VIBRAÇÕES DE PLACAS SANDWICH ENRIJECIDAS POR BARRAS CONECTORAS

Antonio José de Alencastro Muniz Freire

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Prof. Sergio Fernandes Villaça
Presidente

Prof. Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

Prof. Benjamin Ernani Diaz

Prof. Paulo Alcantara Gomes

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 1980

MUNIZ FREIRE, ANTONIO JOSÉ DE ALENCASTRO
Vibrações de Placas Sandwich Enrijecidas por Barras Conectoras |Rio de Janeiro| 1980
VII, 70 p., 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1980)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE

1. Placas Sandwich I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

à meus pais

à minha esposa e
filha

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos que colaboraram e incentivaram na realização deste trabalho. De modo especial:

Ao Prof. Sergio Fernandes Villaça pelo exemplo de dedicação, orientação e amizade.

A COPPE, nas pessoas de seu Diretor Paulo Alcantara Gomes e do Coordenador Fernando Luiz Lobo B. Carneiro.

A CNEN/CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Departamento de Mecânica Técnica da Escola de Engenharia da UFRJ e a todos os colegas da COPPE pelo apoio sempre encontrado.

A Helena Santos de Oliveira pelo esmerado trabalho de datilografia.

SUMÁRIO

Neste trabalho são estabelecidas e analisadas as equações das vibrações transversais livres de placas sandwich retangulares, incluindo barras conectoras entre as faces que produzem enrijecimento do núcleo, sendo uniformemente comprimidas no seu plano médio, assim como o cálculo das cargas críticas de instabilidade, determinadas por um processo dinâmico.

As equações das vibrações da placa sandwich foram obtidas substituindo as equações constitutivas e relações deformação-deslocamento nas equações de movimento.

São apresentados gráficos fornecendo a variação das freqüências naturais de vibração e da carga de instabilidade, com rigidez ao cisalhamento da placa variando as dimensões das barras conectoras. É elaborado também para uma dada placa, um gráfico de comportamento da carga de instabilidade com o modo de vibração e a rigidez das barras conectoras.

ABSTRACT

The purpose of this work is the analysis of the free transverse vibration equations of retangular sandwich-type plates including spaced transverse posts between the faces which introduce additional stiffness in the core, under compressive uniforme load acting in the midplane, as well as the determination of the critical loads by a dynamical process.

The equations of vibration were obtained through the substitution of the constitutive equations into the equations of motion.

Some results, as the variation of the natural frequencies and critical loads with the shear stiffness of the plate changing the sizes of the transverse posts were plotted. It is also plotted the influence on the critical load of the vibration mode and the transverse posts stiffness.

INDICE

I - INTRODUÇÃO 1

1.1 - Considerações Gerais 1

1.2 - Características Elásticas do Material do Núcleo. 2

1.3 - Aplicação da Teoria às Estruturas Sandwich 3

II - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA 4

2.1 - Estática e Cinemática da Placa Sandwich 4

2.2 - Tensões e Deformações do Núcleo 6

2.3 - Relações Constitutivas do Núcleo 10

2.4 - Determinação das Expressões das Tensões, Deformações e Deslocamentos do Núcleo 11

2.5 - Determinação das Expressões das Tensões, Deformações e Deslocamentos das Faces 15

2.6 - Transição do Núcleo para as Faces 17

III - EXPRESSÕES DOS ESFORÇOS SOLICITANTES 21

IV - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO 28

V - SOLUÇÃO PARA UMA PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA. 34

VI - GRÁFICOS 41

6.1 - Módulo de Elasticidade ao Cisalhamento G* 41

6.2 - Rigidez à Flexão Γ 43

6.3 - Rigidez à Torção Λ 46

6.4 - Gráficos 48

VIII - CONCLUSÕES 52

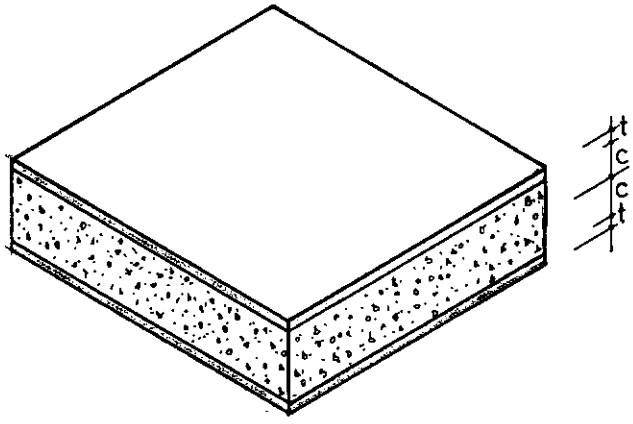
BIBLIOGRAFIA 66

SIMBOLOGIA 69

I - INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Serão analisadas, no presente trabalho placas sandwich, sujeitas a pequenas deformações, constituídas por duas lâminas de pouca espessura, chamadas de faces, separadas por uma camada mais espessa, denominada núcleo (Figura 1).



(Figura 1)

As faces serão consideradas como membranas de espessura t , sem capacidade de absorver momentos, admitindo-se também que as faces não sofrerão deformação devida ao efeito de cisalhamento. Para simplificação no estudo, o material constituinte das faces será considerado isótropo.

O núcleo, de espessura 2c, será constituído por um material de baixo peso específico e pouco resistente, e por barras transversais ligando uma face a outra. Terá como função,

promover a solidarização da placa, evitando que, quando esta se deforme, as faces se desloquem diferencialmente e devendo ser suficientemente rígido, para que as faces permaneçam separadas corretamente.

1.2 - CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS DO MATERIAL DO NÚCLEO

Será suposto que o núcleo do sandwich obedecerá à teoria elástico-linear do meio contínuo de Cosserat. Esta surgiu, a partir da teoria desenvolvida por Voigt[17] e Duhem[19], com base na suposição de que, no modelo físico de um corpo, deveria ser incluído o efeito de eixos associados a cada ponto do seu interior, para o estudo, por exemplo, das deformações sofridas por um sólido em micro-escalas. E. e F. Cosserat[18] construíram sua teoria, supondo que cada ponto do corpo, deveria ser orientado por um triedro fixo onde a cada direção seria permitida uma rotação local (rotação em micro-escala) independentemente da rotação da seção a que este ponto pertence. Com isso, a cada rotação seria necessário acrescentar uma tensão rotacional, aqui chamada de tensão-momento ("Couple Stress" ou "Moment Stress") designada por τ_i, além das tensões normalmente encontradas nas teorias clássicas de elasticidade. (As tensões causadas por forças, "force stresses", serão denominadas simplesmente por tensões, σ_{ij}).

Para incorporar, na Teoria da Elasticidade, um fenômeno em micro-escala, que ocorre em um meio, foi estabelecida por Mindlin[12], a Teoria da Elasticidade Linear com Micro-Estruturas, supondo que cada eixo do triedro de Cosserat poderá sofrer deslocamentos ou rotações independentes dos outros dois. Para um material isótropo, existirão 16 constantes elásticas adicionais,

para descrever esta nova propriedade. A Teoria Elástica de Cosserat, apesar de anterior à de Mindlin, é um caso particular desta onde somente as rotações da micro-estrutura são independentes das rotações da macro-estrutura.

1.3 - APLICAÇÃO DA TEORIA ÀS ESTRUTURAS SANDWICH[7]

A justificativa de se adotar esta teoria[7], é que se torna possível a análise do efeito de barras conectoras transversais, finas e pouco espaçadas, que possuam rigidez à flexão e à torção, por meio das suposições seguintes:

- O núcleo será constituído por um conjunto de barras conectoras transversais pouco espaçadas e por um material leve e pouco resistente, dando assim capacidade ao núcleo, de absorver tensões normais transversais, tensões cisalhantes (que em parte serão absorvidas pelo material do núcleo) e tensões-momento atuando nas seções do núcleo paralelas as faces.

- Os eixos da micro-estrutura coincidirão com os eixos das barras conectoras.

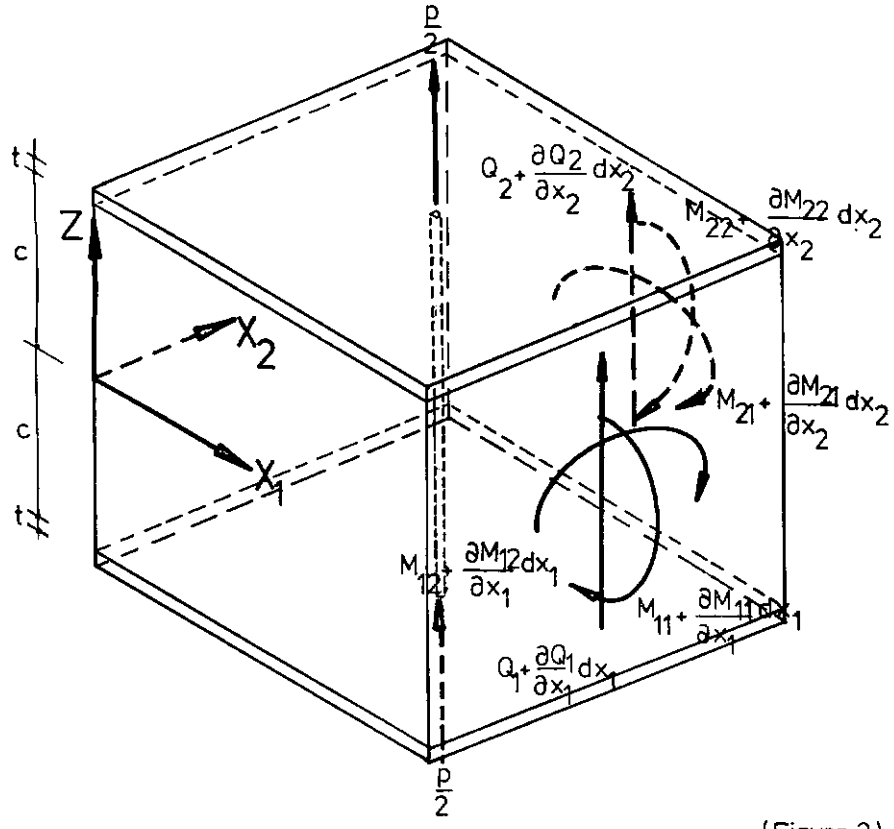
- As tensões-momento, representarão o efeito das barras conectoras transversais, com rigidez à flexão e à torção.

- Finalmente, os efeitos dessas barras terão como conseqüência a redução da deformação transversal devido ao esforço cortante, através de sua rigidez à flexão e à torção.

II - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

2.1 - ESTÁTICA E CINEMÁTICA DA PLACA SANDWICH

Supondo que a placa tenha simetria em relação a seu plano médio, as equações de equilíbrio da estática, para o elemento infinitesimal da placa, solicitada por momentos fletores M_{ij} e esforços cortantes transversais Q_i, são (Figura 2):



(Figura 2)

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + p = 0 \qquad (2.1a)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = 0 \qquad (2.1b)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0 \qquad (2.1c)$$

As componentes do deslocamento de um ponto genéri co (x_1 , x_2 , z) da placa, serão designadas por u_1 , u_2 , w . As componentes da deformação da superfície média, no sistema de coordenadas adotado, admitindo-se a deformação por cisalhamento, poderão ser descritas por[20] :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (2.2a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad (2.2b)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_1 \qquad (2.3a)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_2 \qquad (2.3b)$$

onde ϕ_i são as rotações das faces do elemento infinitesimal de formado. As variações de curvatura, χ_{ij} , serão definidas por:

$$\chi_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \qquad (2.4a)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \qquad (2.4b)$$

$$\chi_{21} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \qquad (2.4c)$$

$$\chi_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \qquad (2.4d)$$

Das expressões (2.3) e (2.4), poderão ser retiradas as equações de compatibilidade:

$$\frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial \chi_{21}}{\partial x_1} \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_1} \tag{2.5b}$$

$$\chi_{12} - \chi_{21} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} \tag{2.5c}$$

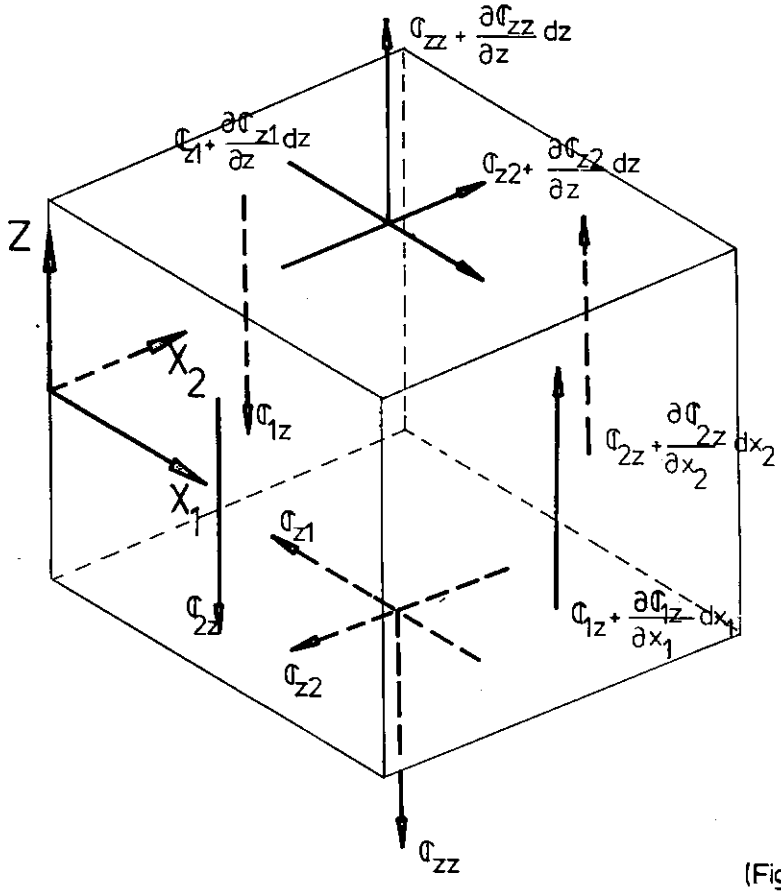
2.2 - TENSÕES E DEFORMAÇÕES DO NÚCLEO

Para a dedução das equações de equilíbrio das tensões, serão consideradas as seguintes hipóteses além das normalmente utilizadas na teoria da elasticidade clássica.

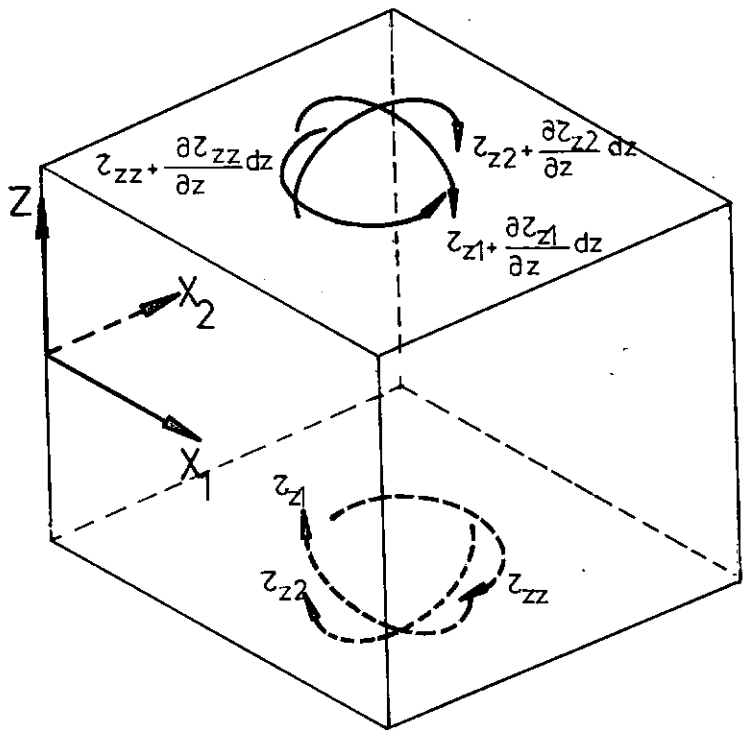
a) O núcleo terá capacidade de absorver tensões normais e cisalhantes transversais σ_{1z} , σ_{2z} , σ_{zz}, e ainda as tensões cisalhantes paralelas às faces, σ_{z1} e σ_{z2} . Nenhuma outra tensão será levada em consideração, pois seus efeitos serão desprezíveis.

b) O núcleo terá capacidade de absorver tensões-momento τ_{zz} , τ_{z1} , τ_{z2} que atuam ao longo da sua espessura. As demais tensões-momento não serão consideradas.

Com as hipóteses feitas acima, e supondo nulas as forças de massa e os momentos de massa, poderão ser escritas as equações de equilíbrio de um elemento do núcleo do sandwich (Figura 3).



(Figura 3A)



(Figura 3B)

Pelo equilíbrio de momentos:

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \qquad (2.6a)$$

$$\frac{\partial \tau_{z1}}{\partial z} + \sigma_{z1} - \sigma_{1z} = 0 \qquad (2.6b)$$

$$\frac{\partial \tau_{z2}}{\partial z} + \sigma_{z2} - \sigma_{2z} = 0 \qquad (2.6c)$$

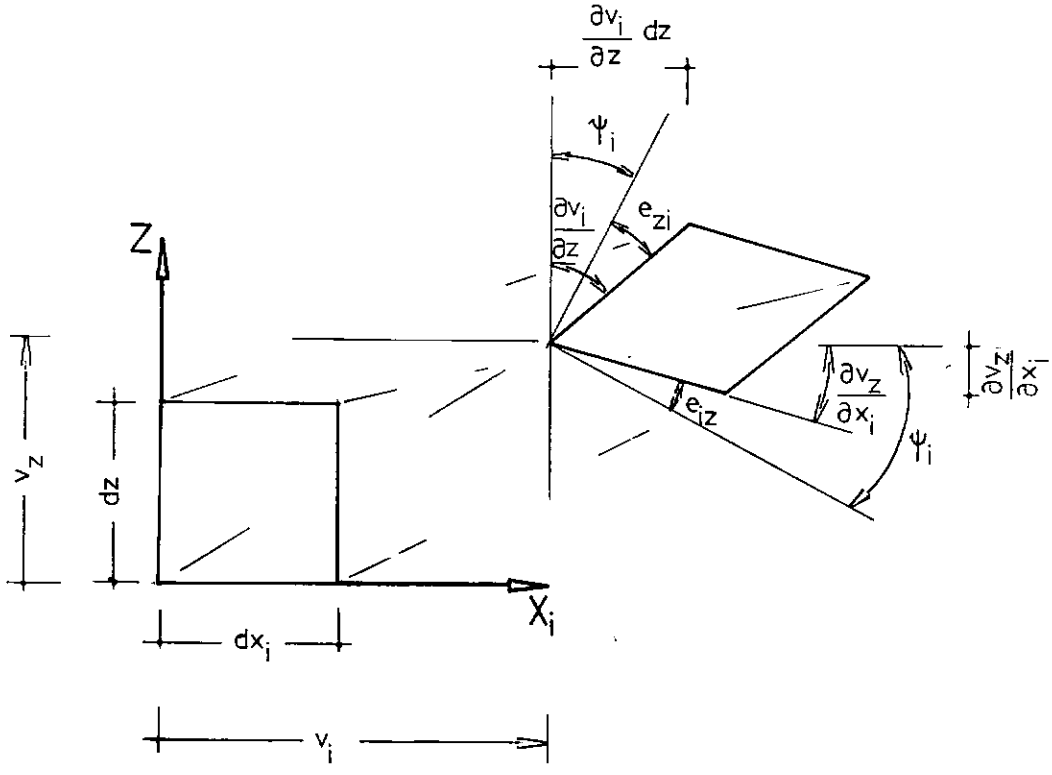
Pelo equilíbrio de forças:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{1z}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2z}}{\partial x_2} = 0 \qquad (2.7a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} = 0 \qquad (2.7b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{z2}}{\partial z} = 0 \qquad (2.7c)$$

As componentes da deformação da superfície média do elemento infinitesimal do núcleo serão, de acordo com a Figura 4,



(Figura 4)

$$e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2.8a}$$

$$e_{zi} = \frac{\partial v_i}{\partial z} - \psi_i \tag{2.8b}$$

$$e_{iz} = \frac{\partial v_z}{\partial x_i} + \psi_i \tag{2.8c}$$

para $i = 1, 2$. Designando por k_{ij} a variação da rotação na direção transversal, tem-se:

$$k_{zz} = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \tag{2.9a}$$

$$k_{zi} = \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \tag{2.9b}$$

2.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO NÚCLEO

As equações de equilíbrio e as relações deslocamentos-deformações serão complementadas por um sistema de relações, que expressam as propriedades elásticas do meio, sob a forma:

$$e_{ij} = \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.10a}$$

$$k_{ij} = \frac{\partial B}{\partial \tau_{ij}} \tag{2.10b}$$

onde B é a densidade de energia complementar, para o modelo físico adotado, dada pela forma[14]:

$$B = \frac{\sigma_{zz}^2}{2E_z} + \frac{\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2}{4G} + \frac{\sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2}{4G^*} + \frac{\tau_{zz}^2}{2c^2\Lambda} + \frac{\tau_{z1}^2 + \tau_{z2}^2}{2c^2\Gamma} \tag{2.11}$$

Logo, com a fórmula (2.11) em (2.10), poderão ser escritas as equações constitutivas do núcleo:

$$\sigma_{zz} = E_z\, e_{zz} \tag{2.12a}$$

$$\sigma_{iz} = 2G\, e_{iz} \tag{2.12b}$$

$$\sigma_{zi} = 2G^*\, e_{zi} \tag{2.12c}$$

$$\tau_{zz} = c^2\Lambda\, k_{zz} \tag{2.13a}$$

$$\tau_{zi} = c^2\Gamma\, k_{zi} \tag{2.13b}$$

onde E_z é o módulo de elasticidade na direção z, G e G^* são os módulos de elasticidade transversal associados aos planos $z\,x_i$ e $x_i\,z$ respectivamente. G e G^* serão diferentes, pois a introdução da barra conectora no elemento do núcleo causará um aumento do módulo de elasticidade transversal, na direção longitudinal da placa. Este aumento será calculado posteriormente. Os coeficientes Γ e Λ serão respectivamente a rigidez à flexão e a rigidez à torção das barras conectoras, que para simplificação, serão supostos independentes de z. Γ e Λ serão calculados adiante.

2.4 - DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES DAS TENSÕES, DEFORMAÇÕES E DESLOCAMENTOS NO NÚCLEO

Pela condição de que a espessura do núcleo permanecerá constante, após a deformação, ter-se-á e_{zz} nulo. Evidentemente, as equações (2.6a), (2.7b,c) e (2.8a) poderão ser expressas da forma:

$$\sigma_{zi} = \sigma_i \tag{2.14a}$$

$$\tau_{zz} = \tau \tag{2.14b}$$

$$v_z = w \tag{2.14c}$$

onde σ_i, τ e w são funções exclusivamente de x_1 e x_2.

Levando (2.9a) e (2.14a) em (2.13a), e integrando em relação a z, obtêm-se:

$$\psi_z = \eta + \frac{\tau}{c^2 \Lambda}\, z \tag{2.15}$$

onde η é uma função adicional de integração em x_1 e x_2.

Poderão ser escritas as equações diferenciais, para a determinação da dependência em z das rotações ψ_i e, posteriormente, para os deslocamentos V_i ($i = 1, 2$), utilizando as equações (2.6b, c), (2.12b,c), (2.8) e (2.14a,c), ficando assim, com o aspecto seguinte:

$$c^2\Gamma \frac{\partial^2\psi_i}{\partial z^2} - 2G\,\psi_i = 2G \frac{\partial w}{\partial x_i} - \sigma_i \qquad (2.16)$$

$$2G^* \frac{\partial v_i}{\partial z} = 2G^*\,\psi_i + \sigma_i \qquad (2.17)$$

Integrando estas equações diferenciais obtém-se

$$\psi_i = -\frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\sigma_i}{2G} + A_i \cosh \mu \frac{z}{c} + B_i \operatorname{senh} \mu \frac{z}{c} \qquad (2.18a)$$

$$v_i = V_i - z \frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \frac{\sigma_i}{2} z + \frac{c}{\mu} \left(A_i \operatorname{senh} \mu \frac{z}{c} + B_i \cosh \mu \frac{z}{c}\right) \qquad (2.18b)$$

onde

$$\mu^2 = \frac{2G}{\Gamma} \qquad (2.19)$$

e A_i, B_i e V_i, para $i = 1, 2$, são funções de integração.

Com as equações (2.18), poderão ser achadas as expressões das tensões e das tensões-momento. Com (2.9b) em (2.13b), vem:

$$\tau_{zi} = c^2 \Gamma \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \tag{2.20}$$

E com (2.18a),

$$\tau_{zi} = c\mu\Gamma \left(A_i \operatorname{senh} \mu \frac{z}{c} + B_i \cosh \mu \frac{z}{c}\right) \tag{2.21}$$

Tem-se ainda que de (2.6b,c) e (2.14a):

$$\sigma_{iz} = \sigma_i + 2G \left(A_i \cosh \mu \frac{z}{c} + B_i \operatorname{senh} \mu \frac{z}{c}\right) \tag{2.22}$$

Com (2.22) em (2.7a) e posteriormente em (2.21)

$$\frac{\partial \tau_{zi}}{\partial z} = 2G \left(A_i \cosh \mu \frac{z}{c} + B_i \operatorname{senh} \mu \frac{z}{c}\right) \tag{2.23}$$

mas, com (2.22)

$$\sigma_{iz} = \sigma_i + \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial z} \tag{2.24}$$

Substituindo em (2.7a)

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \tau_{zi}}{\partial x_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{z2}}{\partial x_2 \partial z} = 0 \tag{2.25}$$

e, integrando em relação a z obtém-se

$$\sigma_{zz} = \sigma_o - \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2}\right) z - \left(\frac{\partial \tau_{z1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{z2}}{\partial x_2}\right) \tag{2.26}$$

onde σ_o é uma função de x_1 e x_2.

As expressões (2.21), (2.22) e (2.26) como estão,

permitem o estudo de flexão em placas de faces desiguais e com núcleo anisótropo. Este estudo será restrito a placas com faces iguais e, núcleo isótropo, onde, devido à flexão, ter-se-á para as tensões cisalhantes funções pares em z e para σ_{zz} funções ímpares. A hipótese acima será satisfeita quando

$$B_i = 0 \tag{2.27a}$$

$$\sigma_o = 0 \tag{2.27b}$$

Devido à simetria, ψ_z e v_i, deverão ser funções ímpares em z, logo:

$$\eta = 0 \tag{2.28a}$$

$$V_i = 0 \tag{2.28b}$$

Então, as expressões para o núcleo da placa, se reduzirão a:

$$\psi_z = \frac{\tau}{c^2 \Lambda} z \tag{2.29}$$

$$\psi_i = - \frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\sigma_i}{2G} + \frac{\tau_i \cosh \mu \frac{z}{c}}{c\mu \Gamma \operatorname{senh} \mu} \tag{2.30}$$

$$v_i = - z \frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \frac{\sigma_i}{2} z + \frac{\tau_i \operatorname{senh} \mu \frac{z}{c}}{2G \operatorname{senh} \mu} \tag{2.31}$$

$$\tau_{zz} = \tau \tag{2.32}$$

$$\tau_{zi} = \tau_i \frac{\operatorname{senh} \mu \frac{z}{c}}{\operatorname{senh} \mu} \tag{2.33}$$

$$\sigma_{zi} = \sigma_i \tag{2.34}$$

$$\sigma_{iz} = \sigma_i + \frac{\tau_i \mu \cosh \mu \frac{z}{c}}{\operatorname{senh} \mu} \tag{2.35}$$

$$\sigma_{zz} = - \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2}\right) z - \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2}\right) \frac{\operatorname{senh} \mu \frac{z}{c}}{\operatorname{senh} \mu} \tag{2.36}$$

onde

$$\tau_i = c\mu \Gamma A_i \operatorname{senh} \mu \tag{2.37}$$

2.5 - DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES DAS TENSÕES, DEFORMAÇÕES E DESLOCAMENTOS DAS FACES

Supondo que as faces se comportem segundo a teoria de membrana, podemos desprezar sua rigidez à flexão, estando portanto as mesmas em estado plano de tensões.

As equações de equilíbrio das faces, serão mostradas na Figura 5.

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} + p_1 = 0 \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} + p_2 = 0 \tag{2.39}$$

$$S_{12} - S_{21} - q = 0 \tag{2.40}$$

onde S_{ij} são as tensões nas faces e p_i e q (componentes das ações do núcleo sobre as faces) serão expressos em termos das tensões do núcleo na superfície de contato, deste com as faces.

As relações constitutivas e as relações deformações-deslocamentos, para as faces serão as do estado plano de tensão e deformação para um material isotrópico[2] :

$$S_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \qquad (2.41a)$$

$$S_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \qquad (2.41b)$$

$$S_{12} + S_{21} = \frac{E}{1 + \nu} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) \qquad (2.41c)$$

e ainda,

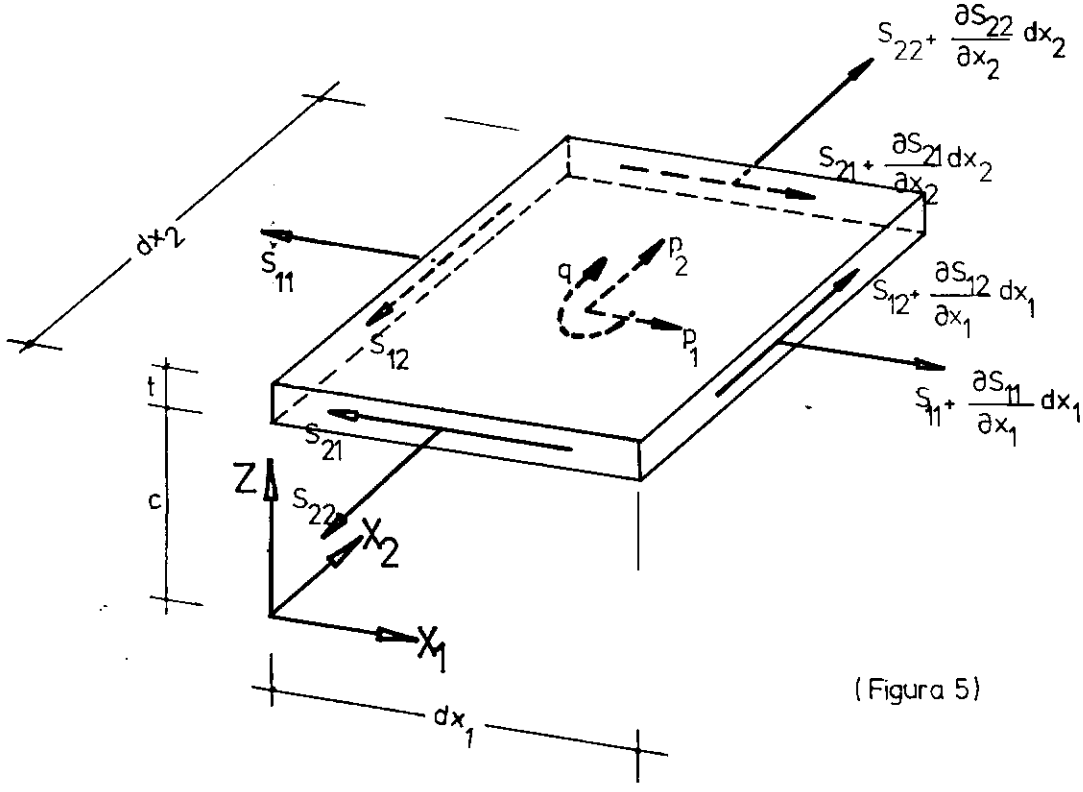
$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (2.42a)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad (2.42b)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \qquad (2.42c)$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \qquad (2.42d)$$

onde u_i são as componentes dos deslocamentos da placa segundo os eixos coordenados.



(Figura 5)

Chamando de ω , a rotação relativa dos elementos correspondentes das faces superior e inferior, vem:

$$\omega = \frac{1}{2} (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) \qquad (2.43)$$

2.6 - TRANSIÇÃO DO NÚCLEO PARA AS FACES

Admitindo que deva existir a continuidade dos deslocamentos paralelos às faces e da rotação da normal à superfície média da placa, poderá ser afirmado que as deformações do núcleo em $z = \pm c$ são iguais às deformações das faces, ou seja,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \ (\pm c) \qquad (2.44)$$

Devido à simetria, só será considerado $z = + c$; assim:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \ (c) = - c \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} \qquad (2.45a)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 \ (c) = - c \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} \qquad (2.45b)$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \ (c) = - c \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \qquad (2.45c)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \ (c) = - c \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \qquad (2.45d)$$

Existirá mais uma relação, tirada de (2.43) com (2.29), fazendo $\omega = \psi_z \ (c)$. Logo,

$$\frac{\tau}{c\Lambda} = \frac{c}{4} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*}\right) \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{4G} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2}\right) \qquad (2.46)$$

Para as tensões, será necessário considerar o equilíbrio total da placa, pois, as faces não absorvem as tensões-momento τ_{zi} em $z = \pm c$. Portanto o equilíbrio será escrito sob a forma:

$$t\,(2c + t)\,\left(\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}\right) - \int_{-c}^{c} \sigma_{1z}\, dz = 0 \qquad (2.47a)$$

$$t\,(2c + t)\,\left(\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2}\right) - \int_{-c}^{c} \sigma_{2z}\, dz = 0 \qquad (2.47b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\int_{-c}^{c} \sigma_{1z}\, dz\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\int_{-c}^{c} \sigma_{2z}\, dz\right) + p = 0 \qquad (2.47c)$$

Sabe-se ainda que as faces irão absorver a tensão momento τ_{zz} em $z = \pm c$, através da diferença entre as tensões S_{12} e S_{21}:

$$t\,(S_{12} - S_{21}) = \tau_{zz}(c) = \tau \qquad (2.48)$$

Até aqui, nada foi dito a respeito da forma de ligação das barras conectoras com as faces. Supondo que esta ligação seja rígida, ou seja, as extremidades das barras sejam engastadas nas faces, poderá ser afirmado que o ângulo entre o eixo das barras conectoras e a normal as faces, permanecerá constante após a deformação. Conseqüentemente:

$$\psi_i\,(c) = -\frac{\partial w}{\partial x_i} \qquad (2.49)$$

ou seja, pela equação (2.8c),

$$e_{iz}(c) = 0 \qquad (2.50)$$

Logo,

$$\sigma_{iz}\ (c) = 0 \tag{2.51}$$

Levando a condição acima, na equação (2.35) ter-se-á uma relação entre σ_i e τ_i, do tipo:

$$\tau_i = - \frac{c\ tg\ h\ \mu}{\mu}\ \sigma_i \tag{2.52}$$

III - EXPRESSÕES DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

As resultantes das tensões, ou esforços solicitantes por unidade de comprimento, são obtidas por integração das expressões das tensões ao longo da espessura da placa. Para os esforços cisalhantes obtém-se:

$$Q_i = \int_{-c}^{c} \sigma_{iz}\, dz = \int_{-c}^{c} \left(\sigma_i + \frac{\tau_i\ \mu\ \cosh\ \mu\ \frac{z}{c}}{c\ \operatorname{senh}\ \mu}\right) dz \qquad (3.1)$$

logo:

$$Q_i = 2\ (c\ \sigma_i + \tau_i) \qquad (3.2)$$

com as expressões (2.52) em (3.2)

$$Q_i = 2\ \left(1 - \frac{\mu}{tg\ h\ \mu}\right)\ \tau_i \qquad (3.3)$$

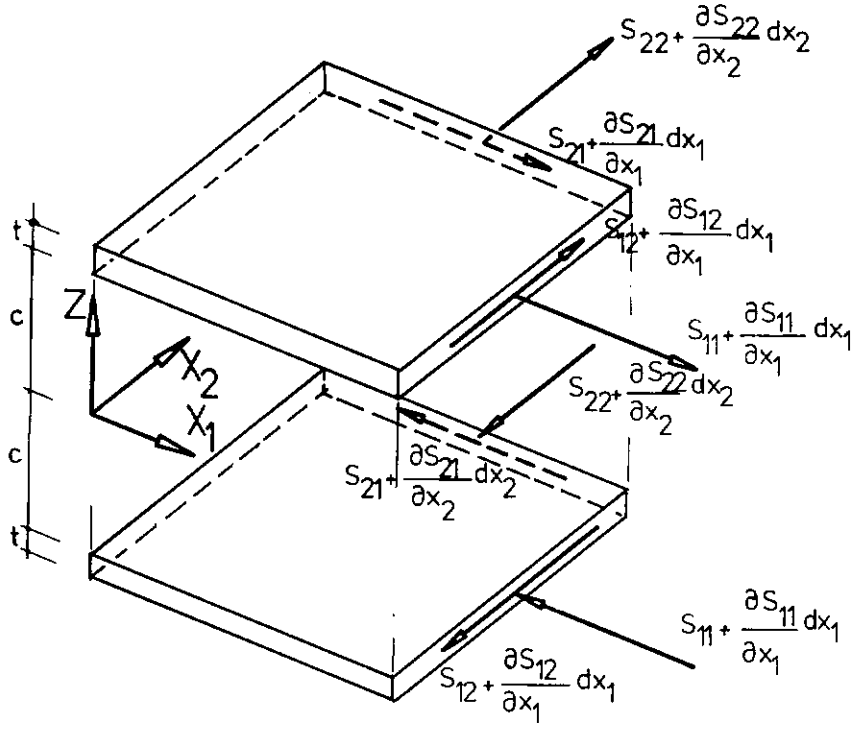
Para o cálculo dos momentos, será utilizada a Figura 6.

Desprezando os termos de ordem superior, obtém-se

$$M_{11} = (2\ c + t)\ t\ S_{11} \qquad (3.4a)$$

$$M_{22} = (2\ c + t)\ t\ S_{22} \qquad (3.4b)$$

Substituindo, nas expressões acima, as equações (II.41), e desprezando-se t em presença de $2c$, pois $t << 2c$,



(Figura 6)

$$M_{11} = \frac{2\ c\ t\ E}{1+\nu^2}\ (\varepsilon_{11} + \nu\ \varepsilon_{22}) \qquad (3.5a)$$

$$M_{22} = \frac{2\ c\ t\ E}{1+\nu^2}\ (\nu\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \qquad (3.5b)$$

Com as expressões (2.45a, b), tem-se:

$$M_{11} = \frac{2\ c^2 t\ E}{1+\nu^2}\ \left\{\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2G}\left(1+\frac{G}{G^*}\right)\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2cG}\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1}\right] + \right.$$

$$\left. + \nu\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2G}\left(1+\frac{G}{G^*}\right)\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2c\ G}\frac{\partial \tau_2}{\partial x_2}\right]\right\} \qquad (3.6a)$$

$$M_{22} = \frac{2\ c\ t\ E}{1 + \nu^2} \{\nu \left[- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2c\ G} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} \right] +$$

$$+ \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2c\ G} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \right] \} \qquad (3.6b)$$

Designando por D a rigidez à flexão da placa, ter-se-á

$$D = \frac{2\ c^2 t\ E}{1 + \nu^2}$$

$$M_{11} = D \{ \left[- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2c\ G} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} \right] +$$

$$+ \nu \left[- \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2c\ G} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \right] \} \qquad (3.7a)$$

$$M_{22} = D \{ \nu \left[- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2c\ G} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} \right] +$$

$$+ \left[- \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*}\right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2c\ G} \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \right] \} \qquad (3.7b)$$

Para os momentos M_{12} e M_{21}, obtêm-se as expressões:

$$M_{12} = (2\ c + t)\ t\ S_{12} \qquad (3.8a)$$

$$M_{21} = (2\ c + t)\ t\ S_{21} \qquad (3.8b)$$

ou

$$S_{12} = \frac{M_{12}}{(2c + t)\ t} \simeq \frac{M_{12}}{2ct} \qquad (3.9a)$$

$$S_{21} = \frac{M_{21}}{(2c + t)\ t} \simeq \frac{M_{21}}{2ct} \tag{3.9b}$$

Com (3.9a, b) e (2.45b, c) em (2.41c), tem-se:

$$M_{12} + M_{21} = \frac{2\ c^2 t\ E}{1 + \nu} \left[- 2\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\ \partial x_2} + (1 + \frac{G}{G^*})\ \frac{\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1}}{2G} + \frac{\frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}}{2cG} \right] \tag{3.10}$$

ou

$$M_{12} + M_{21} = (1 - \nu)\ D \left[- 2\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\ \partial x_2} + (1 + \frac{G}{G^*})\ \frac{\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1}}{2G} + \frac{\frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}}{2cG} \right] \tag{3.11}$$

Obtém-se a última expressão dos esforços, levando (2.46) em (2.48):

$$t\ (S_{12} - S_{21}) = c\Lambda \left[\frac{c}{4G}\ (1 + \frac{G}{G^*})\ (\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2}) + \frac{1}{4G}\ (\frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2}) \right] \tag{3.12}$$

ou

$$M_{12} - M_{21} = c^3 \Lambda \left[\frac{1}{2G}\ (1 + \frac{G}{G^*})\ (\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2}) + \frac{1}{2cG}\ (\frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2}) \right] \tag{3.13}$$

Pode-se ainda, escrever as expressões dos momentos em função das deformações. Primeiramente as expressões (3.7), (3.11) e (3.13), poderão ser escritas em termos de Q_i. Com as expressões (2.52) e (3.2) obtém-se que:

$$(1 + \frac{G}{G^*}) \frac{\sigma_i}{G} + \frac{\tau_i}{cG} = \frac{\alpha\ Q_i}{cG} \tag{3.14}$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\frac{G}{G^*}}{1 - \frac{tgh\ \mu}{\mu}}\right) \tag{3.15}$$

Descrevendo (3.7), (3.11) e (3.13)

$$M_{11} = - D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\alpha}{2cG} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\alpha}{2cG} \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\right) \right] \tag{3.16a}$$

$$M_{22} = - D \left[\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\alpha}{2cG} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\alpha}{2cG} \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\right) \right] \tag{3.16b}$$

$$M_{12} + M_{21} = - (1 - \nu) D \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\ \partial x_2} - \frac{\alpha}{2cG} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right) \right] \tag{3.16c}$$

$$M_{12} - M_{21} = - c^3 \Lambda \left[\frac{\alpha}{2cG} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right) \right] \tag{3.16d}$$

e ainda, fazendo

$$Q_i = C\ \gamma_i \tag{3.17}$$

onde

$$C = \frac{2cG}{\alpha} = 4cG \frac{1 - \frac{tgh\ \mu}{\mu}}{1 + \frac{G}{G^*} - \frac{tgh\ \mu}{\mu}} \tag{3.18}$$

Logo,

$$M_{11} = - D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) \right] \qquad (3.19a)$$

$$M_{22} = - D \left[\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) \right] \qquad (3.19b)$$

$$M_{12} + M_{21} = - \left[1 - \nu) \; D \; (2 \; \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \; \partial x_2} - \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) \right] \qquad (3.19c)$$

$$M_{12} - M_{21} = - c^3 \Lambda \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) \qquad (3.19d)$$

Utilizando as expressões (2.3), (2.4) e (2.5), tem-se:

$$M_{11} = D \left(\chi_{11} + \nu \; \chi_{22} \right) \qquad (3.20a)$$

$$M_{22} = D \left(\nu \; \chi_{11} + \chi_{22} \right) \qquad (3.20b)$$

$$M_{12} + M_{21} = (1 - \nu) \; D \left(\chi_{12} + \chi_{21} \right) \qquad (3.20c)$$

$$M_{12} - M_{21} = c^3 \Lambda \left(\chi_{12} - \chi_{21} \right) \qquad (3.20d)$$

Pode-se ainda, separar as expressões para M_{12} e M_{21}, ficando

$$M_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \left[(1 - \nu) \; D + c^3 \Lambda \right] \chi_{12} + \left[(1 - \nu) \; D - c^3 \Lambda \right] \chi_{21} \right\} \qquad (3.20e)$$

$$M_{21} = \frac{1}{2} \left\{ \left[(1 - \nu)\ D - c^3 \Lambda \right] \chi_{12} + \left[(1 - \nu)\ D + c^3 \Lambda \right] \chi_{21} \right\} \tag{3.20f}$$

ou

$$M_{12} = - (1 - \nu)\ D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\ \partial x_2} + \frac{D\ (1 - \nu) + c^3 \Lambda}{2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{D\ (1 - \nu) - c^3 \Lambda}{2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \tag{3.21a}$$

$$M_{21} = - (1 - \nu)\ D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\ \partial x_2} + \frac{D\ (1 - \nu) + c^3 \Lambda}{2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{D\ (1 - \nu) - c^3 \Lambda}{2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \tag{3.21b}$$

Verifica-se que, para que (3.20) e (3.21) se tornem as expressões da teoria usual de placas sandwich basta que se faça $\Lambda = 0$, abandonando-se, assim, o efeito das barras conectoras.

IV - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

As equações diferenciais serão determinadas a partir da combinação das expressões dos esforços com as equações de equilíbrio, expressas então, como função do deslocamento w e das distorções γ_i . Nessas equações, serão incluídos os efeitos das cargas N_{ij} que atuam no plano da placa e a força de inércia transversal, parcelas importantes no problema a ser estudado. Assim, as equações (2.1) serão reescritas sob a forma[2] :

Equilíbrio de Forças Paralelas ao Plano da Placa

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} = 0 \qquad (4.1a)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = 0 \qquad (4.1b)$$

Equilíbrio de Forças Transversais

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\,N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + p - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Nesta equação, h representa a altura total da placa e ρ a massa específica da placa sandwich isótropa, a qual será suposta constante para toda a placa.

Equilíbrio de Momentos

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = 0 \qquad (4.1d)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0 \qquad (4.1e)$$

Com (3.17) em (4.1c), obtém-se a primeira equação de movimento,

$$C\left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2}\right] + N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\,N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + p - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.2)$$

A segunda equação será obtida substituindo-se as expressões (3.17), (3.19a) e (3.21b) em (4.1d).

$$-D\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\,\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\right] - (1-\nu)D\frac{\partial^3 w}{x_1\,\partial x_2^2} +$$

$$+\frac{D(1-\nu) + c^3\Lambda}{2}\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} + \frac{D(1-\nu) - c^3\Lambda}{2}\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1\,\partial x_2} - C\,\gamma_1 = 0 \qquad (4.3a)$$

ou ainda:

$$-\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1\,\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{C^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} - \frac{C}{D}\gamma_1 +$$

$$+\left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0 \qquad (4.3b)$$

Analogamente, tem-se a terceira equação diferencial

$$-\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}\right) + \left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} +$$

$$+\left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} - \frac{C}{D}\gamma_2 = 0 \qquad (4.4)$$

Pode-se reescrever a equação (4.2), derivando as equações (4.3b) e (4.4) e substituindo as expressões para $\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}$ em (4.2), obtendo-se:

$$- D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \left(\frac{\partial^3 \gamma_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 \gamma_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \gamma_2}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 \gamma_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \right] +$$

$$+ N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.5)$$

Com $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, as equações diferenciais que regem o problema de vibrações livres da placa, poderão ser escritas sob a forma:

$$D \left(\nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla \gamma_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla \gamma_2 \right) - N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2 N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} -$$

$$N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - p + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \nabla w - \left[\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1 - \nu}{2} + \frac{c^3 \Lambda}{2D} \right) \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} - \frac{C}{D} \gamma_1 \right] - \left[\left(\frac{1 + \nu}{2} - \frac{c^3 \Lambda}{2D} \right) \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0 \qquad (4.6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \nabla w - \left[\left(\frac{1 + \nu}{2} - \frac{c^3 \Lambda}{2D} \right) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial x_2} \right] - \left[\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} + \left(\frac{1 - \nu}{2} + \frac{c^3 \Lambda}{2D} \right) \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} - \frac{C}{D} \gamma_2 \right] = 0 \qquad (4.6c)$$

Para achar as soluções das equações diferenciais (4.6) serão escolhidas funções que sejam representativas do comportamento das variáveis w , γ_1 e γ_2 , durante a deformação. Isto conduziria a trabalhar com um número elevado de parâmetros[1], o que seria indesejável. Para evitar este fato, serão introduzidos dois parâmetros , que expressarão γ_1 e γ_2 como função de w . Supondo que as rotações ϕ_i das normais aos planos $x_i z$, sejam expressas por (vide item 2.1);

$$\phi_i = \beta_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \tag{4.7}$$

os parâmetros β_i serão constantes que assumem valores entre -1 e 0 . O valor $\beta_i = 0$, corresponderá ao caso em que a rigidez ao cisalhamento será nula (hipótese não estudada aqui), ou seja, as faces se deformarão como placas independentes, tendo em comum somente a flecha. Para o valor $\beta_i = -1$, ocorrerá que a rigidez ao cisalhamento será infinita, não havendo então a distorção do núcleo[1].

Das fórmulas (2.3a, b) obtém-se:

$$\gamma_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} + \beta_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \tag{4.8a}$$

ou

$$\gamma_i = (1 + \beta_i) \frac{\partial w}{\partial x_i} \tag{4.8b}$$

Substituindo, as expressões (4.8b) nas equações diferenciais (4.6), tem-se:

$$D\left[\nabla^2 w - (1+\beta_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\nabla w - (1+\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\nabla w\right] - N_{11}\frac{\partial^2 w}{x_1^2} -$$

$$2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2} - N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - p + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = 0 \qquad (4.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla w - (1+\beta_1)\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\,\partial x_2^2} - \frac{C}{D}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right] -$$

$$- (1+\beta_2)\left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\,\partial x_2^2}\Bigg] = 0 \qquad (4.9b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla w - (1+\beta_1)\left[\left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2}\right] - (1+\beta_2)\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2} - \frac{C}{D}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] = 0 \qquad (4.9c)$$

Simplificando as equações (4.9), obtém-se

$$D\left[\beta_1\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}\right) + \beta_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2}\right)\right] +$$

$$+ N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + p - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(1+\beta_1)\frac{C}{D}w - \beta_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \left[\beta_1\left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{c^3\Lambda}{2D}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. \beta_2\left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\} = 0 \qquad (4.10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{(1+\beta_2)\frac{C}{D}w - \beta_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left[\beta_1\left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. \beta_2\left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right\}\right] = 0 \qquad (4.10c)$$

As expressões dos esforços solicitantes poderão também ser reescritas, em acordo com as simplificações feitas, ficando da forma seguinte:

$$M_{11} = D \left(\beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \beta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \tag{4.11a}$$

$$M_{22} = D \left(\nu \beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \tag{4.11b}$$

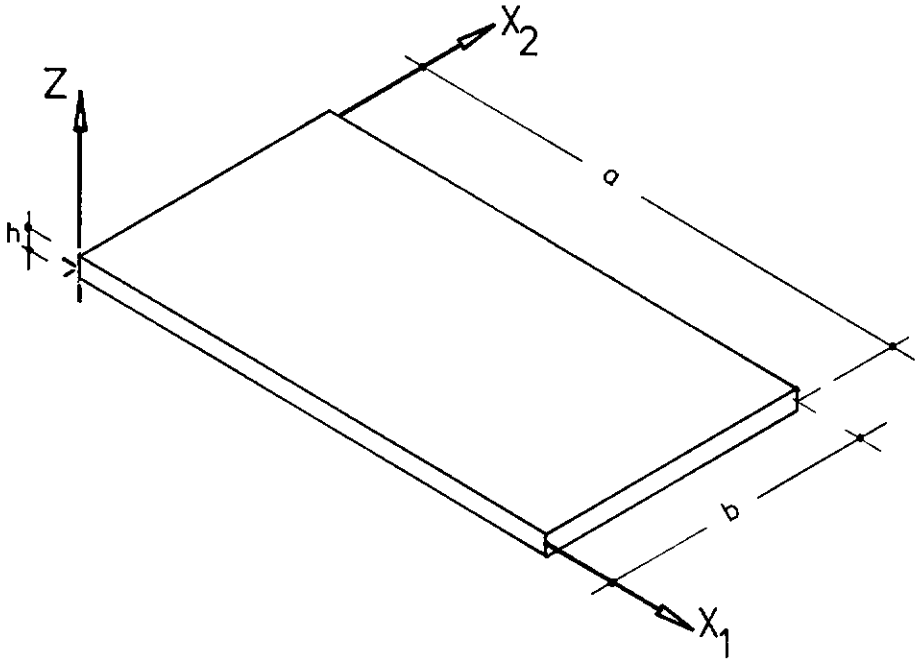
$$M_{12} = \left[(\beta_1 + \beta_2) \frac{D (1 - \nu)}{2} - (\beta_1 - \beta_2) \frac{c^3 \Lambda}{2}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{4.11c}$$

$$M_{21} = \left[(\beta_2 + \beta_1) \frac{D (1 - \nu)}{2} - (\beta_2 - \beta_1) \frac{c^3 \Lambda}{2}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$Q_1 = C (1 + \beta_1) \frac{\partial w}{\partial x_1} \tag{4.12a}$$

$$Q_2 = C (1 + \beta_2) \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{4.12b}$$

V - SOLUÇÃO PARA UMA PLACA RETANGULAR SIMPLESMENTE APOIADA



(Figura 7)

Supondo que, a placa tenha os quatro lados simplesmente apoiados, as condições de contorno serão, as seguintes:

Direção x_1:

$$w\Big|_{x_1=0} = w\Big|_{x_1=a} = 0$$

$$M_{11}\Big|_{x_1=0} = M_{11}\Big|_{x_1=a} = 0$$

Direção x_2

$$w\Big|_{x_2=0} = w\Big|_{x_2=b} = 0$$

$$M_{22}\Big|_{x_2=0} = M_{22}\Big|_{x_2=b} = 0$$

É necessário escrever ainda, outras condições de contorno, como, por exemplo, supondo que nos apoios exista rigidez nos planos zx_i , de tal forma que, não haja distorção nestes pontos[1]. Nesse caso:

$$\gamma_2\Big|_{x_1=0} = \gamma_2\Big|_{x_1=a} = 0$$

$$\gamma_1\Big|_{x_2=0} \quad \gamma_1\Big|_{x_2=b} = 0$$

Para uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados, a expressão para a flecha, admitindo que a placa esteja em movimento vibratório livre será a seguinte :

$$w = w_o\, e^{ift}\, \text{sen}\left(\frac{m\,\pi\,x_1}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\,\pi\,x_2}{b}\right) \qquad (5.1)$$

onde f é a frequência de vibração e w_o uma constante. Para que a solução acima satisfaça ao problema, ela deverá atender as equações (4.10) e as condições de contorno. Assim, para a direção x_1 tem-se:

$$w\Big|_{x_1=0} = w_o\, e^{ift}\ \text{sen}\ (0)\ \text{sen}\ \left(\frac{n\,\pi\,x_2}{b}\right) = 0$$

$$w\Big|_{x_1=a} = w_o\, e^{ift}\ \text{sen}\ (m\,\pi)\ \text{sen}\ \left(\frac{n\,\pi\,x_2}{b}\right) = 0$$

$$M_{11}\Big|_{x_1=0} = w_o\, e^{ift}\ D\ \left(\beta_1\ \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \nu\ \beta_2\ \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) \text{sen}\ (0)\ \text{sen}\ \left(\frac{n\,\pi\,x_2}{b}\right) = 0$$

$$M_{11}\Big|_{x_1=0} = w_o\, e^{ift}\ D\ \left(\beta_1\ \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \nu\ \beta_2\ \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) \text{sen}\ (m\,\pi)\ \text{sen}\ \left(\frac{n\,\pi\,x_2}{b}\right) = 0$$

$$\gamma_2\Big|_{x_1=0} = w_o\, e^{ift}\ C\ (1 - \beta_2)\ \frac{m\,\pi}{b}\ \text{sen}\ (0)\ \cos\ \frac{n\,\pi\,x_2}{b} = 0$$

$$\gamma_2\Big|_{x_1=a} = w_o\, e^{ift}\ C\ (1 - \beta_2)\ \frac{m\,\pi}{b}\ \text{sen}\ (m\,\pi)\ \cos\ \frac{n\,\pi\,x_2}{b} = 0$$

Condições análogas, ocorrerão para a direção x_2.

Supondo que sobre a placa sandwich, atuem somente cargas no seu plano $(p = 0)$, as equações diferenciais (4.10) ficarão:

$$D\left[\beta_1\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\ \partial x_2^2}\right) + \beta_2\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\ \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{x_2^4}\right)\right] +$$

$$+ N_{11}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\ N_{12}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\ \partial x_2} + N_{22}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \rho h\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{(1+\beta_1)\,C}{D}\,w-\beta_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\left[\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left(\frac{c^3\Lambda}{D}-\nu\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}=0 \tag{5.2b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{(1+\beta_2)\,C}{D}\,w-\beta_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left[\frac{\beta_2+\beta_1}{2}+\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\left(\frac{c^3\Lambda}{D}-\nu\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right\}=0 \tag{5.2c}$$

Substituindo a expressão (5.1) nas equações diferenciais da placa sandwich (5.2b, c), obtém-se:

$$\left\{(1+\beta_1)\frac{C}{D}\frac{m\pi}{a}+\beta_1\frac{m^3\pi^3}{a^3}+\left[\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\left(\frac{c^3\Lambda}{D}-\nu\right)\right]\frac{m\,n^2\pi^3}{a\,b^2}\right\}$$

$$w_o\,e^{ift}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x_2}{b}=0 \tag{5.3a}$$

$$\left\{(1+\beta_2)\frac{C}{D}\frac{n\pi}{b}+\beta_2\frac{n^3\pi^3}{b}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left(\frac{c^3\Lambda}{D}-\nu\right)\frac{m^2 n\,\pi^3}{a^2 b}\right\}$$

$$w_o\,e^{ift}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{m\pi x_2}{b}=0 \tag{5.3b}$$

Para soluções não triviais,

$$(1+\beta_1)\frac{C}{D}+\beta_1\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\left[\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left(\frac{c^3\Lambda}{D}-\nu\right)\right]\frac{n^2\pi^2}{b^2}=0 \tag{5.4a}$$

$$(1+\beta_2)\frac{C}{D}+\beta_2\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\left[\frac{\beta_2+\beta_1}{2}+\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\left(\frac{c^3\Lambda}{D}-\nu\right)\right]\frac{m^2\pi^2}{a^2}=0 \tag{5.4b}$$

ou ainda, ordenando as expressões acima em termos de β_1 e β_2:

$$\left[\frac{C}{D}+\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\left(\frac{1-\nu}{2}+\frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{m^2\pi^2}{b^2}\right]\beta_1+\left[\left(\frac{1+\nu}{2}-\frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right]\beta_2=-\frac{C}{D} \tag{5.5a}$$

$$\left[\left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right]\beta_1 + \left[\frac{C}{D} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{c^3\Lambda}{2D}\right)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right]\beta_2 = -\frac{C}{D} \tag{5.5b}$$

Resolvendo o sistema de equações (5.5), tem-se:

$$\beta_1 = \beta_2 = -\frac{\frac{C}{D}}{\frac{C}{D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \tag{5.6}$$

Verifica-se então que, para o problema em estudo, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, e portanto a equação diferencial (5.2a) poderá ser rescrita sob a forma

$$\beta\, D\, \nabla^2 w + N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\, N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\, \partial x_2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{5.7}$$

Como será feito adiante um estudo da carga crítica da placa sandwich, será considerado que ela esteja somente sob o efeito de um carregamento normal, contido no plano da placa e constante ao longo dos bordos onde então N_{11} e N_{22} são constantes, e $N_{12} = N_{21} = 0$ como mostra a Figura 8 .

Assim, a equação (5.7) fica:

$$\beta\, D\, \nabla^2 w + N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{5.8}$$

Substituindo a expressão da flecha na equação(5.8)

$$\left[\beta\, D\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2}N_{11} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}N_{22} + \rho h\, f^2\right] \cdot$$

$$\cdot\, w_o\, e^{ift}\, \text{sen}\left(\frac{m\,\pi^2\, x_1}{a^2}\right)\text{sen}\left(\frac{n^2\pi^2\, x_2}{b^2}\right) = 0 \tag{5.9}$$

Para soluções não-triviais, a expressão para as freqüências de vibração fica:

$$f = \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \sqrt{- \beta D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2} N_{11} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} N_{22}} \qquad (5.10)$$

Substituindo a expressão (5.6) em (5.10)

$$f = \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \sqrt{\frac{C \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2}{\frac{C}{D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} N_{11} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} N_{22}} \qquad (5.11)$$

As freqüências de vibração da placa sem carga ($N_{11} = N_{22} = 0$) serão:

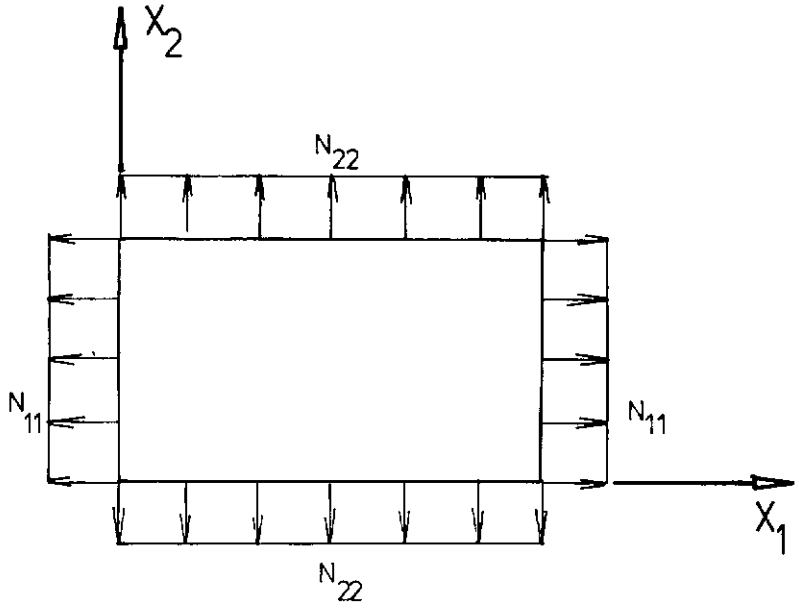
$$f_o = \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \sqrt{\frac{C \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2}{\frac{C}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}} \qquad (5.12)$$

As cargas críticas da placa sandwich serão determinadas considerando-se a freqüência nula, logo

$$N_{11} \frac{m^2\pi^2}{a^2} + N_{22} \frac{n^2\pi^2}{b^2} = - \frac{C \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2}{\frac{C}{D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \qquad (5.13)$$

Para N_{22} constante, e N_{11} de compressão, a carga crítica na direção de x_1 será:

$$(N_{11})_{CRIT} = \frac{a^2}{m^2} \left[\frac{n^2}{b^2} N_{22} + \frac{1}{\pi^2} \frac{C \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2}{\frac{C}{D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \right] \qquad (5.14)$$



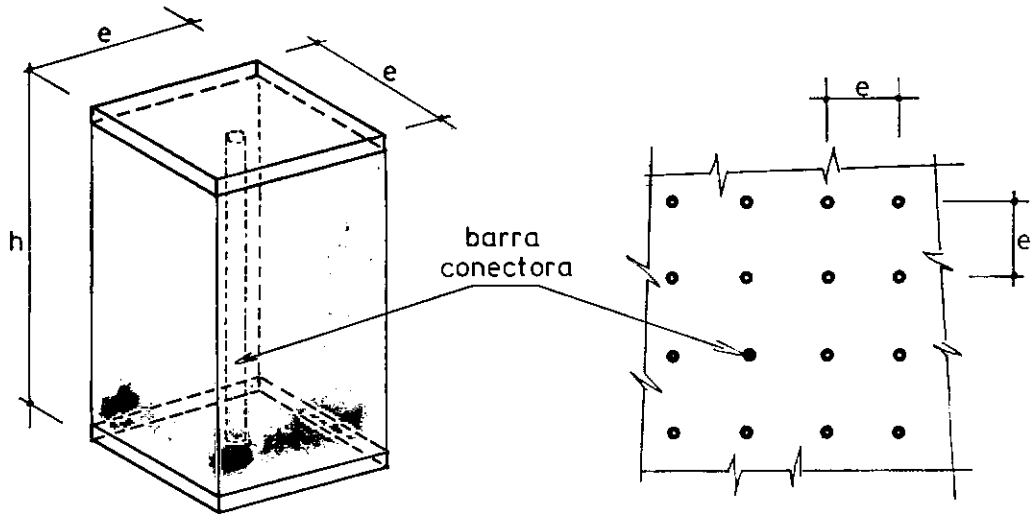
(Figura 8)

VI - GRÁFICOS

Para a elaboração de gráficos representativos dos resultados obtidos, torna-se necessário estabelecer relações entre as grandezas que definem as propriedades das partes constituintes da placa. Com esta finalidade são, a seguir, feitas considerações de natureza aproximada, na ausência de valores determinados experimentalmente.

6.1 - MÓDULO DE ELASTICIDADE AO CISALHAMENTO G*

Tomando-se o elemento da placa no interior do sandwich representado na Fig. 9, poder-se-á dividir o estudo do cisalhamento em duas direções distintas:

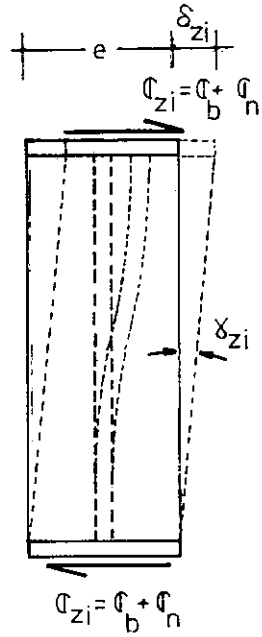


(Figura 9)

Para a deformação ocorrendo somente devida a tensão cisalhante na direção de z, teremos a expressão usual da resistência dos materiais,

$$\sigma_{iz} = G\,\gamma_{iz} \tag{6.1}$$

Admitindo-se agora a deformação por efeito da tensão cisalhante na direção de x_i, o elemento do núcleo (Fig. 9) se deformará como mostra a Fig. 10.



(Figura 10)

A rigidez ao cisalhamento do elemento inclui duas parcelas; a rigidez devida a barra conectora e a rigidez do material do núcleo. Definindo por σ_b a parcela de tensão cisalhante na direção x_i associada à rigidez da barra (Ω) e por σ_n a parcela associada à rigidez do material do núcleo, tem-se:

$$\sigma_{zi} = \sigma_b + \sigma_n \tag{6.2}$$

onde

$$\sigma_n = G\,\gamma_{zi} \tag{6.3a}$$

$$\sigma_b = \Omega\,\gamma_{zi} \tag{6.3b}$$

A constante G é o modulo de elasticidade ao cisalhamento clássica dada pela teoria da elasticidade. A constante Ω será calculada pela resistência dos materiais, supondo o deslocamento horizontal de uma viga bi-engastada, como mostra a Fig. 10, logo:

$$\sigma_b \cdot e \cdot e = \frac{12\,E_b I_b}{h^3}\,\delta_{zi} \tag{6.4}$$

onde E_b é o módulo de Young para o material da barra e I_b é o momento de inércia da seção da barra.

Para $h = 2c$ e $\delta_{zi} = 2c\,\delta_{zi}$ tem-se:

$$\sigma_b = \frac{3E_b I_b}{e^2\,c^2}\,\gamma \tag{6.5}$$

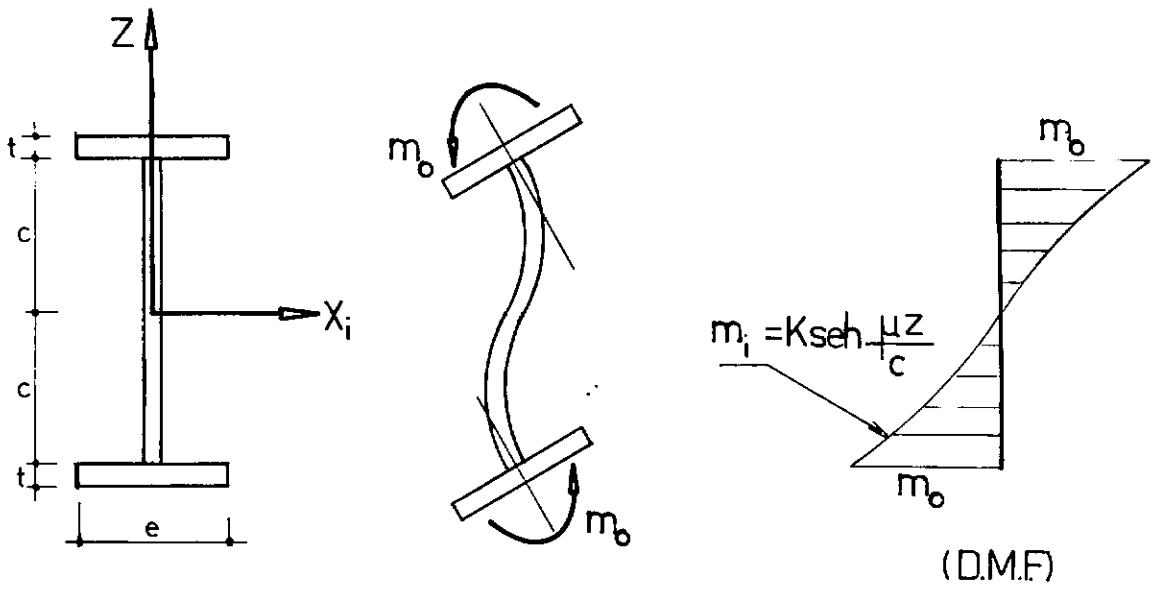
Então G* será

$$G^* = G + \frac{3E_b I_b}{e^2\,c^2} \tag{6.6}$$

6.2 - RIGIDEZ À FLEXÃO Γ

Supondo que devido a deformação da placa sandwich surja um momento fletor aplicado nas extremidades m_o, das barras conectoras e que a distribuição do momento ao longo da barra seja proporcional ao seno-hiperbólico, devido à influência do ma

terial do núcleo, que causa um carregamento proporcional à elastica da barra (vide equação (2.33)), o elemento da barra se deforma como mostra a Fig. 11.



(Figura 11)

A expressão para os momentos fletores será

$$m_i = K \operatorname{senh} \frac{\mu z}{c} \tag{6.7}$$

mas para $z = \pm c$

$$m_i \Big|_{z=\pm c} = m_o \tag{6.8}$$

logo,

$$K = \frac{m_o}{\operatorname{senh} \mu} \tag{6.9}$$

Substituindo (6.9) em (6.7) obtém-se

$$m_i = \frac{m_o}{\operatorname{senh} \mu} \operatorname{senh} \frac{\mu z}{c} \tag{6.10}$$

Pela equação da linha elástica dada pela resistência dos materiais,

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \frac{m_o}{E_b I_b \operatorname{senh} \mu} \operatorname{senh} \frac{\mu z}{c} \tag{6.11}$$

ou

$$v_i = \frac{m_o}{E_b I_b \operatorname{senh} \mu} \left[\frac{c^2}{\mu^2} \operatorname{senh} \frac{\mu z}{c} + C_1 z + C_2 \right] \tag{6.12}$$

Com as condições de contorno

$$v_i \Big|_{z=c} = 0 \tag{6.13}$$

as constantes C_1 e C_2 ficam sendo

$$C_1 = - \frac{c}{\mu^2} \operatorname{senh} \mu \tag{6.14a}$$

$$C_2 = 0 \tag{6.14b}$$

substituindo as constantes acima em (6.12)

$$v_i = \frac{c^2 m_o}{\mu^2 E_b I_b \operatorname{senh} \mu} \operatorname{senh} \frac{\mu z}{c} - \frac{c m_o}{\mu^2 E_b I_b} \cdot z \tag{6.15}$$

Para simplificar, teremos da resistência dos materiais que:

$$\psi_i \sim \frac{\partial v_i}{\partial z} \tag{6.16a}$$

$$k_{zi} \sim \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial z_i^2} \tag{6.16b}$$

Substituindo a expressão (6.16b) na expressão para τ_{zi} , (2.13b)

$$\tau_{zi} = c^2 \Gamma \cdot \frac{m_o}{E_b I_b \operatorname{senh} \mu} \operatorname{senh} \frac{\mu z}{c} \tag{6.17}$$

Sabendo que o momento m_i deverá ser absorvido por τ_{zi} , no elemento de área e^2 , ter-se-á que:

$$\tau_{zi} = \frac{m_i}{e^2} = \frac{m_o}{e^2 \operatorname{senh} \mu} \operatorname{senh} \frac{\mu z}{C} \tag{6.18}$$

Com (6.17) em (6.18), tem-se

$$\Gamma = \frac{E_b I_b}{e^2 c^2} \tag{6.19}$$

Com (6.19) em (6.6) obteremos $G^* = G + 3\,\Gamma$ (6.20)

6.3 - RIGIDEZ À TORÇÃO A

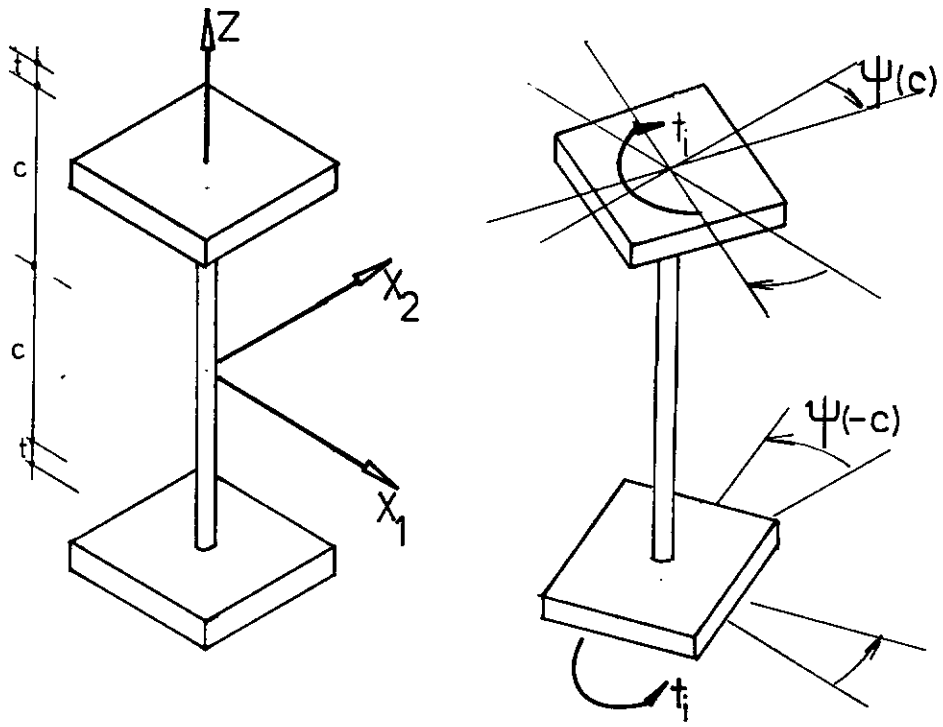
Com um procedimento análogo ao do item 6.2, e sabendo-se da resistência dos materiais, o ângulo de torção ψ_z , na torção pura, é constante, teremos

$$\psi_z = \frac{t_i}{G_b J_p} z \tag{6.21}$$

onde t_i é o momento de torção que surge quando a placa sandwich é deformada e J_p é o momento de inércia polar das barras conec

toras. Como no item anterior, supondo que o momento torsor seja absorvido pela tensão-momento em um elemento de área e^2, ter-se-á

$$\tau_{zz} = \frac{t_i}{e^2} \tag{6.22}$$



(Figura 12)

Substituindo (6.20) em (2.9a) obtém-se

$$k_{zz} = \frac{t_i}{G_b J_p} \tag{6.23}$$

Com (6.22) e (6.21) em (2.13a), teremos

$$\Lambda = \frac{G_b J_p}{e^2 c^2} \tag{6.24}$$

onde G_b é o módulo de elasticidade ao cisalhamento da barra.

6.4 - GRÁFICOS

O primeiro gráfico a ser traçado será para a verificação da variação da rigidez ao esforço cisalhante (vide (3.17)) em função das dimensões das barras conectoras. Transcrevendo a fórmula (3.15), tem-se

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{G}{G^*}}{1 - \frac{\operatorname{tgh}\ \mu}{\mu}}\right) \tag{6.25}$$

Substituindo na fórmula acima os valores de G em (2.19) e de G^* em (6.20) obtém-se

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mu^2\ \Gamma}{2\ (\frac{\Gamma\ \mu^2}{2} + 3\ \Gamma)\ (1 - \frac{\operatorname{tgh}\ \mu}{\mu})}\right] \tag{6.26}$$

ou, simplificando

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mu^2}{(\mu^2 + 6)\ (1 - \frac{\operatorname{tgh}\ \mu}{\mu})}\right] \tag{6.27}$$

onde α é a variação da rigidez ao esforço cisalhante em função de μ.

Para os valores limites de μ, existirão dois casos:

1º CASO: Rigidez à flexão muito grande ($\Gamma >> G$)

$$\lim_{\mu \to 0} \alpha = 0{,}75$$

2º CASO: Sem barras conectoras

$$\lim_{\mu \to \infty} \alpha = 1$$

Para a confecção dos gráficos seguintes, serão feitas algumas simplificações que seguem. Sabendo-se que a carga N_{11} é de compressão e fazendo $a/b = R$, a equação (5.14), poderá ser escrita por:

$$(N_{11})_{CRIT} = \frac{1}{m^2} \left[n^2 R^2 N_{22} + \frac{C (m^2 + n^2 R^2)}{\frac{a^2 C}{\pi^2 D} + m^2 + n^2 R^2} \right] \tag{6.28}$$

Multiplicando por $\frac{a^2}{D\pi^2}$, tem-se

$$\frac{a^2}{\pi^2 D} (N_{11})_{CRIT} = \frac{1}{m^2} \left[n^2 R^2 \frac{a^2 N_{22}}{\pi^2 D} + \frac{\frac{a^2 C}{\pi^2 D} (m^2 + n^2 R^2)^2}{\frac{a^2 C}{\pi^2 D} + m^2 + n^2 R^2} \right] \tag{6.29}$$

mas, com a expressão (3.18) em (6.29),

$$\frac{a^2}{\pi^2 D} (N_{11})_{CRIT} = \frac{1}{m^2} \left[n^2 R^2 \frac{a^2 N_{22}}{\pi^2 D} + \frac{\frac{2 c a^2 G}{\alpha \pi^2 D} (m^2 + n^2 R^2)^2}{\frac{2 c a^2 G}{\alpha \pi^2 D} + m^2 + n^2 R^2} \right] \tag{6.30}$$

fazendo então:

$$\frac{a^2}{\pi^2 D} (N_{11})_{CRIT} = X_o \tag{6.31}$$

$$\frac{a^2}{\pi^2 D} N_{22} = Y \tag{6.32}$$

$$\frac{2 c a^2 G}{\pi^2 D} = S = \frac{1}{H} \tag{6.33}$$

a expressão (6.30) fica:

$$X_o = \frac{1}{m^2}\left[n^2R^2\ Y + \frac{(m^2 + n^2R^2)^2}{1 + (m^2 + n^2R^2)\ \alpha\ H}\right] \qquad (6.34)$$

Para a expressão (6.34) verifica-se que[4] X_o cresce com n ; logo, o menor valor de X_o é para $n = 1$, e vale:

$$X_o = \frac{1}{m^2}\left[R^2\ Y + \frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)\ \alpha\ H}\right] \qquad (6.35)$$

Quando existir somente carregamento na direção de x_1 ou $Y = 0$, a expressão acima será:

$$X_o = \frac{1}{m^2}\left[\frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)\ \alpha\ H}\right] \qquad (6.36)$$

Supondo que N_{11} e N_{22} sejam de compressão na expressão (5.11),

$$f = \sqrt{\frac{1}{\rho h}}\sqrt{\frac{C\ (\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2})}{\frac{C}{D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} - \frac{m^2\pi^2}{a^2}\ N_{11} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\ N_{22}} \qquad (6.37)$$

Fazendo $R = \frac{a}{b}$, utilizando (3.18) e ainda com

$$f\sqrt{\frac{\rho h a^4}{\pi^2 D}} = V \qquad (6.38a)$$

$$\frac{a^2}{\pi^2 D}\ N_{11} = X \qquad (6.38b)$$

na equação (6.37), vem

$$V = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2R^2)^2}{1 + (m^2 + n^2R^2)\ \alpha\ H} - m^2X - n^2R^2\ Y} \qquad (6.39)$$

Com a placa comprimida somente na direção x_1, $Y = 0$ e (6.29) vale:

$$V = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2R^2)^2}{1 + (m^2 + n^2R^2)\ \alpha\ H} - m^2X} \qquad (6.40)$$

Na expressão acima, verifica-se que [4] V cresce com n logo o menor valor de V corresponde a $n = 1$, então (6.40) fica:

$$V = \sqrt{\frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)\ \alpha\ H} - m^2X} \qquad (6.41)$$

A freqüência V_o, com $X = 0$ em (6.41) fica

$$V_o = \sqrt{\frac{(m^2 + R^2)^2}{1 + (m^2 + R^2)\ \alpha\ H}} \qquad (6.42)$$

Foram feitos gráficos com as expressões (6.36), (6.41) e (6.46).

VII - CONCLUSÕES

No gráfico traçado para a expressão (3.15)

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{G}{G^*}}{1 - \frac{tgh\ \mu}{\mu}}\right)$$

verifica-se que seu limite $\alpha = 0,75$ quando $\mu \to 0$ depende diretamente da teoria adotada para a determinação dos valores das constantes elásticas adicionais G^*, Λ e Γ. Analisando-se os casos extremos, conclui-se que, para $\mu \to 0$ (com $G \neq 0$), as faces se comportam como duas placas independentes onde as barras conectoras têm rigidez à flexão infinita. Com $\mu \to \infty$ (sem barras conectoras) a solução coincide com a obtida por Oliveira[4].

Caso $G = 0$ (núcleo composto somente por barras conectoras), as equações diferenciais de movimento assumem outro tipo de solução que também se aproxima da achada para duas placas independentes.

A validade desta teoria é baseada em duas suposições. Na primeira, pela comparação das fórmulas (2.30) com (6.16a) e (6.31) com (6.15), conclui-se que existe a necessidade de $G^* >> G$ (possivelmente, um dos motivos dos valores de α passarem de 1.0). A segunda será dada pela limitação dos materiais existentes e das dimensões construtivas de uma placa sandwich. Segundo dados retirados de Allen[1], os casos práticos de placas sandwich correspondem a $\mu \geq 0.1$.

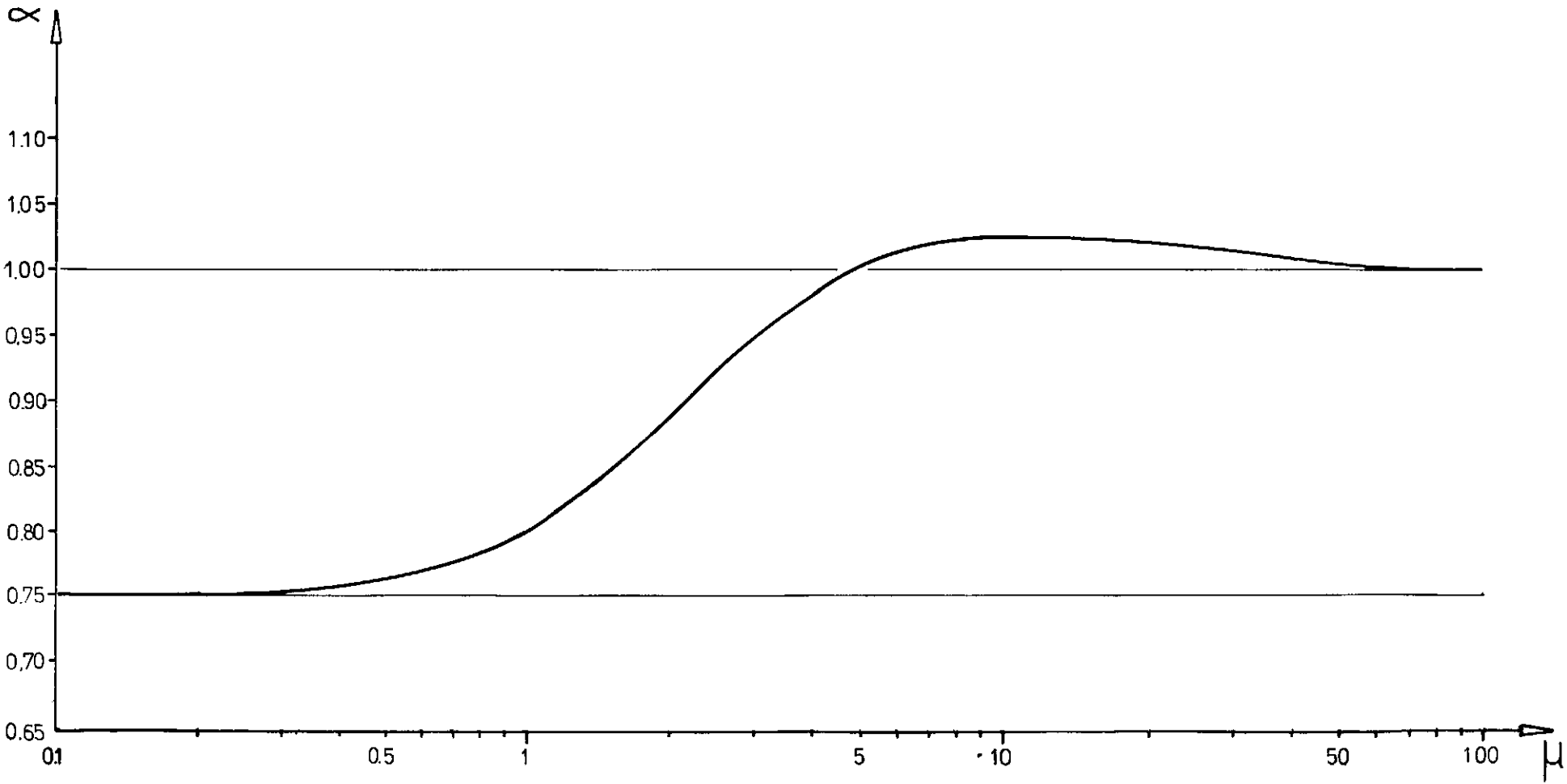
Nos outros gráficos, verifica-se que X_o e V_o, crescem com a relação $\frac{1}{\mu\ H}$, implicando que os valores máximos

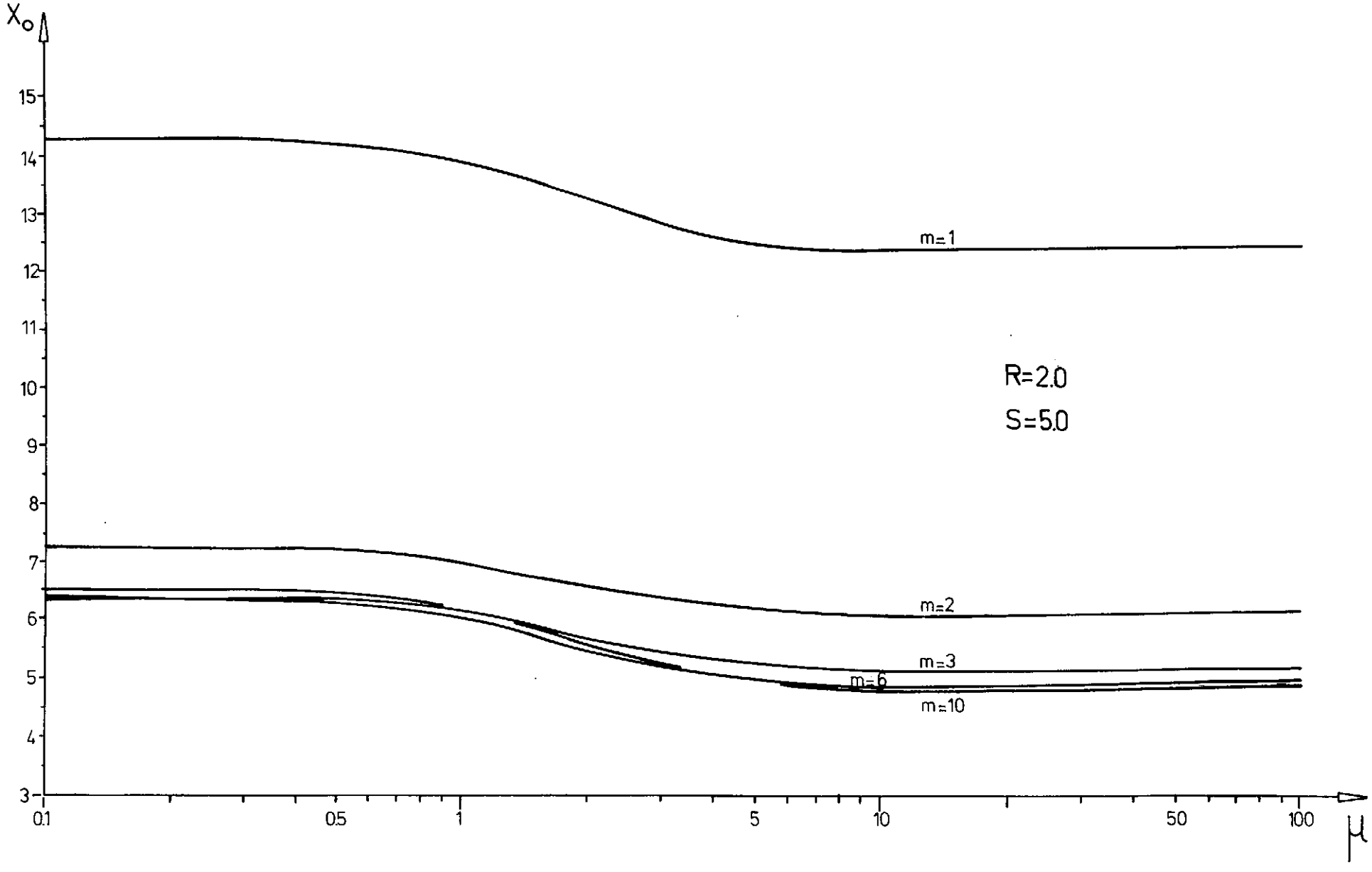
de X_o e V_o ocorrerão quando $\mu = 0$ ou $H = 0$ (Rigidez infinita do cisalhamento). Para X, a observação é aplicada para à placa comprimida tanto na direção x_1, como na x_2.

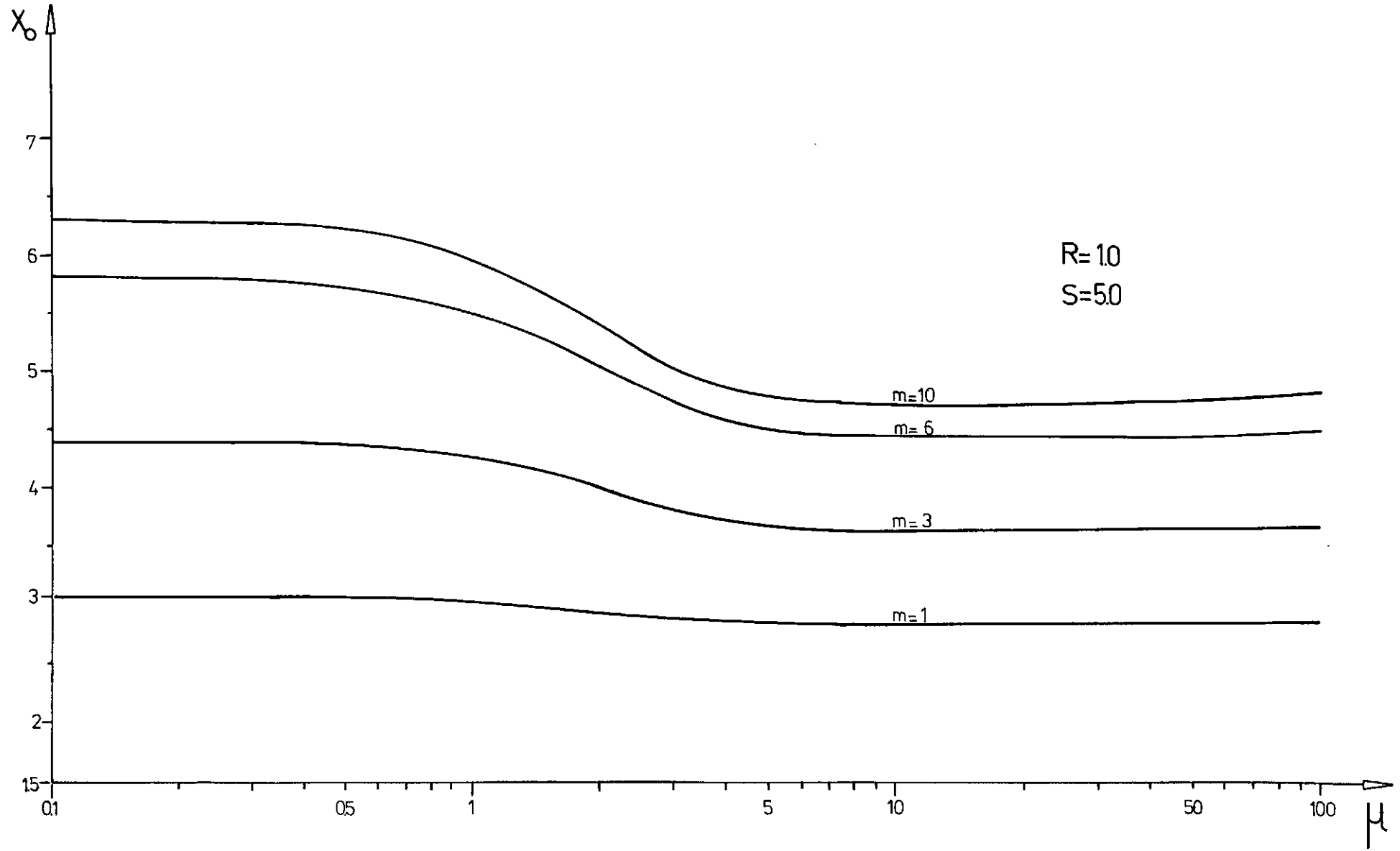
Os valores da constante de integração A_i na expressão (2.37) poderão ser achados pela condição de contorno onde $\tau_i(c) = \frac{m_i}{e^2}$, onde m_i será o momento fletor devido a rotação das faces considerando-se somente a flexão. Então para cada ponto da placa onde existir uma barra conectora, haverá um A_i correspondente.

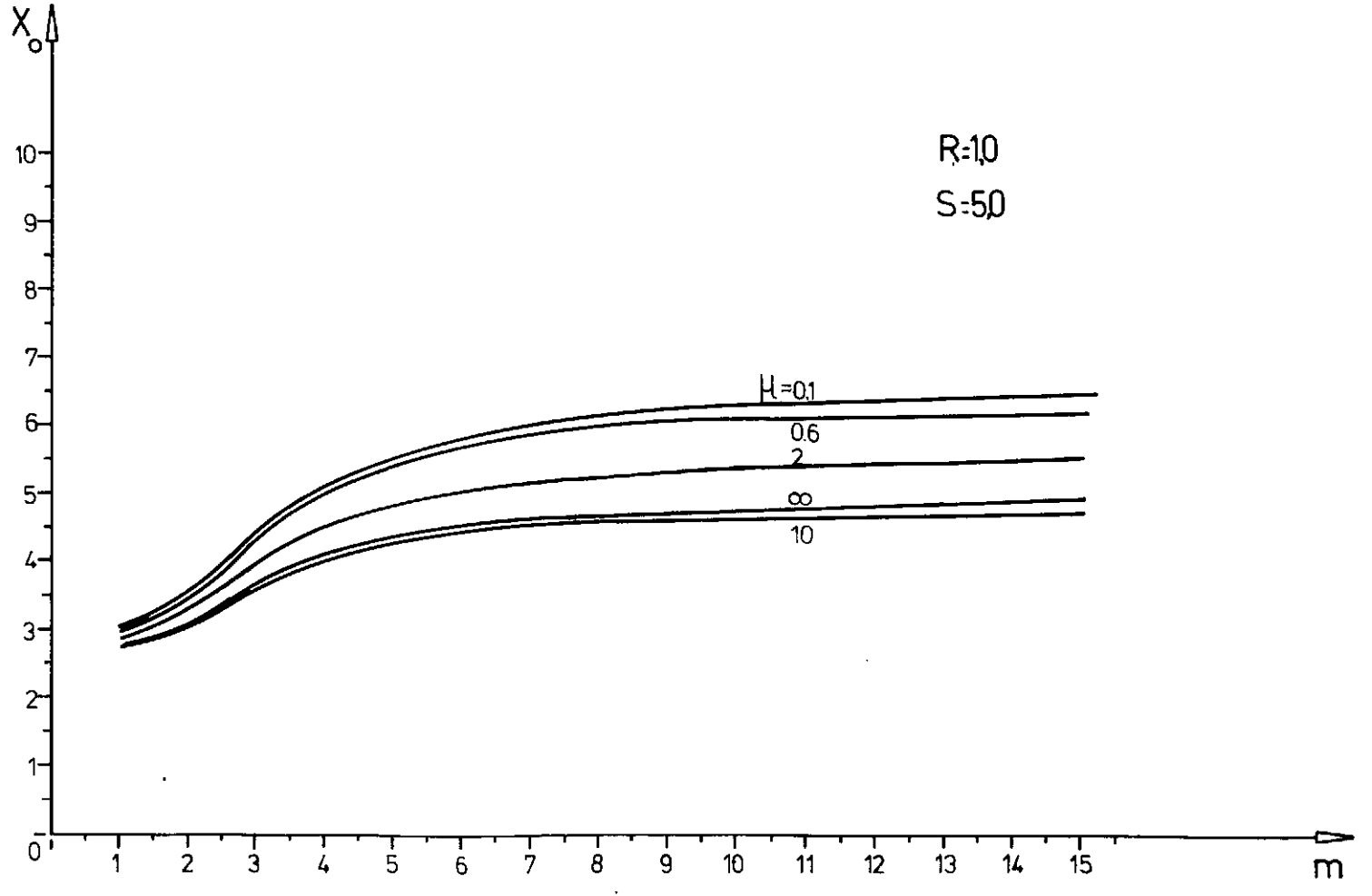
As expressões para M_{ij} (6.11) e Q_i (4.12) se reduzirão às encontradas por Oliveira[4] desprezando os τ_i ou considerando-se Λ nulo e com isso abandonando-se o efeito enrijecedor das barras conectoras.

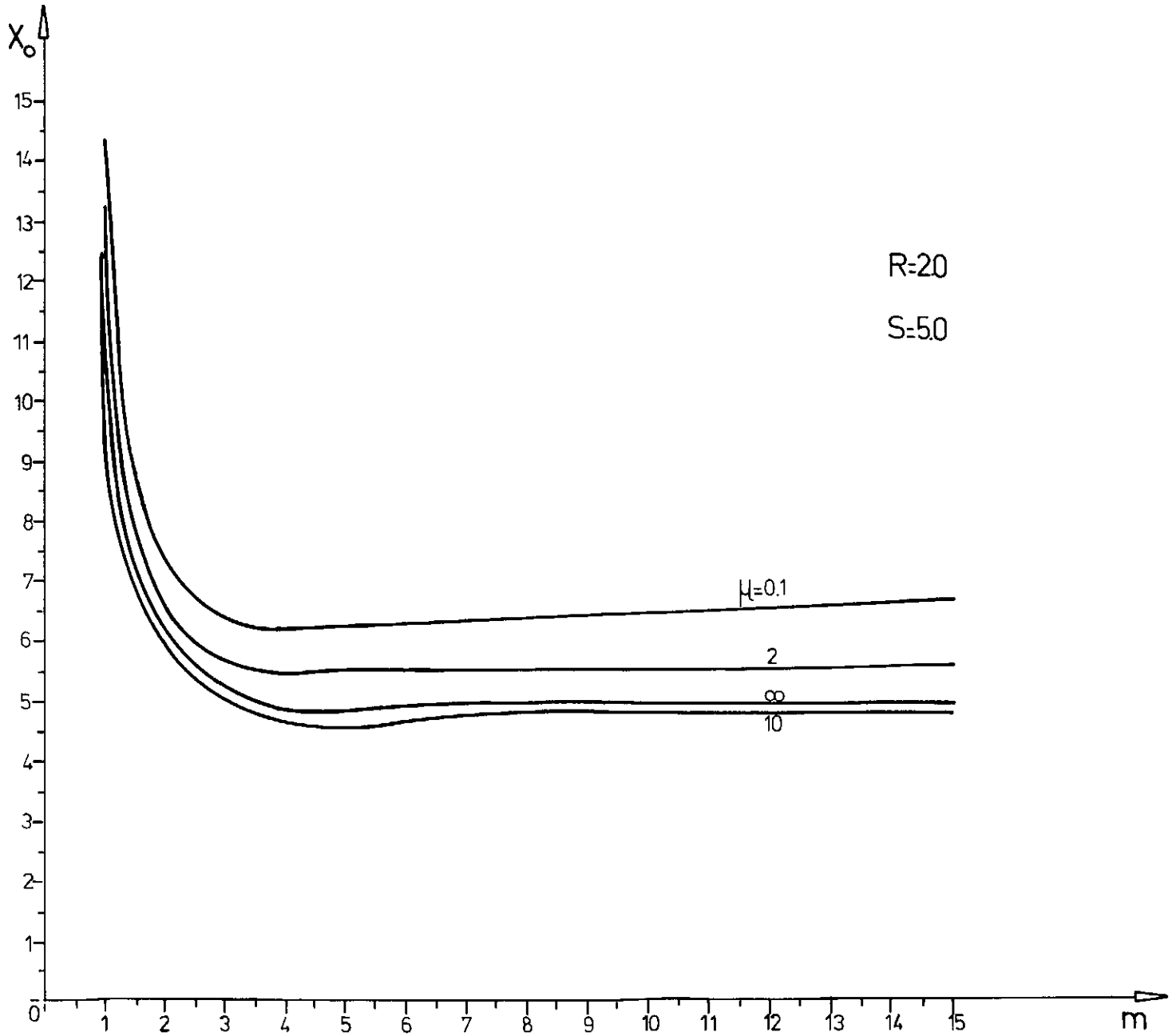
Poderão ser feitos novos estudos e considerações para núcleos com fibramento transversal com capacidade de absorver tensões-momento para o problema de cascas-sandwich[21], assim como outras condições de contorno, carregamentos e, a determinação experimental das constantes elásticas adicionais comparando-as com os resultados teóricos obtidos.

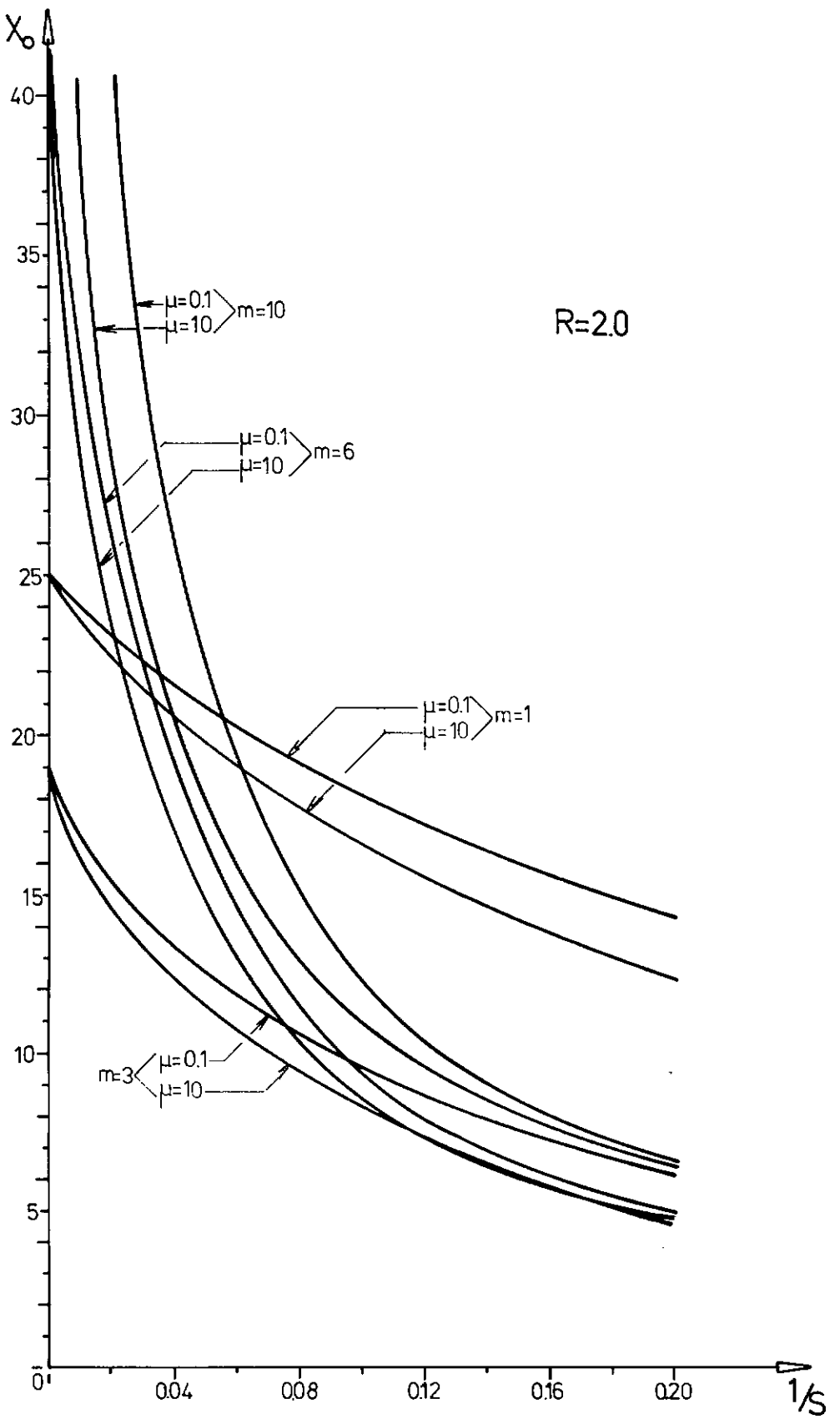

α
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.1
0.5
1
5
10
50
100
μ

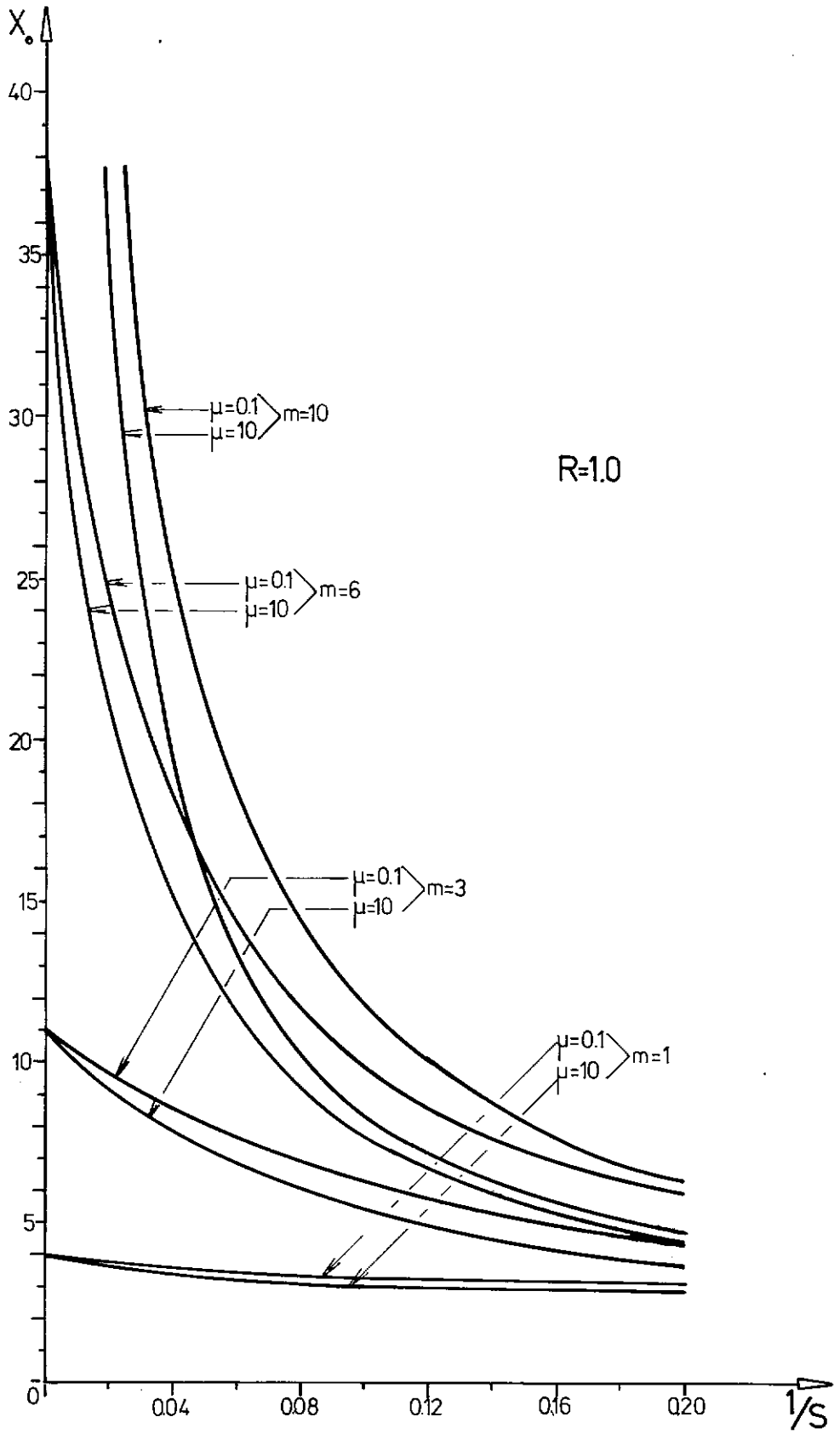

X_o
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
m=1
R=2.0
S=5.0
m=2
m=3
m=6
m=10
0.1
0.5
1
5
10
50
100
μ

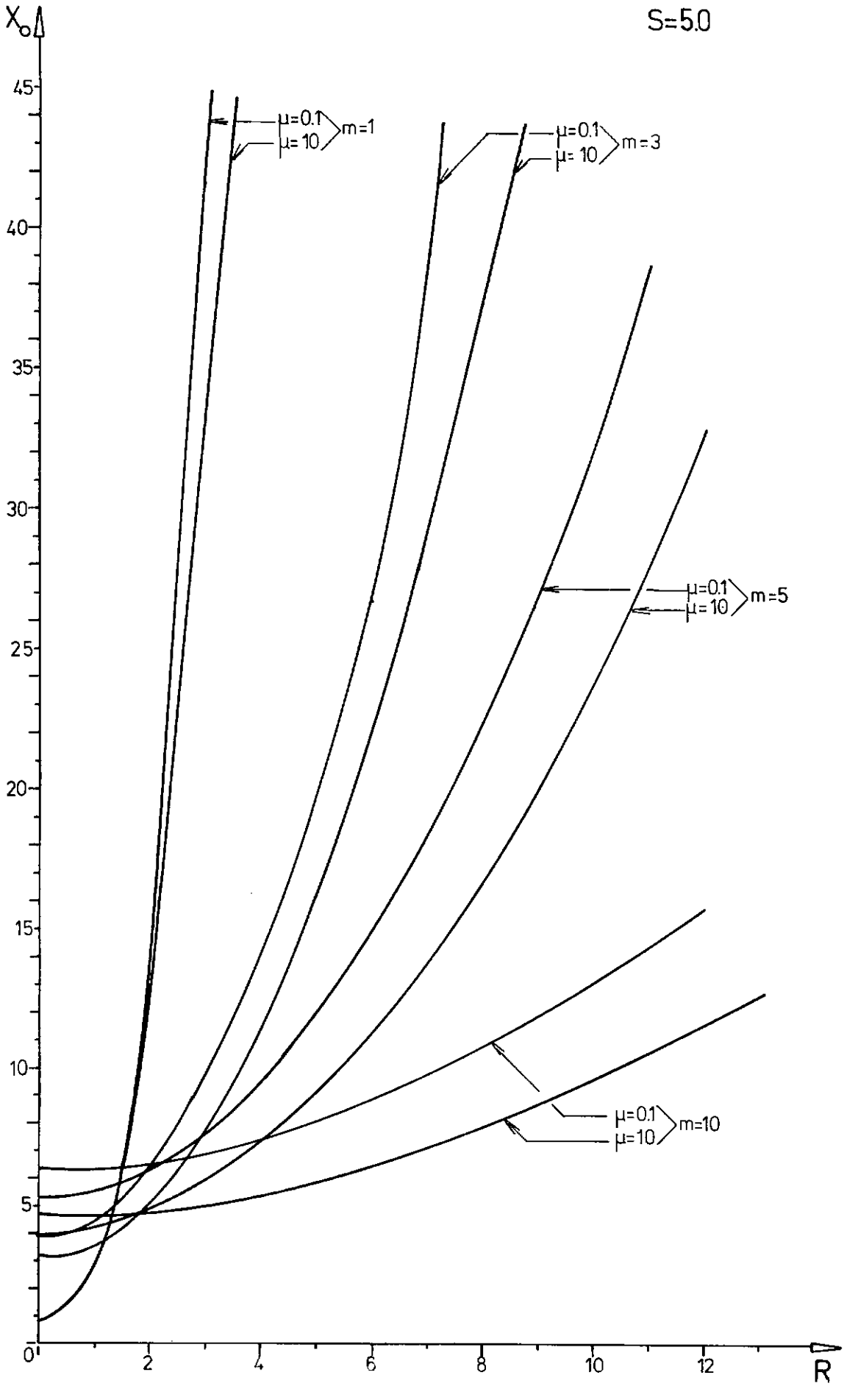

χ_0
7
6
5
4
3
2
1.5
R= 1.0
S=5.0
m=10
m= 6
m= 3
m= 1
0.1
0.5
1
5
10
50
100
μ

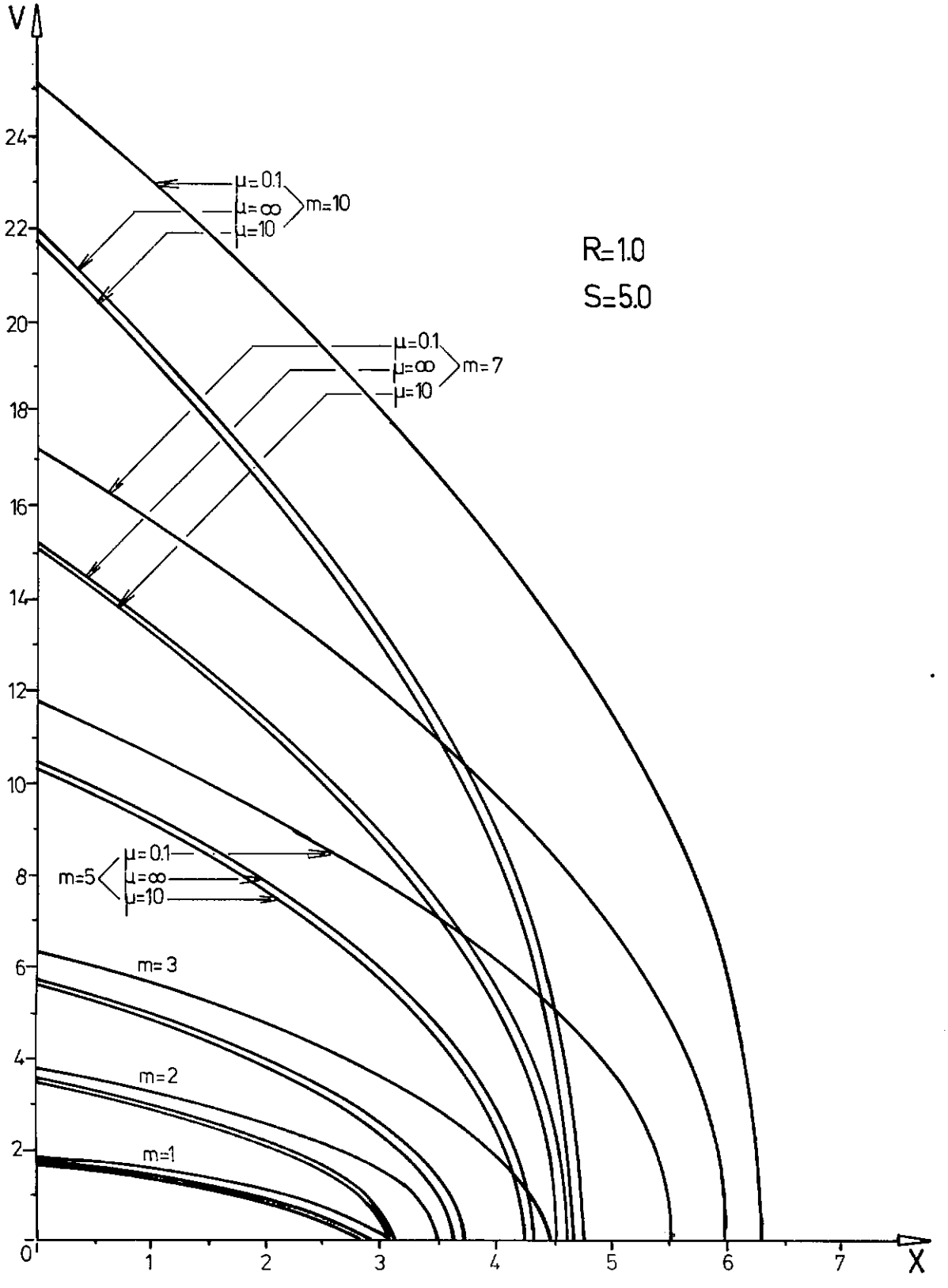

X
o
R=1,0
S=5,0
μ=0,1
0.6
2
∞
10
m

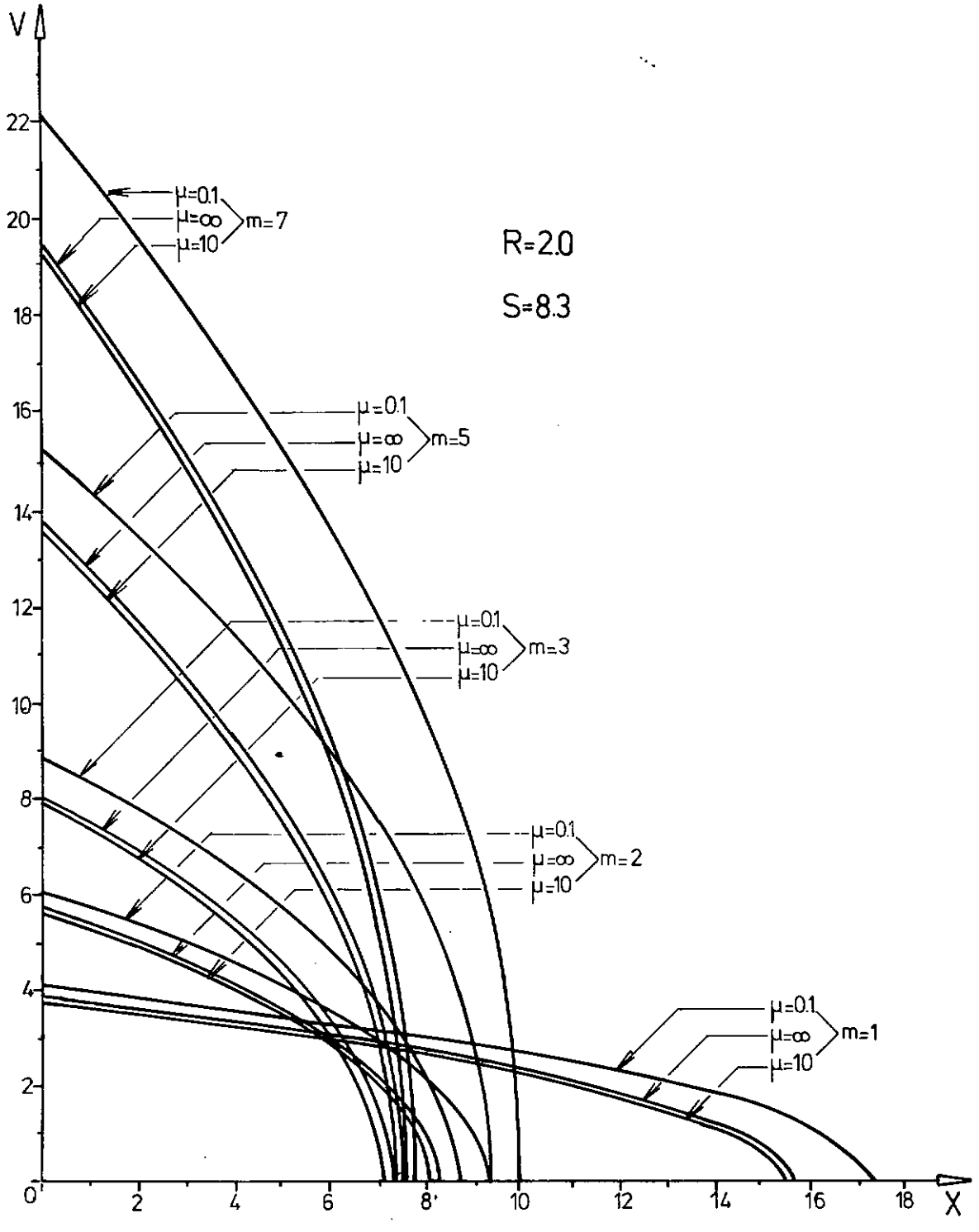

X_o
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
m
R=2.0
S=5.0
μ=0.1
2
∞
10

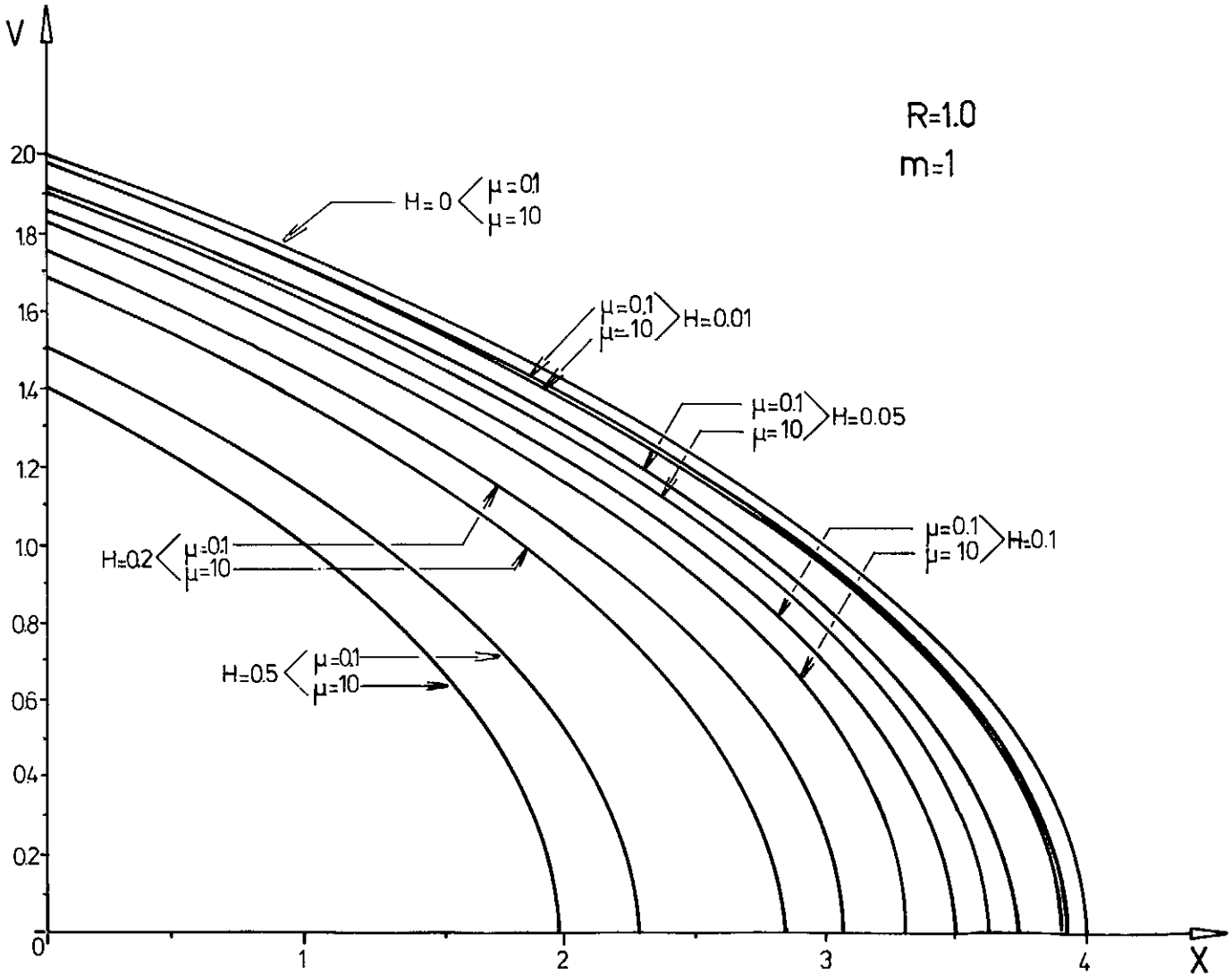

X₀
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0.04
0.08
0.12
0.16
0.20
1/S
μ=0.1
μ=10
m=10
μ=0.1
μ=10
m=6
μ=0.1
μ=10
m=1
m=3
μ=0.1
μ=10
R=2.0

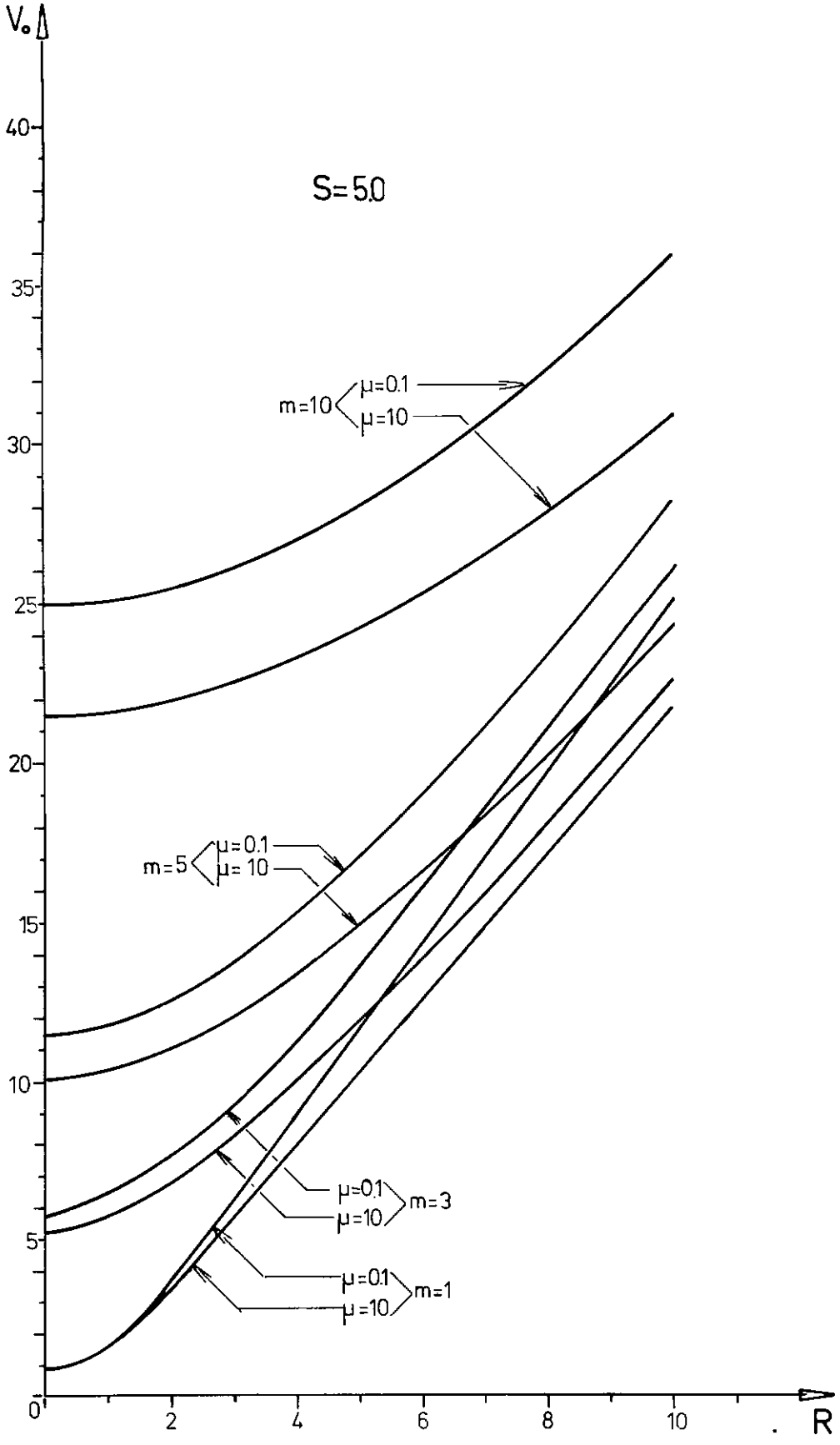

X₀
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0.04
0.08
0.12
0.16
0.20
1/S
μ=0.1
μ=10
m=10
μ=0.1
μ=10
m=6
μ=0.1
μ=10
m=3
μ=0.1
μ=10
m=1
R=1.0


X_o
S=5.0
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
2
4
6
8
10
12
R
μ=0.1
μ=10
m=1
μ=0.1
μ=10
m=3
μ=0.1
μ=10
m=5
μ=0.1
μ=10
m=10


V
X
R=1.0
S=5.0
μ=0.1
μ=∞
μ=10
m=10
m=7
m=5
m=3
m=2
m=1
0
1
2
3
4
5
6
7
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24


V
X
R=2.0
S=8.3
μ=0.1
μ=∞
μ=10
m=7
m=5
m=3
m=2
m=1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22


V
X
R=1.0
m=1
H=0 μ=0.1 μ=10
μ=0.1 μ=10 H=0.01
μ=0.1 μ=10 H=0.05
μ=0.1 μ=10 H=0.1
H=0.2 μ=0.1 μ=10
H=0.5 μ=0.1 μ=10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
1
2
3
4


V₀
40
35
30
25
20
15
10
5
0
S=5.0
m=10
μ=0.1
μ=10
m=5
μ=0.1
μ=10
μ=0.1
μ=10
m=3
μ=0.1
μ=10
m=1
2
4
6
8
10
R

BIBLIOGRAFIA

1 ALLEN, H.G. - Analysis and Design of Structural Sandwich Panels - Pergamon Press, Oxford, 1969.

2 TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIGER, S. - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill, New York, 1959.

3 PLANTEMA, F.J. - Sandwich Construction - Wiley, New York, 1966.

4 OLIVEIRA, R.F. - Análise Dinâmica de Placas Sandwich Comprimidas - Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1972.

5 VILLAÇA, S.F. - Análise Dinâmica de Vigas Sandwich Comprimidas - Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1970.

6 TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H.; WEAVER, W. - Vibrations Problems in Engineering - Wiley, New York, 1974.

7 REISSNER, E. - On Sandwich - Type Plates with Cores Capable of Supporting Moments Stress - A.C.T.A. Mechanica, vol. 14, 1972.

8 REISSNER, E. - A Note on Pure Bending and Flexure in Plane Stresses Including the Effect of Moment Stresses - Ingenieur - Archiv., vol. 39, 1970.

9 REISSNER, E. - On St. Venant Flexure Including Couple Stresses - P.M.M., vol. 32, 1968.

10 SANTOS, S.M.G. - Teoria das Placas - Estrutura, nº 14, Rio de Janeiro, 1959.

11 MINDLIN, R.D.; TIERSTEN, H.F. - Effects of Couple Stresses in Linear Elasticity - Arch. for Rational Mechanics, vol. 1, 1962.

12 MINDLIN, R.D. - Micro-Structure in Linear Elasticity - Arch. for Rational Mechanics, Vol. 1, 1963.

13 HERRMANN, G.; ACHENBACH, J.D. - Application of Theories of Generalized Cosserat Continua to the Dynamics of Composite Materials - Mechanics of Generalized Continua, I. U.T.A.M.

14 REISSNER, E. - On Generalized Two-Dimensional Plate Theory I and II - Int. Journal Solids Structures, Vol. 5,1969.

15 REISSNER, E. - On Bending of Elastic Plates - Quart. Appl. Math., vol. 5, 1947.

16 MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continua Media - Prentice-Hall, 1969.

17 VOIGT, W. - Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystable - Abh.Ges.Wiss. Göttingen, vol. 34, 1887.

18 COSSERAT, E.; COSSERAT, F. - Théorie des Corps Déformables - A. Hermann et Fils, Paris, 1909.

19 DUHEM, P. - Sur les Équations du Mouvement et la Relation Supplémentaire au Sein d'um Miliex Vitreux - C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 136, 1903.

20 KRAUS, H. - Thin Elastic Shells - Wiley, New York, 1967.

21 REISSNER, E. - A Note on Generating Generalized Two-Dimensional Plates and Shelles Theories - Journal of Applied Math. and Physics, vol. 28, 1977.

SIMBOLOGIA

t - espessura da face, variável tempo

c - metade da espessura do núcleo

p - carga transversal ao plano médio da placa sandwich por unidade de área

Q_i - esforço cortante transversal

m_{ij} - momento por unidade de comprimento

u_1, u_2, w - componentes do deslocamento de um ponto genérico (x_1, x_2, z)

ϕ_i - rotação das faces do elemento infinitesimal deformado

ε_i - deformação do elemento de placa na direção x_i

γ_i - distorção do elemento de placa no plano $z\ x_i$

χ_{ij} - variação da curvatura

σ_{ij} - tensão normal ou cisalhante no núcleo

τ_{ij} - tensão-momento no núcleo

e_{zi},e_{iz},e_{zz} - componentes da deformação da superfície média do elemento do núcleo

v_i , v_z - componentes do deslocamento do núcleo

ψ_i - rotação da normal do elemento infinitesimal deformado do núcleo

k_{ij} - variação da curvatura do elemento no núcleo

B - densidade de energia complementar

E_z - módulo de elasticidade na direção z

G, G^* - módulos de elasticidade transversal associados aos planos $z\ x_i$ e $x_i\ z$ respectivamente

Γ - módulo de elasticidade à flexão

Λ - módulo de elasticidade à torção

σ_i,τ,w - expressões definidas em (2.14)

$A_i, B_i, V_i,$
σ_o, η - funções de integração em (x_1, x_2)

$\mu = 2G/\Gamma$ - expressão definida em (2.19)

S_{ij} - tensões que atuam nas faces

p_i , q - componentes das ações do núcleo sobre as faces

ν - coeficiente de Poisson

ε_{ij} - deformação do elemento das faces

ω - rotação relativa dos elementos correspondentes das faces superior e inferior

τ_i - parâmetro definido em (2.52)

D - rigidez à flexão da placa

α - coeficiente de rigidez das barras conectoras, definida em (3.15)

c - rigidez ao cisalhamento definido em (3.18)

N_{ij} - esforços internos por unidade de comprimento

β_i - parâmetro definido em (5.6)

a, b - dimensões da placa

w_o - amplitude máxima da flecha

f - frequência de vibração

e - distância entre duas barras adjacentes

X_o - parâmetro adimensional proporcional a carga de instabilidade definido em (6.31)

X, Y - parâmetro adimensional, proporcional a carregamento no plano da placa

$S = \frac{1}{H}$ - parâmetro adimensional, proporcional a rigidez ao cisalhamento definido em (6.33)

$R = \frac{a}{b}$ - relação entre os lados da placa

V - parâmetro adimensional, proporcional a frequência de vibração, definido em (6.38).