

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO

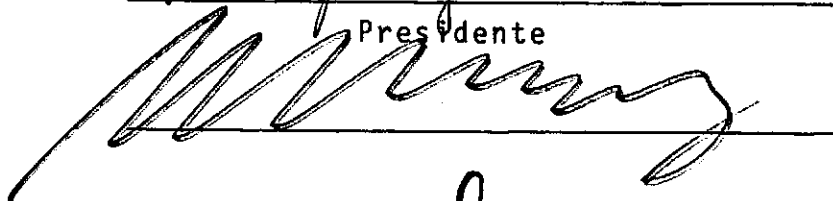
LUIZ FERNANDO TABORDA GARCIA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

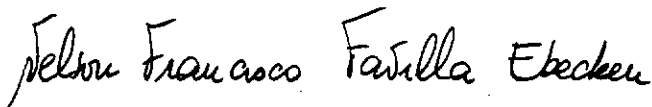
Aprovada por:



Presidente







RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
DEZEMBRO DE 1974

A meus pais

A minha esposa

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nobuo Yamagata, pela solicitude e orientação prestada a este trabalho.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, pelo incentivo e valiosos ensinamentos.

Ao Professor Homero Pinto Caputo, pela amizade e colaboração.

Aos Colegas da COPPE, pela cooperação.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas, pelo apoio concedido.

À Maria de Lourdes de Almeida, pela confecção gráfica deste trabalho.

S I N O P S E

Apresenta-se neste trabalho um programa para análise não-linear de pórticos planos de concreto armado. É utilizado um processo iterativo constituído por etapas lineares de cálculo.

Admite-se não só a não-linearidade dos diagramas tensão-deformação dos materiais, como também consideram-se os efeitos de segunda ordem decorrentes da interação axial-flexão.

O programa em questão limita-se ao estudo dos pórticos planos dotados de elementos de eixo reto, permitindo-se, indistintamente, a ocorrência de membros de seção circular e de seção retangular numa mesma estrutura. Acrescente-se ainda que para cada elemento, além de ser prevista uma subdivisão em trechos de características constantes, considera-se também a possibilidade de liberações nos extremos.

Pode-se empregar o programa tanto na determinação de esforços e deslocamentos associados a diversas hipóteses de carregamento, como também na pesquisa da capacidade de carga da estrutura.

No que diz respeito aos diagramas tensão-deformação dos materiais e no que se refere ao esgotamento da capacidade resistente da seção transversal, são adotadas as recomenda-

ções do CEB-FIP.

Incluem-se alguns exemplos de aplicação, entre os quais destaca-se uma investigação visando comprovar a eficiência do método aproximado do CEB-FIP, indicado para o dimensionamento de peças longas ($\lambda \geq 35$) solicitadas simultaneamente a flexão e compressão.

A B S T R A C T

In this dissertation a computer program for non-linear analysis of reinforced concrete plane frames is presented. An iterative technique consisting of breaking the solution into several linear steps is used.

Both the non-linear relationship between stresses and strains for the materials, as well as the second-order effects due to the axial-flexural interaction, are considered in the analysis.

The computer program is available for plane frames with straight members and alternatively members with circular and rectangular cross-section in the same structure are allowed. In addition, for each member it is possible to perform a subdivision into segments of constant characteristics, and also to allow for discontinuities at the ends.

The computer program can be employed for calculating member forces and displacements associated with several loading hypotheses and also in the estimate of the bearing capacity of the structure.

Referring to the stress-strain curves for the materials and to the ultimate strength of the cross-section, the CEB-FIP recommendations are used.

Among the applications presented is an investigation in order to check the efficiency of the approximate method of the CEB-FIP, proposed for the design of slender members ($\lambda \geq 35$) subjected to combined bending and axial compression.

I N D I C E

	pg.
<u>CAPÍTULO I</u> - Hipóteses Adotadas - Aspectos Gerais do Comportamento Não-Linear	
1.1 - Hipóteses	1
1.1.1 - Diagramas Tensão-Deforma ção dos Materiais	1
1.1.2 - Hipótese das Seções Planas	9
1.1.3 - Esgotamento da Capacida- de Resistente da Seção	9
1.1.4 - Carregamento	10
1.2 - Comportamento Não-Linear	10
1.2.1 - Não-Linearidade Física	11
1.2.2 - Não-Linearidade Geométrica	14
1.3 - Deformação Lenta do Concreto	17
1.4 - Estado Limite Último	19
 <u>CAPÍTULO II</u> - Processo de Análise	
2.1 - Noções Gerais do Método da Rigidez	23
2.1.1 - Análise pelo Método da Ri- gidez	23
2.1.2 - Obtenção da Matriz de Rigi- dez do Elemento	27
2.2 - Considerações sobre a Análise Não- Linear	36

	pg.
2.3 - Matriz de Rigidez do Elemento para a Análise Não-Linear	39
2.3.1 - Preliminares	39
2.3.2 - Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento pa ra a Análise Não-Linear	43
2.3.3 - Integrações Numéricas	62
2.4 - Resumo do Processo de Análise U- tilizado	73
2.5 - Liberações nas Extremidades dos Elementos	76
2.5.1 - Preliminares	76
2.5.2 - Obtenção da Matriz de Ri gidez do Elemento com Li berações	78
2.5.3 - Observações	83
 <u>CAPÍTULO III</u> - Programa Automático	
3.1 - Considerações Gerais sobre o Pro- grama Elaborado	85
3.1.1 - Tipos de Estudo que podem ser efetuados com o Progra- ma	85
3.1.2 - Divisão da Estrutura em Ele mentos	91

	pg.
3.1.3 - Seção Transversal	92
3.1.4 - Idealização do Pórtico Plano	93
3.1.5 - Numerações	94
3.1.6 - Sistemas de Referência	97
3.1.7 - Cargas Aplicadas à Es- trutura	98
3.1.8 - Interpretação dos Resu <u>l</u> tados	99
3.2 - Subrotinas do Programa	102
3.2.1 - Subrotina DRCSP	102
3.2.2 - Subrotina EMOSP	103
3.2.3 - Subrotina STYTE	104
3.2.4 - Subrotina PALUI	105
3.2.5 - Subrotina SISEQ	105
3.3 - Diagrama de Blocos Simplificado do Programa	106
3.3.1 - Diagrama de Blocos	106
3.3.2 - Comentários	111

CAPÍTULO IV - Exemplos de Aplicação

4.1 - Exemplo nº 1	120
4.2 - Exemplo nº 2	127
4.3 - Exemplo nº 3	134
4.4 - Exemplo nº 4	141

	pg.
<u>CAPÍTULO V</u> - Considerações Finais	158
<u>APÊNDICE A</u> - Manual de Entrada do Programa	
A.1 - Manual de Entrada	161
A.2 - Comentários	163
<u>APÊNDICE B</u> - Listagem do Programa	177
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	209

S I M B O L O G I A

- [] matriz
- { } matriz coluna (vetor)
- []⁻¹ matriz inversa
- []^T matriz transposta
- {AD} vetor de cargas nodais correspondente aos graus de liberdade da estrutura
- {AM} vetor de esforços nas extremidades do elemento, com relação ao sistema local de eixos
- {D} vetor de deslocamentos nodais
- {DM} vetor de deslocamentos nas extremidades do elemento, com relação ao sistema local de eixos
- [G] matriz que estabelece o relacionamento entre N e M, ϵ_g e χ , na seção transversal
- [S] matriz de rigidez global
- [SD] matriz de rigidez relacionada aos graus de liberdade da estrutura
- [SM] matriz de rigidez do elemento, com relação ao sistema local de eixos
- [SM⁰], [SM¹] matrizes que somadas conduzem a [SM]
 [SM⁰] - depende da distribuição de E
 [SM¹] - função do esforço normal
- [SM _{ϵ}] matriz que estabelece o relacionamento entre os esforços {AM _{ϵ} } e os deslocamentos {DM _{ϵ} }, na primeira fase da construção de [SM]

$[SM^0]$, $[SM^1]$	matrizes que somadas conduzem a $[SM_e]$
$[SM^*]$	matriz de rigidez do elemento com liberações
$[SMD]$	matriz de rigidez do elemento, com relação ao sistema global de eixos
$[RT]$	matriz de rotação transformada
A_s	armadura total na seção
C.E.	ponto em que o eixo escolhido para representar o elemento intercepta a seção transversal
E	módulo de elasticidade secante
	E_c - para o concreto
	E_s - para o aço
EA	rigidez axial
EI	rigidez a flexão
M	momento fletor definido em C.E.
N	esforço normal
X-Y-Z	sistema global de eixos (sistema de referência da estrutura)
b	largura da seção retangular
f_{cd}	valor de cálculo da resistência a compressão do concreto
f_{ck}	valor característico da resistência a compressão do concreto
f_{yd}	valor de cálculo da tensão de escoamento do aço
f_{yk}	valor característico da tensão de escoamento do aço
h	seção retangular - altura total da seção (dimensão no plano de flexão)
	seção circular - diâmetro da seção

l	comprimento do elemento
$\frac{1}{r}$	curvatura
$t_k, \Delta l, \theta_i, \theta_j$	parâmetros deslocamento
x-y-z	sistema local de eixos (sistema de referência do elemento)
γ_c	coeficiente de minoração da resistência do concreto
γ_s	coeficiente de minoração da tensão de escoamento do aço
ϵ	deformação num ponto qualquer da seção transversal, determinada a partir de ϵ_g e χ
ϵ_g	deformação axial
λ	índice de esbeltez
χ	igual a $-\frac{1}{r}$

INTRODUÇÃO

Os conceitos e as notações da álgebra matricial pertenceram durante muito tempo apenas ao domínio da matemática. Com o advento dos computadores eletrônicos, o cálculo matricial ganhou um novo campo de aplicação: a teoria das estruturas.

O uso de matrizes é o caminho mais adequado quando se efetuam cálculos com o computador, uma vez que permite a automatização das operações a serem realizadas, facilitando sobretudo o trabalho de programação.

Assim é que a teoria das estruturas foi inteiramente reorganizada em uma forma matricial. Os conhecidos métodos da flexibilidade e da rigidez, considerados como fundamentais na análise estrutural, são essencialmente apropriados ao tratamento por matrizes.

Embora ambos os métodos sejam similares em sua formulação matemática, distinguem-se pelos conceitos físicos envolvidos em cada um. No método da flexibilidade as incógnitas são as ações redundantes, enquanto que no método da rigidez as incógnitas são os deslocamentos dos nós da estrutura. Nos dois métodos, entretanto, as equações fundamentais derivam-se da aplica -

ção do princípio da superposição.

Como sabemos, o princípio da superposição pode ser utilizado desde que se verifiquem relações lineares entre ações e deslocamentos. Vemos assim que o uso dos métodos citados acima está limitado às estruturas de comportamento linear.

A impossibilidade de se admitir uma lei linear tensão-deformação para o concreto, por si só já impossibilitaria a aplicação do princípio da superposição no estudo de peças constituídas deste material. Além disso, numa peça de concreto armado ainda se introduzem barras de aço para resistir às tensões de tração que o concreto não pode suportar. O aço, por sua vez, também não apresenta um diagrama tensão-deformação linear. Conseqüentemente, tornar-se-ia inviável a utilização dos métodos da flexibilidade e da rigidez, pelo menos de uma forma imediata, na análise dos pórticos planos de concreto armado. Estritamente falando, seríamos conduzidos a um cálculo de natureza não-linear, cuja solução exata seria extremamente difícil de se obter.

O que se faz normalmente para contornar o problema, é a substituição do cálculo não-linear por uma sucessão de cálculos lineares, corrigindo-se em cada passo as características de que depende o problema, com base nos resultados obtidos na etapa anterior. Desta forma, cada etapa de cálculo constitui -

se numa análise linear, tornando-se portanto viável, neste caso, a aplicação dos métodos da flexibilidade e da rigidez.

Em geral, nos programas automáticos para análise de pórticos planos de concreto armado, efetuam-se as correções mencionadas acima com base numa coleção de diagramas $M - N - \frac{1}{r}$ (momento fletor-esforço normal-curvatura). Podemos concluir, portanto, que é indispensável se dispor de um vasto conjunto destes diagramas, para se estar apto, num dado instante, a calcular uma estrutura qualquer. Por um lado, precisa-se abranger vários tipos de seções transversais, que diferem entre si tanto na forma geométrica como na percentagem e distribuição de armadura. Além disso, cada um dos diagramas deve incluir diversos valores para o esforço normal. Há de se convir que nestas condições, nem sempre o cálculo de uma estrutura resulta numa operação das mais cômodas.

Esses programas são elaborados, em geral, de acordo com o método da rigidez, dada a sua formulação simples e totalmente adaptável à computação automática. Podem também facilmente ser estendidos, objetivando-se levar em consideração os efeitos de segunda ordem provenientes da interação axial-flexão.

Neste trabalho, apresenta-se um programa para análise de pórticos planos de concreto armado, fundamentado no método da rigidez e calcado num procedimento que torna dispensável o uso da coleção de diagramas $M - N - \frac{1}{r}$. Efetivamente, é utilizado um processo iterativo em que a obtenção de módulos de elasticidade secantes, retirados diretamente dos diagramas tensão-deformação dos materiais, constitui-se no ponto básico em cada etapa do cálculo (este procedimento é proposto por J. Blaauwendraad em seu trabalho "Realistic Analysis of Reinforced Concrete Framed Structures").

É de se salientar que os efeitos de segunda ordem provenientes da interação axial-flexão, bem como a possibilidade de liberações nas extremidades dos elementos, foram também incorporados à análise.

O programa em questão limita-se ao estudo dos pórticos planos constituídos por elementos de eixo reto. É válido, inclusive, se estabelecer em cada elemento da estrutura uma subdivisão em trechos. Esta previsão é feita visando atender possíveis variações de percentagem e distribuição de armadura, assim como alterações nas dimensões da seção transversal do membro. Ressalte-se, entretanto, que ao longo de um mesmo trecho estas características são consideradas constantes.

No que se refere à forma da seção transversal, admi

te-se a ocorrência de elementos de seção circular e de seção retangular numa mesma estrutura.

Quanto aos tipos de estudo que podem ser realizados com o programa, destacamos:

a) Análise de diversos casos de carregamento

Este tipo de análise fornece os deslocamentos dos nós, os esforços nas extremidades dos membros e as reações de apoio, para cada um dos esquemas de carga que se fizer atuar na estrutura.

b) Pesquisa da capacidade de carga da estrutura

Por este estudo obtém-se, para uma determinada distribuição do carregamento, a capacidade de carga da estrutura, permitindo-se, inclusive, que algumas cargas tenham seus valores fixados.

Não se restringe, a não ser em função do fator tempo, o número de casos de carregamento em uma estrutura, assim como o número de estruturas submetidas à análise.

Ao finalizar, queremos deixar claro que o programa é, evidentemente, suscetível de ser melhorado. Como sabem aqueles que lidam com programas, é bastante difícil e exige um espaço de tempo relativamente longo, encontrar-se uma solução ótima em termos de programação.

CAPÍTULO I

HIPÓTESES ADOTADAS - ASPECTOS GERAIS DO COM- PORTAMENTO NÃO-LINEAR

1.1 - Hipóteses

A seguir são abordadas as diversas hipóteses de cálculo, visando a posterior apresentação do processo de análise utilizado.

1.1.1 - Diagramas Tensão-Deformação dos Materiais

Os diagramas tensão-deformação adotados para o concreto e para o aço são os preconizados pelo CEB-FIP. No caso dos aços tipo B efetua-se uma simplificação, substituindo o trecho curvo do diagrama por três trechos retos, como se verá mais adiante. Embora se considere a não-linearidade destes diagramas, admite-se que a curva de descarga coincide sempre com a de carga.

a) Concreto

A relação entre tensões e deformações no concreto é representada por um diagrama parábola-retângulo. Na Fig. 1. estão representados o diagrama característico e o diagrama de cálculo

lo, não se considerando qualquer resistência do concreto à tração. Estes diagramas são válidos somente para cargas de curta duração.

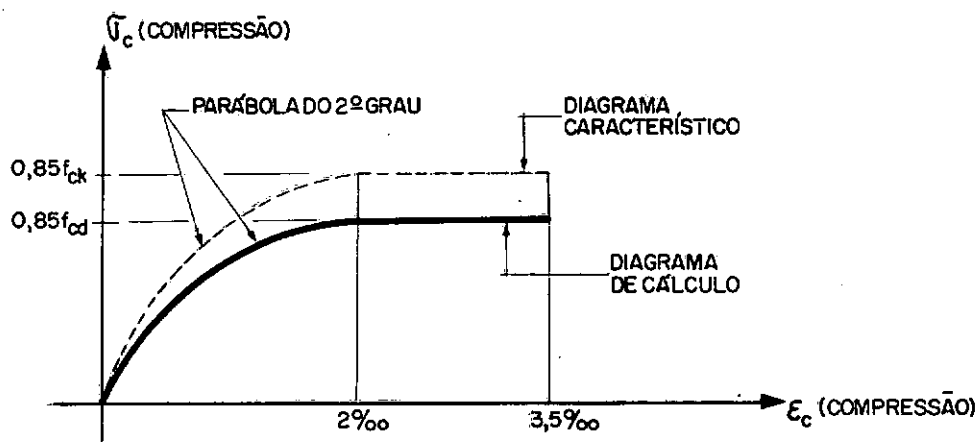


Fig. 1

Os diagramas característico e de cálculo podem ser definidos pelas expressões:

$$\text{para } 0 \leq \epsilon_c \leq 0,002 \rightarrow \sigma_c = 0,85 f_c \left(2 - \frac{\epsilon_c}{0,002} \right) \frac{\epsilon_c}{0,002}$$

$$\text{para } 0,002 \leq \epsilon_c \leq 0,0035 \rightarrow \sigma_c = 0,85 f_c$$

Tem-se:

$$f_c = f_{ck} \text{ - diagrama característico}$$

$$f_c = f_{cd} \text{ - diagrama de cálculo}$$

f_{ck} - valor característico da resistência à compressão do concreto

f_{cd} - valor de cálculo da resistência à compressão do concreto; $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$, sendo γ_c um coeficiente de minoração da resistência do concreto.

do γ_c ...

O coeficiente 0,85, utilizado na redução da resistência, leva em consideração a influência do tempo (efeito Rüsck) e as condições de concretagem.

b) Aço

b.1 - Aço Tipo A

O diagrama tensão-deformação para este tipo de aço caracteriza-se pela existência de um patamar de escoamento definido, como podemos observar na Fig.2. Estão assinalados na figura os diagramas característico e de cálculo.

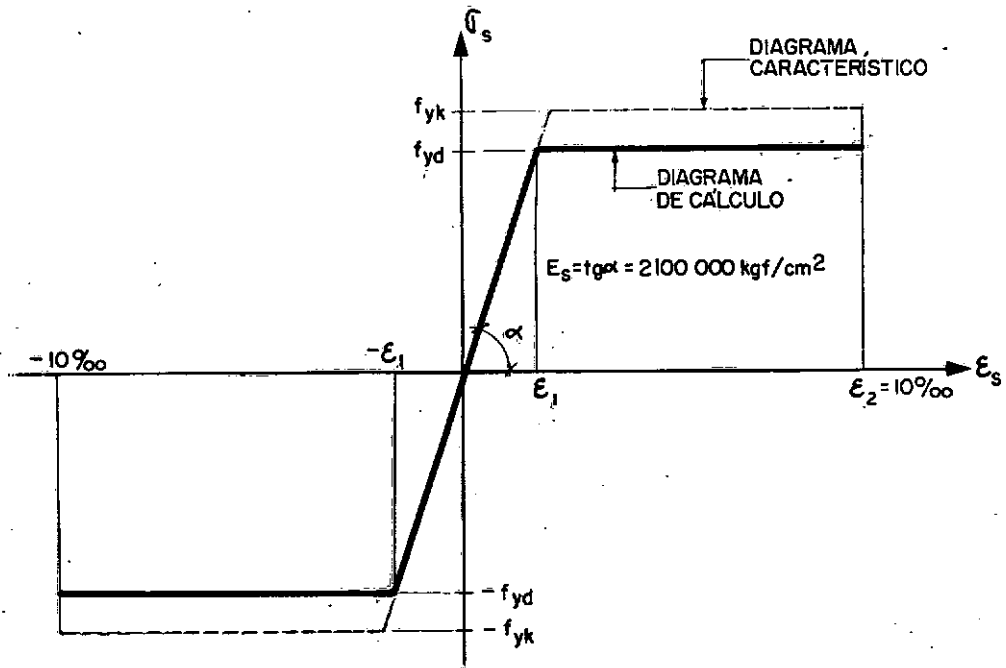


Fig. 2

Tem-se:

f_{yk} - valor característico da tensão de escoamento do aço

f_{yd} - valor de cálculo da tensão de escoamento do aço; $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$, sendo γ_s um coeficiente de minoração da tensão de escoamento do aço.

Apresentam-se, no quadro a seguir, valores numéricos relativos aos diagramas tensão-deformação de cálculo dos aços CA-24, CA-32, CA-40A, CA-50A e CA-60A. Considera-se $\gamma_s = 1,15$.

Aço	f_{yd} (kgf/cm ²)	$\epsilon_1 = \frac{f_{yd}}{E_s}$	ϵ_2
CA-24	2087	0,994 ⁰ /∞∞	10 ⁰ /∞∞
CA-32	2783	1,325 ⁰ /∞∞	10 ⁰ /∞∞
CA-40A	3478	1,656 ⁰ /∞∞	10 ⁰ /∞∞
CA-50A	4348	2,070 ⁰ /∞∞	10 ⁰ /∞∞
CA-60A	5217	2,484 ⁰ /∞∞	10 ⁰ /∞∞

b.2 - Aço Tipo B

Este tipo de aço, encruado, não apresenta patamar de escoamento definido. Define-se uma tensão de escoamento convencional, como pode ser observado na Fig.3. Indicam-se na figura os diagramas característico e de cálculo, salientando-se que o diagrama de cálculo é obtido do característico mediante uma afinidade paralela à reta de Hooke, de razão $\frac{1}{\gamma_s}$.

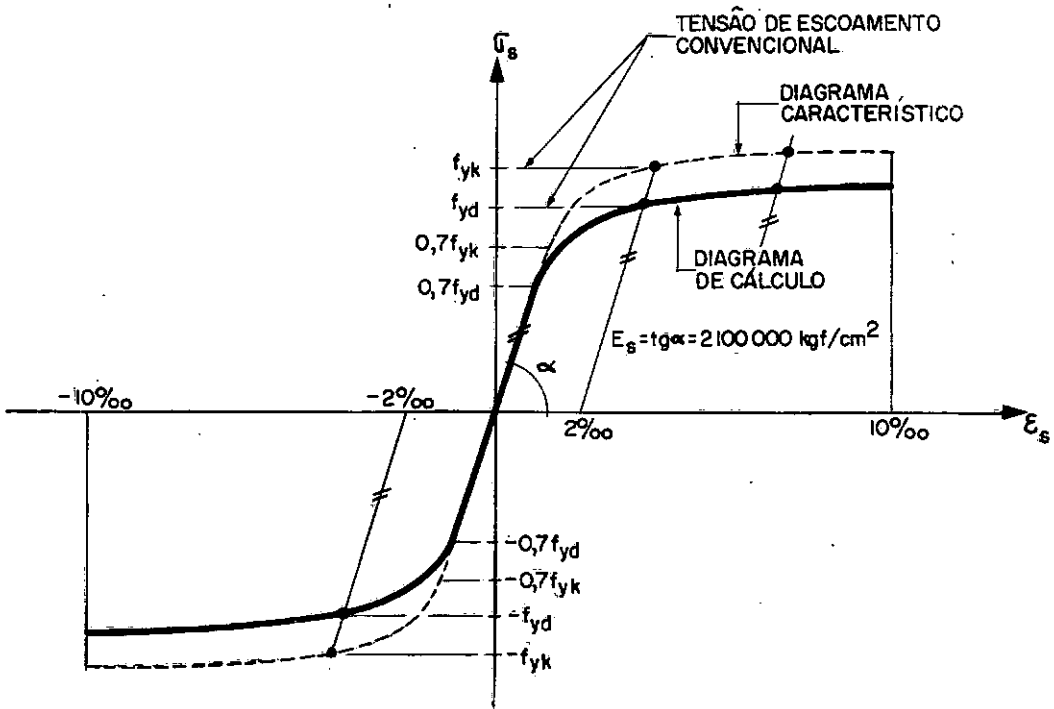


Fig. 3

Os diagramas característico e de cálculo podem ser traduzidos pelas expressões:

$$\text{para } 0 \leq \sigma_s \leq 0,7f_y \rightarrow \epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\text{para } \sigma_s \geq 0,7f_y \rightarrow \epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0,823 \left(\frac{\sigma_s}{f_y} - 0,7 \right)^5$$

Tem-se:

$$f_y = f_{yk} \text{ - diagrama característico}$$

$$f_y = f_{yd} \text{ - diagrama de cálculo}$$

Na Fig. 4 mostra-se o diagrama tensão-deformação a dotado neste trabalho para os aços tipo B.

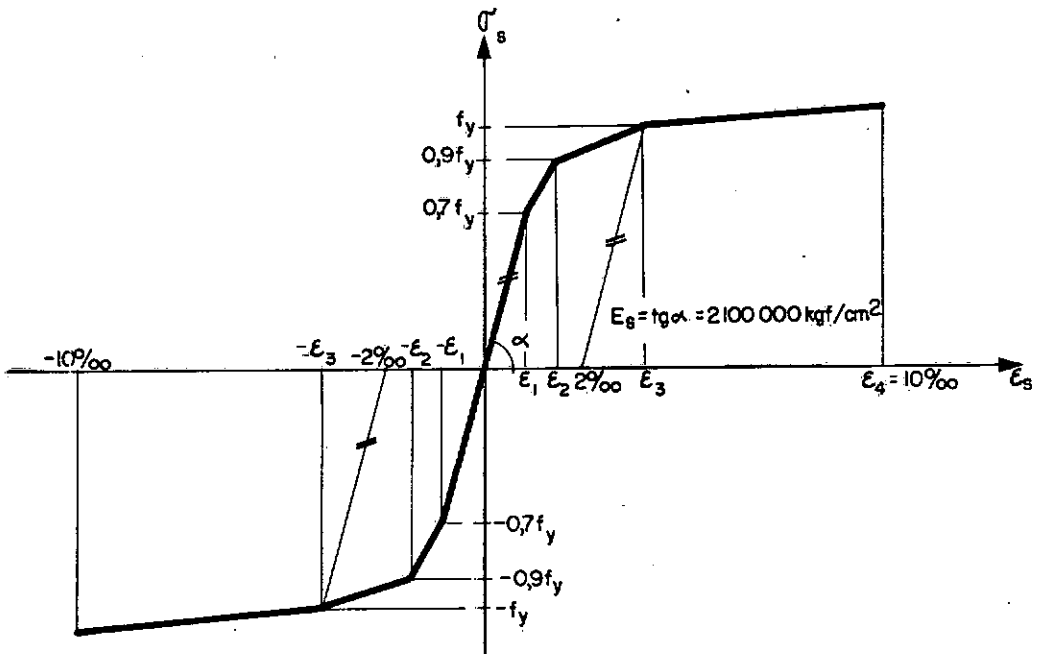


Fig. 4

Conforme se trate ou do diagrama característico, ou do de cálculo, tem-se na Fig. 4 $f_y = f_{yk}$ ou f_{yd} , respectivamente.

Podemos escrever:

$$\epsilon_1 = \frac{0,7f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_2 = \frac{0,9f_y}{E_s} + \frac{0,2633}{1000}$$

$$\epsilon_3 = \frac{2}{1000} + \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_4 = \frac{10}{1000}$$

Estão assinalados, no quadro a seguir, valores numéricos referentes aos diagramas tensão-deformação de cálculo dos aços CA-40B, CA-50B e CA-60B. Considera-se $\gamma_s = 1,15$

Aço	$0,7f_{yd}$ (kgf/cm ²)	$0,9f_{yd}$ (kgf/cm ²)	f_{yd} (kgf/cm ²)	$\sigma_s, 10^0/00$ (kgf/cm ²)	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4
CA-40B	2435	3130	3478	3818	1,160 ⁰ /00	1,753 ⁰ /00	3,656 ⁰ /00	10 ⁰ /00
CA-50B	3044	3913	4348	4753	1,450 ⁰ /00	2,126 ⁰ /00	4,070 ⁰ /00	10 ⁰ /00
CA-60B	3652	4695	5217	5679	1,739 ⁰ /00	2,499 ⁰ /00	4,484 ⁰ /00	10 ⁰ /00

1.1.2 - Hipótese das Seções Planas

Admite-se como válida a hipótese das seções planas, ou seja, as seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da peça. Implicitamente, isto significa desprezar as deformações provenientes do esforço cortante, bem como considerar perfeita a aderência entre a armadura e o concreto.

1.1.3 - Esgotamento da Capacidade Resistente da Seção

Adotam-se as recomendações do CEB-FIP. Assim sendo, a resistência de uma seção transversal é limitada pela ocorrência ou de uma deformação considerada excessiva na armadura, ou então de um encurtamento relativo no concreto que produza o seu esmagamento. Limita-se o alongamento relativo na armadura em $10^0/00$ (região 1 na Fig. 5). Considera-se que o esmagamento do concreto ocorre quando o seu encurtamento relativo atinge $-3,5^0/00$ em seções parcialmente comprimidas (região 2 na Fig. 5), ou $-3,5^0/00 - 0,75\varepsilon_{c1}$ (sendo ε_{c1} o encurtamento relativo mínimo na seção) em seções totalmente comprimidas (região 3 na Fig. 5).

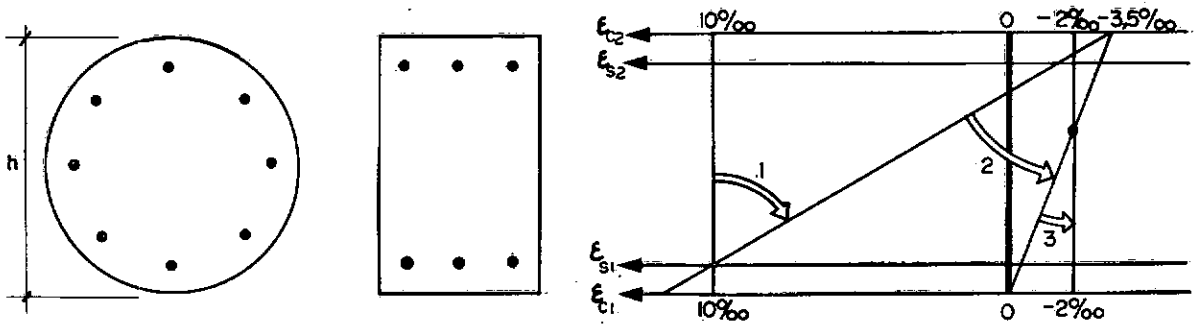


Fig. 5

1.1.4 - Carregamento

Sõ se consideram no programa cargas que atuam diretamente nos nós. Se houver cargas aplicadas no interior de uma barra, devemos discretizã-la em dois ou mais elementos, introduzindo nós fictícios nos pontos de aplicação destas cargas.

1.2 - Comportamento Não-Linear

Desde que não se verifiquem relações lineares entre ações e deslocamentos numa estrutura, diz-se que ela tem um comportamento não-linear. Uma vez que nossa meta é efetuar uma análise não-linear, cumpr-se então destacar bem os motivos básicos que contribuem para esse tipo de comportamento. Paralelamente, visando o estudo dos pórticos planos de concreto armado, pretende-se esclarecer melhor o que pode ser realizado, com vista  substituição da análise não-linear por uma série de cálculos li-

neares.

O comportamento não-linear (ou não-linearidade) de uma estrutura deve-se a cada uma das causas que passamos a descrever:

1.2.1 - Não-Linearidade Física

A não-linearidade física (ou do material), como o nome indica, decorre do fato do material não apresentar um diagrama tensão-deformação linear, como é o caso tanto do concreto quanto do aço. Para o concreto armado, normalmente, a não-linearidade do material vem expressa em termos de curvas momento-curvatura, dependentes do esforço normal (Fig. 6). Naturalmente, a forma da seção transversal, a percentagem de armadura e a definição dos diagramas tensão-deformação dos materiais, formam as bases para a determinação destas curvas.

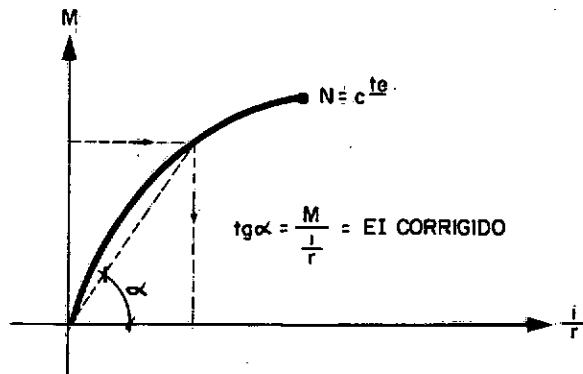


Fig. 6

Assim, um ponto de uma determinada curva momento-curvatura é obtido pela consideração das equações de equilíbrio para o esforço normal e momento fletor, admitindo-se uma distribuição linear de deformações na seção transversal.

Pode-se, portanto, elaborar uma vasta coleção de tabelas ou de ábacos para distintas formas de seção transversal, vários tipos de aço e de concreto, diferentes percentagens e distribuições de armadura, abrangendo-se também em cada tabela ou ábaco diversos valores para o esforço normal.

Como já foi frisado anteriormente, a análise não-linear normalmente é substituída por uma série de análises lineares. Em cada uma destas são obtidos, da maneira usual, deslocamentos e esforços nas extremidades dos elementos. Com estes resultados efetuam-se correções nas matrizes de rigidez dos elementos, visando a próxima etapa do cálculo.

Nos programas normalmente elaborados para análise de pórticos planos de concreto armado, no que se refere à não-linearidade do material, costumam-se realizar essas correções com base nas curvas $M - N - \frac{1}{r}$. As barras da estrutura devem ser divididas em diversos elementos, calculando-se em todos estes valores médios para os esforços obtidos na análise linear. Em correspondência a um par momento e normal assim definido, determina-se então um novo valor para EI (rigidez à flexão), rela

tivo ao elemento considerado, de acordo com o procedimento esquematizado na Fig. 6. Por outro lado, se desejamos corrigir também os valores de EA (rigidez axial), devemos construir outras curvas relacionando esforços e deformações axiais.

Na realidade, há de se convir que esse processo de correção nem sempre resulta ser um caminho dos mais práticos. Isto decorre, principalmente, da necessidade de se dispor, num dado momento, de uma coleção adequada de tabelas para a utilização no transcorrer da análise.

No programa ora elaborado, as correções efetuadas em cada passo do cálculo, tendo em vista a não-linearidade do material, se baseiam na obtenção de módulos de elasticidade secantes, retirados diretamente dos diagramas tensão-deformação dos materiais. O conhecimento da distribuição de deformações em diversas seções transversais, definida em função dos resultados fornecidos pela etapa anterior da análise, constitui-se no ponto fundamental para a determinação desses módulos de elasticidade ao longo de cada elemento.

Como se verá posteriormente, torna-se bastante simples a análise dos pórticos planos de concreto armado, seguindo esse caminho.

1.2.2 - Não-Linearidade Geométrica

Uma estrutura pode ter um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke, desde que seus elementos estejam solicitados tanto por esforços axiais como por momentos fletores. Neste caso, a deflexão lateral de um membro traz como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais (de segunda ordem), em virtude da presença da força normal. A este tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica.

Como exemplo, podemos citar o caso da coluna esbelta da Fig.7, submetida a uma carga axial e a um momento atuantes no topo.

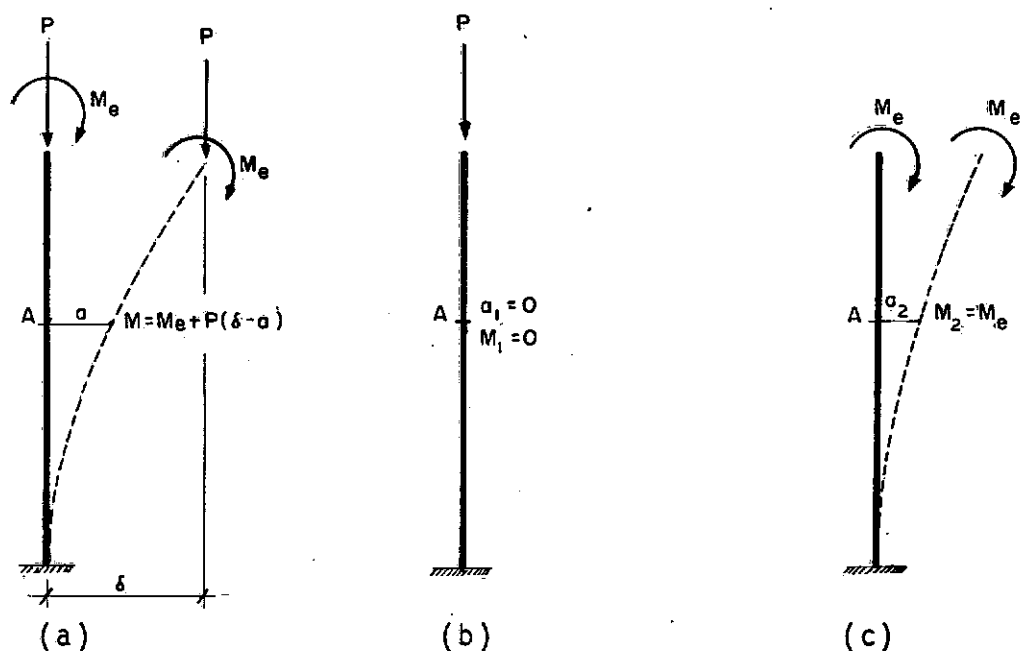


Fig. 7

Suponhamos inicialmente agindo sobre a estrutura apenas a carga P . Evidentemente, a deflexão lateral e o momento fletor, no ponto A , serão $a_1 = 0$ e $M_1 = 0$, respectivamente (Fig. 7.b). Agora façamos atuar na peça o momento M_e , também isoladamente. Em decorrência, temos para o ponto A da coluna um deslocamento a_2 e um momento fletor $M_2 = M_e$ (Fig. 7.c). No entanto, se considerarmos a ação conjunta de P e M_e , as deflexões introduzidas pelo momento M_e induzem a força P a produzir uma flexão adicional na estrutura. Como consequência, a peça estará submetida, no ponto A , a um momento fletor $M = M_e + P(\delta - a)$, maior (em módulo) que $M_1 + M_2$ (Fig. 7.a). Ressalte-se que a parcela $P(\delta - a)$ representa o momento fletor de segunda ordem. Somos também conduzidos a um valor para a , maior que $a_1 + a_2$. Conclui-se, portanto, que o princípio da superposição não é válido neste caso, caracterizando-se assim o comportamento não-linear da estrutura.

Em muitas ocasiões, tal como no exemplo da Fig. 7, é de fundamental importância a consideração da interação axial-flexão na análise estrutural. Vejamos agora que procedimento deve ser adotado, tendo em vista a sua inclusão na análise dos pórticos planos.

A não validade do princípio da superposição, neste caso, afastaria logo de início a possibilidade de utilização do método da rigidez, pelo menos na forma em que habitualmente é em

pregado. No entanto, como se verá posteriormente, a força normal pode ser encarada como um parâmetro que afeta os termos da matriz de rigidez de um elemento. Nestas condições permanece válido o princípio da superposição, sendo legítimo, portanto, se estender o uso do método da rigidez às estruturas de comportamento não-linear geometricamente.

Na análise dos pórticos planos, os esforços axiais normalmente não são conhecidos de início. Faz-se então uma estimativa para N em todos os membros ($N = 0$, em geral), procedendo-se em seguida a um primeiro ciclo de cálculo. Visando a próxima etapa da análise, corrigem-se os termos das matrizes de rigidez dos elementos, tomando-se por base os valores obtidos para as forças normais no passo anterior, e assim por diante.

Embora tenham sido apresentadas isoladamente, é evidente que em cada etapa do cálculo efetuam-se as correções simultaneamente, cada uma delas associada a um dos tipos de não linearidade mencionados.

Convém ressaltar também que mesmo sendo considerados na análise efeitos de segunda ordem, ainda assim admite-se como válida a hipótese de pequenas deformações. Uma decorrência imediata do que acabamos de mencionar é o fato de se poder adotar para a curvatura a expressão simplificada $\frac{1}{r} = \frac{d^2w}{dx^2}$, tal como se observa em (15).

Para finalizar, saliente-se que no processo de análise a ser apresentado, as coordenadas dos nós da estrutura, em qualquer etapa do cálculo, permanecem sempre com seus valores iniciais.

1.3 - Deformação Lenta do Concreto

Tanto neste item como no subsequente, procura-se dar ênfase a dois tópicos de particular interesse no que se refere ao comportamento dos pórticos planos de concreto armado.

Inicialmente, vamos nos deter um pouco na deformação lenta do concreto.

Seja, por exemplo, uma coluna de concreto armado (Fig. 8), submetida a um carregamento de longa duração.

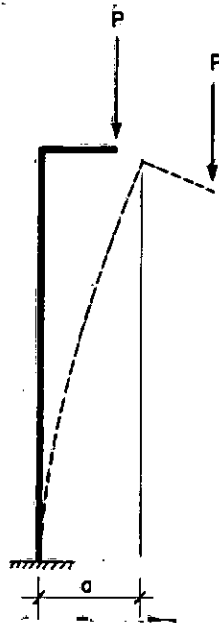


Fig. 8

É válido se afirmar, neste caso, que as deflexões iniciais e conseqüentemente os momentos fletores, terão seus valores acrescidos com o tempo devido à fluência do concreto. Dependendo deste período de tempo, o comportamento da estrutura pode sofrer sensíveis alterações em comparação com suas respostas frente às solicitações de curta duração.

Para ilustrar, consideremos um ensaio de carga para a coluna da Fig. 8, efetuado de duas formas distintas. No gráfico da Fig. 9 estão assinaladas duas curvas. A primeira é resultante de um ensaio em que o carregamento é incrementado, continuamente, até que se atinja a capacidade de carga P_1 . Já a segunda curva apresenta, como característica principal, um patamar correspondente a um determinado nível de carga. Este patamar está associado ao tempo no ensaio em que o carregamento teve sua intensidade mantida constante. Neste caso, o comportamento da coluna se modifica, face a presença de cargas de longa duração. Como conseqüência, sua capacidade de carga P_2 , como se observa na Fig. 9, torna-se menor do que P_1 , sendo esta redução tanto mais acentuada quanto mais esbelta for a peça e maior for o período de sustentação do carregamento.

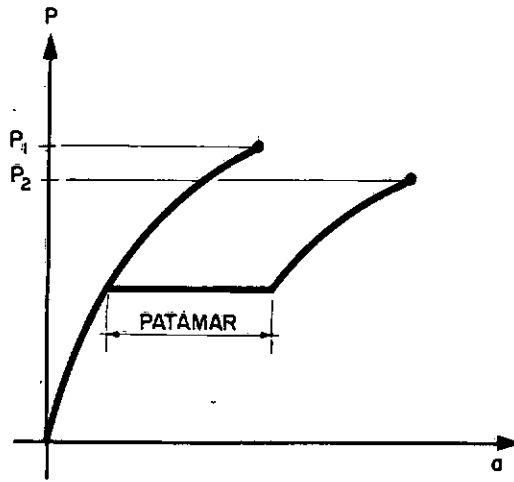


Fig. 9

No presente trabalho, como já foi frisado anteriormente, analisa-se o comportamento dos pórticos planos diante dos carregamentos de curta duração. Portanto, não se manifestam os efeitos de deformação lenta, resultando para o concreto um diagrama tensão-deformação independente do tempo (vide Fig. 1).

1.4 - Estado Limite Último

No que se refere ao estado limite último (de ruína) consideram-se neste trabalho duas formas distintas de comportamento para os pórticos planos de concreto armado. Assim, dependendo principalmente da geometria da estrutura e do tipo de carregamento aplicado, o estado limite último pode ser atingido ou por esgotamento da capacidade resistente dos materiais, ou então

por instabilidade do equilíbrio. O esgotamento da capacidade resistente é caracterizado pelo esmagamento do concreto, ou por uma deformação considerada excessiva na armadura. Já, quando ocorre instabilidade do equilíbrio, o material não é solicitado até o limite máximo de sua resistência.

As duas formas de comportamento mencionadas acima podem ser melhor visualizadas através dos gráficos das Figs. 10.b e 11.b.

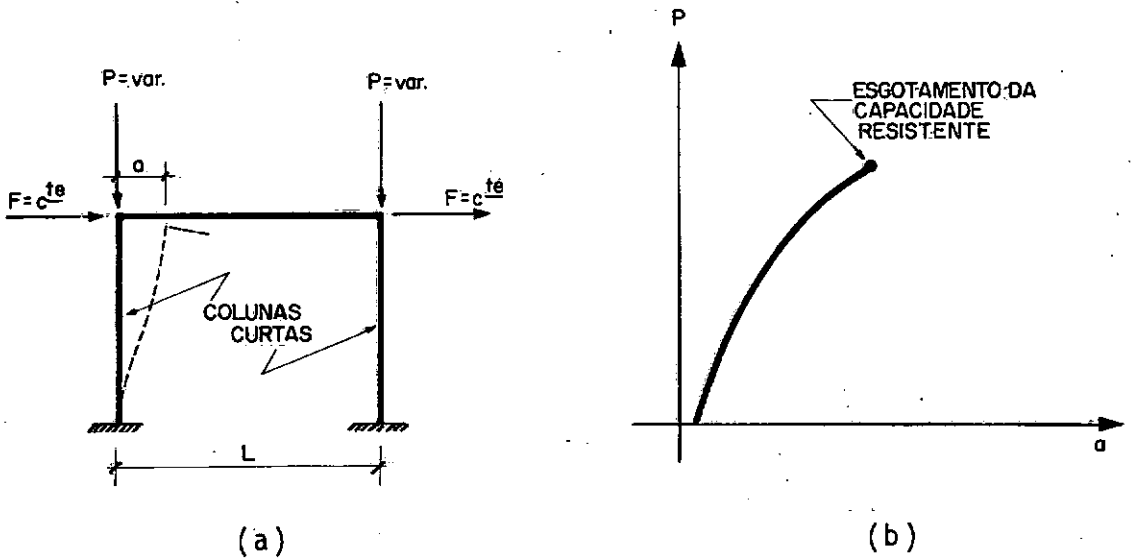


Fig. 10

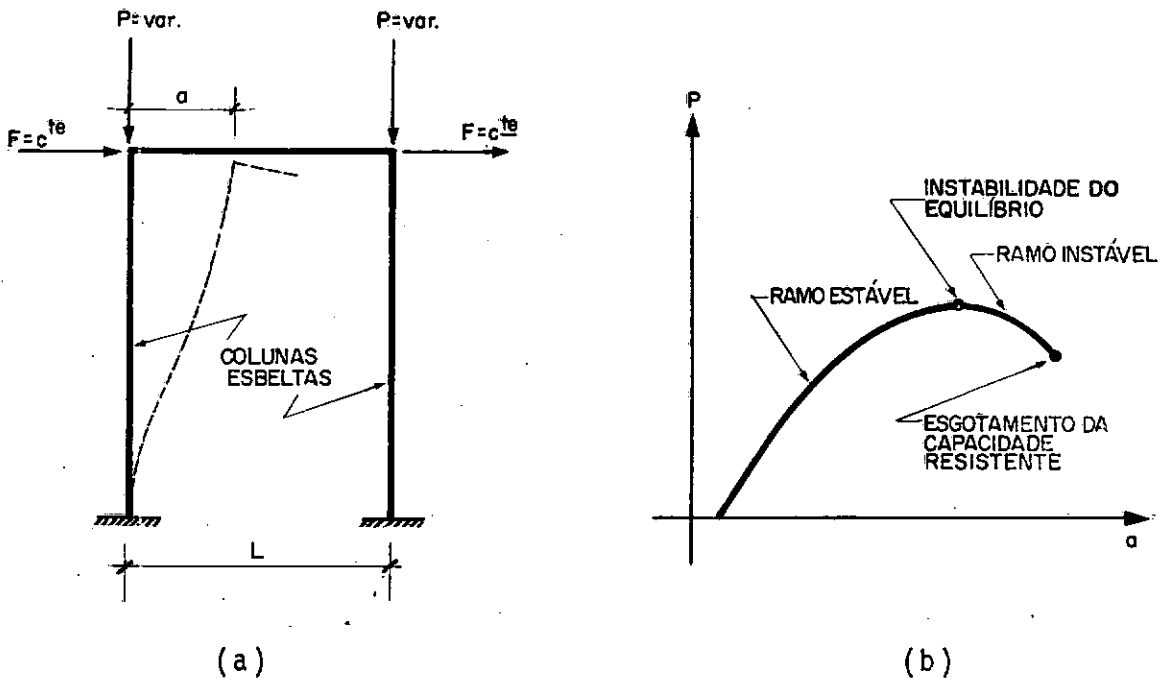


Fig. 11

Em ambos os gráficos mostra-se a lei de variação das cargas verticais P com a flecha a , porém cada um deles relaciona-se a um tipo diferente de pórtico quanto à geometria.

O primeiro tipo (Fig. 10.a) caracteriza-se pelo fato das colunas apresentarem pequena esbelteza. Neste caso, como está indicado na Fig. 10.b, as cargas P crescem até um determinado nível, quando então ocorre o esgotamento da capacidade resistente.

Já no segundo tipo, em que as colunas possuem grande esbelteza (Fig. 11.a), a capacidade de carga está associada à

instabilidade do equilíbrio, como se observa na Fig. 11.b. Esta curva, em sua totalidade, só pode ser obtida através de um procedimento em que se controlem deslocamentos e se tenham cargas como resposta.

O programa automático que aqui apresentamos não reproduz o ramo descendente (instável) da curva $P - a$ (vide Fig. 11.b), uma vez que foi elaborado visando obter deslocamentos como resposta, ao invés de cargas.

CAPÍTULO II

PROCESSO DE ANÁLISE

2.1 - Noções Gerais do Método da Rigidez

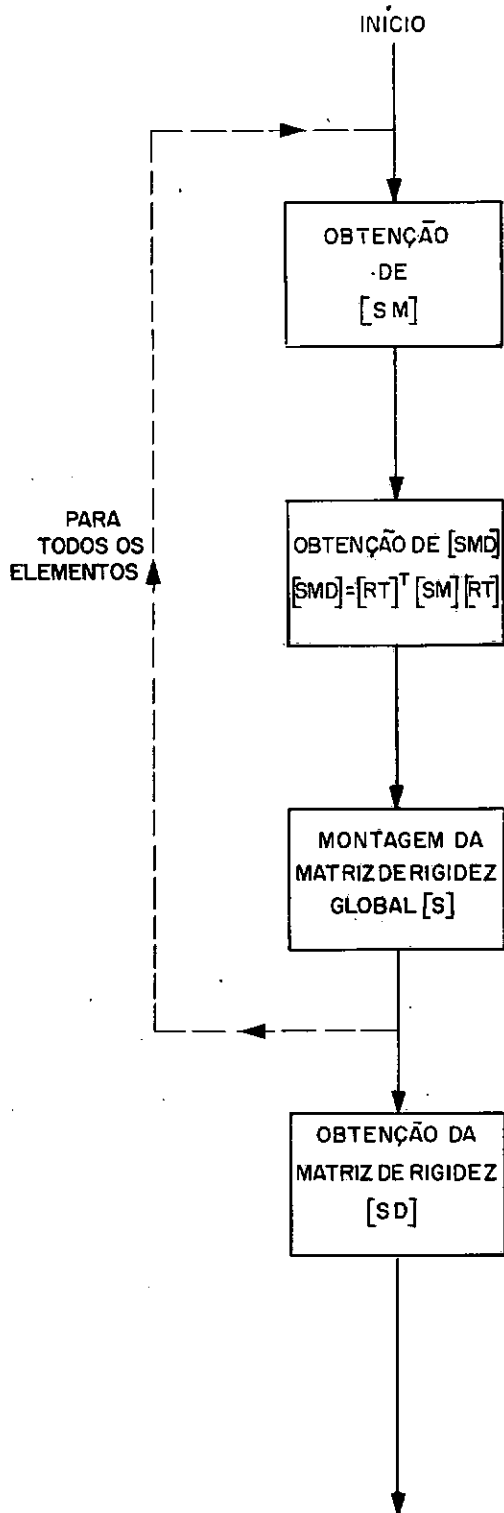
O método da rigidez, aplicável às estruturas de comportamento linear, tem uma formulação simples e totalmente adaptável à computação automática, visto que todas as fases do cálculo podem-se apresentar como simples operações matriciais. Além disso, a formação das próprias matrizes é facilmente automatizável.

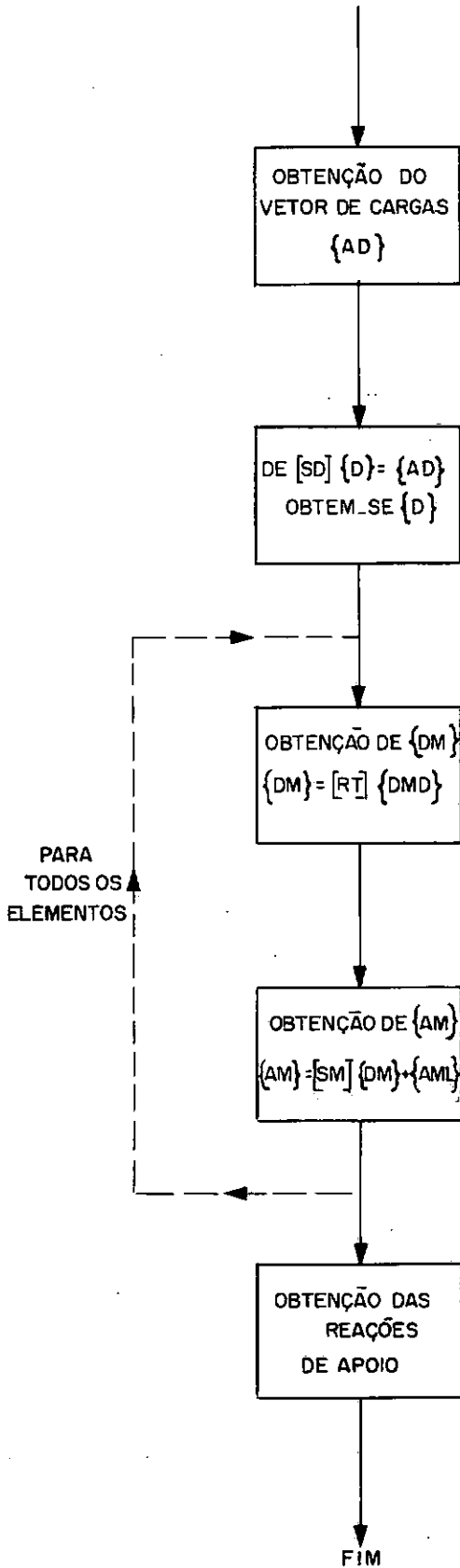
A seguir, faz-se uma breve discussão sobre cada uma das fases em que se divide a análise de uma estrutura reticulada por este método. Posteriormente indica-se como obter a matriz de rigidez de um elemento no sistema local e também como transformá-la para o sistema global de eixos.

2.1.1 - Análise pelo Método da Rigidez

Neste método de análise as incógnitas são os deslocamentos dos nós da estrutura. As equações fundamentais, traduzindo o equilíbrio dos nós deslocáveis, derivam-se da aplicação direta do princípio da superposição.

A análise de uma estrutura reticulada por este método obedece sempre ao esquema apresentado a seguir.





Para cada elemento determina-se uma matriz de rigidez $[SM]$, relativa a um sistema local de eixos. Por intermédio de uma operação matricial em que se tira partido da matriz de rotação transformada $[RT]$, passa-se a referir a matriz de rigidez do elemento ao sistema de eixos globais (ou da estrutura). Obtém-se desta forma a matriz $[SMD]$.

Obedecendo a um processo sistemático em que se somam as contribuições dos elementos que concorrem num n.º (através dos coeficientes das matrizes $[SMD]$), determina-se a matriz de rigidez global da estrutura, $[S]$, relativa a todos os deslocamentos possíveis dos n.ºs. A partir desta matriz, define-se a matriz de rigidez $[SD]$, relacionada unicamente aos graus de liberdade da estrutura.

Em seguida monta-se um vetor de cargas combinadas $\{AD\}$, também correspondente aos graus de liberdade da estrutura, somando-se cargas reais e cargas equivalentes de n.º. Quando s.º existem cargas que atuam diretamente nos n.ºs, o vetor $\{AD\}$ é constituído apenas de cargas reais de n.º.

Através da resolução de um sistema de equações lineares, simbolicamente representado por $[SD]\{D\} = \{AD\}$, chega-se aos valores dos deslocamentos de n.º desconhecidos (vetor $\{D\}$). Não devemos esquecer que em se tratando de pórticos planos, a cada n.º estão associados três deslocamentos, duas translações e u-

ma rotação.

De posse do vetor $\{D\}$, define-se para cada elemento da estrutura um vetor $\{DMD\}$, no sistema global, contendo os deslocamentos correspondentes aos extremos do membro (seis deslocamentos no caso de pórticos planos). Utilizando a matriz de rotação $[RT]$, pode-se obter a transformação desses deslocamentos para o sistema local (vetor $\{DM\}$).

Estamos nesta altura habilitados ao cálculo das ações nas extremidades dos elementos, por intermédio da expressão matricial $\{AM\} = [SM]\{DM\} + \{AML\}$, onde no vetor $\{AML\}$ aparecem as ações de engastamento perfeito. Para uma estrutura com cargas aplicadas somente nos nós, resulta $\{AM\} = [SM]\{DM\}$, por ser sempre nulo o vetor $\{AML\}$.

Por fim determinam-se as reações de apoio, considerando por exemplo, em cada nó que apresente vínculos, as equações de equilíbrio referentes às direções restringidas, tal como se faz neste trabalho. Podemos então dar por encerrada a análise.

2.1.2 - Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento

a) Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Local

Desde que atuem somente cargas aplicadas diretamen-

te nos n \bar{o} s, a express \tilde{a} o matricial $\{AM\} = [SM]\{DM\}$ relaciona as a \tilde{c} o \tilde{e} s e os deslocamentos nos extremos de um elemento. Esta express \tilde{a} o, referida a um sistema de eixos locais, mostra a matriz de rigidez $[SM]$ como sendo exatamente o elo de liga \tilde{c} ao entre esfor \tilde{c} os e deslocamentos nos extremos do elemento (vide Figs. 14.a e 14.b). A seguir, apresenta-se um processo para obten \tilde{c} ao da matriz $[SM]$, no caso de um elemento de p \tilde{o} rtico plano.

Inicialmente, deve-se definir o sistema de eixos locais adotado. Estes eixos de refer \tilde{e} ncia ter \tilde{a} o sua origem na extremidade i de um elemento gen \tilde{e} rico. O eixo x \tilde{e} dirigido do n \bar{o} i , considerado como inicial, ao n \bar{o} j , considerado como final, sendo portanto o seu sentido positivo de i para j (Fig. 12). O eixo z , perpendicular ao plano da estrutura, tem definido o seu sentido positivo quando voltado para o lado oposto ao que se encontra o observador. O eixo y \tilde{e} ent \tilde{a} o determinado de forma a compor o triedro direto x - y - z .

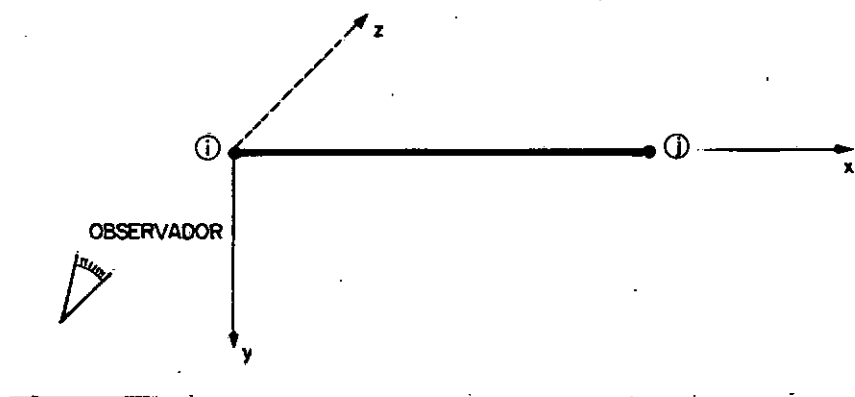


Fig. 12

Uma vez estabelecido o sistema de eixos locais, passamos à obtenção da matriz $[SM]$. Pode-se construí-la em duas fases distintas. O primeiro passo consiste na análise do problema da Fig. 13, em que se procura relacionar os esforços $\{AM_{\epsilon}\}$ (Fig. 13.c) aos deslocamentos correspondentes $\{DM_{\epsilon}\}$ (Fig. 13.b). Examina-se, portanto, nesta fase, o estado de deformação do elemento.

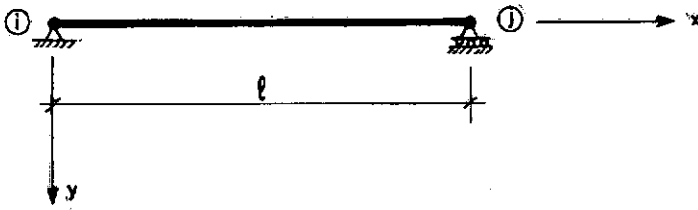


Fig. 13.a

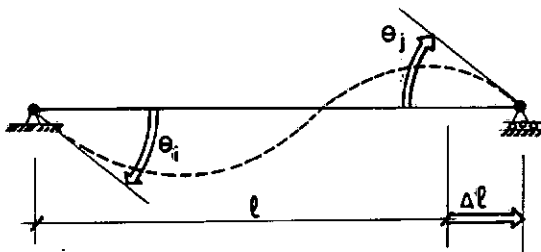


Fig. 13.b

$$\{DM_{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \Delta l \\ \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

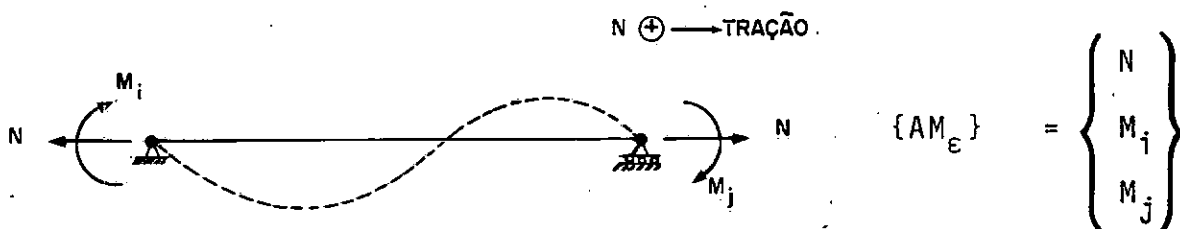


Fig. 13.c

O relacionamento entre $\{AM_\epsilon\}$ e $\{DM_\epsilon\}$ exprime-se da seguinte forma:

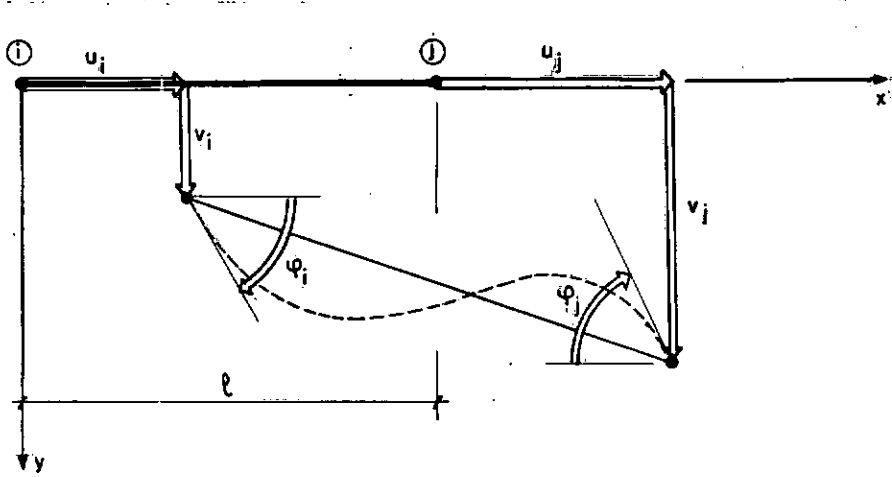
$$\{AM_\epsilon\} = [SM_\epsilon] \{DM_\epsilon\} \quad (1)$$

A matriz $[SM_\epsilon]$, para um membro prismático, pode ser assim escrita:

$$[SM_\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ & \text{sim.} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

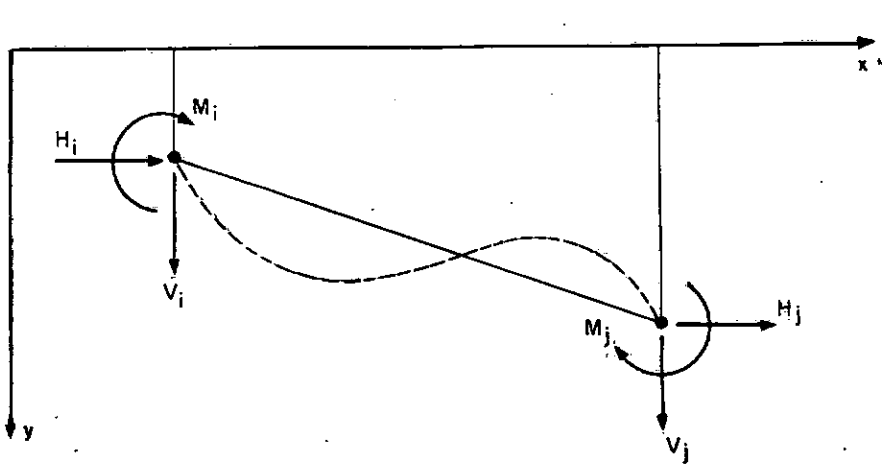
A segunda fase está associada a deslocamentos de corpo rígido. Assim é que enquanto o carregamento indicado na Fig. 13.c continua a agir, desloca-se o elemento, horizontalmente, de uma distância u_i . Posteriormente o suporte i sofre um desloca

mento para baixo (v_i) e em seguida o mesmo ocorre ao suporte j (deslocamento v_j). O elemento transfere-se então para a posição indicada na Fig. 14.



$$\{DM\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

Fig. 14.a



$$\{AM\} = \begin{Bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

Fig. 14.b

Comparando as Figs. 13 e 14, podemos escrever:

$$H_i = -N$$

$$V_i = \frac{(M_i + M_j)}{l}$$

$$M_i = M_i$$

$$H_j = N$$

$$V_j = -\frac{(M_i + M_j)}{l}$$

$$M_j = M_j$$

$$\Delta l = u_j - u_i$$

$$\theta_i = \varphi_i - \frac{(v_j - v_i)}{l}$$

$$\theta_j = \varphi_j - \frac{(v_j - v_i)}{l}$$

(2)

Matricialmente, tem-se:

$$\{DM_\epsilon\} = [C] \{DM\} \quad (3)$$

$$\{AM\} = [C]^T \{AM_\epsilon\} \quad (4)$$

Em forma expandida (3) e (4) tomam o seguinte aspec

to:

$$\begin{Bmatrix} \Delta l \\ \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 1 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 1/l \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix}$$

De (1) e (4), vem:

$$\{AM\} = [C]^T [SM_\epsilon] \{DM_\epsilon\} \quad (5)$$

Por (3) e (5), temos:

$$\{AM\} = \underbrace{[C]^T [SM_\epsilon] [C]}_{[SM]} \{DM\}$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento no sistema local pode ser determinada por intermédio da operação matricial,

$$[SM] = [C]^T [SM_\epsilon] [C] \quad (6)$$

Efetuada as operações indicadas, a matriz $[SM]$, para um membro prismático, toma o seguinte aspecto:

$$[SM] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & & \\ & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

b) Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global

Uma vez obtida a matriz de rigidez $[SM]$, podemos referi-la aos eixos globais mediante uma simples operação matricial.

O sistema de referência escolhido para a estrutura está assinalado na Fig. 15. O plano X-Y corresponde sempre ao plano da estrutura, devendo-se notar também que o eixo Z é dirigido para o observador.

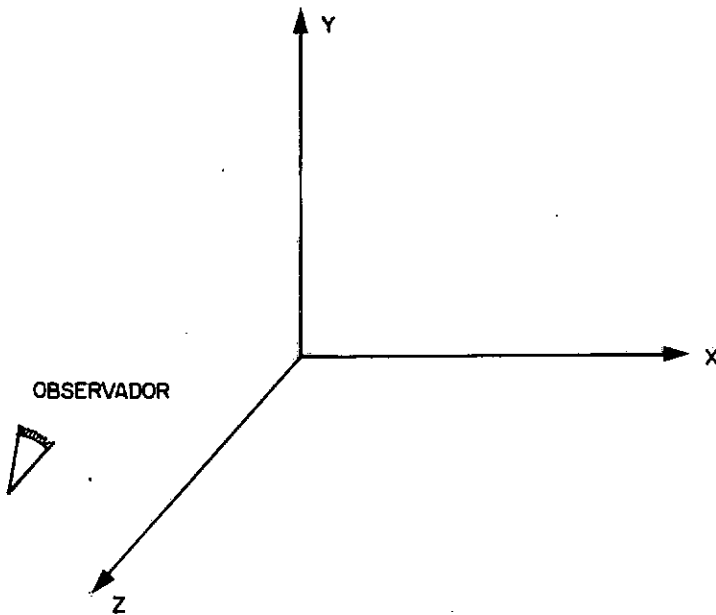


Fig. 15

Consideremos o elemento da Fig. 16, de extremidades i e j , cujo eixo x forma um ângulo β com o eixo X . Neste caso, a matriz de rotação transformada $[RT]$, para ações e deslocamentos nas extremidades do membro, pode ser assim escrita:

$$[RT] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & \cos\beta & \text{sen}\beta & 0 \\ & & & & -\cos\beta & 0 \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

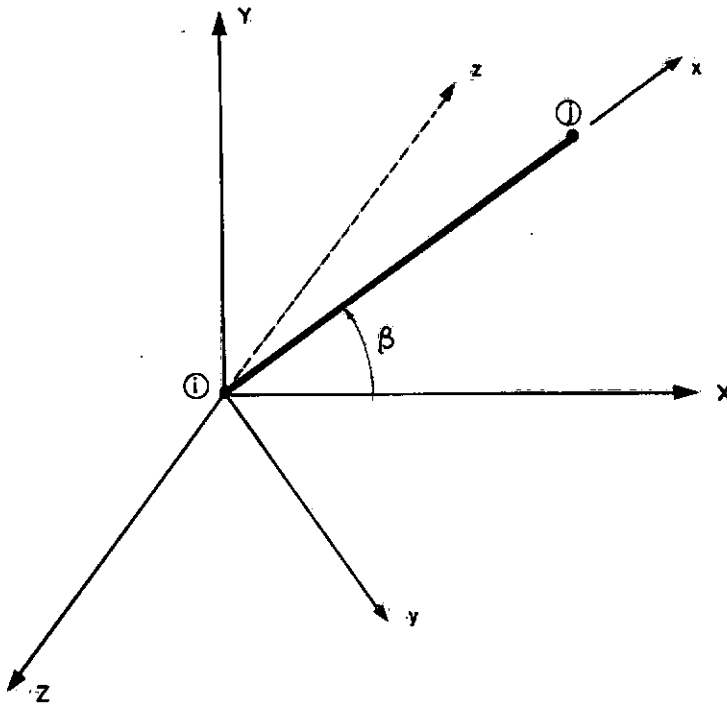


Fig. 16

A transformação da matriz de rigidez $[SM]$ para os eixos globais processa-se então de acordo com a expressão matricial,

$[SMD] = [RT]^T [SM] [RT]$, onde $[SMD]$ representa, portanto, a matriz de rigidez do elemento referida aos eixos da estrutura.

2.2 - Considerações sobre a Análise Não-Linear

Como já se frisou anteriormente, a análise não-linear pode ser substituída, em caráter aproximado, por uma série de cálculos lineares. Em cada etapa são corrigidas as carac-

terísticas de que depende o problema, com base nos resultados obtidos no passo anterior. Nos processos iterativos, tais como o utilizado neste trabalho, o cálculo linear é repetido tantas vezes quantas forem necessárias, até que em dois passos consecutivos os resultados obtidos sejam os mesmos, a menos de um certo erro admissível.

Para as estruturas aqui analisadas, em que se consideram apenas cargas aplicadas nos nós (o que implica em se ter $\{AML\} = \{0\}$), os efeitos de não-linearidade afetam tão somente a matriz de rigidez $[SM]$. Assim, a menos da parte referente à determinação das reações de apoio, o esquema apresentado em 2.1.1 permanece válido para cada etapa linear da análise.

Como vimos em 2.1.2, a matriz de rigidez do elemento pode ser construída em duas fases distintas. Em cada uma delas, como se mostra a seguir, devem-se efetuar alterações objetivando a análise não-linear.

Na primeira fase, quando se examina o estado de deformação do elemento (Fig. 13), é tacitamente assumido que as rotações θ_i e θ_j estão ligadas exclusivamente aos momentos M_i e M_j , isto é, são calculadas como se a força normal não estivesse presente. Se temos por finalidade incluir na análise os efeitos de segunda ordem provenientes da interação axial-flexão, tal aproximação não pode ser mais permitida. Por outro lado (vide

1.2.1), ficou estabelecido que a não-linearidade do material seria simulada através da consideração de módulos de elasticidade secantes, ao longo do elemento, retirados diretamente dos diagramas σ - ϵ dos materiais. Sendo assim, a matriz $[SM_\epsilon]$, que relaciona os esforços $\{AM_\epsilon\}$ e os deslocamentos $\{DM_\epsilon\}$, deve ser estabelecida tendo-se em mente tanto a inclusão dos efeitos da força normal na flexão, como também a consideração de uma distribuição arbitrária de módulos de elasticidade no elemento.

A segunda fase da construção de $[SM]$ encerra também uma modificação. Efetivamente, assume-se em 2.1.2 que o valor das reações verticais,

$$\frac{(M_i + M_j)}{l},$$

não sofre alterações quando o elemento da Fig. 13 experimenta os deslocamentos v_i e v_j . Na realidade, devido à ligeira inclinação do membro, a força normal causa reações verticais adicionais.

Como se pode observar, as duas fases em que se baseia a construção de $[SM]$ precisam ser repassadas, visando a análise não-linear. Passamos, pois, a tratar diretamente deste assunto no item seguinte.

2.3 - Matriz de Rigidez do Elemento para a Análise Não-Linear

2.3.1 - Preliminares

Consideremos a Fig. 17.a, onde se mostra uma barra apresentando uma distribuição arbitrária de módulos de elasticidade, variável tanto ao longo da seção transversal (porém mantendo-se simétrica em relação ao eixo y) como na direção do comprimento. Esta situação ocorre, com efeito, em cada passo da análise, como consequência do processo utilizado para simular a não-linearidade do material (vide 1.2.1 e 2.2).

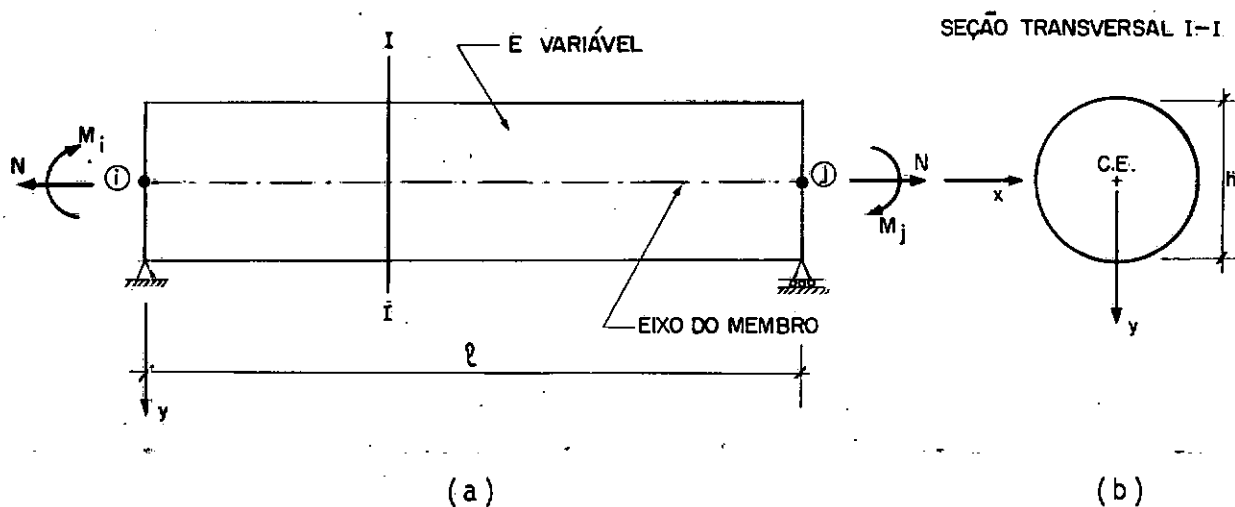


Fig. 17

Na Fig. 17.a acha-se também assinalado o eixo representativo do membro, cuja posição admite-se que seja escolhida livremente (qualquer posição paralela à indicada na figura). Neste caso, o eixo está localizado à meia altura, portanto, coin

cidindo com a linha que passa pelos centróides das seções transversais.

Observemos agora a seção transversal da Fig. 17.b. Se um esforço normal N e um momento fletor M atuam em C.E. (ponto em que o eixo escolhido para representar o membro intercepta a seção transversal), desenvolve-se ao longo da altura da seção uma distribuição linear de deformações (Fig. 18). É possível se decompor o diagrama de deformações em duas parcelas, uma delas constante em toda a altura e a outra variando linearmente de $-xh_2$ a xh_1 , com valor nulo em C. E..

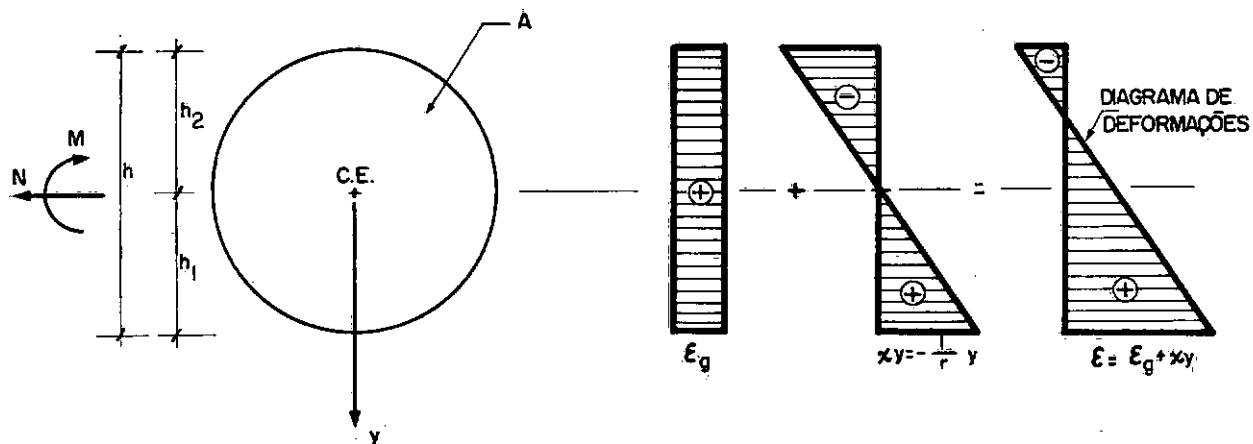


Fig. 18

A partir de $\epsilon = \epsilon_g + \chi y$, podemos escrever:

$$N = \int_A E \epsilon_g dA + \int_A E \chi y dA$$

$$M = \int_A E \epsilon_g y dA + \int_A E \chi y^2 dA$$

Assim, o relacionamento entre N e M , ϵ_g e χ , na seção transversal, pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_g \\ \chi \end{Bmatrix}$$

Os coeficientes da matriz $[G]$ são assim definidos:

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \int_A E dA \\ G_{12} &= G_{21} = \int_A E y dA \\ G_{22} &= \int_A E y^2 dA \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Por outro lado, a energia de deformação para a barra da Fig. 17.a pode ser obtida pela expressão:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\int_A E \epsilon^2 dA \right) dx$$

Tendo em vista que $\epsilon = \epsilon_g + \chi y$, vem:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\epsilon_g^2 \int_A E dA + 2 \epsilon_g \chi \int_A E y dA + \chi^2 \int_A E y^2 dA \right) dx \quad (8)$$

Comparando (7) e (8), segue:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (G_{11} \epsilon_g^2 + 2G_{12} \epsilon_g \chi + G_{22} \chi^2) dx \quad (9)$$

Feitas essas considerações, podemos passar diretamente à determinação da matriz $[SM]$ (relativa ao eixo escolhido para o

membro), para a análise não-linear.

2.3.2 - Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento para a Análise Não-Linear

Vamos então repassar as duas fases em que se baseia a construção de $[SM]$, de acordo com as idéias pré-estabelecidas em 2.2.

Na primeira fase, se procurará estabelecer um relacionamento entre $\{AM_\epsilon\}$ e $\{DM_\epsilon\}$, referente ao eixo escolhido para o membro (Fig. 19). A técnica utilizada, como se verá a seguir, está intimamente ligada ao método dos elementos finitos, uma vez que se lançará mão de funções de interpolação para os deslocamentos.

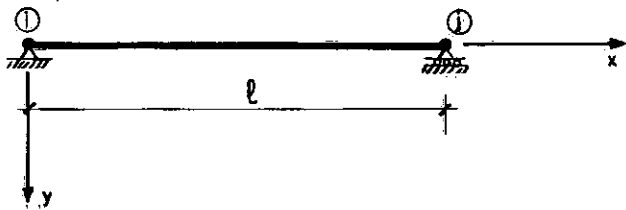


Fig. 19.a

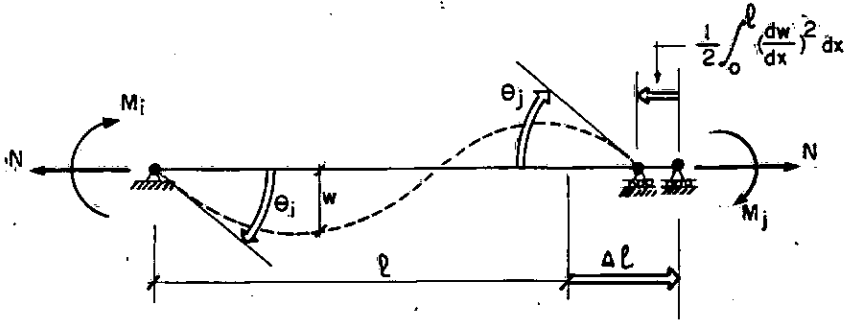


Fig. 19.b

A energia potencial total para o membro da Fig. 19 pode ser assim expressa:

$$\Pi = U - W \quad (10)$$

onde:

U - energia de deformação

W - trabalho das cargas externas

De acordo com 2.3.1, expressão (9), temos:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (G_{11} \epsilon_g^2 + 2G_{12} \epsilon_g \chi + G_{22} \chi^2) dx$$

Observando a Fig. 19, podemos escrever:

$$W = - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + N \Delta \ell + M_i \theta_i + M_j \theta_j \quad (11)$$

Em particular, o termo $\frac{1}{2} \int_0^{\ell} N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$ expressa o tra-

balho efetuado pela força N , em consequência da deflexão do membro. Este termo deve estar presente sempre que se julgar conveniente introduzir, em uma análise, os efeitos de segunda ordem de correntes da interação axial-flexão.

Substituindo (9) e (11) em (10), vem:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[G_{11} \varepsilon_g^2 + 2G_{12} \varepsilon_g \chi + G_{22} \chi^2 + \right. \\ \left. + N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx - N \Delta \ell - M_i \theta_i - M_j \theta_j \quad (12) \end{aligned}$$

Com o objetivo de exprimir a energia potencial total em termos de parâmetros deslocamento, serão introduzidas funções de interpolação para os deslocamentos.

Para deslocamentos na direção normal ao eixo representativo do membro, adota-se um polinômio do terceiro grau (Fig. 20).

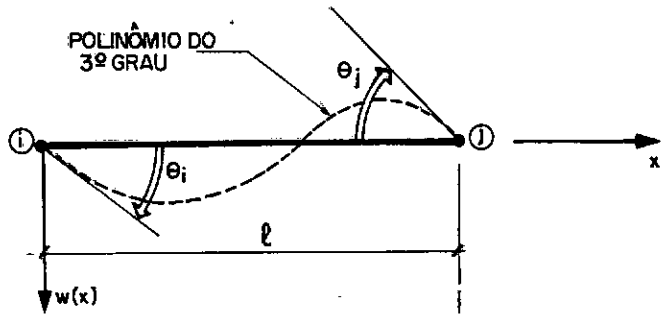


Fig. 20

Temos então:

$$w(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \quad (13)$$

Condições de bordo:

$$x = 0 \Rightarrow w(0) = 0$$

$$x = l \Rightarrow w(l) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \left(\frac{dw}{dx}\right)_0 = \theta_i$$

$$x = l \Rightarrow \left(\frac{dw}{dx}\right)_l = \theta_j$$

As constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 podem ser então determinadas:

$$c_1 = \frac{(\theta_i + \theta_j)}{l^2}$$

$$c_2 = -\frac{(2\theta_i + \theta_j)}{l}$$

$$c_3 = \theta_i$$

$$c_4 = 0$$

Substituindo estes valores em (13), vem:

$$w(x) = \frac{x(\ell-x)^2}{\ell^2} \theta_i + \frac{-x^2(\ell-x)}{\ell^2} \theta_j$$

Para deslocamentos na direção do eixo escolhido para o membro, é assumido um polinômio do segundo grau. Os parâmetros de deslocamento utilizados estão indicados na Fig. 21.

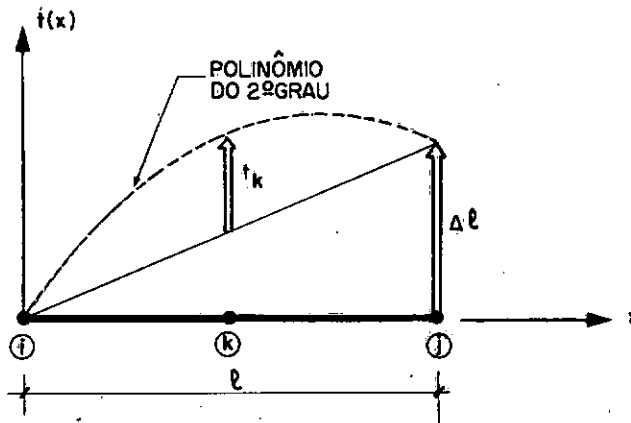


Fig. 21

Temos:

$$t(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \quad (14)$$

Condições de bordo:

$$x = 0 \Rightarrow t(0) = 0$$

$$x = \ell/2 \implies t(\ell/2) = t_k + \frac{\Delta\ell}{2}$$

$$x = \ell \implies t(\ell) = \Delta\ell$$

Estas três condições nos permitem chegar aos valores das constantes:

$$c_1 = -\frac{4t_k}{\ell^2}$$

$$c_2 = \frac{4t_k + \Delta\ell}{\ell}$$

$$c_3 = 0$$

Substituindo em (14) os valores encontrados para c_1 , c_2 e c_3 , vem:

$$t(x) = \frac{\Delta\ell}{\ell} x + \frac{4x(\ell-x)}{\ell^2} t_k$$

De posse das funções de interpolação $w(x)$ e $t(x)$, podemos determinar ϵ_g , χ e $\frac{dw}{dx}$, da forma indicada abaixo:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_g &= \frac{dt}{dx} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{(4\ell-8x)}{\ell^2} t_k \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{(3x^2-4x\ell+\ell^2)}{\ell^2} \theta_i + \frac{(3x^2-2x\ell)}{\ell^2} \theta_j \\ \chi &= -\frac{1}{r} = -\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{(4\ell-6x)}{\ell^2} \theta_i + \frac{(2\ell-6x)}{\ell^2} \theta_j \end{aligned} \right\} (15)$$

Substituindo as expressões (15) em (12) e operando,

vem:

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{\Delta \ell^2}{2\ell^2} \int_0^\ell G_{11} dx + \frac{t_k \Delta \ell}{\ell^3} \int_0^\ell G_{11} (4\ell - 8x) dx + \\
 & + \frac{t_k^2}{2\ell^4} \int_0^\ell G_{11} (4\ell - 8x)^2 dx + \frac{\Delta \ell \theta_i}{\ell^3} \int_0^\ell G_{12} (4\ell - 6x) dx + \\
 & + \frac{\Delta \ell \theta_j}{\ell^3} \int_0^\ell G_{12} (2\ell - 6x) dx + \frac{t_k \theta_i}{\ell^4} \int_0^\ell G_{12} (4\ell - 8x) (4\ell - 6x) dx + \\
 & + \frac{t_k \theta_j}{\ell^4} \int_0^\ell G_{12} (4\ell - 8x) (2\ell - 6x) dx + \frac{\theta_i^2}{2\ell^4} \int_0^\ell G_{22} (4\ell - 6x)^2 dx + \\
 & + \frac{\theta_i \theta_j}{\ell^4} \int_0^\ell G_{22} (4\ell - 6x) (2\ell - 6x) dx + \frac{\theta_j^2}{2\ell^4} \int_0^\ell G_{22} (2\ell - 6x)^2 dx + \\
 & + \frac{N\ell}{30} (2\theta_i^2 + 2\theta_j^2 - \theta_i \theta_j) - N\Delta \ell - M_i \theta_i - M_j \theta_j
 \end{aligned}$$

Desta forma, chegamos à expressão da energia potencial total em função dos parâmetros deslocamento t_k , $\Delta \ell$, θ_i e θ_j .

Pelo princípio dos trabalhos virtuais, sabemos que a configuração de equilíbrio para o membro (Fig. 19), é aquela que conduz a um valor estacionário para a energia potencial total, ou seja,

$$\delta\Pi = 0$$

Na determinação das condições de equilíbrio para o caso de n_p parâmetros deslocamento, deve-se considerar nula a variação de Π com respeito a cada um dos parâmetros, mantendo-se os demais constantes. Se p_i representa um dos parâmetros, a condição $\frac{\partial\Pi}{\partial p_i} = 0$ deve ser então satisfeita. Chegamos assim a um sistema de n_p equações, com os parâmetros constituindo-se nas incógnitas. Senão vejamos:

$$a) \frac{\partial\Pi}{\partial t_k} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{t_k}{l^4} \int_0^l G_{11}(4l-8x)^2 dx + \frac{\Delta l}{l^3} \int_0^l G_{11}(4l-8x) dx + \\ & + \frac{\Theta_i}{l^4} \int_0^l G_{12}(4l-8x)(4l-6x) dx + \frac{\Theta_j}{l^4} \int_0^l G_{12}(4l- \\ & - 8x)(2l-6x) dx = 0 \end{aligned}$$

$$b) \frac{\partial\Pi}{\partial \Delta l} = 0$$

$$\frac{t_k}{l^3} \int_0^l G_{11}(4l-8x) dx + \frac{\Delta l}{l^2} \int_0^l G_{11} dx + \frac{\theta_i}{l^3} \int_0^l G_{12}(4l - 6x) dx + \frac{\theta_j}{l^3} \int_0^l G_{12}(2l-6x) dx - N = 0$$

$$c) \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_i} = 0$$

$$\frac{t_k}{l^4} \int_0^l G_{12}(4l-8x)(4l-6x) dx + \frac{\Delta l}{l^3} \int_0^l G_{12}(4l-6x) dx + \theta_i \left[\frac{1}{l^4} \int_0^l G_{22}(4l-6x)^2 dx + \frac{2}{15} N l \right] + \theta_j \left[\frac{1}{l^4} \int_0^l G_{22}(4l-6x)(2l-6x) dx - \frac{N l}{30} \right] - M_i = 0$$

$$d) \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_j} = 0$$

$$\frac{t_k}{l^4} \int_0^l G_{12}(4l-8x)(2l-6x) dx + \frac{\Delta l}{l^3} \int_0^l G_{12}(2l-6x) dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \Theta_i \left[\frac{1}{l^4} \int_0^l G_{22} (4l-6x)(2l-6x) dx - \frac{Nl}{30} \right] + \\
 & + \Theta_j \left[\frac{1}{l^4} \int_0^l G_{22} (2l-6x)^2 dx + \frac{2}{15} Nl \right] - M_j = 0
 \end{aligned}$$

Matricialmente, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} T_{11}^0 & T_{12}^0 & T_{13}^0 & T_{14}^0 \\ & T_{22}^0 & T_{23}^0 & T_{24}^0 \\ \text{sim.} & & T_{33}^0 & T_{34}^0 \\ & & & T_{44}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_k \\ \Delta l \\ \Theta_i \\ \Theta_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & \frac{2}{15} Nl & -\frac{1}{30} Nl \\ & & & \frac{2}{15} Nl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_k \\ \Delta l \\ \Theta_i \\ \Theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix}$$

(16)

onde:

$$T_{11}^0 = \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\ell} G_{11} (4\ell - 8x)^2 dx$$

$$T_{12}^0 = \frac{1}{\ell^3} \int_0^{\ell} G_{11} (4\ell - 8x) dx$$

$$T_{13}^0 = \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\ell} G_{12} (4\ell - 8x)(4\ell - 6x) dx$$

$$T_{14}^0 = \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\ell} G_{12} (4\ell - 8x)(2\ell - 6x) dx$$

$$T_{22}^0 = \frac{1}{\ell^2} \int_0^{\ell} G_{11} dx$$

(17)

$$T_{23}^0 = \frac{1}{\ell^3} \int_0^{\ell} G_{12} (4\ell - 6x) dx$$

$$T_{24}^0 = \frac{1}{\ell^3} \int_0^{\ell} G_{12} (2\ell - 6x) dx$$

$$T_{33}^0 = \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\ell} G_{22} (4\ell - 6x)^2 dx$$

$$T_{34}^0 = \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\ell} G_{22} (4\ell - 6x)(2\ell - 6x) dx$$

$$T_{44}^0 = \frac{1}{\ell^4} \int_0^{\ell} G_{22} (2\ell - 6x)^2 dx$$

Escrevendo (16) numa forma mais compacta, temos:

$$\begin{bmatrix} [T_{rr}^0] & [T_{rs}^0] \\ \{T_{sr}^0\} & [T_{ss}^0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [t_k] \\ \{DM_\epsilon\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ \{0\} & [T_{ss}^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [t_k] \\ \{DM_\epsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [0] \\ \{AM_\epsilon\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

em que:

$$[T_{rr}^0] = [T_{11}^0]$$

$$[T_{rs}^0] = [T_{12}^0 \quad T_{13}^0 \quad T_{14}^0]$$

$$\{T_{sr}^0\} = \begin{Bmatrix} T_{21}^0 \\ T_{31}^0 \\ T_{41}^0 \end{Bmatrix}$$

$$[T_{ss}^0] = \begin{bmatrix} T_{22}^0 & T_{23}^0 & T_{24}^0 \\ T_{32}^0 & T_{33}^0 & T_{34}^0 \\ T_{42}^0 & T_{43}^0 & T_{44}^0 \end{bmatrix}$$

$$[T_{ss}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} N\ell & -\frac{1}{30} N\ell \\ 0 & -\frac{1}{30} N\ell & \frac{2}{15} N\ell \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo (18), vem:

$$[T_{rr}^0] [t_k] + [T_{rs}^0] \{DM_\epsilon\} = 0 \quad (19)$$

$$\{T_{sr}^0\} [t_k] + (\{T_{ss}^0\} + \{T_{ss}^1\}) \{DM_\epsilon\} = \{AM_\epsilon\} \quad (20)$$

De (19):

$$[t_k] = - [T_{rr}^0]^{-1} [T_{rs}^0] \{DM_\epsilon\} \quad (21)$$

Substituindo (21) em (20), temos:

$$- \{T_{sr}^0\} [T_{rr}^0]^{-1} [T_{rs}^0] \{DM_\epsilon\} + (\{T_{ss}^0\} + \{T_{ss}^1\}) \{DM_\epsilon\} = \{AM_\epsilon\}$$

ou:

$$\underbrace{(\{T_{ss}^0\} - \{T_{sr}^0\} [T_{rr}^0]^{-1} [T_{rs}^0] + \{T_{ss}^1\})}_{[SM_\epsilon]} \{DM_\epsilon\} = \{AM_\epsilon\}$$

Efetuando as operações matriciais que aparecem indicadas entre parênteses, teremos determinado a matriz $[SM_\epsilon]$ que estabelece o relacionamento entre $\{AM_\epsilon\}$ e $\{DM_\epsilon\}$.

Seja:

$$[SM_\epsilon^0] = [T_{ss}^0] - \{T_{sr}^0\} [T_{rr}^0]^{-1} [T_{rs}^0] \quad (22)$$

e

$$[SM_\epsilon^1] = [T_{ss}^1]$$

Pode-se, então, considerar $[SM_\epsilon]$ como envolvendo a soma de duas outras matrizes:

$$[SM_{\epsilon}] = [SM_{\epsilon}^0] + [SM_{\epsilon}^1] \quad (23)$$

Em forma expandida:

$$[SM_{\epsilon}] = \begin{bmatrix} T_{22}^0 - \frac{T_{12}^0 \times T_{12}^0}{T_{11}^0} & T_{23}^0 - \frac{T_{12}^0 \times T_{13}^0}{T_{11}^0} & T_{24}^0 - \frac{T_{12}^0 \times T_{14}^0}{T_{11}^0} \\ & T_{33}^0 - \frac{T_{13}^0 \times T_{13}^0}{T_{11}^0} & T_{34}^0 - \frac{T_{13}^0 \times T_{14}^0}{T_{11}^0} \\ & \text{sim.} & \\ & & T_{44}^0 - \frac{T_{14}^0 \times T_{14}^0}{T_{11}^0} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{15} N\ell & -\frac{1}{30} N\ell \\ & \text{sim.} & \\ & & \frac{2}{15} N\ell \end{bmatrix}$$

É de se notar que a matriz $[SM_{\epsilon}]$, assim decomposta, apresenta uma característica interessante. A matriz $[SM_{\epsilon}^0]$ depende basicamente da distribuição de módulos de elasticidade no elemento da Fig. 19. A outra matriz, $[SM_{\epsilon}^1]$, decorre única e exclusivamente da consideração dos efeitos da força normal N na flexão do membro.

O valor do parâmetro t_k pode ser determinado diretamente de (21):

$$t_k = - \frac{T_{12}^0}{T_{11}^0} \Delta \ell - \frac{T_{13}^0}{T_{11}^0} \theta_i - \frac{T_{14}^0}{T_{11}^0} \theta_j \quad (24)$$

Acrescente-se também que a matriz $[SM_\epsilon]$ aqui obtida: torna-se exatamente igual à apresentada em 2.1.2, desde que se cumpram as seguintes condições:

- a) $E =$ constante ao longo do membro (membro prismático);
- b) o eixo representativo do elemento coincida com a linha que passa pelos centróides das seções transversais;
- c) não se considere a influência da força normal na flexão.

Nestas circunstâncias, o parâmetro t_k se anula, transformando-se assim em linear a função de interpolação para deslocamentos na direção do eixo. As duas funções adotadas representam então, neste caso, as soluções corretas em termos de deslocamentos no elemento.

Uma vez obtida a matriz $[SM_\epsilon]$ de acordo com o que foi estabelecido em 2.2, podemos passar à análise da segunda fase da construção de $[SM]$.

Como já se frisou, em 2.1.2 é admitido que o valor das reações verticais, $\frac{(M_i + M_j)}{\ell}$, não se altera quando o elemento experimenta os deslocamentos v_i e v_j . Na realidade, como pode ser observado na Fig. 22, em razão da inclinação do membro, a força normal N determina o aparecimento de reações verticais adicionais.

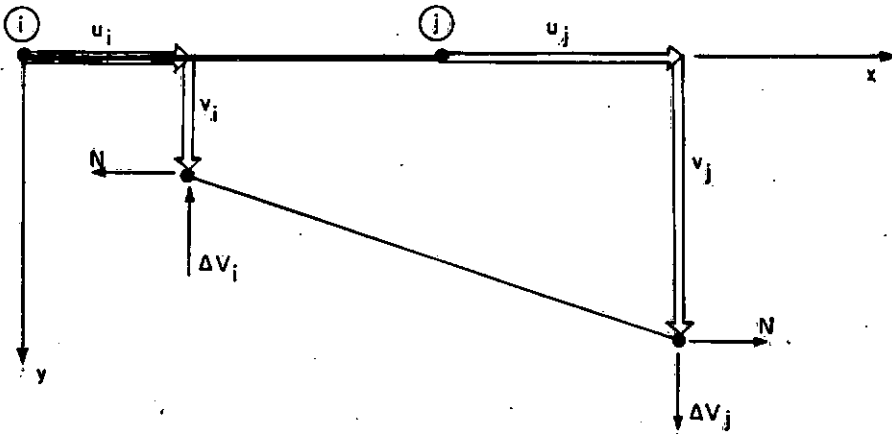


Fig. 22

Os valores de ΔV_i e ΔV_j são dados por:

$$\Delta V_i = - \frac{N(v_j - v_i)}{\ell}$$

$$\Delta V_j = \frac{N(v_j - v_i)}{\ell}$$

Matricialmente, temos:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{N}{L} & 0 & 0 & -\frac{N}{L} & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{sim.} & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{N}{L} & 0 \\
 & & & & & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_i \\
 v_i \\
 \varphi_i \\
 u_j \\
 v_j \\
 \varphi_j
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 \Delta V_i \\
 0 \\
 0 \\
 \Delta V_j \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (25)$$

ou, em forma compacta:

$$[\Delta SM] \{DM\} = \{\Delta AM\} \quad (26)$$

Tendo em vista (6), (23) e (26), podemos agora chegar à seguinte expressão para a matriz de rigidez $[SM]$:

$$[SM] = [C]^T ([SM^0_{\epsilon}] + [SM^1_{\epsilon}]) [C] + [\Delta SM]$$

Efetuando, vem:

$$[SM] = [C]^T [SM^0_{\epsilon}] [C] + [C]^T [SM^1_{\epsilon}] [C] + [\Delta SM]$$

ou:

$$[SM] = [SM^0] + [SM^1] \quad (27)$$

onde:

$$[SM^0] = [C]^T [SM^0_{\epsilon}] [C] \quad (28)$$

e

$$[SM^1] = [C]^T [SM^1_{\epsilon}] [C] + [\Delta SM] \quad (29)$$

Em forma expandida:

$$[SM] = \begin{bmatrix} SM_{11}^0 & SM_{12}^0 & SM_{13}^0 & SM_{14}^0 & SM_{15}^0 & SM_{16}^0 \\ & SM_{22}^0 & SM_{23}^0 & SM_{24}^0 & SM_{25}^0 & SM_{26}^0 \\ & & SM_{33}^0 & SM_{34}^0 & SM_{35}^0 & SM_{36}^0 \\ & & & SM_{44}^0 & SM_{45}^0 & SM_{46}^0 \\ & sim. & & & SM_{55}^0 & SM_{56}^0 \\ & & & & & SM_{66}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6N}{5L} & \frac{N}{10} & 0 & -\frac{6N}{5L} & \frac{N}{10} \\ & & \frac{2N\ell}{15} & 0 & -\frac{N}{10} & -\frac{N\ell}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{6N}{5L} - \frac{N}{10} \\ & & & & & \frac{2N\ell}{15} \end{bmatrix}$$

em que:

$$SM_{11}^0 = (SM_{\epsilon}^0)_{11}$$

$$SM_{12}^0 = - \frac{(SM_{\epsilon}^0)_{12} + (SM_{\epsilon}^0)_{13}}{\ell}$$

$$SM_{13}^0 = - (SM_{\epsilon}^0)_{12}$$

$$SM_{14}^0 = - SM_{11}^0$$

$$SM_{15}^0 = - SM_{12}^0$$

$$SM_{16}^0 = - (SM_{\epsilon}^0)_{13}$$

$$SM_{22}^0 = \frac{(SM_{\epsilon}^0)_{22} + 2(SM_{\epsilon}^0)_{23} + (SM_{\epsilon}^0)_{33}}{\ell^2}$$

$$SM_{23}^0 = \frac{(SM_{\epsilon}^0)_{22} + (SM_{\epsilon}^0)_{23}}{\ell}$$

$$SM_{24}^0 = SM_{15}^0$$

$$SM_{25}^0 = - SM_{22}^0$$

$$SM_{26}^0 = \frac{(SM_{\epsilon}^0)_{23} + (SM_{\epsilon}^0)_{33}}{\ell}$$

$$SM_{33}^0 = (SM_{\epsilon}^0)_{22}$$

$$SM_{34}^0 = - SM_{13}^0$$

$$SM_{35}^0 = - SM_{23}^0$$

$$SM_{36}^0 = (SM_{\epsilon}^0)_{23}$$

$$SM_{44}^0 = SM_{11}^0$$

$$SM_{45}^0 = SM_{12}^0$$

$$SM_{46}^0 = - SM_{16}^0$$

$$SM_{55}^0 = SM_{22}^0$$

$$SM_{56}^0 = - SM_{26}^0$$

$$SM_{66}^0 = (SM_{\epsilon}^0)_{33}$$

Desta forma, fica inteiramente determinada a matriz de rigidez do elemento objetivando a análise não-linear. Deve-se notar que as correções a serem realizadas, numa etapa qualquer do cálculo, se estendem a cada uma das matrizes em que se decompõe $[SM]$. Na matriz $[SM^0]$, introduzem-se as correções ligadas à não linearidade do material, enquanto que em $[SM^1]$ efetuam-se as que envolvem a não-linearidade geométrica.

2.3.3 - Integrações Numéricas

As dificuldades que surgem para um tratamento analítico, conduzem à utilização de processos numéricos para avaliação tanto dos valores de G_{11} , G_{12} e G_{22} , para uma determinada seção transversal, como também das integrais contidas em (17).

a) Determinação de G_{11} , G_{12} e G_{22}

Observemos a seção transversal da Fig. 23.a. Consideram-se, para fins de cálculo, n faixas de mesma altura e n_0 níveis de armadura, ao longo da seção. Em cada etapa da análise são obtidos diretamente dos diagramas σ - ϵ dos materiais $n + 1 + n_0$ módulos de elasticidade secantes (Figs. 23.b e 23.c),

que servirão de base para se estabelecer uma distribuição para E_c , na seção.

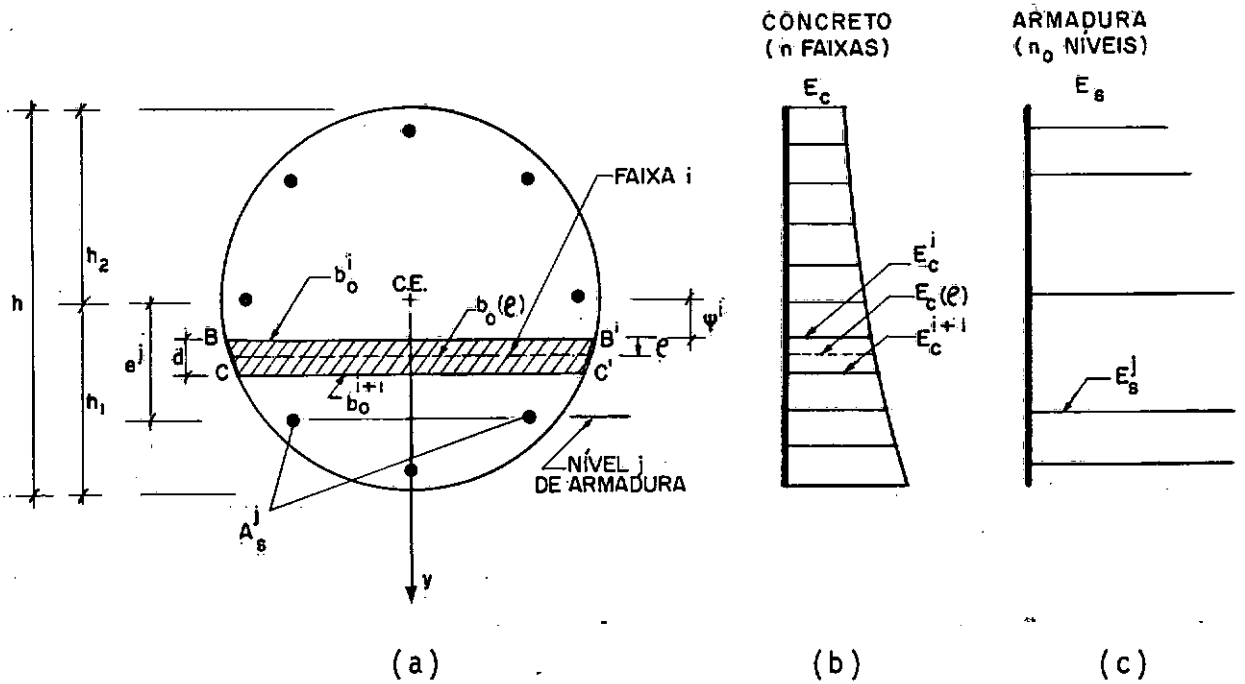


Fig. 23

Seja uma faixa genérica i , de altura d (Fig. 23.a). A obtenção de G_{11} , G_{12} e G_{22} baseia-se em duas premissas que apresentamos a seguir. Em primeiro lugar, admite-se que os arcos \widehat{BC} e $\widehat{B'C'}$ se confundem com as respectivas cordas \overline{BC} e $\overline{B'C'}$. Por outro lado, assume-se uma lei de variação linear para os módulos de elasticidade E_c , ao longo da faixa i (Fig. 23.b).

a.1) Obtenção de G_{11}

De (7), temos:

$$G_{11} = \int_A E_0(y) E(y) dy$$

a.1.1) Concreto

Consideremos a faixa i (Fig. 23):

$$G_{11,c}^i = \int_0^d b_0(\rho) E_c(\rho) d\rho \quad (30)$$

Fazemos:

$$\left. \begin{aligned} b_0(\rho) &= b_0^i + \frac{b_0^{i+1} - b_0^i}{d} \rho \\ E_c(\rho) &= E_c^i + \frac{E_c^{i+1} - E_c^i}{d} \rho \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Introduzindo (31) em (30) e integrando, vem:

$$G_{11,c}^i = \frac{d}{6} \left[b_0^i (2E_c^i + E_c^{i+1}) + b_0^{i+1} (E_c^i + 2E_c^{i+1}) \right]$$

Considerando as n faixas, temos:

$$G_{11,c} = \sum_{i=1}^n G_{11,c}^i \quad (32)$$

a.1.2) Armadura

Seja A_S^j a seção de ferro correspondente ao nível j de armadura (Fig. 23).

Pode-se escrever:

$$G_{11,s}^j = E_S^j A_S^j$$

Levando-se em conta os n_0 níveis, vem:

$$G_{11,s} = \sum_{j=1}^{n_0} G_{11,s}^j \quad (33)$$

a.1.3) Valor de G_{11}

A obtenção de G_{11} se faz então mediante a soma de (32) e (33).

$$G_{11} = G_{11,c} + G_{11,s}$$

ou:

$$G_{11} = \frac{d}{6} \sum_{\lambda=1}^n \left[b_0^\lambda (2E_C^\lambda + E_C^{\lambda+1}) + b_0^{\lambda+1} (E_C^\lambda + 2E_C^{\lambda+1}) \right] + \sum_{j=1}^{n_0} E_S^j A_S^j \quad (34)$$

No caso de seção retangular, temos:

$$b_0^\lambda = b_0^{\lambda+1} = b$$

A expressão (34) se reduz então a:

$$G_{11} = \frac{bd}{2} \sum_{\lambda=1}^n (E_C^\lambda + E_C^{\lambda+1}) + \sum_{j=1}^{n_0} E_S^j A_S^j \quad (35)$$

a.2) Obtenção de G_{12}

De (7), temos:

$$G_{12} = \int_A^{h_1} E(y) y^2 (dA = E(y) y dy)$$

a.2.1) Concreto

Consideremos a faixa i (Fig. 23):

$$G_{12,c}^i = \int_0^d b_0(\rho) E_c(\rho) (\psi^i + \rho) d\rho$$

Substituindo $b_0(\rho)$ e $E_c(\rho)$ pelas expressões (31) e integrando, vem:

$$G_{12,c}^i = \frac{d}{6} \left\{ \frac{d}{2} \left[b_0^i (E_c^i + E_c^{i+1}) + b_0^{i+1} (E_c^i + 3E_c^{i+1}) \right] + \psi^i \left[b_0^i (2E_c^i + E_c^{i+1}) + b_0^{i+1} (E_c^i + 2E_c^{i+1}) \right] \right\}$$

Para as n faixas, temos:

$$G_{12,c} = \sum_{i=1}^n G_{12,c}^i \quad (36)$$

a.2.2) Armadura

Podemos escrever para o nível j (Fig. 23):

$$G_{12,s}^j = E_s^j A_s^j e^j$$

Considerando os n_0 níveis:

$$G_{12,s} = \sum_{j=1}^{n_0} G_{12,s}^j \quad (37)$$

a.2.3) Valor de G_{12}

A soma de (36) e (37) conduz ao valor de G_{12} . Portanto,

$$G_{12} = G_{12,c} + G_{12,s}$$

ou:

$$G_{12} = \frac{d}{6} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{2} \left[b_0^i (E_c^i + E_c^{i+1}) + b_0^{i+1} (E_c^i + 3E_c^{i+1}) \right] + \right. \\ \left. + \psi^i \left[b_0^i (2E_c^i + E_c^{i+1}) + b_0^{i+1} (E_c^i + 2E_c^{i+1}) \right] \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{n_0} E_s^j A_s^j e^j \quad (38)$$

Para o caso de seção retangular, tendo em vista que $b_0^i = b_0^{i+1} = b$, a expressão (38) se reduz a:

$$G_{12} = \frac{bd}{6} \sum_{i=1}^n \left[d(E_c^i + 2E_c^{i+1}) + 3\psi^i (E_c^i + E_c^{i+1}) \right] + \sum_{j=1}^{n_0} E_s^j A_s^j e^j \quad (39)$$

Em (38) e (39),

$$\psi^i = -h_2 + (i - 1)d$$

a.3) Obtenção de G_{22}

De (7), temos:

$$G_{22} = \int_{A_2}^{n_1} E y^2 dA \quad E(y) y^2 dy$$

a.3.1) Concreto

Para a faixa i (Fig. 23), podemos escrever:

$$G_{22,c}^i = \int_0^d b_o(\rho) E_c(\rho) (\psi^i + \rho)^2 d\rho$$

Considerando as expressões (31) e integrando, vem:

$$G_{22,c}^i = \frac{d}{6} \left\{ (\psi^i)^2 \left[b_0^i (2E_c^i + E_c^{i+1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + b_0^{i+1} (E_c^i + 2E_c^{i+1}) \right] + \psi^i d \left[b_0^i (E_c^i + E_c^{i+1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + b_0^{i+1} (E_c^i + 3E_c^{i+1}) \right] + \frac{d^2}{10} \left[b_0^i (2E_c^i + 3E_c^{i+1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3b_0^{i+1} (E_c^i + 4E_c^{i+1}) \right] \right\}$$

Para as n faixas, temos:

$$G_{22,c} = \sum_{i=1}^n G_{22,c}^i \quad (40)$$

a.3.2) Armadura

Para o nível j , pode-se escrever (Fig. 23):

$$G_{22,s}^j = E_s^j A_s^j (e^j)^2$$

Levando-se em consideração os n_0 níveis, vem:

$$G_{22,s} = \sum_{j=1}^{n_0} G_{22,s}^j \quad (41)$$

a.3.3) Valor de G_{22}

Somando (40) e (41):

$$G_{22} = G_{22,c} + G_{22,s}$$

ou:

$$\begin{aligned}
 G_{22} = & \frac{d}{6} \sum_{i=1}^n \left\{ (\psi^i)^2 \left[b_0^i (2E_c^i + E_c^{i+1}) + \right. \right. \\
 & + b_0^{i+1} (E_c^i + 2E_c^{i+1}) \left. \right] + \psi^i d \left[b_0^i (E_c^i + E_c^{i+1}) + \right. \\
 & + b_0^{i+1} (E_c^i + 3E_c^{i+1}) \left. \right] + \frac{d^2}{10} \left[b_0^i (2E_c^i + 3E_c^{i+1}) + \right. \\
 & + 3b_0^{i+1} (E_c^i + 4E_c^{i+1}) \left. \right] \left. \right\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{n_0} E_s^j A_s^j (e^j)^2 \quad (42)
 \end{aligned}$$

No caso de seção retangular:

$$\begin{aligned}
 G_{22} = & \frac{bd}{6} \sum_{i=1}^n \left[3(\psi^i)^2 (E_c^i + E_c^{i+1}) + 2\psi^i d (E_c^i + 2E_c^{i+1}) + \right. \\
 & + \left. \frac{d^2}{2} (E_c^i + 3E_c^{i+1}) \right] + \sum_{j=1}^{n_0} E_s^j A_s^j (e^j)^2 \quad (43)
 \end{aligned}$$

Nas expressões (42) e (43):

$$\psi^i = -h_2 + (i-1)d$$

b) Integrações ao Longo do Comprimento do Elemento

As integrais que aparecem em (17) serão avaliadas com

auxílio da regra de Simpson.

Prevendo possíveis variações ao longo de um membro, tanto nas dimensões da seção transversal como na percentagem e distribuição de armadura, supõe-se o elemento fracionado em m trechos, com estas características se mantendo constantes por trecho (Fig. 24).

A regra de Simpson é então aplicada a cada um dos trechos considerados, obtendo-se através de um somatório de m parcelas o valor de qualquer das integrais contidas em (17).

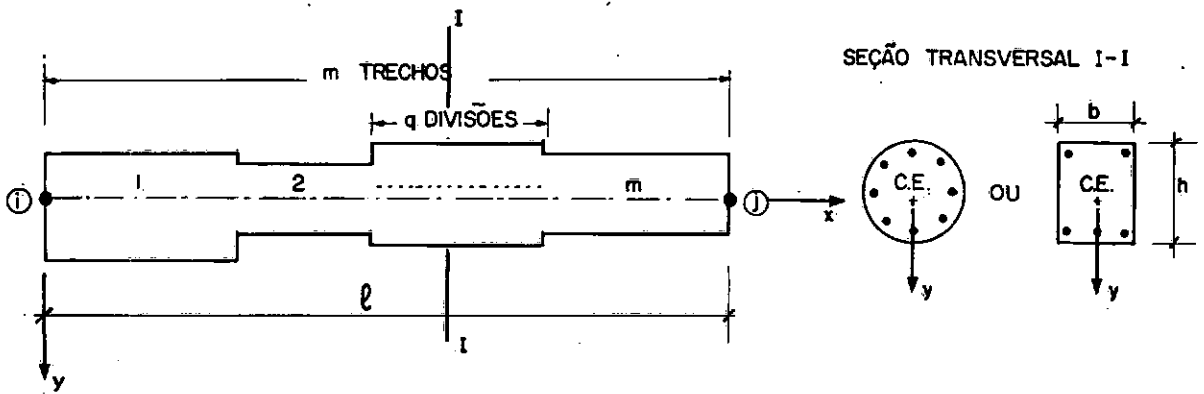


Fig. 24

Seja, portanto, um trecho genérico (Fig. 25) destacado do membro da Fig. 24. Para fins de cálculo consideram-se q divisões iguais no referido trecho, sendo q um número par.

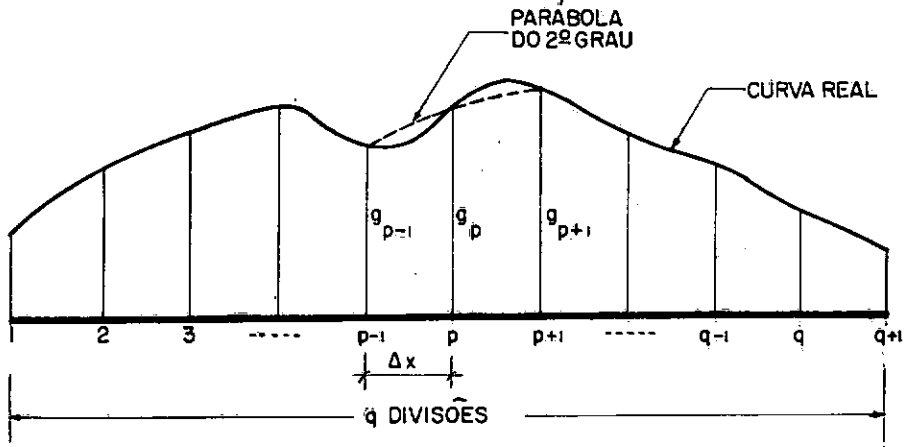


Fig. 25

Para cada três pontos de divisão (Fig. 25), podemos escrever:

$$\Omega_3 = \frac{\Delta x}{3} (g_{p-1} + 4g_p + g_{p+1})$$

Tendo em vista os $q+1$ pontos do trecho em questão, vem:

$$\begin{aligned} \Omega_{tr} = \frac{\Delta x}{3} (g_1 + 4g_2 + 2g_3 + \dots + 2g_{p-1} + 4g_p + \\ + 2g_{p+1} + \dots + 2g_{q-1} + 4g_q + g_{q+1}) \end{aligned}$$

No caso de um elemento com m trechos, segue:

$$\Omega = \sum_1^m \Omega_{tr}$$

Desta forma, obtidos previamente os valores de G_{11}, G_{12}

e G_{22} , pode-se determinar, numericamente, qualquer uma das integrais de (17).

2.4 - Resumo do Processo de Análise Utilizado

Como já foi frisado anteriormente, utiliza-se um processo iterativo constituído por vários ciclos de análise linear. Para uma etapa qualquer do cálculo o esquema apresentado em 2.1.1 é válido, excluindo-se somente a parte relativa à determinação das reações de apoio.

Estando dividida a estrutura em elementos, escolhe-se para cada membro o seu eixo representativo, em cujas extremidades serão obtidos tanto esforços como deslocamentos em qualquer passo da análise.

Para a primeira etapa do cálculo, faz-se uma estimativa do valor dos esforços normais e da distribuição de módulos de elasticidade em todos os membros da estrutura. Normalmente considera-se $N=0$ e adotam-se para E_c e E_s os valores correspondentes à origem dos diagramas σ - ϵ dos materiais (módulos de elasticidade tangentes).

Em função da forma geométrica, da distribuição de módulos de elasticidade e da percentagem e distribuição da armadura,

determinam-se em diversas seções transversais, ao longo de cada elemento, os valores de G_{11} , G_{12} e G_{22} , segundo as expressões (34) ou (35), (38) ou (39), e (42) ou (43). As integrais em (17) são avaliadas a seguir, tendo em vista o procedimento descrito em 2.3.3.b. A matriz $[SM_{\epsilon}^0]$ pode ser então obtida, de acordo com (22). Por intermédio de (27), (28) e (29), chega-se à matriz de rigidez $[SM]$. É de se notar que, sendo nulo o valor da força normal neste primeiro ciclo, tem-se $[SM^1] = [0]$.

Obedecendo ao esquema apresentado em 2.1.1. são determinados, da forma usual, os deslocamentos e os esforços nas extremidades dos elementos. Nesta altura, pode-se considerar como encerrada a primeira etapa da análise.

No segundo passo de cálculo, deve-se estabelecer a matriz $[SM]$ de acordo com o procedimento que se segue. Em primeiro lugar, utilizando os resultados fornecidos pela etapa anterior da análise, obtêm-se para o membro os valores de Δl , θ_i , θ_j e t_k , por intermédio de (2) e (24). Com estes valores, procede-se em seguida à determinação de ϵ_g e χ , mediante as expressões (15), para as diversas seções transversais consideradas no elemento. O diagrama de deformações associado a cada um dos pares ϵ_g e χ torna-se então conhecido (vide Fig. 18). A distribuição de módulos de elasticidade secantes, correspondente, pode ser facilmente definida com auxílio dos diagramas σ - ϵ dos materiais.

Neste ponto, convém salientar que se a distribuição de deformações acusar a existência de tração na seção, considera-se $E_c = 0$ na região tracionada. Além do mais, deve-se verificar se as deformações limites especificadas para o esgotamento da capacidade resistente (vide 1.1.3), foram atingidas em algum ponto da seção transversal. Estas observações são válidas, certamente, para qualquer passo do cálculo.

Feito o parêntese, voltemos ao desenvolvimento do processo de análise. Uma vez estabelecida a distribuição de módulos de elasticidade nas seções transversais, segue-se a mesma seqüência de operações anteriormente especificada, até se chegar à matriz $[SM^0]_E$. A matriz de rigidez $[SM]$ é então novamente determinada por intermédio de (27), (28) e (29), devendo-se ressaltar que $[SM^1]$ é definida em função do valor do esforço normal obtido para o elemento, na etapa anterior da análise.

Seguindo o procedimento esquematizado em 2.1.1, chega-se outra vez aos esforços e deslocamentos nas extremidades dos membros. Nova etapa de análise é então iniciada em função destes valores.

Obedecendo sempre à mesma seqüência de operações, repete-se o cálculo linear tantas vezes quantas forem necessárias, até que em dois passos consecutivos se obtenham os mesmos resultados, a menos de um erro pré-fixado.

Para finalizar a análise, podem ser determinadas as reações de apoio, considerando por exemplo, em cada nó restringido, as equações de equilíbrio correspondentes às direções vinculadas.

2.5 - Liberações nas Extremidades dos Elementos

2.5.1 - Preliminares

A introdução de liberações ou "articulações generalizadas" nas extremidades de um membro implica em que se estabeleça, no caso mais geral, uma nova matriz de rigidez $[SM^*]$ e um outro vetor de ações de engastamento perfeito $\{AML^*\}$, para o elemento em questão. Neste trabalho, em particular, como só se admitem cargas que atuam diretamente nos nós da estrutura ($\{AML\} = \{0\}$), necessita-se tão somente determinar a matriz $[SM^*]$. A obtenção de $[SM^*]$, como se verá mais adiante, faz-se a partir da matriz de rigidez original do elemento (sem liberações), por intermédio de operações matriciais bastante simples e de fácil programação.

No caso de pórticos planos, distinguem-se três tipos de liberações (Fig. 26), cada um deles correspondendo ao tipo de esforço que a articulação não é capaz de transmitir.

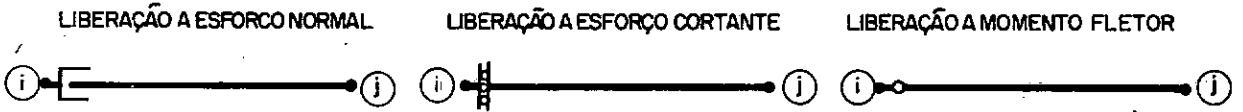


Fig. 26

Pode-se considerar, inclusive, uma combinação de liberações para um mesmo elemento, devendo-se neste caso ter o cuidado de não torná-lo hipostático. Assim, se forem numeradas de 1 a 6 as direções possíveis de se introduzir liberações nas extremidades de um membro (Fig. 27), resultam inadmissíveis as seguintes associações:

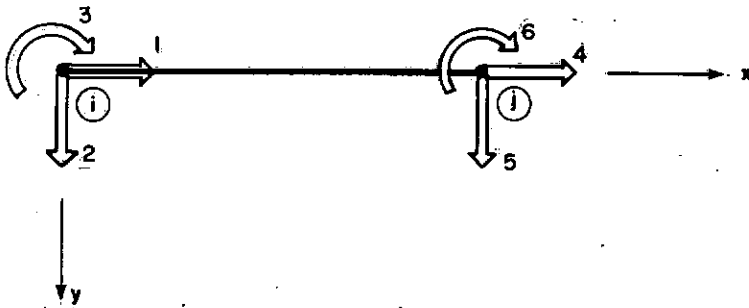


Fig. 27

Fig. 27

- a) liberações 1 e 4 - o elemento é passível de se deslocar na direção x ;
- b) liberações 2 e 5 - o elemento pode sofrer translação na direção y ;
- c) liberações 3, 5, e 6 e 3, 2 ; 6 - o elemento pode girar em torno do nó esquerdo e do nó direito, respectivamente.

2.5.2 - Obtenção da Matriz de Rigidez do Elemento com Liberações

Sempre que se introduz uma liberação qualquer nos extremos de um elemento, o deslocamento correspondente à direção liberada no membro não é mais igual ao deslocamento do nó contíguo da estrutura, na mesma direção. Ao mesmo tempo, torna-se nula a ação na extremidade do elemento referente à direção liberada.

Tendo por base o exposto acima, pode-se desenvolver as operações matriciais necessárias à determinação de $[SM^*]$.

Vimos em 2.1 que a expressão $\{AM\} = [SM]\{DM\}$: estabelece o relacionamento entre esforços e deslocamentos nas extremidades de um membro, desde que atuem somente cargas aplicadas diretamente nos nós da estrutura.

Em forma expandida, temos:

$$\begin{Bmatrix} AM_1 \\ \text{---} \\ AM_\ell \\ \text{---} \\ AM_m \\ \text{---} \\ AM_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_{11} & \text{---} & SM_{1\ell} & \text{---} & SM_{1m} & \text{---} & SM_{16} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ SM_{\ell 1} & \text{---} & SM_{\ell\ell} & \text{---} & SM_{\ell m} & \text{---} & SM_{\ell 6} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ SM_{m1} & \text{---} & SM_{m\ell} & \text{---} & SM_{mm} & \text{---} & SM_{m6} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ SM_{61} & & SM_{6\ell} & & SM_{6m} & & SM_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DM_1 \\ \text{---} \\ DM_\ell \\ \text{---} \\ DM_m \\ \text{---} \\ DM_6 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Naturalmente (vide figs. 14.a e 14.b), $AM_1 = H_i$, $AM_2 = V_i$, $AM_3 = M_i$ etc... e $DM_1 = u_i$, $DM_2 = v_i$, $DM_3 = \psi_i$ etc...

Consideremos, para facilitar, uma única liberação no elemento. Posteriormente se indicará o procedimento a ser adotado, no caso de mais de uma liberação.

Seja ℓ o índice da direção liberada. Podemos então escrever:

$$AM_\ell = 0 \quad (45)$$

$DM_\ell =$ livre, ou seja, desvinculado do deslocamento correspondente do nó da estrutura.

De acordo com (44) e (45), temos:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^6 (SM_{lk} \cdot DM_k) + SM_{ll} \cdot DM_l = 0 \quad (46)$$

O valor de DM_l será então:

$$DM_l = -\frac{1}{SM_{ll}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^6 (SM_{lk} \cdot DM_k) \quad (47)$$

Para uma ação genérica AM_m em (44), tendo em vista (47), vem:

$$AM_m = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^6 (SM_{mk} \cdot DM_k) + SM_{ml} \left[-\frac{1}{SM_{ll}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^6 (SM_{lk} \cdot DM_k) \right]$$

ou:

$$AM_m = \sum_{k=1}^6 \left(SM_{mk} - \frac{SM_{ml}}{SM_{ll}} \cdot SM_{lk} \right) DM_k \quad (48)$$

Todas as equações semelhantes a esta, incluindo-se a equação $AM_l = 0$, podem ser traduzidas pela seguinte expressão matricial:

$$\{AM\} = [SM^*] \{DM\} \quad (49)$$

em que $[SM^*]$ representa a nova matriz de rigidez para o elemento com liberação na direção l .

Um termo qualquer de $[SM^*]$, tendo em vista (48), é as sim obtido:

$$SM_{mk}^* = SM_{mk} - \frac{SM_{m\ell}}{SM_{\ell\ell}} \cdot SM_{\ell k} \quad (50)$$

É de se notar que a matriz $[SM^*]$ apresenta todos os termos da linha e da coluna ℓ nulos. Assim sendo, para a determinação das ações $\{AM\}$, por (49), pode-se admitir como fazendo parte do vetor $\{DM\}$ o deslocamento do nã da estrutura na direção ℓ (diferente do deslocamento correspondente na extremidade do elemento), já que sua presença em nada influi nos cálculos. O valor de DM_ℓ na extremidade do elemento pode ser obtido, se necessário, em função dos demais deslocamentos do membro, através de (47).

Para o caso de existir mais de uma liberação (combinação de liberações), introduzem-se as articulações sucessivamente. Em decorrência, chega-se à matriz $[SM^*]$ após uma série de transformações da matriz de rigidez, cada transformação correspondendo a uma direção liberada. Em termos de programação, torna-se necessário armazenar temporariamente a matriz de rigidez referente a uma determinada liberação, até que se introduza a articulação seguinte.

O cálculo dos deslocamentos DM_ℓ , associados às direções liberadas, pode ser efetivado, neste caso, mediante a reso-

lução de um sistema de n_ℓ equações simultâneas (n_ℓ é o número de direções liberadas). Assim, se forem liberadas no membro, por exemplo, as direções 1, 2 e 3 (vide Fig. 27), de acordo com (46) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \underline{\text{liberação 1}} \rightarrow & SM_{11}DM_1 + SM_{12}DM_2 + SM_{13}DM_3 + SM_{14}DM_4 + \\ & + SM_{15}DM_5 + SM_{16}DM_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{liberação 2}} \rightarrow & SM_{21}DM_1 + SM_{22}DM_2 + SM_{23}DM_3 + SM_{24}DM_4 + \\ & + SM_{25}DM_5 + SM_{26}DM_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{liberação 3}} \rightarrow & SM_{31}DM_1 + SM_{32}DM_2 + SM_{33}DM_3 + SM_{34}DM_4 + \\ & + SM_{35}DM_5 + SM_{36}DM_6 = 0 \end{aligned}$$

Evidentemente, os deslocamentos DM_4 , DM_5 e DM_6 são exatamente iguais aos deslocamentos correspondentes do nō da estrutura. Portanto, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} SM_{11}DM_1 + SM_{12}DM_2 + SM_{13}DM_3 &= c_1 \\ SM_{21}DM_1 + SM_{22}DM_2 + SM_{23}DM_3 &= c_2 \\ SM_{31}DM_1 + SM_{32}DM_2 + SM_{33}DM_3 &= c_3 \end{aligned} \right.$$

onde:

$$c_1 = - SM_{14}DM_4 - SM_{15}DM_5 - SM_{16}DM_6$$

$$c_2 = - SM_{24}DM_4 - SM_{25}DM_5 - SM_{26}DM_6$$

$$c_3 = - SM_{34}DM_4 - SM_{35}DM_5 - SM_{36}DM_6$$

Resolvendo-se o sistema de três equações a três incógnitas, determinam-se então os deslocamentos DM_1, DM_2 e DM_3 , referentes às direções liberadas no elemento.

Qualquer que seja a combinação de liberações (possível) considerada no membro, para a obtenção dos deslocamentos DM_ℓ , adota-se sempre um procedimento análogo ao que acabamos de descrever.

2.5.3 - Observações

a) No caso de uma barra que possua uma articulação localizada em algum ponto intermediário, deve-se introduzir um nó fictício imediatamente à esquerda ou à direita da liberação (Fig. 28). Assim sendo, a barra fica subdividida em dois elementos, com a articulação se situando na extremidade de um deles.

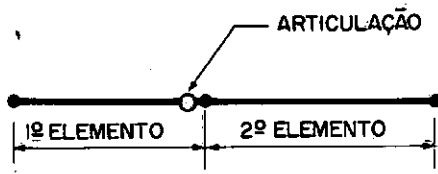


Fig. 28

b) Com vista ao processo de análise utilizado neste trabalho, a introdução de liberações num membro implica em que se estabeleça uma matriz de rigidez $[SM^*]$ em cada passo da análise. Como se mostrou em 2.5.2, chega-se a $[SM^*]$ a partir da matriz $[SM]$ (vide expressão (50)). Recordando que o ponto de partida para a obtenção de $[SM]$, numa etapa qualquer, é a consideração dos deslocamentos nas extremidades do membro calculados na etapa anterior, torna-se necessário, portanto, conhecer os deslocamentos DM_{ℓ} associados às direções liberadas no elemento. Tal determinação, como vimos em 2.5.2, faz-se no caso mais geral através da resolução de um sistema de equações simultâneas, cada equação referindo-se a uma direção liberada.

CAPÍTULO III

PROGRAMA AUTOMÁTICO

3.1 - Considerações Gerais sobre o Programa Elaborado

Com base nos fundamentos teóricos estabelecidos no capítulo anterior, elaborou-se um programa automático para a análise de pórticos planos de concreto armado (elementos de eixo reto), em linguagem FORTRAN, adaptado ao computador IBM/360-40.

3.1.1 - Tipos de Estudo que podem ser efetuados com o Programa

Inicialmente, devemos ressaltar que são se admitem no programa cargas que atuam diretamente nos nós da estrutura. Isto posto, distinguimos dois tipos de estudo que podem ser realizados:

a) Análise de diversos Casos de Carregamento

Por este tipo de estudo obtêm-se os deslocamentos dos nós, os esforços nas extremidades dos elementos e as reações de apoio, para cada um dos esquemas de carga que se fizer atuar na estrutura.

É de se salientar que, salvo em função do fator tempo, não se limita o número de casos de carregamento em uma estrutura, bem como o número de estruturas submetidas à análise.

b) Pesquisa da Capacidade de Carga da Estrutura

Por este tipo de estudo determina-se, para uma dada distribuição do carregamento, a capacidade de carga da estrutura, permitindo-se, inclusive, que algumas cargas tenham seus valores fixados.

Para se chegar à capacidade de carga, utiliza-se um processo de tentativas que passamos a descrever com auxílio de um exemplo.

Consideremos o pórtico da Fig. 29, submetido ao carregamento também assinalado na figura. Supõe-se conhecida a magnitude das cargas verticais P . O objetivo, portanto, consiste em se determinar a intensidade máxima das cargas horizontais F . Representemos por F_{\max} este valor máximo de F , que se procurará estabelecer.

Para iniciar o processo de tentativas, faz-se uma estimativa para as cargas horizontais. Isto posto, efetua-se então uma primeira tentativa, analisando a estrutura para um carregamento constituído das duas cargas verticais P e de duas cargas hori-

zontais F_1 . Podem se dar, então, duas hipóteses:

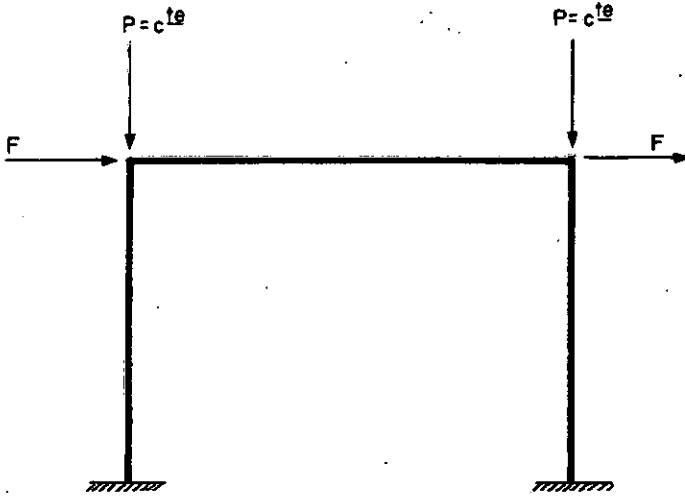


Fig. 29

1a. hipótese: é ultrapassada a capacidade de carga da estrutura. Chega-se a esta conclusão quando numa iteração qualquer são atingidas as deformações limites estabelecidas em 1.1.3.

Saliente-se que este critério prevalece mesmo para estruturas em que ocorre instabilidade do equilíbrio. Neste caso, quando se carrega a estrutura além de sua capacidade de carga, não há possibilidade de convergência para o processo iterativo (o processo diverge). Assim, num ciclo qualquer do processo iterativo, certamente, serão atingidas as deformações limites citadas acima.

2a. hipótese: não é ultrapassada a capacidade de carga da estrutura. Isto ocorre em caso contrário ao anterior.

Em qualquer das duas possibilidades, objetivando uma nova tentativa, incrementam-se as cargas F_1 , ressaltando que este incremento pode ser negativo ou positivo, conforme se tenha verificado a primeira ou a segunda hipótese, respectivamente. Convém frisar que as cargas P permanecem inalteradas, pois foram supostas com valor fixo.

Procede-se então a uma segunda tentativa, submetendo a estrutura às duas cargas P e a duas cargas $F_2 = F_1 \pm p\% F_1$ (no programa adota-se $p = 20$). Novamente, apresentam-se as duas possibilidades mencionadas anteriormente. No caso de prevalecer ainda a mesma hipótese observada na tentativa anterior, é introduzido um novo incremento e em seguida passa-se a uma terceira tentativa com $F_3 = F_2 \pm p\% F_2$. Acentue-se que este procedimento deve prosseguir até que para uma determinada tentativa ocorra uma inversão quanto ao comportamento da estrutura, ou seja, passe a se verificar a outra hipótese. Para facilitar a explanação, consideremos que tal fato acontece já para a segunda tentativa.

Nesta altura, temos pois delimitada uma faixa, dentro da qual se encontra o máximo valor de F procurado (Fig.30).

Para a terceira tentativa, assume-se $F_3 = \frac{F_1 + F_2}{2}$.

Efetua-se então a análise, agora para um carregamento constituído por duas cargas P e duas cargas F_3 . Determina-se assim uma

nova faixa para F_{\max} , mais estreita que a anterior.

Numa quarta tentativa delimita-se uma faixa ainda menor para F_{\max} . Prosseguindo sempre dentro desse esquema, chega-se finalmente a dois valores para F , cada um deles associado a uma das duas hipóteses possíveis, diferindo entre si de uma certa quantidade, menor ou igual a um determinado erro pré-estabelecido (F_6 e F_7 , na Fig. 30). Considera-se então para F_{\max} (intensidade máxima para as cargas horizontais), o valor de F correspondente à segunda hipótese (F_6 , na Fig. 30).

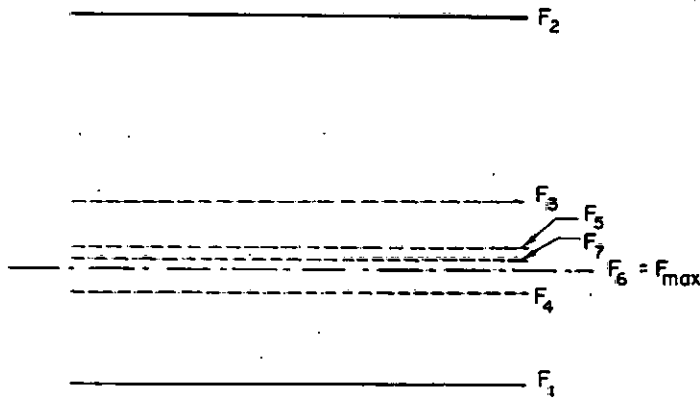


Fig. 30

Para qualquer estrutura, portanto, uma vez definida a distribuição do carregamento, é obedecido o seguinte roteiro para a pesquisa da capacidade de carga:

1º) Inicia-se o processo de tentativas, analisando a estrutura para um carregamento constituído por cargas de valor fixo e cargas de valor estimado. As primeiras serão mantidas constantes ao longo de todo o processo de pesquisa da capacidade de carga, enquanto que as outras terão suas intensidades modificadas.

2º) A seguir, incrementam-se de um mesmo percentual todas as cargas de intensidade variável e novamente efetua-se a análise. A rigor, este procedimento prevalece até que para uma determinada tentativa ocorra uma inversão quanto ao comportamento da estrutura.

Consegue-se assim delimitar uma faixa, dentro da qual se situa a capacidade de carga da estrutura.

3º) Prossegue-se nas tentativas, estreitando cada vez mais a referida faixa, até se chegar finalmente à capacidade de carga pesquisada, a menos de um certo erro admissível para o processo de tentativas.

Convém frisar que no programa não se restringe o número de estruturas submetidas a este tipo de estudo. Evidentemente, as limitações que podem ocorrer neste caso surgem em função do tempo que se dispõe para a utilização do computador.

3.1.2 - Divisão da Estrutura em Elementos

A divisão da estrutura em elementos deve ser estabelecida atentando-se para as seguintes observações:

a) Sempre que houver cargas aplicadas no interior de uma barra, temos que discretizá-la em dois ou mais elementos (Fig. 31), introduzindo nós fictícios nos pontos de aplicação destas cargas.

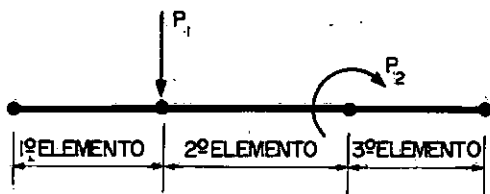


Fig. 31

b) Não se permite a ocorrência de liberações ou "articulações generalizadas", nas extremidades dos membros. No caso de uma barra que possua uma articulação localizada em algum ponto intermediário, considera-se um nó fictício imediatamente à esquerda ou à direita da liberação, subdividindo-se portanto a barra, em dois elementos (vide Fig. 28).

c) Para o caso de uma barra que apresente dimensões de seção transversal, percentagem e distribuição de armadura variáveis, deve-se sempre fracioná-la em diversos trechos, sendo

que ao longo de cada trecho estas características são consideradas constantes. Adota-se, então, um dos seguintes procedimentos:

1º) Admite-se que a barra em questão encerra um único membro (Fig. 24).

2º) Considera-se a barra discretizada em vários elementos, cada um deles associado a um trecho (Fig.32).



Fig. 32

d) Mesmo para uma barra com as características citadas no item c, constantes, muitas vezes é conveniente subdividi-la em dois ou mais elementos. Estas situações se apresentam, com efeito, sempre que se desejar obter resultados mais refinados numa determinada análise (vide 4.1).

3.1.3 - Seção Transversal

No que se refere à forma da seção transversal, permite-se a ocorrência de elementos de seção circular e de seção retangular numa mesma estrutura.

Quanto à distribuição da armadura, admitem-se vários níveis ao longo da seção transversal, devendo-se contudo observar a simetria desta distribuição em relação ao eixo dos y (vide Fig. 33).

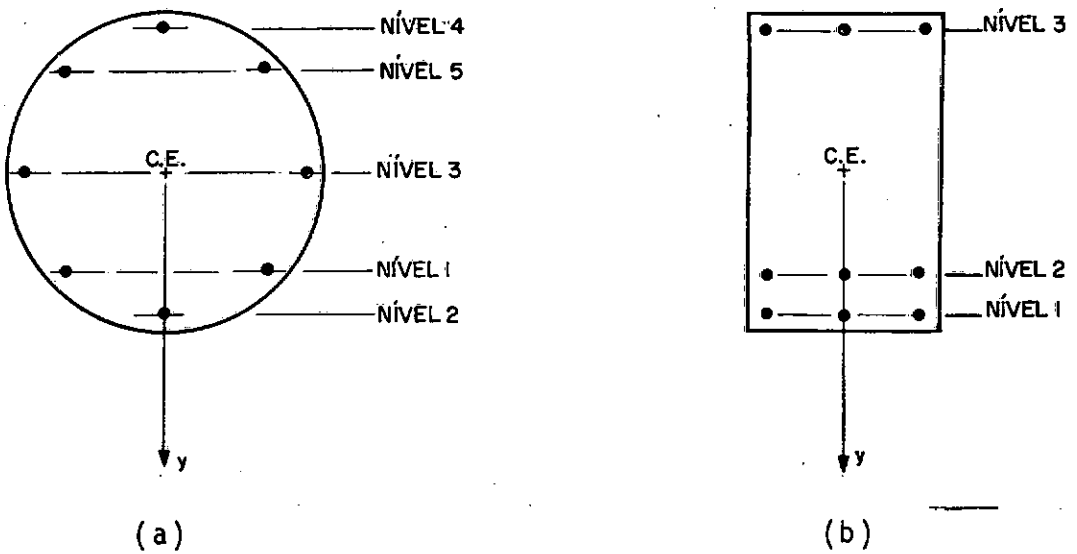


Fig. 33

3.1.4 - Idealização do Pórtico Plano

Inicialmente, escolhe-se para cada membro da estrutura o seu eixo representativo, em cujas extremidades serão obtidos tanto esforços como deslocamentos numa análise. A idealização do pórtico plano se faz então mediante a consideração de um conjunto de eixos, cada um deles representando um elemento, se interceptando nos nós da estrutura (Fig. 34).

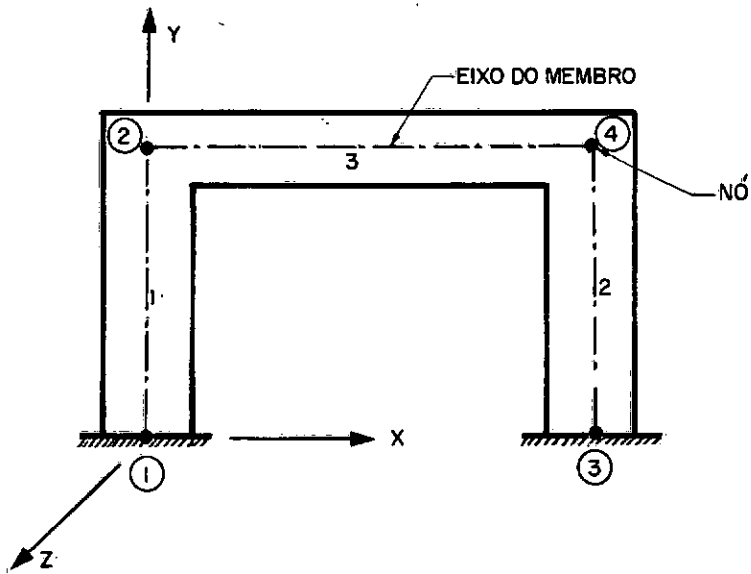


Fig. 34

3.1.5 - Numerações

a) Numeração dos Nós e Elementos

Antes de se iniciar qualquer análise, necessitam ser numerados todos os membros e nós da estrutura. Os elementos são numerados de 1 a n_e , representando-se por n_e o número total de membros. Analogamente, numeram-se os nós de 1 a n_n , n_n traduzindo o número de nós da estrutura.

Embora a ordem utilizada para a numeração dos nós e elementos de um pórtico, seja arbitrária (vide Fig.34), sempre que se utiliza a técnica de matriz banda, tal como se faz neste

trabalho, são necessários certos cuidados com respeito à numeração dos nós. Assim, se L_{sb} representa a largura máxima de semibanda (no programa adota-se $L_{sb} = 33$), a maior diferença possível de numeração para os dois nós associados a um elemento é dada por:

$$\left| \text{Dif}_{\max} \right| = \frac{L_{sb}}{3} - 1$$

Para $L_{sb} = 33$, temos:

$$\left| \text{Dif}_{\max} \right| = \frac{33}{3} - 1 = 10$$

b) Incidências dos Elementos

Uma vez numerados os dois nós pertencentes a um determinado elemento, deve-se fixar o nó considerado como inicial (nó i) e o nó considerado como final (nó j). A incidência de um membro é então definida através desses dois números, aparecendo sempre em primeiro lugar o número do nó tido como inicial. Assim, na Fig. 34, ao elemento 1 correspondem os nós 1 e 2. Admitindo-se o nó 1 como inicial, define-se a incidência do referido membro como sendo 1-2. Já se tivéssemos imaginado o nó 2 como inicial, a incidência do elemento seria, neste caso, 2-1.

c) Numeração dos Trechos de um Elemento

Supondo um elemento subdividido em m trechos (Fig.24),

numeram-se os trechos de 1 a m, sucessivamente, sempre no sentido do n̄o i (inicial) para o n̄o j (final).

d) Numeração dos Níveis de Armadura

Considerando n_0 níveis de armadura ao longo de uma seção transversal, devem-se numerá-los de 1 a n_0 , n_0 traduzindo o número total de níveis. A numeração pode ser efetuada de uma maneira inteiramente arbitrária, como se mostra nas Figs. 33.a e 33.b.

e) Numeração das Liberações num Elemento

As direções possíveis de se introduzir liberações nas extremidades de um elemento são numeradas de 1 a 6, da maneira indicada na Fig. 27. Note-se que a numeração é efetivada sempre a partir do n̄o considerado como inicial (n̄o i). Assim é que a liberação 1 corresponde a uma liberação a esforço normal na extremidade i, a liberação 5 representa uma liberação a esforço cortante na extremidade j, a liberação 6 subentende uma liberação a momento fletor na extremidade j e assim por diante.

É oportuno lembrar que quando se introduz mais de uma liberação num mesmo membro, não se pode permitir que a combinação de liberações considerada torne o elemento hipostático (vide 2.5.1).

3.1.6 - Sistemas de Referência

a) Sistema Local

Os eixos de referência adotados para o elemento terão sua origem sempre na extremidade i do membro (Fig. 12). O eixo x é dirigido do nó i (inicial) ao nó j (final), definindo-se portanto o seu sentido positivo de i para j . O eixo z , perpendicular ao plano da estrutura, tem definido o seu sentido positivo se o dirigimos para o lado contrário ao que se acha o observador. O eixo y é então determinado de forma a compor o triedro direto x - y - z .

Consideremos, para exemplificar, os elementos 1, 3 e 2 da Fig. 34. Admitindo-se como extremidades iniciais (nó i) de cada um destes membros os nós 1, 4 e 4, respectivamente, o sistema de eixos locais, em cada um dos casos, fica assim determinado (Fig. 35):

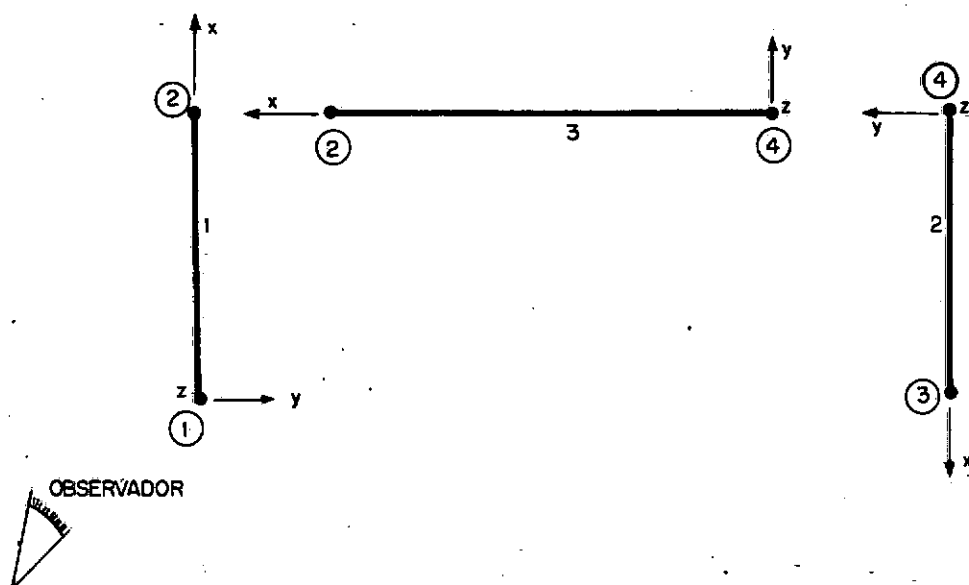


Fig. 35

b) Sistema Global

O sistema de referência escolhido para a estrutura acha-se assinalado na Fig. 15. O plano X-Y corresponde sempre ao plano da estrutura (vide Fig. 34). Note-se que o eixo Z é voltado para o observador.

3.1.7 - Cargas Aplicadas à Estrutura

Como já se frisou anteriormente, sã se admitem cargas aplicadas diretamente nos nãs. As cargas nodais são fornecidas ao programa no sistema global de eixos e consideram-se como positivas quando atuam segundo o sentido positivo dos eixos globais (para maiores esclarecimentos, vide Apêndice A).

3.1.8 - Interpretação dos Resultados

Vamos agora proceder à interpretação dos resultados indicados pelo programa, em função do tipo de estudo realizado. Devemos salientar, inicialmente, que pode ser utilizado qualquer sistema de unidades para entrada de dados no programa, sendo que os resultados apresentam-se também no mesmo sistema.

a) Análise de diversos Casos de Carregamento

Como vimos em 3.1.1.a, por este tipo de estudo obtêm-se os esforços nas extremidades dos elementos, os deslocamentos dos nós e as reações de apoio, para cada um dos esquemas de carga a que estiver submetida a estrutura.

As ações nas extremidades de um elemento são dadas sempre no sistema local de eixos. Além do mais, consideram-se estes esforços como positivos quando atuam no sentido positivo dos eixos de referência.

Seja, por exemplo, a estrutura da Fig. 34. Em função do sistema local adotado para cada membro na Fig. 35, acham-se assinalados na Fig. 36, com seus sentidos positivos, os esforços nas extremidades de todos os elementos. Senão vejamos:

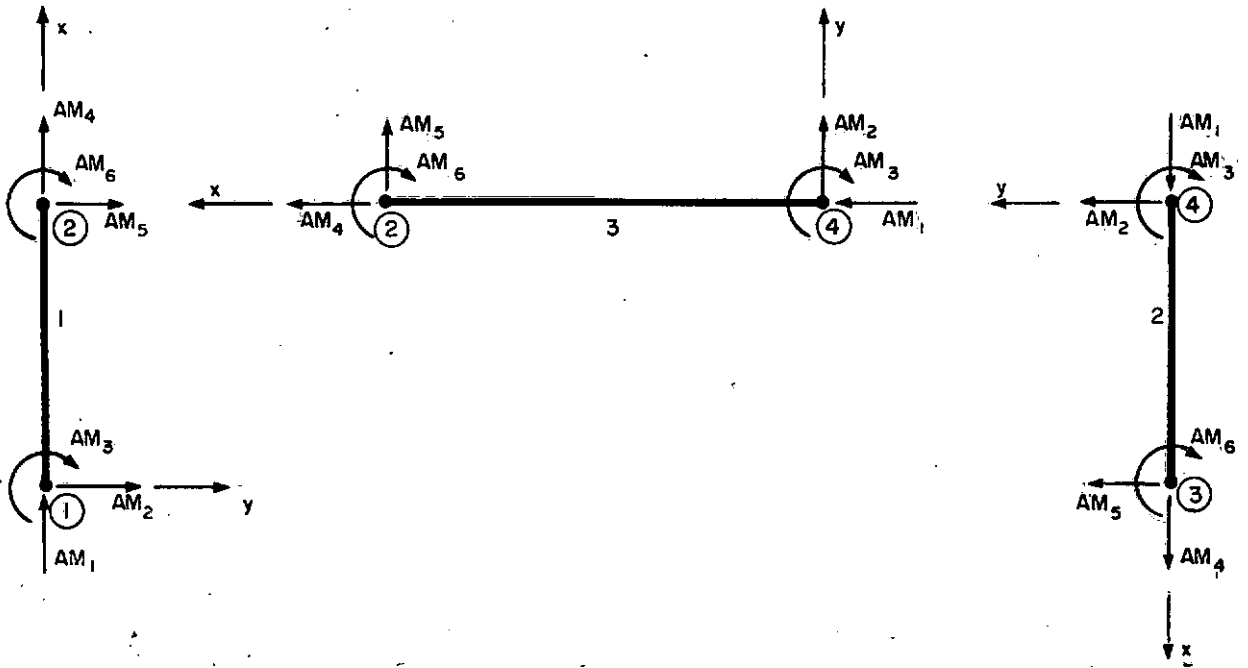


Fig. 36

Note-se que os esforços são numerados de 1 a 6, e que a numeração é efetuada sempre a partir da extremidade i do membro. Reportando-nos à Fig. 14.b, vemos que: $AM_1 = H_i$, $AM_2 = V_i$, $AM_3 = M_i$, $AM_4 = H_j$, $AM_5 = V_j$ e $AM_6 = M_j$.

Os deslocamentos dos nós da estrutura, bem como as reações de apoio, são fornecidos no sistema global de eixos e consideram-se como positivos quando têm o sentido positivo destes eixos de referência escolhidos para a estrutura.

Em se tratando do pórtico da Fig. 34, os deslocamen -

tos, por exemplo, do n \bar{o} 2, se assinalados com seus sentidos positivos, podem ser assim visualizados (Fig. 37):

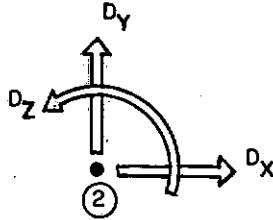


Fig. 37

As reações no apoio 1 são mostradas na Fig. 38, também com seus sentidos positivos:

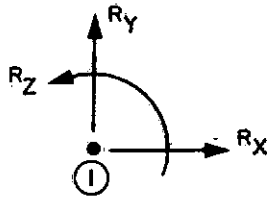


Fig. 38

b) Pesquisa da Capacidade de Carga

Neste caso, os resultados aparecem sob a forma de ações (cargas) aplicadas aos nós da estrutura. Estas ações consideram-se como positivas quando atuam segundo o sentido positivo dos eixos globais.

3.2 - Subrotinas do Programa

A seguir, apresenta-se uma descrição geral das subrotinas que fazem parte do programa.

3.2.1 - Subrotina DRCSP

Por esta subrotina, calculam-se os valores de G_{11} , G_{12} e G_{22} , para cada seção transversal considerada ao longo de um determinado elemento. Admitem-se, para fins de cálculo, n faixas de mesma altura e n_0 níveis de armadura, na seção.

Em função dos valores de ϵ_g e χ , previamente obtidos por (15), é definido o diagrama de deformações na seção. A distribuição de módulos de elasticidade secantes, correspondente, é em seguida estabelecida com auxílio dos diagramas σ - ϵ dos materiais. A parte do cálculo referente à determinação dos módulos de elasticidade secantes, fica inteiramente acomodada numa outra subrotina, EMOSP (vide 3.2.2).

A obtenção de G_{11} , G_{12} e G_{22} faz-se então de acordo com as fórmulas (34), (38) e (42), correspondentes ao caso mais geral de seção circular. Para seções retangulares, estas expressões reduzem-se às expressões (35), (39) e (43).

3.2.2 - Subrotina EMOSP

Esta subrotina tem por finalidade a obtenção, em diversos pontos da seção transversal (vide Fig. 23), dos módulos de elasticidade secantes que servirão de base para se estabelecer uma distribuição para E , na seção. Estes módulos de elasticidade são determinados em cada um dos referidos pontos, em função da deformação ϵ e tendo em vista os diagramas σ - ϵ estabelecidos para os materiais (vide Fig. 39).

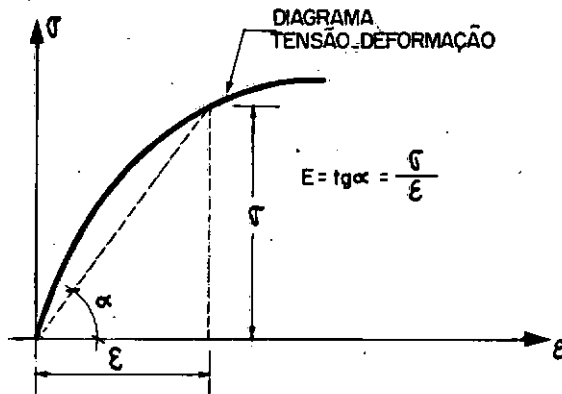


Fig. 39

Para o concreto é utilizado o diagrama parábola-retângulo (Fig. 1). Para os aços que apresentam patamar de escoamento definido (tipo A), adota-se o diagrama bilinear da Fig. 2. No caso dos aços que não apresentam patamar de escoamento definido (tipo B), utiliza-se o diagrama da Fig. 4.

3.2.3 - Subrotina STYTE

Como vimos em 2.3.2, a matriz $[SM_{\epsilon}]$, que estabelece o relacionamento entre $\{AM_{\epsilon}\}$ e $\{DM_{\epsilon}\}$ num elemento, pode ser decomposta na soma de duas outras matrizes, $[SM_{\epsilon}^0]$ e $[SM_{\epsilon}^1]$. O objetivo da subrotina STYTE é a determinação da primeira destas duas matrizes, $[SM_{\epsilon}^0]$, cujos coeficientes dependem da avaliação das integrais contidas em (17).

Inicialmente, procede-se ao cálculo das referidas integrais. Obtém-se qualquer uma delas, numericamente, através de um somatório de m parcelas. Estas parcelas resultam da aplicação da regra de Simpson a cada um dos m trechos em que se supõe fracionado o elemento (vide 2.3.3.b). Convém não esquecer que o número de divisões fixado por trecho tem que ser necessariamente par, condição básica para se poder utilizar a regra de Simpson. Ressalte-se também que os valores de G_{11} , G_{12} e G_{22} , requeridos para o cálculo, obtém-se por intermédio da subrotina DRCSP.

Tendo sido avaliadas as integrais (17), passa-se em seguida à determinação da matriz $[SM_{\epsilon}^0]$, por intermédio de (22).

3.2.4 - Subrotina PALUI

Por meio desta subrotina, chega-se à matriz de rigidez do elemento no sistema local. Considera-se $[SM]$ decomposta na soma de duas matrizes, $[SM^0]$ e $[SM^1]$. Para obtenção de $[SM^0]$, utiliza-se a expressão (28). Convém ressaltar que a matriz $[SM^0_e]$, requerida para este cálculo, determina-se previamente através da subrotina STYTE. A outra matriz, $[SM^1]$, função da força axial no elemento, é obtida por intermédio de (29).

3.2.5 - Subrotina SISEQ

Esta subrotina destina-se ao cálculo dos deslocamentos incógnitos dos nós da estrutura, mediante a resolução de um sistema de equações lineares simbolicamente representado por $[SD]\{D\} = \{AD\}$. Nesta expressão, a matriz dos coeficientes $[SD]$ corresponde à matriz de rigidez relacionada aos graus de liberdade da estrutura, e o vetor $\{AD\}$ é constituído das cargas de nó também associadas aos deslocamentos incógnitos.

A resolução do sistema de equações é efetuado pelo método de Gauss, levando-se em consideração as características de banda e simetria da matriz dos coeficientes.

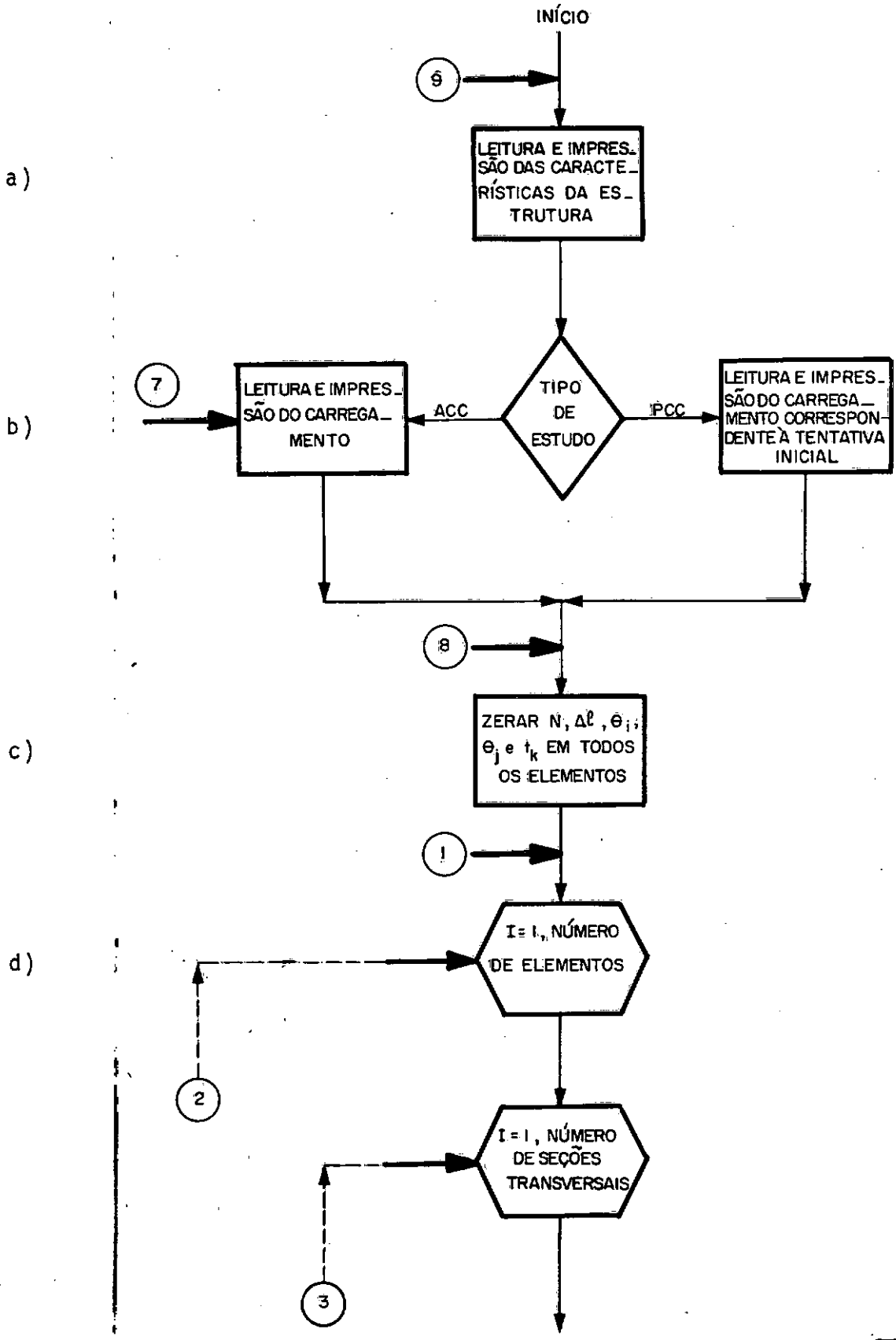
3.3 - Diagrama de Blocos Simplificado do Programa

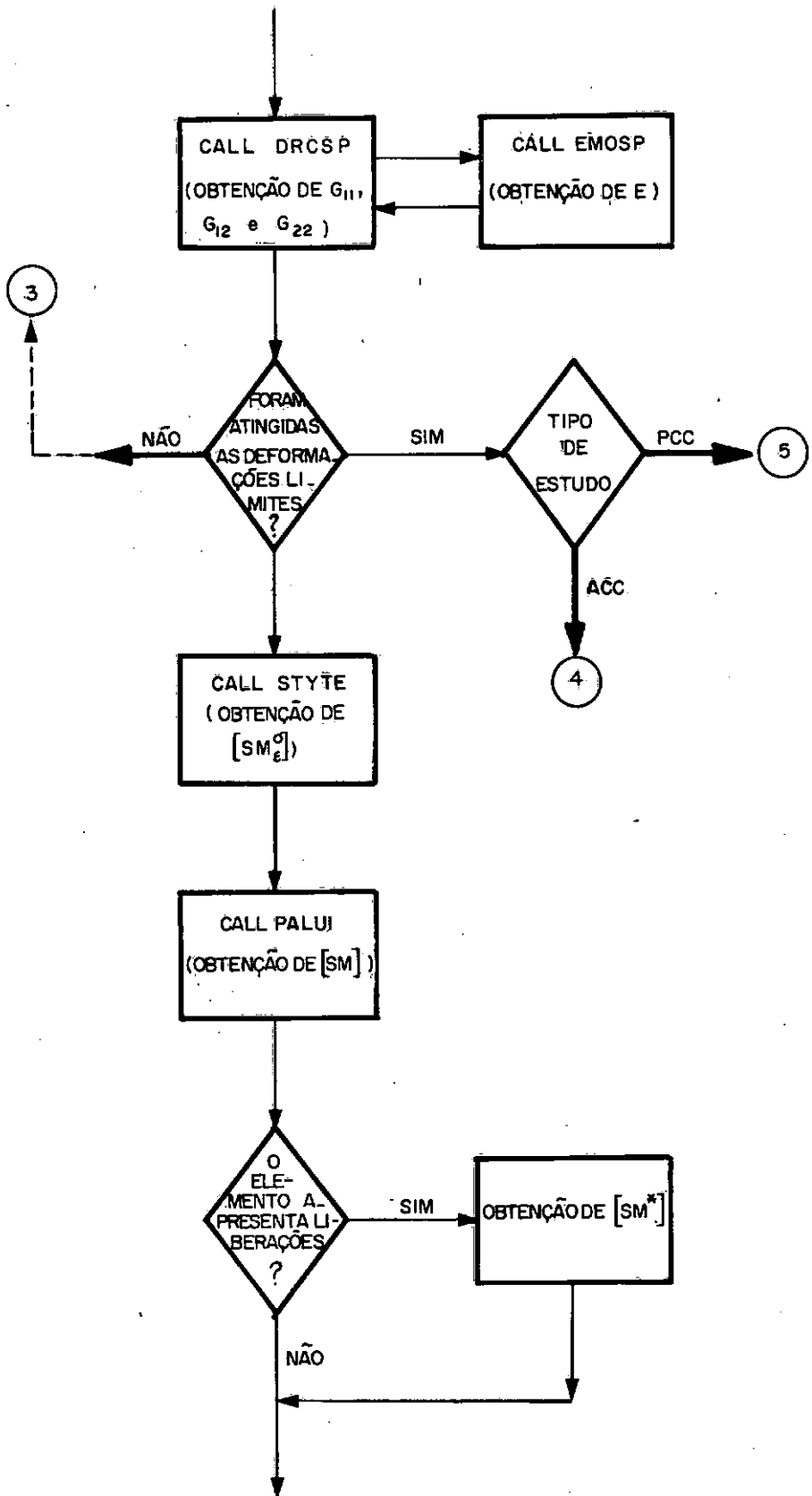
3.3.1 - Diagrama de Blocos

Simbologia:

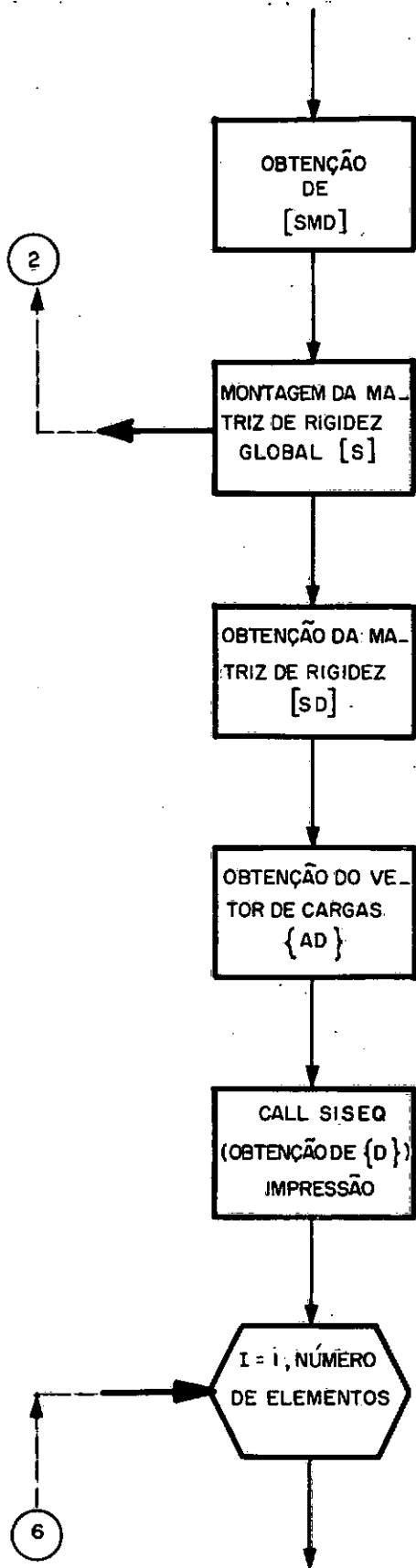
ACC - análise de casos de carregamento

PCC - pesquisa da capacidade de carga





109

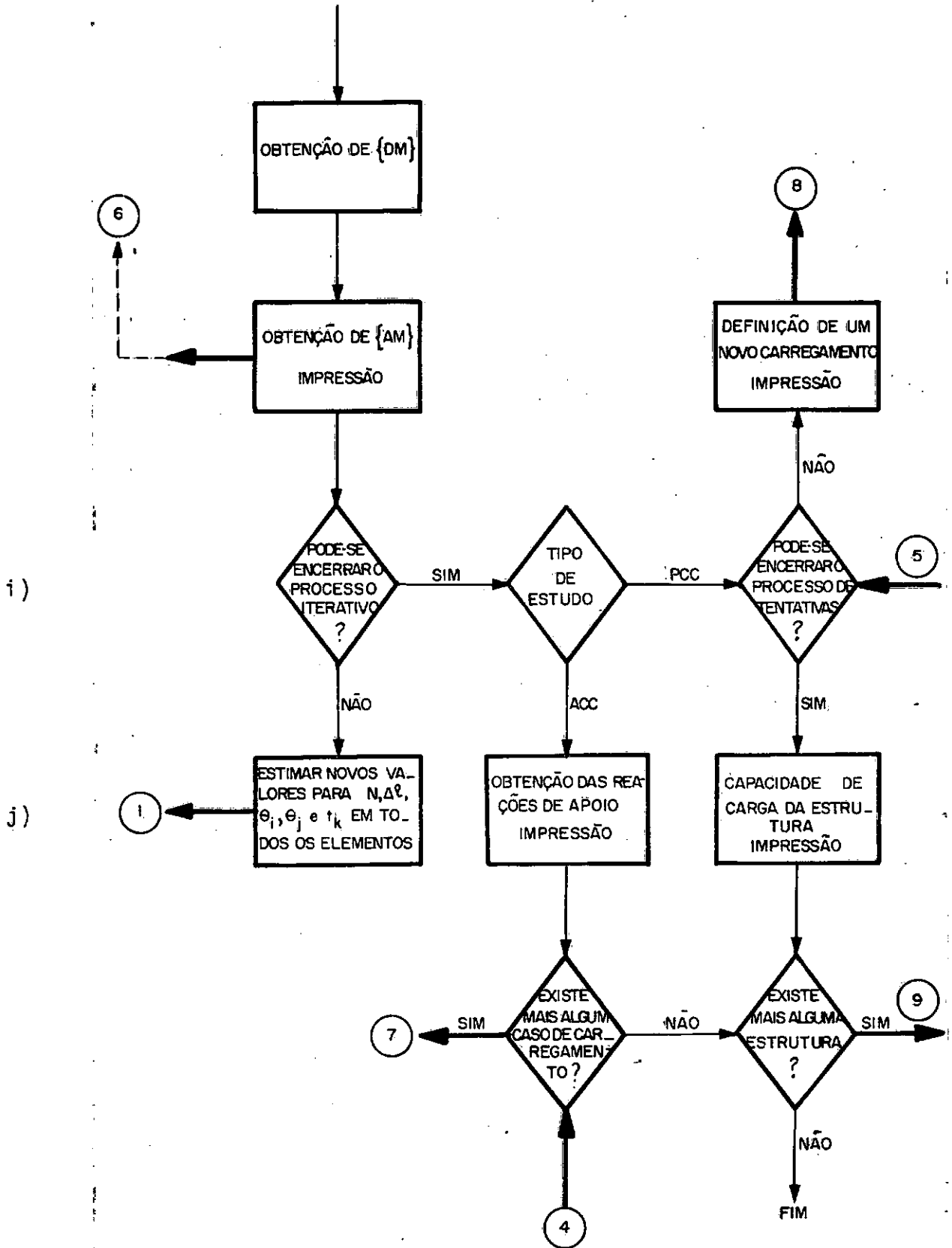


e)

f)

g)

h)



3.3.2 - Comentários

a) Para qualquer estrutura que se examine, têm que ser fornecidos ao programa todos os dados necessários à efetivação da análise. Estas informações incluem, entre outras coisas, o número de elementos, o número de nós, as coordenadas dos nós, a identificação dos apoios, a definição dos diagramas tensão-deformação dos materiais e todas as referências necessárias à completa caracterização de cada elemento. Neste último caso enquadram-se a forma da seção transversal, a incidência do membro, a definição das direções liberadas (se houver liberações no elemento), o número de trechos em que se fraciona o elemento e as características correspondentes a cada trecho considerado. Entre estas características encontram-se, por exemplo, o comprimento do trecho, as dimensões da seção transversal, a percentagem e distribuição da armadura etc...

No Apêndice A serão fornecidos todos os esclarecimentos relativos à entrada de dados para o programa.

b) No caso de se submeter uma mesma estrutura a diversos esquemas de carga, cada vez que se conclui a análise referente a um determinado carregamento, procede-se à leitura do carregamento seguinte.

Quando se pesquisa a capacidade de carga de uma estrutura, faz-se a leitura do carregamento que dá partida ao processo de tentativas.

c) Para iniciar o processo iterativo, considera-se nulo o esforço normal em todos os elementos. Além do mais, a zeração de Δl , θ_i , θ_j e t_{k0} equivale a se adotar para E_c e E_s os valores correspondentes à origem dos diagramas σ - ϵ dos materiais (módulos de elasticidade tangentes).

d) Por intermédio da subrotina DRCSP, determinam-se, para as diversas seções transversais consideradas ao longo de cada elemento, os valores de G_{11} , G_{12} e G_{22} . No interior da DRCSP é chamada a subrotina EMOSP, para que seja efetuado o cálculo dos módulos de elasticidade secantes.

Em cada seção transversal, verifica-se sempre se as deformações limites especificadas para os materiais foram atingidas em algum ponto. Em caso afirmativo, a decisão tomada depende do tipo de estudo que se esteja efetuando, como podemos observar no diagrama de blocos.

Quando não são atingidas as deformações limites em nenhuma seção transversal, passa-se à determinação da matriz $[SM_e^0]$, por meio da subrotina STYTE. Em seguida, obtem-se a matriz de rigidez do elemento no sistema local, $[SM]$, através da subrotina PALUI.

No caso de um membro que apresente liberações, a partir de $[SM]$ se estabelece uma nova matriz, $[SM^*]$, que vem a se constituir na matriz de rigidez do elemento com liberações.

Por intermédio da operação matricial

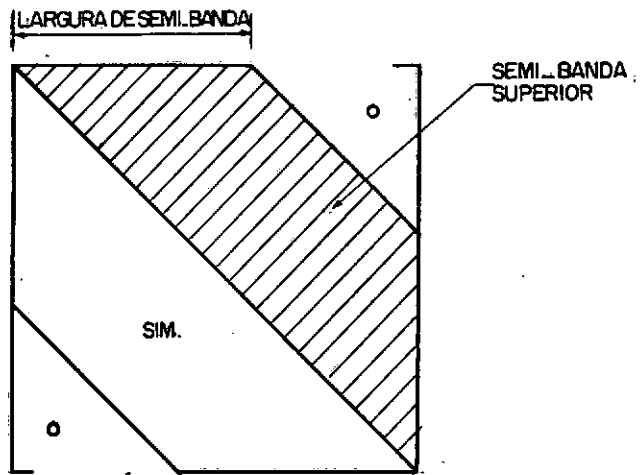
$$[SMD] = [RT]^T [SM] [RT] \quad \text{ou}$$

$$[SMD] = [RT]^T [SM^*] [RT] ,$$

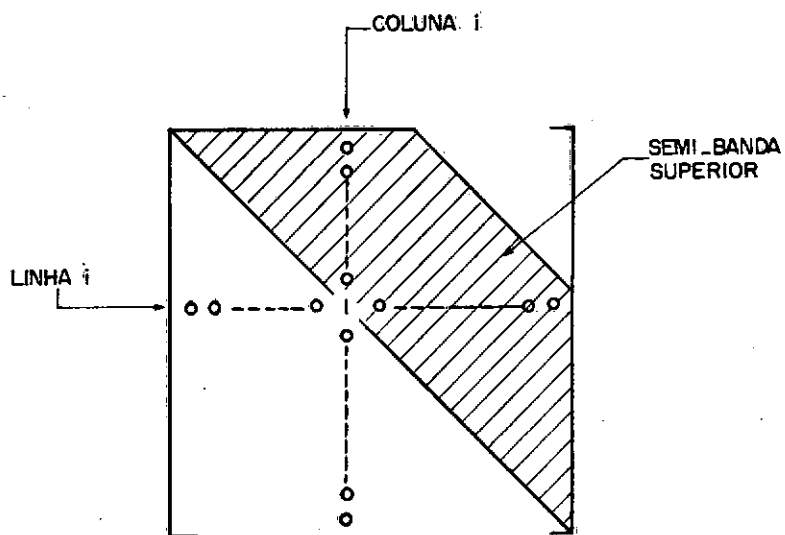
em que se tira partido da matriz de rotação transformada $[RT]$, definida em 2.1.2.b, passã-se a referir a matriz de rigidez do elemento (sem ou com liberações) ao sistema de eixos da estrutura.

Conhecidos os coeficientes da matriz $[SMD]$, através deles coleta-se a contribuição de cada elemento à formação da matriz de rigidez global $[S]$.

Tendo em vista as características de banda e simetria da matriz de rigidez global, sã se monta no programa a semi-banda superior desta matriz.



e) Uma vez determinada a matriz $[S]$, define-se a matriz $[SD]$, relativa aos graus de liberdade da estrutura, de acordo com o procedimento esquematizado abaixo (técnica do 1 e 0, com simetria):



A linha i , supõe-se como correspondente a uma ligação. Substituem-se então por zeros todos os elementos da linha e da coluna i da matriz $[S]$, a exceção do coeficiente da diagonal que é feito igual a 1. Evidentemente, isto se repete para todas as direções que apresentam vínculos.

f) Representando-se por $\{AC\}$ o vetor que contém todas as cargas de nō, inclusive aquelas que correspondem às direções restringidas, obtem-se o vetor $\{AD\}$ substituindo-se as cargas AC_i (sendo i uma direção restringida qualquer) pelos deslocamentos prescritos $D_{p,i} = 0$. Saliente-se que neste trabalho sō se consideram apoios fixos.

$$\left. \begin{array}{c} AC_1 \\ AC_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ AC_n \end{array} \right\} \text{linha } i \rightarrow$$

$n = 3x n_n$, onde $n_n \rightarrow$ número de nōs

g) Através da subrotina SISEQ, chega-se aos deslocamentos incōgnitos dos nōs da estrutura, mediante a resolução de um sistema de equações lineares simbolicamente representado por $[SD]\{D\} = \{AD\}$.

Em decorrência da utilização da técnica do 1 e 0, na realidade, aparecem também no vetor $\{D\}$ os deslocamentos $D_i = 0$ referentes às restrições. Isto acontece em virtude da existência, dentro do sistema de equações, de uma identidade do tipo $D_i = D_{p,i}$, em correspondência a cada direção restringida i .

h) De posse do vetor $\{D\}$, define-se para cada elemento um vetor $\{DMD\}$, no sistema global, contendo os seis deslocamentos relativos às extremidades do membro. Utilizando a expressão matricial $\{DM\} = [RT]\{DMD\}$, obtém-se a transformação destes deslocamentos para o sistema local de eixos.

No caso de um elemento que possua liberações, segue-se a mesma seqüência de operações indicadas acima, determinando-se inicialmente um vetor $\{DM\}$ como se o membro não apresentasse liberações. Em seguida, procede-se então ao cálculo dos deslocamentos DM_ℓ , associados às direções liberadas, mediante a resolução de um sistema de equações, como se mostrou em 2.5.2. Os deslocamentos DM_ℓ são então introduzidos no vetor $\{DM\}$, em substituição aos deslocamentos dos nós da estrutura correspondentes às direções liberadas.

A obtenção das ações nas extremidades dos elementos se faz, quer o membro apresente ou não liberações, por intermédio da expressão matricial $\{AM\} = [SM]\{DM\}$.

Uma outra alternativa para a determinação dos esforços {AM}, supondo-se um elemento com liberações, seria o emprego da expressão $\{AM\} = [SM^*]\{DM\}$. Neste caso, como vimos em 2.5.2, pode-se admitir como fazendo parte do vetor {DM} os deslocamentos dos nós da estrutura nas direções liberadas, já que os mesmos em nada influem nos cálculos. No entanto, tendo em vista o processo de análise não-linear utilizado neste trabalho, a primeira alternativa, na verdade, resultou ser mais conveniente em termos de programação.

i) O controle de convergência do processo iterativo se faz por intermédio dos deslocamentos dos nós da estrutura. Assim, quer se trate da análise de um caso de carregamento ou de uma tentativa do processo de pesquisa da capacidade de carga, considera-se que a estrutura atinge a configuração de equilíbrio quando, em dois ciclos consecutivos, se verificar para todos os deslocamentos a condição:

$$\left| (D_k)^i - (D_k)^{i-1} \right| \ll \left| P_1^0 / (D_k)^{i-1} \right| \quad (51)$$

em que:

D_k → deslocamento genérico

i → iteração genérica

Acrescente-se também que no programa é estabelecido um

limite máximo de 20 iterações. No caso de não se obter convergência ao final de 20 iterações, interrompe-se o processo iterativo e em qualquer dos dois tipos de estudo admite-se como tendo sido ultrapassada a capacidade de carga da estrutura.

No caso de pesquisa da capacidade de carga, pode-se dar por encerrado o processo de tentativas quando forem obtidos dois conjuntos de cargas, C_a e C_b , que atendam às seguintes condições:

1º) Para o conjunto C_a não é ultrapassada a capacidade de carga da estrutura;

2º) Para o conjunto C_b é ultrapassada a capacidade de carga da estrutura;

3º) Representando-se por Q qualquer uma das cargas de intensidade variável ao longo do processo de tentativas, e denotando por:

Q_a → valor de Q em C_a

Q_b → valor de Q em C_b

tem que se verificar,

$$\left| Q_a - Q_b \right| \leq \left| p_2^0 / Q_a \right| \quad (52)$$

Tanto p_2 quanto p_1 são fornecidos como dados de entrada para o programa.

No que se refere ao número máximo de tentativas, foi fixado no programa um limite de 15. Uma vez atingido este número, sem que se chegue à capacidade de carga procurada, deve-se reiniciar o processo de tentativas com uma estimativa mais adequada para o carregamento de partida.

j) Sempre que ao fim de um ciclo se verificar que ainda não pode ser encerrado o processo iterativo, têm que se estabelecer em todos os elementos novos valores para N , Δl , θ_i , θ_j e t_k (vide 2.4) e proceder em seguida a um novo ciclo.

Quando se analisam diversos casos de carregamento, são determinadas as reações de apoio relativas a cada um dos esquemas de carga que se fizer atuar na estrutura. Para este cálculo consideram-se, em cada nó restringido, as equações de equilíbrio correspondentes às direções vinculadas.

CAPÍTULO IVEXEMPLOS DE APLICAÇÃO4.1 - Exemplo nº 1

Apresenta-se neste exemplo uma comparação entre os resultados fornecidos pelo programa quando, na análise da estrutura considerada, se utiliza um número variável de elementos.

Seja, então, a coluna da Fig. 40.a, submetida ao carregamento também assinalado na figura. Supõe-se que a carga vertical P tenha seu valor fixado ($P = 128000$ kgf) e que a carga horizontal F seja de intensidade variável. Na Fig. 40.b mostra-se a seção transversal da peça. Os diagramas tensão-deformação de cálculo, adotados para os materiais, acham-se desenhados na Fig. 41.

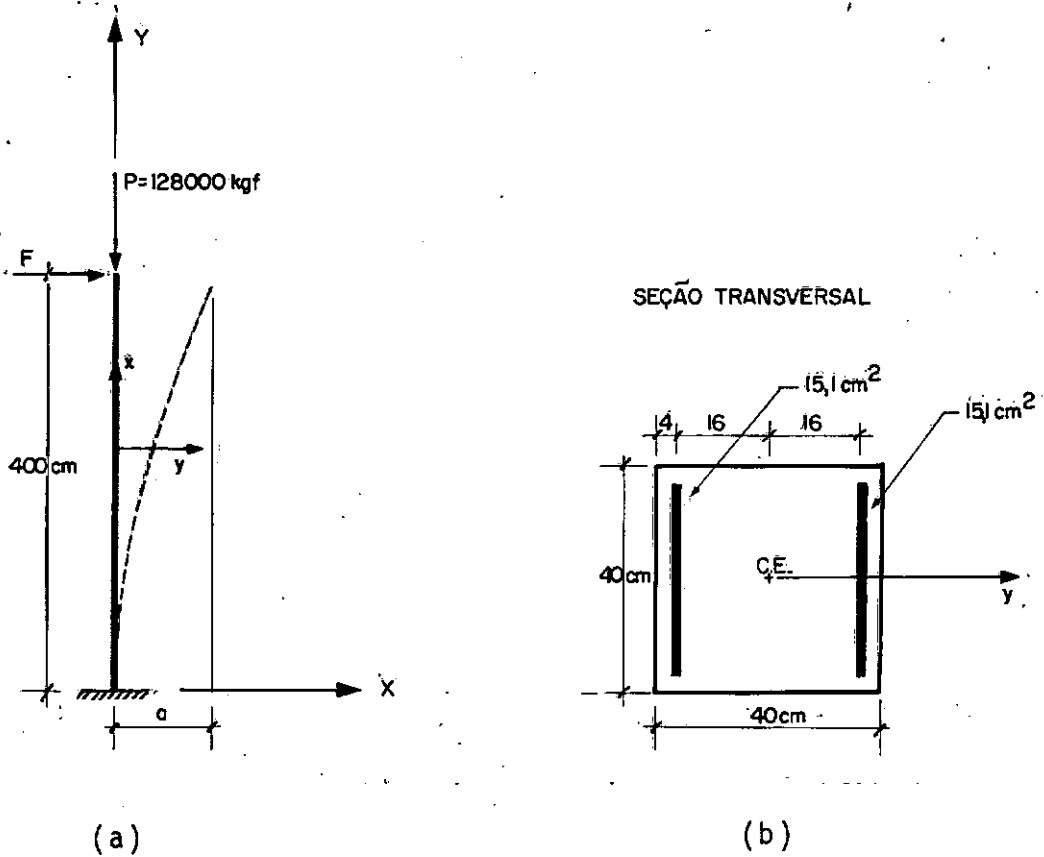


Fig. 40

a) Comparação de Resultados

Para o estudo que se tem em vista, imaginou-se a coluna da Fig. 40.a subdividida em 1, 2, 4 e 10 elementos, respectivamente. Saliente-se que em qualquer destas situações, efetua-se a discretização da estrutura considerando elementos de mesmo comprimento. Através da utilização do programa elaborado e de acordo com o procedimento indicado a seguir, traça-se então, em cada caso, uma curva relacionando a carga horizontal F com a flecha a (a flecha a está assinalada na Fig. 40.a).

Em primeiro lugar pesquisa-se a capacidade de carga da estrutura, ou seja, a intensidade máxima da carga horizontal F . Define-se, portanto, o ponto da curva correspondente a F_{\max} . Em seguida, escolhem-se diversos valores para F , entre 0 e F_{\max} , procedendo-se então a análise de diversos casos de carregamento sobre a estrutura. Naturalmente, cada um destes carregamentos é constituído da carga vertical P (128000 kgf) e de uma carga horizontal F escolhida. Assim, considerando um número suficiente de esquemas de carga pode-se, através de pares de valores F e α , construir por pontos a curva carga-flecha procurada.

Apresentam-se na Fig. 41 as curvas $F-\alpha$ obtidas com a utilização do programa, supondo a estrutura subdividida em 1, 2, 4 e 10 elementos.

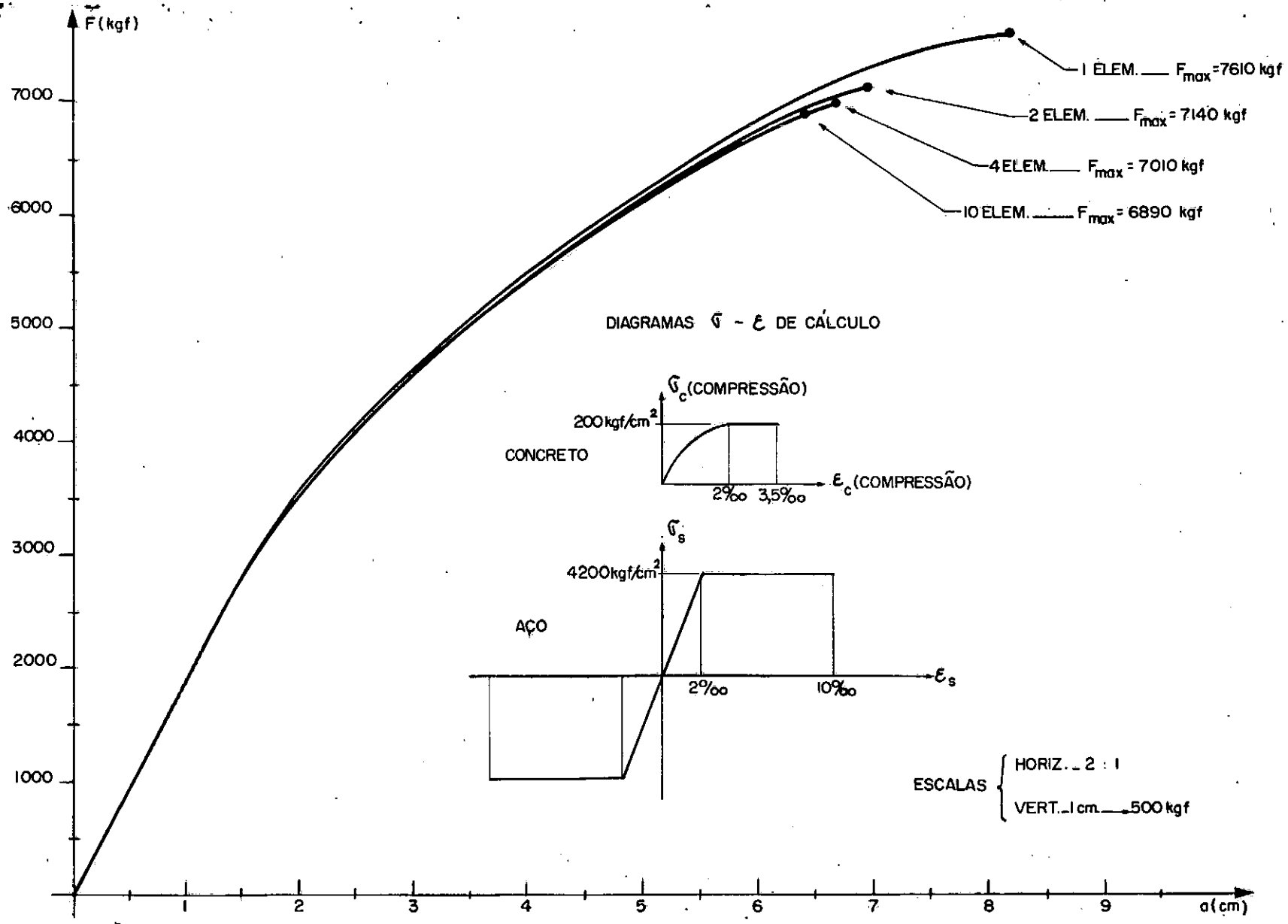


Fig. 41

No quadro a seguir anotam-se os resultados referentes à capacidade de carga F_{\max} e à flecha correspondente a , para cada um dos casos considerados.

	F_{\max} (kgf)	a (cm)
1 elem.	7610	8,24
2 elem.	7140	7,00
4 elem.	7010	6,70
10 elem.	6890	6,36

Tomando-se como referência o resultado obtido com 10 elementos verificamos, no que diz respeito à capacidade de carga da estrutura, que os resultados correspondentes a 1, 2 e 4 elementos diferem daquele de 10,4%, 3,6% e 1,7%, respectivamente.

Apenas a título de informação, gostaríamos de assinalar que a análise desta mesma estrutura pelo programa "FRAME ANALYSIS" (vide 4.3 e ref. 8 ⁽¹⁾) indica para F_{\max} e para a flecha correspondente a , 6800 kgf e 6,30 cm, respectivamente.

(1) Denota-se por ref., uma referência bibliográfica.

b) Comentários

Além da discretização da estrutura em um número variável de elementos, outros parâmetros que poderiam influir nos resultados seriam o número de faixas consideradas na seção transversal e o número de divisões adotado ao longo do comprimento do membro (vide 2.3.3). Em relação à primeira destas variáveis, admitiu-se para o estudo realizado a seção transversal fracionada em 15 faixas. Quanto ao segundo parâmetro, supôs-se em qualquer caso de discretização um total de 40 divisões na estrutura, distribuídas uniformemente pelos elementos. Assim, quando se subdividiu a estrutura em 1 elemento, foram tomadas 40 divisões no elemento; ao se considerar a coluna encerrando 2 elementos, admitiram-se 20 divisões por elemento e assim por diante.

Posteriormente, foram adotados outros valores para cada um dos dois parâmetros mencionados acima. Embora não sejam indicados os resultados obtidos, podemos asseverar que os mesmos diferiram muito pouco daqueles aqui apresentados. Assim, o número de elementos em que se subdivide a estrutura trata-se efetivamente do fator preponderante no que diz respeito à qualidade dos resultados.

Observando-se as curvas $F-a$ apresentadas na Fig. 41 e também consultando o quadro de valores do item a, verificamos que a discretização da estrutura em 2 a 4 elementos já indica um bom

grau de refinamento para os resultados. Nota-se também pelo gráfico que até um certo nível de carga (aprox. $F = 3500$ kgf) os resultados independem do número de elementos adotados. A partir daí, observa-se uma tendência da estrutura se mostrar tanto mais rígida quanto menor o número de elementos considerados. Nota-se este detalhe ao serem comparados os valores da flecha α , referentes a um mesmo nível de carga, nos diversos casos de discretização.

Um outro comentário que gostaríamos de fazer é no que diz respeito à análise desta mesma estrutura ou pelos programas que utilizam os diagramas $M - N - \frac{1}{r}$ (vide 1.2.1 e refs. 2, 3 e 14), ou mesmo pelo programa "FRAME ANALYSIS". Em ambos os casos, ao contrário do que nos indicou o programa aqui apresentado, tornar-se-ia necessário subdividir a estrutura em um número considerável de elementos. Isto se justifica pelo fato de que nestes programas os esforços são admitidos constantes ao longo de cada membro.

Os resultados que acabamos de expor, além de outros não mencionados neste trabalho, nos serviram de orientação para adotar nos demais exemplos deste capítulo, uma discretização de cada barra da estrutura considerada, em três elementos de mesmo comprimento.

4.2 - Exemplo nº 2

Neste exemplo examina-se o comportamento da coluna es belta ($\lambda = 120$), de seção circular, assinalada na Fig. 42.a. Con sidera-se a peça submetida a duas cargas verticais P de intensi- dade variável, igualmente excêntricas.

Uma vez que as estruturas das Figs. 42.a e 42.b são equivalentes, por questões de comodidade optou-se por trabalhar com a coluna indicada na Fig. 42.b. Na Fig. 42.c mostra-se a se ção transversal da peça. Os diagramas tensão-deformação de cál- culo, adotados para o aço e para o concreto, acham-se desenhados na Fig. 43.

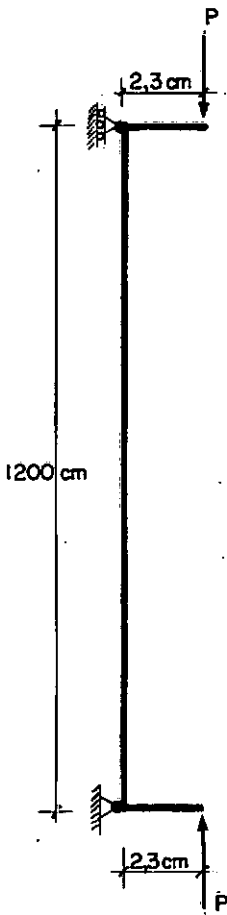


Fig. 42.a

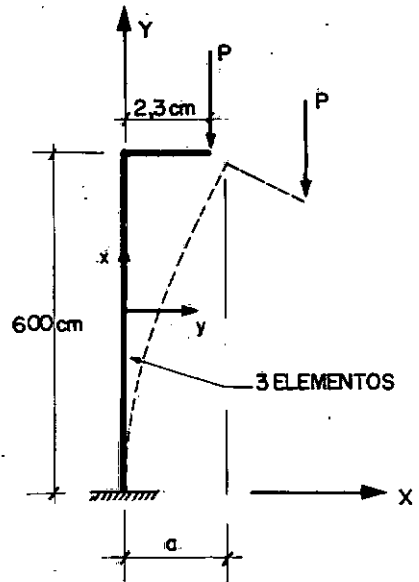


Fig. 42.b

SEÇÃO TRANSVERSAL

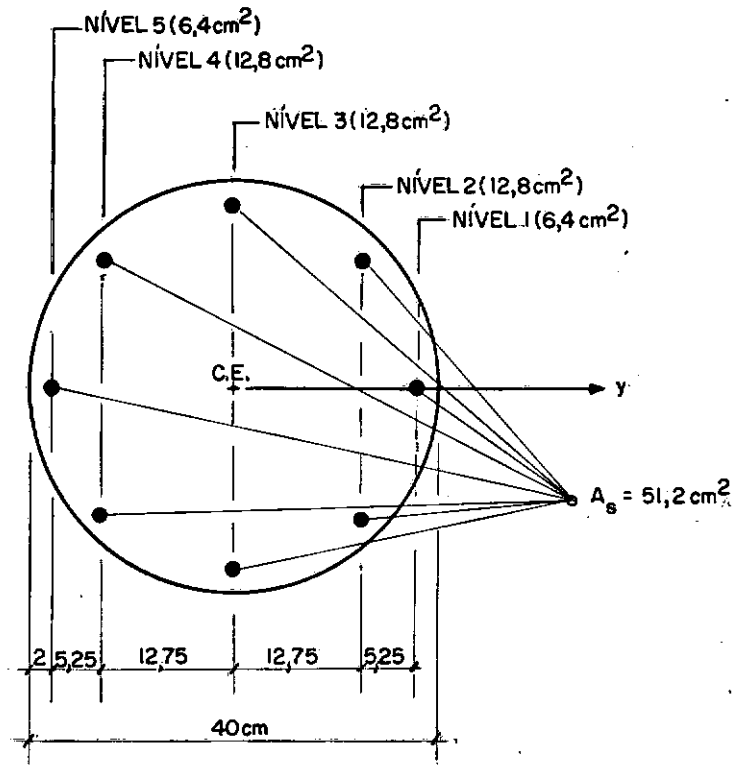


Fig. 42.c

a) Apresentação de Resultados

Inicialmente, utilizando o programa apresentado neste trabalho e obedecendo a um procedimento análogo ao já descrito no exemplo anterior, obtem-se a curva carga vertical P - flecha a (a flecha a está assinalada na Fig. 42.b) para a peça em estudo. Esta curva acha-se desenhada na Fig. 43.

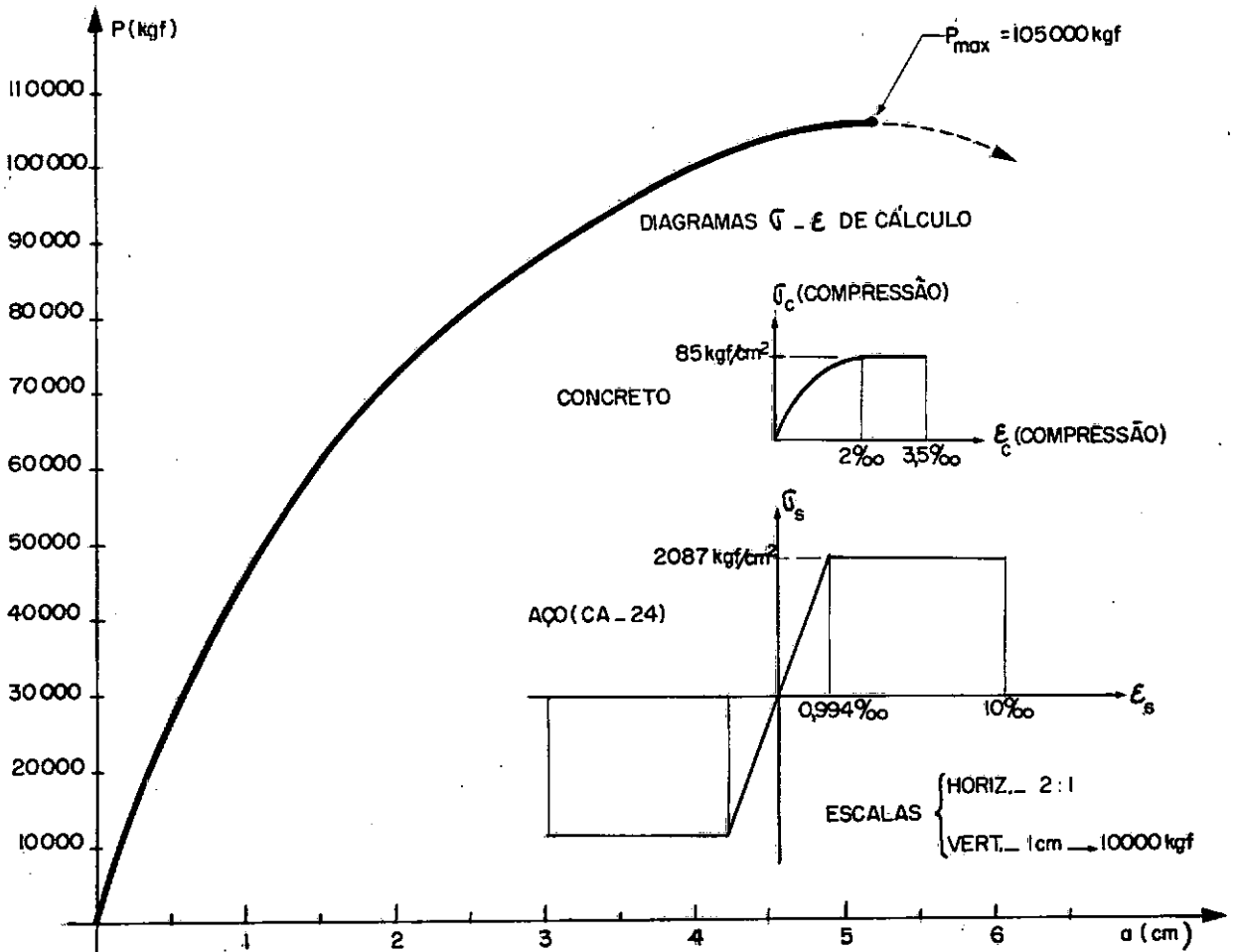


Fig. 43

Relativamente à capacidade de carga P_{\max} e à flecha correspondente a , o programa elaborado indicou os valores de 105000 kgf e 5,21 cm, respectivamente.

Assinalamos também que de acordo com o trabalho de N. Yamagata, "Colunas de Concreto Armado Solicitadas por Cargas Axiais Excêntricas" (ref. 25), a análise desta mesma estrutura conduz a um valor de 107000 kgf para P_{\max} , resultado este bastante se

melhante ao que chegamos.

Em seguida, mostram-se na Fig. 44 três curvas. As duas primeiras (curvas $\lambda = 0$ e $\lambda = 120$) são traçadas plotando-se os diversos pares de valores momento fletor M e esforço normal N , referentes à seção transversal do engaste e correspondentes a intensidades variáveis da carga aplicada P . A curva $\lambda = 120$ relaciona-se à peça em estudo enquanto que a reta $\lambda = 0$ é obtida supondo-se a coluna com esbeltez nula ($\lambda = 0$ equivale a se considerar nulo o comprimento da peça). A terceira curva representa o diagrama de interação $M-N$ relativo à seção transversal da Fig. 42.c. Neste diagrama assinalam-se os diversos pares de valores M e N que levam ao esgotamento da capacidade resistente da seção.

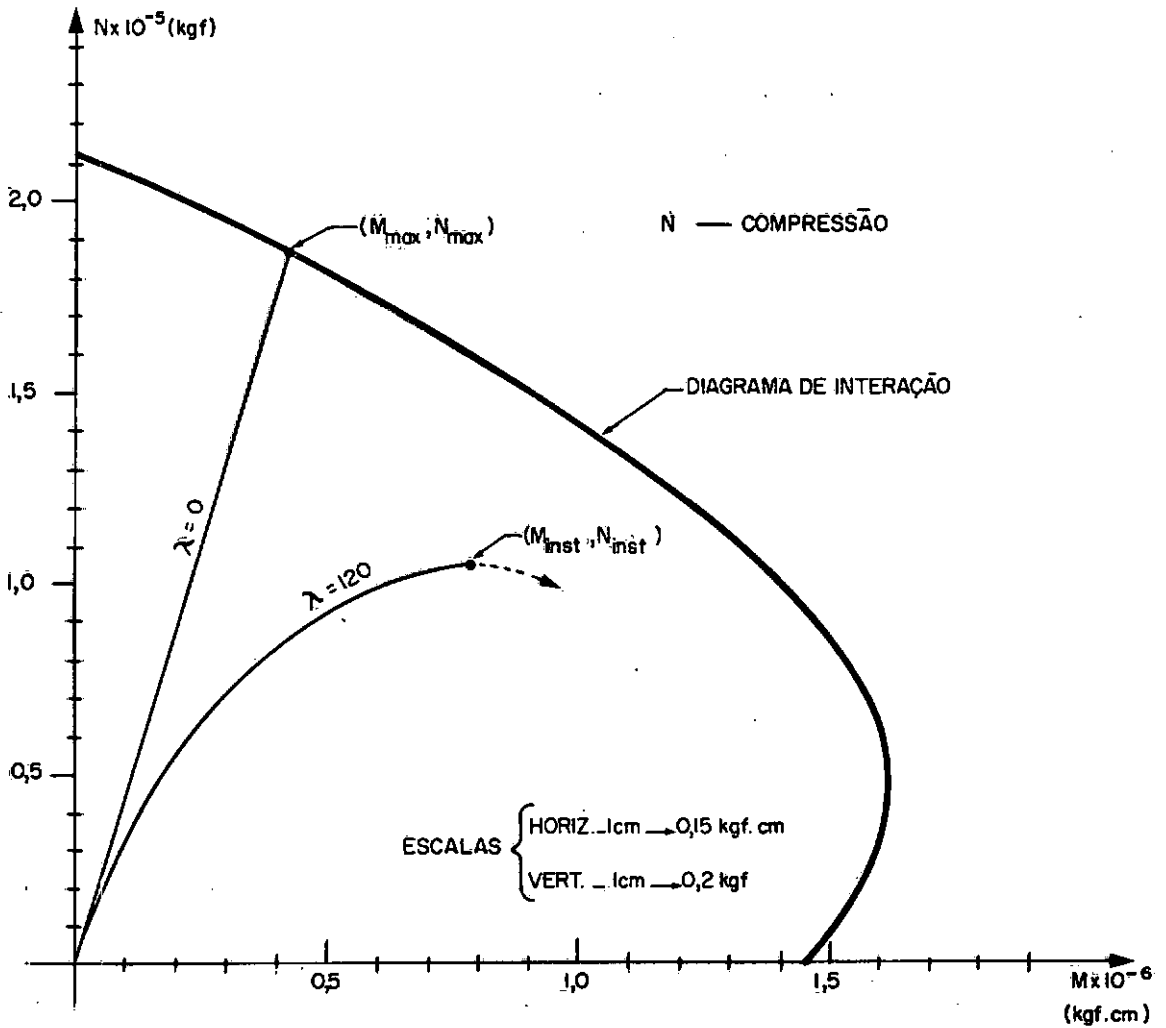


Fig. 44

b) Comentários

Podemos observar que tanto a curva carga-flecha da Fig. 43 como a curva M-N, referente a $\lambda = 120$, da Fig. 44, apresentam um ponto de tangente horizontal. Isto nos indica, portanto, que o comportamento da coluna em estudo, no estado limite último, está associado a instabilidade do equilíbrio. Ressalte-se

também que pelo fato do programa elaborado s̄o trabalhar por con trole de cargas (impõem-se cargas e obtêm-se deslocamentos como resposta), não se consegue obter o ramo instável (descendente) de ambas as curvas mencionadas acima.

Quando ocorre instabilidade do equilíbrio, chega-se à capacidade de carga da estrutura, sem que sejam atingidas, na seção transversal mais solicitada (neste caso a seção do engaste), as deformações limites especificadas para o esgotamento da capacidade resistente.

Este tipo de comportamento pode ser visualizado, com clareza, através das curvas mostradas na Fig. 44. É válido se afirmar que sempre que a capacidade de carga é atingida por esgotamento da capacidade resistente (a reta $\lambda = 0$ nos serve como exemplo desta situação), o par de valores M_{max} e N_{max} encontra sua representação sobre o diagrama de interação M-N. Já o mesmo não se pode dizer quando o estado limite último está associado à instabilidade do equilíbrio (curva $\lambda = 120$). Neste caso, pelo fato da seção transversal não ter sido solicitada até o limite máximo de sua resistência, o par M_{inst} e N_{inst} , correspondente à capacidade de carga, não tem sua representação sobre o diagrama de interação M-N.

4.3 - Exemplo nº 3

Apresenta-se neste exemplo uma comparação entre resultados obtidos com a utilização do programa elaborado e resultados fornecidos pelo programa "FRAME ANALYSIS" (ref. 8), também destinado à análise não-linear de pórticos planos de concreto armado.

a) Programa "FRAME ANALYSIS"

O programa "FRAME ANALYSIS" baseia-se também num processo iterativo constituído por etapas lineares de análise pelo método da rigidez. Assim como no programa aqui apresentado, admitem-se somente cargas aplicadas diretamente nos nós. A matriz de rigidez do elemento para a análise não-linear pode ser igualmente decomposta na soma de duas outras matrizes, $[SM^0]$ e $[SM^1]$. Na matriz $[SM^0]$, que é exatamente igual à matriz $[SM]$ apresentada em 2.1.2.a, introduzem-se as correções ligadas à não-linearidade do material. Já na matriz $[SM^1]$, idêntica à que se chegou em 2.3.2, efetuam-se as correções envolvendo a não-linearidade geométrica (da mesma forma que se faz neste trabalho).

As correções ditadas pela não-linearidade do material obedecem ao procedimento que passamos a descrever. Supõe-se cada barra da estrutura discretizada num certo número de elementos, de tal forma que em cada elemento são considerados valores mē-

dios para os esforços obtidos na etapa de análise que se está efetuando. Com o par N e M assim definido, chega-se à distribuição de deformações correspondente (Fig. 45), tendo em vista que:

$$\epsilon = \epsilon_g - \frac{1}{r} y$$

onde:

ϵ - deformação num ponto qualquer da seção transversal

$\epsilon_g = \frac{N}{EA}$ - deformação axial

$\frac{1}{r} = - \frac{M}{EI}$ - curvatura

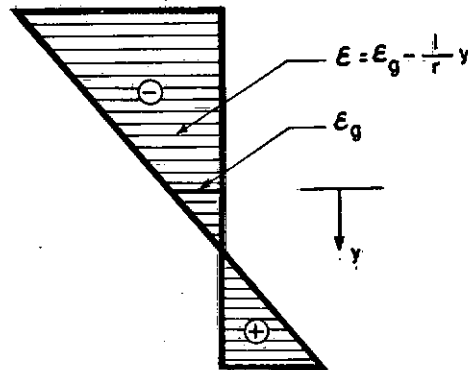


Fig. 45

Baseado nesta distribuição de deformações encontrada na análise elástica, porém, agora raciocinando em termos de concreto armado, parte-se para a determinação dos esforços internos N_{int} e M_{int} , levando-se em conta os diagramas tensão-deformação especificados para o concreto e para o aço (Fig. 46).

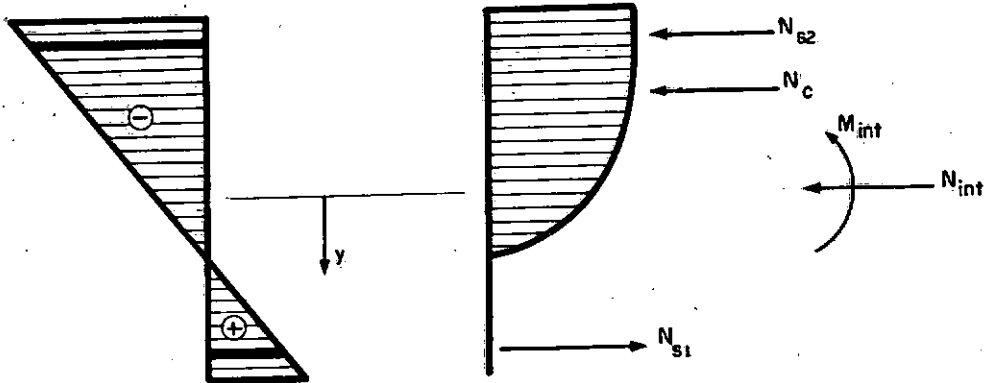


Fig. 46

Se o equilíbrio não é satisfeito, ou seja, $N \neq N_{int}$ e $M \neq M_{int}$, para a próxima etapa linear da análise, considera-se:

$$EA = \frac{N_{int}}{\epsilon_g}$$

$$EI = - \frac{M_{int}}{\frac{1}{r}}$$

Evidentemente, este procedimento que acabamos de expor se estende a todos os elementos da estrutura.

Na pesquisa da capacidade de carga de uma estrutura, o programa "FRAME ANALYSIS" trabalha por controle de deslocamentos. Isto possibilita, portanto, a obtenção do ramo descendente da curva carga-flecha (vide Fig. 48) no caso de estruturas em que a capacidade de carga está associada à instabilidade do equilíbrio.

b) Comparação de Resultados

Consideremos o pórtico da Fig. 47.a, submetido ao carregamento também assinalado na figura. Supõe-se conhecida a magnitude das cargas verticais P ($P = 128000 \text{ kgf}$) e admite-se que as cargas horizontais F sejam de intensidade variável. Nas Figs. 47.b, 47.c e 47.d, detalham-se as seções transversais da viga e das duas colunas. Os diagramas tensão-deformação de cálculo, a dotados para o aço e para o concreto, acham-se indicados na Fig. 48.

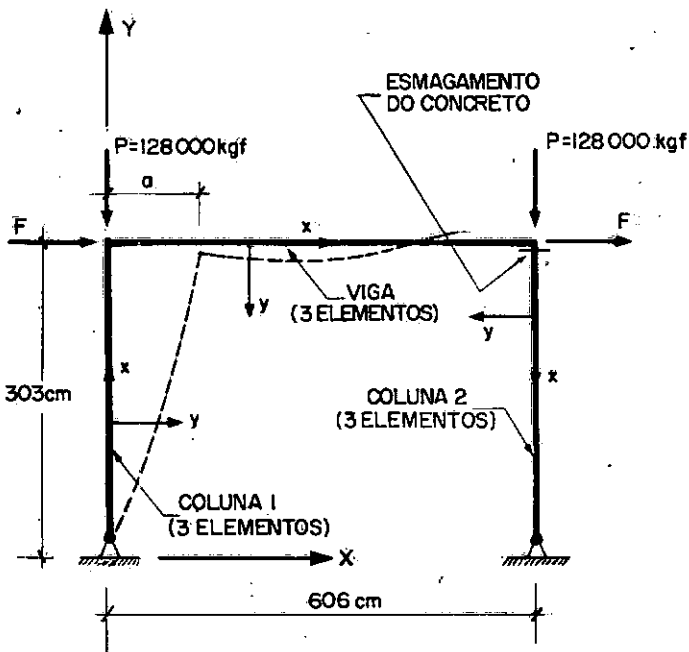


Fig. 47.a

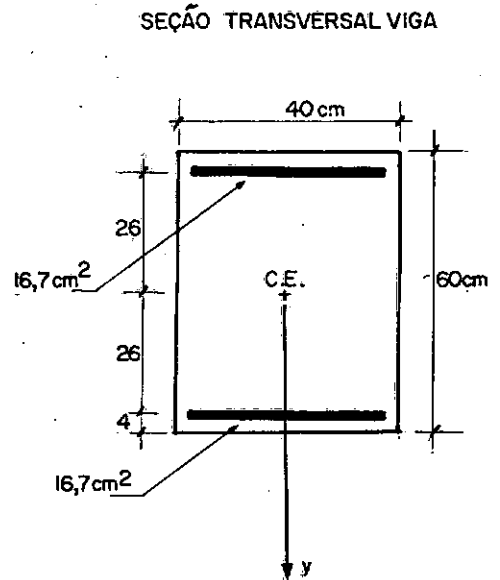


Fig. 47.b

SEÇÃO TRANSVERSAL COLUMNA 1

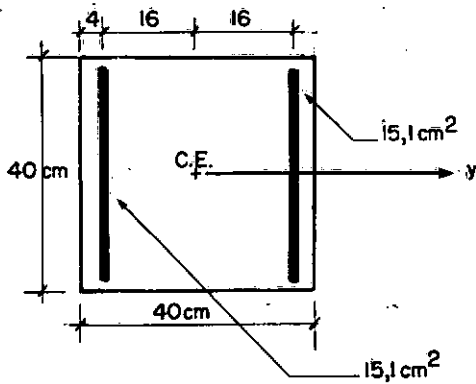


Fig. 47.c

SEÇÃO TRANSVERSAL COLUMNA 2

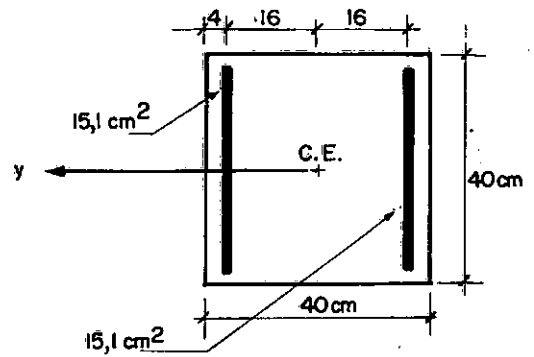


Fig. 47.d

Na Fig. 48, em linha cheia, mostra-se o gráfico $F-a$ (a flecha a encontra-se assinalada na Fig. 47.a) obtido através da utilização do programa apresentado neste trabalho. Para tal, obedeceu-se a um procedimento análogo ao já descrito em 4.1.

A curva carga-flecha traçada de acordo com o programa "FRAME ANALYSIS" aparece em linha pontilhada na Fig. 48. Saliente-se que na ref. 8 nada consta sobre como foi efetuada a discretização da estrutura. Devemos admitir, no entanto, que se tenha fixado um número suficiente de elementos, de forma a garantir um bom grau de refinamento para os resultados.

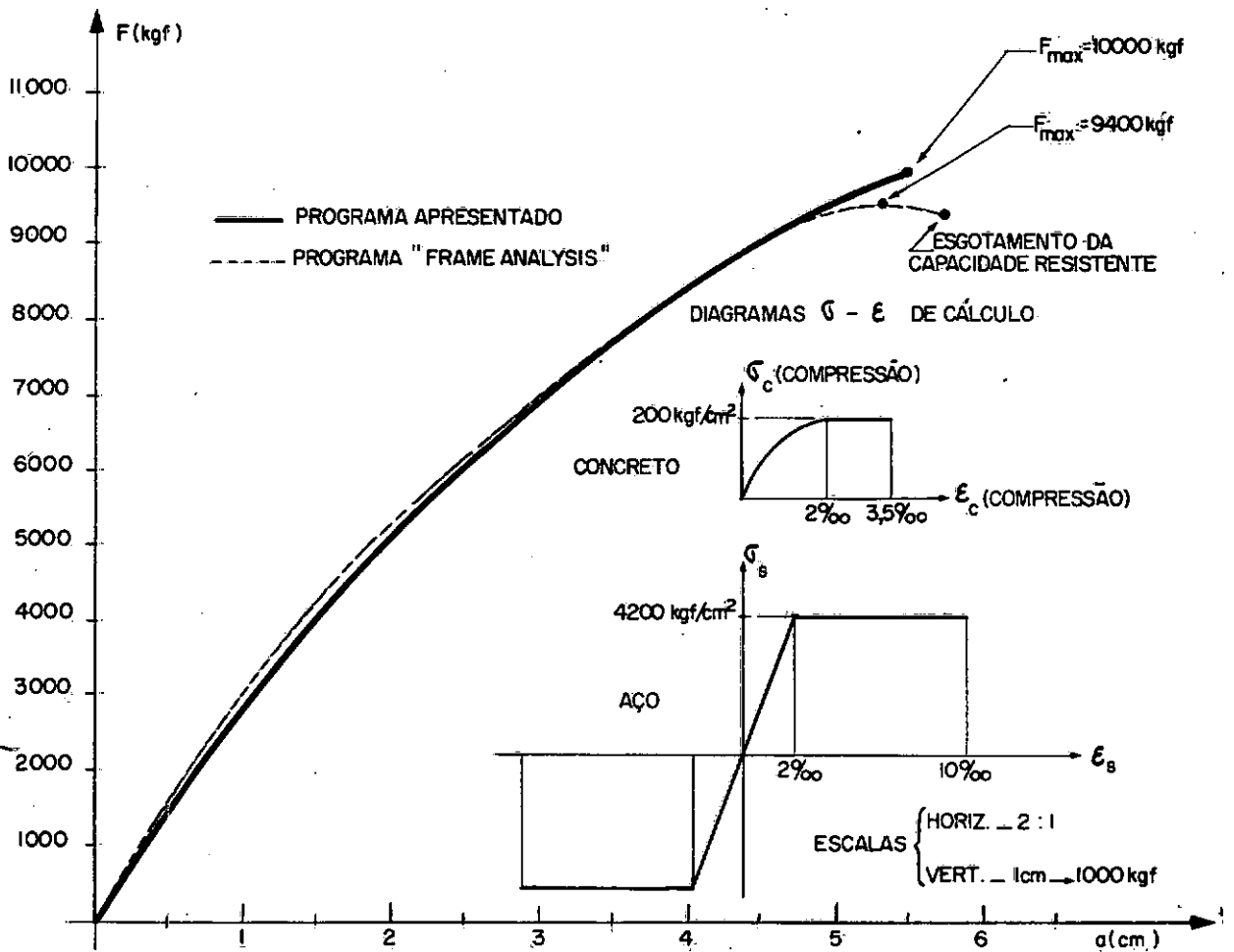


Fig. 48

No quadro a seguir anotam-se os resultados referentes à capacidade de carga F_{max} e à flecha correspondente a , obtidos por um e por outro programa.

	F_{max} (kgf)	a (cm)
Programa apresentado	10000	5,46
Programa "FRAME ANALYSIS"	9400	5,30

Tomando por base o valor de F_{\max} relativo ao programa "FRAME ANALYSIS" verificamos, no que diz respeito à capacidade de carga, que os resultados diferem entre si de 6,4%.

c) Comentários

Como se pode deduzir da Fig. 48, até um certo valor de F (aprox. $F = 9000$ kgf) nota-se que as duas curvas ficam bem próximas. A partir daí, distanciam-se um pouco e, inclusive, cada uma delas acusa um tipo diferente de estado limite último para a estrutura.

Pelo programa "FRAME ANALYSIS" a capacidade de carga é atingida por instabilidade do equilíbrio, embora seja lícito se afirmar, pela observação do gráfico, que nesta ocasião a seção transversal mais solicitada já deve estar perto do limite máximo de sua resistência.

Já de acordo com o programa aqui apresentado, a capacidade de carga está ligada ao esgotamento da capacidade resistente, no caso, esmagamento do concreto na seção transversal assinalada na Fig. 47.a.

Ainda que para a estrutura analisada os dois programas não tenham indicado o mesmo tipo de comportamento último, mesmo assim podemos admitir que os resultados obtidos por um e por

outro programa não se afastam muito.

4.4 - Exemplo nº 4

Neste último exemplo, procede-se a uma investigação visando comprovar a eficiência do método aproximado do CEB-FIP (ref. 9, R. 42,23), indicado para o cálculo de peças longas solicitadas simultaneamente a flexão e compressão. Efetua-se este estudo a partir de resultados fornecidos pelo programa, quando utilizado na pesquisa da capacidade de carga de colunas previamente dimensionadas por aquele método.

a) Método Aproximado do CEB-FIP

Este método só pode ser aplicado às peças de seção transversal constante e armadura simétrica, quando submetidas a um esforço normal também constante ao longo do seu eixo.

De acordo com o método, as peças longas ($35 \leq \lambda \leq 140$ no caso de concretos normais e $35 \leq \lambda \leq 80$ para concretos leves) devem ser dimensionadas como se fossem curtas ($\lambda < 35$), para a carga axial N_d ⁽²⁾ e para um momento fletor M_d , dado por:

(2) Utiliza-se o índice d para designar um valor de cálculo (ou de projeto).

$$M_d = M_{1d} + M_{2d}$$

em que:

M_{1d} - momento de 1a. ordem

M_{2d} - momento de 2a. ordem (momento complementar)

A avaliação do momento complementar faz-se por meio da expressão aproximada que se segue:

$$M_{2d} = N_d \frac{1}{r} \frac{\ell_e^2}{10}$$

onde:

$\frac{1}{r}$ - curvatura da peça na metade do comprimento de flambagem

ℓ_e - comprimento de flambagem

A curvatura deve ser obtida por:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} = \frac{-\epsilon_{cd} + \frac{f_{yd}}{E_s}}{h} - \frac{\ell_e}{50000 h^2}, \text{ para } N_d < 0,5 A_c f_{cd}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \frac{0,5 A_c f_{cd}}{N_d}, \text{ para } N_d \geq 0,5 A_c f_{cd}$$

$$\epsilon_{cd} = -0,003 \text{ (cargas de curta duração)}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s \times \gamma_n}, \text{ onde } \gamma_n \text{ representa um coeficiente de comportamento. Considera-se } \gamma_n = 1,2$$

para concretos normais e $\gamma_n = 1,4$ para concretos leves.

E_s - módulo de elasticidade do aço

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c \times \gamma_n}$$

A_c - seção de concreto

h - altura total da seção (dimensão no plano de flexão)

Portanto, uma vez obtida a curvatura, determina-se o momento complementar M_{2d} e em seguida procede-se ao cálculo da armadura necessária, tendo em vista o par de esforços solicitantes N_d e $M_d = M_{1d} + M_{2d}$.

Convém ressaltar que ao utilizar este método não se leva em conta qualquer excentricidade adicional ($e_a = 0$). Por outro lado, quando $\lambda > 70$, a seção de armadura longitudinal deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$A_s f_{yd} \geq \frac{A_c f_{cd}}{5}, \text{ em que } A_s \text{ representa a seção total de armadura.}$$

b) Aplicação Numérica do Método

Seja a coluna da Fig. 49, em que se consideram:

$$L = 800 \text{ cm}$$

$$N_d = P = 20000 \text{ kgf}$$

$$f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{yk} = 2400 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$\gamma_c = 1,5$$

$$\gamma_n = 1,2 \text{ (concreto normal)}$$

b.1) Verificação do Índice de Esbeltez

Temos:

$\lambda = \frac{\ell_e}{i_z}$, denotando-se por i_z o raio de giração da seção com respeito ao eixo z .

$$\ell_e = 800 \times 2 = 1600 \text{ cm}$$

$$i_z = \frac{h\sqrt{3}}{6} = \frac{40\sqrt{3}}{6}$$

Então:

$$\lambda = \frac{1600}{\frac{40\sqrt{3}}{6}} = 140$$

Como $35 \leq \lambda \leq 140$, se está situado dentro do campo de aplicação do método aproximado.

b.2) Valores de Cálculo dos Esforços Solici-
tantes de 1a. Ordem

$$N_d = 20000 \text{ kgf}$$

$$M_{1d} = 20000 \times 6,5 = 130000 \text{ kgf.cm}$$

b.3) Cálculo do Momento Complementar

$$M_{2d} = N_d \frac{1}{r} \frac{l_e^2}{10}$$

Temos:

$$f_{cd} = \frac{150}{1,5 \times 1,2} = 83 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{2400}{1,15 \times 1,2} = 1739 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A_c = 20 \times 40 = 800 \text{ cm}^2$$

$$0,5 A_c f_{cd} = 0,5 \times 800 \times 83 = 33200 \text{ kgf}$$

Como $N_d = 20000 < 0,5 A_c f_{cd}$, vem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,003 + \frac{1739}{2100000}}{40} - \frac{1600}{50000 \times 40^2} = 0,757 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

Logo:

$$M_{2d} = 20000 \times 0,757 \times 10^{-4} \times \frac{1600^2}{10} = 390000 \text{ kgf.cm}$$

b.4) Determinação do Par de Esforços para Dimensionamento

$$N_d = 20000 \text{ kgf}$$

$$M_d = M_{1d} + M_{2d} = 130000 + 390000 = 520000 \text{ kgf.cm}$$

b.5) Cálculo da Armadura

Com o par de esforços N_d e M_d obtido, calcula-se a armadura necessária da forma que se julgar mais conveniente (ábacos, tabelas, programas automáticos para dimensionamento etc...).

Saliente-se que para este cálculo devem ser adotados:

$$0,85 f_{cd} = 0,85 \times \frac{150}{1,5 \times 1,2} = 71 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{2400}{1,15 \times 1,2} = 1739 \text{ kgf/cm}^2$$

Assim, com $N_d = 20000 \text{ kgf}$ e $M_d = 520000 \text{ kgf.cm}$ chega-se a $A_s = 9,60 \text{ cm}^2$.

c) Estudo Realizado

Supõe-se a coluna da Fig. 49.a com três comprimentos

diferentes, $L = 200\text{cm}$, $L = 500\text{cm}$ e $L = 800\text{cm}$, o que corresponde a valores de λ respectivamente iguais a 35,87 e 140. Em cada um destes três casos admitem-se atuando sobre a peça cargas verticais excêntricas P , cujas intensidades acham-se assinaladas na 1a. coluna dos quadros I, II e III.

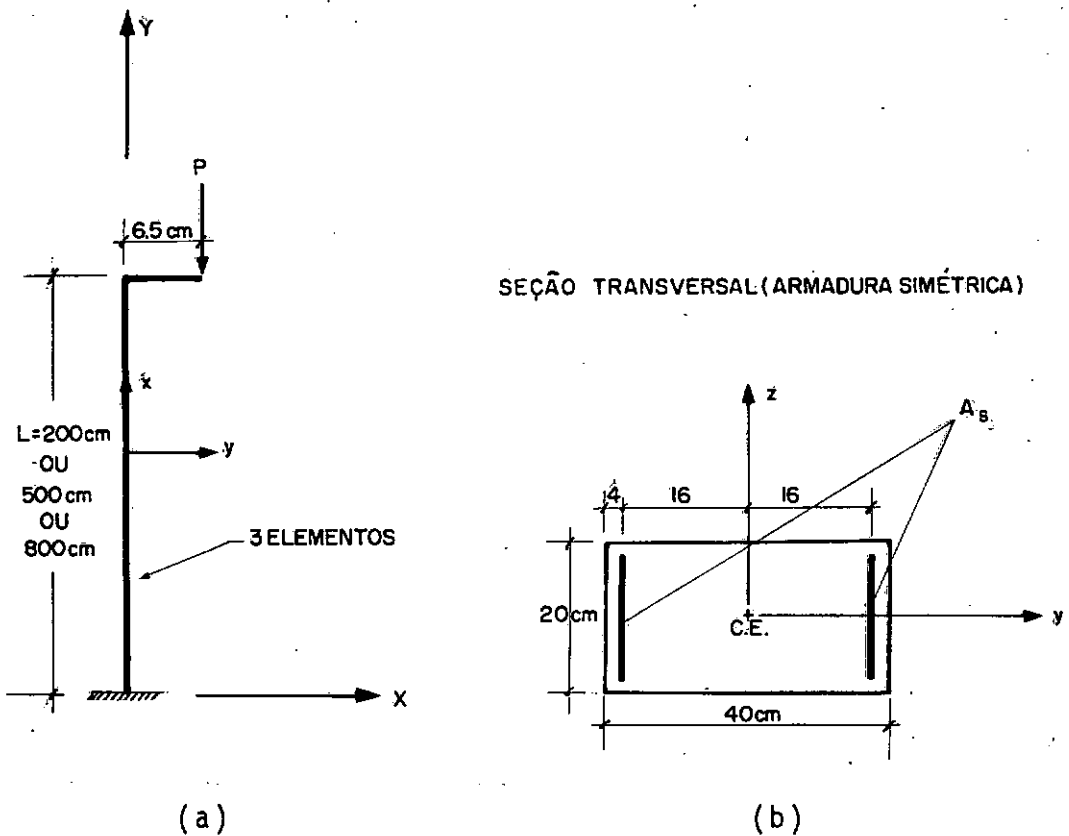


Fig. 49

Em seguida, de acordo com o método aproximado do CEB-FIP, determinam-se as armaduras que devem ser introduzidas na seção transversal da Fig. 49.b (vide 2a. coluna dos quadros I, II e III), de modo que se tenha a peça dimensionada para cada uma das cargas P . Saliente-se que foram adotados no cálculo $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$, $f_{yk} = 2400 \text{ kgf/cm}^2$ (aço CA-24), $\gamma_s = 1,15$, $\gamma_c =$

$= 1,5$ e $\gamma_n = 1,2$. A obtenção das seções de ferro A_s , pelo método aproximado, faz-se de acordo com o encaminhamento apresentado no item a e ilustrado numericamente no item b (note-se que o exemplo numérico refere-se ao caso em que $P = 20000$ kgf e $\lambda = 140$ - quadro III).

Como pode ser observado em todos os quadros, as cargas P escolhidas conduzem a percentagens de armadura bastante variáveis, abrangendo-se portanto desde seções transversais com pequenas quantidades de armadura, até seções fortemente armadas.

A seguir, admitindo incorporada à coluna a armadura calculada pelo método aproximado, utiliza-se o programa elaborado na determinação da capacidade de carga da peça. Convém ressaltar que na pesquisa da capacidade de carga com o programa, introduz-se uma excentricidade adicional $e_a = 2$ cm (vide ref. 9, R.42,20) ao invés de considerar $e_a = 0$ e $\gamma_n = 1,2$, como no método aproximado.

Desta forma, adota-se no programa:

$$e = 6,5 + 2 = 8,5 \text{ cm}$$

$$0,85 f_{cd} = 0,85 \times \frac{150}{1,5} = 85 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{2400}{1,15} = 2087 \text{ kgf/cm}^2$$

Os resultados referentes à capacidade de carga obtida

com a utilização do programa : são apresentados na 3a. coluna dos quadros I, II e III.

Na 4a. coluna dos quadros I, II e III mostra-se, percentualmente, o quanto diferem entre si a capacidade de carga e a carga atuante P . Denota-se por Δ a diferença entre a capacidade de carga e a carga P .

Para cada um dos três tipos de coluna examinados, traça-se também um gráfico onde, para cada seção de ferro total A_s , plotam-se a carga atuante P e a capacidade de carga da peça (Figs. 50, 51 e 52).

c.1) Coluna $\lambda = 35$

Neste caso, como se pode observar no quadro I e na Fig. 50, os resultados indicam estar o método aproximado a favor da segurança, uma vez que para todas as seções de ferro A_s , a capacidade de carga obtida com o programa resultou maior que a carga aplicada P .

QUADRO I - Coluna $\lambda = 35$

P (kgf)	A_s (cm ²) Método apro- ximado	Capacidade de carga (kgf) Programa	$\frac{\Delta}{P}$
40000	3,80	40800	2 ^o /o
50000	11,10	51600	3,2 ^o /o
60000	18,90	61500	2,5 ^o /o
70000	26,90	71800	2,6 ^o /o
80000	34,80	81500	1,9 ^o /o
90000	42,90	91700	1,9 ^o /o

COLUNA $\lambda = 35$

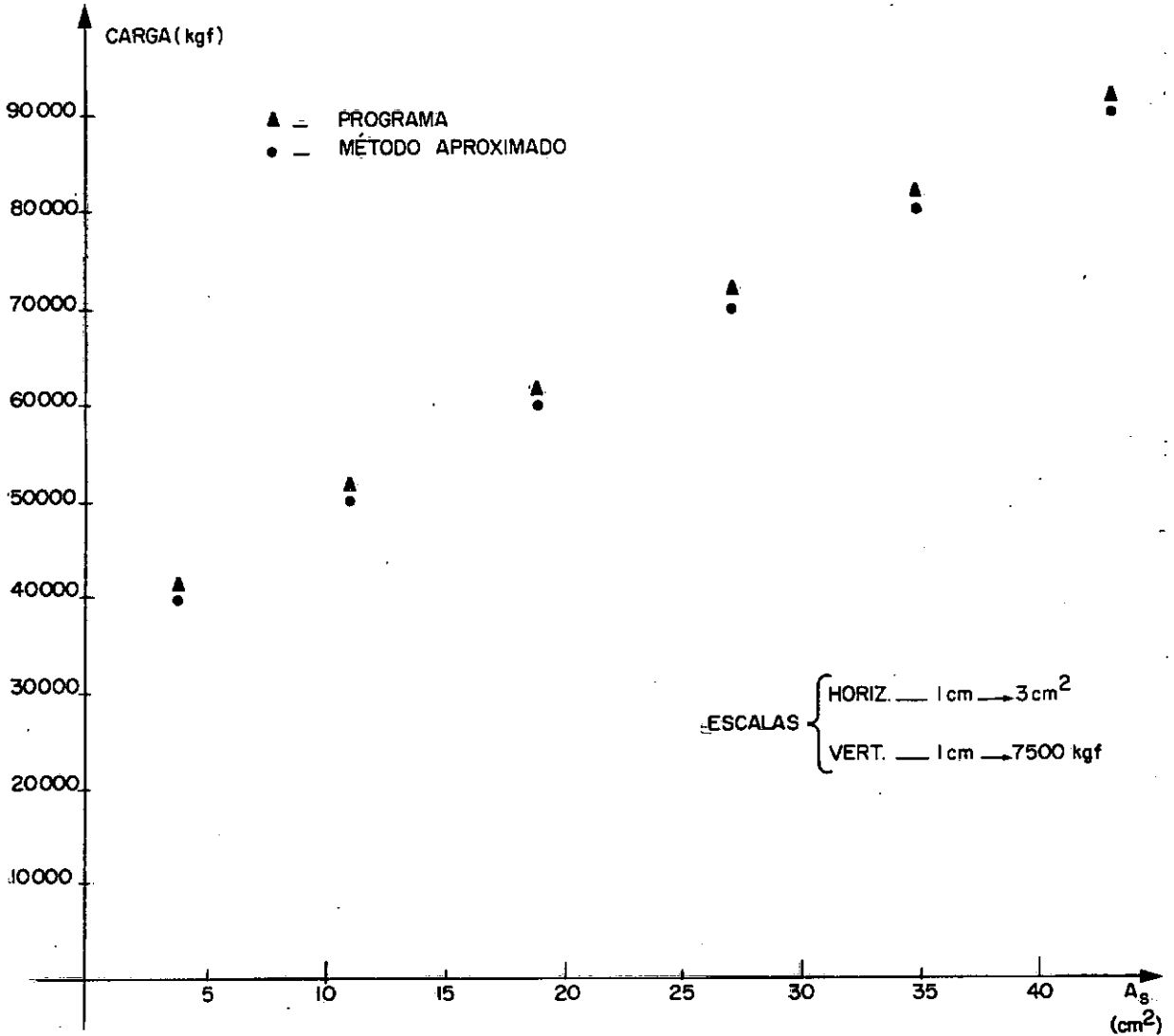


Fig. 50

c.2) Coluna $\lambda = 87$

De acordo com o quadro II e a Fig. 51, nota-se que neste caso o método aproximado se revela contra a segurança. No entanto, observando-se a 4a. coluna do quadro II, pode-se asseverar que a diferença entre o valor da carga P aplicada e a capacidade de carga calculada com o programa situa-se dentro de limites aceitáveis.

Na Fig. 51 assinala-se também a armadura longitudinal mínima recomendada pelo CEB-FIP, para o caso de peças em que $\lambda > 70$ (vide item a).

QUADRO II - Coluna $\lambda = 87$

P (kgf)	A_s (cm ²) Método Aproximado	Capacidade de Carga (kgf) Programa	$\frac{\Delta}{P}$
30000	6,20	29400	- 2 ^o / _o
40000	12,70	38800	- 3 ^o / _o
50000	20,10	48100	- 3,8 ^o / _o
60000	27,70	57000	- 5 ^o / _o
70000	35,50	66100	- 5,6 ^o / _o
80000	43,50	75000	- 6,3 ^o / _o

COLUNA $\lambda = 87$

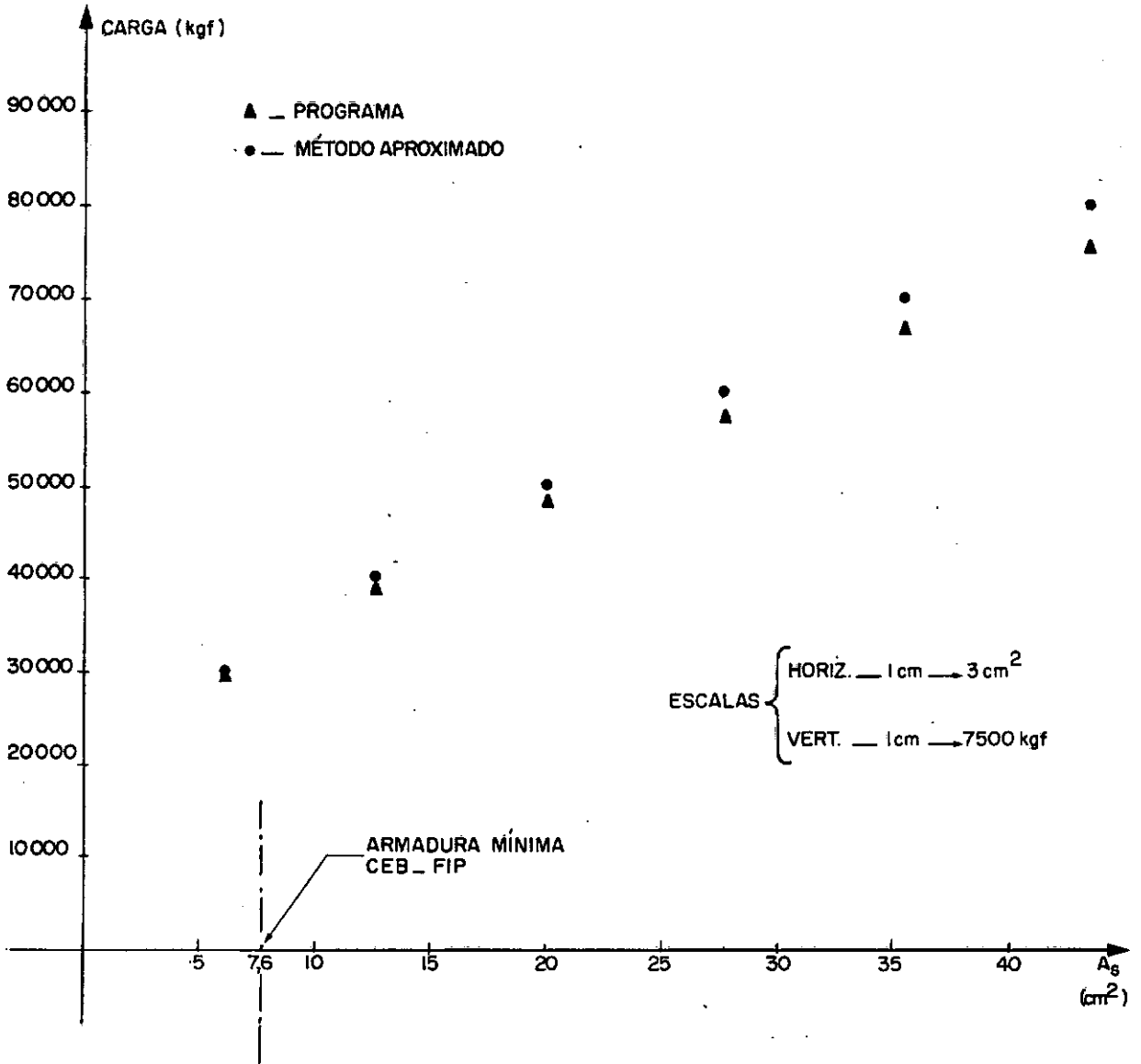


Fig. 51

c.3) Coluna $\lambda = 140$

Pelo Quadro III e pela Fig. 52, observa-se que neste caso parte dos resultados colocam o método aproximado do lado da segurança, enquanto que outra parte indica o contrário. Entretanto, mesmo quando o método aproximado está contra a segurança, nota-se pelos valores de $\frac{\Delta}{P}$ (vide penúltima e última linhas da 4a. coluna do quadro) que a carga atuante P e a capacidade de carga diferem entre si dentro de limites toleráveis.

Na Fig. 52 assinala-se também a armadura mínima recomendada pelo CEB-FIP quando $\lambda > 70$.

QUADRO III - Coluna $\lambda = 140$

P (kgf)	A_s (cm ²) Método Aproximado	Capacidade de Carga (kgf) Programa	$\frac{\Delta}{P}$
10000	3,50	12200	22 ^o / _o
20000	9,60	21600	8 ^o / _o
30000	18,30	31500	5 ^o / _o
40000	26,50	40000	0 ^o / _o
50000	34,00	47500	- 5 ^o / _o
60000	41,60	55100	- 8,2 ^o / _o

COLUNA $\lambda = 140$

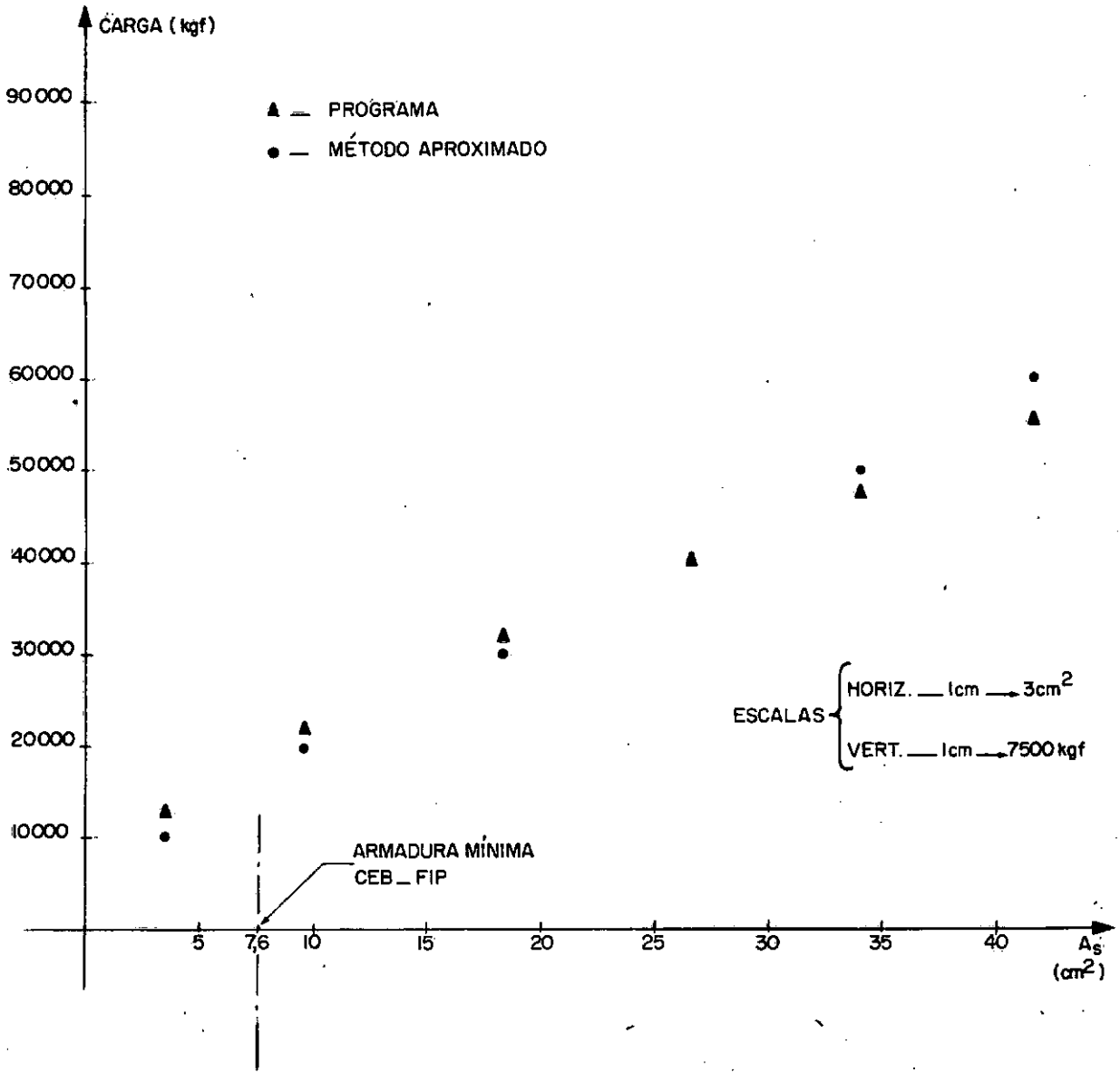


Fig. 52

d) Comentários

Ao se considerar a coluna da Fig. 49 com comprimentos diferentes ($L = 200$, $L = 500$ e $L = 800$ cm), procurou-se verificar o comportamento do método aproximado diante de duas situações. Inicialmente, quando utilizado no cálculo de colunas em que a capacidade de carga está ligada ao esgotamento da capacidade resistente dos materiais (λ pequenos). Em segundo lugar, quando aplicado às peças em que a capacidade de carga está associada à instabilidade do equilíbrio (λ grandes).

Embora o exemplo apresentado não seja suficiente para que se tirem conclusões de caráter geral, uma vez que para isto tornar-se-ia indispensável um estudo mais minucioso, nem assim deixam de ser válidas algumas alusões aos resultados aqui obtidos.

Ainda que por vezes o método aproximado tenha se revelado contra a segurança observa-se que, mesmo nestas circunstâncias, a diferença entre o valor da carga aplicada e a capacidade de carga calculada com o programa situa-se dentro de limites aceitáveis. Acrescente-se que nestas ocasiões, a armadura determinada pelo método aproximado mostra-se tanto mais insuficiente quanto maior se torna a carga atuante P (vide 4a. coluna dos quadros II e III). Por outro lado, quando situado do lado da segurança, o

método também não indicou seções de ferro muito acima do necessário. Assim, no que se refere aos casos aqui examinados, podemos considerar que o método aproximado do CEB-FIP, efetivamente conduziu a resultados satisfatórios.

CAPÍTULO VCONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos exemplos apresentados e ainda por outros testes efetuados, os quais também indicaram resultados satisfatórios, podemos concluir que o programa elaborado está em condições de ser utilizado na análise dos pórticos planos de concreto armado.

Relativamente aos exemplos examinados, podemos enumerar algumas conclusões interessantes:

a) Os resultados obtidos com o programa em questão são tão significativos quanto os fornecidos por outros programas. Esta afirmativa se baseia numa comparação com resultados indicados pelo programa "FRAME ANALYSIS" e pelo programa elaborado por N. Yamagata.

b) De acordo com o programa apresentado, ao contrário do que acontece tanto nos programas que utilizam os diagramas $M-N - \frac{1}{r}$ como também no programa "FRAME ANALYSIS", não se faz necessário discretizar a estrutura em um número considerável de elementos.

c) Quanto ao método aproximado do CEB-FIP para cálcu-

lo de peças longas solicitadas simultaneamente a flexão e compressão, no que diz respeito aos casos analisados, efetivamente demonstrou conduzir a resultados satisfatórios. Contudo, seria indispensável um estudo mais minucioso para que se pudesse melhor comprovar a sua eficiência.

Em relação ao programa elaborado, seguem-se duas observações:

a) Com referência ao processo iterativo utilizado nota-se que quando o carregamento aplicado sobre a estrutura está longe de sua capacidade de carga, a convergência do processo dá-se rapidamente (cerca de 4 iterações são suficientes). Por outro lado, nas proximidades da capacidade de carga, observa-se que o número de iterações necessárias à convergência aumenta consideravelmente.

b) Como vimos em 2.3.2, a matriz $[SM_{\epsilon}]$ foi determinada por uma técnica intimamente ligada ao método dos elementos finitos, já que foram assumidas funções de interpolação para os deslocamentos. Não obstante, é possível também se chegar a esta matriz pela técnica das diferenças finitas (vide ref. 3).

No que se refere a possíveis desenvolvimentos futuros para o programa, podemos destacar:

a) Consideração de outras formas de seção transversal

Por exemplo: seção T, seções vazadas (retangular e circular), seção trapezoidal etc... A introdução no programa de um novo tipo de seção transversal implica somente em que se escreva uma outra subrotina DRCSP, relativa à seção considerada.

b) Introdução de recalques de apoio

Neste caso devem ser efetuadas alterações no vetor de cargas nodais.

c) Dimensionamento

No estágio atual, o programa limita-se à verificação de estabilidade. No entanto, através de um processo de tentativas nos moldes do que é utilizado para pesquisa da capacidade de carga, podemos certamente estendê-lo ao dimensionamento.

APÊNDICE AMANUAL DE ENTRADA DO PROGRAMAA.1 - Manual de Entrada

Nº de Ordem	Nº de Cartões	V A R I Á V E I S	Formato
1	1	NESTR	I10
2	1	COMENTÁRIOS	55 colunas a partir da segunda
3	1	COMENTÁRIOS	55 colunas a partir da segunda
4	1	NNO, NE, NNDP, NR, MLIB	5I10
5	NNO	I, X(I), Y(I)	I10, 2F10.3
PARA CADA UM DOS VINE ELEMENTOS:			
6	1	I, (NEL(I,J), J=1,2), NUSEG(I), r MFORM(I)	5I10
PARA CADA UM DOS DOS NUSEG(I) TRECHOS DO ELEMENTO CONSIDERADO:			
7	1	J, NUDIV(I,J), ALSEG(I,J), H10(I,J), H20(I,J), NO(I,J), NNIV(I,J) Elem. Seção Circular	2I10, 3F10.3, 2I10
	1	J, NUDIV(I,J), ALSEG(I,J), H10(I,J), H20(I,J), BRO(I,J), NO(I,J), NNIV(I,J) Elem. Seção Retangular	2I10, 4F10.3, 2I10
8	NNIV(I,J)	K, SF(I,J,K), E(I,J,K)	I10, 2F10.3

Nº de Ordem	Nº de Cartões	V A R I Á V E I S	Formato
9	MLIB	I, (LIB(I,J), J=1,6)	7I10
10	NNDP	NA(I), (IA(I,J), J=1,3)	4I10
11	1	TBI	F10.3
12	1	IACO, TS1, ELAST	I10, F10.3, F15.3
13	1	ERRO	F10.3
14	1	ITCAR	I10
PESQUISA DA CAPACIDADE DE CARGA			
15	1	TERRO	F10.3
16	1	NNC	I10
17	NNC	K, (P1(J), J=1,3), (LFIX(I,J), J=1,3)	I5, 3F15.3, 3I10
ANÁLISE DE CASOS DE CARREGAMENTO			
15	1	NCAR	I10
PARA CADA UM DOS NCAR CASOS DE CARREGAMENTO:			
16	1	NNC	I10
17	NNC	K, (P1(J), J=1,3)	I5, 3F15.3

A.2 - Comentários

1. NESTR - número de estruturas a serem analisadas. No programa não se fixa um valor máximo para NESTR. As limitações que podem surgir, neste caso, decorrem do tempo que se dispõe para a utilização do computador.

O quadro de instruções deve ser repetido tantas vezes quantas forem as estruturas em estudo. Ressalte-se, no entanto, que a partir da segunda estrutura elimina-se a instrução 1.

2. Reserva-se um cartão para algum título ou comentário que ocupe no máximo 55 colunas contadas a partir da segunda. Caso não se queira fazer uso desta prerrogativa, deve-se colocar um cartão em branco.

3. Idêntico à instrução 2.

4. NNO - número de nós da estrutura
 NE - número de elementos
 NNDP- número de nós restringidos
 NR - número total de restrições
 MLIB- número de elementos com liberações

Exemplo - Seja o pórtico plano da Fig. 53:

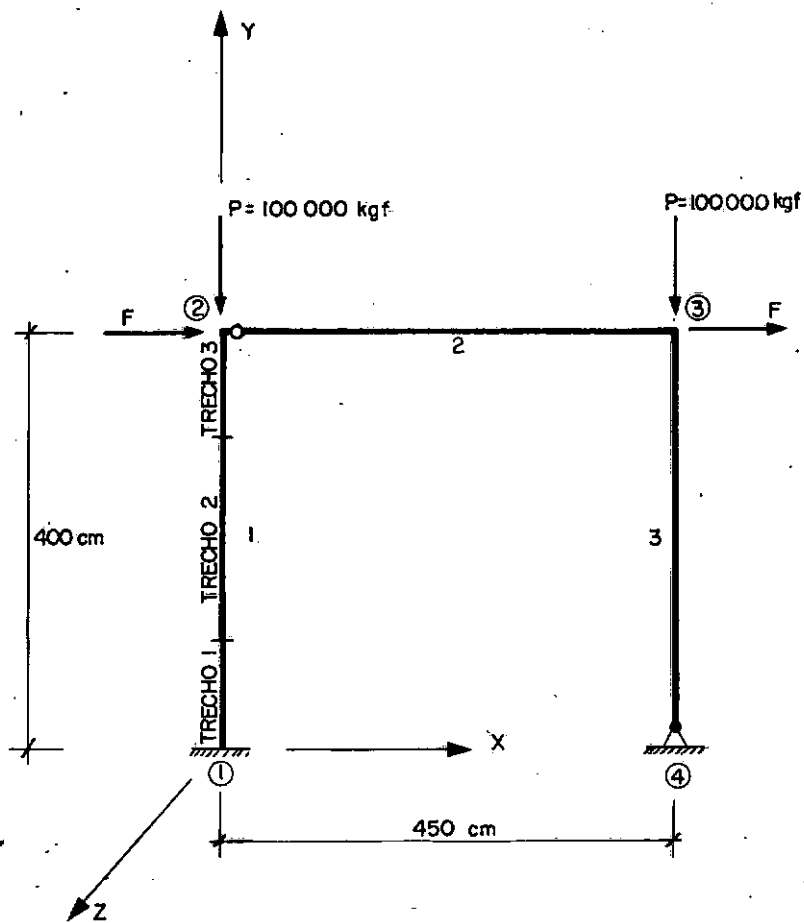


Fig. 53

Neste caso, tem-se:

NNO	NE	NNDP	NR	MLIB
4	3	2	5	1

Valores máximos permitidos no programa:

NNO - 30

NE - 35

NNDP- 10

5. Para cada n \bar{o} , t \hat{e} m que ser dados:

I - n \bar{u} mero do n \bar{o}

X(I) - coordenada do n \bar{o} em rela \tilde{c} o ao eixo X da estru
tura

Y(I) - coordenada do n \bar{o} em rela \tilde{c} o ao eixo Y da estru
tura

Exemplo - Consideremos o p \bar{o} rtico da Fig. 53:

I	X(I)	Y(I)
1	0.000	0.000
2	0.000	400.000
3	450.000	400.000
4	450.000	0.000

Ao se proceder \tilde{a} numera \tilde{c} o dos n \bar{o} s, \tilde{e} de fundamental import \tilde{a} ncia que a diferen \tilde{c} a entre os n \bar{u} meros dos dois n \bar{o} s associa- dos a um elemento qualquer, seja no m \tilde{a} ximo igual a 10 (vide 3.1.5.a).

6. Para cada um dos NE elementos da estrutura devem ser fornecidos os dados referentes \tilde{a} s instru \tilde{c} o \tilde{e} s 6, 7 e 8. S \tilde{o} se passa para um outro membro, depois de cumpridas as citadas instru \tilde{c} o \tilde{e} s.

I - n \bar{u} mero do elemento

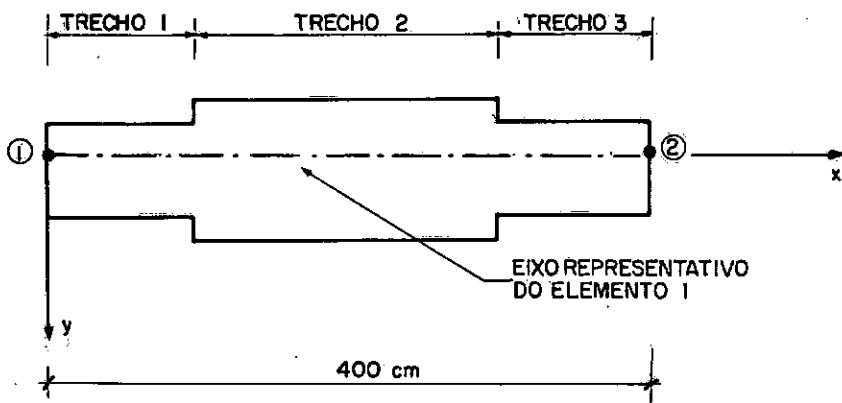
NEL(I,1) - n \bar{u} mero do n \bar{o} inicial (n \bar{o} ; i) do elemento

NEL(I,2) - número do nó final (nó j) do elemento

NUSEG(I) - número de trechos em que se fraciona o elemento

MFORM(I) - $\begin{cases} 0 - \text{ elemento de seção circular} \\ 1 - \text{ elemento de seção retangular} \end{cases}$

Exemplo:- Seja o elemento 1, do pórtico da Fig. 53:



a) elemento de seção circular:

I	NEL(I,1)	NEL(I,2)	NUSEG(I)	MFORM(I)
1	1	2	3	0

ou,

b) elemento de seção retangular:

I	NEL(I,1)	NEL(I,2)	NUSEG(I)	MFORM(I)
1	1	2	3	1

É oportuno lembrar que numeram-se os trechos de um ele

mento, sucessivamente, sempre do n° i (inicial) para o n° j (final).

O número de trechos considerados num membro pode variar de um mínimo de 1, até um máximo de 5.

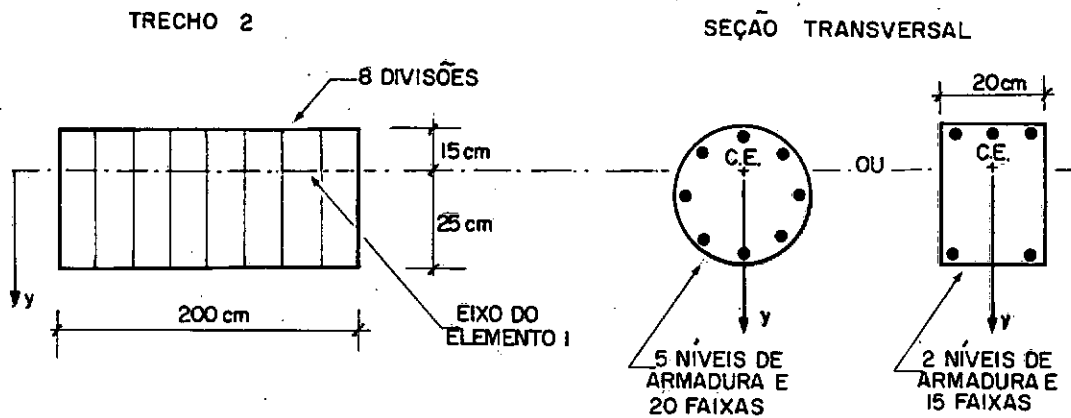
7. Para cada um dos NUSEG(I) trechos, do elemento I, devem ser fornecidos os dados correspondentes às instruções 7 e 8. São se passa para um outro trecho depois de cumpridas as referidas instruções.

- J - número do trecho
- NUDIV(I,J) - número de divisões adotado no trecho. Este número tem que ser necessariamente par (integração numérica por Simpson).
- ALSEG(I,J) - comprimento do trecho.
- H10(I,J) - distância do eixo escolhido para o membro à fibra extrema do concreto situada do lado positivo do eixo y. Esta distância é sempre dada como positiva.
- H20(I,J) - distância do eixo escolhido para o membro à fibra extrema do concreto situada do lado negativo do eixo y. Esta distância é sempre dada como negativa.
- BRO(I,J) - largura da seção transversal. Este dado só aparece no caso em que MFORM(I) = 1 (elemento de seção retangular).

$NO(I,J)$ - número de faixas consideradas na seção transversal

$NNIV(I,J)$ - número de níveis de armadura na seção transversal

Exemplo - Consideremos o trecho 2, do elemento 1, do pórtico da Fig. 53:



a) elemento de seção circular:

J	NUDIV(I,J)	ALSEG(I,J)	H10(I,J)	H20(I,J)	NO(I,J)	NNIV(I,J)
2	8	200.000	25.000	-15.000	20	5

ou,

b) elemento de seção retangular:

J	NUDIV(I,J)	ALSEG(I,J)	H10(I,J)	H20(I,J)	BRO(I,J)	NO(I,J)	NNIV(I,J)
2	8	200.000	25.000	-15.000	20.000	15	2

Valores máximos permitidos no programa:

$NO(I,J) = 24$

$NNIV(I,J) = 15$

Não se limita, para um trecho, o número de divisões $NUDIV(I,J)$. O que se restringe, na realidade, é o número total de divisões considerado ao longo do elemento. Assim, admite-se um máximo de 40 divisões no membro, distribuídas pelos trechos da forma que se julgar mais conveniente. Efetivamente, adotam-se tanto mais divisões num trecho quanto maior for o seu comprimento.

Sugestões:

$NO(I,J)$ - cerca de 15 faixas

Quanto ao número total de divisões ao longo de um elemento, sugere-se em torno de 20 divisões.

8. Para cada um dos $NNIV(I,J)$ níveis de armadura relativos ao trecho J , do elemento I , têm que ser dados:

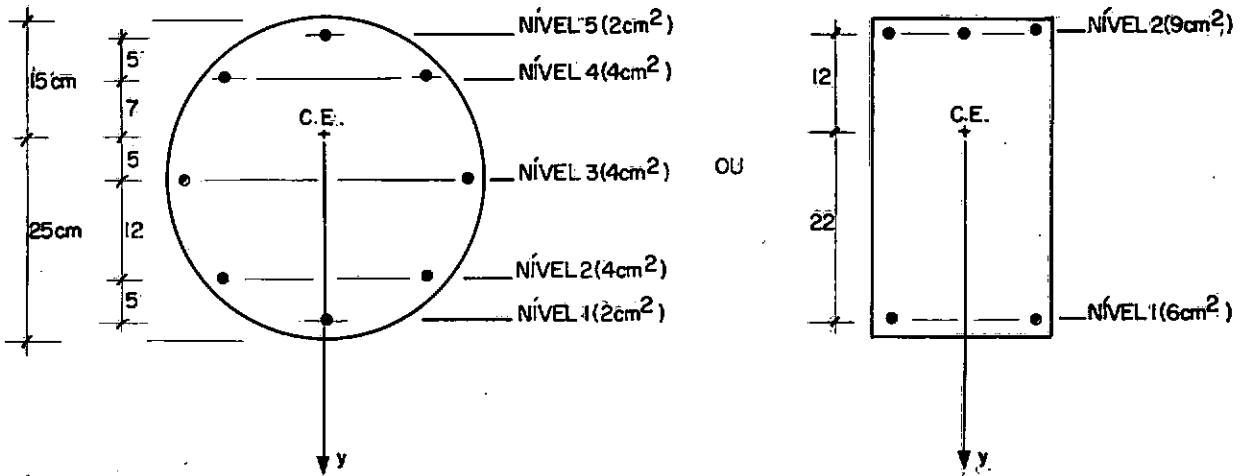
K - número do nível

$SF(I,J,K)$ - seção de ferro correspondente ao nível K

$E(I,J,K)$ - ordenada y do nível K (positiva se o nível de armadura se situar do lado positivo do eixo y e negativa em caso contrário).

Exemplo - Seja ainda o trecho 2, do elemento 1, do pórtico da Fig. 53:

TRECHO 2 - SEÇÃO TRANSVERSAL



a) elemento de seção circular:

K	SF(I,J,K)	E(I,J,K)
1	2.000	22.000
2	4.000	17.000
3	4.000	5.000
4	4.000	- 7.000
5	2.000	-12.000

ou,

b) elemento de seção retangular:

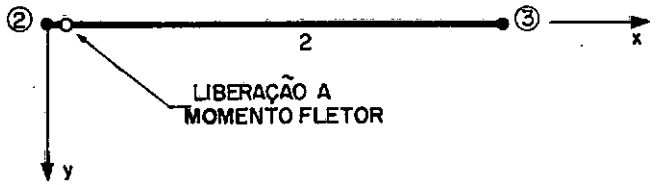
K	SF(I,J,K)	E(I,J,K)
1	6.000	22.000
2	9.000	-12.000

9. Os dados que se seguem são fornecidos quando a estrutura possuir algum membro que apresente liberações (MLIB > 0). Assim, considerando o caso de MLIB > 0, para cada elemento com li

berações têm que ser dados (vide Fig. 27):

$$\begin{array}{l}
 I - \text{--- número do elemento} \\
 \\
 \text{LIB}(I,1) - \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{não há liberação na direção 1} \\ 1 - \text{há liberação na direção 1} \end{array} \right. \\
 \\
 \text{LIB}(I,2) - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \text{idem direção 2} \\ 1 \end{array} \right. \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \text{LIB}(I,6) - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \text{idem direção 6} \\ 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Exemplo- Para o elemento 2, do pórtico da Fig. 53, tem-se:



I	LIB(I,1)	LIB(I,2)	LIB(I,3)	LIB(I,4)	LIB(I,5)	LIB(I,6)
2	0	0	1	0	0	0

10. Para cada n̄o que apresente pelo menos uma restrição devem ser dados:

NA(I) - número do n̄o

$$\begin{aligned}
 IA(I,1) & - \begin{cases} 0 - \text{a direção X é restringida} \\ 1 - \text{a direção X não é restringida} \end{cases} \\
 IA(I,2) & - \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{idem direção Y} \\
 IA(I,3) & - \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{idem direção Z}
 \end{aligned}$$

Exemplo: Seja o pórtico da Fig. 53:

NA(I)	IA(I,1)	IA(I,2)	IA(I,3)
1	0	0	0
4	0	0	1

11. As instruções 11 e 12 referem-se a dados relativos aos diagramas tensão-deformação dos materiais (vide Figs. 1, 2 e 4):

$TB1 = 0,85 f_{cd}$ - 0,85 do valor de cálculo da resistência à compressão do concreto.

Exemplo: Seja um concreto com $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$ e admita-se o coeficiente γ_c , de minoração da resistência, igual a 1,5.

Tensão de cálculo (kgf/cm²):

TB1
85.000

12.

$$IACO I^{***} \text{ -- } \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{aço tipo A} \\ 1 - \text{aço tipo B} \end{array} \right.$$

TS1 = f_{yd} = valor de cálculo da tensão de escoamento do aço

ELAST = módulo de elasticidade do aço

Exemplo: Supondo um aço CA-50B e considerando $\gamma_s = 1,15$, temos σ_s (kgf/cm²):

IACO	TS1	ELAST
1	4348.000	2100000.000

13. ERRO - erro admissível ao final do processo iterativo. Trata-se do valor de p_1 na expressão (51) (vide 3.3.2.i).

Sugestão: ERRO = 1.000 ($p_1^0 / \sigma = 1^0 / \sigma$)

14. Através desta instrução define-se o tipo de estudo a ser efetuado com o programa:

$$ITCAR - \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{pesquisa da capacidade de carga da estrutura} \\ 1 - \text{análise de casos de carregamento} \end{array} \right.$$

PESQUISA DA CAPACIDADE DE CARGA

15. - TERRO - erro admissível ao final do processo de tentativas. Trata-se do valor de p_2 na expressão (52) (vide 3.3.2.i).

Sugestão: TERRO = 1.000 ($p_2^0/0 = 1^0/0$)

16. As instruções 16 e 17 referem-se a dados relativos ao carregamento que dá início ao processo de tentativas.

NNC - número de nós carregados.

Exemplo:- Supondo que se queira pesquisar a capacidade de carga do pórtico da Fig. 53, submetido ao conjunto de cargas também assinalado na figura, tem-se:

NNC = 2

17. Para cada um dos NNC nós carregados devem ser dados:

K - número do nó

P1(1) - ação X (força na direção X)

P1(2) - ação Y (força na direção Y)

P1(3) - ação Z (momento no plano X-Y)

LFIX(I,1) -	{	0 - a ação X será mantida constante durante o processo de pesquisa da capacidade de carga 1 - a ação X terá sua intensidade variável durante o processo de pesquisa da capacidade de carga
LFIX(I,2) -	{	0 idem ação Y 1
LFIX(I,3) -	{	0 idem ação Z 1

As ações aplicadas aos nós consideram-se como positivas quando atuam segundo o sentido positivo dos eixos globais.

Exemplo: Admitindo 8000 kgf como valor inicial para as cargas horizontais F, no pórtico da Fig. 53, tem-se:

K	P1(1)	P1(2)	P1(3)	LFIX(I,1)	LFIX(I,2)	LFIX(I,3)
2	8000.000	-100000.000	0.000	1	0	0
3	8000.000	-100000.000	0.000	1	0	0

ANÁLISE DE CASOS DE CARREGAMENTO

15.- NCAR - número de casos de carregamento. No programa não se fixa um valor máximo para NCAR. As limitações que podem surgir neste caso são as mesmas já apresentadas na instrução 1.

16. Para cada um dos NCAR casos de carregamento devem ser fornecidos os dados correspondentes às instruções 16 e 17. São

se passa para um outro caso de carregamento depois de cumpridas as referidas instruções.

Para um esquema qualquer de cargas:

NNC - número de nós carregados:

17. Para cada um dos NNC nós carregados, relativos à hipótese de carga considerada, têm que ser dados:

K - número do nó

P1(1) - ação X (força na direção X)

P1(2) - ação Y (força na direção Y)

P1(3) - ação Z (momento no plano X-Y)

APÊNDICE B

LISTAGEM DO PROGRAMA

```

    IMPLICIT REAL *8(A-H,G-Z)
    DIMENSION X(30),Y(30),NEL(35,2),S(90,33),SD(6,6),SE(6,6),P(90),D(9
*0),XE(2,2),NA(10),P1(3),IA(10,3),D1(6),ALL(35),NUSEG(35),CX(35),CY
*(35),ALMOT(5),NSMOT(5),ALSEG(35,5),NUDIV(35,5),NO(35,5),H20(35,5),
*H10(35,5),DELTL(35),TETI(35),TETJ(35),TK(35),DD11(45),DD21(45),DD2
*2(45),CC1(35),CC2(35),CC3(35),AMD(6),AML(35,6),JJ(35,6),AR(90),DZ(
*90)
    DIMENSION NNIV(35,5),SF(35,5,15),E(35,5,15),SFER(15),DIST(15),BR(2
*5),MFORM(35),BRO(35,5),LIB(35,6),SMT(6,6),SR(6,6),SIST(6,6),SOS(90
*),ROR(90),KIK(30),ZZ1(35),ZZ2(35),ZZ3(35),AUX(35,21),LFIX(30,3)
    DEFINE FILE 11(35,42,U,IDD)
C    ANALISE NAO LINEAR DE PORTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO
    LB=33
    WRITE(5,130)
130  FORMAT(//,'=====')
    WRITE(5,131)
131  FORMAT(//,1X,'ANALISE NAO LINEAR DE PORTICOS PLANOS DE CONCRETO AR
*MADO',/)
    WRITE(5,130)
C    LEITURA E IMPRESSAO DO NUMERO DE ESTRUTURAS EM ESTUDO
    READ(8,406)NESTR
406  FORMAT(I10)
    WRITE(5,407)NESTR
407  FORMAT(1X,'NUMERO DE ESTRUTURAS EM ESTUDO=',I4)
    WRITE(5,130)
    ICONT=0
405  ICONT=ICONT+1
    WRITE(5,130)
    WRITE(5,408)ICONT
408  FORMAT(1X,'ESTRUTURA NUMERO',I4)
    WRITE(5,130)
C    LEITURA E IMPRESSAO DE UM TITULO QUALQUER QUE OCUPE NO MAXIMO
C    55 COLUNAS CONTADAS A PARTIR DA SEGUNDA
    READ(8,132)
132  FORMAT('
    WRITE(5,132)
    WRITE(5,130)
C    LEITURA E IMPRESSAO DE UM TITULO QUALQUER QUE OCUPE NO MAXIMO
C    55 COLUNAS CONTADAS A PARTIR DA SEGUNDA

```

```

READ(8,132)
WRITE(5,132)
WRITE(5,130)
C  LEITURA E IMPRESSAO DAS CARACTERISTICAS DA ESTRUTURA
READ(8,133)NNO,NE,NNDP,NR,MLIB
133 FORMAT(5I10)
    NGLN=3
    NNPE=2
    NCIN=NNO*3--NR
    WRITE(5,134)NNO,NE,NNDP,NGLN,NNPE,NR,NCIN,MLIB
134 FORMAT(//,1X,'NUMERO DE NOS DA ESTRUTURA',I13,//,1X,'NUMERO DE ELE
*MENTOS',I20,//,1X,'NUMERO DE NOS RESTRINGIDOS',I13,//,1X,'NUMERO D
*E GRAUS DE LIBERDADE POR NO',I4,//,1X,'NUMERO DE NOS POR ELEMENTO'
*,I13,//,1X,'NUMERO TOTAL DE RESTRICOES',I13,//,1X,'GRAU DE INDETER
*MINACAO CINEMATICA',I6,//,1X,'NUMERO DE ELEMENTOS COM LIBERACOES',
*I5)
C  LEITURA E IMPRESSAO DAS COORDENADAS DOS NOS
WRITE(5,135)
135 FORMAT(//,1X,'COORDENADAS DOS NOS')
READ(8,136)(I,X(I),Y(I),J=1,NNO)
136 FORMAT(I10,2F10.3)
WRITE(5,137)(I,X(I),Y(I),I=1,NNO)
137 FORMAT(//,3X,'NO',6X,'X',9X,'Y',//,(I5,2F10.3))
C  LEITURA E IMPRESSAO DAS CARACTERISTICAS DOS ELEMENTOS
WRITE(5,138)
138 FORMAT(//,1X,'DEFINICAO DOS ELEMENTOS')
DO 1 KL=1,NE
READ(8,139)I,(NEL(I,J),J=1,2),NUSEG(I),MFORM(I)
139 FORMAT(5I10)
    ALL(I)=0.
    NIJ=NUSEG(I)
    IF(MFORM(I))310,310,311
310 DO 312 KH=1,NIJ
READ(8,140)J,NUDIV(I,J),ALSEG(I,J),H10(I,J),H20(I,J),NO(I,J),NNIV(
*I,J)
140 FORMAT(2I10,3F10.3,2I10)
    ALL(I)=ALL(I)+ALSEG(I,J)
    NNI=NNIV(I,J)
DO 312 KN=1,NNI

```

```

      READ(8,188)K,SF(I,J,K),E(I,J,K)
188  FORMAT(I10,2F10.3)
312  CONTINUE
      GO TO 1
311  DO 313 KH=1,NIJ
      READ(8,314)J,NUDIV(I,J),ALSEG(I,J),H10(I,J),H20(I,J),BRO(I,J),NO(I
      *,J),NNIV(I,J)
314  FORMAT(2I10,4F10.3,2I10)
      ALL(I)=ALL(I)+ALSEG(I,J)
      NNI=NNIV(I,J)
      DO 313 KN=1,NNI
      READ(8,188)K,SF(I,J,K),E(I,J,K)
313  CONTINUE
      1 CONTINUE
      DO 2 I=1,NE
      NIJ=NUSEG(I)
      WRITE(5,141)I,NUSEG(I),ALL(I)
141  FORMAT(//,1X,'ELEMENTO',I3,///,1X,'NUM. SEGMENTOS',I7,///,1X,'COMPR
      *IMENTO',F10.3)
      IF(MFORM(I))315,315,316
315  WRITE(5,317)
317  FORMAT(/,1X,'SECAO CIRCULAR')
      DO 318 J=1,NIJ
      WRITE(5,142)J,NUDIV(I,J),ALSEG(I,J),H10(I,J),H20(I,J),NO(I,J),NNIV
      *(I,J)
142  FORMAT(/,3X,'SEG.',4X,'N.DIV.',3X,'COMP.',6X,'H10',7X,'H20',7X,'NO
      *',5X,'N.NIV.',//,I5,I10,3F10.3,2I8)
      NNI=NNIV(I,J)
      WRITE(5,189)
189  FORMAT(/,3X,'NIVEL',5X,'S.F.',5X,'DIST.EIXO',/)
      DO 318 K=1,NNI
      WRITE(5,190)K,SF(I,J,K),E(I,J,K)
190  FORMAT(I6,2F12.3)
318  CONTINUE
      GO TO 2
316  WRITE(5,319)
319  FORMAT(/,1X,'SECAO RETANGULAR')
      DO 320 J=1,NIJ
      WRITE(5,321)J,NUDIV(I,J),ALSEG(I,J),H10(I,J),H20(I,J),BRO(I,J),NO(

```

```

*I, J), NNIV(I, J)
321 FORMAT(/, 3X, 'SEG.', 4X, 'N. DIV.', 3X, 'COMP.', 6X, 'H10', 7X, 'H20', 7X, 'BR
*0', 7X, 'NO', 5X, 'N. NIV.', //, I5, I10, 4F10.3, 2I8)
NNI=NNIV(I, J)
WRITE(5, 189)
DO 320 K=1, NNI
WRITE(5, 190) K, SF(I, J, K), E(I, J, K)
320 CONTINUE
2 CONTINUE
C IMPRESSAO DAS INCIDENCIAS
WRITE(5, 143)
143 FORMAT(/, 1X, 'INCIDENCIAS')
WRITE(5, 145) (I, (NEL(I, J), J=1, 2), I=1, NE)
145 FORMAT(/, 4X, 'I', 8X, 'NEL(I, 1)', 4X, 'NEL(I, 2)', //, (I5, 2I12))
C DETERMINACAO DOS COSSENOS DIRETORES PARA OS ELEMENTOS
DO 3 I=1, NE
IL=0
DO 950 KL=1, 2
LF=NEL(I, KL)
XE(KL, 1)=X(LF)
XE(KL, 2)=Y(LF)
DO 951 KN=1, 3
IL=IL+1
IB=3*(NEL(I, KL)-1)+KN
951 JJ(I, IL)=IB
950 CONTINUE
XCL=XE(2, 1)-XE(1, 1)
YCL=XE(2, 2)-XE(1, 2)
CX(I)=XCL/ALL(I)
CY(I)=YCL/ALL(I)
3 CONTINUE
C NO CASO DE ELEMENTOS QUE APRESENTAM LIBERACOES:
C LEITURA E IMPRESSAO DOS ELEMENTOS E DEFINICAO DAS DIRECOES
C LIBERADAS
IF(MLIB) 900, 900, 901
901 DO 902 I=1, NE
DO 902 J=1, 6
902 LIB(I, J)=0
WRITE(5, 965)

```

```

965 FORMAT(//,1X,'ELEMENTOS COM LIBERACOES')
WRITE(5,903)
903 FORMAT(//,4X,'I',8X,'LIB(I,1)',4X,'LIB(I,2)',4X,'LIB(I,3)',4X,'LIB
*(I,4)',4X,'LIB(I,5)',4X,'LIB(I,6)',/)
DO 904 JF=1,MLIB
READ(8,905)I,(LIB(I,J),J=1,6)
905 FORMAT(7I10)
WRITE(5,906)I,(LIB(I,LF),LF=1,6)
906 FORMAT(I5,6I12)
904 CONTINUE
C LEITURA E IMPRESSAO DOS NOS QUE APRESENTAM RESTRICOES E DEFINICAO
C DAS DIRECOES RESTRINGIDAS
900 WRITE(5,146)
146 FORMAT(//,1X,'DEFINICAO DOS APOIOS')
DO 4 I=1,NNDP
READ(8,147)NA(I),(IA(I,J),J=1,3)
147 FORMAT(4I10)
4 CONTINUE
WRITE(5,148)(NA(I),(IA(I,J),J=1,3),I=1,NNDP)
148 FORMAT(//,3X,'NO',7X,'IA(I,1)',3X,'IA(I,2)',3X,'IA(I,3)',//,(I5,3I
*10))
C LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS REFERENTES AOS DIAGRAMAS TENSAO-
C DEFORMACAO DOS MATERIAIS (ACO E CONCRETO)
WRITE(5,149)
149 FORMAT(//,1X,'DEFINICAO DO DIAGRAMA TENSAO-DEFORMACAO DO CONCRETO'
*)
READ(8,150)TB1
150 FORMAT(F10.3)
EB1=0.002000
EB2=0.003500
WRITE(5,151)TB1,EB1,EB2
151 FORMAT(//,1X,'0.85 DO VALOR DE CAL. DA RES. A COMPR. DO CONCRETO',
*F13.3,//,1X,'DEFORMACAO DO CONCRETO AO INICIO DO PATAMAR',F20.6,//
*,1X,'DEFORMACAO DO CONCRETO AO FINAL DO PATAMAR',F21.6)
WRITE(5,200)
200 FORMAT(//,1X,'DEFINICAO DO DIAGRAMA TENSAO-DEFORMACAO DO ACO')
C DEFINICAO DO TIPO DE ACO UTILIZADO:
C IACO=0 - ACO TIPO A
C IACO=1 - ACO TIPO B

```

```

      READ(8,191)IACO,TS1,ELAST
191  FORMAT(I10,F10.3,F15.3)
      IF(IACO)78,79,78
      79  WRITE(5,193)
193  FORMAT(//,1X,'ACO COM PATAMAR DE ESCOAMENTO')
      WRITE(5,194)ELAST
194  FORMAT(//,1X,'MODULO DE ELASTICIDADE DO ACO',F34.3)
      ES1=TS1/ELAST
      ES2=0.010000
      WRITE(5,195)TS1,ES1,ES2
195  FORMAT(//,1X,'TENSAO DE ESCOAMENTO DE CALCULO DO ACO',F25.3,//,1X,
*'DEFORMACAO DO ACO AO INICIO DO ESCOAMENTO',F22.6,//,1X,'DEFORMACA
*O LIMITE DO ACO',F39.6)
      GO TO 80
      78  WRITE(5,196)
196  FORMAT(//,1X,'ACO SEM PATAMAR DE ESCOAMENTO DEFINIDO')
      WRITE(5,194)ELAST
      TS3=TS1
      TS1=0.7*TS3
      TS2=0.9*TS3
      ES1=TS1/ELAST
      ES2=TS2/ELAST+0.0002633
      ES3=TS3/ELAST+0.002
      ES4=0.010000
C    DETERMINACAO DA TENSAO LIMITE DO ACO (TS4)
      DERRO=0.001
      SIG=TS3+0.15*TS3
1502 W1=SIG/TS3-0.7
      W2=W1**4
      E1=SIG/ELAST+0.823*W1*W2
      DIF=DABS(E1-ES4)-DABS(DERRO*ES4)
      IF(DIF)1500,1500,1501
1501 E2=1./ELAST+4.115*W2/TS3
      SIG=SIG+(ES4-E1)/E2
      GO TO 1502
1500 TS4=SIG
      WRITE(5,198)TS1,TS2,TS3,TS4
198  FORMAT(//,1X,'0.7 DA TENSAO DE ESCOAMENTO DE CALCULO DO ACO',F18.3
*,//,1X,'0.9 DA TENSAO DE ESCOAMENTO DE CALCULO DO ACO',F18.3,//,1X

```

```

C   TENTATIVAS
    READ(8,605)TERRO
605  FORMAT(F10.3)
    TERRO=TERRO/100.
    WRITE(5,606)
606  FORMAT(/,1X,'ERRO RELATIVO ADMISSIVEL AO FINAL DO PROCESSO DE TEN
    *TATIVAS')
    WRITE(5,607)TERRO
607  FORMAT(/,1X,'ERRO RELATIVO=',F10.5)
    WRITE(5,130)
    WRITE(5,608)
608  FORMAT(1X,'TENTATIVA NUMERO 1 - CARREGAMENTO INICIAL')
    WRITE(5,130)
    GO TO 609
602  WRITE(5,130)
    WRITE(5,424)
424  FORMAT(1X,'ANALISE DE CASOS DE CARREGAMENTO')
    WRITE(5,130)
C   NO CASO DE ANALISE DE CASOS DE CARREGAMENTO:
C   LEITURA E IMPRESSAO DO NUMERO DE CASOS DE CARREGAMENTO EM ESTUDO
    READ(8,409)NCAR
409  FORMAT(I10)
    WRITE(5,130)
    WRITE(5,410)NCAR
410  FORMAT(1X,'NUMERO DE CASOS DE CARREGAMENTO EM ESTUDO=',I4)
    WRITE(5,130)
    ICAR=0
420  ICAR=ICAR+1
    WRITE(5,130)
    WRITE(5,411)ICAR
411  FORMAT(1X,'CARREGAMENTO NUMERO',I4)
    WRITE(5,130)
C   LEITURA E IMPRESSAO DO NUMERO DE NOS CARREGADOS
609  READ(8,156)NNC
156  FORMAT(I10)
    WRITE(5,612)NNC
612  FORMAT(/,1X,'NUMERO DE NOS CARREGADOS=',I3)
    WRITE(5,155)
155  FORMAT(/,1X,'CARGAS NOS NOS')

```

```

WRITE(5,157)
157 FORMAT(//,3X,'NO',8X,'ACAO X',8X,'ACAO Y',8X,'ACAO Z',/)
DO 5 I=1,NN2
  5 P(I)=0.
C  LEITURA E IMPRESSAO DCS NOS CARREGADOS COM AS RESPECTIVAS CARGAS
C  APLICADAS
C  NO CASO DE PESQUISA DA CAPACIDADE DE CARGA:
C  DEFINICAO DAS DIRECOES DE CARGA CONSTANTE E DAS DIRECOES DE CARGA
C  VARIAVEL EM CADA NO CARREGADO
DO 6 I=1,NNC
  READ(8,158)K,(P1(J),J=1,3),(LFIX(I,J),J=1,3)
158 FORMAT(I5,3F15.3,3I10)
  KIK(I)=K
DO 7 M=1,3
  IB=3*(K-1)+M
  7 P(IB)=P1(M)
  WRITE(5,159)K,(P1(M),M=1,3)
  6 CONTINUE
159 FORMAT(I5,3F14.3)
  IF(ITCAR)678,678,610
678 WRITE(5,679)
679 FORMAT(//,1X,'DEFINICAO DAS DIRECOES DE CARGA CONSTANTE E DAS DIRE
*COES DE CARGA VARIAVEL')
  WRITE(5,681)
681 FORMAT(//,3X,'NO',8X,'DIR. X',8X,'DIR. Y',8X,'DIR. Z',/)
DO 680 I=1,NNC
  K=KIK(I)
  WRITE(5,682)K,(LFIX(I,J),J=1,3)
682 FORMAT(I5,I12,2I14)
680 CONTINUE
610 IF(KKK)810,810,811
810 DO 10 KJ=1,NE
  DELTL(KJ)=0.
  TETI(KJ)=0.
  TETJ(KJ)=0.
  TK(KJ)=0.
  AML(KJ,4)=0.
  10 CONTINUE
811 DO 952 I=1,NN2

```

```

952 DZ(I)=0.
    KKK=KKK+1
    IFOUS=0
    IFOUB=0
    MCONT=0
    ITER=0
100 ITER=ITER+1
    WRITE(5,130)
    WRITE(5,160)ITER
160 FORMAT(/,1X,'ITERACAO NUMERO',I3)
    WRITE(5,130)
    IF(ITER-21)12,422,422
422 WRITE(5,130)
    WRITE(5,423)
423 FORMAT(1X,'FOI ATINGIDO O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES FIXADO NO',/,
*1X,'PROGRAMA.ADMITE-SE COME TENDO SIDO ULTRAPASSADA A',/,1X,'CAPAC
*IDADE DE CARGA DA ESTRUTURA.')
```

WRITE(5,130)

IF(ITCAR)611,611,421

12 JBMAX=0

C MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

DO 14 I=1,NNZ

DO 14 J=1,LB

14 S(I,J)=0.

DO 28 KI=1,NE

IF(ITER-1)812,812,813

812 IF(KKK-1)813,813,814

814 KK=0

DO 815 J=1,6

DO 815 K=1,J

KK=KK+1

SE(K,J)=AUX(KI,KK)

815 SE(J,K)=SE(K,J)

GO TO 816

813 AN=AML(KI,4)

AL=ALL(KI)

U=TK(KI)

TET1=TETI(KI)

TET2=TETJ(KI)

```

DX=DETL(KI)/AL
DA=4.*AL
DB=AL*AL
DC=2.*AL
X1=0.
NN=0
NMOT=NUSEG(KI)
DO 29 IL=1,NMOT
H1=H10(KI,IL)
H2=H20(KI,IL)
N=NO(KI,IL)
ALMOT(IL)=ALSEG(KI,IL)
NSMOT(IL)=NUDIV(KI,IL)
NNI=NNIV(KI,IL)
DO 76 J=1,NNI
SFER(J)=SF(KI,IL,J)
DIST(J)=E(KI,IL,J)
76 CONTINUE
IF(MFORM(KI))322,322,323
322 DIAM=H1-H2
AFST=DIAM/N
N11=N+1
DO 77 I=2,N
GG=(I-1)*AFST
BR(I)=2.*DSQRT((DIAM-GG)*GG)
77 CONTINUE
FUNC=BR(2)/(DIAM-2.*AFST)
ALFA=DATAN(FUNC)
GAMA=ALFA*DIAM-BR(2)
BR(1)=DIAM*GAMA/(2.*AFST)
BR(N11)=BR(1)
GO TO 324
323 N11=N+1
DO 325 I=1,N11
BR(I)=BRO(KI,IL)
325 CONTINUE
324 FN=NSMOT(IL)
XX=ALMOT(IL)/FN
X1=X1-XX

```

```

N1=NSMOT(IL)+1
DO 30 J=1,N1
NN=NN+1
X1=X1+XX
C   CALCULO DE EG E -1/R
EG=DX+((DA-8.*X1)/DB)*U
SKAP=((DA-6.*X1)*TET1)/DB+((DC-6.*X1)*TET2)/DB
DEG=DABS(EG)
DSKAP=DABS(SKAP)
IF(DEG-1.0E-13)800,800,801
800 EG=0.
801 IF(DSKAP-1.0E-13)802,802,803
802 SKAP=0.
803 CONTINUE
C   DETERMINACAO DOS VALORES DE G11,G21,G22, PARA AS DIVERSAS SECDES
C   TRANSVERSAIS AO LONGO DO ELEMENTO
CALL DRCSP(EG,SKAP,TS1,TS2,TS3,TS4,TB1,ES1,ES2,ES3,ES4,EB1,EB2,IFO
*US,IFOUB,H1,H2,N,NNI,SFER,DIST,BR,G11,G21,G22,IACO)
IF(IFOUB)301,302,301
301 WRITE(5,130)
WRITE(5,303)IFOUB,KI,X1
303 FORMAT(/,1X,'FOI ULTRAPASSADA A DEFORMACAO LIMITE ESTABELECIDADA PAR
*A O CONCRETO',//,1X,'IFOUB=',I3,//,1X,'ELEMENTO',I4,//,1X,'SECAO D
*E ABSCISSA',F8.3)
WRITE(5,130)
302 IF(IFOUS)304,305,304
305 IF(IFOUB)306,307,306
304 WRITE(5,130)
WRITE(5,308)IFOUS,KI,X1
308 FORMAT(/,1X,'FOI ULTRAPASSADA A DEFORMACAO LIMITE ESTABELECIDADA PAR
*A O ACO',//,1X,'IFOUS=',I3,//,1X,'ELEMENTO',I4,//,1X,'SECAO DE ABS
*CISSA',F8.3)
WRITE(5,130)
306 WRITE(5,130)
WRITE(5,643)
643 FORMAT(1X,'FOI ULTRAPASSADA A CAPACIDADE DE CARGA DA ESTRUTURA')
WRITE(5,130)
IF(ITCAR)611,611,421
307 DD11(NN)=G11

```

```

DD21(NN)=G21
DD22(NN)=G22
30 CONTINUE
29 CONTINUE
C   OBTENCAO DA PRIMEIRA DAS DUAS MATRIZES EM QUE SE DECOMPOE A MATRIZ
C   DE RIGIDEZ (3*3) RELATIVA AOS DESLOCAMENTOS DELTL,TETI,TETJ
C   TRATA-SE DA MATRIZ QUE DEPENDE DA DISTRIBUICAO DE MODULOS DE
C   ELASTICIDADE NO ELEMENTO.
CALL STYTE(DD11,DD21,DD22,NMOT,ALMOT,NSMOT,AL,S11,S12,S13,S22,S23,
*S33,C1,C2,C3)
CC1(KI)=C1
CC2(KI)=C2
CC3(KI)=C3
C   OBTENCAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NO SISTEMA LOCAL
CALL PALUI(S11,S12,S13,S22,S23,S33,AN,AL,SE)
IDD=KI
WRITE(11*IDD)((SE(K,J),K=1,J),J=1,6)
C   TRANSFORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO COM LIBERACOES
816 IF(MLIB)907,907,908
908 NLIB=0
DO 909 LF=1,6
909 NLIB=NLIB+LIB(KI,LF)
IF(NLIB)907,907,910
910 DO 911 LF=1,6
IF(LIB(KI,LF))911,911,912
912 DO 913 J=1,6
DO 913 K=1,6
SMT(J,K)=SE(J,K)-(SE(J,LF)*SE(LF,K))/SE(LF,LF)
STT=DABS(SMT(J,K))
IF(STT-1.0E-13)960,960,913
960 SMT(J,K)=0.
913 CONTINUE
DO 914 J=1,6
DO 914 K=1,6
914 SE(J,K)=SMT(J,K)
911 CONTINUE
C   UTILIZACAO DA MATRIZ ROTACAO
907 DO 915 K=1,2
DO 915 J=1,6

```

```

SR(J,3*K-2)=SE(J,3*K-2)*CX(KI)+SE(J,3*K-1)*CY(KI)
SR(J,3*K-1)=SE(J,3*K-2)*CY(KI)-SE(J,3*K-1)*CX(KI)
SR(J,3*K)=-SE(J,3*K)
915 CONTINUE
DO 916 K=1,2
DO 916 J=1,6
SD(3*K-2,J)=SR(3*K-2,J)*CX(KI)+SR(3*K-1,J)*CY(KI)
SD(3*K-1,J)=SR(3*K-2,J)*CY(KI)-SR(3*K-1,J)*CX(KI)
SD(3*K,J)=-SR(3*K,J)
916 CONTINUE
DO 31 M=1,2
DO 31 K=1,2
DO 31 J=1,3
J1=3*(NEL(KI,M)-1)+J
JE=3*(M-1)+J
DO 31 I=1,3
IB=3*(NEL(KI,K)-1)+I
IE=3*(K-1)+I
JB=J1-IB+1
IF(JB)31,31,32
32 IF(JB-JBMAX)33,33,34
34 JBMAX=JB
IF(LB-JBMAX)74,33,33
33 S(IB,JB)=S(IB,JB)+SD(IE,JE)
31 CONTINUE
28 CONTINUE
DO 40 I=1,NN2
40 D(I)=P(I)
DO 35 I=1,NNDP
DO 35 J=1,3
IF(IA(I,J))35,36,35
36 IB=3*(NA(I)-1)+J
DO 37 KJ=2,JBMAX
37 S(IB,KJ)=0.
DO 38 KAREN=1,IB
JL=IB-KAREN+1
IF(JL-JBMAX)39,39,38
39 S(KAREN,JL)=0.
38 CONTINUE

```

```

S(IB,1)=1.
D(IB)=0.
35 CONTINUE
C  CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL
CALL SISEQ(S,D,NN2,JBMAX,MCONT)
WRITE(5,161)
161 FORMAT(/,1X,'DESLOCAMENTOS',/,3X,'NO',10X,'DESL X',10X,'DESL Y',
*10X,'ROT Z',/)
WRITE(5,162)(I,D(3*I-2),D(3*I-1),D(3*I),I=1,NNO)
162 FORMAT(I5,3F16.5)
IF(MCONT)641,641,642
642 WRITE(5,130)
WRITE(5,643)
WRITE(5,130)
IF(ITCAR)611,611,421
641 DO 41 I=1,NE
IDD=I
IF(ITER-1)817,817,818
817 IF(KKK-1)819,819,820
819 READ(11'IDD)((SE(K,J),K=1,J),J=1,6)
IF(ITCAR)821,821,822
822 IF(NCAR-1)823,823,821
821 ZZ1(I)=CC1(I)
ZZ2(I)=CC2(I)
ZZ3(I)=CC3(I)
KK=0
DO 824 J=1,6
DO 824 K=1,J
KK=KK+1
824 AUX(I,KK)=SE(K,J)
GO TO 823
820 KK=0
DO 825 J=1,6
DO 825 K=1,J
KK=KK+1
825 SE(K,J)=AUX(I,KK)
CC1(I)=ZZ1(I)
CC2(I)=ZZ2(I)
CC3(I)=ZZ3(I)

```

```

GO TO 823
818 READ(11'IDD)((SE(K,J),K=1,J),J=1,6)
823 DO 42 J=1,6
      DO 42 K=1,J
      42 SE(J,K)=SE(K,J)
C     DIRECOES DE DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL,ASSOCIADAS AO ELEMENTO
      JJ1=JJ(I,1)
      JJ2=JJ(I,2)
      JJ3=JJ(I,3)
      JK1=JJ(I,4)
      JK2=JJ(I,5)
      JK3=JJ(I,6)
C     CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NO SISTEMA LOCAL
      D1(1)=D(JJ1)*CX(I)+D(JJ2)*CY(I)
      D1(2)=D(JJ1)*CY(I)-D(JJ2)*CX(I)
      D1(3)=-D(JJ3)
      D1(4)=D(JK1)*CX(I)+D(JK2)*CY(I)
      D1(5)=D(JK1)*CY(I)-D(JK2)*CX(I)
      D1(6)=-D(JK3)
C     CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NO SISTEMA LOCAL,CORRESPONDENTES AS
C     DIRECOES LIBERADAS NO ELEMENTO
      IF(MLIB)917,917,918
918  NLIB=0
      DO 919 LF=1,6
919  NLIB=NLIB+LIB(I,LF)
929  IF(NLIB)917,917,920
920  KCONT=0
      DO 921 J=1,6
      DO 921 K=1,6
921  SIST(J,K)=SE(J,K)
      DO 922 LF=1,6
      IF(LIB(I,LF))922,922,923
923  D1(LF)=0.
      KCONT=KCONT+1
      IIC=KCONT+1
      IF(IIC-NLIB)924,924,925
924  DO 926 J=1,6
      DO 926 K=1,6
      SMT(J,K)=SIST(J,K)-(SIST(J,LF)*SIST(LF,K))/SIST(LF,LF)

```

```

      STT=DABS(SMT(J,K))
      IF(STT-1.0E-13)961,961,926
961  SMT(J,K)=0.
926  CONTINUE
      DO 927 J=1,6
      DO 927 K=1,6
927  SIST(J,K)=SMT(J,K)
922  CONTINUE
925  PROD=0.
      DO 928 J=1,6
      PROD=PROD+SIST(LF,J)*D1(J)
928  CONTINUE
      D1(LF)=-PROD/SIST(LF,LF)
      NLIB=NLIB-1
      GO TO 929
C    CALCULO DE DELTL,TETI,TETJ,TK
917  DELTL(I)=D1(4)-D1(1)
      WW=(D1(5)-D1(2))/ALL(I)
      TETI(I)=D1(3)-WW
      TETJ(I)=D1(6)-WW
      TK(I)=CC1(I)*DETLT(I)+CC2(I)*TETI(I)+CC3(I)*TETJ(I)
C    CALCULO DAS ACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS
      DO 43 J=1,6
      AMD(J)=0.
      DO 930 K=1,6
      AMD(J)=AMD(J)+SE(J,K)*D1(K)
930  CONTINUE
      43  AML(I,J)=AMD(J)
      41  CONTINUE
      WRITE(5,954)
954  FORMAT(//,1X,'ACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS',//,1X,'ELEM.',
*9X,'AM1',12X,'AM2',12X,'AM3',12X,'AM4',12X,'AM5',12X,'AM6',/)
      DO 955 I=1,NE
      WRITE(5,956)I,(AML(I,J),J=1,6)
956  FORMAT(I4,6F15.3)
955  CONTINUE
C    VERIFICACAO DO ANDAMENTO DO PROCESSO ITERATIVO
      DO 44 I=1,NN2
      DIF3=DABS(D(I)-DZ(I))-DABS(DZ(I)*ERRO)-1.0E-10

```

```

      IF(DIF3)44,44,46
44  CONTINUE
      IF(ITCAR)613,613,49
46  DO 50 I=1,NN2
50  DZ(I)=D(I)
      GO TO 100
613 NCONT=NCONT+1
      IF(LCONT)614,614,615
614 DO 616 I=1,NNC
      K=KIK(I)
      DO 617 J=1,3
      IB=3*(K-1)+J
      SOS(IB)=P(IB)
      IF(LFIX(I,J))617,617,670
670 P(IB)=SOS(IB)+PERC*SOS(IB)
617 CONTINUE
616 CONTINUE
632 ITENT=ITENT+1
      WRITE(5,130)
      WRITE(5,618)ITENT
618 FORMAT(1X,'TENTATIVA NUMERO',I4)
      WRITE(5,130)
      IF(ITENT-16)620,660,660
660 WRITE(5,130)
      WRITE(5,661)
661 FORMAT(1X,'FOI ATINGIDO O NUMERO MAXIMO DE TENTATIVAS FIXADO NO',/
*,1X,'PROGRAMA.DEVE-SE REINICIAR O PROCESSO DE TENTATIVAS',/,1X,'CO
*M UMA ESTIMATIVA MAIS ADEQUADA PARA O CARREGAMENTO',/,1X,'DE PARTI
*DA')
      WRITE(5,130)
      GO TO 419
620 WRITE(5,155)
      WRITE(5,157)
      DO 621 I=1,NNC
      K=KIK(I)
      DO 622 M=1,3
      IB=3*(K-1)+M
622 P1(M)=P(IB)
      WRITE(5,159)K,(P1(M),M=1,3)

```

```

621 CONTINUE
GO TO 610
615 DO 671 I=1,NNC
K=KIK(I)
DO 623 J=1,3
IF(LFIX(I,J))623,623,672
672 IB=3*(K-1)+J
SOS1=P(IB)
ROR1=ROR(IB)
DIFE1=DABS(SOS1-ROR1)-DABS(SOS1*TERRO)
IF(DIFE1)625,625,626
623 CONTINUE
671 CONTINUE
625 WRITE(5,130)
WRITE(5,627)
627 FORMAT(IX,'CAPACIDADE DE CARGA DA ESTRUTURA')
WRITE(5,155)
WRITE(5,157)
DO 628 I=1,NNC
K=KIK(I)
DO 629 M=1,3
IB=3*(K-1)+M
629 P1(M)=P(IB)
WRITE(5,159)K,(P1(M),M=1,3)
628 CONTINUE
WRITE(5,130)
GO TO 419
626 DO 630 I=1,NNC
K=KIK(I)
DO 631 J=1,3
IB=3*(K-1)+J
SOS(IB)=P(IB)
IF(LFIX(I,J))631,631,673
673 P(IB)=(SOS(IB)+ROR(IB))/2.
631 CONTINUE
630 CONTINUE
GO TO 632
611 LCONT=LCONT+1
IF(NCONT)650,650,651

```

```

650 DO 652 I=1, NNC
    K=KIK(I)
    DO 653 J=1, 3
        IF(LFIX(I, J))653,653,674
674 IB=3*(K-1)+J
    ROR(IB)=P(IB)
    P(IB)=ROR(IB)-PERC*ROR(IB)
653 CONTINUE
652 CONTINUE
    GO TO 632
651 DO 675 I=1, NNC
    K=KIK(I)
    DO 633 J=1, 3
        IF(LFIX(I, J))633,633,676
676 IB=3*(K-1)+J
    SOS1=SOS(IB)
    ROR1=P(IB)
    DIFE1=DABS(SOS1-ROR1)-DABS(SOS1*TERRO)
    IF(DIFE1)635,635,636
633 CONTINUE
675 CONTINUE
635 WRITE(5,130)
    WRITE(5,627)
    WRITE(5,155)
    WRITE(5,157)
    DO 637 I=1, NNC
        K=KIK(I)
        DO 638 M=1, 3
            IB=3*(K-1)+M
638 P1(M)=SOS(IB)
            WRITE(5,159)K, (P1(M), M=1, 3)
637 CONTINUE
            WRITE(5,130)
            GO TO 419
636 DO 639 I=1, NNC
    K=KIK(I)
    DO 640 J=1, 3
        IF(LFIX(I, J))640,640,677
677 IB=3*(K-1)+J

```

```

ROR(IB)=P(IB)
P(IB)=(SOS(IB)+ROR(IB))/2.
640 CONTINUE
639 CONTINUE
GO TO 632
C. CALCULO DAS REACOES DE APOIO
49 DO 51 I=1,NN2
AR(I)=0.
51 CONTINUE
DO 52 KI=1,NE
DO 53 II=1,NNDP
NAI=NA(II)
IF(NEL(KI,1)-NAI)55,54,55
55 IF(NEL(KI,2)-NAI)53,54,53
53 CONTINUE
GO TO 52
54 JJ1=JJ(KI,1)
JJ2=JJ(KI,2)
JJ3=JJ(KI,3)
JK1=JJ(KI,4)
JK2=JJ(KI,5)
JK3=JJ(KI,6)
DO 56 I=II,NNDP
DO 56 J=1,3
IF(IA(I,J))56,57,56
57 IB=3*(NA(I)-1)+J
IF(IB-JJ1)58,59,58
59 AR(IB)=AR(IB)+AML(KI,1)*CX(KI)+AML(KI,2)*CY(KI)
GO TO 56
58 IF(IB-JJ2)60,61,60
61 AR(IB)=AR(IB)+AML(KI,1)*CY(KI)-AML(KI,2)*CX(KI)
GO TO 56
60 IF(IB-JJ3)62,63,62
63 AR(IB)=AR(IB)-AML(KI,3)
GO TO 56
62 IF(IB-JK1)64,65,64
65 AR(IB)=AR(IB)+AML(KI,4)*CX(KI)+AML(KI,5)*CY(KI)
GO TO 56
64 IF(IB-JK2)66,67,66

```

```

67 AR(IB)=AR(IB)+AML(KI,4)*CY(KI)-AML(KI,5)*CX(KI)
   GO TO 56
66 IF(IB-JK3)56,68,56
68 AR(IB)=AR(IB)-AML(KI,6)
56 CONTINUE
52 CONTINUE
   WRITE(5,165)
165 FORMAT(//,1X,'REACOES DE APOIO',//,3X,'NO',10X,'REA.X',9X,'REA.Y',
   *9X,'REA.Z',/)
   DO 69 I=1,NNDP
     NAI=NA(I)
     DO 70 J=1,3
       IF(IA(I,J))70,71,70
71 IB=3*(NA(I)-1)+J
     AR(IB)=AR(IB)-P(IB)
70 CONTINUE
     WRITE(5,166)NAI,AR(3*NAI-2),AR(3*NAI-1),AR(3*NAI)
166 FORMAT(I5,3F15.3)
69 CONTINUE
421 IF(ICAR-NCAR)420,419,419
74 WRITE(5,130)
   WRITE(5,167)LB,JBMAX
167 FORMAT(//,1X,'EXECUCAO SUPRIMIDA',//,1X,'LARGURA DE BANDA INSUFICI
   *ENTE',//,1X,'LB=',I3,//,1X,'JBMAX=',I3)
   WRITE(5,130)
419 IF(ICONT-NESTR)405,404,404
404 CALL EXIT
   END

```

```

SUBROUTINE DRCSP(EG,SKAP,TS1,TS2,TS3,TS4,TB1,ES1,ES2,ES3,ES4,EB1,E
*82,IFOUS,IFDUB,H1,H2,N,NNI,SFER,DIST,BR,G11,G21,G22,IACO)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
DIMENSION EPS(40),ELA(40),SFER(15),DIST(15),BR(25),AST(15)
C SUBROTINA PARA CALCULO DOS VALORES DE G11,G21,G22,PARA AS DIVERSAS
C SECOES TRANSVERSAIS AO LONGO DO ELEMENTO (SECAO CIRCULAR OU
C RETANGULAR).
TOTH=H1-H2
AFST=TOTH/N
HAF=AFST/2.
QUAD=AFST*AFST
U1=QUAD/10.
U2=AFST/6.
NB=N+1
NS=NNI
C CALCULO DAS DEFORMACOES NA SECAO
DO 1 I=1,NB
1 EPS(I)=EG+SKAP*(H2+(I-1)*AFST)
NK=NB+1
NV=NB+NS
DO 2 J=NK,NV
JJ=J-NB
2 EPS(J)=EG+SKAP*DIST(JJ)
CALL EMOSP(EPS,TS1,TS2,TS3,TS4,TB1,ES1,ES2,ES3,ES4,EB1,EB2,IFOUS,I
*FDUB,ELA,NB,NS,IACO)
C CALCULO DE G11,G21,G22
G11=0.
G21=0.
G22=0.
DO 3 I=1,N
X1=2.*ELA(I)+ELA(I+1)
X2=ELA(I)+2.*ELA(I+1)
X3=ELA(I)+ELA(I+1)
X4=ELA(I)+3.*ELA(I+1)
X5=2.*ELA(I)+3.*ELA(I+1)
X6=ELA(I)+4.*ELA(I+1)
Z=H2+AFST*(I-1)
T1=BR(I)*X1+BR(I+1)*X2
T2=BR(I)*X3+BR(I+1)*X4

```

```
T3=BR(I)*X5+3.*BR(I+1)*X6
G11=G11+T1
A=Z*T1
B=HAF*T2
G21=G21+A+B
G22=G22+Z*A+2.*Z*B+U1*T3
3 CONTINUE
G11=G11*U2
G21=G21*U2
G22=G22*U2
DD 4 J=NK,NV
JJ=J-NB
AST(JJ)=SFER(JJ)*ELA(J)
G11=G11+AST(JJ)
G21=G21+AST(JJ)*DIST(JJ)
G22=G22+AST(JJ)*DIST(JJ)*DIST(JJ)
4 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE EMOSP(EPS,TS1,TS2,TS3,TS4,TB1,ES1,ES2,ES3,ES4,EB1,EB2,I
*FOUS,IFOUB,ELA,NB,NS,IACO)
```

```
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION EPS(40),ELA(40)
```

```
C SUBROTINA PARA CALCULO DOS MODULOS DE ELASTICIDADE SECANTES EM
C DIVERSOS PONTOS DA SECAO TRANSVERSAL.PARA O CONCRETO E UTILIZADO O
C DIAGRAMA PARABOLA-RETANGULO.PARA OS ACOS QUE APRESENTAM PATAMAR DE
C ESCOAMENTO DEFINIDO(TIPO A),E UTILIZADO UM DIAGRAMA BILINEAR.
C PARA OS ACOS QUE NAO APRESENTAM PATAMAR DE ESCOAMENTO DEFINIDO
C (TIPO B),E UTILIZADO UM DIAGRAMA APROXIMADO (CONSTITUIDO POR
C TRECHOS RETOS) QUE PERMITE CARACTERIZAR O COMPORTAMENTO DESTES
C ACOS.
```

```
T=EB2
```

```
IF(EPS(1))19,21,21
```

```
19 IF(EPS(NB))22,21,21
```

```
22 D1=EPS(1)
```

```
D2=EPS(NB)
```

```
IF(D1-D2)23,23,24
```

```
23 EB2=EB2+0.75*D2
```

```
GO TO 21
```

```
24 EB2=EB2+0.75*D1
```

```
21 NK2=NB+NS
```

```
E1=EB1/200.
```

```
C CONCRETO
```

```
DO 1 I=1,NK2
```

```
IF(EPS(I))2,2,3
```

```
3 ELA(I)=0.
```

```
GO TO 1
```

```
2 EPS(I)=DABS(EPS(I))
```

```
IF(EPS(I)-E1)25,25,26
```

```
25 TENC=0.009975*TB1
```

```
ELA(I)=TENC/E1
```

```
GO TO 1
```

```
26 IF(EPS(I)-EB1)5,5,4
```

```
5 F=2.*EPS(I)-(EPS(I)/EB1)*EPS(I)
```

```
TENC=TB1*F/EB1
```

```
ELA(I)=TENC/EPS(I)
```

```
GO TO 1
```

```
4 IF(EPS(I)-EB2)7,7,6
```

```

7 ELA(I)=TB1/EPS(I)
  GO TO 1
6 IFOUB=IFOUB+1
1 CONTINUE
  EB2=T
  NK1=NB+1
  IF(IACO)27,28,27
C  ACO TIPO A
28 DO 20 I=NK1,NK2
  IF(EPS(I)-ES1)11,11,12
11 ELA(I)=TS1/ES1-ELA(I)
  GO TO 20
12 IF(EPS(I)-ES2)13,13,14
13 FLA(I)=TS1/EPS(I)-ELA(I)
  GO TO 20
14 IFOUS=IFOUS+1
20 CONTINUE
  RETURN
C  ACO TIPO B
27 DO 30 I=NK1,NK2
  IF(EPS(I)-ES1)31,31,32
31 ELA(I)=TS1/ES1-ELA(I)
  GO TO 30
32 IF(EPS(I)-ES2)33,33,34
33 G=(TS2-TS1)/(ES2-ES1)
  TENS=TS1+G*(EPS(I)-ES1)
  ELA(I)=TENS/EPS(I)-ELA(I)
  GO TO 30
34 IF(EPS(I)-ES3)35,35,36
35 G=(TS3-TS2)/(ES3-ES2)
  TENS=TS2+G*(EPS(I)-ES2)
  ELA(I)=TENS/EPS(I)-ELA(I)
  GO TO 30
36 IF(EPS(I)-ES4)37,37,38
37 G=(TS4-TS3)/(ES4-ES3)
  TENS=TS3+G*(EPS(I)-ES3)
  ELA(I)=TENS/EPS(I)-ELA(I)
  GO TO 30
38 IFOUS=IFOUS+1

```

30 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE STYTE(DD11,DD21,DD22,NMOT,ALMOT,NSMOT,AL,S11,S12,S13,S2
*2,S23,S33,C1,C2,C3)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
DIMENSION SO(10),Y(10,45),S(10),DD11(45),DD21(45),DD22(45),ALMOT(5
*),NSMOT(5)

```

```

C SUBROTINA PARA OBTENCAO DA PRIMEIRA DAS DUAS MATRIZES EM QUE SE
C DECOMPOE A MATRIZ DE RIGIDEZ (3*3) RELATIVA AOS DESLOCAMENTOS
C DELTL,TETI,TETJ. TRATA-SE DA MATRIZ QUE DEPENDE DA DISTRIBUICAO DE
C MODULOS DE ELASTICIDADE NO ELEMENTO.

```

```

X1=0.

```

```

NN=0

```

```

DO 10 J=1,10

```

```

S(J)=0.

```

```

10 CONTINUE

```

```

DO 290 L=1,NMOT

```

```

AL1=ALMOT(L)

```

```

N=NSMOT(L)

```

```

AL3=AL1/(3.*N*AL*AL)

```

```

FN=N

```

```

X=AL1/(FN*AL)

```

```

X1=X1-X

```

```

N1=N+1

```

```

DO 100 I=1,N1

```

```

NN=NN+1

```

```

X1=X1+X

```

```

Z1=DD11(NN)

```

```

Z2=DD21(NN)

```

```

Z3=DD22(NN)

```

```

A1=6.*X1

```

```

A2=24.*X1

```

```

A3=36.*X1

```

```

B1=X1*X1

```

```

B2=36.*B1

```

```

B3=48.*B1

```

```

Y(1,I)=Z1

```

```

Y(2,I)=(-A1+4.)*Z2

```

```

Y(3,I)=(-A1+2.)*Z2

```

```

Y(4,I)=(B2-2.*A2+16.)*Z3

```

```

Y(5,I)=(B2-A3+8.)*Z3

```

```

Y(6,I)=(B2-A2+4.)*Z3
Y(7,I)=(64.*B1-64.*X1+16.)*Z1
Y(8,I)=(4.-8.*X1)*Z1
Y(9,I)=(B3-56.*X1+16.)*Z2
Y(10,I)=(B3-40.*X1+8.)*Z2
100 CONTINUE
DO 101 J=1,10
101 SO(J)=0.
DO 250 J=1,10
DO 200 I=2,N,2
OP=Y(J,I-1)+4.*Y(J,I)+Y(J,I+1)
200 SO(J)=SO(J)+OP*AL3
250 CONTINUE
DO 260 J=1,10
S(J)=S(J)+SO(J)
260 CONTINUE
290 CONTINUE
S7=S(7)
S8=S(8)
S9=S(9)
S0=S(10)
S11=S(1)-S8*S8/S7
S12=S(2)-S8*S9/S7
S13=S(3)-S8*S0/S7
S22=S(4)-S9*S9/S7
S23=S(5)-S9*S0/S7
S33=S(6)-S0*S0/S7
C1=-S8/S7
C2=-S9/S7
C3=-S0/S7
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PALUI(S11,S12,S13,S22,S23,S33,AN,AL,SE)
IMPLICIT REAL *8(A-H,C-Z)
DIMENSION SE(6,6)
C SUBROUTINA PARA CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO (6*6).
DB=AL*AL
DE=AN/AL
DD=AN*AL
C CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO (6*6)
SE(1,1)=S11
SE(1,2)=- (S12+S13)/AL
SE(1,3)=- S12
SE(1,4)=- SE(1,1)
SE(1,5)=- SE(1,2)
SE(1,6)=- S13
SE(2,2)=(S22+2.*S23+S33)/DB+6.*DE/5.
SE(2,3)=(S22+S23)/AL+AN/10.
SE(2,4)=SE(1,5)
SE(2,5)=-SE(2,2)
SE(2,6)=(S23+S33)/AL+AN/10.
SE(3,3)=S22+2.*DD/15.
SE(3,4)=-SE(1,3)
SE(3,5)=-SE(2,3)
SE(3,6)=S23-DD/30.
SE(4,4)=SE(1,1)
SE(4,5)=SE(1,2)
SE(4,6)=-SE(1,6)
SE(5,5)=SE(2,2)
SE(5,6)=-SE(2,6)
SE(6,6)=S33+2.*DD/15.
DO 1 J=1,6
DO 1 K=1,J
1 SE(J,K)=SE(K,J)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SISEQ(A,B,N,M,MCONT)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(90,33),B(90)
C SUBROTINA PARA RESOLUCAO DE UM SISTEMA DE EQUACOES COM MATRIZ DE
C COEFICIENTES BANDA (N*M)-METODO DE GAUSS.
  NMI=N-1
  DO 3 I=1,NMI
  DO 3 J=2,M
  II=I+J-1
  IF(II-N)1,1,3
1 F=-A(I,J)/A(I,1)
  B(II)=B(II)+F*B(I)
  MJ1=M-J+1
  DO 2 K=1,MJ1
  L=K+J-1
  2 A(II,K)=A(II,K)+F*A(I,L)
  3 CONTINUE
  DO 141 LL=1,N
  IF(A(LL,1))142,142,141
142 MCONT=MCONT+1
141 CONTINUE
  B(N)=B(N)/A(N,1)
  DO 5 L=2,N
  I=N-L+1
  C=B(I)
  DO 4 K=2,M
  IK1=I+K-1
  IF(IK1-N)4,4,5
  4 C=C-A(I,K)*B(IK1)
  5 B(I)=C/A(I,1)
  RETURN
  END

```

BIBLIOGRAFIA

1. ACUÑA, J.L. - Elementos compatibles de orden superior para el analisis de flexiōn de placas. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1972. Tese de Mestrado.
2. AZEREDO, M.C. de - Cálculo nāo linear de estruturas reticuladas de betāo armado. Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia, setembro 1973. (Boletim do Gabinete de Estruturas, n. 17)
3. BLAAUWENDRAAD, J. - Realistic analysis of reinforced concrete framed structures. HERON, v.18, n.4, 1972.
4. CARNEIRO, F.L.L.B. - Introduçāo automātica de liberaçōes nos elementos de uma estrutura. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, março 1971.
5. CHAJES, A. - Principles of structural stability theory. New Jersey, Prentice-Hall [c 1974]
6. CHARONE FILHO, N. - Anālise por computadores digitais de estruturas reticuladas no espaço, com elemento de secçāo variāvel. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1971. Tese de Mestrado.
7. COATES, R.C.; COUTIE, M.G.; KONG, F.K. - Structural analysis. Great Britain, Nelson [c 1972]
8. COMITÉ Europēen du Bēton - Manuel de calcul "Flambement-Instabilitē". s.l. juillet 1973. (Bulletin d'information, n.93)

9. COMITÉ Européen du Béton - Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton. 2 ed. s.l. rédaction mai 1972. (Bulletin d'information, n. 84)
10. DESAI, C.S.; ABEL, J.F. - Introduction to the finite element method; a numerical method for engineering analysis. New York, Van Nostrand [c 1972]
11. FAESSEL, P.; MORISSET, A.; FOURE, B. - Le flambement des poteaux en béton armé. Annales de l'Institute Technique du Batiment et des Travaux Publics, n. 157, 1973. Supplément au n.305, mai 1973. (Théories et Méthodes de Calcul)
12. GERE, J.M.; WEAVER, Jr., W. - Análisis de estructuras reticulares. Mexico - España, Compañía Editorial Continental [1967]
13. GHALI, A.; NEVILLE, A.M.; CHEUNG, Y.K. - Structural analysis. Scranton, Pennsylvania, Intext Educational Publishers [c 1972]
14. LIMA, J. D'Arga e; COELHO, A.T.; MONTEIRO, V. - Manual de betão armado. 2 ed. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1973.
15. MACIEL, J.N.D. - Segurança de peças esbeltas. Seminário de Estruturas de Concreto, Rio de Janeiro, DNER, 1973.
16. MANTILLA, E.P. - Um método iterativo para análise de não-linearidade geométrica em estruturas reticulares. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1974. Tese de Mestrado.
17. MERIAM, J.L. - Statics. 2 ed. New York, John Wiley & Sons [c 1971]

18. MONTOYA, P.J.; MESEGUER, A.G.; CABRE, F.M. - Hormigão armado. 7 ed. Barcelona, Editorial Gustavo Gili [1973] 2v.
19. PACITTI, T. - Fortran - monitor; princípios. 2 ed. Rio de Janeiro, Livro Técnico, 1970.
20. PEREIRA, H.L. da C. - Análise de estabilidade elástica pelo método dos elementos finitos. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1973. Tese de Mestrado.
21. PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of matrix structural analysis. New York, Mc Graw-Hill [c 1968]
22. SOUSA, N.G. - Análise por computadores de pórticos planos com elementos de eixo curvo e seção variável. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1971. Tese de Mestrado.
23. THOMAS Jr., G.B. - Cálculo. Rio de Janeiro, Livro Técnico, 1965. 2v.
24. TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. - Mechanics of materials. New York, Van Nostrand [c 1972]
25. YAMAGATA, N. - Colunas de concreto armado solicitadas por cargas axiais excêntricas. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1973. Tese de Mestrado.
26. YAMAGATA, N. - Peças curtas e esbeltas - uso do computador. Seminário de Estruturas de Concreto, Rio de Janeiro, DNER, 1973.
27. YAMAGATA, N. - Um programa para dimensionamento de seções de peças de concreto armado submetidas a flexão composta normal. Anais das Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, 3. Angola, Moçambique, 1971.