

CÁLCULO DE PLACAS E GRELHAS DELGADAS E
ESPESSAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

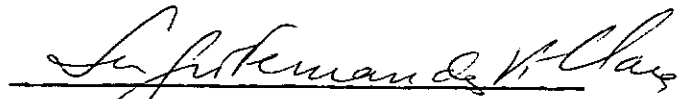
Luiz Eloy Vaz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:


Presidente







Este trabalho foi realizado com a dedicada orientação do engenheiro José Oliveira Pedro, Chefe da Divisão de Estudos Especiais do Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa, tendo sido desenvolvido no Centro de Cálculo do referido Laboratório e no Núcleo de Computação Eletrônica da Coordenação de Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro com a colaboração financeira do Conselho Nacional de Pesquisas e da Fundação Calouste Gulbenkian.

SINOPSE

Formulam-se dois elementos, um de grelha e outro de placa, degenerados do elemento isoparamétrico tridimensional com campo de deslocamento do segundo grau e leva-se em conta a influência do esforço cortante na deformação.

Elabora-se um programa de cálculo automático com os elementos apresentados e obtêm-se resultados numéricos para alguns exemplos de aplicação.

Verifica-se uma boa aproximação das soluções consideradas exatas com os elementos utilizados.

ABSTRACT

We formulate a grid and a plate element degenerating a three-dimensional isoparametric element with a second degree displacement field and we introduce the effect of the shear deformation.

We elaborate a program of automatic calculus with the elements presented and we obtain numerical results for some examples of application.

We verify a good approximation of the considered exact solutions with the used elements.

ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO	
II	- O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	
	2.1 - Fundamentos	
	2.2 - Formulação a partir de funções de deslocamento ..	
III	- ELEMENTO FINITO DE GRELHA	
	3.1 - Pequeno histórico e justificativa do caminho se-	
	guido	
	3.2 - Transformação de coordenadas	
	3.3 - Funções de deslocamento	
	3.4 - Tensões e deformações	
	3.5 - Matriz de rigidez e de esforços	
	3.6 - Forças nodais equivalentes	
IV	- ELEMENTO FINITO DE PLACA	
	4.1 - Pequeno histórico e justificativa do caminho se-	
	guido	
	4.2 - Transformação de coordenadas	
	4.3 - Funções de deslocamento	
	4.4 - Funções e deformações	
	4.5 - Matriz de rigidez e de esforços	
	4.6 - Forças nodais equivalentes	
V	- DESCRIÇÃO DO PROGRAMA	
	5.1 - Características do programa principal e suas sub-	
	rotinas	

5.2 - Significado das principais variáveis
5.3 - Leitura das variáveis
5.4 - Capacidade do programa
5.5 - Resultados fornecidos pelo programa
5.6 - Listagem do programa

VI - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

VII - CONCLUSÃO

APÊNDICE I

APÊNDICE II

APÊNDICE III

APÊNDICE IV

BIBLIOGRAFIA

SIMBOLOGIA

$\{X\}$	Indica que X é uma matriz coluna
$X_{,m}$	Derivada de X em relação a m
\underline{X}	Indica que X é uma matriz
X^T	Indica que se trata da matriz transposta de X
K	Matriz de rigidez
X	Forças nodais equivalentes
Q	Forças que atuam sobre o elemento
\bar{M}	Matriz de massa
ρ	Peso específico
N	Função de interpolação
δ	Delta de Kröneker
D	Matriz de elasticidade
B	Matriz de deformações
DB	Matriz de tensões
σ	Tensão normal
τ	Tensão tangencial
x	Coordenada relativa ao sistema de eixos globais
y	Coordenada relativa ao sistema de eixos curvilíneos locais
\bar{x}	Coordenada relativa ao sistema de eixos locais para_ lelos aos eixos de ortotropia do material
e	Espessura do elemento de grelha
h	Altura dos elementos
θ	Rotações relativas ao sistema de eixos globais
\bar{u}	Deslocamento generalizados
u	Deslocamentos relativos ao sistema de eixos globais

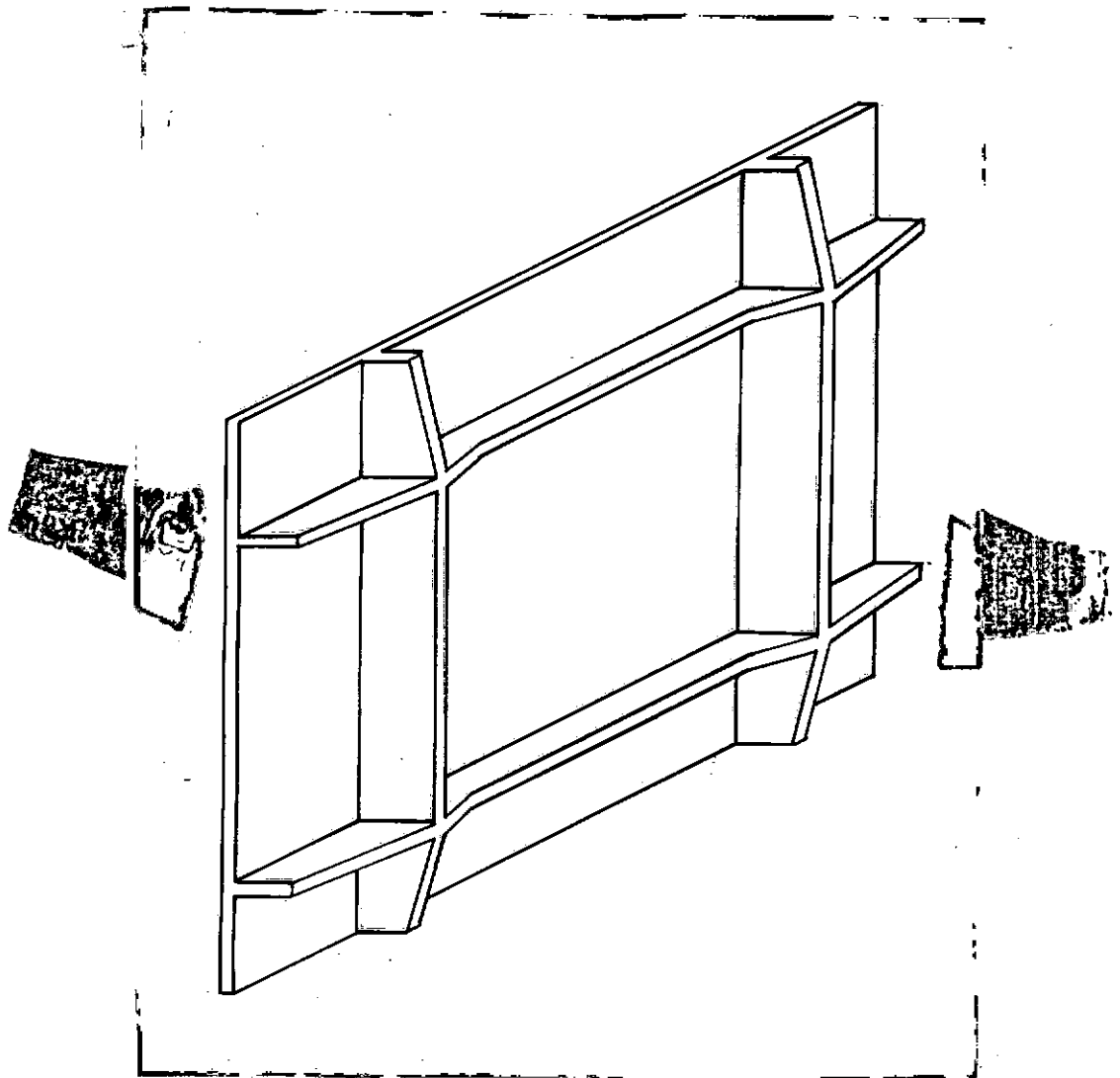
δ	Vetor composto dos deslocamentos u_3, θ_1 e θ_2
ϵ	Deformações lineares
γ	Distorções
\bar{A}	Operador diferencial
J	Matriz do Jacobiano
Y	Matriz inversa do Jacobiano
U	Matriz das derivadas dos deslocamentos u em relação ao sistema de eixos y
Δ	Determinante do Jacobiano
Δ_{33}	Menor complementar do termo J_{33} do Jacobiano
v	Sistema de eixos ortogonais locais definidos nos pontos de integração dos elementos de grelha
$\bar{N}, \bar{A}, \bar{C}, \bar{F}$ e \bar{G}	Operadores auxiliares
L	Comprimento dos vetores que indicam as direções do sistema de eixos v
R	Matriz de rotações de deslocamentos
T	Matriz de rotações de esforços
α' e β	Coeficientes de correção da matriz de elasticidade do elemento de grelha
E	Módulo de Young
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coeficiente de Poisson
c	Vetor de duas linhas relativas ao coseno e ao seno de um ângulo α respectivamente
T_0	Diferença entre as temperaturas relativas às coordenadas locais $y_3 = 1$ e $y_3 = -1$
α	Ângulo que uma direção qualquer faça com o eixo global x_1
$\bar{\alpha}$	Coeficiente de dilatação térmica linear

k, ψ e d	Parâmetros auxiliares elásticos
M	Momentos
Q'	Esforços cortantes
E'	Matriz de esforços
P	Vetor de esforços

I - INTRODUÇÃO

É corrente utilizar-se como modelos de sistema estruturais os de grelhas e os de placas. Entende-se por grelha uma estrutura plana formada por barras que se cruzam e recebem solicitação não coplanar e por placa uma peça laminar plana, sujeita principalmente a solicitações de direção não coplanar à sua superfície média (ref. 1). Dependendo da relação entre a espessura e as outras dimensões, estas peças são consideradas delgadas ou espessas. A primeira caracteriza-se pelo fato de pontos da grelha ou da placa inicialmente pertencentes à normal ao eixo, ou ao plano médio da peça, permanecerem ainda sobre a normal ao eixo ou à superfície média após a deformação (Kirchoff) enquanto que para a segunda esta hipótese não se mantém (ref. 2).

Tais peças estruturais surgem, por exemplo, no cálculo de um muro de arrimo com contrafortes, onde o conjunto dos contrafortes e dos painéis a eles ligados são placas e grelhas associadas em relação às solicitações de empuxo de terra e pressão hidrostática devidas aos lençóis d'água. Da mesma forma, nos pavimentos dos edifícios e também nos tabuleiros das pontes, onde as vigas longitudinais, as transversinas e a plataforma formam um conjunto de grelhas e placas associadas, apoiado em pórticos.



Ainda nas marquises de estádios, contrafortes de barragens de concreto, etc., recorre-se a esquemas estruturais que são ora uma grelha, ora uma placa e muitas vezes um conjunto destas duas peças estruturais.

Vários têm sido os métodos de cálculo utilizados até aqui no estudo destas estruturas. A resistência dos materiais de há muito formulou as hipóteses básicas e permitiu conhecer o funcionamento das peças lineares reticuladas o que possibilitou o estudo de estruturas que trabalhassem como grelhas. A teoria das placas apresenta soluções de casos com formas, carregamentos e condições de contorno pouco complexos para placas delgadas isótropas, sendo muito poucos os casos resolvidos para placas ortótropas e para placas espessas (ref. 2). Embora a teoria das placas não tenha

ido muito longe, ela foi responsável pela formulação das hipóteses básicas de comportamento destas peças e permitiu aos estudiosos uma rápida comprovação da exatidão de seus novos métodos.

Tendo estas ferramentas em mãos, os engenheiros utilizavam-nas, com bom senso, para resolver casos mais complexos, sendo usual a passagem de um meio contínuo para o discreto, e vice-versa, assim placas de formas e carregamentos complexos eram discretizadas e tratadas como grelhas e grelhas nas quais as distâncias entre as peças fossem desprezíveis em relação às dimensões do conjunto eram tratadas como um contínuo (ref. 2 e 3) no que se conseguia grande economia de tempo, pois evitava-se a resolução de grandes sistemas de equações, o que até bem pouco tempo era trabalho árduo. Estruturas que possuem grelhas e placas ou têm sido discretizadas e tratadas como grelhas ou então tratadas como placa ortótropa que lhes seja estruturalmente equivalente. Embora sejam ainda largamente utilizados, tais métodos nunca puderam inspirar grande confiança por serem uma forma indireta e aproximada de se estudar o problema. Como a análise experimental através de modelos reduzidos é dispendiosa e difícil (ref. 4), foi através dos métodos numéricos que se tentou ultrapassar estas limitações. Um destes métodos consiste na substituição das equações diferenciais obtidas pelas correspondentes equações de diferenças finitas. Apesar de se ter conseguido uma maior liberdade na forma, nada foi acrescentado em relação às estruturas mistas com o método das diferenças finitas. Já o método dos elementos finitos apresentou não somente as virtudes daquele método como também tinha sobre ele as seguintes vantagens:

- a) O sistema de equações lineares obtido é normalmente mais bem condicionado e em geral apresenta menos problema (ref. 5).
- b) Maior facilidade no trato das condições de contorno, heterogeneidade e anisotropia do material.
- c) Permiteu tratar problemas de estrutura mistas de uma forma análoga a das estruturas simples.
- d) Problemas de natureza dinâmica, os devidos à não linearidade física e os devidos à não linearidade geométrica são tratados de uma forma discretizada analogamente aos problemas de natureza estática (ref. 5 e 6).

Devido à sua grande potencialidade, que permitiu tratar problemas para os quais uma solução analítica "razoavelmente rigorosa" (diz-se assim porque como se sabe o método implica numa aproximação nas condições de equilíbrio ou de compatibilidade, que apenas são verificadas num conjunto discreto de pontos da estrutura) era impossível, o método popularizou-se.

Este trabalho tem por finalidade fornecer novas ferramentas para o estudo de grelhas, placas e dos conjuntos grelhas e placas, pelo método dos elementos finitos, com formas, condições de contorno e carregamentos os mais variados possíveis, e que sejam delgadas ou espessas. Para tanto, formulam-se e programam-se dois elementos, um de grelha e outro de placa, ambos degenerados de elementos isoparamétricos tridimensionais com campo de deslocamento do segundo grau.

II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - Fundamentos

O método dos elementos finitos é um processo que serve para formular e resolver problemas de análise estrutural, entre outros. O conceito fundamental deste método é que qualquer sistema estrutural, contínuo ou não, pode ser considerado como um conjunto de um número finito de elementos conectados através de um número discreto de nós. Esta natureza finita ou discreta da conectividade distingue o método dos elementos finitos dos métodos da mecânica dos meios contínuos (ref. 7).

Definindo-se a energia potencial ou complementar para cada elemento, e somando-se estas energias para todos os elementos, desde que haja compatibilidade ou equilíbrio nos pontos nodais de elementos vizinhos, é possível obter a energia potencial ou complementar total da estrutura em função dos deslocamentos ou das tensões nos pontos nodais. Nestas condições, pode-se mostrar que a energia potencial ou complementar total é não somente estacionária mas, também, mínima e tal minimização conduz às equações de equilíbrio ou de compatibilidade para a estrutura. O método é, pois, um método variacional e pode ser aplicado em todos os problemas deste tipo, sejam ou não de cálculo estrutural (ref. 4).

Embora hoje se saiba que o método dos elementos finitos é um método variacional ele tem sido apresentado, quando os trabalhos são de modelos de deslocamentos, em forma idêntica à da análise matricial de estruturas reticuladas, o que facilita a sua compreensão para o engenheiro estrutural.

2.2 - Formulação a partir de funções de deslocamento

Fixam-se as leis de variação dos deslocamentos, u_m , no volume do elemento, em função dos valores dos deslocamentos nodais, de forma que a função de deslocamento satisfaça as condições de completude e conformidade (ref. 5).

$$\begin{aligned} \bar{u}_m &= N_i \bar{u}_{im} ; m = 1, 2 \dots \text{número de graus de liberdades ;} \\ i &= 1, 2 \dots \text{número de pontos nodais do elemento} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

N_i são as funções de interpolação representadas em função das coordenadas x_{ni} ($n=1$, para problemas lineares; $n=1, 2$, para problemas planos; $n=1, 2, 3$, para problemas tridimensionais).

Por vezes há conveniência de se escrever estas funções noutras variáveis, y_n , relacionadas com x_n .

A partir da expressão (2.2.1) calculam-se as deformações ϵ_p , por intermédio de um operador diferencial adequado \bar{A}_{pm} .

$$\epsilon_p = \bar{A}_{pm} \bar{u}_m = \bar{A}_{pm} N_{im} \bar{u}_{im} = B_{pmi} \bar{u}_{im} \quad (2.2.2)$$

Para uma relação linear entre tensões e deformações

$$\sigma_p = D_{pq} (\epsilon_q - \epsilon_q^0) \quad (2.2.3)$$

sendo ϵ_q^0 deformações impostas. As tensões podem ser escritas em função dos deslocamentos nos pontos nodais.

$$\sigma_p = D_{pq} B_{qnj} \bar{u}_{jn} - D_{pq} \epsilon_q \quad (2.2.4)$$

Considere-se atuando sobre o elemento forças de massa Q_m , forças de superfície \bar{Q}_m e forças de inércia, $Q_{om} = -\rho \ddot{u}_m$, pode-se, então, obter as $i \times m$ equações de equilíbrio.

$$K_{ij}^{mn} \bar{u}_{im} + \bar{M}_{ij}^{mn} \ddot{u}_{im} = X_{im} + \bar{X}_{im} + X_{oim}$$

onde n e j variam como m e i respectivamente e:

$$K_{ij}^{mn} = \int_v B_{pmi} D_{pq} B_{qnj} dv \quad (2.2.5)$$

$$\bar{M}_{ij}^{mn} = \delta_{nm} \int_v N_i \rho N_j dv \quad (2.2.6)$$

$$X_{im} = \int_v N_i Q_m dv \quad (2.2.7)$$

$$\bar{X}_{im} = \int_s N_i \bar{Q}_m ds \quad (2.2.8)$$

$$X_{iom} = \int_v B_{pmi} \sigma_p^0 dv \quad (2.2.9)$$

Sendo $\{\bar{u}\}$ os deslocamentos nodais generalizados da estrutura, uma vez que se soma adequadamente as equações relativas a cada elemento, obtêm-se as equações de equilíbrio relativas ao conjunto da estrutura.

$$\underline{K}\{\bar{u}\} + \underline{\bar{M}}\{\ddot{\bar{u}}\} = \{X\} + \{\bar{X}\} + \{X_0\}$$

sendo agora \underline{K} , $\underline{\bar{M}}$, $\{X\}$, $\{\tilde{X}\}$, $\{X_0\}$ respectivamente as matrizes de rigidez e de massa, e os vetores das forças de massa, de superfície e iniciais da estrutura.

III - ELEMENTO FINITO DE GRELHA.

3.1 - Pequeno histórico e justificativa do caminho seguido

Até aqui os programas de cálculo automático de grelhas têm sido abordados pelos livros de cálculo matricial de estruturas, estudando peças de eixo reto e seção transversal constante. Para peças de seção transversal variável recorre-se a uma integração numérica para a obtenção das matrizes de rigidez dos elementos. Figueroa (ref. 8) formulou e elaborou um programa de cálculo automático de eixo curvo e seção variável obedecendo a sistematização encontrada em Gere e Weaver (ref. 9) e num trabalho de Lobo Carneiro (ref. 10).

No caso presente a escolha do elemento a ser utilizado para o estudo das grelhas ficou condicionada à escolha do elemento de placa. Assim, a definição de um elemento degenerado do elemento tridimensional com campo de deslocamento do segundo grau para o estudo das placas forçou a tentativa de formular um elemento de grelha que pudesse tanto acompanhar a geometria definida pelo elemento de placa como também fosse totalmente compatível em deslocamentos com aquele elemento. A escolha recaiu sobre um elemento de grelha que também fosse degenerado do mesmo elemento isoparamétrico tridimensional parabólico apresentado a seguir.

3.2 - Transformação de coordenadas

O elemento fica caracterizado geometricamente pelas coordenadas x_m ; $m = 1, 2$ do eixo, pelas projeções da espessura e_m ; $m = 1, 2$ e pela altura h nos três pontos que caracterizam o elemen-

to $(x_{im}, e_{im}, h_i ; i = 1,2,3 ; m = 1,2)$. As coordenadas, a espessura e a altura num ponto qualquer do elemento são obtidas por interpolação parabólica através das funções N_i (fig. 1).

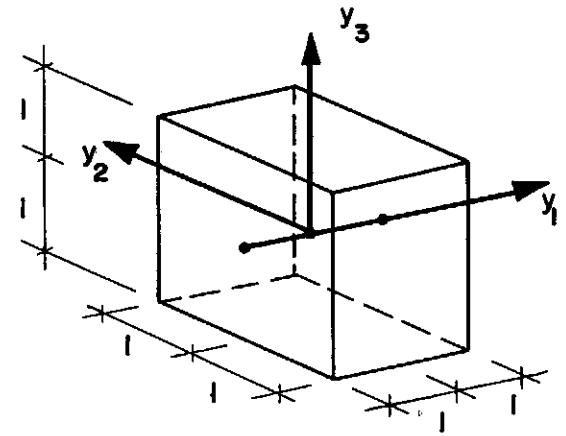
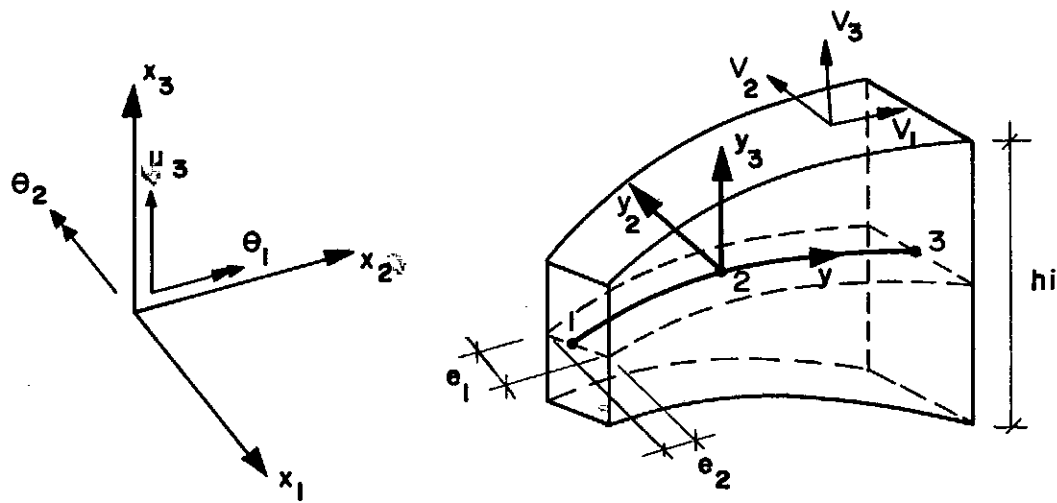
As projeções da espessura nos eixos x_m ; $m = 1,2$ são obtidas da forma indicada no apêndice I.

$$\begin{aligned}x_1 &= N_i \left(x_{1i} + \frac{e_{1i}}{2} y_2 \right) \\x_2 &= N_i \left(x_{2i} + \frac{e_{2i}}{2} y_2 \right) \\x_3 &= N_i \frac{h_i}{2} y_3\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}N_i &= \frac{y_1}{2} (y_1 + y_{i1}) ; i = 1,2 \\N_3 &= (1 - y_1^2)\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

3.3 - Funções de deslocamento

Os descolamentos u_m ; $m = 1,2,3$ variam parabólicamente segundo o eixo y_1 e são independentes da espessura, sendo que u_m ; $m = 1,2$ variam linearmente segundo y_3 sendo nulos para $y_3 = 0$ e u_3 é independente de y_3 .



Transformação de coordenadas

$$x_1 = N_i \left(x_{1i}^o + \frac{e_{1i}}{2} y_2 \right)$$

$$x_2 = N_i \left(x_{2i}^o + \frac{e_{2i}}{2} y_2 \right)$$

$$x_3 = N_i \frac{h_i}{2} y_3$$

Funções de deslocamentos

$$u_1 = N_i \theta_{1i}^o \frac{h_i}{2} y_3$$

$$u_2 = N_i \theta_{2i}^o \frac{h_i}{2} y_3$$

$$u_3 = N_i u_{3i}^o$$

FIG.1 - ELEMENTOS FINITOS PARA ESTUDO DE GRELHA, DEGENERADOS DE ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS PARABÓLICOS

$$\begin{aligned}
 u_1 &= N_i \theta_{1i} \frac{h_i}{2} y_3 \\
 u_2 &= N_i \theta_{2i} \frac{h_i}{2} y_3 \\
 u_3 &= N_i u_{3i}
 \end{aligned}
 \quad \delta_i = \left\{ \begin{array}{c} u_{3i} \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{array} \right\} \quad (3.3.1)$$

Onde θ_{mi} ; $m = 1,2$ são as rotações indicadas na fig. 1.

3.4 - Tensões e deformações

Precisa-se agora, a partir da definição das funções de coordenadas e deslocamentos expressas em função dos parâmetros nodais, obter as deformações e tensões necessárias ao cálculo da matriz de rigidez do elemento.

Para as deformações referenciadas ao sistema global ter-se-á:

$$\epsilon_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n} = \frac{\partial u_m}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \quad ; \quad m = 1,2,3 \quad ; \quad n = 1,2,3 \quad ; \quad k = 1,2,3 \quad (3.4.1)$$

Chamando-se:

$$\begin{aligned}
 U_{mk} &= \frac{\partial u_m}{\partial y_k} \\
 Y_{kn} &= \frac{\partial y_k}{\partial x_n}
 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

ter-se-á:

$$\epsilon_{mn} = U_{mk} Y_{kn} \quad (3.4.3)$$

Derivando-se expressões (3.3.1) de u_m ; $m = 1, 2, 3$ em relação a y_k ; $k = 1, 2, 3$ e sabendo-se que N_i é função de y_1 , sendo $N_{i,1}$ a derivada de N_i em relação de y_1 .

$$N_{i,1} = y_1 + \frac{y_{i1}}{2} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (3.4.4)$$

$$N_{3,1} = -2y_1$$

Poder-se-ã escrever:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} N_{i,1} \theta_{1i} \frac{h_i}{2} y_3 & 0 & N_i \theta_{1i} \frac{h_i}{2} \\ N_{i,1} \theta_{2i} \frac{h_i}{2} y_3 & 0 & N_i \theta_{2i} \frac{h_i}{2} \\ N_{i,1} u_{3i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

Observando (3.4.2) vê-se que a matriz \underline{Y} é igual ao inverso do Jacobiano \underline{J} sendo este facilmente obtido derivando-se expressões (3.2.1) de x_k ; $k = 1, 2, 3$, em relação a y_n ; $n = 1, 2, 3$, ter-se-ã:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} N_{i,1} (x_{1i} + \frac{e_{1i}}{2} y_2) & N_i \frac{e_{1i}}{2} & 0 \\ N_{i,1} (x_{2i} + \frac{e_{2i}}{2} y_2) & N_i \frac{e_{2i}}{2} & 0 \\ N_{i,1} \frac{h_i}{2} y_3 & 0 & \frac{N_i h_i}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Fazendo-se $J_{31} = y_3 \bar{J}_{31}$, ter-se-á para os termos de

\underline{Y}

$$Y_{mm} = \frac{J_{3-m \ 3-m}}{\Delta_{33}}$$

$$Y_{m \ 3-m} = - \frac{J_{m \ 3-m}}{\Delta_{33}} \quad ; \quad m = 1, 2 \quad (3.4.7)$$

$$Y_{3m} = (-1)^{3+m} \frac{\bar{J}_{31} J_{3-m \ 2}}{\Delta} y_3$$

$$Y_{33} = \frac{1}{J_{33}}$$

onde:

$$\Delta = J_{33} (J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21})$$

$$\Delta_{33} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}$$

Tem-se agora condições de escrever os termos da matriz ϵ_x das derivadas dos deslocamentos u_m em relação ao sistema global x_n .

$$\epsilon_{xmn} = Y_{1n} N_{i,1} \theta_{mi} \frac{h_i}{2} y_3 + Y_{3n} N_{i,\theta} \theta_{mi} \frac{h_i}{2} y_3 = y_3 \frac{h_i}{2} A_{ni} \theta_{mi}$$

$$\epsilon_{xm3} = Y_{33} N_{i,\theta} \theta_{mi} \frac{h_i}{2} = C_i \theta_{mi}$$

; $m=1,2; n=1,2$

$$\epsilon_{x3n} = Y_{1n} N_{i,1} u_{31} = F_{ni} u_{3i}$$

$$\epsilon_{x33} = 0 \quad (3.4.8)$$

onde:

$$A_{ni} = Y_{1n} N_{i,1} + Y_{3n} N_i$$

$$C_i = Y_{33} N_i \frac{h_j}{2}$$

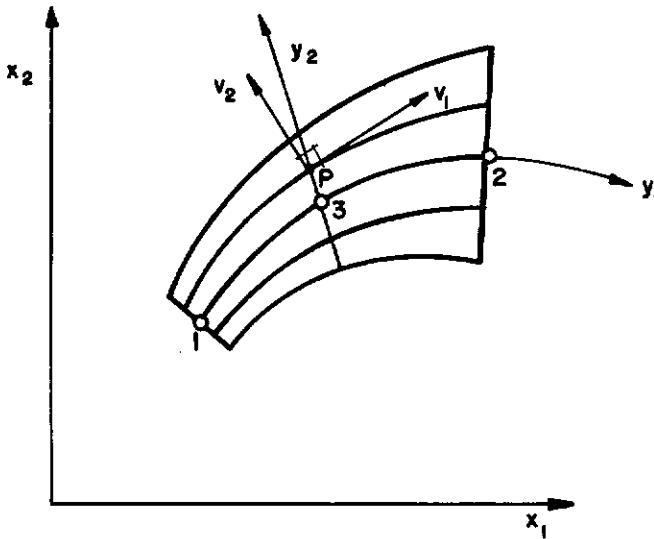
$$F_{ni} = Y_{in} N_{i,1}$$

Como a matriz acima referida está relacionada aos eixos globais, é necessário realizar-se uma transformação referenciando esta matriz aos eixos ortogonais v_n no qual v_1 tem a direção da tangente a linha y_2 e $y_3 = \text{constante}$, v_2 é perpendicular ao plano formado por v_1 e um vetor paralelo ao eixo x_3 e v_3 é um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores v_1 e v_2 , como indica a fig. 2.

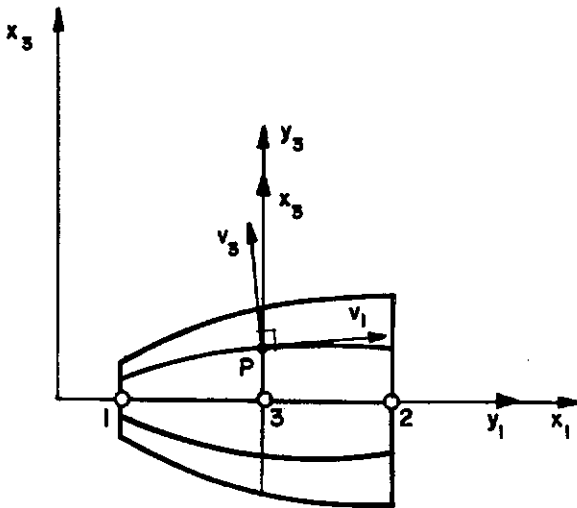
Como v_1 é um vetor unitário cuja direção é a da tangente à linha cujos pontos têm coordenadas x_m ; $m = 1, 2, 3$ correspondentes a um valor constante de y_2 e y_3 para qualquer y_1 , pode-se escrever:

$$v_1 = \frac{1}{L_1} \left\{ \begin{array}{l} J_{11} \\ J_{21} \\ y_3 J_{31} \end{array} \right\} \quad \text{onde } L_1 = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2 + y_3^2 J_{31}^2}$$

Seja o vetor x_3 um vetor unitário paralelo ao eixo



a- Projecção da peça no plano $\overline{x_1 x_2}$



b- Projecção da peça no plano $\overline{x_1 x_3}$

FIG. 2 - Direção em um ponto genérico P, do sistema de eixos Vm

$$x_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A direção do vetor v_2 é então obtida através do produto vetorial de $x_3 \times v_1$ e como ele também deve ser unitário ter-se-á:

$$v_2 = \frac{1}{L_2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \\ y_3 \bar{J}_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_2} \begin{Bmatrix} -J_{21} \\ J_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{onde } L_2 = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}$$

Finalmente a direção do vetor unitário v_3 será obtida do produto vetorial $v_1 \times v_2$ e para o vetor v_3 ter-se-á:

$$v_3 = \frac{1}{L_3} \begin{Bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \\ y_3 \bar{J}_{31} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -J_{21} \\ J_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -J_{11} \bar{J}_{31} y_3 \\ -J_{21} \bar{J}_{31} y_3 \\ J_{11}^2 + J_{21}^2 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$L_3 = \sqrt{y_3^2 (J_{11} \bar{J}_{31})^2 + y_3^2 (J_{21} \bar{J}_{31})^2 + (J_{11}^2 + J_{21}^2)^2}$$

Tendo-se agora os vetores unitários na direção v_n , pode-se construir a matriz R dos cosenos diretores e a partir dela se obter a matriz $\underline{\varepsilon}_v$ das derivadas dos deslocamentos na direção v_m :

$m = 1,2,3$ em relação ao sistema local v_n ; $n = 1,2,3$.

$$\underline{R} = \left[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \right]$$

logo:

$$\underline{\varepsilon}_v = \underline{R}^T \underline{\varepsilon}_x \underline{R} \quad (3.4.9)$$

Dos termos da matriz das deformações generalizadas, $\underline{\varepsilon}_v$ relativas aos sistemas de eixos v_n utilizam-se somente aqueles necessários a formação do vetor das deformações $\bar{\varepsilon}_v$, como indicado em (3.4.10), que irão fornecer respectivamente o momento fletor, torsor e o esforço cortante que atuam numa dada seção do elemento.

$$\bar{\varepsilon}_{v11} = \varepsilon_{v11}$$

$$\bar{\gamma}_{v12} = \varepsilon_{v12} + \varepsilon_{v21} \quad (3.4.10)$$

$$\bar{\gamma}_{v13} = \varepsilon_{v13} + \varepsilon_{v31}$$

Uma vez efetuado o produto indicado em (3.4.9) e selecionados os termos indicados em (3.4.10) pode-se escrever a matriz de deformação \underline{B}_i que fornece as deformações $\bar{\varepsilon}_v$ em função dos deslocamentos nodais δ_i

$$\bar{\varepsilon}_v = \underline{B}_i \delta_i$$

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 F_{1i}R_{11}R_{31} + F_{2i}R_{21}R_{31} \\
 \hline
 F_{1i}R_{12}R_{31} + F_{2i}R_{22}R_{31} \\
 \hline
 F_{1i}(R_{11}R_{33} + R_{13}R_{31}) + F_{2i}(R_{21}R_{33} + R_{23}R_{31})
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l}
 \frac{h_i}{2} y_3 (A_{1i}R_{11}R_{11} + A_{2i}R_{21}R_{11} + C_i R_{31}R_{11}) \\
 \frac{h_i}{2} y_3 \{ 2A_{1i}R_{11}R_{12} + A_{2i}(R_{21}R_{12} + R_{22}R_{11}) \} + C_i R_{31}R_{12} \\
 \frac{h_i}{2} y_3 \{ 2A_{1i}R_{11}R_{13} + A_{2i}(R_{21}R_{13} + R_{23}R_{11}) \} + C_i (R_{31}R_{13} + R_{11}R_{33})
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l}
 \frac{h_i}{2} y_3 (A_{1i}R_{11}R_{21} + A_{2i}R_{21}R_{21} + C_i R_{31}R_{21}) \\
 \frac{h_i}{2} y_3 \{ A_{1i}(R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21}) + 2A_{2i}R_{21}R_{23} \} + C_i R_{31}R_{22} \\
 \frac{h_i}{2} y_3 \{ A_{1i}(R_{11}R_{23} + R_{13}R_{21}) + 2A_{2i}R_{21}R_{23} \} + C_i (R_{31}R_{23} + R_{33}R_{21})
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (3.4.11)$$

A tensão σ_{v11} na direção de v_1 é obtida multiplicando-se a deformação $\bar{\epsilon}_{v11}$ pelo módulo de elasticidade longitudinal.

A tensão τ_{v12} na direção de v_2 é obtida multiplicando-se a deformação $\bar{\gamma}_{v12}$ pelo produto $G\beta$, sendo G o módulo de elasticidade transversal e β um fator de correção que corrige o fato de se ter adotado uma função de deslocamento, para u_m ; $m = 1, 2$, variando linearmente em relação a y_3 e em consequência ter-se-á τ_{v12} também variando linearmente em relação a y_3 . Tal suposição iria fornecer um fator que seria a inércia à flexão da seção transversal quando da integral ao longo da seção para o cálculo do momento torsor (como acontece no cálculo do momento fletor) ao invés da

inércia à torção da referida seção como detalhado no apêndice II .

O fator β , sendo a relação entre a inércia à torção e a inércia a flexão da seção transversal, corrige, desta forma, este erro introduzido nas funções de deslocamento, ter-se-á para β :

$$I_t = \frac{e^3 h}{12} + \frac{h^3 e}{12} = \frac{eh}{12} (e^2 + h^2)$$

$$I_f = \frac{eh^3}{12}$$

$$\beta = \frac{I_t}{I_f} = \frac{e^2 + h^2}{h^2} = 1 + \left(\frac{e}{h}\right)^2$$

onde I_t é a inércia à torção e I_f a inércia à flexão da seção transversal.

Da mesma forma, se se observa que a tensão τ_{v13} na direção de v_3 é praticamente paralela à direção de y_3 e como tal, devido ao fato de u_1 variar linearmente com y_3 e u_3 ser independente de y_3 , iria ser constante ao longo de y_3 , pode-se introduzir um fator de correção α' para que tudo se passe como se τ_{v13} variasse parabólicamente ao longo de y_3 , sendo nula, para $y_3 = \pm 1$ e máxima para $y_3 = 0$. A tensão τ_{v13} é obtida então, multiplicando-se a deformação $\bar{\gamma}_{v13}$ pela relação G/α' . Para peças com seção transversal de forma retangular $\alpha' = 1.5$.

Pode-se agora escrever a matriz de elasticidade \underline{D} e a matriz de tensões $\underline{D}B_j$, produto da matriz de elasticidade \underline{D} pela matriz de deformações B_j .

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & GB & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G}{\alpha'} \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

$$DB_{mnj} = D_{mm} B_{mnj} ; m = 1,2,3 ; n = 1,2,3 ; j = 1,2,3 \quad (3.4.13)$$

3.5 - Matriz de rigidez e de esforços

A matriz de rigidez, sendo a integral ao longo do volume do produto da matriz de deformações transposta pela matriz de tensões, pode ser escrita numa forma indicial como se segue:

$$K_{ij}^{mn} = \int_v B_{kmi} D_{kk} B_{knj} dv \quad \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \\ m = 1,2,3 \\ n = 1,2,3 \end{matrix} \quad (3.5.1)$$

Os esforços seccionais no elemento, num ponto do eixo de coordenada y_1 , podem ser calculados, após a obtenção dos deslocamentos nodais da estrutura, através da média aritmética dos valores indicados a seguir para os diversos pontos de integração numérica ao longo da seção, excluindo os de coordenada $y_3 = 0$.

$$M_1 = \sigma_{v11} \frac{eh^2}{y_3^6}$$

$$M_{12} = \tau_{v12} \frac{eh^2}{y_3^6} \quad (3.5.2)$$

$$Q'_{31} = \tau_{v13} eh$$

O vetor formado por σ_{v11} , τ_{v12} e τ_{v13} é obtido através do produto $\underline{DB}_i \delta_i$

3.6 - Forças nodais equivalentes

Pela igualdade dos trabalhos virtuais das forças distribuídas no interior do elemento e das forças nodais que lhes são equivalentes, pode-se escrever:

$$\int_{\ell} \delta_m^T Q_m d\ell = \delta_{im}^T X_{im}$$

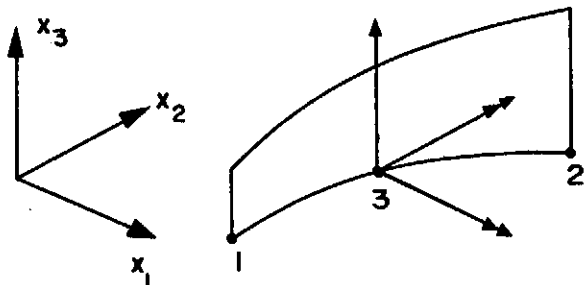
sendo Q_m ; $m = 1, 2, 3$ os esforços seccionais aplicados ao longo do eixo y_1 relativos à força paralela a x_3 e aos momentos M_1 e M_2 respectivamente e X_{im} ; $m = 1, 2, 3$ os respectivos esforços nodais equivalentes a Q_m . Q_{jm} é o valor da função Q_m ; $m = 1, 2, 3$ num dado nó j (Fig. 3).

Como $\delta_m = N_i \delta_{mi}$ e $Q_m = N_j Q_{jm}$ ter-se-á

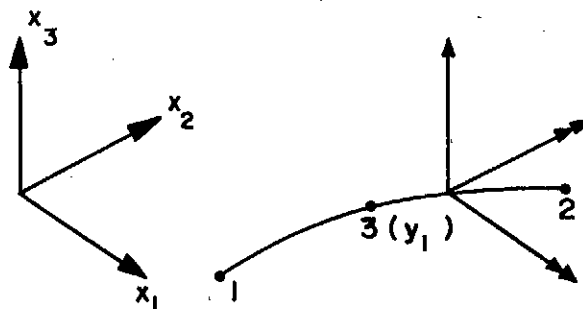
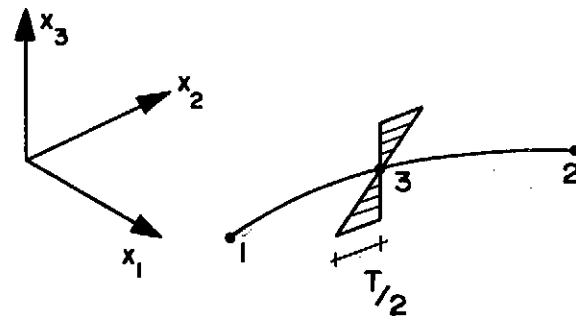
$$\delta_{mi}^T \int_{\ell} N_i N_j Q_{jm} d\ell = \delta_{mi}^T X_{im} \dots$$

Tem-se finalmente para as cargas distribuídas

Forças (F_3, M_1, M_2)
variando parabolicamente
sobre o eixo do elemento



Gradiente de θ temperatura
variando parabolicamente
sobre o eixo do elemento



Forças (F_3, M_1, M_2)
concentradas no ponto (y_1)
sobre o eixo do elemento

FIG. 3 - ELEMENTOS FINITOS DE GRELHA. SOLICITAÇÕES

$$X_{im} = \int_{-1}^{+1} N_i N_j Q_{jm} FN dy_1 \quad (3.6.1)$$

sendo $FN = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}$ deduzida no apêndice III.

Para as cargas concentradas ter-se-á

$$\delta_{im}^T X_{im} = \delta_m^T Q_m$$

sendo agora Q_m ; $m = 1, 2, 3$ a força generalizada (força paralela a x_3 e momentos M_1 e M_2) aplicada num dado ponto de coordenada y_1 .

$$\delta_m = N_i(y_1) \delta_{im}$$

$$X_{im} = N_i(y_1) Q_m \quad (3.6.2)$$

Para variação de temperatura pode-se escrever:

$$\int_{\ell} \delta_{m+1}^T M_m d\ell = \delta_{m+1}^T M_{mi} ; m = 1, 2$$

$$\delta_{m+1}^T \int_{-1}^{+1} N_i M_m FN dy_1 = \delta_{m+1}^T M_{mi}$$

Como não haverá torção da seção transversal da peça, para esta solicitação, ter-se-á: (Fig. 4)

$$M_1' = E\bar{\alpha} \frac{T_0}{2} \frac{eh^2}{6}$$

$$M_m = M_1' c_m ; m = 1, 2$$

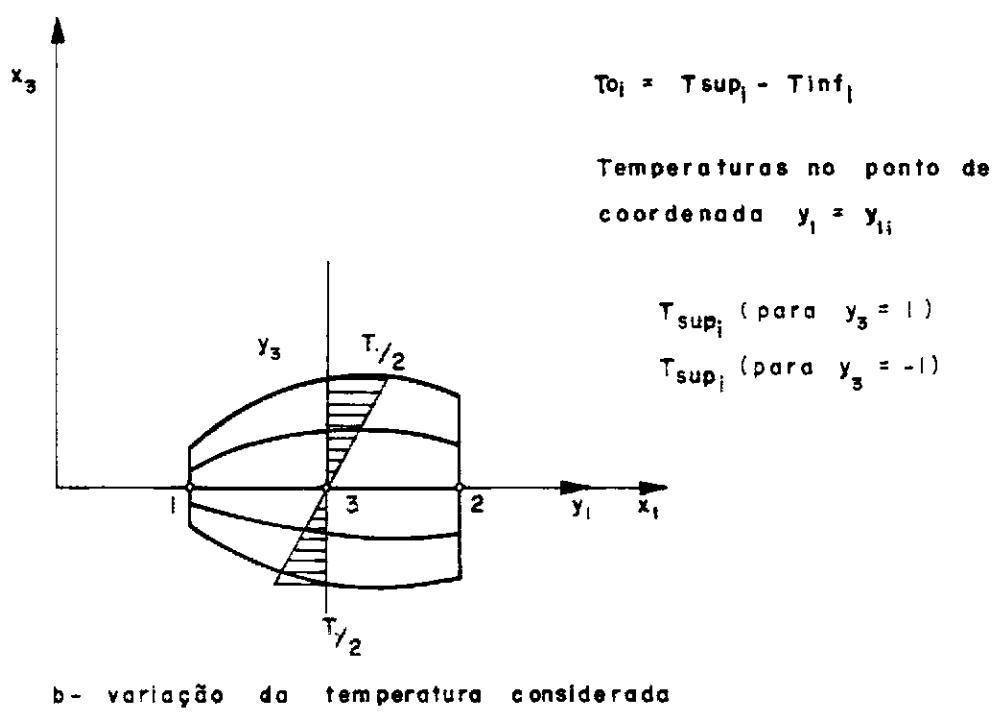
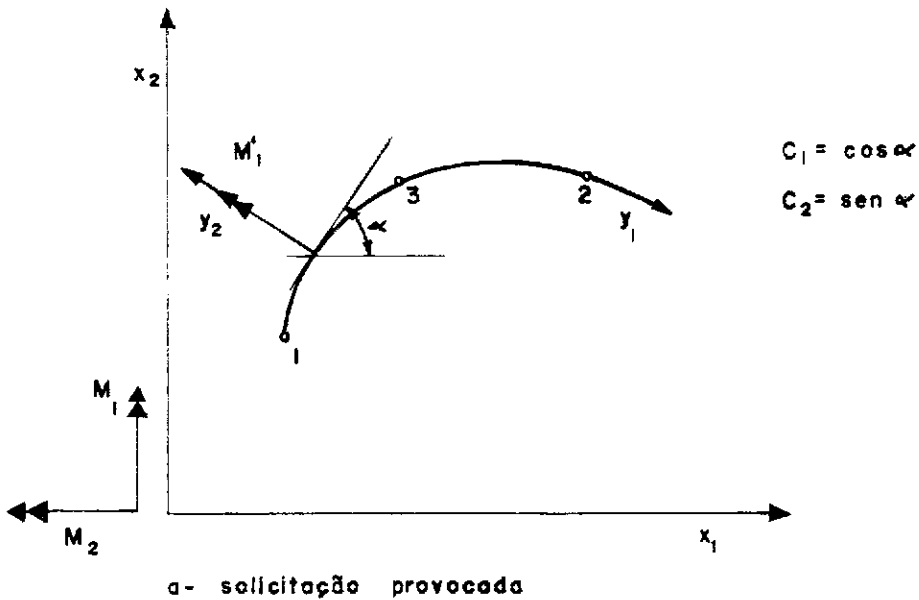


FIG. 4 - Sollicitação devido à temperatura

Ter-se-á finalmente:

$$M_{mi} = \frac{E\bar{\alpha}}{12} \int_{-1}^{+1} T_0 e^{-h^2 N_i c_m FN} dy_1 \quad (3.6.3)$$

onde $\bar{\alpha}$ é o coeficiente de dilatação térmica linear do material e T_0 é a diferença de temperatura entre os valores de T para $y_3 = \pm 1$.

IV - ELEMENTO FINITO DE PLACA

4.1 - Pequeno histórico e justificativa do caminho seguido

Um dos primeiros elementos para estudo de placas foi proposto por Papenfuss em 1959 (ref. 11) que utilizou funções de interpolação constituídas por produtos de modos de deformação unitários de uma viga em flexão nas direções x e y para formular um elemento retangular. Essa e outras tentativas iniciais como a de Bogner (ref. 12 e 13) resultaram em fracasso, apesar de satisfazerem às condições de compatibilidade de deslocamentos e deflexões, por violarem a completidade, não convergindo para a solução exata.

Clough e Tocher (ref. 14) propuseram um elemento triangular que satisfazia as condições de completidade, já então estabelecidas, mas foi Bazeley (ref. 15) quem conseguiu eliminar a impossibilidade de se usar este elemento quando os eixos x e y coincidissem com dois lados do elemento usando coordenadas naturais e mostrou ainda que a condição de conformidade não era uma condição "sine qua non" para se obter a convergência para a solução exata no caso de placas, o que mais tarde foi demonstrado por Arantes e Oliveira (ref. 16).

Bogner (ref. 17) conseguiu introduzir no seu elemento retangular deslocamentos generalizados que o tornaram completo.

Elementos cada vez mais refinados como o elemento triangular cujo campo de deslocamentos transversais ao plano da placa é um polinômio do quinto grau (T21) e um outro elemento triangular degenerado deste elemento (T18) foram desenvolvidos (ref.18).

Outro caminho seguido com menos entusiasmo foi o de procurar modelos de equilíbrio mistos e híbridos como os de Herrman (ref. 19) e Pian (ref. 20) sendo que o primeiro leva em conta a deformação por esforço cortante na formulação do seu elemento que era um ponto importante a ser abordado e foi também estudado por Smith (ref. 21) com um elemento retangular baseado na teoria de Love (ref. 22), com polinômio do sétimo grau e por Pryor (ref. 23) que apresentou um elemento retangular com quatro nós e vinte graus de liberdade introduzindo, além dos três deslocamentos u_3, θ_1 e θ_2 , as distorções γ_{13} e γ_{23} como deslocamentos generalizados, obtendo resultados que praticamente concordam com a teoria de Reissner (ref. 24) .

Com o aparecimento de elementos de maior ordem e portanto mais refinados, surgiu a questão sobre o que seria mais econômico, o uso de um maior número de elementos pouco refinados ou o uso de poucos elementos de maior ordem. Zienkiewicz (ref. 5) faz uma interessante discussão sobre o problema e apresenta o seguinte argumento para a definição do caminho a seguir: uma dramática melhoria de precisão é conseguida com o mesmo número de graus de liberdade quando elementos refinados são utilizados. Todavia chama atenção pelo fato de que isto não resulta necessariamente numa diminuição proporcional no tempo de solução já que para elementos complexos, a largura da banda será bem superior. De qualquer forma uma considerável economia ocorre, além de se conseguir uma redução apreciável na preparação de dados. Por outro lado, há o argumento desfavorável de não se representar adequadamente a geometria do problema real com poucos elementos refinados. Os elemen-

tos isoparamétricos (ref. 25 e 26) vieram permitir o uso de elementos de maior ordem que representassem adequadamente a geometria do problema real, o que vem justificar a sua grande aceitação. O tempo computacional para executar integrações numéricas foi, porém, um problema que se levantou, mas trabalhos recentes (ref. 5) mostram que em alguns casos uma melhoria considerável das propriedades do elemento pode ser conseguida com o uso do número mínimo de pontos para a integração numérica, primeiro porque os modelos de deslocamentos são sempre rígidos em relação à solução exata e, ao se utilizar poucos pontos de integração numérica, consegue-se reduzir satisfatoriamente esta rigidez e, segundo, porque para poucos pontos de integração exclui-se regiões onde os deslocamentos possam ser demasiadamente restringidos, de modo a permitir compatibilidade entre os elementos. Estas constatações permitiram a utilização econômica dos elementos isoparamétricos, apesar de se ter encontrado dificuldade em utilizá-los no estudo de placas e cascas, por não cumprirem as condições de convergência, fato que levou Bigon (ref. 27) a formular um elemento isoparamétrico misto para estudar problemas de placas delgadas e espessas.

Para o estudo de placas espessas poder-se-ia também utilizar diretamente o elemento que originou o elemento aqui proposto, ou seja, um elemento isoparamétrico tridimensional com campo de deslocamento do segundo grau no qual as dimensões correspondentes à espessura da placa seriam pequenas em relação às demais; todavia, algumas dificuldades deveriam ser contornadas. A primeira delas se deve ao fato de que os coeficientes de rigidez relativos ao lado correspondente à espessura da placa seriam muito grandes

em relação aos demais, o que acarretaria problema de mau condicionamento da matriz de rigidez, e, conseqüentemente, erros numéricos, toda vez que a espessura se tornasse pequena em comparação com as outras dimensões do elemento. A segunda, refere-se à economia, pois o uso de vários nós ao longo da espessura torna-se inútil uma vez que se pode representar satisfatoriamente os deslocamentos de qualquer ponto da placa em função dos deslocamentos do plano médio. Deste modo, um exagerado número de equações estaria sendo usado, o que acarretaria enorme perda de tempo computacional.

Baseada nestes argumentos, a escolha do elemento a ser desenvolvido recaiu sobre um modelo de deslocamento proposto por Zienkiewicz (ref. 5) para estudo de placas espessas e delgadas degenerado do elemento isoparamétrico tridimensional parabólico (ref. 28) sendo que as hipóteses introduzidas aqui, quando da passagem do elemento tridimensional para o elemento de placa, diferiram daquelas feitas por Zienkiewicz em dois pontos e confirmaram tornar o elemento mais viável economicamente. Em primeiro lugar passa-se de um problema tridimensional para um bidimensional realizando-se como na teoria das placas, integrais ao longo da espessura, o que acarreta uma grande economia de tempo de integração numérica, já que o programa não realiza as integrais numéricas relativas à espessura para o cálculo da matriz de rigidez e de esforços dos elementos e, segundo, utiliza-se uma função de deslocamento que permite a deformação linear na direção da espessura da placa ocorrer livremente em função das outras duas deformações lineares, o que fornecerá uma variação parabólica das tensões devidas ao esforço cortante ao longo da espessura, não sendo necessário, portanto,

a introdução do fator k na matriz de elasticidade, fator este que tem a finalidade de corrigir o fato de se obter tensões devidas ao esforço cortante constantes através da espessura quando se impõe que aquelas deformações sejam nulas. O elemento é formulado numa notação indicial simples (ref. 28) que reduz o número de operações a serem programadas e que permitiu tratamento algébrico das expressões na passagem para um problema bidimensional.

4.2 - Transformação de coordenadas

Como neste caso é simples o caminho percorrido na transformação do elemento isoparamétrico tridimensional parabólico para o elemento de placa degenerado daquele, ir-se-á acompanhar, passo a passo, as hipóteses introduzidas no elemento original até a criação do novo.

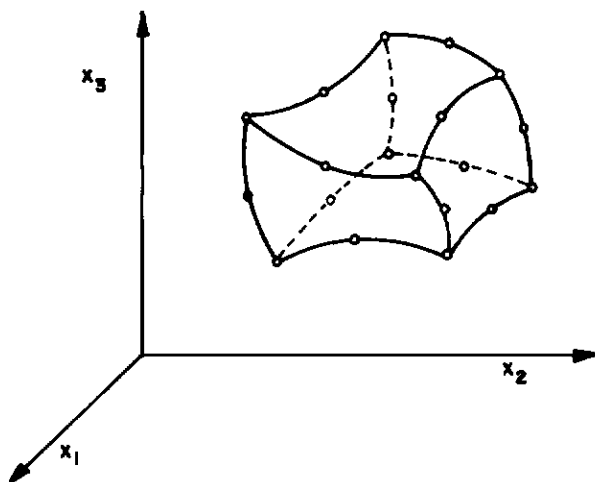
Parte-se então, do elemento isoparamétrico tridimensional (Fig. 5a.), cuja transformação de coordenadas é dada por:

$$x_m = N_i x_{mi} ; m = 1,2,3 ; i = 1,2,3 \dots 24 \quad (4.2.1)$$

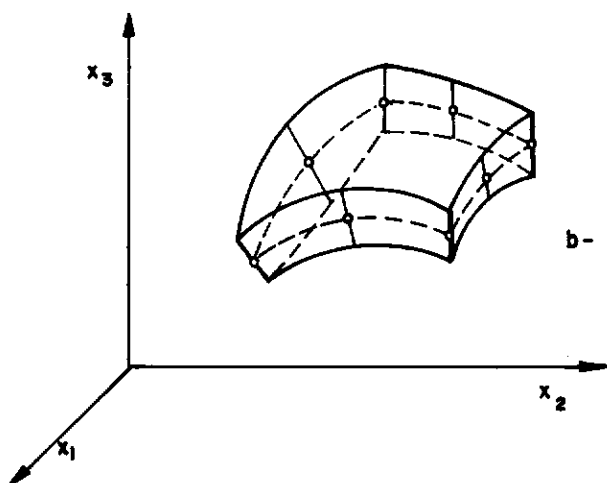
Se agora se introduzir em (4.2.1) a hipótese de que as linhas na direção de y_3 são retas, ter-se-á (fig. 5b).

$$x_m = N_i \frac{1+y_3}{2} x_{mi_{sup}} + N_i \frac{1-y_3}{2} x_{mi_{inf}} ; m = 1,2,3 \quad i = 1,2,3 \dots 16 \quad (4.2.2)$$

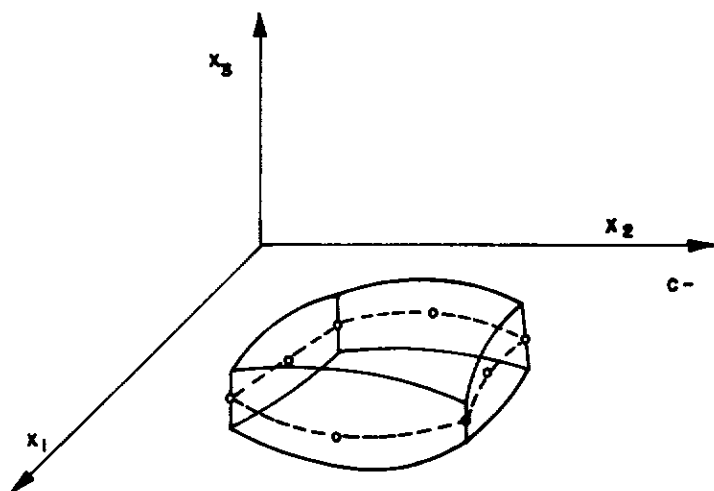
Se se considerar em (4.2.2) o n° superior e inferior substituído por um n° médio, poder-se-á escrever:



a- elemento isoparamétrico
tridimensional parabólico



b- elemento degenerado do ele-
mento original com a hipóte-
se de lados retos na direção
de y_3



c- elemento degenerado do ele-
mento da fig. b com a hipóte-
se da superfície média estar
contida no plano $\overline{x_1x_2}$

FIG. 5 - Degeneração do elemento isoparamétrico tridimensional parabólico
num elemento bidimensional de placas

$$x_m = N_i x_{mi} + y_3 N_i h_{mi} ; m = 1,2,3 ; i = 1,2,3 \dots 8 \quad (4.2.3)$$

sendo

$$h_{mi} = \frac{x_{mi\text{sup}} - x_{mi\text{inf}}}{2}$$

Finalmente, para o caso particular de uma placa com plano médio contido no plano x_1x_2 e possuindo uma variação parabólica quanto à altura, (fig. 5c), ter-se-á

$$x_{3i} = 0$$

$$h_{mi} = 0 ; m = 1,2$$

o que permite escrever

$$x_m = N_i x_{mi} (1 - \bar{\delta}_{3m}) + y_3 N_i h_i \bar{\delta}_{3m} \quad (4.2.4)$$

onde N_i são as funções de interpolação parabólicas dadas em(4.2.5) e $\bar{\delta}_{3m}$; $m = 1,2,3$ é o símbolo de Kroneker

$$N_i \equiv \frac{1}{4} (1 + y_{i1}y_1) (1 + y_{i2}y_2) (y_{i1}y_1 + y_{i2}y_2 - 1) ; i = 1,2,3,4 \quad (4.2.5)$$

$$N_i = \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2} (1 - y_{3-p}^2) (1 - y_{ip}y_p) y_{ip}^2 ; i = 5,6,7,8$$

4.3 - Funções de deslocamento

Mais uma vez, partindo-se do elemento isoparamétrico

co tridimensional parabólico, ter-se-á:

$$u_m = N_i u_{mi} ; m = 1,2,3 ; i = 1,2,3 \dots 24 \quad (4.3.1)$$

introduzindo-se a hipótese dos deslocamentos variarem linearmente ao longo de y_3 em (4.3.1) pode-se escrever (4.3.2) em função dos deslocamentos dos nós da superfície média e da semi-diferença S_{mi} dos deslocamentos dos respectivos nós superior e inferior.

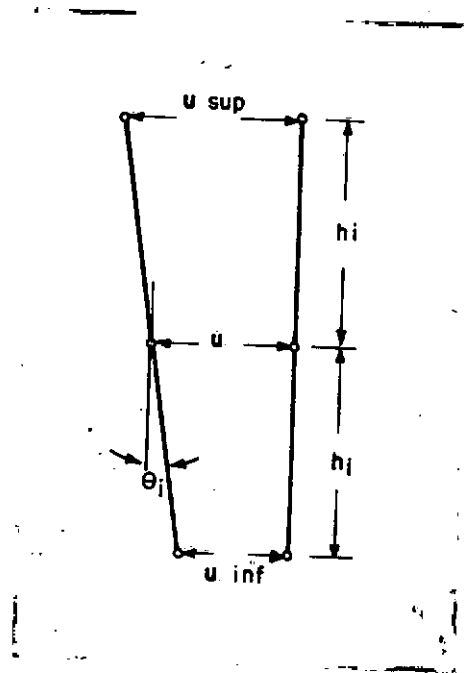
$$u_m = N_i u_{mi} + y_3 N_i S_{mi} \quad (4.3.2)$$

$$S_{mi} = \frac{u_{mi\text{sup}} - u_{mi\text{inf}}}{2} ; m = 1,2,3$$

Pode-se, porém, escrever S_{mi} em função da rotação θ_{3-m} da seção em torno do eixo x_m e da semi-diferença entre as coordenadas dos nós superior e inferior h_{mi} ; $m = 1,2$, ter-se-á, então:

$$S_{mi} = h_i \theta_{mi} \quad (4.3.3)$$

$$u_m = N_i u_{mi} + y_3 N_i h_i \theta_{mi} ; m = 1,2$$



Desprezando-se finalmente os esforços de membrana, ou seja, considerando-se nulos os deslocamentos do plano médio na direção x_m ; $m = 1,2$, obter-se-ão as funções de deslocamento para as referidas direções.

$$u_m = y_3 N_i h_i \theta_{mi} ; m = 1,2 \quad (4.3.4)$$

A obtenção da função de deslocamentos para os deslocamentos u_3 , na direção de x_3 , será deduzida no ítem seguinte para que a exposição tenha um encadeamento lógico.

4.4 - Tensões e deformações

Tendo-se a função de transformação de coordenadas de (4.2.3) pode-se calcular o Jacobiano

$$J_{mn} = \frac{\partial x_m}{\partial y_n} ; m = 1,2,3 ; n = 1,2,3$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} N_{i,1} x_{1i} & N_{i,2} x_{1i} & 0 \\ N_{i,1} x_{2i} & N_{i,2} x_{2i} & 0 \\ y_3 N_{i,1} h_i & y_3 N_{i,2} h_i & N_i h_i \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

Chamando-se o termo $J_{3m} = y_3 \bar{J}_{3m}$; $m = 1,2$, ter-se-ã para os termos de \underline{Y} os valores dados em (4.4.2) para $m = 1,2$ e $n = 3-m$, sendo \underline{Y} a matriz inversa de \underline{J} .

$$Y_{mm} = \frac{J_{3-m:3-m}}{\Delta_{33}}$$

$$Y_{mn} = - \frac{J_{mn}}{\Delta_{33}}$$

$$Y_{3m} = (-1)^{3+m} \frac{J_{3-m1} \bar{J}_{32} - J_{3-m1} \bar{J}_{31}}{J_{33} \Delta_{33}} y_3 \quad (4.4.2)$$

$$Y_{m3} = 0$$

$$Y_{33} = \frac{1}{J_{33}}$$

onde

$$\Delta_{33} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \text{ e } Y_{3m} = y_3 \bar{Y}_{3m} ; m = 1,2$$

Tem-se agora todos os deslocamentos e coordenadas necessários para o cálculo das deformações ϵ_m , deduzidas através

das derivadas

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_m} = \frac{\partial u_m}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_m} ; m = 1,2 ; p = 1,2,3$$

A matriz \underline{U} , cujos termos U_{mp} são $\frac{\partial u_m}{\partial y_p}$; tem a forma dada em (4.4.3)

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} y_3 N_{i,1} h_i \theta_{1i} & y_3 N_{i,2} h_i \theta_{1i} & N_i h_i \theta_{1i} \\ y_3 N_{i,1} h_i \theta_{2i} & y_3 N_{i,2} h_i \theta_{2i} & N_i h_i \theta_{2i} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

Chamando-se os termos $U_{mn} = y_3 \bar{U}_{mn}$; $m = 1,2$, ter-se-á para ϵ_m os valores dados em (4.4.4) para $m = 1,2$

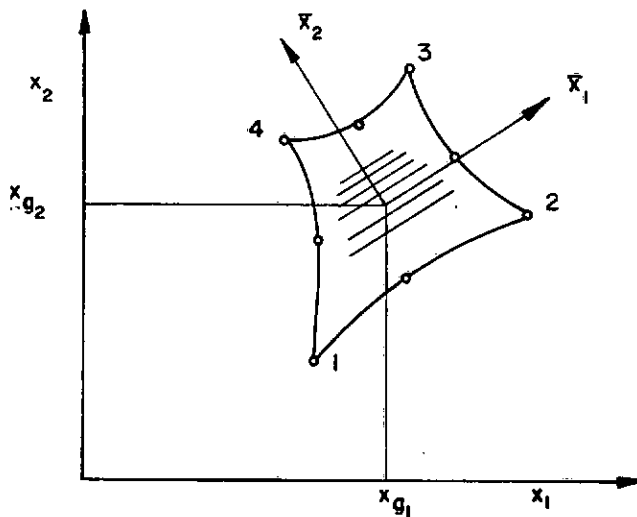
$$\epsilon_m = y_3 (\bar{U}_{m1} Y_{1m} + \bar{U}_{m2} Y_{2m} + U_{m3} \bar{Y}_{3m}) \dots$$

$$\epsilon_m = y_3 h_i (N_{i,1} Y_{1m} + N_{i,2} Y_{2m} + N_i \bar{Y}_{3m}) \theta_{mi} \dots$$

$$\epsilon_m = y_3 h_i A_{mi} \theta_{mi}$$

Considerando-se a possibilidade do material ser ortótropo e com o artifício de deslocar os eixos globais para um ponto de coordenadas $x_{gm} = \frac{1}{4} N_i x_{mi}$; $m = 1,2$; $i = 1,2,3,4$ e colocá-los paralelos aos eixos de ortotropia, quando do cálculo da matriz de rigidez do elemento, pode-se escrever que para cada ponto do interior do elemento vale a equação da lei de Hooke

$$\sigma_3 = d_{3m} \epsilon_m ; m = 1,2,3$$



Se se introduzir a hipótese de serem nulas as tensões σ_3 , em qualquer ponto no interior da placa, ter-se-á para $m = 1, 2$ o valor do deslocamento u_3

$$\epsilon_3 = k_m \epsilon_m \quad \text{sendo} \quad k_m = - \frac{d_{3m}}{d_{33}}$$

logo

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = k_m \epsilon_m \quad \dots$$

$$u_3 = \int k_m \epsilon_m dx_3 \quad \dots$$

$$u_3 = \int k_m \epsilon_m h dy_3 \quad \dots$$

$$u_3 = \int y_3 h h_i k_m A_{mi} \theta_{mi} dy_3$$

$$u_3 = y_3^2 \frac{h h_i}{2} k_m A_{mi} \theta_{mi} + W$$

Como se sabe que para $y_3 = 0$, u_3 é o deslocamento do plano médio da placa dado por $N_i u_{3i}$, ter-se-á finalmente

$$u_3 = y_3^2 \frac{h h_i}{2} k_m A_{mi} \theta_{mi} + N_i u_{3i} \quad (4.4.5)$$

Tendo-se definido completamente os deslocamentos u_m ; $m = 1, 2, 3$ do elemento em função dos deslocamentos nodais do elemento u_{3i} , θ_{1i} e θ_{2i} ; $i = 1, 2, 3 \dots 8$ (fig. 6) pode-se calcular a matriz de deformações \underline{B} .

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Para $m = 1, 2$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_{3-m}} = y_3 (\bar{U}_{m1} Y_{1 \ 3-m} + \bar{U}_{m2} Y_{2 \ 3-m} + U_{m3} Y_{3 \ 3-m})$$

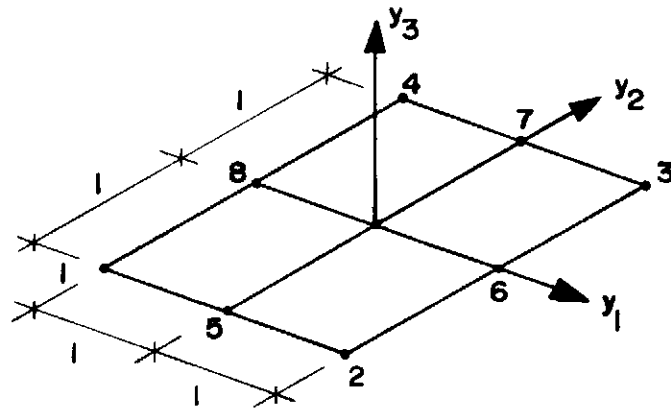
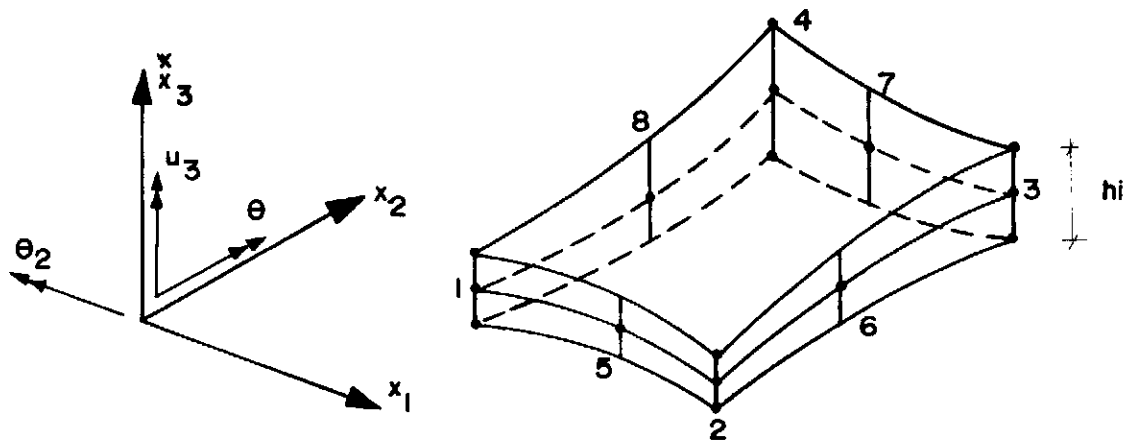
$$\frac{\partial u_m}{\partial x_{3-m}} = y_3 h_i (N_{i,1} Y_{1 \ 3-m} + N_{i,2} Y_{2 \ 3-m} + N_i Y_{3 \ 3-m}) \theta_{mi}$$

$$\gamma_{12} = y_3 h_i A_{mi} \theta_{3-mi} \quad (4.4.6)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = U_{11} Y_{13} + U_{12} Y_{23} + U_{13} Y_{33}$$

Como $Y_{m3} = 0$; $m = 1, 2$,



Transformação de coordenadas

$$x_1 = N_i x_{1i}^e$$

$$x_2 = N_i x_{2i}^e \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

$$x_3 = N_i y_3 h_i$$

Funções de deslocamento

$$u_1 = N_i y_3 h_i \theta_{1i}^e \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

$$u_2 = N_i y_3 h_i \theta_{2i}^e$$

como

$$G_3 = d_{3m} \epsilon_m \quad m = 1, 2, 3$$

para $G_3 = 0$

$$u_3 = \int k_m \epsilon_m dx_3$$

$$u_3 = N_i u_{3i} + y_3^2 \frac{h_i}{2} k_m A_{mi} \theta_{mi}^e$$

onde

$$\left\{ \begin{aligned} A_{mi} &= \frac{\delta N_i}{\delta y_1} \frac{\delta y_1}{\delta x_m} + \frac{\delta N_i}{\delta y_2} \frac{\delta y_2}{\delta x_m} + N_i \frac{\delta y_3}{\delta x_m} \\ k_m &= \frac{-d_{3m}}{d_{33}} \end{aligned} \right.$$

FIG. 6 - ELEMENTOS FINITOS PARA ESTUDO DE PLACAS DEGENERADAS DE ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS PARABÓLICOS

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{N_i h_i \theta_{1i}}{h} \quad \text{onde} \quad h = N_i h_i$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = U_{31} Y_{11} + U_{32} Y_{21} + y_3 U_{33} \bar{Y}_{31}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= (N_{i,1} u_{3i} + \frac{h h_i}{2} y_3^2 k_m A_{mi,1} \theta_{mi}) Y_{11} + \\ &+ (N_{i,2} u_{3i} + \frac{h h_i}{2} y_3^2 k_m A_{mi,2} \theta_{mi}) Y_{21} + \\ &+ 2y_3 \frac{h h_i}{2} k_m A_{mi} \theta_{mi} \bar{Y}_{31} y_3 \end{aligned}$$

onde para $m = 1, 2$; $p = 1, 2$

$$\begin{aligned} A_{mi,p} &= N_{i,1p} Y_{1m} + N_{i,2p} Y_{2m} + N_{i,p} Y_{3m} + N_{i,1} Y_{1m,p} + \\ &+ N_{i,2} Y_{2m,p} + N_i Y_{3m,p} ; i = 1, 2, 3 \dots 8 \end{aligned}$$

$$N_{i,p} = \frac{1}{4} y_{ip} (1 + y_{i3-p} y_{3-p}) (2y_{ip} y_p + y_{i3-p} y_{3-p}) ; i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_{i,p} = \frac{1}{2} y_{ip}^3 (1 - y_{3-p}^2) - y_{i3-p}^2 (y_p + y_{i3-p} y_p y_{3-p}) ; i = 5, 6, 7, 8$$

$$N_{i,pp} = \frac{y_{ip}^2}{2} (1 + y_{i3-p} y_{3-p}) ; i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_{i,pp} = -y_{i3-p}^2 (1 + y_{i3-p} y_{3-p}) ; i = 5, 6, 7, 8$$

$$N_{i,p3-p} = \frac{1}{4} y_{ip} y_{i,3-p} (2y_{ip} y_p + y_{i3-p} y_{3-p}) + \frac{1}{4} y_{ip} (1 +$$

$$+ y_{i \ 3-p} y_{3-p}) y_{i \ 3-p} ; i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_{i,p \ 3-p} = - y_{ip}^3 y_{3-p} - y_{i \ 3-p}^3 y_p ; i = 5, 6, 7, 8$$

$$Y_{mm,p} = \frac{\Delta_{33} J_{3-m \ 3-m,p} - J_{3-m \ 3-m} \Delta_{33,p}}{\Delta_{33}^2}$$

$$Y_{mn,p} = \frac{-\Delta_{33} J_{mn,p} + J_{mn} \Delta_{33,p}}{\Delta_{33}^2} ; n = 3-m$$

$$Y_{3m,p} = (-1)^{3+m} \frac{1}{J_{33} \Delta_{33}} (J_{3-m1,p} J_{32} + J_{3-m1} J_{32,p} - J_{3-m1,p} J_{31} -$$

$$- J_{3-m2} J_{31,p}) - (-1)^{3+m} \frac{1}{J_{33}^2 \Delta_{33}^2} (J_{33,p} \Delta_{33} + J_{33} \Delta_{33,p}) \times$$

$$\times (J_{3-m1} J_{32} - J_{3-m2} J_{31})$$

$$Y_{33,p} = - \frac{J_{33,p}}{J_{33}^2}$$

$$\Delta_{33,p} = J_{11,p} J_{22} + J_{11} J_{22,p} - J_{12,p} J_{21} - J_{12} J_{21,p}$$

para $i = 1, 2, 3 \dots 8$

$$J_{mn,p} = N_{in,p} x_{mi} ; n = 1, 2$$

$$J_{3m,p} = N_{i,mp} h_i$$

$$J_{3m,p} = N_{i,mp} h_i$$

$$J_{33,p} = N_{i,p} h_i$$

$$\begin{aligned} \gamma_{31} = & \frac{N_i h_i}{h} \theta_{1i} + (N_{i,1} Y_{11} + N_{i,2} Y_{21}) u_{3i} + \left(\frac{A_{mi,1}}{2} Y_{11} + \right. \\ & \left. + \frac{A_{mi,2}}{2} Y_{21} + A_{mi} \bar{Y}_{31} \right) y_3^2 h h_i k_m \theta_{mi} \end{aligned}$$

Chamando-se

$$C_i = \frac{N_i h_i}{h}$$

$$F_{pi} = N_{i,1} Y_{1p} + N_{i,2} Y_{2p}$$

$$\bar{G}_{pmi} = \frac{A_{mi,1}}{2} Y_{1p} + \frac{A_{mi,2}}{2} Y_{2p} + A_{mi} Y_{3p}$$

$$\gamma_{3p} = F_{pi} u_{3i} + C_i \theta_{pi} + h_i h y_3^2 k_m \bar{G}_{pmi} \theta_{mi} \quad (4.4.7)$$

Pode-se agora escrever a matriz de deformações \underline{B}_i

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y_3 A_{1i} h_i & 0 \\ 0 & 0 & y_3 A_{2i} h_i \\ 0 & y_3 A_{2i} h_i & y_3 A_{1i} h_i \\ F_{2i} & y_3^2 h_i h k_1 \bar{G}_{21 i} & C_i + y_3^2 h_i h k_2 \bar{G}_{22 i} \\ F_{1i} & C_i + y_3^2 h_i h k_1 \bar{G}_{11 i} & y_3^2 h_i h k_2 \bar{G}_{12 i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3i} \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (4.4.8)$$

Matriz de Elasticidade

Imagina-se a matriz de elasticidade a três dimensões de um meio ortótropo,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}$$

Na hipótese do material ter ainda um eixo de simetria, por exemplo, o eixo x_2 , as nove constantes da matriz geral de ortotropia reduzem-se a cinco e podem ser escritas da forma

$$d_{11} = d_{33} = \frac{n E_2 (1 - n v_2^2)}{(1 - v_1) (1 - v_1 - 2_n v_2^2)}$$

$$d_{22} = \frac{E_2 (1 - v_1)}{(1 - v_1 - 2_n v_2^2)}$$

$$d_{12} = d_{23} = \frac{n E_2 v_2}{(1 - v_1 - 2_n v_2^2)}$$

$$d_{13} = \frac{n E_2 (n v_2^2 + v_1)}{(1 + v_1) (1 - v_1 - 2_n v_2^2)}$$

$$d_{44} = d_{55} = G$$

$$d_{66} = \frac{1}{2} (d_{11} - d_{13})$$

sendo

$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

e onde

v_1 = coeficiente de Poisson que relaciona deformações entre direções do plano (1-3)

ν_2 = coeficiente de Poisson que relaciona deformações entre qualquer direção do plano (1-3) e o eixo de simetria x_2 .

E_1 = módulo de elasticidade segundo qualquer direção do plano(1-3)

E_2 = módulo de elasticidade segundo o eixo de simetria x_2 .

G = módulo de elasticidade transversal que relaciona qualquer direção do plano (1-3) com o eixo de simetria x_2 .

Como, porém, $\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2}$, na verdade ter-se-ã apenas quatro constantes independentes. No programa far-se-ã $\nu_{12} = \nu_1 = \nu_2$.

Pode-se, então, calcular a matriz de tensões \underline{DB}_j

$$\sigma_1 = d_{1m} \epsilon_m ; m = 1, 2, 3$$

para $j = 1, 2, 3 \dots 8$

$$\sigma_1 = d_{11} y_3 h_j A_{1j} \theta_{1j} + d_{12} y_3 h_j A_{2j} \theta_{2j} + d_{13} \left(-\frac{d_{31}}{d_{33}} y_3 h_j A_{1j} \theta_{1j} - \frac{d_{32}}{d_{33}} y_3 h_j A_{2j} \theta_{2j} \right)$$

$$\sigma_m = y_3 h_j (d_{mp} + d_{m3} k_p) A_{pj} \theta_{pj} ; m = 1, 2 ; p = 1, 2$$

$$\psi_{mp} = d_{mp} + d_{m3} k_p ; m = 1, 2 ; p = 1, 2$$

$$\tau_{12} = y_3 h_j d_{44} A_{jp} \theta_{j3-p} ; p = 1, 2$$

$$\tau_{m3} = d_{7-m, 7-m} (C_j \theta_{mj} + F_{mj} u_{3j} + y_3^2 h h_j k_p \bar{G}_{mpj} \theta_{pj}) ;$$

$$m = 1, 2 ; p = 1, 2$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & h_j y_3 \psi_{11} A_{1j} & h_j y_3 \psi_{12} A_{2j} \\ 0 & h_j y_3 \psi_{21} A_{1j} & h_j y_3 \psi_{22} A_{2j} \\ 0 & h_j y_3 d_{44} A_{2j} & h_j y_3 d_{44} A_{1j} \\ d_{55} F_{2j} & d_{55} y_3^2 h h_j k_1 \bar{G}_{21j} & d_{55} (C_j + y_3^2 h h_j k_2 \bar{G}_{22j}) \\ d_{66} F_{1j} & d_{66} (C_j + y_3^2 h h_j k_1 \bar{G}_{11j}) & d_{66} y_3^2 h h_j k_2 \bar{G}_{12j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3j} \\ \theta_{1j} \\ \theta_{2j} \end{Bmatrix}$$

(4.4.11)

4.5 - Matriz de rigidez e de esforços

Para a matriz de rigidez, ter-se-á:

$$K_{ij} = \int_V \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j dv \dots$$

$$K_{ij} = \int_S \int_{-h}^h \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j dx_3 ds$$

$$K_{ij} = \int_S \int_{-1}^{+1} \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j h dy_3 ds$$

Realizando-se o produto $\underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j$ e integrando-se em relação a y_3 ter-se-á:

$$K_{ij}^{11} = \int_S 2h (F_{1i} d_{66} F_{ij} + F_{2i} d_{55} F_{2j}) ds$$

$$m = 1, 2$$

$$K_{ij}^{1, m+1} = \int_S 2h \{ d_{7-m, 7-m} F_{mi} C_j + \frac{h h_j}{3} k_m (d_{55} F_{2i} \bar{G}_{2mj} + d_{66} F_{2i} \bar{G}_{1mj}) \} ds$$

$$K_{ij}^{m+1, 1} = \int_S 2h \{ d_{7-m, 7-m} F_{mj} C_i + \frac{h h_i}{3} k_m (d_{55} F_{2j} \bar{G}_{2mi} + d_{66} F_{ij} \bar{G}_{1mi}) \} ds \quad (4.5.1)$$

$$n = 1, 2$$

$$K_{ij}^{m+1, n+1} = \int_S 2h \{ d_{7-m, 7-n} C_i C_j \bar{\delta}_{mn} + \frac{h_i h_j}{3} (A_{mi} \psi_{mn} A_{nj} + A_{3-mi} d_{44} A_{3-nj} + d_{7-m, 7-m} k_n C_i h \frac{\bar{G}_{mnj}}{h_i} + d_{7-n, 7-n} k_m C_j h \frac{\bar{G}_{nmi}}{h_j}) + \frac{k_m k_n}{5} h_i h_j h^2 (d_{55} \bar{G}_{2mi} \bar{G}_{2nj} + d_{66} \bar{G}_{1mi} \bar{G}_{1nj}) \} ds$$

onde δ_{mn} é o delta de Kröneker.

A matriz de esforços \underline{E}_i seria:

$$M_m = \int_{-h}^h \sigma_m x_3 dx_3 = \int_{-1}^1 \psi_{mp} A_{pi} h_i \theta_{pi} y_3^2 h^2 dy_3 \quad \dots$$

$$M_m = 2h \frac{h_i h}{3} \psi_{mp} A_{pi} \theta_{pi} ; m = 1,2 ; p = 1,2$$

$$M_{12} = - \int_{-h}^h \tau_{12} x_3 dx_3 = - 2h \frac{h_i h}{3} d_{44} A_{pi} \theta_{3-pi}$$

$$Q'_m = \int_{-h}^h \tau_{m3} dx_3$$

$$Q'_m = d_{7-m,7-m} 2h (C_i \theta_{mi} + F_{mi} u_{3i} + \frac{h_i h}{3} k_p \bar{G}_{mpi} \theta_{ip}) ; m = 1,2 ;$$

$$p = 1,2$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ Q'_2 \\ Q'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \frac{h_i h^2}{3} \psi_{11} A_{1i} & 2 \frac{h_i h^2}{3} \psi_{12} A_{2i} \\ 0 & 2 \frac{h_i h^2}{3} \psi_{21} A_{1i} & 2 \frac{h_i h^2}{3} \psi_{22} A_{2i} \\ 0 & -2 \frac{h_i h^2}{3} d_{44} A_{2i} & -2 \frac{h_i h^2}{3} d_{44} A_{1i} \\ 2hd_{55} F_{2i} & 2h d_{55} \frac{h_i h}{3} k_1 \bar{G}_{21i} & 2hd_{55} (C_i + \frac{hh_i}{3} k_2 \bar{G}_{22i}) \\ 2hd_{66} F_{1i} & 2hd_{66} (C_i + \frac{hh_i}{3} k_1 \bar{G}_{11i}) & 2h d_{66} \frac{h_i h}{3} k_2 \bar{G}_{12i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3i} \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (4.5.2)$$

Se a direção dos eixos de ortotropia de um determinado elemento não coincidir com a direção dos eixos globais é necessário transformar a matriz de esforços para que estes sejam dados em relação ao sistema global. Se, por exemplo, a equação (4.5.2) estiver referida a um sistema de eixos $x_m ; m = 1,2,3$ ter-

se-ã:

$$\{\bar{P}\} = \bar{E}_i^! \{\bar{\delta}_i\}$$

A partir dos esforços no sistema \bar{x}_m ; $m = 1,2,3$ pode-se, porém, obter os esforços no sistema x_m ; $m = 1,2,3$ através da matriz de rotação \underline{I} :

$$\{P\} = \underline{I} \{\bar{P}\}$$

$$\{P\} = \underline{I} \bar{E}_i^! \{\bar{\delta}_i\}$$

como $\{\bar{\delta}_i\} = \underline{R} \{\delta_i\}$ ter-se-ã:

$$\{P\} = \underline{I} \bar{E}_i^! \underline{R} \{\delta_i\} \quad (4.5.3)$$

De (4.5.3) conclui-se que

$$\underline{E}_i^! = \underline{I} \bar{E}_i^! \underline{R} \quad (4.5.4)$$

sendo

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 2cs & 0 & 0 \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (4.5.5)$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (4.5.6)$$

sendo c e s respectivamente o cosseno e o seno do ângulo que os eixos \bar{x} formam com x contado de x para \bar{x} .

4.6 - Forças nodais equivalentes

Para as cargas distribuídas (fig. 7a) pode-se escrever:

$$\delta_{u_{im}}^T X_{im} = \int_s \delta_{u_m}^T Q_m$$

$$\delta_{u_{im}}^T X_{im} = \delta_{u_{im}}^T \int_s N_i N_j Q_{jm} ds$$

$$X_{im} = \int_S N_i N_j Q_{jm} ds ; m = 1,2,3 ; i = 1,2,3 \dots 8 ; j = 1,2,3 \dots 8$$

(4.6.1)

Sendo Q_m , Q_{jm} , como definido em 3.6 mas agora atuando sobre o plano médio do elemento.

Para as cargas concentradas (fig. 7b), ter-se-ã:

$$\delta_{uim}^T X_{im} = \delta_m^T Q_m ; m = 1,2,3$$

$$\delta_{uim}^T X_{im} = N_i (y_1, y_2) \delta_{uim}^T Q_m$$

$$X_{im} = N_i (y_1, y_2) Q_m \quad (4.6.2)$$

Para a variação de temperatura (fig. 7c), ter-se-ã:

$$\sigma_m = \psi_{mn} \epsilon_n ; m = 1,2 ; n = 1,2$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \bar{\alpha} \frac{T_0}{2}$$

$$Q_m = \frac{h^2}{6} \sigma_m$$

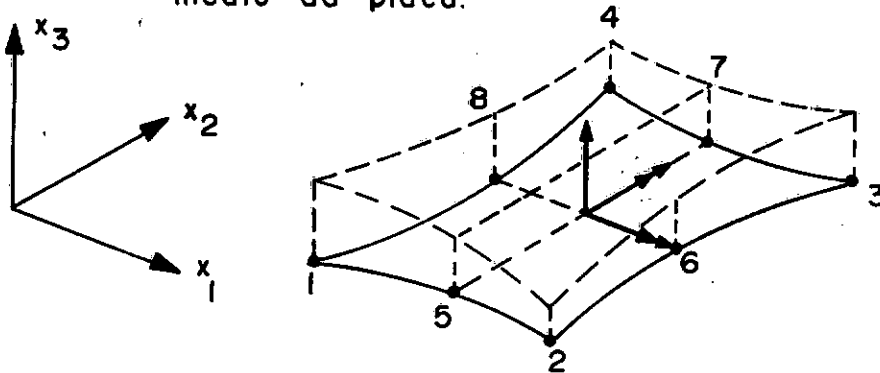
$$Q_m = \psi_{mn} \bar{\alpha} \frac{h^2}{12} T_0$$

$$\delta_{im}^T X_{im} = \int_S \delta_m^T Q_{m-1} ds ; m = 2,3$$

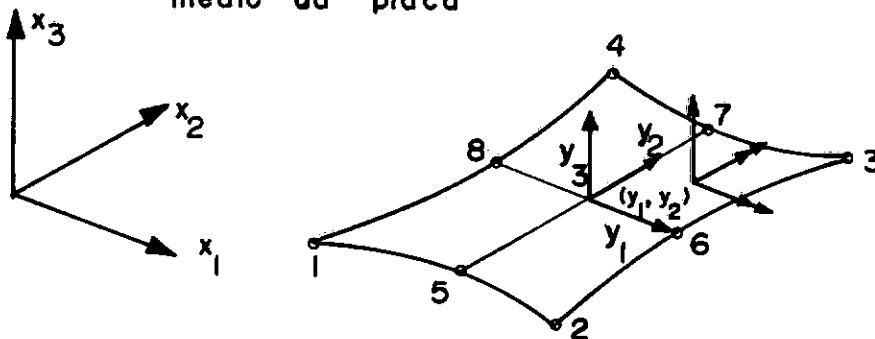
$$\delta_{im}^T X_{im} = \delta_{im}^T \int_S N_i Q_{m-1} ds ; m = 2,3$$

$$X_{im} = \psi_{m-1} n \frac{\bar{\alpha}}{12} \int_s T_0 h^2 N_i ds ; m = 2,3 ; n = 1,2 \quad (4.6.3)$$

- a) Forças (F_3, M_1, M_2) variando parabolicamente sobre o plano médio da placa.



- b) Forças (F_3, M_1, M_2) concentradas no ponto (y_1, y_2) sobre o plano médio da placa



- c) Gradiente de temperatura variando parabolicamente sobre o plano médio do elemento

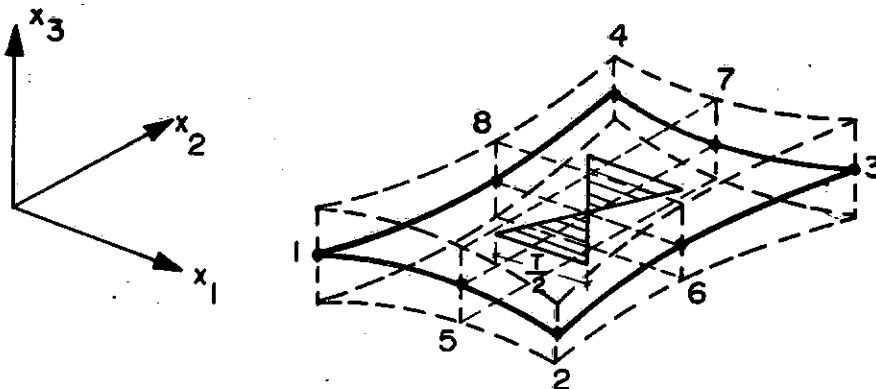


FIG. 7 - ELEMENTOS FINITOS DE PLACA. SOLICITAÇÕES.

V - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

5.1 - Características do Programa principal e suas subrotinas

O programa principal é um programa que possibilita o cálculo de pequenas estruturas, pois foi elaborado com o propósito de testar o funcionamento dos elementos formulados e cuja capacidade está especificada no item 5.4. A resolução do sistema de equações é feita por eliminação de Gauss, levando-se em conta as características de banda e simetria da matriz de rigidez.

Uma sucinta explicação das subrotinas usadas pelo programa e dos parâmetros de entrada e saída destas subrotinas é dada a seguir.

a) RIGI1 e RIGI2

Calculam respectivamente as matrizes de rigidez dos elementos de placa (TIPO 1) e de grelha (TIPO 2).

b) INT1 e INT2

Calculam respectivamente os valores dos coeficientes FN para um dado ponto de integração numérica, que representa o peso pelo qual se deve multiplicar o valor da função naquele ponto para que o somatório deste produto, através de todos os pontos de integração, forneça a integral da função através do plano médio do elemento de placa (TIPO 1) ou do eixo do elemento de grelha (TIPO 2).

c) Parâmetros de entrada e saída

X_{ji} - coordenadas dos nós do elemento relativas aos eixos \bar{x}_j ; $j = 1, 2$ de um sistema local com a direção dos eixos

xos de ortotropia do elemento. Para $j = 3$ o valor de x_{ji} corresponde respectivamente à semi-altura ou à altura do elemento de placa ou de grelha nos nós.

- HG - como descrito em 5.2.
- NGAUS - como descrito em 5.2.
- NOD - como descrito em 5.2.
- LK - número do elemento.
- KE - como descrito em 5.2.
- D - matriz de elasticidade do elemento de placa.
- K_m - coeficiente elástico.
- FI_{jm} - coeficiente elástico.
- KRO_{jm} - delta de Kröneker.
- CX1 - cosseno do ângulo que os eixos de ortotropia formam com os eixos globais.
- CY1 - seno do ângulo cujo cosseno é CX1.
- $YM1_{ji}$ - coordenadas relativas aos eixos locais Y_j ; $j = 1, 2$ para os pontos nodais $i = 1, 2, 3 \dots 8$ do elemento de placa.
- $YM2_i$ - coordenada relativa ao eixo local Y_1 para os pontos nodais $i = 1, 2, 3$ do elemento de grelha.
- EM - módulo de elasticidade relativo ao elemento de grelha.
- G - módulo de elasticidade transversal relativo ao elemento de grelha.
- IR
- IR1
- IR2 - são índices relativos à escrita no disco
- IR3
- IR4
- IR5

- Y_j - são as coordenadas relativas aos eixos locais Y_j ; $j = 1, 2$ de um ponto de integração numérica.
- JY - Jacobiano relativo a um dado ponto de integração numérica.
- N_i - função de interpolação relativa a um dado nó e para um dado ponto de integração.
- NI_{ji} - derivada da função de interpolação relativa ao nó i em relação aos eixos locais Y_j ; $j = 1, 2$.
- MC33 - menor complementar relativo ao termo JY_{33} do Jacobiano.
- FN - fator de integração numérica.
- IG - número do ponto de integração relativo ao eixo Y_1 .
- JG - número do ponto de integração relativo ao eixo Y_2 .

5.2 - Significado das principais variáveis

- TITUL - título do programa.
- NPONT - número de pontos nodais da estrutura.
- NUME1 - número de elementos de placa.
- NUME2 - número de elementos de grelha.
- NBORD - número de pontos nodais no contorno da estrutura para os quais serão especificadas as condições de contorno.
- NELEM - número total de elementos.
- NGRUP - número de grupos de constantes elásticas distintos.
- MM - largura da semi-banda da matriz de rigidez.
- NGAUS - número de pontos usados na integração numérica de Gauss.
- NNOD - número de nós do elemento.
- SVART - indicação sobre: quando $SVART > 0$ será estudado o comportamento da estrutura para variações de temperatura.

Quando $SVART = 0$ este estudo não será realizado.

- HG_{ij} - é a coordenada ($j = 1$) e o coeficiente do peso ($j=2$) relativos ao ponto i de integração numérica de Gauss.
- XE_{ji} - é a coordenada relativa ao eixo \bar{x}_j do ponto i da estrutura.
- $TEMP_i$ - diferença entre as temperaturas na face superior e inferior no ponto i da estrutura.
- NB_i - número do nó i do contorno para o qual serão especificadas as condições de contorno.
- AP_{ji} - variável que indica se o grau de liberdade j do nó i do contorno da estrutura está impedido ($AP_{ji} = 0$) ou livre ($AP_{ji} = 1$) de se deslocar.
- $TIPO_i$ - variável que indica se o elemento i é de placa ($TIPO_i = 1$) ou de grelha ($TIPO_i = 2$).
- $COEDT_i$ - é o valor do coeficiente de dilatação térmica do material para o elemento i .
- NOD_{ji} - número do nó j do elemento i da estrutura.
- $ALT1_{ji}$ - altura do elemento de placa i no nó j .
- $ALT2_{ji}$ - altura do elemento de grelha i no nó j .
- $LARG_{ji}$ - largura do elemento de grelha i no nó j .
- CE_{ij} - são as sete constantes elásticas relacionadas a seguir, relativas ao grupo de constantes elásticas i especificadas no item 3.4 e 4.4, sendo as cinco primeira correspondentes aos elementos de placa e as duas últimas aos de grelha.
- CE_{i1} - módulo de elasticidade E_1 na direção do eixo \bar{x}_1 de ortotropia.
- CE_{i2} - módulo de elasticidade E_2 na direção do eixo \bar{x}_2 de ortotropia.
- CE_{i3} - coeficiente de Poisson ν_{12} .
- CE_{i4} - módulo de elasticidade transversal G .
- CE_{i5} - ângulo que os eixos \bar{x}_m de ortotropia fazem com

os eixos globais x_m ; $m = 1,2$

CE_{i6} - módulo de elasticidade E .

CE_{i7} - módulo de elasticidade transversal G .

- NPONS - número de nós solicitados da estrutura.
- NO - número do nó solicitado da estrutura.
- E_j - esforço que atua na direção do grau de liberdade j e sobre o nó NO.
- ALFA - ângulo que os esforços E_j ; $j = 2,3$ fazem com os eixos globais da estrutura.
- IND - variável que indica se o elemento i é ($IND > 0$) ou não ($IND = 0$) solicitado por qualquer tipo de forças generalizadas distribuídas.
- NCARC - número de pontos no interior do elemento i que possuam qualquer tipo de força generalizada concentrada atuando sobre eles.
- QD_{mj} - valor da força generalizada que atua na direção do grau de liberdade m no nó j .
- NEQ - número de equações do problema.
- KE - matriz de rigidez dos elementos.
- A - matriz de rigidez da estrutura.
- B - vetor das forças generalizadas, e, a seguir a subrotina que resolve o sistema de equações, dos deslocamentos nos nós da estrutura.

5.3 - Leitura das variáveis

NÚMERO DE CARTÕES	*	NOME DA VARIÁVEL	FORMATO
1		TITUL	18A4
1		NPONT, NUME1, NUME2, NBORD, NGRUP, MM, NGAUS, SVART	8I10
I = 1, NGAUS		HG _{ij} ; j = 1,2	2F10.0
		XE _{ji} ; j = 1,2	2F10.0
I = 1, NPONT	SVART > 0	TEMP _i	F10.0
I = 1, NBORD		NB _i , AP _{ij} ; j = 1,2,3	4I10
		TIPO _i	I10
	SVART > 0	COEDT _i	F10.0
I = 1, NELEM	TIPO = 1	NOD _{ji} ; j = 1,2,3...8	8I10
		ALT1 _{ji} ; j = 1,2,3...8	8F10.0
	TIPO = 2	NOD _{ji} ; j = 1,2,3	3I10
		LARG _{ji} ; j = 1,2,3	3F10.0
		ALT2 _{ji} ; j = 1,2,3	3F10.0
		NOD _{ji} (j = NNOD + 1)	I10
I = 1, NGRUP		CE _{ij} ; j = 1,2,3...8	7F10.0
1		NPONS	I10

CONTINUA

NÚMERO DE CARTÕES	*	NOME DA VARIÁVEL	FORMATO
1		NPONS	I10
I = 1, NPONS	NPONS > 0	NO, E _j ; j = 1,2,3, ALFA	I10,4F10.0
I = 1, NPONS			
		IND, NCARC	2I10
I = 1, NELEM	M=1,3	IND > 0 QD _{mj} ; j = 1, NNOD	8F10.0

* - Esta coluna indica em que condição o cartão deverá ser fornecido. As colunas em branco indicam que os cartões sempre deverão ser fornecidos.

OBS.: NNOD é igual a 3 quando o elemento i for de grelha e a 8 quando o elemento i for de placa.

5.4 - Capacidade do programa

O programa foi desenvolvido em um computador 1130 de 32K de memória, podendo resolver problemas que não excedam os valores especificados a seguir:

NPONT ≤ 52

MM ≤ 42

NUME1 ≤ 15

NUME2 ≤ 30

NBORD ≤ 20

NGAUS ≤ 3

5.5 - Resultados fornecidos pelo programa

O programa fornece os deslocamentos u_{3i} , θ_{1i} e θ_{2i} ; $i = 1, NPONT$ para os nós da estrutura. Para os elementos de placa os valores dos esforços seccionais relativos aos momentos fletores M_m ; $m = 1,2$ que atuam respectivamente na direção das rotações θ_m ; $m = 1,2$, ao momento torsor M_{12} e aos esforços cortantes T_{m3} ; $m=1,2$ que atuam respectivamente nas facetas perpendiculares aos eixos x_m ; $m = 1,2$ para os pontos de integração numérica. Para os elementos de grelha os valores dos esforços seccionais relativos ao momento fletor M_1 , ao momento torsor M_{12} e ao esforço cortante T_{13} . A convenção de sinal está especificada no Apêndice IV.

5.6 - Listagem do Programa

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE RIGI1(X,HG,NGAUS,NOD,LK,KE,D,K,FI,KRO,CX1,CY1,YM,IR,IR1
*,IR2)
  INTEGER P,Q,S,Z
  REAL N1(2,8),N2(2,2,8),MC331(2),MC33,N(8),JY(3,3),KE(24,24),KA(24)
*,K(2),JY1(2,3,3)
  DIMENSION T(3,3),YJ(3,3),YJ1(2,3,3),Y(2),F(2,8),HG(5,2)
*,NOD(9,45),D(6,6),FI(2,2),KRO(3,3),A(2,8),G(2,2,8),A1(2,2,8),DB(5,
*,3,8),R(5,5),C(8),YM(2,8),X(3,8)
  K1=0
  DO 1 I=1,24
  DO 1 J=1,24
1 KE(I,J)=0.
  T(1,1)=1.
  DO 2 P=2,3
  T(1,P)=0.
2 T(P,1)=0.
  T(2,2)=CX1
  T(3,3)=CX1
  T(3,2)=-CY1
  T(2,3)=CY1
  DO 4 IG=1,NGAUS
  DO 4 JG=1,NGAUS
  K1=K1+1
  Y(1)=HG(IG,1)
  Y(2)=HG(JG,1)
  DO 5 I=1,4
  N(I)=.25*(1+YM(1,I)*Y(1))*(1+YM(2,I)*Y(2))*(YM(1,I)*Y(1)+Y(2)*YM(2
*,I)-1)
  DO 6 P=1,2
  IKK=3-P
  N1(P,I)=.25*YM(P,I)*(1+YM(IKK,I)*Y(IKK))*(2*YM(P,I)*Y(P)+YM(IKK,I)
**Y(IKK))
  N2(P,P,I)=.5*YM(P,I)**2*(1+YM(IKK,I)*Y(IKK))
6 N2(P,IKK,I)=.25*YM(P,I)*YM(IKK,I)*(2*YM(P,I)*Y(P)+YM(IKK,I)*Y(IKK)
*)+.25*YM(P,I)*(1+YM(IKK,I)*Y(IKK))*YM(IKK,I)
  J=I+4
  N(J)=0.
  DO 5 P=1,2
  IKK=3-P
  N(J)=N(J)+.5*(1-Y(IKK)**2)*(1+YM(P,J)*Y(P))*YM(P,J)**2
  N1(P,J)=.5*YM(P,J)**3*(1-Y(IKK)**2)-YM(IKK,J)**2*(Y(P)+YM(IKK,J)*Y
*(P)*Y(IKK))
  N2(P,P,J)=-YM(IKK,J)**2*(1+YM(IKK,J)*Y(IKK))
5 N2(P,IKK,J)=-YM(P,J)**3*Y(IKK)-YM(IKK,J)**3*Y(P)
  H=0.
  DO 7 I=1,3
  DO 7 J=1,3

```

```

YJ(I,J)=0.
JY(I,J)=0.
DO 7 P=1,2
  JY1(P,I,J)=0.
- 7 YJ1(P,I,J)=0.
  IRI=NGAUS**2*(IR-1)+K1
  WRITE(11,IR1)(N(I),I=1,8)
  DO 8 I=1,8
  DO 9 M=1,2
  DO 10 J=1,2
10 JY(M,J)=N1(J,I)*X(M,I)+JY(M,J)
  9 JY(3,M)=N1(M,I)*X(3,I)+JY(3,M)
  JY(3,3)=N(I)*X(3,I)+JY(3,3)
  H=H+N(I)*X(3,I)
  DO 8 P=1,2
  DO 11 M=1,2
  DO 12 J=1,2
12 JY1(P,M,J)=JY1(P,M,J)+N2(P,J,I)*X(M,I)
11 JY1(P,3,M)=JY1(P,3,M)+N2(P,M,I)*X(3,I)
  8 JY1(P,3,3)=JY1(P,3,3)+N1(P,I)*X(3,I)
  MC33=JY(1,1)*JY(2,2)-JY(1,2)*JY(2,1)
  DET=MC33*JY(3,3)
  DO 13 P=1,2
  MC331(P)=JY1(P,1,1)*JY(2,2)+JY(1,1)*JY1(P,2,2)-JY1(P,1,2)*JY(2,1)-
  *JY(1,2)*JY1(P,2,1)
  DO 14 M=1,2
  IKK=3-M
  YJ1(P,M,M)=(MC33*JY1(P,IKK,IKK)-JY(1,1)*MC331(P))/MC33**2
  J=3-M
  YJ1(P,M,J)=(-MC33*JY1(P,M,J)+JY(M,J)*MC331(P))/MC33**2
14 YJ1(P,3,M)=(-1)**(M+3)*(JY1(P,IKK,1)*JY(3,2)+JY(1,1)*JY1(P,3,2)-
  *JY1(P,IKK,2)*JY(3,1)-JY(1,1)*JY1(P,3,1))/JY(3,3)/MC33-(-1)**(M+3)
  *(JY1(P,3,3)*MC33+JY(3,3)*MC331(P))*(JY(1,1)*JY(3,2)-JY(1,1)*
  *JY(3,1))/JY(3,3)**2/MC33**2
13 YJ1(P,3,3)=-JY1(P,3,3)/JY(3,3)**2
  DO 15 M=1,2
  IKK=3-M
  YJ(M,M)=JY(1,1)/MC33
  YJ(M,IKK)=-JY(M,IKK)/MC33
15 YJ(3,M)=(-1)**(M+3)*(JY(1,1)*JY(3,2)-JY(1,1)*JY(3,1))/JY(3,3)/
  *MC33
  YJ(3,3)=1/JY(3,3)
  DO 16 I=1,8
  C(I)=N(I)*X(3,I)/H
  DO 16 M=1,2
  F(M,I)=N1(1,I)*YJ(1,M)+N1(2,I)*YJ(2,M)
  A(M,I)=F(M,I)+N(I)*YJ(3,M)
  DO 116 P=1,2
116 A1(P,M,I)=N2(P,1,I)*YJ(1,M)+N2(P,2,I)*YJ(2,M)+N1(P,I)*YJ(3,M)+N1(1
  *,I)*YJ1(P,1,M)+N1(2,I)*YJ1(P,2,M)+N(I)*YJ1(P,3,M)

```

```

DO 16 P=1,2
16 G(P,M,I)=(A1(1,M,I)*YJ(1,P)+A1(2,M,I)*YJ(2,P))*5+A(M,I)*YJ(3,P)
DO 17 I=1,8
DO 18 M=1,2
IKK=3-M
DB(M+3,1,I)=2*H*D(M+4,M+4)*F(IKK,I)
DB(3,M+1,I)=2*H**2*X(3,I)/3*A(IKK,I)*D(4,4)
DO 18 J=1,2
DB(M,J+1,I)=2*H**2*X(3,I)/3*FI(M,J)*A(J,I)
18 DB(M+3,J+1,I)=2*H*D(M+4,M+4)*(C(I)*(1-KRO(M,J))+H*X(3,I)/3*K(J)*G(
*IKK,J,I))
DO 17 M=1,3
17 DB(M,1,I)=0.
DO 19 I=1,2
DO 19 J=1,3
R(J,I+3)=0.
19 R(I+3,J)=0.
R(1,1)=CX1**2
R(2,2)=CX1**2
R(1,2)=CY1**2
R(2,1)=CY1**2
R(1,3)=-2*CX1*CY1
R(2,3)=-R(1,3)
R(3,1)=CX1*CY1
R(3,2)=-R(3,1)
R(3,3)=CX1**2-CY1**2
DO 20 I=1,2
DO 20 J=1,2
20 R(I+3,J+3)=T(I+1,J+1)
DO 21 M=1,5
IR2=(IR-1)*5*NGAUS**2+NGAUS**2*(M-1)+K1
DO 22 I=1,8
DO 22 L=1,3
J=3*(I-1)+L
KA(J)=0.
DO 22 Q=1,3
DO 22 P=1,5
22 KA(J)=KA(J)+R(M,P)*DB(P,Q,I)*T(Q,L)
21 WRITE(21,IR2)(KA(J),J=1,24)
FN=H*MC33*HG(IG,2)*HG(JG,2)*2
DO 4 I=1,8
DO 4 J=1,8
P=3*(I-1)+1
Q=3*(J-1)+1
KE(P,Q)=KE(P,Q)+(F(1,I)*D(6,6)*F(1,J)+F(2,I)*D(5,5)*F(2,J))*FN
DO 4 M=1,2
IMM=7-M
IM4=IMM-4
S=Q+M
Z=P+M

```

```

    KE(P,S)=KE(P,S)+(D(IMM,IMM)*F(M,I)*C(J)+H*X(3,J)/3*K(M)*(D(5,5)*F(
*2,I)*G(2,M,J)+D(6,6)*F(1,I)*G(1,M,J)))*FN
    KE(Z,Q)=KE(Z,Q)+(D(IMM,IMM)*F(M,J)*C(I)+H*X(3,I)/3*K(M)*(D(5,5)*F(
*2,J)*G(2,M,I)+D(6,6)+F(1,J)*G(1,M,I)))*FN
    DO 4 L=1,2
    ILL=7-L
    IL4=ILL-4
    S=Q+L
    KE(Z,S)=KE(Z,S)+FN*(D(IMM,IMM)*C(I)*C(J)*KRO(M,L)+K(M)*K(L)/5*X(3,
*I)*X(3,J)*H**2*(D(5,5)*G(2,M,I)*G(2,L,J)+D(6,6)*G(1,M,I)*G(1,L,J))
*)
    KE(Z,S)=KE(Z,S)+FN*X(3,I)*X(3,J)/3*(A(M,I)*FI(M,L)*A(L,J)+A(IM4,I)
**D(4,4)*A(IL4,J))
4 KE(Z,S)=KE(Z,S)+(X(3,I)*X(3,J)/3*(D(IMM,IMM)*K(L)*C(I)*G(M,L,J)/X(
*3,I)*H+D(ILL,ILL)*K(M)*C(J)*G(L,M,I)/X(3,J)*H))*FN
    IF(CX1-0.99)23,24,24
23 DO 25 I=1,8
    DO 25 J=1,8
    DO 26 P=1,3
    DO 26 Q=1,3
    S=3*(I-1)+P
    Z=3*(J-1)+Q
    JY(P,Q)=KE(S,Z)
26 KE(S,Z)=0.
    DO 27 P=1,3
    DO 27 Q=1,3
    YJ(P,Q)=0.
    DO 27 M=1,3
27 YJ(P,Q)=YJ(P,Q)+JY(P,M)*T(M,Q)
    DO 25 P=1,3
    DO 25 Q=1,3
    S=3*(I-1)+P
    Z=3*(J-1)+Q
    DO 25 M=1,3
25 KE(S,Z)=KE(S,Z)+T(M,P)*YJ(M,Q)
24 RETURN
    END

```

```
// DUP
```

```
*DELETE          RIGI1      OEC3
*STORE           WS  UA  RIGI1      OEC3
```

```
// FOR
```

```
*ONE WORD INTEGERS
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
  SUBROUTINE RIGI2(X,HG,NGAUS,NOD,LK,KE,BO,KRO,EM,G,YM,IR,IR3,IR4,IR
*5)
```

```
  INTEGER P,Q
```

```
  REAL MC33,N(3),N1(3),JY(3,3),KE(24,24)
```

```
  DIMENSION H(3),XL(3),D(3),R(3,3),YJ(3,3),A(3,5),Y(3),B(3,3,3)
```

```
*,DB(3,3,3),ESP(2,3),YM(3),HG(5,2),X(3,8),NOD(9,45),BO(3),KRO(3,3)
```

```
  KI=0
```

```

K2=0
DO 1 I=1,9
DO 1 J=1,9
1 KE(I,J)=0.
D(1)=EM
D(3)=G/1.5
Y(1)=-1.
Y(2)=1.
Y(3)=0.
DO 2 P=1,3
DO 3 M=1,2
3 N1(M)=Y(P)+YM(M)*.5
N1(3)=-2*Y(P)
DO 4 M=1,2
JY(M,1)=0.
DO 4 J=1,3
4 JY(M,1)=JY(M,1)+N1(J)*X(M,J)
IF(ABS(JY(1,1))-0.001)5,6,6
5 ALFA=1.570796325
ALFA=SIGN(ALFA,X(2,2)-X(2,1))
GO TO 7
6 TG=JY(2,1)/JY(1,1)
ALFA=ATAN(TG)
IF(JY(1,1))8,7,7
8 ALFA=ALFA+3.14159265
7 ALFA=ALFA+1.570796325
ESP(1,P)=B0(P)*COS(ALFA)
2 ESP(2,P)=B0(P)*SIN(ALFA)
IR5=IR
WRITE(32*IR5)((ESP(M,J),J=1,3),M=1,2),X(3,1),X(3,2),X(3,3)
DO 9 IG=1,NGAUS
K1=K1+1
Y(1)=HG(IG,1)
DO 10 M=1,2
N(M)=.5*Y(1)*(Y(1)+YM(M))
10 N1(M)=Y(1)+YM(M)*.5
N(3)=(1-Y(1)**2)
N1(3)=-2*Y(1)
IR3=NGAUS*(IR5-1)+K1
WRITE(12*IR3)(N(M),M=1,3)
DO 11 M=1,2
H(M)=0.
DO 11 J=1,3
11 H(M)=H(M)+N(J)*ESP(M,J)
H(3)=0.
DO 12 J=1,3
12 H(3)=H(3)+N(J)*X(3,J)
H(1)=SQRT(H(1)**2+H(2)**2)
FC=1+(H(1)/H(3))**2
D(2)=G*FC

```

```

DO 9 JG=1,NGAUS
DO 9 KG=1,NGAUS
K2=K2+1
Y(2)=HG(JG,1)
Y(3)=HG(KG,1)
DO 20 I=1,3
DO 20 J=1,3
JY(I,J)=0.
20 YJ(I,J)=0.
DO 21 I=1,3
DO 22 M=1,2
JY(M,1)=JY(M,1)+N1(I)*(X(M,I)+ESP(M,I)*.5*Y(2))
22 JY(M,2)=JY(M,2)+N(I)*ESP(M,I)*.5
JY(3,1)=JY(3,1)+N1(I)*X(3,I)*.5
21 JY(3,3)=JY(3,3)+N(I)*X(3,I)*.5
MC33=JY(1,1)*JY(2,2)-JY(1,2)*JY(2,1)
DET=JY(3,3)*MC33
DO 13 I=1,2
IK=3-I
YJ(I,I)=JY(IK,IK)/MC33
YJ(I,IK)=-JY(I,IK)/MC33
13 YJ(3,I)=(-1)**(I+3)*JY(3,1)*JY(IK,2)/DET
YJ(3,3)=1/JY(3,3)
XL(1)=SQRT(JY(1,1)**2+JY(2,1)**2+JY(3,1)**2*Y(3)**2)
XL(2)=SQRT(JY(1,1)**2+JY(2,1)**2)
XL(3)=SQRT((JY(1,1)*JY(3,1)*Y(3))**2+(JY(2,1)*JY(3,1)*Y(3))**2+(JY
*(1,1)**2+JY(2,1)**2)**2)
DO 14 M=1,2
IMM=3-M
R(1,M)=JY(M,1)/XL(M)*(-1)**(M+1)
R(2,M)=JY(IMM,1)/XL(M)
14 R(M,3)=-JY(M,1)*JY(3,1)/XL(3)*Y(3)
R(3,1)=JY(3,1)/XL(1)*Y(3)
R(3,2)=0.
R(3,3)=(JY(1,1)**2+JY(2,1)**2)/XL(3)
DO 15 I=1,3
DO 16 M=1,2
A(I,M)=YJ(1,M)*N1(I)+YJ(3,M)*N(I)
16 A(I,M+3)=YJ(1,M)*N1(I)
A(I,3)=YJ(3,3)*N(I)*X(3,I)*.5
DO 15 M=1,3
DO 15 J=1,3
15 B(I,M,J)=0.
DO 17 I=1,3
DO 18 J=1,3
DO 18 M=1,2
18 B(I,J,1)=B(I,J,1)+A(I,M+3)*(R(M,J)*R(3,1)+R(M,1)*R(3,3)*KRO(J,3))
DO 17 J=1,2
DO 19 M=1,2
19 B(I,1,J+1)=B(I,1,J+1)+X(3,I)*.5*Y(3)*A(I,M)*R(M,1)*R(J,1)+A(I,3)*R

```

```

*(3,1)*R(J,1)*.5
DO 17 L=1,2
  ILL=3-L
  DO 17 M=1,2
17 B(I,J+1,L+1)=B(I,J+1,L+1)+X(3,I)*.5*Y(3)*A(I,M)*(R(M,1)*R(L,J+1)+
  *R(L,1)*R(M,J+1)*KRO(M,ILL))*(1+KRO(M,L))+A(I,3)*(R(3,1)*R(L,J+1)+
  *R(3,3)*R(L,1)*KRO(J+1,3))* .5
  DO 23 I=1,3
  DO 23 M=1,3
  DO 23 L=1,3
23 DB(I,M,L)=D(M)*B(I,M,L)
  FN=DET*HG(IG,2)*HG(JG,2)*HG(KG,2)
  DO 24 I=1,3
  DO 24 J=1,3
  DO 24 K=1,3
  DO 24 L=1,3
  DO 24 M=1,3
  P=3*(I-1)+K
  Q=3*(J-1)+L
24 KE(P,Q)=KE(P,Q)+B(I,M,K)*DB(J,M,L)*FN
  IR4=NGAUS**3*(IR5-1)+K2
  WRITE(22,IR4)((DB(I,M,L),L=1,3),M=1,3),I=1,3)
9 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

// DUP
*DELETE          RIGI2      ^OEC3
*STORE          WS  UA  RIGI2.      OEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE INT1(Y,X,YM1,JY,HG,N,N1,MC33, FN,IG,JG)
  INTEGER P
  REAL MC33,N(8),N1(2,8),JY(2,2)
  DIMENSION Y(2),X(3,8),YM1(2,8),HG(5,2)
  DO 1 I=1,4
  N(I)=.25*(1+YM1(I,I)*Y(1))*(1+YM1(2,I)*Y(2))*(YM1(1,I)*Y(1)+Y(2)*
  *YM1(2,I)-1)
  DO 2 P=1,2
  IK=3-P
2  N1(P,I)=.25*YM1(P,I)*(1+YM1(IK,I)*Y(IK))*(2*YM1(P,I)*Y(P)+YM1(IK,I)
  *)*Y(IK)
  J=I+4
  N(J)=0.
  DO 3 P=1,2
  IK=3-P
3  N(J)=N(J)+.5*(1-Y(IK)**2)*(1+YM1(P,J)*Y(P))*YM1(P,J)**2
  DO 1 P=1,2
  IK=3-P
1  N1(P,J)=.5*YM1(P,J)**3*(1-Y(IK)**2)-YM1(IK,J)**2*(Y(P)+YM1(IK,J)*Y

```

```

*(P)*Y(IK))
  DO 4 I=1,2
  DO 4 J=1,2
4 JY(I,J)=0.
  DO 5 I=1,8
  DO 5 M=1,2
  DO 5 J=1,2
5 JY(M,J)=JY(M,J)+N1(J,I)*X(M,I)
MC33=JY(1,1)*JY(2,2)-JY(1,2)*JY(2,1)
FN=MC33*HG(IG,2)*HG(JG,2)
RETURN
END

```

```

// DUP
*DELETE          INT1          OEC3
*STORE          WS  UA  INT1          OEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE INT2(YM2,Y1,N,N1,X,JY,FN,C)
REAL N(8),N1(2,8),JY(2,2)
DIMENSION YM2(3),X(3,8),C(2)
DO 1 M=1,2
N(M)=.5*Y1*(Y1+YM2(M))
1 N1(1,M)=Y1+YM2(M)*.5
N(3)=(1-Y1**2)
N1(1,3)=-2*Y1
JY(1,1)=0.
JY(2,1)=0.
DO 2 I=1,3
DO 2 M=1,2
2 JY(M,1)=JY(M,1)+X(M,I)*N1(1,I)
FN=SQRT(JY(1,1)**2+JY(2,1)**2)
DO 3 M=1,2
3 C(M)=JY(M,1)/FN
RETURN
END

```

```

// DUP
*DELETE          INT2          OEC3
*STORE          WS  UA  INT2          OEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE SOLVE(A,B,NEQ,MM)
DIMENSION A(156,42),B(156)
NMI=NEQ-1
DO 3 I=1,NMI
DO 3 J=2,MM
II=I+J-1
IF(II-NEQ)1,1,3
1 F=-A(I,J)/A(I,1)

```

```

B(II)=B(II)+F*B(I)
MJ1=MM-J+1
DO 2 K=1,MJ1
L=K+J-1
2 A(II,K)=A(II,K)+F*A(I,L)
3 CONTINUE
B(NEQ)=B(NEQ)/A(NEQ,1)
DO 5 L=2,NEQ
I=NEQ-L+1
C=B(I)
DO 4 K=2,MM
IK1=I+K-1
IF( (IK1-NEQ)4,4,5
4 C=C-A(I,K)*B(IK1)
5 B(I)=C/A(I,1)
RETURN
END

// DUP
*DELETE          SOLVE          OEC3
*STORE          WS  UA  SOLVE          OEC3
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER,DISK)
DEFINE FILE 1(175,32,U,IR5)
DEFINE FILE 2(90,12,U,IR5)
DEFINE FILE 11(135,16,U,IR1)
DEFINE FILE 12(90,6,U,IR3)
DEFINE FILE 21(675,48,U,IR2)
DEFINE FILE 22(810,54,U,IR4)
DEFINE FILE 32(30,18,U,IR5)
INTEGER SVART,T,Q,P,TIPO(45),AP(3,20)
REAL KE(24,24),K(2),LARG(3,30),N(8),N1(2,8),JY(2,2),LRGA(3)
DIMENSION NOD(9,45),KRO(3,3),ICT(2),NNOD(2),Y(3),TEMP(52)
*,NB(20),ESF(3,3,3),TENS(3,3,3),S(5),XE(2,52),X(3,8),CE(4,7),HG(5,2
*),D(6,6),YM1(2,8),XG(2),FI(2,2),BO(3),ALT2(3,30),ALT1(8,15)
*,B(156),A(156,42),YM2(3),EE(3,3),COEDT(45),QT(2,8),QD(3,8),E(3),C(
*2),DB(3,8),ESP(2,3),TITUL(18),ALT(3)
L1=8
L2=5
READ(L1,1000)TITUL
READ(L1,1001)NPONT,NUME1,NUME2,NBORD,NGRUP,MM,NGAUS,SVART
WRITE(L2,3000)TITUL
WRITE(L2,3001)NPONT,NUME1,NUME2,NBORD
WRITE(L2,3002)NGRUP,MM,NGAUS,SVART
NELEM=NUME1+NUME2
NEQ=3*NPONT
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,3
IF(I-J)2,3,2

```

```

3 KRO(I,J)=1
  GO TO 1
2 KRO(I,J)=0
1 CONTINUE
  DO 201 I=1,2
201 ICT(I)=0
    I=0
    NNOD(1)=8
    NNOD(2)=3
    RAD=0.0174532925
    YM2(1)=-1.
    YM2(2)=1.
    YM2(3)=0.
    DO 301 J=1,2
    DO 301 L=1,2
      I=I+1
      DO 301 M=1,2
        YM1(M,I+4)=(M-L)*(-1)**J
        IF(YM1(M,I+4))4,5,4
5      YM1(M,I)=2*J-3
        GO TO 301
4      YM1(M,I)=YM1(M,I+4)
301 CONTINUE
    DO 40 J=1,NEQ
      B(J)=0.
    DO 40 L=1,MM
40  A(J,L)=0.
    READ(L1,1002)((HG(I,J),J=1,2),I=1,NGAUS)
    WRITE(L2,3003)
    DO 501 I=1,NPONT
      READ(L1,1002)(XE(J,I),J=1,2)
      WRITE(L2,3031)I,(XE(J,I),J=1,2)
      IF(SVART)501,501,6
6    READ(L1,1003)TEMP(I)
      WRITE(L2,3005)TEMP(I)
501 CONTINUE
    WRITE(L2,3006)
    DO 7 I=1,NBORD
      READ(L1,1004)NB(I),AP(1,I),AP(2,I),AP(3,I)
7    WRITE(L2,3040)NB(I),AP(1,I),AP(2,I),AP(3,I)
      WRITE(L2,3007)
    DO 8 I=1,NELEM
      READ(L1,1005)TIPO(I)
      WRITE(L2,3008)I,TIPO(I)
      L=TIPO(I)
      ICT(L)=ICT(L)+1
      T=ICT(L)
      IF(SVART)91,91,92
92  READ(L1,1003)COEDT(I)
      WRITE(L2,3009)COEDT(I)

```

```

91 IF(L-1)9,9,10
  9 READ(L1,1001)(NOD(J,I),J=1,8)
    READ(L1,1006)(ALT1(M,T),M=1,8)
    WRITE(L2,3010)(NOD(J,I),J=1,8),(ALT1(J,T),J=1,8)
    GO TO 11
10 READ(L1,1007)(NOD(J,I),J=1,3)
    READ(L1,1008)(LARG(M,T),M=1,3)
    READ(L1,1008)(ALT2(M,T),M=1,3)
    WRITE(L2,3011)(NOD(J,I),J=1,3),(ALT2(J,T),J=1,3),(LARG(J,T),J=1,3)
11 T=NNOD(L)+1
    READ(L1,1005)NOD(T,I)
  8 WRITE(L2,3012)NOD(T,I)
    READ(L1,1009)((CE(I,J),J=1,7),I=1,NGRUP)
    WRITE(L2,3013)
    DO 200 I=1,NGRUP
200 WRITE(L2,3014)I,(CE(I,J),J=1,7)
    DO 12 I=1,2
12 ICT(I)=0
    READ(L1,1005)NPONS
    WRITE(L2,3015)NPONS
    IF(NPONS)50,50,51
51 WRITE(L2,3016)
    DO 52 I=1,NPONS
    READ(L1,1010)NO,E(1),E(2),E(3),ALFA
    WRITE(L2,3017)NO,E(1),E(2),E(3),ALFA
    ALFA=ALFA*RAD
    M=3*(NO-1)
    B(M+1)=B(M+1)+E(1)
    B(M+2)=B(M+2)+E(2)*COS(ALFA)-E(3)*SIN(ALFA)
52 B(M+3)=B(M+3)+E(2)*SIN(ALFA)+E(3)*COS(ALFA)
50 WRITE(L2,3018)
    DO 13 LK=1,NELEM
    L=TIPO(LK)
    ICT(L)=ICT(L)+1
    T=ICT(L)
    IR=T
    IF(L-1)14,14,15
      ELEMENTO DE PLACA (1)
14 I=NOD(9,LK)
    DO 16 M=1,8
16 X(3,M)=ALT1(M,T)*.5
    RE=CE(I,5)*RAD
    CX1=COS(RE)
    CY1=SIN(RE)
    DO 17 J=1,2
    XG(J)=0.
    DO 17 M=1,4
    L=NOD(M,LK)
17 XG(J)=XG(J)+.25*XE(J,L)
    DO 18 M=1,8

```

C

```

L=NOD(M,LK)
X(1,M)=(XE(1,L)-XG(1))*CX1+(XE(2,L)-XG(2))*CY1
18 X(2,M)=-((XE(1,L)-XG(1))*CY1+(XE(2,L)-XG(2))*CX1
RE=CE(I,2)/CE(I,1)
D(1,1)=RE*CE(I,2)*((1-RE*CE(I,3)**2)/(1+CE(I,3)))/(1-CE(I,3)-2*RE*CE
*(I,3)**2)
D(3,3)=D(1,1)
D(2,2)=CE(I,2)*((1-CE(I,3)))/(1-CE(I,3)-2*RE*CE(I,3)**2)
D(2,1)=RE*CE(I,2)*CE(I,3)/(1-CE(I,3)-2*RE*CE(I,3)**2)
D(1,2)=D(2,1)
D(2,3)=D(2,1)
D(1,3)=RE*CE(I,2)*((RE*CE(I,3)**2+CE(I,3))/(1+CE(I,3)))/(1-CE(I,3)-2
**RE*CE(I,3)**2)
D(4,4)=CE(I,4)
D(5,5)=CE(I,4)
D(6,6)=.5*(D(1,1)-D(1,3))
DO 19 M=1,2
K(M)=-D(M,3)/D(3,3)
DO 19 J=1,2
19 FI(J,M)=D(J,M)+D(J,3)*K(M)
CALL RIGI1(X,HG,NGAUS,NOD,LK,KE,D,K,FI,KRO,CX1,CY1,YM1,IR,IR1,IR2)
GO TO 30
15 DO 20 J=1,3
20 BO(J)=LARG(J,T)
DO 21 M=1,2
DO 21 J=1,3
L=NOD(J,LK)
21 X(M,J)=XE(M,L)
I=NOD(4,LK)
EM=CE(I,6)
G=CE(I,7)
DO 22 I=1,3
22 X(3,I)=ALT2(I,T)
CALL RIGI2(X,HG,NGAUS,NOD,LK,KE,BO,KRO,EM,G,YM2,IR,IR3,IR4,IR5)
30 P=TIPO(LK)
NNPE=NNOD(P)
C FORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA
DO 27 L=1,NNPE
DO 27 M=1,NNPE
DO 26 J=1,3
J1=3*(NOD(L,LK)-1)+J
JE=3*(L-1)+J
DO 26 I=1,3
IB=3*(NOD(M,LK)-1)+I
IE=3*(M-1)+I
JB=J1-IB+1
IF(JB)26,26,23
23 A(IB,JB)=A(IB,JB)+KE(IE,JE)
26 CONTINUE
27 CONTINUE

```

```

READ(L1,1011)IND,NCARC
WRITE(L2,3019)LK,IND,NCARC
IF(IND)60,60,61
61 WRITE(L2,3020)
DO 202 M=1,3
READ(L1,1006)(QD(M,J),J=1,NNPE)
202 WRITE(L2,3021)M,(QD(M,J),J=1,NNPE)
DO 62 J=1,2
DO 62 I=1,NNPE
L=NOD(I,LK)
62 X(J,I)=XE(J,L)
IF(TIPO(LK)-1)63,63,64
63 DO 65 IG=1,NGAUS
DO 65 JG=1,NGAUS
Y(1)=HG(IG,1)
Y(2)=HG(JG,1)
CALL INT1(Y,X,YM1,JY,HG,N,N1,MC33,FN,IG,JG)
DO 65 I=1,8
DO 65 J=1,8
DO 65 M=1,3
L=3*(NOD(I,LK)-1)+M
65 B(L)=B(L)+N(I)*N(J)*QD(M,J)*FN
GO TO 60
64 DO 66 IG=1,NGAUS
Y(1)=HG(IG,1)
CALL INT2(YM2,Y(1),N,N1,X,JY,FN,C)
DO 66 I=1,3
DO 66 J=1,3
DO 66 M=1,3
L=3*(NOD(I,LK)-1)+M
66 B(L)=B(L)+N(I)*N(J)*FN*HG(IG,2)*QD(M,J)
60 IF(NCARC)67,67,68
68 WRITE(L2,3030)
DO 69 Q=1,NCARC
READ(L1,1012)E(1),E(2),E(3),ALFA,Y(1)
WRITE(L2,3031)Q,E(1),E(2),E(3),ALFA,Y(1)
ALFA=ALFA*RAD
IF(TIPO(LK)-1)70,70,71
70 READ(L1,1003)Y(2)
WRITE(L2,3032)Y(2)
DO 72 I=1,4
N(I)=.25*(1+YM1(1,I)*Y(1))*(1+YM1(2,I)*Y(2))*(YM1(1,I)*Y(1)+Y(2)*Y
*M1(2,I)-1)
J=I+4
N(J)=0.
DO 72 P=1,2
IPP=3-P
72 N(J)=.5*(1-Y(IPP)**2)*(1+YM1(P,J)*Y(P))*YM1(P,J)**2+N(J)
GO TO 73
71 DO 74 M=1,2

```

```

74 N(M)=(Y(1)+YM2(M))* .5*Y(1)
   N(3)=(1-Y(1)**2)
73 Y(1)=E(2)*COS(ALFA)-E(3)*SIN(ALFA)
   Y(2)=E(2)*SIN(ALFA)+E(3)*COS(ALFA)
   DO 75 M=1,2
75 E(M+1)=Y(M)
   DO 69 M=1,3
   DO 69 I=1,NNPE
   L=3*(NOD(I,LK)-1)+M
69 B(L)=B(L)+N(I)*E(M)
67 IF(SVART)13,13,81
81 DO 82 J=1,2
   DO 82 I=1,NNPE
82 QT(J,I)=0.
   IF(TIPO(LK)-1)83,83,84
83 I=NOD(9,LK)
   RE=CE(I,5)*RAD
   C(1)=COS(RE)
   C(2)=SIN(RE)
   DO 85 M=1,2
   J=3-M
   EE(M,M)=D(M,M)*C(1)**4+D(J,J)*C(2)**4+2*C(1)**2*C(2)**2*(D(1,2)+2*
*D(4,4))
   EE(M,J)=D(M,J)+C(1)**2*C(2)**2*(D(1,1)+D(2,2)-2*D(M,J)+4*D(4,4))
   EE(M,3)=D(M,3)*C(1)**2+D(J,3)*C(2)**2
85 K(M)=-EE(M,3)/EE(3,3)
   DO 86 M=1,2
86 FI(M,J)=EE(M,J)+K(J)*EE(M,3)
   DO 87 M=1,2
87 E(M)=E(M)+FI(M,J)
   DO 88 IG=1,NGAUS
   DO 88 JG=1,NGAUS
   TO=0.
   H=0.
   Y(1)=HG(IG,1)
   Y(2)=HG(JG,1)
   CALL INT1(Y,X,YM1,JY,HG,N,N1,MC33,FN,IG,JG)
   DO 89 I=1,8
   H=H+ALT1(I,T)*N(I)
   L=NOD(I,LK)
89 TO=TO+TEMP(L)*N(I)
   DO 88 M=1,2
   FC=E(M)*COEDT(LK)
   DO 88 I=1,8
88 QT(M,I)=QT(M,I)+N(I)*FN*FC
   IR5=IR
   WRITE(1,IR5)((QT(M,I),M=1,2),I=1,8)
   GO TO 90
84 DO 100 IG=1,NGAUS
   Y(1)=HG(IG,1)

```

```

T0=0.
H=0.
B1=0.
CALL INT2(YM2,Y(1),N,N1,X,JY,FN,C)
DO 101 I=1,3
L=NOD(I,LK)
T0=T0+TEMP(L)*N(I)
H=H+ALT2(I,T)*N(I)
101 B1=B1+LARG(I,T)*N(I)
L=NOD(4,LK)
FC=CE(L,6)*COEDT(LK)*T0*B1*H**2/12.
DO 100 I=1,3
DO 100 J=1,2
100 QT(J,I)=QT(J,I)+N(I)*FN*FC*HG(IG,I)*C(J)
WRITE(2,IR)((QT(M,I),M=1,2),I=1,3)
90 DO 102 M=1,2
DO 102 I=1,NNPE
L=3*(NOD(I,LK)-1)+M+1
102 B(L)=B(L)+QT(M,I)
13 CONTINUE
C INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE APOIO
DO 103 I=1,NBORD
DO 103 J=1,3
IF(AP(J,I))104,104,103
104 IB=3*(NB(I)-1)+J
DO 105 KJ=2,MM
A(IB,KJ)=0.
JL=IB-KJ+1
IF(JL)105,105,106
106 A(JL,KJ)=0.
105 CONTINUE
A(IB,1)=1.
B(IB)=0.
103 CONTINUE
ICT(1)=0
ICT(2)=0
C SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
CALL SOLVE(A,B,NEQ,MM)
WRITE(L2,2000)
WRITE(L2,2001)(I,B(3*I-2),B(3*I-1),B(3*I),I=1,NPONT)
WRITE(L2,2002)
DO 110 LK=1,NELEM
L=TIPO(LK)
WRITE(L2,2003)LK,L
ICT(L)=ICT(L)+1
NNPE=NNOD(L)
DO 113 J=1,NNPE
Q=NOD(J,LK)
DO 113 I=1,2
113 X(I,J)=XE(I,Q)

```

```

IR=ICT(L)
IR5=IR
IF(L-1)111,111,112
112 READ(32*IR5)((ESP(M,J),J=1,3),M=1,2),ALT(1),ALT(2),ALT(3)
DO 114 J=1,3
114 LRGA(J)=SQRT(ESP(1,J)**2+ESP(2,J)**2)
IF(SVART)115,115,116
116 READ(2*IR5)((QT(M,I),M=1,2),I=1,3)
115 K1=0
K2=0
DO 117 IG=1,NGAUS
HO=0.
B1=0.
X1=0.
X2=0.
Y(1)=0.
Y(2)=0.
K1=K1+1
IR3=NGAUS*(IR5-1)+K1
READ(12*IR3)(N(M),M=1,3)
DO 118 M=1,3
IF(SVART)119,119,120
120 DO 121 J=1,2
121 Y(J)=Y(J)-N(M)*QT(J,M)
119 B1=B1+LRGA(M)*N(M)
HO=HO+ALT(M)*N(M)
X1=X1+X(1,M)*N(M)
118 X2=X2+X(2,M)*N(M)
WRITE(L2,2004)K1,B1,HO,X1,X2
I=0
DO 122 J=1,3
DO 122 M=1,3
DO 122 L=1,3
122 ESF(J,M,L)=0.
DO 126 JG=1,NGAUS
DO 126 KG=1,NGAUS
K2=K2+1
IR4=NGAUS**3*(IR5-1)+K2
READ(22*IR4)((TENS(M,L,J),J=1,3),L=1,3),M=1,3)
Y(3)=HG(KG,1)
IF(Y(3))124,123,124
124 I=I+1
DO 125 M=1,2
DO 125 L=1,3
DO 125 J=1,3
125 ESF(J,M,L)=ESF(J,M,L)+TENS(J,M,L)*B1*HO**2/6/Y(3)
123 DO 126 L=1,3
DO 126 J=1,3
126 ESF(J,3,L)=ESF(J,3,L)+TENS(J,3,L)*B1*HO
DO 130 M=1,3

```

```

      IF(M-2)131,131,132
132 I=NGAUS**2
131 IF(SVART)133,133,134
134 IF(M-2)135,135,133
135 S(M)=Y(M)
      GO TO 136
133 S(M)=0.
136 DO 130 L=1,3
      DO 130 J=1,3
      Q=3*(NOD(J,LK)-1)+L
130 S(M)=S(M)+ESF(J,M,L)*B(Q)/I
      WRITE(L2,2005)(S(M),M=1,3)
117 WRITE(L2,4001)
      GO TO 110
111 IF(SVART)140,140,141
141 IR5=IR
      READ(1*IR5)((QT(M,I),M=1,2),I=1,8)
140 K1=0
      DO 142 IG=1,NGAUS
      DO 142 JG=1,NGAUS
      Y(1)=0.
      Y(2)=0.
      H0=0.
      X1=0.
      X2=0.
      K1=K1+1
      IR1=NGAUS**2*(IR5-1)+K1
      READ(11*IR1)(N(I),I=1,8)
      DO 143 I=1,8
      IF(SVART)144,144,145
145 DO 151 J=1,2
151 Y(J)=Y(J)-N(I)*QT(J,I)
144 X1=X1+N(I)*X(1,I)
      X2=X2+N(I)*X(2,I)
143 H0=H0+N(I)*X(3,I)*2
      WRITE(L2,2006)K1,H0,X1,X2
      DO 150 M=1,5
      IR2=(IR-1)*5*NGAUS**2+NGAUS**2*(M-1)+K1
      READ(21*IR2)((DB(J,I),J=1,3),I=1,8)
      IF(SVART)146,146,147
147 IF(M-2)148,148,146
148 S(M)=Y(M)
      GO TO 149
146 S(M)=0.
149 DO 150 I=1,8
      DO 150 L=1,3
      Q=3*(NOD(I,LK)-1)+L
150 S(M)=S(M)+DB(L,I)*B(Q)
      WRITE(L2,2007)(S(M),M=1,5)
142 WRITE(L2,4001)

```

```

110 CONTINUE
4001 FORMAT(1H )
3019 FORMAT(1H0,'ELEMENTO SOLICITADO           =',I5,/,
*      1H , 'INDICACAO SOBRE CARGAS DIST.     =',I5,/,
*      1H , 'NUMERO DE CARGAS CONC. NO ELEM. =',I5)
3030 FORMAT(1H0,'CARGA CONC',9X,'P',8X,'M1',8X,'M2',6X,'ALFA',6X,'Y(1)'
*,6X,'Y(2)')
3031 FORMAT(1H ,I10,5F10.3)
3032 FORMAT(1H+,70X,F10.3)
3000 FORMAT(1H1,18A4)
3001 FORMAT(1H0,'NUMERO DE PONTOS NODAIS DA ESTRUTURA           =',I5,/,
*      1H , 'NUMERO DE ELEMENTOS DO TIPO 1                     =',I5,/,
*      1H , 'NUMERO DE ELEMENTOS DO TIPO 2                     =',I5,/,
*      1H , 'NUMERO DE PONTOS DA FRONTEIRA                       =',I5)
3002 FORMAT(1H , 'NUMERO DE GRUPOS DE CARAC. ELAST. IGUAIS       =',I5,/,
*      1H , 'LARGURA DA SEMI-BANDA DA MATRIZ DE RIGIDEZ       =',I5,/,
*      1H , 'NUMERO DE PONTOS DE INTEGRACAO DE GAUSS           =',I5,/,
*      1H , 'INDICACAO DE SOLICITACAO DEVIDA A TEMPERATURA =',I5)
3003 FORMAT(1H0,8X,'NO',1X,'COORD. X1',1X,'COORD. X2',6X,'TEMP')
3005 FORMAT(1H+,20X,F10.3)
3007 FORMAT(1H0,'EL TIPO           COEDT NO1 NO2 NO3 NO4 NO5 NO6 NO7 NO8  H
*1  H2  H3  H4  H5  H6  H7  H8  B1  B2  B3 GRUPO')
3008 FORMAT(1H ,I2,I5)
3009 FORMAT(1H+,8X,E10.3)
3010 FORMAT(1H+,18X,8I4,8(1X,F4.2),25X,3(1X,F4.2))
3011 FORMAT(1H+,18X,8I4,8(1X,F4.2),25X,3(1X,F4.2))
3012 FORMAT(1H+,108X,I3)
3013 FORMAT(1H0,'GRUPO',13X,'E1',13X,'E2',12X,'P12',14X,'G',12X,'ANG',
*,14X,'E',14X,'G')
3014 FORMAT(1H ,I5,2(5X,E10.3),5X,F10.3,5X,E10.3,5X,F10.3,5X,E10.3,5X,
*,E10.3)
3015 FORMAT(1H1,'SOLICITACOES',///,1H , 'CARGAS CONCENTRADAS NOS PONTOS
* NODAIS',///,1H , 'NUMERO DE PONTOS NODAIS SOLICITADOS =',I3)
3016 FORMAT(1H0,8X,'NO',9X,'P',8X,'M1',8X,'M2',6X,'ALFA')
3017 FORMAT(1H ,I10,4F10.3)
3018 FORMAT(1H0,///,1H , 'CARGAS QUE ATUAM NOS ELEMENTOS')
3020 FORMAT(1H0,' DIRECAO',7X,'NO1',7X,'NO2',7X,'NO3',7X,'NO4',7X,'NO5
*',7X,'NO6',7X,'NO7',7X,'NO8')
3021 FORMAT(1H ,I9,8F10.3)
3006 FORMAT(1H0,2X,'NO REST.',4X,'DIR. 1',4X,'DIR. 2',4X,'DIR. 3')
3040 FORMAT(1H ,4I10)
2000 FORMAT(1H1,'DESLOCAMENTOS NODAIS',/,
*      1H0,8X,'NO',8X,'U3',4X,'ROT. 1',4X,'ROT. 2')
2001 FORMAT(1H ,I10,3F10.3)
2002 FORMAT(1H0,1X,'ELEM',1X,'TIPO',2X,'PT. INT.',8X,'BO',8X,'HO',8X,'X
*1',8X,'X2',8X,'M1',8X,'M2',7X,'M12',7X,'T13',7X,'T23')
2003 FORMAT(1H0,2I5)
2004 FORMAT(1H+,10X,I10,4F10.3)
2005 FORMAT(1H+,60X,F10.3,10X,2F10.3)
2006 FORMAT(1H+,10X,I10,10X,3F10.3)

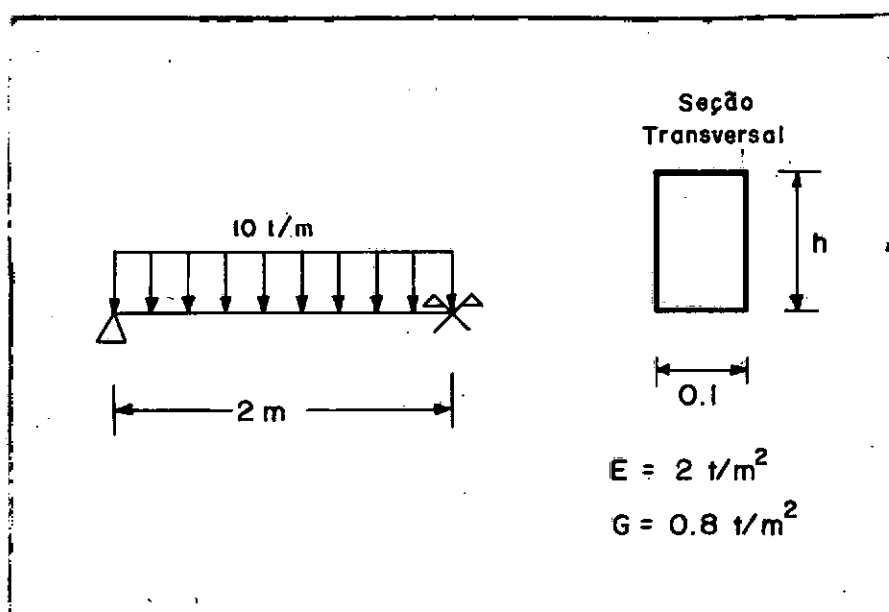
```

```
2007 FORMAT(1H+,60X,5F10.3)
1000 FORMAT(18A4)
1001 FORMAT(8I10)
1002 FORMAT(2F10.0)
1003 FORMAT(F10.0)
1004 FORMAT(4I10)
1005 FORMAT(I10)
1006 FORMAT(8F10.0)
1007 FORMAT(3I10)
1008 FORMAT(3F10.0)
1009 FORMAT(7F10.0)
1010 FORMAT(I10,4F10.0)
1011 FORMAT(2I10)
1012 FORMAT(5F10.0)
      CALL EXIT
      END
```

```
// DUP
*DELETE          EFLA          OEC3
*STORE          WS  UA  EFLA          OEC3
// XEQ EFLA      8
*FILES(1,TEMP1,OEC3)
*FILES(2,TEMP2,OEC3)
*FILES(11,N1,OEC3)
*FILES(12,N2,OEC3)
*FILES(21,DB,OEC3)
*FILES(22,TENS,OEC3)
*FILES(32,ESP,OEC3)
*LOCALEFLA,RIGI1,RIGI2
```

VI - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

a) Para se averiguar se o efeito da deformação por esforço cortante estava sendo devidamente levado em conta, estudou-se uma viga bi-apoiada com uma carga uniformemente distribuída quando a relação entre a altura da peça e o seu comprimento assumiu os valores de 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 e 0.40.



h/ℓ	ω_p^*	ω_p^{**}	PROGRAMA
0.05	25000.0	25187.5	25187.5
0.10	3125.00	3218.75	3218.75
0.15	925.926	988.426	988.425
0.20	390.625	437.500	437.500
0.40	49.3167	72.9887	72.2656

* ω_p = deslocamento dado pela resistência dos materiais sem se levar em conta a deformação por esforço cortante.

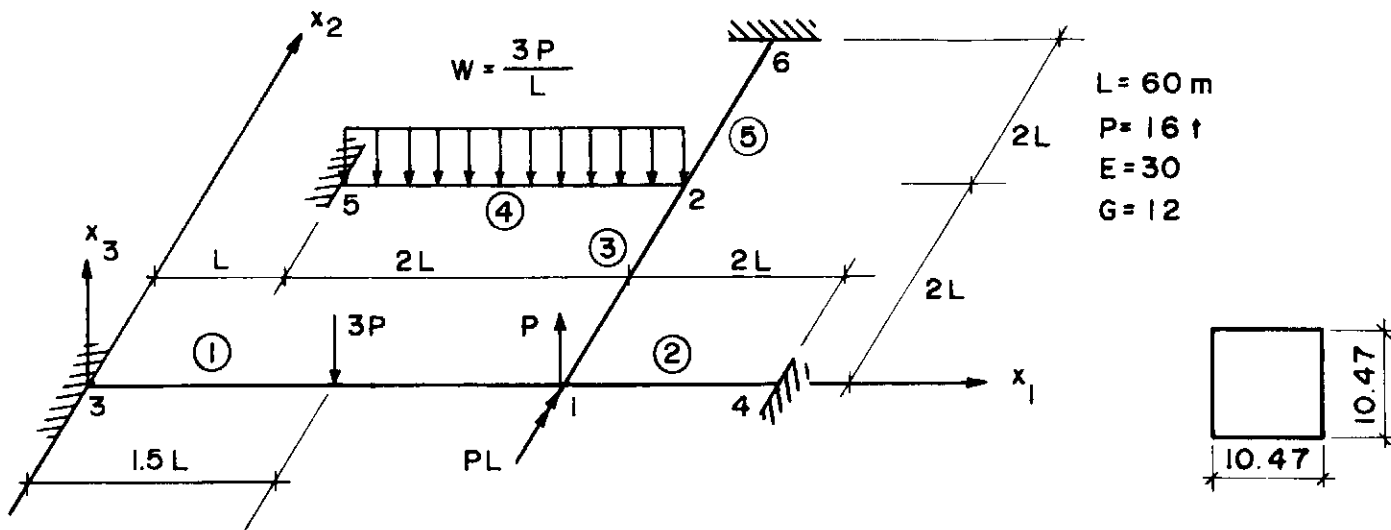
** ω_p = deslocamento dado pela resistência dos materiais levando-se em conta a deformação por esforço cortante.

OBS.: Neste exemplo foram utilizados quatro elementos distribuídos no semi-vão e dois pontos de integração numérica.

- b) Comparou-se o cálculo da grelha da figura 8 apresentado por Gere and Weaver (ref. 9) com o cálculo da mesma estrutura feito pelo programa . o cálculo efetuado na referência acima indicada é feito por um programa convencional de cálculo matricial de estruturas reticuladas no qual não se leva em conta a deformação por esforço cortante. Nota-se, por isso, que, apesar da quase identidade nos valores dos esforços nos dois cálculos, pode-se observar uma ligeira diferença quanto aos deslocamentos , provocada justamente por esse efeito.
- c) Examinou-se a convergência para a solução exata de placas delgadas de uma placa circular isótropa engastada com uma carga concentrada no centro. Os resultados estão indicados na figura 9.
- d) Procurou-se examinar o comportamento do elemento de placa em relação à teoria de placas delgadas, usando-se para tanto, relações entre a espessura e o lado da placa de 0.005, 0.01, 0.05 , 0.1. Calculou-se o deslocamento no centro e os momentos M_1 e M_2 ao longo da linha indicada na figura 10 para uma placa quadrada isótropa apoiada, sujeita a uma solicitação uniformemente distribuída, utilizando-se dois e três pontos de integração. Comparando-se os resultados com os obtidos pela teoria das placas delgadas verificou-se, como já havia sido concluído (ref. 5) , que a utilização de dois pontos de integração elimina a energia de deformação por esforço cortante, que havia sido introduzida para que o elemento fosse utilizado no estudo de placas espes-

sas e possibilita um cálculo rápido e, conseqüentemente, mais econômico, fornecendo assim resultados excelêntes para o estudo de placas delgadas.

- e) Para o exame do comportamento do elemento no estudo de placas espessas, comparou-se os resultados do programa com os da teoria de placas espessas de Love (ref. 22) para deslocamentos do ponto central de uma placa circular isôtrota apoiada e solicitada por uma carga uniformemente distribuida (fig. 11), usando-se relações entre a espessura e o raio da placa de 0.10, 0.20, 0.40 e 0.60 e utilizando-se dois e três pontos de integração. Verifica-se que os resultados do programa aproximam-se satisfatoriamente dos resultados da teoria das placas espessas quando utilizamos três pontos de integração (erro não superior a 5% para o exemplo mais desfavorável). Observa-se curiosamente que o elemento tende a ser cada vez mais rígido que a solução da teoria das placas espessas quando se faz crescer a relação espessura/raio e que esse aumento de rigidez coincide, no caso estudado com o aumento de rigidez devido à consideração das deformações do plano médio da placa, embora se saiba que esta hipótese não está implícita na função de deslocamento do elemento, esta observação não deixa de ser uma coincidência agradável.



SECCÃO TRANSVERSAL
DAS PEÇAS

Elemento	Incidência	
1	3	1
2	1	4
3	1	2
4	5	2
5	2	6

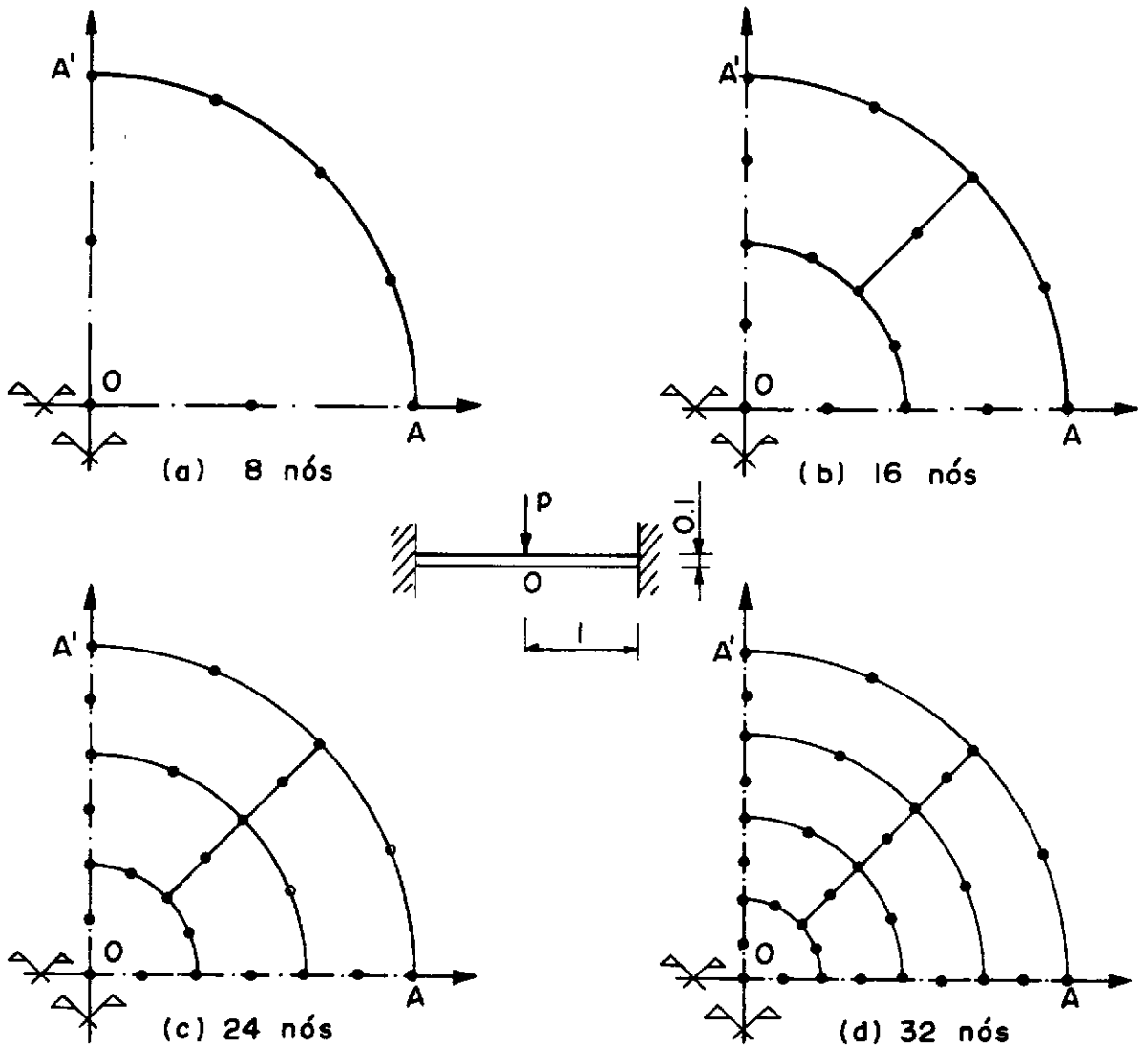
DESLOCAMENTOS DOS NÓS E REAÇÕES DE APOIO

NO	PROGRAMA CONVENCIONAL						PROGRAMA PROPOSTO					
	Deslocamentos			Reações			Deslocamentos			Reações		
	U_3	θ_1	θ_2	F_3	M_1	M_2	U_3	θ_1	θ_2	F_3	M_1	M_2
1	-70.17	-0.288	-0.684	0	0	0	-71.51	-0.286	-0.683	0	0	0
2	-120.92	0.353	0.554	0	0	0	-123.39	0.351	0.554	0	0	0
3	0	0	0	29.93	-1565.7	91.13	0	0	0	29.94	-1566.5	91.14
4	0	0	0	11.02	733.4	136.70	0	0	0	11.02	732.9	136.72
5	0	0	0	68.78	-2295.1	-110.81	0	0	0	68.76	-2293.3	-110.99
6	0	0	0	18.27	-70.56	-1234.4	0	0	0	18.28	-70.22	-1235.6

OBS: 1) O programa convencional citado não leva em conta o efeito do esforço cortante
2) A convenção de sinais é da análise matricial de estruturas reticuladas.

FIG. 8 - EXEMPLO DA GRELHA.

Divisões em elementos finitos



Deslocamento do ponto O

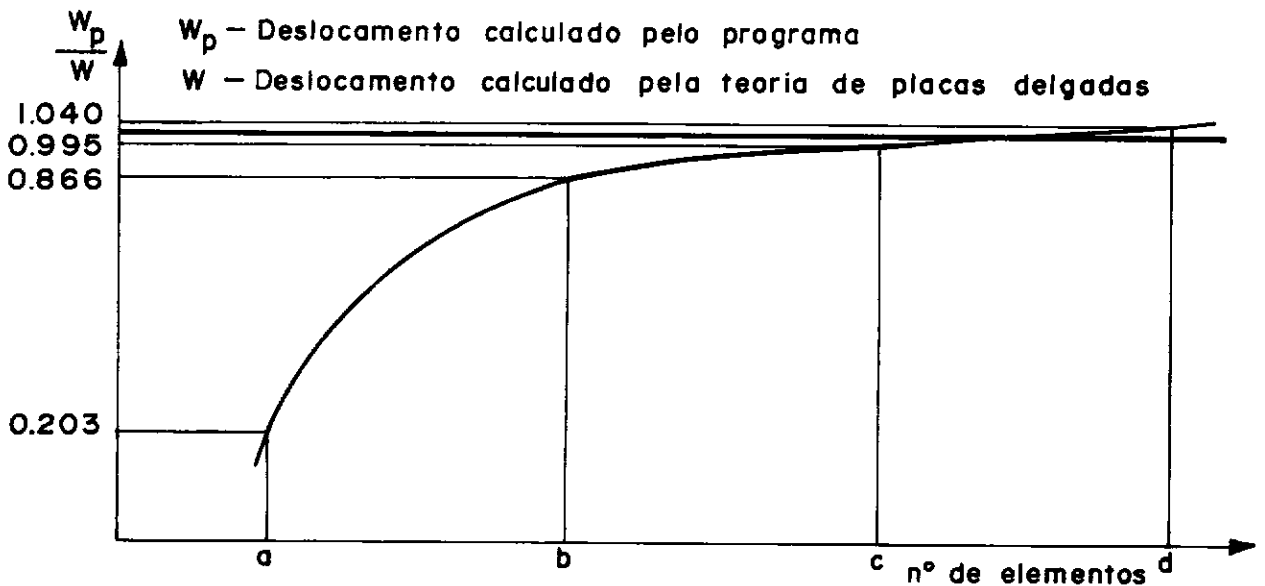
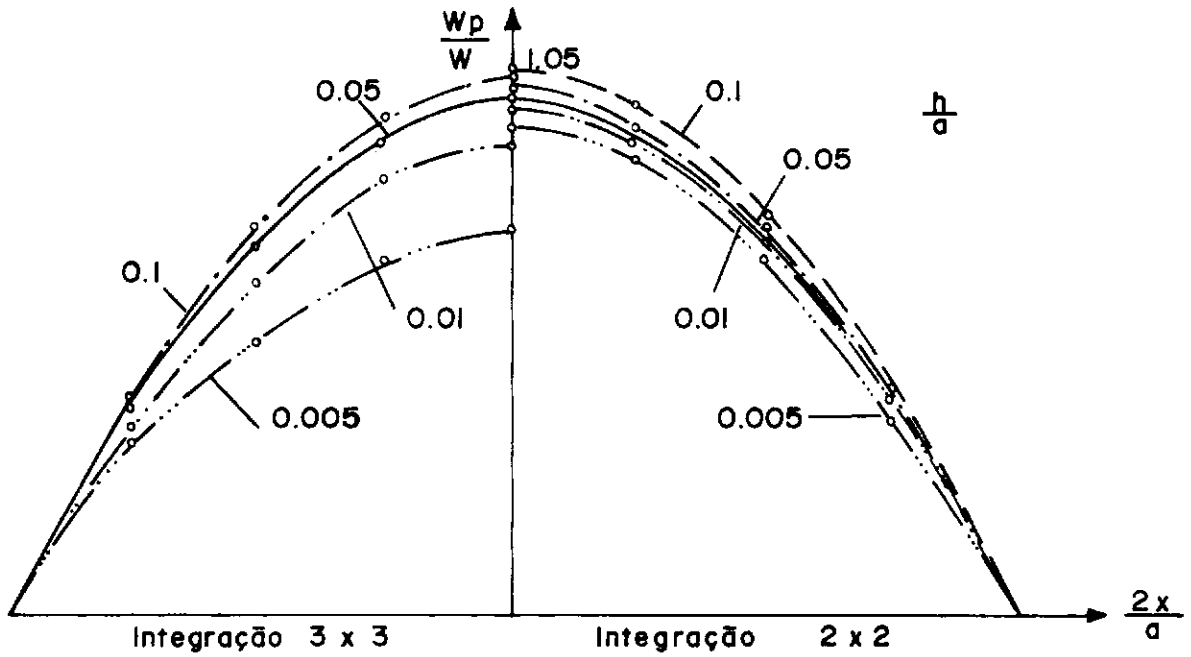
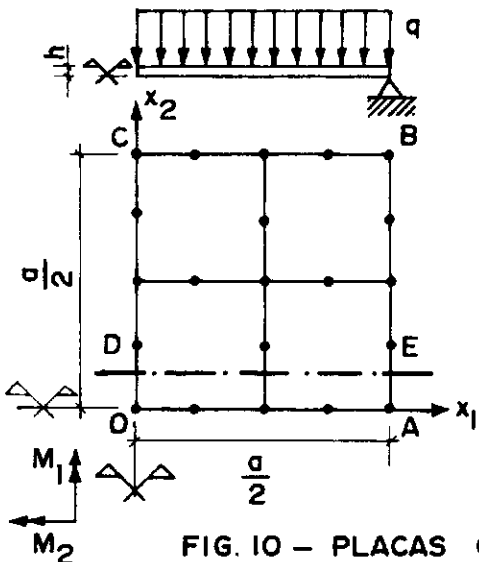
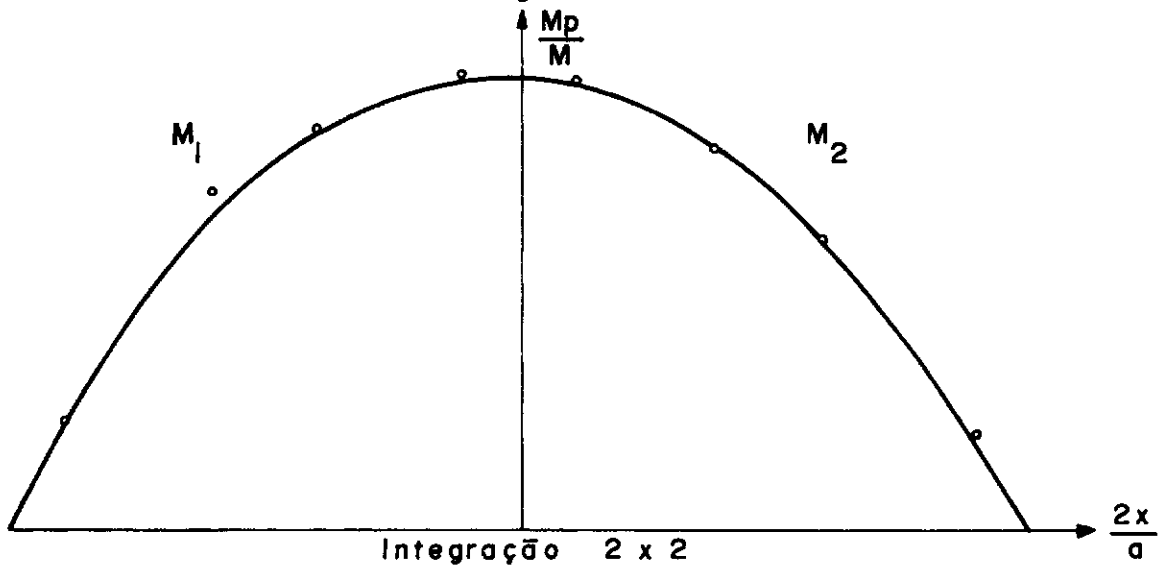


FIG. 9 - PLACA CIRCULAR ISÓTROPICA ENGASTADA COM UMA FORÇA NO PONTO O. CONVERGENCIA PARA A SOLUÇÃO DA TEORIA DAS PLACAS.

a) Deslocamento vertical ao longo de (OA) ou de (OC)



b) Momentos fletores ao longo de (DE)



M_p — Momentos fletores calculados pelo programa.

M — Momentos fletores calculados pela teoria das placas.

W_p — Deslocamentos verticais calculados pelo programa.

W — Deslocamentos verticais calculados pela teoria das placas

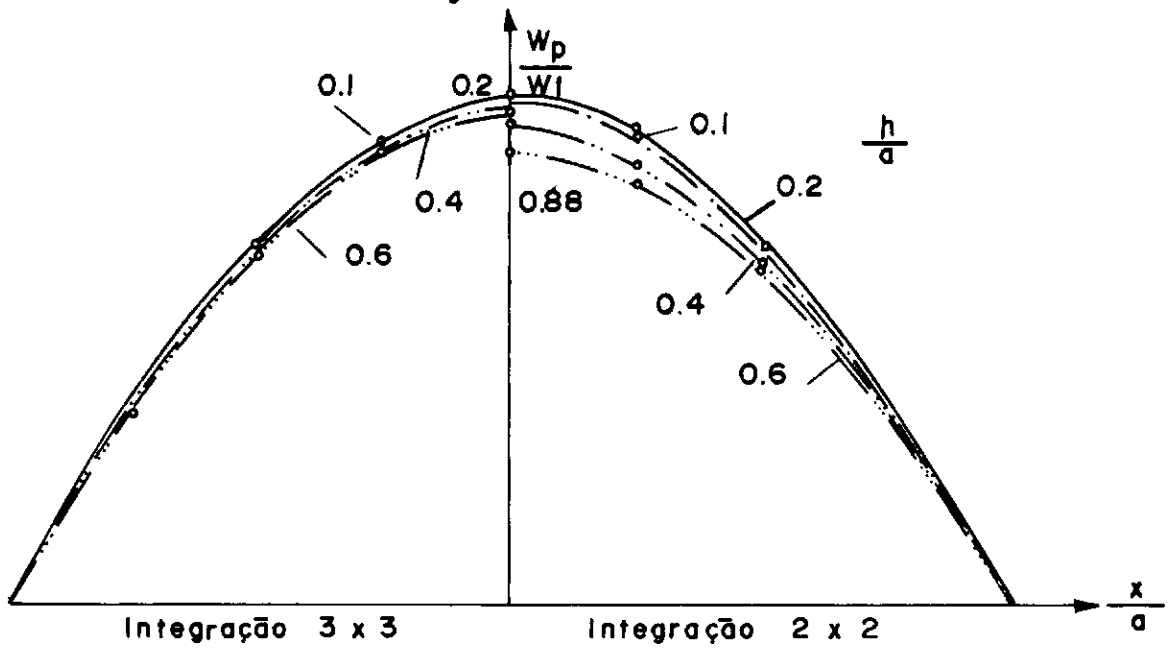
h — Espessura da placa

D — Rigidez da placa

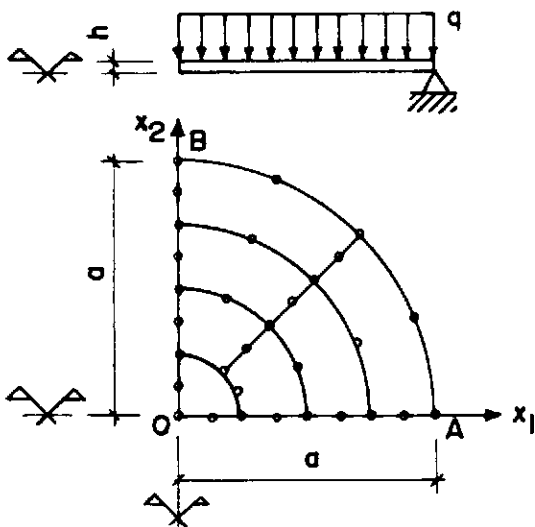
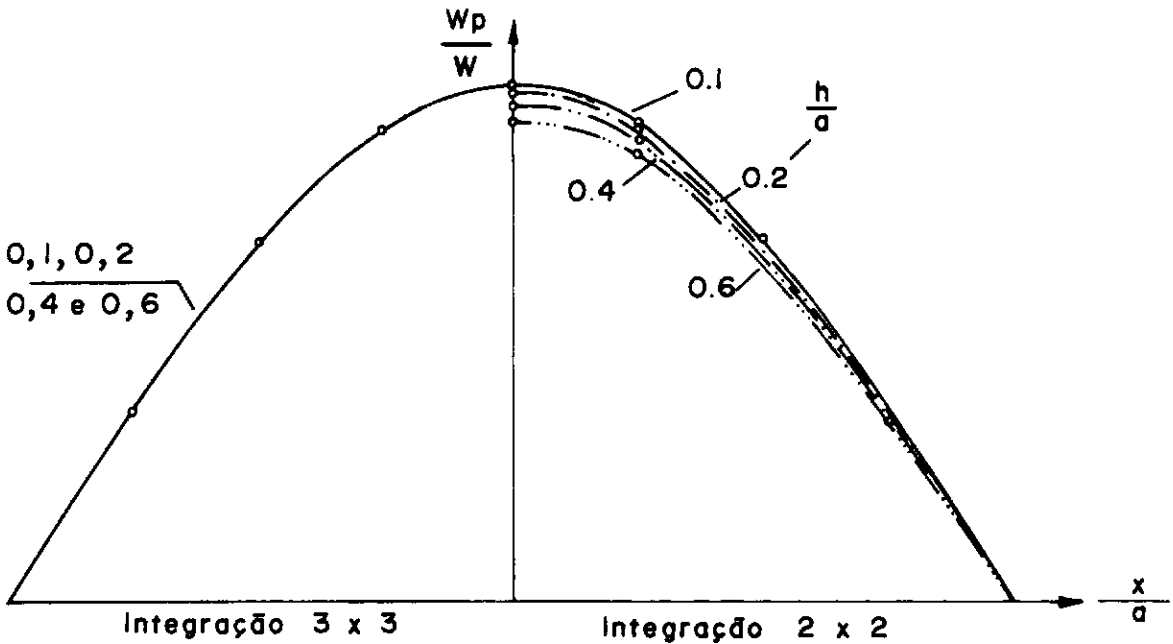
$$W = 0.04062 \frac{qa^4}{D}$$

FIG. 10 — PLACAS QUADRADAS DELGADAS ISOTROPAS E SIMPLEMENTE APOIADAS COM UMA CARGA UNIFORME.

a) Deslocamento vertical ao longo de (OA) ou de (OB).



b) Deslocamento vertical ao longo de (OA) ou de (OB).



W - Deslocamento calculado levando-se em conta o alongamento radial da placa.

W - Deslocamento calculado não se levando em conta o alongamento radial da placa.

c) Esquema

FIG. II - PLACAS CIRCULARES ESPESAS ISÓTROPAS E SIMPLEMENTE APOIADAS COM UMA CARGA UNIFORME.

VII - CONCLUSÃO

Para a criação de uma ferramenta que possibilitasse o estudo de estruturas cujos esquemas estruturais fossem grelhas, placas ou um conjunto dessas duas peças, sendo de especial interesse os tabuleiros de pontes, resolveu-se utilizar o método dos elementos finitos devido às suas potencialidades.

Foram desenvolvidos dentre os inúmeros elementos pos síveis para o estudo de placas e grelhas, que fossem espessas ou delgadas, elementos degenerados de elementos isoparamétricos parabólicos tridimensionais porque além de serem elementos de maior ordem e, portanto, mais refinados, possibilitam grande liberdade na representação da forma e do carregamento. Usou-se, para tanto, uma formulação indicial simples (ref. 28) que possui as vantagens de diminuir o número de operações a serem programadas e permitir a passagem do elemento de placa de três para duas dimensões, reduzindo-se em muito o tempo de execução do programa, devido ao abaixamento da ordem de integração numérica.

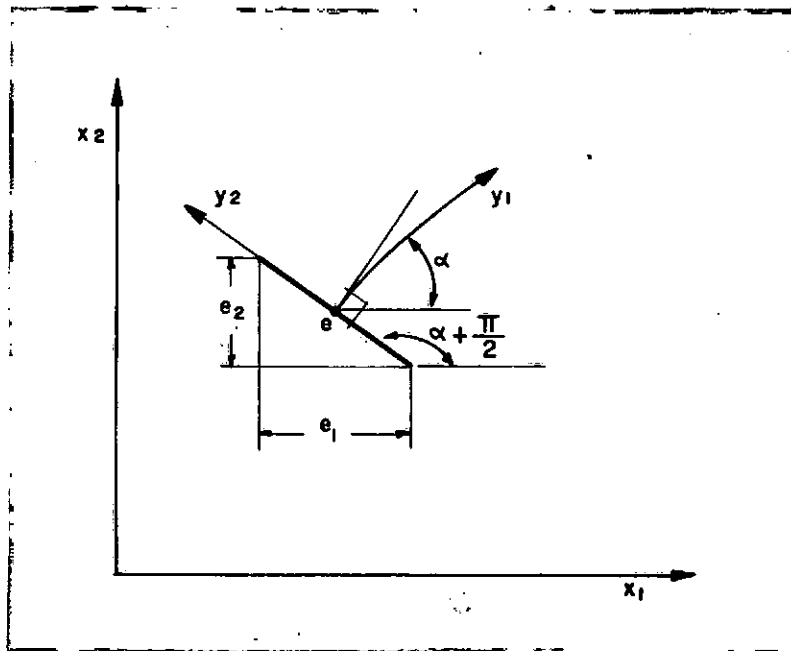
Fez-se um programa de análise estática elástica de estruturas e, finalmente, apresentaram-se exemplos de utilização do programa elaborado com estes elementos em que se compara casos já estudados nas teorias de grelhas e placas, levando-se, ou não, em conta a influência do esforço cortante na deformação e concluiu-se que, nos casos de grelhas delgadas e espessas e no de placas delgadas, consegue-se resultados excelentes ao se utilizar somente dois pontos de integração numérica, tendo-se, no entanto, necessidade de recorrer a três pontos de integração apenas para o estudo de

placas espessas, embora não se cometam erros apreciáveis quando se utilizam dois pontos de integração nestes casos. Tais conclusões tornam o programa economicamente bastante viável.

APÊNDICE I

CÁLCULO AUTOMÁTICO DAS PROJEÇÕES DE "e"

Como, para facilitar a entrada de dados do programa, sô é fornecido ao computador o valor da espessura "e" perpendicular ao eixo y_1 e nas funções de transformação de coordenadas o que se usa sãõ as projeções de "e", e_m ; $m = 1,2$ nos eixos x_m ; $m = 1,2$ foi necessãrio calculã-las a partir de "e" no programa, o que se realizou do seguinte modo:



Fazendo-se $y_2 = 0$ em 3.4.6 ter-se-ã:

$$J_{m1} = N_{i,1} x_{mi} ; m = 1,2$$

$$\cos \alpha = \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_{21}}{J_{11}}$$

$$\alpha = \operatorname{artan} (\operatorname{tg} \alpha)$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$c_1 = \cos \alpha'$$

$$c_2 = \operatorname{sen} \alpha'$$

$$e_m = c_m e$$

APÊNDICE II

EXPLICAÇÃO SOBRE O FATOR β

Pelas hipóteses da resistência dos materiais para a flexão de peças com seção transversal retangular chega-se a:

$$M_f = \sigma_{\max} I_f \frac{2}{h} \quad (1)$$

onde M_f é o momento fletor, σ_{\max} a tensão normal máxima, I_f a inércia à flexão e h a altura numa determinada seção transversal da peça.

Para peças com seção transversal circular submetidas à torção pode-se escrever:

$$M_t = \tau_{\max} I_t \frac{2}{d} \quad (2)$$

onde M_t é o momento torsor, τ_{\max} a tensão cisalhante máxima, I_t a inércia à torção e d o diâmetro numa determinada seção transversal circular. Para efeito de simplificação, as fórmulas deduzidas para as peças de seção transversal circular são usadas para as peças com seção transversal de qualquer forma, logo, para a seção transversal retangular, pode-se escrever:

$$M_t = \tau_{\max} I_t \frac{2}{h} \quad (3)$$

Porém quando se admite uma tensão cisalhante varian

do linearmente ao longo de h chega-se a:

$$M_t = \tau_{\max} I_f \frac{2}{h} \quad (4)$$

esta equação(4) pode ser corrigida para se obter a equação(3) através do fator β .

$$\beta = \frac{I_t}{I_f} \quad (5)$$

APÊNDICE III

CÁLCULO DO FATOR DE INTEGRAÇÃO FN NO CASO UNIDIMENSIONAL

$$d\ell = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$$

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{Bmatrix}$$

Como para $y_2 = 0$, $dy_2 = 0$ vem

$$dx_1 = J_{11} dy_1$$

$$dx_2 = J_{21} dy_1$$

$$d\ell = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2} dy_1 \dots$$

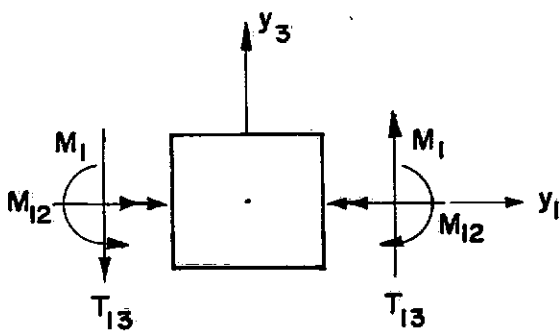
$$d\ell = FN dy_1$$

sendo $J_{m1} = N_{i,1} x_{mi}$; $m = 1, 2$, obtido fazendo-se $y_2 = 0$ em (3.4.6).

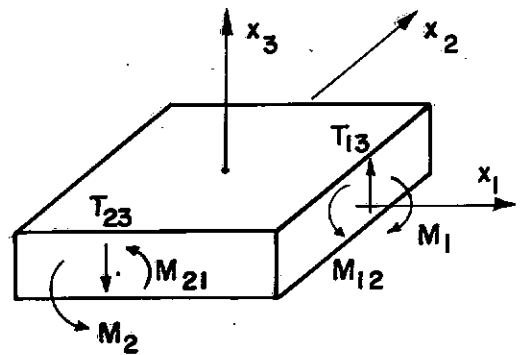
APENDICE IV

CONVENÇÃO DE SINAIS

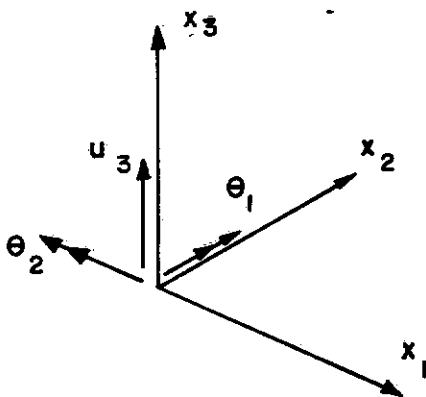
A Figura 12 indica o sentido para o qual os esforços aplicados, os esforços seccionais e os deslocamentos são considerados positivos.



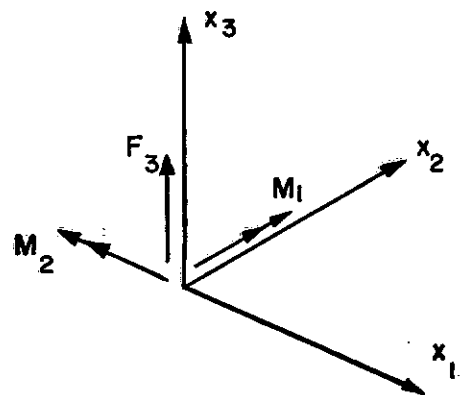
a) esforços seccionais no elemento de grelha.



b) esforços seccionais no elemento de placa.



c) deslocamentos



d) esforços aplicados

FIG. 12 - CONVENÇÕES DE SINAIS

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Vocabulário de Teoria das Estruturas. Associação Brasileira de Cimento Portland, 1967.
- 2 - Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger S., - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill Kogakusha, 1959.
- 3 - Giangreco E., - Teoria e Tecnica delle Costruzioni - vol 3. Liguori Editore, 1970.
- 4 - Pedro J.O., - Cálculo de Estruturas Laminas e Maciças pelo Método dos Elementos Finitos, - Curso 127 - LNEC - 1971.
- 5 - Zienkiewicz O.C., - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, 1971.
- 6 - Vasconcellos A., Filho - O Método dos Elementos Finitos: Fundamentos Teóricos - Automatização - Aplicações a Problemas de Placas e de Elasticidade Plana - tese de D.Sc. - COPPE, 1970.
- 7 - Rubinstein M.F. - Structural Systems-Statics, Dynamics and Stability - Prentice-Hall, Inc., 1970
- 8 - Figueroa J.P. - Análise de Grelhas com Elementos de Eixo Curvo e Seção Variável. Aplicação no Cálculo de Linhas de Influência em Vigas Curvas - tese de M.Sc. COPPE, 1972.
- 9 - Gere J.M. y Weaver W. Jr. - Análisis de estructuras Reticulares Compañia Editorial Continental-D.van Nostrand Company, Inc., 1965.
- 10 - Lobo Carneiro, F.L.B, - Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez dos elementos - Publicação interna, COPPE, 1971.

- 11.- Venâncio F., Filho - Curso de Mecânica das Estruturas II-COPPE 1971.
- 12 - Bogner, F.K., R.H. Mallet, M.D. Minich and L.A. Schmit - Development and Evaluation of Energy Search Methods of Nonlinear Structural Analysis - Flight Dynamics Lab. Rept; AFFDL TR 65-113, 1965.
- 13 - Przemieniecki, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill, 1968.
- 14 - Clough, R.W., and Tocher J.L. - Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending - Proc. Conf. Matrix Methods Struc. Mech - Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, oct 26-28, 1965, AFFDL TR 66-80, 1966.
- 15 - Bazeley, G.P., Y.K. Cheung, B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz Triangular Elements in Plate Bending: Conforming and Nonconforming Solutions - Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mech., Wright-Patterson Air Force Base Ohio, Oct 26-28, 1965, AFFDL TR 66-80, 1966.
- 16 - Arantes e Oliveira, E.R. - Completeness and Convergence in the Finite Element Method - 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Dayton, 1968, pp 1061-1089, AFFDL TR 68-150, 1969.
- 17 - Bogner, F.K., R.L. Fox, and L.A. Schmit - The Generation of Interelement-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas - Proc. Conf. Matrix Methods Structural Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct 26-28, 1965, AFFDL TR 66-80 ; 1966.
- 18 - Holand and Bell - Finite Element Methods in Stress Analysis - Tapir, 1969.
- 19 - Herrman L.R. - A Bending Analysis for Plates - Proc. Conf. Matrix Methods Structural Mech, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct 26-28, 1965, AFFDL TR 66-80, 1966.
- 20 - Pian T.H.H. - Element Stiffness Matrices for Boundary Compati-

bility and for Prescribed Boundary Stress - Proc. conf. Matrix Methods Structural Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct 26-28, 1965 AFFDL TR 66-80, 1966.

- 21 - Smith, I.M., - A Finite Element Analysis for Moderately Thick Rectangular Plates in Bending - Int. J. of the Mechanical Sciences, Vol 10, 1968.
- 22 - Love A.E.H. - The Mathematical Theory of Elasticity - Dover Publications, 1944.
- 23 - Pryor C.W., Jr. Barker R.M. and Frederick D. - Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates - J. of the Eng. Mech. Div. Proc. of the ASCE, vol 96 NO EM6 dec, 1970.
- 24 - Reissner, E. - The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates - J. of Applied Mech. vol 12, 1945.
- 25 - Ergatoudis J., Irons B.M. and Zienkiewicz O.C., - Curved Isoparametric, "Quadrilateral" Elements for Finite Element Analysis - Int. J. Solids and Struct., 4, 31-42 1968.
- 26 - Clough, R.W., - Comparison of Three Dimensional Finite Elements - Application of Finite Element Methods in Civil Eng., 1969, pp 1-25.
- 27 - Bignon P.G. - Elementos Finitos Isoparamétricos Mixtos para Flexión de Placas - Tese M.Sc. - COPPE - dec. 1972.
- 28 - Cifú S., Pedro J.O. - Elementos Finitos Isoparamétricos para Estudio de Equilíbrios Tridimensionais - LNEC - set. , 1971.