ANÁLISE LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

José Antonio Soares Prestes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada:

Sydney Martins Gomes dos Santos
(Presidente)

Dirceu Velloso

Jayme Mason

Paulo de Alcântara Gomes

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1983

PRESTES, JOSÉ ANTONIO SOARES

Análise Linear de Estruturas Planas com Elementos de Paredes Delgadas (Rio de Janeiro), 1983.

xi, 147 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Torção Não-uniforme e Análise de Estruturas

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sydney M. G. dos Santos, pela valiosa orientação.

Aos Professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE, pelos preciosos ensinamentos transmitidos durante o curso de Pós-Graduação.

Aos colegas da COPPE: Eliane Maria L. Carvalho, Vanderlei Tizatto, J. Luciano de S. Menezes e Léa M. Troina, pela amizade e interesse demonstrados.

Aos Professores do Departamento de Engenharia Civil da UFV, pelo apoio para a conclusão deste trabalho. Especialmente aos Professores Jafar Untar e Márcio S. S. Moreira.

À Maria do Carmo S. Valente, pelo apoio e incentivo recebido.

À CNEN e à CAPES, pelo auxílio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste na análise estática-linear de estruturas planas com elementos prismáticos de paredes delgadas, a que anexa-se um programa computacional para uso em projetos.

Considera-se o empenamento da seção transversal das peças estruturais como um novo tipo de grau de liberdade da mesma. A este deslocamento associa-se um esforço correspondente - o bimomento. Discute-se esse esforço como um hiperestático a mais, obtendo-se as relações necessárias para a instituição das equações do método de análise.

Três exemplos foram estudados. O primeiro - viga biengastada - foi comparado com os resultados conhecidos da teoria de tal peça. Nos outros dois - grelha e pórtico plano - os esforços e as tensões foram confrontados com os resultados obtidos no método de análise que admite peças com comportamento plano das seções transversais.

SUMMARY

This work consists in the linear static analysis of plane structures composed of thin-walled prismatic members. A computer program for design use was developed.

The warping of the cross section is considered as a new degree-of-freedom and the corresponding action is the bi-moment. Considering this force as a new redundant force, the necessary relations to set up the equations of the method of analysis are derived.

Three examples were analised. The first one - fixed-end beam - was compared with known results of this beam theory. In the other two examples - grid and plane frame - the internal forces and the stresses were compared with results obtained with a method of analysis that considers members with plane behaviour of cross section.

NOTAÇÕES

VALORES RELATIVOS À SEÇÃO TRANSVERSAL

y, z = eixos principais de inércia

s = coordenada curvilínea medida na linha média da seção

ω = área setorial principal (tendo como polo o centro de cisalhamento C e como origem um ponto tal que $\int_S \omega \cdot dS = 0$)

C = centro de cisalhamento

G = centro de gravidade

$S = A_x$ = área da seção transversal

I_y, I_z = momentos principais de inércia em relação aos eixos y e z

I_ω = momento de inércia setorial principal

$J_t = I_x$ = constante de torção

$\bar{E}_y, \bar{E}_z$ = momentos estáticos da parte da seção acima do ponto analisado, em relação aos eixos y e z

$\bar{E}_\omega$ = momento estático setorial da parte da seção acima do ponto considerado, relativo à área setorial principal

b_i, t_i = comprimento e espessura do trecho i que compõem a seção

VALORES RELATIVOS AO ELEMENTO

ℓ = comprimento

x = eixo dos baricentros

x' = eixo dos centros de cisalhamento

j, k = nó inicial e nó final

i = número do elemento

a, b = posição das cargas

VALORES CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL

E = módulo de elasticidade longitudinal

G = módulo de elasticidade transversal

ESFORÇOS

N = esforço normal

Q_y, Q_z = esforços cortantes

T = momento torsor total

T_s = momento torsor de Saint Venant

T_ω = momento de flexo-torção

M_y, M_z = momentos fletores

B = bimomento

CARGAS

n = força normal distribuída

q_y, q_z = cargas transversais distribuídas

m_t = momento torsor distribuído

m_{ω} = bimomento distribuído

m_y, m_z = momentos fletores distribuídos

OBS.: As cargas concentradas têm a mesma notação dos esforços

DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

u = deslocamento longitudinal

v, w = deslocamentos transversais

ϕ = ângulo de torção

ϕ' = rotação unitária de torção

ϵ = deformação longitudinal

TENSÕES

σ = tensão normal

τ = tensão tangencial

τ_s = tensão tangencial na torção devida a T_s

τ_{ω} = tensão tangencial na torção devida a T_{ω}

INDICE

Pág.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

I.1 - Generalidades 1

I.2 - Torção Não-Uniforme 2

I.3 - Relações Fundamentais para Elementos de Paredes Delgadas 7

CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO MATRICIAL DO MÉTODO DE ANÁLISE 11

II.1 - Introdução 11

II.2 - Matriz de Rigidez do Elemento 12

II.3 - Vetores de Cargas 21

II.4 - Cálculo dos Resultados 27

CAPÍTULO III - ESTRUTURA DO PROGRAMA 29

III.1 - Introdução 29

III.2 - Entrada de Dados da Estrutura 34

III.3 - Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura . . . 39

III.4 - Entrada de Dados dos Carregamentos e Geração das Matrizes de Cargas 40

III.5 - Cálculo e Saída de Resultados 43

III.6 - Limitações do Programa 45

CAPÍTULO IV - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 47

IV.I - Viga Biengastada 47

IV.2 - Grelha 52

IV.3 - Pórtico Plano 58

IV.4 - Conclusões 67

APÊNDICE A - OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ PARA A TORÇÃO NÃO-UNIFORME 68

APÊNDICE B - OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSFERÊNCIA DE CARGAS PARA A TORÇÃO NÃO UNIFORME 78

APÊNDICE C - TRAÇADO DOS DIAGRAMAS DE SOLICITAÇÕES PARA A TORÇÃO NÃO-UNIFORME 97

APÊNDICE D - ENTRADA DE DADOS E SAÍDA DE RESULTADOS . . . 103

APÊNDICE E - LISTAGEM DO PROGRAMA 125

BIBLIOGRAFIA 145

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - GENERALIDADES

Muitas estruturas em engenharia podem ser representadas por um conjunto de elementos prismáticos que se interceptam em determinados pontos (nós), estando o movimento de corpo rígido impedido pelos apoios. Estas são as chamadas "Estruturas Reticuladas".

Entre os diversos métodos de análise estática-linear, o dos deslocamentos (método da rigidez) é muito difundido, devido principalmente à facilidade no manuseio de suas equações. Com a ajuda da álgebra linear ele se torna altamente eficiente para ser utilizado em computadores.

Normalmente os programas computacionais para a análise de estruturas reticuladas não consideram o empenamento da seção transversal. Estes programas tratam os elementos como barras maciças, admitindo que suas seções permanecem planas após a deformação. No caso de seção cheia esta hipótese é válida pois, embora ocorra o empenamento, ele será de efeito localizado, de acordo com o princípio de Saint Venant.

Quando as peças que constituem a estrutura forem de paredes delgadas, suas seções empenarão. O fenômeno pode se estender ao longo de todo o comprimento das mesmas e conseqüente

mente não deve ser tratado como um efeito localizado. Portanto, na análise de tais estruturas, o empenamento tem que ser considerado como um deslocamento a mais que a seção transversal pode sofrer. Para introduzir este novo grau de liberdade recorre-se à Teoria dos Elementos de Paredes Delgadas [11, 15].

O programa de análise estrutural desenvolvido aqui trata de peças prismáticas de paredes delgadas com seção aberta. O método utilizado é tão exato quanto os já implementados para estruturas reticuladas [2, 9]. Com exceção de considerações referentes à deformação da ligação de duas ou mais barras, as simplificações introduzidas são decorrentes das hipóteses básicas da teoria dos elementos de paredes delgadas.

I.2 - TORÇÃO NÃO-UNIFORME

As fórmulas apresentadas neste item foram desenvolvidas na sua forma mais completa por V. S. Vlasov [15]. A dedução destas relações foi abordada por vários autores [3, 5, 11, 17], sendo desnecessário o desenvolvimento da mesma aqui.

Para o elemento da Figura 1, submetido à torção pura, a hipótese das seções planas não é válida. Ao longo da linha média da seção transversal aparecem deslocamentos axiais que constituem o chamado "empenamento" da peça. Para determinar es

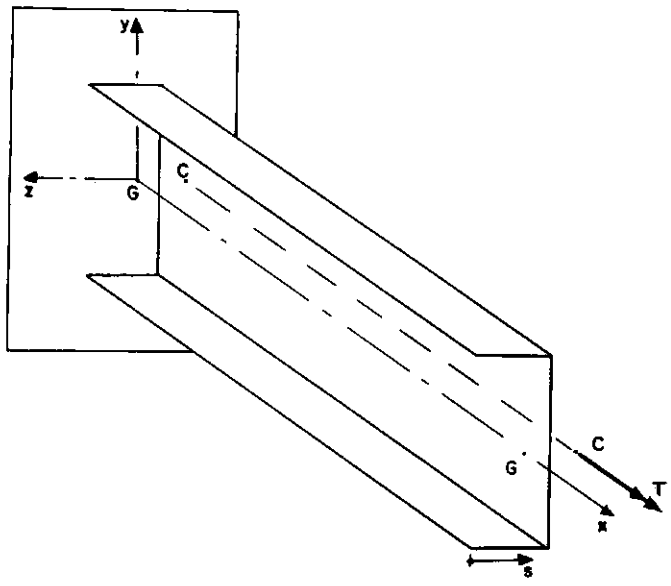


Figura I.1 - Peça submetida à torção pura

tes deslocamentos utilizam-se 2(duas) hipóteses simplificadoras:

- após a deformação do elemento, a seção transversal permanece indeformada no seu próprio plano;

- as distorções da superfície média da peça são nulas.

Baseado nestas duas hipóteses obtém-se:

$$u(s, x) = -\phi' \cdot \omega \qquad (I.1)$$

onde,

u = deslocamento axial de um ponto da seção transversal;

s = coordenada curvilínea que define a posição do ponto na linha média da seção;

$\phi'(x)$ = rotação unitária de torção;

$\omega(s)$ = área setorial principal da seção.

Quando a rotação unitária de torção ϕ' variar ao longo do eixo do elemento, por restrição ao empenamento ou por variação do momento torsor, os deslocamentos axiais u sofrerão alterações que ocasionarão o surgimento de tensões normais σ, ocorrendo a chamada "torção não-uniforme". As deformações e as tensões axiais que surgem são dadas por

$$\varepsilon(s, x) = \frac{\partial u}{\partial x} = -\phi'' \cdot \omega \qquad (I.2)$$

$$\sigma(s, x) = E \cdot \varepsilon = -\phi'' \cdot \omega \cdot E \qquad (I.3)$$

Chamaremos de "bimomento" à seguinte grandeza:

$$B(x) = \int_S \sigma \cdot \omega \cdot dS = -\phi'' \cdot E \cdot I_\omega \qquad (I.4)$$

onde,

$I_\omega = \int_S \omega^2 \cdot dS$ é o momento de inércia setorial principal, da da seção transversal.

O bimomento é uma solicitação com dimen-

são $F.L^2$, que origina tensões normais auto-equilibradas na seção transversal.

Comparando as Eqs. (I.3) e (I.4) chega-se a

$$\sigma\ (s,\ x) \ = \ \frac{B\ .\ \omega}{I_{\omega}} \qquad (I.5)$$

que é análoga à equação das tensões normais na flexão simples. Da Equação (I.5) pode-se ver que um bimomento é positivo quando, num ponto da seção, causa tensão normal de mesmo sinal que a área setorial.

O surgimento de tensões normais variando ao longo do eixo do elemento implicará no aparecimento de tensões tangenciais secundárias τ_{ω}, que se distribuem uniformemente na espessura da seção, e que são dadas por

$$\tau_{\omega}\ (s,\ x) \ = \ \frac{E}{t}\ .\ \overline{E}_{\omega}\ .\ \phi''' \qquad (I.6)$$

onde,

t = a espessura da seção analisada;

$\overline{E}_{\omega}\ (s)$ = o momento setorial estático do trecho da seção acima da coordenada s.

As tensões τ_{ω} são devidas ao chamado "momento de flexo-torção" T_{ω}, o qual é obtido por

$$T_\omega = \frac{dB}{dx} = -E \cdot I_\omega \cdot \phi''' \qquad (I.7)$$

Substituindo na Eq. (I.6) chega-se a uma fórmula análoga à das tensões de cisalhamento na flexão simples

$$\tau_\omega = - \frac{T_\omega \cdot \overline{E}_\omega}{t \cdot I_\omega} \qquad (I.8)$$

Na torção não-uniforme continuam válidas as equações da torção uniforme, desde que o momento torsor T seja substituído por um "momento torsor de Saint Venant" T_s, menor que T,

$$T_s = G \cdot J_t \cdot \phi' \qquad (I.9)$$

$$\tau_s = \frac{T_s \cdot t}{J_t} \qquad (I.10)$$

sendo,

$$J_t = \frac{1}{3} \Sigma \; b_i \cdot t_i^3$$

onde,

b_i e t_i são, respectivamente, o comprimento e a espessura dos diversos trechos que compõem a seção transversal.

A distribuição das tensões que atuam num ponto qualquer da seção, quando ocorre torção não-uniforme, estão indi-

cadas na Figura I.2.

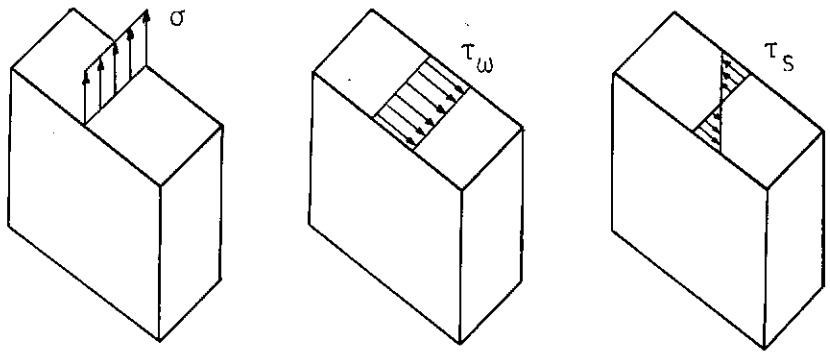


Figura I.2 - Tensões na torção não uniforme

A soma do momento torsor de Saint Venant T_s e do momento de flexo-torção T_ω, em qualquer seção do elemento, será igual ao momento torsor T. Daí tem-se:

$$T = T_s + T_\omega = G \cdot J_t \cdot \phi' - E \cdot I_\omega \cdot \phi''' \qquad (I.11)$$

I.3 - RELAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

Na Figura I.3 está representado um elemento de paredes delgadas sujeito a um carregamento genérico. Os eixos principais de inércia da seção estão representados por y e z. O eixo x contém os centros de gravidade G da seção transversal da peça e o eixo x', paralelo a x, contém os centros de cisalhamento C. Os sentidos das cargas e dos esforços extremos são considerados positivos.

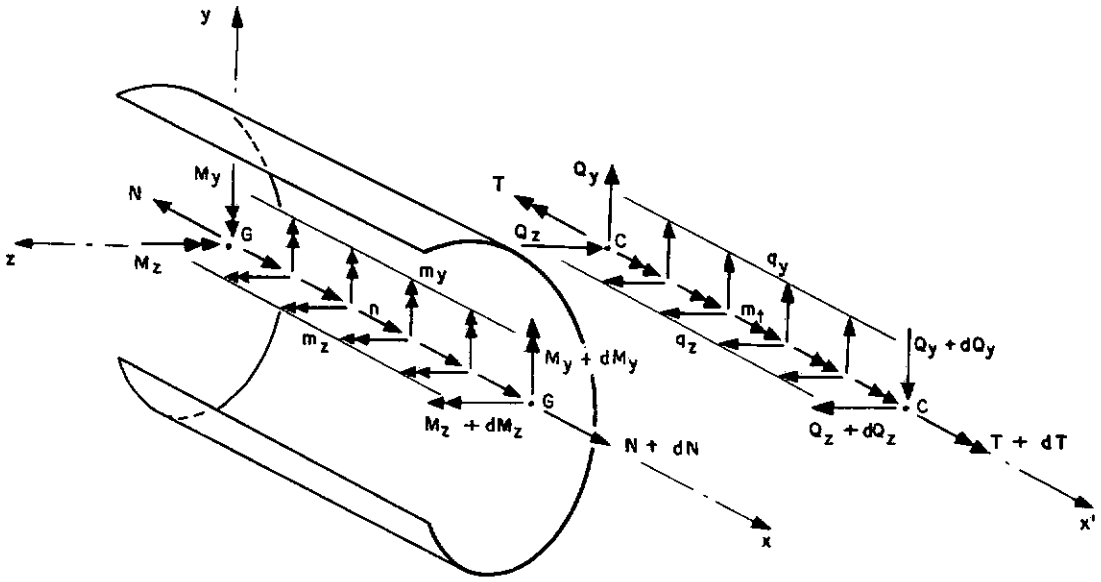


Figura I.3 - Cargas e esforços num elemento de paredes delgadas

No elemento da Figura I.3 a força axial N e os momentos fletores M_y e M_z estão atuando no centro de gravidade G, enquanto que o momento torsor T e os esforços cortantes Q_y e Q_z atuam no centro de cisalhamento C.

Os esforços que atuam na peça constituem quatro estados de solicitações independentes. Estes estados são: o carregamento longitudinal, a flexão no plano xy, a flexão no plano xz e a torção. Os três primeiros estados são bem conhecidos da Resistência dos Materiais, tendo as seguintes equações de equilíbrio:

$$E \cdot S \cdot u_o'' = -n \qquad (I.12)$$

$$E \cdot I_z \cdot v^{iv} = q_y - m_z' \qquad (I.13)$$

$$E \cdot I_y \cdot w^{iv} = q_z + m'_y \qquad (I.14)$$

onde,

u_o, v e w são os deslocamentos lineares do ponto C, na direção dos eixos x, y e z, respectivamente.

A equação de equilíbrio da torção é obtida por:

$$\frac{dT}{dx} = -m_t$$

que, junto com a Eq. (I.11), dará;

$$E \cdot I_\omega \cdot \phi^{iv} - G \cdot J_t \cdot \phi'' = m_t \qquad (I.15)$$

A equação acima define o problema da torção não-uniforme numa peça de paredes delgadas com seção transversal aberta. As Eqs. (I.12) a (I.15), associadas às condições de contorno apropriadas, possibilitam a determinação dos coeficientes de rigidez do elemento, os quais serão utilizados na análise da estrutura.

A análise estrutural dará como resultados os esforços extremos nas várias peças que compõem a estrutura. De posse deles podemos calcular as solicitações ao longo do elemento e, posteriormente, determinar as tensões normal e tangencial em qualquer ponto da seção transversal. A obtenção destas tensões é feita pelas fórmulas:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{B \cdot \omega}{I_\omega} \qquad (I.15)$$

$$\tau = - \frac{Q_y \cdot \bar{E}_z}{I_z \cdot t} + \frac{Q_z \cdot \bar{E}_y}{I_y \cdot t} + \frac{T_s \cdot t}{J_t} + \frac{T_\omega \cdot \bar{E}_\omega}{I_\omega \cdot t}$$

(I.16)

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO MATRICIAL DO MÉTODO DE ANÁLISE

II.1 - INTRODUÇÃO

O método utilizado na análise de estruturas com elementos de paredes delgadas é análogo ao método da rigidez empregado por vários autores [2, 9, 16] no estudo de estruturas reticuladas planas com peças de seção cheia. Porém, para considerar barras de paredes delgadas, é necessário introduzir um novo grau de liberdade - o empenamento da seção transversal - correspondente a um outro tipo de ação - o bimomento. Outra diferença é que, embora a estrutura seja plana, será permitido carregamento em qualquer direção. Por exemplo, num pórtico admitem-se cargas perpendiculares ao seu próprio plano. Com exceção destas 2 diferenças o processo de análise desenvolvido aqui é idêntico ao método da rigidez convencional para estruturas planas.

As peças que compõem a estrutura devem ter comportamento linear a fim de que seja válido o princípio da superposição dos efeitos. Elas devem também ser retilíneas, prismáticas, de paredes delgadas e com seção transversal aberta. Mais ainda, devem estar rigidamente ligadas entre si, de modo que todos os elementos que chegam a um nó tenham os mesmos deslocamentos neste ponto. Uma aproximação introduzida no método de análise é a consideração de que todos os elementos que concorrem num ponto sofrem o mesmo empenamento. Este procedimento é adotado por diversos autores [7, 8, 10], embora não exista um consenso quanto

à sua validade. Apenas no caso de vigas contínuas com seção constante pode-se afirmar que ele é exato.

Para a estrutura ser considerada plana deve ter os eixos dos centros de cisalhamento de suas peças contidos num mesmo plano - plano de cisalhamento. Além disso um dos planos principais de cada elemento deve estar contido no plano de cisalhamento ou num paralelo a este. Se as 2 condições não forem atendidas ocorrerá que, num determinado nó, não haverá a interseção dos eixos dos centros de cisalhamento ou dos eixos dos centros de gravidade das barras que chegam no nó.

A seguir são apresentadas as diversas matrizes necessárias para a análise estrutural, assim como as equações matriciais que compõem o método.

II.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Para uma estrutura plana, sujeita a um carregamento qualquer, há 7(sete) graus de liberdade (deslocamentos) por nó. A cada um deles corresponde um esforço (ação) que atua na mesma direção. Um elemento genérico "i" limitado pelos nós "j" e "k" tem 14 deslocamentos, associados à 14 ações, nas suas extremidades. Na Figura II.1 estão indicadas as 14 direções, consideradas positivas, dos deslocamentos e das ações nos extremos do elemento i.

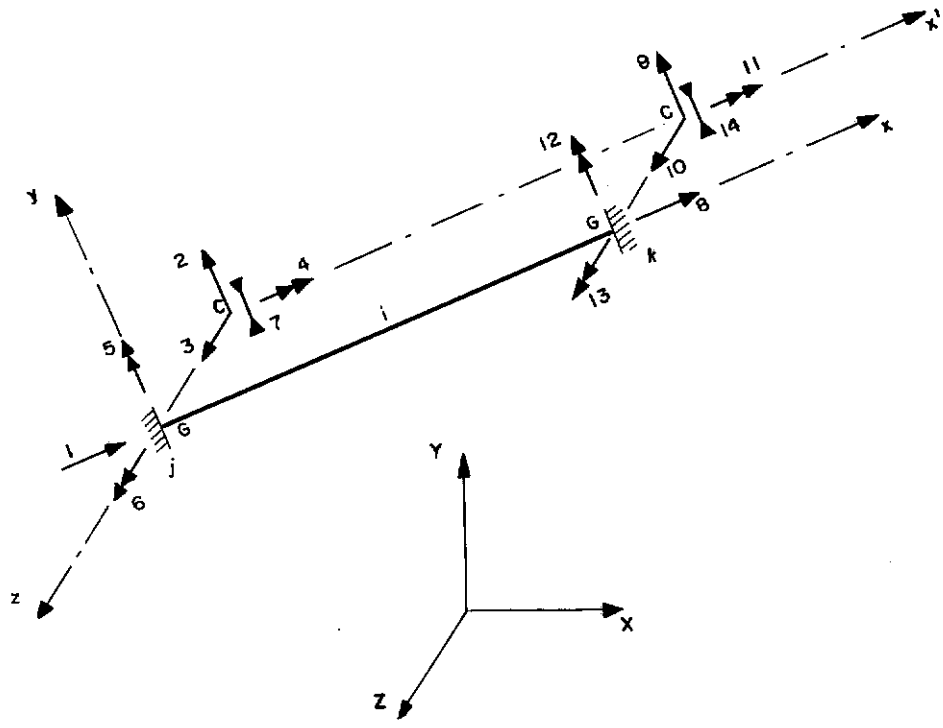


Figura II.1 - Direções dos deslocamentos e das ações extremas num elemento

O sistema de eixos ortogonais xyz é chamado "sistema de coordenadas local" pois está orientado de acordo com o elemento. O eixo x contém os centros de gravidade da peça (x' contém os centros de cisalhamento); y e z são os eixos principais da seção transversal. O plano xy coincide com XY (plano da estrutura) e o eixo z aponta para fora deste plano, sendo paralelo a Z. Os eixos X, Y e Z constituem o sistema de coordenadas global, que indica a direção dos deslocamentos e das ações na estrutura como um todo.

O vetor de deslocamentos das extremidades do elemento i, DE_i, na direção do sistema de coordenadas local, é

$$\mathbf{DE}_i = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{14}\}$$

ou

$$\mathbf{DE}_i = \{u_j, v_j, w_j, \phi_j, w'_j, v'_j, \phi'_j, u_k, v_k, w_k, \phi_k, w'_k, v'_k, \phi'_k\} \quad (II.1)$$

As ações nas extremidades do elemento i estão contidas no vetor $\mathbf{AE}_i$, associado a $\mathbf{DE}_i$:

$$\mathbf{AE}_i = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{14}\}$$

ou

$$\mathbf{AE}_i = \{N_j, Q_{y_j}, Q_{z_j}, T_j, M_{y_j}, M_{z_j}, B_j, N_k, Q_{y_k}, Q_{z_k}, T_k, M_{y_k}, M_{z_k}, B_k\} \quad (II.2)$$

A relação entre $\mathbf{AE}_i$ e $\mathbf{DE}_i$ é dada pela matriz de rigidez do elemento i, $\mathbf{RE}_i$. Os coeficientes que constituem essa matriz representam as ações exercidas pelos engastes extremos quando são impostos deslocamentos unitários a cada extremidade da peça. Estes deslocamentos unitários são considerados como produzidos um de cada vez enquanto os demais se mantêm nulos. A equação que relaciona os esforços aos deslocamentos é, então,

$$\mathbf{AE}_i = \mathbf{RE}_i \cdot \mathbf{DE}_i \quad (II.3)$$

Para determinar os coeficientes de rigidez utilizam-se as equações de equilíbrio (I.12) a (I.15) juntamente com

as condições de contorno impostas. Como há 4 estados de solicitações independentes pode-se analisar separadamente cada um deles. Os coeficientes correspondentes às cargas axiais, à flexão no plano xy e à flexão no plano xz são bem conhecidos [2, 9]. Os demais, devidos à torção não-uniforme, são obtidos mediante a introdução dos deslocamentos unitários na Eq. (I.15). Fazendo-se, por exemplo, $\phi_j = 1$ e mantendo os outros deslocamentos nulos obtêm-se

$$r_{4,4} = \frac{G \cdot I_x}{K} \cdot \gamma \cdot \operatorname{sh} \gamma \ell \qquad \text{(a)}$$

$$r_{7,4} = \frac{G \cdot I_x}{K} \cdot (\operatorname{ch} \gamma \ell - 1) \qquad \text{(b)}$$

$$r_{11,4} = -\frac{G \cdot I_x}{K} \cdot \gamma \cdot \operatorname{sh} \gamma \ell \qquad \text{(c)}$$

$$r_{14,4} = \frac{G \cdot I_x}{K} \cdot (\operatorname{ch} \gamma \ell - 1) \qquad \text{(d)}$$

onde,

$$\gamma = \sqrt{\frac{G \cdot I_x}{E \cdot I_\omega}}$$

e

$$K = 2 \cdot (1 - \operatorname{ch} \gamma \ell) + \gamma \ell \cdot \operatorname{sh} \gamma \ell$$

sendo,

"ℓ" o comprimento do elemento,

"E" e "G" os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material

I_x ($=J_t$) a constante de torção da peça

I_ω o momento setorial de inércia principal

O coeficiente de rigidez $r_{14,4}$, por exemplo, representa o bimomento que aparece no nó k quando é dado um giro $\phi = 1$ no nó j. A determinação dos coeficientes de rigidez (a) a (d) e dos demais, para a torção não-uniforme, é dada no Apêndice A.

A matriz de rigidez do elemento i está na Figura II.2. As constantes que ainda não foram definidas são a área da seção transversal "A_x" e momentos de inércia principais em relação aos eixos y e z, "I_y" e "I_z".

A matriz $\mathbf{RE}_i$ foi desenvolvida em relação ao sistema de coordenadas local porque isto faz com que a obtenção dos coeficientes de rigidez seja mais simples. Porém os eixos x e y não coincidem necessariamente com os eixos X e Y da estrutura. Como um coeficiente de rigidez em qualquer nó da estrutura é composto pela contribuição dos diversos elementos que concorrem neste nó, é preciso transformar cada rigidez das peças para a direção dos eixos da estrutura. Esta transformação é efetuada por

$$
\begin{bmatrix}
\frac{E.Ax}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E.Ax}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12.E.Iz}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.Iz}{\ell^3} & 0 & 0 & -\frac{12.E.Iz}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.Iz}{\ell^2} & 0 \\
 & & \frac{12.E.Iy}{\ell^3} & 0 & -\frac{6.E.Iy}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12.E.Iy}{\ell^3} & 0 & -\frac{6.E.Iy}{\ell^2} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{G.Ix}{K}.\gamma.sh\,\gamma\ell & 0 & 0 & \frac{G.Ix}{K}.(ch\gamma\ell-1) & 0 & 0 & 0 & -\frac{G.Ix}{K}.\gamma.sh\gamma\ell & 0 & 0 & \frac{G.Ix}{K}.(ch\gamma\ell-1) \\
 & & & & \frac{4.E.Iy}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6.E.Iy}{\ell^2} & 0 & \frac{2.E.Iy}{\ell} & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{4E.Iz}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{6.E.Iz}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2.E.Iz}{\ell} & 0 \\
 & & & & & & \frac{G.Ix}{k.\gamma}(\gamma\ell.ch\gamma\ell-sh\gamma\ell) & 0 & 0 & 0 & -\frac{G.Ix}{K}(ch\ell-1) & 0 & 0 & \frac{G.Ix}{K.\gamma}.(sh\gamma\ell-\gamma\ell) \\
 & & & & & & & \frac{E.Ax}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{12.E.Iz}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6.E.Iz}{\ell^2} & 0 \\
 & & & \text{simétrica} & & & & & & -\frac{12.E.Iy}{\ell^3} & 0 & \frac{6.E.Iy}{\ell^2} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{G.Ix}{K}.\gamma.sh\gamma\ell & 0 & 0 & -\frac{G.Ix}{K}.(ch\gamma\ell-1) \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4.E.Iy}{\ell} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & \frac{4.E.Iz}{\ell} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & \frac{G.Ix}{K.\gamma}.(\gamma\ell.ch\gamma\ell-sh\gamma\ell)
\end{bmatrix}
$$

Figura II.2 - Matriz de rigidez do elemento

meio da matriz de rotação do elemento i "$\mathbf{ROT}_i$". Na Figura II.3 está indicada uma peça i inclinada de um ângulo α em relação aos eixos das estruturas. Este ângulo é medido entre as direções positivas dos eixos x e X, no sentido anti-horário, a partir de X.

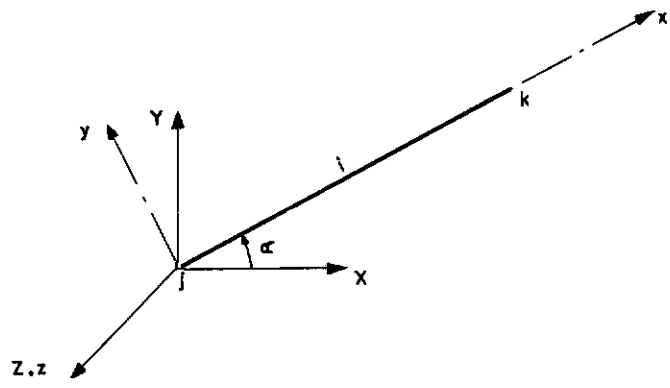


Figura II.3 - Inclinação do elemento i

A matriz de rotação do elemento i é

$$\mathbf{ROT}_i = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{array}\right] \qquad \text{(II.4)}$$

onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Cy & Cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cy & Cx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo,

$$Cx = \cos \alpha \qquad e \qquad Cy = \operatorname{sen} \alpha.$$

A transformação da matriz de rigidez do elemento i, do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global, é obtida por

$$\mathbf{REG}_i = \mathbf{ROT}_i^t \cdot \mathbf{RE}_i \cdot \mathbf{ROT}_i \qquad (II.5)$$

onde,

$\mathbf{ROT}_i^t$ é a transposta de $\mathbf{ROT}_i$.

A matriz $\mathbf{REG}_i$, associada aos deslocamentos da estrutura, é apresentada na Figura II.4.

A montagem da matriz de rigidez da estrutura "**RG**" (matriz de rigidez global) é feita somando, para cada nó, a contribuição dos elementos que chegam a ele. A matriz de rigidez global relaciona os deslocamentos dos nós da estrutura com as ações que atuam no mesmo ponto e na mesma direção destes deslocamentos. A equação matricial que representa essa relação é

$$\mathbf{AC} = \mathbf{RG} \cdot \mathbf{DG} \qquad (II.6)$$

onde,

AC = vetor das ações nodais combinadas (na direção dos eixos da estrutura);

$$
[\overline{K}_G]_i = \begin{bmatrix}
r_{1,1}\cdot Cx^2+r_{2,2}\cdot Cy^2 & (r_{1,1}-r_{2,2})\cdot Cx\cdot Cy & 0 & 0 & 0 & -r_{2,6}\cdot Cy & 0 & -r_{1,1}\cdot Cx^2-r_{2,2}\cdot Cy^2 & (r_{2,2}-r_{1,1})Cx\cdot Cy & 0 & 0 & 0 & -r_{2,6}\cdot Cy & 0 \\
 & r_{1,1}\cdot Cy^2+r_{2,2}\cdot Cx^2 & 0 & 0 & 0 & r_{2,6}\cdot Cx & 0 & (r_{2,2}-r_{1,1})Cx\cdot Cy & -r_{1,1}\cdot Cy^2-r_{2,2}\cdot Cx^2 & 0 & 0 & 0 & r_{2,6}\cdot Cx & 0 \\
 & & r_{3,3} & -r_{3,5}\cdot Cy & r_{3,5}\cdot Cx & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{3,3} & -r_{3,5}\cdot Cy & r_{3,5}\cdot Cx & 0 & 0 \\
 & & & r_{4,4}\cdot Cx^2+r_{5,5}\cdot Cy^2 & (r_{4,4}-r_{5,5}).Cx.Cy & 0 & r_{4,7}\cdot Cx & 0 & 0 & r_{3,5}\cdot Cy & r_{4,4}\cdot Cx^2+r_{5,12}\cdot Cy^2 & -(r_{4,4}+r_{5,12})Cx.Cy & 0 & r_{47}.rx \\
 & & & & r_{4,4}\cdot Cy^2+r_{5,5}\cdot Cx^2 & 0 & r_{4,7}\cdot Cy & 0 & 0 & -r_{3,5}\cdot Cx & -(r_{4,4}+r_{5,12})Cx.Cy & -r_{4,4}\cdot Cy^2+r_{5,12}\cdot Cx^2 & 0 & r_{47}.Cy \\
 & & & & & r_{6,6} & 0 & r_{2,6}\cdot Cy & -r_{2,6}\cdot Cx & 0 & 0 & 0 & r_{6,13} & 0 \\
 & & & & & & r_{7,7} & 0 & 0 & 0 & -r_{4,7}\cdot Cx & -r_{4,7}Cy & 0 & r_{7,14} \\
 & & & & & & & r_{1,1}\cdot Cx^2+r_{2,2}\cdot Cy^2 & (r_{1,1}-r_{2,2}).Cx.Cy & 0 & 0 & 0 & r_{2,6}\cdot Cy & 0 \\
 & & & & & & & & r_{1,1}\cdot Cy^2+r_{2,2}\cdot Cx^2 & 0 & 0 & 0 & -r_{2,6}\cdot Cx & 0 \\
 & & & & & & & & & r_{3,3} & r_{3,5}\cdot Cy & -r_{3,5}\cdot Cx & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & r_{4,4}\cdot Cx^2+r_{5,5}\cdot Cy^2 & (r_{4,4}-r_{5,5})Cx.Cy & 0 & -r_{4,7}\cdot Cx \\
 & & & & & & & & & & & r_{4,4}\cdot Cy^2+r_{5,5}\cdot Cx^2 & 0 & -r_{4,7}\cdot Cy \\
 & & & & & & & & & & & & r_{6,6} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & r_{7,7}
\end{bmatrix}
$$

simétrica

onde: $r_{1,1}=E.A_x/\ell$, $r_{2,2}=12EI_z/\ell^3$, $r_{3,3}=12.E.I_y/\ell^3$, $r_{4,4}=\frac{G.I_x}{k}.\gamma.sh\,\gamma\ell$, $r_{5,5}=4.E.I_y/\ell$, $r_{6,6}=4.E.I_z/\ell$, $r_{7,7}=\frac{G.I_x}{K.\gamma}.(\gamma\ell.ch\,\gamma\ell-sh\,\gamma\ell)$, $r_{2,6}=6.E.I_z/\ell^2$, $r_{3,5}=-6.E.I_y/\ell^2$, $r_{4,7}=\frac{G.I_x}{K}.(ch\,\gamma\ell-1)$, $r_{5,12}=2.E.I_y/\ell$

$r_{6,13}=2.E.I_z/\ell$, $r_{7,14}=\frac{G.I_x}{K.\gamma}.(sh\,\gamma\ell-\gamma\ell)$

Figura II.4 - Matriz de rigidez do elemento em relação ao sistema de coordenadas global

DG = vetor dos deslocamentos nodais (na direção dos eixos da estrutura).

II.3 - VETORES DE CARGA

Após a montagem da matriz **RG**, o passo seguinte é a obtenção dos vetores de carga. O primeiro deles é o vetor de Ações Nodais **AN**, o qual contém as cargas diretamente aplicadas nos nós, na direção dos eixos da estrutura. Como em cada nó há sete deslocamentos possíveis, o vetor **AN** terá sete ações por nó. Portanto, o vetor possuirá 7 x n elementos, sendo n o número de nós da estrutura. As ações num nó genérico j estão indicadas na Figura II.5. Desta maneira o vetor AN toma a forma

$$\mathbf{AN} = \{N_1, Q_{y_1}, Q_{z_1}, T_1, \ldots, N_j, Q_{y_j}, Q_{z_j}, T_j, M_{y_j}, M_{z_j}, B_j, \ldots, M_{y_n}, M_{z_n}, B_n\} \quad (II.7)$$

Outro vetor a ser considerado é o das Ações de Engastamento do Elemento **ARE**. Este vetor é constituído pelas reações das extremidades engastadas do elemento quando este recebe cargas ao longo de seu comprimento. Estas reações estão orientadas de acordo com o sistema de coordenadas local e dependem do tipo e da posição das cargas aplicadas. A relação entre as reações das extremidades e as cargas que atuam num elemento i é expressa pela equação

$$\mathbf{ARE}_i = T_i \cdot A_i \quad (II.8)$$

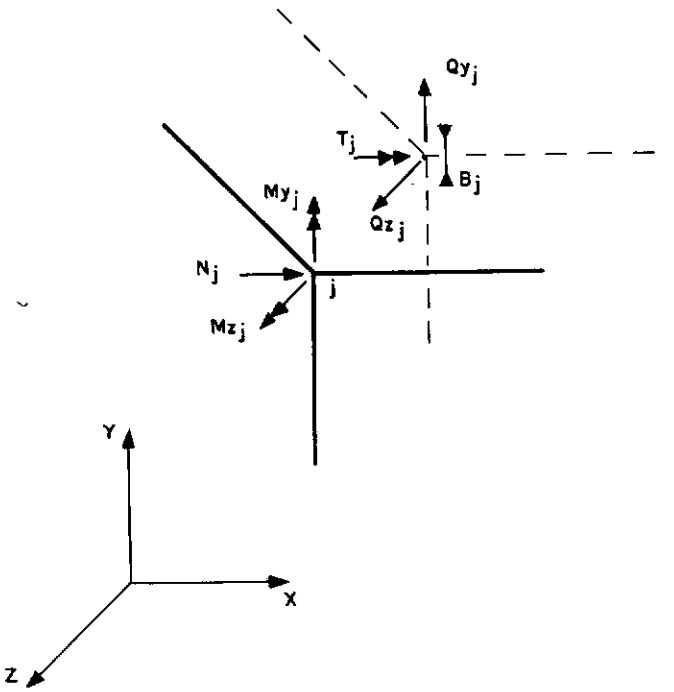


Figura II.5 - Cargas nodais

onde, A_i é o vetor de cargas (concentradas ou distribuídas) que atuam no elemento i e T_i é uma matriz de transferência que relaciona as reações nas extremidades com as cargas aplicadas. Um elemento T_{ij} da matriz T representa a reação na direção i devida a uma carga unitária aplicada na direção j. Para cargas concentradas atuando num ponto "m" qualquer do elemento (Figura II.6) a Eq. (II.8) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$
\begin{bmatrix} N_j \\ Q_{y_j} \\ Q_{z_j} \\ T_j \\ M_{y_j} \\ M_{z_j} \\ B_j \\ N_k \\ Q_{y_k} \\ Q_{z_k} \\ T_k \\ M_{y_k} \\ M_{z_k} \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(3a+b)b^2/\ell^3 & 0 & 0 & 0 & 6ab/\ell^3 & 0 \\ 0 & 0 & -(3a+b)b^2/\ell^3 & 0 & -6ab/\ell^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{4,4} & 0 & 0 & T_{4,7} \\ 0 & 0 & a.b^2/\ell^2 & 0 & (2a-b)b/\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a.b^2/\ell^2 & 0 & 0 & 0 & (2a-b)b/\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{7,4} & 0 & 0 & T_{7,7} \\ -a/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(a+3b)a^2/\ell^3 & 0 & 0 & 0 & -6ab/\ell^3 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+3b)a^2/\ell^3 & 0 & 6ab/\ell^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{11,4} & 0 & 0 & T_{11,7} \\ 0 & 0 & -a^2.b/\ell^2 & 0 & (2b-a)a/\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2.b/\ell^3 & 0 & 0 & 0 & (2b-a)a/\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{14,4} & 0 & 0 & T_{14,7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_m \\ Q_{y_m} \\ Q_{z_m} \\ T_m \\ M_{y_m} \\ M_{z_m} \\ B_m \end{bmatrix} \qquad (II.9)
$$

onde,

$$T_{4,4} = \left[(ch\ \gamma\ell - 1) \cdot (1 - ch\ \gamma b) + sh\ \gamma\ell \cdot (sh\ \gamma b - \gamma b)\right] / K$$

$$T_{7,4} = \left[(\gamma b - sh\ \gamma b)\ (1 - ch\gamma\ell) - (1 - ch\ \gamma b)\ (\gamma\ell - sh\ \gamma\ell)\right] / \gamma K$$

$$T_{11,4} = -(1 + T_{4,4})$$

$$T_{14,4} = T_{4,4} \cdot sh\ \gamma\ell/\gamma - T_{7,4} \cdot ch\ \gamma\ell + sh\ \gamma b/\gamma$$

$$T_{4,7} = (sh\ \gamma\ell - sh\ \gamma a - sh\ \gamma b) \cdot \gamma/K$$

$$T_{7,7} = \left[(ch\ \gamma b - 1)\ (1 - ch\ \gamma\ell) + sh\ \gamma b\ (sh\ \gamma\ell - \gamma\ell)\right]/K$$

$$T_{11,7} = - T_{4,7}$$

$$T_{14,7} = T_{4,7} \cdot sh\ \gamma\ell/\gamma - T_{7,7} \cdot ch\ \gamma\ell - ch\ \gamma b$$

sendo, $K = 2\ (1 - ch\gamma\ell) + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell$

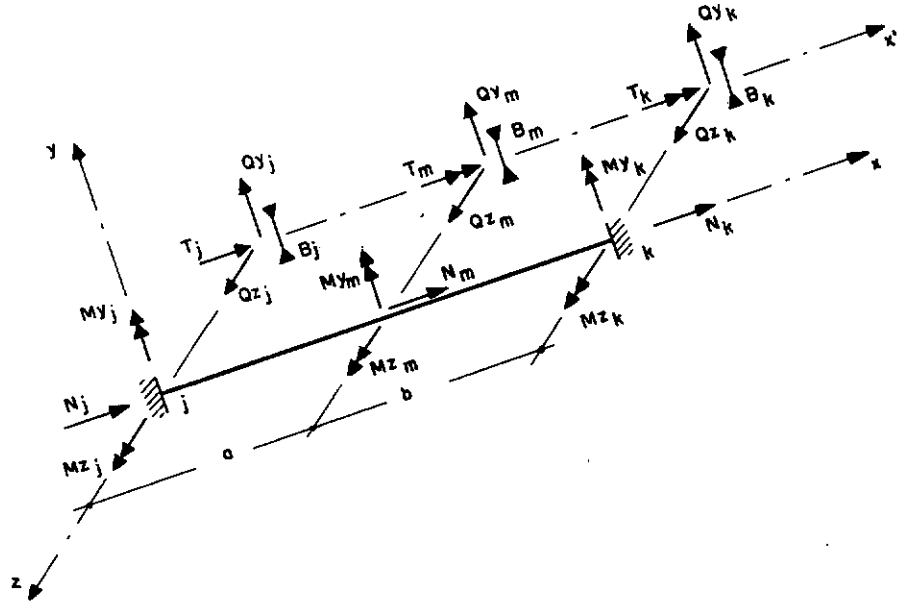


Figura II.6 - Cargas concentradas no elemento

Quando houver cargas distribuídas uniformes aplicadas ao longo de todo o vão do elemento (Figura II.7) a Equação (II.8) torna-se

$$\begin{bmatrix} N_j \\ Q_{y_j} \\ Q_{z_j} \\ T_j \\ M_{y_j} \\ M_{z_j} \\ B_j \\ N_k \\ Q_{y_k} \\ Q_{z_k} \\ T_k \\ M_{y_k} \\ M_{z_k} \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell/2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\ell/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ell^2/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell^2/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\frac{\gamma\ell/2}{th\gamma\ell/2})/\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\ell/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell/2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\ell/2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\ell^2/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell^2/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-\frac{\gamma\ell/2}{th\gamma\ell/2})/\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n \\ q_y \\ q_z \\ m_t \\ m_y \\ m_z \\ m_\omega \end{bmatrix} \tag{II.10}$$

A obtenção dos coeficientes T_{ij} para a torção não-uniforme está no Apêndice B. Quando atuarem, simultaneamente, cargas concentradas e cargas distribuídas deve-se efetuar as Eq. (II.9) e (II.10) e somar seus resultados.

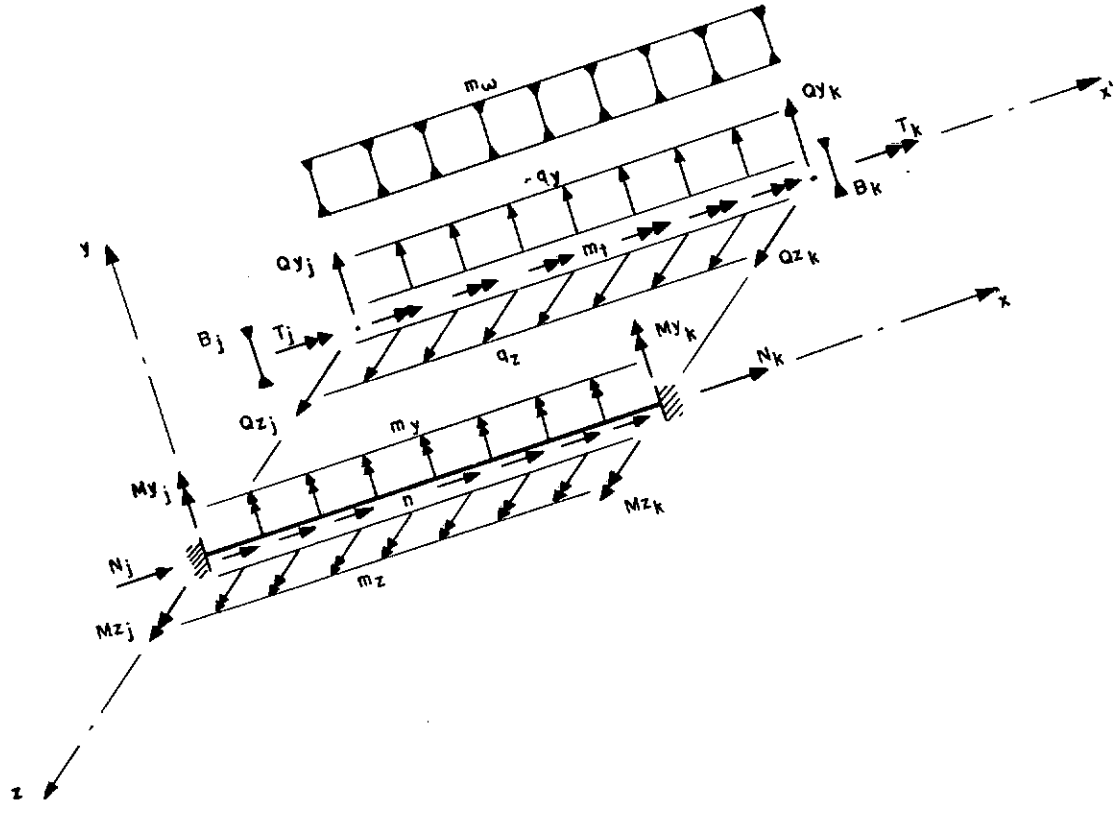


Figura II.7 - Cargas distribuídas no elemento

O vetor **ANE** das "Cargas Nodais Equivalentes" é constituído pelas ações que as peças transmitem para os nós da estrutura. Como as componentes deste vetor estão na direção dos eixos globais, a contribuição de cada elemento é realizada efetuando uma rotação de eixos e invertendo o sinal de **ARE**. A parcela indicada abaixo representa a colaboração de um elemento genérico "i" para o vetor **ANE**.

$$\mathbf{ANE} \leftarrow - \mathbf{ROT}_i^t \cdot \mathbf{ARE}_i \qquad \text{(II.11)}$$

Após considerar a contribuição de todos os elementos da estrutura o vetor **ANE** está completo. A soma de **ANE** com

AN resulta no vetor de Cargas Nodais Combinadas **AC**:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AN} + \mathbf{ANE} \qquad \text{(II.12)}$$

Com isso estão formados todos os vetores para a análise da estrutura.

II.4 - CÁLCULO DOS RESULTADOS

Após a obtenção de **RG** e de **AC** o cálculo do vetor de Deslocamentos da Estrutura **DG** é efetuado. Da Eq. (II.6) tem-se:

$$\mathbf{DG} = \mathbf{RG}^{-1} \times \mathbf{AC} \qquad \text{(II.13)}$$

O vetor $\mathbf{AE}_i$ das Ações Finais nas Extremidades de um elemento i é obtido pela superposição das ações de engastamento $\mathbf{ARE}_i$ com os efeitos dos deslocamentos das extremidades j e k da peça. Esta superposição é indicada na Eq. (II.14):

$$\mathbf{AE}_i = \mathbf{ARE}_i + \mathbf{RE}_i \cdot \mathbf{DE}_i \qquad \text{(II.14)}$$

O vetor $\mathbf{DE}_i$ é obtido a partir dos deslocamentos nodais **DG**. Como estes estão na direção dos eixos da estrutura a seguinte transformação se faz necessária:

$$\mathbf{DE}_i = \mathbf{ROT}_i \cdot \mathbf{DG}_i \qquad \text{(II.15)}$$

onde $\mathbf{DG}_i$ é o vetor dos deslocamentos nodais para os nós extremos do elemento i.

O vetor **RA** das Reações de Apoio é obtido por equilíbrio de nó, conforme indicado a seguir:

$$\mathbf{RA}_j = -\mathbf{AN}_j + \Sigma\, \mathbf{ROT}_i^t \cdot \mathbf{AE}_i \qquad \text{(II.16)}$$

sendo $\mathbf{RA}_j$ as reações num nó de apoio da estrutura, $\mathbf{AN}_j$ as cargas aplicadas nesse nó e $\Sigma\, \mathbf{ROT}_i^t \times \mathbf{AE}_i$ as resultantes das ações de extremidade dos elementos que chegam nesse nó (na direção dos eixos da estrutura).

Obtidos os esforços nas extremidades das peças e as reações de apoio, o problema da análise estática de estruturas de paredes delgadas está determinado. Para o traçado dos diagramas de esforços o Apêndice C fornece fórmulas referentes aos casos mais comuns de carregamento.

CAPÍTULO III

ESTRUTURA DO PROGRAMA

III.1 - INTRODUÇÃO

O programa computacional para análise de estruturas com elementos de paredes delgadas nada mais é que uma aplicação, de um modo organizado e eficiente, das equações matriciais apresentadas no Capítulo II. Este programa é constituído de várias etapas distintas, cada uma das quais responsável por uma tarefa específica. Estas etapas, que estão mais detalhadas nos próximos itens, são:

1. Entrada de dados da estrutura;

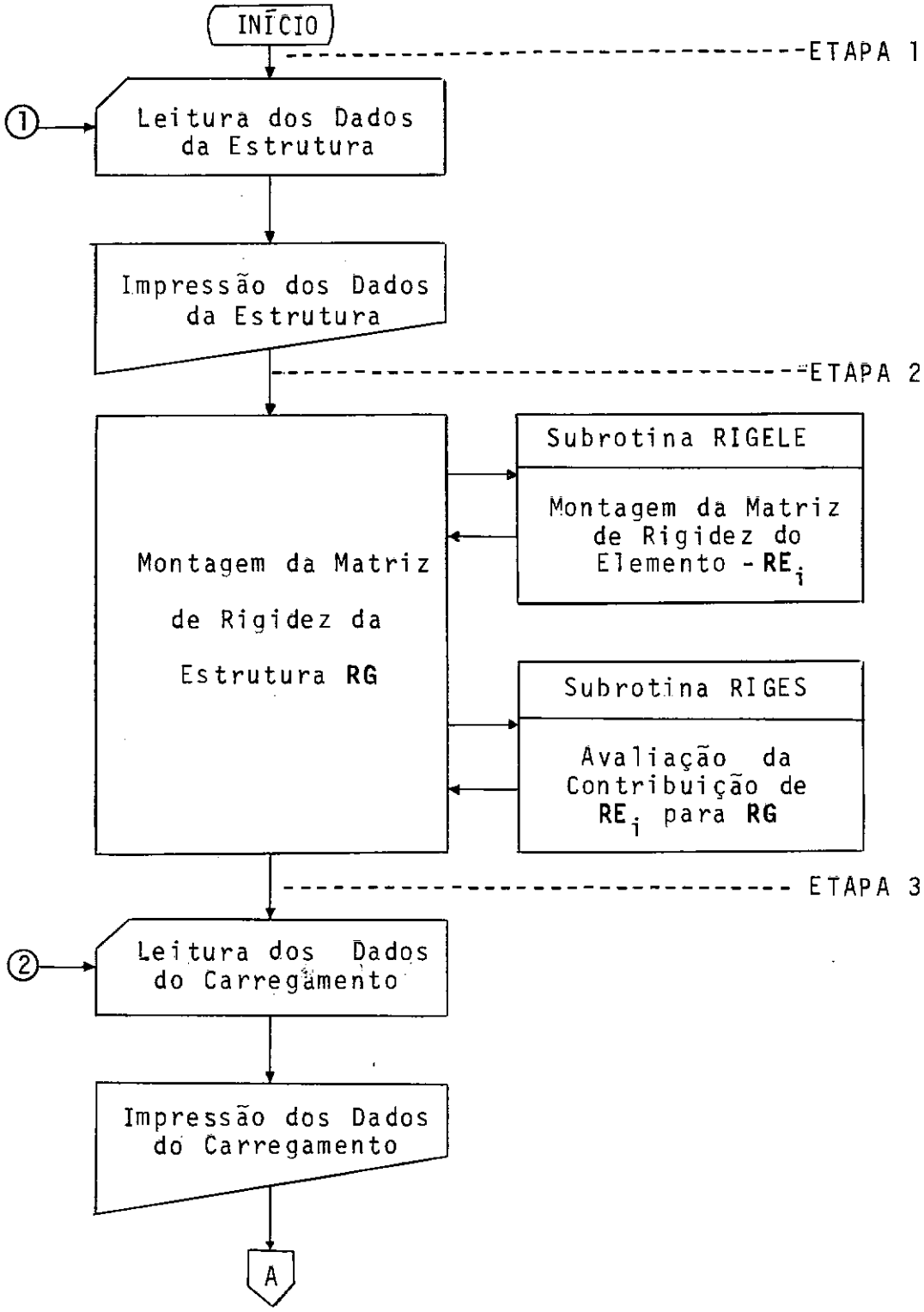
2. Montagem da matriz rigidez da estrutura;

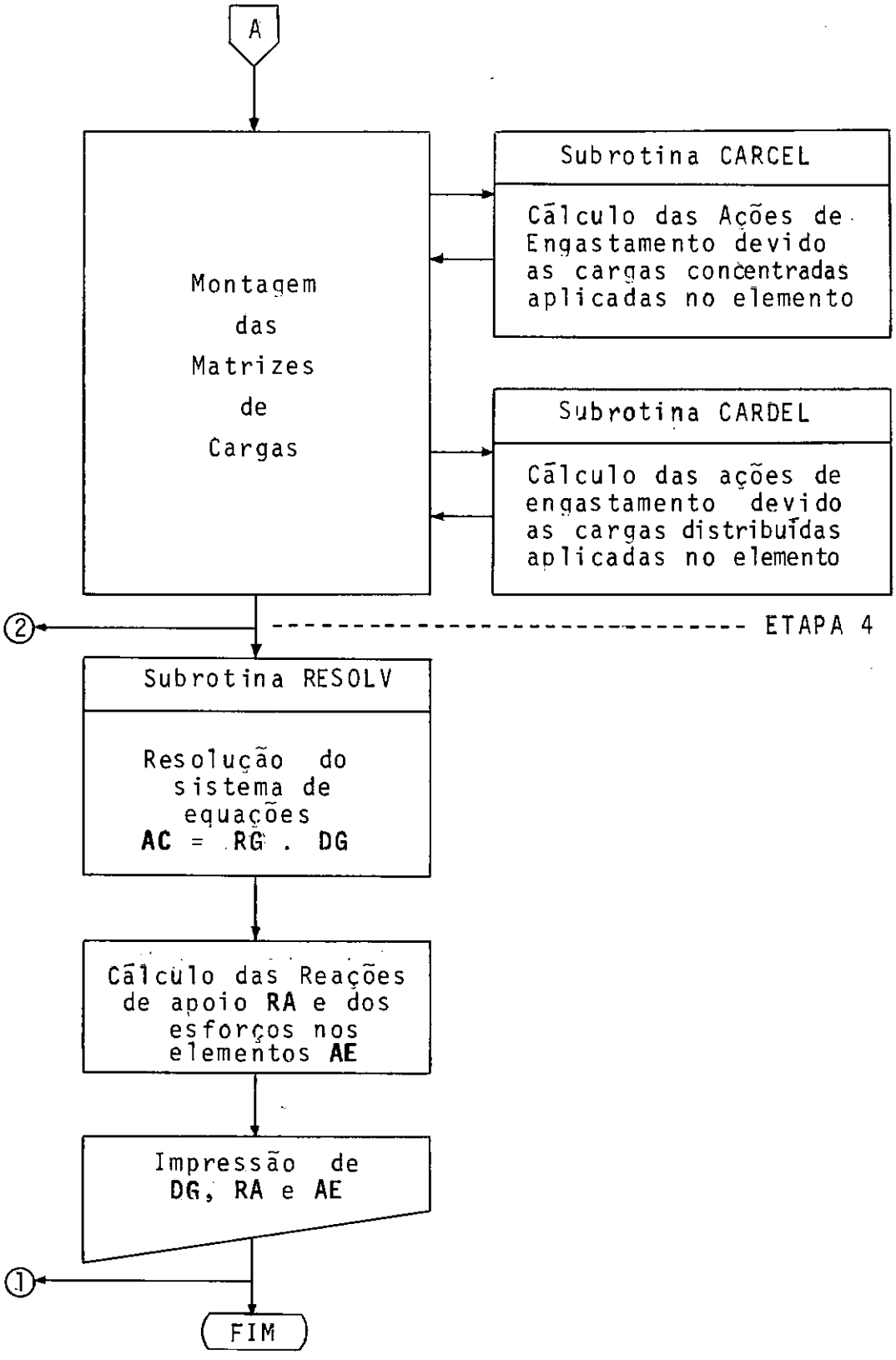
3. Entrada de dados dos carregamentos e montagem dos vetores de cargas;

4. Cálculo e saída de resultados.

O objetivo deste Capítulo é descrever cada uma destas etapas juntamente com algumas características do programa. Estas etapas estão representadas no diagrama de blocos abaixo e, nos próximos itens, serão mais detalhadas.

A seguir está descrita a maior parte da notação


INÍCIO
ETAPA 1
1
Leitura dos Dados da Estrutura
Impressão dos Dados da Estrutura
ETAPA 2
Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura RG
Subrotina RIGELE
Montagem da Matriz de Rigidez do Elemento - RE_i
Subrotina RIGES
Avaliação da Contribuição de RE_i para RG
ETAPA 3
2
Leitura dos Dados do Carregamento
Impressão dos Dados do Carregamento
A


A
Montagem das Matrizes de Cargas
Subrotina CARCEL
Cálculo das Ações de Engastamento devido as cargas concentradas aplicadas no elemento
Subrotina CARDEL
Cálculo das ações de engastamento devido as cargas distribuídas aplicadas no elemento
2
ETAPA 4
Subrotina RESOLV
Resolução do sistema de equações AC = RG . DG
Cálculo das Reações de apoio RA e dos esforços nos elementos AE
Impressão de DG, RA e AE
1
FIM

deste Capítulo, com as variáveis listadas na ordem em que aparecem no programa. Uma variável seguida de parênteses ( ) representa um vetor. Variáveis seguidas com parênteses encerrando uma ou duas vírgulas representam, respectivamente, matrizes b_i e tridimensionais:

NEST - número de estruturas

IEST - índice da estrutura

NOME ( ) -nome da estrutura

UNIDC, UNIDF - unidades de comprimento e de força

NN - número de nós

NE - número de elementos

NDI - número de deslocamentos impedidos (número de restrições)

NDT - número de deslocamentos total

NDP - número de deslocamentos permitidos

NNR - número de nós com restrições (número de nós de apoio)

NC - número de carregamentos

E - módulo de elasticidade longitudinal do material

G - módulo de elasticidade transversal do material

X ( ), Y ( ) - coordenada X e Y do nó

NI ( ), NF( ) - nós inicial e final do elemento

AX ( ) - área da seção transversal do elemento

IX ( ) - constante de torção do elemento (= J_t)

IY ( ), **IZ** ( ) - momentos de inércia principais, relativos aos eixos y e z da seção transversal do elemento

IW ( ) - momento de inércia setorial principal da seção transversal do elemento

L ( ) - comprimento do elemento

CX, CY - cosenos diretores do elemento

ROT (, ,) - matriz de rotação do elemento

LRN ( ) - lista de restrições nodais da estrutura

RE (,) - matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas local

REG (,) matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas global

RG (,) - matriz de rigidez da estrutura (matriz de rigidez global)

XNOME (,) - nome do carregamento

NNC - número de nós com cargas

NERD - número de elementos cujas ações de engastamento nas extremidades são fornecidas como dados

NERC - número de elementos cujas ações de engastamento nas extremidades são calculadas pelo programa

AN (,) - matriz de ações nodais (nas direções dos eixos da estrutura

ARE (, ,) - matriz de ações de engastamento nas extremidades do elemento (nas direções dos eixos dos elementos)

ANE (,) - matriz de ações nodais equivalentes (nas direções dos eixos da extrutura)

AC (,) - matriz das ações combinadas nos nós (na direção dos eixos da estrutura

DG (,) - matriz dos deslocamentos nodais (na direção dos eixos da estrutura)

AED (, ,) - matriz de ações nas extremidades dos elementos devidas ao deslocamento destas extremidades (na direção dos eixos do elemento)

AE (, ,) - matriz de ações finais nas extremidades dos elementos (na direção dos eixos do elemento)

RA (,) -matriz das reações de apoio (na direção dos eixos da estrutura)

III.2 - ENTRADA DE DADOS DA ESTRUTURA

A primeira etapa do programa consiste no fornecimento de informações sobre a estrutura. Estas informações são constituídas pelas posições dos nós, propriedades geométricas da seção transversal dos elementos, propriedades mecânicas do material e tipos de apoio.

O primeiro dado fornecido é o número de estruturas que serão analisadas (NEST). Então, por meio de um índice contador (IEST) o programa controla a execução da análise para o número de estruturas especificado. Logo após vêm os dados referentes a cada estrutura em particular. Estes dados são divididos em 4(quatro) grupos:

1. Dados Gerais da Estrutura

São lidos pelo programa, na respectiva ordem de

entrada, o nome da estrutura (NOME), as unidades de comprimento e de força (UNIDC, UNIDF), o número de nós (NN), o número de elementos (NE), o número de restrições (NDI), o número de nós de apoio (NNR) e os módulos de elasticidade longitudinal e transversal (E, G). De posse desses dados o programa determina o número de deslocamentos total (NDT) e o número de deslocamentos livres (NDP):

$$NDT = 7 \times NN$$

$$NDP = NDT - NDI$$

2. Coordenadas de Nós

A posição de cada nó da estrutura é determinada especificando as suas respectivas coordenadas (X, Y). As coordenadas nodais estão relacionadas ao sistema de eixos da estrutura, também chamado de sistema de coordenadas global. Este sistema é constituído pelos eixos ortogonais X, Y e Z, como indicado na Figura III.1. Os eixos X e Y estão contidos no plano de estrutura estando o eixo Z perpendicular a esse plano. Uma vez locados os eixos X e Y obtém-se o eixo Z pela convenção do triedro direto.

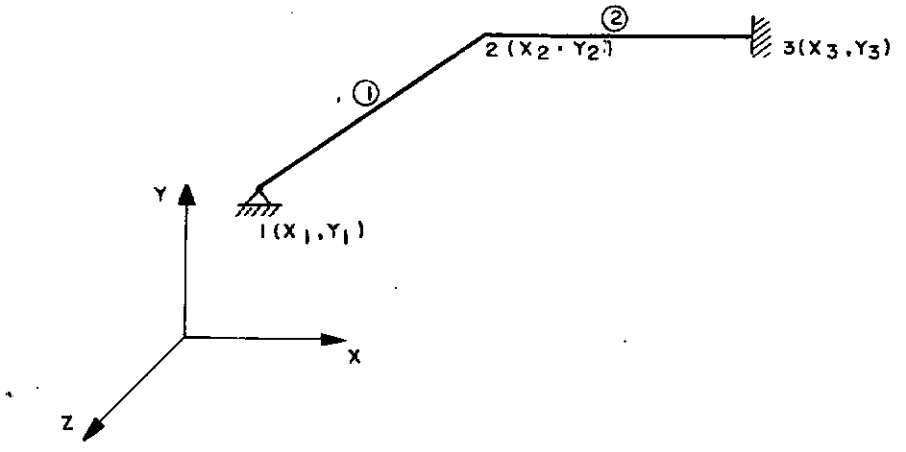


Figura III.1 - Coordenadas nodais

3. Conetividade e Propriedades dos Elementos

Cada elemento da estrutura está associado a dois nós, j e k, correspondentes às suas extremidades, e além disso possui determinadas propriedades geométricas. Por isso, para cada elemento, devem ser fornecidos o nó inicial (NI), o nó final (NF), a área da seção transversal (AX), a constante de torção (IX), os momentos de inércia principais (IY, IZ) e o momento setorial de inércia principal (IW). O programa automáticamente considera como nó inicial o de menor numeração, mesmo que tenha sido fornecido o de maior numeração como sendo o nó inicial. Estando determinada a conetividade da peça pode-se locar seu sistema de eixos, também chamado sistema de coordenadas local. Ele é formado por 3 eixos ortogonais x, y e z que são orientados da seguinte maneira: o eixo x coincide com o eixo baricêntrico do elemento e está direcionado do nó inicial para o nó final; o eixo z é paralelo ao eixo global Z tendo o mesmo sentido; o eixo y está contido no plano da estrutura, juntamente com o eixo x, e seu sentido é obtido pela convenção do triedro direto. Além disso os eixos y e z são principais da inércia da seção transversal. Na Figura III.2 mostram-se os sistemas de coordenadas locais dos elementos 1 e 2 da estrutura da Figura III.1.

Por intermédio das coordenadas dos nós inicial e final pode-se calcular os co-senos diretores do elemento (CX, CY):

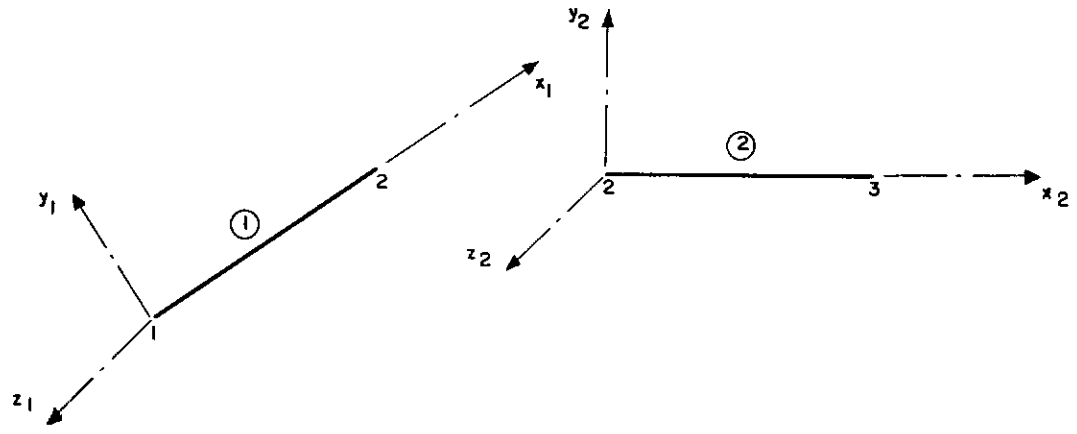


Figura III.2 - Sistemas de eixos dos elementos

$$XL = X_k - X_j$$

$$YL = Y_k - Y_j$$

$$L = \sqrt{XL^2 + YL^2}$$

$$CX = XL/L$$

$$CY = YL/L$$

Na Figura III.3 estão representados os co-senos diretores de uma peça genérica i.

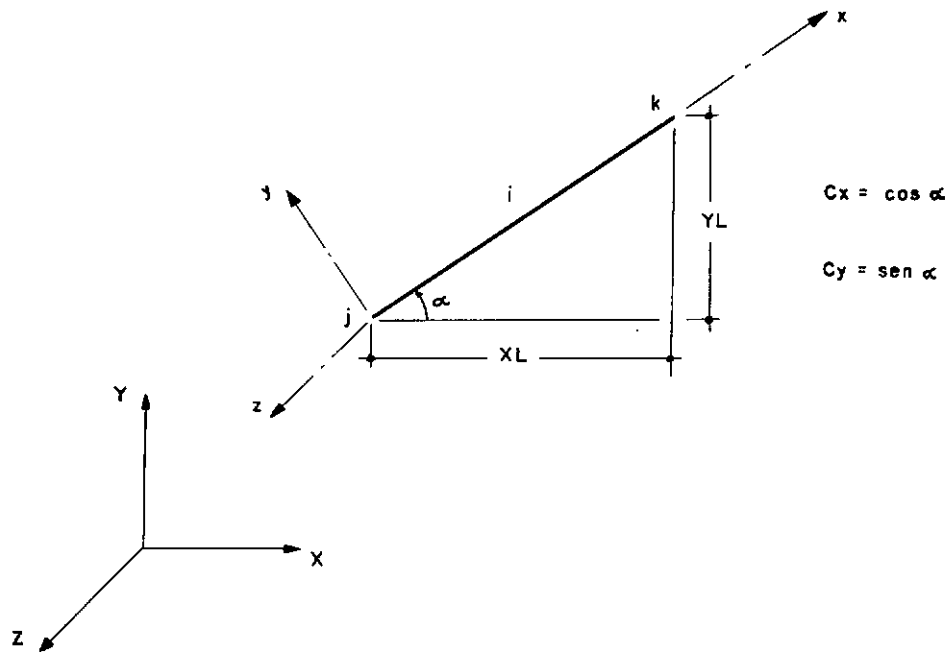


Figura III.3 - Co-senos diretores do elemento

Substituindo CX e CY na Equação (II.4) determina-se a matriz de rotação do elemento (**ROT**).

4. Restrições Nodais

Para especificar as condições de contorno da estrutura é necessário informar, para cada apoio, as direções onde os deslocamentos estão impedidos. Isto é feito indicando o nó que é apoio e colocando "1" na direção correspondente ao deslocamento impedido e "0" na direção do deslocamento livre. Quando as condições de contorno são especificadas deve-se ter o cuidado de colocar restrições que impeçam qualquer movimento de corpo rígido da estrutura, mesmo que em determinadas direções não haja carregamento que possa causar

movimento da mesma. Isto porque, na resolução do sistema de equações, a matriz de rigidez global será singular se não houver vínculos que evitem todo movimento de corpo rígido. Com a introdução das restrições nodais encerra-se a entrada de dados da estrutura.

III.3 - MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

Após a especificação das propriedades geométricas das peças e das propriedades mecânicas do material pode-se montar a matriz de rigidez do elemento em relação ao sistema de coordenadas local (**RE**). Através da subrotina RIGELE o programa constrói a matriz **RE** substituindo nos coeficientes da matriz da Figura II.2 as propriedades do elemento e do material. Por meio da Equação (II.5) **RE** é transformada na matriz de rigidez do elemento em relação aos eixos da estrutura (**REG**). A contribuição de **REG** para a matriz de rigidez da estrutura **RG** é feita por intermédio da subrotina RIGES. Esta subrotina avalia a contribuição de cada peça para **RG** e, após considerar todos elementos, a matriz de rigidez da estrutura estará completa.

A introdução das condições de apoio na matriz de rigidez da estrutura é efetuada por meio da técnica dos "0" e "1", a qual consiste em substituir os coeficientes das linhas e colunas correspondentes às restrições nodais por "zeros" colocando "1" na diagonal principal. De acordo com esta técnica, o vetor de cargas **AC** também será alterado. Introduzidas as condições de apoio, a matriz **RG** está pronta para entrar no sistema de

equações da estrutura:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{RG} \times \mathbf{DG}$$

A determinação da matriz de cargas **AC** completará o sistema de equações da estrutura.

III.4 - ENTRADA DE DADOS DOS CARREGAMENTOS E GERAÇÃO DAS MATRIZES DE CARGAS

Os dados fornecidos ao programa ficam completos quando são introduzidas as cargas que atuam na estrutura. A primeira informação que o programa recebe são os dados gerais do carregamento: número de nós com cargas aplicadas (NNC), número de elementos com ações de engastamento perfeito fornecidas diretamente (NERD), número de elementos com ações de engastamento perfeito calculadas (NERC) e nome do carregamento (**XNOME**).

A introdução das cargas que compõem o carregamento se dá da seguinte maneira:

1. Cargas Nodais

São cargas aplicadas diretamente nos nós, na direção dos eixos da estrutura (Figura II.5). Elas são introduzidas especificando-se o nó onde atuam e, a seguir, as sete componentes de carga. Quando lidas pelo programa são armazenadas diretamente na matriz de ações nodais **AN**.

2. Ações de Engastamento Perfeito Dadas

Quando atuar num elemento um tipo de carga não considerada pelo programa deve-se fornecer as ações de engastamento perfeito da mesma. Estas ações são orientadas de acordo com os eixos dos elementos. Elas são fornecidas indicando-se o elemento e, após, as 14 componentes possíveis (7 em cada nó). A ordem em que essas ações são dadas é a da numeração da Figura III.4. Quando introduzidas no programa as ações de engastamento perfeito são armazenadas diretamente na matriz de ações de engastamento (**ARE**).

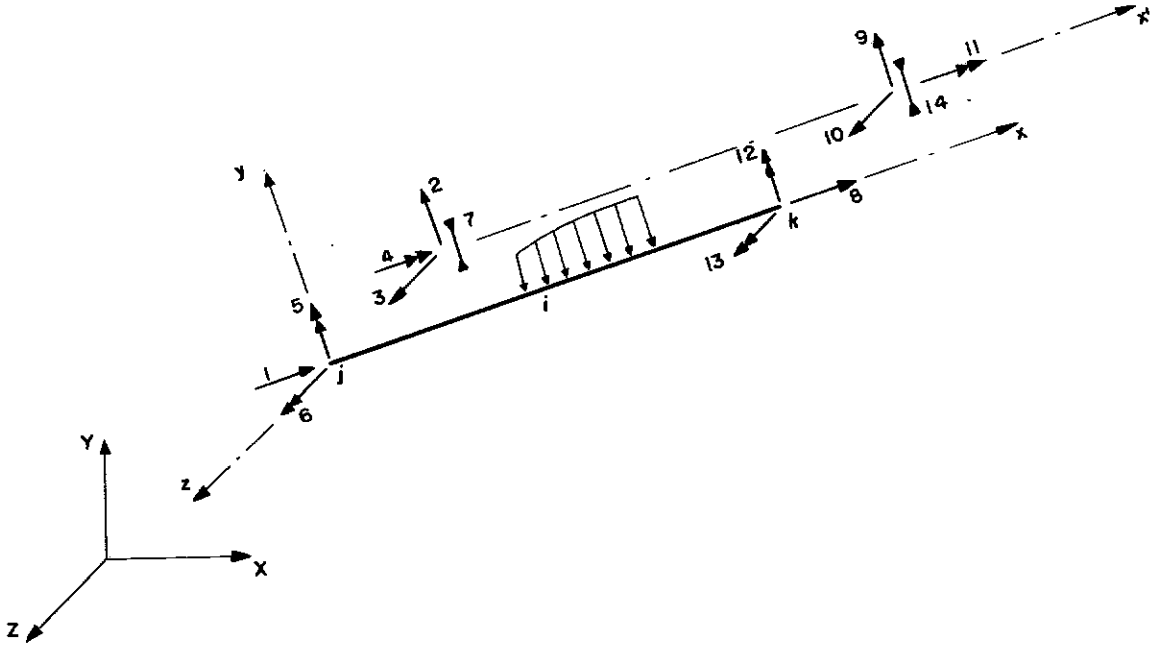


Figura III.4 - Ações de engastamento no elemento

3. Ações de Engastamento Perfeito Calculadas

Quando atuam cargas concentradas ou cargas distri

buídas uniformes ao longo de todo o comprimento da peça, o programa, por meio das subrotinas CARCEL e CARDEL, calcula automaticamente as ações de engastamento perfeito do elemento. As ações de engastamento devidas às cargas concentradas são calculadas pela subrotina CARCEL. A subrotina CARDEL é responsável pelo cálculo das ações de engastamento devidas às cargas distribuídas uniformes. As cargas, concentradas ou distribuídas, são fornecidas ao programa indicando-se o elemento onde elas atuam juntamente com o número de cargas concentradas (NCC) e de cargas distribuídas (NCD) aplicadas. Logo após indica-se a direção (DIR), a intensidade (CC ou CD) e a posição (A) da carga. A posição A é a distância entre o nó inicial do elemento e o ponto de aplicação da carga e só é dada no caso de cargas concentradas. Os sentidos positivos das cargas concentradas e distribuídas estão indicados nas Figuras II.6 e II.7, respectivamente. A direção DIR é especificada pelas palavras-chave mostradas na Figura III.5. As ações de engastamento perfeito calculadas pelo programa são também armazenadas na matriz **ARE**.

Após a introdução de todas as cargas que atuam na estrutura as matrizes de ações nodais equivalentes (**ANE**) e de ações nodais combinadas (**AC**) são obtidas. A montagem dessas matrizes se dá por meio das Eqs. (II.11) e (II.12), respectivamente. Como é utilizada a técnica dos "0" e "1" para a introdução dos apoios, os elementos da matriz **AC** correspondendo aos deslocamentos impedidos são zerados. A matriz **AC** pode então ser introduzida no sistema de equações da estrutura.

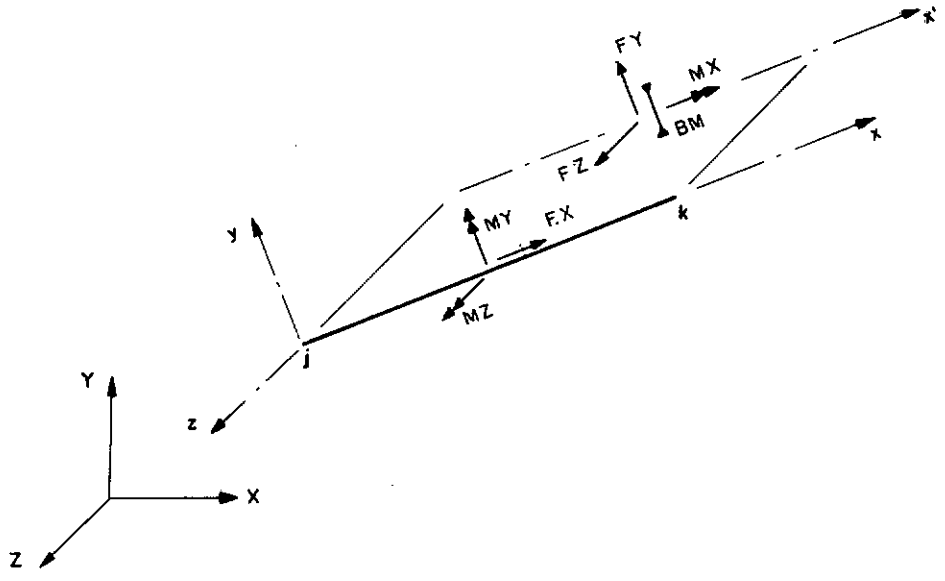


Figura III.5 - Direções das cargas nos elementos

III.5 - CÁLCULO E SAÍDA DE RESULTADOS

O sistema de equações da estrutura:

$$AC = RG \times DG$$

tem como incógnitas os deslocamentos nodais. Para resolver o sistema de equações é utilizado a técnica de "Eliminação de Gauss". No programa isto é feito pela subrotina RESOLV e o resultado é a matriz dos deslocamentos nodais na direção do sistema de coordenadas global (DG). Quando houver, para uma mesma estrutura, vários carregamentos, cada coluna da matriz **AC** corresponderá a um carregamento. Neste caso a resolução do sistema de equações será simultânea e cada coluna da matriz **DG** obtida também estará

associada a um carregamento.

Obtidos os deslocamentos nodais da estrutura determina-se os esforços nas extremidades das peças. A matriz destes esforços (**AE**) é constituída pelas ações de engastamento perfeito **ARE** acrescidas do efeito dos deslocamentos dos nós extremos do elemento (**AED**), de acordo com a Eq. (II.14). Estes deslocamentos são convertidos para o sistema de coordenadas local por meio da Eq. (II.15). Os valores positivos dos esforços nas extremidades correspondem às direções da Figura III.6.

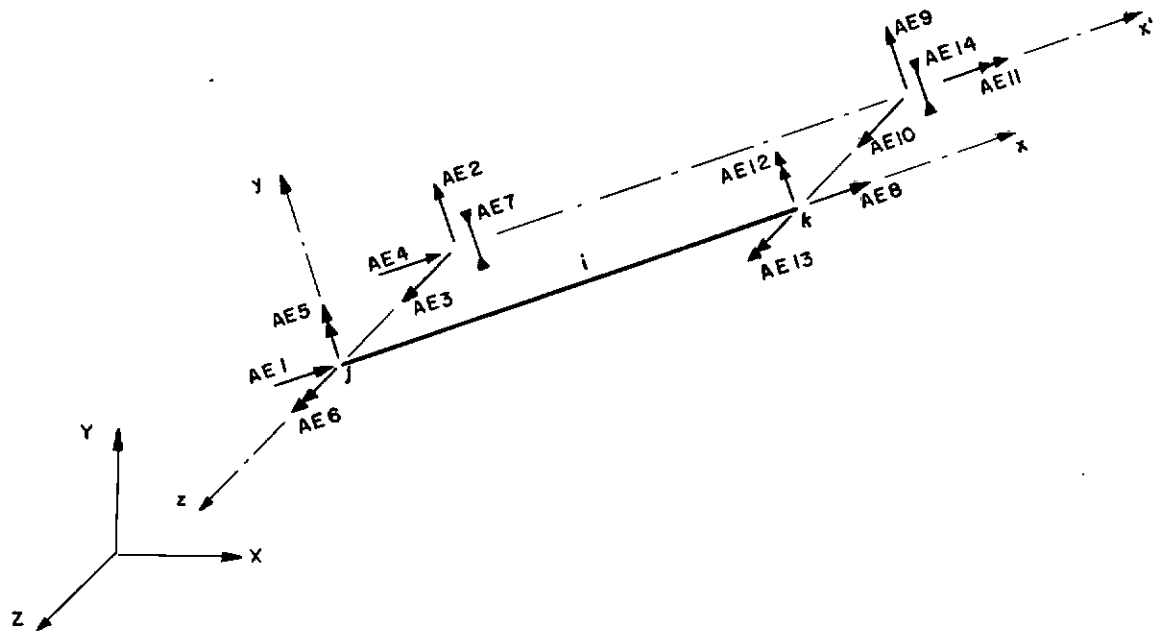


Figura III.6 - Esforços nas extremidades do elemento

A matriz das reações de apoio **RA** é obtida por "equilíbrio do nó". Todas as forças que atuam no nó (cargas aplicadas diretamente no nó, ações dos elementos no nó e reações de apoio) devem estar em equilíbrio. Este equilíbrio, e portanto a

matriz **RA**, é obtido através da Eq. (II.16). As reações de apoio estão relacionadas aos eixos da estrutura e são positivas quando nas direções indicadas na Figura II.5.

Obtidas as matrizes **DG**, **AE** e **RA** a análise numérica da estrutura está encerrada. Havendo mais estruturas para serem analisadas, o programa repete as etapas descritas nos itens 2 a 5.

III.6 - LIMITAÇÕES DO PROGRAMA

O programa admite para cada estrutura um máximo de 30 nós, 50 elementos e 5 carregamentos. Podem ser executadas várias estruturas simultaneamente. Além disso, o programa possui um vetor de armazenamento (**A**) onde ficam contidas a matriz de rigidez da estrutura (**RG**) e diversas outras matrizes. O número de posições que serão ocupadas nesse vetor é dado por:

$$NP = NDT \times (LF + 2 \times NC) = 7 \times NN \times (LF + 2\,NC)$$

onde LF é a largura de faixa da matriz de rigidez da estrutura e é determinada da seguinte maneira:

$$LF = 7 \times \left[(k - j)_{máx} + 1 \right]$$

sendo $(k - j)_{máx}$ a diferença máxima entre a numeração de dois nós extremos dos elementos da estrutura. Como o vetor de armaze

namento **A** está dimensionado para 10.000 posições tem-se:

$$NP \leq 10.000$$

ou

$$NN \leq \frac{10.000}{7 \times \left[7\,(k-j)_{máx} + 7 + 2\,NC\right]}$$

A Tabela III.1 fornece o número máximo de nós que uma estrutura pode ter, em função do número de carregamentos e da diferença máxima entre a numeração dos nós extremos dos elementos.

TABELA 1 - Número máximo de nós para uma estrutura

NC \ $(k-j)_{máx}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	30	30	30	30	30	28	24	21	19	18
2	30	30	30	30	30	26	23	21	19	17
3	30	30	30	30	29	25	23	20	18	17
4	30	30	30	30	28	25	22	20	18	16
5	30	30	30	30	27	24	21	19	17	16

Os valores à esquerda da linha em negrito estão limitados a 30 porque esta é a dimensão máxima que alguns vetores, relacionados com o número de nós da estrutura, permitem.

CAPÍTULO IV

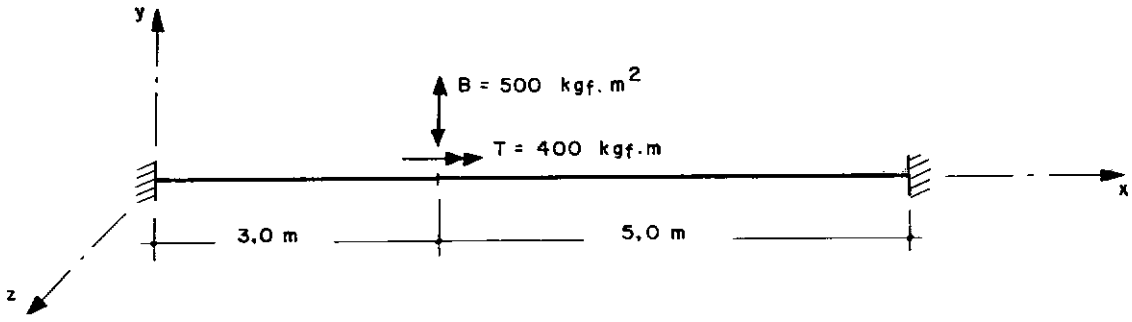
EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Os exemplos analisados a seguir são comparados ou com os resultados da teoria dos elementos de paredes delgadas, com o objetivo de demonstrar a exatidão da análise, ou com os resultados de uma análise estrutural sem consideração do empenamento, visando mostrar as alterações que ocorrerão nos esforços e nas tensões.

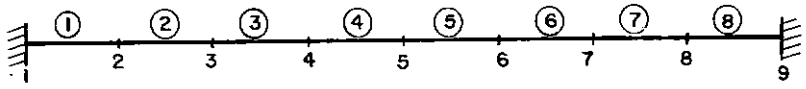
IV.1 - VIGA BIENGASTADA

O primeiro exemplo analisado consiste de uma viga biengastada sujeita a um bimomento e a um momento torsor concentrado (Figura IV.1a). A finalidade deste exemplo é verificar a precisão dos resultados do programa comparando-os com os resultados da análise teórica. A viga será dividida em 8 trechos iguais (Figura IV.1b) possibilitando com isso a determinação dos esforços em vários de seus pontos e facilitando o traçado dos seus diagramas de esforços.

A viga é de aço e constituída de um perfil VS 450 x 60 (produzido pela Fábrica de Estruturas Metálicas S.A.). As dimensões e as propriedades geométricas da seção transversal estão indicadas na Figura IV.2. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal valem $E = 2.100.000$ kgf/cm^2 e $G = 807700$ kgf/cm^2, respectivamente.

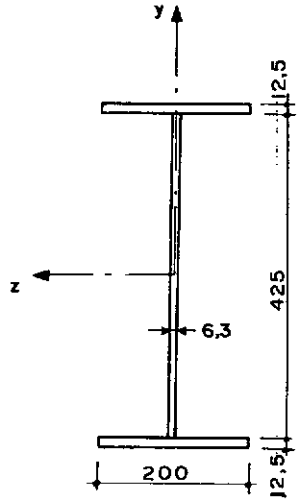


(a) Dimensões e cargas



(b) Numeração dos nós e dos elementos

Figura IV.1 - Exemplo 1: Viga biengastada



Ax = 76,8 cm^2
Ix = 29,6 cm^4
Iy = 1668,0 cm^4
Iz = 27962,0 cm^4
Iω = 797500,0 cm^6

dimensões em mm

Figura IV.2 - Propriedades geométricas do perfil VS 450 x 60

Os resultados fornecidos pelo programa estão de acordo com a convenção de sentidos da Figura III.6. Para traçar os diagramas de esforços é preciso fazer as seguintes transformações:

$$B_0 = B_j$$

$$T_0 = -T_j$$

$$B_\ell = -B_k$$

e

$$T_\ell = T_k$$

onde B_0 e T_0 são os esforços no início do trecho considerado, B_ℓ e T_ℓ são os esforços no fim do trecho e B_j, T_j, B_k e T_k os esforços fornecidos pelo programa. Os valores de T_ω são encontrados utilizando a Eq. (C.4) nos trechos $0 \leq x \leq 300$ e $300 \leq x \leq 800$ e fazendo $T_{\omega_c} = 0$. Daí, no trecho $0 \leq x \leq 300$, tem-se

$$T_\omega = \gamma \cdot \frac{4534 \cdot \operatorname{ch} \gamma(300 - x) + 5383 \cdot \operatorname{ch} \gamma x}{\operatorname{sh}(\gamma \cdot 300)} \cdot 10^3$$

No trecho $300 \leq x \leq 800$ a equação de T_ω é

$$T_\omega = -\gamma \cdot \frac{383{,}1 \cdot \operatorname{ch} \gamma(500 - x') + 973{,}9 \cdot \operatorname{ch} \gamma x'}{\operatorname{sh}(\gamma \cdot 500)} \cdot 10^3$$

sendo $x' = x - 300$.

Por último, o momento torsor de Saint Venant T_s é obtido fazendo:

$$T_s = T - T_\omega$$

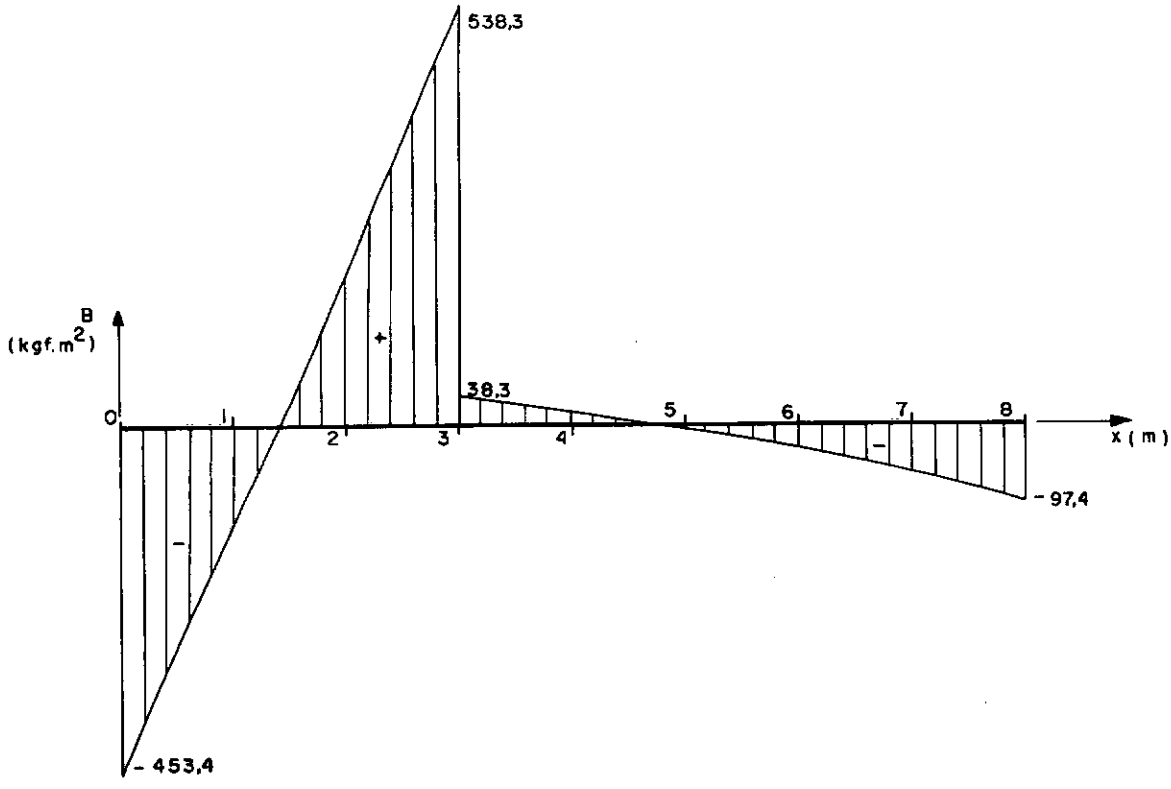
Os valores obtidos para os esforços que atuam na seção transversal da viga, com suas unidades convertidas, estão na Tabela IV.1.

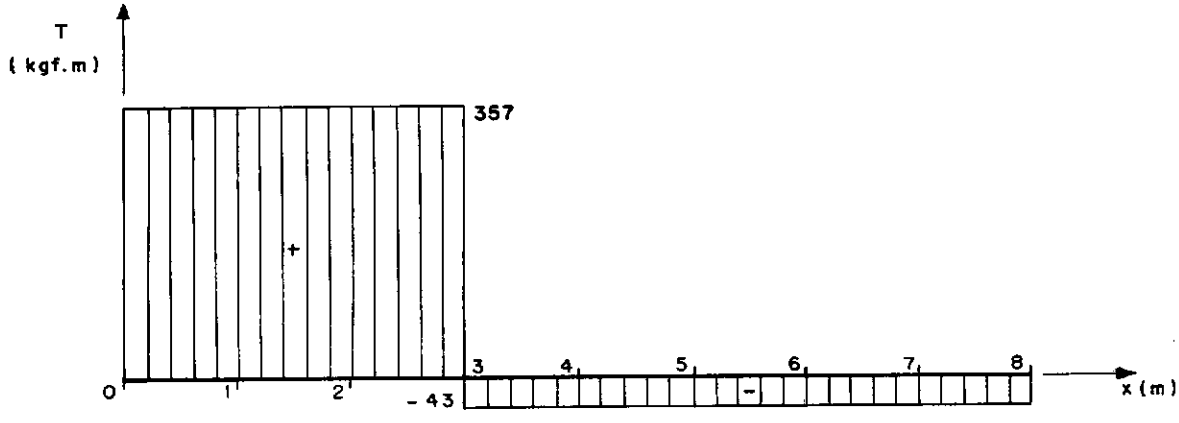
Tabela IV.1 - Esforços na viga biengastada

x (cm)	0	100	200	300^-	300^+
B ($kgf.m^2$)	-453,4	-120,6	194,8	538,3	38,3
T (kgf.m)	357,0	357,0	357,0	357,0	-43,0
T_ω (kgf.m)	357,0	316,5	321,7	373,4	-26,5
T_s (kgf.m)	0,0	40,5	35,3	-16,4	-16,5

x (cm)	400	500	600	700	800
B ($kgf.m^2$)	-13,9	-8,5	-32,1	-60,4	-97,4
T (kgf.m)	-43,0	-43,0	-43,0	-43,0	-43,0
T_ω (kgf.m)	-22,9	-22,5	-25,3	-31,9	-43,0
T_s (kgf.m)	-20,1	-20,5	-17,7	-11,1	0,0

Com os valores da Tabela IV.1 os diagramas de $B(x)$, $T(x)$, $T_\omega(x)$ e $T_S(x)$ são traçados (Figura IV.3):





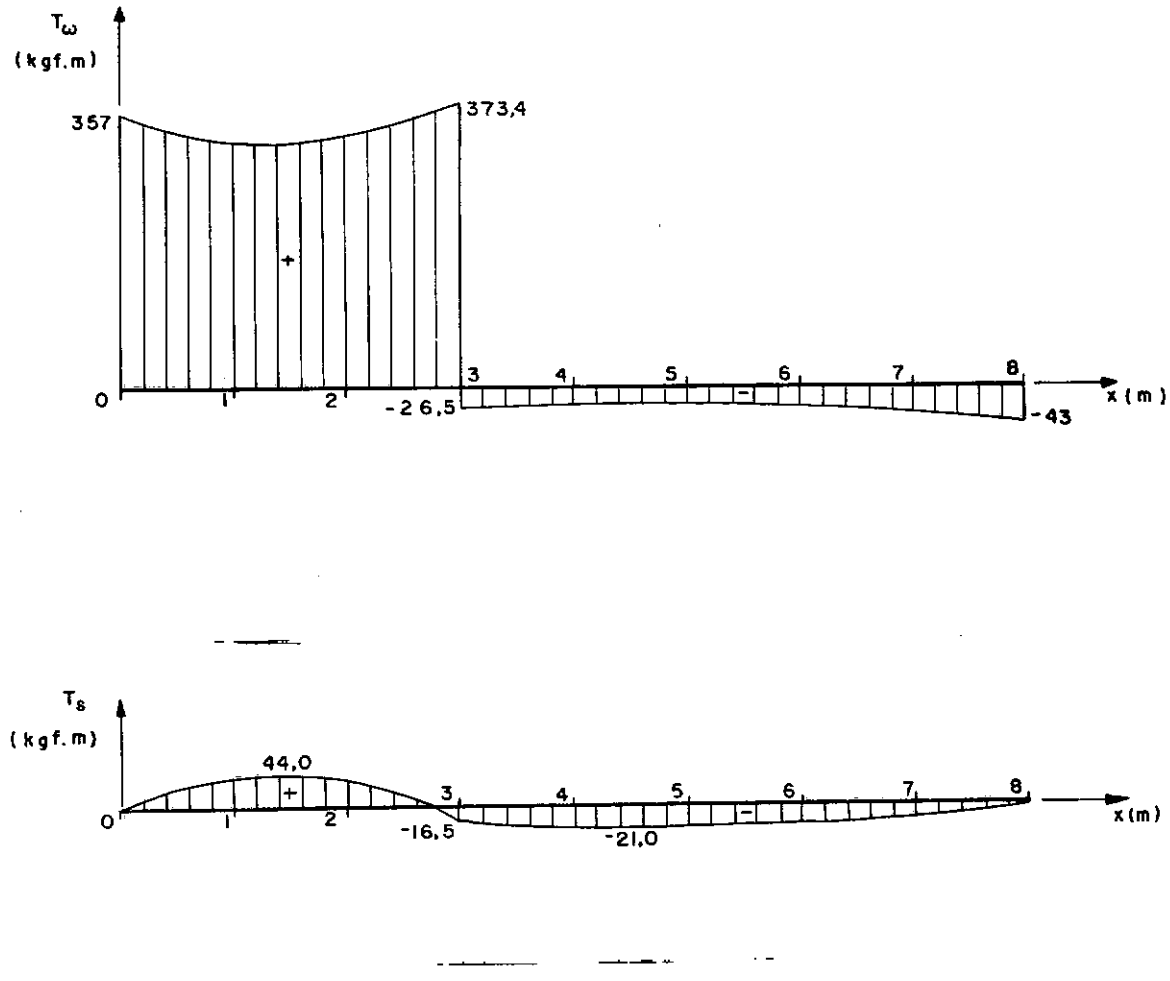


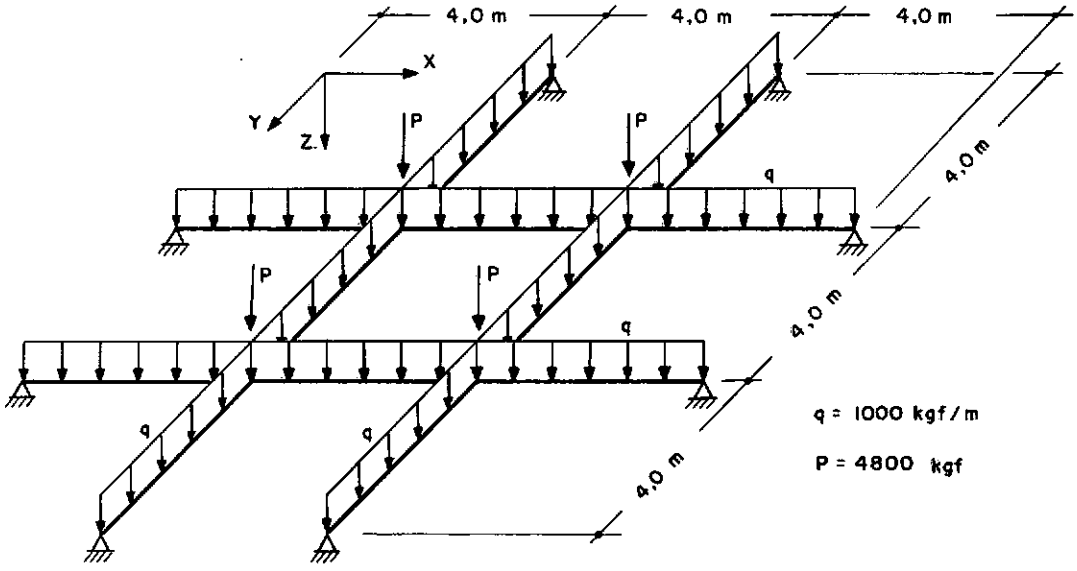
Figura IV.3 - Diagramas de esforços na viga biengastada

A análise teórica da viga biengastada, realizada com o auxílio das fórmulas fornecidas pela Ref. 6, dá os mesmos diagramas da Figura IV.3. Como o objetivo deste exemplo é comparar os resultados obtidos pelo programa com os resultados teóricos, não será feito um estudo das tensões na peça.

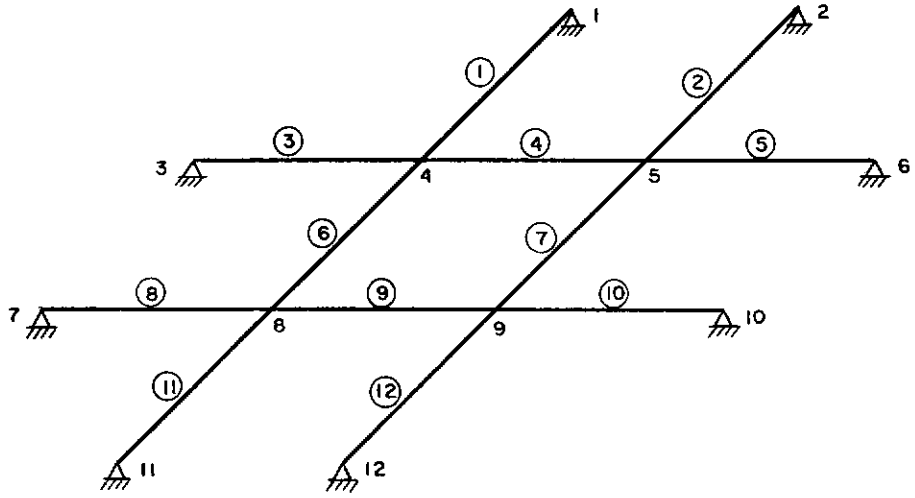
IV.2 - GRELHA

Este segundo exemplo consiste na análise de uma

grelha duplamente simétrica submetida ao carregamento indicado na Figura IV.4a. Esta mesma grelha será analisada por um método que não considere o empenamento da seção transversal, com o objetivo de comparar os esforços e as tensões nas seções mais solicitadas. Para analisar a grelha, os elementos e os nós que a compõem são numerados de acordo com a Figura IV.4b.



a) Dimensões e cargas



b) Numeração dos nós e dos elementos

Figura IV.4 - Exemplo 2: Grelha

Cada apoio impede o deslocamento linear o o giro em torno do eixo longitudinal, da extremidade do elemento que chega nele.

As peças da grelha são perfis VS 500 x 97, da FEM. A seção transversal dos elementos, assim como suas propriedades geométricas, está indicada na Figura IV.5. O módulo de elasticidade longitudinal vale $E = 2.100.000\ kgf/cm^2$ e o módulo de elasticidade transversal é $G = 807.700\ kgf/cm^2$.

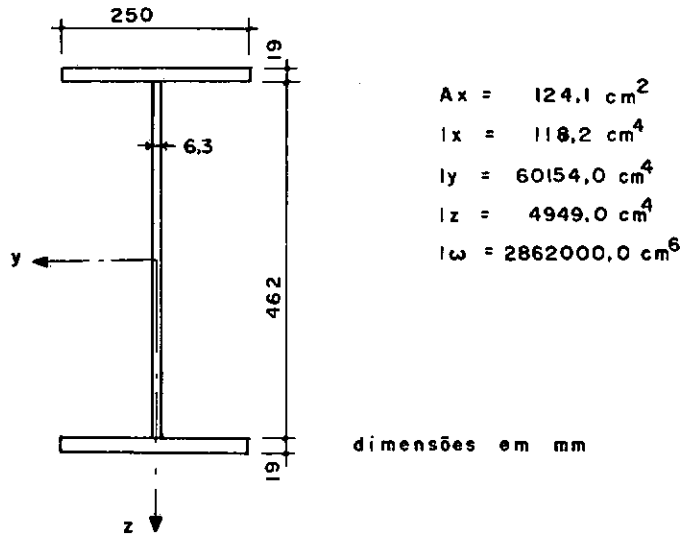


Figura IV.5 - Propriedades geométricas do perfil VS 500 x 97

A análise da grelha sem considerar o empenamento foi efetuada pelo sistema LORANE [1]. Os diagramas de solicitações obtidos estão na Figura IV.6. Os momentos fletores M_y estão traçados do lado das fibras comprimidas para facilitar a visualização dos mesmos. A convenção dos esforços positivos está indicada ao lado dos diagramas.

Os resultados obtidos pelo programa para elementos de paredes delgadas estão representados na Figura IV.7. O diagrama de esforços cortantes não está representando por ser idên

tico ao diagrama da Figura IV.6.

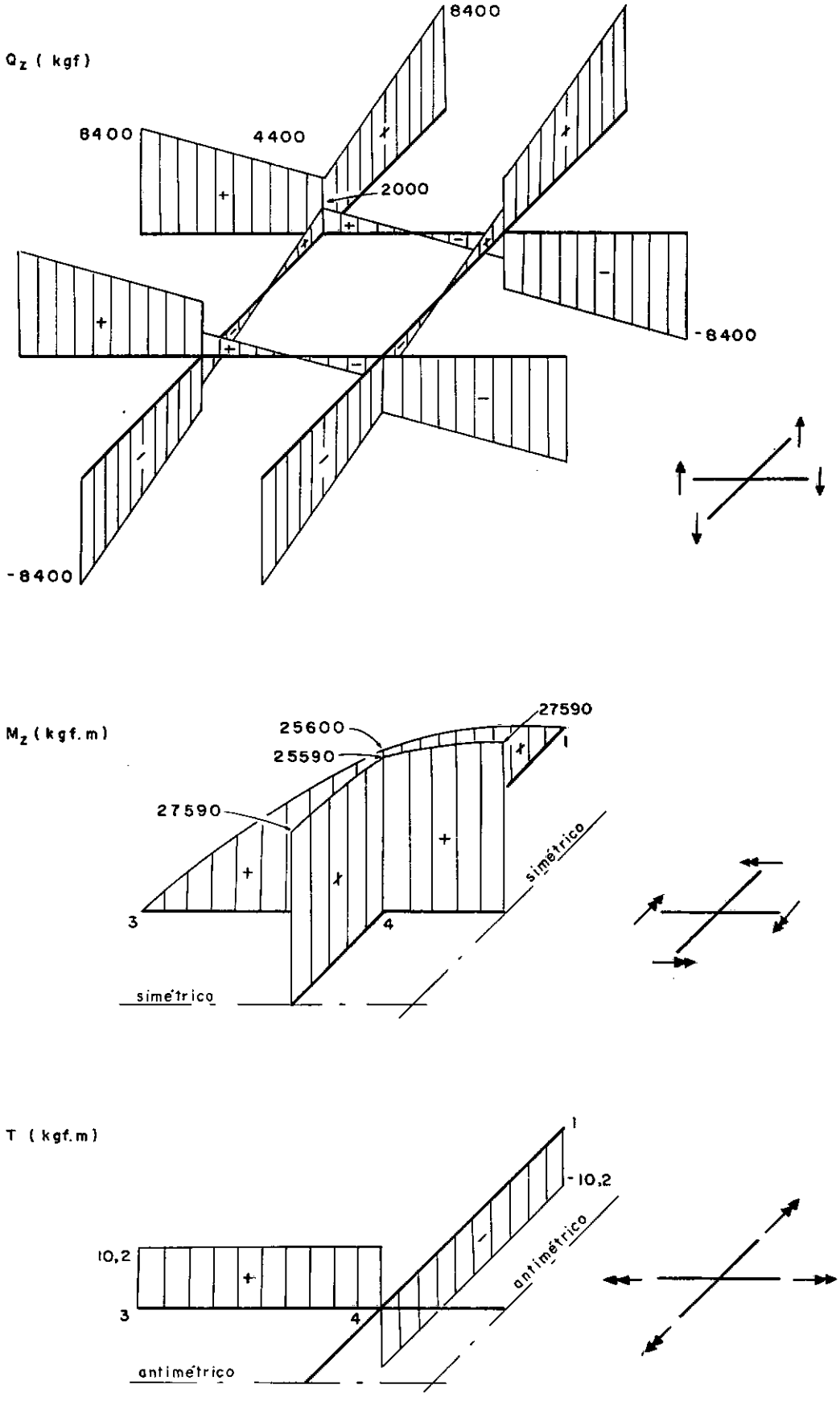


Figura IV.6 - Esforços na grelha admitindo seções planas

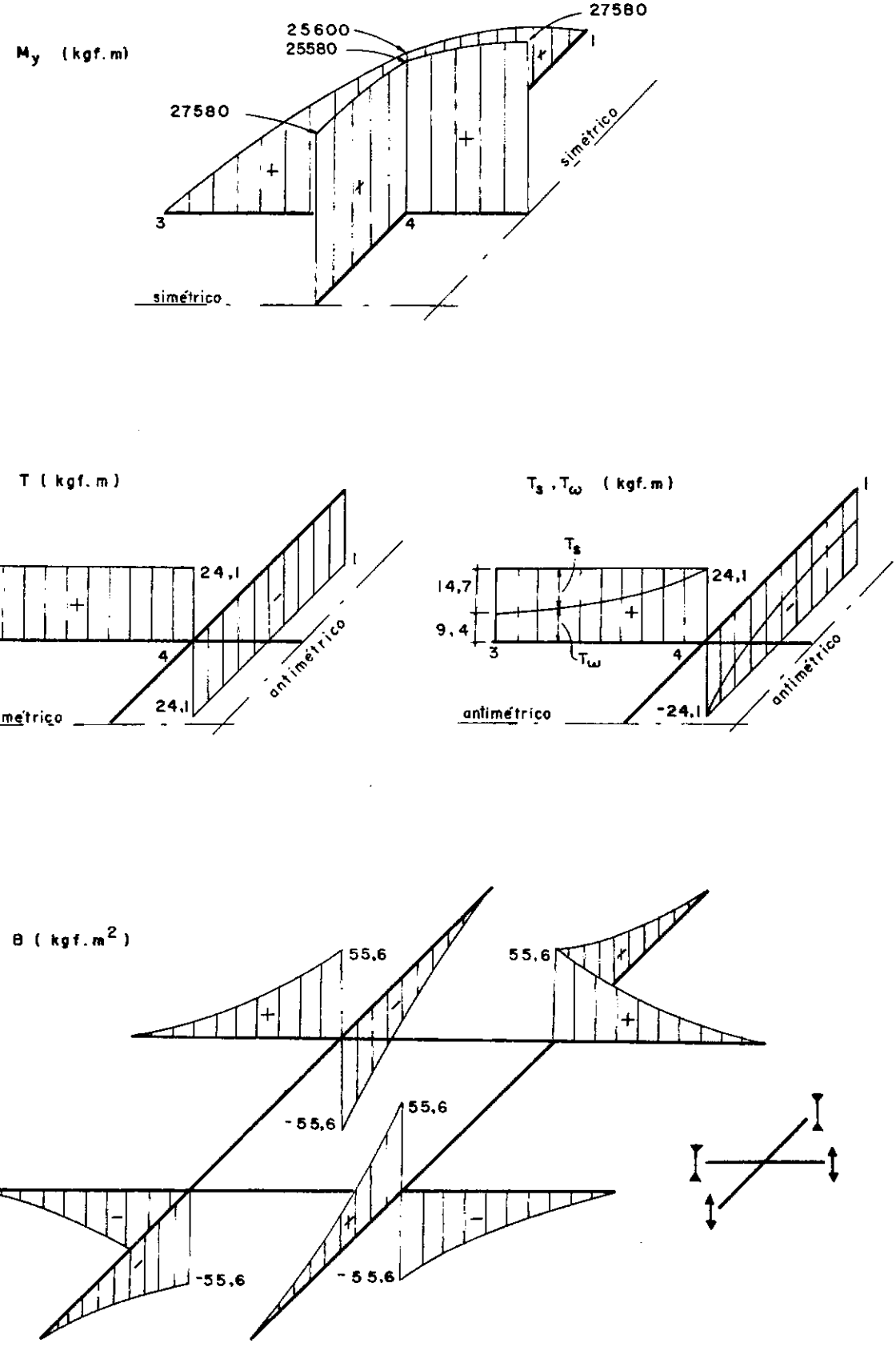


Figura IV.7 - Esforços na grelha considerando o empena mento das seções

Os diagramas da Figura IV.8 são necessários para a determinação das tensões na seção transversal das barras:

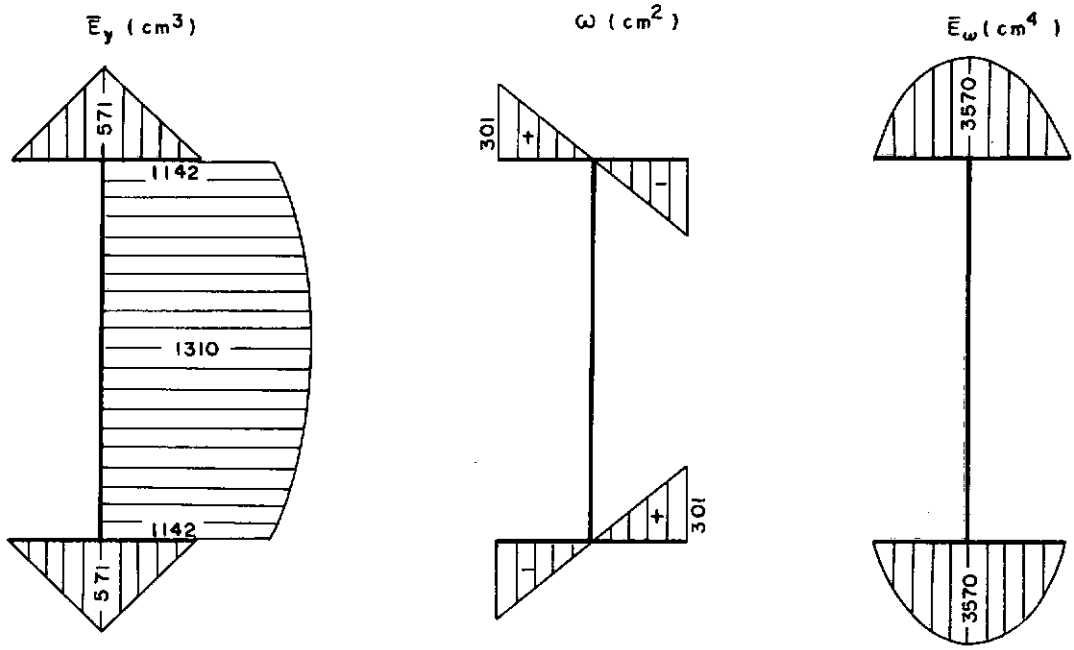


Figura IV.8 - Diagramas de $\bar{E}_y$, ω e $\bar{E}_\omega$ para o perfil VS 500 x 97

Devido aos esforços da Figura IV.6, as tensões de cisalhamento máximas são:

$$\tau_{alma} = \frac{8400 \cdot 1310}{0{,}63 \cdot 60154} + \frac{1020 \cdot 0{,}63}{118{,}2} = 296 \text{ kgf/cm}^2$$

e

$$\tau_{flange} = \frac{8400 \cdot 571}{1{,}9 \cdot 60154} + \frac{1020 \cdot 1{,}9}{118{,}2} = 58 \text{ kgf/cm}^2$$

No nó 4 a tensão normal máxima é:

no (Figura IV.9a) e a um carregamento perpendicular a este pla no (Figura IV.9b). O pórtico será analisado pelo programa aqui desenvolvido e também por um programa que considere válida a hipótese das seções planas [1]. Assim como no exemplo anterior, é realizada uma comparação entre os esforços e as tensões obtidas pelos dois métodos de análise. A numeração dos nós e das barras do pórtico para a análise do computador é indicada na Figura IV.9c.

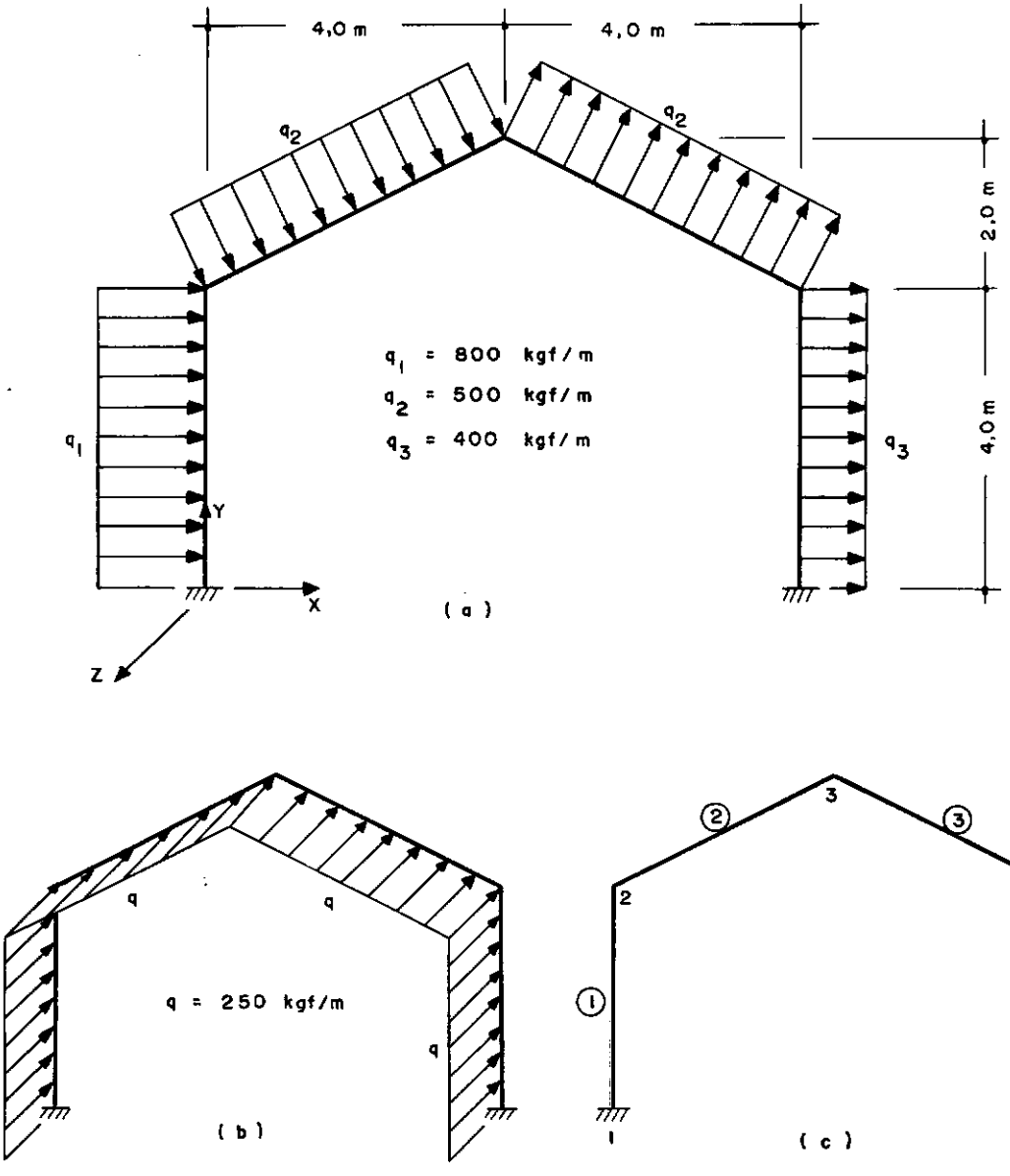


Figura IV.9 - Exemplo 3 - Pórtico plano: (a) Dimensões e cargas no plano; (b) Cargas perpendiculares; (c) Numeração dos nós e dos elementos.

$$\sigma = \frac{2560000 \cdot 25}{60154} = 1064 \text{ kgf/cm}^2$$

Quando a teoria dos elementos de paredes delgadas é considerada as tensões máximas passam a ser:

$$\tau_{alma} = \frac{8400 \cdot 1310}{0{,}63 \cdot 60154} + \frac{1470 \cdot 0{,}63}{118{,}2} = 298 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{flange} = \frac{8400 \cdot 571}{1{,}9 \cdot 60154} + \frac{1470 \cdot 1{,}9}{118{,}2} + \frac{940 \cdot 3570}{1{,}9 \cdot 2862000} = 66 \text{ kgf/cm}^2$$

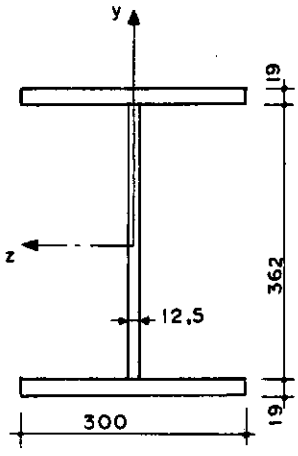
$$\sigma = \frac{2560000 \times 25}{60154} + \frac{556000 \cdot 301}{2862000} = 1122 \text{ kgf/cm}^2$$

Comparando-se as tensões obtidas neste exemplo vê-se que as tensões de cisalhamento na alma e na flange sofrem um aumento de 0,7% e 14%, respectivamente. A tensão normal é majorada em 5,5%. Neste exemplo o acréscimo de tensões que ocorre é pouco significativo, porém nem sempre isto ocorre. No próximo exemplo é analisada uma estrutura onde o acréscimo de tensões é expressivo.

IV.3 - PÓRTICO PLANO

O pórtico plano biengastado, analisado neste exemplo, está submetido a um carregamento contido no seu próprio pla

O pórtico é constituído de um perfil CVS 400 x 125, da FEM. As propriedades geométricas e as dimensões da seção transversal desse perfil estão dadas na Figura IV.10. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material são, respectivamente, E = 2100000 kgf/cm^2 e G = 807700 kgf/cm^2.



Ax = 159,3 cm^2
Ix = 162,0 cm^4
Iy = 8556,0 cm^4
Iz = 46347,0 cm^4
Iω = 3103000 cm^6

Figura IV.10 - Propriedades geométricas do perfil VS 400 x 125

Os diagramas da Figura IV.11 são necessários para determinar as tensões normal e de cisalhamento na seção transversal do elemento.

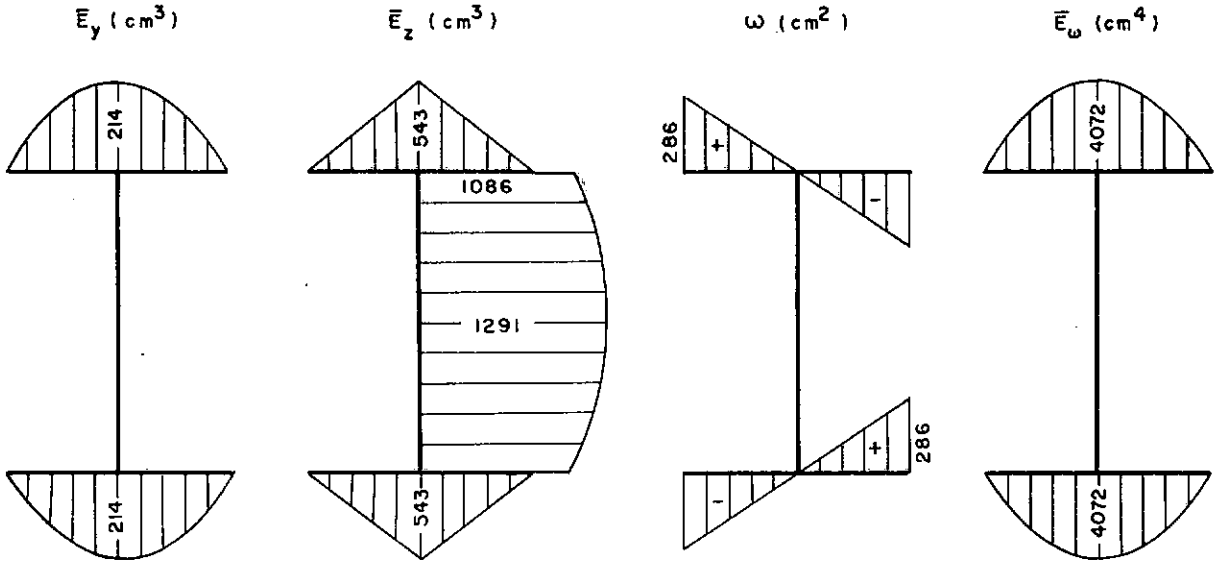


Figura IV.11 - Diagramas de $\bar{E}_y$, $\bar{E}_z$, ω e $\bar{E}_\omega$ para o perfil VS 400x125

A análise do pórtico pelo sistema LORANE, para as cargas contidas no seu plano, resulta nos diagramas da Figura IV.12:

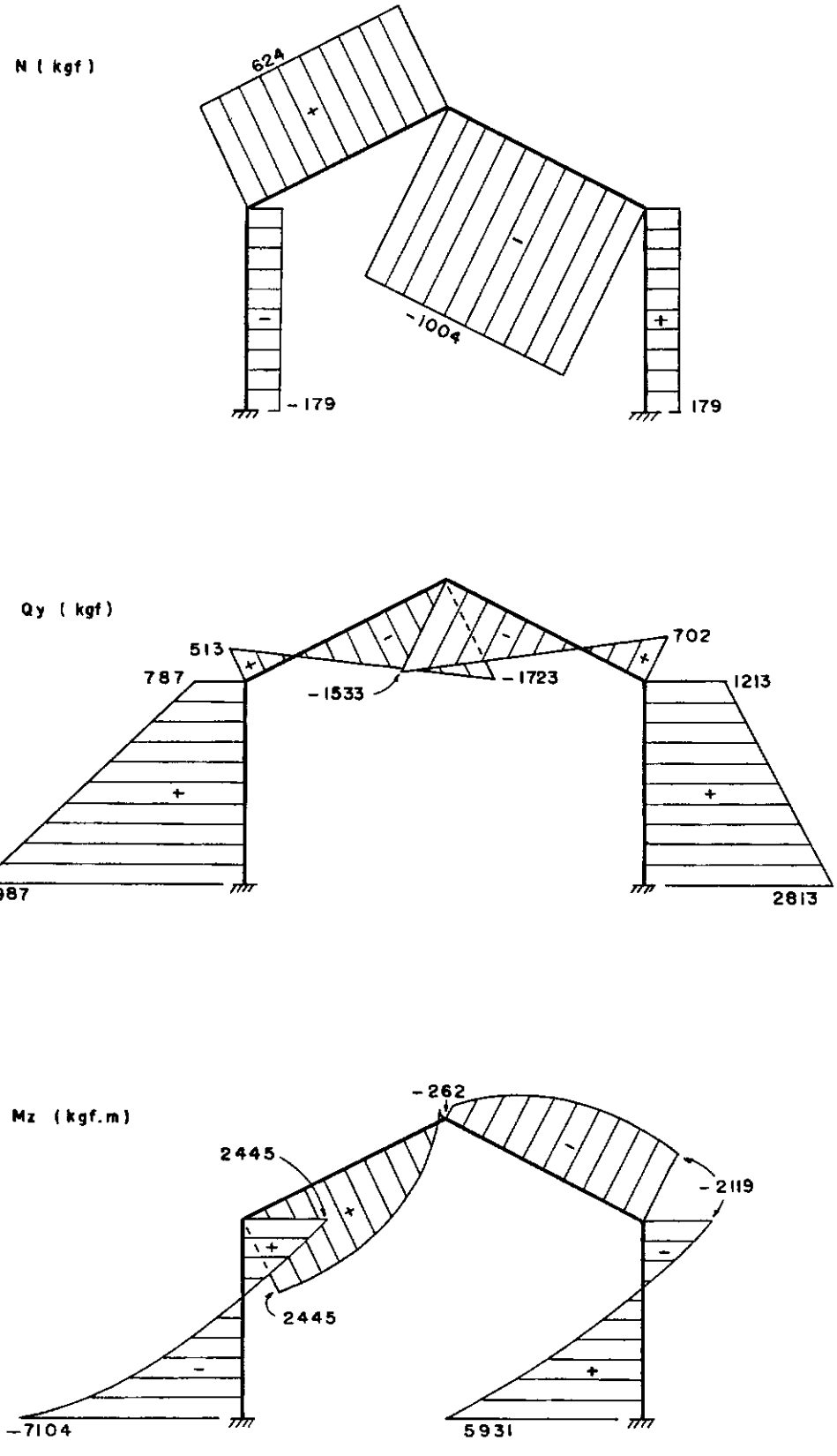


Figura IV.12 - Esforços no pórtico, causados pelas cargas contidas no seu plano, admitindo secões planas

O carregamento perpendicular ao plano da estrutura leva aos diagramas de esforços da Figura IV.13:

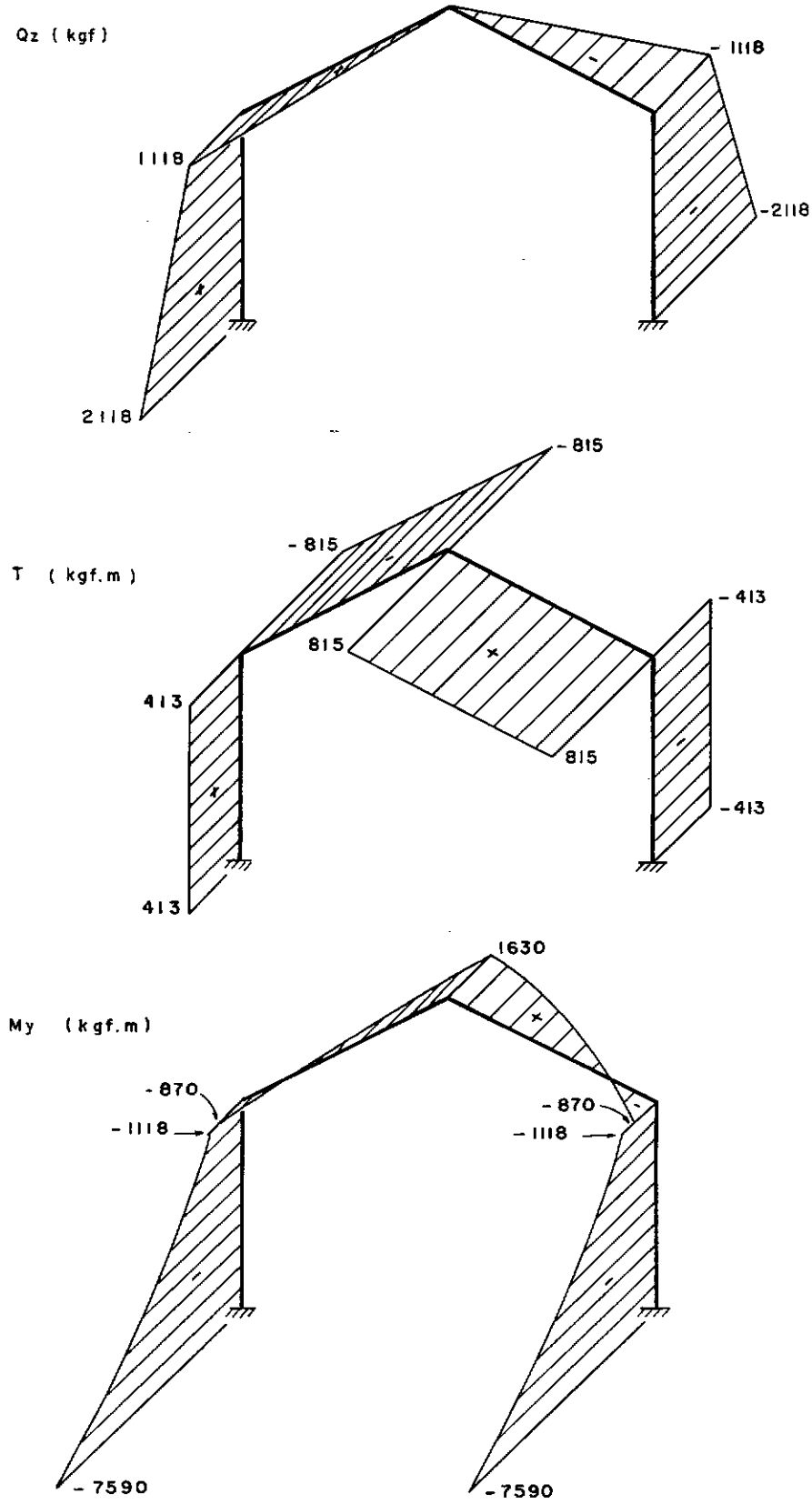


Figura IV.13 - Esforços no pórtico, devidos às cargas perpendiculares, admitindo seções planas

Na análise do pórtico pelo programa que considera o efeito de empenamento da seção transversal, os diagramas dos esforços N, Q_y e M_z, devidos ao carregamento no plano da estrutura, coincidem com os respectivos diagramas da Figura IV.12. Isto ocorre porque estes esforços independem da teoria dos elementos de paredes delgadas. Quando o carregamento perpendicular à estrutura é considerado há uma interação entre o momento fletor M_y e o momento torsor T e, por isso, esses diagramas sofrem alterações. Na Figura IV.14 estão traçados os diagramas dos esforços decorrentes do carregamento perpendicular à estrutura. O diagrama do esforço cortante Q_z é omitido porque coincide com o respectivo diagrama da Figura IV.13.

As tensões de cisalhamento e a tensão normal, devido à análise do pórtico pelo sistema LORANE, são dadas a seguir. Ambas tensões serão analisadas no nó 1 (engaste).

$$\tau_{alma} = \frac{3987 \,.\, 1291}{1{,}25 \,.\, 46347} + \frac{41300 \,.\, 1{,}25}{162} = 408 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{flange} = \frac{3987 \,.\, 543}{1{,}9 \,.\, 46347} + \frac{2118 \,.\, 214}{1{,}9 \,.\, 8556} + \frac{41300 \,.\, 1{,}9}{162} = 484 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{179}{159{,}3} + \frac{710400 \,.\, 20}{46347} + \frac{759000 \,.\, 15}{8556} = 1638 \text{ kgf/cm}^2$$

Quando são considerados os resultados obtidos pelo programa para elementos de paredes delgadas as tensões no nó 1

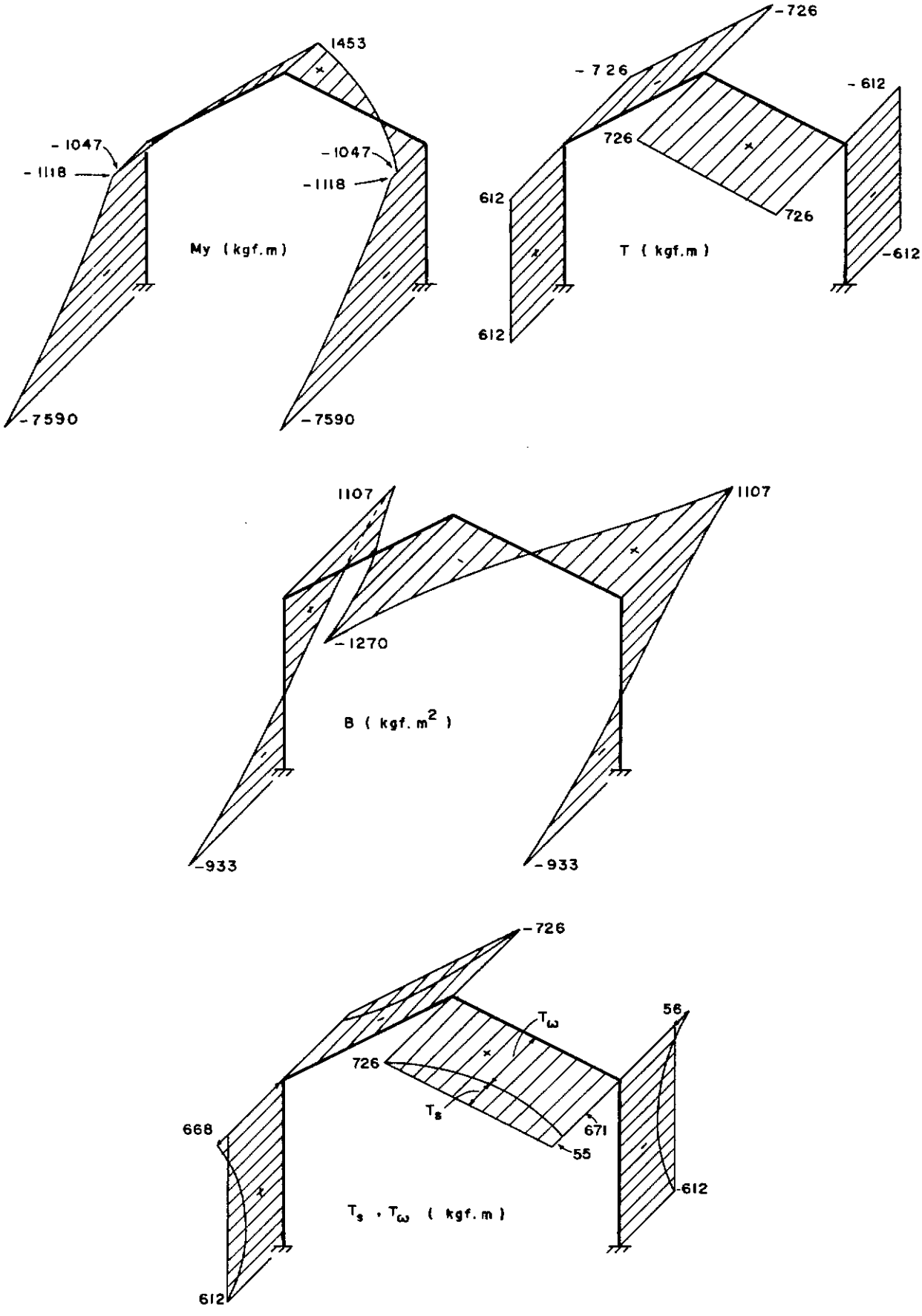


Figura IV.14 - Esforços no pórtico considerando o empenamento das seções

passam a ser:

$$\tau_{alma} = \frac{3987 \cdot 1291}{1,25 \cdot 46347} = 89 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\tau_{flange} = \frac{3987 \cdot 543}{1,9 \cdot 46347} + \frac{2118 \cdot 214}{1,9 \cdot 8556} + \frac{61200 \cdot 4072}{1,9 \cdot 3103000} = 95 \text{ kgf/cm}^2$$

e

$$\sigma = \frac{179}{159,3} + \frac{710400 \cdot 20}{46347} + \frac{759000 \cdot 15}{8556} + \frac{9930000 \cdot 286}{3103000} = 2554 \text{ kgf/cm}^2$$

Na comparação entre as tensões obtidas pelos 2 mé todos de análise obtém-se uma redução de 78% na tensão de cisalhamento na alma do perfil e de 80% na flange. Isto ocorre por que no engaste só há o momento de flexo-torção T_ω, sendo nulo o momento torsor de Saint Venant T_s. Como, na primeira análise, as tensões de cisalhamento devidas a T_s são predominantes, a au sência deste momento torsor implica numa diminuição das tensões de cisalhamento. A tensão normal, por sua vez, sofre um acréscimo de 56% no ponto analisado. Este acréscimo é, portanto, ex pressivo e, dependendo das características de resistência do material, pode causar a ruptura da peça. Aumentos mais significa tivos que o que ocorre no nó 1 podem ocorrer. No ponto onde o bimomento é máximo (nó 3), por exemplo, a tensão normal passa de 301 kgf/cm^2 para 1440 kgf/cm^2, o que implica num aumento de 378%.

O resultado das comparações entre as tensões obtidas nas análises dos exemplos 2 e 3 estão resumidos nas Tabelas a seguir. A Tabela IV.1, correspondente à grelha, apresenta as tensões de cisalhamento nas seções onde o esforço cortante é máximo (apoios) e as tensões normais nos pontos onde o bimomento é máximo (nós centrais).

Tabela IV.1 - Tensões obtidas no exemplo 2 (em kgf/cm²)

Tensão	Admitindo seções planas	Considerando o empenamento	Variação (%)
τ_{alma}	296	298	+ 0,7
τ_{flange}	58	66	+14,0
σ	1064	1122	+ 5,5

Na Tabela IV.2 tanto as tensões de cisalhamento quanto a tensão normal foram calculadas no nó 1 do pórtico plano:

Tabela IV.2 - Tensões obtidas no exemplo 3 (em kgf/cm²)

Tensão	Admitindo seções planas	Considerando o empenamento	Variação (%)
τ_{alma}	408	89	-78,0
τ_{flange}	484	95	-80,0
σ	1638	2554	+56,0

IV.4 - CONCLUSÕES

Dentro das hipóteses da teoria dos elementos de paredes delgadas e da consideração de que o empenamento é igual em todas as peças que concorrem num nó, o programa de análise aqui desenvolvido pode ser admitido como exato, ou seja, seus resultados são iguais aos obtidos por uma análise teórica que faça as mesmas suposições.

A importância do empenamento da seção transversal ficou clara na análise dos exemplos 2 e 3, principalmente neste último onde as tensões normais sofrem um acréscimo que não deve ser desprezado. Na análise das tensões tangenciais devidas aos momentos T_s e T_ω nota-se que as tensões do primeiro predominam sobre as tensões do segundo. Portanto, quando houver uma redução no momento torsor de Saint Venant T_s a tendência é de que também ocorra uma redução nas tensões de cisalhamento na seção transversal.

O programa para análise de estruturas com elementos de paredes delgadas propicia um meio eficiente para a determinação dos hiperestáticos e para o traçado dos diagramas de solicitações. Para estruturas com um alto grau de hiperestaticidade a análise manual é impraticável e, nestes casos, o programa revela toda sua utilidade.

APÊNDICE A

OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ PARA A TORÇÃO NÃO-UNIFORME

A determinação dos coeficientes de rigidez para a torção não-uniforme é feita mediante a substituição das condições de contorno apropriadas na Eq. (I.15). Estes coeficientes de rigidez constituem as reações que aparecem nas extremidades de um elemento biengastado quando um deslocamento unitário é imposto numa das extremidades. Como não há cargas aplicadas no elemento a Eq. (I.15) torna-se:

$$E \cdot I_\omega \cdot \phi^{iv} - G \cdot J_t \cdot \phi'' = 0 \qquad (A.1a)$$

ou

$$\phi^{iv} - \gamma^2 \cdot \phi'' = 0 \qquad (A.1b)$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\frac{G \cdot J_t}{E \cdot I_\omega}}$$

A solução da equação é:

$$\phi = C_1 + C_2 \cdot \gamma x + C_3 \cdot \operatorname{ch} \gamma x + C_4 \operatorname{sh} \gamma x \qquad (A.2)$$

onde ϕ é a rotação em torno do eixo x do elemento. Da Equa-

ção (A.2) obtém-se

$$\phi' = C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma \cdot \text{sh}\,\gamma x + C_4 \cdot \gamma \cdot \text{ch}\,\gamma x$$

$$\phi'' = C_3 \cdot \gamma^2 \cdot \text{ch}\,\gamma x + C_4 \cdot \gamma^2 \cdot \text{sh}\,\gamma x$$

$$\phi''' = C_3 \cdot \gamma^3 \cdot \text{sh}\,\gamma x + C_4 \cdot \gamma^3 \cdot \text{ch}\,\gamma x$$

$$B = -E \cdot I_\omega \cdot \phi'' = -G\,J_t \cdot (C_3 \cdot \text{ch}\,\gamma x + C_4 \cdot \text{sh}\,\gamma x)$$

$$T_\omega = \frac{dB}{dx} = -G\,J_t \cdot (C_3 \cdot \gamma \cdot \text{sh}\,\gamma x + C_4 \cdot \gamma \cdot \text{ch}\,\gamma x)$$

$$T_s = G\,J_t \cdot \phi' = G\,J_t \cdot (C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma \cdot \text{sh}\,\gamma x + C_4 \cdot \gamma \cdot \text{ch}\,\gamma x)$$

$$T = T_s + T_\omega = C_2 \cdot G\,J_t\,\gamma$$

O sentido positivo de ϕ e dos esforços que aparecem na seção transversal estão indicadas na Figura A.1.

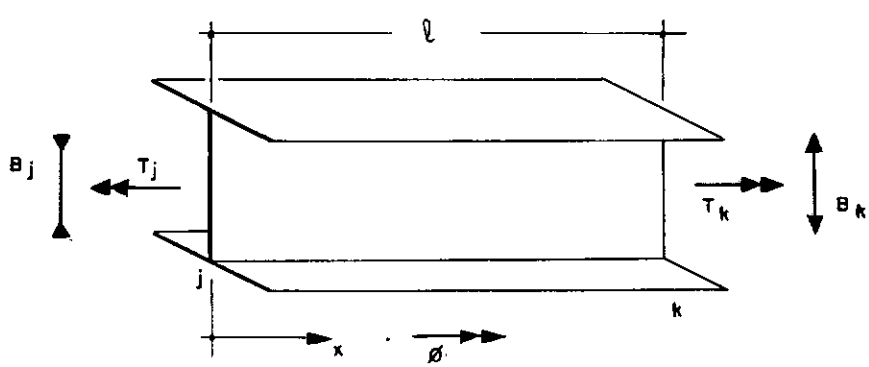


Figura A.1 - Esforços de extremidade e ângulo de torção

Dando-se um deslocamento $\phi = \phi_0$ para a extremidade j do elemento i e mantendo-se $\phi_j' = \phi_k = \phi_k' = 0$, tem-se

$$C_1 = \phi_0 - C_3 \qquad (a)$$

$$C_2 = -C_4 \qquad (b)$$

$$C_1 + C_2 \cdot \gamma\ell + C_3 \cdot \text{ch}\,\gamma\ell + C_4 \cdot \text{sh}\,\gamma\ell = 0 \qquad (c)$$

e

$$C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma \cdot \text{sh}\,\gamma\ell + C_4 \cdot \gamma \cdot \text{ch}\,\gamma\ell = 0 \qquad (d)$$

Substituindo (a) e (b) em (c) obtêm-se:

$$C_3 \cdot (\text{ch}\,\gamma\ell - 1) + C_4 \cdot (\text{sh}\,\gamma\ell - \gamma\ell) = -\phi_0 \qquad (e)$$

Fazendo a mesma substituição em (d), vem

$$C_3 = C_4 \frac{(1 - \text{ch}\,\gamma\ell)}{\text{sh}\,\gamma\ell} \qquad (f)$$

Substituindo (f) em (e) chega-se à

$$C_4 = \frac{\phi_0 \cdot \text{sh}\,\gamma\ell}{2(1 - \text{ch}\,\gamma\ell) + \gamma\ell \cdot \text{sh}\,\gamma\ell} \qquad (g)$$

e

$$C_3 = \frac{\phi_0 \cdot (1 - \text{ch}\,\gamma\ell)}{2(1 - \text{ch}\,\gamma\ell) + \gamma\ell \cdot \text{sh}\,\gamma\ell} \qquad (h)$$

Com os valores de C_2 (= $-C_4$), C_3 e C_4 determinados, os esforços B e T podem ser obtidos da Eqs. (A.3):

$$B = G \cdot J_t \cdot \frac{ch\ \gamma(\ell - x) - ch\ \gamma x}{K} \cdot \phi_0 \qquad (i)$$

$$T = -G \cdot J_t \cdot \gamma \cdot \frac{sh\ \gamma\ell}{K} \cdot \phi_0 \qquad (j)$$

sendo $K = 2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell$. O sentido positivo dos coeficientes de rigidez está indicado na Figura A.2. Comparando estes sentidos com os da Figura A.1 e fazendo $\phi_0 = 1$ tem-se que

$$r_{4,4} = -T_j = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \gamma \cdot sh\ \gamma\ell \qquad (A.4)$$

$$r_{7,4} = B_j = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (ch\ \gamma\ell - 1) \qquad (A.5)$$

$$r_{11,4} = T_k = -\frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \gamma \cdot sh\ \gamma\ell \qquad (A.6)$$

e

$$r_{14,4} = -B_k = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (ch\ \gamma\ell - 1) \qquad (A.7)$$

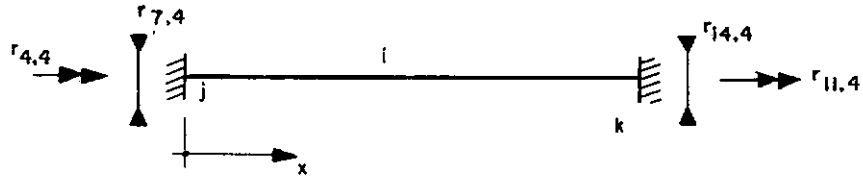


Figura A.2 - Coeficientes de rigidez para $\phi_j = 1$

Impondo-se um deslocamento $\phi' = \phi'_0$ para a extremidade j do elemento i e mantendo-se $\phi_j = \phi_k = \phi'_k = 0$ tem-se as seguintes relações:

$$C_1 = -C_3 \qquad (a)$$

$$C_2 = \frac{\phi'_0}{\gamma} - C_4 \qquad (b)$$

$$C_1 + C_2 \cdot \gamma\ell + C_3 \cdot \text{ch}\ \gamma\ell + C_4 \cdot \text{sh}\ \gamma\ell = 0 \qquad (c)$$

e

$$C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma \cdot \text{sh}\ \gamma\ell + C_4 \cdot \gamma \cdot \text{ch}\ \gamma\ell = 0 \qquad (d)$$

Substituindo (a) e (b) em (d) tem-se:

$$C_3 = -C_4 \cdot \frac{\text{ch}\ \gamma\ell - 1}{\text{sh}\ \gamma\ell} - \frac{\phi'_0}{\gamma \cdot \text{sh}\ \gamma\ell} \qquad (e)$$

Finalmente, substituindo os valores de C_1, C_2 e C_3 em (c) chega-se à

$$C_4 = \frac{\phi'_0}{\gamma} \cdot \frac{1 - ch\ \gamma\ell + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell}{2(1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell} \qquad (f)$$

Daí

$$C_3 = -\frac{\phi'_0}{\gamma} \cdot \frac{\gamma\ell \cdot ch\ \gamma\ell - sh\ \gamma\ell}{2(1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell} \qquad (g)$$

e

$$C_2 = \frac{\phi'_0}{\gamma} \cdot \frac{1 - ch\ \gamma\ell}{2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell} \qquad (h)$$

Os esforços B e T são então determinados:

$$B = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\gamma\ell \cdot ch\ \gamma(\ell - x) - sh\ \gamma(\ell - x) - sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot \phi'_0 \qquad (i)$$

$$T = -\frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (ch\ \gamma\ell - 1) \cdot \phi'_0 \qquad (j)$$

onde

$$K = 2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell \cdot sh\ \gamma\ell \cdot$$

Os coeficientes de rigidez indicados na Figura A.3 valem:

$$r_{4,7} = -T_j = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (ch\ \gamma\ell - 1) \qquad (A.8)$$

$$r_{7,7} = B_j = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\gamma\ell \cdot ch\ \gamma\ell - sh\ \gamma\ell}{\gamma} \qquad (A.9)$$

$$r_{11,7} = T_k = -\frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (ch\ \gamma\ell - 1) \qquad (A.10)$$

e

$$r_{14,7} = -B_k = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{sh\ \gamma\ell - \gamma\ell}{\gamma} \qquad (A.11)$$

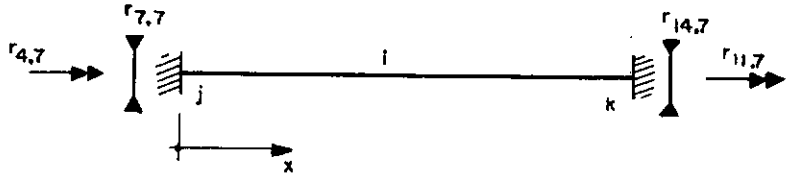


Figura A.3 - Coeficientes de rigidez para $\phi_j' = 1$

Aplicando-se deslocamentos unitários na extremidade k do elemento i calcula-se os coeficientes de rigidez restantes. A determinação destes coeficientes é análoga às anteriores e, assim, apenas seus valores finais são dados. Para o elemento da Figura A.4, onde $\phi_k = 1$ e $\phi_j = \phi_j' = \phi_k' = 0$, os coe

ficientes de rigidez são

$$r_{4,11} = - \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \gamma \cdot \text{sh } \gamma\ell \qquad (A.12)$$

$$r_{7,11} = - \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (\text{ch } \gamma\ell - 1) \qquad (A.13)$$

$$r_{11,11} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \gamma \cdot \text{sh } \gamma\ell \qquad (A.14)$$

e

$$r_{14,11} = - \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (\text{ch } \gamma\ell - 1) \qquad (A.15)$$

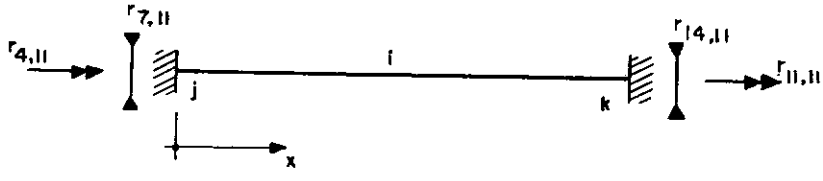


Figura A.4 - Coeficientes de rigidez para $\phi_k = 1$

Para $\phi'_k = 1$ e $\phi_j = \phi'_j = \phi'_k = 0$ (Figura A.5) tem-se

$$r_{4,14} = \frac{G\ J_t}{K} \cdot (\text{ch } \gamma\ell - 1) \qquad (A.16)$$

$$r_{7,14} = \frac{G\ J_t}{K} \cdot \frac{\text{sh } \gamma\ell - \gamma\ell}{\gamma} \qquad (A.17)$$

$$r_{11,\,14} = -\frac{G\,J_t}{K} \cdot (ch\ \gamma\ell - 1) \qquad (A.18)$$

e

$$r_{14,\,14} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\gamma\ell \cdot ch\ \gamma\ell - sh\ \gamma\ell}{\gamma} \qquad (A.19)$$

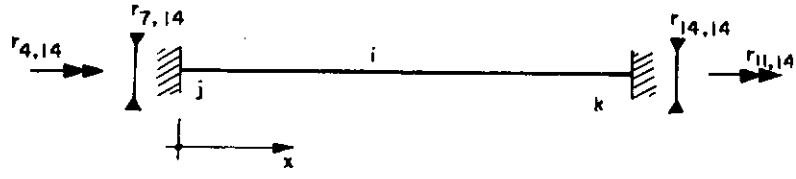


Figura A.5 - Coeficientes de rigidez para $\phi'_k = 1$

Os coeficientes de rigidez do elemento estão resumidos na Tabela A.1 a seguir.

Tabela A.1 - Coeficientes de rigidez para a torção não-uniforme

Condições de Contorno	Coeficientes de Rigidez
$\phi_j = 1$ $\phi'_j = \phi_k = \phi'_k = 0$	$r_{4,4} = -r_{11,4} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \gamma \cdot \text{sh}\,\gamma\ell$ $r_{7,4} = r_{14,4} = \frac{G\,J_t}{K} \cdot (\text{ch}\,\gamma\ell - 1)$
$\phi'_j = 1$ $\phi_j = \phi_k = \phi'_k = 0$	$r_{4,7} = -r_{11,7} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot (\text{ch}\,\gamma\ell - 1)$ $r_{7,7} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\gamma\ell \cdot \text{ch}\,\gamma\ell - \text{sh}\,\gamma\ell}{\gamma}$ $r_{14,7} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\text{sh}\,\gamma\ell - \gamma\ell}{\gamma}$
$\phi_k = 1$ $\phi_j = \phi'_j = \phi'_k = 0$	$r_{4,11} = -r_{11,11} = -\frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \gamma \cdot \text{sh}\,\gamma\ell$ $r_{7,11} = r_{14,11} = -\frac{G J_t}{K} \cdot (\text{ch}\,\gamma\ell - 1)$
$\phi'_k = 1$ $\phi_j = \phi'_j = \phi_k = 0$	$r_{4,14} = -r_{11,14} = \frac{G J_t}{K} \cdot (\text{ch}\,\gamma\ell - 1)$ $r_{7,14} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\text{sh}\,\gamma\ell - \gamma\ell}{\gamma}$ $r_{14,14} = \frac{G \cdot J_t}{K} \cdot \frac{\gamma\ell \cdot \text{ch}\,\gamma\ell - \text{sh}\,\gamma\ell}{\gamma}$

onde

$$\gamma = \sqrt{\frac{G \cdot J_t}{E \cdot I_\omega}} \qquad \text{e} \qquad K = 2\,(1 - \text{ch}\,\gamma\ell) + \gamma\ell \cdot \text{sh}\,\gamma\ell$$

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSFERÊNCIA DE CARGAS PARA A TORÇÃO NÃO-UNIFORME

Um coeficiente de transferência T_{ij} representa a reação que aparece na direção i quando é aplicada uma carga unitária na direção j. Estes coeficientes são obtidos por intermédio da equação de equilíbrio à torção não-uniforme associada a uma peça biengastada. Esta equação, na sua forma mais geral, é

$$\phi^{iv} - \gamma^2 \cdot \phi'' = \frac{m_t - m_\omega}{E \cdot I_\omega} \qquad (B.1)$$

onde $\gamma = \sqrt{\dfrac{G \cdot J_t}{E \cdot I_\omega}}$

m_t = momento torsor distribuído

m_ω = bimomento distribuído

Para a Eq. (B.1) os sentidos positivos dos esforços de extremidade e das cargas aplicadas num elemento estão indicados na Figura B. 1.

A solução da Eq. (B.1) é composta de 2(duas) parcelas, ϕ_h e ϕ_p, sendo ϕ_h a solução da equação homogênea associada e ϕ_p a solução particular:

$$\phi = \phi_h + \phi_p \qquad (B.2)$$

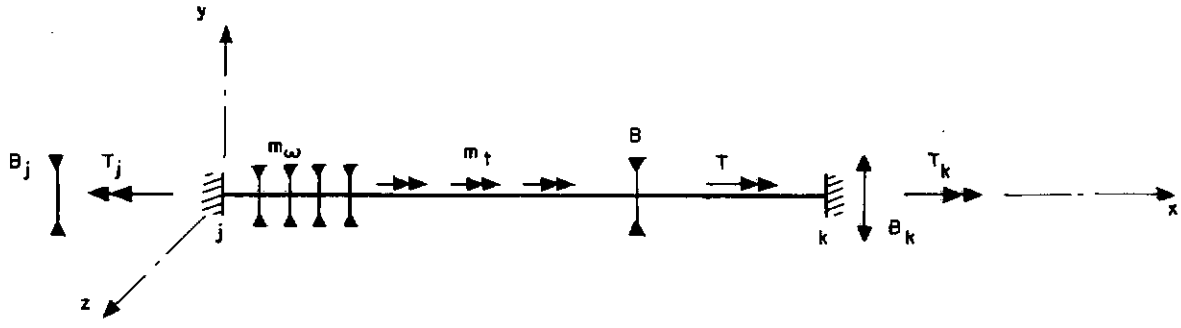


Figura B.1 - Esforços de extremidades e cargas no elemento

A solução da equação homogênea é

$$\phi_h = C_1 + C_2 \cdot \gamma x + C_3 \cdot \text{ch}\, \gamma x + C_4 \cdot \text{sh}\, \gamma x \qquad (B.3)$$

A solução particular ϕ_p depende das equações que definem m_t e m_ω e, portanto, é diferente para cada caso.

As equações de ϕ, ϕ', B e T, obtidas da equação homogênea, são as mesmas equações (A.3). No ponto $x = 0$ estas equações dão

$$\phi_0 = C_1 + C_3$$

$$\phi'_0 = C_2\, \gamma + C_4 \cdot \gamma$$

$$B_0 = -C_3 \cdot G\, J_t$$

e

$$T_0 = T$$

Daí tem-se

$$C_1 = \phi_0 + \frac{B_0}{G \cdot J_t}$$

$$C_2 = \frac{T_0}{\gamma \cdot G \cdot J_t}$$

$$C_3 = -\frac{B_0}{G \cdot J_t}$$

e

$$C_4 = \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\phi_0' - \frac{T_0}{G \cdot J_t}\right)$$

Substituindo nas Eqs. (A.3) tem-se ϕ, ϕ', B e T em função de ϕ_0, ϕ_0', B_0 e T_0:

$$\left.\begin{aligned}
\phi &= \phi_0 + \phi_0' \cdot \frac{\text{sh } \gamma x}{\gamma} - \frac{B_0}{G \cdot J_t} \cdot (\text{ch } \gamma x - 1) + \frac{T_0}{G \cdot J_t} \left(x - \frac{\text{sh } \gamma x}{\gamma}\right) \\
\phi' &= \phi_0' \cdot \text{ch } \gamma x - \frac{B_0}{G \cdot J_t} \cdot \gamma \cdot \text{sh } \gamma x + \frac{T_0}{G \cdot J_t} (1 - \text{ch } \gamma x) \\
B &= -\phi_0' \cdot \frac{G \cdot J_t}{\gamma} \cdot \text{sh } \gamma x + B_0 \cdot \text{ch } \gamma x + T_0 \cdot \frac{\text{sh } \gamma x}{\gamma} \\
T &= T_0
\end{aligned}\right\} \quad (B.4)$$

Na obtenção dos coeficientes de transferência aplica-se uma carga unitária no elemento e mantêm-se as demais cargas nulas. A determinação dos coeficientes $T_{4,4}$, $T_{7,4}$, $T_{11,4}$ e $T_{14,4}$ é, portanto, obtida aplicando-se um momento torsor unitário no elemento biengastado (Figura B.2). Neste caso as cargas B, m_t e m_ω são nulas e as Eqs. (B.4) são válidas.

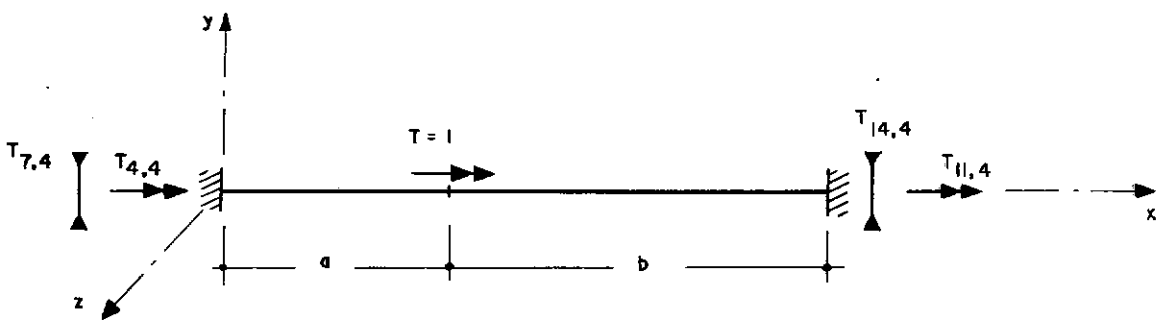


Figura B.2 - Coeficientes de transferência para T

Para o elemento da Figura B.2 as Eqs. (B.4) devem ser aplicadas duas vezes. Uma vez no trecho $0 \leq x \leq a$ e outra para $a \leq x \leq \ell$. Aplicando no primeiro trecho e utilizando as condições de contorno $\phi_0 = \phi_0' = 0$ tem-se

$$\phi(x) = -(ch\ \gamma x - 1).\frac{B_0}{G \cdot J_t} + (x - \frac{sh\ \gamma x}{\gamma}) \cdot \frac{T_0}{G \cdot J_t} \qquad (a)$$

$$\phi'(x) = -\gamma \cdot sh\ \gamma x \cdot \frac{B_0}{G \cdot J_t} + (1 - ch\ \gamma x) \cdot \frac{T_0}{G \cdot J_t} \qquad (b)$$

$$B(x) = ch\ \gamma x \cdot B_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot T_0 \qquad (c)$$

$$T(x) = T_0 \qquad (d)$$

No ponto $x = a$ as condições de continuidade são:

$$\phi_e = \phi_d$$

$$\phi'_e = \phi'_d$$

$$B_e = B_d$$

$$T_e - T = T_d$$

Substituindo x por $x' = x - a$ nas Eqs. (B.4) e fazendo:

$$\phi_0 = \phi_d - \phi_e = 0$$

$$\phi'_0 = \phi'_d - \phi'_e = 0$$

$$B_0 = B_d - B_e = 0$$

e

$$T_0 = T_d - T_e = - T$$

obtém-se

$$\phi(x') = - \left(x' - \frac{\operatorname{sh} \gamma x'}{\gamma}\right) \frac{T}{G \cdot J_t}$$

$$\phi'(x') = -(1 - ch\ \gamma x') \frac{T}{G \cdot J_t}$$

$$B(x') = -\frac{sh\ \gamma x'}{\gamma} \cdot T$$

e

$$T(x') = -T \quad ,$$

que adicionadas às Eqs. (a), (b), (c) e (d), respectivamente, mantêm as condições de continuidade. As equações resultantes para ϕ, ϕ', B e T ficam iguais a

$$\phi = \phi(x) + \phi(x') = -(ch\ \gamma x - 1)\frac{B_0}{G.J_t} + (x - \frac{sh\ \gamma x}{\gamma})\frac{T_0}{G.J_t} - \left|(x' - \frac{sh\ \gamma x'}{\gamma})\frac{T}{G.J_t}\right|_{x \geq a} \qquad (e)$$

$$\phi' = \phi'(x) + \phi'(x') = -\gamma . sh\ \gamma x \cdot \frac{B_0}{G.J_t} + (1 - ch\ \gamma x).\frac{T_0}{G.J_t} - \left|(1 - ch\ \gamma x')\frac{T}{G.J_t}\right|_{x \geq a} \qquad (f)$$

$$B = B(x) + B(x') = ch\ \gamma x \cdot B_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot T_0 - \left|\frac{sh\ \gamma x'}{\gamma} \cdot T\right|_{x \geq a} \qquad (g)$$

e

$$T = T(x) + T(x') = T_0 - \left|T\right|_{x \geq a} \qquad (h)$$

Os valores de B_0 e T_0 são obtidos aplicando as condições de contorno $\phi_\ell = 0$ e $\phi'_\ell = 0$ nas Eqs. (e) e (f), respectivamente,

$$B_0 = \frac{T}{\gamma} \cdot \frac{(\gamma b - sh\ \gamma b)\ .\ (1 - ch\ \gamma\ell) - (1 - ch\ \gamma b)\ .\ (\gamma\ell - sh\ \gamma\ell)}{2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .\ sh\ \gamma\ell}$$

e

$$T_0 = T \cdot \frac{(1 - ch\ \gamma\ell)\ (1 - ch\ \gamma b) + sh\ \gamma\ell\ .\ (\gamma b - sh\ \gamma b)}{2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ sh\ \gamma\ell}$$

Fazendo $T = 1$ os coeficientes $T_{4,4}$, $T_{7,4}$, $T_{11,4}$ e $T_{14,4}$ são então obtidos

$$\left.\begin{aligned}
T_{4,4} &= -T_0 = \frac{(ch\ \gamma\ell - 1)\ .\ (1 - ch\ \gamma b) + sh\ \gamma\ell\ .\ (sh\ \gamma b - \gamma b)}{2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .\ sh\ \gamma\ell} \\
T_{7,4} &= B_0 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(\gamma b - sh\ \gamma b)\ .\ (1 - ch\ \gamma\ell) - (1 - ch\ \gamma b)\ .\ (\gamma\ell - sh\ \gamma\ell)}{2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .\ sh\ \gamma\ell} \\
T_{11,4} &= T_\ell = T_0 - 1 = -T_{4,4} - 1 \\
T_{14,4} &= -B_\ell = -\ ch\ \gamma\ell\ .\ B_0 - \frac{sh\ \gamma\ell}{\gamma} \cdot T_0 + \frac{sh\ \gamma b}{\gamma} = -ch\ \gamma\ell\ .\ T_{7,4} + \frac{sh\ \gamma\ell}{\gamma} \cdot T_{4,4} + \frac{sh\ \gamma b}{\gamma}
\end{aligned}\right\} \quad (B.5)$$

Os coeficientes de transferência devidos a um bi-

momento B, aplicado num ponto qualquer do vão do elemento, estão representados na Figura B.3. A obtenção destes coeficientes é semelhante a dos coeficientes devidos a um momento torsor aplicado.

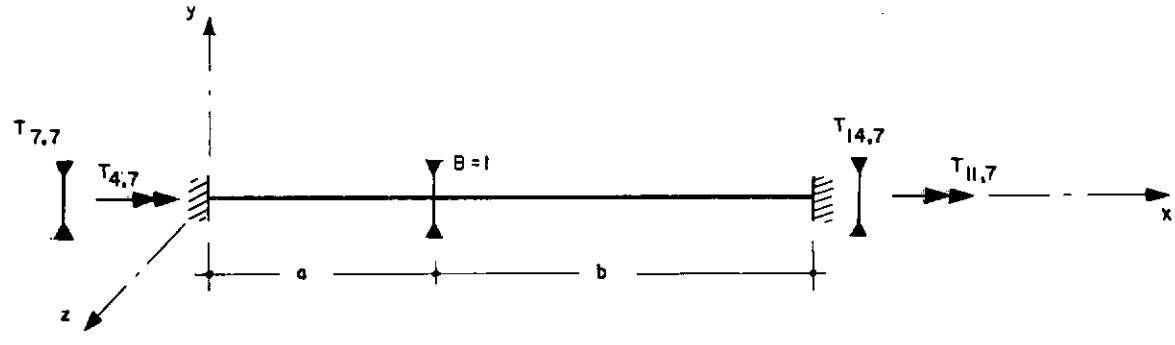


Figura B.3 - Coeficientes de transferência para B

Para o trecho $0 \leq x \leq a$ as equações de $\phi(x)$, $\phi'(x)$, $B(x)$ e $T(x)$ são as mesmas do caso anterior. No ponto de aplicação do bimomento $(x = a)$ as condições de continuidade são:

$$\phi_e = \phi_d$$

$$\phi'_e = \phi'_d$$

$$T_e = T_d$$

e

$$B_e + B = B_d \ .$$

Substituindo x por $x' = x - a$ e considerando

$$\phi_0 = \phi_d - \phi_e = 0 \quad ,$$

$$\phi_0' = \phi_d' - \phi_e' = 0 \quad ,$$

$$T_0 = T_d - T_e = 0 \quad ,$$

e

$$B_0 = B_d - B_e = B \quad ,$$

nas Eqs. (B.4) tem-se:

$$\phi(x') = - (ch\ \gamma x' - 1) \cdot \frac{B}{G \cdot J_t}$$

$$\phi'(x') = - \gamma \cdot sh\ \gamma x' \cdot \frac{B}{G \cdot J_t}$$

$$B(x') = ch\ \gamma x' \cdot B$$

e

$$T(x') = 0$$

Adicionando estas equações às de $\phi(x)$, $\phi'(x)$, $B(x)$ e $T(x)$ chega-se a:

$$\phi=\phi(x)+\phi'(x')=-(ch\gamma x-1).\frac{B_0}{G.J_t}+(x-\frac{sh\ \gamma x}{\gamma}).\frac{T_0}{G.J_t}-\left|(ch\ \gamma x'-1).\frac{B}{G.J_t}\right|_{x\geq a} \quad (i)$$

$$\phi'=\phi'(x)+\phi'(x')=-\gamma.sh\ \gamma x.\frac{B_0}{G.J_t}+(1-ch\ \gamma x).\frac{T_0}{G.J_t}-\left|\gamma..sh\ \gamma x'..\frac{B}{G.J_t}\right|_{x\geq a} \quad (j)$$

$$B = B(x) + B(x') = ch\ \gamma x\ .\ B_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma}\ .\ T_0 + \left|ch\ \gamma x'\ .\ B\right|_{x\geq a} \quad (k)$$

e

$$T = T_0\ . \quad (l)$$

Considerando as condições de contorno $\phi_\ell = \phi'_\ell = 0$ obtém-se

$$B_0 = B\ .\ \frac{(ch\ \gamma b - 1)(1 - ch\ \gamma\ell) + sh\ \gamma b\ .(sh\ \gamma\ell - \gamma\ell)}{2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .\ sh\ \gamma\ell}$$

e

$$T_0 = B\ .\ \gamma\ .\ \frac{sh\ \gamma a + sh\ \gamma b - sh\ \gamma\ell}{2\ (1-ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .\ sh\ \gamma\ell}$$

Substituindo B_0 e T_0 nas Eqs. (k) e (l) e fazendo $B = 1$ determina-se os coeficientes da Figura B.3:

$$T_{4,7} = -\ T_0 = \gamma\ .\ \frac{sh\ \gamma\ell - sh\ \gamma a - sh\ \gamma b}{2(1-ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .sh\ \gamma\ell}$$

$$T_{7,7} = B_0 = \frac{(ch\ \gamma b - 1)(1 - ch\ \gamma \ell) + sh\ \gamma b\ (sh\ \gamma \ell - \gamma \ell)}{2(1 - ch\ \gamma \ell) + \gamma \ell \cdot sh\ \gamma \ell}$$

$$T_{11,7} = T_\ell = T_0 = - T_{4,7}$$

e

$$T_{14,7} = -B_\ell = -ch\ \gamma \ell \cdot B_0 - \frac{sh\ \gamma \ell}{\gamma} \cdot T_0 - ch\ \gamma b \cdot = -ch\ \gamma \ell \cdot T_{7,7} + \frac{sh\ \gamma \ell}{\gamma} \cdot T_{4,7} - ch \gamma b \cdot \qquad (B.6)$$

Quando um momento torsor distribuído m_t é aplicado no elemento a solução particular ϕ_p da equação de equilíbrio deve ser considerada. Para m_t = cte. a solução particular é

$$\phi_p = - \frac{m_t \cdot x^2}{2\ G\ .\ J_t} \qquad (B.7)$$

Adicionando ϕ_p à Eq. (B.3) vem que

$$\phi = \phi_h + \phi_p = C_1 + C_2 \cdot \gamma x + C_3 \cdot ch\ \gamma x + C_4 \cdot sh\ \gamma x - \frac{m_t \cdot x^2}{2\ G \cdot J_t}$$

$$\phi' = C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma \cdot sh\ \gamma x + C_4 \cdot \gamma \cdot ch\ \gamma x - \frac{m_t \cdot x}{G \cdot J_t}$$

$$B = -G \cdot J_t\ (C_3 \cdot ch\ \gamma x + C_4 \cdot sh\ \gamma x) + \frac{m_t}{\gamma^2}$$

e

$$T = C_2 \cdot \gamma \cdot G \cdot J_t - m_t \cdot x$$

No ponto $x = 0$ obtém-se;

$$\phi_0 = C_1 + C_3$$

$$\phi_0' = C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma$$

$$B_0 = -G \cdot J_t \cdot C_3 + \frac{m_t}{\gamma^2}$$

e

$$T_0 = C_2 \cdot \gamma \cdot G \cdot J_t$$

Daí

$$C_1 = \phi_0 + \frac{B_0}{G \cdot J_t} - \frac{m_t}{\gamma^2 \cdot G \cdot J_t},$$

$$C_2 = \frac{T_0}{G \cdot J_t}$$

$$C_3 = -\frac{B_0}{G \cdot J_t} + \frac{m_t}{\gamma^2 \cdot G \cdot J_t}$$

e

$$C_4 = \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\phi_0' - \frac{T_0}{G \cdot J_t}\right)$$

que substituídas nas equações de ϕ, ϕ', B e T dão

$$\phi = \phi_0 + \phi_0' \cdot \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} + (1 - ch\ \gamma x) \cdot \frac{B_0}{G.J_t} + (x - \frac{sh\ \gamma x}{\gamma}) \cdot \frac{T_0}{G.J_t} + \frac{m_t}{G.J_t} \left(\frac{ch\ \gamma x - 1}{\gamma^2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\phi' = \phi_0' \cdot ch\ \gamma x - \gamma \cdot sh\ \gamma x \frac{B_0}{G.J_t} + (1 - ch\ \gamma x) \cdot \frac{T_0}{G.J_t} + \frac{m_t}{G.J_t} \cdot \left(\frac{sh\ \gamma x}{\gamma} - x\right)$$

$$B = -\phi_0' \cdot G \cdot J_t \cdot \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} + ch\ \gamma x \cdot B_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot T_0 - \frac{m_t}{\gamma^2} (ch\ \gamma x - 1)$$

e

$$T = T_0 - m_t \cdot x \cdot \qquad (B.9)$$

Os coeficientes de transferência devidos a $m_t = 1$ estão representados na Figura B.4.

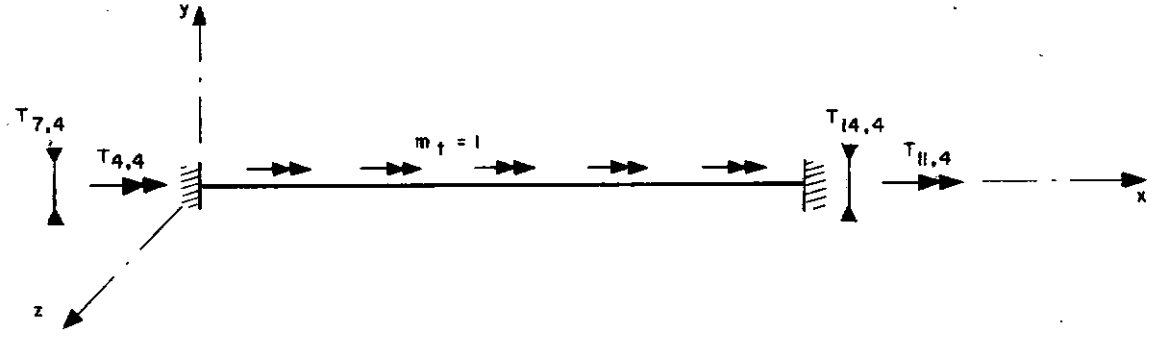


Figura B.4 - Coeficientes de transferência para m_t

Impondo as condições $\phi_0 = 0$ e $\phi_0' = 0$ as Equações (B.9) ficam iguais a:

$$\phi = (1-ch\ \gamma x)\ \frac{B_0}{G.J_t} + (x - \frac{sh\ \gamma x}{\gamma})\ \frac{T_0}{G.J_t} + \frac{m_t}{G.J_t}\ .\ (\frac{ch\ \gamma x - 1}{\gamma^2} - \frac{x^2}{2}) \quad , \qquad (m)$$

$$\phi' = -\gamma\ .\ sh\ \gamma x\ .\ \frac{B_0}{G.J_t} + (1-ch\ \gamma x)\ \frac{T_0}{G.J_t} + \frac{m_t}{G.J_t}\ (\frac{sh\ \gamma x}{\gamma} - x) \qquad (n)$$

$$B = ch\ \gamma x\ .\ B_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma}\ .\ T_0 - \frac{m_t}{\gamma^2}\ .\ (ch\ \gamma x - 1) \qquad (o)$$

e

$$T = T_0 - m_t\ .\ x\ . \qquad (p)$$

Fazendo $\phi_\ell = 0$ e $\phi_\ell' = 0$ encontra-se os valores de B_0 e T_0:

$$B_0 = \frac{m_t}{\gamma^2}\ .\ (1 - \frac{\gamma\ell/2}{th\ \gamma\ell/2})$$

e

$$T_0 = m_t\ .\ \ell/2$$

Substituindo os valores de B_0 e T_0 nas Equações (o) e (p) e fazendo $m_t = 1$ determina-se os coeficien

tes de transferência:

$$\left.\begin{aligned} T_{4,4} &= -T_0 = -\frac{\ell}{2} \\ T_{7,4} &= B_0 = \frac{1}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\gamma\ell/2}{\text{th } \gamma\ell/2}\right) \\ T_{11,4} &= T_\ell = \frac{\ell}{2} - \ell = -\frac{\ell}{2} \end{aligned}\right\}$$

e

$$T_{14,4} = -B_\ell = -\text{ch } \gamma\ell . B_0 - \frac{\text{sh } \gamma\ell}{\gamma} . T_0 + \frac{1}{\gamma^2} . (\text{ch } \gamma\ell - 1) = -\frac{1}{\gamma^2} . \left(1 - \frac{\gamma\ell/2}{\text{th } \gamma\ell/2}\right) \qquad \text{(B.10)}$$

Quando houver um bimomento distribuído m_ω aplicado no elemento a equação de equilíbrio fica,

$$\phi^{iv} - \gamma^2 . \phi'' = -\frac{m'_\omega}{E . I_\omega} .$$

No caso da Figura B.5 o bimomento distribuído é constante e portanto sua derivada primeira é nula. A equação de equilíbrio se transforma então numa equação homogênea. Porém, na análise do elemento da Figura B.5, será preciso considerar também a equação do momento torsor T, dada a seguir:

$$T = G \cdot J_t \cdot \phi' - E \cdot I_\omega \cdot \phi''' - m_\omega \cdot$$

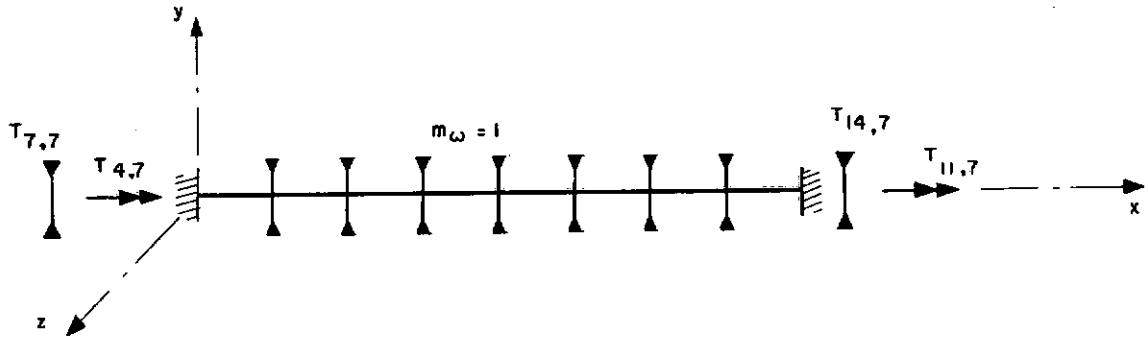


Figura B.5 - Coeficientes de transferência para m_ω

As equações de ϕ, ϕ', B e T ficam iguais a

$$\phi = C_1 + C_2 \cdot \gamma x + C_3 \cdot ch\ \gamma x + C_4 \cdot sh\ \gamma x \quad ,$$

$$\phi' = C_2 \cdot \gamma + C_3 \cdot \gamma \cdot sh\ \gamma x + C_4 \cdot \gamma \cdot ch\ \gamma x$$

$$B = -G \cdot J_t\ (C_3 \cdot ch\ \gamma x + C_4 \cdot sh\ \gamma x)$$

e

$$T = C_2 \cdot \gamma \cdot G \cdot J_t - m_\omega \cdot$$

No ponto x = 0 tem-se:

$$\phi_0 = C_1 + C_3 \quad ,$$

$$\phi_0' = C_2 \cdot \gamma + C_4 \cdot \gamma \quad ,$$

$$B_0 = -G \cdot J_t \cdot C_3$$

e

$$T_0 = C_2 \cdot \gamma \cdot G \cdot J_t - m_\omega \quad .$$

Substituindo nas equações de ϕ, ϕ', B e T chega-se à:

$$\left.\begin{aligned}
\phi &= \phi_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot \phi_0' + (1 - ch\ \gamma x) \cdot \frac{B_0}{G \cdot J_t} + (x - \frac{sh\ \gamma x}{\gamma}) \cdot \frac{T_0 + m_\omega}{G \cdot J_t} \\
\phi' &= ch\ \gamma x \cdot \phi_0' - \gamma \cdot sh\ \gamma x \cdot \frac{B_0}{G \cdot J_t} + (1 - ch\ \gamma x) \cdot \frac{T_0 + m_\omega}{G \cdot J_t} \\
B &= -\frac{sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot G \cdot J_t \cdot \phi_0' + ch\ \gamma x \cdot B_0 + \frac{sh\ \gamma x}{\gamma} \cdot (T_0 + m_\omega)
\end{aligned}\right\} \quad (B.11)$$

e

$$T = T_0$$

Fazendo $\phi_0 = \phi_0' = 0$ e $\phi_\ell = \phi_\ell' = 0$ obtém-se:

$$B_0 = 0$$

e

$$T_0 = -m_\omega$$

Daí, substituindo B_0 e T_0 em (B.11) e considerando $\phi_0 = \phi_0' = 0$, vem:

$$\phi = 0 \ ,$$

$$\phi' = 0 \ ,$$

$$B = 0 \ ,$$

e

$$T = -m_\omega \ .$$

Fazendo $m_\omega = 1$ obtêm-se os coeficientes de transferência:

$$T_{4,7} = -T_0 = 1 \ ,$$

$$T_{7,7} = B_0 = 0 \ , \qquad (B.12)$$

$$T_{11,7} = T_\ell = -1 \ ,$$

e

$$T_{14,7} = -B_\ell = 0 \ .$$

Os coeficientes de transferência para a torção não-uniforme, devidos às cargas concentradas T e B e às cargas distribuídas uniformes m_t e m_ω estão resumidos na Tabela B.1. Para outros casos a Ref. 6 é indicada.

TABELA B.1 - Coeficientes de transferência de cargas para a torção não-uniforme

Cargas	Coeficientes de transferência de cargas
T = 1	$T_{4,4} = \frac{(ch\ \gamma\ell-1).(1-ch\ \gamma b) + sh\ \gamma\ell\ .\ (sh\ \gamma b - \gamma b)}{K}$ $T_{7,4} = \frac{(\gamma b-sh\ \gamma b).(1-ch\ \gamma\ell)-(1-ch\ \gamma b).(\gamma\ell-sh\ \gamma\ell)}{K\ .\ \gamma}$ $T_{11,4} = -T_{4,4} - 1$ $T_{14,4} = -ch\ \gamma\ell\ .\ T_{7,4} + \frac{sh\ \gamma\ell}{\gamma}\ .\ T_{4,4} + \frac{sh\ \gamma b}{\gamma}$
B = 1	$T_{4,7} = -T_{11,7} = \gamma.\frac{sh\ \gamma\ell - sh\ \gamma a - sh\ \gamma b}{K}$ $T_{7,7} = \frac{(ch\ \gamma b-1).(1-ch\ \gamma\ell) + sh\ \gamma b\ .(sh\ \gamma\ell - \gamma\ell)}{K}$ $T_{14,7} = \frac{sh\ \gamma\ell}{\gamma}\ .\ T_{4,7} - ch\ \gamma\ell\ .\ T_{7,7} - ch\ \gamma b$
$m_t = 1$	$T_{4,4} = T_{11,4} = -\ell/2$ $T_{7,4} = -T_{14,4} = \frac{1}{\gamma^2}\ (1 - \frac{\gamma\ell/2}{th\ \gamma\ell/2})$
$m_\omega = 1$	$T_{4,7} = -T_{11,7} = 1$ $T_{7,7} = T_{14,7} = 0$

onde $\gamma = \sqrt{\frac{G\ .\ J_t}{E\ .\ I_\omega}}$

$K = 2\ (1 - ch\ \gamma\ell) + \gamma\ell\ .\ sh\ \gamma\ell$

APÊNDICE C

DIAGRAMAS DE SOLICITAÇÕES PARA A TORÇÃO NÃO-UNIFORME

Obtidos os esforços nas extremidades de um elemento pode-se determinar os diagramas de solicitação do mesmo. No elemento da Figura C.1.a estão indicados os sentidos positivos dos esforços fornecidos pelo programa.

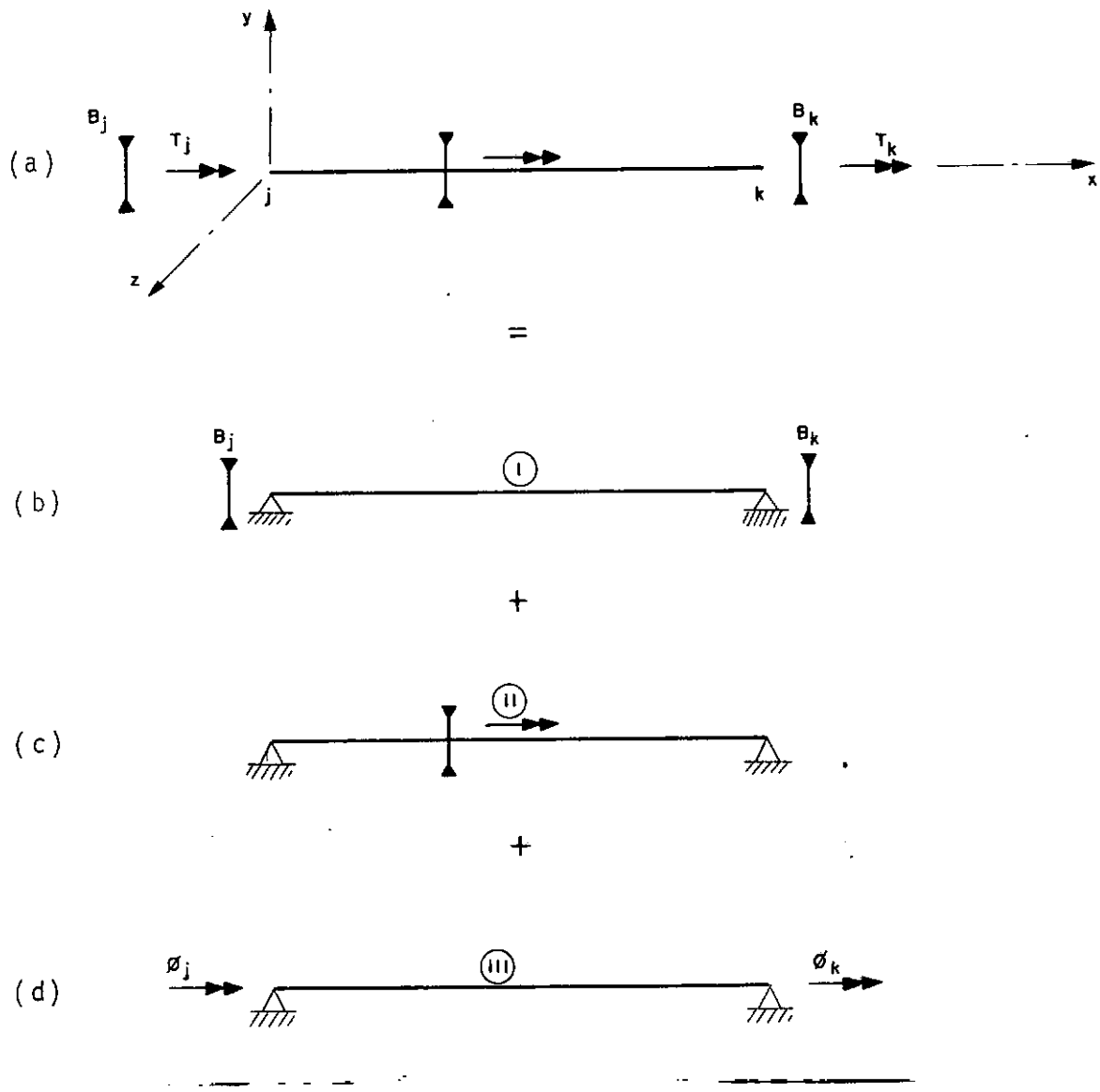


Figura C.1 - Decomposição do elemento

A peça da Figura C.1a pode ser decomposta nos três elementos indicados nas Figuras C.1b, c e d. O primeiro destes (CASO I) possui apoios extremos que impedem a rotação ϕ e permitem o empenamento, e está submetido aos bimomentos extremos obtidos pela análise da estrutura. O segundo (CASO II) possui o mesmo tipo de apoios e recebe as cargas aplicadas entre os nós j e k da estrutura. O último (CASO III) recebe rotações extremas ϕ_j e ϕ_k, determinadas pela análise da estrutura, e é livre ao empenamento de suas extremidades.

Analisando o CASO I, com auxílio das Eq. (A.3), vem que

$$\phi_0 = 0 \rightarrow C_1 + C_3 = 0$$

$$\phi_\ell = 0 \rightarrow C_1 + C_2 \cdot \gamma\ell + C_3 \cdot \text{ch}\,\gamma\ell + C_4 \cdot \text{sh}\,\gamma\ell = 0$$

$$B_0 = B_j \rightarrow C_3 = -\frac{B_j}{G \cdot J_t}$$

$$B_\ell = -B_k \rightarrow C_4 = \frac{B_k + B_j \cdot \text{ch}\,\gamma\ell}{G \cdot J_t \cdot \text{sh}\,\gamma\ell}$$

Daí

$$C_1 = \frac{B_j}{G\,J_t} \qquad \text{e} \qquad C_2 = -\frac{B_j + B_k}{G\,J_t \cdot \gamma\ell}$$

Portanto,

$$B_B = \frac{B_j \cdot \operatorname{sh} \gamma(\ell - x) - B_k \cdot \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma \ell}$$

$$T_{\omega_B} = -\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma \ell} \left[B_j \cdot \operatorname{ch} \gamma(\ell - x) + B_k \cdot \operatorname{ch} \gamma x \right]$$

e

$$T_B = -(B_j + B_k)/\ell$$

(C.1)

Para o CASO III tem-se:

$$\phi_0 = \phi_j \rightarrow C_1 + C_3 = \phi_j$$

$$\phi_\ell = \phi_k \rightarrow C_1 + C_2 \cdot \gamma\ell + C_3 \cdot \operatorname{ch} \gamma\ell + C_4 \cdot \operatorname{sh} \gamma\ell = \phi_k$$

$$B_0 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

e

$$B_\ell = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

Daí

$$C_1 = \phi_j \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{\phi_k - \phi_j}{\gamma\ell}$$

Os esforços valem:

$$\left.\begin{aligned} B_\phi &= 0 \\ T_{\omega_\phi} &= 0 \\ T_\phi &= (\phi_k - \phi_j) \cdot G J_t / \ell \end{aligned}\right\} \qquad (C.2)$$

e

Os esforços B_c e T_{ω_c}, para o CASO II, estão na Tabela C.1.

Como o bimomento é o momento de flexo-torção, numa seção qualquer do elemento, não necessitam da análise do CASO III, pode-se obter os diagramas $B(x)$ e $T_\omega(x)$ pela superposição dos CASOS I e II:

$$B(x) = \frac{B_j \cdot \operatorname{sh} \gamma(\ell - x) - B_k \cdot \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma \ell} + B_c \qquad (C.3)$$

e

$$T_\omega(x) = - \gamma \cdot \frac{B_j \cdot \operatorname{ch} \gamma(\ell - x) + B_k \cdot \operatorname{ch} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma \ell} + T_{\omega_c} \qquad (C.4)$$

O momento torsor T nos CASOS I e III é constante. Portanto sua variação depende apenas das cargas de torção que aparecem ao longo do elemento. Daí pode-se escrever

$$T(x) = - T_j + T\Big|_{x \geq a} + m_t \cdot (x - b)\Big|_{x \geq b} \qquad (C.5)$$

onde "a" é o valor de x no ponto de aplicação do momento torsor "T" e "b" é o valor de x no ponto onde o momento torsor distribuído uniforme "m_t" tem início. O momento torsor de Saint Venant T_s é determinado por

$$T_s(x) = T(x) - T_\omega(x) \qquad (C.6)$$

Nas fórmulas (C.3), (C.4) e (C.5) entra-se com os sinais de B_j, B_k e T_j fornecidos pelo programa. Os valores encontrados nestas equações estão de acordo com a convenção da Figura A.1.

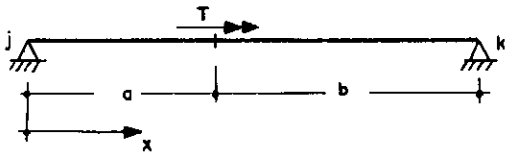
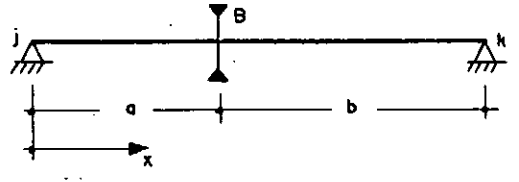
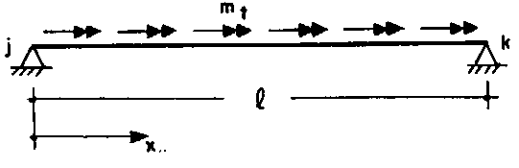
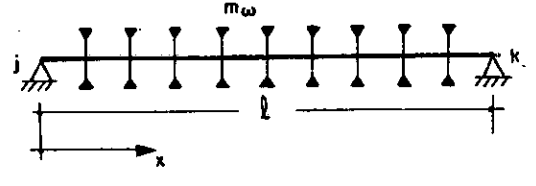
	$B_c = T \cdot \frac{sh\,\gamma b}{\gamma \cdot sh\,\gamma \ell} \cdot sh\,\gamma x - \left| T \cdot \frac{sh\,\gamma(x-a)}{\gamma} \right|_{x \geq a}$ $T_{\omega_c} = T \cdot \frac{sh\,\gamma b}{sh\,\gamma \ell} \cdot ch\,\gamma x - \left| T \cdot ch\,\gamma(x-a) \right|_{x \geq a}$
	$B_c = -B \cdot \frac{ch\,\gamma b}{sh\,\gamma \ell} \cdot sh\,\gamma x + \left| B \cdot ch\,\gamma(x-a) \right|_{x \geq a}$ $T_{\omega_c} = -B \cdot \gamma \cdot \frac{ch\,\gamma b}{sh\,\gamma \ell} \cdot ch\,\gamma x + \left| B \cdot \gamma \cdot sh\,\gamma(x-a) \right|_{x \geq a}$
	$B_c = \frac{m_t}{\gamma^2} \left| 1 - \frac{sh\,\gamma x + sh\,\gamma(\ell - x)}{sh\,\gamma \ell} \right|$ $T_{\omega_c} = -\frac{m_t}{\gamma} \cdot \frac{ch\,\gamma x - ch\,\gamma(\ell - x)}{sh\,\gamma \ell}$
	$B_c = 0$ $T_{\omega_c} = -m_\omega$

Tabela C.1 - Esforços no elemento na torção não-uniforme

APÊNDICE D

ENTRADA DE DADOS E SAÍDA DE RESULTADOS

As variáveis citadas a seguir são definidas na lista do item III.1. A entrada do programa é apresentada indicando a ordem em que os dados são fornecidos e o formato de leitura dos mesmos. As variáveis inteiras são lidas no formato I3. A introdução das variáveis reais pode ser feita tanto na forma real quanto na exponencial. O importante é que o campo destas variáveis possua dez posições. Portanto sempre que se referir a uma variável real será especificado o formato E.10.d, válido para valores reais e exponenciais, sendo "d" o número de casas decimais.

A seqüência da entrada de dados no programa é:

1. Número de estruturas (1 cartão)
   NEST - formato (I3)

2. Dados da Estrutura

2.1 - Nome da estrutura (1 cartão)
   NOME - formato (20 A4)

2.2 - Unidades (1 cartão)
   UNIDC, UNIDF - formato (2 A3)

2.3 - Dados Gerais (1 cartão)
   NN, NE, NDI, NNR, NC, E, G - formato (5I3, 2 E10.d)

2.4 - Coordenadas dos Nós (NN cartões)

J, X(J), Y(J) - formato (I3, 2 E10.d)

onde J = número do nó

2.5 - Conetividade e Propriedades dos Elementos (NE cartões)

I, NI(I), NF(I), AX(I), IX(I), IY(I), IZ(I), IW(I) - formato (3I3, 5 E10.d)

onde I = número do elemento

2.6 - Restrições Nodais (NNR cartões)

J, LRN(1), LRN(2), ..., LRN(7) - formato (8I3)

onde LRN(i) = restrição do apoio J ao deslocamento na direção i

3. Dados do Carregamento

3.1 - Dados Gerais (1 cartão)

NNC, NERD, NERC, XNOME - formato (3I3, 10 A6)

3.2 - Cargas Nodais (NNC cartões)

J, AN(1), AN(2), ..., AN(7) - formato (I3, 7 E10.d)

onde AN(i) = carga na direção i aplicada no nó J

3.3 - Elementos com Ações de Engastamento Perfeito fornecidas (2 x NERD cartões)

I, ARE(1), ..., ARE(7) - formato (I3, 7 E 10.d)

ARE(8), . . ., ARE(14) - formato (3X, 7 E 10.d)

onde ARE(1), ..., ARE(7) - ações de engastamento perfeito no nó inicial do elemento I

ARE(8), ... , ARE(14) - ações de engastamento perfeito no nó final do elemento I

3.4 - Elementos com Cargas (NERC grupos de cartões)

3.4.1 - Número de Cargas (1 cartão)

I, NCC, NCD - formato (3I3)

3.4.2 - Cargas Concentradas (NCC cartões)

DIR, CC, A - formato (A2, 2 E 10.d)

3.4.3 - Cargas Distribuídas (NCD cartões)

DIR, CD - formato (A2, E 10.d)

Os dados de carregamento (item 3) serão fornecidos tantas vezes quanto for o número de carregamentos NC. Havendo várias estruturas repete-se a seqüência de dados a partir do item 2. No final da listagem do programa (Apêndice E) apresenta-se a imagem dos cartões de dados dos exemplos analisados no Capítulo IV.

A saída de resultados da análise dos três exemplos estudados no Capítulo IV é apresentada a seguir:

```
**********************************************************************
*                                                                    *
*   ANALISE DE ESTRUTURAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS          *
*                                                                    *
*                  PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL                      *
*                                                                    *
*   COORDENACAO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUACAO EM ENGENHARIA         *
*                                                                    *
*            UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO                  *
*                                                                    *
**********************************************************************
*                                                                    *
*   LIMITACOES DO PROGRAMA:                                          *
*                                                                    *
*   NUMERO DE NOS = 30                                               *
*                                                                    *
*   NUMERO DE ELEMENTOS = 50                                         *
*                                                                    *
*   NUMERO DE CARREGAMENTOS = 5                                      *
*                                                                    *
**********************************************************************
```


==========

ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL - COPPE/UFRJ

==========

ESTRUTURA 1 - EXEMPLO 1 - VIGA BIENGASTADA

UNIDADES: COMPRIMENTO - CM FORCA - KGF

DADOS GERAIS DA ESTRUTURA
==========

NUMERO DE NOS = 9

NUMERO DE ELEMENTOS = 8

NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES = 49

NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS = 14

NUMERO DE NOS COM RESTRICOES = 2

NUMERO DE CARREGAMENTOS = 1

MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL = .2100E+07

MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL = .8077E+06

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	0.	0.
2	.1000E+03	0.
3	.2000E+03	0.
4	.3000E+03	0.
5	.4000E+03	0.
6	.5000E+03	0.
7	.6000E+03	0.
8	.7000E+03	0.
9	.8000E+03	0.

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	NI	NF	AX	IX	IY	IZ	IW	L	CX	CY
1	1	2	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
2	2	3	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
3	3	4	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
4	4	5	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
5	5	6	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
6	6	7	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
7	7	8	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000
8	8	9	.7680E+02	.2960E+02	.1668E+04	.2796E+05	.7975E+06	100.000	1.0000	0.0000

RESTRICOES NODAIS

NO	TRANSL. X	TRANSL. Y	TRANSL. Z	ROTACAO X	ROTACAO Y	ROTACAO Z	EMPENAMENTO
1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1

CARREGAMENTO 1 - MOMENTO TORSOR CONCENTRADO + BIMOMENTO CONCENTRADO

NUMERO DE NOS COM CARGAS = 1

NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO DADAS = 0

CARGAS NODAIS

NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
4	0.	0.	0.	.4000E+05	0.	0.	-.5000E+07

ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

IMPRESSAO DE RESULTADOS

ESTRUTURA 1 - EXEMPLO 1 - VIGA BIENGASTADA

UNIDADES: COMPRIMENTO - CM FORCA - KGF

CARREGAMENTO 1 - MOMENTO TORSOR CONCENTRADO + BIMOMENTO CONCENTRADO

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC. X	DESLOC. Y	DESLOC. Z	ROTACAO X	ROTACAO Y	ROTACAO Z	EMPENAMENTO
1	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
2	0.	0.	0.	.1012E-01	0.	0.	.1694E-03
3	0.	0.	0.	.2753E-01	0.	0.	.1475E-03
4	0.	0.	0.	.3316E-01	0.	0.	-.6883E-04
5	0.	0.	0.	.2539E-01	0.	0.	-.8424E-04

6	0.	0.	0.	.1677E-01	0.	0.	-.8584E-04
7	0.	0.	0.	.8672E-02	0.	0.	-.7385E-04
8	0.	0.	0.	.2511E-02	0.	0.	-.4655E-04
9	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

REACOES DE APOIO

NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
1	0.	0.	0.	-.3570E+05	0.	0.	-.4534E+07
9	0.	0.	0.	-.4300E+04	0.	0.	.9739E+06

ACOES NAS EXTREMIDADES DO ELEMENTO

ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
1	1	0.	0.	0.	-.3570E+05	0.	0.	-.4534E+07
	2	0.	0.	0.	.3570E+05	0.	0.	.1206E+07
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
2	2	0.	0.	0.	-.3570E+05	0.	0.	-.1206E+07
	3	0.	0.	0.	.3570E+05	0.	0.	-.1948E+07
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
3	3	0.	0.	0.	-.3570E+05	0.	0.	.1948E+07
	4	0.	0.	0.	.3570E+05	0.	0.	-.5383E+07
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
4	4	0.	0.	0.	.4300E+04	0.	0.	.3831E+06
	5	0.	0.	0.	-.4300E+04	0.	0.	-.1390E+06

ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
5	5	0.	0.	0.	.4300E+04	0.	0.	.1390E+06
	6	0.	0.	0.	-.4300E+04	0.	0.	.8497E+05
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
6	6	0.	0.	0.	.4300E+04	0.	0.	-.8497E+05
	7	0.	0.	0.	-.4300E+04	0.	0.	.3213E+06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
7	7	0.	0.	0.	.4300E+04	0.	0.	-.3213E+06
	8	0.	0.	0.	-.4300E+04	0.	0.	.6039E+06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
8	8	0.	0.	0.	.4300E+04	0.	0.	-.6039E+06
	9	0.	0.	0.	-.4300E+04	0.	0.	.9739E+06

ESTRUTURA 2 - EXEMPLO 2 - GRELHA

UNIDADES: COMPRIMENTO - CM FORCA - KGF

DADOS GERAIS DA ESTRUTURA

NUMERO DE NOS = 12

NUMERO DE ELEMENTOS = 12

NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES = 52

NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS = 32

NUMERO DE NOS COM RESTRICOES = 8

NUMERO DE CARREGAMENTOS = 1

MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL = .2100E+07

MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL = .8077E+06

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	.4000E+03	0.

2	.8000E+03	0.
3	0.	.4000E+03
4	.4000E+03	.4000E+03
5	.8000E+03	.4000E+03
6	.1200E+04	.4000E+03
7	0.	.8000E+03
8	.4000E+03	.8000E+03
9	.8000E+03	.8000E+03
10	.1200E+04	.8000E+03
11	.4000E+03	.1200E+04
12	.8000E+03	.1200E+04

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	NI	NF	AX	IX	IY	IZ	IW	L	CX	CY
1	1	4	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	0.0000	1.0000
2	2	5	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	0.0000	1.0000
3	3	4	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	1.0000	0.0000
4	4	5	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	1.0000	0.0000
5	5	6	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	1.0000	0.0000
6	4	8	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	0.0000	1.0000
7	5	9	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	0.0000	1.0000
8	7	8	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	1.0000	0.0000

9	8	9	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	1.0000	0.0000
10	9	10	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	1.0000	0.0000
11	8	11	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	0.0000	1.0000
12	9	12	.1241E+03	.1182E+03	.6015E+05	.4949E+04	.2862E+07	400.000	0.0000	1.0000

RESTRICOES NODAIS
==========

NO	TRANSL. X	TRANSL. Y	TRANSL. Z	ROTACAO X	ROTACAO Y	ROTACAO Z	EMPENAMENTO
1	1	1	1	0	1	0	0
2	1	1	1	0	1	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	0	0	0
10	1	1	1	1	0	0	0
11	1	1	1	0	1	0	0
12	1	1	1	0	1	0	0

CARREGAMENTO 1 - CARGAS VERTICAIS
==========

NUMERO DE NOS COM CARGAS = 4

NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO DADAS = 0

NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO CALCULADAS = 12

CARGAS NODAIS
==========

NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
4	0.	0.	.4800E+04	0.	0.	0.	0.
5	0.	0.	.4800E+04	0.	0.	0.	0.
8	0.	0.	.4800E+04	0.	0.	0.	0.
9	0.	0.	.4800E+04	0.	0.	0.	0.

CARGAS NOS ELEMENTOS
==========

ELEM. 1 ========= NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = .1000E+02

ELEM. 2 ========= NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = .1000E+02

ELEM. 3 ========= NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = .1000E+02

ELEM. 4 ========= NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = .1000E+02

```
 ELEM. 5   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM. 6   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM. 7   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM. 8   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM. 9   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM.10   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM.11   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02

 ELEM.12   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
=========  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 1

           CARGA DISTRIBUIDA - FZ =  .1000E+02
```

ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

IMPRESSAO DE RESULTADOS

ESTRUTURA 2 - EXEMPLO 2 - GRELHA

UNIDADES: COMPRIMENTO = CM FORCA = KGF

CARREGAMENTO 1 - CARGAS VERTICAIS

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC. X	DESLOC. Y	DESLOC. Z	ROTACAO X	ROTACAO Y	ROTACAO Z	EMPENAMENTO
1	0.	0.	0.	.8736E-02	0.	0.	-.1538E-04
2	0.	0.	0.	.8736E-02	0.	0.	.1538E-04
3	0.	0.	0.	0.	-.8736E-02	0.	.1538E-04
4	0.	0.	.2869E+01	.4260E-02	-.4260E-02	0.	.4147E-16
5	0.	0.	.2869E+01	.4260E-02	.4260E-02	0.	-.1143E-16
6	0.	0.	0.	0.	.8736E-02	0.	-.1538E-04
7	0.	0.	0.	0.	-.8736E-02	0.	-.1538E-04
8	0.	0.	.2869E+01	-.4260E-02	-.4260E-02	0.	-.5247E-16
9	0.	0.	.2869E+01	-.4260E-02	.4260E-02	0.	-.7141E-17
10	0.	0.	0.	0.	.8736E-02	0.	.1538E-04
11	0.	0.	0.	-.8736E-02	0.	0.	.1538E-04
12	0.	0.	0.	-.8736E-02	0.	0.	-.1538E-04

REACOES DE APOIO

NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
1	0.	0.	-.8400E+04	0.	.2407E+04	0.	0.
2	0.	0.	-.8400E+04	0.	-.2407E+04	0.	0.
3	0.	0.	-.8400E+04	-.2407E+04	0.	0.	0.
6	0.	0.	-.8400E+04	-.2407E+04	0.	0.	0.
7	0.	0.	-.8400E+04	.2407E+04	0.	0.	0.
10	0.	0.	-.8400E+04	.2407E+04	0.	0.	0.
11	0.	0.	-.8400E+04	0.	.2407E+04	0.	0.
12	0.	0.	-.8400E+04	0.	-.2407E+04	0.	0.

ACOES NAS EXTREMIDADES DO ELEMENTO

ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
1	1	0.	0.	-.8400E+04	.2407E+04	-.1097E-04	0.	.1528E-05
	4	0.	0.	.4400E+04	-.2407E+04	.2560E+07	0.	.5561E+06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
2	2	0.	0.	-.8400E+04	-.2407E+04	.7629E-05	0.	-.1392E-05
	5	0.	0.	.4400E+04	.2407E+04	.2560E+07	0.	-.5561E+06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
3	3	0.	0.	-.8400E+04	-.2407E+04	.2861E-05	0.	-.5486E-06
	4	0.	0.	.4400E+04	.2407E+04	.2560E+07	0.	-.5561E+06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
4	4	0.	0.	-.2000E+04	-.1318E-07	-.2558E+07	0.	-.2705E-05
	5	0.	0.	-.2000E+04	.1318E-07	.2558E+07	0.	-.6933E-05

ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
5	5	0.	0.	.4400E+04	.2407E+04	-.2560E+07	0.	.5561E+06
	6	0.	0.	-.8400E+04	-.2407E+04	-.3386E-04	0.	.3318E-05
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
6	4	0.	0.	-.2000E+04	.2365E-07	-.2558E+07	0.	.6631E-05
	8	0.	0.	-.2000E+04	-.2365E-07	.2558E+07	0.	.9187E-06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
7	5	0.	0.	-.2000E+04	.4684E-08	-.2558E+07	0.	-.1317E-05
	9	0.	0.	-.2000E+04	-.4684E-08	.2558E+07	0.	-.1576E-05
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
8	7	0.	0.	-.8400E+04	.2407E+04	-.7629E-05	0.	-.3183E-05
	8	0.	0.	.4400E+04	-.2407E+04	.2560E+07	0.	.5561E+06
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
9	8	0.	0.	-.2000E+04	.1286E-06	-.2558E+07	0.	.1371E-04
	9	0.	0.	-.2000E+04	-.1286E-06	.2558E+07	0.	.1727E-04
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
10	9	0.	0.	.4400E+04	-.2407E+04	-.2560E+07	0.	-.5561E+06
	10	0.	0.	-.8400E+04	.2407E+04	-.6008E-04	0.	.4878E-05
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
11	8	0.	0.	.4400E+04	-.2407E+04	-.2560E+07	0.	-.5561E+06
	11	0.	0.	-.8400E+04	.2407E+04	.4911E-04	0.	.6179E-05
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
12	9	0.	0.	.4400E+04	.2407E+04	-.2560E+07	0.	.5561E+06
	12	0.	0.	-.8400E+04	-.2407E+04	-.4578E-04	0.	-.1327E-04

ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL - COPPE/UFRJ

ESTRUTURA 3 - EXEMPLO 3 - PORTICO PLANO

UNIDADES: COMPRIMENTO - CM FORCA - KGF

DADOS GERAIS DA ESTRUTURA

NUMERO DE NOS = 5

NUMERO DE ELEMENTOS = 4

NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES = 21

NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS = 14

NUMERO DE NOS COM RESTRICOES = 2

NUMERO DE CARREGAMENTOS = 1

MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL = .2100E+07

MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL = .8077E+06

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	0.	0.

2	0.	.4000E+03
3	.4000E+03	.6000E+03
4	.8000E+03	.4000E+03
5	.8000E+03	0.

PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	NI	NF	AX	IX	IY	IZ	IW	L	CX	CY
1	1	2	.1593E+03	.1620E+03	.8556E+04	.4635E+05	.3103E+07	400.000	0.0000	1.0000
2	2	3	.1593E+03	.1620E+03	.8556E+04	.4635E+05	.3103E+07	447.214	0.8944	0.4472
3	3	4	.1593E+03	.1620E+03	.8556E+04	.4635E+05	.3103E+07	447.214	0.8944	-0.4472
4	4	5	.1593E+03	.1620E+03	.8556E+04	.4635E+05	.3103E+07	400.000	0.0000	-1.0000

RESTRICOES NODAIS

NO	TRANSL. X	TRANSL. Y	TRANSL. Z	ROTACAO X	ROTACAO Y	ROTACAO Z	EMPENAMENTO
1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1

CARREGAMENTO 1 - CARGA DE VENTO

NUMERO DE NOS COM CARGAS = 0

NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO DADAS = 0

NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO CALCULADAS = 4

CARGAS NOS ELEMENTOS

ELEM. 1 NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 2

CARGA DISTRIBUIDA - FY = -.8000E+01

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = -.2500E+01

ELEM. 2 NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 2

CARGA DISTRIBUIDA - FY = -.5000E+01

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = -.2500E+01

ELEM. 3 NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 2

CARGA DISTRIBUIDA - FY = .5000E+01

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = -.2500E+01

ELEM. 4 NO. DE CARGAS CONCENTRADAS = 0
NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS = 2

CARGA DISTRIBUIDA - FY = .4000E+01

CARGA DISTRIBUIDA - FZ = -.2500E+01

ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS DE PAREDES DELGADAS

IMPRESSAO DE RESULTADOS

ESTRUTURA 3 - EXEMPLO 3 - PORTICO PLANO

UNIDADES: COMPRIMENTO - CM FORCA - KGF

CARREGAMENTO 1 - CARGA DE VENTO

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC. X	DESLOC. Y	DESLOC. Z	ROTACAO X	ROTACAO Y	ROTACAO Z	EMPENAMENTO
1	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
2	.2346E+00	-.2146E-03	-.2271E+01	-.8951E-02	.3116E-01	-.5190E-03	-.4254E-04
3	.2300E+00	.1092E-01	-.1641E+02	-.6782E-01	-.9098E-13	.3655E-03	.4360E-15
4	.2231E+00	.2146E-03	-.2271E+01	-.8951E-02	-.3116E-01	-.5643E-03	.4254E-04
5	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

REACOES DE APOIO

NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
1	-.3987E+04	.1795E+03	.2118E+04	.7590E+06	-.6120E+05	.7104E+06	-.9331E+07
5	-.2813E+04	-.1795E+03	.2118E+04	.7590E+06	.6120E+05	.5931E+06	.9331E+07

ACOES NAS EXTREMIDADES DO ELEMENTO

ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
1	1	.1795E+03	.3987E+04	.2118E+04	-.6120E+05	-.7590E+06	.7104E+06	-.9331E+07
	2	-.1795E+03	-.7875E+03	-.1118E+04	.6120E+05	.1118E+06	.2445E+06	-.1107E+08
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
2	2	-.6240E+03	.5127E+03	.1118E+04	.7263E+05	-.1047E+06	-.2445E+06	.1107E+08
	3	.6240E+03	.1723E+04	-.1118E-06	-.7263E+05	-.1453E+06	-.2618E+05	.1270E+08
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
3	3	.1004E+04	-.1533E+04	-.1639E-06	-.7263E+05	.1453E+06	.2618E+05	-.1270E+08
	4	-.1004E+04	-.7028E+03	.1118E+04	.7263E+05	.1047E+06	-.2119E+06	-.1107E+08
ELEM.	NO	FORCA X	FORCA Y	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	MOMENTO Z	BIMOMENTO
4	4	-.1795E+03	.1213E+04	-.1118E+04	.6120E+05	-.1118E+06	.2119E+06	.1107E+08
	5	.1795E+03	-.2813E+04	.2118E+04	-.6120E+05	.7590E+06	.5931E+06	.9331E+07

APÊNDICE E

LISTAGEM DO PROGRAMA

Este Apêndice contém a listagem do programa automático para a análise de estruturas planas com elementos de paredes delgadas. São apresentados também os dados dos exemplos analisados neste trabalho.

```
FILE  11=DISCO,UNIT=DISKPACK,AREA=50,RECORD=196
FILE  5=CARTAO,UNIT=READER
FILE  6=LISTA,UNIT=PRINTER
C*****************************
C
C     PROGRAMA PRINCIPAL
C
C*****************************
      DOUBLE PRECISION A(10000)
      REAL X(30),Y(30),AX(50),IX(50),IY(50),IZ(50),IW(50),
     *     L(50),ROT(50,7,7),NOME(20),XNOME(5,10),RE(14,14),RER(1
4,14),
     *     REG(14,14),ARE(50,14,5),AED(14)
      INTEGER NI(50),NF(50),LRN(210),LRA(210),IA(14),LEC(50)
      DATA A/10000*0./,ROT/2450*0./,RE,RER,REG/588*0./,ARE/3500*0
./,
     *     LEC/50*0/
C
C     UNIDADES DE ENTRADA E SAIDA
C
      IE=5
      IS=6
C
C     INDICE DA VARIANTE DO PROGRAMA
C
      IVP=-1
      WRITE(IS,1)
    1 FORMAT('1',////////,31X,70('*'),/,31X,'*',68X,'*',/,31X,
     *     '*   ANALISE DE ESTRUTURAS COM ELEMENTOS DE PARED
ES  ',
     *     'DELGADAS   *',/,31X,'*',68X,'*',/,31X,'*',18X,
     *     'PROGRAMA  DE ENGENHARIA CIVIL',19X,'*',/,31X,'*',68X
,'*',/,
     *     31X,'*   COORDENACAO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUACAO
  EM',
     *     '  ENGENHARIA   *',/,31X,'*',68X,'*',/,31X,'*',12X,
     *     'UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO',13X,'*',/
,31X,
     *     '*',68X,'*',/,31X,
     *     70('*'),/,31X,'*',68X,'*',/,31X,'*   LIMITACOES DO PROG
RAMA:',
     *     42X,'*',/,31X,'*',68X,'*',/,31X,'*   NUMERO DE NOS = 30
 ',46X,
     *     '*',/,31X,'*',68X,'*',/,31X,'*   NUMERO DE ELEMENTOS =
50 ',
     *     40X,'*',/,31X,'*',68X,'*',/,31X,'*   NUMERO DE CARREGAM
ENTOS',
     *     ' = 5',38X,'*',/,31X,'*',68X,'*',/,31X,70('*'))
C
C     LEITURA DO NUMERO DE ESTRUTURAS
C
      READ(IE,10)NEST
   10 FORMAT(I3)
      IEST=0
```

```
  100 IEST=IEST+1
      WRITE(IS,20)
   20 FORMAT('1',9X,112('='),//,36X,'ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS
 COM EL
     *EMENTOS DE PAREDES DELGADAS',///,46X,'PROGRAMA DE ENGENHARI
A CIVIL
     * - COPPE/UFRJ',//,10X,112('='))
      READ(IE,30)(NOME(I),I=1,20),UNIDC,UNIDF
   30 FORMAT(20A4,/,2A3)
      WRITE(IS,40)IEST,(NOME(I),I=1,20),UNIDC,UNIDF
   40 FORMAT(/,11X,'ESTRUTURA',I2,' - ',20A4,//,11X,
     *      'UNIDADES: COMPRIMENTO - ',A3,5X,'FORCA - ',A3)
C*********************************************
C     ENTRADA DE DADOS SOBRE A ESTRUTURA
C*********************************************
C
C     DADOS GERAIS
C
      READ(IE,50)NN,NE,NDI,NNR,NC,E,G
   50 FORMAT(5I3,2E10.3)
      NDT=7*NN
      NDP=NDT-NDI
      WRITE(IS,60)NN,NE,NDP,NDI,NNR,NC,E,G
   60 FORMAT(/////,11X,'DADOS GERAIS DA ESTRUTURA',/,10X,27('='),
     *///,11X,'NUMERO DE NOS =',I3,
     *//,11X,'NUMERO DE ELEMENTOS =',I3,
     *//,11X,'NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES =',I3,
     *//,11X,'NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS =',I3,
     *//,11X,'NUMERO DE NOS COM RESTRICOES =',I3,
     *//,11X,'NUMERO DE CARREGAMENTOS =',I3,
     *//,11X,'MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL =',E10.4,
     *//,11X,'MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL =',E10.4)
C
C     COORDENADAS NODAIS
C
      DO 200 IC=1,NN
  200 READ(IE,70)J,X(J),Y(J)
   70 FORMAT(I3,2E10.3)
      WRITE(IS,80)
   80 FORMAT('1',/,11X,'COORDENADAS DOS NOS',/,10X,21('='),
     *      ///,11X,'NO',8X,'X',11X,'Y',/)
      WRITE(IS,90)(J,X(J),Y(J),J=1,NN)
   90 FORMAT(/,10X,I3,2X,E10.4,2X,E10.4)
C
C      INCIDENCIA E PROPRIEDADE DOS ELEMENTOS
C
      DO 300 IC=1,NE
  300 READ(IE,110)I,NI(I),NF(I),AX(I),IX(I),IY(I),IZ(I),IW(I)
  110 FORMAT(3I3,5E10.3)
C
C     DETERMINACAO DA LARGURA DE FAIXA - LF
C     COLOCACAO DOS NOS DO ELEMENTO EM ORDEM CRESCENTE
C
      I1=0
```

```
      DO 400 I=1,NE
      I2=NF(I)-NI(I)
      IF(I2.GT.0)GO TO 500
      I3=NI(I)
      NI(I)=NF(I)
      NF(I)=I3
  500 IF(I1.LT.IABS(I2))I1=IABS(I2)
      LF=(I1+1)*7
  400 CONTINUE
      K=NDI
      IF(IVP.EQ.1)K=0
      IND1=(NDP+K)*LF
      IND2=IND1+NDT*NC
      IND3=IND2+NDT*NC
C
C     MATRIZ DE ROTACAO DO ELEMENTO I - ROT(I,7,7)
C
      DO 600 I=1,NE
      XL=X(NF(I))-X(NI(I))
      YL=Y(NF(I))-Y(NI(I))
      L(I)=SQRT(XL**2+YL**2)
      CX=XL/L(I)
      CY=YL/L(I)
      ROT(I,1,1)=CX
      ROT(I,1,2)=CY
      ROT(I,2,1)=-CY
      ROT(I,2,2)=CX
      ROT(I,3,3)=1.
      ROT(I,4,4)=CX
      ROT(I,4,5)=CY
      ROT(I,5,4)=-CY
      ROT(I,5,5)=CX
      ROT(I,6,6)=1.
      ROT(I,7,7)=1.
  600 CONTINUE
      WRITE(IS,120)
  120 FORMAT('1',//,11X,'PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS',//,10X,28('=')
,
     *///,11X,'ELEM.   NI   NF       AX           IX           IY
     *IZ           IW           L          CX        CY',/)
      WRITE(IS,130)(I,NI(I),NF(I),AX(I),IX(I),IY(I),IZ(I),IW(I),L
(I),
     *              ROT(I,1,1),ROT(I,1,2),I=1,NE)
  130 FORMAT(/,11X,I3,4X,I3,2X,I3,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E
10.4,
     *       2X,E10.4,2X,F8.3,3X,F7.4,3X,F7.4)
C
C     LISTA DE RESTRICOES NODAIS
C
      IF(IEST.EQ.1)GO TO 800
      DO 700 I=1,NDT
  700 LRN(I)=0
  800 DO 900 IC=1,NNR
  900 READ(IE,140)J,(LRN(7*J-7+K),K=1,7)
```

```
  140 FORMAT(8I3)
      WRITE(IS,150)
  150 FORMAT('1',/,11X,'RESTRICOES NODAIS',/,10X,19('='),
     */,11X,'NO   TRANSL. X   TRANSL. Y   TRANSL. Z   ROTACAO X
    ROTA
     *CAO Y   ROTACAO Z   EMPENAMENTO',/)
      LRA(1)=LRN(1)
      DO 1000 I=2,NDT
 1000 LRA(I)=LRA(I-1)+LRN(I)
      IF(LRA(7).EQ.0)GO TO 1100
      J=1
      WRITE(IS,160)J,(LRN(K),K=1,7)
  160 FORMAT(/,10X,I3,7X,6(I1,11X),I2)
 1100 DO 1200 J=2,NN
      I=7*J-7
      IF(LRA(I).EQ.LRA(I+7))GO TO 1200
      WRITE(IS,170)J,(LRN(I+K),K=1,7)
  170 FORMAT(/,10X,I3,7X,6(I1,11X),I2)
 1200 CONTINUE
C*****************************************************
C     MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA
C*****************************************************
      IF(IEST.EQ.1)GO TO 1301
      DO 1300 I=1,IND3
 1300 A(I)=0.
 1301 DO 1900 I=1,NE
C
C     CONSTRUCAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO - RE(14,14)
C
      CALL RIGELE(I,L,AX,IX,IY,IZ,IW,E,G,RE)
C
C     GERACAO DOS INDICES DE DESLOCAMENTOS EXTREMOS DO ELEMENTO I
C
      J1=7*NI(I)-7
      K1=7*NF(I)-7
      DO 1400 J=1,7
      K=J+7
      IA(J)=J1+J
 1400 IA(K)=K1+J
C
C     CONSTRUCAO DE RER=RE*ROT
C
      DO 1500 J=1,14
      DO 1500 K=1,14
      RER(J,K)=0.
 1500 REG(J,K)=0.
      DO 1600 IL=1,7
      DO 1600 J=1,7
      DO 1600 K=1,7
      RER(IL,J)=RER(IL,J)+RE(IL,K)*ROT(I,K,J)
      RER(IL,J+7)=RER(IL,J+7)+RE(IL,K+7)*ROT(I,K,J)
      RER(IL+7,J)=RER(IL+7,J)+RE(IL+7,K)*ROT(I,K,J)
 1600 RER(IL+7,J+7)=RER(IL+7,J+7)+RE(IL+7,K+7)*ROT(I,K,J)
      ID=I
```

```
      WRITE(11'ID)RER
C
C       CONSTRUCAO DE REG=ROT*RER
C
      DO 1700 IL=1,7
      DO 1700 J=1,7
      DO 1700 K=1,7
      REG(IL,J)=REG(IL,J)+ROT(I,K,IL)*RER(K,J)
      REG(IL,J+7)=REG(IL,J+7)+ROT(I,K,IL)*RER(K,J+7)
      REG(IL+7,J)=REG(IL+7,J)+ROT(I,K,IL)*RER(K+7,J)
 1700 REG(IL+7,J+7)=REG(IL+7,J+7)+ROT(I,K,IL)*RER(K+7,J+7)
C
C     MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C
      IF(IVP.EQ.1)GO TO 1800
      CALL RIGES1(A(1),NDT,LF,IA,REG)
      GO TO 1900
 1800 CALL RIGES2(A(1),NDP,LF,LRN,LRA,IA,REG,NDT)
 1900 CONTINUE
C
C     MODIFICACAO DA MATRIZ RG(NDT,LF)
C
      IF(IVP)2000,2500,2700
C
C     TECNICA DOS "0" E "1"
C
 2000 I1=LF-1
      IF(LRN(1).EQ.0)GO TO 2100
      A(1)=1.
      DO 2200 J=1,I1
 2200 A(J*NDT+1)=0.
 2100 DO 2400 I=2,NDT
      IF(LRN(I).EQ.0)GO TO 2400
      A(I)=1.
      DO 2300 J=1,I1
      A(J*NDT+I)=0.
 2300 A(J*NDT+I-J)=0.
 2400 CONTINUE
      GO TO 2700
C
C     TECNICA DO "INFINITO"
C
 2500 DO 2600 I=1,NDT
      IF(LRN(I).EQ.0 )GO TO 2600
      A(I)=A(I)*10**12
 2600 CONTINUE
C*****************************************************
C     LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DE CARGA
C*****************************************************
 2700 DO 3600 I=1,NC
      II=(I-1)*NDT
      DO 2701 J=1,NE
      DO 2702 K=1,14
 2702 ARE(J,K,I)=0.
```

```
 2701 LEC(J)=0
C
C      DADOS GERAIS
C
       READ(IE,180)NNC,NERD,NERC,(XNOME(I,J),J=1,10)
  180 FORMAT(3I3,10A6)
       WRITE(IS,190)I,(XNOME(I,J),J=1,10),NNC,NERD,NERC
  190 FORMAT('1',/,11X,'CARREGAMENTO',I2,' - ',10A6,/,10X,112('='
),///,
      *        11X,'NUMERO DE NOS COM CARGAS =',I3,//,
      *        11X,'NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO
 DADAS
      *=',I3,//,
      *        11X,'NUMERO DE ELEMENTOS COM REACOES DE ENGASTAMENTO
 CALCUL
      *ADAS =',I3)
       IF(NNC.EQ.0)GO TO 2900
C
C      CARGAS NODAIS
C
       WRITE(IS,210)
  210 FORMAT(///////,11X,'CARGAS NODAIS',/,10X,15('='),///,11X,
      *      'NO      FORCA X        FORCA Y        FORCA Z        MOM
ENTO X
      *    MOMENTO Y      MOMENTO Z      BIMOMENTO')
       JJ=II+IND1-7
       DO 2800 IC=1,NNC
       READ(IE,220)J,(A(JJ+7*J+K),K=1,7)
  220 FORMAT(I3,7E10.3)
       WRITE(IS,230)J,(A(JJ+7*J+K),K=1,7)
  230 FORMAT(/,11X,I2,7(3X,E11.4))
 2800 CONTINUE
 2900 IF(NERD.EQ.0)GO TO 3100
C
C      ELEMENTOS COM REACOES DADAS
C
       WRITE(IS,240)
  240 FORMAT(///////,11X,'REACOES DE ENGASTAMENTO DADAS',/,10X,31
('='),
      *        ///,11X,'ELEM.  NO      FORCA X        FORCA Y        F
ORCA Z
      *      MOMENTO X      MOMENTO Y      MOMENTO Z      BIMOMENTO')
       DO 3000 IC=1,NERD
       READ(IE,250)J,(ARE(J,K,I),K=1,14)
  250 FORMAT(I3,7E10.3,/,3X,7E10.3)
       WRITE(IS,260)J,NI(J),(ARE(J,K,I),K=1,7),NF(J),(ARE(J,K,I),K
=8,14)
  260 FORMAT(/,11X,I3,3X,I3,7(3X,E11.4),//,17X,I3,7(3X,E11.4),//)
 3000 LEC(J)=1
 3100 IF(NERC.EQ.0)GO TO 3500
C
C      ELEMENTOS COM REACOES CALCULADAS POR SUBROTINAS
C
       WRITE(IS,270)
```

```
  270 FORMAT(///////,11X,'CARGAS NOS ELEMENTOS',/,10X,22('='))
      DO 3400 IC=1,NERC
      READ(IE,280)J,NCC,NCD
  280 FORMAT(3I3)
      WRITE(IS,290)J,NCC,NCD
  290 FORMAT(//,11X,'ELEM.',I2,'   NO. DE CARGAS CONCENTRADAS =',
I2,/,
     *       10X,9('='),'  NO. DE CARGAS DISTRIBUIDAS =',I2)
      LEC(J)=1
      C=L(J)
      A1=SQRT(G*IX(J)/E/IW(J))
      IF(NCC.EQ.0)GO TO 3300
C
C     CARGAS CONCENTRADAS
C
      CALL CARCEL(I,J,NCC,A1,C,ARE,IE,IS)
 3300 IF(NCD.EQ.0)GO TO 3400
C
C     CARGAS DISTRIBUIDAS
C
      CALL CARDEL(I,J,NCD,A1,C,ARE,IE,IS )
 3400 CONTINUE
C
C     FORMACAO DO VETOR AN+AE=AN-(ROT)T*ARE
C
 3500 DO 3600 IC=1,NE
      IF(LEC(IC).EQ.0)GO TO 3600
      JJ=II+IND1+7*NI(IC)-7
      KK=II+IND1+7*NF(IC)-7
      DO 3501 J=1,7
      DO 3501 JI=1,7
      KI=JI+7
      A(JJ+J)=A(JJ+J)-ROT(IC,JI,J)*ARE(IC,JI,I)
 3501 A(KK+J)=A(KK+J)-ROT(IC,JI,J)*ARE(IC,KI,I)
 3600 CONTINUE
C
C     FORMACAO DO VETOR AC(NDT,NC) (C/ REORDENACAO SE IVP=+1)
C
      IF(IVP.EQ.1)GO TO 3800
      DO 3700 I=1,NDT
      IF(LRN(I).EQ.1)GO TO 3700
      DO 3700 J=1,NC
      IN=IND1+(J-1)*NDT+I
      IC=IND2+(J-1)*NDT+I
      A(IC)=A(IN)
 3700 CONTINUE
      GO TO 4100
 3800 DO 4000 I=1,NDT
      IF(LRN(I).EQ.1)GO TO 4000
      DO 3900 J=1,NC
      IN=IND1+(J-1)*NDT+I
      IC=IND2+(J-1)*NDT+I-LRA(I)
 3900 A(IC)=A(IN)
 4000 CONTINUE
```

```
C*************************************************
C      CALCULO DOS RESULTADOS
C*************************************************
 4100 NL=IND1/LF
      I2=IND2+1
      CALL RESOLV(A(1),A(I2),LRN,NL,LF,NC,NDT,IVP)
      I1=IND1+1
      DO 4200 I=I1,IND2
 4200 A(I)=-A(I)
      DO 4900 I=1,NC
      IAN=(I-1)*NDT+IND1
      IDG=(I-1)*NDT+IND2
      DO 4900 J=1,NE
      JJ=7*NI(J)-7
      KJ=7*NF(J)-7
      DO 4300 K=1,7
      IA(K)=JJ+K
 4300 IA(K+7)=KJ+K
      ID=J
      READ(11'ID)RER
C
C      CALCULO DE AED(14) E ARE(NE,14,NC)
C
      DO 4400 K=1,14
      AED(K)=0.
      DO 4500 M=1,14
 4500 AED(K)=AED(K)+RER(K,M)*A(IDG+IA(M))
 4400 ARE(J,K,I)=ARE(J,K,I)+AED(K)
C
C      CALCULO DAS REACOES DE APOIO
C
      DO 4900 K=1,7
      M=K+7
      IRJ=IAN+IA(K)
      IRK=IAN+IA(M)
      IF(LRN(IA(K)).EQ.0)GO TO 4700
      DO 4600 I1=1,7
 4600 A(IRJ)=A(IRJ)+ROT(J,I1,K)*AED(I1)
 4700 A(IRJ)=A(IRJ)*LRN(IA(K))
      IF(LRN(IA(M)).EQ.0)GO TO 4900
      DO 4800 I2=1,7
 4800 A(IRK)=A(IRK)+ROT(J,I2,K)*AED(I2+7)
 4900 A(IRK)=A(IRK)*LRN(IA(M))
C*****************************************************************
*******
C      IMPRESSAO DOS RESULTADOS - DG(NDT,NC),RA(NDT,NC),ARE(NE,14,
NC)
C*****************************************************************
*******
      WRITE(IS,310 )IEST,(NOME(I),I=1,20),UNIDC,UNIDF
  310 FORMAT('1',9X,112('='),//,11X,'ANALISE DE ESTRUTURAS PLANAS
 COM EL
     *EMENTOS DE PAREDES DELGADAS',//,11X,'IMPRESSAO DE RESULTADO
S',//,
```

```
     *10X,112('='),//,11X,'ESTRUTURA',I2,' - ',20A4,//,11X,'UNIDA
DES:',
     *'  COMPRIMENTO - ',A3,5X,'FORCA - ',A3)
      DO 5400 I=1,NC
      II=(I-1)*NDT
      WRITE(IS,320)I,(XNOME(I,J),J=1,10)
  320 FORMAT(//////,11X,'CARREGAMENTO',I2,' - ',10A6,/,10X,112('=
'))
      WRITE(IS,330)
  330 FORMAT(//,11X,'DESLOCAMENTOS NODAIS',/,10X,22('='),//,11X,
     *      'NO    DESLOC. X     DESLOC. Y     DESLOC. Z     ROTA
CAO X
     *   ROTACAO Y     ROTACAO Z    EMPENAMENTO')
      DO 5000 J=1,NN
      I1=II+IND2+7*J-7
 5000 WRITE(IS,340)J,(A(I1+K),K=1,7)
  340 FORMAT(/,11X,I2,7(3X,E11.4))
      WRITE(IS,350)
  350 FORMAT(////,11X,'REACOES DE APOIO',/,10X,17('='),//,11X,
     *      'NO     FORCA X       FORCA Y       FORCA Z       MOM
ENTO X
     *    MOMENTO Y     MOMENTO Z     BIMOMENTO')
      I1=II+IND1
      IF(LRA(7).EQ.0)GO TO 5100
      J=1
      WRITE(IS,360)J,(A(I1+K),K=1,7)
  360 FORMAT(/,11X,I2,7(3X,E11.4))
 5100 DO 5200 J=2,NN
      K=7*J-7
      IF(LRA(K+7).EQ.LRA(K))GO TO 5200
      I1=II+IND1+7*J-7
      WRITE(IS,370)J,(A(I1+K),K=1,7)
  370 FORMAT(/,11X,I2,7(3X,E11.4))
 5200 CONTINUE
      WRITE(IS,380)
  380 FORMAT(////,11X,'ACOES NAS EXTREMIDADES DO ELEMENTO',/,10X,
36('=')
     *)
      DO 5300 J=1,NE
 5300 WRITE(IS,390)J,NI(J),(ARE(J,K,I),K=1,7),NF(J),(ARE(J,K,I),K
=8,14)
  390 FORMAT(/,11X,'ELEM.  NO     FORCA X       FORCA Y       FOR
CA Z
     *    MOMENTO X     MOMENTO Y     MOMENTO Z     BIMOMENTO',//
,
     *    11X,I3,3X,I3,7(3X,E11.4),//,17X,I3,7(3X,E11.4))
 5400 CONTINUE
      IF(IEST.LT.NEST)GO TO 100
      STOP
      END
```

```
C*****************************************************************************
*
C
C       CONSTRUCAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
C
C*****************************************************************************
*
        SUBROUTINE RIGELE(I,L,AX,IX,IY,IZ,IW,E,G,RE)
        REAL L(1),AX(1),IX(1),IY(1),IZ(1),IW(1),RE(14,14)
        A1=SQRT(G*IX(I)/E/IW(I))
        A2=A1*L(I)
        A4=SINH(A2)
        A3=COSH(A2)
        A5=G*IX(I)/(2*(1-A3)+A2*A4)
        A6=12*E/L(I)**3
C
C       COEFICIENTES DE RIGIDEZ BASICOS
C
        R11=E*AX(I)/L(I)
        R22=A6*IZ(I)
        R33=A6*IY(I)
        R44=A5*A1*A4
        R55=R33*L(I)**2/3
        R66=R22*L(I)**2/3
        R77=A5*(A2*A3-A4)/A1
        R26=R22*L(I)/2
        R35=-R33*L(I)/2
        R47=A5*(A3-1)
        R512=R55/2
        R613=R66/2
        R714=A5*(A4-A2)/A1
C
C       CONSTRUCAO DE "RE" TRIANGULAR SUPERIOR
C
        RE(1,1)=R11
        RE(1,8)=-R11
        RE(2,2)=R22
        RE(2,6)=R26
        RE(2,9)=-R22
        RE(2,13)=R26
        RE(3,3)=R33
        RE(3,5)=R35
        RE(3,10)=-R33
        RE(3,12)=R35
        RE(4,4)=R44
        RE(4,7)=R47
        RE(4,11)=-R44
        RE(4,14)=R47
        RE(5,5)=R55
        RE(5,10)=-R35
        RE(5,12)=R512
        RE(6,6)=R66
        RE(6,9)=-R26
        RE(6,13)=R613
```

```
      RE(7,7)=R77
      RE(7,11)=-R47
      RE(7,14)=R714
      RE(8,8)=R11
      RE(9,9)=R22
      RE(9,13)=-R26
      RE(10,10)=R33
      RE(10,12)=-R35
      RE(11,11)=R44
      RE(11,14)=-R47
      RE(12,12)=R55
      RE(13,13)=R66
      RE(14,14)=R77
C
C     ELEMENTOS ABAIXO DA DIAGONAL PRINCIPAL
C
      DO 100 J=1,13
      I1=J+1
      DO 100 K=I1,14
  100 RE(K,J)=RE(J,K)
      RETURN
      END
```

```
C*****************************************
C
C      SUBROTINAS PARA MONTAGEM DE "RG"
C
C*****************************************
C
C      TECNICA DOS "0" E "1" OU TECNICA DO "INFINITO"
C
       SUBROUTINE RIGES1(RG,NDT,LF,IA,REG)
       DIMENSION RG(NDT,LF),REG(14,14),IA(14)
       DOUBLE PRECISION RG
       DO 100 J=1,14
       IL=IA(J)
       DO 100 K=J,14
       IC=IA(K)-IL+1
       RG(IL,IC)=RG(IL,IC)+REG(J,K)
  100  CONTINUE
       RETURN
       END
C
C      TECNICA DA "REORDENACAO"
C
       SUBROUTINE RIGES2(RG,NDP,LF,LRN,LRA,IA,REG,NDT)
       DIMENSION RG(NDP,LF),LRN(NDT),LRA(NDT),IA(14),REG(14,14)
       DOUBLE PRECISION RG
       DO 100 J=1,14
       IF(LRN(IA(J)).EQ.1)GO TO 100
       IL=IA(J)-LRA(IA(J))
       DO 100 K=J,14
       IF(LRN(IA(K)).EQ.1)GO TO 100
       IC=IA(K)-LRA(IA(K))-IL+1
       RG(IL,IC)=RG(IL,IC)+REG(J,K)
  100  CONTINUE
       RETURN
       END
```

```
C*************************************************
C
C      CARGAS CONCENTRADAS NOS ELEMENTOS
C
C*************************************************
       SUBROUTINE CARCEL(I,J,NCC,A1,C,ARE,IE,IS)
       DIMENSION ARE(50,14,5)
       DO 800 K=1,NCC
       READ(IE,10)DIR,CC,A
    10 FORMAT(A2,2E10.3)
       B=C-A
       WRITE(IS,20)DIR,CC,A
    20 FORMAT(/,21X,'CARGA CONCENTRADA - ',A2,' =',E11.4,'     X ='
,E11.4)
       IF(DIR.EQ.'FX')GO TO 100
       IF(DIR.EQ.'FY')GO TO 200
       IF(DIR.EQ.'FZ')GO TO 300
       IF(DIR.EQ.'MX')GO TO 400
       IF(DIR.EQ.'MY')GO TO 500
       IF(DIR.EQ.'MZ')GO TO 600
       IF(DIR.EQ.'BM')GO TO 700
       WRITE(IS,30)J
    30 FORMAT(/,10X,50('='),//,11X,'ERRO NA DIRECAO DA CARGA CONCE
NTRADA
      *DO ELEM.',I2,//,10X,50('='))
       STOP
   100 ARE(J,1,I)=ARE(J,1,I)-CC*B/C
       ARE(J,8,I)=ARE(J,8,I)-CC*A/C
       GO TO 800
   200 ARE(J,2,I)=ARE(J,2,I)-CC*(3*A+B)*B**2/C**3
       ARE(J,6,I)=ARE(J,6,I)-CC*A*B**2/C**2
       ARE(J,9,I)=ARE(J,9,I)-CC*(A+3*B)*A**2/C**3
       ARE(J,13,I)=ARE(J,13,I)+CC*A**2*B/C**2
       GO TO 800
   300 ARE(J,3,I)=ARE(J,3,I)-CC*(3*A+B)*B**2/C**3
       ARE(J,5,I)=ARE(J,5,I)+CC*A*B**2/C**2
       ARE(J,10,I)=ARE(J,10,I)-CC*(A+3*B)*A**2/C**3
       ARE(J,12,I)=ARE(J,12,I)-CC*A**2*B/C**2
       GO TO 800
   400 A2=COSH(A1*C)
       A3=SINH(A1*C)
       A4=COSH(A1*B)
       A5=SINH(A1*B)
       A6=2*(1-A2)+A1*C*A3
       A7=-((1-A2)*(1-A4)+A3*(A1*B-A5))/A6
       A8=((A1*B-A5)*(1-A2)-(1-A4)*(A1*C-A3))/A1/A6
       ARE(J,4,I)=ARE(J,4,I)+CC*A7
       ARE(J,7,I)=ARE(J,7,I)+CC*A8
       ARE(J,11,I)=ARE(J,11,I)-CC*(1+A7)
       ARE(J,14,I)=ARE(J,14,I)+CC*(A5/A1+A7*A3/A1-A8*A2)
       GO TO 800
   500 ARE(J,3,I)=ARE(J,3,I)-CC*6*A*B/C**3
       ARE(J,5,I)=ARE(J,5,I)+CC*(2*A-B)*B/C**2
       ARE(J,10,I)=ARE(J,10,I)+CC*6*A*B/C**3
```

```
      ARE(J,12,I)=ARE(J,12,I)+CC*(2*B-A)*A/C**2
      GO TO 800
  600 ARE(J,2,I)=ARE(J,2,I)+CC*6*A*B/C**3
      ARE(J,6,I)=ARE(J,6,I)+CC*(2*A-B)*B/C**2
      ARE(J,9,I)=ARE(J,9,I)-CC*6*A*B/C**3
      ARE(J,13,I)=ARE(J,13,I)+CC*(2*B-A)*A/C**2
      GO TO 800
  700 A2=COSH(A1*C)
      A3=SINH(A1*C)
      A4=COSH(A1*B)
      A5=SINH(A1*B)
      A6=2*(1-A2)+A1*C*A3
      A7=(A3-SINH(A1*A)-A5)*A1/A6
      A8=-((1-A4)*(1-A2)+A5*(A1*C-A3))/A6
      ARE(J,4,I)=ARE(J,4,I)+CC*A7
      ARE(J,7,I)=ARE(J,7,I)+CC*A8
      ARE(J,11,I)=ARE(J,11,I)-CC*A7
      ARE(J,14,I)=ARE(J,14,I)+CC*(A7*A3/A1-A8*A2-A4)
  800 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C*************************************************
C
C      CARGAS DISTRIBUIDAS NOS ELEMENTOS
C
C*************************************************
       SUBROUTINE CARDEL(I,J,NCD,A1,C,ARE,IE,IS)
       DIMENSION ARE(50,14,5)
       DO 800 K=1,NCD
       READ(IE,10)DIR,CD
    10 FORMAT(A2,E10.3)
       WRITE(IS,20)DIR,CD
    20 FORMAT(/,21X,'CARGA DISTRIBUIDA - ',A2,' =',E11.4)
       IF(DIR.EQ.'FX')GO TO 100
       IF(DIR.EQ.'FY')GO TO 200
       IF(DIR.EQ.'FZ')GO TO 300
       IF(DIR.EQ.'MX')GO TO 400
       IF(DIR.EQ.'MY')GO TO 500
       IF(DIR.EQ.'MZ')GO TO 600
       IF(DIR.EQ.'BM')GO TO 700
       WRITE(IS,30)J
    30 FORMAT(/,10X,50('='),//,11X,'ERRO NA DIRECAO DA CARGA DISTR
IBUIDA
      *DO ELEM.',I2,//,10X,50('='))
       STOP
   100 ARE(J,1,I)=ARE(J,1,I)-CD*C/2
       ARE(J,8,I)=ARE(J,8,I)-CD*C/2
       GO TO 800
   200 ARE(J,2,I)=ARE(J,2,I)-CD*C/2
       ARE(J,6,I)=ARE(J,6,I)-CD*C**2/12
       ARE(J,9,I)=ARE(J,9,I)-CD*C/2
       ARE(J,13,I)=ARE(J,13,I)+CD*C**2/12
       GO TO 800
   300 ARE(J,3,I)=ARE(J,3,I)-CD*C/2
       ARE(J,5,I)=ARE(J,5,I)+CD*C**2/12
       ARE(J,10,I)=ARE(J,10,I)-CD*C/2
       ARE(J,12,I)=ARE(J,12,I)-CD*C**2/12
       GO TO 800
   400 A2=(1-A1*C/2/TANH(A1*C/2))/A1**2
       ARE(J,4,I)=ARE(J,4,I)-CD*C/2
       ARE(J,7,I)=ARE(J,7,I)+CD*A2
       ARE(J,11,I)=ARE(J,11,I)-CD*C/2
       ARE(J,14,I)=ARE(J,14,I)-CD*A2
       GO TO 800
   500 ARE(J,3,I)=ARE(J,3,I)-CD
       ARE(J,10,I)=ARE(J,10,I)+CD
       GO TO 800
   600 ARE(J,2,I)=ARE(J,2,I)+CD
       ARE(J,9,I)=ARE(J,9,I)-CD
       GO TO 800
   700 ARE(J,4,I)=ARE(J,4,I)+CD
       ARE(J,11,I)=ARE(J,11,I)-CD
   800 CONTINUE
       RETURN
       END
```

```
C*****************************************************************
C
C      SUBROTINA PARA RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C
C*****************************************************************
       SUBROUTINE RESOLV(RG,AC,LRN,NL,LF,NC,NDT,IVP)
       DIMENSION RG(NL,LF),AC(NDT,NC),LRN(NDT)
       DOUBLE PRECISION RG,AC
C
C      TRIANGULARIZACAO DE RG(NL,LF)
C
       I1=NL-1
       DO 200 L=1,I1
       I2=L+LF-1
       IF(I2.GT.NL)I2=NL
       I3=L+1
       DO 200 I=I3,I2
       AUX=RG(L,I-L+1)/RG(L,1)
       I4=L+LF-I
       DO 100 J=1,I4
  100  RG(I,J)=RG(I,J)-RG(L,J+I-L)*AUX
       DO 200 K=1,NC
       AC(I,K)=AC(I,K)-AC(L,K)*AUX
  200  CONTINUE
C
C      RETROSUBSTITUICAO
C
       DO 300 J=1,NC
  300  AC(NL,J)=AC(NL,J)/RG(NL,1)
       I1=NL-1
       DO 500 I2=1,I1
       I=NL-I2
       I3=I+LF-1
       IF(I3.GT.NL)I3=NL
       DO 500 J=1,NC
       AUX=AC(I,J)
       I4=I+1
       DO 400 M=I4,I3
  400  AUX=AUX-RG(I,M-I+1)*AC(M,J)
       AC(I,J)=AUX/RG(I,1)
  500  CONTINUE
C
C      RETORNO A NUMERACAO ORIGINAL (PARA IVP=+1)
C
       IF(IVP.LT.1)GO TO 700
       J=NL+1
       DO 600 I1=1,NDT
       I=NDT-I1+1
       J=J-I+LRN(I)
       DO 600 K=1,NC
  600  AC(I,K)=AC(J,K)*(1-LRN(I))
  700  CONTINUE
       RETURN
       END
```

```
*********************************************
*                                           *
*      DADOS DOS EXEMPLOS ANALISADOS        *
*                                           *
*********************************************
   3
EXEMPLO 1 - VIGA BIENGASTADA
CM KGF
   9   8 14   2   1   2100000.    807700.
   1      0.
   2    100.
   3    200.
   4    300.
   5    400.
   6    500.
   7    600.
   8    700.
   9    800.
   1   1   2        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   2   2   3        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   3   3   4        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   4   4   5        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   5   5   6        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   6   6   7        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   7   7   8        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   8   8   9        76.8         29.6      1668.      27962.     797500.
   1   1   1   1   1   1   1   1
   9   1   1   1   1   1   1   1
   1   0   0 MOMENTO TORSOR CONCENTRADO + BIMOMENTO CONCENTRADO
   4                                          40000.
5000000
EXEMPLO 2 - GRELHA
CM KGF
  12  12  32   8   1   2100000.    807700.
   1    400.         0.
   2    800.         0.
   3      0.       400.
   4    400.       400.
   5    800.       400.
   6   1200.       400.
   7      0.       800.
   8    400.       800.
   9    800.       800.
  10   1200.       800.
  11    400.      1200.
  12    800.      1200.
   1   1   4       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   2   2   5       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   3   3   4       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   4   4   5       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   5   5   6       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   6   4   8       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   7   5   9       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
   8   7   8       124.1        118.2     60154.       4949.     2862000.
```

```
  9   8   9      124.1       118.2    60154.       4949.   2862000.
 10   9  10      124.1       118.2    60154.       4949.   2862000.
 11   8  11      124.1       118.2    60154.       4949.   2862000.
 12   9  12      124.1       118.2    60154.       4949.   2862000.
  1   1   1   1   0   1
  2   1   1   1   0   1
  3   1   1   1   1
  6   1   1   1   1
  7   1   1   1   1
 10   1   1   1   1
 11   1   1   1   0   1
 12   1   1   1   0   1
  4   0  12 CARGAS VERTICAIS
  4                          4800.
  5                          4800.
  8                          4800.
  9                          4800.
  1   0   1
FZ    10.
  2   0   1
FZ    10.
  3   0   1
FZ    10.
  4   0   1
FZ    10.
  5   0   1
FZ    10.
  6   0   1
FZ    10.
  7   0   1
FZ    10.
  8   0   1
FZ    10.
  9   0   1
FZ    10.
 10   0   1
FZ    10.
 11   0   1
FZ    10.
 12   0   1
FZ    10.
EXEMPLO 3 - PORTICO PLANO
CM KGF
  5   4  14   2   1  2100000.    807700.
  1       0.          0.
  2       0.        400.
  3     400.        600.
  4     800.        400.
  5     800.          0.
  1   1   2      159.3       162.0    8556.0    46347.0   3103000.
  2   2   3      159.3       162.0    8556.0    46347.0   3103000.
  3   3   4      159.3       162.0    8556.0    46347.0   3103000.
  4   4   5      159.3       162.0    8556.0    46347.0   3103000.
  1   1   1   1   1   1   1   1
```

```
  5  1  1  1  1  1  1  1
  0  0  4 CARGA DE VENTO
  1  0  2
FY  -8.
FZ  -2.5
  2  0  2
FY  -5.
FZ  -2.5
  3  0  2
FY   5.
FZ  -2.5
  4  0  2
FY   4.
FZ  -2.5
```

BIBLIOGRAFIA

1. A Linguagem LORANE Linear para Anãlise Estrutural por Computadores, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, 1977

2. GERE, J. M. e WEAVER, W. - Anãlise de Estruturas Reticuladas, Guanabara Dois, 1981.

3. GJELSVIK, A. - The Theory of Thin Walled Bars, Wiley- Inter Science, 1981.

4. KHAN, A. H. e TOTTENHAM, H. - The Method of Bimoment Distribution for the Analysis of Continuous Thin-Walled Structures Subject to Torsion, Proceedings, The Institution of Civil Engineers, Vol. 63, Part 2, December 1977.

5. KOLLBRUNNER, C. F. e BASLER, L. - Torsion in Structures - An Engineering Approach, Springer - Verlag, Berlin/Heidelberg, 1969.

6. KOLLBRUNNER, C. F. e HAJDIN, N. - Dünnwandige Stäbe - Band 1: Stäbe mit Undeformierbaren Querschnitten, Springer--Verlag, Berlin/Heidelberg, 1972.

7. KOLLBRUNNER, C. F.; HAJDIN, N. e KRAJCINOVIC, D. - Matrix Analysis of Thinwalled Structures, Institut für Bauwissenschaftliche Forschung, Vol. 10, December 1969.

8. KRAJCINOVIC, D. - A Consistent Discrete Elements Technique for Thinwalled Assemblages, International Journal for Solids and Structures, Vol. 5, Nº 7, 1969.

9. LIVESLEY, R. K. - Matrix Methods of Structural Analysis, The MacMillan Company, New York, 1964.

10. REILLY, R. J. - Stiffness Analysis of Grids Including Warping, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.98, Nº ST 7, July 1972.

11. SANTOS, S. M. G. - Estudo de Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta, Escola Graduada de Ciências e Engenharia, PUC/RJ, Junho de 1967.

12. SORIANO, H. L. e COSTA, A. M. - Sugestões quanto ao Desenvolvimento de Programações para Análise Estrutural em FORTAN IV, COPPE/UFRJ, 1978.

13. SORIANO, H. L. e PRATES, C. L. M. - Armazenamento Computacional de Matrizes em Análise Estrutural, COPPE/UFRJ, 1978

14. VACHARAJITTIPHAN, P. e TRAHAIR, N. S. - Warping and Distortion at I Section Joint, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, Nº ST 3, March 1974.

15. VLASOV, V. Z. - Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalém, 1961.

16. WEAVER Jr., W. - Computer Programs for Structural Analysis, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1967.

17. ZBIROHOWSKI-KOSCIA, K. - Thin-Walled Beams - From Theory to Practice, Crosby Lockwood & Son Ltd., London, 1967.