



ACOMODAÇÃO ESTRUTURAL NA ASSOCIAÇÃO  
DE CASCAS AXI-SIMÉTRICAS SUJEITAS A  
PRESSÕES INTERNAS

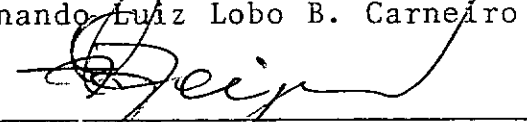
José Ricardo Queiroz Franco

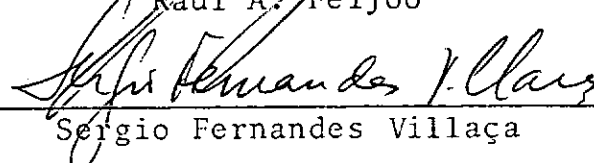
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Sydney Martins Gomes dos Santos  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

  
\_\_\_\_\_  
Raul A. Feijóo

  
\_\_\_\_\_  
Sergio Fernandes Villaça

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1981

ã Cecilia pela sua paciência,  
compreensão e incentivo

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Andrés L. Halbritter pela orientação inicial deste trabalho.

Ao professor Sydney Martins G. dos Santos pela valiosa orientação final deste trabalho.

Ao Professor Sergio Fernandes Villaça pela atenção e ensinamentos recebidos.

Aos colegas que me apoiaram e incentivaram nas horas difíceis deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo a determinação de estimativas de pressão de acomodação (Shakedown) em vasos esféricos interceptados radialmente nos bocais cilíndricos. Dois métodos de análise elástica foram desenvolvidos para a determinação das tensões na junção das cascas, onde se sabe situarem os elementos mais solicitados. A pressão de acomodação foi obtida com a aplicação do teorema de Melan e com o uso de resultados da análise elástica feita por um dos métodos: o Assíntótico, que é aplicável quando o parâmetro geométrico  $k$ , da esfera, é inferior a 30 e o Método Simplificado quando  $k$  é maior que este valor.

Para a obtenção dos resultados elaborou-se um programa que além da pressão de acomodação fornece valores intermediários úteis.

A pressão no vaso é maximizada até a pressão de acomodação utilizando-se uma subrotina de otimização, do IMSL, implantado no computador Burroughs 6700 da COPPE, e que foi inserida no corpo do nosso programa.

## ABSTRACT

This work has the objective of determining the lower bound estimates of the shakedown pressure for flush radial cylinder-sphere intersections. Two elastic analysis methods were developed to find the stresses at the junction, where the most charged elements are situated. The shakedown pressure was achieved by applying Melan's theorem and using the results of the elastic analysis obtained from one of the methods: The Asymptotic method, which is used when the geometric parameter  $k$ , of the sphere, is under 30 and the Simplified Method when  $k$  is greater than this value.

To find the results, a program was made, and it gives besides the shakedown pressure other useful intermediate values.

The vessel pressure is increased up to the shakedown pressure, by using a maximizing subroutine of the IMSL, which is at the Burroughs 6700 Computer from COPPE, and was inserted in the body of our program.

## ÍNDICE

I	-	INTRODUÇÃO	
1.1	-	Definições .....	1
1.2	-	A Análise Elástica de Cascas .....	3
II	-	CONCEITOS BÁSICOS	
2.1	-	Generalidades .....	5
2.2	-	Ensaio de Tração .....	5
2.3	-	O Material Perfeitamente Elasto-Plástico .....	6
2.4	-	Teste de Compressão e o Efeito Bauschinger .....	10
2.5	-	Conceitos de Elasticidade .....	
2.5.1	-	Estado de Tensões .....	11
2.5.2	-	Tensões Principais .....	12
2.5.3	-	Invariantes de Tensão .....	12
2.5.4	-	Tensões Máxima e Octaédrica de Cisalhamento .....	13
2.5.5	-	Tensor Desviador .....	16
2.6	-	Critérios de Escoamento	
2.6.1	-	Idéias Básicas .....	19
2.6.2	-	Teoria a Tensão de Cisalhamento Máxima ou Critério de Tresca .....	21
2.6.3	-	Teoria da Energia de Distorção ou Critério de von Mises .....	23
III	-	FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO NA INTERSEÇÃO CILINDRO-ESFERA EM VASOS DE PRESSÃO	
3.1	-	Dados Fundamentais .....	26
3.2	-	Fator de Concentração de Tensões Para Pressão Interna .....	27
3.3	-	A Aplicação da Curva F.C.T./ $\rho$ em Projetos .....	29
IV	-	APLICAÇÃO DO CONCEITO DA ACOMODAÇÃO EM VASOS DE PRESSÃO	
4.1	-	Explicação do Conceito da Acomodaçãõ .....	31
4.2	-	A Grandeza do Fator de Acomodaçãõ .....	34
4.3	-	O Comportamento nas Concentrações de Tensões .....	35

4.4 - Dependência do Comportamento do Valor Numérico do Fator de Concentração de Tensão (F.C.T.) .....	38
--	----

#### APÊNDICE I

Da Tensão e Deformação Naturais (ou Efetivas) .....	40
---	----

### V - ANÁLISE ELÁSTICA DE TENSÕES NA INTERSEÇÃO CILINDRO-ESFERA DE CASCAS SUBMETIDAS À PRESSÃO INTERNA

5.1 - Soluções Elásticas Simplificadas .....	42
5.1.1 - Soluções Individuais Para o Cilindro ....	43
Solução de Membrana .....	43
Solução Para Esforços de Bordo .....	44
5.1.2 - Soluções Individuais Para a Esfera .....	46
Solução de Membrana .....	46
Solução Para Esforços de Bordo .....	47
5.2 - Condições de Compatibilidade Cilindro-Esfera ....	50
5.3 - Cálculo das Tensões de Bordo na Esfera .....	52
5.4 - Solução Assimptótica Para Cascas Esféricas .....	54

### VI - A PRESSÃO DE ACOMODAÇÃO

6.1 - Introdução .....	63
6.2 - Os Cálculos da Acomodação .....	63
6.3 - Cálculo Para Um Único Grupo de Esforços .....	64
6.4 - Cálculo Para Dois Grupos de Esforços .....	65

#### APÊNDICE II

A6.1 - Fluxograma do Programa Principal .....	69
A6.2 - O Programa Principal .....	74
A6.3 - A Subrotina SOLVE .....	84
A6.4 - A Subrotina TENSÃO .....	87
A6.5 - A Subrotina MONTA .....	91
A6.6 - A Subrotina METOD2 .....	96

### VII - RESULTADOS E CONCLUSÕES

7.1 - Introdução .....	101
7.2 - Comparação com os Resultados de LECKIE .....	101
7.3 - Comparação dos Resultados dos Métodos Desenvolvidos Quando $k \approx 30$ .....	103

7.4 - Comparação com os Resultados de ROBINSON .....	106
7.5 - Conclusões .....	110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	112

===//===

## I - INTRODUÇÃO

### 1.1 - DEFINIÇÕES

No passado era prática normal projetar vasos de pressão em termos de seu desempenho como membrana, e as aberturas nas cascas reforçadas de acordo com a chamada "REGRA DE SUBSTITUIÇÃO DE ÁREA." Esta estabelece que para se projetarem aberturas ou bocais em tais vasos a área do material removido, seja substituída mediante reforço, de seção transversal de igual grandeza (Figura 1.1) (9)

Área A deve ser  
igual à área B

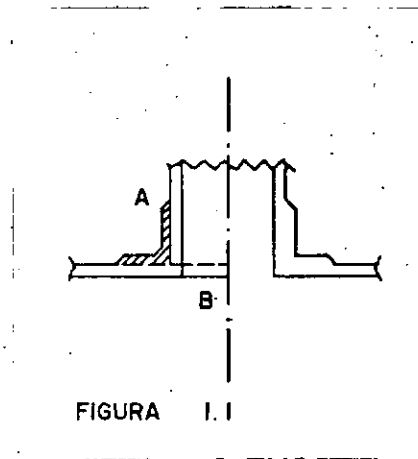


FIGURA 1.1

Para projetistas interessados apenas na manutenção da resistência última da casca, este procedimento tem forte aplicação intuitiva, além de uma completa justificativa teórica (Appendix I, (10)).

Na década de 60 entretanto, os engenheiros tornaram-se bastante inquietos com o conhecimento da existência de altas tensões nas regiões de interseção; uma interpretação mais apurada sobre o significado destas tensões foi então ativamente perseguida. Verificou-se que nos projetos da época, as tensões que ocorriam nas junções de tubos em vasos de pressão de aço eram normalmente grandes, o bastante para causar deformações plásticas. Embora fosse possível calcular a distribuição de tensões e deformações no campo elasto-plástico, os resultados desses cálculos eram de uso limitado porque completamente dependentes das tensões residuais e do histórico do carregamento. A carga última e a capacidade de acomodação (shake down) de um vaso de pressão, entretanto, são independentes desse histórico e por este motivo fornecem subsídios reais às decisões de projeto. Quando a estrutura

está sujeita a carregamentos estáticos, o conhecimento da "carga última" é normalmente suficiente. Contudo, se o carregamento for cíclico, a capacidade de acomodação torna-se bastante importante.

Sob condições cíclicas de pressão, (que serão o objeto do nosso estudo), considerações adicionais precisam ser levadas em conta, com relação às possibilidades de ruptura por plasticidade alternada ou colapso incremental, e é a este respeito que a estimativa da pressão de acomodação torna-se valiosa. Se o carregamento cíclico (no caso pressão-cíclica) é mantido dentro do limite de acomodação elástica, então o projetista tem assegurado que, após a plastificação inicial, as deformações futuras estarão dentro do campo hookeano, e as possibilidades de um colapso incremental ou de uma plastificação reversa, descartadas.

Este trabalho é um estudo do problema, quando pressão interna é aplicada a uma casca esférica conectada a um tubo radial cilíndrico interrompido e nivelado com a superfície interna da casca (Figura 1 - trabalho de Leckie, ref. (1)).

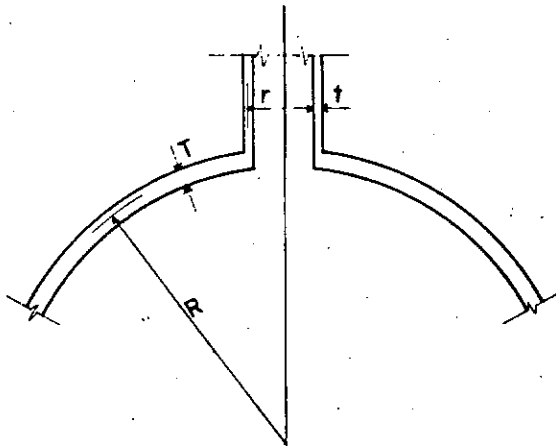


FIGURA 1 - LECKIE (1) - GEOMETRIA DA CASCA

Também Leckie (1), baseado em (11), mostrou que as estimativas do limite inferior de pressão de acomodação (Shake down) para a interseção nivelada CILINDRO-ESFERA, podem ser obtidas aplicando o TEOREMA DA ACOMODAÇÃO DE MELAN (11, 6) em conjunto com os resultados de análise elástica desenvolvida previamente e obtidos por intermédio de programa para este fim. Sem um valor limite superior não é sempre possível determinar quão perto a grandeza estimada está da verdadeira pressão de acomodação. Mesmo assim ficará demonstrado que as soluções elásticas podem

ser facilmente manipuladas para fornecer informações úteis sobre as de acomodação.

O primeiro projetista a reconhecer os elementos do problema foi ROSE (9), o qual constatou que para eficiência dos projetos as regiões de interseção (de altas tensões) deveriam chegar ao escoamento com a primeira carga de pressão (carga de teste). Posteriormente para evitar a ruptura devido a grandes deformações e por fadiga, as cargas subsequentes deveriam limitar-se dentro de faixas de ação puramente elásticas; ele sugere ainda que a máxima pressão de trabalho deva causar um campo de tensões, no máximo igual a duas vezes a tensão de escoamento do material submetido a tração. Com isto ele pôde argumentar que o estado do fator de concentração de tensões, obtido da análise elástica, pode ser usado como base de projeto.

## 1.2 - A ANÁLISE ELÁSTICA DE CASCAS

A análise elástica de cascas está amplamente desenvolvida e o que se procurou fazer neste trabalho foi aplicar teorias existentes ao nosso caso. Aberturas e interseções em vasos de pressão são normalmente inevitáveis e constituem a maior fonte de pontos fracos da estrutura, cujo funcionamento muitas vezes não fica bem claro. Soluções elásticas capazes de determinar tensões nessas regiões, baseadas na teoria das cascas de parede fina, ajudam consideravelmente na avaliação da resistência dos vasos de pressão. Assim desenvolveu-se aqui um método de cálculo de tensões, específico à interseção cilindro-esfera. Sobre a teoria membranal de cascas esféricas e cilíndricas material abundante pode ser pesquisado em vários trabalhos como (4, 5, 14, 15, 16), entre outros. Já os problemas sobre flexão de bordo em cascas esféricas precisou de um cuidado maior, pois as soluções conhecidas sempre apresentavam limitações que dificultavam sua adaptação aos propósitos deste trabalho. Citaremos alguns exemplos que, seja pelas limitações nos seus campos de validade, seja por excesso de trabalho no desenvolvimento de suas fórmulas, tornaram impraticável seu aproveitamento no cálculo que aqui desenvolvemos. As soluções para a teoria de cascas abatidas apresentavam-se como exemplo de limitações, tendo em vista seu restrito campo de validade. No nosso estudo de vasos de pressão es

féricos, trataremos esferas completas; por isso elas não puderam ser utilizadas. Flügge (14) apresenta solução para cascas esféricas usando séries geométricas que se limita pelo inconveniente de aumentar muito o trabalho a medida que um certo parâmetro "k" cresce. Nesse mesmo trabalho expõe uma segunda maneira de resolver tais problemas: é a Solução Assimptótica para Cascas de Parede Fina; é esta que adotaremos, quando o parâmetro "k" citado, estiver dentro de determinados limites. Se este for ultrapassado, a solução mais simples a utilizar é a Assimptótica Simplificada de GIRKMANN.(15), completada por Flügge (14).

Os problemas de flexão de bordo em cascas cilíndricas foram pesquisados em trabalhos de vários autores (14,15,17,19) e o que se procurou fazer foi complementar um com o outro. Uma vez obtidos os resultados, era de fundamental importância que se compatibilizassem os da casca esférica com os da casca cilíndrica e, principalmente, programá-los para o uso em computador. Assim elaborou-se programa de uso fácil, com poucas variáveis de entrada, que fornece não só as tensões elásticas nas regiões de concentração, mas também a pressão de acomodação (shakedown), além de outros resultados úteis.

## II - CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1 - GENERALIDADES

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho. Para analisar o comportamento de metais, a curva tensão-deformação na tração será analisada sob aspectos úteis à Teoria das Plasticidade. O nosso estudo ficará restrito aos materiais de comportamento perfeitamente elasto-plástico, que aqui terão suas características mostradas, quando submetidos a tensões elásticas e plásticas de compressão e tração. Além disso os conceitos básicos de elasticidade aparecerão de maneira sucinta, mas o suficiente para o entendimento da teoria que se pretende apresentar a seguir.

### 2.2 - ENSAIO DE TRAÇÃO

Num ensaio padronizado, um corpo de prova cilíndrico como mostra a figura 2.1 é tracionado com carga  $P$  progressivamente crescente.

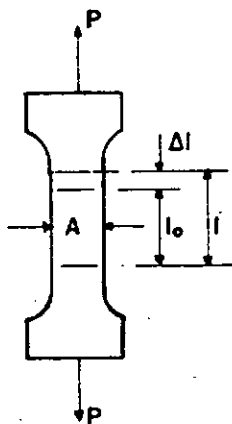


FIGURA 2.1 - C.P. NA TRAÇÃO

O diagrama típico está mostrado na figura 2.2 (2). Nele estão representados os pontos que definem o limite de proporcionalidade de (A), o limite elástico (B) e o limite de resistência (C).

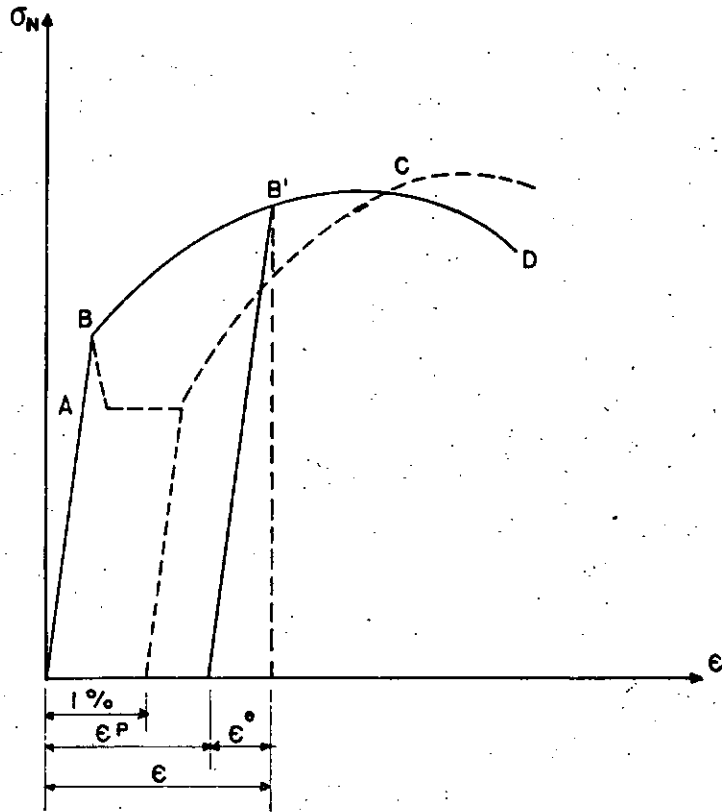


FIGURA 2.2 - CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO CONVENCIONAL

Se o material apresenta em seu diagrama de tensão-deformação um patamar de escoamento definido, tal qual a curva tracejada da Figura 2.2, ao final deste uma notável deformação permanente, da ordem de 1%, aparecerá sem que praticamente se tenha aumentado a tensão.

### 2.3 - O MATERIAL PERFEITAMENTE ELASTO-PLÁSTICO

Com a hipótese de um comportamento perfeitamente elasto-plástico, a teoria clássica da plasticidade, na qual estamos interessados, se apresentará com grandes simplificações, isto é, o material considerado não sofrerá encruamento e sim escoamento plástico sob tensão constante (3). Na tração ou com-

pressão simples o comportamento mecânico será o representado pelo diagrama da figura 2.3.

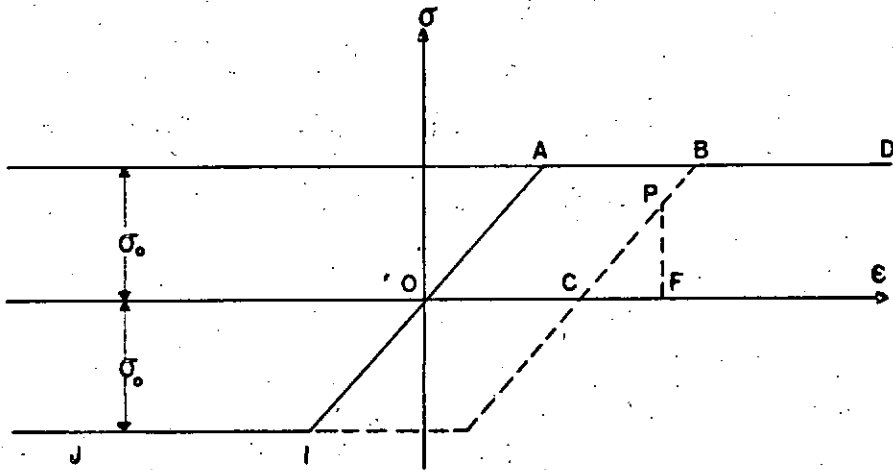


FIGURA 2.3 - DIAGRAMA TENSÃO - DEFORMAÇÃO DE UM MATERIAL  
PERFEITAMENTE ELASTO - PLÁSTICO

Para valores suficientemente pequenos da extensão longitudinal o material se comporta elasticamente segundo a lei de Hooke:  $\sigma = E\epsilon$ . Esta relação entre a tensão e deformação é representada pela porção OA do diagrama da figura 2.3. Uma vez que a tensão atinge certo valor crítico  $\sigma_0$ , tensão de escoamento na tração simples, e é mantida, o material escoará plasticamente sob tensão constante  $\sigma_0$ . Este escoamento estará representado pela porção AB do diagrama da Figura 2.3.

Se o C.P. ficou sujeito apenas a tensões menores que  $\sigma_0$ , ele reassumirá sua forma original após o descarregamento. Entretanto, se a tensão for mantida no valor  $\sigma_0$  por qualquer tempo finito antes do descarregamento, o escoamento plástico ocorrerá durante este tempo e o C.P. vai exibir deformação permanente depois da descarga. A relação tensão-deformação durante esta descarga é representada pelo segmento BC do diagrama da Figura 2.3 e a deformação permanente por OC. BC obtido durante a descarga é paralelo a OA do primeiro carregamento.

Se o C.P. é recarregado depois de completa ou parcialmente descarregado, o diagrama de tensão-deformação para a recarga coincide com o diagrama do descarregamento precedente até que a tensão crítica  $\sigma_0$  seja de novo alcançada; a partir daí o C.P. vai escoar plasticamente como se o carregamento inicial e o descarregamento nunca tivessem existido. A relação tensão-de-

formação durante este recarregamento e subsequente escoamento plástico está representada por CBD do diagrama da Figura 2.3.

Se por outro lado, o C.P. é completamente descarregado depois de ter ocorrido o escoamento plástico e então é carregado por compressão, um diagrama de tensão deformação tal qual CHIJ é obtido (Note que a tensão de escoamento a tração e a compressão foram assumidas tendo o mesmo valor  $\sigma_0$ ). Se o C.P. tivesse sido carregado diretamente por compressão, sem ser primeiramente sujeito a tração, o diagrama OIJ teria sido registrado.

No plano  $\sigma, \epsilon$  (Figura 2.3) somente pontos de uma faixa infinita limitada pelas paralelas AD e JH devem ser consideradas durante a aplicação de um teste arbitrário, que pode envolver carga, descarga e recarga de tração ou compressão. Num ponto genérico P desta faixa, a deformação (OF) pode ser considerada como a soma da deformação permanente (OC) e da deformação elástica CF. A primeira é a que seria observada depois do descarregamento completo de P, e a segunda o decréscimo elástico da deformação durante este descarregamento. Desde que PC foi considerado paralelo a OA, a tensão  $\sigma$  em P e a deformação elástica  $\epsilon^e$  são relacionadas com a Lei de Hooke.

$$\epsilon^e = \sigma/E \quad (2.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Se a tensão  $\sigma$  e a deformação permanente  $\epsilon^P$  são conhecidas, a deformação total  $\epsilon$  pode assim ser determinada por:

$$\epsilon = \epsilon^P + \sigma/E \quad (2.2)$$

Para completar a descrição do comportamento mecânico de um material perfeitamente elasto-plástico sob tração simples ou compressão precisamos estabelecer uma lei para a contração lateral  $\delta$ . Esta deformação pode também ser decomposta em componente elástica, e uma permanente. A contração lateral elástica  $\delta^e$  é relacionada com a extensão longitudinal elástica pela Lei de Hooke.

$$\delta^e = \nu \epsilon^e \quad (2.3)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. A contração lateral permanen

te por outro lado, é assumida estar relacionada com a extensão longitudinal permanente, de maneira que não haja variação de volume. Para expressar esta condição, vamos considerar um pequeno cubo do qual cada aresta seja paralela ou perpendicular aos eixos do C.P. Os eixos longitudinais sofrem alongamentos permanentes  $\epsilon^P$  e os eixos transversais as contrações permanentes  $\delta^P$ . Com arestas iniciais unitárias os lados do cubo deformado permanentemente terão os comprimentos, seguintes,  $1 + \epsilon^P$  e  $1 - \delta^P$ . Assim o novo volume será  $(1 + \epsilon^P)(1 - \delta^P)^2$  ou  $1 + \epsilon^P - 2\delta^P$ , se as potências maiores das pequenas deformações forem negligenciadas. Se não há variação devemos ter:

$$1 + \epsilon^P - 2\delta^P = 1$$

donde

$$\delta^P = \frac{\epsilon^P}{2}$$

(2.4)

isto é, a contração lateral é igual à metade do alongamento longitudinal. A razão entre a contração transversal total  $\delta$  e o alongamento longitudinal  $\epsilon$  é dada por:

$$\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{\delta^e + \delta^P}{\epsilon^e + \epsilon^P} = \frac{v\epsilon^e + \epsilon^P/2}{(1 + \epsilon^P/\epsilon^e)} \quad (2.5)$$

$$\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{2v + \epsilon^P/\epsilon^e}{2(1 + \epsilon^P/\epsilon^e)}$$

No campo elástico  $\epsilon^P = 0$  e a equação 2.5 fornece  $\delta/\epsilon = v$ , como se esperava. Durante o escoamento plástico, a deformação elástica  $\epsilon^e$  mantém o valor  $\sigma_0/E$  do limite elástico enquanto a deformação plástica  $\epsilon^P$  cresce monotonicamente. Assim a razão  $\epsilon^P/\epsilon^e$  cresce monotonicamente também durante o escoamento plástico. Além disso, o coeficiente de Poisson não pode ultrapassar o valor  $1/2$  (18). A equação 2.5 mostra portanto a razão  $\delta/\epsilon$  crescendo monotonicamente durante o escoamento plástico, começando do valor  $v$  no limite elástico e tendendo assintoticamente para o valor  $1/2$ .

## 2.4 - TESTE DE COMPRESSÃO E O EFEITO DE BAUSCHINGER

Se ao invés de um teste de tração se elaborar um de compressão e representando graficamente a tensão nominal com a deformação convencional, uma curva diferente será obtida da curva do teste de tração. Entretanto se a tensão verdadeira é representada com a verdadeira deformação obtida experimentalmente, curvas idênticas são geralmente traçadas. O ponto de escoamento na tração e na compressão poderão, por exemplo, ter posições asimétricas. Se, entretanto, o material é primeiramente deformado por tração uniforme, a carga é removida e o C.P. recarregado por compressão, o ponto de escoamento obtido na compressão será consideravelmente menor do que o escoamento inicial a tração. Isto tem sido explicado como resultado das tensões residuais deixadas no material, pelas deformações remanescentes da tração. Este fato é chamado de Efeito de Bauschinger, (2) e está presente sempre que há uma reversão do campo de tensões. O Efeito de Bauschinger é muito importante nos estudos de plasticidade cíclica. Infelizmente, entretanto, ele complica muito o problema e é assim usualmente deixado de lado.

Existem vários modelos simples usados para descrever o efeito Bauschinger. Um deles é o exposto e detalhado por Mendelson (2) (Figura 2.4)

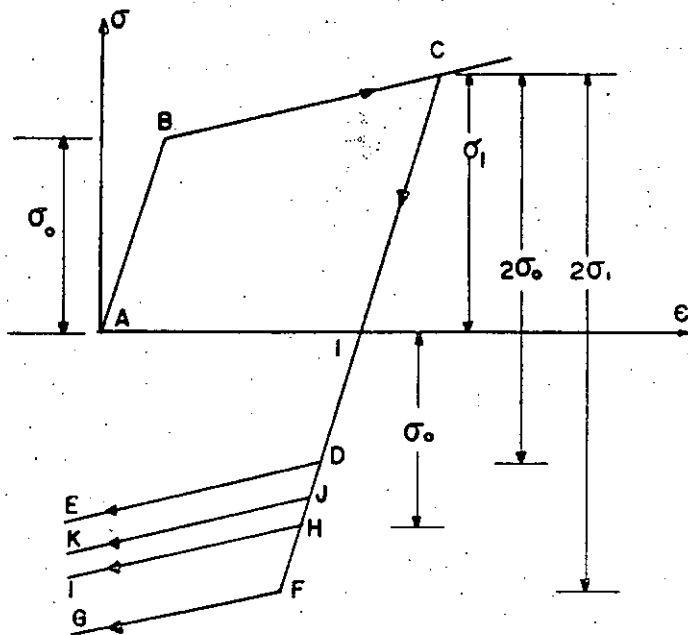


FIGURA 2.4 - TEORIAS PARA O EFEITO DE BAUSCHINGER

2.5 - CONCEITOS DE ELASTICIDADE2.5.1 - ESTADO DE TENSÃO

O estado de tensão em um ponto P num meio contínuo é matematicamente caracterizado pelo tensor simétrico de tensões

$$(T\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as tensões normais e  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são tensões de cisalhamento em planos perpendiculares aos eixos coordenados x, y e z. A simetria do tensor estabelece:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.7)$$

As componentes segundo os eixos x, y e z de um vetor de tensões atuando em um plano qualquer, cuja normal N tem os cossenos diretores  $l$ ,  $m$  e  $n$ , são:

$$\begin{aligned} S_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ S_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ S_z &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

Projetando-se estas componentes sobre N, obtém-se a tensão normal

$$S_n = lS_x + mS_y + nS_z \quad (2.9)$$

e uma vez introduzindo 2.6:

$$S_n = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2(m\ell\tau_{xy} + n\ell\tau_{xz} + mn\tau_{yz}) \quad (2.10)$$

Além disso pode-se calcular a tensão de cisalhamento neste plano

$$S_s^2 = S^2 - S_n^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 - S_n^2 \quad (2.11)$$

## 2.5.2 TENSÕES PRINCIPAIS

Supondo que o plano escolhido tenha a tensão  $S$  na direção de sua normal, a tensão de cisalhamento será então nula, isto é,  $S = S_n$  e  $S_s = 0$ . Em qualquer ponto de um meio contínuo, é sempre possível determinar três planos perpendiculares entre si, que satisfazem esta condição. Estes planos são chamados de "planos principais" do ponto, suas direções normais são chamadas "direções principais" e as tensões  $S = S_n$ , para os três planos, de tensões principais. Para determinar suas componentes temos

$$S_x = \ell S ; S_y = m S ; S_z = n S \quad (2.12)$$

uma vez que  $S$  tem os mesmos cossenos diretores  $\ell$ ,  $m$  e  $n$  que a normal ao plano. Comparando 2.8 e 2.12 chegamos a um sistema de equações cujo determinante deverá ser zero. Resulta a equação:

$$S^3 - I_1 S^2 - I_2 S - I_3 = 0 \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

As três raízes são reais e fornecem os valores das tensões principais que chamaremos de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  onde, por convenção

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.15)$$

## 2.5.3 INVARIANTES DAS TENSÕES

Os coeficientes da equação 2.13 independem do sistema de eixos coordenados adotados, por isto são chamados de invariantes das tensões. Para qualquer sistema de eixos os valores de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  serão sempre os mesmos e conseqüentemente o serão as raízes desta equação.

Se escolhermos as direções principais como as direções dos eixos coordenados, os invariantes tomam a forma simpli

ficada:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

#### 2.5.4 TENSÕES MÁXIMA E OCTAÉDRICA DE CISALHAMENTO

Façamos  $x, y, z$  os eixos principais de maneira que  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$  sejam tensões principais e façamos também  $\ell, m$  e  $n$  os cosenos diretores de um plano dado qualquer. Assim as tensões de cisalhamento referidas a estes eixos são nulas e as tensões normal e de cisalhamento com relação ao plano considerado, tiradas de 2.10 e 2.11, serão

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 ; \sigma_y = \sigma_2 ; \sigma_z = \sigma_3 \\ S_n &= \ell^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3 \\ S_s^2 &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_n^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se 2.12 com as tensões de cisalhamento nulas,

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \ell^2 \sigma_1^2 ; S_2^2 = m^2 \sigma_2^2 ; S_3^2 = n^2 \sigma_3^2 \\ S_s^2 &= \ell^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (\ell^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (2.18) \quad 2.19$$

Vimos que nos planos principais as tensões de cisalhamento são nulas. Vamos agora determinar os planos para os quais elas são estacionárias; isto é, vamos procurar os valores de  $\ell, m$  e  $n$  tais que  $S_s$  dados pela equação 2.19 sejam extremos locais. Em acréscimo à equação 2.19, existe uma restrição nos cosenos diretores,  $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ ; isto é, somente dois deles podem ser independentes. Substituindo em 2.19  $n^2 = 1 - m^2 - \ell^2$ , derivando a equação resultante com relação a  $\ell$  e  $m$  e igualando os resultados a zero, obtêm-se as seguintes equações

$$\ell \{(\sigma_1 - \sigma_3)\ell^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - 0,5 (\sigma_1 - \sigma_3)\} = 0 \quad 2.20$$

$$m \{(\sigma_1 - \sigma_3)\ell^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - 0,5 (\sigma_2 - \sigma_3)\} = 0$$

Uma solução óbvia é  $\ell = m = 0$  e  $n = \pm 1$ . Outra solução é obtida tomando  $\ell = 0$  mas não  $m$ . Então da segunda equação  $m = \pm \sqrt{1/2}$ . Também, tomando  $m = 0$  a primeira equação fornece  $\ell = \sqrt{1/2}$ . Geralmente não há solução para as equações 2.20 para ambos  $\ell$  e  $m$  diferentes de zero exceto no caso especial onde  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Se os cálculos acima são repetidos eliminando da equação 2.19 primeiro  $m$  e depois  $\ell$ , a seguinte tabela dos cosenos diretores que fazem  $\hat{\tau}$  um máximo ou mínimo é obtida.

COSENOS DIRETORES PARA PLANOS DE  $\hat{\tau}_{\max}$  e  $\hat{\tau}_{\min}$

$\ell =$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
$m =$	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\pm \sqrt{1/2}$
$n =$	$\pm 1$	0	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	0

As primeiras três colunas fornecem os cosenos diretores dos planos coordenados, que são principais, e portanto as tensões de cisalhamento nestes planos são nulas; isto é, elas são mínimas. As três últimas colunas fornecem cosenos diretores de ângulos de  $45^\circ$ . Estes planos, portanto, são bissetores dos ângulos entre dois eixos coordenados principais e passando através do outro eixo principal. Nestes planos as tensões de cisalhamento são máximas. Chamando estas tensões de  $\hat{\tau}_1$  e substituindo estes cosenos diretores na equação 2.19, os valores das tensões de cisalhamento são obtidas como

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \pm 0,5 (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \hat{\tau}_2 &= \pm 0,5 (\sigma_1 - \sigma_3) \\ \hat{\tau}_3 &= \pm 0,5 (\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad 2.21$$

Assim a tensão máxima de cisalhamento atua no plano bissetor do ângulo entre a maior e menor tensão principal e é  $i$

igual a metade da diferença entre estas tensões principais.

Se se deseja obter as tensões normais nestes planos, denominando-as de  $N_i$ , a segunda equação 2.17 fornece

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,5 (\sigma_2 + \sigma_3) \\ N_2 &= 0,5 (\sigma_1 + \sigma_3) \\ N_3 &= 0,5 (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

tal que a tensão normal máxima em cada um destes planos é igual a semi soma das tensões principais nos dois planos de cujo ângulo ele é bissetor.

Se um plano qualquer, cujas interseções com os planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  e os eixos coordenados definem um tetraedro, é orientado tal que sua normal  $ON$  faça ângulos iguais com todos os eixos temos

$$\ell = m = n = \pm 1/\sqrt{3} \quad (2.23)$$

A tensão normal atuando neste plano é

$$S_n = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \equiv \sigma_m \quad (2.24)$$

ou seja, a tensão normal neste plano é igual a tensão média e a tensão de cisalhamento é

$$\begin{aligned} S_s^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{9} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ou usando 2.24

$$S_s^2 = \frac{1}{3} \{ (\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 \} \quad (2.26)$$

Está claro que um tetraedro similar ao citado pode ser construído em cada quadrante do sistema de eixos  $xyz$  formando um octaedro em cujas faces oblíquas será aplicável a condição  $\ell^2 = m^2 = n^2 = 1/2$ . Em cada um dos oito planos formando as faces desse oc

taedro, a tensão normal e a tensão de cisalhamento serão determinadas pelas equações 2.24 e 2.26. Estes planos são chamados planos octaédricos e as tensões de cisalhamento atuando neles são chamadas tensões octaédricas. Vamos denominá-las por  $\tau_{oct}$ . Assim

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}^{1/2} = \quad (2.27)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ (\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 \}^{1/2}$$

Em termos dos invariantes de tensões a tensão octaédrica de cisalhamento pode ser escrita

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (I_1^2 + 3 I_2)^{1/2} \quad (2.28)$$

e em termos de tensões gerais não principais torna-se

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{2}{9} \{ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - \\ &\quad - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \} \\ &= \frac{1}{9} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ &\quad + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \} \end{aligned} \quad (2.29)$$

as quais fornecem a tensão octaédrica de cisalhamento em termos de componentes de tensões referidas a um conjunto arbitrário de eixos.

### 2.5.5 - TENSÃO DESVIADOR DE TENSÕES

Na teoria da plasticidade é conveniente expressar o tensor de tensões em duas partes, uma chamada de tensor esférico (ou hidrostático) de tensão e a outra de tensor desviador.

O tensor esférico é o tensor cujos elementos da diagonal são compostos por  $\sigma_m$  e os outros são nulos, isto é,

$$T_s = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.31)$$

De 2.31 está claro que  $\sigma_m$  é o mesmo para todas as possíveis orientações dos eixos; daí o nome de tensor esférico. Além disso; desde que  $\sigma_m$  é o mesmo em todas as direções; pode-se considerá-lo atuando como uma tensão hidrostática. Mendelson (2) mostrou que mesmo para grandes pressões hidrostáticas o efeito no escoamento e plastificação é desprezível. Assim, nas considerações de escoamento plástico vamos considerar o sistema de tensões obtido subtraindo o estado esférico de tensão do estado real, ao invés de trabalhar com o estado real de tensão. Portanto define-se o tensor desviador da seguinte maneira:

$$(T_d) = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)/3 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)/3 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)/3 \end{bmatrix}$$

Está claro que subtraindo uma tensão normal constante em todas as direções não vai alterar as direções principais. Em termos das tensões principais o tensor desviador é

$$(T_d) = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$(Td) = \begin{bmatrix} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)/3 & 0 & 0 \\ 0 & (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/3 & 0 \\ 0 & 0 & (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)/3 \end{bmatrix}$$

Para obter os invariantes do tensor desviador, substitui-se  $S$  por  $S' + I_3/3$  na equação 2.11.

Isto resulta em:

$$S'^3 - J_1 S'^2 - J_2 S' - J_3 = 0 \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= 0 \\ J_2 &= \frac{1}{3} (I_1^2 + 3 I_2) \\ J_3 &= \frac{1}{27} (2I_1^3 + 9I_1 I_2 + 27I_3) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Uma vantagem de usar o tensor desviador está agora aparente. O primeiro invariante deste tensor é sempre nulo. Isto pode ser verificado tomando a soma dos elementos da diagonal de 2.34.

Os invariantes  $J_2$  e  $J_3$  podem ser escritos em termos das componentes de tensão. Por exemplo:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ &+ 6 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou, em termos das tensões principais,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ J_3 &= (\sigma_1 - \sigma_m) (\sigma_2 - \sigma_m) (\sigma_3 - \sigma_m) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Em termos das tensões principais desviatórias  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  definidas por  $S_i = \sigma_i - \sigma_m$

$$\begin{aligned} J_2 &= -(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1) = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ J_3 &= S_1 S_2 S_3 = \frac{1}{3} (S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Finalmente comparando 2.37 com 2.39 vê-se que

$$J_2 = \frac{3}{2} \tau_{\text{oct}}^2 \quad (2.40)$$

Esta relação entre  $J_2$  e a tensão de cisalhamento octaédrica é às vezes usada como argumento no campo físico por algumas teorias de plasticidade. (2, 4, 5)

## 2.6 - CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

### 2.6.1 - IDÉIAS BÁSICAS

No estudo de um material submetido à tração simples, mostramos que existe um ponto de escoamento, no qual o material começa a se deformar plasticamente. Neste caso a tensão é uniaxial e esse ponto pode ser bem determinado. O problema se complica na medida em que aparecem diversas tensões atuando num ponto em direções diferentes.

É importante conhecer o comportamento de um material sob combinações de tensões. Em particular é necessário ter uma idéia das condições que caracterizam a transição do material do estado elástico para o estado plástico (patamar de escoamento). Mendelson (2) considerou como exemplo o cilindro de parede fina que está sendo tracionado pela força  $P$ , submetido a um momento de torção  $T$  e a uma pressão interna  $p$ : (Fig. 2.5)

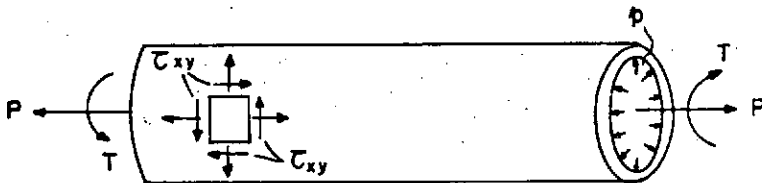


Fig. - 2.5 - Combinação de tensões num cilindro de parede fina

Pela variação da pressão  $p$ , a força axial de tração  $P$  e do momento de torção  $T$  é possível obter várias combinações de tensão, as quais vão também resultar em diferentes direções principais. A questão aqui é: Para que combinação de carregamento o cilindro vai começar a plastificar. Os critérios adotados pa

ra decidir qual combinação de tensões multiaxiais vai causar a plastificação são chamados Critérios de Escoamento. O primeiro passo para qualquer análise de escoamento plástico é decidir sobre o critério de escoamento a ser adotado. O próximo passo é decidir como descrever o comportamento do material depois que a plastificação começar.

Vamos começar a discussão das condições de escoamento considerando o aparecimento do início das deformações plásticas num material perfeitamente elasto-plástico o qual nunca sofreu deformações acima do campo elástico. Desde que se supõe a validade da Lei de Hooke no campo elástico, a deformação no instante em que se inicia a plastificação é determinada unicamente pela tensão nesse instante. Assim, em qualquer combinação de tensões e deformações que possa condicionar fisicamente o material num desenvolvimento plástico, será sempre possível expressar matematicamente essa combinação crítica em termos dos componentes de tensões. Pelo menos para o início do aparecimento das deformações plásticas, a condição de escoamento (ou critério do escoamento pode ser escrita na forma:

$$f(\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = 0 \quad (2.41)$$

Dentro do campo elástico e pouco acima o material é considerado isotrópico: a forma da Lei de Hooke e em particular os valores das constantes K e G não dependem da orientação dos eixos coordenados. Esta isotropia impõe uma restrição na forma da função f: o valor de f não muda se os componentes da tensão com respeito aos eixos x, y e z são substituídas pelas componentes correspondentes com respeito a qualquer outro sistema de eixos retangulares  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$ . Em outras palavras a expressão de f pode ser também representada como:

$$f(J_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.42)$$

ou seja f deve ser função dos invariantes de tensões do tensor desviador.

Numerosos critérios de escoamento foram propostos para a plastificação de sólidos, desde Coulomb em 1773. Para os propósitos deste trabalho entretanto apresentaremos apenas a discussão de dois deles, a saber: a Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima ou Critério de Tresca e a Teoria da Energia de Distorção

ou o Critério de Escoamento de Von Mises. (2, 3, 6, 7).

## 2.6.2 - TEORIA DA TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA OU CRITÉRIO DE TRESCA

Esta teoria assume que o escoamento vai ocorrer quando a máxima tensão de cisalhamento em um material, submetido a uma combinação qualquer de cargas, atingir o valor da máxima tensão de cisalhamento quando este mesmo material estiver submetido a tração simples. A equação da máxima tensão de cisalhamento foi deduzida anteriormente e estabelece que ela seja igual a metade da diferença entre as tensões principais máxima e mínima. Para tração simples, entretanto, desde que  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , a tensão máxima de cisalhamento no escoamento, onde  $\sigma_1 = \sigma_0$  (Tensão de escoamento será:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_0 - \sigma_2}{2} \text{ ou } \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_0 - \sigma_3}{2} \quad (2.43)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_0/2 \quad (2.44)$$

O critério de Tresca então admite que o escoamento vai ocorrer quando qualquer uma das seis condições seguintes é atingida:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_0 \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm \sigma_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para o estado biaxial de tensão com  $\sigma_3 = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_0 \quad \text{se } \sigma_1 > 0 \quad \text{e } \sigma_2 < 0 \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= -\sigma_0 \quad \text{se } \sigma_1 < 0 \quad \text{e } \sigma_2 > 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_0 \quad \text{se } \sigma_2 > \sigma_1 > 0 \\ \sigma_1 &= \sigma_0 \quad \text{se } \sigma_1 > \sigma_2 > 0 \\ \sigma_1 &= -\sigma_0 \quad \text{se } \sigma_1 < \sigma_2 < 0 \\ \sigma_2 &= -\sigma_0 \quad \text{se } \sigma_2 < \sigma_1 < 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Uma representação gráfica no plano  $\sigma_1\sigma_2$  para este critério de escoamento está mostrado na Fig. 2.6. Uma limitação desta teoria é a exigência de que as tensões de escoamento na tração e na compressão sejam iguais.

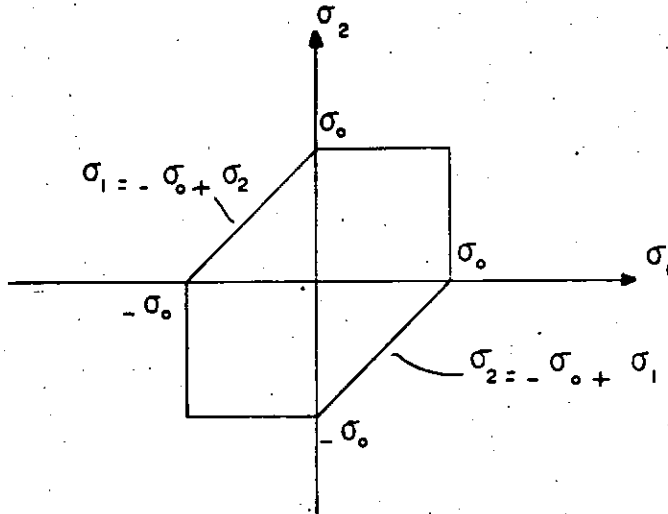
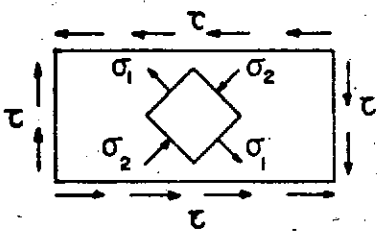


Fig. 2.6 - Teoria da máxima tensão de Cisalhamento

O critério de Tresca está em razoável acordo com a experiência e tem um uso considerável por projetistas. Ele é, entretanto, de uso penoso em face da necessidade de se conhecer "a priori" as tensões principais extremas.

Para o caso de cisalhamento puro temos:



$$\tau = K \text{ (constante)} \quad (2.47)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (2.48)$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = K \quad (2.49)$$

FIGURA 2.7.- ESTADO SIMPLES DE CISALHAMENTO

Segundo o critério de Tresca

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 2K \text{ (Cisalhamento puro)} \quad (2.50)$$

$$2K = \sigma_0 \quad \text{ou} \quad K = \sigma_0/2 \quad (2.51)$$

A tensão de escoamento no cisalhamento puro é a meta de da tensão de escoamento na tração simples.

## 2.6.3 - TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO OU CRITÉRIO DE VON MISES

A teoria da energia de distorção admite que o escoamento começa quando a energia de distorção de um material submetido a uma combinação qualquer de cargas iguala a energia de distorção desse mesmo material no escoamento por tração simples. A equação da energia de distorção (Mendelson (2)) é:

$$U_d = \frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau^2_{oct} \quad (2.52)$$

onde  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$  é o módulo transversal de elasticidade.

No ponto de escoamento na tração simples temos:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \sigma_1 = \sigma_0 \quad (2.53)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \quad (2.54)$$

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2$$

A condição de escoamento estabelece:

$$\frac{1}{2G} \frac{1}{6} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} = \frac{1}{2G} \frac{\sigma_0^2}{3} \quad (2.56)$$

e para o caso biaxial, onde  $\sigma_3 = 0$ ,

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad (2.57)$$

Esta equação representa a equação de uma elipse, chamada elipse de Von Mises, no plano  $\sigma_1 \sigma_2$ , como mostra a Fig. 2.8 a seguir.

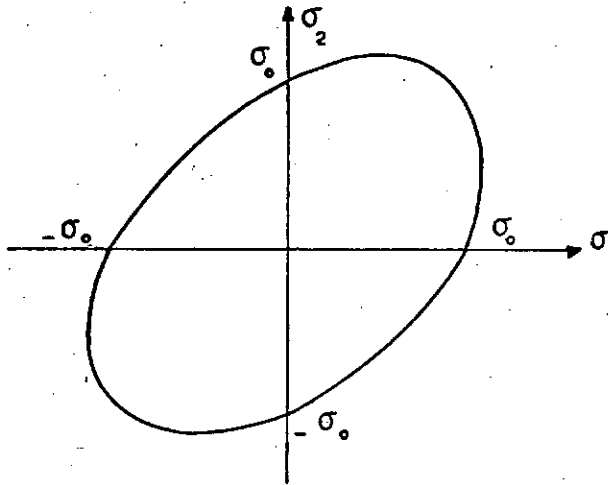


FIGURA 2.8 - TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO

Para o caso de cisalhamento puro temos:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -K \quad \sigma_3 = 0 \quad (2.58)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} = \sigma_1^2 = K^2 \quad (2.59)$$

e segundo o Critério de Von Mises o escoamento ocorrerá quando

$$K^2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2$$

ou (2.60)

$$K = \sigma_0 / \sqrt{3}$$

a tensão de escoamento no cisalhamento puro é  $1/\sqrt{3}$  vezes a tensão de escoamento na tração simples.

Assim o critério de Von Mises produz uma tensão de escoamento no cisalhamento simples 15 por cento maior do que a determinada pelo Critério de Tresca e pode-se facilmente demonstrar que esta é a maior diferença entre os dois critérios.

O critério de escoamento de Von Mises se ajusta melhor a dados experimentais do que outras teorias e é usualmente mais fácil de aplicar do que o Critério de Tresca, porque não precisa de nenhum conhecimento prévio a respeito das grandezas das tensões principais. Por essas razões este critério é largamente usado.

Von Mises propôs seu critério por conveniência matemática. Hencky mostrou mais tarde que era equivalente a admitir

que o escoamento de deformação por cisalhamento atinge um valor crítico, como se mostra abaixo. Assim, desde que a tensão octaédrica de cisalhamento é igual a

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2} \quad (2.61)$$

a qual para tração simples no escoamento se torna em

$$\tau_0^{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0 \quad (2.62)$$

então pela equação 2.56 temos,

$$\tau_{\text{oct}} = \tau_0^{\text{oct}} \quad (2.63)$$

Isto é, o escoamento vai ocorrer quando a tensão octaédrica de cisalhamento atingir o valor da tensão octaédrica de cisalhamento no escoamento por tração simples.

### III - FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO PARA TENSÕES NA INTERSEÇÃO CILINDRO-ESFERA EM VASOS DE PRESSÃO

#### 3.1 - DADOS FUNDAMENTAIS

Apresentaremos a seguir alguns conceitos sobre o fator de concentração de tensões (FCT), que ocorrem na interseção de um bocal cilíndrico com um vaso de pressão esférico, numa forma conveniente aos projetos.

Consideraremos estruturas compostas por elementos de casca fina e em particular com o bocal cilíndrico disposto radialmente no vaso de pressão esférico. A casca cilíndrica vai ser tratada como semi-infinita. A parte esférica pode ser reforçada por uma região uniformemente espessada além do bocal. Os parâmetros geométricos que definem o projeto estão mostrados na Figura 3.1.

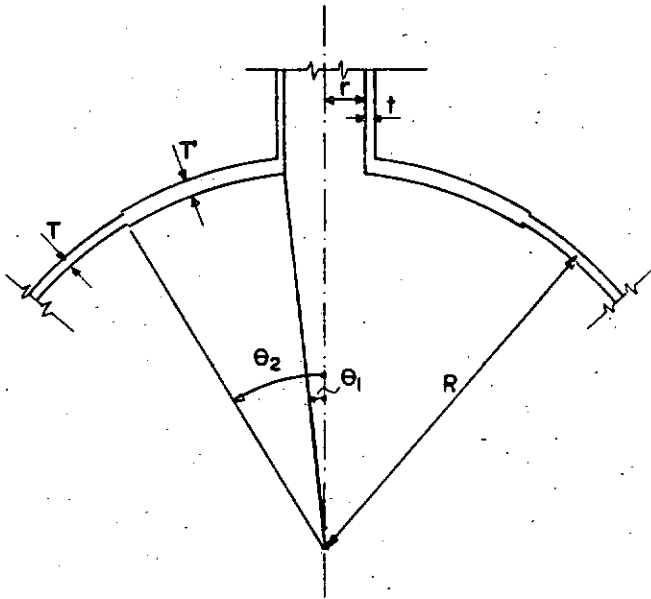


FIGURA 3.1 - GEOMETRIA DA CASCA

Como é comum nos problemas de associações de cascas, são elas supostas se unirem na interseção das linhas médias de suas espessuras. Isto, juntamente com a hipótese de que seções planas permanecem planas após a flexão, significa que a análise irá prever o comportamento do todo da estrutura e não vai tratar dos efeitos microscópios.

O fator de concentração de tensões tem sido determinado pela teoria elástica clássica de cascas finas. Uma crítica que se pode fazer a essas soluções é que fornecem conhecimento limitado num complexo problema de projeto: mas apesar disso foi claramente ilustrado por Rose (9) que a determinação do fator de concentração de tensões é muito útil no encaminhamento dos projetos.

O F.C.T. tem sido calculado em termos da máxima tensão, que ocorre na esfera. Leckie and Penny (8) apresentam gráficos bastantes eficientes para uso em projetos de vasos; mas se é necessário um conhecimento mais detalhado da distribuição de tensões na esfera ou no cilindro, então a análise da casca baseada nas teorias clássicas precisa ser completada.

### 3.2 - FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES PARA PRESSÃO INTERNA

No cálculo do F.C.T. admite-se que um reforço é necessário e de dimensão tal que o cilindro pode ser considerado penetrando toda a espessura  $T$  da esfera. Não é sempre, que um reforço é impositivo.

Define-se porém o seguinte fator de concentração de tensões:

$$FCT' = \text{tensão máxima} / \frac{PR}{2T'} \quad (3.1)$$

onde  $PR/2T'$  é a tensão de membrana na esfera de raio  $R$  e espessura  $T'$ , sujeita à pressão interna  $p$ .

O fator de concentração de tensão  $FCT$  é pois uma função dos parâmetros adimensionais:

- i) a razão raio/espessura do reforço  $R/T'$
- ii) a razão raio/espessura do cilindro  $r/t$
- iii) a razão raio cilindro/raio esfera  $r/R = \text{sen } \theta_1$

A fim de representar a variação do FCT com estes três parâmetros, pelo menos um gráfico tri-dimensional ou vários gráficos bi-dimensionais são necessários.

É possível porém representar o F.C.T. para todas as variações dos parâmetros em um simples gráfico. Chegou-se a esse resultado considerando primeiro o FCT que ocorre numa abertura onde a relação  $t/T = 0$ . Pode-se mostrar que para valores pequenos de  $\theta_1$ , que o F.C.T. é função somente de  $\rho = (r/R)\sqrt{R/T'}$ . Quando a curva FCT/ $\rho$  é traçada para  $t/T = 0$  e para o campo dos parâmetros  $0,01 < r/R < 0,4$  e  $30 < r/T' < 150$  determina-se que ela é única e contínua, exceto para valores grandes de  $\rho$  quando uma ligeira dispersão é observada.

Essa curva está representada na Figura 3.2 (8) e designada por  $t/T' = 0$ . Em vista disso pode-se escolher um novo conjunto de parâmetros, que também formam um grupo adequado para definir a geometria do vaso. A escolha é:

$$a) \rho = \frac{r}{R} \sqrt{\frac{R}{T'}} \quad b) \frac{R}{T'} \quad c) \frac{t}{T'}$$

Quando o parâmetro (c) é zero o FCT é dependente somente do valor  $\rho$ , se  $\rho$  é pequeno, é só ligeiramente dependente do valor (b) quando  $\rho$  é grande. Escolhendo valores para (b) e (c) define-se a curva FCT/ $\rho$  resultante. Repetindo o processo, mantendo o mesmo valor de (c), mas escolhendo grandezas diferentes para (b) encontra-se a nova curva FCT/ $\rho$  praticamente coincidente com a primeira curva. De fato, para um bocal nivelado, as curvas resultantes de uma escolha particular do parâmetro (c) têm a mesma característica daquela quando o parâmetro (c) é zero, como foi mostrado por Leckie e Penny na figura 3.2.

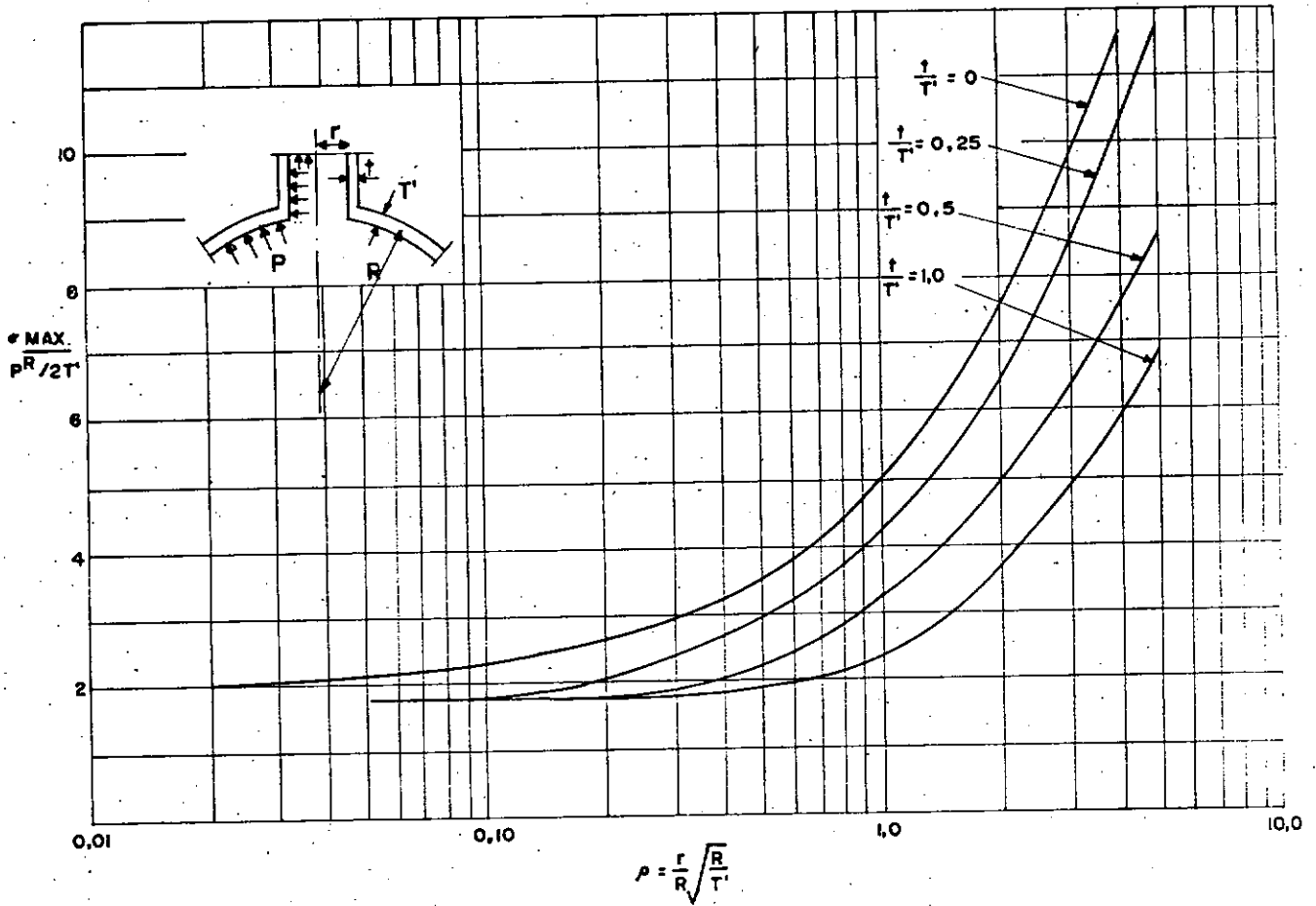


FIGURA 3.2 - TENSÃO MÁXIMA NA ESFERA PARA PRESSÃO INTERNA (BOCAL NIVELADO)

### 3.3 - A APLICAÇÃO DA CURVA FCT/ $\rho$ EM PROJETOS

Ao se estudar um vaso para resistir a uma pressão interna, foi proposto por Rose (9) executar o projeto de maneira que as tensões máximas devidas a distúrbios locais sejam menores que um certo múltiplo da tensão de membrana no vaso de pressão principal. Assim, define-se o seguinte fator de concentração de tensão

$$FCT = \text{tensão máxima} / \frac{pR}{2T}$$

onde  $pR/2T$  é a tensão de membrana no vaso principal devido à pressão  $p$ . No presente, os projetistas estão a favor de um  $FCT = 2,5$  mas nos procedimentos que se seguem, o projetista está livre

na escolha de qualquer valor de FCT que se queira. A relação entre FCT e FCT' é simples

$$FCT' = FCT \times T'/T$$

A situação normal de um projeto é que sejam dadas as dimensões R, T e t e se deseja encontrar as dimensões t e T' (se for necessário reforço).

Como para os propósitos deste trabalho o reforço não será necessário, tem-se que  $T' = T$  e  $FCT' = FCT$ . Então calcula-se o valor de  $\rho$  e da interseção de  $\rho$  com  $FCT = 2,5$  (na figura 3.2) encontra-se a relação  $t/T$  procurada.

Algumas vezes é necessário obter o FCT associado com um projeto já existente. Calcula-se então  $\rho$  e  $t/T$  e da figura 3.2 encontra-se o FCT.

#### IV - APLICAÇÃO DO CONCEITO DE ACOMODAÇÃO EM VASOS DE PRESSÃO

##### 4.1 - EXPLICAÇÃO DO CONCEITO DE ACOMODAÇÃO

Já está generalizado o conhecimento de que se se permitirem plastificações localizadas nas descontinuidades de vasos de pressão, podem-se obter projetos mais econômicos. A quantidade admissível deste "escoamento local" permanece ainda como uma questão aberta e é com certeza muito difícil de definir. Entretanto, o conceito de acomodação leva a uma limitação bastante lógica dos níveis de tensões e, como será discutido neste capítulo, uma forte indicação da quantidade de escoamento pode ser obtida, em termos gerais, pelo estudo do comportamento de componentes particulares do vaso de pressão na condição de acomodação (shake-down).

Para os propósitos da exposição admitiremos o seguinte:

- 1) Existe uma descontinuidade no vaso de pressão e a localização da região de maiores tensões e seus valores são dados.
- 2) As deformações (elástica e plástica nesta região são conhecidas. Estes valores podem ser teóricos ou experimentais e são bastante pequenos para não permitirem mudanças significativas na forma do vaso.
- 3) O material é isotrópico.
- 4) Não há histeresis.
- 5) O material tem características de tensão-deformação perfeitamente elasto-plásticas e não apresenta efeito de Bauschinger. Nenhum destes efeitos precisa ser rigorosamente assumido, mas são aqui mencionados para maior caracterização.
- 6) O material não sofre encruamento, nem deformações rápidas durante o carregamento cíclico.
- 7) O comportamento da região em questão não é afetado pela plastificação em qualquer outra parte do vaso.
- 8) A relação pressão deformação efetiva ( $\bar{\epsilon}$ ) na região em que se está interessado tem a forma da Figura 4.1 (A).

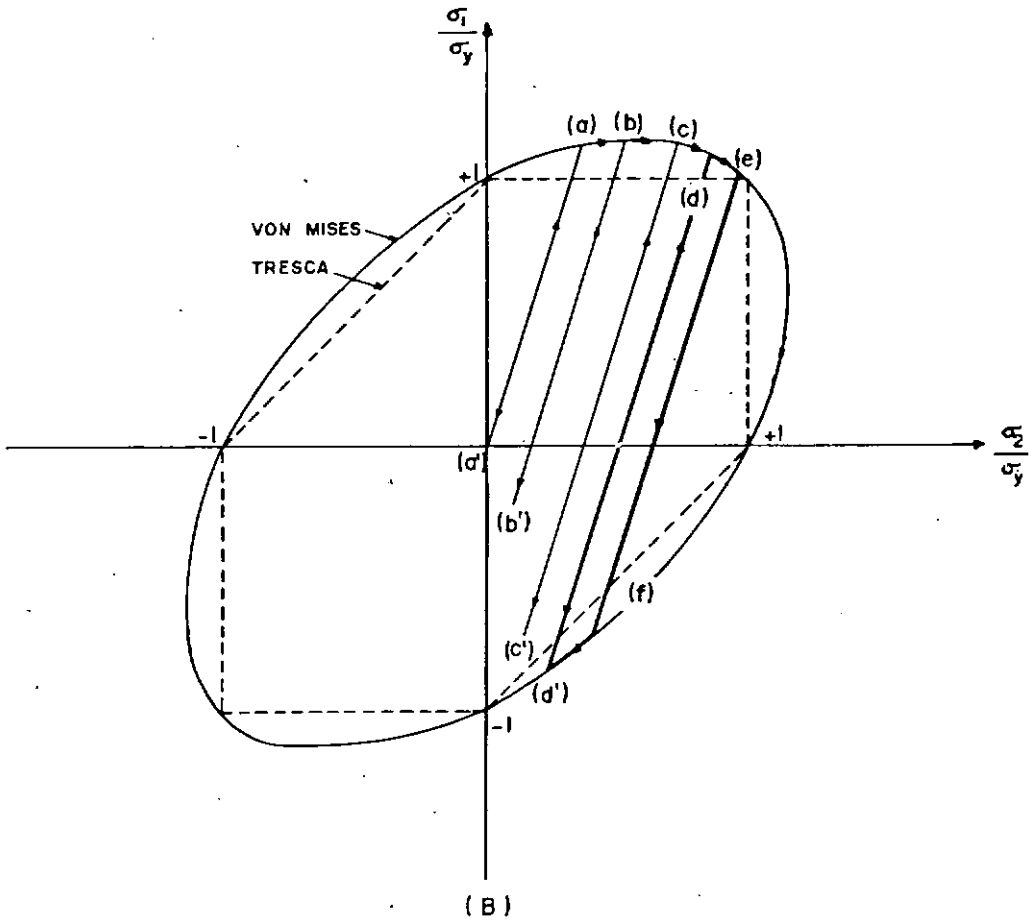
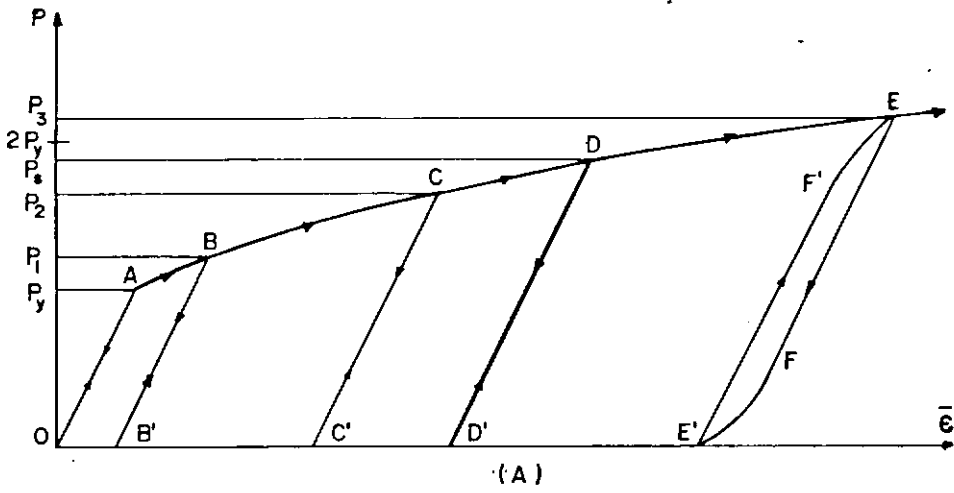


FIGURA 4.1 (A e B) - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO NUMA DESCONTINUIDADE DE UM VASO DE PRESSÃO

Para a discussão do conceito de acomodação é útil ter conhecimento das tensões além do ponto de início da plasticização. Se deformações experimentais são registradas, as tensões correspondentes podem ser obtidas. Alternativamente, elas podem ser calculadas diretamente de análise elasto-plástica teórica. A

maneira como estas tensões e deformações são determinadas não interfere porém, no entendimento do fenômeno.

Quando uma pressão interna é aplicada ao vaso inicialmente descarregado, o comportamento na descontinuidade é elástico ao longo de OA na figura 4.1 (A) até que a pressão  $P_y$  (início de escoamento) seja atingida. Uma pressão subsequente aumentada para  $P_1$  causa plastificação (de acordo com o critério de escoamento aplicável ao material) e portanto um escoamento plástico é induzido de A para B. Despressurizando o vaso de  $P_1$  para zero o comportamento da região em questão acompanharia a linha BB', que é paralela a OA. Se se admite que o critério de escoamento de von Mises é aplicável e que a tensão radial é desprezível, o caminho das tensões pode ser representado pela elipse de escoamento bi-dimensional de von Mises mostrado na Figura 4.1 (B). O carregamento inicial para o princípio da primeira plastificação, é desta maneira, representado pela linha (a'a), permanecendo constante a razão entre as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Durante o escoamento plástico esta razão pode mudar de maneira que na pressão  $P_1$  a razão corresponde ao ponto (b). Uma despressurização subsequente resulta em resposta elástica, consistente com a Figura 4.1 (A) e a razão novamente permanece constante até a pressão zero, quando o ponto b' é atingido. Neste ponto existe agora deformação residual efetiva OB' como está mostrado na Figura 4.1 (A) e componentes de tensões residuais, como mostra a Figura 4.1 (B). Se o vaso é carregado ciclicamente de zero até  $P_1$  então o comportamento no ponto considerado será elástico.

O efeito de aumentar a pressão para  $P_2$  decrescendo para zero e aumentar novamente para  $P_s$  (pressão de acomodação) pode ser facilmente compreendido pelo esquema das Figuras 4.1 (A e B). Quando a pressão é reduzida de  $P_s$  para zero, correspondendo à linha DD' na figura 4.1 (A), nota-se que uma posição limite foi alcançada para o comportamento elástico no descarregamento total. Qualquer acréscimo na pressão, digamos para  $P_3$  no ponto E da Figura 4.1 (A) faz com que o caminho da carga atinja a superfície de escoamento no descarregamento representado pelo ponto (f) na Figura 4.1 (B) que corresponde ao princípio da plastificação reversa no ponto F da Figura 4.1 (A); a posição final na pressão zero é o ponto d' da Figura 4.1 (B). Uma nova pressurização até  $P_3$  resulta em plastificação prematura em F' e (d). Desta

maneira,  $P_s$  é máxima pressão admissível para se evitar a plastificação reversa e assegurar uma resposta do vaso de pressão puramente elástica. Esta pressão  $P_s$  é conhecida como a "Pressão de Acomodação"; isto é, o componente do vaso submetido a condição de acomodação se acomodou dentro de um comportamento puramente elástico.

É conveniente definir um "Fator de Acomodação" por:

$$K_s = \frac{\text{máxima pressão para comportamento elástico}}{\text{pressão para escoamento inicial}}$$

Assim  $K_s$  será igual a  $P_s/P_y$  na figura 4.1 (A) e  $(dd'/aa')$  na figura 4.1 (B). Nota-se que a condição de acomodação surge a partir de um sistema de tensões residuais no estado de descarregamento do vaso. O teorema de acomodação estabelece que:

Se existe uma distribuição de tensões residuais auto-equilibradas que, superpostas às tensões decorrentes do carregamento, conduzir a tensões finais elásticas, a estrutura entrará em acomodação, isto é: para repetidos ciclos de carregamento e descarregamento nos mesmos níveis de carga, não ocorrerão tensões plásticas.

As tensões correspondentes a  $(d')$  são as tensões residuais auto equilibradas e aquelas correspondentes a linha  $(dd')$  são as tensões elásticas.

#### 4.2 - A GRANDEZA DO FATOR DE ACOMODAÇÃO

A grandeza do fator de acomodação tem sido objeto de muita discussão. Baseado no parágrafo anterior o fator de acomodação seria 2,0 somente se a proporção entre as tensões não variasse quando o vaso é carregado acima do ponto de plastificação, na Figura 4.1 (B) os pontos (a), (b), (c) e (d) fossem coincidentes e as linhas  $(a'a)$ ,  $(b'b)$ ,  $(c'c)$  e  $(d'd)$  todas superpostas. Baseado na superfície de escoamento de Tresca, também mostrada na Figura 4.1 (B), o fator pode ser 2,0 para mudanças limitadas da razão entre as tensões. Não é possível no presente fazer um balanço geral sobre quanto a proporção entre as tensões pode variar. Para isto precisa-se esperar por mais cálculos e experiências sobre o assunto. Apesar disso pode-se ver pela Figura. 4.1

(B) que, desde que a proporção entre as tensões não varie muito, o fator de acomodação será aproximadamente 2.0. Isto foi demonstrado dentro de um campo de dimensões para certo tipo particular de componente, isto é, uma investigação em um tubo numa esfera, feita por Procter e Flinder (12) os quais determinaram que a rotação do vetor de tensão na pressão de acomodação, isto é, o ângulo (aa'd) da figura 4.1 (B), era pequeno (6° no máximo) exceto quando os efeitos de plastificação dependentes do tempo eram considerados e neste caso a rotação foi cerca de 30°.

Se a proporção entre tensões variar durante o carregamento acima do ponto de plastificação, então o fator de acomodação pode ser significativamente inferior a 2,0. Conseqüentemente muito cuidado precisa-se ter quando da aplicação do ASME Code, Section III, Nuclear Vessels - 1965, que admite um fator 2,0 em condições de operação. Sob determinadas interpretações deste código, os projetos podem ser elaborados a níveis acima do limite de acomodação.

#### 4.3 - COMPORTAMENTO NAS CONCENTRAÇÕES DE TENSÕES

Para avaliar a influência do fator de concentração de tensões em bocais no desempenho em serviço, é necessário entender as relações tensão-deformação antes e depois da plastificação. As deformações podem ser medidas por intermédio de um "strain gauge" enquanto a pressão é aplicada e removida; a tensão tem que ser deduzida da deformação medida e do conhecimento do comportamento do material. Como exemplo, suponha que um "strain gauge" seja colocado na direção circunferencial do bordo interno de um bocal. Segundo Rose (9) este é o ponto de tensão máxima e além disso a tensão na extremidade do bordo é essencialmente uniaxial de maneira que sob condições elásticas uma variação na deformação  $\epsilon$  é equivalente a uma variação na tensão  $\sigma = E\epsilon$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade.

Admite-se que o vaso não foi submetido a pressão previamente e está na condição neutra. Se o valor do "strain gauge" é lido em intervalos durante a aplicação e o alívio de pressão, um gráfico tal qual a linha cheia mostrada na Figura 4.2 (A) pode ser obtido. Observe que esta figura é a mesma representada pela Figura 4.1 (A) só que agora vamos analisar o compor

tamento elasto-plástico da descontinuidade do vaso em relação a sua curva de tensão-deformação.

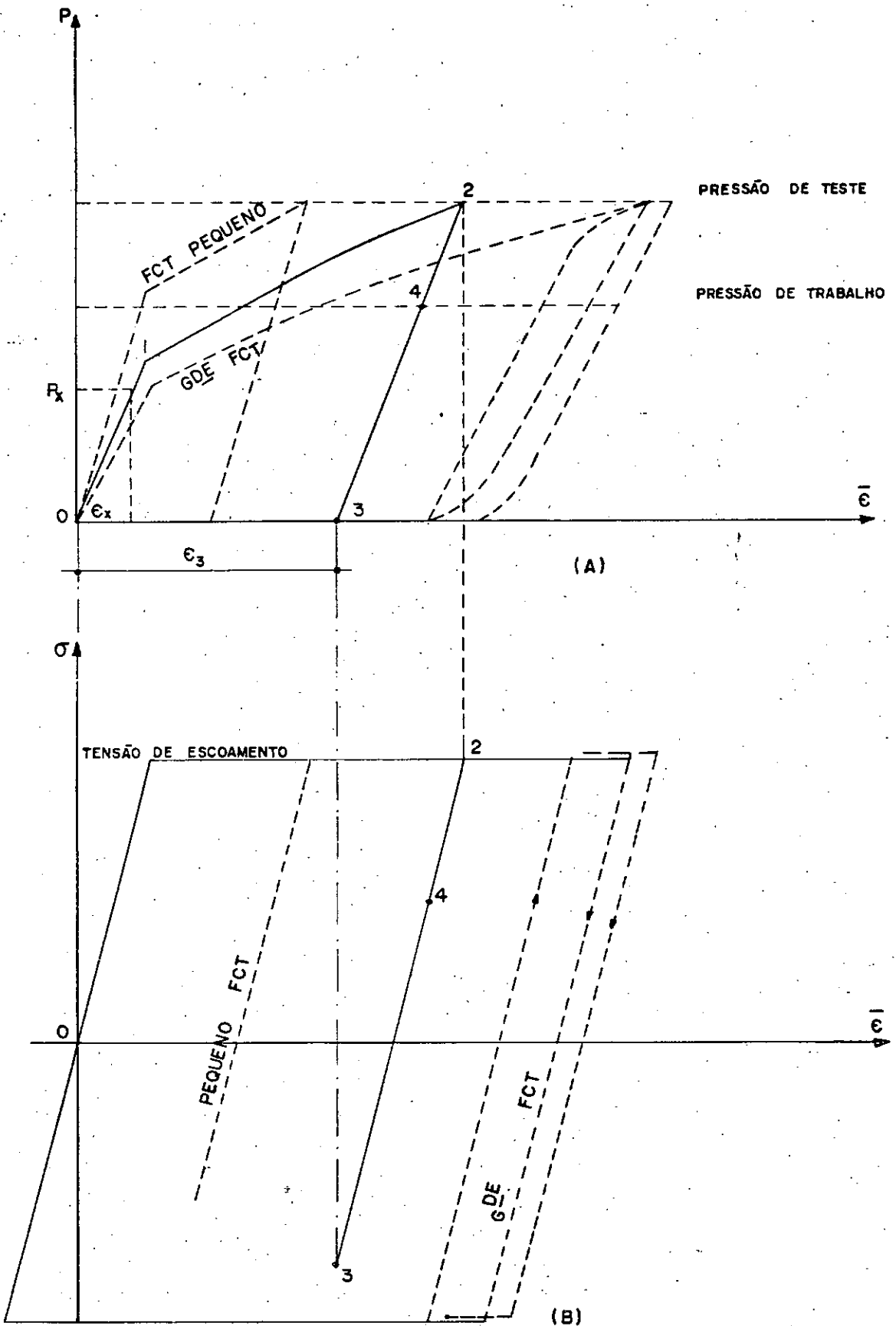


FIGURA 4.2 - CURVAS DE PRESSÃO - DEFORMAÇÃO E TENSÃO - DEFORMAÇÃO.

Começando na origem 0, a deformação cresce proporcionalmente à pressão até o ponto 1, onde se inicia a plastificação. A deformação neste ponto é  $\sigma_y/E$ , onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material. Entretanto, não há crescimento brusco da deformação a pressão constante, como pode ser esperado por analogia com o teste de tração simples. Ao invés disso, a deformação cresce, na forma da curva contínua 1-2 da Figura 4.2 (A). Um alívio da pressão da posição máxima requerida para os propósitos do teste resulta na mudança da deformação representada pela reta 2-3, que é também paralela à 0-1 (Figura 4.2 (A)). A deformação  $\epsilon_3$  é de fato permanente, e sob condições de trabalho o campo de deformações é representado pela linha 3-4.

O problema de determinar as tensões fica assim muito simples porque a deformação total encerrada na figura 4.2 (A) é inferior a 1,0% e isto é insuficiente para produzir o encruamento (work hardening). Na escala aumentada das deformações da Figura 4.2 (A), entretanto, a porção elástica e o patamar de escoamento da curva tensão-deformação para tração simples apareceria como mostrado na Figura 4.2(B). Note-se que neste gráfico, apesar de representar o mesmo fenômeno da Figura 2.3 estamos levando em conta as tensões residuais que aparecem após o descarregamento total do vaso. Este descarregamento determina a ausência da carga aplicada, que no caso seria a ausência de pressão interna, e não a ausência de tensões. O ponto 3 nas Figuras 4.2 (A e B) representa, respectivamente, um estado de despressurização do vaso e um estado de tensões residuais devido às deformações remanescentes. O ponto de escoamento 1 e o ponto de deformação máxima 2 podem ser mostrados na curva de tensão-deformação e o fato evidente que está ilustrado é que não pode haver nenhum acréscimo na tensão absoluta entre os pontos 1 e 2. A localização correta do ponto 3 na figura 4.2 (B) é menos óbvia, mas não há dúvida quando se lembra que o módulo de elasticidade de um aço pré-deformado é idêntico ao de um aço normal. Em outras palavras, a linha 2.3 na figura 4.2 (B) é paralela a linha 0-1 na mesma figura. O valor das tensões residuais de compressão na remoção da pressão está claramente indicado.

#### 4.4 - DEPENDÊNCIA DO COMPORTAMENTO DO VALOR NUMÉRICO DO FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO (FCT)

A forma dos diagramas das figuras 4.2 (A e B) é típica e dependente do valor numérico do fator de concentração de tensões. O F.C.T. pode ser calculado da linha 0-1 do carregamento inicial (Fig. 4.2 (A)). Para uma pressão qualquer  $p_x$  a deformação é  $\epsilon_x$ , correspondendo a uma tensão  $E \epsilon_x$ . O FCT (K) é definido como a razão entre a máxima tensão e a tensão de membrana,  $p_x R / 2T$ , onde T e R são respectivamente a espessura e o raio do vaso esférico. Assim:

$$K = \frac{E \epsilon_x}{\frac{(p_x R)}{2T}} = \frac{\epsilon_x}{p_x} \frac{2 TE}{R}$$

A inclinação da linha 0-1 na Figura 4.2 (A) é desta maneira inversamente proporcional ao F.C.T.

A pressão na qual acontece o início de escoamento é controlada pelo F.C.T.. O escoamento inicia quando a tensão de membrana vezes o F.C.T. é igual ao ponto de escoamento, de maneira que a pressão para escoamento inicial é  $p_1 = 2T \sigma_y / KR$ .

Variações de tensão e deformação durante a aplicação e alívio da pressão de trabalho (linha 3-4) são elásticas e além disso o F.C.T. tem seu valor inalterado desde que as linhas 0-1 e 3-4 tenham a mesma inclinação. Entretanto, o F.C.T. se relaciona agora com o campo de tensão melhor que com os valores absolutos de tensão e as tensões elásticas, devido à pressão de trabalho, podem ser visualizadas como superpostas a um sistema de tensões residuais em equilíbrio representado pelo ponto 3 na Figura 4.2. (B).

A maneira na qual o F.C.T. determina a posição de deformação permanente é mostrada pelas linhas tracejadas nas Figuras 4.2 (A e B), desenhadas para um F.C.T. menor e outro maior. O efeito do valor menor do F.C.T. é aumentar a pressão para o escoamento inicial e assim reduzindo a posição de deformação permanente. O valor maior do F.C.T. diminui a pressão para o escoamento inicial e desta maneira aumenta a posição da deformação permanente. O campo de tensões, claro, aumenta na proporção direta do F.C.T. até que, no caso extremo uma forma de instabilidade plás-

tica chamada de colapso incremental apareça. Isto acontece quando o campo de tensões elásticas é maior que duas vezes a tensão de escoamento do material e está ilustrado no extremo direito das figuras. Abaixo da pressão de colapso, o gráfico de pressão—deformação é inicialmente linear, mas uma plastificação reversa ocorre antes que a pressão atinja o valor zero. Com a reaplicação da pressão o gráfico se torna não linear antes da pressão máxima previamente definida ser alcançada, e uma grande curva de histeresis se desenvolve. Além disso, as deformações permanentes crescem com cada aplicação de pressão, apesar da pressão máxima não ser excedida.

APÊNDICE I

## DA TENSÃO E DEFORMAÇÃO NATURAIS (OU EFETIVAS)

A tensão nominal que normalmente se usa para traçar o diagrama convencional de tensão-deformação não é a tensão verdadeira, já que a área da seção transversal é decrescente com a carga. Para tensões acima mas perto da tensão de escoamento, esta distinção não tem importância, mas para tensões e deformações muito altas esta diferença torna-se importante. A tensão efetiva pode ser obtida da tensão nominal como se segue. Se pequenas variações de volumes são desprezadas, isto é, o material é considerado incompressível, então

$$A_0 \ell_0 = A \ell$$

onde  $A_0$  e  $\ell_0$  são a área da seção transversal e comprimento originais e  $A$  e  $\ell$  são os valores finais. Se  $P$  é a carga, então a tensão efetiva  $\sigma$  será

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P \ell}{A_0 \ell_0}$$

a tensão nominal  $\sigma_n = P/A_0$  e a deformação convencional é  $\epsilon = (\ell/\ell_0) - 1$ . Portanto

$$\sigma = \sigma_n (1 + \epsilon)$$

De maneira bastante similar pode-se ver que a deformação convencional não é correta, já que é baseada no comprimento inicial, o que varia continuamente. Uma definição diferente foi introduzida por Ludwik baseado na variação do comprimento. Assim o incremento de deformação para um comprimento dado é definido como

$$d\bar{\epsilon} = \frac{d\ell}{\ell}$$

e a deformação total do comprimento inicial  $\ell_0$  para o final  $\ell$  é

$$\bar{\epsilon} = \int \frac{d\ell}{\ell} = \ell_n \frac{\ell}{\ell_0}$$

$\bar{\epsilon}$  é chamada deformação natural ou efetiva. A relação entre a deformação efetiva e convencional pode ser facilmente determinada, pois  $l/l_0 = 1 + \epsilon$

$$\bar{\epsilon} = l_n (1 + \epsilon)$$

# V - ANÁLISE ELÁSTICA DE TENSÕES NA INTERSEÇÃO CILINDRO-ESFÉRICA DE CASCAS SUBMETIDAS A PRESSÃO INTERNA

## 5.1 - SOLUÇÕES ELÁSTICAS SIMPLIFICADAS

Para o problema proposto serão necessárias, como vimos, apenas teorias para dois tipos básicos de cascas, a esférica e cilíndrica. Para cascas com este formato foi mostrado (14, 15, 16) que, soluções completas para as equações diferenciais que definem o problema podem ser obtidas somando as soluções individuais, devidas a casca atuando como uma membrana para suportar o carregamento aplicado (pressão interna) e aquela devida a esforços de bordo provocando flexão, como se vê na Figura 5.1.

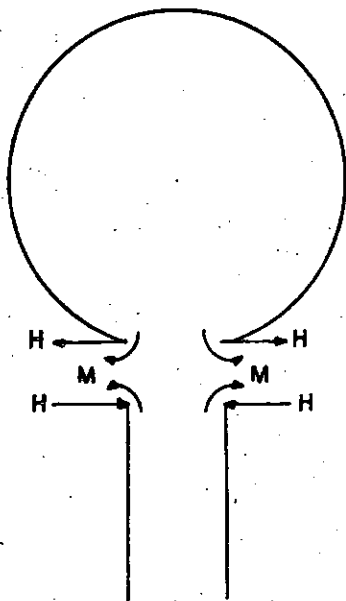


FIGURA 5.1 - ESFORÇOS DE BORDO NA INTERSEÇÃO

## 5.1.1.- SOLUÇÕES INDIVIDUAIS PARA O CILINDRO

## SOLUÇÃO DE MEMBRANA

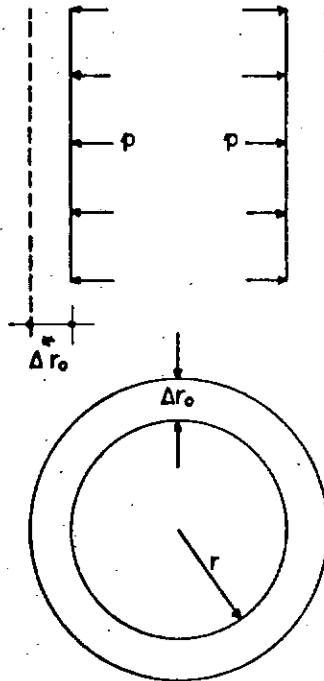


FIGURA 5.2 - CILINDRO CIRCULAR SUBMETIDO A PRESSÃO INTERNA

A Figura 5.2 mostra a deformação  $\Delta r_o^*$  (as deformações representadas com asterisco estarão referidas ao cilindro) que o mesmo apresentará quando submetido a uma pressão interna  $p$ . Sabe-se que (14, 15, 16) a força e a deformação específica na direção da tangente à seção transversal são

$$N_\phi = pr \quad ; \quad \varepsilon_\phi = \frac{N_\phi}{Et} \quad (5.1)$$

onde  $p$  é a pressão aplicada,  $r$  e  $t$  são respectivamente o raio e a espessura do cilindro e  $E$  o módulo de elasticidade do material. Assim podemos calcular a variação  $\Delta r_o^*$  do raio.

$$\begin{aligned} \Delta r_o^* &= \varepsilon_\phi r \\ \Delta r_o^* &= \frac{pr^2}{Et} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Devido à axi-simetria do carregamento a rotação  $\chi_o^*$  é nula.

## SOLUÇÃO PARA OS ESFORÇOS DE BORDO

Utilizaremos aqui o formulário apresentado por GIRK-MANN (15) resultado da solução complementar das equações diferenciais do problema.

$$w = Ae^{-\frac{kx}{r}} \operatorname{sen} \left( \frac{kx}{r} + \psi \right)$$

$$M_x = -2K \frac{k^2}{r^2} Ae^{-\frac{kx}{r}} \cos \left( \frac{kx}{r} + \psi \right) \quad (5.3)$$

$$Q_x = 2\sqrt{2} K \frac{k^3}{r^3} Ae^{-\frac{kx}{r}} \operatorname{sen} \left( \frac{kx}{r} + \psi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$N_\phi = \frac{D}{r} (1 - \nu^2) Ae^{-\frac{kx}{r}} \operatorname{sen} \left( \frac{kx}{r} + \psi \right) \quad \text{onde}$$

A e  $\psi$  são constantes,

$k = \sqrt{\frac{r}{t}} \cdot \sqrt{3(1 - \nu^2)}$  um parâmetro geométrico adimensional,

$K = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$  é o módulo de rigidez à flexão,

$D = \frac{Et}{1 - \nu^2}$  é o módulo de rigidez extensional

$\nu$  é o coeficiente de Poisson,

w são os deslocamentos dos pontos da superfície média da casca e

$M_x$ ,  $Q_x$  e  $N_\phi$  são os esforços internos devidos aos esforços de bordo.

Vamos considerar o cilindro (Figura 5.3) com origem em  $x = 0$  e que se estende o bastante na direção de  $x$  positivo, de maneira que não haja interferência da outra extremidade sobre aquela na qual estamos aplicando a força radial ao longo de sua circunferência.

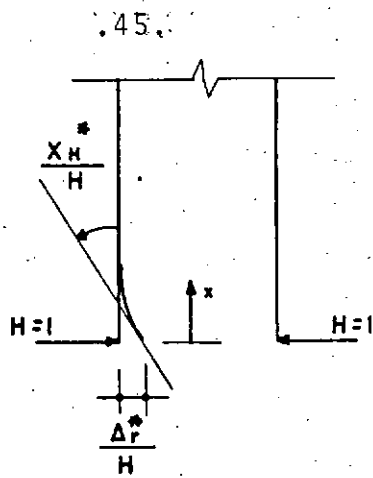


FIGURA 5.3 - FORÇA UNITÁRIA NO BORDO DO CILINDRO

Para a força unitária  $H = 1$  aplicada no bordo  $x = 0$  as condições de extremidade são:

$$\begin{aligned} Q_x &= -1 \\ M_x &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

que permitem a determinação das constantes

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A = -\frac{a^3}{2Kk^3} \quad (5.5)$$

obtidas estas constantes podemos calcular o deslocamento e a rotação no bordo  $x = 0$

$$w = \frac{\Delta r^*}{\chi_H^*} = -\frac{a^3}{2Kk^3} \quad (5.6)$$

$$\frac{\chi_H^*}{H} = \frac{dw}{dx} = \frac{a^2}{2Kk^2} \quad (5.7)$$

### MOMENTO UNITÁRIO

Quando na origem do cilindro estiver atuando um momento unitário (Figura 5.4) teremos as condições de extremidade

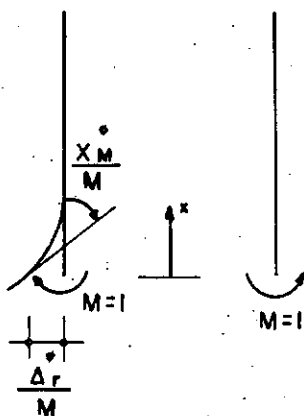


FIGURA 5.4 - MOMENTO UNITÁRIO NO BORDO DO CILINDRO

$$\begin{aligned} Q_x &= 0 \\ M_x &= 1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Neste caso vamos ter as constantes

$$\psi = -\frac{\pi}{4} \quad e \quad A = \frac{-a^2 \sqrt{2}}{2Kk^2} \quad (5.9)$$

O deslocamento e a rotação resultantes são então:

$$\frac{\Delta_r^*}{M} = \frac{a^2}{2Kk^2} \quad (5.10)$$

$$\frac{X_M^*}{M} = -\frac{a}{Kk} \quad (5.11)$$

### 5.1.2. SOLUÇÕES INDIVIDUAIS PARA A ESFERA

#### SOLUÇÃO MEMBRANA

Para uma casca esférica submetida a uma pressão interna (Figura 5.5) os esforços \$N\_\phi\$ e \$N\_\theta\$ respectivamente segundo o meridiano e o paralelo são iguais e valem \$pR/2\$ onde \$p\$ é a pressão interna e \$R\$ o raio da esfera, ou seja,

$$N_\phi = N_\theta = \frac{pR}{2} \quad (5.12)$$

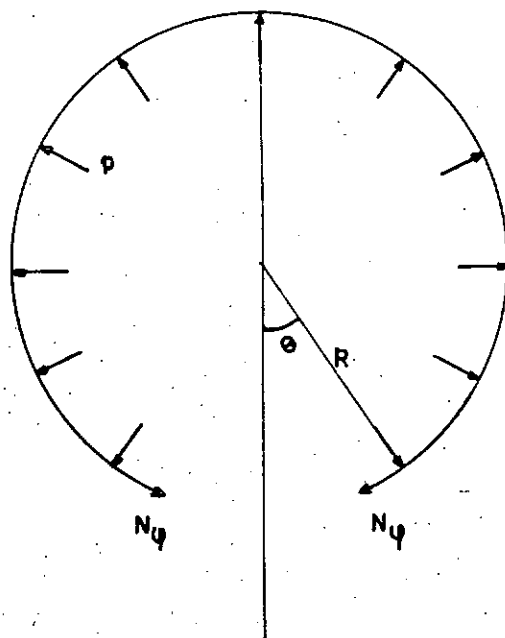


FIGURA 5.5 - PRESSÃO INTERNA NA CASCA ESFÉRICA

Para se determinar a variação  $\Delta r_0$  do raio da abertura da esfera temos as relações

$$\Delta r_0 = \varepsilon_\theta r; \quad \varepsilon_\theta = \frac{N_\theta}{ET} \quad (5.13)$$

sendo  $r$  o raio da abertura,  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $T$  a espessura da esfera.

Assim

$$\Delta r_0 = \frac{pr R}{2 ET} \quad (5.14)$$

A rotação  $\chi_0$  será nula também pela axi-simetria da pressão interna.

$$\chi_0 = 0 \quad (5.15)$$

#### SOLUÇÃO PARA OS ESFORÇOS DE BORDO

A casca esférica sujeita a solicitações de bordo apresentará uma solução complementar simplificada quando o parâmetro "k" for da ordem de 30 ou maior. As equações deduzidas por Girkman (15) para os esforços internos são então

$$N\phi = - C \cotg\phi e^{-k\omega} \cos (k\omega + \psi)$$

$$N\theta = - C k\sqrt{2} e^{-k\omega} \text{sen} (k\omega + \psi + \pi/4)$$

$$Q = C e^{-k\omega} \cos (k\omega + \psi) \quad (5.16)$$

$$M\phi = \frac{CR}{\sqrt{2} k} e^{-k\omega} \cos (k\omega + \psi + \psi/4)$$

$$M\theta = - \frac{CR}{2k^2} e^{-k\omega} \cotg\phi \text{sen} (k\omega + \psi) + \nu M\phi$$

$$\chi = \frac{2 k^2}{ET} C e^{-k\omega} \text{sen} (k\omega + \psi)$$

onde C e  $\omega$  são constantes,

k, K e E (já definidos) são relativos à esfera,

$\phi$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\theta$  são parâmetros geométricos mostrados na Figura 5.6,

T e R a espessura e o raio da esfera respectivamente. Quando o parâmetro K for inferior a 30 utilizaremos a Solução Assimp. tótica formulada por Flügge, que apresentamos posteriormente.

## ESFORÇOS DE BORDO UNITÁRIOS

### FORÇA UNITÁRIA

A Figura 5.6 mostra uma força unitária distribuída a tuando ao longo da abertura da esfera, além dos parâmetros geométricos que aparecem nas equações dos esforços internos.

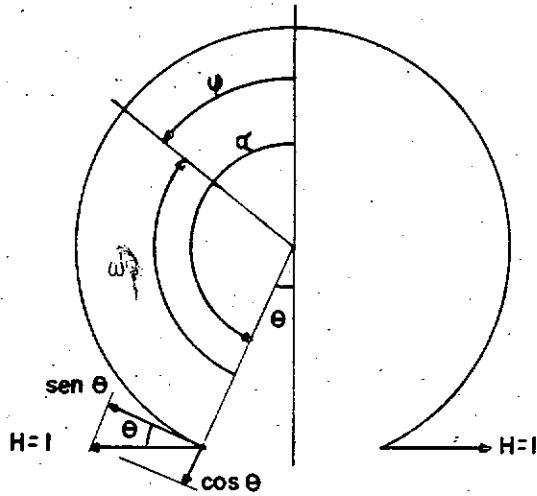


FIGURA 5.6 - FORÇA UNITÁRIA NO BORDO DA ESFERA

Neste caso as condições no contorno  $\omega = 0$  são

$$M\phi = 0$$

$$N\phi = \cos\alpha \quad \text{ou} \quad Q = \sin\alpha$$

e as constantes

$$\psi = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad C = -\sqrt{2} \sin\alpha \quad (5.18)$$

Com estas constantes e as relações

$$\frac{\Delta r}{H} = \epsilon_{\theta} R \quad \text{e} \quad \epsilon_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{ET} \quad (5.19)$$

podemos determinar o deslocamento e a rotação devido a esta perturbação de bordo.

$$\frac{\Delta r}{H} = \frac{2k R}{ET} \sin^2 \alpha \quad (5.20)$$

$$\frac{\chi_H}{H} = -\frac{2k^2}{ET} \sin\alpha \quad (5.21)$$

### MOMENTO UNITÁRIO

Se ao longo da abertura da esfera estiver atuando um momento unitário (Figura 5.7), teremos para  $\omega = 0$  as condições

$$M\phi = 1 \quad (5.22)$$

$$N\phi = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0$$

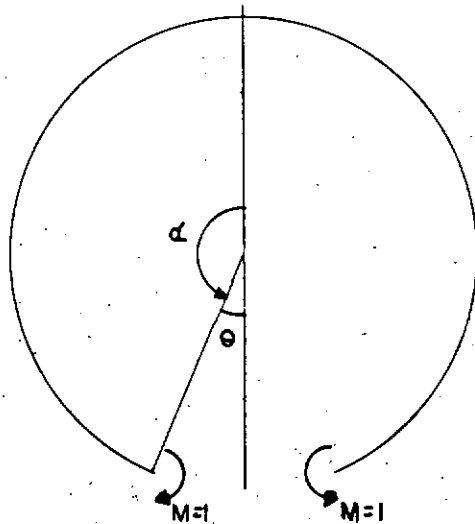


FIGURA 5.7 - MOMENTO UNITÁRIO NO BORDO DA ESFERA

As constantes serão

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad C = \frac{-2k}{R} \quad (5.23)$$

Analogamente ao caso anterior podemos determinar o deslocamento e a rotação no bordo.

$$\frac{\Delta r}{M} = \frac{2 k^2}{ET} \operatorname{sen} \alpha \quad (5.24)$$

$$\frac{\chi_M}{M} = \frac{-4 k^3}{ETR} \quad (5.25)$$

## 5.2 CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE CILINDRO-ESFERA

A Figura 5.8 mostra os esforços distribuídos nos bordos das duas cascas resultantes da separação das mesmas, além da pressão interna aplicada.

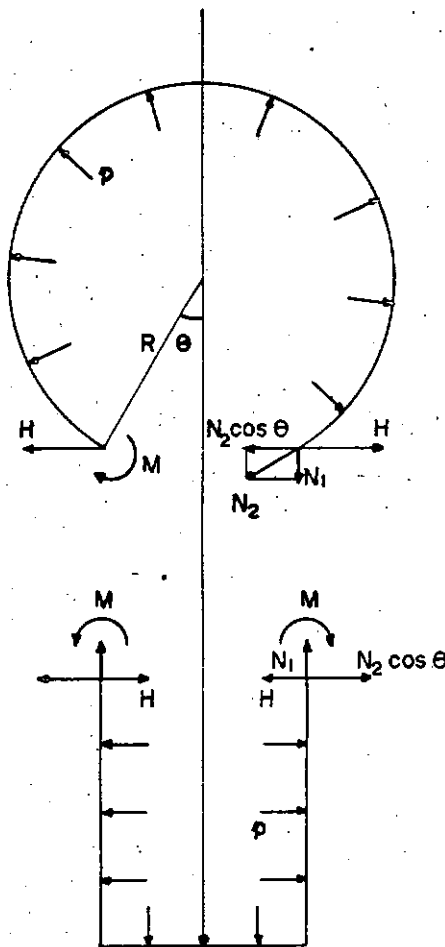


FIGURA 5.8 - ESFORÇOS RESULTANTES CONCENTRADOS NAS CASCAS

O esforço  $N_2$  segundo o meridiano da casca esférica vale como já vimos

$$N_2 = \frac{pR}{2} \quad (5.26)$$

Visto isto, as condições de compatibilidade de deformações a serem consideradas são:

1º) A variação do raio da abertura na casca esférica deve ser igual a do raio do cilindro

$$\Delta r_o + \Delta r_H + \Delta r_M = \Delta r_o^* + \Delta r_H^* + \Delta r_M^* \quad (5.27)$$

onde se tem

$$\Delta r_H = \frac{\Delta r}{H} \cdot H \quad \Delta r_M = \frac{\Delta r}{M} \cdot M \quad (5.28)$$

$$\Delta r_H = \frac{\Delta r^*}{H} \cdot (H - N_2 \cos \theta) \quad \Delta r_M = \frac{\Delta r^*}{M} \cdot M \quad (5.29)$$

Assim podemos escrever 5.27 como

$$\begin{aligned} (\Delta r_O - \Delta r_O^*) + \frac{\Delta r}{H} \cdot H - \frac{\Delta r^*}{H} (H - N_2 \cos \theta) + \\ + \left( \frac{\Delta r}{M} - \frac{\Delta r^*}{M} \right) \cdot M = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

2º) Analogamente, a rotação da tangente a casca esférica deve ser igual a da tangente ao cilindro nas suas extremidades de interseção

$$\chi_O + \chi_H + \chi_M = \chi_O^* + \chi_H^* + \chi_M^* \quad (5.31)$$

onde

$$\chi_H = \frac{\chi_H}{H} \cdot H \quad \chi_M = \frac{\chi_M}{M} \cdot M \quad (5.32)$$

$$\chi_H^* = \frac{\chi_H^*}{H} \cdot (H - N_2 \cos \theta) \quad \chi_M^* = \frac{\chi_M^*}{M} \cdot M \quad (5.33)$$

sabendo que  $\chi_O = \chi_O^* = 0$  5.31 escreve-se então

$$-\frac{\chi_H}{H} \cdot H + \frac{\chi_H^*}{H} (H - N_2 \cos \theta) + \left( \frac{\chi_M}{M} - \frac{\chi_M^*}{M} \right) \cdot M = 0 \quad (5.34)$$

As equações 5.30 e 5.34 formam um sistema de equações em H e M possibilitando assim o cálculo de seus valores, já que os coeficientes das mesmas estão todos determinados.

### 5.3 - CÁLCULO DAS TENSÕES NO BORDO DA ESFERA ( $\omega = 0$ )

#### SEGUNDO O MERIDIANO

Uma vez calculados H e M podem-se calcular as tensões na abertura. A Figura 5.9 mostra que o esforço  $N_\phi$  ali é devido a H

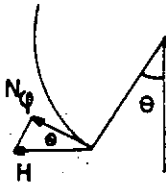


FIGURA 5.9 - ESFORÇO DISTRIBUIDO SEGUNDO O MERIDIANO

Pode-se então escrever que

$$N_\phi = -H \cos \theta \quad (5.35)$$

por unidade de comprimento.

Assim num comprimento unitário do bordo da esfera de espessura  $T$  a tensão devido a força  $H$  será:

$$\sigma_H = \frac{N_\phi}{1 \cdot x \cdot T} \quad \text{ou} \quad \sigma_H = -\frac{H \cos \theta}{T} \quad (5.36)$$

Neste mesmo comprimento a tensão devido ao momento  $M_\phi = M$  será

$$\sigma_M = \pm \frac{6M}{T^2} \quad (5.37)$$

Finalmente a tensão devido ao esforço  $N_\phi$  de membrana será:

$$\sigma_m = \frac{N_\phi (\text{membrana})}{T} \quad \text{ou} \quad \sigma_\phi^m = \frac{pR}{2T} \quad (5.38)$$

as tensões na abertura da esfera segundo o meridiano nas faces interna e externa serão dadas por

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_H + \sigma_M \quad (5.39)$$

#### SEGUNDO O PARALELO

Como  $N_\theta = N_\phi$  temos a mesma tensão de membrana

$$\sigma_\theta^m = \frac{pR}{2T} \quad (5.40)$$

As tensões induzidas pelo grupo de esforços  $(H, M)$  nas faces interna e externa da abertura são:

$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{T} \pm \frac{6M_{\theta}}{T^2} \quad (5.41)$$

onde

$$N_{\theta} = \frac{1}{2} \left\{ 2(\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \cdot k\sqrt{2} \operatorname{sen} \pi/2 \cdot H + \frac{2k}{R} k\sqrt{2} \operatorname{sen} 3\pi/4 \cdot M) \right\}$$

$$N_{\theta} = \frac{1}{2} \left\{ 2(2k \operatorname{sen} \alpha \cdot H + \frac{2k^2}{R} \cdot M) \right\} \quad (5.42)$$

sendo  $M_{\phi} = M$

$$M_{\theta} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \left\{ (\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \frac{R}{2k^2} \cotg \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot H + \frac{2k}{R} \frac{R}{2k^2} \cotg \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot M + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \nu M_{\phi} \right\} \right\}$$

$$M_{\theta} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \left( \frac{R \operatorname{cos} \alpha}{2k^2} \cdot H + \frac{\cotg \alpha}{k} \cdot M + \nu \cdot M \right) \right\} \quad (5.43)$$

#### 5.4 - SOLUÇÃO ASSIMPTÓTICA PARA CASCAS ESFÉRICAS DE PAREDE FINA

O método que ora desenvolveremos visa resolver o mesmo problema formulado anteriormente. Uma casca esférica submetida a esforços de bordo. A diferença está apenas nos parâmetros geométricos que definem as dimensões da esfera, que neste caso estabelecem um valor para o parâmetro adimensional "k", como já dissemos, inferior a 30. Isto impede a adoção das simplificações do método anterior. Flügge (15) mostra que o conjunto de 8 equações que definem o problema pode ser reduzido a um par em  $Q_{\phi}$  e  $\chi$ , que respectivamente representam a força cortante distribuída segundo o meridiano e o deslocamento angular (rotação) da tangente ao meridiano durante a deformação. O par de equações diferenciais de segunda ordem para as variáveis  $\chi$  e  $Q_{\phi}$  são

$$\frac{d^2 \chi}{d\phi^2} + \frac{d\chi}{d\phi} \cotg \phi - \chi(\nu + \cotg^2 \phi) = \frac{Q_{\phi} \cdot a^2}{K} \quad (5.44)$$

$$\frac{d^2 Q_{\phi}}{d\phi^2} + \frac{dQ_{\phi}}{d\phi} \cotg \phi + Q_{\phi}(\nu - \cotg^2 \phi) = -\chi ET \quad (5.45)$$

A similaridade das equações 5.44 e 5.45 sugere a definição do operador diferencial linear

$$L(\dots) = \frac{d^2}{d\phi^2}(\dots) + \frac{d}{d\phi}(\dots) \cotg\phi - (\dots) \cotg^2\phi \quad (5.46)$$

Com este operador podemos escrevê-las

$$L(\chi) - v\chi = \frac{a^2}{K} Q\phi \quad (5.47)$$

$$L(Q\phi) + vQ\phi = -\chi ET \quad (5.48)$$

Para a separação das incógnitas basta que se substitua  $Q\phi$  de 5.47 em 5.48 ou  $\chi$  de 5.48 em 5.47

$$LL(\chi) - v^2\chi = -\frac{a^2}{K} \chi ET \quad (5.49)$$

$$LL(Q\phi) - v^2Q\phi = -\frac{a^2}{K} ETQ\phi \quad (5.50)$$

Qualquer uma destas equações pode ser usada para resolver o problema. Quando tivermos determinado, por exemplo,  $Q\phi$  da equação 5.50, podemos achar  $\chi$  de 5.48 por simples diferenciação e então todas as outras incógnitas poderão ser obtidas do conjunto de equações já citado.

Podemos reescrever 5.50 na forma

$$LL(Q\phi) + 4k^2 Q\phi = 0 \quad (5.51)$$

com

$$k^4 = \frac{ETa^2}{4K} - \frac{v^2}{4} = 3(1 - v^2) \frac{a^2}{t^2} - \frac{v^2}{4}$$

pois

$$ET = D(1 - v^2) \quad \text{e} \quad K = \frac{ET^3}{12(1 - v^2)}$$

A equação 5.51 pode ser escrita também da seguinte forma

$$LL(Q\phi) + 4k^4 Q\phi + 2ik^2 L(Q\phi) - 2ik^2 L(Q\phi) = 0 \quad (5.52)$$

ou

$$L\{L(Q\phi) + 2ik^2Q\phi\} - 2ik^2\{L(Q\phi) + 2ik^2Q\phi\} = 0 \quad (5.53)$$

$$L\{L(Q\phi) - 2ik^2Q\phi\} + 2ik^2\{L(Q\phi) - 2ik^2Q\phi\} = 0$$

cuja solução é

$$L(Q\phi) \pm 2ik^2Q\phi = 0 \quad (5.54)$$

e satisfaz 5.50

Quando se escreve 5.54 expandida, temos:

$$\frac{d^2Q\phi}{d\phi^2} + \frac{dQ\phi}{d\phi} \cotg\phi - Q \cotg^2\phi + 2ik^2Q\phi = 0 \quad (5.55)$$

Para os nossos propósitos é conveniente uma transformação, que tem a vantagem de fazer desaparecer a derivada primeira da incógnita e que a variabilidade do coeficiente remanescente é muito grande. Faz-se então

$$Q_\phi = \frac{y}{\sqrt{\text{sen}\phi}} \quad (5.56)$$

e obtém-se de 5.55 a equação diferencial

$$\ddot{y} + \dot{y} \left( \frac{2 - 3\cotg^2\phi}{4} - \lambda^2 \right) = 0 \quad (5.57)$$

onde

$$\lambda^2 = -2ik^2$$

Como a solução da equação 5.57 Flügge (15) assume que

$$\dot{y} = e^{\lambda\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \dot{y}_n(\phi) \quad (5.58)$$

com  $y(\phi) = 1$ . Quando 5.58 é substituída na equação diferencial 5.57, obtém-se a seguinte relação

$$e^{\lambda\phi} \sum (\lambda^{-n} \ddot{y}_n + 2\lambda^{-n+1} \dot{y}_n + \frac{1}{4} \lambda^{-n} (2 - 3\cotg^2\phi) y_n) = 0$$

que nos leva a fórmula de recorrência

$$\dot{y}_{n+1} = -\frac{1}{2} \ddot{y}_n - \frac{1}{8} (2 - 3\cotg^2 \phi) y_n \quad (5.59)$$

Esta fórmula fornece  $y_{n+1}$  por integração de onde se obteve as seguintes funções:

$$\begin{aligned} y_0(\phi) &= 1 \\ y_1(\phi) &= -\frac{1}{8} (5\phi + 3 \cotg \phi) \\ y_2(\phi) &= \frac{5}{128} (5\phi^2 + 6\phi \cotg \phi - 3\cotg^2 \phi) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Por se apresentar mais prático ao uso do computador, Flügge (15) sugere e justifica o uso destas funções com o ângulo complementar

$$\psi = \pi/2 - \phi$$

como argumento e a escolha de constantes de integração tal que as funções sejam também par ou ímpar em  $\psi$ . Feito isto, o seguinte conjunto é obtido:

$$\begin{aligned} y_0(\psi) &= 1 \\ y_1(\psi) &= -\frac{1}{8} (5\psi - 3\text{tg}\psi) \\ y_2(\psi) &= \frac{5}{128} (5\psi^2 - 6\psi\text{tg}\psi - 3\text{tg}^2\psi) \\ y_3(\psi) &= \frac{5}{3072} (120\psi + 25\psi^3 - 216\text{tg}\psi - 45\psi^2\text{tg}\psi - \psi \\ &\quad - 45\psi\text{tg}^2\psi - 63\text{tg}^3\psi) \\ y_4(\psi) &= \frac{5}{98304} (2400\psi^2 + 125\psi^4 - 5760\psi\text{tg}\psi - 300\psi^3\text{tg}\psi - \\ &\quad - 6624\text{tg}^2\psi - 450\psi^2\text{tg}^2\psi - 1260\psi\text{tg}^3\psi - 2835\text{tg}^4\psi) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Se forem necessárias mais funções, podem-se obter da fórmula 5.59.

Para a determinação dos esforços resultantes vamos precisar também das derivadas

$$\dot{y}_n = dy_n/d\phi = -dy_n/d\psi$$

As quatro primeiras são:

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{8} (2 - 3\text{tg}^2\psi)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{5}{64} (2\psi - 6\text{tg}\psi - 3\psi\text{tg}^2\psi - 3\text{tg}^3\psi) \quad (5.62)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{5}{1024} (32 - 10\psi^2 + 60\psi\text{tg}\psi + 150\text{tg}^2\psi + 15\psi^2\text{tg}^2\psi + \\ + 30\psi\text{tg}^3\psi + 63\text{tg}^4\psi)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{5}{24576} (240\psi - 50\psi^3 + 4752\text{tg}\psi + 450\psi^2\text{tg}\psi + \\ + 2610\psi\text{tg}^2\psi + 75\psi^3\text{tg}^2\psi + 6462\text{tg}^3\psi + 225\psi^2\text{tg}^3\psi + 945\psi\text{tg}^4\psi + \\ + 2835\text{tg}^5\psi)$$

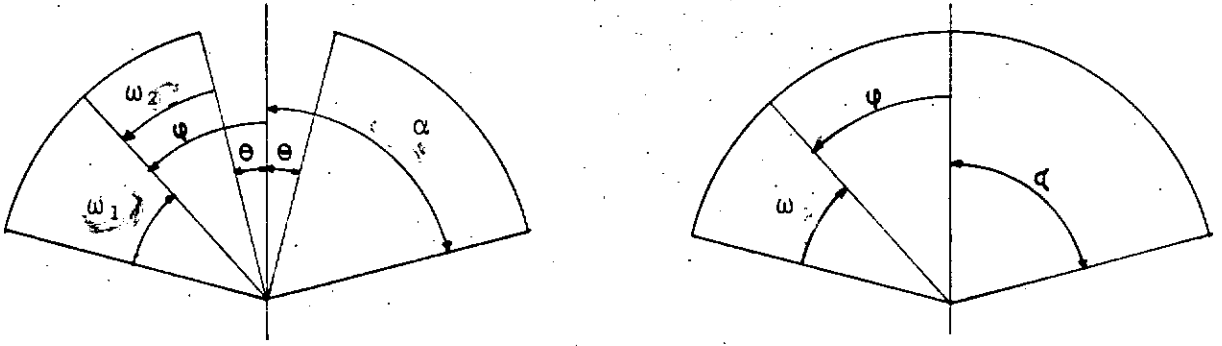
As funções  $y_n$  podem agora ser introduzidas na equação 5.58. Como  $\lambda$  tem duplo valor

$$\lambda = \pm k\sqrt{-2i} = \pm (1 - i) k$$

vamos ter duas soluções lineares independentes que devem ser multiplicadas por constantes arbitrárias A e B.

$$y = Ae^{k\phi} e^{-ik\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{(1-i)^n k^n} + B e^{-k\phi} e^{ik\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y_n}{(1-i)^n k^n} \quad 5.63$$

A primeira destas funções decresce exponencialmente quando  $\phi$  é considerado da base para o topo da casca, a segunda quando  $\phi$  está no sentido contrário. A solução relativa à constante A descreve um sistema de tensões causado por carregamentos aplicados na base  $\phi = \alpha$  (Figura 5.10a) e a solução correspondente a B se refere às cargas no bordo superior  $\phi = \theta$  e portanto não aparecendo nos problemas deste trabalho porquanto se tratará somente de cascas fechadas no topo. Desde que em cascas de parede fina os sistemas de tensões são apenas de importância local, é bastante útil a introdução de coordenadas locais na zona de bordo, fazendo  $\phi = \alpha - \omega$  (Figura 5.10b).



a) Casca esférica com dois bordos

b) Casca esférica com um bordo

Figura 5.10

Considerando a coordenada local obtém-se o fator constante  $e^{k(1-i)\alpha}$  que poderá ser absorvido pela constante A fazendo

$$y = A e^{-k\omega} (\cos k\omega + i \sin k\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{(1-i)^n k^n} \quad (5.64)$$

Uma vez separadas as partes real e imaginária nesta expressão, pode-se escrever y na seguinte forma:

$$y = A e^{-k\omega} (Y_1 \cos k\omega - Y_2 \sin k\omega) + i(Y_2 \cos k\omega + Y_1 \sin k\omega) \quad (5.65)$$

onde  $Y_1$  e  $Y_2$  são as séries de potências descendentes de k

$$Y_1 = 1 + \frac{y_1}{2k} - \frac{y_3}{4k^3} - \frac{y_4}{4k^4} \dots \quad (5.66)$$

$$Y_2 = \frac{y_1}{2k} + \frac{y_2}{2k^2} + \frac{y_3}{4k^3} \dots \quad (5.67)$$

Podemos usar então as equações 5.48 e 5.54 para expressar a segunda variável principal,  $\chi$ , em termos de  $Q\phi$ .

$$D(1 - \nu^2)\chi = (2ik^2 - \nu) Q\phi = (2ik^2 - \nu) \frac{y}{\sqrt{\sin\phi}}$$

e introduzindo y de 5.65 aqui, temos

$$\chi = \frac{A e^{-k\omega}}{D(1-\nu^2) \sqrt{\text{sen}\phi}} \{(-(2k^2 Y_2 + \nu Y_1) \text{cos}k\omega -$$

$$-(2k^2 Y_1 - \nu Y_2) \text{sen}k\omega) + i((2k^3 Y_1 - \nu Y_2) \text{cos}k\omega - (2k^2 Y_2 + \nu Y_1) \text{sen}k\omega)\}$$

(5.68)

Ambas  $Q\phi$  e  $\chi$  são funções de  $\phi$  de valores complexos. As suas partes real e imaginárias representam soluções independentes do problema de quarta ordem da casca, cuja solução geral tem quatro constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ . Como estamos tratando de cascas de um bordo apenas, temos para  $Q\phi$

$$Q\phi = \frac{e^{-k\omega}}{\sqrt{\text{sen}\phi}} \{A_1 (Y_1 \text{cos}k\omega - Y_2 \text{sen}k\omega) +$$

$$+ A_2 (Y_2 \text{cos}k\omega + Y_1 \text{sen}k\omega)\}$$

(5.69)

e uma expressão similar para  $\chi$ . As forças normais  $N\phi$  e  $N\theta$  podem ser encontradas das equações

$$N\phi = - Q\phi \cotg\phi$$

(5.70)

$$N\theta = - Q\phi$$

(5.71)

com  $P = 0$  e os momentos fletores  $M\phi$  e  $M\theta$  das equações

$$M\phi = \frac{K}{R} \{\dot{\chi} + \nu \chi \cotg\phi\}$$

(5.72)

$$M\theta = \frac{K}{R} \{\chi \cotg\phi + \nu \dot{\chi}\}$$

(5.73)

todas deduzidas por Flügge (15). Assim a fórmula para todas as tensões resultantes e deformações podem ser escritas na forma

$$f = \frac{C e^{-k\omega}}{\sqrt{\text{sen}\phi}} \{(A_1 f_1 + A_2 f_2) \text{cos}k\omega + (A_2 f_1 - A_1 f_2) \text{sen}k\omega\}$$

(5.74)

Os valores da constante  $e$  e as funções  $f_1$  e  $f_2$  estão dados na tabela 5.1

TABELA 5.1 COEFICIENTES PARA CASCAS ESFÉRICAS

f	c	$f_1$	$f_2$
$Q_\phi$	1	$Y_1$	$Y_2$
$X$	$\frac{1}{D(1-\nu^2)}$	$\frac{1}{2}(2k^2Y_2 + \nu Y_1)$	$2k^2Y_1 - \nu Y_2$
$N_\phi$	1	$-Y_1 \cotg\phi$	$-Y_2 \cotg\phi$
$N_\theta$	1	$\frac{1}{2} Y_1 \cotg\phi - \{\dot{Y}_1 + k(Y_1 + Y_2)\}$	$\frac{1}{2} Y_2 \cotg\phi - \{\dot{Y}_2 + k(Y_2 - Y_1)\}$
$\dot{X}$	$\frac{1}{D(1-\nu^2)}$	$\frac{1}{2}(2k^2Y_2 + \nu Y_1) \cotg\phi - (2k^2\dot{Y}_2 + \nu\dot{Y}_1)$ $+ 2k^3(Y_1 - Y_2) - \nu k(Y_1 + Y_2)$	$-\frac{1}{2}(2k^2Y_1 - \nu Y_2) \cotg\phi + (2k^2\dot{Y}_1 - \nu\dot{Y}_2)$ $+ 2k^3(Y_1 + Y_2) + \nu k(Y_1 - Y_2)$
$M_\phi$	$\frac{K}{DR(1-\nu^2)}$	$\frac{1}{2}(1-2\nu)(2k^2Y_2 + \nu Y_1) \cotg\phi - (2k^2\dot{Y}_2 + \nu\dot{Y}_1)$ $+ 2k^3(Y_1 - Y_2) - \nu k(Y_1 + Y_2)$	$-\frac{1}{2}(1-2\nu)(2k^2Y_1 - \nu Y_2) \cotg\phi + (2k^2\dot{Y}_1 - \nu\dot{Y}_2)$ $+ 2k^3(Y_1 + Y_2) + \nu k(Y_1 - Y_2)$
$M_\theta$	$\frac{K}{DR(1-\nu^2)}$	$-\frac{1}{2}(2-\nu)(2k^2Y_2 + \nu Y_1) \cotg\phi - \nu(2k^2\dot{Y}_2 + \nu\dot{Y}_1)$ $+ 2\nu k^3(Y_1 - Y_2) - \nu^2 k(Y_1 + Y_2)$	$\frac{1}{2}(2-\nu)(2k^2Y_1 - \nu Y_2) \cotg\phi + \nu(2k^2\dot{Y}_1 - \nu\dot{Y}_2)$ $+ 2\nu k^3(Y_1 + Y_2) + \nu^2 k(Y_1 - Y_2)$

As fórmulas desta tabela representam a solução do problema, mas precisam ainda de alguma discussão. As séries empregadas não são verdadeiramente convergentes. A solução tem a característica de uma solução assimp<sup>t</sup>ótica. Para um número fixo de termos em cada uma das série 5.66 e 5.67 estas fórmulas se aproximam da solução verdadeira, quanto maior for k; mas para um valor dado de k elas sempre apresentam uma diferença que não pode ser diminuída indefinidamente com a adoção de mais termos das séries.

Com relação às condições de compatibilidade e cálculo das tensões de bordo o problema já foi resolvido anteriormente, fazendo-se desnecessária sua repetição. Basta salientar que os esforços internos necessários na obtenção das tensões serão agora os obtidos pelo método aqui apresentado.

## VI - A PRESSÃO DE ACOMODAÇÃO (SHAKEDOWN)

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste trabalho uma estimativa do limite inferior da pressão de acomodação será obtida aplicando o teorema de Melan e usando os resultados de análise elástica prévia, fornecidos pelo computador.

Na prática ficou demonstrado, Rose (9), que nos casos de pressão as tensões máximas ocorrem na porção esférica, embora em algumas geometrias excepcionais, quando o bocal é muito fino, as tensões máximas podem ocorrer na parte cilíndrica. Estes casos especiais estão excluídos e este trabalho se resumirá ao estudo das tensões na esfera. O material da casca será considerado como perfeitamente elasto-plástico e o critério de escoamento foi o de Tresca. Consequentemente se as tensões na superfície do bordo são  $\sigma_\phi$  na direção do meridiano,  $\sigma_\theta$  na direção do paralelo e se a tensão radial é considerada desprezível então o critério de escoamento será

$$\left| \frac{\sigma_\phi}{\sigma_0} \right| \leq 1 ; \left| \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} \right| \leq 1 ; \left| \frac{\sigma_\phi - \sigma_\theta}{\sigma_0} \right| \leq 1 \quad (6.1)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento na tração simples.

O fator de concentração de tensões, como já vimos, define a máxima tensão em termos da tensão de membrana na esfera de acordo com a relação

$$k_1 = \frac{\max \sigma}{pR/2T} \quad (6.2)$$

A pressão que produz o início de escoamento será chamada  $p_1$  e a pressão de acomodação de  $p_2$ . O fator de acomodação  $k_2$ , também já definido é

$$k_2 = \frac{p_2 R}{2T} / \sigma_0 \quad (6.3)$$

6.2 - OS CÁLCULOS DA ACOMODAÇÃO

O propósito do presente trabalho é determinar distribuições de tensões residuais auto-equilibradas adequadas, que por si sô não violem as condições de escoamento. As distribuições

ções de tensões residuais são otimizadas para fornecer a maior pressão interna de maneira que o total das tensões elásticas devidas à cargas e às tensões residuais não exceda o escoamento. As pressões de acomodação assim determinadas são sempre menores que os valores reais, já que a estrutura automaticamente assume a melhor distribuição de tensões residuais, uma circunstância que é muito diferente da distribuição considerada.

No caso da estrutura de casca em questão os acréscimos locais de tensão são devidos aos esforços de bordo H e M, e a fim de neutralizar seus efeitos é razoável assumir esforços residuais de bordo auto-equilibrados  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$  de sentidos contrários a H e M (1,2). Interiormente à casca, sistemas de tensões em equilíbrio com  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$  são determinados pela teoria elástica linear.

Nos cálculos que se seguem, geralmente não é conveniente tratar com efeitos isolados de H e M, mas considerar os efeitos do grupo de esforços (H,M) no qual H e M permanecem numa proporção fixa.

### 6.3 - CÁLCULO PARA UM ÚNICO GRUPO DE ESFORÇOS ( $H_1, M_1$ )

Para uma geometria com valores dados de  $r/R, R/T$  e  $t/T = (t/T)_1$  as tensões na interseção (onde elas são máximas) considerando também as tensões de membrana são

	Face Interna	Face Externa	
$\sigma_\phi/\sigma_0$	$p_{11} \bar{p}$	$\bar{p}_{12} \bar{p}$	(6.4)
$\sigma_\theta/\sigma_0$	$p_{13} \bar{p}$	$p_{14} \bar{p}$	

onde  $\bar{p} = pR/2T\sigma_0$

As tensões causadas pelos esforços de bordo ( $H_1, M_1$ ) atuando isoladamente são determinadas subtraindo as tensões de membrana resultando as seguintes tensões:

	Face Interna	Face Externa	
$\sigma_\phi/\sigma_0$	$(p_{11} - 1) \bar{p}$	$(\bar{p}_{12} - 1) \bar{p}$	
$\sigma_\theta/\sigma_0$	$(p_{13} - 1) \bar{p}$	$(p_{14} - 1) \bar{p}$	

Se esforços residuais de bordo são selecionados de maneira que  $\bar{H}_1 = (-\alpha/\bar{p}) H_1$  e  $\bar{M}_1 = (-\alpha/\bar{p}) M_1$  então as tensões residuais máximas são:

	Face Interna	Face Externa	
$\sigma_\phi/\sigma_0$	$-(p_{11} - 1)\alpha$	$-(p_{12} - 1)\alpha$	(6.6)
$\sigma_\theta/\sigma_0$	$-(p_{13} - 1)\alpha$	$-(p_{14} - 1)\alpha$	

Estas tensões serão referidas como o grupo  $\alpha$  de tensões residuais.

#### 6.4 - CÁLCULO PARA DOIS GRUPOS DE ESFORÇOS

No cálculo anterior os esforços residuais de bordo  $\bar{H}_1$  e  $\bar{M}_1$  guardam entre si uma certa razão, mas quando os esforços de bordo são liberados desta restrição uma pressão de acomodação maior pode ser esperada. (20):

Para se obter isto um outro grupo de esforços  $(\bar{H}, \bar{M})_2$  será usado no qual  $H_2$  e  $M_2$  estão numa proporção diferente daquela do grupo  $(H, M)_1$ . Este novo grupo é obtido da análise elástica para os mesmos valores  $r/R$  e  $R/T$  mas usando outra grandeza para  $t/T = (t/T)_2$ . Os parâmetros  $r/R$  e  $R/T$  que definem a esfera são os mesmos, enquanto que um novo  $t/T$  assegura esforços de bordo  $H_2$  e  $M_2$  em proporção diferente daquela de  $H_1$  e  $M_1$ . Procedendo como para o grupo  $\alpha$  de tensões residuais e assumindo desta vez valores residuais de  $\bar{H}_2 = -(\beta/p) H_2$  e  $\bar{M}_2 = -(\beta/p) M_2$  então as tensões resultantes do grupo  $\beta$  são

	Face Interna	Face Externa	
$\sigma_\phi/\sigma_0$	$-(p_{21} - 1)\beta$	$-(p_{22} - 1)\beta$	6.7
$\sigma_\theta/\sigma_0$	$-(p_{23} - 1)\beta$	$-(p_{24} - 1)\beta$	

Outro grupo de tensões residuais determinado desta maneira, selecionando uma outra razão de espessura  $(t/T)_3$ , seria simplesmente uma combinação linear dos dois resultados anteriores, já que no nível dos nossos cálculos, únicas incógnitas são a força residual horizontal  $\bar{H}$  e o momento residual  $\bar{M}$ .

Se as distribuições elásticas de tensões devidas aos grupos de esforços residuais de bordo  $-\frac{\alpha}{\bar{p}} (H, M)_1$  e  $-\frac{\beta}{\bar{p}} (H, M)_2$  são assumidas em conjunto com as tensões decorrentes do carrega-

mento de pressão, as tensões na interseção passam a ser

$$\begin{array}{cc} \text{Face Interna} & \text{Face Externa} \\ \sigma_{\phi}/\sigma_0 & p_{11} \bar{p} - (p_{11}-1)\alpha - (p_{21}-1)\beta & p_{12} \bar{p} - (p_{12}-1)\alpha - (p_{22}-1)\beta \\ & & \end{array} \quad (6.8)$$

$$\sigma_{\theta}/\sigma_0 \quad p_{13} \bar{p} - (p_{13}-1)\alpha - (p_{23}-1)\beta \quad p_{14} \bar{p} - (p_{14}-1)\alpha - (p_{24}-1)\beta$$

e no estudo de descarregamento do vaso, com  $\bar{p} = 0$  nas relações acima, teremos apenas as tensões residuais.

O problema agora é encontrar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  que maximizam  $p$  de acordo com as 12 condições limites

$$-1 \leq \frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_0} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{\sigma_{\phi} - \sigma_{\theta}}{\sigma_0} \leq 1 \quad (6.9)$$

para as faces interna e externa e nos estados de carregamento e descarregamento da pressão interna.

Este problema pode ser classificado como dentro da "forma padrão" de programação linear.

A forma padrão de programação linear pode ser definida como: maximize  $f = c_j \cdot x_j$  sujeita às condições

$$b_i^L \leq a_{ij} x_j \leq b_i^u : \quad (6.10)$$

$b_i^L$  e  $b_i^u$  são os valores máximos e mínimos de um vetor fixo. No caso.

$$b_i^L = \{-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1\} \quad (6.11)$$

$$b_i^u = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

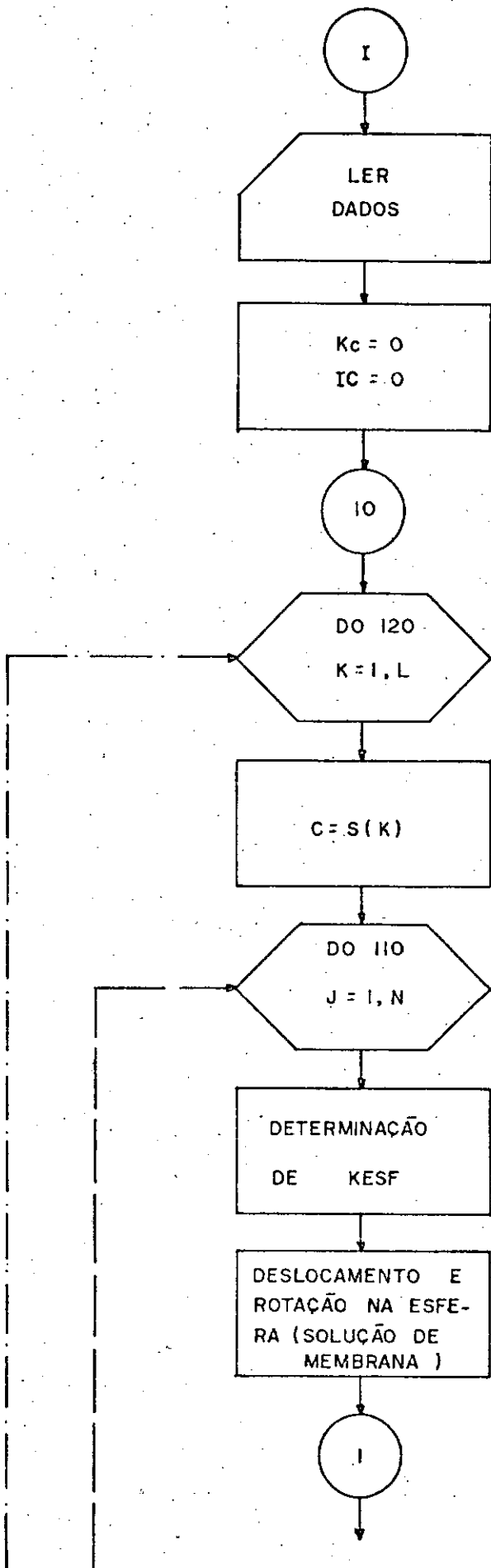
$$a_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & -(p_{11} - 1) & -(p_{21} - 1) \\ p_{13} & -(p_{13} - 1) & -(p_{23} - 1) \\ p_{11} - p_{13} & -(p_{11} - p_{13}) & -(p_{21} - p_{23}) \\ p_{12} & -(p_{12} - 1) & -(p_{22} - 1) \\ p_{14} & -(p_{14} - 1) & -(p_{24} - 1) \\ p_{12} - p_{14} & -(p_{12} - p_{14}) & -(p_{22} - p_{24}) \\ 0 & -(p_{11} - 1) & -(p_{21} - 1) \\ 0 & -(p_{13} - 1) & -(p_{23} - 1) \\ 0 & -(p_{11} - p_{13}) & -(p_{21} - p_{23}) \\ 0 & -(p_{12} - 1) & -(p_{22} - 1) \\ 0 & -(p_{14} - 1) & -(p_{24} - 1) \\ 0 & -(p_{12} - p_{14}) & -(p_{22} - p_{24}) \end{bmatrix} \quad 6.12$$

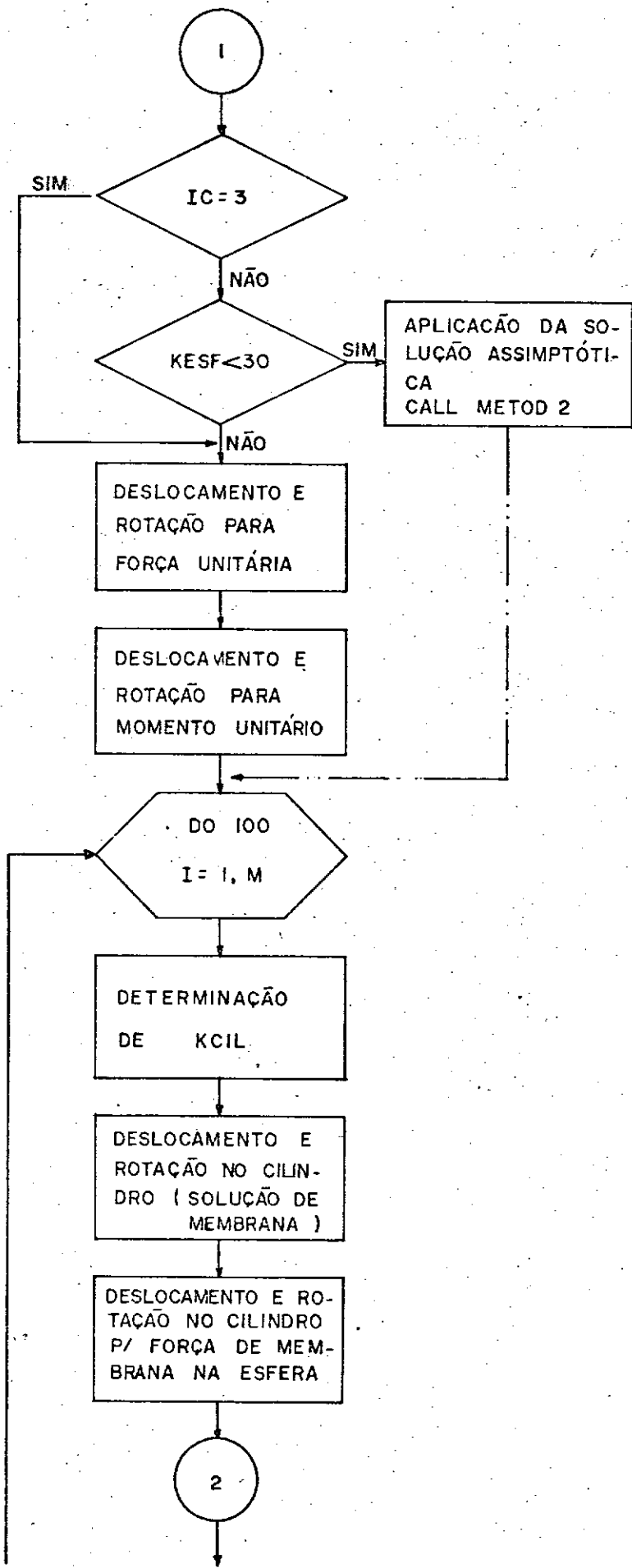
$$x_j = \{\bar{p} \ \alpha \ \beta\} ; \quad c_j = \{1 \ 0 \ 0\} \quad 6.13$$

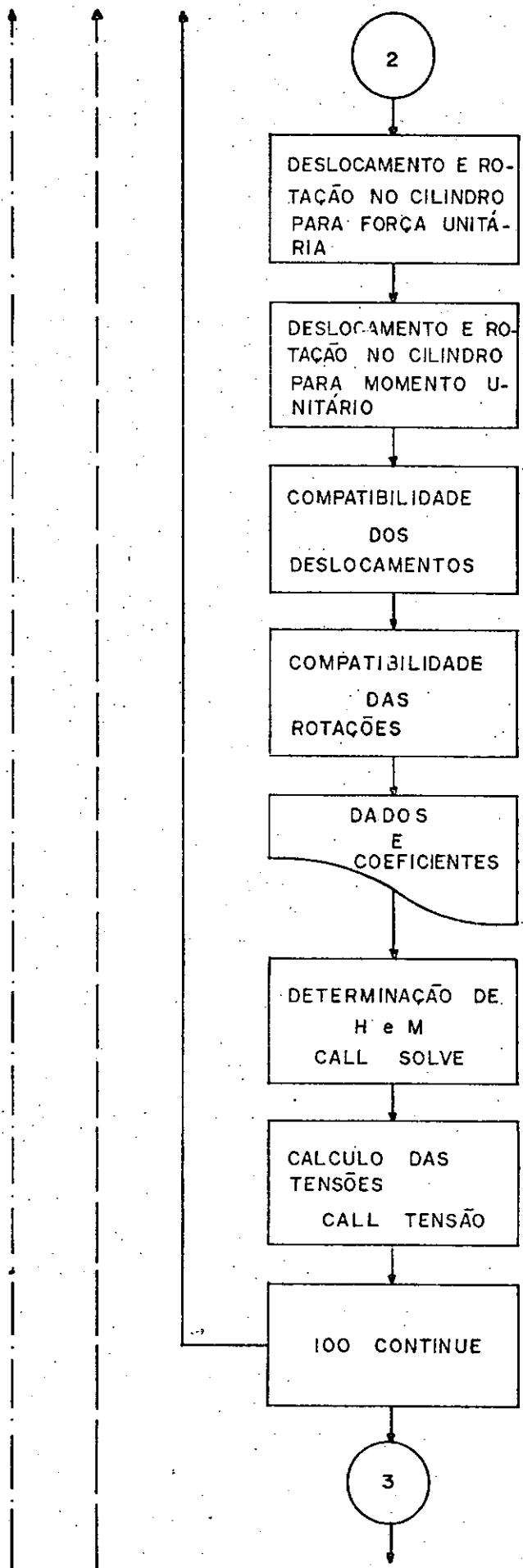
Uma vez definido o problema bastou que se utilizasse a subrotina ZX3LP do IMSL implantada no computador BURROUGHS .. 6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ e que serve exatamente para resolver problemas de maximização de funções lineares, sujeitas a um conjunto de restrições também lineares. Essa subrotina foi inserida dentro de um programa principal elaborado para os objetivos deste trabalho, tornando-o assim mais completo.

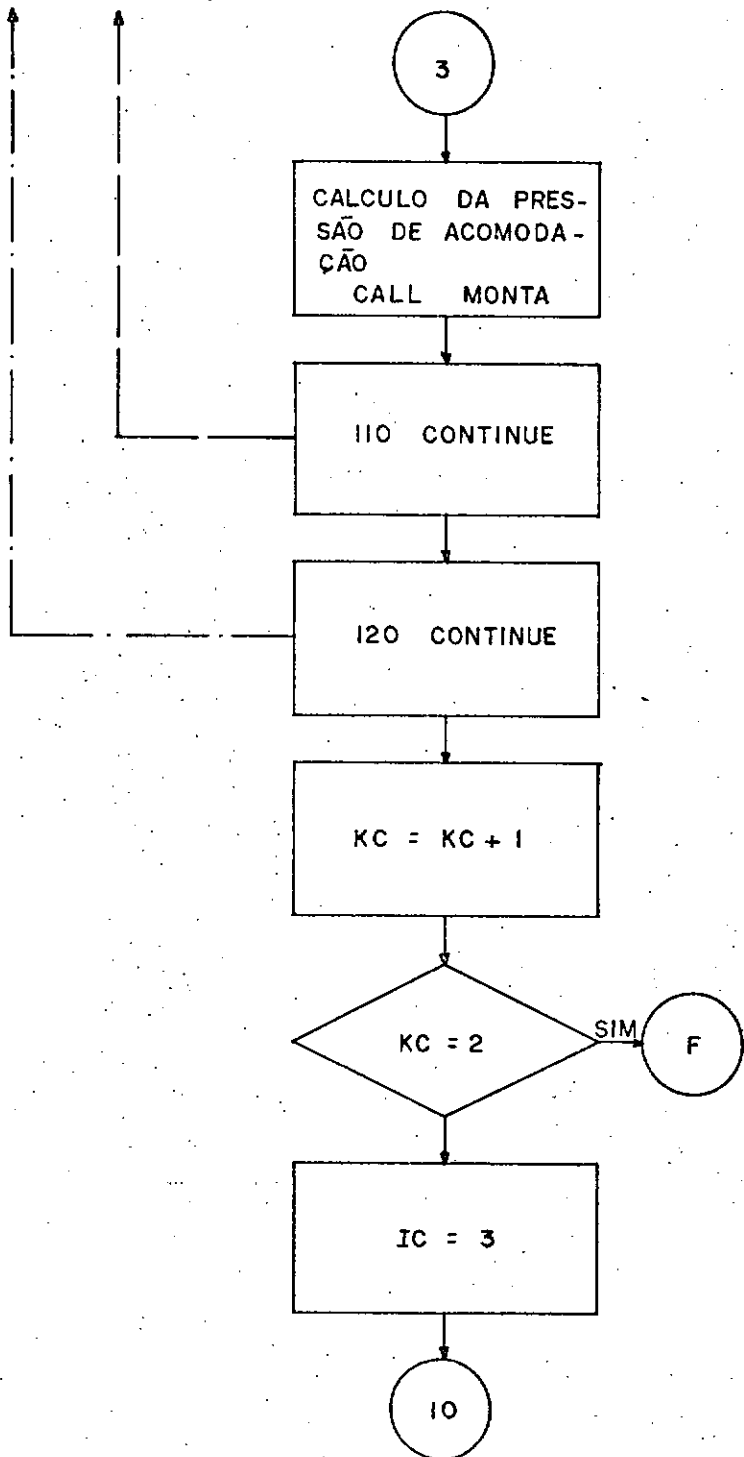
APÊNDICE II

A6.1 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA PRINCIPAL









A6.2 - O PROGRAMA PRINCIPAL

FILE 1(KIND = REMOTE)

FILE 5(KIND=DISK,TITLE="DADOS",FILETYPE=7)

FILE 6(KIND=REMOTE, MAXRECSIZE = 22)

C CALCULO DE TENSORES EM VASOS DE PRESSAO

C DEFINICAO DOS ELEMENTOS DA ESFERA

REAL

- KESF (10),

- DELMES (10), % DESLOCAMENTO DE MEMBRANA NA ESFERA

- XMES (10), % ROTACAO DE MEMBRANA NA ESFERA

- DELEFU (10), % DESLOC. NA ESFERA DEVIDO A FORCA UNI

TARIA

- XESFU (10), % ROTACAO NA ESFERA DEVIDO A FORCA UNI

TARIA

- DELEMU (10), % DESLOC. NA ESFERA DEVIDO AO MOM. UNI

TARIO

- XESMU (10), % ROTACAO NA ESFERA DEVIDO AO MOM. UNI

TARIO

- NTEFU, % NTETA DEVIDO A FORCA UNITARIA (MET.2

)

- NTEMU, % NTETA DEVIDO AO MOMENTO UNITARIO (ME

T.2)

C DEFINICAO DOS DADOS

REAL

- C, % RELACAO ENTRE OS RAIOS DO CILINDRO E DA ESFERA

A

- A (10), % RELACAO ENTRE RAIQ E ESPESSURA DA ESFERA
- B (10), % RELACOES ENTRE AS ESPESSURAS DO CIL. E ESFER
- S (10),
- ALFA,
- CP % COEFICIENTE DE POISSON

INTEGER

- M, % NUMERO DE VARIACOES DAS RELACOES DE ESPESSURA
- I,
- J,
- L,
- N % NUMERO DE VARIACOES DAS RELACOES RAIQ/ESPESSURA

DEFINICAO DAS INCOGNITAS

COMMON SIGFIN(10), SIGFEX(10), SIGTIN(10), SIGTEX(10)

REAL

- H, % FORCA HORIZONTAL RESULTANTE NO BORDO
- MOM, % MOMENTO RESULTANTE NO BORDO
- D, % DETERMINANTE DA MATRIZ DE RIGIDEZ
- SIGFIH, % TENSAO SIGMA FI DEVIDO A FORCA H
- SIGFMO, % TENSAO SIGMA FI DEVIDO AO MOMENTO
- SIGFEX, % TENSAO SIGMA FI NA FACE EXTERNA
- SIGFIN, % TENSAO SIGMA FI NA FACE INTERNA
- SIGTEH, % TENSAO SIGMA TETA DEVIDO A FORCA H
- SIGTMO, % TENSAO SIGMA TETA DEVIDO AO MOMENTO

- SIGTEX,        Z TENSÃO SIGMA TETA NA FACE EXTERNA
- SIGTIN,        Z TENSÃO SIGMA TETA NA FACE INTERNA
- NTETA,         Z ESFORÇO INTERNO NA DIREÇÃO DO PARALELO
- MTETA,         Z MOMENTO INTERNO NA DIREÇÃO DO PARALELO
- FMTE1,         Z COEFICIENTE DE MTETA (MET.2)
- FMTE2,         Z COEFICIENTE DE MTETA (MET.2)
- AM(26, 5),     Z MATRIZ DAS TENSÕES
- V3(26),        Z VETOR UNITÁRIO
- VC(5)          Z VETOR DE CUSTO

C                DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS DO CILINDRO(VARIAVEIS)

REAL

- KCIL    (10),
- DELMCI (10),        Z DESLOCAMENTO DE MEMBRANA NO CILINDRO
- XMECIL (10),        Z ROTACÃO DE MEMBRANA NO CILINDRO
- DELCFU (10),        Z DESLOC. NO CIL. DEVIDO A FORÇA UNITÁRIA
- XCFUST (10),        Z ROT. NO CIL./F. UNITÁRIA C/ SINAL TROC
- XCILFU (10),        Z ROTACÃO NO CIL. DEVIDO A FORÇA UNITÁRIA
- DELCMU (10),        Z DESLOC. NO CIL. DEVIDO AO MOM. UNITÁRI
- XCMUST (10),        Z ROT. NO CIL./M. UNITÁRIO C/ SINAL TROC
- XCILMU (10),        Z ROT. NO CILINDRO DEVIDO AO MOM. UNIT
- DELCFM (10),        Z DEL. NO CIL. DEVIDO FORÇA MEMBR. DA ES

FERA - XCILFM (10) Z ROT NO CIL. DEVIDO FORCA MEMBR. DA ES

C DEFINICAO DAS VARIAVEIS GERAIS

REAL

- DELMEF (10), X DESLOCAMENTO DE MEMBRANA FINAL
- XMEMF (10), Z ROTACAO DE MEMBRANA FINAL
- DELFUF (10), X DESL. FINAL DEVIDO A FORCA UNITARIA
- XFUF (10), Z ROTACAO DEVIDO A FORCA UNITARIA, FI
- DELMUF (10), Z DESLOC. DEVIDO AO MOM. UNITARIO, FIN
- XMUF (10) Z ROTACAO DEVIDO AO MOM. UNITARIO, FIN

C VARIAVEIS AUXILIARES

LOGICAL

- TERM

INQUIRE (5, KIND = KND)

TERM = KND .EQ. VALUE (REMDTE)

READ (5,/) L, M, N, CP

READ (5,/) (A(J), J = 1, N)

READ (5,/) (B(I), I = 1, M)

READ (5,/) (S (K), K = 1, L)

C DESLOCAMENTOS E ROTACOES NA ESFERA

KC = 0

IC = 0

10 CONTINUE

DO 120 K = 1, L

C = S (K)

DO 110 J = 1, N

KESF(J) = (A(J) \*\* .5) \* ((3 \* (1 - CP \*\* 2)) \*\*

0.25)

C SOLUCAO DE MEMBRANA

DELMES(J) = A(J) \* C / 2

KMES(J) = 0.

IF(IC .EQ. 3) GO TO 30

IF(KESF(J) .LT. 30) GO TO 90

C SOLUCAO PARA A FORCA UNITARIA

30 CONTINUE

DELEFU(J) = 2 \* KESF(J) \* A(J) \* (C \*\* 2)

KESFU(J) = 2 \* (KESF(J) \*\* 2) \* C

C SOLUCAO PARA MOMENTO UNITARIO

DELEMU (J) = KESFU (J)

XESMU(J) = 4 \* (KESF(J) \*\* 3) / A (J)

GO TO 95

90 CONTINUE

CALL METOD2(A(J), C, CP, KESF(J), KESFU(J), DELEFU  
(J),

- XESMU(J), DELEMU(J), NTEFU, NTEMU,  
 - ALFA, AH1, AH2, AM1, AM2, YG1, YG2,  
 - DYG1, DYG2)

C DESLOCAMENTOS E ROTACOES NO CILINDRO

95 CONTINUE

D) 100 I = 1, M

$$KCIL(I) = ((A(J) * C / B(I)) ** .5) *$$

$$((3 * (1 - CP ** 2)) ** 0.25)$$

C SOLUCAO DE MEMBRANA

$$DELNCI(I) = (C ** 2) * A(J) / B(I)$$

$$XMECIL(I) = 0.$$

C ERA DESLOC. E ROT. NO CIL. DEVIDO A FORCA DE MEMBR. NA ESF

$$DELCFM(I) = - 3 * (1 - CP ** 2) * (A(J) ** 3) * \\ (C ** 3) * SQRT(1 - C ** 2) / (B(I)$$

$$KCIL(I)) ** 3$$

$$XCILFM(I) = 3 * (1 - CP ** 2) * (A(J) ** 2) * \\ C ** 2 * SQRT(1 - C ** 2) / B(I) *$$

$$KCIL(I) ** 2$$

C SOLUCAO PARA FORCA UNITARIA

$$DELCFU(I) = -6 * (1 - CP ** 2) * (C ** 3) * AC \\ / (KCIL(I) * B(I)) ** 3$$

$$XCILFU(I) = 6 * (1 - CP ** 2) * (C ** 2) * A(J)$$

\*\* 2 /

-

$$KCIL(I) ** 2 / B(I) ** 3$$

C SOLUCAO PARA MOMENTO UNITARIO

$$DELCMU(I) = XCILFU(I)$$

$$XCILMU(I) = - 12 * (1 - CP ** 2) * A(J) * C / X$$

CIL(I)

-

$$/ B(I) ** 3$$

C COMPATIBILIDADE DOS DESLOCAMENTOS

$$DELMEF(I) = -(DELMES(J) - DELMCI(I) + DELCFM(I))$$

$$DELFUF(I) = DELEFU(J) - DELCFU(I)$$

$$DELMUF(I) = DELEMU(J) - DELCMU(I)$$

C COMPATIBILIDADE DE ROTACOES

$$XMEMF(I) = - (XMES(J) - XMECIL(I) + XCILFM(I))$$

$$XFUNF(I) = XESFU(J) - XCILFU(I)$$

$$XMUNF(I) = XESMU(J) - XCILMU(I)$$

IF (TERM) READ (1)

WRITE (6, 1000) B (I), A (J), S (K), CP

WRITE (6, 1100) DELMEF (I), DELFUF (I), DELMUF

(I)

WRITE (6, 1200) XMEMF (I), XFUNF (I), XMUNF (I)

CALL SOLVE (DELFUF (I), DELMUF (I), DELMEF (I),

-

XMUNF (I), XMEMF (I), H, MOM, D)  
CALL TENSAO (C, A(J), KESF(J), H, MOM, SIGFIN,

SIGFMO,

-

SIGFIN(I), SIGFEX(I), NTETA, MTEFA,

```
CP, - SIGTMO, SIGFIN(I), SIGTEX(I), ALFA,  
- NTEFU, NTEMU, YG1, YG2, DYG1, DYG2,  
AH1, - AH2, AM1, AM2, IC)  
1000 FORMAT(///, 5X, " B = ", F4.2, 3X, " A = ", F6.  
2, 3X, " S = ", F4.2, 3X, " CP = ", F4.2  
, //)  
1100 FORMAT(5X, " DELMEF = ", F10.4, " DELFUF = ",  
- F10.4, 5X, " DELMUF = ", F10.4, //)  
1200 FORMAT(5X, " XMEMF = ", F10.4, " XFUMF = ",  
- F10.4, 5X, " XMUMF = ", F10.4, //)  
100 CONTINUE  
CALL MONTA(AM, VB, VC )  
110 CONTINUE  
120 CONTINUE  
KC = KC + 1  
IF(KC .EQ. 2) GO TO 40  
IC = 3  
GO TO 10  
4) CONTINUE  
STOP  
END
```

## A FUNÇÃO DO "PROGRAMA PRINCIPAL"

Primeiramente definiu-se todas as variáveis que apareciam no programa e subrotinas. Em seguida procede-se a leitura dos dados com subsequente determinação do parâmetro geométrico  $k$  citado no texto, dos deslocamentos e rotações devido a esforços de membrana e devido a força e momento unitários, aplicados na interseção das duas cascas cilíndricas e esféricas. Estes cálculos são feitos com relação a cada uma das cascas.

Se o parâmetro  $k$  for inferior a 30 a subrotina METOD2 é chamada para a aplicação do MÉTODO ASSIMPTÓTICO.

Finalmente procede-se a compatibilização cilindro-esfera dos deslocamentos e rotações, assim como a chamada das subrotinas.

A6.3 - A SUBROTINA SOLVE

```
SUBROUTINE SOLVE (A, B, C, E, F, H, MOM, D)
```

```
REAL MOM
```

```
D = A * E - B ** 2
```

```
IF (ABS (D) .LT. 0.01) GO TO 100
```

```
MOM = (F * A - C * B) / (A * E - B ** 2)
```

```
H = (C - B * MOM) / A
```

```
WRITE (6,1300) H, MOM
```

```
1300 FORMAT (5X, " H = ", F10.4, 5X, " MOM = ", F10.4, //)
```

```
RETURN
```

```
100 WRITE(6,1400)
```

```
1400 FORMAT(" DETERMINANTE NULO - ERRO NA MATRIZ DE RIGIDEZ ",  
- //)
```

```
RETURN
```

```
END
```

### A FUNÇÃO DA SUBROTINA "SOLVE"

A compatibilização das rotações e deslocamentos do cilindro e da esfera feita no programa principal nos leva a um sistema de duas equações a duas incógnitas (H e MOM), que a subrotina SOLVE se incumba de resolver.

#### A6.4 - A SUBROTINA TENSÃO

```

SUBROUTINE TENSAD (C, A, KESF, H, MOM, SIGFIH, SIGFMO, SIGF
IN,
-           SIGFEX, NTETA, MTETA, SIGTEX, SIGFMO,
-           SIGFIN, SIGTEX, ALFA, CP, NTEFU, NTEMU,
YGI,
-           YG2, DYGI, DYG2, AH1, AH2, A41, AM2, IC)
REAL MOM, NTETA, MTETA, KESF

```

```

C           CALCULO DAS TENSOES NO BORDO SEGUNDO O MERIDIANO

```

```

SIGFIH = - 2 * H * SQRT (1 - C ** 2)
SIGFMO = 12 * MOM
SIGFEX = SIGFIH - SIGFMO
SIGFIN = SIGFIH + SIGFMO

```

```

C           CALCULO DAS TENSOES NO BORDO SEGUNDO O PARALELO

```

```

IF(IC .EQ. 3) GO TO 20
IF(KESF .LT. 20) GO TO 130

```

```

20 CONTINUE

```

```

NTETA = 2.63 * C * SQRT(A) * ((1 - CP ** 2) ** 0.25) * 4
+
-           3.454 * SQRT(1 - CP ** 2) * MOM
MTETA = -C 0.2887 * SQRT(1 - C ** 2) / SQRT(1 - CP ** 2) *
H +
-           0.76 * SQRT(1 - C ** 2) / SQRT(A) / C /
-           (1 - CP ** 2) ** 0.25 * MOM)

```

```

GO TO 135

```

```

C           METODO 2

```

```

130 CONTINUE

```

MTETA = NTEFU \* H + NTEMU \* MDM

FMTE1 = -(2 - CP) \* (2 \* (-KESF) \*\* 2 + YG2 + CP \* YG1) / 2

- TAN(ALFA) - CP \* (2 \* (-KESF) \*\* 2 + DYG2 + CP \*  
DYG1)

- + 2 \* CP \* (-KESF) \*\* 3 \* (YG1 - YG2) - CP \*\* 2 \*

- (-KESF) \* (YG1 + YG2)

FMTE2 = (2 - CP) \* (2 \* (-KESF) \*\* 2 + YG1 - CP \* YG2) / 2

- TAN(ALFA) + CP \* (2 \* (-KESF) \*\* 2 + DYG1 - CP \*  
DYG2)

- + 2 \* CP \* (-KESF) \*\* 3 \* (YG1 + YG2) + CP \*\* 2 \*

- (-KESF) \* (YG1 - YG2)

MTETA = ((FMTE1 \* AH1 + FMTE2 \* AH2) \* H + (FMTE1 \* AM1 +

- FMTE2 \* AM2) \* MDM) / 12 / A / SQRT(C) / (1 - CP  
\*\* 2)

135 CONTINUE

SIGTEH = 2 \* MTETA

SIGTMO = 12 \* MTETA

SIGTEX = SIGTEH - SIGTMO

SIGTIN = SIGTEH + SIGTMO

WRITE(6, \*) NTETA, MTETA, FMTE1, FMTE2

WRITE(6, 1500) SIGFIN, SIGFEX, SIGTIN, SIGTEX

1500 FORMAT(5X, " SIGFIN = ", F8.4, 5X, " SIGFEX = ", F8.4,

- /, 5X, "SIGTIN = ", F8.4, 5X, " SIGTEX = ", F8.4, //)

RETURN

END

#### A FUNÇÃO DA SUBROTINA "TENSÃO"

Depois que o programa principal determinou todos os parâmetros necessários e a subrotina SOLVE os hiperestáticos  $H$  e  $MOM$  a subrotina TENSÃO é chamada para o cálculo das tensões de bordo segundo o meridiano e paralelo da casca esférica.

Este cálculo é feito independente do método empregado na determinação dos esforços internos da casca.

A6.5 - A SUBROTINA MONTA

SUBROUTINE MONTACAM, YB, VC)

DIMENSION AM(26, 5), V3(26), VC(26), RW(752), IW(76),

PSOL(26), DSOL(26)

COMMON SIGFIN(10), SIGFEX(10), SIGFIN(10), SIGFEX(10)

N = 5

M1 = 24

M2 = 0

IA = 26

DO 220 I = 1, M

AM(1, 1) = SIGFIN(I) + 1

AM(1, 2) = - SIGFIN(I)

AM(1, 3) = SIGFIN(I)

AM(1, 4) = - SIGFIN(I + 1)

AM(1, 5) = SIGFIN(I + 1)

AM(2, 1) = SIGFIN(I) + 1

AM(2, 2) = - SIGFIN(I)

AM(2, 3) = SIGFIN(I)

AM(2, 4) = - SIGFIN(I + 1)

AM(2, 5) = SIGFIN(I + 1)

AM(3, 1) = SIGFIN(I) - SIGFIN(I)

AM(3, 2) = -(SIGFIN(I) - SIGFIN(I))

AM(3, 3) = SIGFIN(I) - SIGFIN(I)

AM(3, 4) = -(SIGFIN(I + 1) - SIGFIN(I + 1))

AM(3, 5) = SIGFIN(I + 1) - SIGFIN(I + 1)

AM(4, 1) = SIGFEX(I) + 1

AM(4, 2) = - SIGFEX(I)

AM(4, 3) = SIGFEX(I)

AM(4, 4) = - SIGFEX(I + 1)

AM(4, 5) = SIGFEX(I + 1)

AM(5, 1) = SIGFEX(I) + 1

AM(5, 2) = - SIGTEX(I)

AM(5, 3) = SIGTEX(I)

AM(5, 4) = - SIGTEX(I + 1)

AM(5, 5) = SIGTEX(I + 1)

AM(5, 1) = SIGFEX(I) - SIGTEX(I)

AM(5, 2) = -(SIGFEX(I) - SIGTEX(I))

AM(6, 3) = SIGFEX(I) - SIGTEX(I)

AM(6, 4) = -(SIGFEX(I + 1) - SIGTEX(I + 1))

AM(6, 5) = SIGFEX(I + 1) - SIGTEX(I + 1)

DO 150 K = 1, 6

DO 140 J = 1, N

AM(K + 6, J) = AM(K, J)

AM(K + 12, J) = - AM(K, J)

AM(K + 18, J) = - AM(K, J)

140 CONTINUE

150 CONTINUE

DO 160 J = 7, 12

AM(J, 1) = 0

160 CONTINUE

DO 170 J = 19, 24

AM(J, 1) = 0

170 CONTINUE

DO 190 J = 1, 24

V3(J) = 1

```

190    CONTINUE
      VC(1) = 1
      DO 200 J = 2, 5
      VC(J) = 0
200    CONTINUE
      GO TO 210
      CALL ZX1LPC(AM, VB, VB, VB, IY, IY, IY, IY, IY, IY, AM, V
B, VB,
      -           VB, IY)
210    CONTINUE
      CALL ZX3LPC(AM, IA, VB, VC, N, M1, M2, S, PSOL, DSOL, RW,
IW,
      -           IER)
      ALFO = PSOL(2) - PSOL(3)
      BETA = PSOL(4) - PSOL(5)
      WRITE(6, 1700) S, BETA, ALFO, IER
1700   FORMAT(5X, " S = ", F8.4, 5X, " BETA = ", F8.4, 5X, " AL
FO = ",
      -           F8.4, 5X, " IER ", I3, 10(//))
220    CONTINUE
      RETURN
      END

```

#### A FUNÇÃO DA SUBROTINA "MONTA"

Uma vez determinadas as tensões no bordo, interna e externa, segundo o meridiano e paralelo, da casca esfera, a subrotina MONTA é chamada para colocar o problema na "forma padrão" de programação linear como foi indicado neste capítulo. Feito isto a otimização (maximização) da pressão se processa com a chamada das subrotinas ZX1LP e ZX3LP do IMSL, as quais foram feitas para isto.

A6.6 - A SUBROTINA METOD2

```

SUBROUTINE METOD2(A, C, CP, KESF, XESFU, DELEFU, XESMU, DEL
EHU,
-           NTEFU, NTEMU, ALFA, AH1, AH2, AM1, AM2,
YG1,
-           YG2, DYGI, DYG2)
REAL ALFA, PSI, YP1, YP2, YP3, YP4, YP5, DYP1, DYP2, DYP3,
DYP4,
-   DYP5, YG1, YG2, DYGI, DYG2, FMFI1, FMFI2, FQFI1, FQFI2,
FNTE1,
-   FNTE2, FX1, FX2, AH1, AH2, AM1, AM2, NTEFU, NTEMU, XESFU
-   DELEFU, XESMU, DELEMU, KESF, A, C, CP
ALFA = ARSIN(C)
PSI = ARCCOS(-1) / 2 - ALFA
YP1 = (5 * PSI - 3 * TAN(PSI)) / 8
YP2 = (5 * PSI ** 2 - 6 * PSI * TAN(PSI) - 3 * TAN(PSI) **
2)
-   * 5 / 128
YP3 = (120 * PSI + 25 * PSI ** 3 - 216 * TAN(PSI) -
-   45 * PSI ** 2 * TAN(PSI) - 45 * PSI * TAN(PSI) ** 2
-   - 63 * TAN(PSI) ** 3) * 5 / 3072
YP4 = (240) * PSI ** 2 + 125 * PSI ** 4 - 5760 * PSI * TAN(
PSI) -
-   300 * PSI ** 3 * TAN(PSI) - 6624 * TAN(PSI) ** 2 -
-   450 * PSI ** 2 * TAN(PSI) ** 2 - 1260 * PSI *
-   TAN(PSI) ** 3 - 2835 * TAN(PSI) ** 4) * 5 / 98304
DYP1 = -(2 - 3 * TAN(PSI) ** 2) / 8
DYP2 = -(2 * PSI - 6 * TAN(PSI) - 3 * PSI * TAN(PSI) ** 2 -
-   3 * TAN(PSI) ** 3) * 5 / 64
DYP3 = (32 - 10 * PSI ** 2 + 60 * PSI * TAN(PSI) + 150 *
-   TAN(PSI) ** 2 + 15 * PSI ** 2 * TAN(PSI) ** 2 +

```

$$- \quad 3) + \text{PSI} * \text{TAN}(\text{PSI}) ** 3 + 63 * \text{TAN}(\text{PSI}) ** 4) * 5$$

$$- \quad 1)24$$

$$\text{DYP4} = (240 * \text{PSI} - 50 * \text{PSI} ** 3 + 4752 * \text{TAN}(\text{PSI}) + 450$$

$$- \quad \text{PSI} ** 2 * \text{TAN}(\text{PSI}) + 2610 * \text{PSI} * \text{TAN}(\text{PSI}) ** 2 +$$

$$- \quad 75 * \text{PSI} ** 3 * \text{TAN}(\text{PSI}) ** 2 + 6462 * \text{TAN}(\text{PSI}) **$$

3 +

$$- \quad 225 * \text{PSI} ** 2 * \text{TAN}(\text{PSI}) ** 3 + 945 * \text{PSI} *$$

$$- \quad \text{TAN}(\text{PSI}) ** 4 + 2835 * \text{TAN}(\text{PSI}) ** 5) * 5 / 24576$$

$$\text{YG1} = 1 - \text{YP1} / 2 / \text{KESF} + \text{YP3} / 4 / \text{KESF} ** 3 - \text{YP4} / 4 /$$

$$- \quad \text{KESF} ** 4 + \text{YP5} / 8 / \text{KESF} ** 5$$

$$\text{YG2} = -\text{YP1} / 2 / \text{KESF} + \text{YP2} / 2 / \text{KESF} ** 2 - \text{YP3} / 4 / \text{KESF}$$

F \*\* 3

$$- \quad + \text{YP5} / 8 / \text{KESF} ** 5$$

$$\text{DYG1} = - \text{DYP1} / 2 / \text{KESF} + \text{DYP3} / 4 / \text{KESF} ** 3 - \text{DYP4} /$$

4 /

$$- \quad \text{KESF} ** 4 + \text{DYP5} / 8 / \text{KESF} ** 5$$

$$\text{DYG2} = -\text{DYP1} / 2 / \text{KESF} + \text{DYP2} / 2 / \text{KESF} ** 2 - \text{DYP3} / 4 /$$

$$- \quad \text{KESF} ** 3 + \text{DYP5} / 8 / \text{KESF} ** 5$$

$$\text{FMFI1} = (1 - 2 * \text{CP}) * (2 * \text{KESF} ** 2 * \text{YG2} + \text{CP} * \text{YG1}) /$$

2 /

$$- \quad \text{TAN}(\text{ALFA}) - (2 * \text{KESF} ** 2 * \text{DYG2} + \text{CP} * \text{DYG1}) +$$

$$- \quad 2 * (-\text{KESF}) ** 3 * (\text{YG1} - \text{YG2}) - \text{CP} * (-\text{KESF}) *$$

$$- \quad (\text{YG1} + \text{YG2})$$

$$\text{FMFI2} = -(1 - 2 * \text{CP}) * (2 * \text{KESF} ** 2 * \text{YG1} - \text{CP} * \text{YG2}) /$$

2 /

$$- \quad \text{TAN}(\text{ALFA}) + (2 * \text{KESF} ** 2 * \text{DYG1} - \text{CP} * \text{DYG2}) +$$

$$- \quad 2 * (-\text{KESF}) ** 3 * (\text{YG1} + \text{YG2}) + \text{CP} * (-\text{KESF}) *$$

$$- \quad (\text{YG1} - \text{YG2})$$

$$FQFI1 = YG1$$

$$FQFI2 = YG2$$

$$FNTE1 = YG1 / \text{TAN}(\text{ALFA}) / 2 - (\text{DYG1} + (-\text{KESF}) * (\text{YG1} + \text{YG2}))$$

$$FNTE2 = YG2 / \text{TAN}(\text{ALFA}) / 2 - (\text{DYG2} + (-\text{KESF}) * (\text{YG2} - \text{YG1}))$$

$$FX1 = -(2 * \text{KESF} ** 2 * \text{YG2} + \text{CP} * \text{YG1})$$

$$FX2 = (2 * \text{KESF} ** 2 * \text{YG1} - \text{CP} * \text{YG2})$$

### C SOLUCAO PARA A FORCA UNITARIA

$$AH2 = \text{FMFI1} * (+C) * \text{SQRT}(C) / (\text{FMFI1} * \text{YG2} - \text{FMFI2} * \text{YG1})$$

$$AH1 = -\text{FMFI2} * AH2 / \text{FMFI1}$$

$$\text{XESFU} = -(FX1 * AH1 + FX2 * AH2) / \text{SQRT}(C) / (1 - \text{CP} ** 2)$$

$$\text{NTEFU} = (\text{FNTE1} * AH1 + \text{FNTE2} * AH2) / \text{SQRT}(C)$$

$$\text{DELEFU} = \text{NTEFU} * A * C$$

WRITE(6, '/') DYG1, DYG2, DYP1, DYP2, DYP3, DYP4, DYP5, KESF  
 , YG1,

- YG2 , YP1, YP2, YP3, YP4, YP5

### C SOLUCAO PARA O MOMENTO UNITARIO

$$AM2 = 12 * \text{YG1} * A * \text{SQRT}(C) / (\text{FMFI2} * \text{YG1} - \text{FMFI1} * \text{YG2})$$

$$AM1 = -\text{YG2} * AM2 / \text{YG1}$$

$$\text{XESMU} = -(FX1 * AM1 + FX2 * AM2) / \text{SQRT}(C) / (1 - \text{CP} ** 2)$$

$$\text{NTEMU} = (\text{FNTE1} * AM1 + \text{FNTE2} * AM2) / \text{SQRT}(C)$$

$$\text{DELEMU} = \text{NTEMU} * A * C$$

WRITE(6, '/') XESFU, DELEFU, FMFI1, FMFI2, AH1, AH2, NTEFU, N  
 TEMU,

- XESMU, DELEMU, AM1, AM2, FNTE1, FNTE2, FX1, FX

2

RETURN

#### A FUNÇÃO DA SUBROTINA "METHOD2"

Quando o parâmetro  $k$  é menor que 30 utilizaremos a subrotina METHOD2 na determinação do deslocamento e rotação da esfera para a posterior compatibilização com o cilindro.

Esta subrotina nada mais é que o Método Assimptótico colocado em linguagem de programação.

VII - RESULTADOS E CONCLUSÕES7.1 - Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos da aplicação do método desenvolvido, cujos resultados serão comparados com os de Leckie (1) e de Robinson (22).

Além desses, procuramos também mostrar os valores intermediários, das tensões elásticas máximas, dos hiperestáticos H, M e da pressão de acomodação quando o valor do parâmetro k, do vaso considerado, for cerca 30. Desta maneira pudemos fazer os cálculos pelos dois métodos; o Assimptótico e o método Simplificado obtendo praticamente as mesmas grandezas.

Na comparação dos nossos resultados com os de Leckie (1) foi possível também fazê-la com valores intermediários, porém Robinson (22) só apresenta em seu trabalho grandezas da pressão de acomodação para vários vasos de dimensões diferentes.

7.2 - COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DE LECKIE

Para os parâmetros geométricos  $B = 0,25$ ,  $A = 30$ ,  $S = 0,10$  as tensões devido somente aos esforços de bordo  $H_1$  e  $M_1$  determinadas por Leckie são:

Face Interna	Face Externa
SIGFIN = $-1,156 \bar{p}$	SIGFEX = $-0,588 \bar{p}$
SIGTIN = $0,77 \bar{p}$	SIGTEX = $2,10 \bar{p}$

e as tensões induzidas pelo grupo  $(H, M)_2$  são:

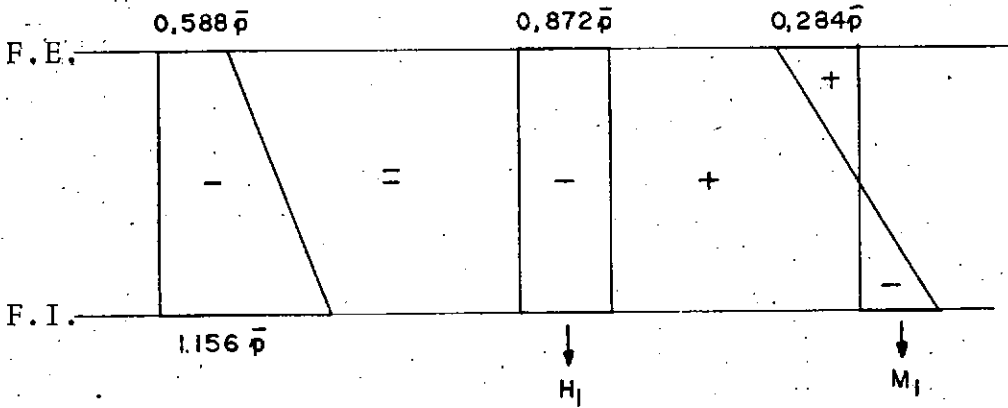
Face Interna	Face Externa
SIGFIN = $-1,49 \bar{p}$	SIGFEX = $0,04$
SIGTIN = $0,76 \bar{p}$	SIGTEX = $1,31 \bar{p}$

quando o parâmetro geométrico  $B = 0,5$  e os demais os mesmos. Obtidas as tensões elásticas determina-se as tensões residuais e aplica-se o método de maximização da pressão visto no Capítulo VI obtendo o valor  $\bar{p}_2 = 0,598 \sigma_0$ .

A determinação dos hiperestáticos  $(H, M)_1$  e  $(H, M)_2$  para ambos os casos se faz empregando os valores das tensões e-

lásticas, obtidas, distribuindo-se uniformemente sobre a espessura da casca.

1º Caso



Cálculo de  $H_1$

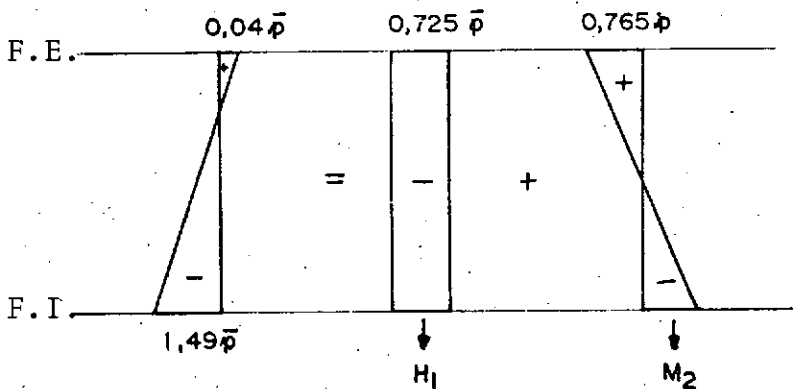
$$0,872 \frac{pR}{2T} = 0,995 \frac{H_1}{1 \times T} \quad (\text{projeção de } H_1 \text{ sobre o meridiano})$$

$$H_1 = 0,4382 pR$$

Cálculo de  $M_1$

$$0,284 \frac{pR}{2T} = - \frac{6M_1}{T^2} \quad M_1 = -0,02367 pRT$$

2º Caso



$$H_2 = 0,365 pR \quad ; \quad M_2 = -0,06375 pRT$$

A aplicação do método aqui desenvolvido leva aos seguintes resultados:

$$B = 0,25 \quad A = 30 \quad S = 0,10$$

.103.

$$H_1 = 0,4376pR$$

$$M_1 = - 0,0230 pRT$$

Face Interna

Face Externa

$$SIGFIN = -1,146 \bar{p}$$

$$SIGFEX = -0,595 \bar{p}$$

$$SIGTIN = 1,155 \bar{p}$$

$$SIGTEX = 2,13 \bar{p}$$

$$B = 0,50$$

$$A = 30$$

$$S = 0,10$$

$$H_2 = 0,358pR$$

$$M_2 = -0,0640pRT$$

Face Interna

Face Externa

$$SIGFIN = -1,48$$

$$SIGFEX = 0,05$$

$$SIGTIN = 1,01$$

$$SIGTEX = 1,40$$

$$\bar{p}_2 = 0,583 \sigma_0$$

Comparando os resultados com os que se encontram na referência (1), percebe-se diferença considerável apenas nos valores SIGTIN. Não conseguimos localizar a razão de tal discrepância, malgrado a atenção com que nos empenhamos para esse fim.

Por outro lado quando a comparação feita na situação limite de validade dos dois métodos aqui desenvolvidos, os resultados são coincidentes. Finalmente, apesar de apresentar só o valor da pressão de acomodação, para todos os vasos analisados nossos valores praticamente coincidem com os de Robinson (22).

### 7.3 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DOS MÉTODOS DESENVOLVIDOS QUANDO O PARÂMETRO k CRESCE

Faremos aqui comparações dos resultados obtidos pelos dois métodos quando  $k = 18,5$  e  $k = 29$  respectivamente. Com  $k = 18$  os valores obtidos por um e pelo outro método são praticamente coincidentes e a medida que ele cresce estas grandezas tendem a se igualarem. Os resultados obtidos são:

MÉTODO ASSIMPTOTICO

B = 0,25                      A = 200,00                      S = 0,10                      CP = 0,30

DELMEF = 913,15              DELFUF = 1916,86              DELMUF = -997,23

XMENF = -526,07              XFUNF = -997,23              XMUNF = 1340,42

                                 H<sub>1</sub> = 0,4441                      MOM<sub>1</sub> = -0,0621

<u>Face Interna</u>	<u>Face Externa</u>
SIGFIN = -1,6288	SIGFEX = -0,1386
SIGTIN = 1,9545	SIGTEX = 4,1663

B = 0,50                      A = 200,00                      S = 0,10                      CP = 0,30

DELMEF = 317,55              DELFUF = 727,70              DELMUF = -204,14

XMENF = -131,51              XFUNF = -204,14              XMUNF = 339,58

                                 H<sub>2</sub> = 0,3942                      MOM<sub>2</sub> = -0,1503

<u>Face Interna</u>	<u>Face Externa</u>
SIGFIN = -2,58	SIGFEX = 1,01
SIGTIN = 1,32	SIGTEX = 2,96

P<sub>S</sub> = 0,387 (pressão de acomodação)

MÉTODO SIMPLIFICADO

B = 0,25                      A = 200,00                      S = 0,10                      CP = 0,30

DELMEF = 913,13              DELFUF = 1912,23              DELMUF = -991,36

XMENF = -526,07              XFUNF = -991,36              XMUNF = 1335,90

                                 H<sub>1</sub> = 0,44                      MOM<sub>1</sub> = -0,6

<u>Face Interna</u>	<u>Face Externa</u>
SIGFIN = -1,65	SIGFEX = -0,11
SIGTIN = 1,62	SIGTEX = 3,98

B = 0,50                      A = 200,00                      S = 0,10                      Cp = 0,30

DELMEF = 317,55    DELFUF = 723,08    DELMUF = -198,27  
 XMENF = -131,51    XFUNF = -108,27    XMUNF = 335,06  
 $H_2 = 0,39$                        $MOM_2 = -0,15$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -2,68                      SIGFEX = 1,11  
 SIGTIN = 1,43                      SIGTEX = 2,21

$P_S = 0,40$  (pressão de acomodação)

Para  $k = 29$

MÉTODO ASSIMPTÓTICO

$B = 0,25$                $A = 500,00$                $S = 0,10$                $CP = 0,30$   
 DELMEF = 3612,19    DELFUF = 7570,51    DELMUF = -2479,89  
 XMENF = -1315,19    XFUNF = -2479,89    XMUNF = 2132,55  
 $H_1 = 0,445$                        $MOM_1 = -0,0999$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -2,08                      SIGFEX = 0,31  
 SIGTIN = 3,25                      SIGTEX = 5,63

$B = 0,50$                $A = 500,00$                $S = 0,10$                $CP = 0,30$   
 DELMEF = 1263,96    DELMUF = 2869,97    DELMUF = -497,16  
 XMENF = -328,79    XFUNF = -497,16    XMUNF = 550,09  
 $H_2 = 0,3994$                        $MOM_2 = -0,2367$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -3,63                      SIGFEX = 2,04  
 SIGTIN = 2,56                      SIGTEX = 3,48

$P_S = 0,3013$  (pressão de acomodação)

MÉTODO SIMPLIFICADO

$B = 0,25$                $A = 500,00$                $S = 0,10$                $CP = 0,30$   
 DELMEF = 3612,45    DELFUF = 7558,78    DELMUF = -2478,40  
 XMENF = -1315,19    XFUNF = -2478,40    XMUNF = 2112,24  
 $H_1 = 0,4449$                        $MOM_1 = -0,1006$

<u>Face Interna</u>		<u>Face Externa</u>	
SIGFIN = -2,09		SIGFEX = 0,32	
SIGTIN = 3,23		SIGTEX = 5,63	
B = 0,50	A = 500,00	S = 0,10	CP = 0,30
DELMEF = 1263,96	DELFUF = 2858,23	DELMUF = -495,68	
XMEMF = -328,79	XFUNF = -495,68	XMUNF = 529,77	
	H <sub>2</sub> = 0,3994	MOM <sub>2</sub> = -0,2469	

<u>Face Interna</u>		<u>Face Externa</u>	
SIGFIN = -3,75		SIGFEX = 2,16	
SGTIN = 2,53		SIGTEX = 3,37	

P<sub>S</sub> = 0,3014 (pressão de acomodação).

#### 7.4 - COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DE ROBINSON

Os resultados foram obtidos pelo Método Assimptótico, com os quais foi possível fazer o quadro comparativo com os resultados apresentados por Robinson(22).

B = 0,50	A = 25,00	S = 0,10	CP = 0,30
	H <sub>1</sub> = 0,3476	MOM <sub>1</sub> = -0,0616	
<u>Face Interna</u>		<u>Face Externa</u>	
SIGFIN = -1,43		SIGFEX = 0,04	
SIGTIN = 1,07		SIGTEX = 1,36	
B = 0,25	A = 25,00	S = 0,10	CP = 0,30
	H <sub>2</sub> = 0,4338	MOM <sub>2</sub> = -0,0216	

<u>Face Interna</u>		<u>Face Externa</u>	
SIGFIN = -1,12		SIGFEX = -0,60	
SIGTIN = 1,25		SIGTEX = 2,05	

P<sub>S</sub> = 0,7272 (pressão de acomodação)

B = 0,50      A = 50,00      S = 0,10      CP = 0,30

$H_1 = 0,3765$        $MOM_1 = -0,0772$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -1,67                      SIGFEX = 0,17

SIGTIN = 0,93                      SIGTEX = 1,65

B = 0,25      A = 50,00      S = 0,10      CP = 0,30

$H_2 = 0,4422$        $MOM_2 = -0,0294$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -1,23                      SIGFEX = -0,52

SIGTIN = 1,06                      SIGTEX = 2,48

$P_S = 0,7140$  (pressão de acomodação)

B = 0,50      A = 100,00      S = 0,10      CP = 0,30

$H_1 = 0,3879$        $MOM_1 = -0,1069$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -2,05                      SIGFEX = 0,51

SIGTIN = 1,03                      SIGTEX = 2,19

B = 0,25      A = 100,00      S = 0,10      CP = 0,30

$H_2 = 0,4436$        $MOM_2 = -0,0429$

Face Interna                      Face Externa

SIGFIN = -1,39                      SIGFEX = -0,36

SIGTIN = 1,34                      SIGTEX = 3,20

$P_S = 0,6212$  (pressão de acomodação)

.108.

B = 0,50            A = 50,00            S = 0,20            CP = 0,30

$H_1 = 0,3674$              $MOM_1 = -0,1273$

Face Interna

Face Externa

SIGFIN = -2,24

SIGFEX = 0,80

SIGTIN = 1,28

SIGTEX = 2,85

B = 0,25            A = 50,00            S = 0,20            CP = 0,30

$H_2 = 0,4328$              $MOM_2 = -0,0469$

Face Interna

Face Externa

SIGFIN = -1,41

SIGFEX = -0,28

SIGTIN = 1,96

SIGTEX = 4,15

$P_S = 0,5191$  (pressão de acomodação)

B = 0,50            A = 100,00            S = 0,20            CP = 0,30

$H_1 = 3703$              $MOM_1 = -0,1804$

Face Interna

Face Externa

SIGFIN = -2,89

SIGFEX = 1,43

SIGTIN = 1,77

SIGTEX = 3,84

B = 0,25            A = 100,00            S = 0,20            CP = 0,30

$H_2 = 0,4307$              $MOM_2 = -0,0691$

Face Interna

Face Externa

SIGFIN = -1,67

SIGFEX = -0,01

SIGTIN = 2,95

SIGTEX = 5,40

$P_S = 0,4130$  (pressão de acomodação)

B = 0,50                    A = 25,00                    S = 0,30                    CP = 0,30

                              H<sub>1</sub> = 0,3507                    MOM<sub>1</sub> = 0,1170

Face Interna                    Face Externa

SIGFIN = -2,07                    SIGFEX = 0,73

SIGTIN = 1,33                    SIGTEX = 2,93

B = 0,25                    A = 25,00                    S = 0,30                    CP = 0,30

                              H<sub>2</sub> = 0,4243                    MOM<sub>2</sub> = -0,0389

Face Interna                    Face Externa

SIGFIN = -1,27                    SIGFEX = -0,34

SIGTIN = 2,12                    SIGTEX = 4,30

P<sub>S</sub> = 0,5086 (pressão de acomodação)

B = 0,50                    A = 25,00                    S = 0,40                    CP = 0,30

                              H<sub>1</sub> = 0,3340                    MOM<sub>1</sub> = 0,1376

Face Interna                    Face Externa

SIGFIN = -2,26                    SIGFEX = 1,03

SIGTIN = 1,75                    SIGTEX = 3,59

B = 0,25                    A = 25,00                    S = 0,40                    CP = 0,30

                              H<sub>2</sub> = 0,4080                    MOM<sub>2</sub> = 0,0441

Face interna                    Face Externa

SIGFIN = -1,27                    SIGFEX = -0,21

SIGTIN = 2,96                    SIGTEX = 5,19

P<sub>S</sub> = 0,4352 (pressão de acomodação)

B = 0,50                    A = 100,00                    S = 0,40                    CP = 0,30

                              H<sub>1</sub> = 0,3295                    MOM<sub>1</sub> = -0,2829

Face Interna                    Face Externa

SIGFIN = -3,99                    SIGFEX = 2,79

SIGFEX = 3,47                    SIGTEX = 6,45

$$B = 0,25 \quad A = 100,00 \quad S = 0,40 \quad CP = 0,30$$

$$H_2 = 0,3955 \quad MOM_2 = -0,1032$$

Face InternaFace Externa

SIGFIN = -1,96

SIGFEX = 0,51

SIGTIN = 6,26

SIGTEX = 8,94

$$P_S = 0,2677 \quad (\text{pressão de acomodação})$$

QUADRO COMPARATIVO

	B	A	S	$\bar{p}_2$ ref (22)	$\bar{p}_2$ (calc.)
Vaso 1	0,50 / 0,25	25	0,10	0,77	0,73
Vaso 2	0,50 / 0,25	50	0,10	0,72	0,71
Vaso 3	0,50 / 0,25	100	0,10	0,63	0,63
Vaso 4	0,50 / 0,25	50	0,20	0,52	0,52
Vaso 5	0,50 / 0,25	100	0,20	0,41	0,41
Vaso 6	0,50 / 0,25	25	0,30	0,51	0,51
Vaso 7	0,50 / 0,25	25	0,40	0,415	0,435
Vaso 8	0,50 / 0,25	100	0,40	0,260	0,268

7.5 - CONCLUSÕES

- 1) No trabalho feito chegou-se praticamente a um programa duplo em razão das limitações próprias do Método Assimptótico de Cascas.
- 2) A validade de ambos foi comprovada por um cálculo em dados comuns numa situação de fronteira ( $k = 29$ ).
- 3) Malgrado a discrepância no valor de  $\sigma_\theta$  interno todos os demais resultados a que chegamos praticamente coincidem com os de L<sub>e</sub>c<sub>k</sub>ie em pesquisa idêntica.
- 4) Na presente tese fizemos outras aplicações numéricas que servirão de confronto a pesquisas análogas no mesmo campo.

- 5) A orientação seguida é muito mais simples que a de Leckie; a desse autor se aplica a tipos um pouco mais gerais de carregamentos e ligações. Como tínhamos em vista principalmente problemas de reatorés não nos foi interessante partir para programações mais complexas.
- 6) O teorema da acomodação estrutural que vinha tendo emprego muito discreto e mesmo raro entre os projetistas de estruturas, mostrou-se dentro da área em que se situa o presente trabalho de relevo fundamental e até mesmo exclusivo para realização de um projeto tecnicamente bem concebido.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- (1) LECKIE, F.A. - "Shakedown Pressures for Flush Cilinder-Sphere Shell Intersections" -  
J. mech. Engineering Science 7, 367 - 1965
- (2) MENDELSON, A. - "The Theory of Plasticity" -  
The Macmillan Company, New York - 1968
- (3) PRAGER, W. and HODGE, P. G. Jr. "The Theory of Perfectly Plastic Solids"  
John Wiley & Sons, Inc. - 1951
- (4) TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N. "Theory of Elasticity"  
McGraw-Hill Kogakusha, Ltd - 1970
- (5) SAADA, A.S. - "ELASCITY" - "Theory and Aplications"  
Pergamon Press Inc. New York - 1974
- (6) KACHANOV, L.M. - "Fundamentals of the Theory of Plasticity"  
Mir Publishers - Moscow - 1974
- (7) PRAGER, W. - "An Introduction to Plasticity" -  
Addison-Wesley Publishing Company, Inc.  
(Reading, Massachusetts, and London)
- (8) LECKIE, F.A. - PENNY, R.K. "Stress Concentration Factors for the Stresses at Nozzle Intersections in Pressure Vessels" - Welding Research Council Bulletin - n° 90  
September - 1963
- (9) ROSE, R.T. "New Design Method for Pressure Vessel Nozzles"  
The Engineer, London 1962 - 214 (n° 5556, 20th July)
- (10) FINDLAY, G.E. and SPENCE, J. "Applying the Shakedown Concept to Pressure Vessel Design"  
The Engineer - 1968 - 12 July
- (11) SYMONDS, P.S. "Shakedown in Continuous Media"  
Journal of Applied Mechanics (Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs), March 1951, 18 (N° 1), 85
- (12) PROCTER, E and FLINDERS, R.F. - "Experimental Investigation Into the Elastic, Plastic Behavior of Isolated Nozzles Spherical Shells" - Parte II: Shakedown and Plastic Analysis CEGB Report N° RDBN861 - Spetember - 1967

- (13) LECKIE, F.A. and PENNY R.K. - "Shakedown as a Guide to the Design of Pressure Vessels" -  
Journal of Engineering Industry  
Paper N° 68 - Transation of the ASME - 1969
- (14) FLÜGGE, W. - "Stresses in Shells" -  
Springer-Verlag - Berlin - 1960
- (15) GIRKMANN, KARL - "Flächentragwerke-Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und faltwerke;  
Springer-Verlag - Wien - 1963
- (16) TIMOSHENKO, S.P. and WOINOWSKY-KREIGER, S. "Theory of Plates and Shells"  
Mc-Graw-Hill Book Co., New York, N.Y. - 1959
- (17) GILL, S.S. "The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components."  
Pergamon Press - 1970 - Oxford
- (18) SILVA JR., J.F. - "Resistência dos Materiais"  
Ao Livro Técnico - 1966 - Rio de Janeiro
- (19) PENNY; R.K. and LECKIE, F.A. - "Solutions for the Stresses at Nozzles in Pressure Vessels" -  
Welding Research Conclil Bulletin - N° 90  
September - 1963
- (20) LECKIE, F.A. and PENNY R.K. - "Shakedown Loads for Radial Nozzles in Spherical Pressure Vessels"  
International Journal of Solids Structures,  
1967, Vol. 3 pp. 743 to 755
- (21) LECKIE, F.A. and PAYNE; D.J. - "Some Observations os the Design of Spherical Pressure Vessels with Flush Cylindrical Nozzles" -  
Proc. Instn. Engrs. 1965-1966
- (22) ROBINSON, M. - "Some Comments on ths Stress Concentration and Shakedown Factors for Spherical Pressure Vessels with Flush Radial Cylindrical Nozzles"  
Journal of Mechanical Engineering Science - Vol. 21  
N° 3 - 1979