

OTIMIZAÇÃO IMPLÍCITA ESTOCÁSTICA PARA OPERAÇÃO DE RESERVATÓRIOS

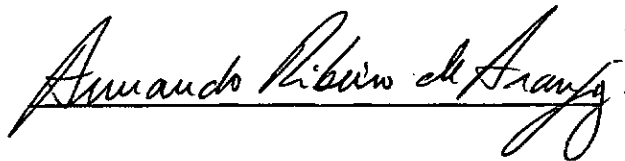
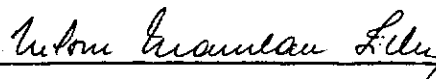
LUIZ AUGUSTO LATTARI BARRETTO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:



Presidente



RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA -- BRÁSIL  
JUNHO DE 1974



A G R A D E C I M E N T O S

À COPPE, nas pessoas do seu Diretor Prof. Sydney M. G. dos Santos; do Prof. Luiz Lobo B. Carneiro, Coordenador do Programa de Engenharia Civil; do Prof. Rui Carlos Vieira da Silva, responsável pelo Setor de Hidráulica, e em particular, do Prof. Pedro Guerrero, seguro e eficiente orientador da Tese.

Ao Prof. Nelson Maculan Filho, pelo exame crítico a que submeteu o manuscrito.

À Consultora PROCON, nas pessoas dos engenheiros Frederico B. de Magalhães Gomes e Leslie Afrânio Terry pelas contribuições dadas no desenvolvimento computacional da Tese.

À ELETROBRÁS, na pessoa do Engenheiro Armando Ribeiro de Araújo, Chefe do Departamento de Coordenação de Sistemas, pelo apoio e estímulo prestados, e pessoal administrativo pela colaboração na execução gráfica do trabalho.

Finalmente, um destaque especial a meus pais, Reinaldo e Lygia, pelo carinho com que sempre acompanharam meus estudos.

R E S U M O

Foi realizada uma análise estrutural de vazões mensais. Foi identificada uma componente determinística periódica na média e na variância, assim como a dependência (modelo auto-regressivo linear de primeira ordem) na componente estocástica. Foi então ajustada uma distribuição de probabilidade à componente estocástica independente.

O modelo estrutural foi usado para gerar várias séries de vazões mensais nas quais foram identificados os períodos críticos. Estes períodos críticos foram usados para determinar a operação ótima de um reservatório de múltiplos propósitos, com o objetivo de maximizar a energia produzida, fazendo uso de programação dinâmica regressiva.

Foi usada a análise de múltipla regressão linear para obter regras de operação mensal para o reservatório, usando os resultados do modelo de otimização.

O reservatório de Três Marias foi usado como um exemplo de aplicação das técnicas desenvolvidas, e as regras de operação mensal desenvolvidas foram aplicadas para a série histórica.

A B S T R A C T

A structural analysis of monthly streamflows was performed. A deterministic periodic component in the mean and the variance was identified, as well as the dependence (first order linear autoregressive model) in the stochastic component. Then a probability distribution was adjusted to the independent stochastic component.

The structural model was used to generate several series of monthly streamflows in which critical periods were identified. These critical periods were used to determine the optimal operation of a multi-purpose reservoir with the objective of maximizing produced energy, making use of backward dynamic programming.

Multiple linear regression analysis was used to obtain monthly operation rules for the reservoir, using the results of the optimization model.

Tres Marias reservoir was used as an example of application of the techniques developed, and the monthly operation rules developed were applied to the historic series.

Í N D I C E

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO .....	1.
	1.1 - Aspectos Gerais .....	1.
	1.2 - Um Problema Particular .....	3.
	1.3 - Objetivos .....	5.
CAPÍTULO II	- REVISÃO DA LITERATURA .....	7.
	2.1 - Vazões .....	7.
	2.2 - Período Crítico .....	9.
	2.3 - Modelos de Otimização de Operação de re- servatórios .....	12.
CAPÍTULO III	- MODELOS .....	16.
	3.1 - Vazões .....	16.
	3.2 - Período Crítico .....	53.
	3.3 - Modelo de Otimização .....	55.
	3.4 - Análise de Regressão .....	61.
CAPÍTULO IV	- CASO DE APLICAÇÃO .....	63.
	4.1 - Dados e Informações Gerais .....	63.
	4.2 - Resultados .....	66.
	4.3 - Testes da Regra Ótima .....	88.
CAPÍTULO V	- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	89.
BIBLIOGRAFIA	.....	91.
ANEXOS	.....	94.

## I - INTRODUÇÃO

### I.1 - ASPECTOS GERAIS

Com as crescentes dimensão e complexidade dos sistemas energéticos tornam-se, cada vez mais, inviáveis economicamente os planejamentos para a operação, por meio de técnicas empíricas. Isto é verdadeiro, especialmente, em casos de sistemas mistos de usinas hidráulicas de reservatórios, ao fio d'água, ou de bombeamento, e usinas térmicas de diferentes materiais combustíveis. Além disso, o desenvolvimento de projetos de recursos hídricos para múltiplas finalidades acrescentam novas restrições ao sistema energético. Assim, a utilização dos rios para a navegação, problemas relativos à poluição, etc., constituem fatores adicionais ao grau de dificuldade na resolução do problema geral.

A utilização de novas técnicas de otimização e o aparecimento de computadores mais rápidos e de maior memória permitem abordar tais questões com relativo sucesso, de forma que os resultados alcançados foram técnica e economicamente satisfatórios.

Um aspecto importante do problema é o caráter aleatório das afluências futuras. Por isso, a disponibilidade de energia elétrica também é uma variável aleatória e, portanto, o custo mínimo calculado pela solução ótima é expresso como um valor esperado.

No caso de sistemas mistos hidrotérmicos com reservatórios, a otimização dos custos de operação é realizada pela escolha de uma das duas alternativas: turbinar a água armazenada nos

reservatórios, ou manter uma reserva hidráulica em favor de uma geração térmica equivalente.

A primeira decisão, turbinar a água armazenada nos reservatórios, assegura uma economia imediata representada pela redução do consumo de combustível nas usinas térmicas. Mas, a diminuição da reserva hidráulica limita a sua capacidade de suprir a carga durante um período de afluências mais baixas. Se o sistema não tiver uma complementação térmica capaz de suavizar as adversidades hidrológicas, então, maiores serão as possibilidades de ocorrência de um deficit.

A segunda decisão, manter uma reserva hidráulica em favor de uma geração térmica equivalente, implica um gasto imediato em combustível, porém, a manutenção da reserva hidráulica diminui os riscos de ocorrência de deficit.

Verifica-se, deste modo, a necessidade do conhecimento detalhado do comportamento aleatório das afluências. Por meio dele, é possível probabilizar-se as ocorrências de deficits e, por conseguinte, atribuir-se valores esperados às políticas de operação do sistema.

Outro aspecto importante deste problema é que a reserva hidráulica está distribuída em um sistema composto de um certo número de reservatórios. Isto faz com que o número de alternativas para as políticas de operação aumente excessivamente e a solução torne-se inviável computacionalmente.

Um artifício usual, neste caso, consiste em dividir o problema em duas partes. Na primeira, é adotado um modelo com-

posto, isto é, o conjunto de reservatórios é substituído por um único reservatório com energia acumulada equivalente e as afluições às usinas transformadas em afluições de energia equivalente. Para este sistema é, então, determinado o nível ótimo de geração térmica. Segue-se a segunda etapa, na qual o saldo da carga elétrica sob a responsabilidade de geração hidráulica deve ser distribuída pelas usinas. Como as afluições a cada um dos reservatórios é uma variável aleatória, seria necessária uma função densidade de probabilidade  $m$  dimensional (onde  $m$  é o número de usinas) para descrever probabilisticamente as afluições. O processo de obtenção da solução ótima deste problema é muito complicada e, por isso, ele é transformado de probabilístico para determinístico pelo emprego da simulação do sistema com usinas individualizadas, para diversas hipóteses de hidraulicidade. São, então, obtidas regras de operação dos reservatórios para estas seqüências de vazões e, conseqüentemente, é conhecida a quantidade de água a ser "turbinada" em cada usina, de modo a atender à responsabilidade de geração hidráulica.

## I.2 - UM PROBLEMA PARTICULAR

O sistema energético da região Sudeste brasileira é constituído de usinas hidroelétricas e térmicas convencionais, com larga predominância das primeiras. A abundância de recursos hidráulicos e a escassez de combustíveis fósseis no país são fatores que ressaltam a importância dos estudos de políticas ótimas de operação. O objetivo a ser alcançado é a minimização dos gastos operacionais das térmicas resultantes do consumo de combustível ou, equivalentemente, a maximização do uso dos recursos hidráulicos.

Além disso, a política obtida deve conduzir ao menor risco possível de deficit, cuja ocorrência implicaria a necessidade de racionamento de energia, prejudicial à economia da região.

As diversas usinas da região pertencem a diferentes empresas de energia elétrica. No entanto, se se considera uma operação interligada do sistema, as suas características o tornam suscetível de ser analisado matematicamente conforme um modelo do tipo anteriormente descrito.

Pelo exame da figura IV.1, verifica-se que os aproveitamentos hidroelétricos constituem uma malha, na qual é comum a ocorrência de cascatas, isto é, usinas hidráulicas situadas a jusante de uma outra.

A existência de um grande reservatório no rio-Grande, o de Furnas, que controla a cascata das grandes usinas daquele rio e parte ponderável da energia afluyente às usinas do rio Paraná, tornam atraente o equacionamento do problema segundo o modelo do reservatório equivalente. Em acréscimo, a forma de operação de qualquer reservatório de montante modifica as afluências às usinas de jusante, e às características físicas dos aproveitamentos como capacidade máxima dos reservatórios, descargas máxima e mínima "turbináveis", "produtibilidades" variáveis, constituem um complicado sistema de equações, de forma que, o método da simulação se apresenta como uma alternativa bastante promissora.

Este sistema apresenta alguns problemas particulares, no entanto, que talvez permitam variações na forma de otimizá-lo. Em primeiro lugar, as usinas do rio Paraíba do Sul constituem um agrupamento isolado da cascata dos rios Grande e Paraná. Além

disso, problemas relativos a controle de poluição no vale daquele rio tornaram a sua operação régida segundo um critério pré-estabelecido.

Em segundo lugar, a usina de Cubatão em São Paulo acumula a água proveniente do rio Tietê no reservatório por meio de um esquema de bombeamento e, aproveitando o grande desnível da Serra do Mar, desvia esta água diretamente para a vertente do Atlântico. A grande altura de queda acarreta uma alta "produtibilidade" e, por este motivo, parece sugestivo uma operação particularizada deste reservatório.

Em terceiro lugar, no rio São Francisco, a usina com reservatório de Três Marias constitui um sistema isolado do conjunto Grande-Paraná. Além disso, a sua operação está sujeita a uma restrição particular: a de garantir uma descarga mínima em Pirapora, a fim de estabelecer níveis compatíveis com a navegação. Tendo em vista esta particularidade, a operação do reservatório de Três Marias poderia ser otimizada, objetivando a máxima produção de energia, sujeita à restrição citada. A regra ótima resultante poderia ser empregada na operação deste reservatório quando o sistema total fosse simulado, segundo usinas individualizadas.

### I.3 - OBJETIVOS

Este estudo teve como objetivo a otimização da operação de um reservatório, visando a produção de energia elétrica, pela aplicação de um método implícito estocástico-dinâmico. As fases do trabalho foram:

- a) Analisar a estrutura da série hidrológica de vazões afluentes ao aproveitamento hidroelétrico e, com o resultado obtido, representá-la por um modelo matemático estatístico.
- b) Gerar várias seqüências de vazões para o mesmo local, usando o seu modelo matemático.
- c) Determinar, em cada uma das seqüências geradas, o período crítico do reservatório.
- d) Otimizar a operação do reservatório, visando a máxima produção de energia, sob a restrição de descarga efluente mínima para fins de navegação, em cada um dos períodos críticos.
- e) Obter uma regra ótima de operação do reservatório, por meio de uma análise de regressão, considerando os períodos críticos de cada seqüência gerada com iguais probabilidades de ocorrência.

Os tópicos (a) e (b) são analisados na seção (III.1). Os tópicos (c), (d) e (e) são desenvolvidos, respectivamente, nas seções (III.2), (III.3) e (III.4). O caso de aplicação, com seus dados e resultados é apresentado nas seções (IV.1) e (IV.2), respectivamente. Na seção (IV.3) são analisados os testes realizados com a regra ótima. Finalmente, nas seções (V.1) e (V.2) são apresentadas, respectivamente as conclusões do estudo e as recomendações consideradas oportunas para o desenvolvimento do modelo.

## II - REVISÃO DA LITERATURA

### II.1 - VAZÕES

No planejamento da operação de um sistema de recurso hidráulico deve-se levar em consideração o comportamento aleatório das variáveis hidrológicas. Caso nos estudos seja utilizada a sequência histórica, então, é obtida apenas uma resposta do sistema. Como é bastante improvável que esta sequência venha a se repetir, existe pouca informação sobre o futuro comportamento do sistema.

Para se obter um conjunto de possíveis respostas do sistema, deve-se empregar sequências simuladas denominadas sequências sintéticas. Como estas podem ser tão longas quanto se desejar, é possível dividi-las em um grande número de segmentos, de forma a se obter um conjunto de diferentes atuações do sistema.

As séries simuladas devem se assemelhar à histórica em termos de certas propriedades que exerçam uma influência significativa na operação do sistema.

Em um estudo pioneiro, Thomas e Fiering (1962) desenvolveram um modelo matemático para a série de vazões mensais. Este modelo é formulado pela recursão

$$q_{i+1,j} = \bar{q}_{i+1} + b_{i+1} (q_{i,j} - \bar{q}_i) + t_i S_{i+1} (1 - r_{i+1}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

onde  $q_{i+1,j}$  e  $q_{i,j}$  representam as descargas no ano  $j$  para os meses  $i+1$  e  $i$ , respectivamente;  $\bar{q}_{i+1}$  e  $\bar{q}_i$  representam a va

ção média mensal para a série histórica nos meses  $i+1$  e  $i$ , respectivamente;  $b_{i+1}$  é o coeficiente de regressão entre a série de vazões dos meses  $i+1$  e  $i$ ;  $S_{i+1}$  é o desvio padrão do registro histórico para o mês  $i+1$ ;  $r_{i+1}$  é o coeficiente de correlação entre as vazões para os meses  $i+1$  e  $i$ ;  $t_i$  é uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância unitária.

A equação (2.1) pode ser usada para gerar eventos sintéticos que se assemelham aos eventos históricos em termos da média, desvio padrão e coeficiente de correlação de ordem 1. Para considerar a assimetria, Thomas e Fiering (1963) e Matalas (1967) utilizaram as distribuições gama e lognormal de três parâmetros no ajustamento da componente aleatória.

Quimpo (1967) e Roesner-Yevjevich (1966) apresentaram modelos estocásticos para seqüências de vazões diárias e mensais, respectivamente. Foi desenvolvido um método paramétrico para a separação da componente periódica, representando-a por uma série de Fourier. Foram aplicadas as técnicas do correlograma e da variância espectral para a análise das séries temporais.

Benson e Matalas (1967) sugeriram um processo de séries sintéticas, baseando-se em parâmetros estatísticos regionais, de forma a diminuir ou eliminar os erros provenientes das pequenas amostras, e a possibilitar a geração de seqüências em locais que não dispõem de registros.

Harms e Campbell (1967) propuseram uma extensão para o modelo de Thomas-Fiering no sentido de aplicá-lo, simultaneamente, às vazões mensais e anuais, sob a hipótese de distribuição normal da vazão. Verificaram também que, em determinadas seqüên-

cias de vazões mensais, os logarítmos destas variáveis forneciam um melhor ajustamento na distribuição normal do que as variáveis não transformadas.

Askew, Yeh e Hall (1971) fizeram um estudo comparativo dos resultados obtidos por diversas técnicas de geração. Nenhuma delas produziu um período crítico tão ou mais severo do que aquele registrado historicamente. As técnicas de geração revelaram-se mais precisas nas regiões áridas, para as quais o processo de Markov de 1ª ordem mostrou-se melhor ajustado do que um de 22ª ordem para as vazões mensais.

Yevjevich (1972) desenvolveu uma análise estrutural de séries hidrológicas, usando técnicas para testar a periodicidade de parâmetros em séries hidrológicas como a média, variância, assimetria e coeficientes de autocorrelação. Neste trabalho estão expostos testes de verificação de constância do coeficiente de variação, assimetria e coeficientes de autocorrelação. Foram investigados modelos de dependência para a componente estocástica e discutidos processos de estimativa para os coeficientes de autocorrelação.

Todas as referências aqui analisadas são relativas às séries hidrológicas de uma única estação.

## II.2)- PERÍODO CRÍTICO

Durante a operação normal de um reservatório podem existir meses de cheia, em que parte da água deve ser vertida por falta de capacidade de armazenamento. Se num dado instante ocorre

vertimento, então, é impossível guardar mais água para um período seco futuro. Logo, qualquer decisão referente à descarga efluente, anterior a este instante, não influenciará as decisões futuras. Além disso, se as decisões de deplecionamento, em qualquer instante subsequente, dependem apenas dos níveis do reservatório e não da forma pela qual os mesmos foram atingidos, então, é possível truncar-se o período anterior ao vertimento, sem que isto modifique as decisões finais de operação.

As decisões, durante o período seco, dependerão do nível mais desfavorável atingido pelo reservatório. Por outro lado, não existe nenhum meio pelo qual os recursos afluentes futuros possam modificar esta restrição. Assim, o período após o instante mais desfavorável do sistema pode ser também truncado.

A seqüência de meses obtida por este processo é denominada período crítico. Pela própria definição, o período crítico se inicia com o reservatório cheio e finda em um estado de reserva mínima ou nula. Qualquer decisão, fora do período crítico, não pode afetar a política ótima a ser seguida dentro do período. Em conseqüência, a análise para as políticas ótimas de descarga ou energia firme, para o período total de registro, pode ser restrita apenas ao período crítico, obtendo-se, desta forma, os mesmos resultados.

A utilização do período crítico pode tornar viável computacionalmente uma análise de otimização, ao evitar a utilização da seqüência completa de vazões. Também pode dizer-se que o período crítico influe na segurança da operação futura do reservatório. Uma vez que ele ocorreu, e faltando qualquer explicação fi

sica mais precisa que assegure a sua não repetição, há necessidade de se levar em consideração tal possibilidade. Tendo em vista estes aspectos do período crítico, torna-se importante a sua determinação, a partir de uma seqüência de vazões histórica ou sintética, para um dado reservatório.

Hall e Dracup (1970) expuseram um processo de determinação do período crítico pela obtenção do funcional  $T(Q, x)$  onde  $T$  é a duração do período crítico,  $Q$  o volume útil máximo e  $x$  a descarga firme retirada. É interessante observar-se que, neste caso, foi permitida uma variação do volume útil máximo, segundo  $Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$ , visando obter uma reserva variável para controle de cheia.

As equações recursivas para o balanço de volumes no cálculo do funcional  $T(Q, x)$  foram:

$$q_{i+1} = q_i + y_i - e_i(q_i) - \alpha_i \cdot x \quad (2.2)$$

onde  $q_{i+1}$  e  $q_i$  são os volumes armazenados nos meses  $i+1$  e  $i$ , respectivamente,  $y_i$  é a afluência durante o mês  $i$ ,  $e_i(q_i)$  representa a perda por evaporação, e  $\alpha_i$  é um fator de sazonalidade da demanda.

A equação (2.2) está sujeita à restrição

$$q_{i+1} \leq Q_{\max} \quad (2.3)$$

onde  $Q_{\max}$  é o volume útil máximo.

Uma série de 26 seqüências representativas dos Estados Unidos foi analisada por este processo e os resultados de uma parte destas análises é apresentada por Hall, Yeh e Askew (1969) .

Hall e Dracup (1970) expuseram um processo para a representação estatística da ordem de seqüência das vazões, ao longo de um período crítico de duração e magnitude fixas. Para um determinado intervalo de tempo  $T$  , a vazão média é reduzida por meio de uma função (senóide ou outra curva), que é uma representação hipotética da forma de decréscimo da vazão. O hidrógrafo resultante deve apresentar um deficit com magnitude igual ao deficit acumulado médio pelo hidrógrafo histórico no intervalo  $T$  .

Em estudos feitos pela CANAMBRA (1966) e ELETROBRÁS (1973), são feitas determinações de período crítico pela aplicação das equações (2.2) e (2.3), considerando os efeitos da evaporação e da sazonalidade da demanda. O valor da energia firme é obtido por um processo iterativo, no qual aquele valor sofre correções correspondentes ao superavit ou deficit no mês mais desfavorável simulado distribuído ao longo de todo o período crítico.

### II.3 - MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE OPERAÇÃO DE RESERVATÓRIOS

Nos últimos anos, com o advento de computadores cada vez mais rápidos, e o desenvolvimento de novas técnicas de programação matemática, têm sido bastante pesquisadas soluções para problemas de determinação de regras ótimas para a operação de reservatórios. Os modelos, até aqui apresentados, podem ser classificados em três categorias:

- a) Modelos de simulação;
- b) Modelos estocásticos explícitos;
- c) Modelos estocásticos implícitos.

A determinação de regras de operação, por meio da simulação, não consiste em uma técnica de otimização em si, mas essencialmente de um processo de tentativa. Conhecidas as características físicas do sistema hidráulico, é postulada inicialmente uma regra de operação baseada na experiência operativa de cada reservatório. Usando a seqüência histórica, é feita uma simulação do sistema segundo esta regra e, conforme o comportamento do mesmo, são tentadas modificações que tenderão a satisfazer os objetivos desejados na operação.

Embora o espaço das decisões seja de tal dimensão que acarrete uma grande quantidade de cálculos, a utilização de apenas uma seqüência de vazões futuras possibilita um bom grau de sucesso na pesquisa por intermédio do método da simulação. Quando são usadas técnicas de geração de séries, a determinação da regra ótima de operação, por meio da simulação, vai depender fundamentalmente do tamanho do espaço das decisões.

Em relatório da ELETROBRÁS (1974) é apresentado um modelo que simula um sistema hidroelétrico de até 80 usinas e reservatórios da região Sudeste brasileira, usando um registro de vazões de 40 anos. Outros trabalhos sobre métodos de simulação foram desenvolvidos por Hufschmidt e Fiering (1966) e Young (1969).

Por modelos estocásticos explícitos são designados aqueles que usam distribuições de probabilidade para as vazões di-

retamente, ao invés de amostras geradas por processos de séries sintéticas. Os modelos estocásticos explícitos têm demonstrado serem inviáveis computacionalmente para problemas de múltiplos reservatórios. De fato, para cada reservatório acrescentado ao sistema corresponde uma nova variável de estado que, nas técnicas de programação matemática, acarreta um aumento exponencial dos cálculos. A forma pela qual o tamanho do algoritmo cresce é descrita por Roefs (1968). O único modelo estocástico explícito de múltiplos reservatórios existente na literatura técnica e desenvolvido por Schweig e Cole (1968) requereu hipóteses bem simples de dependências nas vazões. No entanto, desde que as características físicas do sistema sejam convenientes, como alternativa, é possível representar o conjunto de reservatórios do sistema por um único reservatório equivalente, e proceder à otimização global do sistema, usando um método estocástico explícito, como foi feito no relatório de FURNAS (1972).

O método estocástico implícito compreende três fases distintas: geração de séries de vazões, otimização determinística e análise de regressão. Inicialmente, são geradas várias seqüências de descargas com iguais probabilidades de ocorrência no futuro. É então feita uma otimização determinística, para cada seqüência, visando a determinação dos níveis ótimos de armazenagem e os valores ótimos de descargas efluentes do reservatório. Nesta fase, é importante distinguir qual o objetivo a ser alcançado na otimização e quais as restrições às quais o sistema está sujeito. Finalmente, faz-se uma análise de regressão pela qual é estabelecida a regra ótima de operação.

Young (1967) apresentou um modelo implícito estocástico para a determinação de uma regra ótima de operação anual para um reservatório. Na otimização foi empregado o algoritmo de programação dinâmica de recursão progressiva. Na análise de regressão foram consideradas como variáveis independentes o nível de armazenagem e a descarga afluyente anterior, e como variável dependente o valor de descarga a ser liberada do reservatório.

Roefs e Bodin (1970) apresentaram um modelo estocástico implícito no qual são consideradas algumas não linearidades, como a perda por evaporação em função do volume armazenado e a variação do valor energético da unidade de descarga liberada. A otimização é feita por meio do algoritmo de programação linear. É formulado também um problema de otimização para um caso de múltiplos reservatórios, em que é usado o método de decomposição de Dantzig-Wolfe. Para um sistema de três reservatórios e um período de três anos, ficou demonstrado que um processo de decomposição a priori tem a convergência aproximadamente quatro vezes mais rápida do que o processo de decomposição iterativa. Para um grande sistema de reservatórios, provavelmente, o método empregado torna-se altamente dispendioso.

### III - MODELOS

#### III.1 - VAZÕES

##### 1.1 - Aspectos Gerais

Na análise da estrutura de uma série hidrológica é usual representar-se o processo por uma equação algébrica, que indica a superposição de três componentes causadas por diferentes fatores físicos e aleatórios. Em primeiro lugar, pode existir uma tendência, segundo um intervalo de vários anos, saltos positivos ou negativos e outras componentes determinísticas transitórias causadas ou pela inconsistência e não homogeneidade dos dados, ou por variações amostrais. Em segundo lugar, nas séries hidrológicas diárias e mensais sempre está presente uma componente periódica com um ciclo fundamental de um ano. Em terceiro lugar, superpõe-se uma componente estocástica que comumente constitui um processo estacionário.

A existência dessas componentes nas séries hidrológicas pode ser explicada de diversas formas. As tendências a longo termo são quase sempre originárias de erros sistemáticos nos dados, ou de não homogeneidades causadas por mudanças na natureza provocadas por fatores humanos ou naturais. As tendências de curto termo e pseudo ciclicidades são provenientes das flutuações das pequenas amostras.

Se um estudo regional demonstra que o fenômeno constitui um processo estacionário anual, as tendências e as pseudo ciclicidades, que porventura existirem nas séries registradas de al-

gumas estações desta região, devem ser consideradas como não significativas. O objetivo destas correções é o de se obter modelos das séries ou geração de novas amostras isentos dos erros amostrais.

A periodicidade nas séries hidrológicas são causadas pelos ciclos astronômicos. A componente aleatória é provocada por diversos fenômenos tais como a turbulência das camadas atmosféricas, a transmissão de calor, a opacidade do ar quanto à radiação de ondas, etc. As componentes estocásticas podem ser dependentes ao longo do tempo, por efeito de armazenagem de diversas grandezas nos respectivos meios ambiente.

## 1.2 - Hipóteses Básicas da Análise Estrutural de Séries de Vazões

A seguir, são relacionadas algumas hipóteses apresentadas por Yevjevich (1972), sobre as quais estão baseados métodos de desenvolvimento de modelos matemáticos de séries hidrológicas utilizados neste estudo:

- a) Uma série hidrológica é formada de componentes determinísticas periódicas e de uma componente estocástica;
- b) A variação randômica da série está praticamente toda contida na componente estocástica;
- c) A componente estocástica obtida pela remoção das componentes periódicas em vários parâmetros é aproximadamente uma variável aleatória estacionária;
- d) As não homogeneidades é inconsistências nas séries devem ser detectadas e removidas antes da análise estrutural;

- e) A substituição das informações contidas em uma série hidrológica de uma estação pelo conjunto de informações das séries da mesma região poderá melhorar bastante as estimativas dos coeficientes e parâmetros;
- f) Na análise estrutural deve ser estimado o mínimo de coeficientes e parâmetros porque, quanto mais estatísticos são computados, menor é o número de graus de liberdade restante para outras estimativas;
- g) A componente estocástica estacionária independente é ajustada por um modelo matemático de dependência, o qual pode ter uma justificativa física e, a partir de le pode ser determinada uma componente estocástica estacionária independente. Assim, resulta um número muito grande de componentes independentes que torna bastante precisa a estimativa de parâmetros para uma distribuição de probabilidades;

### 1.3 - Identificação e Remoção de não Homogeneidades e Tendências

Antes de pesquisar-se um modelo para as componentes originárias de tendências e/ou não homogeneidades, deve-se verificar se elas realmente existem. A amostra pode ser dividida, por exemplo, em duas partes e suas médias testadas quanto à igualdade, isto é:

$$H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$

Se a hipótese nula  $H_0$  é rejeitada, existem duas possibilidades: os dados são não-homogêneos ou existe uma tendência.

Para a identificação da tendência podem ser usados os seguintes métodos:

- a) Ajustamento de um polinômio pelo método dos mínimos quadrados.
- b) Método das médias móveis.

#### 1.4 - Separação das Componentes Periódica e Estocástica

Existem dois métodos de separação das componentes periódica e estocástica: o não paramétrico e o paramétrico.

##### a) Método não paramétrico

A separação da componente estocástica por este método consiste na transformação

$$\varepsilon_{p,\tau} = \frac{X_{p,\tau} - m_{\tau}}{S_{\tau}} \quad (3.1)$$

onde:  $X_{p,\tau}$  - valor da variável  $X$  no ano  $p$  e no intervalo  $\tau$  do ano, com  $p = 1, 2 \dots n$  e  $\tau = 1, 2 \dots \omega$ , sendo  $n$  o tamanho da amostra,  $\omega$  o número de intervalos discretos em um ano,

$m_{\tau}$  - média da amostra no intervalo  $\tau$ .

e

$S_{\tau}$  - desvio padrão da amostra no intervalo  $\tau$ .

Para a remoção da periodicidade na média  $m_{\tau}$  e no desvio padrão  $S_{\tau}$  são necessários  $2\omega$  estatísticos de  $X_{p,\tau}$ :  $\omega$  de  $m_{\tau}$  e  $\omega$  de  $S_{\tau}$ . Se o processo estocástico  $X_{p,\tau}$  tem  $\hat{v}$  parâmetros periódicos, então, o método não paramétrico requer o uso de

vw estatísticos. Estes vw valores não podem ser determinados com precisão devido aos grandes erros da amostragem, além de diminuir bastante o número de graus de liberdade. No entanto, o método não paramétrico pode ser aplicável quando o número v de parâmetros e ω de intervalos do ano forem pequenos, por exemplo, v = 2 e ω = 12 .

b) Método paramétrico

O método paramétrico de separação das componentes periódica e estocástica pode consistir de dois tipos de relações:

1º TIPO: 
$$X_{p,\tau} = \mu_{\tau} + \sigma_x \cdot \varepsilon_{p,\tau} \tag{3.2}$$

onde  $\sigma_x$  é o desvio padrão de  $X_{p,\tau}$  suposto constante e  $\mu_{\tau}$  é uma função periódica ajustada à média por meio da equação

$$\mu_{\tau} \approx \mu_x + \sum_{j=1}^m (A_j \cos \lambda_j \cdot \tau + B_j \text{sen } \lambda_j \cdot \tau) \tag{3.3}$$

sendo  $\mu_x$  a média geral de  $X_{p,\tau}$ , m o número de harmônicos significativos e  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{12}$  a frequência angular.

Os coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  são estimados por:

$$A_j = \frac{2}{n\omega} \sum_{p=1}^n \sum_{\tau=1}^{\omega} (X_{p,\tau} - \mu_x) \cdot \cos \frac{2\pi j\tau}{\omega} \tag{3.4}$$

$$B_j = \frac{2}{n\omega} \sum_{p=1}^n \sum_{\tau=1}^{\omega} (X_{p,\tau} - \mu_x) \cdot \text{sen } \frac{2\pi j\tau}{\omega} \tag{3.5}$$

com  $j = 1, 2, \dots, \omega/2$  ou  $(\omega-1)/2$  se  $\omega$  for ímpar e  $\tau = 1, 2, \dots, \omega$ .

Para

$$j = \frac{\omega}{2}, A_{\omega/2} = \frac{A_j}{2} \quad (3.6)$$

e 
$$B_{\omega/2} = B_j = 0 \quad (3.7)$$

2º TIPO: Como nas séries hidrológicas registradas raramente  $\sigma_x$  é constante, dois casos podem ocorrer:

1)  $\mu_T(x)$  e  $\sigma_T(x)$ , parâmetros da população estimados pelas funções periódicas  $\mu_T$  e  $\sigma_T$ , são proporcionais.

2)  $\mu_T(x)$  e  $\sigma_T(x)$  não são proporcionais.

No primeiro caso, a constante de proporcionalidade será o coeficiente de variação  $\eta_0$ , de modo que:

$$\frac{\sigma_T}{\mu_T} = \eta_0$$

$$X_{p,T} = \mu_T + \sigma_T \cdot \epsilon_{p,T} = \mu_T (1 + \eta_0 \cdot \epsilon_{p,T})$$

$$X_{p,T} = \mu_T \cdot \epsilon_{p,T}^* \quad (3.8)$$

sendo

$$\epsilon_{p,T}^* = 1 + \eta_0 \cdot \epsilon_{p,T} \quad (3.9)$$

Fazendo-se a transformação

$$\ln X_{p,\tau} = \ln \mu_{\tau} + \ln \varepsilon_{p,\tau}^* \quad (3.10)$$

para  $X_{p,\tau} > 0$ ,  $\mu_{\tau} > 0$  e  $\varepsilon_{p,\tau}^* > 0$ , o primeiro caso recai na equação (3.2) pela aplicação de logaritmos à equação (3.8), sendo válidas as relações (3.3), (3.4) e (3.5).

No segundo caso, em que  $\sigma_{\tau}$  não é proporcional a  $\mu_{\tau}$ , o modelo de composição das componentes estocástica e periódica é

$$X_{p,\tau} = \mu_{\tau} + \sigma_{\tau} \cdot y_{p,\tau} \quad (3.11)$$

onde  $\mu_{\tau}$  e  $\sigma_{\tau}$  são funções periódicas ajustadas à média  $m_{\tau}$  e ao desvio padrão  $S_{\tau}$ , com um número limitado de harmônicos.

A forma geral de uma função periódica ajustada a um parâmetro  $v$  é :

$$v_{\tau} = v_x + \sum_{j=1}^m (A_j \cdot \cos \lambda_j \tau + B_j \cdot \sin \lambda_j \tau) \quad (3.12)$$

em que  $m$  é o número de harmônicos significativos do período básico  $\omega$ ,  $\lambda_j = 2\pi j/\omega$  é a frequência angular,  $v_x$  é a média dos  $v_{\tau}$  ajustados aos  $\omega$  valores de  $v_{\tau}$  da amostra, ou a média destes  $\omega$  valores  $v_{\tau}$ . Os coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  são estimados a partir dos  $\omega$  valores dos coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  são estimados a partir dos  $\omega$  valores  $v_{\tau}$  pelas fórmulas

$$A_j = \frac{2}{\omega} \sum_{\tau=1}^{\omega} V_{\tau} \cos \frac{2\pi j\tau}{\omega} \quad (3.13)$$

$$B_j = \frac{2}{\omega} \sum_{\tau=1}^{\omega} V_{\tau} \sen \frac{2\pi j\tau}{\omega} \quad (3.14)$$

Para o último harmônico  $j = \omega/2$  ou  $(\omega-1)/2$  para um número  $\omega$  ímpar, os coeficientes de Fourier são  $A_{\omega/2} = \frac{A_j}{2}$  e  $B_{\omega/2} = B_j = 0$ .

Ao invés de ajustar uma função periódica  $\sigma_{\tau}$  ao desvio padrão  $S_{\tau}$ , é ajustada uma função periódica  $\sigma_{\tau}^2$  à variância estimada  $S_{\tau}^2$  e, então, a função  $\sigma_{\tau}$  é determinada como igual a  $\sqrt{\sigma_{\tau}^2}$ . Este procedimento é justificado pelo significado mais sensível da média  $\sigma_x^2$  de  $\sigma_{\tau}^2$  ou  $S_{\tau}^2$  em relação à variância  $S_x^2$  de  $X_{p,\tau}$  do que  $\sigma_x$  a média de  $\sigma_{\tau}$  ou  $S_{\tau}$ , em relação ao desvio padrão  $S_x$  de  $X_{p,\tau}$ .

Neste trabalho, para a separação das componentes estocástica e periódica, foi adotado o método paramétrico, pelas seguintes justificativas:

a) A energia proveniente do Sol é um processo determinístico periódico. No entanto, os ambientes onde se processam os fenômenos hidrológicos (a atmosfera, os oceanos, os continentes, etc.) têm diferentes respostas a este suprimento de energia, introduzindo uma aleatoriedade no processo periódico pela modificação das amplitudes dos harmônicos e deslocamento dos respectivos ângulos de fase.

b) A aplicação do método paramétrico, por este motivo, es

tá de acordo com a hipótese básica da análise estrutural de ligar toda a aleatoriedade possível à componente estocástica.

- c) O processo de geração de séries temporais pelo método não paramétrico não é viável para intervalos de tempo menores que um mês, pois o número de parâmetros necessários para a descrição do modelo aumenta consideravelmente. Portanto, é aconselhável o uso do método paramétrico que economiza o número de estatísticos necessários para a descrição matemática das séries.

#### 1.5 - Significância de Harmônicos dos Parâmetros Periódicos

O número máximo de harmônicos em uma série mensal de um determinado parâmetro estatístico é 6. No entanto, como as séries de Fourier são rapidamente convergentes, na maioria das vezes, os harmônicos de ordem superior a quatro podem ser considerados como não significativos. Yevjevich (1972) apresenta alguns métodos desenvolvidos para testar a significância dos harmônicos.

No presente trabalho, foram empregados o método de Fisher para casos de componentes estocásticas dependentes e um método empírico.

##### a) Método de Fisher

Se a variância  $\sigma_x^2$  de  $X_{p,\tau}$  deve ser estimada a partir da amostra, então o teste de Fisher é aplicável para os casos das expressões (3.2) e (3.10). Com os coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  estimados por (3.13) e (3.14), é possível calcular as amplitudes dos respectivos harmônicos por

$$C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2} \quad (3.15)$$

É usado como parâmetro de teste o valor de  $\frac{C_j^2}{2}$  que mede a contribuição do harmônico de ordem  $j$  para a variância total. Se o valor de  $\frac{C_j^2}{2}$  de um dado harmônico não é maior do que um valor crítico  $\frac{C_c^2}{2}$  de um processo estocástico independente, então, este  $j$ -ésimo harmônico é considerado insignificante. Torna-se, portanto, necessária a distribuição amostral do parâmetro de teste  $\frac{C_j^2}{2}$ .

O teste de Fisher emprega o estatístico  $g$  definido por

$$g = \frac{C_{\max}^2}{2 S_x^2} = \frac{C_{\max}^2}{m \sum_{j=1} C_j^2} \quad (3.16)$$

onde  $m$  é o número total de harmônicos,  $S_x^2$  é a estimativa da variância  $\sigma_x^2$  da série  $X_{p,\tau}$ , no caso da equação (3.2), ou da série  $\ln X_{p,\tau}$ , no caso da equação (3.10), e  $C_{\max}$  é a máxima amplitude de uma sequência de valores  $C_j$ .

A probabilidade  $P$  de que o valor  $g$  da equação (3.16) seja excedido por um valor crítico  $g_c$  é dado por

$$P = m (1-g_c)^{m-1} - \frac{(m)(m-1)}{2} \cdot (1-2g_c)^{m-1} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} (1-kg_c)^{m-1} \quad (3.17)$$

onde  $k$  é o maior número inteiro menor do que  $1/g_c$ .

O primeiro termo do lado direito da equação (3.17), em geral, fornece uma boa aproximação para  $g_c$ , isto é

$$g_c = 1 - \left(\frac{P}{m}\right)^{1/(m-1)} \quad (3.18)$$

Se existirem dois ou mais harmônicos significativos, cada harmônico será computado isoladamente e subtraído da série. Assim, se  $C_{\max} = C_1$  foi considerado significativo para um grau de probabilidade  $P$ , o próximo passo é testar a significância de  $C_2$  com o novo valor de  $g$  dado por

$$g_2 = \frac{C_2^2}{2S_x^2 - C_1^2} \quad (3.19)$$

Igualmente, para o harmônico de ordem  $i$  (ordem decrescente de amplitude) tem-se

$$g_i = \frac{C_i^2}{2S_x^2 - \sum_{j=1}^{i-1} C_j^2} \quad (3.20)$$

O teste de Fisher é aplicável, segundo este procedimento, desde que  $\epsilon_{p,\tau}$  (caso da expressão 3.2) ou  $\ln \epsilon_{p,\tau}^*$  (caso da expressão 3.10) seja uma variável independente. No caso das vazões mensais esta exigência não é satisfeita, de forma que algumas considerações adicionais tornam-se necessárias.

Yevjevich (1972) propõe dois métodos de adaptação do teste de Fisher para variáveis estocásticas dependentes. Neste

trabalho foi adotado um destes procedimentos explicado a seguir. Se  $\varepsilon_{p,\tau}$  em (3.2) ou  $\ln \varepsilon_{p,\tau}$  em (3.10) é aproximadamente um processo normal dependente, então, pode supor-se que ele siga um modelo auto-regressivo linear de 1ª ordem, isto é

$$\varepsilon_{p,\tau} = \rho \varepsilon_{p,\tau-1} + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \xi_{p,\tau} \quad (3.21)$$

em que  $\rho$  é o coeficiente de autocorrelação de ordem 1 dos valores  $\varepsilon_{p,\tau}$ , e  $\xi_{p,\tau}$  é uma variável estocástica independente, ou

$$\ln \varepsilon_{p,\tau}^* = \rho^* \cdot \ln \varepsilon_{p,\tau-1}^* + \sqrt{1-\rho^{*2}} \cdot \xi_{p,\tau}^* \quad (3.22)$$

em que  $\rho^*$  é o coeficiente de autocorrelação de ordem 1 dos valores  $\ln \varepsilon_{p,\tau}^*$ , e  $\xi_{p,\tau}^*$  é uma variável estocástica independente. Este modelo de dependência será testado posteriormente, de acordo com o método a ser explicado no item (1.8) da seção (III.1).

As equações (3.2) e (3.10) podem ser reescritas como

$$X_{p,\tau} = \mu_\tau + \sigma_x (\rho \varepsilon_{p,\tau-1} + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \xi_{p,\tau}) \quad (3.23)$$

$$\ln X_{p,\tau} = \ln \mu_\tau + (\rho^* \cdot \ln \varepsilon_{p,\tau-1}^* + \sqrt{1-\rho^{*2}} \cdot \xi_{p,\tau}^*) \quad (3.24)$$

Os coeficientes  $\rho$  e  $\rho^*$  são estimados pelos coeficientes de autocorrelação de 1ª ordem da amostra  $r_1$  e  $r_1^*$ , respectivamente.

A partir de (3.23) ou (3.24) é definida uma série

$Z_{p,\tau}$  como

$$Z_{p,\tau} = X_{p,\tau} - \rho \sigma_x \cdot \varepsilon_{p,\tau-1} = \mu_\tau + \sigma_x \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \xi_{p,\tau} \quad (3.25)$$

ou

$$Z_{p,\tau} = \ln X_{p,\tau} - \rho^* \ln \varepsilon_{p,\tau-1}^* = \ln \mu_\tau + \sqrt{1 - \rho^{*2}} \cdot \xi_{p,\tau}^* \quad (3.26)$$

Verifica-se, portanto, que a nova variável  $Z_{p,\tau}$  reduz o problema ao caso de séries independentes. A variância de  $Z_{p,\tau}$  é

$$\text{Var } Z_{p,\tau} = (1 - \rho^2) \cdot \text{Var } X + \text{Var } \mu_\tau \quad (3.27)$$

Supondo que  $\mu_\tau = \mu_x$ , então  $\text{var } \mu_\tau = \frac{S_x^2}{n}$ , onde  $n$  é o número de anos. Então,

$$\text{Var } Z = (1 - r_1^2) S_x^2 + \frac{S_x^2}{n} \quad (3.28)$$

onde  $r_1$ , é a estimativa de  $\rho$  ou  $\rho^*$  e  $S_x^2$  é a estimativa de  $\text{Var } X$  ou  $\text{Var } (\ln X)$  para as expressões (3.25) ou (3.26), respectivamente.

#### b) Método empírico

Este método é aplicável à determinação de harmônicos significativos em parâmetros periódicos em casos mais complexos de composição de séries hidrológicas, como o da equação (3.11).

Um parâmetro periódico será designado por  $v_\tau$  e suas estimativas por  $V_\tau$ . Os desvios médios quadráticos dos valores da função harmônica em relação à média geral  $v_x$  de um parâmetro  $v_\tau$ , sendo  $h_j$  o símbolo do harmônico, serão designados pelas variâncias dos harmônicos  $\text{Var } h_j$ .

A razão

$$\Delta p_j = \frac{\text{Var } h_j}{S^2(V_\tau)} \quad (3.29)$$

mede a parte da variação de  $V_\tau$  que é explicada pelo  $j$ -ésimo harmônico. Da soma dos  $\Delta p_j$ ,  $j = 1, 2 \dots 6$  resulta  $p$ , a parte da variação dos  $V_\tau$  que é explicada pelos 6 harmônicos da função periódica.

O processo empírico consiste em estabelecer uma faixa de aceitação da significância dos harmônicos limitada por dois valores críticos,  $p_{\min}$  e  $p_{\max} = 1 - p_{\min}$ . Se  $p \leq p_{\min}$ , não existe nenhum harmônico significativo para o parâmetro  $v_\tau$ . Se  $p_{\min} < p \leq p_{\max}$ , todos os seis harmônicos são significativos. Se  $p > p_{\max}$ , apenas uma parte dos seis harmônicos é significativa. Neste caso, os harmônicos, classificados em ordem decrescente de variância, serão considerados significativos até o primeiro de uma determinada ordem  $j$  que fornecer  $\sum_{i=1}^j \Delta p_i > p_{\max}$ .

As expressões empíricas de  $p_{\min}$  e  $p_{\max}$  fornecidas por Yevjevich (1972) são:

$$p_{\min} = a \sqrt{\frac{\omega}{n}} \quad (3.30)$$

$$p_{\max} = 1 - a \sqrt{\frac{\omega}{n}} \tag{3.31}$$

onde  $\omega$  é o número de intervalos do ano,  $n$  é o número de anos e  $a$  é uma constante empírica tomada igual a 0,033.

### 1.6 - Análise Espectral

Um processo valioso para a identificação de periodicidades em séries hidrológicas é o da análise espectral.

O espectro  $C_{XX}(f)$  de um processo estocástico  $X(t)$  é definido como a transformada de Fourier da função autocovariância  $\gamma_{XX}(k)$ .

$$C_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}(k) e^{-j2\pi fk} dk \tag{3.32}$$

A função autocovariância pode ser expressa com a transformada inversa

$$\gamma_{XX}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{XX}(f) e^{j2\pi fk} df \tag{3.33}$$

O espectro da amostra demonstra como a variância do processo  $X(t)$  é distribuída ao longo da faixa de frequências, pois

$$\gamma_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{XX}(f) df = \sigma_X^2 \tag{3.34}$$

Se existirem periodicidades na série  $X(t)$ , elas aparecerão no espectro sob a forma de picos nas correspondentes frequências. As séries que oscilam rapidamente são caracterizadas por espectros que têm a maior parte de suas variâncias nas altas fre-

quências e aquelas que apresentam um comportamento suave são caracterizadas por espectros que têm a maior parte de suas variâncias nas baixas frequências.

Para um processo real discreto com amostra de tamanho  $n$ , a estimativa do espectro é dada por

$$C_{xx}(f) = \frac{1}{2} \left[ \gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \gamma(k) \cdot \cos k f \right] \quad (3.35)$$

Jenkins e Watts (1968) demonstraram que este estimador tem uma variância que não decresce com o tamanho  $n$  da amostra, de forma que deve ser introduzida uma modificação a fim de se obter um estimador consistente. O processo usado consiste essencialmente em transformar (3.35) para

$$\hat{C}_{xx}(f) = \frac{1}{m} (\gamma(0) \cdot D_0 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \gamma(k) D_k \cos fk + \gamma(m) D_m) \quad (3.36)$$

onde  $m$  é o intervalo máximo para a computação das autocovariâncias  $\gamma(k)$  e  $D_k$  são os coeficientes de Von Hann sugeridos por Blackman e Tuckey (1958) e dados pela fórmula

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi k}{m} \right) & |k| < m \\ &= 0 & |k| > m \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ao invés de se calcular a estimativa do espectro  $\hat{C}_{xx}(f)$  por (3.36), é equivalente fazer-se as transformadas de

Fourier das funções  $\gamma(k)$  e  $D_k$  e, em seguida, formar-se as combinações lineares das transformadas. Isto é possível devido a equivalência da multiplicação e convolução sob a transformada de Fourier.

As combinações lineares são dadas por

$$\hat{C}_{xx}(f) = \frac{1}{2} (L_0 + L_1)$$

$$\hat{C}_{xx}(f) = \frac{1}{4} \cdot L_{k-1} + \frac{1}{2} L_k + \frac{1}{4} L_{k+1} \quad 1 \leq k \leq m \quad (3.38)$$

$$\hat{C}_{xx}(f) = \frac{1}{2} (L_{m+1} + L_m)$$

onde  $L_k$  são as estimativas do espectro  $C_{xx}(f)$  dadas por (3.35).

### 1.7 - Testes de Hipóteses de Constância dos Parâmetros

De acordo com a hipótese básica (f) da análise estrutural de séries temporais hidrológicas, é desejável que um número mínimo de parâmetros ou coeficientes descrevam o modelo matemático da série hidrológica. Desta forma, é adotado um procedimento que consiste em testar a hipótese de que alguns parâmetros não sejam significativamente diferentes de uma constante, ao longo dos  $\omega$  intervalos do ano. Os testes mais usuais são os relativos aos coeficientes de variação, autocorrelação, assimetria e excesso.

Neste trabalho, somente foram testados os coeficientes de variação e autocorrelação mensais.

a) Teste para os coeficientes de variação

Além da possibilidade de simplificação na representação matemática da série hidrológica, o fato do coeficiente de variação não ser significativamente diferente de uma constante implica a composição das partes periódica e estocástica segundo a expressão (3.10).

O coeficiente de variação ( $V_{\tau}$ ), para cada intervalo  $\tau$ , é definido por

$$V_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\mu_{\tau}} \quad (3.39)$$

Quando os harmônicos significativos em  $\sigma_{\tau}$  e  $\mu_{\tau}$  têm as mesmas frequências e fases, e amplitudes proporcionais, o parâmetro  $V_{\tau}$  não é periódico. Isto não implica, no entanto, a independência da série  $V_{\tau}$ . Ao invés de testar a periodicidade de  $V_{\tau}$ , pode ser verificada a correção da hipótese de independência dos valores  $V_{\tau}$ , e se estes são significativamente iguais a uma constante.

O método aqui empregado consistiu em dividir os valores de  $V_{\tau}$  em duas ou quatro partes e testar a igualdade de suas médias e variâncias. Neste estudo, os coeficientes de variação mensais  $V_{\tau}$  foram divididos em duas populações: uma compreendendo os meses do período seco (abril-setembro) e a outra compreendendo os meses do período úmido (outubro-março).

O estatístico  $t$  definido como

$$t = \frac{(N-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (\Delta x - \epsilon_0)}{(S_1^2 + S_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.40)$$

onde  $N$  é o tamanho da amostra,  $\Delta x$  é a diferença entre as médias das duas amostras,  $\epsilon_0$  é a diferença entre as médias das duas populações,  $S_1^2$  e  $S_2^2$  são as variâncias das duas amostras, segue uma distribuição de Student com  $2N-2$  graus de liberdade dada por

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{N\pi}} \cdot \frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\Gamma(N/2)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{N}\right)^{-\frac{N+1}{2}} \quad (3.41)$$

Para a hipótese nula, as médias das duas populações são iguais, isto é,  $\mu_1 = \mu_2$  e  $\epsilon_0 = 0$ . Para um arbitrado grau de significância, se  $t$  é maior do que um valor crítico  $t_c$ , então a hipótese nula é rejeitada.

Sejam  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  e  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ,  $(m+n)$  variáveis aleatórias normais independentes  $N(0, \sigma)$ . As variáveis  $F$  e  $Z$  são definidas como

$$F = \frac{\sum_{j=1}^m \xi_j^2}{\sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (3.42)$$

e

$$e^{2Z} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \xi_j^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (3.43)$$

Se  $m = n$ , então

$$Z = \frac{1}{2} \ln F \quad (3.44)$$

A variável  $Z$  tem como distribuição de probabilidade

$$\phi(Z) = 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{\Gamma(m/2) \cdot \Gamma(n/2)}{\Gamma((m+n)/2)} \cdot \frac{e^{-mz}}{(me^{2Z} + n)^{(m+n)/2}} \quad (3.45)$$

A igualdade das variâncias de duas populações normais pode ser testada pelo cálculo das variáveis  $F$  e  $Z$ , e pela comparação desta última com um valor crítico  $Z_c$ . Se  $Z < Z_c$ , então, a hipótese nula é aceita, isto é,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Neste caso, o coeficiente de variação será uma constante definida por

$$\eta_0 = \frac{1}{\omega} \sum_{\tau=1}^{\omega} V_{\tau} \quad (3.46)$$

Caso contrário, isto é, se  $Z > Z_c$ , então  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ .

b) Teste para os coeficientes de autocorrelação

Os  $\omega$  coeficientes de autocorrelação  $\rho_{k,\tau}$  de  $\epsilon_{p,\tau}$  (ou  $\rho_{k,\tau}^*$  de  $\ln \epsilon_{p,\tau}^*$ ) são estimados a partir da amostra pelos coeficientes de autocorrelação  $r_{k,\tau}$  pela expressão

$$r_{k,\tau} = \frac{\sum_{p=1}^n (\epsilon_{p,\tau} - \bar{\epsilon}_{p,\tau}) (\epsilon_{p,\tau+k} - \bar{\epsilon}_{p,\tau+k})}{\left[ \sum_{p=1}^n (\epsilon_{p,\tau} - \bar{\epsilon}_{p,\tau})^2 \cdot \sum_{p=1}^n (\epsilon_{p,\tau+k} - \bar{\epsilon}_{p,\tau+k})^2 \right]^{1/2}} \quad (3.47)$$

para  $\tau = 1, 2, \dots, \omega$  e  $k = 1, 2, 3, \dots$

Para se verificar se os  $\omega$  coeficientes de autocorrelação  $r_{k,\tau}$  não são significativamente diferentes de uma constante, deve ser empregado uma técnica de separação da amostra, de forma a eliminar a correlação espúria proveniente da própria forma de cálculo dos coeficientes. O método consiste em separar os  $\omega$  valores de  $r_{k,\tau}$  em duas sub-amostras. Para  $k = 1$ , as duas sub-amostras serão constituídas por:

- a) todos  $r_{1,\tau}$  para os quais  $\tau$  é um número ímpar.
- b) todos  $r_{1,\tau}$  para os quais  $\tau$  é um número par.

Para  $k = 2$ , as duas sub-amostras serão constituídas por:

- a) todos  $r_{2,\tau}$  partindo com  $r_{2,1}$  e incluindo dois valores consecutivos de  $r_{2,\tau}$  com os dois próximos sendo omitidos. Assim, a primeira sub-amostra será constituída por  $r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,5}, r_{2,6}, \dots$
- b) todos  $r_{2,\tau}$  partindo com  $r_{2,3}$  e incluindo dois valores consecutivos de  $r_{2,\tau}$  com os dois próximos sendo omitidos. Assim, a segunda sub-amostra será constituída por  $r_{2,3}, r_{2,4}, r_{2,7}, r_{2,8}, \dots$

Os procedimentos para testes de igualdade das médias e variâncias das duas sub-amostras são idênticos aos do coeficiente de variação.

No caso dos coeficientes de autocorrelação mensais

$r_{1,\tau}$  serem significativamente constantes, o coeficiente de auto-correlação de ordem 1 da série  $\epsilon_{p,\tau}$  pode ser estimado por

$$\rho_1 = \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} r_{1,\tau} \quad (3.48)$$

### 1.8 - Modelos de Dependência da Componente Estocástica

As séries de vazões apresentam, em geral, componentes estocásticas que são séries temporais dependentes. A variável  $y_{p,\tau}$  obtida pela remoção da periodicidade na média e no desvio padrão é, aproximadamente, uma série temporal estacionária de 2ª ordem. Para padronizá-la, deve ser feita a transformação

$$\epsilon_{p,\tau} = \frac{y_{p,\tau} - \bar{y}}{S_y} \quad (3.49)$$

onde  $\bar{y}$  é o valor esperado de  $y_{p,\tau}$  estimado pela média da amostra e  $S_y$  é a estimativa de  $\sigma_y$ .

A dependência pode ser descrita satisfatoriamente por um modelo linear auto-regressivo. Para sua conceituação, seja um processo estocástico tendo como uma realização a série discreta  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . A covariância entre  $Z_t$  e  $Z_{t+k}$  é chamada de autocovariância de ordem  $k$  e é definida por

$$\gamma_k = \text{cov} [Z_t, Z_{t+k}] = E [(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \quad (3.50)$$

Se o processo é estacionário, a autocorrelação de ordem  $k$  é definida por

$$\rho_k = \frac{Y_k}{Y_0} \quad (3.51)$$

Sejam  $\tilde{z}_t, \tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}, \dots$ , os desvios de  $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$  em relação à média  $\mu$ . Então,

$$\tilde{z}_t = \theta_1 \tilde{z}_{t-1} + \theta_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \theta_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (3.52)$$

onde  $a_t$  é um processo aleatório independente, é chamado um processo auto-regressivo de ordem  $p$ .

O operador  $B$  definido por

$$B z_t = z_{t-1} \quad (3.53)$$

provoca um deslocamento negativo de uma unidade de tempo.

O operador auto-regressivo de ordem  $p$  é definido por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p \quad (3.54)$$

O modelo auto-regressivo pode ser representado simplifadamente por

$$\theta(B) \cdot z_t = a_t \quad (3.55)$$

Pela multiplicação de (3.52) por  $\tilde{z}_{t-k}$ , obtem-se

$$\tilde{z}_{t-k} \cdot \tilde{z}_t = \theta_1 \tilde{z}_{t-k} \cdot \tilde{z}_{t-1} + \theta_2 \tilde{z}_{t-k} \cdot \tilde{z}_{t-2} + \dots + \theta_p \tilde{z}_{t-k} \cdot \tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k} \cdot a_t \quad (3.56)$$

Tomando-se os valores esperados de (3.56) resulta

$$\gamma_k = \theta_1 \gamma_{k-1} + \theta_2 \gamma_{k-2} + \dots + \theta_p \gamma_{k-p} \quad (3.57)$$

Dividindo-se (3.57) por  $\gamma_0$ , resulta a função auto correlação

$$\rho_k = \theta_1 \rho_{k-1} + \theta_2 \rho_{k-2} + \dots + \theta_p \rho_{k-p} \quad (3.58)$$

A solução geral desta equação é

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + \dots + A_p G_p^k \quad (3.59)$$

onde  $G_1^{-1}$ ,  $G_2^{-1}$ , ...,  $G_p^{-1}$  são as raízes da equação característi  
ca

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_p B^p = 0 \quad (3.60)$$

No caso particular de um processo auto-regressivo de  
1ª ordem, (3.52) se reduz a

$$\tilde{z}_t = \theta_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t \quad (3.61)$$

A função autocorrelação deve satisfazer à equação

$$\rho_k = \theta_1 \rho_{k-1} \quad (3.62)$$

Como  $\rho_0 = 1$ , (3.62) se transforma para

$$\rho_k = \theta_1^k \quad (3.63)$$

Em particular  $\rho_1 = \theta_1$ , em consequência

$$\rho_k = \rho_1^k \quad (3.64)$$

Para a série estocástica  $\varepsilon_{p,\tau}$  o modelo auto-regressivo de 1ª ordem se escreve como

$$\varepsilon_{p,\tau} = \theta_1 \varepsilon_{p,\tau-1} + \sqrt{1 - \theta_1^2} \cdot \xi_{p,\tau} \quad (3.65)$$

onde  $\xi_{p,\tau}$  é uma variável aleatória padronizada, independente e estacionária de 2ª ordem.

A escolha da ordem  $m$  do modelo auto-regressivo de dependência é feita pela medida de desajustamento grau de ajustamento. Yevjevich (1972) propõe um método simplificado que foi o adotado no presente trabalho.

São calculados os valores dos coeficientes de determinação  $R_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$ , que medem a parte da variância total de  $\varepsilon_{p,\tau}$  explicada em cada um dos termos do esquema auto-regressivo, com excessão do termo  $\sqrt{1 - \theta_1^2} \cdot \xi_{p,\tau}$ . Como  $R_m^2 > \dots > R_3^2 > R_2^2 > R_1^2$ , o cálculo destes coeficientes pode servir como um critério de escolha da ordem  $m$ .

Como exemplo considere-se a escolha da ordem do modelo auto-regressivo dentre as três primeiras. Os coeficien-

tes de determinação são

$$R_1^2 = \rho_1^2 \quad (3.66)$$

$$R_2^2 = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1^2 \rho_2}{1 - \rho_1^2} \quad (3.67)$$

$$R_3^2 = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + 2\rho_1^2 \rho_3 + 2\rho_1^2 \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2^2 \rho_3 - 2\rho_1^2 \rho_2 - 4\rho_1 \rho_2 \rho_3 - \rho_1^4 - \rho_2^4 - \rho_1^2 \rho_3^2}{1 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1^2 \rho_2} \quad (3.68)$$

Se  $R_2^2 - R_1^2 \leq 0,01$  e  $R_3^2 - R_1^2 \leq 0,02$ , é selecionado o modelo de 1ª ordem. Se  $R_2^2 - R_1^2 > 0,01$  mas  $R_3^2 - R_2^2 \leq 0,01$ , é selecionado o modelo de 2ª ordem. Se  $R_2^2 - R_1^2 > 0,01$  e  $R_3^2 - R_2^2 > 0,01$ , é selecionado o modelo de 3ª ordem.

Caso o modelo selecionado seja de 1ª ordem, a série de valores da componente estocástica independente é obtida por

$$\xi_{p,\tau} = \frac{\epsilon_{p,\tau} - \theta_1 \epsilon_{p,\tau-1}}{\sqrt{1 - \theta_1^2}} \quad (3.69)$$

com  $\theta_1 = \rho_1$  ou  $\theta_1 = r_{1,\epsilon}$ .

### 1.9 - Ajustamento de Distribuições de Probabilidade à Componente Estocástica Independente

Uma vez conhecida a série estocástica independente  $\xi_{p,\tau}$ , resta o ajustamento de um modelo matemático para o seu comportamento aleatório. Neste trabalho, foram experimentados os ajustamentos de três tipos de distribuição de probabilidade: normal, lognormal de três parâmetros e gama de três parâmetros.

a) Normal: cálculo dos parâmetros e testes de ajustamento

A função densidade de probabilidade normal de uma variável aleatória  $x$  é

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.70)$$

onde  $\mu$  é a média e  $\sigma^2$  é a variância de  $x$ . Para a série  $\xi_{p,\tau}^r$ , estes dois parâmetros são estimados pelo Método dos Momentos por

$$\mu = \bar{\xi} = \frac{1}{n\omega} \sum_{p=1}^n \sum_{\tau=1}^{\omega} \xi_{p,\tau} \quad (3.71)$$

$$\sigma^2 = S_{\xi}^2 = \frac{1}{n\omega} \sum_{p=1}^n \sum_{\tau=1}^{\omega} (\xi_{p,\tau} - \bar{\xi})^2 \quad (3.72)$$

A escolha de apenas uma distribuição, como a representação matemática do comportamento de variável  $\xi_{p,\tau}$ , exige um instrumento para a medida do grau de ajustamento de cada curva resultante. O processo usado consistiu da aplicação de testes, como o qui-quadrado e o Smirnov-Kolmogorov.

Para a formalização do teste qui-quadrado, considere-se uma variável contínua dividida em  $k$  intervalos de classe mutuamente exclusivos. Sejam  $f_i$ ,  $i = 1, 2 \dots k$  as frequências relativas destes intervalos de classe para uma dada amostra de tamanho  $N$  e sejam  $p_i$ ,  $i = 1, 2 \dots k$  as probabilidades dos intervalos de classe para a função distribuição teórica.

O parâmetro

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Nf_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (3.73)$$

tem uma distribuição qui-quadrada com  $k-r-1$  graus de liberdade, para um  $N$  suficientemente grande, sendo  $r$  o número de parâmetros.

O teste qui-quadrado compara o valor do qui-quadrado de uma dada amostra com um valor crítico  $\chi_0^2$ . Para um determinado grau de significância, se  $\chi^2 \leq \chi_0^2$ , a hipótese nula é de bom ajustamento e é aceita, e em caso contrário, ela é rejeitada.

Os comprimentos dos intervalos de classe podem ser iguais ou desiguais. No último caso, é usual escolher os intervalos de tal forma que tenham a mesma probabilidade de ocorrência, o que implica um cálculo a priori de seus limites.

Se forem escolhidos  $k$  intervalos de classe com probabilidades iguais a  $1/k$ , no caso de uma distribuição normal padronizada, cada um dos  $k-1$  limites  $t_j$  é determinado pelo inverso da integral

$$\frac{j}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_j} e^{-t^2/2} dt, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (3.74)$$

Para a solução da equação foi usado o método de Newton. Para uma dada probabilidade acumulada  $A$  o limite superior do intervalo  $t_j$  será dado pela recursão

$$(t_j)_{n+1} = (t_j)_n - \frac{y(t_n)}{y'(t_n)} \quad (3.75)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_j} e^{-t^2/2} dt - A \quad (3.76)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \quad (3.77)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2_j/2} \quad (3.78)$$

Quando a série  $\xi_{p,\tau}$  não é padronizada, deve-se fazer uma prévia transformação

$$t_{p,\tau} = \frac{\xi_{p,\tau} - \bar{\xi}}{S_{\xi}} \quad (3.79)$$

onde  $\bar{\xi}$  e  $S_{\xi}$  são estimativas da média e do desvio padrão de  $\xi_{p,\tau}$ .

Os fundamentos do teste Smirnov-Kolmogorov são explicados a seguir. Considere-se uma amostra com valores em ordem decrescente  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Seja a posição de plotagem de  $x_m$  dada por

$$p(x_m) = \frac{m}{N+1} \quad (3.80)$$

e o valor da função distribuição ajustada por  $F(x_m)$ . O estatístico  $\Delta$  definido por

$$\Delta = \max |F(x) - p(x_i)| \quad (3.81)$$

tem uma distribuição amostral. Para um grau de significância  $\alpha$

para o erro do tipo I, define-se o valor crítico  $\Delta_0$  por

$$P \{ \max |F(x) - p(x_i)| \geq \Delta_0 \} = \alpha \quad (3.82)$$

O estatístico  $\Delta$  calculado por (3.81) é então comparado com  $\Delta_0$ . Se  $\Delta > \Delta_0$ , a hipótese nula é rejeitada.

b) Lognormal de três parâmetros: cálculo dos parâmetros e testes de ajustamento.

Quando os logaritmos de uma variável  $x$  são normalmente distribuídos, então, a variável  $x$  é dita obedecer a uma distribuição lognormal, cuja função densidade é

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu_n}{\sigma_n} \right)^2 \right] \text{ para } x \geq 0 \quad (3.83)$$

onde  $\mu_n$  e  $\sigma_n$  representam, respectivamente, a média e o desvio padrão de  $\ln x$ .

Existem as seguintes relações entre os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  de  $x$  e  $\mu_n$  e  $\sigma_n$  de  $\ln x$  para uma distribuição lognormal:

$$\mu_n = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\mu^2}{\eta^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\mu^4}{\mu^2 + \sigma^2} \right) \quad (3.84)$$

$$\sigma_n = \ln (\eta^2 + 1) = \ln \left( \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) \quad (3.85)$$

Se o limite inferior da variável  $x$  não é zero (caso da série  $\xi_{p,\tau}$ ), então, é necessário modificar-se a função dis

tribuição lognormal pela introdução de um terceiro parâmetro  $\beta$ , o limite inferior. Assim, a função densidade lognormal de três parâmetros é

$$f(x) = \frac{1}{(x-\beta) \sigma_n \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ - \frac{[\ln (x-\beta) - \mu_n]^2}{2 \sigma_n^2} \right\} \quad (3.86)$$

onde  $\mu_n$  e  $\sigma_n$  são definidos pelas equações (3.84) e (3.85) para a variável transformada  $(x-\beta)$ .

O problema da estimativa dos parâmetros de uma lognormal de três parâmetros é que o seu limite inferior  $\beta$  não é conhecido a priori. Existem dois métodos de estimativa: o dos Momentos e o da Máxima Vero-semelhança.

O método da Máxima Vero-semelhança consiste em resolver por algum método iterativo uma equação não linear, que representa a expressão da Máxima Vero-semelhança do parâmetro  $\beta$ .

O método adotado no presente trabalho foi o dos Momentos, cujo procedimento é o seguinte. A adição ou a subtração de uma constante a uma variável não modifica a sua variância, mas modifica a média  $\mu$ , o que implica também uma mudança do coeficiente de variação  $\eta$  e de todos os parâmetros que dependam de  $\mu$  e  $\eta$ . Com os coeficientes de variação da variável original  $\eta_x = \frac{\sigma}{\mu_x}$  e da variável transformada  $\eta = \frac{\sigma}{\mu}$ , sendo

$$\mu = \mu_x - \beta \quad (\beta > 0) \quad (3.87)$$

obtem-se  $\beta$  pela eliminação de  $\sigma$ :

$$\beta = \mu_x \left(1 - \frac{\eta_x}{\eta}\right) \quad (3.88)$$

Como os momentos centrais de 2ª e 3ª ordem são independentes de  $\beta$ , é possível calcular este parâmetro, a partir da assimetria  $\gamma_1$  computada para  $x$ , por meio de uma expressão válida para a distribuição lognormal,

$$\gamma_1 = \eta^3 + 3\eta \quad (3.89)$$

A solução algébrica desta equação cúbica é

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + 4} + \gamma_1}{2} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[ \frac{-\sqrt{\gamma_1^2 + 4} + \gamma_1}{2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.90)$$

Os parâmetros  $\mu_n$  e  $\sigma_n$  da lognormal de três parâmetros podem então ser calculados por (3.84) e (3.85) para a variável  $(x-\beta)$ , sendo  $\beta$  resultante de (3.88).

O teste qui-quadrado é realizado com um procedimento análogo ao da distribuição Normal. A série  $\xi_{p,\tau}$ , no entanto, deve ser padronizada pela expressão

$$t_{p,\tau} = \frac{\ln(\xi_{p,\tau} - \beta) - \mu_n}{\sigma_n} \quad (3.91)$$

O teste Smirnov-Kolmogorov é realizado com um procedimento igual ao da distribuição Normal.

c) Gama de três parâmetros: cálculo dos parâmetros e testes de ajustamento.

A função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left( \frac{x - \xi_0}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left[ - \frac{(x - \xi_0)}{\beta} \right] \quad (3.92)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de forma,  $\beta$  o coeficiente de escala e  $\xi_0$  o coeficiente de posição.

Para a estimativa dos três parâmetros da distribuição podem ser usados o método dos Momentos e o da Máxima Vero-similaridade. Neste estudo, foi usado o segundo método, que é o mais preciso quando a distribuição dos valores verificados é muito assimétrica.

A estimativa de Máxima Vero-similaridade do coeficiente de posição  $\xi_0$  é a solução da equação

$$\frac{1 + (1 + \frac{4}{3} \cdot A)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 + \frac{4}{3} A)^{\frac{1}{2}} - 4A} - (\bar{\xi} - \xi_0) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\xi_i - \xi_0} = 0 \quad (3.93)$$

onde  $\bar{\xi}$  é a média dos  $N$  valores de  $\xi_i$  e

$$A = \frac{4}{3} \left[ \ln(\bar{\xi} - \xi_0) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\xi_i - \xi_0) \right] \quad (3.94)$$

Conhecido  $\xi_0$ , o parâmetro  $\alpha$  é estimado por

$$\alpha = \frac{1 + (1 + \frac{4}{3} A)^{\frac{1}{2}}}{4A} - \Delta\alpha \quad (3.95)$$

onde A é dado por (3.94) e

$$\Delta\alpha \cong 0,04475 \cdot (0,26)^\alpha \quad (3.96)$$

O parâmetro  $\beta$  é estimado por

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - \xi_0) = \frac{1}{\alpha} (\bar{\xi} - \xi_0) \quad (3.97)$$

A solução da equação não linear (3.93) pode ser determinada por um processo iterativo de cálculo de raízes. Neste estudo, foi usado o método de Newton. A raiz de (3.93) é, então, obtida da seqüência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.98)$$

onde  $x_n$  e  $x_{n+1}$  são os valores da raiz de  $f$  nas iterações  $n$  e  $n+1$ ,  $f(x)$  é a função que se quer anular, e  $f'(x)$  a sua derivada.

Fazendo

$$y = \frac{1 + (1 + \frac{4}{3} A)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 + \frac{4}{3} A)^{\frac{1}{2}} - 4 A} - (\bar{\xi} - \xi_0) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\xi_i - \xi_0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.99)$$

$$y' = \frac{dy}{d\xi_0} \quad (3.100)$$

$\xi_0$  é obtida da recursão (3.98) escrita sob a forma

$$(\xi_0)_{n+1} = (\xi_0)_n - \frac{y[(\xi_0)_n]}{y'[(\xi_0)_n]} \quad (3.101)$$

Mas,

$$\frac{dy}{d\xi_0} = \frac{\partial y}{\partial \xi_0} + \frac{\partial y}{\partial A} \cdot \frac{dA}{d\xi_0} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_0} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\xi_i - \xi_0)} - (\bar{\xi} - \xi_0) \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\xi_i - \xi_0)^2} \right] \quad (3.103)$$

Por outro lado, fazendo

$$\left[ 1 + \left( 1 + \frac{4}{3} A \right)^{\frac{1}{2}} \right] = B \quad (3.104)$$

Substituindo (3.104) em (3.99),

$$y = \frac{B}{B - 4A} - (\bar{\xi} - \xi_0) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\xi_i - \xi_0} \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{4}{3} A \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{3} \right) (B - 4A) - \right.$$

$$\left. - B \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{4}{3} A \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{3} - 4 \right) \right] \div \frac{1}{(B - 4A)^2} \quad (3.106)$$

$$\frac{dA}{d\xi_0} = \frac{-1}{(\bar{\xi} - \xi_0)} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\xi_i - \xi_0} \quad (3.107)$$

Substituindo (3.103), (3.106) e (3.107) em (3.102) resulta o valor de  $dy/d\xi_0$ . A nova aproximação para  $\xi_0$  é obti-

da pela substituição de (3.99) e (3.102) em (3.101).

O coeficiente de forma  $\alpha$  também foi calculado pela aplicação do método de Newton, usando a relação

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{y(\alpha_n)}{y'(\alpha_n)} \quad (3.108)$$

sendo

$$y = \alpha + 0,04475 \cdot (0,26)^\alpha - \frac{1 + (1 + \frac{4}{3} A)^{\frac{1}{2}}}{4A} = 0 \quad (3.109)$$

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} \quad (3.110)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 1 + 0,04475 \cdot 0,26 \cdot \alpha \cdot \ln \alpha \quad (3.111)$$

Pela substituição dos valores de (3.109) e (3.111) em (3.108), obtem-se o próximo valor de  $\alpha$ .

Conhecendo-se  $\alpha$  e  $\xi_0$ , é possível calcular-se diretamente de (3.97) o coeficiente de escala  $\beta$ .

No teste qui-quadrado, os  $k$  limites de intervalos  $x_j$  da distribuição gama de um parâmetro são determinados pelo inverso da integral

$$\frac{j}{k} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_j} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (3.112)$$

$$j = 1, 2, \dots, k-1$$

Para a solução de (3.112) foi usado o método de New

ton. Para uma dada probabilidade acumulada  $A$ , o limite superior do intervalo  $x_j$  resulta de

$$(x_j)_{n+1} = (x_j)_n - \frac{y [(x_j)_n]}{y' [(x_j)_n]} \quad (3.113)$$

$$y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_j} x^{\alpha-1} e^{-x} dx - A \quad (3.114)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (3.115)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.116)$$

O segundo membro da expressão (3.116) não pode ser calculado diretamente, pois envolve parcelas de valores muito grandes que estão, em muitos casos, acima da capacidade do computador para uma variável. Assim, deve ser feita a transformação

$$\ln \left( \frac{dy}{dx} \right) = (\alpha-1) \ln x - x - \ln \Gamma(\alpha) \quad (3.117)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2) \dots \times \Gamma(k+1), \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (3.118)$$

Para o cálculo de  $\Gamma(k+1)$  foi usada a expressão apresentada em Abramowitz e Stegun (1965)

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) = & 1 - 0,5748646 \cdot k + 0,9512363 \cdot k^2 - 0,6998588 \cdot k^3 + \\ & + 0,4245549 \cdot k^4 - 0,1010678 \cdot k^5 \end{aligned} \quad (3.119)$$

A transformação de (3.118) resulta em

$$\ln \Gamma(\alpha) = \ln(\alpha-1) + \ln(\alpha-2) + \dots + \ln \Gamma(k+1) \quad (3.120)$$

Com os valores de (3.119) e (3.120), é possível calcular (3.117). Finalmente

$$\frac{dy}{dx} = e^{\ln(dy/dx)} \quad (3.121)$$

A série  $\xi_{p,\tau}$  deve ser previamente transformada pela relação

$$t_{p,\tau} = \frac{\xi_{p,\tau} - \xi_0}{\beta} \quad (3.122)$$

Para o teste Smirnov-Kolmogorov os valores da distribuição gama correspondentes a cada  $\xi_{p,\tau}$  são obtidos pela utilização de um sub-programa.

### III.2 - PERÍODO CRÍTICO

Para a determinação do período crítico de seqüências de vazões, histórica ou sintética, do reservatório estudado foram adotadas as seguintes hipóteses:

- a) A capacidade máxima de armazenamento foi considerada constante, isto é, não foi prevista qualquer reserva para controle de cheia;

- b) As perdas por evaporação foram consideradas desprezíveis;
- c) Não foram considerados fatores de sazonalidade na demanda;
- d) Não foi considerada a restrição de descarga mínima efluente para a navegação, pois as energias firmes produzidas na usina para todas as séries de vazões estudadas corresponderam a valores de descarga bem maiores do que a mínima exigida de  $300 \text{ m}^3/\text{seg}$  ;

Define-se energia firme de uma usina com reservatório, para uma certa sequência de vazões afluentes, como a máxima potência produzida continuamente nesta usina, sem a ocorrência de deficit de armazenamento.

Tendo em vista estas hipóteses, a equação de recursão (2.2) se escreve

$$S_{i+1} = S_i + y_i - x \quad (3.123)$$

sujeita à restrição

$$S_{i+1} \leq S_{\max} \quad (3.124)$$

onde  $S_{i+1}$  e  $S_i$  são os volumes armazenados nos meses  $i + 1$  e  $i$ ,  $y_i$  é a afluência durante o mês  $i$ ,  $x$  é a energia firme (no caso de geração de energia) e  $S_{\max}$  é a capacidade máxima de armazenamento.

O método empregado consiste em arbitrar-se inicial-

mente um valor  $x$  para a energia firme e operar o reservatório segundo a recursão (3.123). Se o valor  $x$  conduzir a um deficit durante o período simulado, o algoritmo atua no sentido de distribuir, uniformemente, este deficit ao longo do intervalo de tempo compreendido entre o instante em que o reservatório esteve cheio pela última vez, até o instante em que se verificou o maior deficit. O valor da energia firme é incrementado de uma parcela  $\Delta x$  (negativa), e a simulação é repetida para a energia firme  $x + \Delta x$ . O mesmo procedimento é seguido quando, para o valor arbitrado  $x$ , o reservatório não esvaziar em nenhuma ocasião ao longo da sequência completa de afluências. Neste caso, a correção  $\Delta x$  é positiva.

O processo descrito é realizado iterativamente até que seja atingido um grau de precisão arbitrado.

### III.3 - MODELO DE OTIMIZAÇÃO

O modelo de otimização desenvolvido baseou-se na aplicação dos princípios da programação dinâmica. A escolha desta técnica pode ser explicada pela não linearidade da função objetivo, o que impossibilita o uso da programação linear. Para uma melhor compreensão do modelo, é conveniente fazer-se um rápido retrospecto de alguns conceitos e princípios da programação dinâmica. Assim, são conceituados:

*Estágio ( $k$ ) - é uma variável discreta que indica a ordem em que ocorrem modificações no sistema.*

$$k = 0, 1, 2 \dots N$$

Define-se ainda os conjuntos de estágios  $K$  e  $K'$  por  
 $K = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  e  $K' = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$

Estado ( $x$ ) - é uma variável que descreve completamente o sistema, num dado estágio. A notação  $x(k)$  indica que o estado  $x$  ocorreu no estágio  $k$ .

Decisão ( $u$ ) - é uma variável que, aplicada ao sistema quando este se encontra no estado  $x(k)$ , o conduzirá a um determinado estado  $x(k+1)$  no estágio seguinte. A notação  $u(k)$  significa que a decisão  $u$  foi tomada no estágio  $k$ .

Conjunto de estados viáveis ( $X(k)$ ) - é o conjunto dos estados que  $x$  pode assumir no estágio  $k$ .

Conjunto de decisões admissíveis ( $U(x, k)$ ) - é o conjunto das decisões que podem atuar sobre o sistema quando ele se encontra no estágio  $k$  e no estado  $x \in X(k)$ .

Equação recursiva do sistema ( $f$ ) - é uma equação que relaciona o estado num dado estágio, a decisão aplicada a este estado e o estado resultante.

Ganho elementar ( $g$ ) devida à atuação da decisão admissível  $u$  ao sistema, quando este se encontra no estágio  $k$ , e no estado viável  $x$  é a função

$$g : (x(k), u(k), k) \rightarrow g(x(k), u(k), k)$$

Política admissível aplicada a

$$x(k_0) \in X(k_0), \quad k_0 \in K'$$

é uma sequência de decisões  $[u(k)]_{k_0}^{N-1}$  tal que,

$$u(k) \in U(x(k), k) \quad e. \quad x(k) \in X(k)$$

Ao conjunto de políticas admissíveis em  $\bar{x} \equiv x(k_0)$  notamos por  $\Omega(\bar{x}, k_0)$ .

Critério ou objetivo - é a função  $J$  tal que

$$J : (x(k_0), [u(k)]_{k_0}^{N-1}, k_0) \mapsto \sum_{k=k_0}^{N-1} g(x(k), u(k), k),$$

onde  $[u(k)]_{k_0}^{N-1} \in \Omega(x(k_0), k_0)$  e

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, N-1$$

Um problema de programação dinâmica é formulado como a determinação, se existir, de uma política admissível  $[\bar{u}(k)]_0^{N-1}$  que, aplicada a  $x(0)$ , leva o sistema ao estágio  $N$ , minimizando (ou maximizando) o valor da função objetivo, isto é:

$$J(x(0), [\bar{u}(k)]_0^{N-1}, 0) = \min J(x(0), [u(k)]_0^{N-1}, 0)$$

$$[u(k)]_0^{N-1} \in \underline{\Omega}(x(0), 0)$$

A solução do problema de programação dinâmica se baseia no princípio de otimalidade de Bellman (1965), que pode ser enunciado da seguinte forma: Se  $[\bar{u}(k)]_{k_0}^{N-1} \quad k_0 \leq k \leq N$  é uma política ótima, considerando-se  $x(k_0)$  como estado inicial, então  $[\bar{u}(k)]_{k_0+1}^{N-1}$  será uma política ótima considerando-se  $x(k_0+1) \equiv f(x(k_0), \bar{u}(k_0), k_0)$  como estado inicial.

É possível

É possível agora formular o problema do reservatório

deste estudo da seguinte maneira. Partindo-se com o reservatório

rio totalmente cheio e conhecida uma seqüência de vazões críticas afluentes, qual a melhor forma de deplecionar o volume armazenado com a finalidade de produção de energia, estando o sistema sujeito a uma restrição de descarga mínima a jusante.

Matematicamente o problema pode ser formalizado do seguinte modo:

Obter o conjunto de decisões  $Q_i$  que satisfaçam à função objetivo

$$\max E = \sum_{i=1}^K E_i \quad (3.125)$$

onde  $K$  é o tamanho do período crítico e  $E_i$  é o ganho de energia no estágio  $i$  calculado por

$$E_i = 1\,000 \, \eta \, Q_i \, H_i \quad (3.126)$$

sendo  $\eta$  o rendimento do conjunto turbina-gerador,  $Q_i$  a descarga turbinada em  $m^3/\text{seg}$  no estágio  $i$  e  $H_i$  é a altura de queda líquida em metros no estágio  $i$  dada por

$$H_i = CR_i - CF_i \quad (3.127)$$

onde  $CR_i$  é a cota do reservatório no estágio  $i$  calculada por meio da curva cota-volume e  $CF_i$  é a cota do canal de fuga obtida por meio de uma curva chave em função da descarga efluente total  $EFL_i$ .

A equação recursiva dos estados é:

$$S_i = S_{i-1} + X_i - Q_i \quad (3.128)$$

onde  $S_i$  e  $S_{i-1}$  são os volumes do reservatório nos estágios  $i$  e  $i-1$ , respectivamente, e  $X_i$  é a afluência natural no estágio  $i$ .

As restrições são:

$$1) \quad Q_{\min} \leq Q_i \leq Q_{\max} \quad (3.129)$$

onde  $Q_{\min}$  e  $Q_{\max}$  são os valores mínimo e máximo da descarga turbinada, respectivamente.

$$2) \quad S_{\min} \leq S_i \leq S_{\max} \quad (3.130)$$

onde  $S_{\min}$  e  $S_{\max}$  são os volumes mínimo e máximo do reservatório, respectivamente

Se  $S_i > S_{\max}$ , então faz-se  $S_i = S_{\max}$  e calcula-se o volume vertido por

$$\text{VERT}_i = X_i - Q_i \quad (3.131)$$

e a descarga efluente total por

$$\text{EFL}_i = Q_i + \text{VERT}_i \quad (3.132)$$

Quanto à aplicação do algoritmo da programação dinâmica na solução do problema, é interessante se ressaltar os seguintes aspectos:

- a) Como o problema real é contínuo e o método computacional é discreto, há necessidade de compatibilizar-se os

mesmos através de uma discretização dos estados (volumes do reservatório) e das decisões (descargas turbinadas).

- b) Se o intervalo de variação nas decisões não for compatível com o dos estados, poderão ocorrer situações em que a modificação de um intervalo na decisão não conduzirá a um estado diferente daquele alcançado pela decisão anterior. A situação oposta também é possível, isto é, a variação de um intervalo na decisão pode conduzir a um estado não vizinho daquele obtido pela decisão anterior. Portanto, deve ser feita uma análise preliminar a fim de se verificar quais intervalos de variação dos estados e decisões tornam compatíveis os dois conjuntos.
- c) Para qualquer estado e em qualquer estágio foram consideradas, a priori, todas as decisões  $Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$  como admissíveis.
- d) Em todos os estágios, com exceção do primeiro, o conjunto dos estados viáveis é obtido pelos estados  $S$ , tal que,  $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$ . No estágio inicial, o conjunto dos estados viáveis se resumiu apenas a um estado; aquele em que o reservatório está cheio. Isto foi conseguido tornando infinitamente negativo o ganho de energia para todos os estados diferentes de 100% da armazenagem.
- e) Quando em um determinado estado  $i$  de um certo estágio  $k$  é tomada uma decisão  $Q$  que conduz no estágio  $k + 1$  a um estado não viável  $S$ , o algoritmo atua no sentido de tornar tal decisão inadmissível. Isto é feito, atribuindo-se um valor infinitamente negativo ao ganho de energia.

### III.4 - ANÁLISE DE REGRESSÃO

Segundo o método implícito estocástico de otimização, utilizando a programação dinâmica, são obtidas políticas ótimas de operação do reservatório em períodos críticos gerados segundo o modelo resultante da análise estrutural da série de vazões. Desta forma, para se acabar com a variabilidade de soluções do problema, torna-se necessário obter apenas uma regra ótima, que leve em consideração a igual probabilidade de ocorrência dos diversos períodos críticos. O processo utilizado é o da análise de regressão.

Considerando-se, como variável dependente, a decisão ótima (X) de descarga turbinada durante o mês e, como variáveis independentes, o volume do reservatório no início do mês (Y) e a descarga afluyente durante o mês anterior (Z), procura-se estabelecer uma relação

$$X = F(Y, Z) \quad (3.133)$$

O efeito da sazonalidade foi levada em consideração, admitindo-se a existência de uma regressão para cada mês  $i$ , isto é

$$X_i = F_i(Y_i, Z_{i-1}) \quad (3.134)$$

O tipo da função  $F$  não é conhecida. É possível, no entanto, fazer-se diversas experimentações, com o objetivo de determinar a forma mais conveniente de adaptação de  $F$  aos valores verificados. As estimativas dos coeficientes da regressão são feitas pela aplicação do método dos Mínimos Quadrados.

Como não existe nenhuma indicação segura de quais devem ser as variáveis independentes a se considerar, torna-se necessária a pesquisa do tipo de regressão a ser usada. Por isto, são indicadas as tentativas dos ajustamentos de regressões em que o conjunto das variáveis independentes envolva potências das variáveis consideradas básicas para a operação do reservatório. Assim, podem ser experimentadas regressões em que figuram, por exemplo, os quadrados e os cubos dos volumes armazenados e das descargas afluentes.

## IV - CASO DE APLICAÇÃO

### IV.1 - DADOS E INFORMAÇÕES GERAIS

O método implícito estocástico de otimização foi aplicado ao reservatório de Três Marias, situado no rio São Francisco (figura IV-1), pertencente às Centrais Elétricas de Minas Gerais S.A. - CEMIG. A jusante, encontra-se a localidade de Pirapora, onde são exigidos níveis compatíveis com a navegação fluvial, de forma que a usina de montante deve garantir uma descarga mínima. O valor estabelecido para esta descarga, retirado do relatório da ELETROBRÁS (1974), foi de 300 m<sup>3</sup>/seg. Da mesma fonte ainda foram obtidos os seguintes dados da usina e do reservatório:

#### 1 - Curva Cota-Volume:

$$\begin{aligned} CR &= 0,531600 \times 10^3 + 0,391850 \times 10^{-2} \cdot V - \\ &- 0,192820 \times 10^{-6} \cdot V^2 + 0,627730 \times 10^{-11} \cdot V^3 - \\ &- 0,898750 \times 10^{-16} \cdot V^4 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde CR é a cota do reservatório em metros e V é o seu volume em 10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>.

#### 2 - Curva Chave do Canal de Fuga:

$$\begin{aligned} CF &= 0,510030 \times 10^3 + 0,177530 \times 10^{-2} \cdot EFL - \\ &- 0,130000 \times 10^{-6} \cdot EFL^2 + 0,355470 \times 10^{-11} \cdot EFL^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

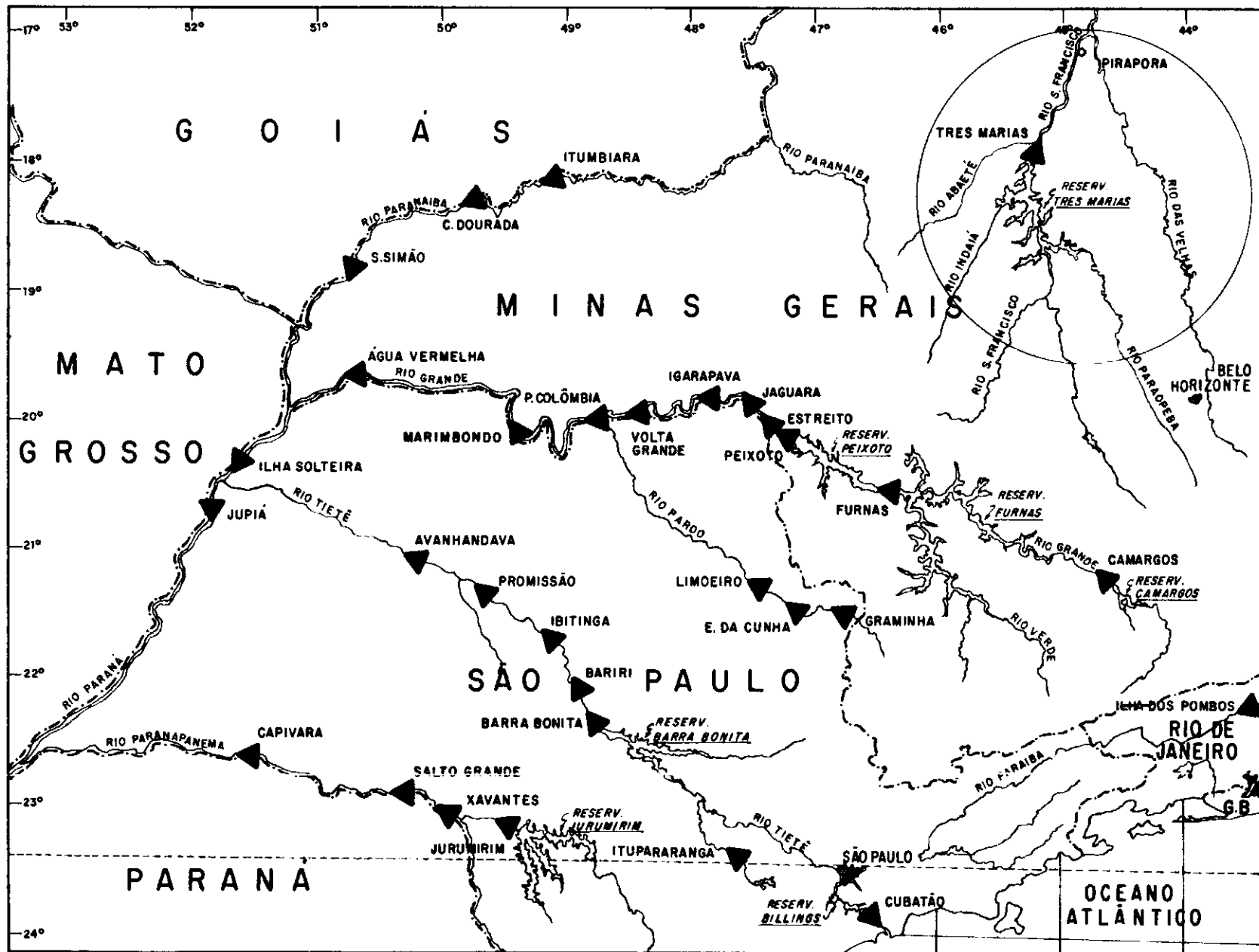


FIGURA IV · 1 - LOCALIZAÇÃO DAS PRINCIPAIS HIDROELÉTRICAS DA REGIÃO SUDESTE

- 19 -



onde CF é a cota do canal de fuga em metros e EFL é a descarga total efluente em  $m^3/\text{seg}$ .

- 3 - Volume Máximo Armazenado:  $20000 \times 10^6 m^3$
- 4 - Volume Mínimo Armazenado:  $5400 \times 10^6 m^3$
- 5 - "Engolimento" máximo das Turbinas:  $814 m^3/\text{seg}$ .
- 6 - Rendimento do Conjunto Turbina-Gerador: 0,88
- 7 - "Produtibilidade" Média:  $0,3981 MW/m^3/\text{seg}$ .
- 8 - Energia Máxima Armazenada: 3021,4 MW

Para análise estrutural da série de vazões mensais afluentes ao aproveitamento hidroelétrico foram usados os dados fornecidos pelo relatório da CANAMBRA (1966) para a estação de Três Marias, que constam de 29 anos de registros de 1931 a 1959.

Os estudos foram desenvolvidos em três etapas. Na primeira foi feito o programa da análise estrutural da série hidrológica que obtém, como resultado, o modelo matemático das vazões. A segunda etapa compreende um programa que usa este modelo para a geração de séries sintéticas de 30 anos de duração, determina os respectivos períodos críticos e otimiza a operação do reservatório nestes intervalos de tempo. Finalmente, na terceira etapa, é feita uma análise de regressão usando estes resultados num programa do SPSS (1970); a fim de se obter uma regra ótima de operação.

Para o primeiro programa foram gastos 2 min 49 seg de processamento; para o segundo 33 min 43 seg e para o terceiro

28,39 seg. O computador usado foi um sistema IBM/370 modelo 145 com 256 K de memória física e 1024 de memória virtual do Centro de Processamento de Dados da ELETROBRÁS.

## IV.2 - RESULTADOS

### 1 - Cálculo dos Estatísticos da Série de Vazões Mensais.

Para a série de vazões mensais foram computados os estatísticos que são estudados isoladamente na análise estrutural, ou sejam: média, variância, desvio padrão, coeficientes de assimetria, excesso e variação. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras IV.2, IV.3 e IV.4.

### 2 - Separação das Componentes Periódica e Estocástica.

Para a separação da componente periódica foi empregado o método paramétrico explicado na seção III.1. Na análise harmônica das médias e variâncias mensais foram calculados os coeficientes de Fourier pelas fórmulas (3.13) e (3.14), e as amplitudes dos respectivos harmônicos por (3.15). Os resultados são apresentados no Anexo 3.1. As significâncias dos harmônicos para os dois parâmetros foram testadas pelo processo empírico explicado na seção III.1. As faixas de aceitação da significância dos harmônicos foram calculadas por (3.30) e (3.31). Para os dois parâmetros resultaram os seguintes valores:

a) média :  $p_{\min} = 0,0181$  e  $p_{\max} = 0,9819$

b) variância :  $p_{\min} = 0,0128$  e  $p_{\max} = 0,9872$

Para as médias mensais foram encontrados dois harmônicos significativos correspondentes às frequências

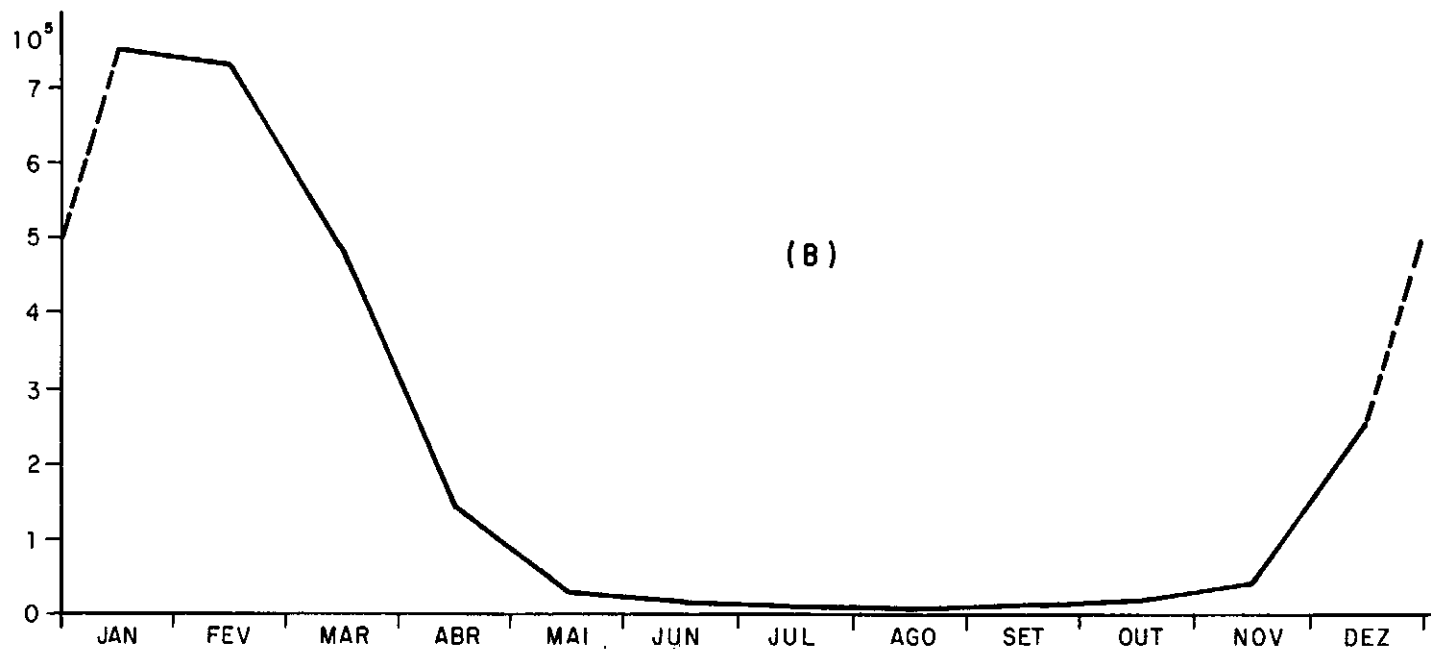
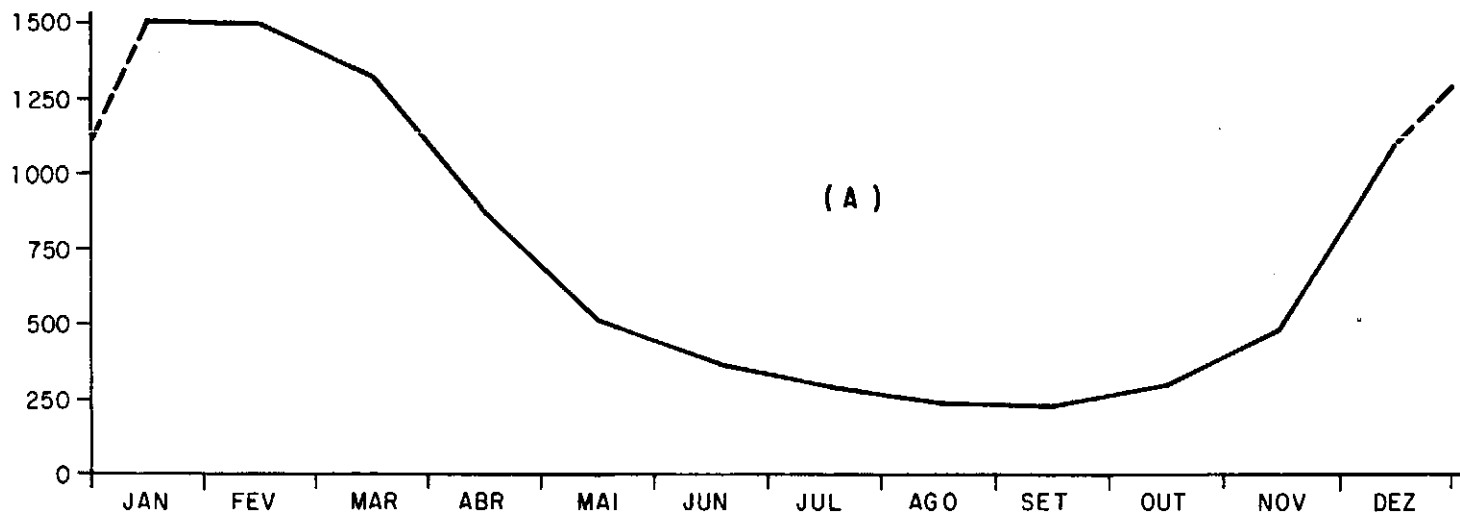


FIGURA IV-2-(A) MÉDIA, (B) VARIÂNCIA



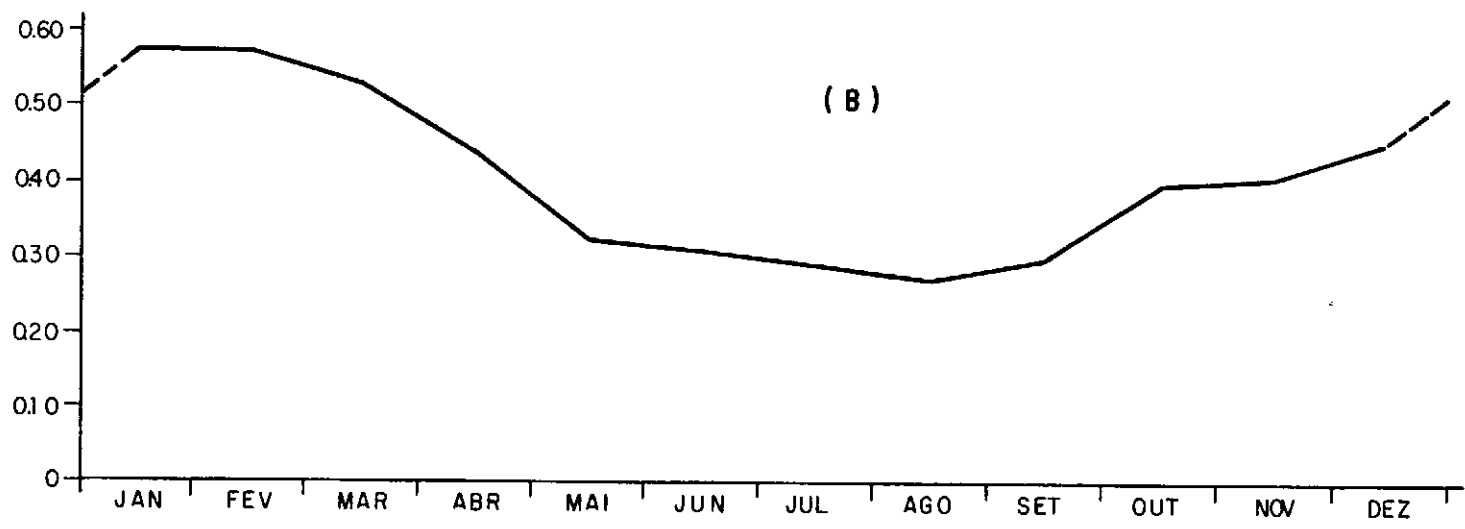
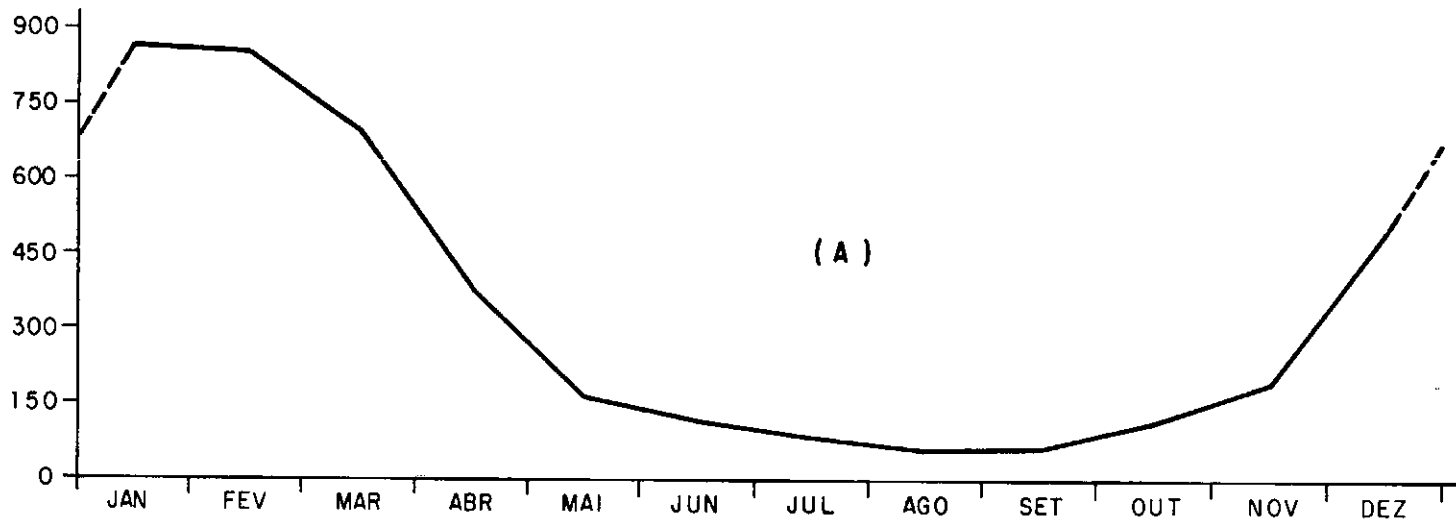


FIGURA IV-3 - (A) DESVIO PADRÃO, (B) COEFICIENTE DE VARIAÇÃO



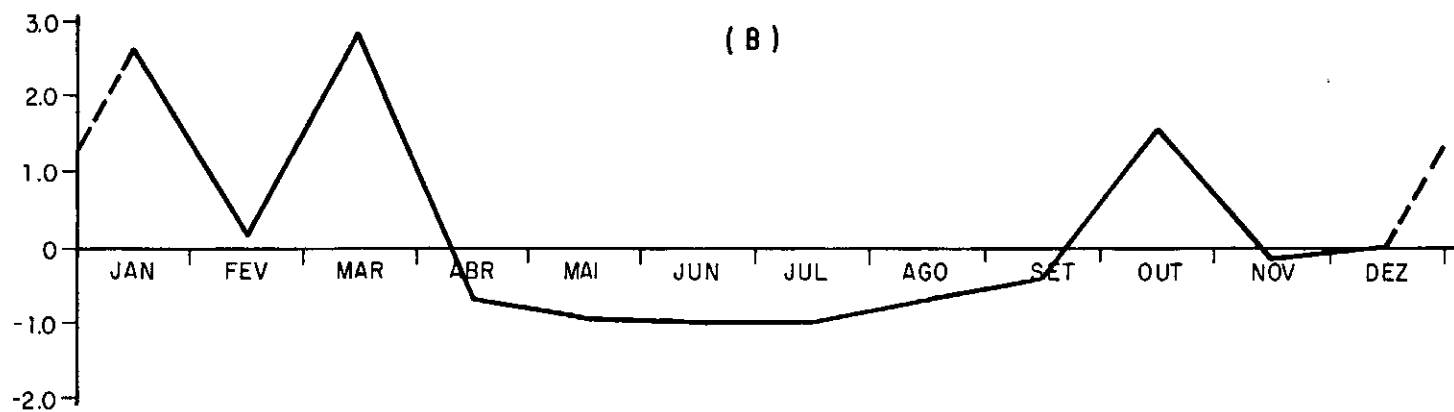
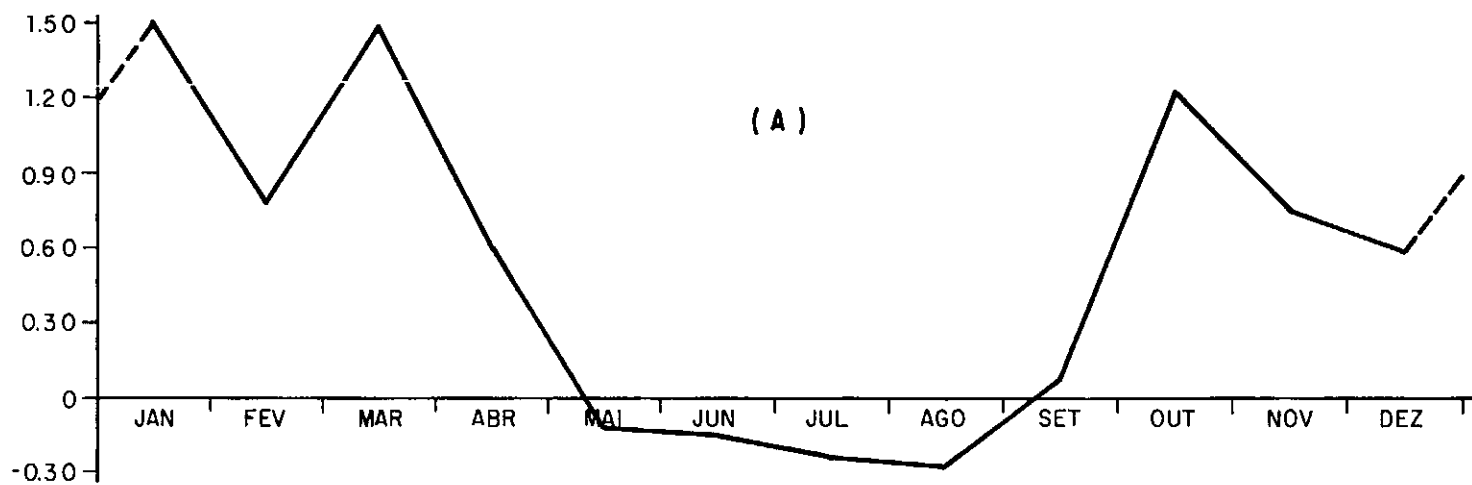


FIGURA IV-4 - (A) COEFICIENTE DE ASSIMETRIA, (B) COEFICIENTE DE EXCESSO



de 1/12 e 1/6 ciclos/mês. Estas periodicidades podem ser confirmadas pelo espectro da série de vazões mostrado na Figura IV.5(b), no qual se verifica a existência de picos naquelas frequências.

Para as variâncias mensais foram determinados três harmônicos significativos correspondentes às frequências de 1/12, 1/6 e 1/4 ciclos/mês.

Usando a expressão (3.12), as médias e as variâncias mensais passaram a ser representadas pelos parâmetros periódicos  $\mu_{\tau}$  e  $\sigma_{\tau}^2$ , cujas equações foram as seguintes:

$$\begin{aligned} \mu_{\tau} = & 726,5 + 550,2 \cos(\pi/6 \cdot \tau) + 349,8 \sin(\pi/6 \cdot \tau) + \\ & + 197,6 \cos(\pi/3 \cdot \tau) - 19,5 \sin(\pi/3 \cdot \tau) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau}^2 = & 205650,8 + 264624,8 \cos(\pi/6 \cdot \tau) + \\ & + 197963,3 \sin(\pi/6 \cdot \tau) + 182960,5 \cos(\pi/3 \cdot \tau) - \\ & - 43680,2 \sin(\pi/3 \cdot \tau) + 41062,1 \cos(\pi/2 \cdot \tau) - \\ & - 60405,9 \sin(\pi/2 \cdot \tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

O desvio padrão  $\sigma_{\tau}$ , como uma função periódica, é calculado como a raiz quadrada de  $\sigma_{\tau}^2$ . Os valores das funções periódicas  $\mu_{\tau}$ ,  $\sigma_{\tau}^2$  e  $\sigma_{\tau}$  são apresentados no Anexo 3.2.

Os coeficientes de variação foram testados quanto à hipótese da igualdade, ao longo dos meses, de acordo com o método descrito na seção III.1. Foram constituídos dois subconjuntos: o primeiro reunindo os coeficientes dos meses do período abril-setembro, e o

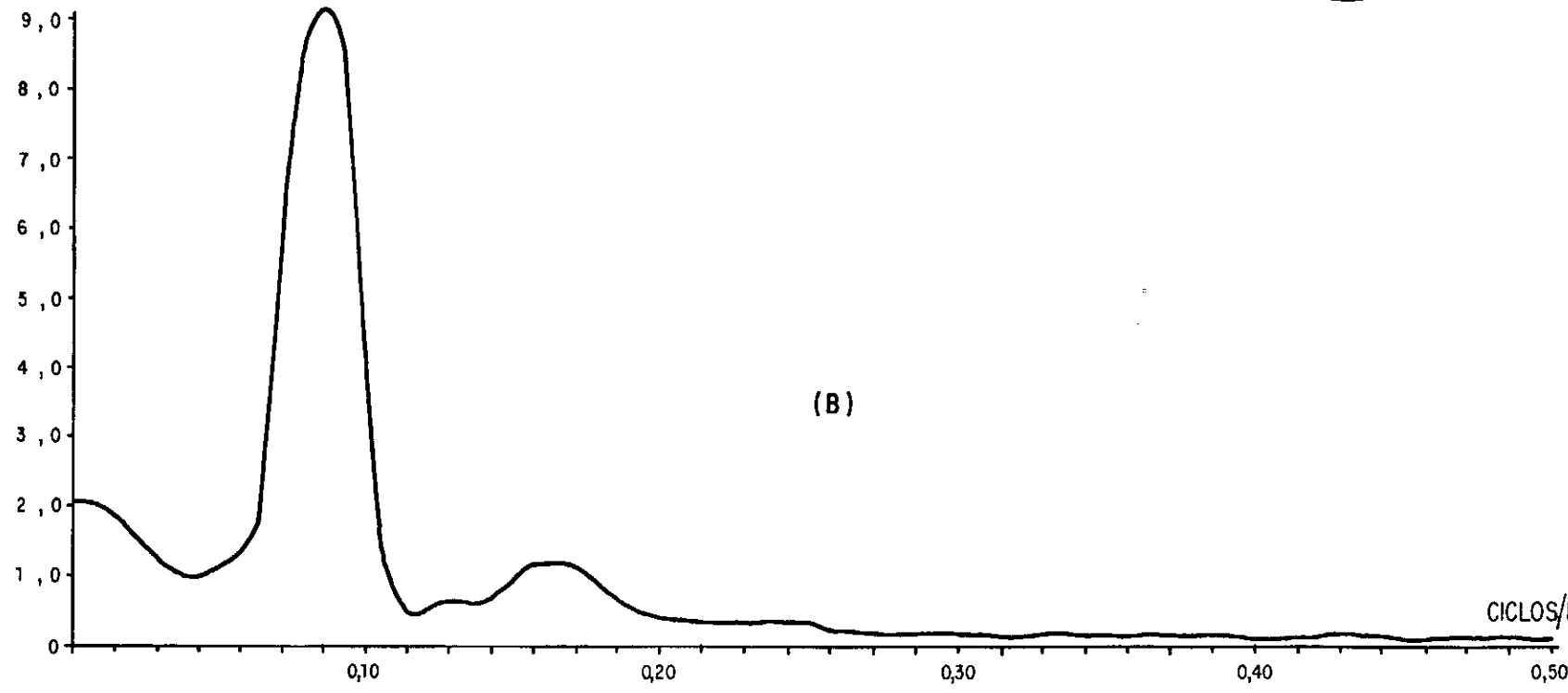
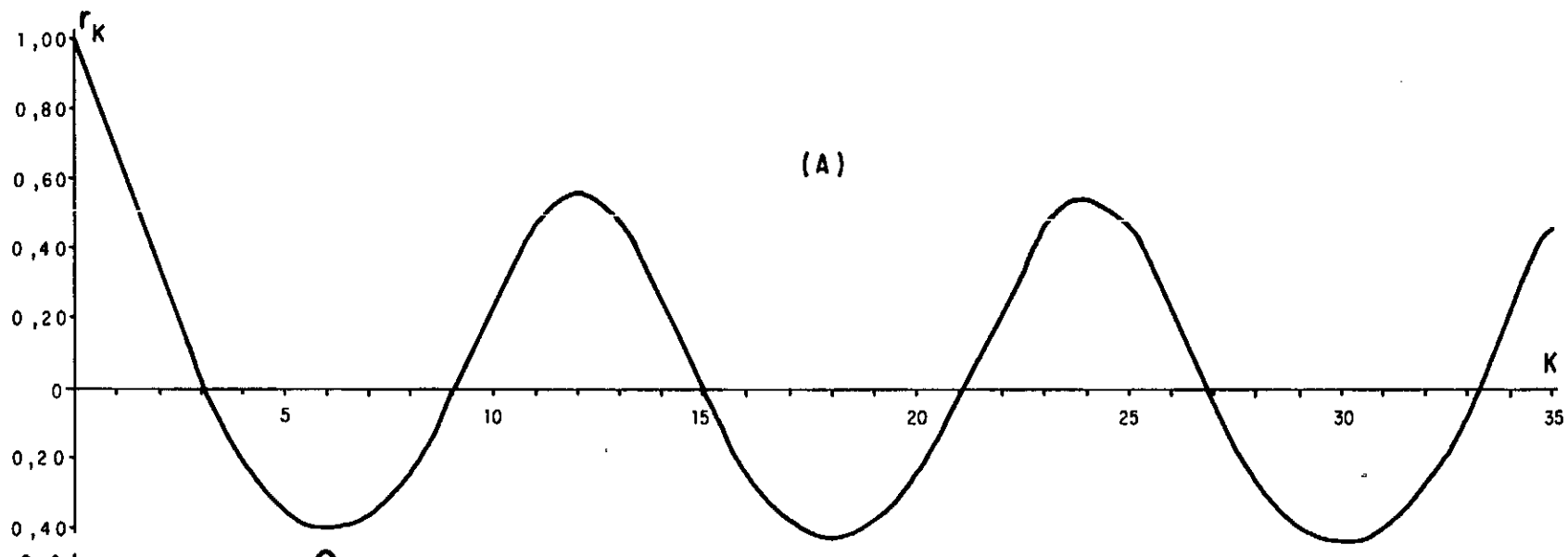


FIGURA IV - 5 - (A) CORRELOGRAMA, (B) ESPECTRO - DA SÉRIE  $X_{p,\tau}$

- 71 -

71A

segundo, do período outubro-março. Esta divisão foi adotada tendo em vista a coincidência com as estações seca e chuvosa em Três Marias, respectivamente. As médias dos dois subconjuntos foram testadas quanto à igualdade pela expressão (3.40), tendo sido obtido  $t = 3,763$ . Para uma distribuição de Student com 10 graus de liberdade e para um nível de significância de 95%, tem-se  $t_c = 2,228$ . Assim, como  $t > t_c$ , a hipótese nula é rejeitada, isto é, o coeficiente de variação ao longo dos meses é variável. Em consequência, aplicou-se um método paramétrico para a separação das componentes periódica e estocástica representado pela expressão (3.11), onde  $\mu_\tau$  e  $\sigma_\tau$  são as funções periódicas ajustadas à média e ao desvio padrão.

A série  $y_{p,\tau}$  resultante da aplicação do método paramétrico é, aproximadamente, uma variável padronizada. Para torná-la uma variável padronizada foi usada a transformação (3.49), onde a média  $\bar{y}_{p,\tau}$  e o desvio padrão  $S_y$  da série  $y_{p,\tau}$  assumiram os seguintes valores:

$$\bar{y}_{p,\tau} = - 0,001$$

$$S_y = 1,028$$

O correlograma de  $\epsilon_{p,\tau}$  foi calculado pela equação (3.51) e é apresentado na Figura IV.6(a). O seu aspecto indicou a ausência da componente periódica e a possibilidade do ajustamento de um esquema autoregressivo à componente estocástica. O espectro de  $\epsilon_{p,\tau}$  calculado por (3.38) e apresentado na Figura IV.6(b) não teve picos significativos que indiquem uma contribuição importante de algum harmônico restante para a variância total de  $\epsilon_{p,\tau}$ . Em consequência, concluiu-se que as representações da média e va

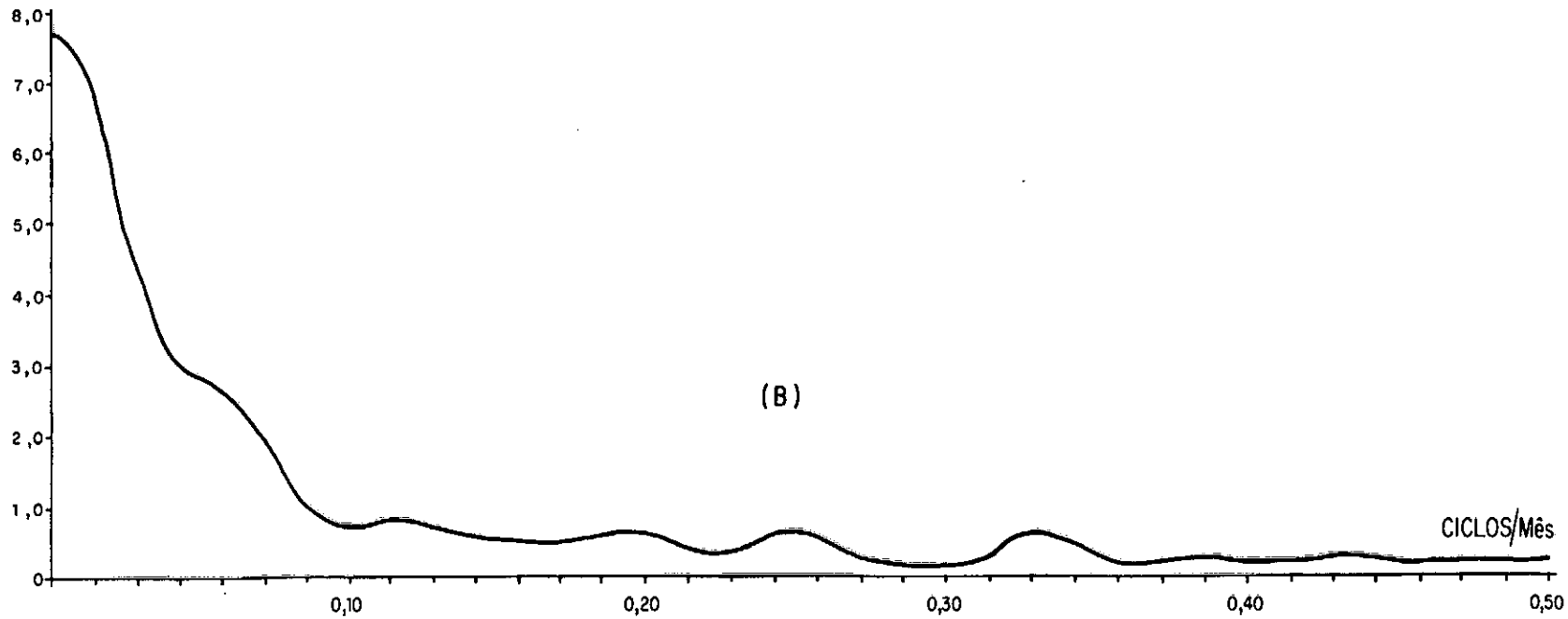
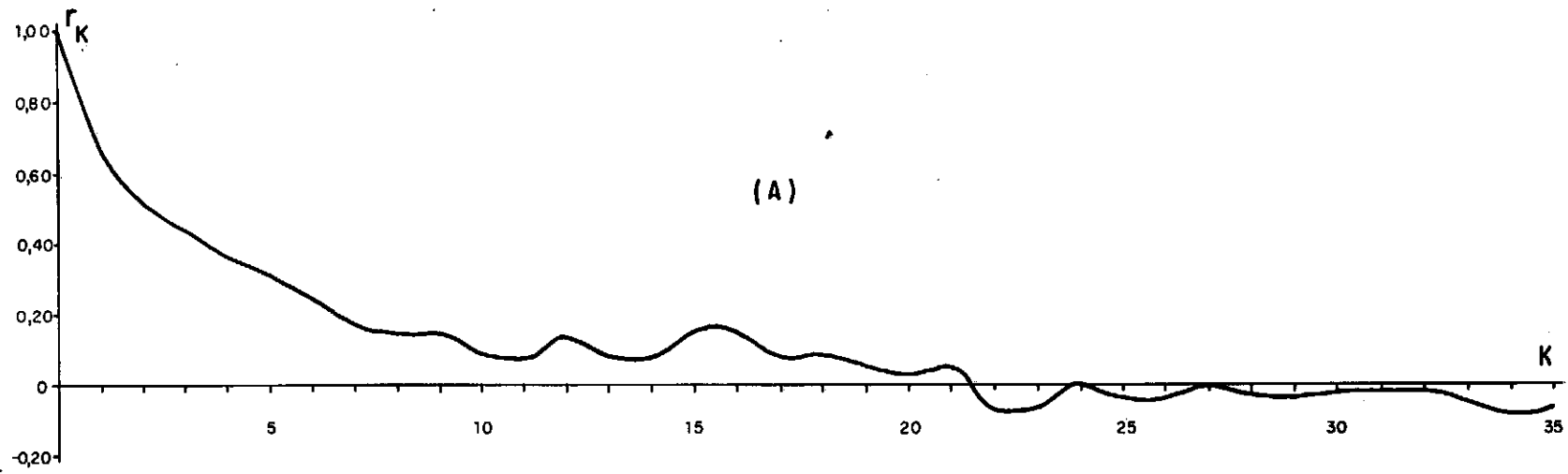


FIGURA IV - 6 - (A) CORRELOGRAMA, (B) ESPECTRO - DA SÉRIE ESTOCÁSTICO  $\xi_{p,\tau}$

riância pelas equações (4.3) e (4.4) foram satisfatórias.

### 3 - Ajustamento do Modelo de Dependência à Componente Estocástica.

A medida do grau de ajustamento de modelos auto-regressivos lineares para a série de valores de  $\epsilon_{p,\tau}$  foi feita pelo método do coeficiente de determinação descrito na seção III.1. Considerando-se os coeficientes de autocorrelação estimados pelo correlograma geral de  $\epsilon_{p,\tau}$ , obteve-se  $\rho_1 = 0,661$ ,  $\rho_2 = 0,508$  e  $\rho_3 = 0,437$ . Usando as expressões (3.66), (3.67) e (3.68), obteve-se  $R_1^2 = 0,437$ ,  $R_2^2 = 0,446$  e  $R_3^2 = 0,453$ . Como  $R_2^2 - R_1^2 = 0,009 >> 0,01$  e  $R_3^2 - R_1^2 = 0,016 < 0,02$ , concluiu-se que o modelo auto-regressivo de 1ª ordem forneceria um bom ajustamento para a descrição da dependência da componente estocástica  $\epsilon_{p,\tau}$ .

Tendo em vista o resultado acima, o programa de análise estrutural prevê apenas o ajustamento de um processo auto-regressivo de 1ª ordem. No entanto, para uma maior generalidade, é possível desenvolvê-lo para os casos de processos de ordens superiores a um.

### 4 - Verificação da Constância dos Coeficientes de Autocorrelação.

Os testes de verificação da constância dos coeficientes de autocorrelação  $r_{1,\tau}$  foram realizados de acordo com o procedimento exposto na seção III.1. O estatístico  $t$  computado por (3.40) foi 0,006. Para uma distribuição de Student com 10 graus de liberdade e um nível de significância de 95%, tem-se  $t_c = 2,228$ . Como  $t < t_c$ , concluiu-se que os coeficientes de autocorrelação  $r_{1,\tau}$  não são significati

vamente diferentes de uma constante. Neste caso, o coeficiente de autocorrelação de ordem 1 de  $\epsilon_{p,\tau}$  pode ser estimado como a média dos 12 valores  $r_{1,\tau}$ , o que resultou  $\rho_1 = 0,710$ .

Para testar o desvio padrão dos coeficientes de autocorrelação foi usada a expressão (3.44), resultando  $Z = 0,132$ . Para uma distribuição  $Z$  de 5 e 5 graus de liberdade e um grau de significância de 95%, têm-se  $Z_c = 0,809$ . Como  $Z = 0,132 < Z_c$ , concluiu-se também que desvio padrão dos coeficientes de autocorrelação  $r_{1,\tau}$  é constante.

A análise estrutural das séries hidrológicas foi programada para o caso de coeficientes de autocorrelação  $r_{1,\tau}$  iguais a uma constante. Para uma maior generalidade, poderia ter sido previsto o caso oposto.

## 5 - Obtenção da Série Estocástica Independente.

Tendo em vista os resultados anteriores, a série estocástica independente  $\xi_{p,\tau}$  foi calculada por (3.69). O coeficiente de autocorrelação  $\rho$  foi estimado sucessivamente por  $\rho_1$ , a média de 12 valores de  $r_{1,\tau}$  e por  $r_{1,\epsilon}$  do correlograma geral de  $\epsilon_{p,\tau}$ . A escolha de apenas uma destas duas alternativas deveria recair naquela que fornecesse uma série  $\xi_{p,\tau}$  cujos valores fossem independentes entre si, o que requer  $r_{K,\xi} = 0$ , para  $K > 0$ . Pelo exame dos correlogramas das duas séries  $\xi_{p,\tau}$  na Figura IV.7, concluiu-se que essa restrição foi aproximadamente satisfeita em ambos os casos. Assim, procedeu-se a modelagem da série independente  $\xi_{p,\tau}$  considerando-se os valores obtidos pelas duas possibilidades.

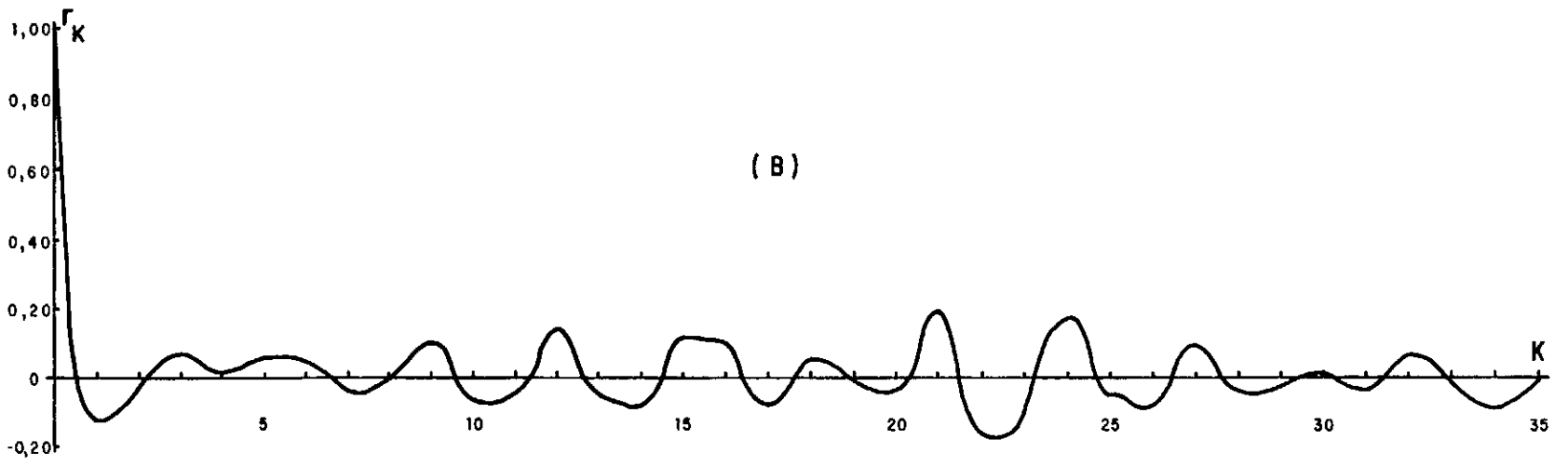
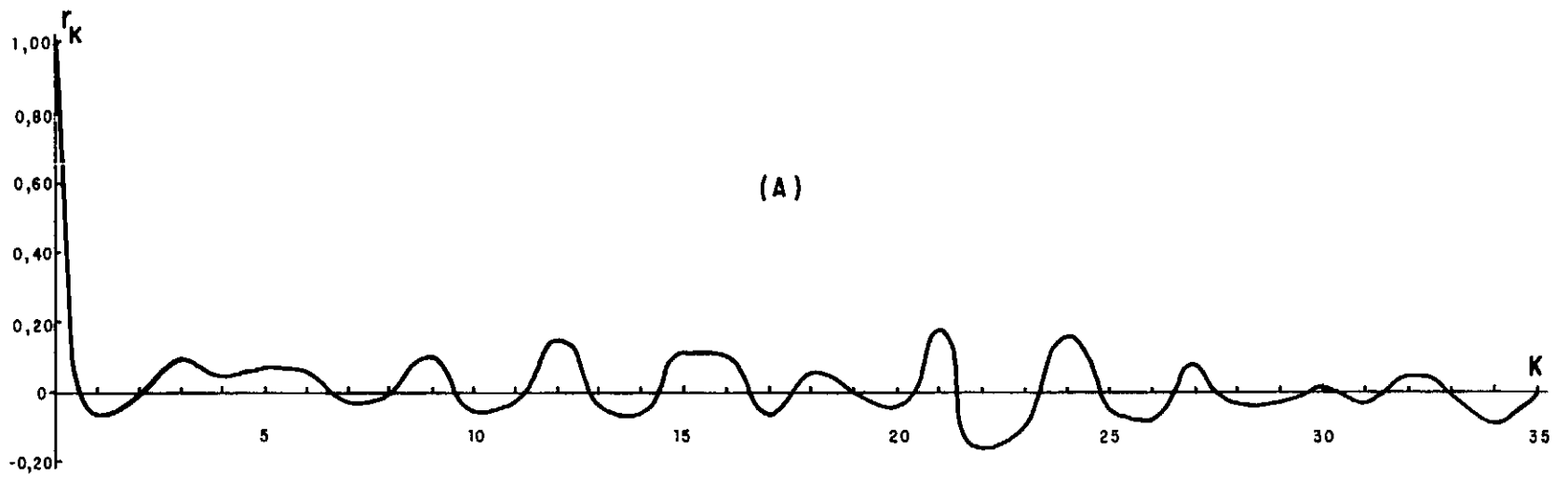


FIGURA IV-7 - CORRELOGRAMAS DAS SÉRIES INDEPENDENTES: (A) SÉRIE  $z_{p,\tau,1}$ , (B) SÉRIE  $z_{p,\tau,2}$



6 - Ajustamento de Distribuição de Probabilidade às Séries Estocásticas Independentes  $\xi_{p,\tau}$ .

Para maior facilidade de apresentação, os parâmetros das distribuições calculados para a série  $\xi_{p,\tau}$  resultante do uso de  $r_{1,\varepsilon}$ , serão notados com um índice 1. No segundo caso, quando a série  $\xi_{p,\tau}$  for resultante do uso de  $\rho_1$ , aqueles parâmetros serão notados com o índice 2.

a) Distribuição normal

Os parâmetros da distribuição foram calculados por (3.71) e (3.72), com os seguintes valores:

$$\mu_1 = - 0,002 \qquad \mu_2 = - 0,003$$

$$\sigma_1 = 1,000 \qquad \sigma_2 = 1,141$$

Para o teste qui-quadrado foram considerados 15 intervalos de iguais probabilidades. Todos os valores de  $\chi^2$  tabelados foram fornecidos por Kendall (1966). Para um nível de significância de 95% e 12 graus de liberdade, o valor crítico é  $\chi_C^2 = 21,026$ . Para as duas distribuições, a aplicação da expressão (3.73) resultou em  $\chi_1^2 = 20,103$  e  $\chi_2^2 = 25,448$ . Como  $\chi_1^2 < \chi_C^2$  e  $\chi_2^2 > \chi_C^2$ , a hipótese nula de bom ajustamento foi aceita no primeiro caso e rejeitada no segundo.

Para os testes de Smirnov-Kolmogorov, com um nível de significância de 95% e um tamanho  $N = 348$  da amostra da série  $\xi_{p,\tau}$ , têm-se um valor crítico  $\Delta_0 = 0,072$ . Os resultados foram  $\Delta_1 = 0,064 < \Delta_0$  e  $\Delta_2 = 0,068 < \Delta_0$ . Portanto, ambas as distribuições foram consideradas satisfatórias.

b) Distribuição lognormal de três parâmetros.

Os parâmetros característicos desta distribuição calculados por (3.84), (3.85) e (3.88) tiveram os seguintes valores:

$$\mu_{n,1} = 1,509$$

$$\mu_{n,2} = 1,676$$

$$\sigma_{n,1} = 0,214$$

$$\sigma_{n,2} = 0,194$$

$$\gamma_1 = - 4,628$$

$$\gamma_2 = - 5,448$$

Para um nível de significância de 95% e 11 graus de liberdade, têm-se  $\chi_c^2 = 19,675$ . Os valores calculados por (3.73) foram  $\chi_1^2 = 15,879$  e  $\chi_2^2 = 27,862$ . Como  $\chi_1^2 < \chi_c^2$  e  $\chi_2^2 > \chi_c^2$ , a hipótese nula de bom ajustamento foi aceita no primeiro caso e rejeitada no segundo.

Para os testes de Smirnov-Kolmogorov foram calculados  $\Delta_1 = 0,037 < \Delta_0$  e  $\Delta_2 = 0,045 < \Delta_0$ .

c) Distribuição gama de três parâmetros

Os coeficientes de forma, escala e posição da distribuição foram calculados por (3.95), (3.97) e (3.93). O método de Newton empregado, para a resolução das equações (3.93) e (3.95), teve uma convergência rápida, bastando, nos dois casos, que fossem feitas duas iterações para que os erros nos valores de (3.99) e (3.109) fossem inferiores a 0,1%. Os resultados foram os seguintes:

$$\alpha_1 = 22,783$$

$$\alpha_2 = 27,010$$

$$\beta_1 = 0,208$$

$$\beta_2 = 0,205$$

$$\gamma_1 = - 4,749$$

$$\gamma_2 = - 5,539$$

Para um grau de significância de 95% e 11 graus de liberdade têm-se  $\chi_C^2 = 19,675$ . Os valores calculados foram  $\chi_1^2 = 15,879$  e  $\chi_2^2 = 28,724$ . Como  $\chi_1^2 < \chi_C^2$  e  $\chi_2^2 > \chi_C^2$ , a hipótese nula foi aceita no primeiro caso e rejeitada no segundo. Para os testes de Smirnov-Kolmogorov resultaram  $\Delta_1 = 0,043 < \Delta_0$  e  $\Delta_2 = 0,039 < \Delta_0$ . Verificou-se que a aplicação do método de Newton, para o cálculo dos limites dos intervalos de iguais probabilidades no teste qui-quadrado, apresentou problemas de não convergência para o caso da distribuição gama, principalmente, para valores grandes do coeficiente de forma  $\alpha$ . O recurso empregado, para superar esta dificuldade, consistiu em atribuir incrementos a cada limite de intervalo conhecido, a fim de se obter um valor próximo do limite seguinte. As estimativas dos limites dos intervalos foram determinados, a priori, pela utilização da sub-rotina CDTR do SSP (Scientific Subroutine Package) do PL1/IBM. Este programa calcula as probabilidades de ocorrência de determinados valores de uma variável, que tenha uma distribuição qui-quadrado, a qual pode ser relacionada a uma distribuição gama, por meio de uma mudança de variável.

Para a série  $\xi_{p,\tau,1}$ , os ajustamentos das três distribuições foram considerados satisfatórios. O uso das distribuições lognormal ou gama de três parâmetros, entretanto, deve fornecer melhores resultados do que a normal. Ainda assim, seria recomendável fazer-se uma análise da estacionariedade de 3ª ordem da série  $\xi_{p,\tau,1}$ . Para a série  $\xi_{p,\tau,2}$ , nenhum dos ajustamentos foi considerado satisfatório. No entanto, poderiam ser tentadas outras formas de distribuições.

O critério de seleção da distribuição a ser ajustada foi o do menor valor para o qui-quadrado, o que implicou a escolha da gama de três parâmetros.

### - Geração de Séries Sintéticas.

Tendo em vista os melhores ajustamentos de distribuições à série  $\xi_{p,\tau,11}$ , o coeficiente de autocorrelação  $\rho$  da população  $\varepsilon_{p,\tau}$  foi estimado pelo coeficiente de autocorrelação de ordem 1 do correlograma geral de  $\varepsilon_{p,\tau}$ , cujo valor foi  $r_{1,\varepsilon} = 0,661$ .

Foram gerados números aleatórios obedecendo a uma distribuição gama de três parâmetros com  $\alpha = 23$ ,  $\beta = 0,208$  e  $\gamma = -4,749$ , segundo o procedimento exposto por Naylor (1966). Foram geradas 10 seqüências, cada uma com extensão de 30 anos, iniciando-se sempre no mês de janeiro. A descarga inicial, do mês de dezembro, arbitrada com igual valor para todas as seqüências, foi  $X_{0,12} = 1119 \text{ m}^3/\text{seg}$ . As 10 séries geradas são apresentadas no Anexo 2.

### - Determinação dos Períodos Críticos.

Cada período crítico determinado em cada uma das seqüências geradas, de acordo com o procedimento exposto na seção III.2, é caracterizado pela sua duração, potência firme, meses inicial e final. Os resultados foram os seguintes:

SEQUÊNCIA	DURAÇÃO (meses)	MÊS INICIAL	MÊS FINAL	POTÊNCIA FIRME (MW)
1	44	abril	novembro	211,2
2	35	abril	fevereiro	216,4
3	56	abril	novembro	255,5
4	130	fevereiro	novembro	294,5
5	42	maio	outubro	236,0
6	93	abril	dezembro	276,3
7	58	fevereiro	novembro	216,5
8	31	abril	outubro	225,6
9	43	maio	novembro	294,9
10	36	fevereiro	janeiro	280,3

A intensidade do período crítico pode ser caracterizada pelo maior ou menor volume afluyente durante este intervalo de tempo, e medida pela potência firme produzida. Assim, quanto mais intenso for o período crítico, menor será a potência firme resultante, e vice-versa.

Verificou-se que, dos períodos críticos gerados, três apresentaram intensidades maiores do que a da série histórica, para a qual resultou uma potência firme de 219,3 Mw produzida durante um intervalo de duração de 55 meses (maio de 1952 a novembro de 1956).

## 9 - Otimização Dinâmica

A otimização da operação do reservatório de Três Marias, em cada um dos períodos críticos gerados, foi feita de acordo com o modelo exposto na seção III.3. As curvas de operação resultantes da otimização, em cada período crítico, são apresentadas nas figuras IV.8 a IV.12.

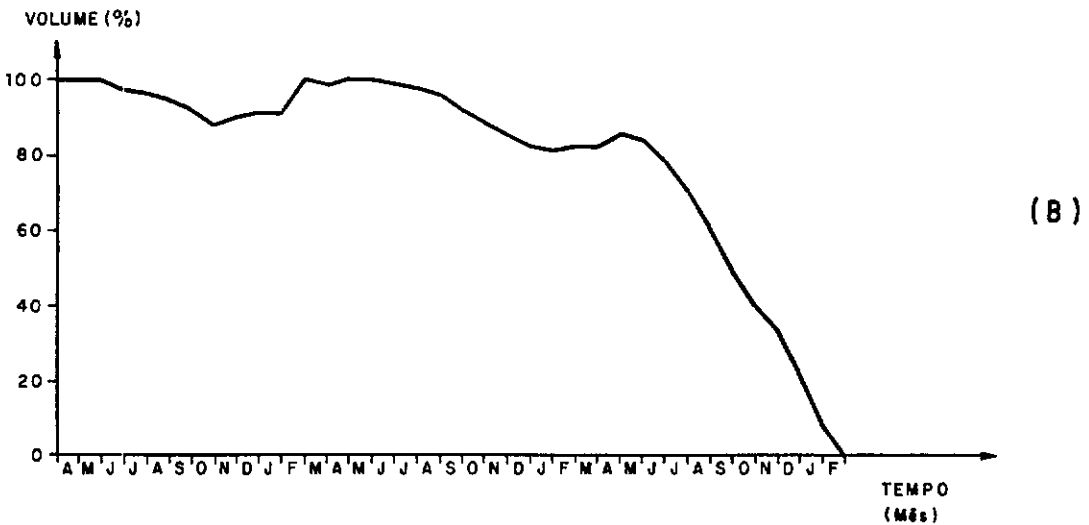
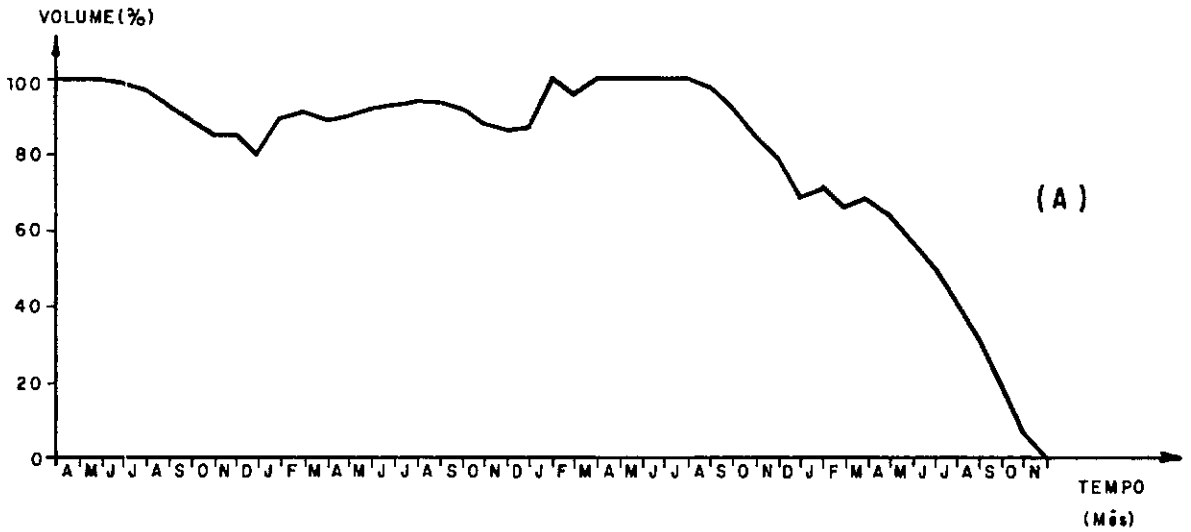


FIGURA IV-8-CURVAS DE OPERAÇÃO ÓTIMA: (A) 1º PERÍODO CRÍTICO, (B) 2º PERÍODO CRÍTICO

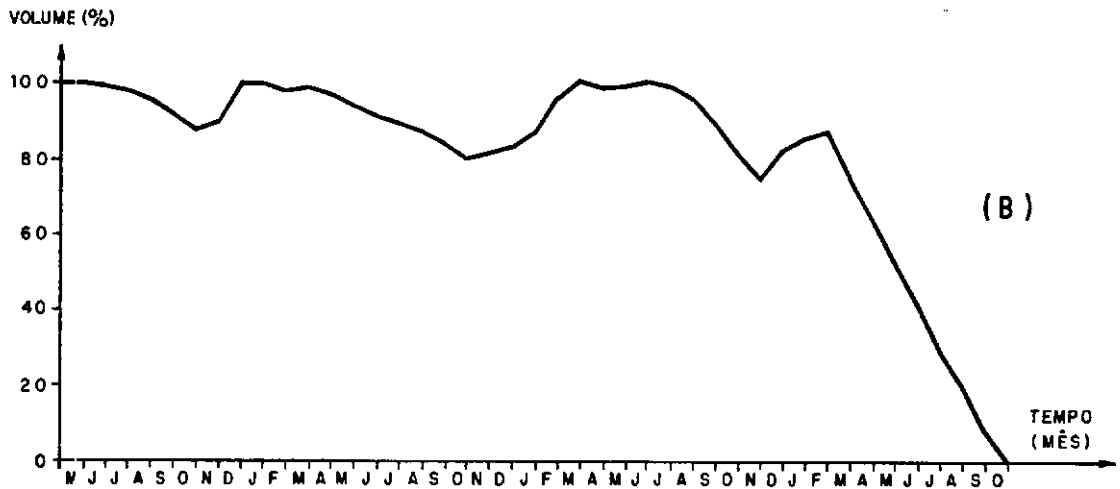
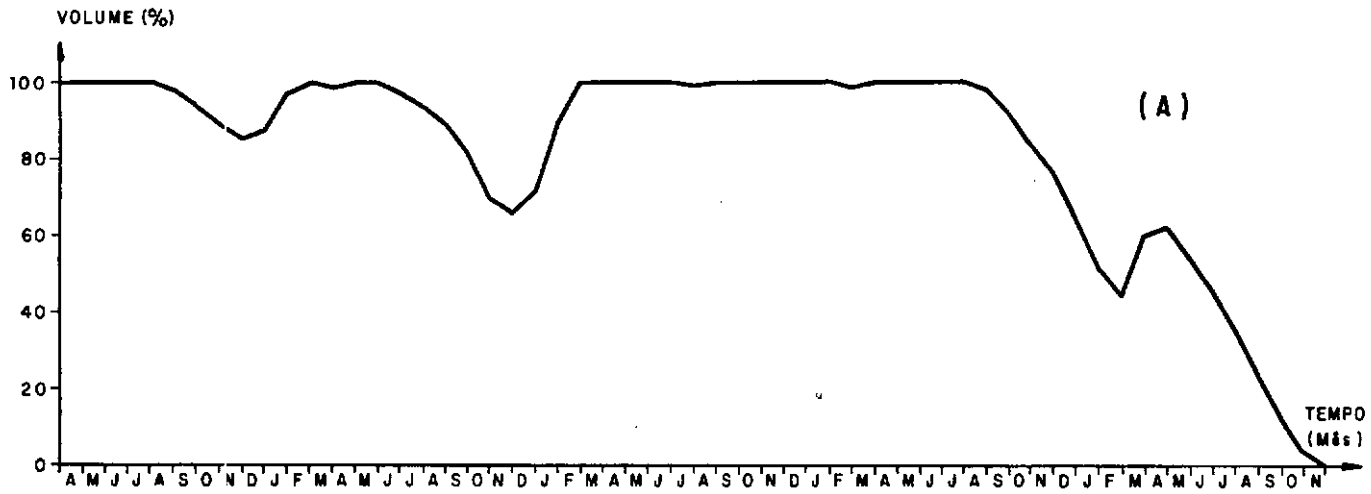


FIGURA IV-9 - CURVAS DE OPERAÇÃO ÓTIMA: (A) 3º PERÍODO CRÍTICO, (B) 5º PERÍODO CRÍTICO

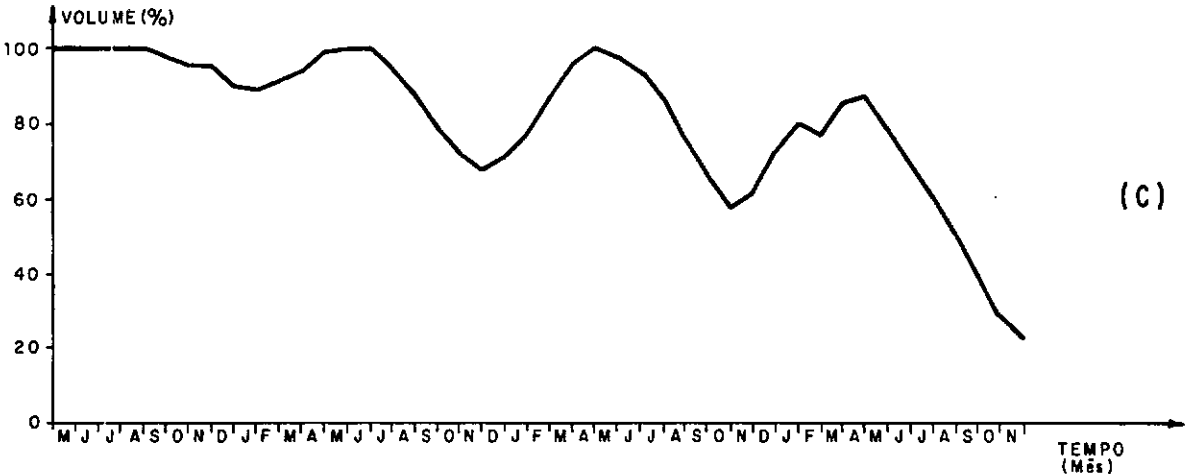
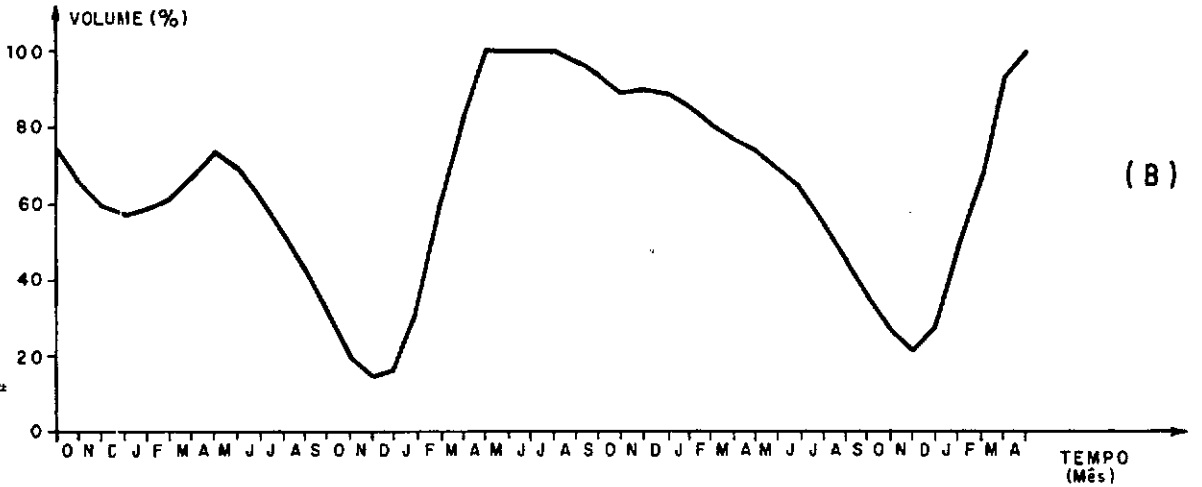


FIGURA IV.10 - CURVA DE OPERAÇÃO ÓTIMA: (A), (B), (C) 4º PERÍODO CRÍTICO

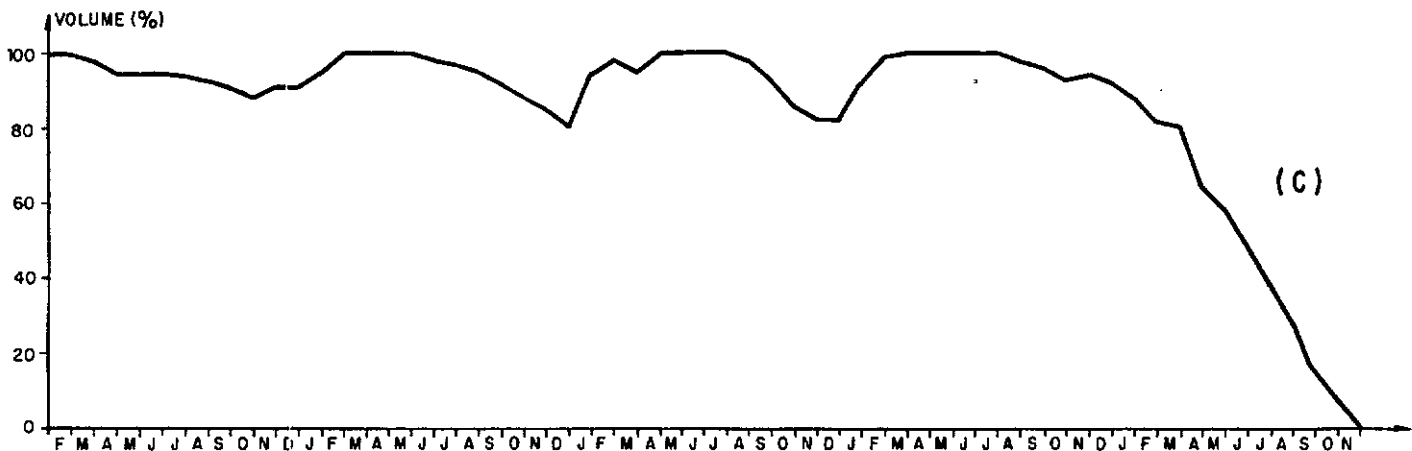
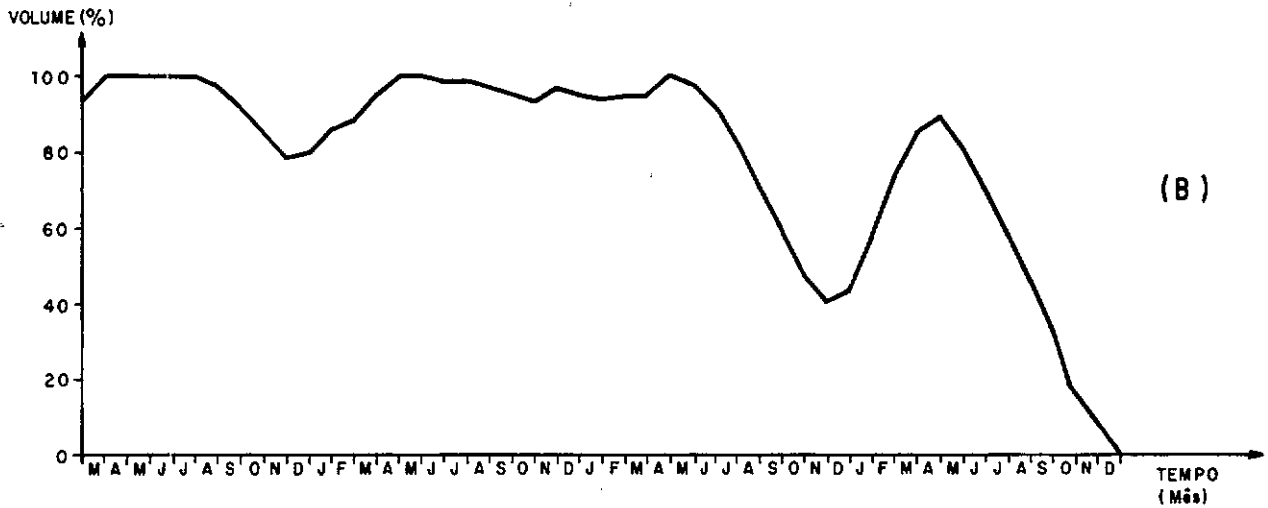
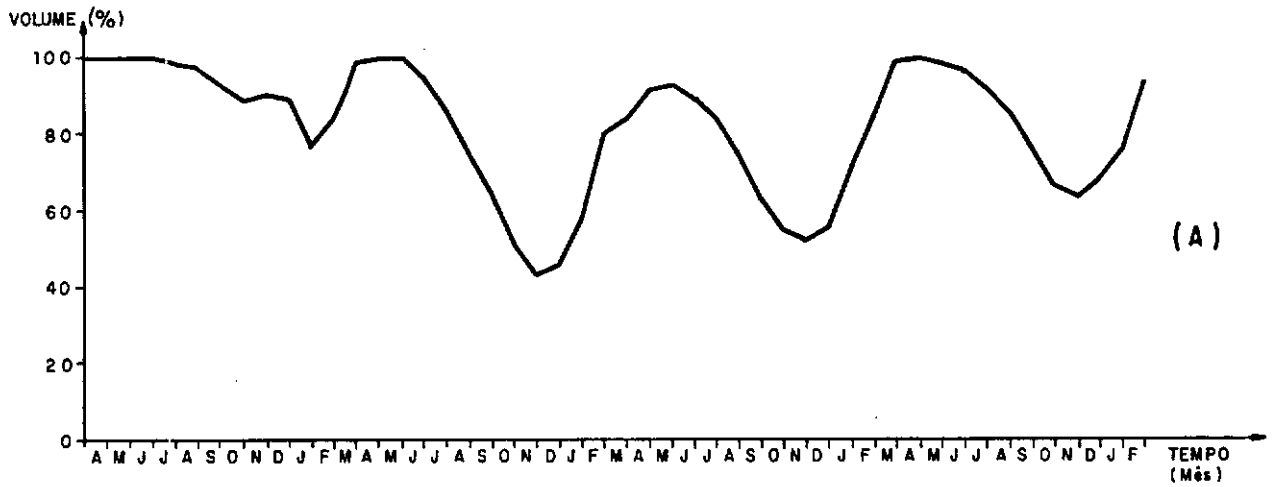


FIGURA IV-11 - CURVAS DE OPERAÇÃO ÓTIMA: (A), (B) 6º PERÍODO CRÍTICO, (C) 7º PERÍODO CRÍTICO

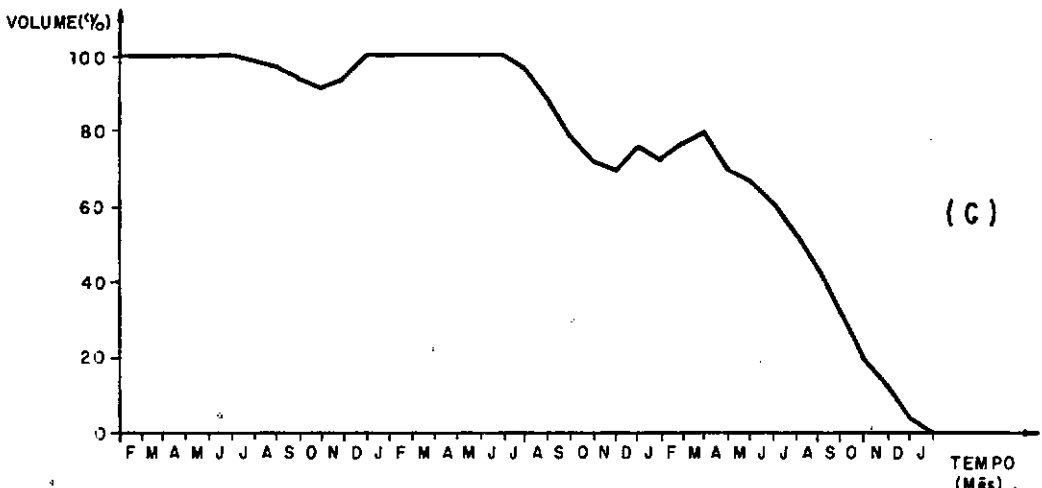
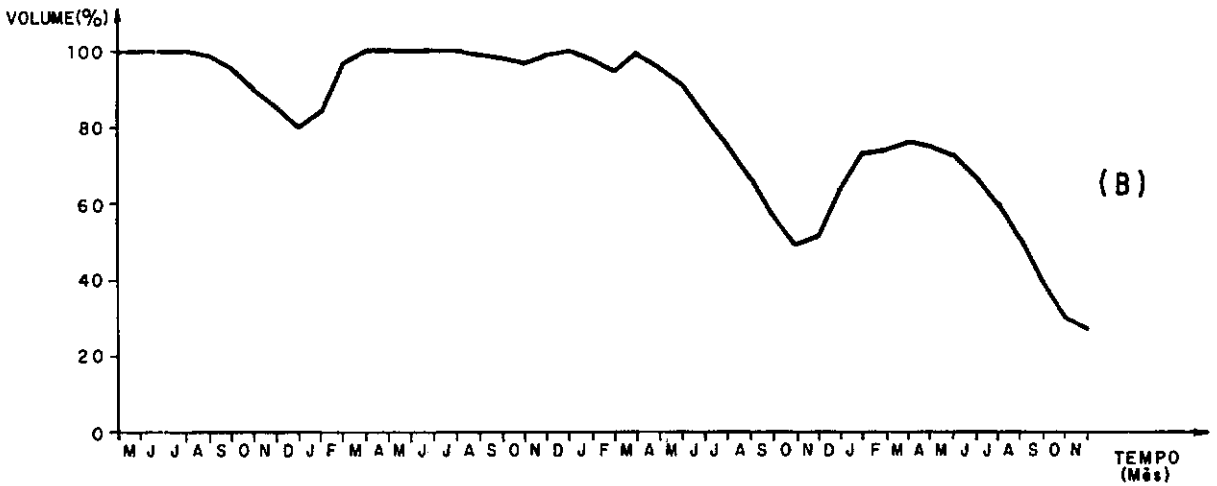


FIGURA IV-12- CURVAS DE OPERAÇÃO ÓTIMA:

( A ) 8º PERÍODO CRÍTICO  
( B ) 9º PERÍODO CRÍTICO  
( C ) 10º PERÍODO CRÍTICO

## 10 - Análise de Regressão

A análise de regressão objetivando a obtenção de uma regra ótima foi feita com a utilização de um programa do SPSS (1970).

A variável dependente considerada foi a descarga "turbinada" durante o mês  $i$  ( $D_i$ ). As variáveis independentes nas diversas alternativas de regressão foram: o volume do reservatório no início do mês  $i$  ( $V_i$ ), o quadrado deste valor ( $V2_i$ ), o cubo daquele valor ( $V3_i$ ), a descarga afluyente no mês anterior ( $Q_{i-1}$ ) e o quadrado deste valor ( $Q2_{i-1}$ ). As alternativas de regressão foram as seguintes:

- a)  $D_i = f(V_i, Q_{i-1})$  ;
- b)  $D_i = f(V_i, V2_i, Q_{i-1}, Q2_{i-1})$  ;
- c)  $D_i = f(V_i, V2_i, V3_i, Q_{i-1})$  ;
- d)  $D_i = f(V_i, V2_i, Q_{i-1})$  ;

A alternativa (b) foi a que forneceu melhores resultados. Os coeficientes de correlação múltipla ( $\rho$ ) e seus quadrados ( $\rho^2$ ) resultantes, em cada mês, para esta regra de operação foram:

MÊS	$\rho$	$\rho^2$	MÊS	$\rho$	$\rho^2$
janeiro	0,75	0,57	julho	0,79	0,62
fevereiro	0,84	0,70	agosto	0,73	0,53
março	0,75	0,56	setembro	0,73	0,53
abril	0,78	0,61	outubro	0,82	0,68
maio	0,84	0,71	novembro	0,82	0,68
junho	0,77	0,60	dezembro	0,81	0,65

Os coeficientes de regressão da regra ótima em cada

mês são apresentados no Anexo 4 .

#### IV.3 - TESTES DA REGRA ÓTIMA

A aplicação da regra ótima de operação de Três Marias a um caso real em que eram conhecidos o volume inicial do reservatório ( $17.300 \times 10^6 \text{ m}^3$ ) e uma série de afluências (janeiro de 1970 a dezembro de 1973), resultou no total esvaziamento do mesmo sem a esperada recuperação posterior de níveis resultantes de um reenchimento. Também, a simulação da operação deste reservatório, segundo a regra ótima, usando as vazões do período crítico histórico (maio de 1952 a novembro de 1956) e partindo com o seu volume a 100% de armazenamento, teve resultados um pouco mais satisfatórios. Por este motivo, e como na operação real são desconhecidos o início e o fim do período crítico, considerou-se adequado o estabelecimento de um volume limite inferior a partir do qual se espera o esvaziamento total do reservatório. Para volumes superiores a este valor, seria válida a regra ótima determinada, e para volumes inferiores seria necessária a utilização de uma outra regra. Outra alternativa possível, seria o estabelecimento de uma única regra válida para qualquer volume armazenado e resultante da otimização ao longo das seqüências completas de vazões.

## V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os resultados anteriores permitiram as seguintes conclusões:

- 1 - O método estocástico implícito revelou-se viável computacionalmente para a resolução de um problema de determinação da regra ótima de operação mensal de um reservatório, tal que um máximo de geração de energia seja produzido;
- 2 - A análise estrutural da série hidrológica de vazões, apesar de algumas simplificações, possibilitou a obtenção de um modelo matemático capaz de representar com boa precisão o referido processo periódico-estocástico;
- 3 - A utilização de regras ótimas de operação determinadas podem ser consideradas válidas, na prática, para uma faixa de volumes armazenados, cujo limite inferior seja um valor a partir do qual se espera o esvaziamento total do reservatório considerado;

Tendo em vista possíveis desenvolvimentos do presente estudo, podem ser feitas as seguintes recomendações:

- 1 - É aconselhável, para uma maior confiabilidade da análise estrutural, a obtenção dos registros originais dos postos da bacia do rio São Francisco próximos ao reservatório de Três Marias e a análise destes quanto às inconsistências, não homogeneidades e tendências. Tal recomendação se deve ao fato dos dados usados neste trabalho não terem sido previamente analisados quanto a estes aspectos;

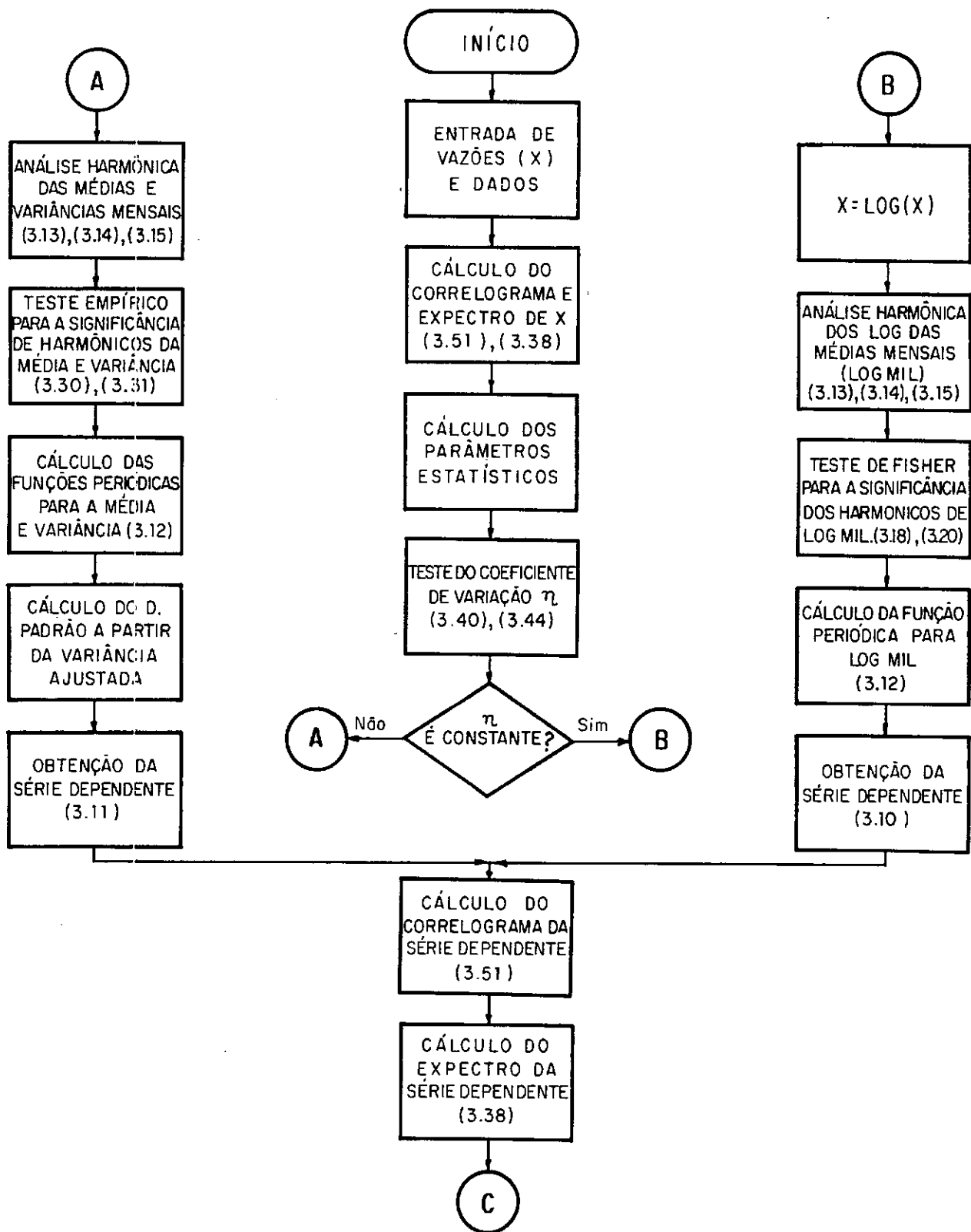
- 2 - Uma representação mais fiel da operação do reservatório pode ser conseguida por meio de algumas outras considerações. Em primeiro lugar, o ganho de energia resultante de uma decisão deve ser calculado com o uso de uma altura de queda útil correspondente ao volume acumulado médio no reservatório durante o mês. Em segundo lugar, é recomendável a consideração da parcela de evaporação no balanço de volumes, tendo em vista a área bastante extensa do espelho d'água do reservatório de Três Marias;
- 3 - É aconselhável um estudo mais detalhado para o valor a ser estabelecido na restrição de descarga mínima efluente, uma vez que existem vazões significativas de bacias intermediárias no trecho Três Marias-Pirapora. Uma possível solução é a geração simultânea de séries sintéticas para as duas localidades e o estabelecimento da descarga mínima no mês a partir de cada par de vazões mensais geradas;
- 4 - É recomendável a geração de um maior número de seqüências de vazões e a otimização nos respectivos períodos críticos, com a finalidade de melhorar os coeficientes de correlação múltipla;
- 5 - É recomendável o estabelecimento de uma única regra válida para qualquer volume armazenado e resultante da otimização ao longo das seqüências completas das vazões.

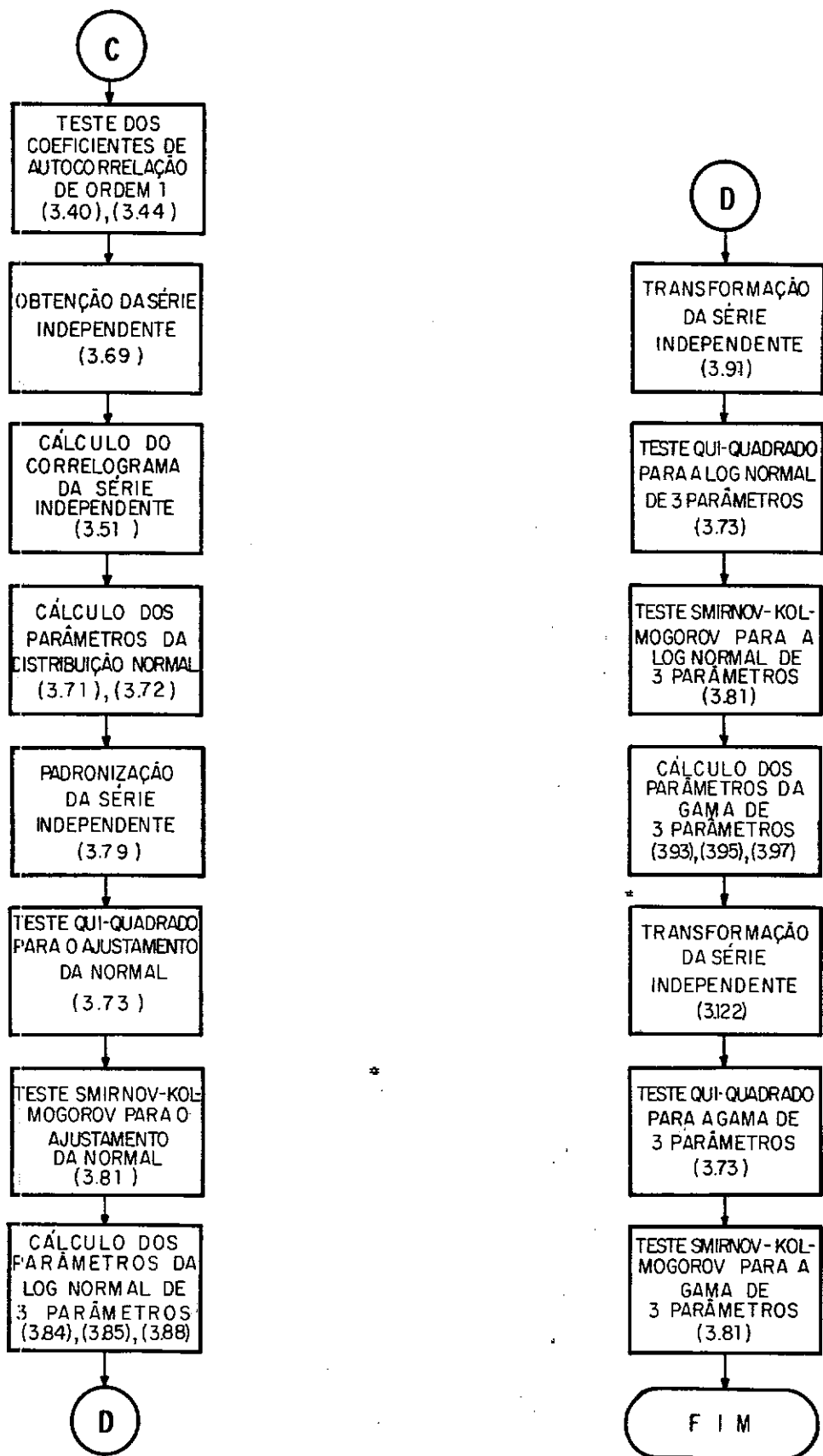
B I B L I O G R A F I A

- 1 - ASKEW, A.J., W.W.G. YEH e W.A. HALL - "Use of The Critical Period in Reservoir Analysis", Water Resources Research, 5 (6), 1969.
- 2 - ASKEW, A.J., W.W.G. YEH e W.A. HALL - "A Comparative Study of Critical Drought Simulation", Water Resources Research, Fevereiro, 1971.
- 3 - ABRAMOWITZ M. e I.A. STEGUN - "Handbook of Mathematical Functions", New York, Dover Publication Inc., 1965.
- 4 - BELLMAN, R.E. e S.E. DREYFUS - "La Programmation Dynamique et ses Applications", Paris, Dunod, 1965.
- 5 - BENSON, M.A. e N.C. MATALAS - "Synthetic Hydrology Based on Regional Statistical Parameters", Water Resources Research, Vol. 3, Nº 4, 1967
- 6 - BLACKMAN, R.B. e J.W. TUCKEY - "The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering" New York, Dover Publications Inc., 1958.
- 7 - CANAMBRA - "Power Study of South Central Brazil", Canambra Engineering Consultants Limited, Vol. 7, Apêndices XV, XVI, XVII, dezembro, 1966.
- 8 - ELETROBRÁS - "Modelo a Sistema Equivalente", Departamento de Planejamento das Centrais Elétricas Brasileiras S.A., março, 1973.
- 9 - ELETROBRÁS - "Modelo de Simulação a Usinas Individualizadas", Departamento de Planejamento das Centrais Elétricas Brasileiras S.A., janeiro, 1974.
- 10 - FURNAS - "Planejamento Ótimo Econômico da Operação do Sistema Hidrotérmico de Furnas - Centrais Elétricas S.A.", Departamento de Planejamento Energético, maio, 1972.
- 11 - HALL, W.A. e J.A. DRACUP - "Water Resources Systems engineering", Mc Graw-Hill, 1970.

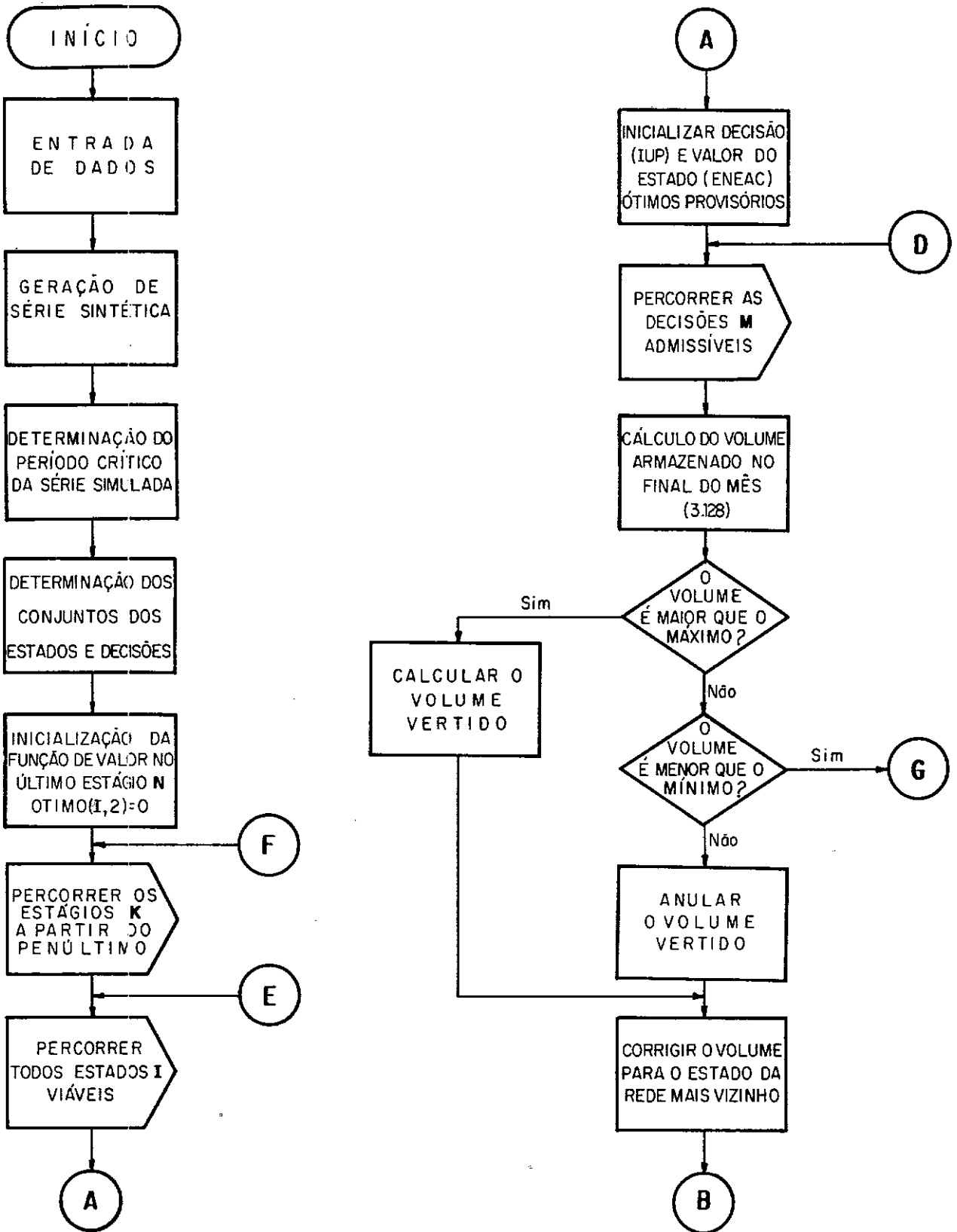
- 12 - HARMS, A.A. e T.H. CAMPBELL - "An Extension to the Thomas-Fiering Model for the Sequential Generation of Streamflow", Water Resources Research, Vol. 3, Nº 3, 1967.
- 13 - HUFSCHMIDT, M.M. e M.B. FIERING - "Simulation Techniques for Design of Water Resources Systems", Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1966.
- 14 - JENKINS, G.M. e D.G. WATTS - "Spectral Analysis and its Applications", San Francisco, Holden-Day Inc., 1968.
- 15 - KENDALL M. e A. STUART - "The Advanced Theory of Statistics", Vol. 3, Londres, C.Griffin e C. Limited, 1966.
- 16 - MATALAS, N.C. - "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology", Water Resources Research, Vol. 3, Nº 4, 1967.
- 17 - NAYLOR, H.N., J.L. BALINTFY, D.S. BURDICK, K. CHU - "Computer Simulation Techniques", John Wiley & Sons Inc., 1966.
- 18 - QUIMPO, RAFAEL G. - "Sthocastic Model of Daily River Flow Sequences", Hydrology Papers, Colorado State University, Fort Collins, fevereiro, 1967.
- 19 - ROEFS THEODORE G. - "Reservoir Management: The State of the Art", IBM Sci. Center Rep. 320-3508, julho, 1968.
- 20 - ROEFS, THEODORE G. e LAWRENCE D. BODIN - "Multireservoir Operaton Studies", Water Resources Research, Abril, 1970.
- 21 - ROESNER, LARRY A. e VUJICA M. YEVJEVICH - "Mathematical Models for Time Series of Monthly Precipitation and Monthly Runnof", Hydrology Papers, Colorado State University, Fort Collins, outubro, 1966.
- 22 - SCHWEIG Z. e J.A. COLE - "Optimum Control of Linked Reservoirs", Water Resources Research, 4(3), 1968.
- 23 - SPSS - "Statistical Package for the Social Sciences", Mc Graw Hill, 1970.
- 24 - THOMAS H.A. e M.B. FIERING - "The Mathematical Synthesis of Streamflow Sequences", Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1962.

- 25 - THOMAS H.A. e M.B. FIERING - "The Nature of the Storage-Yield Relationship", Report of the Harvard Water Resources Group to the U.S. Pub. Health Service, Cambridge, Mass., Capítulo 1, 1963.
- 26 - YEVJEVICH, VUJICA M. - "Structural Analysis of Hydrologic Time Series", Hydrology Papers, Colorado State University, Fort Collins, novembro, 1972.
- 27 - YOUNG, GEORGE K., Jr. - "Finding Reservoir Operation Rules" , Journal of the Hydraulics Division, ASCE, novembro, 1967.
- 28 - YOUNG, G.K., W.P. SOMERS, W.C. PISANO e W.N. FITCH - "Assessing Upland Reservoirs Using a Daily Flow Model", Water Resources Research, 5(2), 1969.

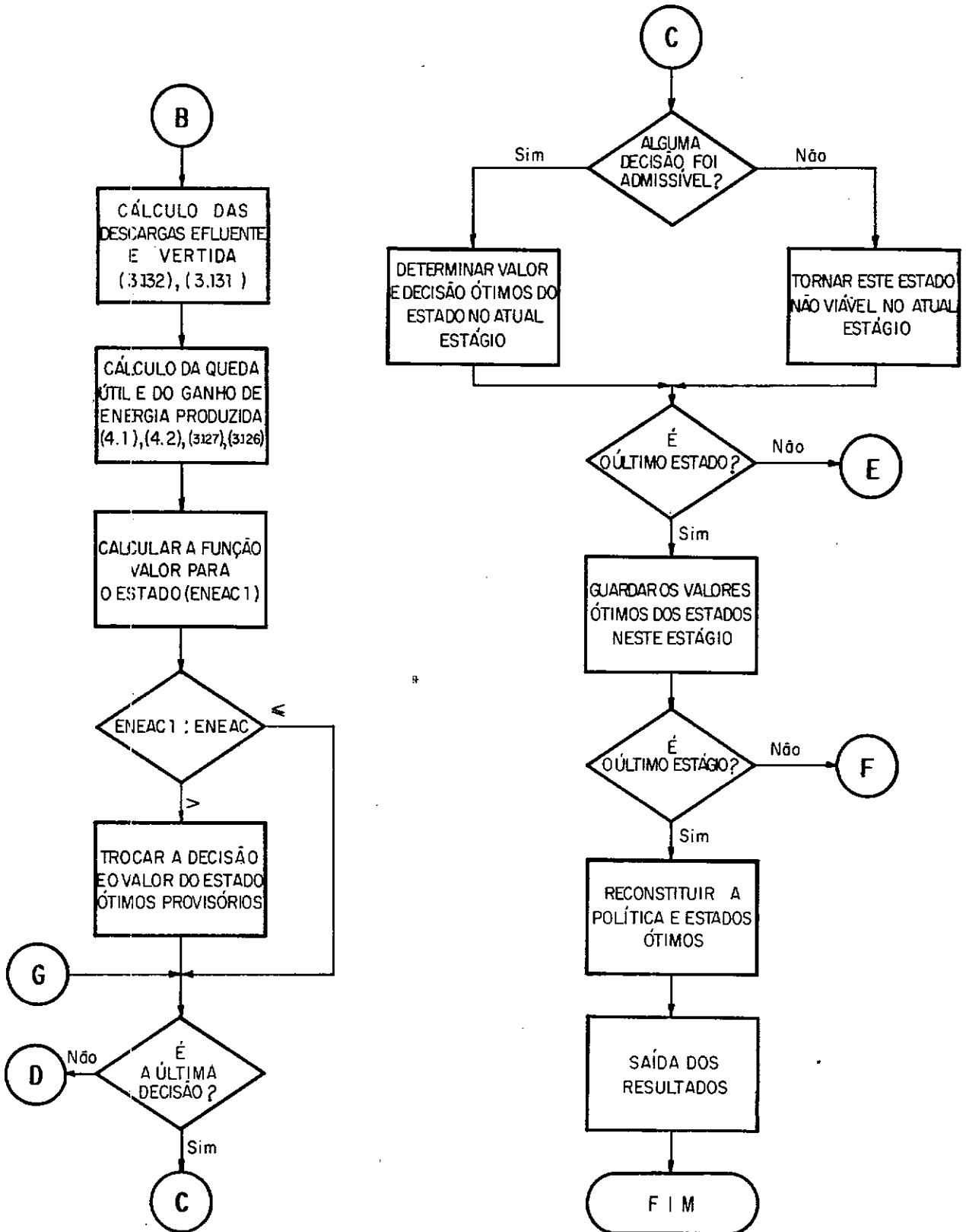




ANEXO 1.2 - FLUXOGRAMA DA ANÁLISE ESTRUTURAL



ANEXO 1 - 3 - FLUXOGRAMA DA OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO EM PERÍODO CRÍTICO



ANEXO 1 - 4 - FLUXOGRAMA DA OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO EM PERÍODO CRÍTICO

SERIE GERADA 1

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
4367	3600	2143	1292	799	450	263	227	199	307	472	603	
1409	1861	1419	667	566	470	261	146	39	218	334	843	
0	0	0	94	304	353	250	178	139	266	548	1517	
2428	1537	1615	794	304	197	271	241	207	201	564	1892	
2420	1218	1906	1019	506	489	361	314	205	252	570	1387	
3402	2733	1882	910	511	326	324	238	200	275	420	1140	
1311	3024	2265	1409	672	270	315	254	149	324	445	542	
1167	2714	1412	1089	444	402	332	351	341	382	624	464	
494	881	842	926	556	396	376	265	186	159	442	946	
2112	2852	1650	872	462	241	254	248	224	383	770	1118	
1456	1411	1718	1196	637	399	247	258	168	207	585	2133	
1922	729	2031	937	579	310	286	185	139	218	527	1396	
1287	1532	1616	1088	474	280	370	333	318	319	608	1075	
1190	909	484	655	487	243	188	95	75	60	300	41	
802	438	197	379	389	352	341	310	190	57	202	332	
1184	88	746	445	353	309	365	262	159	128	332	232	
924	552	928	608	450	400	289	269	155	128	433	970	
1478	817	563	643	557	510	391	256	165	282	686	1124	
1978	1535	1617	149	217	234	186	226	138	191	306	703	
1662	1750	935	868	362	258	265	254	251	528	645	1269	
1722	2025	1499	1099	811	520	457	325	157	88	218	697	
754	885	414	532	429	266	184	170	81	0	268	312	
1014	951	1656	1849	899	466	332	326	278	315	745	1631	
2116	855	1256	742	530	271	131	100	3	126	542	885	
1622	2727	1206	622	350	381	279	210	168	210	573	575	
1160	136	706	1241	949	583	433	346	389	624	1008	1275	
2361	4158	2920	1432	640	309	221	237	339	527	855	2076	
2254	1852	2161	1480	661	446	334	215	173	224	658	947	
1689	1408	1696	868	791	468	416	271	310	258	478	600	
600	1117	1202	1217	697	371	277	278	364	643	1180	2757	
MEDIA	1610	1543	1356	904	546	366	300	246	197	263	545	1049

198



## SERIE GERADA 2

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1067	1670	1394	1294	724	459	400	252	209	305	611	1379	
2584	2176	2001	1175	837	418	404	366	357	364	656	1073	
513	712	421	683	451	506	493	343	306	443	1144	2123	
1612	1800	837	615	419	355	342	189	159	232	474	851	
1463	1595	1110	1192	759	556	370	326	186	219	590	1086	
1613	2344	2124	1205	480	404	328	288	234	177	383	1239	
2244	2743	2265	771	523	328	286	278	203	224	760	919	
1043	1770	651	746	334	329	353	237	198	351	747	1750	
2337	2024	1227	1054	710	395	231	296	227	535	883	1063	
1022	1502	2285	1096	478	525	390	332	230	354	591	1081	
1629	313	86	1071	595	584	398	312	227	357	793	1242	
1458	1836	1332	395	435	300	256	196	125	260	487	913	
938	853	1406	982	760	535	476	342	334	463	739	1328	
1518	1053	1615	853	578	279	287	251	205	327	664	1257	
1361	1090	633	389	225	261	269	288	160	202	665	1424	
2596	2804	2290	856	503	435	305	306	183	288	374	568	
1084	964	1081	657	325	254	211	254	259	298	801	1593	
2140	2690	2135	1179	622	447	312	184	248	360	737	1328	
1197	2719	2354	2158	950	560	388	343	276	334	547	496	
1056	495	103	1269	615	442	294	274	263	593	745	979	
1478	867	911	1166	459	194	224	200	146	96	466	646	
805	1266	241	351	308	261	243	183	102	101	143	114	
218	338	311	497	410	408	323	277	217	290	435	178	
0	441	1179	1033	816	462	278	327	213	347	554	954	
591	1072	1576	378	498	327	259	228	103	59	577	536	
306	1217	1292	1309	574	370	256	274	223	185	632	1086	
1175	2416	1458	1072	702	507	482	372	263	546	948	1944	
2773	2779	2487	922	315	138	177	288	200	211	693	1349	
1233	1612	1485	652	401	300	422	293	241	304	550	1418	
1534	1112	674	674	277	237	292	194	72	5	313	374	
MEDIA	1353	1542	1299	923	536	386	325	277	212	294	623	1076

SERIE GERADA 3

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
2225	1680	720	758	414	169	151	157	139	189	691	1073	
978	2241	667	866	438	325	332	306	247	306	833	1437	
1487	1243	956	584	318	335	269	288	127	80	460	1880	
2031	1965	1888	1191	695	498	321	251	206	321	467	779	
483	1081	809	837	576	271	270	227	161	296	785	1062	
1190	701	715	515	479	405	467	324	219	376	723	971	
2555	2702	1613	1020	706	546	262	282	289	232	361	396	
0	1034	995	520	431	247	283	214	208	376	673	1117	
767	549	904	814	622	356	359	250	235	263	735	1228	
2263	1862	2074	1275	538	360	297	280	171	369	678	813	
663	0	332	353	516	409	421	286	218	333	559	1163	
1444	1427	1423	1247	582	295	248	137	159	286	593	532	
1001	309	1609	805	460	208	185	202	223	453	842	1710	
2385	2295	2127	1110	578	369	375	263	210	248	741	1023	
1757	1146	1029	1242	680	346	424	334	108	271	619	882	
807	1406	869	693	500	286	222	179	149	127	467	1292	
2448	2332	1431	831	505	250	300	218	117	203	871	1275	
2009	2794	2315	984	484	362	322	228	209	320	572	934	
1365	956	259	410	464	280	254	327	239	218	589	1136	
1775	1404	695	637	498	375	259	432	339	381	537	493	
719	507	867	451	447	307	348	338	209	103	314	21	
0	414	1716	903	394	333	198	218	200	331	624	1592	
2967	2125	1213	626	529	270	252	333	262	344	903	1936	
3438	3598	2783	1703	650	437	359	345	307	153	573	1370	
2871	1847	726	940	494	274	189	223	133	165	442	768	
462	289	462	206	334	240	344	183	151	167	158	490	
235	2519	1639	1364	901	541	406	310	216	452	782	1268	
2387	1761	533	868	443	370	345	321	251	357	569	1038	
910	2345	1774	1746	703	385	470	363	211	291	549	1287	
1769	2100	1696	962	491	516	505	398	259	310	780	1303	
MEDIA	1513	1554	1228	882	529	345	314	274	206	277	616	1076

- 100 -

SERIE GERADA 4

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1633	2027	1861	937	788	600	446	291	191	290	782	979	
2394	2390	1910	919	509	352	288	260	119	68	717	790	
1392	2113	1540	923	604	270	425	339	277	269	675	751	
1334	1515	1426	670	291	145	205	202	234	236	600	807	
953	906	570	503	414	166	234	203	118	95	370	592	
1576	1679	1102	1275	678	524	385	241	191	240	562	1277	
1531	1686	1418	952	576	441	315	298	254	425	777	1358	
2383	1585	2378	993	472	332	257	226	226	389	690	878	
724	211	824	281	507	306	232	209	132	301	688	1970	
1284	2491	2189	1027	612	360	403	395	246	404	672	806	
1513	1911	1521	946	532	271	297	284	316	404	680	1089	
1326	755	1480	1575	781	355	241	170	63	54	418	1188	
824	2006	807	680	333	232	285	240	304	403	1004	1672	
1209	2115	1935	1479	584	359	268	255	221	180	326	658	
1442	1043	783	957	580	469	305	264	274	328	666	1137	
2888	1665	1214	931	572	312	244	225	201	291	572	1415	
2245	2740	2014	1095	554	398	378	334	298	495	798	1114	
2146	1115	513	585	374	210	306	268	248	507	820	1123	
1847	1447	657	0	624	511	516	342	212	359	790	1136	
1050	1531	738	859	454	280	262	190	163	227	547	1284	
1223	2030	1698	1382	626	242	241	174	124	199	493	680	
843	950	1145	1208	609	382	324	279	224	151	562	930	
1651	2392	2086	1788	822	495	341	210	98	0	338	423	
591	549	590	660	551	515	334	313	249	313	511	1123	
1995	1842	2186	1230	784	489	320	332	210	173	268	0	
257	471	804	1091	846	645	561	378	308	432	574	988	
1135	1354	1328	1045	693	578	421	259	221	346	988	1476	
1190	665	1230	919	370	329	322	255	188	231	475	820	
1566	1366	1352	979	383	260	313	267	354	551	827	1656	
1734	2383	2015	1030	483	390	331	256	156	86	163	910	
MEDIA	1463	1564	1377	964	567	374	327	265	214	282	612	1034



SERIE GERADA 5

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1485	1102	1687	679	367	279	146	148	78	215	575	1113	
961	799	944	866	537	447	351	328	340	355	657	922	
2018	1466	1277	1152	501	359	209	224	101	214	626	1612	
1892	1178	1185	666	422	267	250	238	99	152	397	1137	
1453	1433	1583	920	456	213	326	276	239	296	494	1662	
1539	1948	1497	578	551	476	463	420	285	359	756	1198	
2223	1215	1115	576	402	157	255	251	161	188	361	926	
1510	2550	1311	986	581	479	285	168	148	217	575	1525	
1412	2337	154	0	444	361	445	409	303	305	786	1296	
1752	1363	1046	647	680	491	417	330	169	235	413	507	
1555	1848	1501	1223	762	499	375	469	352	331	567	874	
1221	1072	1229	1185	734	772	613	457	306	378	544	860	
1951	1866	1305	601	432	193	170	269	178	291	782	1573	
2192	1436	578	501	401	421	342	263	264	347	589	1169	
2377	3144	2428	1495	627	420	280	225	95	76	476	301	
457	267	330	265	290	313	350	237	203	230	514	1348	
1493	2495	1629	784	618	492	324	297	215	240	527	1308	
2303	1380	1811	759	521	357	257	246	126	182	511	1342	
2642	2362	2774	1424	614	269	231	242	226	306	899	1366	
725	190	380	179	143	132	185	163	156	91	380	428	
634	1298	994	267	304	376	305	308	155	177	467	1220	
964	920	148	214	150	199	150	291	122	343	1351	2185	
3490	2228	1215	1049	738	420	251	293	327	390	808	1660	
2192	2467	1071	353	262	251	398	257	251	371	752	808	
1246	1900	1282	799	602	437	450	335	279	573	723	1471	
881	653	1331	931	623	517	410	275	277	484	801	1716	
2181	1751	2129	1007	469	332	207	158	74	103	473	838	
401	3328	2242	614	694	543	351	349	243	208	769	1810	
2998	2458	1697	853	924	643	403	226	149	332	756	1411	
1951	2088	672	926	635	181	171	297	168	139	391	1127	
MEDIA	1670	1685	1285	750	516	376	312	282	203	271	624	1224

SERIE GERADA 6

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
	1346	1018	640	272	545	236	228	202	256	332	432	646
	182	1741	1454	964	475	397	318	240	288	328	706	747
	1388	1423	1630	1351	926	783	493	293	178	362	621	1607
	1883	2034	790	461	315	226	338	267	151	108	427	1159
	1648	2213	2827	1474	665	388	327	265	214	289	340	144
	1036	15	305	460	287	332	371	285	256	521	821	1588
	3311	3279	2110	919	625	482	412	323	260	381	626	1370
	2352	2575	2688	967	442	392	250	278	205	191	501	705
	1702	2204	1972	982	296	274	217	172	75	66	431	584
	18	1207	1647	830	638	391	294	215	178	96	368	964
	1493	2006	1033	1212	903	600	516	305	196	289	633	1014
	1687	1561	1578	896	239	337	295	356	210	329	626	1034
	1240	1741	1210	545	530	458	326	285	153	148	399	893
	1136	913	1203	1099	417	242	291	202	210	215	500	206
	232	613	834	1062	559	493	286	204	156	148	420	987
	1649	1689	1410	1019	374	165	199	152	78	17	204	436
	775	2514	2602	1055	500	324	281	224	269	369	699	1258
	2239	2389	1626	814	361	379	243	204	156	247	691	1818
	2340	2916	1576	1219	431	170	311	306	208	206	500	807
	1318	1605	1394	1085	552	335	263	241	215	295	744	1289
	2189	2187	1325	512	464	322	244	176	166	177	256	58
	842	711	55	753	372	289	211	231	179	270	607	1056
	1327	1335	1126	464	460	419	452	450	323	292	556	1326
	2336	1371	1489	749	458	299	232	187	151	380	701	1904
	3177	1479	1822	1268	661	247	338	317	345	356	882	1291
	1441	1007	1283	1086	823	588	389	303	282	334	657	995
	2221	2079	1500	657	429	219	245	194	152	180	670	865
	2299	1768	814	800	664	402	328	280	136	477	819	1575
	1265	2341	2030	1045	740	481	362	217	137	241	577	921
	1950	1237	1034	1755	753	380	333	216	154	192	198	940
MEDIA	1601	1706	1434	926	530	368	313	253	198	261	554	1006



SERIE GERADA 7

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
	938	1259	1296	618	215	99	287	188	104	97	399	1214
	1061	747	898	450	337	286	328	286	294	401	848	1175
	1482	2917	1953	1343	873	550	417	271	164	158	366	814
	982	1613	1852	981	693	637	453	273	139	183	324	212
	713	2175	1289	916	379	275	356	246	207	204	243	554
	856	2135	1923	1200	477	512	320	285	156	141	281	375
	792	1804	1366	682	320	315	372	242	152	201	351	1034
	1541	2486	1383	313	301	449	242	360	201	333	699	1144
	1541	1409	1486	596	440	354	175	110	51	260	804	1567
	1732	1117	206	146	326	325	268	257	215	143	471	273
	700	1042	410	721	280	162	224	181	119	106	145	0
	1103	708	519	1078	526	579	381	291	206	217	578	802
	1371	1211	865	+464	400	311	276	210	185	148	379	312
	390	452	754	0	455	233	178	246	191	262	412	1376
	3345	2816	1692	1606	670	473	375	327	279	448	753	1409
	1773	2533	1755	1012	497	222	389	362	381	371	673	1344
	1070	709	1280	1016	504	439	305	196	153	259	668	1426
	1537	1732	1253	258	482	503	501	320	256	309	593	611
	2126	3551	2429	1431	619	286	299	202	267	315	677	1555
	2235	2621	1652	845	502	369	318	226	211	236	783	1391
	1184	1015	999	837	261	272	263	290	230	385	846	1641
	1750	1572	589	263	391	372	236	270	215	264	459	999
	2127	1866	1212	588	517	588	325	289	180	142	432	376
	1574	1357	839	1288	578	291	230	121	143	112	532	1326
	1562	1686	1092	610	564	263	220	134	153	64	301	771
	561	314	944	553	456	478	376	326	152	238	521	868
	1078	1170	1639	940	428	420	290	220	131	125	516	507
	0	419	553	519	339	175	216	233	240	247	874	1127
	3057	2853	3327	1322	660	320	313	156	38	48	314	946
	1512	1551	1171	1494	906	574	418	298	285	329	664	909
MEDIA	1390	1628	1288	803	480	371	312	247	190	225	530	935

SERIE GERADA 8

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
	838	785	759	323	579	499	452	373	377	446	938	1458
	2057	2450	1815	1102	680	324	259	269	221	401	806	1373
	1483	600	1736	1611	940	540	331	222	169	388	792	1135
	1999	2788	1463	929	498	207	142	198	141	134	321	941
	1380	1372	781	589	429	274	348	262	167	264	711	1077
	1963	951	1711	941	567	252	251	172	100	0	1035	2004
	2142	2658	2634	1121	573	321	366	303	234	283	496	180
	1016	758	344	293	320	224	361	279	192	155	457	1383
	1373	830	87	777	553	289	256	236	214	222	548	1062
	573	1035	1526	656	495	450	352	247	217	232	585	1085
	3095	3075	1325	684	341	175	289	281	152	196	498	1423
	1877	2421	1877	906	396	183	196	163	128	121	311	496
	228	387	0	375	394	266	276	207	144	215	534	569
	402	508	591	123	421	454	347	228	310	437	762	1266
	1907	1922	1648	1169	635	550	367	308	278	400	614	2128
	3968	3099	2645	1030	582	340	473	302	223	235	449	773
	1169	1588	1224	614	331	238	358	322	348	413	818	1091
	2076	2333	2059	1129	482	402	271	226	189	237	262	272
	0	2394	1702	1035	712	448	307	224	188	353	501	555
	423	1522	1505	832	590	389	312	254	182	231	539	1061
	1861	1358	1188	632	584	375	278	232	158	195	353	964
	1065	1089	0	765	296	307	256	204	139	260	497	654
	2171	2108	1861	752	531	414	390	317	152	239	704	1413
	3183	3579	1979	836	848	371	468	265	186	321	667	973
	1905	2071	1837	1214	597	333	326	268	241	413	714	1666
	2408	2064	1177	1083	816	404	439	295	240	358	840	1603
	2796	3234	1722	1176	740	432	229	235	104	245	474	240
	762	1486	1974	1347	545	448	225	173	143	234	665	1505
	2370	1556	755	714	483	411	241	188	91	219	430	729
	592	997	1330	672	428	409	366	318	262	422	636	829
MEDIA	1636	1767	1375	848	546	358	318	252	196	276	599	1064

SERIE GERADA 9

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
	420	566	935	482	482	304	427	293	323	287	608	623
	1978	1631	1818	641	471	243	256	219	185	252	260	753
	1575	2563	1624	1162	656	580	472	283	208	356	446	792
	943	463	2131	1483	730	389	283	305	274	309	532	1305
	2209	1617	2005	721	344	337	255	251	175	309	541	1151
	2616	2773	1596	1212	696	670	409	297	309	286	737	1446
	1437	1018	1059	1110	653	515	455	425	310	452	679	1802
	3510	3374	2840	1723	777	457	299	242	238	142	304	557
	1029	1550	938	375	332	297	317	227	254	229	480	786
	426	591	1012	634	522	391	409	330	272	396	945	1535
	1335	849	922	783	712	492	422	293	214	278	668	1357
	1773	2499	1617	1031	413	235	204	224	156	207	425	421
	3568	2931	2299	1554	614	235	204	196	186	257	476	935
	1412	1754	1183	269	364	357	433	258	178	175	568	835
	2506	3106	1863	1450	625	375	422	348	325	461	588	1636
	1918	2601	1589	762	477	325	255	276	285	416	627	839
	1730	1638	1475	605	480	547	451	386	227	182	569	1259
	1481	475	1120	474	555	338	378	337	201	229	392	1208
	2243	1571	1129	1030	328	339	402	208	92	149	861	1366
	1368	499	1667	949	472	371	503	383	321	476	901	1883
	2751	2425	1668	1014	734	346	232	299	252	358	787	1373
	1626	1329	881	1246	808	431	346	294	320	519	849	1759
	1696	1174	1185	862	666	526	286	286	197	254	469	655
	751	933	371	479	312	224	295	273	246	427	634	2090
	2387	2884	3039	1283	447	256	271	231	160	113	353	230
	0	1062	1354	897	520	330	272	187	195	353	626	664
	239	1538	1561	896	573	335	402	337	280	312	873	1373
	2406	2832	1996	883	354	307	169	192	265	441	742	1673
	2578	2880	1733	773	604	351	290	206	190	227	393	774
	894	1720	2214	788	358	661	519	406	262	354	795	1267
MEDIA	1694	1762	1561	919	536	385	345	283	237	307	604	1145

SERIE GERADA 10

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	
674	1269	572	644	381	329	235	177	145	163	647	1143	
595	333	409	392	611	416	521	391	277	436	692	1128	
631	1014	990	278	657	464	381	283	151	166	450	352	
602	2135	2167	915	667	558	400	217	216	248	541	1129	
2636	2300	1991	446	496	597	545	348	260	423	651	1276	
1809	2067	700	882	752	496	345	329	165	326	432	526	
668	1305	738	866	472	314	444	308	279	204	495	1475	
1651	1554	699	605	403	391	448	320	211	126	348	705	
437	1664	1282	682	615	427	340	339	318	408	759	1656	
1905	2736	1375	426	336	273	457	348	303	338	413	873	
1438	1826	1151	992	739	359	351	233	180	232	518	773	
1466	1380	1769	1098	605	257	304	240	150	296	510	1333	
1544	798	1258	686	402	372	323	264	142	220	322	390	
635	873	1183	1148	481	150	168	176	149	219	352	864	
1763	2468	1175	611	592	330	273	198	99	227	366	1265	
1948	1569	2379	1153	664	328	244	238	293	440	881	1939	
4279	3308	1846	1228	686	331	253	219	120	114	249	667	
1153	1723	2198	1322	431	336	326	268	139	29	383	801	
1077	923	914	369	446	283	321	308	211	141	324	74	
762	2168	2473	816	311	298	277	195	179	279	670	849	
3152	2815	1485	1111	589	446	266	190	139	296	502	1167	
2050	1217	561	787	640	464	373	250	221	255	563	1382	
1600	894	0	93	272	250	395	237	144	239	678	1222	
2587	3130	2483	1149	620	440	461	426	391	593	1019	1658	
2247	3068	2337	842	468	308	292	351	283	423	687	1281	
1084	1098	1103	493	453	338	219	190	181	163	512	710	
1567	1751	257	441	332	334	294	235	271	205	581	1388	
3249	2775	3020	1912	980	478	327	201	126	185	368	1203	
2227	1346	365	294	484	396	279	318	259	396	580	528	
1011	2515	1723	1174	365	161	185	171	121	98	335	838	
MEDIA	1615	1801	1353	795	532	364	335	266	204	263	528	1020

ORDEM	M É D I A			V A R I Â N C I A		
	A <sub>j</sub>	B <sub>j</sub>	C <sub>j</sub>	A <sub>j</sub>	B <sub>j</sub>	C <sub>j</sub>
1	550,158	349,806	651,949	264.624,8	197.963,3	330.477,9
2	197,601	-19,466	198,558	182.960,5	-43.680,2	188.102,4
3	24,749	4,285	25,117	41.062,1	60.405,9	73.040,9
4	33,543	28,954	44,311	15.516,2	-16.689,8	22.788,2
5	22,728	6,889	23,749	17.552,2	-18.648,9	25.609,9
6	- 0,002	0,000	- 0,002	- 0,6	0,0	- 0,6
$\mu_x = 726,536$			$\sigma_x^2 = 205.650,8$			

ANEXO 3.1 - ANÁLISE HARMÔNICA DAS MÉDIAS E VARIÂNCIAS MENS AIS

MÊ S	$\mu_T$	$\sigma_T^2$	$\sigma_T$
JANEIRO	1465,9	746.641	864,1
FEVEREIRO	1558,7	732.028	855,6
MARÇO	1296,1	486.611	697,6
ABRIL	866,7	141.880	376,7
MAIO	517,8	27.682	166,4
JUNHO	357,3	13.519	116,3
JULHO	309,9	7.153	84,6
AGOSTO	256,0	3.960	62,9
SETEMBRO	195,8	4.380	66,2
OUTUBRO	263,6	14.063	118,6
NOVEMBRO	573,5	38.561	196,4
DEZEMBRO	1056,9	251.336	501,3

ANEXO 3.2 - FUNÇÕES PERIÓDICAS AJUSTADAS

M Ê S	CONSTANTE	V	V2	Q	Q2
JANEIRO	6,99642	0,22976	- 0,00111	0,33981	-0,00302
FEVEREIRO	-15,06405	0,49872	- 0,00195	0,41333	-0,00303
MARÇO	-17,58560	0,57696	- 0,00229	0,50408	-0,00843
ABRIL	3,02248	0,25138	- 0,00116	0,52372	-0,00650
MAIO	0,91324	0,32292	- 0,00147	0,47451	-0,00679
JUNHO	18,54636	0,02606	- 0,00039	0,53198	-0,00804
JULHO	- 4,72939	0,36384	- 0,00157	0,68731	-0,00978
AGOSTO	6,21690	0,26040	- 0,00132	0,65002	-0,01189
SETEMBRO	11,07345	0,14994	- 0,00087	0,64857	-0,00900
OUTUBRO	3,39031	0,32886	- 0,00157	0,30104	-0,00110
NOVEMBRO	2,82043	0,28578	- 0,00136	0,62767	-0,00987
DEZEMBRO	8,22851	0,26053	- 0,00134	0,32504	-0,00264

ANEXO 4 - REGRAS ÓTIMAS DE OPERAÇÃO - COEFICIENTES DAS REGRESSÕES