}$$

III.3.3.4-Condição de Compatibilidade

Deve ser verificada a compatibilidade entre a curvatura devida às tensões internas e a curvatura da deformada da coluna na seção mais solicitada, condição que se exprime pela equação:

$$\phi = \frac{1}{r} \qquad \text{(III-26)}$$

III.3.3.5-Critério de Instabilidade

A coluna atingirá o estado limite último de ruína por instabilidade quando alcançar um valor máximo da excentricidade de primeira ordem (e portanto do momento fletor de primeira ordem) ou da carga axial em função da curvatura. O critério de instabilidade pode, então, ser expresso por uma das equações:

$$\frac{d\, e_1}{d\left(\frac{1}{r}\right)} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\, M_1}{d\left(\frac{1}{r}\right)} = 0$$

ou

(III-27)

$$\frac{dP}{d\left(\frac{1}{r}\right)} = 0$$

III.3.3.6-Tipos de Análise

Conhecido o comprimento de flambagem da coluna, a forma e as dimensões da seção transversal, a quantidade e distribuição de armadura e as propriedades físicas dos materiais, um método de cálculo incremental-iterativo desenvolvido com base nas equações (III-21) a (III-27) permitirá determinar:

- a excentricidade última de primeira ordem (ou o momento último de primeira ordem) para uma carga axial dada; ou

- a carga axial última para uma excentricidade de primeira ordem dada.

III.3.4 - Representação gráfica das condições de equilíbrio

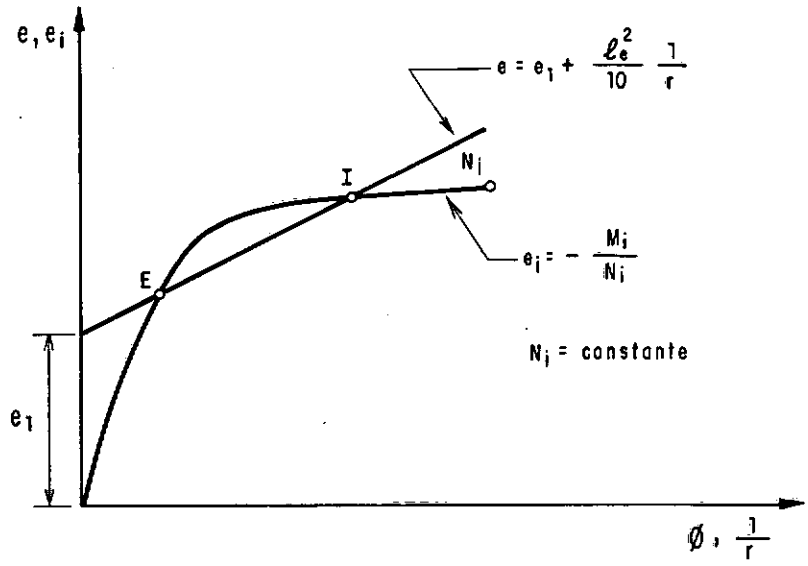


FIGURA III-6 - Representação gráfica das relações excentricidade externa total-curvatura e excentricidade interna-curvatura.

A maneira mais conveniente de ilustrar os dois tipos de análise citados no parágrafo III.3.3.6 é através de uma representação gráfica nos eixos excentricidade-curvatura. A relação entre a excentricidade externa total, e, e a curvatura, $\frac{1}{r}$, é representada por uma reta de coeficiente angular $\frac{\ell_e^2}{10}$ e de ordenada na origem e_1, como se vê na figura III-6. A relação entre a excentricidade interna, $e_i = -\frac{M_i}{N_i}$, e a curvatura, ϕ, para um da

do N_i é representada por uma curva que se afasta do eixo das excentricidades em direção ao eixo das curvaturas, à medida que o valor absoluto de N_i cresce. O formato desta curva depende da forma da seção transversal, da taxa e distribuição de armadura e das leis tensão-deformação dos materiais.

Como se pode observar na figura III-6, é comum as duas linhas representativas das relações excentricidade externa total-curvatura e excentricidade interna-curvatura se interceptarem em dois pontos, E e I, nos quais $e_i = e$. A configuração correspondente ao ponto E é uma configuração de equilíbrio estável para a coluna. O ponto I representa uma outra configuração de equilíbrio para a coluna, porém instável. Isto pode ser comprovado ao se observarem configurações vizinhas à direita destes pontos. Enquanto que numa configuração vizinha à direita do ponto E, correspondente, portanto, a uma flecha maior e, conseqüentemente, a uma curvatura também maior, a excentricidade interna é maior que a externa, numa configuração vizinha à direita do ponto I, a excentricidade interna é menor que a externa.

No caso do primeiro tipo de análise citado no parágrafo III.3.3.6, o valor da carga axial é fixo; conseqüentemente, o do esforço normal também o é. E, então, apenas uma curva representativa da relação excentricidade interna-curvatura, aquela de parâmetro $N_i = -P$, é considerada. Para um valor pequeno da excentricidade de primeira ordem, e_1, a reta $e - \frac{1}{r}$ correspondente corta a curva no ponto de equilíbrio E, podendo, eventualmente, cortar também num ponto I. A valores crescentes de e_1 correspondem novas retas, paralelas à primeira, cada qual situada a

cima da anterior. Deste modo, os pontos E e I onde a reta intercepta a curva tendem a se aproximar cada vez mais. No limite, eles coincidem quando, então, a reta é tangente à curva em U (figura III-7). O valor de e_1 correspondente a esta condição limite, e_{1u}, permitirá calcular o momento último de primeira ordem. Retas correspondentes a valores de e_1 superiores a e_{1u} não interceptarão a curva; portanto, o equilíbrio é impossível para estes valores de e_1.

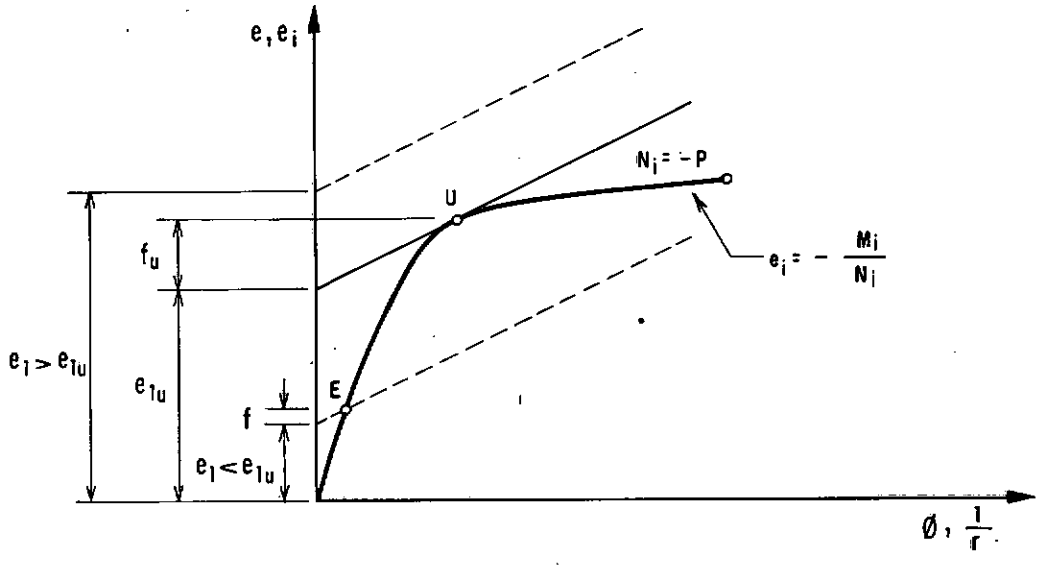


FIGURA III-7 - Estados de equilíbrio nos eixos excentricidade-curvatura para N fixo.

No caso do segundo tipo de análise citado no parágrafo III.3.3.6, a excentricidade de primeira ordem é fixa e, então, a reta representativa da relação excentricidade externa total-curvatura também o é. Para um valor pequeno de P, a curva $e_i - \phi$ correspondente intercepta a reta no ponto de equilíbrio E

e, eventualmente, também num ponto I. A valores crescentes de P correspondem outras curvas, cada qual situada abaixo da anterior, de modo que os pontos E e I onde a curva cruza a reta tornam-se cada vez mais próximos um do outro. A carga última será determinada a partir do parâmetro N_u associado à curva tangente à reta em U (figura III-8). Curvas e_i-ϕ cujos parâmetros são superiores em valor absoluto a $|N_u|$ não interceptarão a reta. O equilíbrio é, então, impossível para valores de P superiores a $|N_u|$.

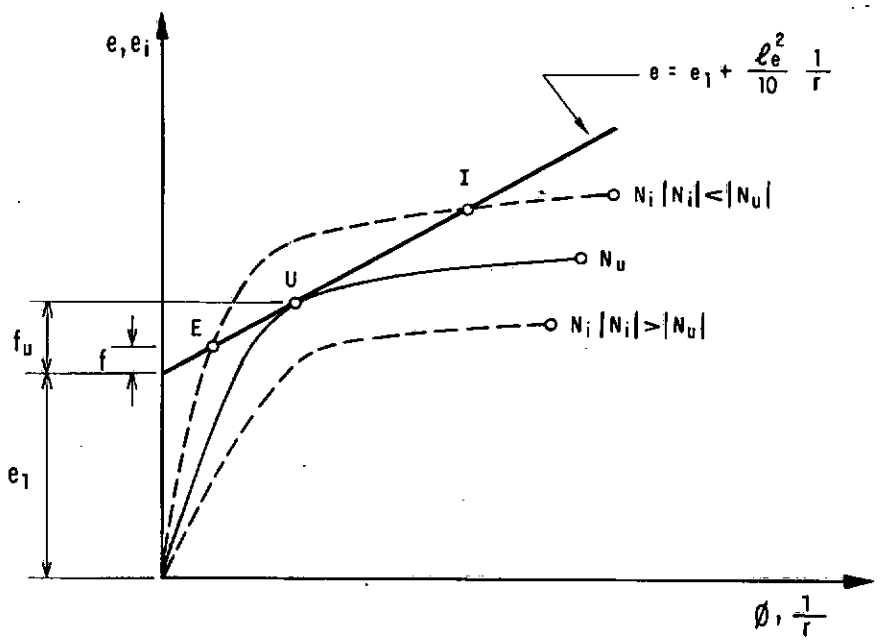


FIGURA III-8 - Estados de equilíbrio nos eixos excentricidade-curvatura para e_1 fixo

III.3.5 - Tabelas e diagramas para a apresentação de resultados numéricos

Soluções numéricas obtidas por programas de computador utilizando um processo de cálculo baseado no método da coluna-modelo podem ser organizadas na forma de tabelas ou diagramas adequados em função dos seguintes parâmetros adimensionais:

- esforço normal relativo:

$$\nu = \frac{|N|}{N_c} \qquad \text{(III-28)}$$

- momento relativo de primeira ordem:

$$\mu_1 = \frac{M_1}{N_c\, h} = \nu \frac{e_1}{h} \qquad \text{(III-29)}$$

ou excentricidade relativa de primeira ordem: $\frac{e_1}{h}$;

- taxa mecânica de armadura:

$$\omega = \frac{A_s\, f_{se}}{N_c} \qquad \text{(III-30)}$$

- razão entre o comprimento de flambagem da coluna e a altura total da seção transversal: $\frac{\ell_e}{h}$;

sendo que

$$N_c = A_c\, f_c \qquad \text{(III-31)}$$

é a parcela, devida ao concreto, da capacidade de carga da seção transversal na compressão centrada;

f_c é a resistência do concreto à compressão;

f_{se} é a tensão de escoamento do aço;

A_c é a área da seção transversal geométrica;

A_s é a área total de armadura;

h é a altura total da seção transversal.

As tabelas e os diagramas são preparados para uma dada forma de seção de concreto, distribuição de armadura e leis tensão-deformação dos materiais.

Um tipo de tabela é a que fornece o valor último de μ_1 em função de ν, ω e ℓ_e/h. Com tabelas como esta pode-se resolver diretamente os seguintes problemas:

a) cálculo de M_1, dados ℓ_e/h, ω e N;

b) cálculo de A_s, dados ℓ_e/h, N e M_1.

Eventualmente, estas tabelas permitem encontrar, por tentativas, a carga axial última para uma excentricidade de primeira ordem conhecida, ou seja, solucionar o problema:

c) cálculo de P, dados ℓ_e/h, ω, e_1.

Outro tipo de tabela é a que dá o valor último de ν em função de e_1/h, ω e ℓ_e/h. Tabelas deste tipo permitem tratar diretamente os três problemas.

Outra maneira de apresentar os resultados é através dos diagramas de interação $\mu_1 - \nu - \omega - \ell_e/h$. Estes diagramas são representações gráficas nos eixos $\mu_1 - \nu$ da capacidade portante de pilares. Apresentam várias curvas para uma mesma relação ℓ_e/h, a cada uma das quais corresponde um valor de ω diferente.

III.3.6 - Domínio de aplicação do método

O método da coluna-modelo pode ser aplicado diretamente a pilar que atenda aos seguintes requisitos:

- seja isostático; pode ser um pilar em balanço (livre no topo e engastado na base) de comprimento $\ell = \ell_e/2$ (figura III-9a) ou um pilar simplesmente apoiado de comprimento $\ell = \ell_e$ (figura III-9b);

- tenha seção transversal (concreto e armadura) constante ao longo do comprimento;

- cuja flexão ocorra num plano de simetria do pilar, comum ao concreto e às armaduras; deste modo, as ações devem estar contidas neste mesmo plano;

- esteja submetido a ações tais que o esforço normal seja constante ao longo do comprimento e o momento de primeira ordem tenha mesmo sinal ao longo do comprimento e seu valor máximo na se-

ção do engaste para o pilar em balanço e na seção à meia-altura (sendo simetricamente distribuído em relação a esta seção) para o pilar simplesmente apoiado.

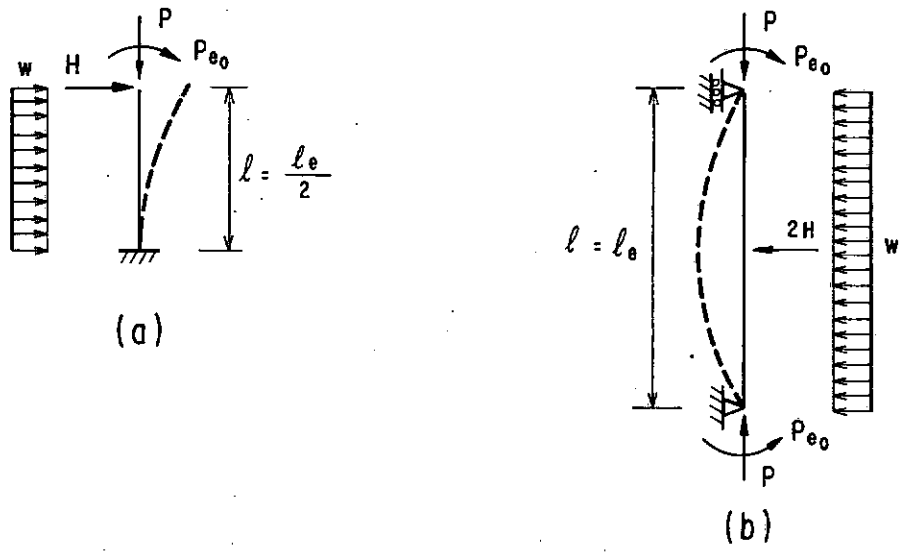


FIGURA III-9 - Pilares isostáticos cujas deformadas não apresentam ponto de inflexão e são tangentes à vertical na seção mais solicitada.

Para que se possa analisar através do método da coluna-modelo o caso de um pilar simplesmente apoiado, sujeito a momento de primeira ordem variando linearmente ao longo do comprimento de tal modo que as excentricidades nas extremidades são diferentes em módulo e/ou sinal (figuras III-10a e III-10b), deve-se tratar o pilar como se fosse sujeito a uma excentricidade equivalente, e_o, constante ao longo do comprimento (figura III-10c) e possuindo o maior dos dois seguintes valores:

$$e_o = 0,6\ e_{o2} + 0,4\ e_{o1}$$

$$e_o = 0,4\ e_{o2} \qquad \text{(III-32)}$$

onde e_{o1} e e_{o2} são as excentricidades de primeira ordem nas extremidades, sendo que e_{o2} é positiva e maior em módulo do que e_{o1}.

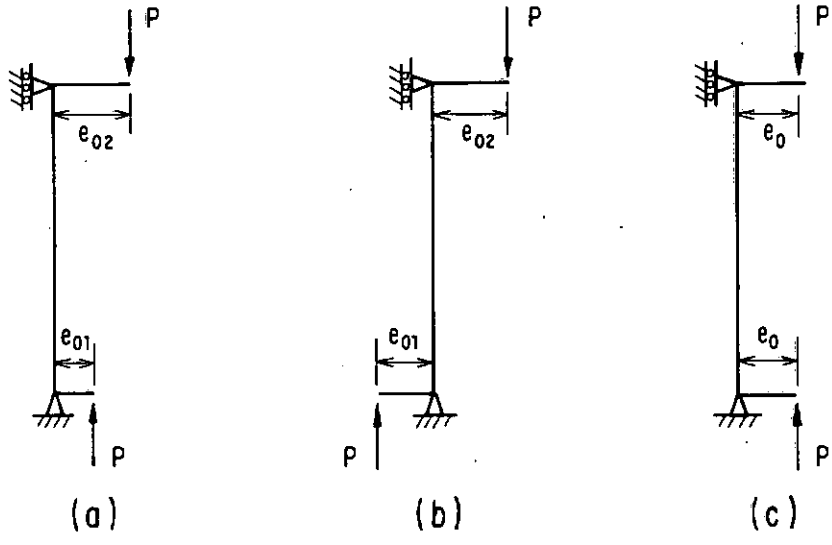


FIGURA III-10 - Pilares simplesmente apoiados sujeitos a cargas axiais aplicadas com excentricidades diferentes nas extremidades (a,b) e com excentricidade equivalente constante (c).

No caso do momento de primeira ordem resultar não só das excentricidades da carga axial como também da ação de forças transversais, a excentricidade equivalente a ser considerada será obtida adicionando-se, àquela dada por uma das equações (III-32), a excentricidade máxima devida às forças transversais.

No entanto, em qualquer destes casos devem ser obedecidas as exigências do parágrafo 14.4.1.2 do Código-modelo do CEB-FIP/1978[7].

O Código-modelo do CEB-FIP/1978[7], em seu parágrafo 14.1.3, permite a aplicação do método da coluna-modelo e do método do equilíbrio apenas a pilar com índice de esbeltez, λ, inferior a 140, sendo λ definido por

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i_c} \qquad \text{(III-33)}$$

onde

ℓ_e é o comprimento de flambagem do pilar,

$i_c = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}}$ é o raio de giração da seção transversal.

III.3.7 - Método da coluna-modelo melhorado

Como foi visto no parágrafo III.3.2, a equação (III-8), que exprime a hipótese fundamental do método da coluna-modelo, foi deduzida admitindo-se uma deformada senoidal para a coluna, o que implica numa distribuição de curvaturas senoidal. Esta distribuição pode-se distanciar de forma mais ou menos marcante da distribuição real de curvaturas, que depende da distribuição de momentos fletores totais.

Admitindo-se que apenas os momentos de segunda ordem produzam flechas com distribuição senoidal, pode-se estabelecer um fator corretivo que leva em consideração, de maneira aproximada, a influência da distribuição do momento de primeira ordem no valor da flecha no topo da coluna-modelo. De acordo com esta hipótese, a maior ou menor aproximação com que a flecha no topo da coluna é calculada no método da coluna-modelo depende de dois fatores:

- distribuição do momento de primeira ordem ao longo do pilar; e
- importância relativa dos efeitos de segunda ordem, aferida pela esbeltez.

III.3.7.1 - Valor corrigido do momento último de primeira ordem para uma carga axial dada

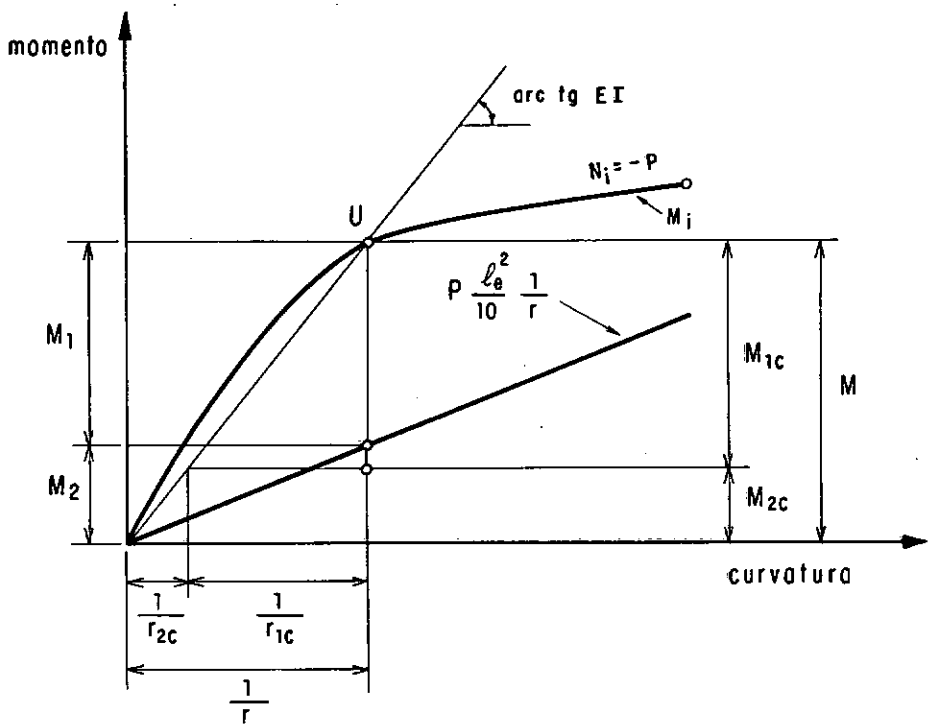


FIGURA III-11 - Condições de equilíbrio último nos eixos momento curvatura para uma carga axial dada

A figura III-11 mostra as condições de equilíbrio último nos eixos momento-curvatura, para uma carga axial de valor conhecido. A relação momento interno-curvatura é representada pela curva de parâmetro $N_i = -P$. No método da coluna-modelo, o momento de segunda ordem é dado por uma função linear da curvatura, representada por uma reta de coeficiente angular $\frac{P\,\ell_e^2}{10}$. O momento último de primeira ordem é obtido como a máxima diferença entre as ordenadas, correspondentes à mesma curvatura, representativas do momento interno e do momento de segunda ordem. Supõe-se que o estado limite último de ruína por instabilidade correspondente à forma corrigida da deformada é muito pouco diferente do obtido em U, de tal modo que os valores últimos do momento total e da curvatura (que, para simplificar, serão denotados por M e $\frac{1}{r}$ respectivamente) não mudam. Em conseqüência, os valores "corretos" dos momentos últimos de primeira e de segunda ordem, M_{1c} e M_{2c}, serão tais que

$$M_{1c} + M_{2c} = M \qquad \text{(III-34)}$$

A análise que tem por objetivo o estabelecimento de um fator corretivo é baseada na hipótese de uma relação linear entre o momento total e a curvatura, caracterizada pela rigidez secante à flexão EI, suposta constante ao longo da coluna. Esta hipótese permite escrever que

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \qquad \text{(III-35)}$$

Com base nas equações (III-34) e (III-35) é possível exprimir a curvatura última por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_{1c}} + \frac{1}{r_{2c}} \qquad \text{(III-36)}$$

isto é, como a soma de duas parcelas, uma de primeira ordem, proporcional a M_{1c},

$$\frac{1}{r_{1c}} = \frac{M_{1c}}{EI} \qquad \text{(III-37)}$$

e outra de segunda ordem, proporcional a M_{2c},

$$\frac{1}{r_{2c}} = \frac{M_{2c}}{EI} \qquad \text{(III-38)}$$

A flecha "correta", f_c, também pode ser considerada formada por duas parcelas, f_{1c} e f_{2c}, correspondentes, respectivamente, às curvaturas $\frac{1}{r_{1c}}$ e $\frac{1}{r_{2c}}$.

A parcela f_{1c} da flecha será calculada de acordo com uma expressão obtida com base na hipótese de que a rigidez EI é constante ao longo da coluna, aplicando-se o segundo teorema de Mohr:

$$f_{1c} = \frac{Z}{EI} \qquad \text{(III-39)}$$

onde Z é o momento estático da área do diagrama de momentos de primeira ordem corrigido em relação ao topo da coluna - modelo.

A parcela f_{2c} da flecha será suposta relacionada

à curvatura $\frac{1}{r_{2c}}$ segundo a hipótese fundamental do método e, portanto, expressa por

$$f_{2c} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r_{2c}} \qquad \text{(III-40)}$$

Combinando-se as equações (III-8), (III-34), (III-35), (III-38), (III-39) e (III-40), é possível obter

$$f_c = f \left(1 - \frac{M_{1c}}{M} + \frac{10}{\ell_e^2} \frac{Z}{M} \right) \qquad \text{(III-41)}$$

Em primeira aproximação, pode-se tomar para M_{1c} o valor de M_1 e, conseqüentemente, avaliar Z para o diagrama de momentos de primeira ordem correspondente ao valor M_1. Isto conduzirá ao seguinte valor corrigido para a flecha última:

$$f_c = f \left(1 - \frac{M_1}{M} \alpha_c \right) \qquad \text{(III-42)}$$

onde

$$\alpha_c = 1 - \frac{10}{\ell_e^2} \frac{Z}{M_1} \qquad \text{(III-43)}$$

é o fator corretivo que leva em conta a distribuição do momento de primeira ordem.

O momento último de segunda ordem terá, então, seu valor corrigido para

$$M_{2c} = P\, f_c = M_2 \left(1 - \frac{M_1}{M} \alpha_c \right) \qquad \text{(III-44)}$$

Exprimindo-se o valor corrigido do momento último de primeira ordem como $M_{1c} = M - M_{2c}$ e substituindo-se nesta equação o valor de M_{2c} dado pela equação (III-44), chega-se ao seguinte resultado:

$$M_{1c} = M_1 \left[1 + \left(1 - \frac{M_1}{M} \right) \alpha_c \right] \qquad \text{(III-45)}$$

Assim, se, para uma carga axial dada, se obtém de acordo com o método da coluna-modelo um momento último de primeira ordem M_1, ao qual corresponde uma flecha f, o método da coluna-modelo melhorado fornecerá o valor corrigido M_{1c} para este momento, expresso pela equação (III-45). Para que se possa empregar esta equação, é necessário conhecer o momento último total M. Há tabelas, no entanto, como as apresentadas no apêndice 3 do Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5] (tabelas A3.4 a A3.8), que não fornecem o valor do momento total relativo, $\mu = M/(N_c h)$, nem o de qualquer outro parâmetro, como f/h ou h/r, com o auxílio do qual seria possível avaliar M. Nestes casos, o mesmo manual aconselha a tomar, como uma boa aproximação de μ, o valor do momento relativo de ruptura da seção, apresentado nas tabelas para $\ell_e/h = 0$.

III.3.7.2- Valor corrigido da carga axial última para uma excentricidade de primeira ordem dada

Mantidas, no caso do equilíbrio último para uma excentricidade de primeira ordem dada, as mesmas hipóteses fei-

tas no parágrafo III.3.7.1, o valor da flecha última correspondente à forma corrigida da deformada também será expresso pela equação (III-42).

Em conseqüência da correção do valor da flecha, o valor último da carga axial será alterado. O momento último de primeira ordem, $M_1 = P\ e_1$, terá, então, seu valor corrigido para

$$M_{1c} = P_c\ e_1 = \frac{P_c}{P} M_1 \qquad \text{(III-46)}$$

e o momento último de segunda ordem, $M_2 = Pf$, será corrigido para

$$M_{2c} = P_c\ f_c = \frac{P_c}{P} M_2 \left(1 - \frac{M_1}{M} \alpha_c\right) \qquad \text{(III-47)}$$

Somando-se as expressões destes momentos, igualando-se o resultado a M e resolvendo-se a equação obtida para P_c, vem

$$P_c = \frac{P}{1 - \frac{M_1}{M}\left(1 - \frac{M_1}{M}\right)\alpha_c} \qquad \text{(III-48)}$$

Deste modo, conhecida, para uma dada excentricidade de primeira ordem, a carga axial última P fornecida pelo método da coluna-modelo e à qual corresponde uma flecha f, o método da coluna-modelo melhorado conduzirá ao valor corrigido para esta carga, P_c, expresso pela equação (III-48).

III.3.7.3- Expressão do fator corretivo α_c

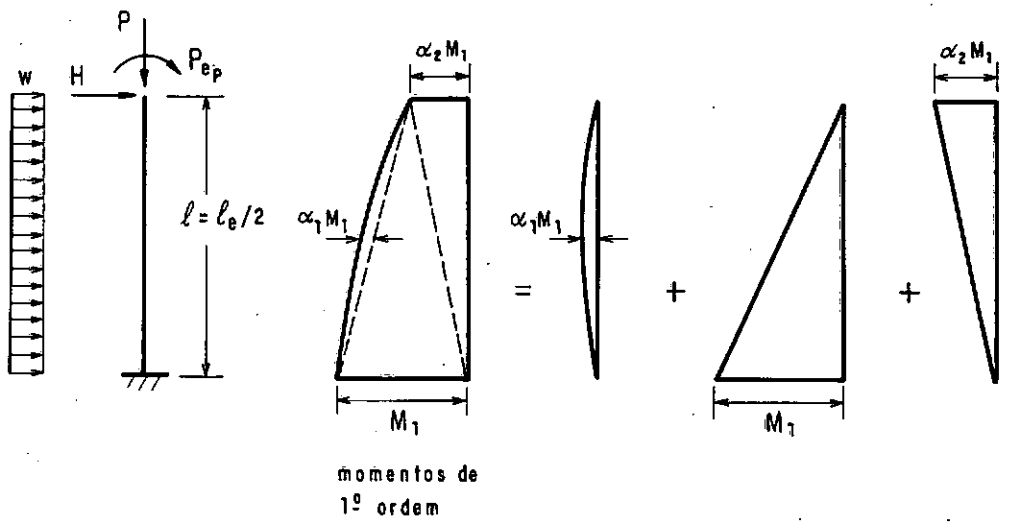


FIGURA III-12 - Distribuição do momento de primeira ordem ao longo da coluna-modelo

O Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5] sugere considerar a distribuição do momento de primeira ordem como a superposição de dois diagramas triangulares e de um diagrama parabólico, como mostra a figura III-12. Assim, avaliando-se o momento estático, em relação ao topo da coluna-modelo, da área de cada componente do diagrama de momentos de primeira ordem e somando-se as três parcelas resultantes, obtém-se

$$Z = \left(1 + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) M_1 \frac{\ell_e^2}{12} \qquad \text{(III-49)}$$

A substituição da expressão de Z na equação (III-43) conduz à seguinte expressão para α_c

$$\alpha_c = \frac{1}{6} - \frac{\alpha_1}{1,2} - \frac{\alpha_2}{2,4} \qquad \text{(III-50)}$$

Os coeficientes α_1 e α_2, que caracterizam o diagrama de momentos de primeira ordem, são dados, para o sistema de ações apresentado na figura III-12, respectivamente por

$$\alpha_1 = - \frac{w\ \ell^2}{8\ M_1} = - \frac{w\ \ell_e^2}{32\ M_1} \qquad \text{(III-51)}$$

e

$$\alpha_2 = \frac{P\ e_P}{M_1} \qquad \text{(III-52)}$$

O sinal negativo que aparece na equação (III-51) indica que, para este sistema de ações, a parábola deveria ser representada na figura III-12 com a concavidade voltada para o lado oposto.

A figura III-13 fornece valores do fator corretivo α_c correspondentes a determinados sistemas de ações. O fato de α_c ser nulo para alguns destes sistemas de ações indica que, nestes casos, a hipótese fundamental do método da coluna-modelo é verificada. Efetivamente, quando $\alpha_c = 0$, tem-se $\frac{Z}{M_1} = \frac{\ell_e^2}{10}$ e, em qualquer dos dois tipos de análise citados no parágrafo III.3.3.6, $M_{1c} = M_1$, donde vem que $f_{1c} = \frac{\ell_e^2}{10}\ \frac{1}{r_{1c}}$.

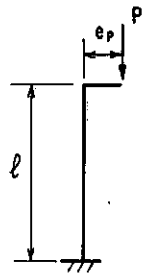
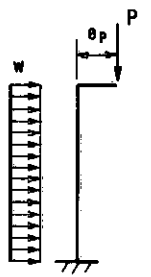
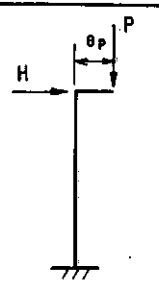
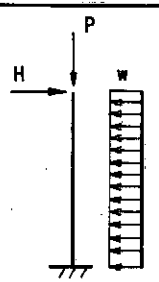
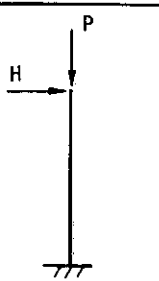
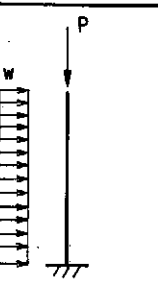
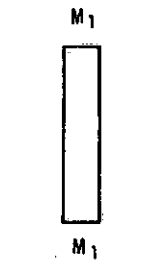
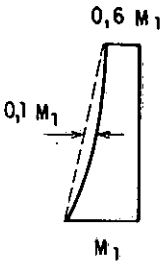
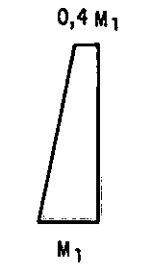
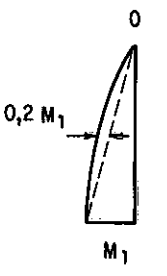
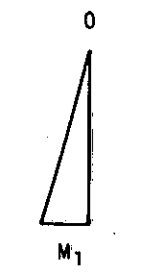
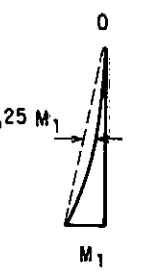
Sistema de ações						
Condição imposta	—	$\frac{w}{P} = \frac{4}{3}\frac{e_p}{\ell^2}$	$\frac{H}{P} = \frac{3}{2}\frac{e_p}{\ell}$	$\frac{w\ell}{H} = \frac{-8}{9}$	—	—
Diagrama de momentos de 1ª ordem						
α_c	-0,25	0	0	0	0,1666	0,375

FIGURA III-13 - Valores do fator corretivo α_c para diferentes sistemas de ações

Como foi visto no parágrafo III.3.6, o método da coluna-modelo também pode ser aplicado a pilar simplesmente apoiado, submetido a um sistema de ações tal como o apresentado na figura III-9b. Neste caso, o diagrama de momentos de primeira ordem é simétrico em relação à seção à meia-altura do pilar e sua metade superior tem a forma do diagrama representado na figura III-12. O coeficiente α_1 é dado por

$$\alpha_1 = \frac{w\,\ell^2}{32M_1} = \frac{w\,\ell_e^2}{32M_1} \qquad \text{(III-53)}$$

e o coeficiente α_2 assume o valor fornecido pela equação (III-52).

III.4 - MÉTODO SIMPLIFICADO BASEADO NO ESTADO DE EQUILÍBRIO

O método do equilíbrio tem por objetivo verificar se uma dada coluna estará em equilíbrio estável quando solicitada por um sistema de ações conhecido.

Este método utiliza a mesma hipótese simplificadora do método da coluna-modelo, ou seja, de que a flecha na extremidade livre da coluna pode ser expressa como uma função linear da curvatura na extremidade engastada (seção da base) segundo a equação (III-8). Em face disto, a verificação é feita na seção da base da coluna.

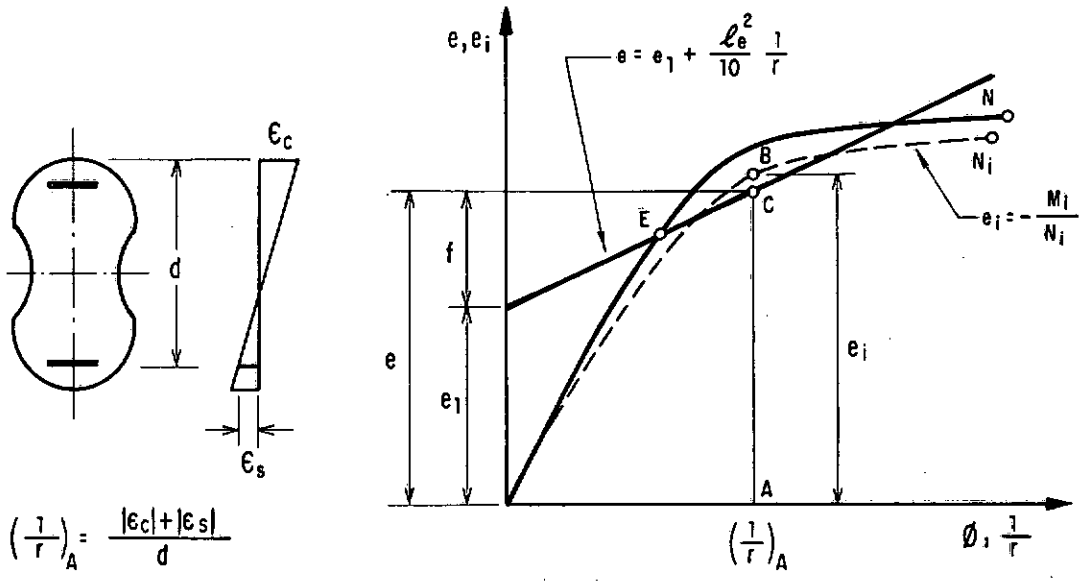


FIGURA III-14 - Verificação da estabilidade de uma coluna pelo método do equilíbrio

Para a seção da base da coluna-modelo (figura III-4) são conhecidos o esforço normal externo, N, dado pela equação (III-13) e a excentricidade de primeira ordem, e_1, fornecida pela equação (III-19). Para efetuar a verificação, considera-se um diagrama de deformações arbitrário para esta mesma seção, cujos valores das deformações são menores ou iguais às deformações limites dos materiais. Determinam-se, então, a partir deste diagrama de deformações, os valores das resultantes das tensões internas, N_i e M_i, e, posteriormente, o da excentricidade interna, $e_i = -\frac{M_i}{N_i}$. Em seguida, avalia-se a excentricidade externa total de acordo com a segunda das equações (III-21) para o valor $\left(\frac{1}{r}\right)_A$ da curvatura, correspondente ao diagrama de deformações adotado. Comparam-se, então, o esforço normal externo, N, e a excentricidade externa total, e, com a resultante das tensões in-

ternas N_i e sua excentricidade e_i.

Se, como mostra a figura III-14, ambas as condições

$$|N_i| \geq |N|$$

$$e_i \geq e \qquad \text{(III-54)}$$

forem satisfeitas, poder-se-á concluir que a coluna está em equilíbrio estável sob o sistema de ações dado. Esta conclusão pode ser justificada pelo argumento seguinte, que não requer a obtenção das curvas excentricidade interna-curvatura que têm como parâmetros, respectivamente, N e N_i. Se o comprimento $AB = e_i$ é maior do que $AC = e = e_1 + f$, pode-se garantir que a curva de parâmetro N_i intercepta a reta representativa da relação excentricidade externa total-curvatura. Uma vez que $|N_i| \geq |N|$, as ordenadas da curva de parâmetro N são maiores ou iguais às da curva de parâmetro N_i. Portanto, a curva de parâmetro N certamente também interceptará a reta da excentricidade externa total. Isto implica na existência de um ponto E de equilíbrio estável. Assim, para provar que existe um estado de equilíbrio estável para a coluna sob o sistema de ações dado, basta encontrar um ponto B situado no interior da área delimitada pela curva de parâmetro N e pela reta da excentricidade externa total.

Embora este método não forneça, em geral, uma solução ótima, pois se desconhece quanto de exagero existe na reserva de resistência da seção, bons resultados podem ser conse-

guidos adotando-se valores adequados para a curvatura e carga axial. O Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5] apresenta sugestões para estes valores.

III.5 - MÉTODO APROXIMADO PARA O CÁLCULO DO MOMENTO COMPLEMENTAR

Este método aproximado permite que uma coluna esbelta seja dimensionada como uma coluna curta, isto é, no estado limite último de ruína por esgotamento da capacidade resistente da seção mais solicitada, para o esforço normal externo, N, expresso pela equação (III-13) e momento fletor total, M, dado pela equação (III-14), ou seja, pela soma de M_1, momento de primeira ordem devido ao sistema de ações dado e à excentricidade adicional, e M_2, momento complementar que leva em conta os efeitos de segunda ordem.

O momento complementar para uma coluna isostática de comprimento de flambagem ℓ_e tem a mesma expressão do momento de segunda ordem no método da coluna-modelo:

$$M_2 = P \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \qquad \text{(III-55)}$$

mas, a curvatura última, $\frac{1}{r}$, é dada pelas expressões empíricas

$$\frac{1}{r} = \left(0{,}0035 + \frac{f_{se}}{E_s}\right) \Big/ h \quad \text{para } \nu \leq 0{,}5$$

$$\frac{1}{r} = \left(0{,}0035 + \frac{f_{se}}{E_s}\right) \Big/ (2\nu h) \text{ para } \nu > 0{,}5 \qquad \text{(III-56)}$$

sendo ν avaliado de acordo com a equação (III-28).

Estas expressões para a curvatura foram estabelecidas de modo que os resultados a que elas conduzem estejam bem próximos dos resultados de inúmeros ensaios. Entretanto, foi constatado que estes mesmos resultados, quando comparados com os do método geral, estão, algumas vezes, contra a segurança. Por este motivo, o Manual de flambagem e instabilidade do CEP-FIP/1977 [5] sugere que se aplique um fator de comportamento, γ_n, aos coeficientes γ_m de minoração das resistências dos materiais. Assim, a resistência de cálculo do concreto à compressão deve ser avaliada de acordo com a equação

$$f_c = \frac{0,85\ f_{ck}}{\gamma_n\ \gamma_c} \qquad \text{(III-57)}$$

e a tensão de escoamento de cálculo do aço, segundo

$$f_{se} = \frac{f_{yk}}{\gamma_n\ \gamma_s} \qquad \text{(III-58)}$$

Em ambas as equações $\gamma_n = 1,2$.

As equações (III-56) têm a grande vantagem de serem independentes da armadura, sendo, por isso, muito convenientes para ante-projeto.

CAPÍTULO IV

HIPÓTESES E MÉTODO DE CÁLCULO

Neste capítulo são apresentados o método de cálculo baseado na coluna-modelo[4,5,7], suas hipóteses de base bem como as hipóteses visando à aplicação numérica deste método.

O método de cálculo destina-se a determinar a capacidade portante de pilares isostáticos de concreto armado, cujas deformadas não apresentam ponto de inflexão e são tangentes à vertical na seção mais solicitada, submetidos a um sistema de ações de curta e/ou longa duração, contidas num plano de simetria da coluna. Para isto, calcula, passo a passo, os estados de equilíbrio sucessivos na seção mais solicitada do pilar.

IV.1 - HIPÓTESES DE BASE

IV.1.1 - Hipótese da coluna-modelo

Como foi visto no parágrafo III.3.1, coluna-modelo (figura IV-1) é uma coluna:

- livre no topo e engastada na base;
- fletida em curvatura simples sob a ação de uma carga axial, P, de uma força horizontal concentrada, H, e/ou de uma força horizontal distribuída, w, e/ou de um momento aplicado no topo, Pe_o.

- cuja flecha no topo pode ser determinada de modo aproximado por

$$f = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \qquad \text{(IV-1)}$$

onde

ℓ_e é o comprimento de flambagem da coluna,

$\frac{1}{r}$ é a curvatura na seção da base.

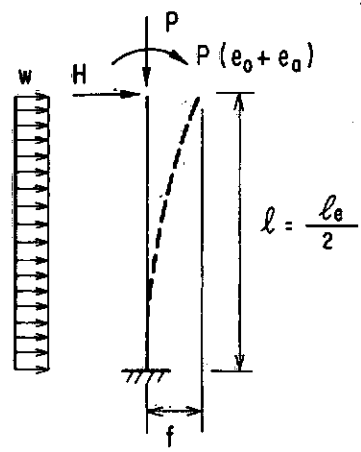


FIGURA IV-1 - Coluna-modelo

IV.1.2 - Seção transversal

A seção transversal de concreto armado, submetida à flexão composta reta neste estudo, é discretizada em fibras de concreto e fibras de aço.

IV.1.3 - Hipótese das seções planas

Admite-se como válida a hipótese de Bernoulli de que as seções permanecem planas e normais ao eixo da peça após a deformação. Esta hipótese é aceitável porque se desprezam as deformações devidas ao esforço cortante e se supõe que haja aderência perfeita entre o aço e o concreto.

Com base nesta hipótese, pode-se considerar uma distribuição linear de deformações longitudinais ao longo da altura da seção (figura IV-2). Esta distribuição de deformações é representada por dois parâmetros: ε_{cg}, deformação ao nível do centro geométrico da seção, e ϕ, curvatura, através da equação

$$\varepsilon = \varepsilon_{cg} + \phi\, y \qquad \text{(IV-2)}$$

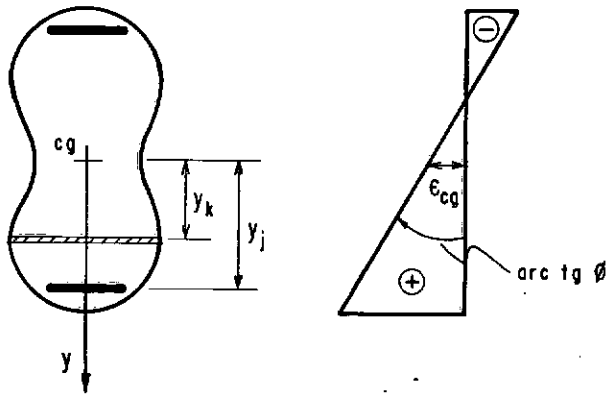


FIGURA IV-2 - Deformações das fibras

IV.1.4 - Hipótese das armaduras aderentes

Por hipótese, a aderência entre o concreto e o aço é perfeita, não havendo, assim, deslizamento entre a armadura e o concreto adjacente. Em conseqüência, a deformação de uma fibra j de aço, distante y_j do eixo z, é igual à deformação da fibra de concreto situada a uma distância $y_k = y_j$ do eixo z.

IV.1.5 - Hipótese das pequenas mudanças de forma

Considera-se a hipótese de pequenas mudanças de forma que permite adotar a seguinte expressão aproximada para a curvatura

$$\frac{1}{\rho(x)} = - \frac{d^2v(x)}{dx^2} \qquad \text{(IV-3)}$$

utilizada, como foi visto no parágrafo III.3.2, na dedução da equação (IV-1), que representa a hipótese fundamental do método da coluna-modelo.

IV.1.6 - Não-linearidade geométrica

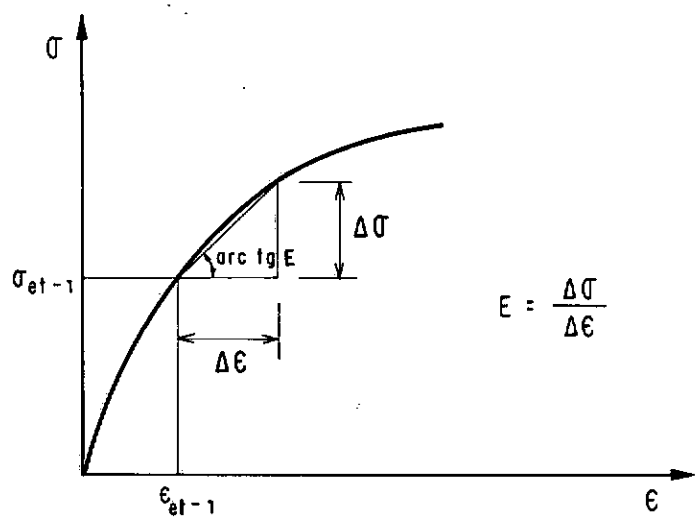
A influência das flechas experimentadas pelo pilar no equilíbrio do mesmo é levada em conta através da avaliação de um momento de segunda ordem na seção da base da coluna-modelo:

$$M_2 = Pf \qquad \text{(IV-4)}$$

produto da carga axial, P, pela flecha no topo da coluna, f, dada pela equação (IV-1).

IV.1.7 - Não-linearidade física

Supõe-se que os materiais tenham comportamento não-linear porém elástico, uma vez que admite-se que a curva de descarga coincida com a de carga.



σ_{et-1} e ϵ_{et-1}: tensão e deformação correspondentes à etapa anterior

$\Delta\sigma$ e $\Delta\epsilon$: acréscimos da tensão e da deformação

FIGURA IV-3 - Módulo "corda" de deformação longitudinal dos materiais

A não-linearidade dos diagramas tensão-deformação dos materiais é levada em conta através da determinação de módulos "corda" de deformação longitudinal, definidos pela relação entre acréscimos de tensão e os acréscimos de deformação correspondentes[17] sob um acréscimo das ações ou da curvatura.

IV.1.8 - Comportamento reológico do concreto

Como foi dito no parágrafo II.6, o concreto é um material sujeito aos fenômenos de fluência e retração. Neste estudo, a retração é desprezada e a fluência é considerada de maneira aproximada.

Segundo a hipótese de fluência linear, a resposta do concreto a uma tensão aplicada rapidamente na idade t_o e então mantida constante é uma deformação variável com o tempo, proporcional, em cada instante, à tensão aplicada. No entanto, o método utilizado neste estudo baseia-se numa extensão desta hipótese, segundo a qual a deformação em cada instante é proporcional à deformação produzida no instante da aplicação da tensão (deformação instantânea). Deste modo, é considerada a relação não-linear entre a tensão aplicada e a deformação instantânea.

O método do " reduced modulus" leva em conta os efeitos da fluência através do emprego de um diagrama tensão-deformação para o concreto obtido a partir do diagrama para ações de curta duração (σ_c,ε_c), deslocando-se os pontos deste diagrama paralelamente ao eixo das deformações de tal modo que as novas deformações estejam relacionadas com as primitivas de

acordo com a equação:

$$\varepsilon_c^* = \left[1 + \alpha \beta \varphi(t,t_o) \right] \varepsilon_c \qquad \text{(IV-5)}$$

onde

$\varphi(t,t_o)$ é o coeficiente de fluência, independente da tensão aplicada;

α é o coeficiente que traduz a relação entre os momentos de primeira ordem na seção mais solicitada devidos, respectivamente, às ações de longa duração e à totalidade das ações

$$\alpha = \frac{M_{1L}}{M_1} = \frac{M_{1L}}{M_{1C} + M_{1L}} \qquad \text{(IV-6)}$$

β é o coeficiente que traduz a relação entre os esforços normais na seção mais solicitada devidos, respectivamente, às ações de longa duração e à totalidade das ações

$$\beta = \frac{N_L}{N} = \frac{N_L}{N_C + N_L} \qquad \text{(IV-7)}$$

A equação (IV-5) pode ser encarada como uma fórmula de interpolação entre dois casos limites. No caso de ações de curta duração apenas, α e β são nulos e a fluência não chega a ter influência no comportamento da coluna. No caso de todas as ações aplicadas serem de longa duração, α e β são iguais a 1. Os coeficientes α e β permitem levar em conta a história da carga de longa e/ou curta duração. O produto $\alpha \beta \varphi(t,t_o)$

é dito coeficiente de fluência reduzido, φ^*.

As equações (IV-5) a (IV-7) são aplicáveis no caso de todas as ações de longa duração serem aplicadas na idade de t_o e todas as de curta duração, na idade t posterior a t_o.

Fouré[12] apresenta as seguintes sugestões para o cálculo do coeficiente de fluência reduzido em casos mais complexos. No caso do pilar estar submetido a

- ações de longa duração F_{Li}, aplicadas em diferentes idades t_i e que produzem as solicitações de primeira ordem N_{Li} e M_{1Li};

- ações de curta duração F_C, aplicadas na idade t superior ao maior t_i e que produzem as solicitações de primeira ordem N_C e M_{1C};

o coeficiente de fluência reduzido é definido por

$$\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \varphi(t,t_i) \qquad \text{(IV-8)}$$

onde $\varphi(t,t_i)$ é o coeficiente de fluência no instante t do concreto carregado na idade t_i e α_i e β_i são as relações entre as solicitações de primeira ordem devidas à ação F_{Li} e as solicitações de primeira ordem na idade t devidas à totalidade das ações, ou seja,

$$\alpha_i = \frac{M_{1Li}}{M_1} = \frac{M_{1Li}}{M_{1C} + \sum_{i=1}^{n} M_{1Li}} \qquad \text{(IV-9)}$$

e

$$\beta_i = \frac{N_{Li}}{N} = \frac{N_{Li}}{N_C + \sum_{i=1}^{n} N_{Li}} \qquad \text{(IV-10)}$$

No caso de uma das ações F_{Li} ser mantida apenas durante o intervalo de tempo (t_i, t_j), considera-se F_{Li} aplicada na idade t_i e $F_{Lj} = - F_{Li}$ aplicada na idade t_j.

No caso das solicitações de primeira ordem devidas às ações de longa duração serem pouco variáveis (por exemplo, cerca de 10% com relação à sua média) ou delas serem constantemente crescentes com o tempo, pode-se evitar o cálculo dos coeficientes de fluência parciais $\varphi(t,t_i)$, avaliando-se o coeficiente de fluência reduzido de acordo com a equação:

$$\varphi^* = \bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \varphi(t,t_o) \qquad \text{(IV-11)}$$

sendo

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{M}_{1L}}{M_1} \quad ; \quad \bar{M}_{1L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{1Li}\ (t-t_i)}{t - t_o} \qquad \text{(IV-12)}$$

e

$$\overline{\beta} = \frac{\overline{N}_L}{N} \quad ; \quad \overline{N}_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_{Li}\,(t-t_i)}{t-t_o} \qquad \text{(IV-13)}$$

onde $\overline{N}_L$ e $\overline{M}_{1L}$ são as solicitações de primeira ordem de longa duração médias ponderadas pelas durações de aplicação das ações F_{Li}.

Aplicando-se o método do "reduced modulus", é possível utilizar o mesmo método de cálculo desenvolvido para o caso de flambagem sob ações de curta duração para determinar a carga axial, para uma excentricidade de primeira ordem dada, ou o momento de primeira ordem, para uma carga axial dada, que provoca a flambagem por fluência ou a flambagem em curta duração após um período de ações de longa duração.

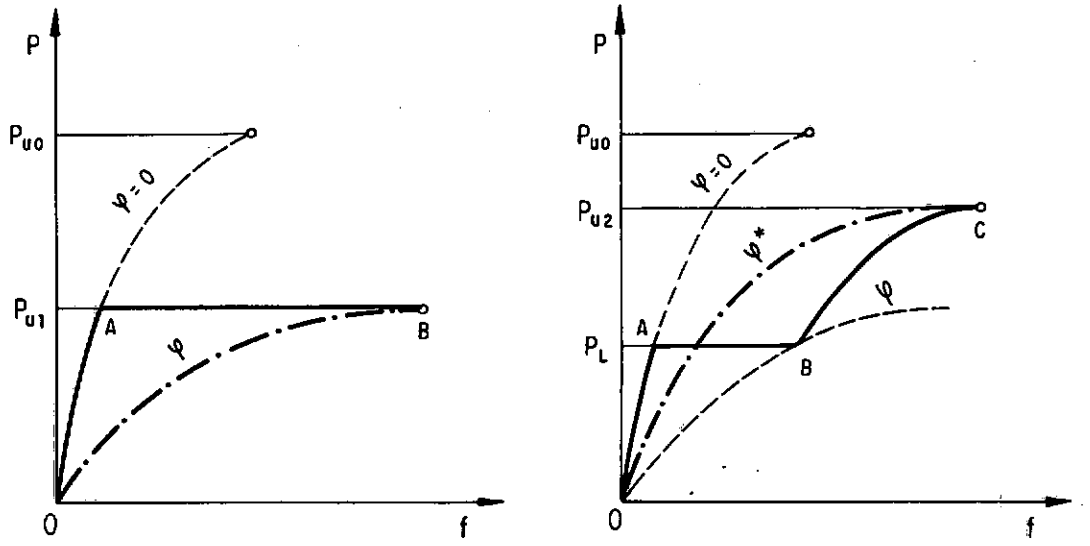


FIGURA IV-4 - Determinação da (a) capacidade portante em longa duração P_{u1} função de φ; (b) capacidade portante em longa e curta duração P_{u2} função de P_L e φ.

Observando-se os diagramas carga-flecha da figura IV-4, nota-se que este cálculo aproximado segue o caminho fictício direto OB, correspondente à utilização do diagrama $[\sigma_c, \varepsilon_c(1+\varphi)]$ para o concreto, em lugar do caminho real OAB, no caso de flambagem por fluência; e o caminho fictício direto OC, correspondente ao emprego do diagrama $[\sigma_c, \varepsilon_c(1+\varphi^*)]$ para o concreto, em substituição ao caminho real OABC, no caso de flambagem em curta duração após um período de ações de longa duração.

IV.2 - HIPÓTESES VISANDO À APLICAÇÃO NUMÉRICA

IV.2.1 - Diagramas tensão-deformação dos materiais

IV.2.1.1- Concreto

A resistência do concreto à tração é desprezada.

Denotam-se respectivamente por:

E_c, o módulo de deformação longitudinal tangente na origem;

f_c, a resistência à compressão do concreto;

ε_{c1}, o valor absoluto da deformação correspondente a $-f_c$;

ε_{cu}, o valor absoluto da deformação última.

a) Diagramas tensão-deformação instantânea

A relação entre as tensões e as deformações instantâneas do concreto pode ser representada por dois tipos de diagrama, encontrados no Código-modelo do CEB-FIP/1978[7].

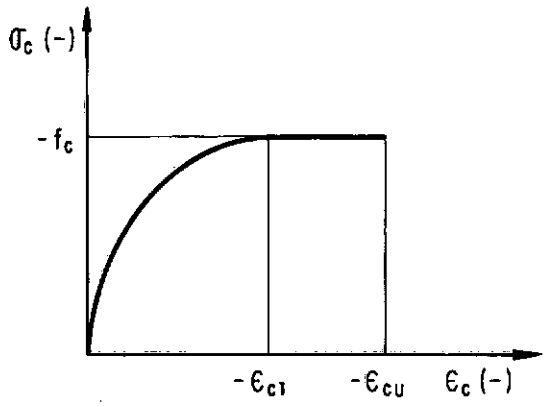


FIGURA IV-5 - Primeiro tipo de diagrama tensão-deformação instantânea para o concreto (diagrama parábola-retângulo)

O primeiro é o diagrama parábola-retângulo apresentado na figura IV-5, constituído por uma parábola do segundo grau que passa pela origem e por uma reta paralela ao eixo das deformações e tangente à parábola no ponto de abscissa ε_{c1}. Este diagrama pode ser definido pelas expressões:

$$\sigma_c = -f_c\,(2\eta - \eta^2) \quad \text{para} \quad 0 \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{c1}$$

(IV-14)

$$\sigma_c = -f_c \quad \text{para} \quad \varepsilon_{c1} \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cu}$$

onde

$$\eta = \frac{|\varepsilon_c|}{\varepsilon_{c1}} \qquad \text{(IV-15)}$$

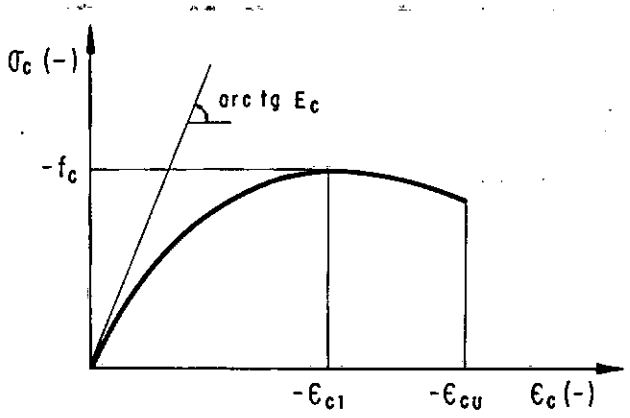


FIGURA IV-6 - Segundo tipo de diagrama tensão-deformação instantânea para o concreto

O segundo é o diagrama que se acha representado na figura IV-6 e pode ser expresso pela equação:

$$\sigma_c = -f_c \frac{\kappa\eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2)\eta} \quad \text{para } 0 \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cu} \qquad \text{(IV-16)}$$

onde

η é definido pela equação (IV-15);

κ é dado por

$$\kappa = \frac{E_c \ \varepsilon_{c1}}{f_c} \qquad \text{(IV-17)}$$

b) Diagramas tensão-deformação levando em consideração a fluência do concreto

De acordo com a hipótese feita no parágrafo IV.1.8, o diagrama tensão-deformação que leva em conta a fluência do concreto é obtido a partir do diagrama tensão-deformação instantânea, deslocando-se os pontos deste diagrama paralelamente ao eixo das deformações de tal modo que as novas abscissas guardem com as primitivas a relação $(1 + \varphi^*)$, sendo φ^* o coeficiente de fluência reduzido.

Desta maneira, pode ser utilizado o diagrama da figura IV-7 ou o da figura IV-8.

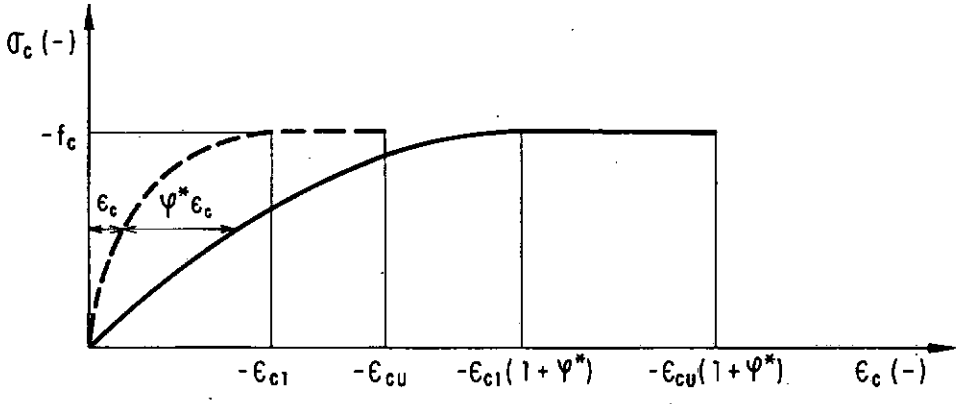


FIGURA IV-7 - Primeiro tipo de diagrama tensão-deformação levando em conta a fluência do concreto.

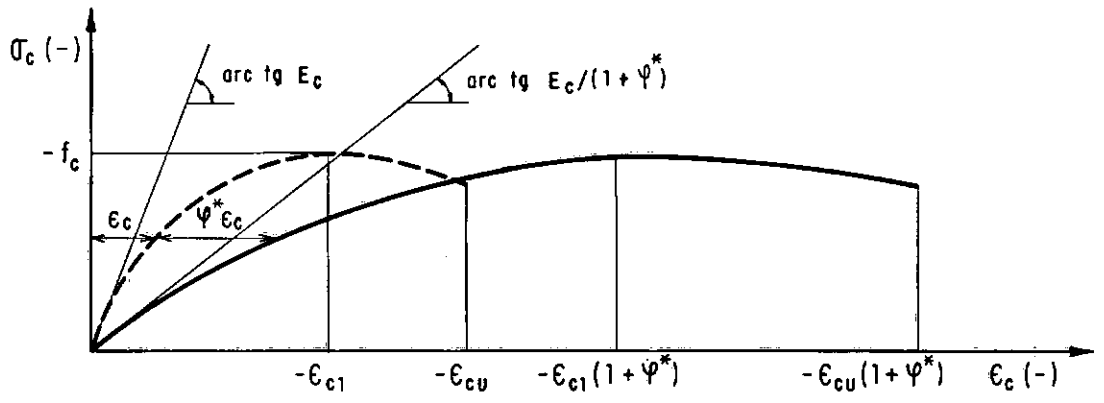


FIGURA IV-8 - Segundo tipo de diagrama tensão-deformação levando em conta a fluência do concreto

IV.2.1.2- Aço

Supõe-se que os aços tenham o mesmo comportamento à tração e à compressão.

Denotam-se respectivamente por:

E_s, o módulo de deformação longitudinal do aço;

$f_{s\ell}$, a tensão-limite de proporcionalidade;

f_{se}, a tensão de escoamento;

f_{sr}, a tensão de ruptura;

$\varepsilon_{s\ell}$, a deformação correspondente a $f_{s\ell}$, dada por

$$\varepsilon_{s\ell} = \frac{f_{s\ell}}{E_s} \qquad \text{(IV-18)}$$

a) Aço com patamar de escoamento (Classe A)

Para os aços Classe A, que apresentam um patamar de escoamento definido, utiliza-se o diagrama encontrado no Código-modelo do CEB-FIP/1978[7] e apresentado na figura IV-9.

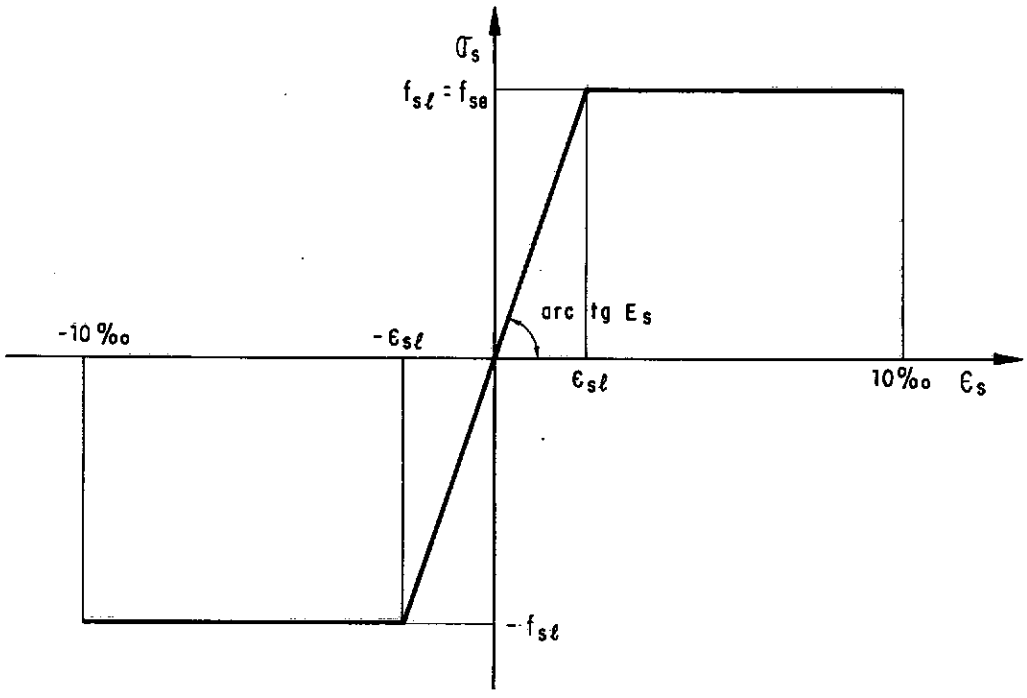


FIGURA IV-9 - Diagrama tensão-deformação para os aços Classe A

Este diagrama pode ser definido pelas expressões:

$$|\sigma_s| = E_s \, |\varepsilon_s| \quad \text{para } 0 \leq |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{s\ell} \tag{IV-19}$$

$$|\sigma_s| = f_{s\ell} \quad \text{para} \quad |\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{s\ell}$$

onde

$$f_{s\ell} = f_{se} \qquad \text{(IV-20)}$$

b) Aços sem patamar de escoamento (Classe B)

Para os aços Classe B, que não apresentam patamar de escoamento definido, podem ser utilizados dois tipos de diagrama tensão-deformação.

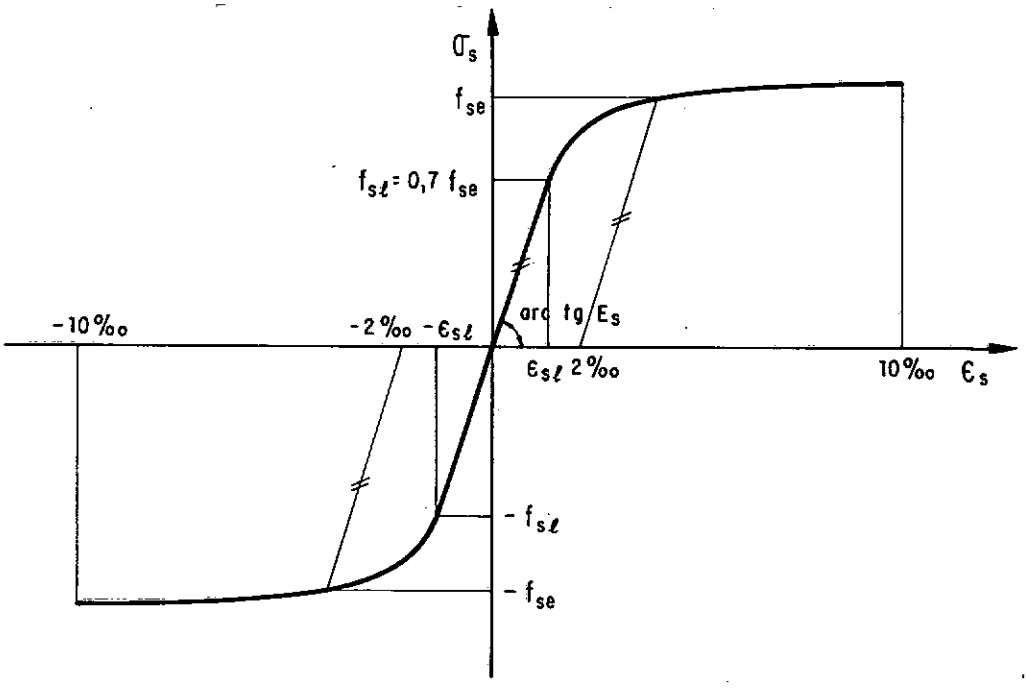


FIGURA IV-10 - Diagrama tensão-deformação idealizado para os aços Classe B.

O primeiro é uma simplificação do diagrama encontrado no Código-modelo do CEB-FIP/1978[7], que se acha representado na figura IV-10 e é expresso pelas equações:

$$|\varepsilon_s| = \frac{|\sigma_s|}{E_s} \qquad \text{para } 0 \leq |\sigma_s| \leq 0{,}7\, f_{se}$$

$$|\varepsilon_s| = \frac{|\sigma_s|}{E_s} + 0{,}823 \left(\frac{|\sigma_s|}{f_{se}} - 0{,}7 \right)^5 \qquad \text{para } |\sigma_s| \geq 0{,}7\, f_{se} \qquad \text{(IV-21)}$$

A simplificação constitui-se na substituição de cada trecho curvo do diagrama por três retas, conduzindo ao diagrama da figura IV-11.

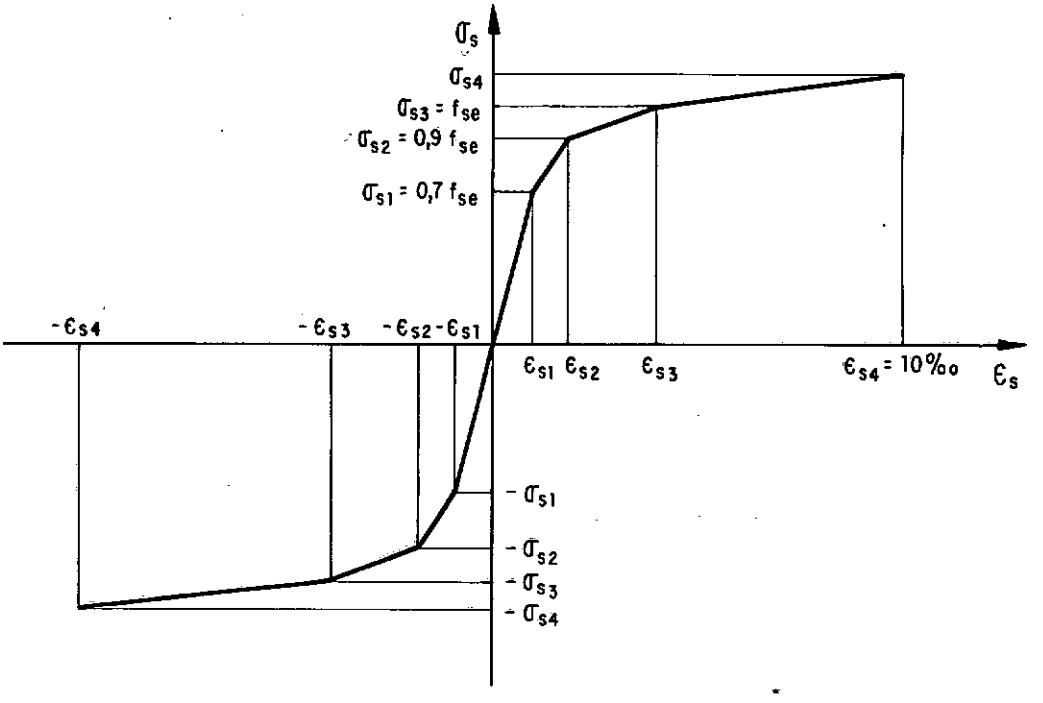


FIGURA IV-11 - Primeiro tipo de diagrama tensão-deformação para os aços Classe B.

Neste diagrama

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0,7\ f_{se}}{E_s} \qquad \sigma_{s1} = 0,7\ f_{se}$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0,9\ f_{se}}{E_s} + 0,26336\ ‰ \qquad \sigma_{s2} = 0,9\ f_{se} \qquad \text{(IV-22)}$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{f_{se}}{E_s} + 2‰ \qquad \sigma_{s3} = f_{se}$$

$$\varepsilon_{s4} = 10‰$$

e o valor de σ_{s4} é determinado resolvendo-se pelo Método de Newton Raphson a equação:

$$10‰ = \frac{\sigma_{s4}}{E_s} + 0,823 \left(\frac{\sigma_{s4}}{f_{se}} - 0,7 \right)^5 \qquad \text{(IV-23)}$$

O segundo é o diagrama apresentado na figura IV-12, utilizado por Maia[17] e definido pelas expressões:

$$|\sigma_s| = E_s\ |\varepsilon_s| \qquad \text{para } 0 \leq |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{s\ell}$$

$$|\sigma_s| = f_{sr} - \frac{(f_{sr} - f_{s\ell})^2}{f_{sr} - 2f_{s\ell} + E_s|\varepsilon_s|} \qquad \text{para } |\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{s\ell} \qquad \text{(IV-24)}$$

onde

$$f_{s\ell} = 0,8\ f_{se} \qquad \text{(IV-25)}$$

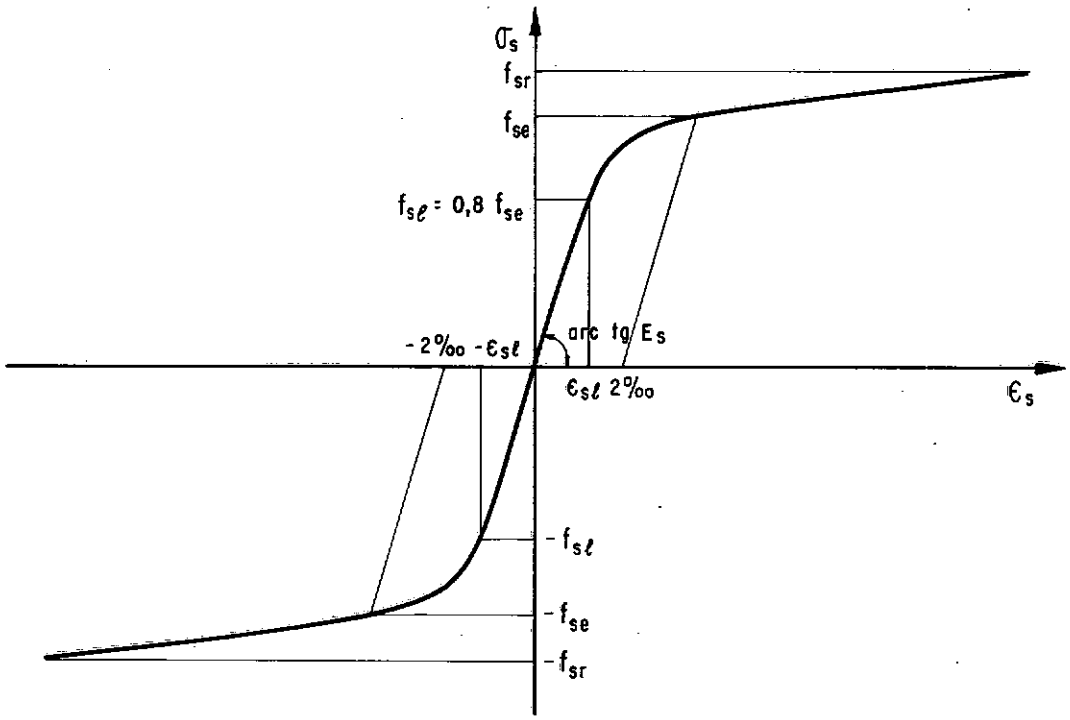


FIGURA IV-12 - Segundo tipo de diagrama tensão-deformação para os aços Classe B

IV.2.2 - Esgotamento da capacidade resistente da seção transversal

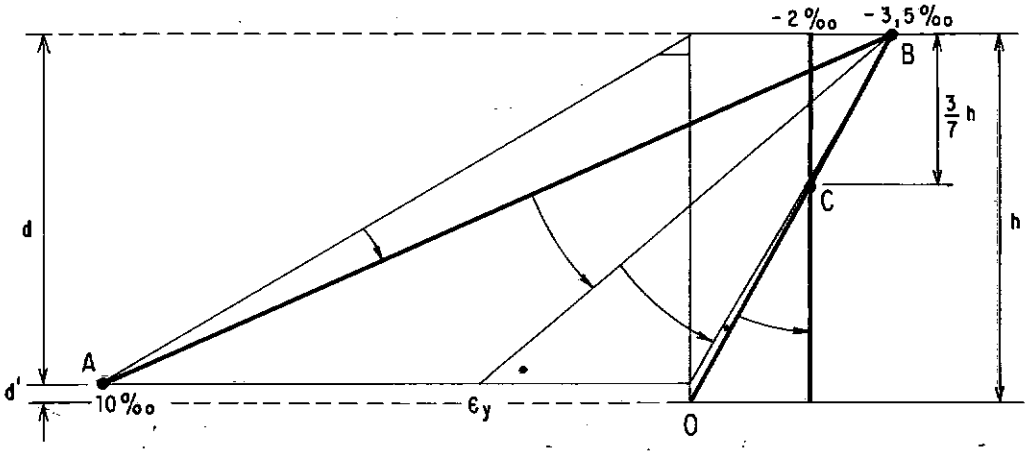


FIGURA IV-13 - Posições da deformada de Bernoulli no estado limite último de ruína por ruptura à compressão do concreto ou deformação plástica excessiva da armadura mais tracionada.

O esgotamento da capacidade resistente da seção mais solicitada de um pilar submetido a ações de curta duração é considerado de acordo com o parágrafo 10.4 do Código-modelo do CEB-FIP/1978[7]. Por hipótese, este esgotamento é determinado pela ocorrência de:

- um alongamento relativo de 10 ‰ na armadura mais tracionada ou um encurtamento relativo de 3,5 ‰ na fibra de concreto mais comprimida, no caso de seções parcialmente comprimidas;

- um encurtamento relativo de 2 ‰ na fibra de concreto situada a 3/7 da altura total da seção, a partir da borda mais comprimida, no caso de seções inteiramente comprimidas.

Deste modo, a deformada de Bernoulli poderá assumir qualquer das posições sugeridas na figura IV-13, passando por um dos três pontos A, B ou C assinalados. Como, neste estudo, são analisados apenas membros comprimidos, não há possibilidade da seção estar inteiramente tracionada.

No caso do pilar estar submetido também a ações de longa duração, consideram-se os seguintes encurtamentos limites para o concreto: 2 ‰ $(1 + \varphi^*)$ no caso de seções inteiramente comprimidas e 3,5 ‰ $(1 + \varphi^*)$ no caso de seções parcialmente comprimidas.

IV.3 - MÉTODO DE CÁLCULO

Apresenta-se, neste parágrafo, o desenvolvimento de um método de cálculo incremental-iterativo, baseado nas hipóteses apresentadas no parágrafo IV.1, para a determinação da capacidade portante de um pilar isostático de concreto armado. Devido à hipótese da coluna-modelo, este problema pode ser resolvido computando-se, passo a passo, estados de equilíbrio sucessivos para uma única seção: a mais solicitada. É para esta seção, portanto, que devem ser avaliados a cada etapa os esforços e as deformações.

IV.3.1 - Ações e esforços externos

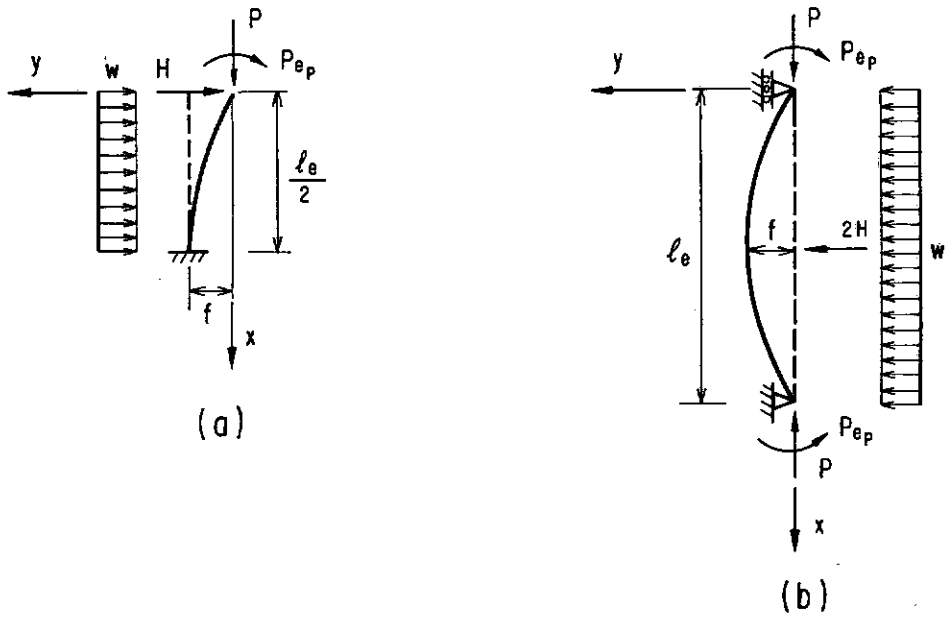


FIGURA IV-14 - Pilares isostáticos cujas deformadas não apresentam ponto de inflexão e são tangentes à vertical na seção mais solicitada.

A figura IV-14 mostra, para cada tipo de pilar isostático, o sistema de ações correspondente considerado para o desenvolvimento do método de cálculo. Estas ações estão todas contidas no plano de simetria do pilar.

Cada um destes pilares está submetido, em sua seção mais solicitada, a um esforço normal de compressão (negativo).

$$N = -P \tag{IV-26}$$

e a um momento fletor total positivo

$$M = w \frac{\ell_e^2}{8} + H \frac{\ell_e}{2} + P(e_p + f) \tag{IV-27}$$

onde

$$e_p = e_o + e_a \tag{IV-28}$$

IV.3.1.1 -Acréscimos das ações

A capacidade portante de pilares pode ser obtida através de dois tipos de análise, ou seja, determinando-se o momento último de primeira ordem associado a uma carga axial conhecida ou a carga axial última correspondente a uma dada excentricidade de primeira ordem. No primeiro tipo de análise citado, a carga axial é fixa ($P = P_f$) e as demais ações, e_p, H e w, variáveis; no segundo, a excentricidade e_p da carga axial é fixa

($e_p = e_f$) e as forças, P, H e w, variáveis.

As ações variáveis são proporcionais a um mesmo parâmetro λ. Portanto, a cada etapa do cálculo, os acréscimos de todas as ações variáveis são proporcionais ao acréscimo deste parâmetro λ. O acréscimo $\Delta\lambda$ pode variar de uma etapa para outra.

Os acréscimos das ações consideradas são dados pelas equações:

$$\Delta w = c_W . \Delta\lambda$$

$$\Delta H = c_H . \Delta\lambda \qquad \text{(IV-29)}$$

$$\Delta P = c_P . \Delta\lambda$$

$$\Delta e_P = c_E . \Delta\lambda$$

onde c_W, c_H, c_P, c_E são as constantes de proporcionalidade das ações.

IV.3.1.2- Acréscimos dos esforços externos

Com a finalidade de se obter uma formulação única para os dois tipos de análise, as expressões dos acréscimos do esforço normal e do momento fletor total são escritas supondo-se que haja acréscimos de todas as ações, ou seja, respectivamente, como:

$$\Delta N = -\Delta P \qquad \text{(IV-30)}$$

e

$$\Delta M = \Delta w.\frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H.\frac{\ell_e}{2} + \Delta P \,.\, (e_P + \Delta e_P + f + \Delta f) +$$

$$+ P.(\Delta e_P + \Delta f) \qquad \text{(IV-31)}$$

Como não há possibilidade de P e e_P serem incrementados simultaneamente, a parcela $\Delta P.\Delta e_P$ que aparece no segundo membro da equação (IV-31) é sempre nula. Tem-se, então:

$$\Delta M = \Delta w.\frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H.\frac{\ell_e}{2} + \Delta P.(e_P + f + \Delta f) + P.(\Delta e_P + \Delta f) \qquad \text{(IV-32)}$$

Lembrando-se que, de acordo com a hipótese da coluna-modelo, a flecha f é dada pela equação (IV-1), o acréscimo da flecha pode ser expresso por

$$\Delta f = \frac{\ell_e^2}{10} \,.\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{(IV-33)}$$

Substituindo-se as expressões de f e Δf na equação (IV-32), obtém-se para ΔM:

$$\Delta M = \Delta w.\frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H.\frac{\ell_e}{2} + \Delta P.\left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10}\left(\frac{1}{r} + \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right] +$$

$$+ P \,.\, \left[\Delta e_P + \frac{\ell_e^2}{10} \,.\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right] \qquad \text{(IV-34)}$$

IV.3.2 - Análise seccional

A figura IV-15 mostra os esforços externos e as distribuições de tensões e de deformações na seção mais solicitada.

Como foi visto no parágrafo IV.1.3 , a consideração da hipótese das seções planas permite admitir uma distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção, que pode ser representada pelos parâmetros ε_{cg} e ϕ.

Apresenta-se, a seguir, a dedução de uma relação matricial entre os acréscimos dos esforços internos e os acréscimos dos parâmetros de deformação numa seção de concreto armado.

IV.3.2.1- Esforços internos

Como foi visto no parágrafo III.3.3.2, os esforços internos são avaliados em função dos parâmetros de deformação, ε_{cg} e ϕ.

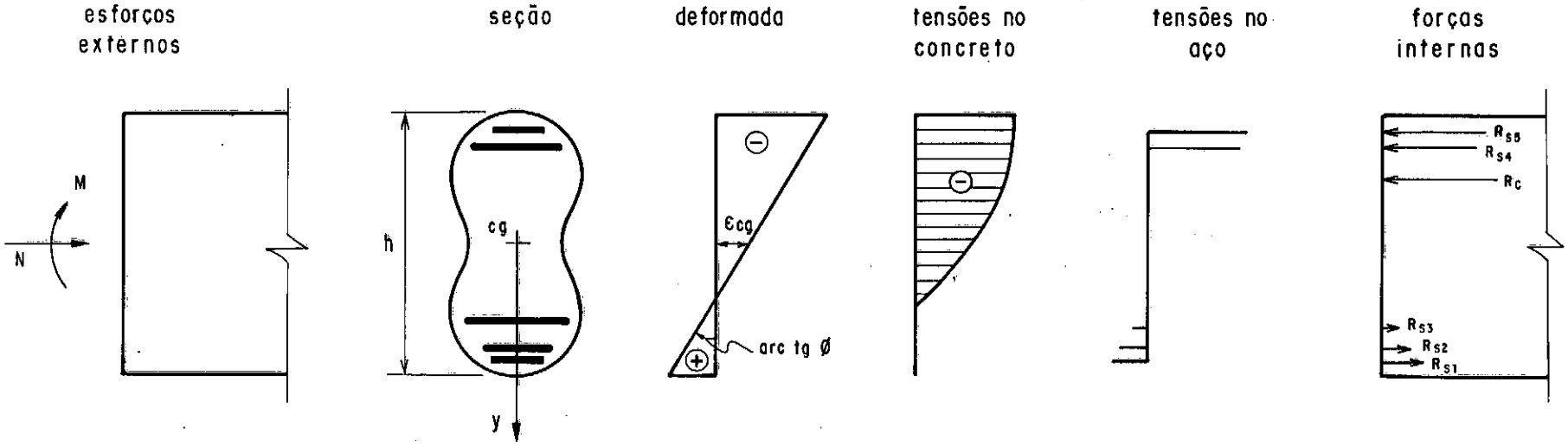


FIGURA IV-15 - Esforços, tensões e deformações na seção mais solicitada

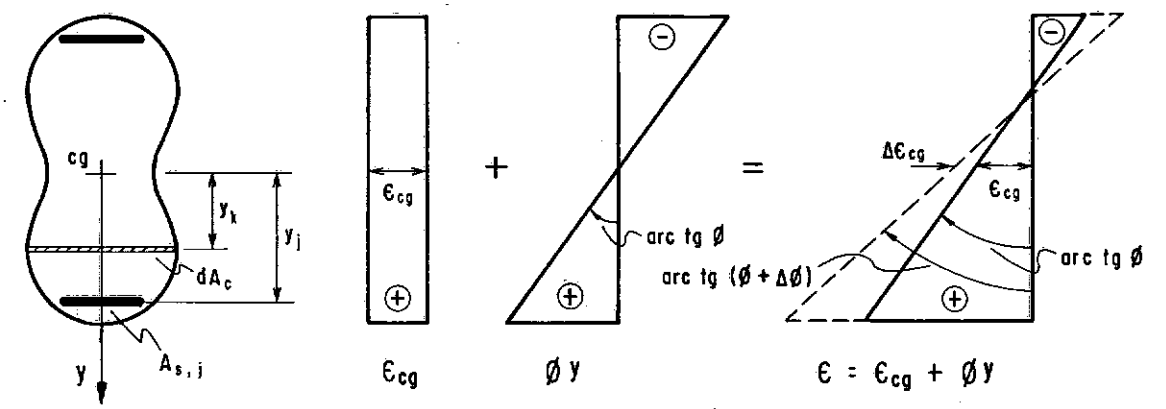


FIGURA IV-16 - Deformações na seção de concreto armado

a) Deformações das fibras de concreto e de aço

A deformação de uma fibra k de concreto, distante y_k do eixo z que passa pelo centro geométrico da seção é dada por

$$\varepsilon_{c,k} = \varepsilon_{cg} + \phi\ y_k \qquad \text{(IV-35)}$$

Em virtude da hipótese de que não há deslizamento entre o aço e o concreto adjacente, a deformação de uma fibra j de aço, distante y_j do eixo z, é calculada por

$$\varepsilon_{s,j} = \varepsilon_{cg} + \phi\ y_j \qquad \text{(IV-36)}$$

b) Tensões nas fibras de concreto e de aço

A tensão numa fibra k de concreto correspondente a uma deformação $\varepsilon_{c,k}$

$$\sigma_{c,k} = \sigma_{c,k}(\varepsilon_{c,k}) \qquad \text{(IV-37)}$$

é obtida de acordo com uma das leis tensão-deformação apresentadas no parágrafo IV.2.1 para o concreto.

A tensão numa fibra j de aço para uma deformação $\varepsilon_{s,j}$

$$\sigma_{s,j} = \sigma_{s,j}(\varepsilon_{s,j}) \qquad \text{(IV-38)}$$

é determinada segundo uma das leis tensão-deformação apresentadas no parágrafo IV.2.1 para o aço.

c) Esforços internos

Os esforços internos são as resultantes das tensões sobre a seção, expressas pelas funções:

$$N_i(\varepsilon_{cg},\phi) = \int_{y_0-h}^{y_0} \sigma_{c,k}(\varepsilon_{c,k})\, b_{c,k}\, dy_k + \sum_{j=1}^{NFS} \sigma_{s,j}(\varepsilon_{s,j})\, A_{s,j} \qquad \text{(IV-39)}$$

$$M_i(\varepsilon_{cg},\phi) = \int_{y_0-h}^{y_0} \sigma_{c,k}(\varepsilon_{c,k})\, y_k\, b_{c,k}\, dy_k + \sum_{j=1}^{NFS} \sigma_{s,j}(\varepsilon_{s,j})\, y_j\, A_{s,j}$$

onde

y_0 é a ordenada da borda inferior da seção;

$b_{c,k}$ é a largura da seção transversal ao nível da fibra k de concreto;

$A_{s,j}$ é a área de armadura da fibra de aço j;

NFS é o número de fibras de aço.

IV.3.2.2- Relação matricial entre os acréscimos dos esforços internos e os acréscimos dos parâmetros de deformações

As expansões de Taylor do 1º grau para N_i e M_i em torno de um ponto $(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi})$ conhecido são dadas pelos seguintes polinômios:

$$N_i(\varepsilon_{cg},\phi) = N_i(\bar{\varepsilon}_{cg},\bar{\phi}) + \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon_{cg}}(\bar{\varepsilon}_{cg},\bar{\phi}) \left[\varepsilon_{cg} - \bar{\varepsilon}_{cg} \right] +$$

$$+ \frac{\partial N_i}{\partial \phi}(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi}) \left[\phi - \bar{\phi} \right] \qquad \text{(IV-40)}$$

$$M_i(\varepsilon_{cg},\phi) = M_i(\bar{\varepsilon}_{cg},\bar{\phi}) + \frac{\partial M_i}{\partial \varepsilon_{cg}}(\bar{\varepsilon}_{cg},\bar{\phi}) \left[\varepsilon_{cg} - \bar{\varepsilon}_{cg} \right] +$$

$$+ \frac{\partial M_i}{\partial \phi}(\bar{\varepsilon}_{cg},\bar{\phi}) \left[\phi - \bar{\phi} \right]$$

Denotando-se por

$$\Delta N_i = N_i(\varepsilon_{cg}, \phi) - N_i(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi})$$

$$\Delta M_i = M_i(\varepsilon_{cg}, \phi) - M_i(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi}) \qquad \text{(IV-41)}$$

$$\Delta\varepsilon_{cg} = \varepsilon_{cg} - \bar{\varepsilon}_{cg}$$

$$\Delta\phi = \phi - \bar{\phi}$$

e apresentando-se as equações (IV-40) sob forma matricial, vem

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_i \\ \Delta M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon_{cg}}(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi}) & \frac{\partial N_i}{\partial \phi}(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi}) \\ \frac{\partial M_i}{\partial \varepsilon_{cg}}(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi}) & \frac{\partial M_i}{\partial \phi}(\bar{\varepsilon}_{cg}, \bar{\phi}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-42)}$$

As derivadas parciais são expressas por

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon_{cg}} = \int_{y_0-h}^{y_0} \frac{d\sigma_{c,k}}{d\varepsilon_{c,k}} b_{c,k}\, dy_k + \sum_{j=1}^{NFS} \frac{d\sigma_{s,j}}{d\varepsilon_{s,j}} A_{s,j}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \phi} = \int_{y_0-h}^{y_0} \frac{d\sigma_{c,k}}{d\varepsilon_{c,k}} y_k\, b_{c,k}\, dy_k + \sum_{j=1}^{NFS} \frac{d\sigma_{s,j}}{d\varepsilon_{s,j}} y_j\, A_{s,j} \qquad \text{(IV-43)}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial \varepsilon_{cg}} = \int_{y_0-h}^{y_0} \frac{d\sigma_{c,k}}{d\varepsilon_{c,k}} y_k \, b_{c,k} \, dy_k + \sum_{j=1}^{NFS} \frac{d\sigma_{s,j}}{d\varepsilon_{s,j}} y_j \, A_{s,j}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial \phi} = \int_{y_0-h}^{y_0} \frac{d\sigma_{c,k}}{d\varepsilon_{c,k}} y_k^2 \, b_{c,k} \, dy_k + \sum_{j=1}^{NFS} \frac{d\sigma_{s,j}}{d\varepsilon_{s,j}} y_j^2 \, A_{s,j}$$

É importante notar que $\frac{\partial N_i}{\partial \phi} = \frac{\partial M_i}{\partial \varepsilon_{cg}}$; portanto, a matriz que aparece na equação (IV-42) é simétrica.

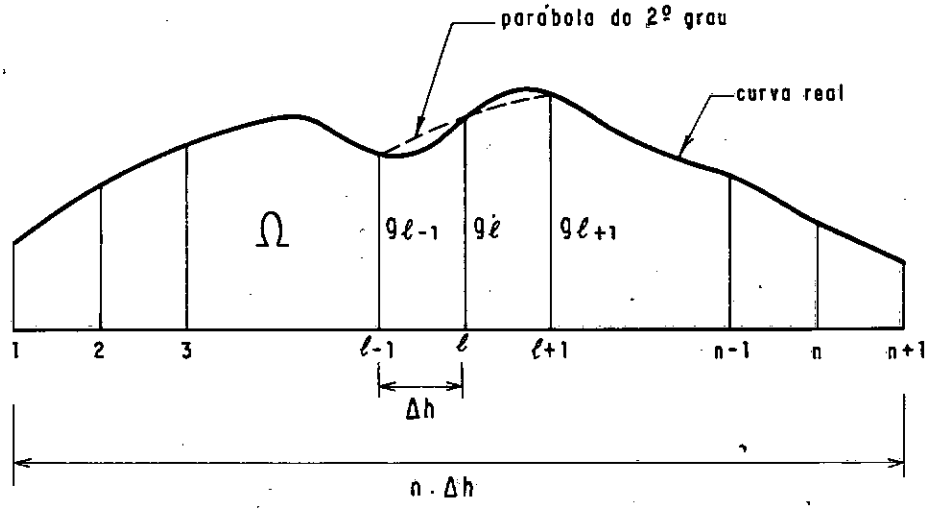
A impossibilidade de se obterem expressões analíticas para estas derivadas parciais conduz à utilização de procedimentos numéricos para avaliá-las. O primeiro consiste em aproximar as derivadas $\frac{d\sigma_{c,k}}{d\varepsilon_{c,k}}(\bar{\varepsilon}_{c,k})$ e $\frac{d\sigma_{s,j}}{d\varepsilon_{s,j}}(\bar{\varepsilon}_{s,j})$ pelos módulos "corda" de deformação longitudinal dos materiais dados respectivamente por:

$$E_{c,k} = \frac{\Delta\sigma_{c,k}}{\Delta\varepsilon_{c,k}} \qquad \text{(IV-44)}$$

e

$$E_{s,j} = \frac{\Delta\sigma_{s,j}}{\Delta\varepsilon_{s,j}} \qquad \text{(IV-45)}$$

sendo estes acréscimos tomados a partir de pontos conhecidos.



$$\Omega = \frac{\Delta h}{3}(g_1 + 4g_2 + 2g_3 + \ldots + 2g_{\ell-1} + 4g_\ell + 2g_{\ell+1} + \ldots +$$

$$+ 2g_{n-1} + 4g_n + g_{n+1})$$

FIGURA IV-17 - Integração numérica pela Regra de Simpson

O segundo procedimento se refere à maneira aproximada de avaliar as integrais que aparecem nas equações (IV-43). Ele consiste em dividir a altura da seção em um número par de intervalos iguais; avaliar y_k, $E_{c,k}$ e $b_{c,k}$ para cada uma das fibras que se situam nos extremos dos intervalos; e obter o valor das integrais através da Regra de Simpson (figura IV-17). Esta regra substitui o gráfico da função a ser integrada por uma parábola do segundo grau a cada três pontos e integra.

Os acréscimos dos esforços internos estão relacionados aos acréscimos dos parâmetros de deformação de acordo com

a equação

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_i \\ \Delta M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{cg} \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-46)}$$

sendo

$$S_1 = \frac{\Delta h}{3} \sum_{k=1}^{NFC} \psi_k \, E_{c,k} \, b_{c,k} + \sum_{j=1}^{NFS} E_{s,j} \, A_{s,j}$$

$$S_2 = \frac{\Delta h}{3} \sum_{k=1}^{NFC} \psi_k \, E_{c,k} \, b_{c,k} \, y_k + \sum_{j=1}^{NFS} E_{s,j} \, A_{s,j} \, y_j \qquad \text{(IV-47)}$$

$$S_3 = \frac{\Delta h}{3} \sum_{k=1}^{NFC} \psi_k \, E_{c,k} \, b_{c,k} \, y_k^2 + \sum_{j=1}^{NFS} E_{s,j} \, A_{s,j} \, y_j^2$$

onde

NFC é o número de fibras de concreto, que deve ser ímpar;

Δh é a distância entre as fibras de concreto;

ψ_k é o coeficiente proveniente da Regra de Simpson, que pode assumir os valores 1, 2 ou 4, como mostra a figura IV-17.

IV.3.3 - Equação de equilíbrio

A condição de equilíbrio deve ser verificada entre os acréscimos dos esforços internos e os acréscimos dos esforços externos na seção mais solicitada e, então,

$$\Delta N_i = \Delta N$$

$$\Delta M_i = \Delta M \qquad \text{(IV-48)}$$

Substituindo-se estas equações na equação (IV-46), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-49)}$$

A substituição das expressões de ΔN e ΔM, dadas, respectivamente, pelas equações (IV-30) e (IV-34), na equação (IV-49) conduz a

$$\left\{ \Delta w_{..} \frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H \cdot \frac{\ell_e}{2} + \underset{-\Delta P}{\Delta P} \cdot \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10} \left(\frac{1}{r} + \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right] + P \cdot \left[\Delta e_P + \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \right] \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-50)}$$

A condição de compatibilidade entre o valor da curvatura em função do qual a flecha é calculada segundo a equação (IV-1) e o valor da curvatura computado após a resolução da equação (IV-50) é garantida fazendo-se, nesta equação,

$$\frac{1}{r} = \phi$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \Delta\phi \qquad \text{(IV-51)}$$

Obtém-se, assim,

$$\left\{ \begin{matrix} -\Delta P \\ \Delta w \cdot \frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H \cdot \frac{\ell_e}{2} + \Delta P \cdot \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10} (\phi + \Delta\phi) \right] + P \cdot \left[\Delta e_P + \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \Delta\phi \right] \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-52)}$$

Substituindo-se, nesta equação, as expressões dos acréscimos das ações, dadas pelas equações (IV-29), vem

$$\left\{ \begin{matrix} -c_P \cdot \Delta\lambda \\ \left[c_W \frac{\ell_e^2}{8} + c_H \frac{\ell_e}{2} + c_P \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10} (\phi + \Delta\phi) \right] + P\, c_E \right] \cdot \Delta\lambda + P \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \Delta\phi \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-53)}$$

IV.3.4 - Resolução da equação

A equação de equilíbrio (equação (IV-52) ou equação (IV-53)) pode ser resolvida de duas maneiras diferentes dependendo de quais sejam as incógnitas.

IV.3.4.1- Cálculo de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$ para $\Delta\lambda$ conhecido

Sendo $\Delta\lambda$ conhecido, também o são Δw, ΔH, ΔP e Δe_P e as incógnitas na equação (IV-52) são $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$.

Passando-se para o segundo membro desta equação os termos em $\Delta\phi$, ela fica

$$\left\{ \Delta w \cdot \frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H \cdot \frac{\ell_e}{2} + \Delta P \cdot \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10}\phi \right] + P \cdot \Delta e_P \right\} = \begin{matrix} -\Delta P \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 - (P + \Delta P)\frac{\ell_e^2}{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-54)}$$

A matriz que aparece nesta equação, denotada por $[S']$, também é simétrica.

Os valores de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$ procurados são obtidos por inversão da matriz $[S']$:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} = \frac{1}{D'} \begin{bmatrix} S_3 - (P + \Delta P)\,\frac{\ell_e^2}{10} & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} -\Delta P \\ \Delta w \cdot \frac{\ell_e^2}{8} + \Delta H \cdot \frac{\ell_e}{2} + \Delta P \cdot \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10}\,\phi \right] + P \cdot \Delta e_P \end{Bmatrix}$$

(IV-55)

onde D' é o determinante da matriz $[S']$, dado por

$$D' = S_1 \left[S_3 - (P+\Delta P)\,\frac{\ell_e^2}{10} \right] - S_2^2 \qquad \text{(IV-56)}$$

IV.3.4.2- Cálculo de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$ para $\Delta\phi$ conhecido

Sendo $\Delta\phi$ conhecido, as incógnitas na equação (IV-53) são $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$.

Passando-se para o segundo membro desta equação o termo independente de $\Delta\lambda$, ela fica

$$\left\{ \begin{array}{c} -c_P \\ c_W \frac{\ell_e^2}{8} + c_H \frac{\ell_e}{2} + c_P \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10} (\phi+\Delta\phi) \right] + P\ c_E \end{array} \right\} \Delta\lambda =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 - P \frac{\ell_e^2}{10} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\phi \end{array} \right\} \qquad \text{(IV-57)}$$

Deixando-se, então, no segundo membro da equação apenas os termos em $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$, vem

$$\left\{ \begin{array}{c} -S_2 \\ -\left(S_3 - P \frac{\ell_e^2}{10} \right) \end{array} \right\} \Delta\phi =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} S_1 & c_P \\ S_2 & -\left[c_W \frac{\ell_e^2}{8} + c_H \frac{\ell_e}{2} + c_P \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10}(\phi+\Delta\phi) \right] + P\ c_E \right] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \Delta\lambda \end{array} \right\} \qquad \text{(IV-58)}$$

A matriz que aparece nesta equação, denotada por $[S'']$, não é simétrica.

Os valores de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$ procurados são obtidos por inversão da matriz $[S'']$:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{cg} \\ \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix} = \frac{1}{D''} \begin{bmatrix} -\left[c_W \frac{\ell_e^2}{8} + c_H \frac{\ell_e}{2} + c_P \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10}(\phi+\Delta\phi) \right] + P\ c_E \right] & -c_P \\ -S_2 & S_1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} -S_2 \cdot \Delta\phi \\ \\ -\left(S_3 - P \frac{\ell_e^2}{10} \right) \cdot \Delta\phi \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-59)}$$

onde D" é o determinante da matriz $[S'']$, dado por

$$D'' = -S_1 \left[c_W \frac{\ell_e^2}{8} + c_H \frac{\ell_e}{2} + c_P \left[e_P + \frac{\ell_e^2}{10}(\phi+\Delta\phi) \right] + P\ c_E \right] -$$

$$- S_2\ c_P \qquad \text{(IV-60)}$$

IV.3.5 - Descrição do método de cálculo

Este método de cálculo destina-se à determinação da capacidade portante de um pilar isostático de concreto armado, conhecidas as suas condições de apoio nas extremidades, o seu comprimento de flambagem, a forma e as dimensões da seção transversal, a quantidade e distribuição de armadura, as propriedades físicas do concreto e do aço e as constantes de proporcionalidade das ações.

O método utiliza dois procedimentos: um, com controle das ações, no qual o parâmetro das ações é incrementado passo a passo, e outro no qual se controla a flecha através da curvatura que é incrementada passo a passo.

O cálculo é iniciado com etapas caracterizadas pelo acréscimo do parâmetro das ações. Para um dado $(\Delta\lambda)_{et}$ (et traduz o número da etapa que se está calculando), são avaliados os acréscimos das ações e, então, os acréscimos dos esforços externos. Em seguida, são determinados, dentro de um processo iterativo, os valores de $(\Delta\varepsilon_{cg})_{et}$ e $(\Delta\phi)_{et}$. Após a convergência do processo são computados os valores das ações, flecha, esforços e deformações correspondentes à etapa calculada.

Quando a convergência deste processo iterativo torna-se muito lenta, o método passa a empregar o segundo procedimento. O cálculo é, então, prosseguido com etapas caracterizadas por acréscimos da curvatura. Para um dado $(\Delta\phi)_{et}$, é avaliada a flecha e são obtidos, através de um processo iterativo, os valores de $(\Delta\varepsilon_{cg})_{et}$ e $(\Delta\lambda)_{et}$. Após a convergência do processo são computados os valores das ações, esforços e deformações correspondentes à etapa calculada.

De acordo com o que foi dito no parágrafo IV.3.1.1, a capacidade portante de um pilar pode ser obtida através de dois tipos de análise. A análise do primeiro tipo é aquela que determina, para uma carga axial dada, os valores últimos de e_p e/ou H e/ou w. A análise do segundo tipo é a que determina, para uma excentricidade de primeira ordem dada, os valores últimos de P e,

eventualmente também, de H e/ou w. Nos parágrafos IV.3.1 a IV.3.4 foi desenvolvida uma formulação única para estes dois tipos de análise.

Em qualquer destas análises, $(w)_0$, $(H)_0$, $(P)_0$,$(f)_0$, $(N)_0$, $(M)_0$, $(\varepsilon_{cg})_0$, $(\phi)_0$ são nulos. Na análise do primeiro tipo $(e_p)_0$ é nulo enquanto que na análise do segundo tipo ele assume o seguinte valor:

$$(e_p)_0 = e_f \qquad \text{(IV-61)}$$

onde e_f é o valor fixo da excentricidade e_p da carga axial, mantida constante durante a análise.

A análise do primeiro tipo necessita de uma etapa extra no início do cálculo, efetuada para os seguintes acréscimos de ações

$$\begin{aligned} (\Delta w)_1 &= 0 \\ (\Delta H)_1 &= 0 \\ (\Delta P)_1 &= P_f \\ (\Delta e_p)_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(IV-62)}$$

onde P_f é o valor fixo da carga axial, mantida constante durante a análise.

Nas etapas para $(\Delta\lambda)_{et}$ conhecido, os acréscimos das ações $(\Delta w)_{et}$, $(\Delta H)_{et}$, $(\Delta P)_{et}$ e $(\Delta e_P)_{et}$ são computados de acordo com as equações (IV-29). Na análise do primeiro tipo, deve-se tomar $c_P = 0$ e na do segundo tipo, $c_E = 0$. É óbvio que, em qualquer dos dois tipos de análise, c_W ou c_H ou c_E será nulo quando não existir a ação a ele correspondente.

Estas etapas têm prosseguimento com o cálculo de $(\Delta N)_{et}$, através da equação (IV-30), e da parcela do acréscimo do momento fletor externo que não depende de $\Delta\phi$, segundo a expressão:

$$(\Delta M')_{et} = (\Delta w)_{et} \cdot \frac{\ell_e^2}{8} + (\Delta H)_{et} \cdot \frac{\ell_e}{2} + (\Delta P)_{et} \cdot \left[(e_P)_{et-1} + (f)_{et-1} \right] +$$

$$+ (P)_{et-1} \cdot (\Delta e_P)_{et} \qquad \text{(IV-63)}$$

Em seguida, é efetuada a avaliação dos elementos da matriz $[S]$ da seção. Para isto, calcula-se o módulo "corda" de deformação longitudinal do material para cada uma das NFC fibras de concreto e das NFS fibras de aço. Para se obter o módulo de deformação para uma fibra k de concreto, determinam-se as seguintes deformações:

$$(\varepsilon_{c,k})_{et-1} = (\varepsilon_{cg})_{et-1} + (\phi)_{et-1}\, y_k \qquad \text{(IV-64)}$$

$$(\varepsilon_{c,k})_{et}^{it-1} = \left[(\varepsilon_{cg})_{et-1} + (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it-1}\right] + \left[(\phi)_{et-1} + (\Delta\phi)_{et}^{it-1}\right] y_k$$

e, utilizando-se uma das leis tensão-deformação apresentadas no parágrafo IV.2.1.1 para o concreto, as tensões $(\sigma_{c,k})_{et-1}$ e $(\sigma_{c,k})_{et}^{it-1}$ correspondentes. São, então, computados o acréscimo de deformação

$$(\Delta\varepsilon_{c,k})_{et}^{it-1} = (\varepsilon_{c,k})_{et}^{it-1} - (\varepsilon_{c,k})_{et-1} \qquad \text{(IV-65)}$$

e o acréscimo de tensão

$$(\Delta\sigma_{c,k})_{et}^{it-1} = (\sigma_{c,k})_{et}^{it-1} - (\sigma_{c,k})_{et-1} \qquad \text{(IV-66)}$$

Finalmente, o valor de $(E_{c,k})_{et}^{it-1}$ é calculado, de acordo com a equação (IV-44), para estes acréscimos. Procede-se de modo análogo para determinar, através da equação (IV-45), o módulo $(E_{s,j})_{et}^{it-1}$ de uma fibra j de aço. O índice superior destas variáveis, $it-1$, traduz o número da iteração em que foram obtidos os acréscimos dos parâmetros de deformação em função dos quais a variável é computada.

Obtidos os diversos $(E_{c,k})_{et}^{it-1}$ e $(E_{s,j})_{et}^{it-1}$, avaliam-se $(S_1)_{et}^{it-1}$, $(S_2)_{et}^{it-1}$ e $(S_3)_{et}^{it-1}$ de acordo com as equações (IV-47). Calcula-se, então, o determinante da matriz $[S']$

$$(D')_{et}^{it-1} = (S_1)_{et}^{it-1}\left[(S_3)_{et}^{it-1} - \left[(P)_{et-1} + (\Delta P)_{et}\right]\frac{\ell_e^2}{10}\right] - \left[(S_2)_{et}^{it-1}\right]^2 \qquad \text{(IV-67)}$$

e, em seguida, determinam-se os valores das incógnitas

$$\begin{Bmatrix} (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it} \\ (\Delta\phi)_{et}^{it} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(D')_{et}^{it-1}} \begin{bmatrix} (S_3)_{et}^{it-1} - \left[(P)_{et-1} + (\Delta P)_{et}\right]\frac{\ell_e^2}{10} & -(S_2)_{et}^{it-1} \\ -(S_2)_{et}^{it-1} & (S_1)_{et}^{it-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (\Delta N)_{et} \\ (\Delta M')_{et} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-68)}$$

Os valores das incógnitas são obtidos repetidas vezes, atualizando-se a matriz $[S]$ a cada iteração, até que seja satisfeito o seguinte critério de convergência:

$$\left| (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it} - (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it-1} \right| \leq \delta$$

$$\left| (\Delta\phi)_{et}^{it} - (\Delta\phi)_{et}^{it-1} \right| \leq \delta \qquad \text{(IV-69)}$$

onde δ é o erro máximo tolerado.

Na primeira iteração de uma determinada etapa et, adotam-se para $(\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{0}$ e $(\Delta\phi)_{et}^{0}$ os valores obtidos na última iteração da etapa anterior:

$$(\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{0} = (\Delta\varepsilon_{cg})_{et-1}^{n}$$

$$(\Delta\phi)_{et}^{0} = (\Delta\phi)_{et-1}^{n} \qquad \text{(IV-70)}$$

Este procedimento é aplicável a partir da segunda etapa. Na primeira etapa adotam-se

$$(\Delta\varepsilon_{cg})_{i}^{0} = \frac{(\Delta N)_1}{EA}$$

$$(\Delta\phi)_{i}^{0} = \frac{(\Delta M')_1}{EI} \qquad \text{(IV-71)}$$

tomando-se

$$EA = E_c A_c + E_s \sum_{j=1}^{NFS} A_{s,j}$$

$$EI = E_c I_{zc} + E_s \sum_{j=1}^{NFS} A_{s,j} y_j^2 \qquad \text{(IV-72)}$$

onde

E_c e E_s são os módulos de deformação longitudinal do concreto e do aço, tangentes à curva tensão-deformação na origem;

A_c e I_{zc} são a área da seção transversal geométrica e seu momento de inércia em relação ao eixo z que passa pelo seu cg.

A convergência do processo iterativo para a determinação de $(\Delta\varepsilon_{cg})_{et}$ e $(\Delta\phi)_{et}$ deve ocorrer dentro de um número máximo de iterações, it_{max}. Se it_{max} for ultrapassado sem que tenha havido a convergência do processo, o cálculo da etapa deverá ser reiniciado para um valor menor de $(\Delta\lambda)_{et}$, sendo este novo valor tomado como uma fração do anterior.

À medida que o parâmetro λ cresce, a convergência do processo vai-se tornando progressivamente mais lenta, exigindo um número de iterações cada vez maior. Isto determina a necessidade de adoção de acréscimos de λ cada vez menores, para que a convergência ocorra dentro do it_{max}. No entanto, este decréscimo de $(\Delta\lambda)_{et}$ não pode continuar indefinidamente. Estabelece-se, então, um valor mínimo, $\Delta\lambda_{min}$, para limitar o intervalo de aplicação do procedimento com controle de λ. Uma vez obtido um $(\Delta\lambda)_{et}$ inferior a $\Delta\lambda_{min}$, passa-se a utilizar um procedimento

com controle de ϕ.

Nas etapas para um $(\Delta\phi)_{et}$ conhecido, efetua-se primeiramente o cálculo da flecha

$$(f)_{et} = \frac{\ell_e^2}{10}\left[(\phi)_{et-1} + (\Delta\phi)_{et}\right] \qquad \text{(IV-73)}$$

e, logo após, o da soma dos coeficientes que multiplicam $\Delta\lambda$ na expressão do acréscimo do momento fletor externo

$$(c_M)_{et} = c_W \frac{\ell_e^2}{8} + c_H \frac{\ell_e}{2} + c_P\left[(e_P)_{et-1} + (f)_{et}\right] + (P)_{et-1} \cdot c_E \qquad \text{(IV-74)}$$

A seguir, avaliam-se os diversos $(E_{c,k})_{et}^{it-1}$ e $(E_{s,j})_{et}^{it-1}$, procedendo-se como explicado anteriormente, utilizando-se, no entanto, $(\Delta\phi)_{et}$ em lugar de $(\Delta\phi)_{et}^{it-1}$ nas equações (IV-64), e, depois, $(S_1)_{et}^{it-1}$, $(S_2)_{et}^{it-1}$ e $(S_3)_{et}^{it-1}$, de acordo com as equações (IV-47). Calcula-se, então, o determinante da matriz $[S'']$

$$(D'')_{et}^{it-1} = -(S_1)_{et}^{it-1} \cdot (c_M)_{et} - (S_2)_{et}^{it-1} \cdot c_P \qquad \text{(IV-75)}$$

e, em seguida, obtêm-se os valores das incógnitas

$$\begin{Bmatrix} (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it} \\ (\Delta\lambda)_{et}^{it} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(D'')_{et}^{it-1}} \begin{bmatrix} -(c_M)_{et} & -c_P \\ -(S_2)_{et}^{it-1} & (S_1)_{et}^{it-1} \end{bmatrix} .$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} -(S_2)_{et}^{it-1} \cdot (\Delta\phi)_{et} \\ -\left[(S_3)_{et}^{it-1} - (P)_{et-1} \cdot \frac{\ell_e^2}{10}\right](\Delta\phi)_{et} \end{array} \right\} \qquad \text{(IV-76)}$$

Neste caso também se repete a determinação das incógnitas, atualizando-se a matriz $[S]$ a cada iteração, até que ocorra

$$\left| (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it} - (\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{it-1} \right| \leq \delta \qquad \text{(IV-77)}$$

$$\left| (\Delta\lambda)_{et}^{it} - (\Delta\lambda)_{et}^{it-1} \right| \leq \delta$$

Neste procedimento, $(\Delta\varepsilon_{cg})_{et}^{0}$ também é arbitrado como o valor calculado na última iteração da etapa precedente.

Se for ultrapassado o número máximo de iterações sem que tenha ocorrido a convergência do processo, o cálculo da etapa deverá ser recomeçado para um valor menor de $(\Delta\phi)_{et}$, maior que o mínimo, $\Delta\phi_{min}$.

Ao final do cálculo de uma etapa, isto é, após a convergência de qualquer dos dois processos iterativos, verifica-se, através do exame da deformada de Bernoulli, se foi o ultrapassado o estado limite último de ruína por ruptura à compressão

do concreto ou por deformação plástica excessiva da armadura mais tracionada. Caso isto não tenha acontecido, avalia-se, ao final de uma etapa calculada para um dado $(\Delta\lambda)_{et}$, a flecha

$$(f)_{et} = \frac{\ell_e^2}{10}\left[(\phi)_{et-1} + (\Delta\phi)^n_{et}\right] \qquad \text{(IV-78)}$$

e determinam-se, ao final de uma etapa calculada para um dado $(\Delta\phi)_{et}$, os valores de $(\Delta w)_{et}$, $(\Delta H)_{et}$, $(\Delta P)_{et}$ e $(\Delta e_p)_{et}$ correspondentes a $(\Delta\lambda)^n_{et}$, através das equações (IV-29). Nos dois casos calculam-se os valores das ações, dos esforços e dos parâmetros de deformação ao final da etapa segundo as equações:

$$(\lambda)_{et} = (\lambda)_{et-1} + (\Delta\lambda)_{et}$$

$$(w)_{et} = (w)_{et-1} + (\Delta w)_{et}$$

$$(H)_{et} = (H)_{et-1} + (\Delta H)_{et}$$

$$(P)_{et} = (P)_{et-1} + (\Delta P)_{et}$$

$$(e_p)_{et} = (e_p)_{et-1} + (\Delta e_p)_{et} \qquad \text{(IV-79)}$$

$$(N)_{et} = -(P)_{et}$$

$$(M_1)_{et} = (w)_{et} \cdot \frac{\ell_e^2}{8} + (H)_{et} \cdot \frac{\ell_e}{2} + (P)_{et} \cdot (e_p)_{et}$$

$$(M)_{et} = (M_1)_{et} + (P)_{et} \cdot (f)_{et}$$

$$(\varepsilon_{cg})_{et} = (\varepsilon_{cg})_{et-1} + (\Delta\varepsilon_{cg})^n_{et}$$

$$(\phi)_{et} = (\phi)_{et-1} + (\Delta\phi)^n_{et} \text{ ou } (\phi)_{et} = (\phi)_{et-1} + (\Delta\phi)_{et}$$

Assim, fica conhecido um estado de equilíbrio da seção mais solicitada do pilar.

Para determinar o estado limite último de ruína por ruptura à compressão do concreto ou deformação plástica excessiva da armadura mais tracionada, abandonam-se os resultados obtidos que correspondam a um estado posterior a este e repete-se o cálculo da etapa para um acréscimo menor do parâmetro $\bar{\phi}$ controlado. Isto é feito até que se chega, numa etapa m + 1, a $(\Delta\phi)_{m+1}$ menor que o mínimo admitido. Os valores das ações, flecha, esforços e deformações correspondentes ao estado procurado são os computados ao final da etapa m.

A capacidade portante do pilar corresponde, em qualquer dos dois tipos de análise citados, ao valor máximo de λ em função de ϕ. Para determiná-lo, rejeita-se todo $(\Delta\lambda)^n_{et}$ negativo obtido para um dado $(\Delta\phi)_{et}$ e repete-se o cálculo da etapa para um $(\Delta\phi)_{et}$ menor. Procede-se desta maneira até que se chega numa etapa q + 1, a $(\Delta\phi)_{q+1}$ menor que o mínimo permitido. Os valores das ações, flechas, esforços e deformações correspondentes ao estado limite último de ruína por instabilidade são os computados ao final da etapa q. Os valores últimos das ações variáveis, flecha e momento de primeira ordem são, então, corrigidos em função da distribuição do momento fletor de primeira ordem ao longo do pilar, de acordo com o que foi exposto no parágrafo III.3.7.

O valor último da excentricidade e_o da carga axial correspondente a qualquer dos tipos de ruína é obtido deduzindo-se da excentricidade e_p o valor da excentricidade adicional e_a.

Se se desejar obter estados de equilíbrio instáveis para o pilar (estados do ramo descendente da curva λ - f), calculam-se outras etapas, partindo-se com um novo valor de $(\Delta\phi)_{et}$.

CAPÍTULO V

PROGRAMA DE COMPUTADOR

Este capítulo apresenta uma descrição do programa de computador COLMOD, elaborado com base no método de cálculo do capítulo precedente, em linguagem FORTRAN, para utilização no computador BURROUGHS-6700.

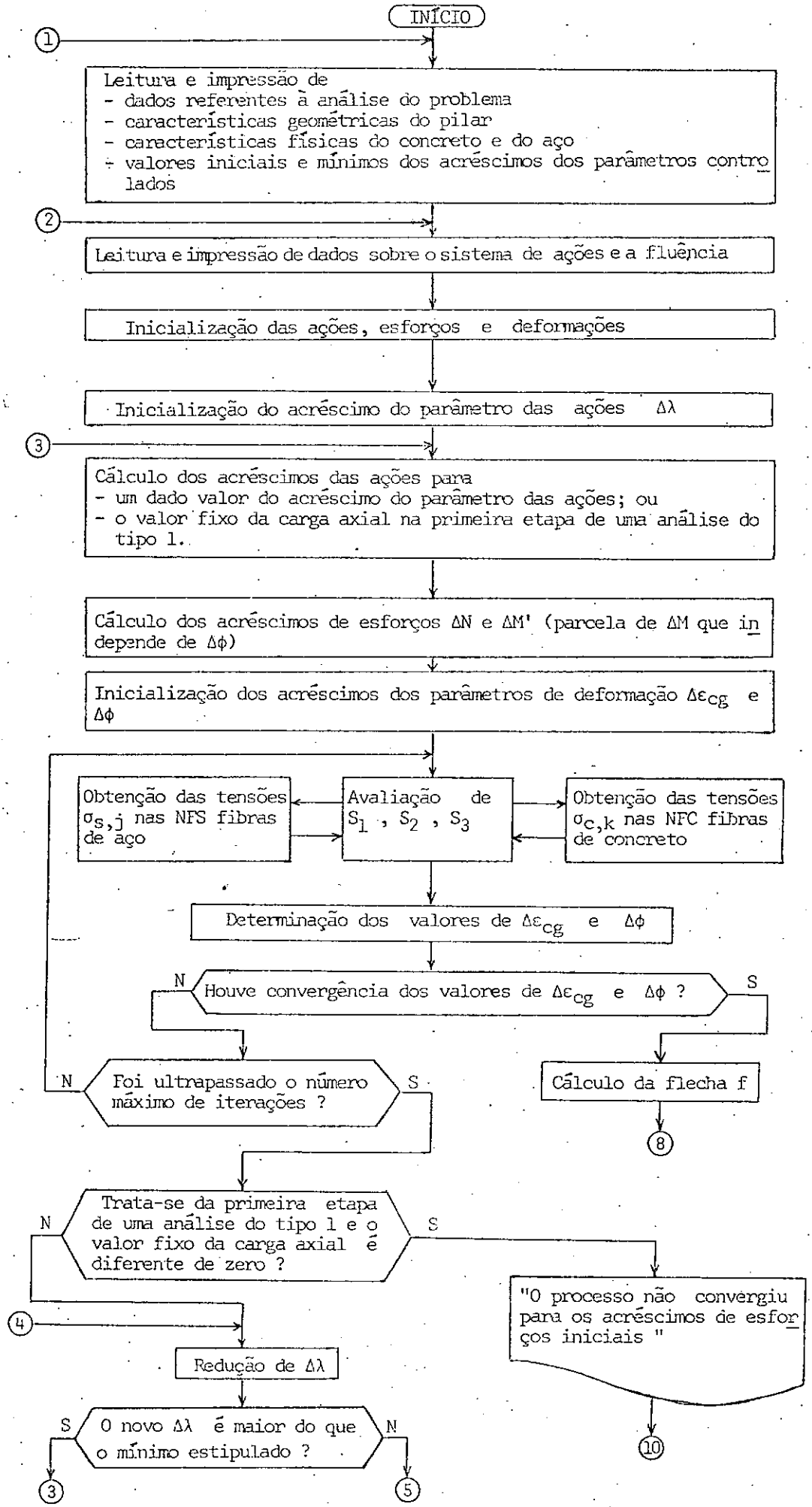
O manual de entrada e saída do programa e sua listagem encontram-se nos apêndices I e II, respectivamente.

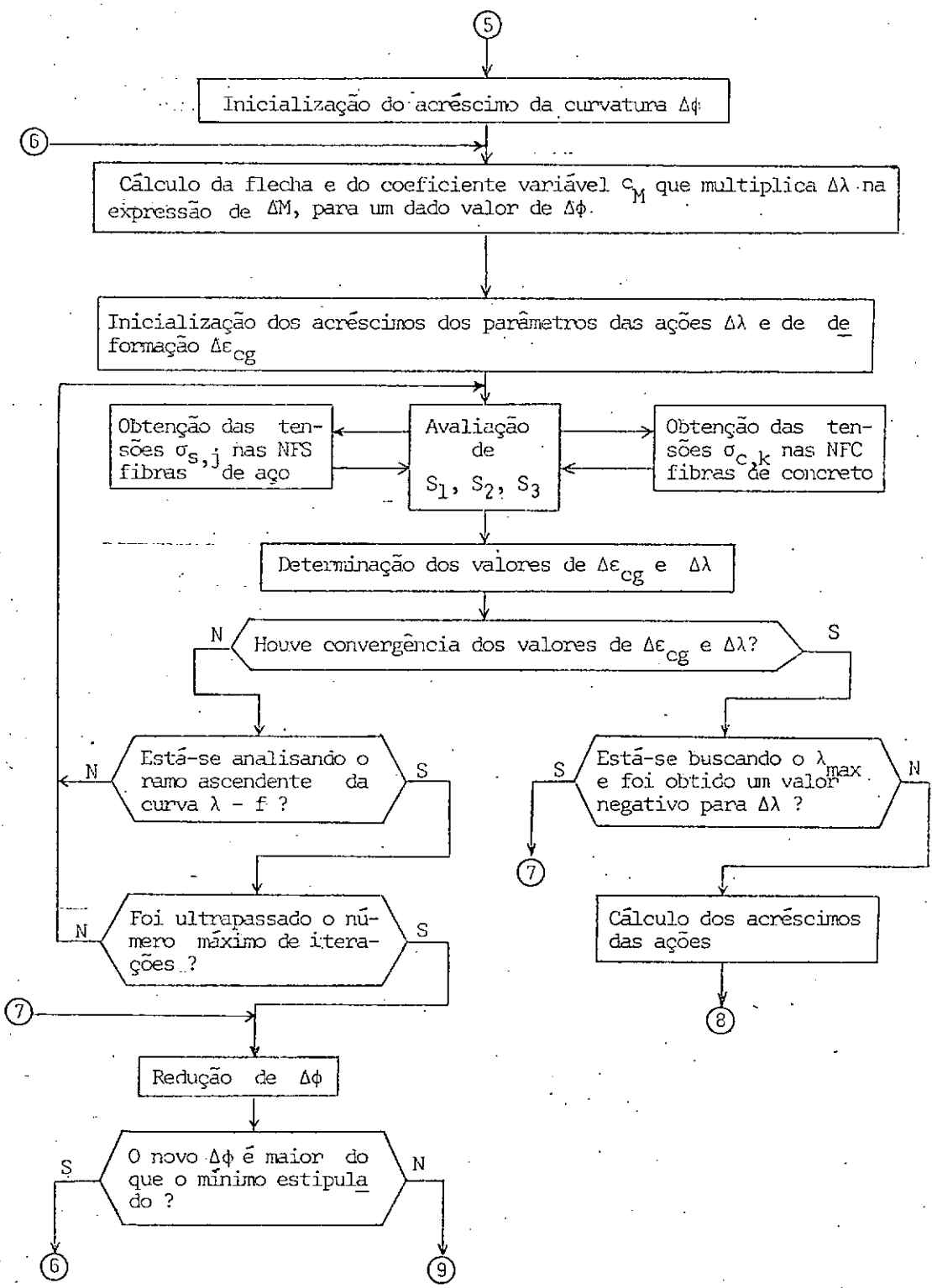
V.1 - FLUXOGRAMA

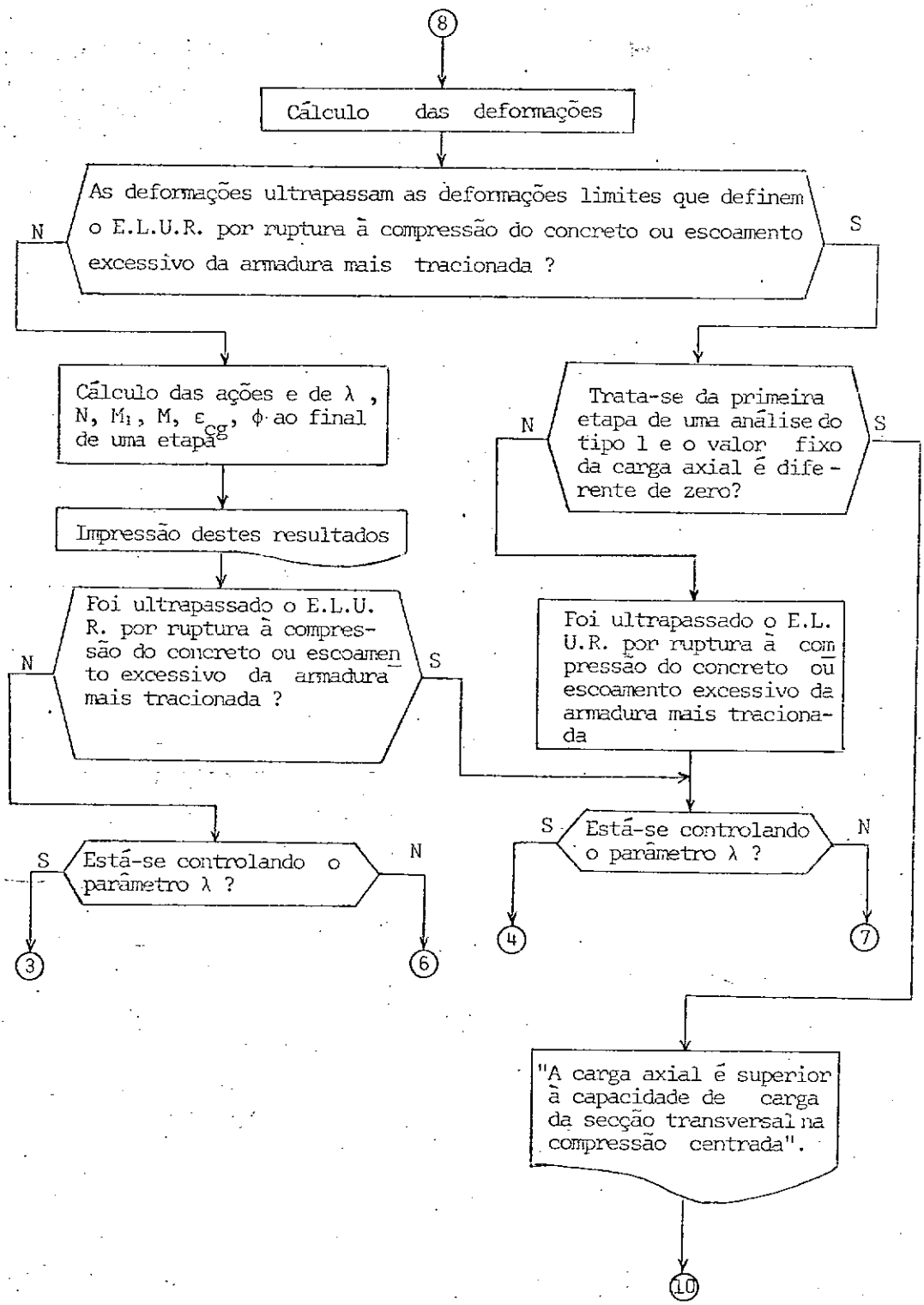
Esclarecimentos:

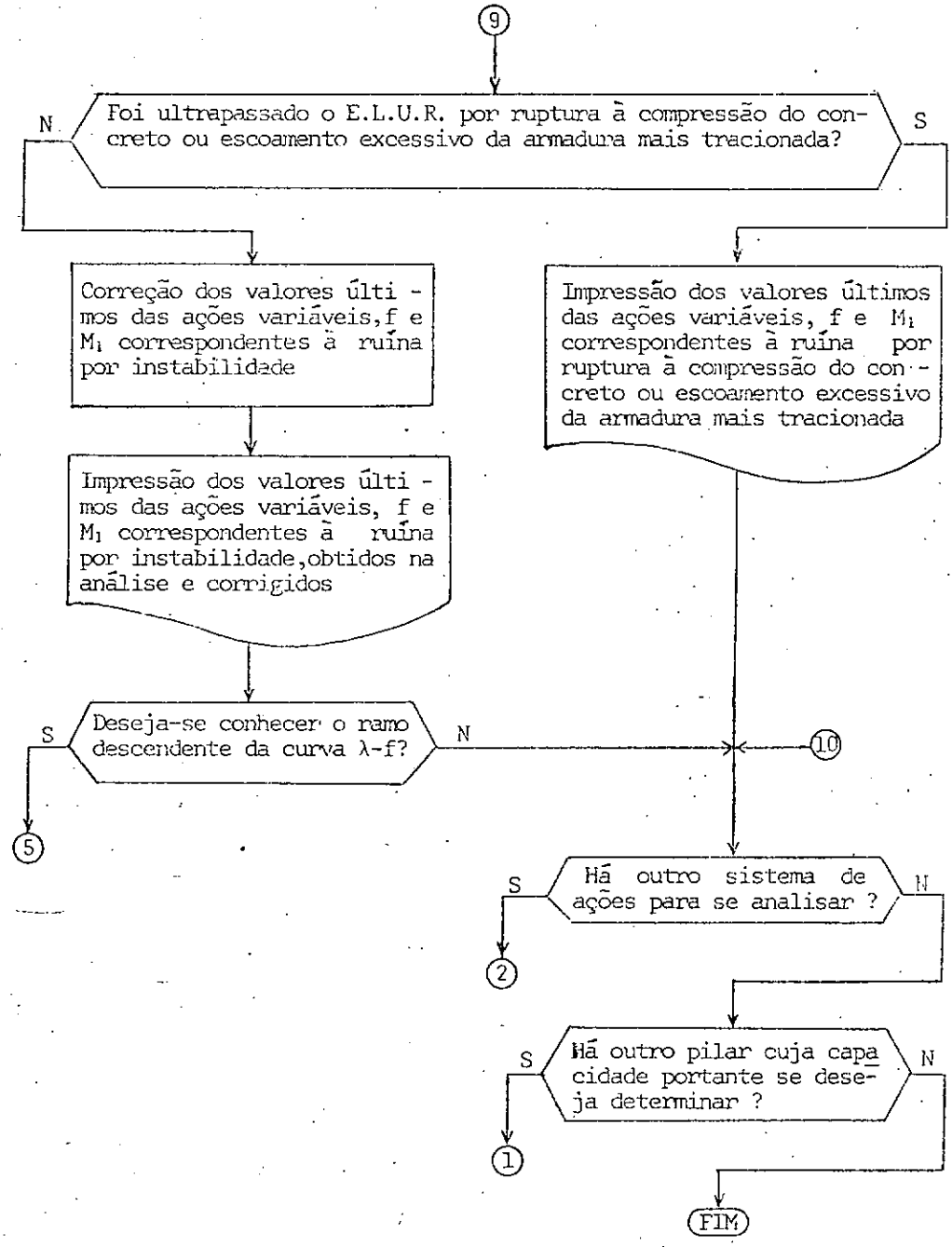
E.L.U.R. é estado limite último de ruína;

análise do tipo 1 é a análise que determina os valores últimos de e_p e/ou H e/ou w para um dado valor da carga axial, P.


INÍCIO
1
Leitura e impressão de
- dados referentes à análise do problema
- características geométricas do pilar
- características físicas do concreto e do aço
- valores iniciais e mínimos dos acréscimos dos parâmetros controlados
2
Leitura e impressão de dados sobre o sistema de ações e a fluência
Inicialização das ações, esforços e deformações
Inicialização do acréscimo do parâmetro das ações Δλ
3
Cálculo dos acréscimos das ações para
- um dado valor do acréscimo do parâmetro das ações; ou
- o valor fixo da carga axial na primeira etapa de uma análise do tipo 1.
Cálculo dos acréscimos de esforços ΔN e ΔM' (parcela de ΔM que independe de Δφ)
Inicialização dos acréscimos dos parâmetros de deformação Δε_cg e Δφ
Obtenção das tensões σ_s,j nas NFS fibras de aço
Avaliação de S_1 , S_2 , S_3
Obtenção das tensões σ_c,k nas NFC fibras de concreto
Determinação dos valores de Δε_cg e Δφ
N
Houve convergência dos valores de Δε_cg e Δφ ?
S
N
Foi ultrapassado o número máximo de iterações ?
S
Cálculo da flecha f
8
N
Trata-se da primeira etapa de uma análise do tipo 1 e o valor fixo da carga axial é diferente de zero ?
S
"O processo não convergiu para os acréscimos de esforços iniciais "
10
4
Redução de Δλ
S
O novo Δλ é maior do que o mínimo estipulado ?
N
3
5


5
Inicialização do acréscimo da curvatura Δφ
6
Cálculo da flecha e do coeficiente variável c_M que multiplica Δλ na expressão de ΔM, para um dado valor de Δφ
Inicialização dos acréscimos dos parâmetros das ações Δλ e de deformação $\Delta\varepsilon_{cg}$
Obtenção das tensões $\sigma_{s,j}$ nas NFS fibras de aço
Avaliação de S_1, S_2, S_3
Obtenção das tensões $\sigma_{c,k}$ nas NFC fibras de concreto
Determinação dos valores de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e Δλ
N
Houve convergência dos valores de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e Δλ?
S
N
Está-se analisando o ramo ascendente da curva λ - f ?
S
S
Está-se buscando o λ_{max} e foi obtido um valor negativo para Δλ ?
N
7
N
Foi ultrapassado o número máximo de iterações ?
S
Cálculo dos acréscimos das ações
8
7
Redução de Δφ
S
O novo Δφ é maior do que o mínimo estipulado ?
N
6
9


8
Cálculo das deformações
As deformações ultrapassam as deformações limites que definem o E.L.U.R. por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada ?
N
S
Cálculo das ações e de λ , N, M1 , M, εcg, ϕ ao final de uma etapa
Impressão destes resultados
Foi ultrapassado o E.L.U.R. por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada ?
N
S
Está-se controlando o parâmetro λ ?
S
N
3
6
Trata-se da primeira etapa de uma análise do tipo 1 e o valor fixo da carga axial é diferente de zero?
N
S
Foi ultrapassado o E.L.U.R. por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada
Está-se controlando o parâmetro λ ?
S
N
4
7
"A carga axial é superior à capacidade de carga da secção transversal na compressão centrada".
10


9
Foi ultrapassado o E.L.U.R. por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada?
N
S
Correção dos valores últimos das ações variáveis, f e M_1 correspondentes à ruína por instabilidade
Impressão dos valores últimos das ações variáveis, f e M_1 correspondentes à ruína por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada
Impressão dos valores últimos das ações variáveis, f e M_1 correspondentes à ruína por instabilidade, obtidos na análise e corrigidos
Deseja-se conhecer o ramo descendente da curva λ-f?
S
N
10
5
Há outro sistema de ações para se analisar ?
S
N
2
Há outro pilar cuja capacidade portante se deseja determinar ?
S
N
1
FIM

V.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

V.2.1 - Dados

O programa efetua, inicialmente, a leitura e a impressão de uma certa quantidade de dados necessários ao emprego do método de cálculo. São eles:

a) Dados referentes à análise do problema

Dois dados com respeito à análise do problema devem ser fornecidos. Um deles é o índice do tipo de análise que se deseja realizar. A análise do tipo 1 é aquela que determina os valores últimos de e_p e/ou H e/ou w para um dado valor da carga axial, P. A análise do tipo 2 é a que determina os valores últimos de P e, eventualmente também, de H e/ou w para um dado valor da excentricidade de primeira ordem, e_1.

O segundo dado é o índice que informa se, no caso de ser atingido o estado limite último de ruína por instabilidade, se quer que a análise termine aí ou que ela continue, determinando estados de equilíbrio do ramo descendente da curva λ-f, até ser alcançado o estado limite último de ruína por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada.

b) Características do pilar

As características do pilar importantes para a análise são seu comprimento de flambagem e um índice relativo ao

tipo de condições de apoio nas suas extremidades: pilar engastado numa extremidade e livre na outra ou simplesmente apoiado nas duas.

c) Características da seção transversal de concreto armado

A seção transversal de concreto armado pode ter quaisquer características desde que simétricas em relação ao plano no qual estão contidas as ações aplicadas ao pilar. Ela é definida em função de determinados dados conforme se pode observar na figura V-1.

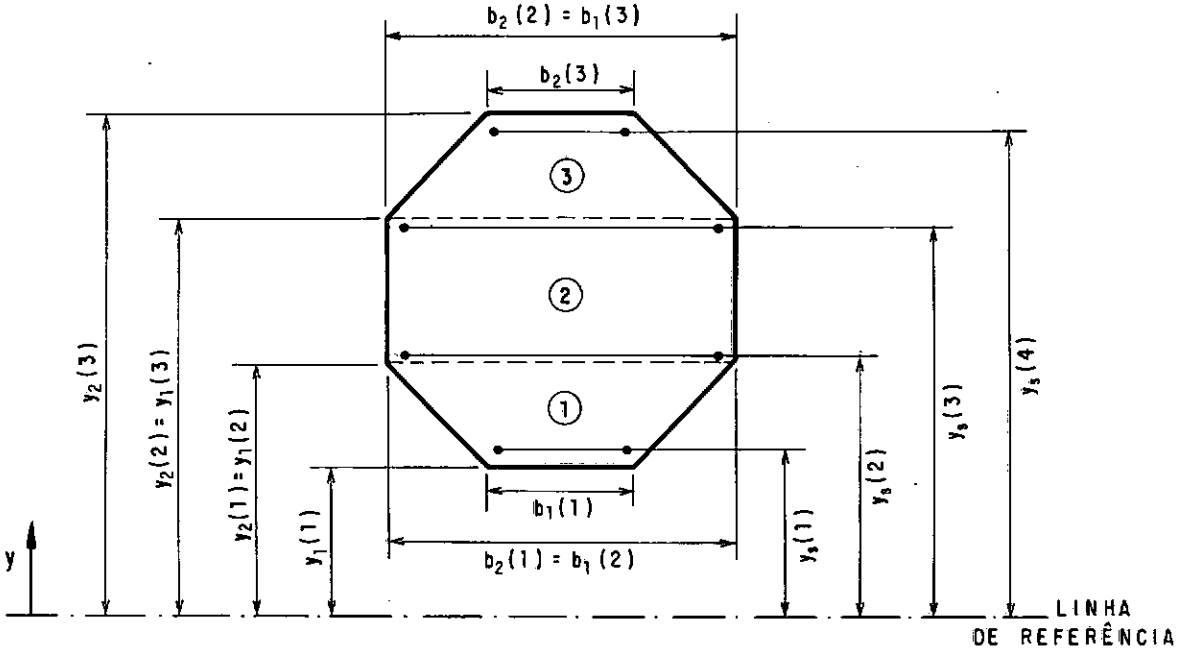


FIGURA V-1 - Definição da seção transversal de concreto armado

A seção transversal deve ser dividida em " mesas de concreto " de forma trapezoidal. No caso da seção octogonal da figura V-1, há, portanto, 3 "mesas de concreto".

Cada "mesa de concreto" é definida pelas larguras b_1 e b_2 e pelas ordenadas y_1 e y_2 de suas bordas inferior e superior. Estas ordenadas são fornecidas em relação a uma linha de referência previamente escolhida e na direção do eixo y indicado na figura V-1.

Outros dados importantes são o índice do tipo de contorno da seção (retilíneo ou curvilíneo) e o número de fibras a considerar em cada "mesa de concreto" para a avaliação de integrais sobre a altura da seção pela regra de Simpson.

A armadura é separada por "leitos de aço", cada qual definido pela área A_s e pela ordenada y_s em relação à linha de referência. A seção de concreto armado da figura V-1 possui 4 "leitos de aço".

d) Características físicas

Devem ser dadas as características físicas do concreto na idade t_o quando da aplicação do primeiro sistema de ações e as características físicas de cada "leito de aço". Permite-se, então, que cada "leito" seja constituído de um aço diferente.

e) Dados sobre os acréscimos dos parâmetros controlados

Devem ser dados os valores iniciais e mínimos dos acréscimos dos parâmetros controlados, λ e ϕ.

f) Dados para a definição do sistema de ações

O sistema de ações é definido pelo valor da excentricidade adicional da carga axial, e_a; pelos valores fixos, P_f e e_f, respectivamente, da carga axial P e da excentricidade e_P, da carga axial; pelos valores das constantes de proporcionalidade das ações, c_P, c_E, c_H e c_W, necessários ao cálculo dos acréscimos das ações; e por um índice que informa se o sistema de ações é constituído apenas por ações de curta duração ou se apenas/também por ações de longa duração.

No caso de uma análise do tipo 1, realizada para uma dada carga axial, P, e onde esta é fixa e as demais ações, variáveis, e_f e c_P devem ser nulos e $P_f = P$. No caso de uma análise do tipo 2, efetuada para uma dada excentricidade de primeira ordem, e_1, e na qual a excentricidade e_P da carga axial é constante e as demais ações, variáveis, P_f e c_E devem ser nulos e os dados fornecidos devem satisfazer à equação:

$$e_1 = e_f + \frac{c_H}{c_P} \frac{\ell_e}{2} + \frac{c_W}{c_P} \frac{\ell_e^2}{8} \qquad (V\text{-}1)$$

g) Dado para o cálculo dos efeitos da fluência

No caso do sistema de ações ser constituído apenas/também por ações de longa duração, deve ser fornecido o coeficiente de fluência reduzido, φ^*.

Enquanto faz a leitura e impressão de dados, o programa efetua também a determinação da posição do centro geométrico da seção transversal em relação à mesma linha de referência e, com o auxílio dos módulos de deformação longitudinal dos materiais tangentes à curva tensão-deformação na origem, avalia, de acordo com as equações (IV-72), as rigidezes axial e flexional da seção de concreto armado.

V.2.2 - Inicialização

Em seguida, na subrotina ETAPA, as variáveis λ, P, H, w, ε_{cg}, ϕ e f são inicializadas com o valor zero e e_p, com o valor e_f.

Antes do cálculo da primeira etapa para um dado $\Delta\lambda$ (segunda etapa da análise do tipo 1 e primeira da análise do tipo 2), este é inicializado com o valor $\Delta\lambda_0$.

Para que os cálculos da primeira iteração da primeira etapa de qualquer dos dois tipos de análise possam ser efetuados, $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$ são inicializados com os valores dos quocientes, respectivamente, da divisão do acréscimo de esforço normal pela rigidez axial e da divisão do acréscimo de momento fletor de primeira ordem pela rigidez à flexão da seção de concreto armado.

Antes do cálculo da primeira etapa para um dado $\Delta\phi$, este é inicializado com o valor $\Delta\phi_{01}$. Antes do cálculo da primeira etapa para obtenção de um estado de equilíbrio do ramo descendente da curva λ - f, $\Delta\phi$ é inicializado com o valor $\Delta\phi_{02}$.

V.2.3 - Etapas e processos iterativos do cálculo

No caso de uma análise do tipo 1, a primeira etapa é calculada para $\Delta P = P_f$ e $\Delta\lambda$, Δe_P, ΔH e Δw nulos. As etapas seguintes de uma análise do tipo 1 e as etapas de uma análise do tipo 2 são calculadas para valores conhecidos de $\Delta\lambda$. Nestas etapas são determinados, dentro de um processo iterativo, os valores de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$. Se, após 10 iterações, o processo não tiver convergido ou se, após a convergência do processo, o exame da deformada de Bernoulli indicar que o estado limite último de ruína por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada foi ultrapassado, o passo $\Delta\lambda$ será dividido por 2 e a etapa, recomeçada. Assim é feito até que seja obtido um $\Delta\lambda$ menor que $\Delta\lambda_{min}$, passo mínimo do parâmetro das ações. O número máximo de iterações permitido na primeira etapa de uma análise do tipo 1 é 50.

As etapas subseqüentes são calculadas para valores estipulados de $\Delta\phi$. Nelas, são determinados, dentro de um processo iterativo, os valores de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$. A etapa é recalculada para um novo valor de $\Delta\phi$, igual à metade do anterior, nas mesmas situações descritas para o processo precedente e, também, no caso de ser obtido um $\Delta\lambda$ negativo durante a busca do λ máximo. Nas etapas calculadas para obter estados de equilíbrio do ramo des-

cendente da curva λ - f, não se limita o número de iterações. Este é limitado apenas quando da busca do λ máximo, pois, neste caso, a demora da convergência se deve ao fato do estado correspondente ao dado $\Delta\phi$ pertencer ao ramo descendente da curva.

Os valores das ações, flecha, esforços e deformações correspondentes a qualquer dos tipos de estado limite último de ruína, seja por instabilidade, por ruptura à compressão do concreto ou por escoamento excessivo da armadura mais tracionada, são considerados iguais aos computados ao final da etapa precedente àquela na qual foi obtido $\Delta\phi$ menor que $\Delta\phi_{min}$, passo mínimo da curvatura.

Na partida de um processo iterativo, as incógnitas são inicializadas com os valores obtidos na última iteração da etapa anterior.

A subrotina INCRE1 faz a avaliação dos elementos da matriz $[S']^{-1}$, que aparece na equação (IV-55), e efetua o processo iterativo de determinação de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\phi$ para valores de ΔN e $\Delta M'$ (parcela de ΔM que independe de $\Delta\phi$) computados na subrotina ETAPA e mantidos constantes durante todo o processo.

Na subrotina INCRE2 são avaliados os elementos da matriz $[S'']^{-1}$, que aparece na equação (IV-59) e é executado o processo iterativo de determinação de $\Delta\varepsilon_{cg}$ e $\Delta\lambda$ para valores de c_P e c_M (coeficiente variável que multiplica $\Delta\lambda$ na expressão de ΔM), sendo o primeiro um dado lido pelo programa e o segundo calculado na subrotina ETAPA e mantido constante durante todo o processo.

No interior tanto da subrotina INCRE1 como da subrotina INCRE2, é chamada, a cada iteração, a subrotina SEC que avalia S_1, S_2 e S_3. Para isto, são calculados, nesta mesma subrotina, os módulos "corda" de deformação longitudinal $E_{s,j}$ e $E_{c,k}$, respectivamente para cada um dos NLS "leitos de aço" e cada uma das NFM fibras consideradas em cada "mesa de concreto". Para cada "leito de aço" e cada fibra de concreto são calculadas, na subrotina DEFOR, as deformações apresentadas ao fim da etapa e iteração anteriores. A tensão correspondente a uma determinada deformação é computada pela função SC para o concreto e pela função SS para o aço, que definem as leis tensão-deformação dos materiais.

V.2.4 - Impressão dos resultados

Ao fim de cada etapa de cálculo, a subrotina ETAPA imprime os valores do parâmetro das ações λ, da flecha f, do esforço normal N, do momento fletor de primeira ordem M_1, do momento fletor total M, dos parâmetros de deformação ε_{cg} e ϕ, das deformações nas bordas da seção, na fibra de concreto situada a 3/7 da altura total da seção a partir da borda mais comprimida e no "leito de aço" mais tracionado.

São impressos também, quando for o caso, os valores últimos das ações variáveis, flecha e momento fletor de primeira ordem correspondentes à ruína por instabilidade obtidos pela análise bem como os corrigidos em função da distribuição do momento fletor de primeira ordem ao longo do pilar.

No caso de ter sido atingido o estado limite último de ruína por ruptura à compressão do concreto ou escoamento excessivo da armadura mais tracionada, seja antes ou depois daquele por instabilidade, são impressos os valores das ações, flecha e momento de primeira ordem a ele correspondentes.

V.3 - PASSOS RECOMENDADOS PARA OS PARÂMETROS CONTROLADOS

Recomenda-se que o valor inicial do passo do parâmetro das ações, $\Delta\lambda_0$, seja um décimo do valor do λ máximo estimado e que o passo mínimo de λ seja

$$\Delta\lambda_{min} = 10^{-3}\ \Delta\lambda_0 \qquad (V-2)$$

O valor $\Delta\phi_{01}$ com que o passo de curvatura deve ser inicializado antes do cálculo da primeira etapa com controle de curvatura, para obtenção de um estado de equilíbrio do ramo ascendente da curva λ - f, varia entre 10^{-4} cm^{-1} e 4×10^{-4} cm^{-1}. O programa inicializa $\Delta\phi$, antes do cálculo da primeira etapa para obtenção de um estado de equilíbrio do ramo descendente da curva λ - f, com o valor $\Delta\phi_{02} = 4 \times 10^{-4}$ cm^{-1}.

O passo mínimo de $\Delta\phi$ deve ser aproximadamente igual a

$$\Delta\phi_{min} = 5 \times 10^{-8}\ cm^{-1} \qquad (V-3)$$

V.4 - PRECISÃO DO CÁLCULO

O número total de fibras consideradas na seção para a avaliação de integrais sobre a altura da seção pela regra de Simpson deve ser igual a

$$NFC = \sum_{i=1}^{NMC} NFM(i) - NMC + 1 = 21 \qquad (V-4)$$

onde

NFC é o número total de fibras consideradas na seção;

NFM(i) é o número de fibras consideradas na "mesa" i de concreto;

NMC é o número de "mesas de concreto".

No caso da seção possuir contorno retilíneo, deve se considerar em cada mesa no mínimo 3 fibras. Se a seção tiver contorno curvilíneo, deverá ser dividida em 20 mesas, em cada uma das quais deverão ser consideradas apenas as fibras das bordas.

Os processos iterativos determinam os acréscimos de parâmetros incógnitos com erro tolerável igual a

$$\delta = 5 \times 10^{-9} \qquad (V-5)$$

V.5 - APLICAÇÕES DO PROGRAMA

Além de permitir a determinação da capacidade portante em curta, em longa e em longa e curta duração de um dado pi

lar isostático de concreto armado, finalidade para a qual ele foi feito, o programa permite, ainda, obter a relação momento-curvatura correspondente a um dado valor do esforço normal, para uma seção de concreto armado conhecida, bastando, para isso, tomar o comprimento de flambagem do pilar igual a 0.

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo são apresentados quatro exemplos, com a finalidade de ilustrar a aplicação do programa de computador COLMOD, elaborado com base no método de cálculo desenvolvido no capítulo IV. Os resultados por ele fornecidos para os três primeiros exemplos são comparados com resultados obtidos por programas baseados em outros métodos e, eventualmente também, com resultados experimentais.

Os dois primeiros exemplos tratam do problema da determinação da capacidade portante em curta duração através de uma análise para um valor fixo da excentricidade de primeira ordem. O primeiro o faz para um pilar cuja seção transversal é retangular e o segundo, para um pilar de seção circular.

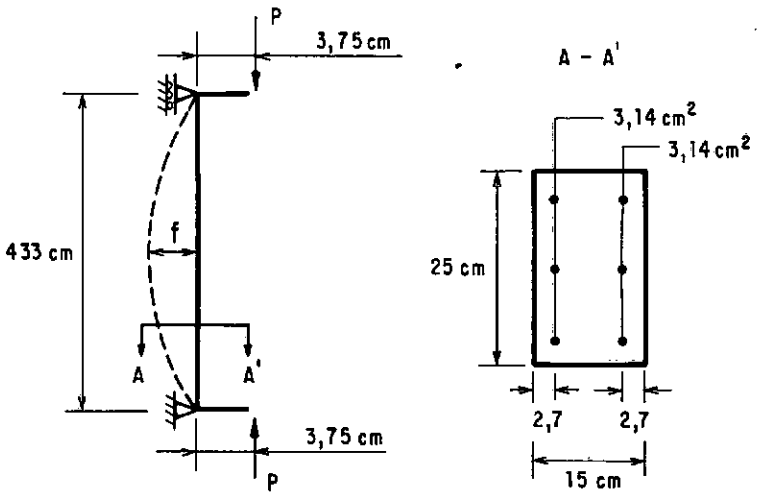
O terceiro exemplo trata dos problemas das determinações de capacidades portantes em curta, em longa e em longa e curta duração através de análises para um valor fixo da carga axial.

Finalmente, o quarto exemplo apresenta tabelas fornecendo os valores últimos do momento relativo de primeira ordem e do momento total relativo em função dos valores do esforço normal relativo, da taxa mecânica de armadura e da razão entre o comprimento de flambagem do pilar e a altura total da seção trans

versal, para o caso de pilares de seção retangular e circular.

VI.1 - EXEMPLO Nº 1

Este exemplo foi analisado por Jakobsen[2] através do programa FRAME ANALYSIS, elaborado com base num método de cálculo não-linear de pórticos planos de concreto armado.



lei do concreto : parábola - retângulo

f_c = 2,57 kN/cm² ϵ_{c1} = 2‰ ϵ_{cu} = 3,5‰

aço classe A

f_{se} = 46,10 kN/cm²

E_s = 21000 kN/cm²

FIGURA VI-1 - Características geométricas do pilar analisado, características físicas dos materiais e sistema de ações aplicado.

Determina-se, para o pilar simplesmente apoiado da figura VI-1, cuja seção transversal é retangular, o valor último das cargas axiais P de curta duração aplicadas com a mesma excentricidade e_0, de valor fixo e conhecido, nas duas extremidades. A referida figura fornece as características geométricas do pilar, as características físicas dos materiais bem como os dados relativos ao sistema de ações aplicado.

Os resultados obtidos pelo programa COLMOD de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado estão apresentados no quadro VI.1. Nele também estão incluídos resultados experimentais encontrados pelo laboratório de Zürich[2] e os resultados fornecidos pelo programa FRAME ANALYSIS[2].

QUADRO VI-1 - Valores últimos da carga axial de curta duração e da flecha na seção à meia-altura do pilar obtidos por diferentes análises

	P_{u0} (kN)	f_u (cm)
Análise experimental[2]	242,0	4,9
Programa FRAME ANALYSIS[2] método geral	241,6	6,2
Programa COLMOD método da coluna-modelo	249,9	5,0
Programa COLMOD método da coluna-modelo melhorado	235,5	5,5

O quadro VI-2 apresenta: na primeira coluna, as relações entre os valores de P_{u0} determinados pelo programa COLMOD e o valor fornecido pela análise experimental; na segunda coluna, as relações entre os valores determinados pelo programa COLMOD e o valor obtido pelo programa FRAME ANALYSIS.

QUADRO VI-2 - Relações entre os valores últimos da carga axial de curta duração obtidos pelo programa COLMOD e os fornecidos, respectivamente, pela análise experimental e pelo programa FRAME ANALYSIS.

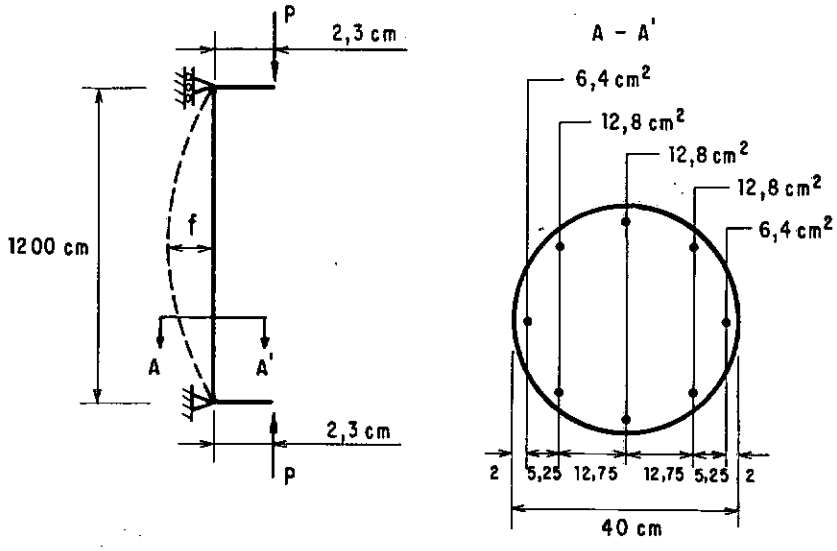
	P_{COL}/P_{AE}	P_{COL}/P_{FA}
Método da coluna-modelo	1,03	1,03
Método da coluna-modelo melhorado	0,97	0,97

O fato do valor último da carga axial determinado de acordo com o método da coluna-modelo ser maior do que o determinado de acordo com o método geral (programa FRAME ANALYSIS) é conseqüência de que, no caso deste sistema de ações, a consideração da hipótese da coluna-modelo implica em subestimar o valor da flecha na seção à meia-altura da coluna. Isto é confirmado pela observação de que a correção do valor último desta flecha em função da distribuição do momento fletor de primeira ordem conduz, neste caso, a um valor maior para ela.

Levando-se em conta que o método da coluna-modelo e o método da coluna-modelo melhorado são métodos aproximados, pode-se considerar que os resultados obtidos por meio deles para este exemplo são bastante razoáveis.

A comparação entre os valores últimos da carga axial e da flecha determinados de acordo com os métodos da coluna-modelo e da coluna-modelo melhorado e os encontrados na análise experimental mostra que eles estão bem próximos neste exemplo. No entanto, uma conclusão efetiva a esse respeito só poderá ser emitida após uma comparação sistemática dos resultados do programa com os de um considerável número de ensaios.

VI-2 - EXEMPLO Nº 2



lei do concreto : parábola - retângulo

$f_c = 0{,}85\ kN/cm^2$ $\varepsilon_{c1} = 2‰$ $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$

aço classe A

$f_{se} = 20{,}87\ kN/cm^2$

$E_s = 21000\ kN/cm^2$

FIGURA VI-2 - Características geométricas do pilar analisado, características físicas dos materiais e sistema de ações aplicado.

Determina-se, neste exemplo, do mesmo modo que no anterior, o valor último das cargas axiais P de curta duração, conhecido o valor da excentricidade e_0 com que estas cargas são aplicadas nas duas extremidades de um dado pilar simplesmente apoiado. O pilar examinado tem seção transversal circular. A figura VI-2 indica as características geométricas deste pilar, as características físicas dos materiais e os dados relativos ao sistema de ações aplicado.

O quadro VI-3 mostra os resultados determinados pelo programa COLMOD, de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado, e pelo programa elaborado por Garcia[14] para análise não-linear de pórticos planos de concreto armado.

QUADRO IV-3 - Valores últimos da carga axial de curta duração e da flecha na seção à meia-altura do pilar obtidos por diferentes análises

	P_{u0} (kN)	f_u (cm)
Programa da tese de Garcia[14] método geral	1050	5,2
Programa COLMOD método da coluna-modelo	1099	4,7
Programa COLMOD método da coluna-modelo melhorado	1042	5,1

Apresentam-se no quadro VI-4 as relações entre os valores de P_{u0} fornecidos pelo programa COLMOD e o valor fornecido pelo programa da tese de Garcia.

QUADRO VI-4 - Relações entre os valores últimos da carga axial de curta duração obtidos pelo programa COLMOD e o fornecido pelo programa da tese de Garcia.

	P'_{COL}/P_{PG}
Método da coluna-modelo	1,05
Método da coluna-modelo melhorado	0,99

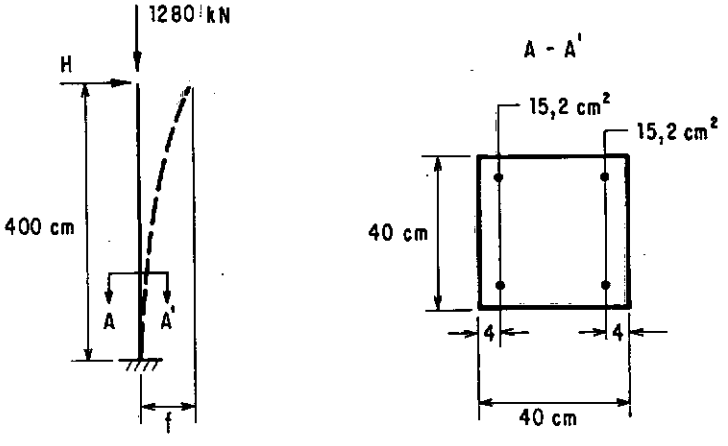
Sendo o sistema de ações aplicado ao pilar do mesmo tipo daquele do exemplo anterior, vale a mesma observação de que, neste caso, a consideração da hipótese da coluna-modelo implica em subestimar o valor da flecha na seção à meia-altura da coluna.

VI.3 - EXEMPLO Nº 3

Para o pilar em balanço e de seção retangular, representado na figura VI-3, submetido a uma carga axial centrada de valor fixo e conhecido, determinam-se valores últimos de forças horizontais de curta, de longa e de longa e curta duração. A figura citada fornece as características geométricas do pilar, as características físicas do concreto na idade t_0 da aplicação

das primeiras ações bem como as do aço e o valor da carga axial.

Os resultados obtidos são comparados com os determinados por Jakobsen[1] através do programa FRAME ANALYSIS destinado à análise não-linear de pórticos planos de concreto armado. Este programa permite calcular os efeitos da fluência através do método do "reduced modulus" (empregado pelo programa COLMOD e exposto no parágrafo IV.1.8) ou através do método do "rate of creep", que leva em consideração a variação das tensões no concreto.



lei do concreto : parábola - retângulo

$f_c = 2\ kN/cm^2$ $\varepsilon_{c1} = 2‰$ $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$

aço classe A

$f_{se} = 42\ kN/cm^2$

$E_s = 21000\ kN/cm^2$

FIGURA VI-3 - Características geométricas do pilar analisado, características físicas dos materiais e sistema de ações aplicado.

a) Sistema de ações de curta duração

O primeiro sistema de ações considerado é constituído pela carga axial centrada de valor fixo e conhecido e por uma força horizontal acrescida de modo rápido na idade t_o até o valor máximo H_{u0} que caracteriza a flambagem em curta duração.

Apresentam-se no quadro VI-5 os resultados determinados pelo programa COLMOD, de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado, bem como pelo programa FRAME ANALYSIS.

QUADRO VI-5 - Valores últimos da força horizontal de curta duração e da flecha no topo da coluna obtidos por diferentes análises.

	H_{u0} (kN)	f_u (cm)
Programa FRAME ANALYSIS[1] método geral	68,4	6,3
Programa COLMOD método da coluna-modelo	60,9	8,5
Programa COLMOD método da coluna-modelo melhorado	64,1	7,5

O quadro VI-6 mostra as relações entre os valores de H_{u0} obtidos pelo programa COLMOD e o valor obtido pelo programa FRAME ANALYSIS.

QUADRO VI-6 - Relações entre os valores últimos da força horizontal de curta duração obtidos pelo programa COLMOD e o fornecido pelo programa FRAME ANALYSIS.

	H_{COL}/H_{FA}
Método da coluna-modelo	0,89
Método da coluna-modelo melhorado	0,94

Desta vez, ao contrário dos exemplos anteriores, o valor último da força determinado de acordo com o método da coluna-modelo é menor do que o determinado de acordo com o método geral. Isto se deve ao fato de que, no caso do sistema de ações aqui analisado, a consideração da hipótese da coluna-modelo implica em superestimar o valor da flecha no topo da coluna. A observação de que a correção do valor último desta flecha em função da distribuição do momento fletor de primeira ordem conduz a um valor menor para ela vem confirmar isto.

b) Sistema de ações de longa duração

O segundo sistema de ações considerado é constituído pela carga axial centrada de valor fixo e conhecido e por uma força horizontal de 53,5 kN aplicada de modo rápido na idade t_o e, em seguida, mantida constante.

A análise pelo programa FRAME ANALYSIS utilizando o método do "rate of creep" indica que ocorrerá flambagem por flu

ência sob esta força após 700 dias.

Para efetuar a análise utilizando o método do " reduced modulus", Jakobsen avaliou o coeficiente de fluência no instante t_o + 700 dias, obtendo φ = 2,18.

Os coeficientes α a β, que permitem levar em conta a história da carga de longa e/ou curta duração avaliados de acordo com as equações (IV- 6) e (IV- 7) considerando-se que

P_L = 1280 kN

P_C = 0

H_L = 53,5 kN

H_C = 0

Obtêm-se, então, α = 1 e β = 1. O coeficiente de fluência reduzido, calculado como o produto α β φ, tem, então, o valor φ^* = 2,18.

Os resultados obtidos pelos programas FRAME ANALYSIS e COLMOD estão indicados no quadro VI-7.

QUADRO VI-7 - Valores últimos da força horizontal de longa duração e da flecha no topo da coluna segundo diferentes análises.

	H_{ul} (kN)	f_u (cm)
Programa FRAME ANALYSIS[1] método do "rate of creep"	53,5	9,7
Programa FRAME ANALYSIS[1] método do "reduced modulus"	53,2	9,8
Programa COLMOD método da coluna-modelo	42,2	13,2
Programa COLMOD método da coluna-modelo melhorado	45,7	12,1

A análise utilizando o método do "reduced modulus " obtém, para este caso, uma curva H - f fictícia análoga à da figura IV-4a. O valor de H_{ul} determinado pelo programa FRAME ANALYSIS utilizando este método é um pouco menor do que o obtido pelo mesmo programa utilizando o método do "rate of creep". Jakobsen chama a atenção para o fato de que o emprego do método do " reduced modulus " conduziria a resultados exatos se as tensões no concreto permanecessem constantes sob a ação mantida constante. Observa, ainda, que, no entanto, isto não acontece num pilar esbelto, pois o aumento das deformações no concreto devido à fluência produz dois efeitos: um aumento das flechas e, conseqüentemente, dos momentos e das tensões e uma transferência de tensões do concreto para o aço; efeitos, estes, influenciados por vários fatores como esbeltez, carga axial, excentricidade de primeira ordem e

quantidade de armadura.

O quadro VI-8 apresenta: na primeira coluna, as relações entre os valores de H_{ul} fornecidos pelo programa COLMOD e o valor fornecido pelo programa FRAME ANALYSIS utilizando o método do "rate of creep"; na segunda coluna, as relações entre os valores de H_{ul} fornecidos pelo programa COLMOD e o valor fornecido pelo programa FRAME ANALYSIS utilizando o método do "reduced modulus".

QUADRO VI-8 - Relações entre os valores últimos da força horizontal de longa duração obtidos pelo programa COLMOD e os obtidos pelo programa FRAME ANALYSIS empregando, respectivamente, o método do "rate of creep" e o método do "reduced modulus".

	H_{COL}/H_{RC}	H_{COL}/H_{RM}
Método da coluna-modelo	0,79	0,79
Método da coluna-modelo melhorado	0,85	0,86

Os valores de H_{ul} determinados de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado, empregando o método do "reduced modulus", são inferiores aos determinados de acordo com o método geral.

c) Sistema de ações de longa e curta duração

O terceiro sistema de ações considerado é constituído pela carga axial centrada de valor fixo e conhecido e por uma força horizontal de 40 kN aplicada na idade t_o de modo rápido e, em seguida, mantida constante por 700 dias, após o que é novamente acrescida rapidamente até o valor máximo H_{u2} = 61,6 kN que caracteriza a flambagem em curta duração após um período de ações de longa duração.

O coeficiente de fluência, neste caso, também é igual a φ = 2,18. Considerando-se que

P_L = 1280 kN

P_C = 0

H_L = 40 kN

H_C = 21,6 kN

obtêm-se os coeficientes α = 1 e β = 0,65. O coeficiente de fluência reduzido é, então, igual a φ^* = 1,42.

Os resultados fornecidos pelos programas FRAME ANALYSIS e COLMOD estão apresentados no quadro VI-9.

QUADRO VI-9 - Valores últimos da força horizontal de longa e curta duração e da flecha no topo da coluna segundo diferentes análises.

	H_{u2} (kN)	f_u (cm)
Programa FRAME ANALYSIS[1] método do "rate of creep"	61,6	8,3
Programa FRAME ANALYSIS[1] método do "reduced modulus".	59,0	8,4
Programa COLMOD método da coluna-modelo	48,5	11,6
Programa COLMOD método da coluna-modelo melhorado	52,0	10,5

O quadro VI-10 mostra: na primeira coluna, as relações entre os valores de H_{u2} determinados pelo programa COLMOD e o valor determinado pelo programa FRAME ANALYSIS utilizando o método do "rate of creep"; na segunda coluna, as relações entre os valores de H_{u2} determinados pelo programa COLMOD e o valor determinado pelo programa FRAME ANALYSIS utilizando o método do "reduced modulus".

QUADRO VI-10 - Relações entre os valores últimos da força horizontal de longa e curta duração obtidos pelo programa COLMOD e pelo programa FRAME ANALYSIS empregando, respectivamente, o método do "rate of creep" e o método do "reduced modulus".

	H_{COL}/H_{RC}	H_{COL}/H_{RM}
Método da coluna-modelo	0,79	0,82
Método da coluna-modelo melhorado	0,84	0,88

Os valores de H_{u2} determinados de acordo com o método da coluna-modelo e com o método da coluna-modelo melhorado são inferiores aos determinados de acordo com o método geral.

Levando-se em conta que o método da coluna-modelo e o método da coluna-modelo melhorado são métodos aproximados, pode-se considerar que os resultados obtidos para os sistemas de ações de longa e de longa e curta duração também são razoáveis.

VI.4 - EXEMPLO Nº 4

Este exemplo ilustra uma aplicação prática do programa: a construção de tabelas em função de parâmetros adimensionais. Ele permite que se verifique a eficiência do método de cálculo desenvolvido neste trabalho em relação ao apresentado no Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5], através da

comparação dos resultados contidos nas tabelas construídas de acordo com estes dois métodos de cálculo.

Apresentam-se três tabelas que fornecem os valores últimos do momento relativo de primeira ordem μ_1 e do momento total relativo μ em função da razão ℓ_e/h entre o comprimento de flambagem do pilar e a altura total da seção transversal, da taxa mecânica de armadura ω e do esforço normal relativo ν, para uma dada forma de seção transversal, distribuição de armadura e deformação do aço ε_{se} correspondente à tensão de escoamento.

Estas tabelas foram elaboradas a partir de resultados obtidos por um programa análogo ao programa COLMOD que, no entanto, ao invés de trabalhar com acréscimos de ações, trabalha diretamente com acréscimos da carga axial e do momento de primeira ordem. As características físicas adotadas para os materiais foram:

lei do concreto: parábola-retângulo

$f_c = 1 \quad E_c = 1000 \quad \varepsilon_{c1} = 0{,}0020 \quad \varepsilon_{cu} = 0{,}0035$

aço Classe A

$f_{se} = 1 \quad E_s = 500$

As duas primeiras tabelas se aplicam a pilares de seção retangular com armadura igualmente distribuída por dois níveis e com sistema de ações atuando num plano principal. A primeira foi calculada para $\varphi = 0$ e a segunda, para $\varphi = 2$. A ter-

ceira tabela se aplica a pilares de seção circular com armadura uniformemente distribuída e foi calculada para $\varphi = 0$.

A maior parte dos valores últimos de μ_1 fornecidos por estas tabelas e obtidos de acordo com as hipóteses expostas no capítulo IV correspondem à ruína por instabilidade. Há alguns, porém, que correspondem à ruína por ruptura à compressão do concreto ou à ruína por deformação plástica excessiva da armadura mais tracionada.

Nas três tabelas, os resultados apresentados para $\ell_e/h = 0$ estão separados em três setores correspondentes, respectivamente, da esquerda para a direita, à ruína determinada pela ocorrência de: um alongamento relativo de 10‰ na armadura mais tracionada; um encurtamento relativo de $3,5‰(1 + \varphi)$ na fibra de concreto mais comprimida, estando a seção parcialmente comprimida; um encurtamento relativo de $2‰(1 + \varphi)$ na fibra de concreto situada a $\frac{3}{7}$ h da borda mais comprimida da seção, estando a seção inteiramente comprimida.

Alguns dos resultados apresentados para $\ell_e/h = 10$ nas tabelas organizadas para $\varphi = 0$ foram determinados pela ocorrência de um encurtamento relativo de 3,5‰ na fibra de concreto mais comprimida da seção parcialmente comprimida. Estes resultados são os situados no interior da linha poligonal desenhada. Os resultados para ν diferente de zero situados fora desta poligonal ou obtidos para os outros valores de ℓ_e/h (20,30 e 40) correspondem à ruína por instabilidade.

Os resultados das tabelas VI-1 e VI-3 estão bastante próximos dos apresentados, respectivamente, nas tabelas A3.4a) e A3.6a) do Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5]. As maiores diferenças encontram-se no setor dos resultados para $\ell_e/h = 0$ correspondente às seções inteiramente comprimidas. Isto se deve ao fato de que o programa do Manual de flambagem do CEB-1974[4] não verifica se a seção está inteiramente comprimida. Estes manuais não apresentam tabelas para $\varphi = 2$.

TABELA VI-1 - Momento relativo de primeira ordem $\mu_1 = M_1/(N_c\ h)$ e momento total relativo $\mu = M/(N_c\ h)$ para pilares de seção retangular com armadura igualmente distribuída por dois níveis e com sistema de ações atuando num plano principal

$\varphi = 0$ Aço Classe A $\varepsilon_{se} = 2‰$ $d'/h = 0,10$

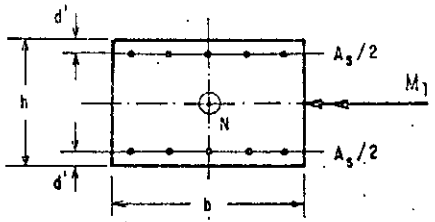
$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
0	0,05	0,022	0,064	0,100	0,124	0,138	0,140	0,131	0,114	0,089	0,054	0,018									
		0,022	0,064	0,100	0,124	0,138	0,140	0,131	0,114	0,089	0,054	0,018									
	0,2	0,084	0,124	0,160	0,184	0,198	0,196	0,181	0,163	0,139	0,110	0,074	0,038								
		0,084	0,124	0,160	0,184	0,198	0,196	0,181	0,163	0,139	0,110	0,074	0,038								
	0,4	0,164	0,203	0,240	0,264	0,278	0,274	0,253	0,231	0,207	0,180	0,149	0,113	0,076	0,039						
		0,164	0,203	0,240	0,264	0,278	0,274	0,253	0,231	0,207	0,180	0,149	0,113	0,076	0,039						
	0,6	0,244	0,282	0,320	0,344	0,358	0,352	0,328	0,303	0,277	0,250	0,220	0,189	0,153	0,115	0,077	0,039				
		0,244	0,282	0,320	0,344	0,358	0,352	0,328	0,303	0,277	0,250	0,220	0,189	0,153	0,115	0,077	0,039				
	0,8	0,323	0,362	0,400	0,424	0,438	0,432	0,404	0,377	0,349	0,321	0,291	0,261	0,228	0,192	0,154	0,116	0,078	0,039		
		0,323	0,362	0,400	0,424	0,438	0,432	0,404	0,377	0,349	0,321	0,291	0,261	0,228	0,192	0,154	0,116	0,078	0,039		
	1,0	0,403	0,442	0,480	0,504	0,518	0,511	0,482	0,452	0,423	0,394	0,364	0,333	0,301	0,267	0,232	0,194	0,156	0,117	0,079	0,040
		0,403	0,442	0,480	0,504	0,518	0,511	0,482	0,452	0,423	0,394	0,364	0,333	0,301	0,267	0,232	0,194	0,156	0,117	0,079	0,040
10	0,05	0,022	0,057	0,085	0,105	0,115	0,113	0,104	0,086	0,060	0,031	0,006									
		0,022	0,062	0,095	0,119	0,136	0,134	0,127	0,109	0,084	0,048	0,015									
	0,2	0,084	0,115	0,142	0,163	0,175	0,167	0,150	0,131	0,108	0,079	0,048	0,022								
		0,084	0,122	0,153	0,178	0,196	0,196	0,181	0,159	0,135	0,105	0,068	0,033								
	0,4	0,164	0,193	0,220	0,243	0,255	0,244	0,221	0,197	0,172	0,145	0,114	0,082	0,053	0,025						
		0,164	0,201	0,232	0,262	0,276	0,274	0,253	0,231	0,205	0,175	0,144	0,106	0,069	0,035						
	0,6	0,244	0,271	0,298	0,322	0,335	0,323	0,295	0,267	0,239	0,211	0,182	0,150	0,117	0,086	0,056	0,028				
		0,244	0,281	0,312	0,342	0,356	0,352	0,328	0,303	0,277	0,248	0,215	0,182	0,144	0,107	0,071	0,037				
	0,8	0,323	0,350	0,378	0,402	0,415	0,402	0,371	0,340	0,310	0,280	0,249	0,218	0,186	0,152	0,120	0,089	0,059	0,029		
		0,323	0,361	0,392	0,422	0,436	0,432	0,404	0,377	0,349	0,321	0,289	0,255	0,221	0,183	0,146	0,109	0,074	0,038		
	1,0	0,403	0,430	0,457	0,483	0,495	0,481	0,448	0,415	0,383	0,351	0,319	0,287	0,255	0,222	0,188	0,155	0,123	0,091	0,061	0,030
		0,403	0,441	0,471	0,503	0,516	0,511	0,482	0,452	0,423	0,394	0,364	0,330	0,295	0,260	0,222	0,184	0,147	0,111	0,075	0,039

TABELA VI-1 (continuação)

$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
20	0,05	0,022	0,047	0,061	0,070	0,072	0,067	0,055	0,034	0,011											
		0,022	0,060	0,092	0,100	0,113	0,118	0,109	0,093	0,057											
	0,2	0,084	0,103	0,117	0,121	0,113	0,101	0,089	0,072	0,049	0,023	0,004									
		0,084	0,117	0,149	0,176	0,188	0,176	0,160	0,146	0,121	0,092	0,044									
	0,4	0,164	0,178	0,192	0,198	0,191	0,165	0,114	0,124	0,103	0,078	0,050	0,026	0,007							
		0,164	0,194	0,225	0,254	0,276	0,247	0,228	0,209	0,187	0,160	0,130	0,099	0,068							
	0,6	0,244	0,254	0,268	0,276	0,271	0,236	0,207	0,182	0,158	0,133	0,107	0,078	0,052	0,029	0,011					
		0,244	0,274	0,303	0,332	0,356	0,336	0,298	0,275	0,252	0,227	0,199	0,168	0,136	0,104	0,071					
	0,8	0,323	0,332	0,345	0,354	0,351	0,313	0,275	0,245	0,217	0,191	0,164	0,136	0,106	0,079	0,054	0,032	0,014	0,002		
		0,323	0,354	0,381	0,411	0,436	0,425	0,380	0,345	0,320	0,295	0,268	0,239	0,207	0,174	0,141	0,108	0,074	0,038		
	1,0	0,403	0,410	0,423	0,433	0,431	0,391	0,348	0,312	0,281	0,251	0,223	0,194	0,166	0,135	0,106	0,079	0,055	0,034	0,017	0,005
		0,403	0,433	0,460	0,490	0,516	0,509	0,464	0,423	0,391	0,394	0,336	0,308	0,278	0,246	0,213	0,179	0,145	0,110	0,075	0,038
30	0,05	0,022	0,031	0,040	0,042	0,036	0,022	0,003													
		0,022	0,049	0,063	0,076	0,084	0,084	0,056													
	0,2	0,084	0,085	0,076	0,060	0,053	0,041	0,024	0,003												
		0,084	0,117	0,149	0,127	0,116	0,113	0,109	0,070												
	0,4	0,164	0,159	0,150	0,128	0,094	0,071	0,054	0,035	0,012											
		0,164	0,193	0,225	0,254	0,258	0,187	0,165	0,154	0,139											
	0,6	0,244	0,235	0,225	0,205	0,170	0,128	0,094	0,070	0,048	0,024	0,001									
		0,244	0,270	0,303	0,332	0,344	0,320	0,275	0,230	0,202	0,189	0,077									
	0,8	0,323	0,311	0,301	0,283	0,248	0,198	0,156	0,120	0,089	0,063	0,037	0,011								
		0,323	0,348	0,381	0,411	0,423	0,396	0,370	0,345	0,297	0,255	0,224	0,186								
	1,0	0,403	0,388	0,378	0,361	0,327	0,271	0,223	0,180	0,143	0,110	0,080	0,053	0,025	0,002						
		0,403	0,425	0,459	0,490	0,502	0,473	0,445	0,418	0,391	0,364	0,336	0,290	0,278	0,116						

TABELA IV-1 (continuação)

$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
40	0,05	0,022 0,022	0,023 0,034	0,026 0,051	0,019 0,064	0,004 0,063															
	0,2	0,084 0,084	0,061 0,117	0,036 0,078	0,029 0,078	0,016 0,078															
	0,4	0,164 0,164	0,133 0,193	0,091 0,225	0,048 0,135	0,033 0,111	0,016 0,103														
	0,6	0,244 0,244	0,207 0,270	0,164 0,303	0,106 0,332	0,055 0,182	0,035 0,142	0,015 0,130													
	0,8	0,323 0,323	0,282 0,348	0,239 0,381	0,183 0,411	0,112 0,423	0,060 0,244	0,036 0,171	0,014 0,159												
	1,0	0,403 0,403	0,358 0,425	0,315 0,459	0,261 0,490	0,190 0,502	0,114 0,473	0,063 0,277	0,037 0,208	0,012 0,190											



$\nu = |N|/N_c$

$\mu_1 = M_1/(N_c h)$

$\omega = f_s A_s / N_c$

$N_c = f_c A_c$

TABELA VI-2 - Momento relativo de primeira ordem $\mu_1 = M_1/(N_c\ h)$ e momento total relativo $\mu = M/(N_c\ h)$ para pilares de seção retangular com armadura igualmente distribuída por dois níveis e com sistema de ações atuando num plano principal

$\varphi = 2$ Aço Classe A $\varepsilon_{se} = 2\ ‰$ $d'/h = 0,10$

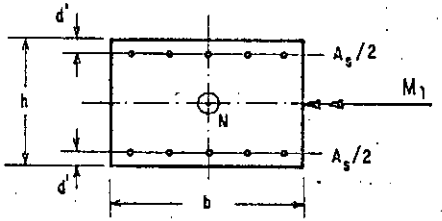
ℓ_e/h	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
0	0,05	0,021	0,062	0,097	0,122	0,138	0,141	0,135	0,115	0,088	0,054	0,018									
		0,021	0,062	0,097	0,122	0,138	0,141	0,135	0,115	0,088	0,054	0,018									
	0,2	0,082	0,122	0,157	0,182	0,198	0,201	0,195	0,170	0,140	0,109	0,073	0,036								
		0,082	0,122	0,157	0,182	0,198	0,201	0,195	0,170	0,140	0,109	0,073	0,036								
	0,4	0,162	0,202	0,237	0,262	0,278	0,281	0,275	0,246	0,214	0,181	0,147	0,111	0,073	0,036						
		0,162	0,202	0,237	0,262	0,278	0,281	0,275	0,246	0,214	0,181	0,147	0,111	0,073	0,036						
	0,6	0,242	0,282	0,317	0,342	0,358	0,361	0,355	0,324	0,290	0,256	0,222	0,186	0,150	0,112	0,074	0,036				
		0,242	0,282	0,317	0,342	0,358	0,361	0,355	0,324	0,290	0,256	0,222	0,186	0,150	0,112	0,074	0,036				
	0,8	0,322	0,362	0,397	0,422	0,438	0,441	0,435	0,403	0,368	0,333	0,298	0,262	0,226	0,189	0,151	0,113	0,074	0,036		
		0,322	0,362	0,397	0,422	0,438	0,441	0,435	0,403	0,368	0,333	0,298	0,262	0,226	0,189	0,151	0,113	0,074	0,036		
	1,0	0,402	0,442	0,477	0,503	0,518	0,521	0,515	0,482	0,447	0,411	0,375	0,338	0,302	0,265	0,228	0,190	0,152	0,113	0,074	0,036
		0,402	0,442	0,477	0,503	0,518	0,521	0,515	0,482	0,447	0,411	0,375	0,338	0,302	0,265	0,228	0,190	0,152	0,113	0,074	0,036
10	0,05	0,021	0,052	0,074	0,087	0,093	0,086	0,071	0,049	0,023	0,003										
		0,021	0,058	0,089	0,111	0,125	0,128	0,116	0,099	0,065	0,027										
	0,2	0,082	0,111	0,134	0,147	0,153	0,145	0,119	0,093	0,064	0,033	0,005									
		0,082	0,118	0,149	0,171	0,185	0,195	0,178	0,149	0,120	0,084	0,038									
	0,4	0,162	0,191	0,214	0,227	0,233	0,225	0,195	0,160	0,127	0,094	0,060	0,028	0,000							
		0,162	0,198	0,229	0,251	0,265	0,275	0,266	0,228	0,192	0,158	0,122	0,084	0,017							
	0,6	0,242	0,270	0,294	0,307	0,313	0,305	0,275	0,234	0,196	0,160	0,125	0,089	0,055	0,021						
		0,242	0,278	0,309	0,331	0,345	0,355	0,350	0,310	0,270	0,232	0,195	0,159	0,121	0,082						
	0,8	0,322	0,350	0,374	0,387	0,393	0,385	0,354	0,311	0,270	0,231	0,193	0,156	0,120	0,083	0,048	0,000				
		0,322	0,357	0,389	0,411	0,425	0,435	0,433	0,391	0,350	0,310	0,271	0,233	0,196	0,158	0,119	0,017				
	1,0	0,402	0,430	0,454	0,467	0,473	0,465	0,434	0,389	0,346	0,305	0,265	0,226	0,188	0,151	0,114	0,077	0,042			
		0,402	0,437	0,469	0,491	0,505	0,515	0,515	0,472	0,431	0,390	0,349	0,310	0,271	0,233	0,195	0,155	0,116			

TABELA VI-2 (continuação)

$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
20	0,05	0,021 0,021	0,039 0,055	0,042 0,078	0,038 0,080	0,026 0,080	0,007 0,075														
	0,2	0,082 0,082	0,096 0,114	0,102 0,144	0,088 0,167	0,063 0,142	0,041 0,114	0,017 0,085	0,003 0,015												
	0,4	0,162 0,162	0,174 0,193	0,182 0,224	0,168 0,247	0,137 0,265	0,097 0,209	0,067 0,157	0,038 0,118	0,018 0,046	0,005 0,017										
	0,6	0,242 0,242	0,253 0,272	0,262 0,304	0,248 0,327	0,217 0,345	0,167 0,312	0,125 0,250	0,092 0,193	0,062 0,142	0,039 0,081	0,020 0,049	0,006 0,018								
	0,8	0,322 0,322	0,332 0,352	0,342 0,384	0,328 0,407	0,297 0,425	0,243 0,402	0,193 0,344	0,152 0,281	0,118 0,219	0,087 0,161	0,062 0,117	0,040 0,084	0,022 0,051	0,007 0,018						
	1,0	0,402 0,402	0,411 0,432	0,422 0,464	0,408 0,487	0,377 0,505	0,321 0,488	0,266 0,432	0,219 0,371	0,179 0,304	0,145 0,248	0,114 0,188	0,087 0,154	0,063 0,121	0,042 0,087	0,023 0,053	0,007 0,019				
30	0,05	0,021 0,021	0,020 0,039	0,016 0,046	0,001 0,051																
	0,2	0,082 0,082	0,074 0,114	0,050 0,134	0,025 0,100	0,007 0,088															
	0,4	0,162 0,162	0,152 0,192	0,129 0,224	0,080 0,186	0,048 0,160	0,023 0,135	0,000 0,097													
	0,6	0,242 0,242	0,230 0,271	0,209 0,304	0,151 0,310	0,104 0,232	0,069 0,203	0,041 0,175	0,015 0,144												
	0,8	0,322 0,322	0,308 0,350	0,289 0,384	0,231 0,407	0,168 0,307	0,125 0,276	0,089 0,245	0,058 0,214	0,030 0,182	0,008 0,150										
	1,0	0,402 0,402	0,387 0,430	0,369 0,464	0,311 0,487	0,238 0,397	0,188 0,351	0,145 0,318	0,108 0,286	0,076 0,254	0,046 0,221	0,022 0,188	0,004 0,154								

TABELA VI-2 - (continuação)

$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
40	0,05	0,021 0,021	0,011 0,027																		
	0,2	0,082 0,082	0,044 0,114	0,011 0,054																	
	0,4	0,162 0,162	0,120 0,192	0,059 0,213	0,012 0,092																
	0,6	0,242 0,242	0,197 0,271	0,137 0,292	0,060 0,261	0,013 0,132															
	0,8	0,322 0,322	0,276 0,350	0,216 0,384	0,130 0,339	0,061 0,307	0,014 0,175														
	1,0	0,402 0,402	0,354 0,430	0,296 0,464	0,203 0,417	0,125 0,383	0,061 0,350	0,014 0,218													



$\nu = |N| / N_c$

$\mu_1 = M_1/(N_c h)$

$\omega = f_s A_s / N_c$

$N_c = f_c A_c$

TABELA VI-3 - Momento relativo de primeira ordem $\mu_1 = M_1/(N_c\ h)$ e momento total relativo $\mu = M/(N_c\ h)$ para pilares de seção circular com armadura uniformemente distribuída

$\varphi = 0$ Aço Classe A $\varepsilon_{se} = 2‰$ $d'/h = 0,10$

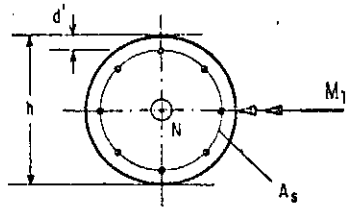
ℓ_e/h	ν / ω	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
0	0,05	0,021	0,057	0,083	0,100	0,109	0,110	0,105	0,092	0,073	0,045	0,014									
		0,021	0,057	0,083	0,100	0,109	0,110	0,105	0,092	0,073	0,045	0,014									
	0,2	0,074	0,103	0,123	0,138	0,143	0,142	0,135	0,124	0,108	0,087	0,060	0,029								
		0,074	0,103	0,123	0,138	0,143	0,142	0,135	0,124	0,108	0,087	0,060	0,029								
	0,4	0,137	0,160	0,175	0,185	0,189	0,186	0,177	0,166	0,153	0,135	0,114	0,089	0,060	0,029						
		0,137	0,160	0,175	0,185	0,189	0,186	0,177	0,166	0,153	0,135	0,114	0,089	0,060	0,029						
	0,6	0,196	0,212	0,225	0,232	0,234	0,231	0,221	0,210	0,197	0,181	0,162	0,141	0,117	0,090	0,059	0,029				
		0,196	0,212	0,225	0,232	0,234	0,231	0,221	0,210	0,197	0,181	0,162	0,141	0,117	0,090	0,059	0,029				
	0,8	0,249	0,263	0,274	0,279	0,280	0,277	0,267	0,254	0,240	0,226	0,209	0,189	0,168	0,145	0,119	0,089	0,059	0,028		
		0,249	0,263	0,274	0,279	0,280	0,277	0,267	0,254	0,240	0,226	0,209	0,189	0,168	0,145	0,119	0,089	0,059	0,028		
	1,0	0,301	0,313	0,324	0,325	0,325	0,323	0,313	0,299	0,285	0,271	0,255	0,236	0,216	0,195	0,172	0,147	0,119	0,089	0,058	0,028
		0,301	0,313	0,324	0,325	0,325	0,323	0,313	0,299	0,285	0,271	0,255	0,236	0,216	0,195	0,172	0,147	0,119	0,089	0,058	0,028
10	0,05	0,021	0,047	0,067	0,080	0,085	0,084	0,077	0,064	0,043	0,019	0,002									
		0,021	0,054	0,079	0,096	0,105	0,105	0,099	0,087	0,068	0,038	0,008									
	0,2	0,074	0,092	0,105	0,114	0,117	0,112	0,103	0,091	0,075	0,054	0,030	0,010								
		0,074	0,102	0,119	0,136	0,142	0,142	0,135	0,121	0,105	0,082	0,054	0,022								
	0,4	0,137	0,149	0,157	0,162	0,161	0,155	0,143	0,130	0,115	0,097	0,076	0,052	0,029	0,010						
		0,137	0,160	0,174	0,185	0,189	0,186	0,177	0,166	0,151	0,131	0,108	0,081	0,053	0,022						
	0,6	0,196	0,202	0,208	0,210	0,207	0,200	0,186	0,172	0,156	0,139	0,119	0,098	0,074	0,050	0,029	0,011				
		0,196	0,212	0,223	0,232	0,234	0,231	0,221	0,210	0,197	0,179	0,158	0,135	0,109	0,081	0,053	0,022				
	0,8	0,249	0,254	0,258	0,257	0,252	0,245	0,231	0,214	0,198	0,181	0,162	0,142	0,120	0,097	0,072	0,050	0,029	0,012		
		0,249	0,263	0,274	0,279	0,280	0,277	0,267	0,254	0,240	0,226	0,208	0,184	0,161	0,138	0,107	0,081	0,053	0,026		
	1,0	0,301	0,304	0,308	0,303	0,298	0,291	0,276	0,259	0,241	0,224	0,206	0,185	0,164	0,142	0,119	0,095	0,071	0,049	0,030	0,013
		0,301	0,313	0,324	0,325	0,325	0,323	0,313	0,299	0,285	0,271	0,255	0,236	0,212	0,188	0,163	0,135	0,107	0,079	0,053	0,026

TABELA VI-3 (continuação)

$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
20	0,05	0.021	0,033	0,043	0,048	0,047	0,040	0,028	0,011												
		0,021	0,049	0,062	0,075	0,082	0,083	0,079	0,062												
	0,2	0,074	0,071	0,071	0,066	0,061	0,054	0,044	0,030	0,012											
		0,074	0,093	0,109	0,121	0,112	0,108	0,102	0,091	0,074											
	0,4	0,137	0,122	0,115	0,107	0,093	0,078	0,066	0,053	0,039	0,021	0,004									
		0,137	0,147	0,167	0,173	0,178	0,158	0,140	0,130	0,123	0,105	0,060									
	0,6	0,196	0,174	0,164	0,151	0,134	0,113	0,094	0,079	0,065	0,049	0,031	0,012								
		0,196	0,204	0,222	0,216	0,222	0,210	0,192	0,173	0,160	0,145	0,126	0,105								
	0,8	0,249	0,227	0,213	0,195	0,177	0,153	0,130	0,110	0,092	0,076	0,059	0,041	0,022	0,006						
		0,249	0,262	0,273	0,269	0,274	0,266	0,238	0,224	0,207	0,193	0,167	0,146	0,125	0,095						
	1,0	0,301	0,278	0,261	0,240	0,221	0,196	0,167	0,144	0,124	0,105	0,087	0,070	0,051	0,032	0,015	0,002				
		0,301	0,311	0,323	0,315	0,318	0,309	0,292	0,265	0,250	0,234	0,218	0,190	0,178	0,154	0,124	0,073				
30	0,05	0,021	0,022	0,027	0,024	0,014	0,000														
		0,021	0,035	0,047	0,058	0,062	0,031														
	0,2	0,074	0,048	0,034	0,030	0,022	0,009														
		0,074	0,085	0,065	0,067	0,072	0,064														
	0,4	0,137	0,092	0,066	0,042	0,032	0,021	0,007													
		0,137	0,147	0,145	0,110	0,084	0,083	0,079													
	0,6	0,196	0,142	0,107	0,072	0,046	0,033	0,019	0,004												
		0,196	0,199	0,198	0,203	0,130	0,110	0,103	0,094												
	0,8	0,249	0,192	0,150	0,112	0,072	0,047	0,032	0,017												
		0,249	0,253	0,242	0,252	0,242	0,155	0,129	0,114												
	1,0	0,301	0,242	0,194	0,155	0,111	0,071	0,047	0,030	0,015											
		0,301	0,304	0,296	0,304	0,299	0,263	0,167	0,143	0,127											

TABELA VI-3 (continuação)

$\frac{\ell_e}{h}$	ω \ ν	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
40	0,05	0,021 0,021	0,016 0,026	0,014 0,040	0,004 0,039																
	0,2	0,074 0,074	0,022 0,057	0,018 0,042	0,008 0,050																
	0,4	0,137 0,137	0,060 0,130	0,024 0,063	0,015 0,058	0,002 0,054															
	0,6	0,196 0,196	0,102 0,175	0,041 0,170	0,021 0,067	0,009 0,063															
	0,8	0,249 0,249	0,145 0,243	0,079 0,224	0,030 0,106	0,016 0,074															
	1,0	0,301 0,301	0,193 0,301	0,120 0,286	0,050 0,237	0,023 0,095	0,008 0,081														



$\nu = |N|/N_c$

$\mu_1 = M_1/(N_c h)$

$\omega = f_s A_s / N_c$

$N_c = f_c A_c$

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

No capítulo anterior foram apresentados alguns exemplos, nos quais foram comparados os resultados obtidos pelo programa COLMOD, desenvolvido neste trabalho, com os resultados fornecidos por outros programas de computador baseados no método geral ou mesmo no método da coluna-modelo e, eventualmente também, com resultados de análises experimentais.

As tabelas organizadas, que fornecem os valores últimos em curta duração do momento relativo de primeira ordem e do momento total relativo, apresentaram resultados iguais ou bastante próximos dos resultados encontrados em tabelas análogas do Manual de flambagem e instabilidade do CEB-FIP/1977[5]. Como ambas foram construídas com resultados obtidos por programas de computador elaborados para a aplicação de métodos de cálculo baseados nas mesmas hipóteses, pode-se concluir que o método de cálculo desenvolvido neste trabalho é bastante eficaz.

A comparação dos resultados obtidos para os exemplos nos quais os pilares são submetidos a sistemas de ações de curta duração com os fornecidos por programas baseados no método geral mostrou que a consideração da hipótese da coluna-modelo implica em alguns casos em subestimar o valor da maior flecha do pilar, conduzindo, portanto, a valores últimos de P ou M_1, dependendo do tipo de análise, superiores aos do método geral e nou-

tros em superestimar o valor desta flecha, conduzindo, então, a valores últimos de P ou M_1 inferiores aos do método geral. É possível conhecer de antemão que sistemas de ações se incluem em cada caso. Para isto, basta analisar as equações (III-42),(III-45) e (III-48), que fornecem os valores corrigidos de f, M_1 e P respectivamente. O valor da flecha é subestimado nos sistemas de ações para os quais α_c, expresso pela equação (III-50), é negativo pois tem-se que $|f_c| > |f|$, $|M_{1c}| < |M_1|$ e $|P_c| < |P|$. O valor da flecha é superestimado naqueles para os quais α_c é positivo pois, nestes casos, $|f_c| < |f|$, $|M_{1c}| > |M_1|$ e $|P_c| > |P|$.

Estes mesmos exemplos demonstraram a importância da correção dos resultados em função da distribuição do momento de primeira ordem.

O exemplo no qual o pilar é submetido a sistemas de ações de longa e de longa e curta duração apresentou resultados não tão próximos dos do método geral, embora ainda razoáveis. Isto se deve ao fato do método empregado para levar em conta a fluência do concreto não permitir que o cálculo acompanhe a evolução "real" da relação entre ação e flecha.

Uma conclusão definitiva sobre os resultados do programa COLMOD desenvolvido neste trabalho com base no método da coluna-modelo só poderá ser emitida após um trabalho relevante de exploração do programa. A confrontação com resultados experimentais e mesmo com resultados fornecidos por programas baseados em métodos mais "exatos" permitirão justificar globalmente ou mesmo, sendo necessário, melhorar as hipóteses de cálculo aqui adotadas.

Como possível melhoramento a ser feito no programa sugere-se a previsão de que, no caso da análise para um valor fixo da carga axial, o cálculo para $\Delta P = P_f$ possa ser realizado em duas etapas quando o valor de P_f for elevado, uma vez que neste caso a convergência exigiu, por vezes, um número elevado de iterações.

Outro melhoramento que pode ser realizado é a consideração da protensão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 AAS-JAKOBSEN, Knut. Design of Slender Reinforced Concrete Frames. Zürich, Institut für Baustatik, ETH Zürich, November 1973.

2 AAS-JAKOBSEN, K. & GRENACHER, M. Berechnung unelastischer Rahmen nach der Theorie 2. Ordnung. Bericht Institut für Baustatik, ETH Zürich. Zürich, (45), Januar 1973.

3 BLEICH, Friedrich. Buckling strength of metal structures. New York, Mc Graw - Hill Book Company, Inc., 1952. 508p.

4 BULLETIN D'INFORMATION [du] CEB. CEB Buckling manual. Paris, n.103, octobre 1974.

5 BULLETIN D'INFORMATION [du] CEB. CEB-FIP Manual of buckling and instability. Paris, n.123, décembre 1977.

6 CHAJES, Alexander. Principles of structural stability theory. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., [1974]. 334p.

7 CODE-MODÈLE CEB-FIP pour les structures en béton. Bulletin d'Information [du] CEB. Système International de Réglementation Technique Unifiée des Structures. Paris, (124/125-F), v.II, avril 1978.

8 ENGESSER, F. Knickfragen. Schweitzerische Bauzeitung. 26, 1895.

9 ———— Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen. 35, 1889.

10 EULER, L. De curvis elasticis. In: ———— Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausanne and Geneva, 1744.

11 ———— Sur la force de colonnes. Mémoires de l' Académie de Berlin. 1759.

12 FOURÉ, Bernard. Flambement, instabilité. Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. (326): 107-19, mars 1975.

13 ———— État limite ultime de stabilité de forme. In: ———— Session de formation à Alger (CNAT/CTC). Paris, École National des Ponts et Chaussées, v.1, octobre 1980.

14 GARCIA, L.F.T. Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, dezembro de 1974. Tese de Mestrado.

15 KÁRMÁN, T. von. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Physikalische Zeitschrift. 9, 1908.

16 ———— Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Berlin, (81), 1910.

17 MAIA, A.C.F. Analyse non - linéaire des portiques plans en béton armé ou précontraint compte tenu du comportement rhéologique du béton. Paris, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, avril 1979. Thèse de Docteur - ingenieur.

18 SHANLEY, F.R. Inelastic Column Theory. Journal of the Aeronautical Sciences. 14 (5), 1947.

19 TELLES, J.C.F. Análise do comportamento não-linear geométrico e físico de pórticos planos de concreto armado. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, fevereiro de 1976. Tese de Mestrado.

20 TIMOSHENKO, Stephen P. & GERE., James M. Mechanics of Materials. New York, D. Van Nostrand, [1972]. 552p.

21 ———— Theory of elastic stability. 2.ed. New York, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1961. 541p.

APÊNDICE I

MANUAL DE ENTRADA E SAÍDA DO PROGRAMA COLMOD

AI.1 - DADOS DO PROGRAMA

As unidades empregadas são kN e cm.

Os dados são introduzidos por linhas na seguinte ordem:

1) NP (1 linha)

NP - número do pilar

Formato: (I10)

2) TIT (1 linha)

TIT - título para o pilar

Formato: (20A4)

3) ITA, IFA (1 linha)

ITA - índice do tipo de análise que se deseja realizar

ITA = 1 - análise onde o valor da carga axial se mantém fixo

ITA = 2 - análise onde o valor da excentricidade de primeira ordem se mantém fixo.

IFA - índice que informa se, no caso de ser atingido o estado limite último de ruína por instabilidade, se quer ou não que a análise termine aí.

IFA = 0 - não

IFA = 1 - sim

Formato: (2I10)

4) LE, ITCE (1 linha)

LE - comprimento de flambagem do pilar

ITCE-índice do tipo de condições de apoio nas extremidades do pilar

ITCE = 1 - pilar engastado numa extremidade e livre na outra

ITCE = 2 - pilar simplesmente apoiado

Formato: (F10.0, I10)

5) FC, EPC1, EPCU, EC, ITLC, ITCS, NMC (1 linha)

FC - resistência à compressão do concreto na idade t_o

EPC1 - valor absoluto da deformação do concreto correspondente a -FC

EPCU - valor absoluto da deformação última do concreto

EC - módulo de deformação longitudinal do concreto na idade t_o, tangente na origem.

ITLC - índice do tipo de lei tensão-deformação adotada para o concreto

ITLC = 1 - leis representadas pelos diagramas das figuras IV-5 e IV-7

ITLC = 2 - leis representadas pelos diagramas das figuras IV-6 e IV-8

ITCS - índice do tipo de contorno da seção

ITCS = 1 - contorno retilíneo

ITCS = 2 - contorno curvilíneo

NMC - número de "mesas de concreto"

valor máximo permitido no programa: NMC = 20

Formato: (4F10.0, 3I10)

6) NFM(I), Y1(I), Y2(I), B1(I), B2(I) (NMC linhas)

NFM(I) - número de fibras a considerar na "mesa de concreto" I para a avaliação de integrais sobre a altura da seção pela regra de Simpson

Y1(I) - ordenada da borda inferior da "mesa de concreto" I em relação a uma linha de referência

Y2(I) - ordenada da borda superior da "mesa de concreto" I em relação a uma linha de referência

B1(I) - largura da borda inferior da "mesa de concreto" I

B2(I) - largura da borda superior da "mesa de concreto" I

Formato: (I10, 4F10.0)

7) NLS, ITLS (1 linha)

NLS - número de "leitos de aço"

valor máximo permitido no programa: NLS=10

ITLS - índice do tipo de lei tensão-deformação adotada para o aço

ITLS = 1 - leis representadas pelos diagramas das figuras IV-9 e IV-11

ITLS = 2 - lei representada pelo diagrama da figura IV-12

Formato: (2I10)

8) YS(I), AS(I), SE(I), ES(I), ITS(I) (NLS linhas, no caso de ITLS = 1)

ou

YS(I), AS(I), SE(I), SR(I), ES(I), ITS(I) (NLS linhas, no caso de ITLS = 2)

YS(I) - ordenada do "leito de aço" I em relação a uma linha de referência

AS(I) - área de armadura do "leito de aço" I

SE(I) - tensão de escoamento do aço do "leito de aço" I

SR(I) - tensão de ruptura do aço do "leito de aço" I

ES(I) - módulo de deformação longitudinal do aço do "leito de aço" I

ITS(I) - índice do tipo de aço do "leito de aço" I

ITS(I) = 1 - aço Classe A

ITS(I) = 2 - aço Classe B

Formato: (4F10.0, I10)

ou

(5F10.0, I10)

9) DL0, DLM (1 linha)

DL0 - valor inicial do acréscimo do parâmetro λ

DLM - valor mínimo do acréscimo do parâmetro λ

Formato: (2F10.0)

10) DR01, DRM (1 linha)

DR01 - valor inicial do acréscimo do parâmetro ϕ usado para o ramo ascendente da curva λ - f

DRM - valor mínimo do acréscimo do parâmetro ϕ

Formato: (2F10.0)

11) NSA (1 linha)

NSA - número de sistemas de ações

Formato: (I10)

12) TIT (1 linha)

FPF, FPV, FHV, FWV, EPF, EPV, EA, IDA (1 linha) } NSA vezes

FI (1 linha, no caso de IDA = 0)

TIT - título para o sistema de ações

Formato: (20A4)

FPF - valor fixo da força P

EPF - valor fixo da excentricidade e_P

FPV - constante de proporcionalidade da força P

FHV - constante de proporcionalidade da força H

FWV - constante de proporcionalidade da força w

EPV - constante de proporcionalidade da excentricidade e_P

EA - excentricidade adicional

IDA - índice que informa se o sistema de ações é ou não constituído apenas por ações de curta duração

IDA = 0 - não

IDA = 1 - sim

Formato: (7F10.0, I10)

FI - coeficiente de fluência reduzido

Formato: (F10.0)

13) Para cada pilar devem ser fornecidos os dados dos itens 1 a 12. Terminados os dados, deve haver uma linha com o caracter 0 na coluna 10 ou com 80 caracteres brancos.

AI.2 - EXEMPLO DE ARQUIVO DE DADOS

A título de ilustração, mostra-se a seguir o arquivo de dados para o exemplo nº 3 apresentado no parágrafo VI.3.

```
         1
EXEMPLO DO JAKOBSEN
         1          0
       800.         1
         2.    0.0020     0.0035     2000.          1          1          1
        21       0.0       40.0       40.0       40.0
         2          1
         4.      15.2         42.    21000.          1
        36.      15.2         42.    21000.          1
       0.1    0.0001
    5.E-05    5.E-08
         3
SISTEMA DE ACOES DE CURTA DURACAO
      1280.       0.0       64.0        0.0        0.0        0.0        0.0          1
SISTEMA DE ACOES DE LONGA DURACAO
      1280.       0.0       64.0        0.0        0.0        0.0        0.0          0
      2.18
SISTEMA DE ACOES DE LONGA E CURTA DURACAO
      1280.       0.0       64.0        0.0        0.0        0.0        0.0          0
      1.42
         0
```

AI.3 - SAÍDA DO PROGRAMA

As unidades empregadas são kN e cm.

São impressos:

a) Dados lidos, conhecidos ou computados pelo programa

- Dados referentes à análise do problema
- Características do pilar
- Características físicas do concreto na idade t_o
- Dados para a descrição da seção de concreto
- Características geométricas e físicas das armaduras
- Dados sobre os acréscimos dos parâmetros controlados
- Precisão adotada na determinação das incógnitas
- Dados para a definição do sistema de ações
- Dados para o cálculo dos efeitos da fluência

b) Resultados

Ao fim de cada etapa de cálculo são impressos os valores das ações, esforços e deformações:

- L - parâmetro das ações
- F - flecha máxima do pilar
- esforços na seção mais solicitada do pilar
  EN - esforço normal
  EM1 - momento fletor de primeira ordem
  EM - momento fletor total
- parâmetros de deformação
  Q - deformação ao nível do centro geométrico da seção
  R - curvatura
- deformações na seção

EPS1 - deformação na borda mais comprimida da seção

EPS2 - deformação experimentada pela fibra de concreto situada a $\frac{3}{7}$ h da borda mais comprimida da seção

EPS3 - deformação experimentada pelo "leito de aço" mais tracionado

EPS4 - deformação na borda menos comprimida ou tracionada da seção.

Se for atingido o estado limite último de ruína por ruptura à compressão do concreto ou deformação plástica excessiva da armadura mais tracionada, o programa imprimirá os valores das ações fixas e os valores últimos das ações variáveis, da flecha e do momento de primeira ordem.

Se for atingido o estado limite último de ruína por instabilidade, serão impressos os valores das ações fixas e os valores últimos das ações variáveis, da flecha e do momento de primeira ordem obtidos pela análise e os corrigidos.

Os valores últimos das variáveis são

- FPU e FPUC - valores últimos obtido e corrigido da força P
- FHU e FHUC - valores últimos obtido e corrigido da força H
- FWU e FWUC - valores últimos obtido e corrigido da força w
- E0U e E0UC - valores últimos obtido e corrigido da excentricidade e_o
- FU e FUC - valores últimos obtido e corrigido da flecha f
- EM1U e EM1UC - valores últimos obtido e corrigido do momento M_1

AI.4 - EXEMPLO DE SAÍDA DO PROGRAMA

Para exemplificar, mostra-se a saída do programa para o primeiro sistema de ações analisado no exemplo nº 3 apresentado no parágrafo VI.3.

```
**********************************************************************
*                                                                    *
* COMPORTAMENTO DE UM PILAR DE CONCRETO ARMADO SEGUNDO O METODO DA COLUNA-MODELO *
*                                                                    *
**********************************************************************

    PILAR NUMERO  1

    EXEMPLO DO JAKOBSEN

* DADOS REFERENTES A ANALISE DO PROBLEMA
  ITA = 1
  IFA = 0

* CARACTERISTICAS DO PILAR
  LE =   800,0 CM
  ITCE = 1

* CARACTERISTICAS FISICAS DO CONCRETO NA IDADE T0
  FC = 2,00 KN/CM**2
  EPC1 = 0,002000
  EPCU = 0,003500
  EC = 2000,0 KN/CM**2
  ITLC = 1

* DESCRICAO DA SECAO DE CONCRETO
  NM     NFM     Y1 (CM)     Y2 (CM)     B1 (CM)     B2 (CM)
   1      21        0,0        40,0        40,0        40,0

  YCG =  20,0 CM
  H =  40,0 CM
  AC =  1600,00 CM**2
  IZ =   213333,33 CM**4
  ITCS = 1
```

* CARACTERISTICAS GEOMETRICAS E FISICAS DAS ARMADURAS

NL	YS (CM)	AS (CM**2)	SE (KN/CM**2)	ES (KN/CM**2)	ITS
1	4.0	15.20	42.00	21000.0	1
2	36.0	15.20	42.00	21000.0	1

ITLS = 1

AST = 30.40 CM**2

RO = 0.0190

* INCREMENTOS DO PARAMETRO DAS ACOES L

INCREMENTO INICIAL : DLO = 0.100000000

INCREMENTO MINIMO : DLM = 0.000100000

* INCREMENTOS DO PARAMETRO DE DEFORMACAO R (CURVATURA)

INCREMENTO INICIAL USADO PARA O RAMO ASCENDENTE DA CURVA L * F : DR01 = 0.000050000

INCREMENTO INICIAL USADO PARA O RAMO DESCENDENTE DA CURVA L * F : DR02 = 0.000400000

INCREMENTO MINIMO : DRM = 0.000000050

* PRECISAO ADOTADA NA DETERMINACAO DE DQ, DR E DL

ERRO = 0.000000005

SISTEMA DE ACOES NUMERO 1

SISTEMA DE ACOES DE CURTA DURACAO

* DEFINICAO DO SISTEMA DO SISTEMA DE ACOES

FORCA AXIAL : FPF = 1280,000 KN FPV = 0,000 KN

EXCENTRICIDADE DA FORCA AXIAL : EPF = 0,000 CM EPV = 0,000 CM

EXCENTRICIDADE ADICIONAL : EA = 0,000 CM

FORCA HORIZONTAL CONCENTRADA : FHV = 64,000 KN

FORCA HORIZONTAL DISTRIBUIDA : FWV = 0,000 KN/CM

* ACOES, SOLICITACOES E DEFORMACOES

RAMO ASCENDENTE DA CURVA L * F

L	F (CM)	EN (KN)	EM1 (KN*CM)	EM (KN*CM)	Q	R (CM**(-1))	EPS1	EPS2	EPS3	EPS4
0,00000	0,00	-1280,000	0,000	0,000	-0,000361	0,000000	-0,000361	-0,000361	-0,000361	-0,000361
0,10000	0,38	-1280,000	2560,000	3046,567	-0,000362	0,000006	-0,000481	-0,000379	-0,000267	-0,000243
0,20000	0,76	-1280,000	5120,000	6094,815	-0,000365	0,000012	-0,000603	-0,000399	-0,000175	-0,000127
0,30000	1,15	-1280,000	7680,000	9146,492	-0,000371	0,000018	-0,000729	-0,000422	-0,000085	-0,000013
0,40000	1,60	-1280,000	10240,000	12291,364	-0,000373	0,000025	-0,000874	-0,000444	0,000028	0,000128
0,50000	2,25	-1280,000	12800,000	15685,194	-0,000357	0,000035	-0,001062	-0,000458	0,000206	0,000347
0,60000	3,13	-1280,000	15360,000	19365,937	-0,000318	0,000049	-0,001296	-0,000458	0,000464	0,000660
0,70000	4,20	-1280,000	17920,000	23292,108	-0,000261	0,000066	-0,001573	-0,000449	0,000738	0,001050
0,80000	5,44	-1280,000	20480,000	27446,226	-0,000196	0,000085	-0,001897	-0,000439	0,001165	0,001505
0,90000	6,91	-1280,000	23040,000	31889,130	-0,000125	0,000108	-0,002286	-0,000434	0,001603	0,002035
0,92500	7,31	-1280,000	23680,000	33041,261	-0,000108	0,000114	-0,002394	-0,000435	0,001720	0,002177
0,93750	7,52	-1280,000	24000,000	33621,870	-0,000100	0,000117	-0,002449	-0,000436	0,001779	0,002249
0,94063	7,57	-1280,000	24080,000	33767,528	-0,000098	0,000118	-0,002463	-0,000436	0,001794	0,002267
0,94219	7,59	-1280,000	24120,000	33840,435	-0,000097	0,000119	-0,002470	-0,000436	0,001801	0,002276
0,94297	7,61	-1280,000	24140,000	33876,908	-0,000097	0,000119	-0,002473	-0,000435	0,001805	0,002281
0,94375	7,64	-1280,000	24160,000	33937,098	-0,000097	0,000119	-0,002484	-0,000438	0,001813	0,002290
0,94453	7,70	-1280,000	24180,000	34033,223	-0,000099	0,000120	-0,002504	-0,000443	0,001826	0,002307
0,94531	7,76	-1280,000	24200,000	34132,461	-0,000101	0,000121	-0,002526	-0,000447	0,001839	0,002324

0,94609	7,82	-1280,000	24220,000	34235,292	-0,000103	0,000122	-0,002648	-0,000452	0,001853	0,002342
0,94638	7,89	-1280,000	24240,000	34342,334	-0,000105	0,000123	-0,002672	-0,000458	0,001868	0,002361
0,94766	7,96	-1280,000	24260,000	34454,396	-0,000108	0,000124	-0,002697	-0,000463	0,001883	0,002381
0,94844	8,04	-1280,000	24280,000	34572,601	-0,000111	0,000126	-0,002623	-0,000470	0,001900	0,002402
0,94922	8,12	-1280,000	24300,000	34698,547	-0,000114	0,000127	-0,002652	-0,000476	0,001917	0,002425
0,95000	8,21	-1280,000	24320,000	34834,692	-0,000117	0,000128	-0,002684	-0,000484	0,001936	0,002450
0,95078	8,32	-1280,000	24340,000	34985,155	-0,000122	0,000130	-0,002721	-0,000493	0,001957	0,002477
0,95156	8,44	-1280,000	24360,000	35157,932	-0,000127	0,000132	-0,002763	-0,000504	0,001982	0,002509
0,95195	8,51	-1280,000	24370,000	35257,896	-0,000130	0,000133	-0,002788	-0,000510	0,001996	0,002528
0,95202	8,52	-1280,000	24371,638	35275,534	-0,000131	0,000133	-0,002793	-0,000511	0,001999	0,002531

* ACOES E SOLICITACOES CORRESPONDENTES AO ESTADO LIMITE ULTIMO DE RUINA POR INSTABILIDADE

VALORES OBTIDOS	VALORES CORRIGIDOS
FPU = 1280,000 KN	FPU = 1280,000 KN
EOU = 0,0 CM	EOUC = 0,0 CM
EA = 0,0 CM	EA = 0,0 CM
FU = 8,5 CM	FUC = 7,5 CM
FMU = 60,929 KN	FMUC = 64,068 KN
FAU = 0,000 KN/CM	FAUC = 0,000 KN/CM
EM1U = 24371,638 KN*CM	EM1UC = 25627,209 KN*CM

RAMO DESCENDENTE DA CURVA L * F

L	F (CM)	EN (KN)	EM1 (KN*CM)	EM (KN*CM)	Q	R (CM**(-1))	EPS1	EPS2	EPS3	EPS4
0,87794	10,12	-1280,000	22475,285	35427,181	-0,000032	0,000158	-0,003194	-0,000483	0,002498	0,003131
0,84001	10,92	-1280,000	21504,164	35480,060	0,000018	0,000171	-0,003394	-0,000470	0,002747	0,003430
0,82068	11,32	-1280,000	21009,310	35497,206	0,000045	0,000177	-0,003492	-0,000460	0,002875	0,003582
0,81947	11,34	-1280,000	20978,356	35498,252	0,000047	0,000177	-0,003498	-0,000459	0,002883	0,003592
0,81916	11,35	-1280,000	20970,517	35498,513	0,000047	0,000177	-0,003499	-0,000459	0,002885	0,003594

* ACOES E SOLICITACOES CORRESPONDENTES AO ESTADO LIMITE ULTIMO DE RUINA POR RUPTURA À COMPRESSAO DO CONCRETO

FPU = 1280,000 KN

EOU = 0,0 CM

EA = 0.6 CM

FU = 11.3 CM

FHU = 52.427 KN

FWU = 0.000 KN/CM

EM1U = 20970.617 KN*CM

APÊNDICE II

LISTAGEM DO PROGRAMA COLMOD

```
 $ RESET LIST
 $ RESET SEQ
 $ RESET FREE
FILE  5(KIND=PACK,PACKNAME="PACK",TITLE="DATA/COLMOD",FILETYPE=7)
FILE  6(KIND=PRINTER)
C  ********************************************************************
C
C      PROGRAMA COLMOD
C
C  *  PROGRAMA PARA DETERMINACAO DA CAPACIDADE PORTANTE DE PILARES DE
C   CONCRETO ARMADO PELO METODO DA COLUNA-MODELO
C
C  ********************************************************************
      REAL IZ,LE
      COMMON/ZERO/LEI,IMP
      COMMON/UM/FC,EPC1,EPCU,EC,FI,ITLC
      COMMON/DOIS/SE(10),SR(10),ES(10),ITS(10),ITLS
      COMMON/TRES/H,YCG,EATO,EITO,ITCS,NMC,NFM(20),Y1(20),Y2(20),B1(20),
     *B2(20),NLS,YS(10),AS(10)
      COMMON/QUATRO/LE,FPF,FPV,FHV,FNV,EPF,EPV,EA,DL0,DLN,DR01,DR02,DRM,
     *ITA,IFA,ITCE
      COMMON/CINCO/ERRO
      DIMENSION TIT(20)
      DATA LEI,IMP/5,6/
C...LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS
C...NUMERO DO PILAR
   10 READ(LEI,1001)NP
 1001 FORMAT(I10)
      IF(NP.EQ.0)STOP
C...TITULO
      WRITE(IMP,1097)
 1097 FORMAT('1')
      WRITE(IMP,1098)
 1098 FORMAT(3X,'*****************************************************
     ****************************')
      WRITE(IMP,1099)
 1099 FORMAT(3X,'*
     *                                *')
      WRITE(IMP,1100)
 1100 FORMAT(3X,'* COMPORTAMENTO DE UM PILAR DE CONCRETO ARMADO SEGUNDO...
     *O METODO DA COLUNA-MODELO *')
      WRITE(IMP,1099)
      WRITE(IMP,1098)
      WRITE(IMP,1101)NP
 1101 FORMAT(///7X,'PILAR NUMERO ',I2)
C...TITULO
      READ(LEI,1002)TIT
 1002 FORMAT(20A4)
      WRITE(IMP,1102)TIT
 1102 FORMAT(///7X,20A4)
C...DADOS REFERENTES A ANALISE DO PROBLEMA
      READ(LEI,1003)ITA,IFA
 1003 FORMAT(2I10)
      WRITE(IMP,1103)ITA,IFA
 1103 FORMAT(///3X,'* DADOS REFERENTES A ANALISE DO PROBLEMA*
     *        //5X,'ITA = ',I1//5X,'IFA = ',I1)
C...CARACTERISTICAS DO PILAR
      READ(LEI,1004)LE,ITCE
```

```
 1004 FORMAT(F10.0,I10)
      WRITE(IMP,1104)LE,ITCE
 1104 FORMAT(///5X,'* CARACTERISTICAS DO PILAR'
     *       //5X,'LE = ',F7.1,' CM'//5X,'ITCE = ',I1)
C...CARACTERISTICAS FISICAS DO CONCRETO NA IDADE T0
      READ(LEI,1005)FC,EPC1,EPCU,EC,ITLC,ITCS,NMC
 1005 FORMAT(4F10.0,3I10)
      WRITE(IMP,1105)FC,EPC1,EPCU,EC,ITLC
 1105 FORMAT(///3X,'* CARACTERISTICAS FISICAS DO CONCRETO NA IDADE T0'
     *       //5X,'FC = ',F4.2,' KN/CM**2'//5X,'EPC1 = ',F8.6
     *       //5X,'EPCU = ',F8.6          //5X,'EC = ',F6.1,' KN/CM**2'
     *       //5X,'ITLC = ',I1)
C...DESCRICAO DA SECAO DE CONCRETO
      WRITE(IMP,1106)
 1106 FORMAT(///3X,'* DESCRICAO DA SECAO DE CONCRETO'
     *       //5X,'NM',5X,'NFM',5X,'Y1 (CM)',5X,'Y2 (CM)',5X,'B1 (CM)',
     *         5X,'B2 (CM)')
C.....DETERMINACAO DA AREA, DO MOMENTO DE INERCIA E DA POSICAO DO CENTRO
C.....GEOMETRICO DA SECAO DE CONCRETO
      AC=0.
      IZ=0.
      YAC=0.
      DO 20 I=1,NMC
      READ(LEI,1006)NFM(I),Y1(I),Y2(I),B1(I),B2(I)
 1006 FORMAT(I10,4F10.0)
      WRITE(IMP,1107)I,NFM(I),Y1(I),Y2(I),B1(I),B2(I)
 1107 FORMAT(/5X,I2,6X,I2,6X,F5.1,7X,F5.1,2(7X,F5.1))
      AUX1=(B1(I)+B2(I))*(Y2(I)-Y1(I))/2.
      AC=AC+AUX1
      AUX2=(3.*B1(I)+B2(I))*Y1(I)*Y1(I)+2.*(B1(I)+B2(I))*Y1(I)*Y2(I)+
     *(B1(I)+3.*B2(I))*Y2(I)*Y2(I)
      IZ=IZ+AUX2*(Y2(I)-Y1(I))/12.
      AUX3=Y1(I)+(B1(I)+2.*B2(I))/(B1(I)+B2(I))*(Y2(I)-Y1(I))/3.
      YAC=YAC+AUX1*AUX3
   20 CONTINUE
      YCG=YAC/AC
      IZ=IZ-AC*YCG*YCG
      H=Y2(NMC)-Y1(1)
      EATO=EC/(1.+FI)*AC
      EITO=EC/(1.+FI)*IZ
      WRITE(IMP,1108)YCG,H,AC,IZ,ITCS
 1108 FORMAT(//5X,'YCG = ',F5.1,' CM'  //5X,'H = ',F5.1,' CM'
     *       //5X,'AC = ',F6.2,' CM**2'//5X,'IZ = ',F11.2,' CM**4'
     *       //5X,'ITCS = ',I1)
C...CARACTERISTICAS GEOMETRICAS E FISICAS DAS ARMADURAS
      READ(LEI,1003)NLS,ITLS
      WRITE(IMP,1109)
 1109 FORMAT(///3X,'* CARACTERISTICAS GEOMETRICAS E FISICAS DAS ARMADURA
     *S')
C.....DETERMINACAO DA TAXA GEOMETRICA DE ARMADURA
      AST=0.
      GO TO (30,50) ITLS
   30 WRITE(IMP,1110)
 1110 FORMAT(/5X,'NL',5X,'YS (CM)',5X,'AS (CM**2)',5X,'SE (KN/CM**2)',
     *       5X,'ES (KN/CM**2)',5X,'ITS')
      DO 40 I=1,NLS
      READ(LEI,1007)YS(I),AS(I),SE(I),ES(I),ITS(I)
 1007 FORMAT(4F10.0,I10)
```

```
      IF(ITS(I).EQ.1)GO TO 38
C.....OBTENCAO DA TENSAO CORRESPONDENTE A EPS=0.010 PELO METODO DE
C.....NEWTON-RAPHSON
      SIG=1.15*SE(I)
   35 AUX1=SIG/SE(I)-0.7
      AUX2=AUX1*AUX1*AUX1*AUX1
      EPS=SIG/ES(I)+0.823*AUX1*AUX2
      IF(ABS(EPS-0.010).LE.1.E-04)GO TO 37
      AUX3=1./ES(I)+4.115*AUX2/SE(I)
      SIG=SIG+(0.010-EPS)/AUX3
      GO TO 35
   37 SR(I)=SIG
   38 WRITE(IMP,1111)I,YS(I),AS(I),SE(I),ES(I),ITS(I)
 1111 FORMAT(/5X,I2,6X,F5.1,8X,F5.2,12X,F5.2,12X,F7.1,9X,I1)
      AUX1=YCG-YS(I)
      AST=AST+AS(I)
      EATO=EATO+ES(I)*AS(I)
      EITO=EITO+ES(I)*AS(I)*AUX1*AUX1
   40 CONTINUE
      GO TO 70
   50 WRITE(IMP,1112)
 1112 FORMAT(/5X,'NL',5X,'YS (CM)',5X,'AS (CM**2)',5X,'SE (KN/CM**2)',
     *       5X,'SR (KN/CM**2)',5X,'ES (KN/CM**2)',5X,'ITS')
      DO 60 I=1,NLS
      READ(LEI,1008)YS(I),AS(I),SE(I),SR(I),ES(I),ITS(I)
 1008 FORMAT(5F10.0,I10)
      WRITE(IMP,1113)I,YS(I),AS(I),SE(I),SR(I),ES(I),ITS(I)
 1113 FORMAT(/5X,I2,6X,F5.1,8X,F5.2,12X,F5.2,13X,F5.2,12X,F7.1,9X,I1)
      AUX1=YCG-YS(I)
      AST=AST+AS(I)
      EATO=EATO+ES(I)*AS(I)
      EITO=EITO+ES(I)*AS(I)*AUX1*AUX1
   60 CONTINUE
   70 RO=AST/AC
      WRITE(IMP,1114)ITLS,AST,RO
 1114 FORMAT(//5X,'ITLS = ',I1 //5X,'AST = ',F5.2,' CM**2'
     *       //5X,'RO = ',F6.4)
C...INCREMENTOS DOS PARAMETROS CONTROLADOS
      READ(LEI,1009)DL0,DLM
 1009 FORMAT(2F10.0)
      WRITE(IMP,1115)DL0,DLM
 1115 FORMAT(///3X,'* INCREMENTOS DO PARAMETRO DAS ACOES L*
     *       //5X,'INCREMENTO INICIAL : DL0 = ',F11.9
     *       //5X,'INCREMENTO MINIMO : DLM = ',F11.9)
      READ(LEI,1009)DR01,DRM
      DR02=4.E-04
      WRITE(IMP,1116)DR01,DR02,DRM
 1116 FORMAT(///3X,'* INCREMENTOS DO PARAMETRO DE DEFORMACAO R (CURVATUR
     *A)'      //5X,'INCREMENTO INICIAL USADO PARA O RAMO ASCENDENTE DA C
     *URVA L * F : DR01 = ',F11.9
     *       //5X,'INCREMENTO INICIAL USADO PARA O RAMO DESCENDENTE DA
     *CURVA L * F : DR02 = ',F11.9
     *       //5X,'INCREMENTO MINIMO : DRM = ',F11.9)
C...PRECISAO ADOTADA NA DETERMINACAO DE DQ, DR E DL
      ERRO=5.E-09
      WRITE(IMP,1117)ERRO
 1117 FORMAT(///3X,'* PRECISAO ADOTADA NA DETERMINACAO DE DQ, DR E DL*
     *       //5X,'ERRO = ',F11.9)
```

```
C...NUMERO DE SISTEMAS DE ACOES A ANALISAR
      READ(LEI,1001)NSA
      DO 90 I=1,NSA
      WRITE(IMP,1118)I
 1118 FORMAT('1',6X,'SISTEMA DE ACOES NUMERO',I2)
C...TITULO
      READ(LEI,1002)TIT
      WRITE(IMP,1102)TIT
C...DEFINICAO DO SISTEMA DE ACOES
      READ(LEI,1010)FPF,FPV,FHV,FWV,EPF,EPV,EA,IDA
 1010 FORMAT(7F10.0,I10)
      WRITE(IMP,1119)FPF,FPV,EPF,EPV,EA,FHV,FWV
 1119 FORMAT(///5X,'* DEFINICAO DO SISTEMA DO SISTEMA DE ACOES*
     *          //5X,'FORCA AXIAL : FPF = ',F9.3,' KN',5X,'FPV = ',F9.3,'
     *KN'       //5X,'EXCENTRICIDADE DA FORCA AXIAL : EPF = ',F7.3,' CM',
     *            5X,'EPV = ',F7.3,' CM'
     *          //5X,'EXCENTRICIDADE ADICIONAL : EA = ',F7.3,' CM'
     *          //5X,'FORCA HORIZONTAL CONCENTRADA : FHV = ',F9.3,' KN'
     *          //5X,'FORCA HORIZONTAL DISTRIBUIDA : FWV = ',F9.3,' KN/CM'
     *)
      IF(IDA.EQ.1)GO TO 30
C.....DADO PARA O CALCULO DOS EFEITOS DA FLUENCIA
      READ(LEI,1011)FI
 1011 FORMAT(F10.0)
      WRITE(IMP,1120)FI
 1120 FORMAT(///3X,'* DADO PARA O CALCULO DOS EFEITOS DA FLUENCIA'
     *          //5X,'FI = ',F4.2)
   80 CALL ETAPA
   90 CONTINUE
      GO TO 10
      END
```

```
C   ***********************************************************************
C
      SUBROUTINE ETAPA
C
C   *  ADOTA UM INCREMENTO PARA O PARAMETRO CONTROLADO, CHAMA A SUBROTINA
C    ADEQUADA QUE DETERMINA OS VALORES DAS INCOGNITAS E AVALIA ACOES, SO-
C    LICITACOES E DEFORMACOES CORRESPONDENTES A CADA ETAPA
C
C   ***********************************************************************
      REAL LE,L
      COMMON/ZERO/LEI,IMP
      COMMON/UM/FC,EPC1,EPCU,EC,FI,ITLC
      COMMON/DOIS/SE(10),SR(10),ES(10),ITS(10),ITLS
      COMMON/TRES/H,YCG,EATO,EITO,ITCS,NMC,NFM(20),Y1(20),Y2(20),B1(20),
     *B2(20),NLS,YS(10),AS(10)
      COMMON/QUATRO/LE,FPF,FPV,FMV,FNV,EPF,EPV,EA,DL0,DLM,DR01,DR02,DRM,
     *ITA,IFA,ITCE
C...INICIALIZACAO
      NET=0
      L=0.
      FP=0.
      FM=0.
      FN=0.
      EP=EPF
      N=0.
      R=0.
      F=0.
C...CONTROLANDO O PARAMETRO DAS ACOES (L)
      INC2=1
      INC3=1
      INC4=1
      IF(FPF.EQ.0.)GO TO 10
      DL=0.
      DFP=FPF
      DFM=0.
      DFN=0.
      DEP=0.
      GO TO 30
   10 DL=DL0
C.....CALCULO DE UMA ETAPA
   20 DFP=FPV*DL
      DFM=FMV*DL
      DFN=FNV*DL
      DEP=EPV*DL
   30 D1=-DFP
      D2=DFN*LE*LE/8.+DFM*LE/2.+DFP*(EP+F)+FP*DEP
      IF(NET.NE.0)GO TO 35
      DQ=D1/EATO
      DR=D2/EITO
   35 CALL INCRE1(D1,D2,FP,DFP,Q,R,NET,DQ,DR,INC1)
      GO TO (40,50) INC1
   40 F=LE*LE/10.*(R+DR)
      GO TO 110
   50 IF(NET.EQ.0.AND.FPF.NE.0.)GO TO 190
   60 DL=DL/2.
      IF(DL.GE.DLM)GO TO 20
C...CONTROLANDO A CURVATURA (R)
```

```
      INC2=2
      INC3=1
      DR=SIGN(1.,EM1)*DR01
      GO TO 80
   70 IF(IFA.EQ.1)RETURN
      INC4=2
      WRITE(IMP,1200)
 1200 FORMAT(///5X,'RAMO DESCENDENTE DA CURVA L * F')
      WRITE(IMP,1101)
      DR=SIGN(1.,EM1)*DR02
C.....CALCULO DE UMA ETAPA
   80 F=LE*LE/10.*(R+DR)
      FMVE=FWV*LE*LE/8.+FHV*LE/2.+FPV*(EP+F)+FP*EPV
      CALL INCRE2(FMVE,FP,Q,R,DR,INC4,DL,DQ,INC1)
      GO TO (90,100) INC1
   90 DFP=FPV*DL
      DFH=FHV*DL
      DFW=FWV*DL
      DEP=EPV*DL
      GO TO 110
  100 DR=DR/2.
      IF(ABS(DR).GE.DRM)GO TO 80
      GO TO (150,180) INC3
C...CALCULO DE DEFORMACOES EM QUATRO NIVEIS DA SECAO
  110 IF(D2.LT.0.)GO TO 115
      EPS1=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-Y2(NMC))
      EPS2=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-(Y2(NMC)-3./7.*H))
      EPS3=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-YS(1))
      EPS4=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-Y1(1))
      GO TO 120
  115 EPS1=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-Y1(1))
      EPS2=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-(Y1(1)+3./7.*H))
      EPS3=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-YS(NLS))
      EPS4=(Q+DQ)+(R+DR)*(YCG-Y2(NMC))
C...TESTE PARA VERIFICAR SE FOI ULTRAPASSADO O ESTADO LIMITE ULTIMO DE
C...RUINA POR RUPTURA A COMPRESSAO DO CONCRETO OU DEFORMACAO PLASTICA
C...EXCESSIVA DA ARMADURA MAIS TRACIONADA
  120 IF(EPS4.LE.0.)GO TO 125
      IF(EPS1.GE.-0.0035*(1.+FI).AND.EPS3.LE.0.010)GO TO 140
      GO TO 130
  125 IF(EPS2.GE.-0.0020*(1.+FI))GO TO 140
  130 IF(NET.EQ.0.AND.FPF.NE.0.)GO TO 200
      INC3=2
      GO TO (60,100) INC2
C...CALCULO DAS ACOES, SOLICITACOES E PARAMETROS DE DEFORMACOES AO FIM
C...DE CADA ETAPA
  140 NET=NET+1
      L=L+DL
      FP=FP+DFP
      FH=FH+DFH
      FW=FW+DFW
      EP=EP+DEP
      EN=-FP
      EM1=FW*LE*LE/8.+FH*LE/2.+FP*EP
      EM=EM1+FP*F
      Q=Q+DQ
      R=R+DR
      IF(NET.NE.1)GO TO 143
```

```
      WRITE(IMP,1100)
 1100 FORMAT(///3X,'* ACOES, SOLICITACOES E DEFORMACOES*
     *         //5X,'RAMO ASCENDENTE DA CURVA L * F ')
      WRITE(IMP,1101)
 1101 FORMAT(/9X,'L',5X,'F (CM)',4X,'EN (KN)',2X,'EM1 (KN*CM)',
     *         3X,'EM (KN*CM)',6X,'Q',6X,'R (CM**(-1))',5X,'EPS1',
     *         7X,'EPS2',7X,'EPS3',7X,'EPS4')
  143 IF(NET.EQ.2.AND.EM1.GT.0..AND.F.LT.0..OR.NET.EQ.2.AND.EM1.LT.0..
     *AND.F.GT.0.)GO TO 200
      WRITE(IMP,1102)L,F,EN,EM1,EM,Q,R,EPS1,EPS2,EPS3,EPS4
 1102 FORMAT(/5X,F9.5,3X,F5.2,2X,F9.3,2(2X,F11.3),2X,F9.6,3X,F9.6,4X,
     *          F9.6,3(2X,F9.6))
      IF(INC3.EQ.2)GO TO (60,100) INC2
      IF(NET.EQ.1.AND.FPF.NE.0.)GO TO 10
      GO TO (20,60) INC2
C...APLICACAO DO FATOR CORRETIVO AOS VALORES DAS ACOES E SOLICITACOES
C...CORRESPONDENTES AO ESTADO LIMITE ULTIMO DE RUINA POR INSTABILIDADE
  150 E0=EP-EA
      ALFA1=-FW*LE*LE/32./EM1
      IF(ITCE.EQ.2)ALFA1=-ALFA1
      ALFA2=FP*EP/EM1
      ALFAC=1./6.-ALFA1/1.2-ALFA2/2.4
      FUC=F*(1.-EM1/EM*ALFAC)
      GO TO (160,170) ITA
C.....CASO DE FORCA AXIAL FIXADA
  160 CC=1.+(1.-EM1/EM)*ALFAC
      EPUC=EP*CC
      E0UC=EPUC-EA
      FHUC=FH*CC
      FWUC=FW*CC
      EM1UC=EM1*CC
      WRITE(IMP,1103)FP,FP,E0,E0UC,EA,EA,F,FUC,FH,FHUC,FW,FWUC,EM1,EM1UC
 1103 FORMAT(///3X,'* ACOES E SOLICITACOES CORRESPONDENTES AO ESTADO LIM
     *ITE ULTIMO DE RUINA'/5X,'POR INSTABILIDADE'//7X,'VALORES OBTIDOS',
     *T52,'VALORES CORRIGIDOS'
     *         //5X,'FPU = ',F9.3,' KN',      T50,'FPU = ',F9.3,' KN'
     *         //5X,'E0U = ',F5.1,' CM',      T50,'E0UC = ',F5.1,' CM'
     *         //5X,'EA = ',F5.1,' CM',       T50,'EA = ',F5.1,' CM'
     *         //5X,'FU = ',F5.1,' CM',       T50,'FUC = ',F5.1,' CM'
     *         //5X,'FHU = ',F9.3,' KN',      T50,'FHUC = ',F9.3,' KN'
     *         //5X,'FWU = ',F9.3,' KN/CM',   T50,'FWUC = ',F9.3,' KN/CM'
     *         //5X,'EM1U = ',F11.3,' KN*CM',T50,'EM1UC = ',F11.3,' KN*CM
     *')
      GO TO 70
C.....CASO DE EXCENTRICIDADE DE PRIMEIRA ORDEM FIXADA
  170 CC=1.-EM1/EM*(1.-EM1/EM)*ALFAC
      FPUC=FP/CC
      FHUC=FH/CC
      FWUC=FW/CC
      EM1UC=EM1/CC
      WRITE(IMP,1104)FP,FPUC,E0,E0,EA,EA,F,FUC,FH,FHUC,FW,FWUC,EM1,EM1UC
 1104 FORMAT(///3X,'* ACOES E SOLICITACOES CORRESPONDENTES AO ESTADO LIM
     *ITE ULTIMO DE RUINA'/5X,'POR INSTABILIDADE'//7X,'VALORES OBTIDOS',
     *T52,'VALORES CORRIGIDOS'
     *         //5X,'FPU = ',F9.3,' KN',      T50,'FPUC = ',F9.3,' KN'
     *         //5X,'E0U = ',F5.1,' CM',      T50,'E0U = ',F5.1,' CM'
     *         //5X,'EA = ',F5.1,' CM',       T50,'EA = ',F5.1,' CM'
     *         //5X,'FU = ',F5.1,' CM',       T50,'FUC = ',F5.1,' CM'
```

```
     *         //5X,'FHU = ',F9.3,' KN',      T50,'FHUC = ',F9.3,' KN'
     *         //5X,'FWU = ',F9.3,' KN/CM',   T50,'FWUC = ',F9.3,' KN/CM'
     *         //5X,'EM1U = ',F11.3,' KN*CM',T50,'EM1UC = ',F11.3,' KN*CM
     *')
      GO TO 70
C...VERIFICACAO DO TIPO DE RUINA QUE OCORRE NA SECAO
  180 WRITE(IMP,1105)
 1105 FORMAT(///3X,'* ACOES E SOLICITACOES CORRESPONDENTES AO ESTADO LIM
     *ITE ULTIMO DE RUINA')
      IF(EPS4.LE.0.)GO TO 187
      IF(ABS(EPS3-0.010).LE.1.E-06)GO TO 185
  183 IF(ABS(EPS1+0.0035*(1.+FI)).LE.1.E-06)GO TO 187
      GO TO 189
  185 WRITE(IMP,1106)
 1106 FORMAT(5X,'POR DEFORMACAO PLASTICA EXCESSIVA DA ARMADURA MAIS TRAC
     *IONADA')
      GO TO 183
  187 WRITE(IMP,1107)
 1107 FORMAT(5X,'POR RUPTURA A COMPRESSAO DO CONCRETO')
  189 E0=EP-EA
      WRITE(IMP,1108)FP,E0,EA,F,FH,FW,EM1
 1108 FORMAT(/5X,'FPU = ',F9.3,' KN'      //5X,'E0U = ',F5.1,' CM'
     *       //5X,'EA = ',F5.1,' CM'      //5X,'FU = ',F5.1,' CM'
     *       //5X,'FHU = ',F9.3,' KN'     //5X,'FWU = ',F9.3,' KN/CM'
     *       //5X,'EM1U = ',F11.3,' KN*CM')
      RETURN
C...IMPRESSAO DE MENSAGENS
  190 WRITE(IMP,2100)
 2100 FORMAT(///3X,'* O PROCESSO NAO CONVERGIU PARA OS INCREMENTOS DE ES
     *FORCOS INICIAIS')
      RETURN
  200 WRITE(IMP,3100)
 3100 FORMAT(///3X,'* A FORCA AXIAL E SUPERIOR A CAPACIDADE DE CARGA DA
     *SECAO TRANSVERSAL NA COMPRESSAO CENTRADA')
      RETURN
      END
```

```
C  ***********************************************************************
C
      SUBROUTINE INCRE1(D1,D2,FP,DFP,Q,R,NET,DQ,DR,INC1)
C
C  *  CALCULA OS INCREMENTOS DOS PARAMETROS DE DEFORMACAO Q E R CORRES-
C   PONDENTES A CADA ETAPA
C
C  ***********************************************************************
      REAL LE
      COMMON/QUATRO/LE
      COMMON/CINCO/ERRO,NITMAX
C...DADOS
      NITMAX=10
      IF(NET.EQ.0.AND.FPF.NE.0.)NITMAX=50
C...INICIALIZACAO
      NIT=0
      DQI=DQ
      DRI=DR
C...DETERMINACAO ITERATIVA DE DQ E DR
   10 NIT=NIT+1
C.....TESTE PARA VERIFICAR SE FOI ULTRAPASSADO O NUMERO MAXIMO TOLERAVEL
C.....DE ITERACOES
      IF(NIT.GT.NITMAX)GO TO 30
      CALL SEC(Q,R,DQI,DRI,S1,S2,S3)
      S3=S3-(FP+DFP)*LE*LE/10.
      DETER=S1*S3-S2*S2
      S1=S1/DETER
      S2=-S2/DETER
      S3=S3/DETER
      DQC=S3*D1+S2*D2
      DRC=S2*D1+S1*D2
C.....TESTE PARA VERIFICACAO DA CONVERGENCIA DO PROCESSO ITERATIVO
      IF(ABS(DQC-DQI).LT.ERRO.AND.ABS(DRC-DRI).LT.ERRO)GO TO 20
      DQI=DQC
      DRI=DRC
      GO TO 10
C...HOUVE CONVERGENCIA DO PROCESSO
   20 INC1=1
      DQ=DQC
      DR=DRC
      RETURN
C...NAO HOUVE CONVERGENCIA DO PROCESSO APOS NITMAX ITERACOES
   30 INC1=2
      RETURN
      END
```

```
C   ***********************************************************************
C
      SUBROUTINE INCRE2(FMVE,FP,Q,R,DR,INC4,DL,DQ,INC1)
C
C   *  CALCULA OS INCREMENTOS DO PARAMETRO DAS ACOES L E DO PARAMETRO DE
C    DEFORMACAO Q CORRESPONDENTES A CADA ETAPA
C
C   ***********************************************************************
      REAL LE
      COMMON/QUATRO/LE,FPF,FPV
      COMMON/CINCO/ERRO,NITMAX
C...INICIALIZACAO
      NIT=0
      DQI=DQ
      DLI=DL
C...DETERMINACAO ITERATIVA DE DQ E DL
   10 NIT=NIT+1
      IF(LE.EQ.0..OR.INC4.EQ.2)GO TO 15
C.....TESTE PARA VERIFICAR SE FOI ULTRAPASSADO O NUMERO MAXIMO TOLERAVEL
C.....DE ITERACOES
      IF(NIT.GT.NITMAX)GO TO 30
   15 CALL SEC(Q,R,DQI,DR,S1,S2,S3)
      DETER=-(S1*FMVE+S2*FPV)
      T1=-FMVE/DETER
      T2=-FPV/DETER
      T3=-S2/DETER
      T4=S1/DETER
      S3=S3-FP*LE*LE/10.
      D1=-S2*DR
      D2=-S3*DR
      DQC=T1*D1+T2*D2
      DLC=T3*D1+T4*D2
      IF(DLC.LT.0..AND.INC4.EQ.1.AND.NIT.GE.3)GO TO 30
C.....TESTE PARA VERIFICACAO DA CONVERGENCIA DO PROCESSO ITERATIVO
      IF(ABS(DQC-DQI).LT.ERRO.AND.ABS(DLC-DLI).LT.ERRO)GO TO 20
      DQI=DQC
      DLI=DLC
      GO TO 10
C...HOUVE CONVERGENCIA DO PROCESSO
   20 INC1=1
      IF(DLC.LT.0..AND.INC4.EQ.1)GO TO 30
      DQ=DQC
      DL=DLC
      RETURN
C...NAO HOUVE CONVERGENCIA DO PROCESSO APOS NITMAX ITERACOES OU FOI DO-
C...TIDO UM DL NEGATIVO ANTES DE SE DESEJAR CONHECER O RAMO DESCENDENTE
C...DA CURVA L * F
   30 INC1=2
      RETURN
      END
```

```
C   ***********************************************************************
C
      SUBROUTINE SEC(Q,R,DQ,DR,S1,S2,S3)
C
C   *  AVALIA OS ELEMENTOS DA MATRIZ (S) DA SECAO TRANSVERSAL A CADA ITE-
C    RACAO
C
C   ***********************************************************************
      COMMON/UM/FC,EPC1,EPCU,EC,FI,ITLC
      COMMON/DOIS/SE(10),SR(10),ES(10),ITS(10),ITLS
      COMMON/TRES/H,YCG,EATO,EITO,ITCS,NMC,NFM(20),Y1(20),Y2(20),B1(20),
     *B2(20),NLS,YS(10),AS(10)
C...INICIALIZACAO
      S1=0.
      S2=0.
      S3=0.
C...AVALIACAO DA CONTRIBUICAO DOS VARIOS LEITOS DE ACO
      DO 10 J=1,NLS
      YF=YCG-YS(J)
      CALL DEFOR(Q,R,DQ,DR,YF,EP1,EP2)
      SI1=SS(EP1,J)
      SI2=SS(EP2,J)
      E=(SI2-SI1)/(EP2-EP1)
      DA=AS(J)
      EDA=E*DA
      S1=S1+EDA
      S2=S2+EDA*YF
      S3=S3+EDA*YF*YF
   10 CONTINUE
C...AVALIACAO DA CONTRIBUICAO DA SECAO DE CONCRETO PELA REGRA DE SIMPSON
      GO TO (20,40) ITCS
C.....SECAO DE CONTORNO RETILINEO
   20 DO 30 J=1,NMC
      CF=1.
      DH=(Y2(J)-Y1(J))/(NFM(J)-1)
      Y=Y1(J)-DH
      DO 30 K=1,NFM(J)
      Y=Y+DH
      YF=YCG-Y
      CALL DEFOR(Q,R,DQ,DR,YF,EP1,EP2)
      SI1=SC(EP1)
      SI2=SC(EP2)
      E=(SI2-SI1)/(EP2-EP1)
      CF=1.-CF
      COEF=2.*(1.+CF)
      IF((K-1)*(K-NFM(J)))28,27,28
   27 COEF=1.
   28 B=B1(J)+(B2(J)-B1(J))*(Y-Y1(J))/(Y2(J)-Y1(J))
      DA=B*DH*COEF/3.
      EDA=E*DA
      S1=S1+EDA
      S2=S2+EDA*YF
      S3=S3+EDA*YF*YF
   30 CONTINUE
      RETURN
C.....SECAO DE CONTORNO CURVILINEO
   40 CF=0.
```

```
      DO 50 J=1,NMC-1
      DH=Y2(J)-Y1(J)
      Y=Y2(J)
      YF=YCG-Y
      CALL DEFOR(Q,R,DQ,DR,YF,EP1,EP2)
      SI1=SC(EP1)
      SI2=SC(EP2)
      E=(SI2-SI1)/(EP2-EP1)
      CF=1.-CF
      COEF=2.*(1.+CF)
      B=B2(J)
      DA=B*DH*COEF/3.
      EDA=E*DA
      S1=S1+EDA
      S2=S2+EDA*YF
      S3=S3+EDA*YF*YF
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C     ******************************************************************************
C
      SUBROUTINE DEFOR(G,R,DG,DR,YF,EP1,EP2)
C
C     *  CALCULA AS DEFORMACOES EP1 E EP2 APRESENTADAS POR UMA FIBRA DA SE-
C      CAO
C
C     ******************************************************************************
      EP1=G+R*YF
      EP2=(G+DG)+(R+DR)*YF
      DEP=EP2-EP1
      IF(ABS(DEP).GT.1.E-10)RETURN
      EP2=EP1+SIGN(1.,DEP)*1.E-08
      RETURN
      END
```

```
C  ************************************************************************
C
      FUNCTION SC(EP)
C
C  *  CALCULA A TENSAO NUMA FIBRA DE CONCRETO
C
C  ************************************************************************
      COMMON/UM/FC,EPC1,EPCU,EC,FI,ITLC
      IF(EP)20,10,10
   10 SC=0.
      RETURN
   20 EPC=ABS(EP)
      RN=EPC/(EPC1*(1.+FI))
      GO TO (30,40) ITLC
C...PRIMEIRO TIPO DE LEI (DIAGRAMA PARABOLA-RETANGULO)
   30 IF(EPC.GE.EPC1*(1.+FI))GO TO 35
      SC=-FC*(2.*RN-RN*RN)
      RETURN
   35 SC=-FC
      RETURN
C...SEGUNDO TIPO DE LEI
   40 RK=1.1*EC*EPC1/FC
      SC=-FC*(RK*RN-RN*RN)/(1.+(RK-2.)*RN)
      RETURN
      END
```

```
C   ***********************************************************************
C
      FUNCTION SS(EP,I)
C
C   *  CALCULA A TENSAO NUM LEITO DE ACO
C
C   ***********************************************************************
      COMMON/DOIS/SE(10),SR(10),ES(10),ITS(10),ITLS
      EPS=ABS(EP)
      ESS=ES(I)
      GO TO (10,20) ITS(I)
C...ACO CLASSE A
   10 SIS1=SE(I)
      EPS1=SIS1/ESS
      IF(EPS.GT.EPS1)GO TO 15
      SS=ESS*EP
      RETURN
   15 SS=SIGN(1.,EP)*SIS1
      RETURN
C...ACO CLASSE B
   20 GO TO (30,40) ITLS
C...PRIMEIRO TIPO DE LEI
   30 SIS1=0.7*SE(I)
      SIS2=0.9*SE(I)
      SIS3=SE(I)
      SIS4=SR(I)
      EPS1=SIS1/ESS
      EPS2=SIS2/ESS+0.00026336
      EPS3=SIS3/ESS+0.002
      EPS4=0.010
      IF(EPS.GT.EPS1)GO TO 35
      SS=ESS*EP
      RETURN
   35 IF(EPS.GT.EPS2)GO TO 37
      ESS=(SIS2-SIS1)/(EPS2-EPS1)
      SS=SIGN(1.,EP)*(SIS1+ESS*(EPS-EPS1))
      RETURN
   37 IF(EPS.GT.EPS3)GO TO 39
      ESS=(SIS3-SIS2)/(EPS3-EPS2)
      SS=SIGN(1.,EP)*(SIS2+ESS*(EPS-EPS2))
      RETURN
   39 ESS=(SIS4-SIS3)/(EPS4-EPS3)
      SS=SIGN(1.,EP)*(SIS3+ESS*(EPS-EPS3))
      RETURN
C...SEGUNDO TIPO DE LEI
   40 SIS1=0.6*SE(I)
      SIS2=SR(I)
      EPS1=SIS1/ESS
      IF(EPS.GT.EPS1)GO TO 45
      SS=ESS*EP
      RETURN
   45 SS=SIGN(1.,EP)*(SIS2-(SIS2-SIS1)*(SIS2-SIS1)/(SIS2-2.*SIS1+ESS*EPS
     *))
      RETURN
      END
```

NOMENCLATURA

Letras romanas maiúsculas

A_c - área da seção transversal geométrica do pilar de concreto armado

A_s - área total de armadura

$A_{s,j}$ - área de armadura da fibra de aço j

D', D" - determinantes

E_c, E_s - módulos de deformação longitudinal tangente na origem, respectivamente, do concreto e do aço

$E_{c,k}$ - módulo "corda" de deformação longitudinal na fibra k de concreto

$E_{s,j}$ - módulo "corda" de deformação longitudinal na fibra j de aço

EA - rigidez axial

EI - rigidez à flexão

H - força horizontal concentrada

I_{zc} - momento de inércia da seção transversal geométrica do pilar de concreto armado em relação ao eixo z que passa pelo centro geométrico

M - momento fletor externo total (momento total solicitante calculado a partir das ações e da flecha) na seção transversal mais solicitada

M_i - momento fletor interno (momento resultante das tensões) na seção transversal mais solicitada

M_1 - momento fletor externo de primeira ordem (momento solicitante calculado a partir das ações) na seção transversal mais solicitada

M_2 - momento fletor externo de segunda ordem (momento solicitante calculado a partir da carga axial e da flecha) na seção transversal mais solicitada

N - esforço normal externo (esforço normal solicitante calculado a partir da carga axial) na seção transversal mais solicitada

N_c - parcela, devida ao concreto, da capacidade de carga da seção transversal de concreto armado na compressão centrada

N_i - esforço normal interno (força resultante das tensões) na seção transversal mais solicitada

P - carga axial

P_f - valor fixo da carga axial

$[S]$ - matriz que relaciona os acréscimos dos esforços aos acréscimos dos parâmetros de deformação

Z - momento estático da área do diagrama de momentos de primeira ordem em relação ao topo da coluna-modelo

Letras romanas minúsculas

$b_{c,k}$ - largura da seção transversal ao nível da fibra k de concreto

c_E, c_H, c_P, c_W - constantes de proporcionalidade das ações e_P, H, P e w, respectivamente

e - excentricidade externa total; $e = M/P$

e_a - excentricidade adicional da carga axial

e_i - excentricidade interna; $e_i = -M_i/N_i$

e_f - valor fixo da excentricidade e_P

e_w - excentricidade devida à força horizontal w

e_H - excentricidade devida à força horizontal H

e_P - soma de e_o e e_a

e_o - excentricidade da carga axial

e_1 - excentricidade de primeira ordem

e_2 - excentricidade de segunda ordem

f - flecha máxima do pilar

f_c - resistência à compressão do concreto

f_{se} - tensão de escoamento do aço

$f_{s\ell}$ - tensão-limite de proporcionalidade do aço

f_{sr} - tensão de ruptura do aço

h - altura total da seção transversal

i_c - raio de giração da seção transversal geométrica do pilar de concreto armado em relação ao eixo z que passa pelo centro geométrico

ℓ - comprimento do pilar

ℓ_e - comprimento de flambagem do pilar

$\frac{1}{r}$ - curvatura na seção mais solicitada

t - idade

t_o - idade quando da aplicação do primeiro sistema de ações

v - deslocamento transversal ou flecha

w - força horizontal uniformemente distribuída

x, y - coordenadas

Letras gregas

α, β - coeficientes que traduzem a relação entre os esforços de primeira ordem devidos, respectivamente, às ações de longa duração e à totalidade das ações

α_1, α_2 - coeficientes que caracterizam o diagrama de momentos de primeira ordem

α_c - fator corretivo

Δ variável- acréscimo da variável

δ - erro

ε_{cg} - deformação longitudinal ao nível do centro geométrico da seção

$\varepsilon_{c,k}$ - deformação de uma fibra k de concreto

ε_{cl} - valor absoluto da deformação correspondente a $-f_c$

ε_{cu} - valor absoluto da deformação última do concreto

$\varepsilon_{s,j}$ - deformação de uma fibra j de aço

ε_{se} - deformação correspondente a f_{se}

$\varepsilon_{s\ell}$ - deformação correspondente a $f_{s\ell}$

λ - índice de esbeltez

μ - momento total relativo

μ_1 - momento relativo de primeira ordem

μ_2 - momento relativo de segunda ordem

ν - esforço normal relativo

$\sigma_{c,k}$ - tensão numa fibra k de concreto

$\sigma_{s,j}$ - tensão numa fibra j de aço

ϕ - curvatura

φ - coeficiente de fluência

φ^* - coeficiente de fluência reduzido

$\frac{1}{\rho}$ - curvatura numa seção qualquer

ω - taxa mecânica de armadura

Índices

C - curta duração; ex.: M_{1C}, P_C etc

L - longa duração; ex.: M_{1L}, P_L etc

c - valor corrigido; ex.: f_c, M_{1c}, P_c etc

et - número da etapa

it - número da iteração

u - valor último correspondente à ruína por ruptura à compressão do concreto ou deformação plástica excessiva da armadura mais tracionada; ex.: P_u, H_u etc

u0 - valor último correspondente à flambagem em curta duração; ex.: P_{u0}, H_{u0} etc

ul - valor último correspondente à flambagem por fluência; ex.: P_{ul}, H_{ul} etc

u2 - valor último correspondente à flambagem em curta duração após um período de ações de longa duração; ex.: P_{u2}, H_{u2} etc

u∞ - valor último correspondente à flambagem por fluência num tempo $t_u = \infty$; ex.: $P_{u\infty}$, $H_{u\infty}$ etc.