



ACOPLAMENTO DIRETO MEF/MDF APLICADO AO OPERADOR DE LAPLACE

Marco Felipe Fialho Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do
Carmo
Franciane Conceição Peters

Rio de Janeiro
Março de 2020

ACOPLAMENTO DIRETO MEF/MDF APLICADO AO OPERADOR DE LAPLACE

Marco Felipe Fialho Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Franciane Conceição Peters

Aprovada por: Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Prof. Webe João Mansur

Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Junior

Prof. Antonio Carlos Marques Alvim

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2020

Santos, Marco Felipe Fialho

Acoplamento Direto MEF/MDF Aplicado ao Operador de Laplace/Marco Felipe Fialho Santos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XVI, 59 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Franciane Conceição Peters

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 56 – 59.

1. Método das Diferenças Finitas. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Acoplamento MEF/MDF. 4. Operador de Laplace. I. Carmo, Eduardo Gomes Dutra do *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*Aos meus pais, Ana Cristina e
Ricardo Luiz, por tudo.*

Agradecimentos

À minha família, por todo apoio de toda natureza que pude receber.

À minha companheira, Carla Lima, por simplesmente tudo.

Aos orientadores, professores Eduardo Gomes Dutra do Carmo e Franciane Conceição Peters, pela solicitude, paciência e incentivo essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior, por sugestões e sanar eventuais dúvidas do trabalho.

A todos do Laboratório de Métodos de Modelagem e Geofísica Computacional (LAMEMO), pelo suporte concedido e pelas produtivas discussões.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro a mim concedido durante o primeiro ano de desenvolvimento deste projeto.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo programa Bolsa Nota 10, que me financiou durante o último ano de pesquisa.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro e ao Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia pela formação e capacitação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ACOPLAMENTO DIRETO MEF/MDF APLICADO AO OPERADOR DE LAPLACE

Marco Felipe Fialho Santos

Março/2020

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do Carmo
Franciane Conceição Peters

Programa: Engenharia Civil

No escopo da geofísica e engenharia, existem múltiplos fenômenos físicos associados a problemas práticos que podem ser modelados por Equações Diferenciais Parciais. Para resolvê-los, algumas técnicas numéricas foram desenvolvidas e o acoplamento entre métodos é útil, principalmente, para melhorar a eficiência da modelagem. Tipicamente, o acoplamento é feito via partição do domínio. Este trabalho foca em unir a versatilidade do Método dos Elementos Finitos para domínios com geometrias complexas com a eficiência computacional do Método das Diferenças Finitas. A estratégia escolhida para o acoplamento permite a montagem de uma matriz global, evitando métodos iterativos. A metodologia proposta é aplicada ao Operador de Laplace, presente na Equação de Poisson, na Equação da Onda e na Equação de Helmholtz, todas bastante utilizadas por engenheiros e geofísicos. Experimentos numéricos para problemas unidimensionais são realizados para avaliar a convergência e o tempo necessário para solução dos sistemas de equações. Problemas bidimensionais são resolvidos para avaliar a qualidade da solução e o tempo de montagem da matriz associada ao sistema de equações.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

FEM/FDM DIRECT COUPLING APPLIED TO THE LAPLACE OPERATOR

Marco Felipe Fialho Santos

March/2020

Advisors: Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Franciane Conceição Peters

Department: Civil Engineering

In the scope of geophysics and engineering, there are multiple physical phenomena related to practical problems that can be modeled by Partial Differential Equations. To solve them, many numerical techniques have been developed, and coupling between methods is useful mainly to improve modeling efficiency. Typically, the coupling is done by domain partition. This work aims to join the versatility of the Finite Element Method for domains with complex geometries to the computational efficiency of the Finite Difference Method. The chosen coupling strategy allows the assembly of a global matrix, avoiding iterative methods. The proposed methodology is applied to the Laplace Operator, appearing in Poisson's Equation, Wave Equation, and Helmholtz Equation, all very used by engineers and geophysicists. Numerical experiments for one-dimensional problems are performed to evaluate convergence and time required to solve the systems of equations. Two-dimensional problems are solved to assess solution quality and matrix assembling time.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas	xvi
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	2
1.2 Objetivo	4
1.3 Organização da Dissertação	5
2 Conceitos Básicos	6
2.1 Introdução às Equações Diferenciais Parciais	6
2.2 Formulação do Problema	8
3 Métodos Numéricos Aplicados ao Operador de Laplace	9
3.1 Método das Diferenças Finitas	9
3.1.1 Domínio Unidimensional	9
3.1.2 Domínio Bidimensional	11
3.2 Método dos Elementos Finitos	14
3.2.1 Formulação Galerkin Contínuo	14
3.2.2 Discretização em Elementos Unidimensionais	16
3.2.3 Discretização em Elementos Bidimensionais	17
4 Acoplamento MEF/MDF	21
4.1 Direto ou Não Iterativo	21
4.1.1 Unidimensional	22
4.1.2 Bidimensional	24
4.2 Iterativo	29
4.2.1 Unidimensional	29
4.2.2 Bidimensional - Comentário	32

5	Implementação Computacional	33
5.1	Problemas Unidimensionais	33
5.2	Problemas Bidimensionais	35
6	Experimentos Numéricos	36
6.1	Exemplo Unidimensional	36
6.2	Exemplos Bidimensionais	42
6.2.1	Exemplo 1	43
6.2.2	Exemplo 2	47
6.2.3	Exemplo 3	51
7	Considerações Finais	53
7.1	Conclusões	54
7.2	Sugestões de Trabalhos Futuros	55
	Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

3.1	<i>Grid</i> cartesiano uniforme para diferenças finitas	12
3.2	Estêncil de um nó $(m+1, j)$, incluindo um nó virtual $(m+2, j)$. . .	13
3.3	Estêncil do nó $(m+1, m+1)$, incluindo os nós virtuais $(m+2, m+1)$ e $(m+1, m+2)$	14
3.4	Domínio bidimensional genérico	18
3.5	Malha genérica de elementos finitos	18
3.6	Função de interpolação - problema bidimensional	19
4.1	Conceito do acoplamento EDNI	22
4.2	Conceito do acoplamento DENI	23
4.3	Discretização do problema acoplado	25
4.4	Interface de acoplamento à direita de Ω_{DF}	25
4.5	Interface de acoplamento acima de Ω_{DF}	26
4.6	Interface de acoplamento à esquerda de Ω_{DF}	27
4.7	Interface de acoplamento abaixo de Ω_{DF}	28
4.8	Detalhe do acoplamento - nó (k, l) pertencendo a Γ_{Int} e Γ	28
4.9	Conceito do acoplamento EDI	30
4.10	Conceito do acoplamento DEI	31
5.1	Diagrama de processamento do código - Problemas Unidimensionais .	34
5.2	Diagrama de processamento do código - Problemas Bidimensionais .	35
6.1	Avaliação da equação de acoplamento direto - $E = \varphi - \varphi^h _{H^1}$ vs. h .	38
6.2	Avaliação da equação de acoplamento direto - $E = \varphi - \varphi^h _{L^2}$ vs. h .	38
6.3	Soluções numéricas para 20 partições do domínio	39
6.4	Acurácia das soluções numéricas - $E = \varphi - \varphi^h _{H^1}$ vs. h	40
6.5	Acurácia das soluções numéricas - $E = \varphi - \varphi^h _{L^2}$ vs. h	40
6.6	Limitação de acurácia - $E = \varphi - \varphi^h _{L^2}$ vs. Iteração	41
6.7	Exemplo 1 - bidimensional - esquema de subdomínios	43
6.8	Solução analítica $\varphi_{ana,1}$	44
6.9	Exemplo 1 - bidimensional - soluções na seção $x = 0,25$	44
6.10	Exemplo 1 - bidimensional - soluções na seção $x = 0,75$	45

6.11	Exemplo 1 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,50$	46
6.12	Exemplo 2 - bidimensional - esquema de subdomínios	47
6.13	Solução analítica $\varphi_{ana,2}$	47
6.14	Exemplo 2 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,25$	48
6.15	Exemplo 2 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,50$	49
6.16	Exemplo 2 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,75$	50
6.17	Exemplo 3 - bidimensional - Alguns esquemas de subdomínios usados	51
6.18	Redução do tempo de montagem da matriz do problema	52
7.1	Conceito do acoplamento MEF/MDF em múltiplos subdomínios . . .	53

Lista de Tabelas

2.1	Classificação de EDP's lineares, de segunda ordem, em duas variáveis	6
6.1	Tempo adimensional para solução dos sistemas de equações	41

Lista de Símbolos

$D\varphi_i^h$	Aproximação por diferença centrada para a primeira derivada no i -ésimo nó, p. 10
$D^2\varphi_i^h$	Aproximação por diferença centrada para derivada segunda no i -ésimo nó, p. 10
$H^{h,k}$	Espaço de elemento finito, p. 15
M^h	Conjunto de elementos finitos não degenerados, p. 15
N_i	Função de interpolação associada ao i -ésimo nó, p. 16
$N_{k,l}$	Função de interpolação no nó de índices (k,l) , p. 24
$P^k(\Omega_e)$	Espaço de polinômios com ordem $p \leq k$ nas coordenadas locais do elemento padrão associado Ω_e , p. 15
$S_{\Gamma_D}^{h,k}$	Conjunto solução para o problema discreto, p. 15
S_{Γ_D}	Conjunto solução, p. 15
$V_{\Gamma_D}^{h,k}$	Espaço de funções teste para o problema discreto, p. 15
V_{Γ_D}	Espaço de funções teste, p. 15
Ω	Domínio limitado aberto do problema, p. 8
Ω_i	Elemento finito de índice i , p. 15
Ω_{DF}	Subdomínio associado ao MDF, p. 21
Ω_{EF}	Subdomínio associado ao MEF, p. 21
φ^{DEI}	Solução aproximada via acoplamento DEI, p. 32
φ^{EDI}	Solução aproximada via acoplamento EDI, p. 31
$\mathbf{n}_{\Gamma_{Int,e}}$	Normal no contorno de Ω_e comum a interface Γ_{Int} , p. 24

$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal a Γ , orientado saindo de Ω e definido a.e. em Γ , p. 8
$\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x}$	Derivada parcial de φ em relação a x , calculada no nó de índices (i, j) , p. 12
$\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y}$	Derivada parcial de φ em relação a y , calculada no nó de índices (i, j) , p. 12
$\frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x}$	Aproximação de $\partial \varphi / \partial x$ via diferenças finitas avaliada no nó de índices k, l , p. 26
η	Função de ponderação, p. 14
η_i^h	Função de ponderação do problema discreto, avaliada no nó de índice i , p. 16
Γ	Contorno contínuo de Lipschitz por partes do problema, p. 8
Γ_D	Parte do contorno associada à condição de Dirichlet, p. 8
Γ_N	Parte do contorno associada à condição de Neumann, p. 8
Γ_{DF}	Contorno associado ao subdomínio Ω_{DF} , p. 21
Γ_{EF}	Contorno associado ao subdomínio Ω_{EF} , p. 21
$\Gamma_{Int,e}$	Contorno do elemento finito Ω_e comum a Γ_{Int} , p. 24
Γ_{Int}	Interface entre os subdomínios Ω_{DF} e Ω_{EF} , p. 21
φ	Solução do problema, p. 8
$\varphi_{i,j}^h$	Solução aproximada avaliada no nó de índices (i, j) , p. 11
φ_j^{DENI}	Solução aproximada via acoplamento DENI avaliada no nó de índice j , p. 23
φ^{DF}	Solução aproximada via MDF, p. 21
φ_j^{EDNI}	Solução aproximada via acoplamento EDNI avaliada no nó de índice j , p. 22
φ^{EF}	Solução aproximada via MEF, p. 21
φ_i^h	Solução aproximada no nó de índice i , p. 10
$\varphi_{\Gamma_{Int}}^{DF}$	Solução aproximada via MDF avaliada na interface Γ_{Int} , p. 21

$\varphi_{\Gamma_{Int}}^{EF}$	Solução aproximada via MEF avaliada na interface Γ_{Int} , p. 21
${}^k\varphi_{Int}^{DF}$	Traço de φ^{DF} em Γ_{Int} calculado na k -ésima iteração, p. 30
${}^k\varphi_{Int}^{EF}$	Traço de φ^{EF} em Γ_{Int} calculado na k -ésima iteração, p. 30
${}^kD\varphi_{Int}^{DF}$	Derivada de φ^{DF} avaliada em Γ_{Int} calculada na iteração de índice k , p. 30
${}^kD\varphi_{Int}^{EF}$	Derivada de φ^{EF} avaliada em Γ_{Int} calculada na iteração de índice k , p. 30
f	Função fonte, p. 8
$f_{i,j}$	Função fonte avaliada no nó de índices (i,j) , p. 11
g	Condição de contorno de Dirichlet, p. 8
h	Largura característica da malha do MEF ou intervalo entre os nós do <i>grid</i> do MDF, p. 9
q	Condição de contorno de Neumann, p. 8
x_i	Abscissa no nó de índice i , p. 10
y_i	Ordenada do nó de índice i , p. 11

Lista de Abreviaturas

DEI	Acoplamento unidimensional MDF/MEF iterativo, p. 30
DENI	Acoplamento unidimensional MDF/MEF não iterativo, p. 22
EDI	Acoplamento unidimensional MEF/MDF iterativo, p. 30
EDNI	Acoplamento unidimensional MEF/MDF não iterativo, p. 22
EDP	Equação Diferencial Parcial, p. 1
MDF	Método das Diferenças Finitas, p. 1
MEC	Método dos Elementos de Contorno, p. 1
MEF	Método dos Elementos Finitos, p. 1
PEC	Programa de Engenharia Civil, p. 3

Capítulo 1

Introdução

Fenômenos físicos de interesse das áreas de engenharia e geofísica são usualmente descritos por equações diferenciais parciais (EDP's). As soluções analíticas destas equações são, geralmente, de difícil obtenção, visto que a maioria dos problemas práticos de engenharia envolve geometrias irregulares, meios heterogêneos, descon-tinuidades, dentre outros aspectos. Portanto, habitualmente recorre-se a métodos aproximados para o cálculo das soluções.

A modelagem numérica de fenômenos físicos é uma ferramenta fulcral na análise dos mais diversos tipos de problemas: no projeto de uma barragem, há interesse na análise de tensões e deformações dos materiais, governados pela Mecânica do Contínuo; na investigação de estruturas geológicas, baseia-se na solução de proble-mas inversos, envolvendo a Equação da Onda; no resfriamento de uma turbina, a análise térmica é feita a partir da solução da Equação de Calor; para citar alguns.

As soluções dos problemas regidos pelas equações supracitadas, bem como di-versas outras, podem ser obtidas por métodos aproximados, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e outros. Estas alternativas apresentam ca-racterísticas positivas e negativas, de tal maneira que não há unanimidade sobre o melhor método para todos os tipos de problema.

A proposta de acoplamento de métodos numéricos oferece uma alternativa à abordagem tradicional, na qual emprega-se um único método em todo o domínio do problema estudado. O foco desta metodologia é aproveitar as vantagens de cada abordagem, aplicando-lhes em regiões do domínio às quais são mais apropriadas. Exemplificando, problemas de trinca apresentam partições com elevada singulari-dade, onde geralmente o MEC fornece resultados melhores que o MEF, sugerindo a aplicação deste último método em regiões afastadas da trinca. Outro exemplo é um problema com domínio cuja geometria é regular em algumas regiões, nas quais o MDF tem grande eficiência, em função de seu baixo custo computacional, podendo o MEF ser aplicado em regiões de geometria irregular.

Dentro deste contexto, propõe-se uma metodologia de acoplamento não iterativo, empregando elementos finitos e diferenças finitas (MEF/MDF). O escopo de aplicação é definido no Operador Laplaciano, em razão de sua presença em diversas EDP's, sendo de absoluta relevância nos problemas de engenharia e geofísica, configurando um ponto de partida coerente para o desenvolvimento da técnica proposta.

1.1 Revisão Bibliográfica

Os problemas a serem abordados nesta dissertação são descritos por EDP's elípticas, que caracterizam estados estacionários e problemas de valor de contorno. A teoria associada a este contexto é apresentada de maneira resumida, baseando-se nos livros de CHAPRA e CANALE [1], LEVEQUE [2] e SMITH [3].

Conforme indicado por BREBBIA *et al.* [4], muitos problemas de engenharia apresentam acoplamento entre as diferentes partes de seus sistemas, como ocorre na interação solo-estrutura e fluido-estrutura. Por vezes é possível negligenciar o acoplamento simultâneo entre as partes, como no caso do projeto de edifícios sob solicitação de cargas de vento. Entretanto, em alguns casos como de estruturas flexíveis *offshore*, o sistema sólido (estrutura) e o sistema líquido precisam ser considerados simultaneamente.

A ideia de acoplamento surge naturalmente de exemplos como os citados anteriormente. Contudo, o escopo deste tema abrange outras situações. Uma definição para formulações acopladas é dada em ZIENKIEWICZ e CHAN [5], onde é indicado que tais formulações são aquelas aplicáveis a múltiplos domínios e variáveis dependentes, que usualmente descrevem fenômenos físicos diferentes, nos quais:

- a) nenhum domínio pode ser resolvido corretamente quando separado do outro;
- b) nenhum conjunto de variáveis dependentes pode ser explicitamente eliminado.

Ainda de acordo com ZIENKIEWICZ e CHAN [5], duas categorias distintas classificam estes tipos de problema:

Classe I: Problemas que apresentam fenômenos físicos distintos, nos quais há superposição parcial ou total de subdomínios. Nesta classe, o acoplamento se dá via equações diferenciais usadas para descrever aqueles fenômenos;

Classe II: Problemas nos quais o acoplamento ocorre apenas nas interfaces dos subdomínios. Neste caso, duas classificações são acrescentadas:

- a) problemas com subdomínios regidos por diferentes fenômenos físicos, i.e., EDP's distintas;

- b) problemas com subdomínios regidos pelo mesmo fenômeno físico, ou seja, uma única EDP, mas com diferentes técnicas numéricas aplicadas aos subdomínios.

Além das classes apresentadas, os acoplamentos ainda podem ser classificados em iterativos e não iterativos ou diretos. O acoplamento direto é caracterizado pela montagem de uma matriz global, levando em consideração as equações pertinentes a cada método usado em cada partição do domínio. Já o acoplamento iterativo consiste na solução de sistemas de equações associados a cada subdomínio, usando a solução de uma partição como dado de entrada em outra, de modo iterativo, visando a atender um critério de convergência.

Como exemplos da Classe I, citam-se os problemas de escoamento do aço durante o processo de extrusão, nos quais a condição de escoamento é dependente do campo de temperatura, e fenômenos de excitação dinâmica em solo saturado, em que as tensões e deslocamentos no solo dependem da poropressão, afetada pela percolação.

Alguns problemas da Classe IIa podem ser citados, como a interação fluido-estrutura na análise dos modos de vibração de uma barragem [6, 7], o problema de calor conjugado, no qual são acopladas a transferência de calor por convecção (fluido) e por condução (sólido) [8, 9], dentre outros.

Acoplamentos da Classe IIb buscam particionar o domínio e combinar as vantagens de diferentes métodos numéricos, objetivando aprimorar aspectos da solução aproximada, como eficiência e precisão. A proposta desta dissertação encontra-se no âmbito destes tipos de problema.

Um dos primeiros trabalhos a contribuir para o tópico de acoplamento de interface foi feito por MCDONALD e WEXLER [10], que empregaram soluções de equações integrais para representar domínios semi-infinitos em problemas de elasticidade, sugerindo o acoplamento MEC/MEF. Outros trabalhos como os de ZIENKIEWICZ *et al.* [11] e de BREBBIA e GEORGIU [12] também foram pioneiros no acoplamento entre elementos finitos e elementos de contorno.

O Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ (PEC) desenvolveu estudos sobre o acoplamento MEC/MEF, aplicado a problemas de elasticidade [13, 14] e análise dinâmica [15], usando subdomínios com malhas coincidentes e não coincidentes [16]. Em PAULA [13] é empregada a técnica de acoplamento *FE-approach* [4, 17], que consiste em tratar a região modelada pelo MEC como um único elemento finito. Na tese de SOARES JR. [15] o acoplamento é feito de maneira iterativa, compatibilizando deslocamentos e esforços na interface MEC/MEF. Mais recentemente, a dissertação de FONTES JR. [14] estuda o acoplamento pela técnica *FE-approach* empregando implementação paralela.

Ao longo dos anos, diversos tipos de acoplamentos tem sido desenvolvidos. Além

do emprego do MEC/MEF em problemas de elasticidade, citam-se: MEF/MDF aplicado à interação fluido-estrutura [18], à liquefação de solo poroso [19], à interação entre ondas acústicas e elásticas [20] e ao crescimento de tumores [21]; MDF/MEC em transferência de calor [8], MEC/MEF para tratar da interação solo-estrutura não linear [22], entre outros.

Com enfoque no acoplamento MEF/MDF, Classe IIb, sob o qual será desenvolvida esta dissertação, cita-se o trabalho de BOULBRACHENE *et al.* [23] como um dos primeiros a combinar tais métodos. Neste artigo é apresentada uma formulação para o acoplamento aplicado ao problema de Poisson, por meio da decomposição de domínios [24], configurando uma abordagem iterativa.

Algumas combinações de elementos finitos e diferenças finitas aplicadas a problemas de propagação de onda elástica também tem sido exploradas ao longo dos anos [25–28]. Nos artigos de MOCZO *et al.* [25] e MA *et al.* [26] são empregados acoplamentos da Classe IIb, iterativos. No primeiro, as aproximações de ambos os métodos são de $O(h^2)$, com as malhas de elementos finitos e diferenças finitas coincidentes numa pequena região de *overlap*. No segundo, a aproximação do MDF possui erro $O(h^4)$, empregando uma região de superposição de malhas com nós não coincidentes. Em função disto, foi desenvolvida uma técnica de interpolação entre as aproximações de velocidade calculadas na região do MDF para transferência para região do MEF.

Outros trabalhos apresentando acoplamento Classe IIb, iterativo, MEF/MDF tem sido desenvolvidos em diversas áreas [20, 29, 30].

1.2 Objetivo

A proposta deste trabalho é o acoplamento entre o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas, aplicado ao Operador de Laplace em problemas uni e bidimensionais regidos pela Equação de Poisson. A importância deste operador deve-se a sua presença em EDP's de interesse das áreas de engenharia e geofísica, como a Equação da Onda e a Equação de Helmholtz.

A técnica utilizada para realizar o acoplamento MEF/MDF consiste na imposição de continuidade forte na interface entre as regiões dos métodos, tanto para função como para seu gradiente. A continuidade da solução aproximada é imediata, enquanto emprega-se um operador de diferenças finitas na interface para aproximar o fluxo entre as regiões e acoplar os métodos. O diferencial desta estratégia está em não requerer operações iterativas ou esquemas de interpolação na região de interface de acoplamento, sendo independente de um processo de convergência.

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho é composto por sete capítulos, sendo o primeiro capítulo o de Introdução.

O capítulo 2 versa sobre as ideias básicas associadas às equações diferenciais parciais, a fim de contextualizar o tipo de problema abordado nesta dissertação. Ao final do capítulo, fica definida a formulação forte do problema difusivo escalar, sobre o qual são desenvolvidas as formulações dos métodos numéricos.

O capítulo 3 apresenta os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos. Os operadores do MDF são definidos e é apresentado como calculá-los pela Série de Taylor. A formulação de Galerkin Contínuo é desenvolvida sucintamente para o MEF e são definidas as discretizações dos problemas uni e bidimensionais.

No capítulo 4 é definido o acoplamento direto MEF/MDF, apresentando as equações usadas nos nós de interface. O acoplamento iterativo MEF/MDF utilizado neste trabalho é brevemente formulado, baseando-se no algoritmo de Neumann-Dirichlet.

O capítulo 5 trata da implementação computacional, versando sobre os algoritmos desenvolvidos para execução dos métodos numéricos.

No capítulo 6 são realizados quatro experimentos numéricos, um unidimensional e outros três bidimensionais. A validação dos códigos desenvolvidos é feita, bem como a avaliação do desempenho dos métodos de acoplamento previamente comentados.

O capítulo 7 apresenta as considerações finais desta dissertação, concluindo o trabalho e sugerindo temas para estudos futuros.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo são introduzidas brevemente algumas ideias básicas associadas às equações diferenciais parciais, a fim de contextualizar o tipo de problema abordado nesta dissertação. Ao final do capítulo, fica definida a formulação forte do problema difusivo escalar.

2.1 Introdução às Equações Diferenciais Parciais

Conforme apresentado em CHAPRA e CANALE [1], equações diferenciais parciais são aquelas que empregam derivadas parciais de uma função incógnita de variáveis independentes. A derivada parcial de maior ordem presente na EDP define a ordem da equação. Uma equação diferencial parcial é linear se o for em suas derivadas e na função desconhecida, com coeficientes dependendo apenas das variáveis independentes.

Com foco nas EDP's lineares, de segunda ordem e considerando duas variáveis independentes, pode-se escrevê-las na seguinte forma geral

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0, \quad (2.1)$$

sendo A , B e C funções de x e y , e D sendo uma função de x , y , u , $\partial u / \partial x$ e $\partial u / \partial y$.

Tabela 2.1: Classificação de EDP's lineares, de segunda ordem, em duas variáveis

Categoria	$B^2 - 4AC$	Equações
Elíptica	< 0	Laplace, Poisson;
Parabólica	$= 0$	Fourier, Schrodinger;
Hiperbólica	> 0	Propagação de Onda.

A classificação de uma EDP depende dos termos que multiplicam as derivadas de segunda ordem (A , B e C), podendo ser elíptica, parabólica ou hiperbólica (Tabela

2.1). Esta classificação é útil, uma vez que cada categoria está associada a um tipo específico de problema, que demanda técnicas apropriadas de solução.

As EDP's elípticas, como a Equação de Laplace ou Equação de Poisson, tipicamente modelam problemas estacionários e fenômenos de equilíbrio, como apontado em LEVEQUE [2]. Alguns problemas estacionários e de valores de contorno são a percolação de água sob uma barragem, a distribuição de temperatura numa chapa aquecida e o campo elétrico próximo a um condutor.

Geralmente, objetivando obter a EDP que descreve um certo fenômeno físico, é necessário estabelecer uma equação de equilíbrio ou de conservação e uma equação constitutiva. Em CHAPRA e CANALE [1] há um exemplo simples, mas útil, sobre como formular a equação do problema de calor estacionário numa chapa fina homogênea, i.e., a Equação de Laplace. A seguir são apresentadas as equações relacionadas ao problema

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$q_i = -k \frac{\partial u}{\partial i}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.4)$$

A Eq.(2.2) é a EDP que expressa a conservação de energia da placa, sendo q uma função de x e y , representando o fluxo de calor. Na Eq.(2.3), u é uma função de x e y , definindo o campo de temperatura, q_i é o fluxo de calor na direção da dimensão i e k é o coeficiente de condutividade térmica, considerado constante neste exemplo em razão de o meio ser homogêneo. Esta última equação é a Lei de Fourier para condução de calor e define a equação constitutiva do problema. A Equação de Laplace é dada pela Eq.(2.4) e é obtida pela substituição da Eq.(2.3) na Eq.(2.2). A Equação de Poisson poderia ser obtida de maneira análoga, a diferença sendo o lado direito da Eq.(2.4), que passaria a valer $f(x, y)$, uma função descrevendo as fontes e sumidouros de calor.

Para uma dada função f de n variáveis independentes, o Laplaciano Δ (ou Operador de Laplace) e o operador del ∇ (ou nabla) são expressos por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \text{div}(\text{grad}(f)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad (2.5)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad (2.6)$$

sendo o divergente e o gradiente expressos por div e grad , respectivamente.

O escopo de aplicação do referido operador é extenso, abrangendo não apenas as equações previamente citadas, mas também a Equação da Onda, de Helmholtz, de problemas de potencial e outras.

Em razão do exposto, esta dissertação tem seu foco voltado àquele operador diferencial. As formulações dos métodos numéricos são apresentadas no próximo capítulo, contemplando domínios uni e bidimensionais, associados a problemas de valores de contorno definidos pela Equação de Poisson, com condições de contorno essenciais (Dirichlet) e naturais (Neumann).

2.2 Formulação do Problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^s$, com $s \in \{1, 2\}$, um domínio limitado aberto com contorno contínuo de Lipschitz por partes denotado por Γ . O problema consiste em encontrar uma $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\text{grad}(\varphi) \in H_{div}(\Omega)$, satisfazendo

$$-\Delta\varphi = -\text{div}(\text{grad}(\varphi)) = f \text{ a.e. em } \Omega, \quad (2.7a)$$

$$\varphi = g \text{ em } \Gamma_D, \quad (2.7b)$$

$$\text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n} = q \text{ em } \Gamma_N, \quad (2.7c)$$

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad (2.7d)$$

com $H_{div}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \text{div}(v) \in L^2(\Omega)\}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) \cap C^0(\Gamma_D)$, $q \in L^2(\Gamma_N)$. As definições dos espaços $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $C^0(\Gamma)$, $L^2(\Omega)$, e $H^1(\Omega)$ são encontradas em ADAMS [31]. Além disso, a abreviação “a.e”, do inglês *almost everywhere*, designa “em quase toda parte”, o que significa que a Eq.(2.7a) pode ser violada apenas num conjunto de medida de Lebesgue zero. Por fim, a operação $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ é o usual produto escalar entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, pertencentes ao $\mathbb{R}^s$, e $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal a Γ , orientado saindo de Ω e definido a.e. em Γ . A parte do contorno na qual são prescritas condições essenciais é chamada de Γ_D , enquanto a região onde se prescrevem condições naturais chama-se Γ_N .

Capítulo 3

Métodos Numéricos Aplicados ao Operador de Laplace

Este capítulo apresenta os métodos numéricos empregados nesta dissertação. O MDF tem seus operadores de diferenças finitas definidos e é apresentado como obtê-los via Série de Taylor, bem como suas ordens de aproximação. O MEF empregará a formulação Galerkin Contínuo, que será brevemente apresentada. As discretizações dos problemas uni e bidimensionais são definidas.

3.1 Método das Diferenças Finitas

O MDF consiste em substituir os operadores diferenciais da EDP a ser resolvida por aproximações de diferenças finitas, que podem ser obtidas via manipulação da Série de Taylor

$$\varphi(x+h) = \sum_{n=0}^{n \rightarrow \infty} \frac{h^n \varphi^{(n)}(x)}{n!}, \quad (3.1)$$

na qual o sobrescrito (n) indica a ordem da derivada e h é a distância entre o ponto que se deseja aproximar a função φ e o ponto x , onde seu valor é conhecido. Esta série está associada ao Teorema de Taylor, encontrado em CHAPRA e CANALE [1], que essencialmente estabelece que qualquer função suficientemente suave pode ser aproximada por um polinômio.

3.1.1 Domínio Unidimensional

Nesta seção, considerando um domínio unidimensional, a Eq.(2.7a) fica

$$-\varphi^{(2)}(x) = f(x) \quad \text{para } a < x < b. \quad (3.2)$$

Assumindo que uma função $\varphi(x)$ atenda os critérios do Teorema de Taylor, é

válida sua expansão em série sobre o ponto de interesse $\bar{x}$, resultando em

$$\varphi(\bar{x} + h) = \varphi(\bar{x}) + h\varphi^{(1)}(\bar{x}) + \frac{h^2\varphi^{(2)}(\bar{x})}{2} + \frac{h^3\varphi^{(3)}(\bar{x})}{6} + O(h^4), \quad (3.3)$$

$$\varphi(\bar{x} - h) = \varphi(\bar{x}) - h\varphi^{(1)}(\bar{x}) + \frac{h^2\varphi^{(2)}(\bar{x})}{2} - \frac{h^3\varphi^{(3)}(\bar{x})}{6} + O(h^4), \quad (3.4)$$

com $O(h^p)$ significando ordem de aproximação e p sendo a taxa de convergência. A soma da Eq.(3.3) com a Eq.(3.4) resulta na seguinte expressão para derivada de segunda ordem de φ

$$\varphi^{(2)}(\bar{x}) = \frac{\varphi(\bar{x} - h) - 2\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x} + h)}{h^2} + O(h^2). \quad (3.5)$$

Considerando uma malha com $(m + 2)$ pontos, a coordenada x do i -ésimo nó é dada por $x_i = a + ih$, com $h = (b - a)(m + 1)^{-1}$. A aproximação $\varphi(x_i)$ é denotada por φ_i^h . Definindo a aproximação por diferença centrada para derivada segunda como sendo

$$D^2\varphi_i^h = \frac{\varphi_{i-1}^h - 2\varphi_i^h + \varphi_{i+1}^h}{h^2}, \quad (3.6)$$

pode-se substituir $\varphi^{(2)}$ na Eq.(3.2) por $D^2\varphi_i^h$, obtendo-se as seguintes equações algébricas para os nós do domínio

$$\frac{-\varphi_{i-1}^h + 2\varphi_i^h - \varphi_{i+1}^h}{h^2} = f(x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Note que φ_0^h e φ_{m+1}^h não são definidos pela Eq.(3.7). No caso de uma condição de contorno de Dirichlet para $x = a$ ou $x = b$, a solução aproximada é exata, dispensando cálculos. Caso a condição de contorno seja de Neumann, pode-se subtrair a Eq.(3.4) da Eq.(3.3) para chegar a

$$\varphi^{(1)}(\bar{x}) = \frac{\varphi(\bar{x} + h) - \varphi(\bar{x} - h)}{2h} + O(h^2), \quad (3.8)$$

e, por fim, a aproximação por diferença centrada para a primeira derivada fica definida por

$$D\varphi_i^h = \frac{\varphi_{i+1}^h - \varphi_{i-1}^h}{2h}. \quad (3.9)$$

Considerando o contorno à esquerda, i.e. $i = 0$, a Eq.(3.9) acrescenta o valor desconhecido de φ_{-1}^h . A fim de tratar deste inconveniente, as Eq.(3.9) e Eq.(3.7) são manipuladas para obter

$$\frac{\varphi_0^h - \varphi_1^h}{h^2} = -\frac{D\varphi_0^h}{h} + \frac{f(x_0)}{2}. \quad (3.10)$$

Analogamente, considerando o contorno à direita ($i = m + 1$), pode-se escrever

$$\frac{\varphi_{m+1}^h - \varphi_m^h}{h^2} = \frac{D\varphi_{m+1}^h}{h} + \frac{f(x_{m+1})}{2}. \quad (3.11)$$

Denotando por $q(a)$ e $q(b)$ os valores prescritos de $\varphi^{(1)}(a)$ e $\varphi^{(1)}(b)$, respectivamente, $D\varphi_0^h$ e $D\varphi_{m+1}^h$ são substituídos nas Eqs.(3.10)-(3.11), definindo as seguintes equações algébricas para os pontos do contorno

$$\frac{\varphi_0^h - \varphi_1^h}{h^2} = -\frac{q(a)}{h} + \frac{f(x_0)}{2}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\varphi_{m+1}^h - \varphi_m^h}{h^2} = \frac{q(b)}{h} + \frac{f(x_{m+1})}{2}. \quad (3.13)$$

Conforme apontado em LEVEQUE [2], quando ambas as condições de contorno são do tipo natural, o problema está mal posto. Portanto destaca-se que as Eqs.(3.12)-(3.13) são apresentadas simultaneamente por uma questão de concisão e não são empregadas concomitantemente no mesmo problema. No caso de um problema Dirichlet-Dirichlet, a formulação do MDF resultará num sistema de m equações para m incógnitas. Ou ainda, caso seja um problema Neumann-Dirichlet ou Dirichlet-Neumann, o sistema linear terá $(m+1)$ equações para $(m+1)$ incógnitas.

As provas de consistência e estabilidade são encontradas em LEVEQUE [2], o que garante a convergência do método, esta sendo de $O(h^2)$ para formulação apresentada.

3.1.2 Domínio Bidimensional

Assumindo um domínio Ω bidimensional, a Eq.(2.7a) se torna

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ a.e. em } \Omega. \quad (3.14)$$

Uma vez que o MDF será empregado neste trabalho apenas a domínios retangulares, considere o quadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Para discretizar este domínio, emprega-se um *grid* cartesiano uniforme (Fig. 3.1), com um nó de índice i dado por (x_i, y_i) , sendo $x_i = i\Delta x$ e $y_i = i\Delta y$, conforme feito em LEVEQUE [2]. Nomeando $\varphi_{i,j}^h$ a solução aproximada para $\varphi(x_i, y_i)$, pode-se empregar o operador de diferença centrada para derivada segunda, Eq.(3.6), para discretizar a Eq.(3.14) em

$$\frac{-\varphi_{i-1,j}^h + 2\varphi_{i,j}^h - \varphi_{i+1,j}^h}{(\Delta x)^2} + \frac{-\varphi_{i,j-1}^h + 2\varphi_{i,j}^h - \varphi_{i,j+1}^h}{(\Delta y)^2} = f_{i,j}. \quad (3.15)$$

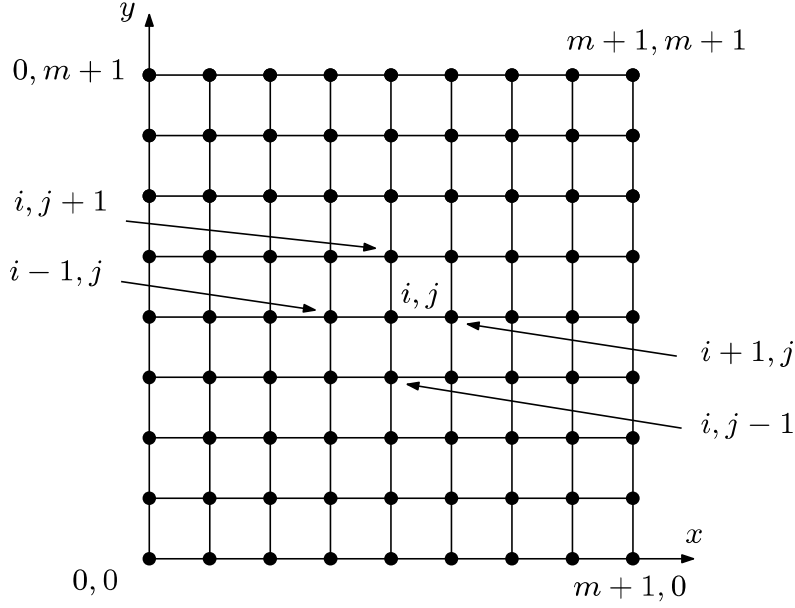


Figura 3.1: *Grid* cartesiano uniforme para diferenças finitas

A fim de simplificar a notação, faz-se $\Delta x = \Delta y \equiv h$ e então reescreve-se a Eq.(3.15) como

$$\frac{-\varphi_{i,j-1}^h - \varphi_{i-1,j}^h + 4\varphi_{i,j}^h - \varphi_{i+1,j}^h - \varphi_{i,j+1}^h}{h^2} = f_{i,j}. \quad (3.16)$$

Considerando $h = 1/(m+1)$, tem-se um *grid* de $(m+2)^2$ nós. Para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, m$, a Eq.(3.16) define as equações algébricas dos nós do domínio.

Analogamente ao ocorrido no caso unidimensional, os valores de $\varphi_{0,j}^h$, $\varphi_{m+1,j}^h$, $\varphi_{i,0}^h$ e $\varphi_{i,m+1}^h$ não são definidos pela Eq.(3.16). Nestes nós do contorno, caso a condição dada seja essencial, a solução é imediata. Por outro lado, para condição de contorno natural, considera-se a situação ilustrada na Fig. 3.2, representado um nó $(m+1, j)$ no contorno à direita de Ω e seu estêncil.

Similarmente ao feito no caso unidimensional, será aplicado o operador dado na Eq.(3.9), considerando $i = m+1$, manipulando-se aquela equação com a Eq.(3.16), a fim de eliminar o termo desconhecido $\varphi_{m+2,j}^h$ e inserir a condição de contorno natural $\partial\varphi_{m+1,j}/\partial x$, resultando em

$$\frac{-\varphi_{m+1,j-1}^h - 2\varphi_{m,j}^h + 4\varphi_{m+1,j}^h - \varphi_{m+1,j+1}^h}{h^2} = f_{m+1,j} + \frac{2}{h} \frac{\partial\varphi_{m+1,j}}{\partial x}, \quad (3.17)$$

incorporando desta forma a condição de contorno de Neumann.

Manipulações semelhantes podem ser realizadas para se obter as equações para os nós de contorno em caso de condições naturais. As Eqs.(3.18)-(3.20) definem as

relações nos nós da face superior, esquerda e inferior do domínio, respectivamente

$$\frac{-\varphi_{i-1,m+1}^h - 2\varphi_{i,m}^h + 4\varphi_{i,m+1}^h - \varphi_{i+1,m+1}^h}{h^2} = f_{i,m+1} + \frac{2}{h} \frac{\partial \varphi_{i,m+1}}{\partial y}, \quad (3.18)$$

$$\frac{-\varphi_{0,j-1}^h - 2\varphi_{1,j}^h + 4\varphi_{0,j}^h - \varphi_{0,j+1}^h}{h^2} = f_{0,j} + \frac{2}{h} \frac{\partial \varphi_{0,j}}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\frac{-\varphi_{i-1,0}^h - 2\varphi_{i,1}^h + 4\varphi_{i,0}^h - \varphi_{i+1,0}^h}{h^2} = f_{i,0} + \frac{2}{h} \frac{\partial \varphi_{i,0}}{\partial y}. \quad (3.20)$$

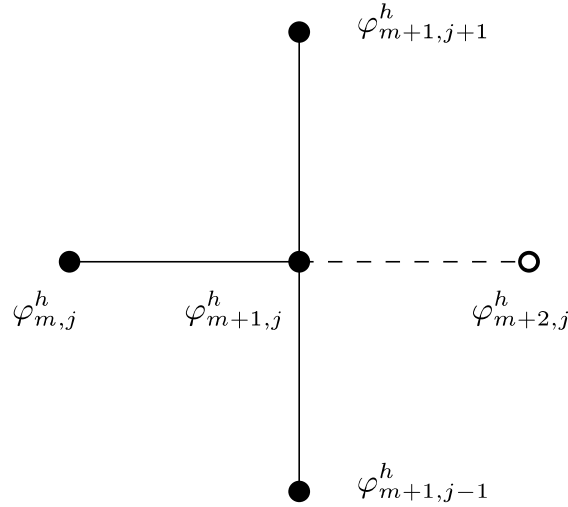


Figura 3.2: Estêncil de um nó $(m+1, j)$, incluindo um nó virtual $(m+2, j)$

Agora seja o caso do nó $(m+1, m+1)$, no extremo superior direito do domínio Ω (Fig. 3.3) e considere as condições de contorno naturais $\partial \varphi_{m+1,m+1}/\partial x$ e $\partial \varphi_{m+1,m+1}/\partial y$. Manipulando o operador dado na Eq.(3.9) para aproximar a derivada nas direções x e y junto com a Eq.(3.16), chega-se a

$$\frac{-2\varphi_{m,m+1}^h + 4\varphi_{m+1,m+1}^h - 2\varphi_{m+1,m}^h}{h^2} = f_{m+1,m+1} + \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \varphi_{m+1,m+1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{m+1,m+1}}{\partial y} \right). \quad (3.21)$$

Os demais nós nos cantos, sob condições de contorno de Neumann, tem suas expressões algébricas obtidas de modo análogo ao que foi feito anteriormente. Os nós $(0, m+1)$, $(0, 0)$ e $(m+1, 0)$ são regidos, respectivamente, por

$$\frac{-2\varphi_{1,m+1}^h + 4\varphi_{0,m+1}^h - 2\varphi_{0,m}^h}{h^2} = f_{0,m+1} + \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \varphi_{0,m+1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{0,m+1}}{\partial y} \right), \quad (3.22)$$

$$\frac{-2\varphi_{1,0}^h + 4\varphi_{0,0}^h - 2\varphi_{0,1}^h}{h^2} = f_{0,0} + \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \varphi_{0,0}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{0,0}}{\partial y} \right), \quad (3.23)$$

$$\frac{-2\varphi_{m,0}^h + 4\varphi_{m+1,0}^h - 2\varphi_{m+1,1}^h}{h^2} = f_{m+1,0} + \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \varphi_{m+1,0}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{m+1,0}}{\partial y} \right). \quad (3.24)$$

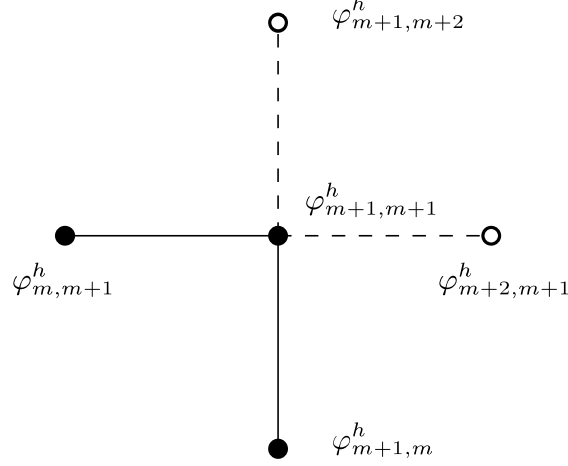


Figura 3.3: Estêncil do nó $(m+1, m+1)$, incluindo os nós virtuais $(m+2, m+1)$ e $(m+1, m+2)$

Conforme comentado para o caso unidimensional, a convergência do MDF para domínios bidimensionais é garantida, sendo de $O(h^2)$ [2].

3.2 Método dos Elementos Finitos

O MEF empregado neste trabalho é baseado na formulação de Galerkin Contínuo, resolvendo o problema estabelecido pelas Eqs.(2.7a)-(2.7d) na forma variacional. A esta formulação fica associado um espaço de elementos finitos, que será definido pela dimensão do problema e grau do polinômio empregado na aproximação, conforme apresentado a seguir.

3.2.1 Formulação Galerkin Contínuo

O Teorema de Gauss, ou Teorema da Divergência, é empregado para reescrever o problema em sua forma integral ([32], [33]). Para atender os requisitos do teorema, faz-se $\eta \in H^1(\Omega)$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\text{grad}(\varphi) \in H_{\text{div}}(\Omega)$, obtendo-se

$$\int_{\Omega} -\text{div}(\text{grad}(\varphi))\eta \, d\Omega = \int_{\Omega} \text{grad}(\varphi) \text{grad}(\eta) \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n} \eta \, d\Gamma - \int_{\Gamma_N} \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n} \eta \, d\Gamma. \quad (3.25)$$

Sendo assim, fazendo o produto da Eq.(2.7a) com $\eta \in H^1(\Omega)$ e integrando em

Ω , da Eq.(2.7a), Eq.(2.7c) e Eq.(3.25) resulta

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\varphi) \text{grad}(\eta) \, d\Omega = \int_{\Omega} f\eta \, d\Omega + \int_{\Gamma_D} \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n}\eta \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} q\eta \, d\Gamma. \quad (3.26)$$

Observando que

$$\int_{\Gamma_D} \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n}\eta \, d\Gamma = 0 \text{ se } \eta = 0 \text{ em } \Gamma_D, \quad (3.27)$$

o conjunto solução S_{Γ_D} e o espaço de funções teste V_{Γ_D} são definidos por

$$S_{\Gamma_D} = \{v \in H^1(\Omega); v = g \text{ em } \Gamma_D\}, \quad (3.28)$$

$$V_{\Gamma_D} = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_D\}. \quad (3.29)$$

Consequentemente, da Eq.(3.28) e Eq.(3.29) segue que

$$\int_{\Gamma_D} \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n}\eta \, d\Gamma = 0 \quad \forall \eta \in V_{\Gamma_D}. \quad (3.30)$$

Portanto, o problema definido nas Eqs.(2.7a)-(2.7d) tem sua formulação fraca, ou formulação variacional, que consiste em encontrar $\varphi \in S_{\Gamma_D}$ satisfazendo a seguinte equação variacional

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\varphi) \text{grad}(\eta) \, d\Omega = \int_{\Omega} f\eta \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} q\eta \, d\Gamma, \quad \forall \eta \in V_{\Gamma_D}. \quad (3.31)$$

A fim de obter a formulação de elementos finitos associada, considere o conjunto $M^h = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{Ne}\}$ composto por elementos finitos não degenerados Ω_i ($i = 1, \dots, Ne$) como sendo uma adequada partição do domínio Ω , conforme definido em ERN e GUERMOND [33]. Para $k \geq 1$ e $\Omega_e \in M^h$, seja $P^k(\Omega_e)$ o espaço de polinômios com ordem $p \leq k$ nas coordenadas locais do elemento padrão associado Ω_e . Seja o espaço de elemento finito

$$H^{h,k} = \{v \in H^1(\Omega); v_e \in P^k(\Omega_e)\}, \quad (3.32)$$

no qual v_e é a restrição de uma dada função v ao elemento Ω_e . Adicionalmente, definem-se o conjunto solução $S_{\Gamma_D}^{h,k}$ e o espaço de funções teste $V_{\Gamma_D}^{h,k}$ para o problema discreto

$$S_{\Gamma_D}^{h,k} = \{v \in H^{h,k}; v = g^h \text{ em } \Gamma_D\}, \quad (3.33)$$

$$V_{\Gamma_D}^{h,k} = \{v \in H^{h,k}(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_D\}, \quad (3.34)$$

com g^h sendo o usual interpolante de g em Γ_D , obtido pela aproximação de g a uma

função de $H^{h,k}$ tal que, nos nós da malha pertencentes a Γ_D , esta função assume o valor de g .

Desta forma, a formulação Galerkin Contínuo para o MEF consiste em encontrar $\varphi^h \in S_{\Gamma_D}^{h,k}$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\varphi^h) \text{grad}(\eta^h) \, d\Omega = \int_{\Omega} f \eta^h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} q \eta^h \, d\Gamma, \quad \forall \eta^h \in V_{\Gamma_D}^{h,k}. \quad (3.35)$$

As provas de consistência, coercividade e convergência do método podem ser encontradas em ERN e GUERMOND [33], assim como a estimativa de erro na norma de Lebesgue, i.e., $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ como definido em ADAMS [31], provando que a seguinte inequação é válida

$$\|\varphi - \varphi^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C^*(\varphi) h^{(k+1)}, \quad (3.36)$$

sendo $C^*(\varphi) > 0$ uma constante dependente de φ e $h = \text{Sup}\{h_e; \Omega_e \in M^h\}$. A Eq.(3.36) indica que a taxa de convergência do método é de $k+1$ para a norma de Lebesgue [32, 33].

3.2.2 Discretização em Elementos Unidimensionais

Considerando um domínio uni-dimensional $\Omega = (a, b)$, a Eq.(3.35) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_a^b \frac{d\varphi^h}{dx} \frac{d\eta^h}{dx} \, dx = \int_a^b f \eta^h \, dx + q(b) \eta^h(b) - q(a) \eta^h(a), \quad \text{com} \quad (3.37)$$

$$q(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (3.38)$$

O domínio é discretizado em $(m+1)$ elementos lineares, resultando em $(m+2)$ nós. As funções $\varphi^h(x)$ e $\eta^h(x)$ ficam então definidas

$$\varphi^h(x) = \sum_{j=0}^{m+1} \varphi_j^h N_j(x), \quad (3.39)$$

$$\eta^h(x) = \sum_{i=0}^{m+1} \eta_i^h N_i(x), \quad (3.40)$$

nas quais $N_i(x)$ e $N_j(x)$ são as funções de interpolação e φ_j^h e η_i^h são coeficientes constantes. Neste instante fica caracterizado o método de Galerkin, uma vez que as funções usadas na interpolação da solução também são empregadas na ponderação.

A função de interpolação para o i -ésimo nó é dada por

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Substituindo a Eq.(3.39) e a Eq.(3.40) na Eq.(3.37), conclui-se que

$$\sum_{i=0}^{m+1} \eta_i^h \sum_{j=0}^{m+1} \left(\int_a^b \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^h = \sum_{i=0}^{m+1} \eta_i^h \left(\int_a^b f N_i dx + q(b)N_i(b) - q(a)N_i(a) \right). \quad (3.42)$$

Uma vez que as constantes η_i^h são arbitrárias, fazendo $\eta_i^h = 1$ e $\eta_j^h = 0$, para $j \neq i$ e $i = 0, \dots, m+1$, um sistema de $(m+2)$ equações algébricas e $(m+2)$ incógnitas é obtido

$$\sum_{j=0}^{m+1} \left(\int_a^b \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^h = \int_a^b f N_i dx + q(b)N_i(b) - q(a)N_i(a), \quad i = 0, \dots, m+1. \quad (3.43)$$

Conforme mencionado no item 3.1.1, a existência de condições naturais em ambos os nós de contorno pode inviabilizar a unicidade da solução. Portanto, os termos $q(a)N_i(a)$ e $q(b)N_i(b)$ na Eq.(3.43) não são considerados simultaneamente no mesmo problema. Nesta formulação do MEF, um problema Dirichlet-Dirichlet gera um sistema de m equações e m incógnitas, enquanto um problema Neumann-Dirichlet ou Dirichlet-Neumann resulta num sistema de $(m+1)$ equações e $(m+1)$ incógnitas. A convergência do método empregando elementos lineares é de $O(h^{k+1})$ [32, 33], ou seja, $O(h^2)$, assim como na formulação de diferenças finitas.

3.2.3 Discretização em Elementos Bidimensionais

Considerando um domínio bidimensional Ω com contorno Γ (Figura 3.4), conforme as definições da seção 2.2, reescreve-se a Eq.(3.35) como segue

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi^h}{\partial x} \frac{\partial \eta^h}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^h}{\partial y} \frac{\partial \eta^h}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} f \eta^h d\Omega + \int_{\Gamma_N} q \eta^h d\Gamma. \quad (3.44)$$

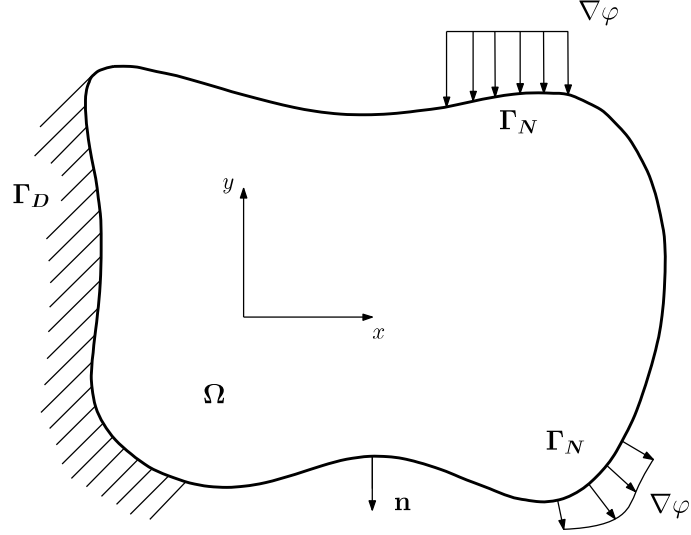


Figura 3.4: Domínio bidimensional genérico

O domínio é então dividido em elementos finitos Ω_e , conforme mostrado na Fig. 3.5, com suas conectividades definidas pelos nós e arestas da malha gerada. Os elementos triangulares são apresentados a mérito de ilustração e não serão abordados nesta dissertação.

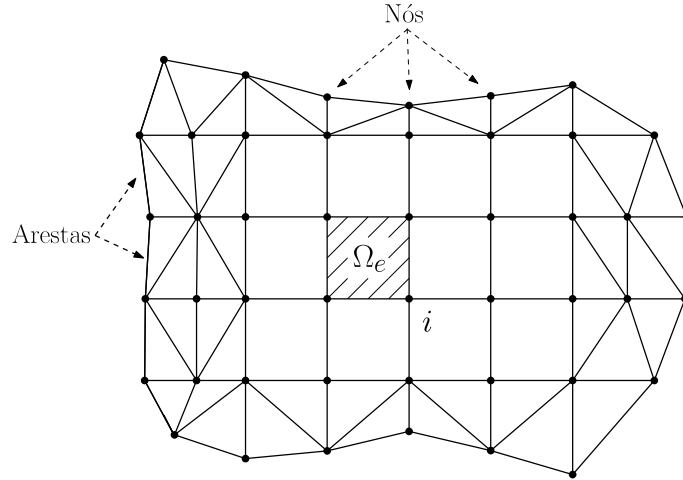


Figura 3.5: Malha genérica de elementos finitos, destacando o domínio de um elemento Ω_e

Assumindo que a malha gerada possua N_n nós, as funções $\varphi^h(x, y)$ e $\eta^h(x, y)$ ficam definidas por

$$\varphi^h(x, y) = \sum_{j=0}^{N_n-1} \varphi_j^h N_j(x, y), \quad (3.45)$$

$$\eta^h(x, y) = \sum_{i=0}^{N_n-1} \eta_i^h N_i(x, y), \quad (3.46)$$

nas quais $N_i(x, y)$ e $N_j(x, y)$ são as funções de interpolação e φ_j^h e η_i^h são coeficientes

constantes. Assim como no caso unidimensional, o método de Galerkin fica definido.

Neste trabalho são empregados elementos quadriláteros bilineares [32–34] na composição da malha. Portanto, a função de interpolação para o i -ésimo nó (vide Fig. 3.5) pode ser escrita na forma

$$N_i(x, y) = axy + bx + cy + d, \quad (3.47)$$

sendo a , b , c e d constantes adequadas. Estas constantes dependem das coordenadas das conectividades dos elementos que contém o nó i . O aspecto da função $N_i(x, y)$, na região dos quatro elementos regulares que contém aquele nó, é apresentado na Fig. 3.6. Nos demais nós, a função $N_i(x, y)$ é nula.

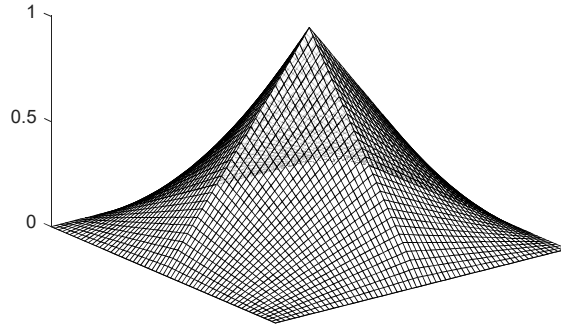


Figura 3.6: Função de interpolação - problema bidimensional - elementos quadriláteros bilineares uniformes

Substituindo a Eq.(3.45) e a Eq.(3.46) na Eq.(3.44), chega-se a

$$\sum_{i=0}^{N_n-1} \eta_i^h \sum_{j=0}^{N_n-1} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right) \varphi_j^h = \sum_{i=0}^{N_n-1} \eta_i^h \left(\int_{\Omega} f N_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} q N_i d\Gamma \right). \quad (3.48)$$

Como no caso 1D, sendo as constantes η_i^h arbitrárias, faz-se $\eta_i^h = 1$ e $\eta_j^h = 0$, para $j \neq i$ e $i = 0, \dots, N_n - 1$, obtendo-se um sistema de N_n equações algébricas e N_n incógnitas, dado por

$$\sum_{j=0}^{N_n-1} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right) \varphi_j^h = \int_{\Omega} f N_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} q N_i d\Gamma, \quad i = 0, 1, \dots, N_n - 1. \quad (3.49)$$

A unicidade de solução depende de não existirem apenas condições de contorno naturais no problema, como previamente comentado. Uma vez que são empregados elementos retangulares bilineares, a convergência do método na norma de Lebesgue é de $O(h^2)$ [32, 33], como na discretização unidimensional.

Capítulo 4

Acoplamento MEF/MDF

Em estratégias de acoplamento do tipo Classe IIb [5], conforme apresentado no capítulo 1, o objetivo de combinar MEF e MDF é aproveitar as vantagens de ambas as metodologias. A combinação da eficiência computacional do método de diferenças finitas com a versatilidade de aplicação do método dos elementos finitos em domínios de geometria irregular é uma estratégia com grande potencial e foi explorada em alguns trabalhos[20, 23, 25–30]. As definições do acoplamento de interface entre o MEF e o MDF para solução da Equação de Poisson são dadas a seguir.

Define-se Ω_{DF} e Ω_{EF} como os subdomínios associados ao MDF e ao MEF, com contornos dados por Γ_{DF} e Γ_{EF} , respectivamente. O domínio do problema é designado por $\Omega = \Omega_{DF} \cup \Omega_{EF}$, a interface entre os subdomínios por $\Gamma_{Int} = \Gamma_{DF} \cap \Gamma_{EF}$ e o contorno do problema é dado por Γ tal que $\Gamma \cap \Gamma_{Int} = \emptyset$.

As condições de transmissão [24], ou de continuidade da solução, em Γ_{Int} são fortemente impostas, no sentido de que tanto a função φ como sua derivada direcional são contínuas, i.e.,

$$\varphi_{\Gamma_{Int}}^{DF} = \varphi_{\Gamma_{Int}}^{EF}, \quad (4.1a)$$

$$grad(\varphi^{DF}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{Int}^{DF}} + grad(\varphi^{EF}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{Int}^{EF}} = 0, \quad (4.1b)$$

nas quais os índices superiores DF e EF são os identificadores dos métodos numéricos e os índices inferiores Γ_{Int} definem em que região do problema estão sendo avaliadas as grandezas φ e $\mathbf{n}$. Os tópicos a seguir tratam das Eqs.(4.1a)-(4.1b) para os casos de problemas uni e bidimensionais.

4.1 Direto ou Não Iterativo

A proposta deste trabalho é acoplar os subdomínios do MEF e do MDF por meio de operadores de diferenças finitas, utilizados para aproximar a derivada normal na interface entre os subdomínios, aplicando-os na Eq(3.35) de elementos finitos. O

conceito empregado consiste na substituição do termo $q = \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n}$, na região da interface, por aproximações obtidas via diferenças finitas. Desta forma, os nós de interface são descritos por equações com coeficientes relacionando pontos de ambos os subdomínios.

4.1.1 Unidimensional

Focando em problemas com uma única dimensão, o domínio é definido por um intervalo do tipo $\Omega = (a, b)$ e a interface Γ_{Int} se torna um ponto, denotado por x_{Int} . As Eqs.(4.1a)-(4.1b) são reescritas em

$$\varphi^{DF}(x_{Int}) = \varphi^{EF}(x_{Int}), \quad (4.2a)$$

$$\frac{d\varphi^{DF}(x_{Int})}{dx} = \frac{d\varphi^{EF}(x_{Int})}{dx}. \quad (4.2b)$$

Uma vez que são considerados apenas dois subdomínios, um para cada método, existem duas opções de posicionamento das malhas em relação à interface. O primeiro arranjo considera o acoplamento não iterativo MEF/MDF (EDNI) e o segundo considera o acoplamento não iterativo MDF/MEF (DENI). Em ambos os casos, a Eq.(4.2a) é imediatamente atendida assumindo que a incógnita $\varphi(x_{Int})$ é a mesma para as equações de diferenças finitas e de elementos finitos.

EDNI

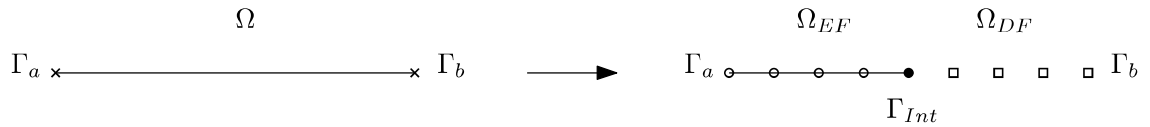


Figura 4.1: Conceito do acoplamento EDNI

Assumindo uma malha com N^{EF} nós no subdomínio do MEF e N^{DF} nós na sub-região do MDF (Fig. 4.1), seja φ_i^{EDNI} a solução aproximada para o i -ésimo nó da malha completa, isto é, considerando uma numeração única para todos os nós do problema. Definindo Int como o índice do nó de interface, a equação do i -ésimo nó, tal que $i < Int$, é dada pelo método dos elementos finitos, conforme a seção 3.2.2. Para o nó de índice j , tal que $j > Int$, a equação é dada pelo método das diferenças finitas, de acordo com a seção 3.1.1. Aplicando a Eq.(3.43) ao Int -ésimo nó resulta em

$$\sum_{j=0}^{Int} \left(\int_a^{x_{Int}} \frac{dN_{Int}}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^{EDNI} = \int_a^{x_{Int}} f N_{Int} dx + q(x_{Int}). \quad (4.3)$$

Note que o termo $q(x_{Int})$ refere-se à condição de contorno de Neumann à direita

do subdomínio do MEF. A fim de atender a Eq.(4.2b), $\varphi^{(1)}(x)$ pode ser aproximada pela Eq.(3.9), referente ao operador diferença centrada, ou pela Eq.(3.10), que emprega a técnica do nó virtual (*imaginary point* [1]).

Considerando a Eq.(3.9) no nó de interface e substituindo na Eq.(4.3) resulta em

$$\sum_{j=0}^{Int} \left(\int_a^{x_{Int}} \frac{dN_{Int}}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^{EDNI} + \frac{\varphi_{Int-1}^{EDNI} - \varphi_{Int+1}^{EDNI}}{2h} = \int_a^{x_{Int}} f N_{Int} dx, \quad (4.4)$$

com φ_{Int-1}^{EDNI} e φ_{Int+1}^{EDNI} pertencendo às sub-regiões do MEF e do MDF, respectivamente.

Alternativamente, substituindo a Eq.(3.10) aplicada ao nó da interface na Eq.(4.3) segue que

$$\sum_{j=0}^{Int} \left(\int_a^{x_{Int}} \frac{dN_{Int}}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^{EDNI} + \frac{\varphi_{Int}^{EDNI} - \varphi_{Int+1}^{EDNI}}{h} = \int_a^{x_{Int}} f N_{Int} dx + \frac{hf(x_{Int})}{2}. \quad (4.5)$$

Uma vez que existem duas opções de equação para o nó da interface, daqui em diante o acoplamento será chamado de EDNIC, caso a Eq.(4.4) seja empregada. Do contrário, o método chamar-se-á EDNI, se for usada a Eq.(4.5).

DENI

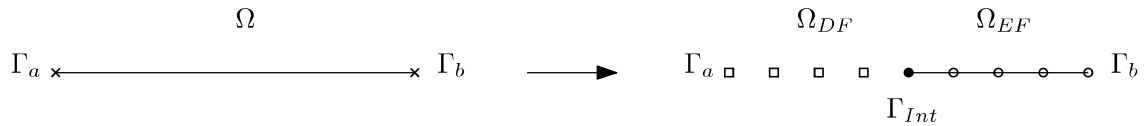


Figura 4.2: Conceito do acoplamento DENI

Analogamente ao que foi definido no item anterior, sejam os dois subdomínios MDF e MEF com N^{DF} e N^{EF} nós (Fig. 4.2), respectivamente, e seja φ_i^{DENI} a solução para o i -ésimo nó da malha completa. Assumindo novamente Int como o índice do nó de interface, a equação para o nó de índice i , tal que $i < Int$, é dada pelo MDF e para o j -ésimo nó, com $j > Int$, a equação é dada pelo MEF. Aplicando a Eq.(3.43) ao nó de interface resulta em

$$\sum_{j=Int}^{N^{EF}+Int-1} \left(\int_{x_{Int}}^b \frac{dN_{Int}}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^{DENI} = \int_{x_{Int}}^b f N_{Int} dx - q(x_{Int}). \quad (4.6)$$

Como observado anteriormente, o termo $q(x_{Int})$ refere-se à condição de contorno de Neumann, agora no lado esquerdo da malha de elementos finitos. Com o objetivo

de atender a Eq.(4.2b), a derivada primeira da função φ pode ser aproximada pela Eq.(3.9) ou Eq.(3.11).

Tomando a Eq.(3.9) no nó de interface e substituindo na Eq.(4.6) resulta em

$$\sum_{j=Int}^{N^{EF}+Int-1} \left(\int_{x_{Int}}^b \frac{dN_{Int}}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_j^{DENI} + \frac{\varphi_{Int+1}^{DENI} - \varphi_{Int-1}^{DENI}}{2h} = \int_{x_{Int}}^b f N_{Int} dx, \quad (4.7)$$

com φ_{Int+1}^{DENI} e φ_{Int-1}^{DENI} pertencendo às sub-regiões do MEF e do MDF, respectivamente.

Por outro lado, substituindo a Eq.(3.11) aplicada no nó de interface na Eq.(4.6) segue que

$$\sum_{j=Int}^{N^{EF}+Int-1} \left(\int_{x_{Int}}^b \frac{dN_{Int}}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \right) \varphi_{Int}^{DENI} + \frac{\varphi_{Int}^{DENI} - \varphi_{Int-1}^{DENI}}{h} = \int_{x_{Int}}^b f N_{Int} dx + \frac{hf(x_{Int})}{2}. \quad (4.8)$$

Como no item anterior, existem duas opções para definir a equação do nó de interface. Deste ponto em diante, DENIC estará associado ao emprego da Eq.(4.7), enquanto DENI corresponderá ao uso da Eq.(4.8) em x_{Int} .

4.1.2 Bidimensional

No caso de problemas com domínio bidimensional, as Eqs.(4.1a)-(4.1b) são mantidas. A Fig. 4.3 mostra uma discretização para um problema acoplado MEF/MDF. Naquela figura, ($\square$) identifica os nós associados ao MDF, ($\circ$) designa os pontos modelados pelo MEF e ($\bullet$) são os nós na interface entre os métodos.

Com as formulações dadas nas seções 3.1.2 e 3.2.3, todas as equações algébricas associadas aos nós do problema ficam definidas, a menos dos nós localizados em Γ_{Int} . A Eq.(4.1a) é atendida de pronto, assumindo um único grau de liberdade nos nós da interface. A estratégia adotada para atender a Eq.(4.1b), consiste em aplicar a formulação do MEF aos nós em Γ_{Int} , considerando nesta parte do contorno condições naturais, aproximando o valor de $q = \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{n}$ por um operador de diferenças finitas.

Exemplificando, seja a região da interface próxima ao elemento Ω_e , ilustrada na Fig. 4.4. Definindo $\Gamma_{Int,e}$ como o contorno do elemento finito Ω_e comum a Γ_{Int} , verifica-se que $\mathbf{n}_{\Gamma_{Int,e}} = (-1; 0)$. A fim de simplificar a notação usada, os nós na interface são identificados por seus índices (k, l) , como no MDF, de modo que a função de interpolação passa a ser $N_{k,l}$. Portanto, o termo da Eq.(3.49) associado

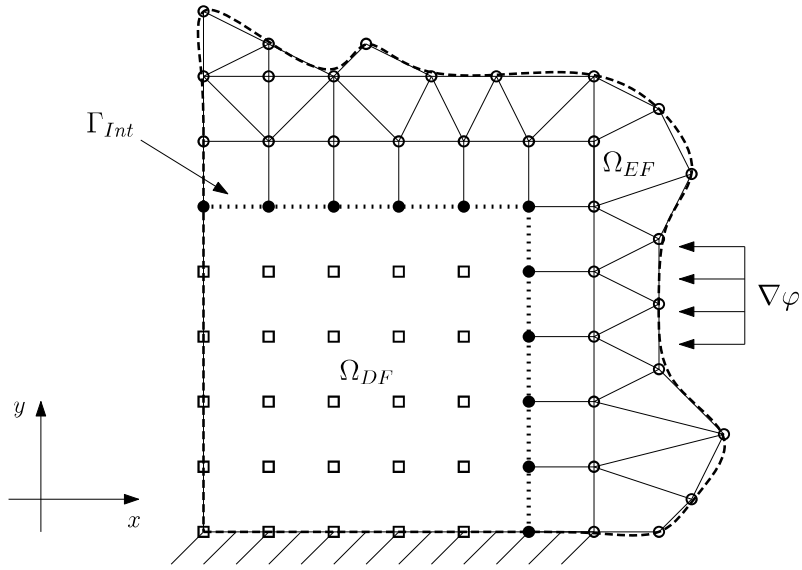


Figura 4.3: Discretização do problema acoplado

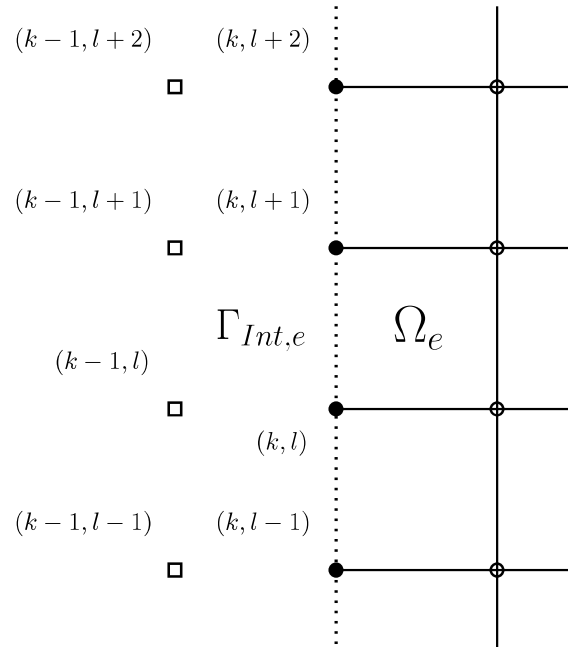


Figura 4.4: Interface de acoplamento à direita de \$\Omega_{DF}\$

ao contorno natural pode ser reescrito como

$$\int_{\Gamma_{Int,e}} q N_{k,l} d\Gamma = \int_{\Gamma_{Int,e}} -\frac{\partial \varphi^h}{\partial x} N_{k,l} d\Gamma. \quad (4.9)$$

Na Eq.(4.9), o termo $\partial \varphi^h / \partial x$ é uma aproximação de $\partial \varphi / \partial x$, por meio de uma interpolação linear entre seus valores estimados nos nós (k, l) e $(k, l + 1)$. Esta estimativa é obtida da manipulação da Eq.(3.17), resultando para o nó (k, l)

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k,l-1}^h - 2\varphi_{k-1,l}^h + 4\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k,l+1}^h}{2h} + \frac{hf_{k,l}}{2}, \quad (4.10)$$

e para o nó $(k, l + 1)$

$$\frac{\partial \varphi_{k,l+1}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k,l}^h - 2\varphi_{k-1,l+1}^h + 4\varphi_{k,l+1}^h - \varphi_{k,l+2}^h}{2h} + \frac{hf_{k,l+1}}{2}. \quad (4.11)$$

Com as aproximações definidas nas Eqs.(4.10)-(4.11), reescreve-se o termo dado na Eq.(4.9) a seguir

$$\int_{\Gamma_{Int,e}} -\frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x} N_{k,l} N_{k,l} - \frac{\partial \varphi_{k,l+1}^h}{\partial x} N_{k,l+1} N_{k,l} d\Gamma. \quad (4.12)$$

Portanto

$$\int_{\Gamma_{Int,e}} q N_{k,l} d\Gamma = -\frac{h}{3} \frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x} - \frac{h}{6} \frac{\partial \varphi_{k,l+1}^h}{\partial x}, \quad (4.13)$$

para um nó (k, l) genérico na face direita do *grid* do subdomínio associado ao MDF. Note que na Eq.(4.13) são definidos os coeficientes dos nós do MDF que contribuem para a matriz do problema (vide Eqs.(4.10)-(4.11)). Uma vez que esses coeficientes são inseridos na formulação do MEF (Eq.(3.49)), fica assegurado o acoplamento dos métodos numéricos.

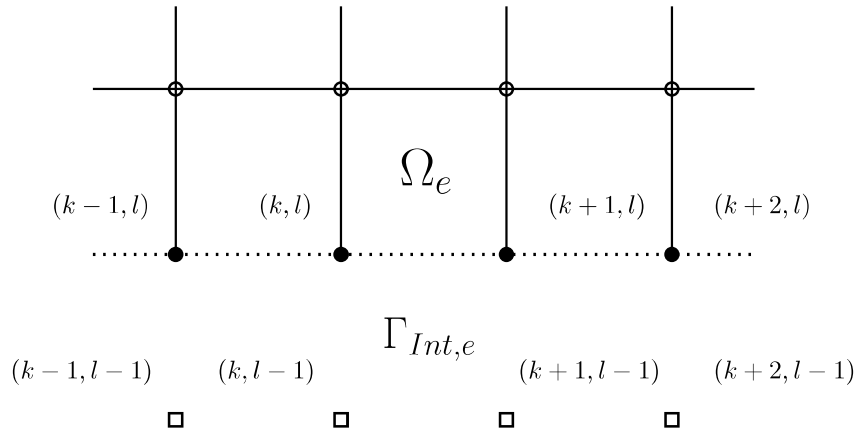


Figura 4.5: Interface de acoplamento acima de Ω_{DF}

Analogamente ao que foi feito para a interface ilustrada na Fig. 4.4, pode-se fazer o mesmo procedimento para se obter as equações nos nós da interface superior (Fig. 4.5, Eqs.(4.14)-(4.15)), esquerda (Fig. 4.6, Eqs.(4.16)-(4.17)) e inferior (Fig. 4.7, Eqs.(4.18)-(4.19)) do subdomínio de diferenças finitas. As figuras e equações citados são apresentados abaixo.

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k-1,l}^h - 2\varphi_{k,l-1}^h + 4\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k+1,l}^h}{2h} + \frac{hf_{k,l}}{2}. \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k+1,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k,l}^h - 2\varphi_{k+1,l-1}^h + 4\varphi_{k+1,l}^h - \varphi_{k+2,l}^h}{2h} + \frac{hf_{k+1,l}}{2}. \quad (4.15)$$

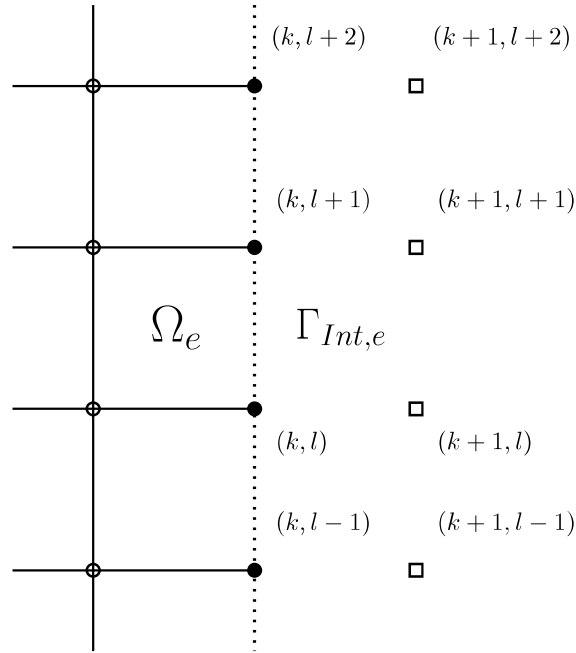


Figura 4.6: Interface de acoplamento à esquerda de Ω_{DF}

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k,l-1}^h - 2\varphi_{k+1,l}^h + 4\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k,l+1}^h}{2h} + \frac{hf_{k,l}}{2}. \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k,l+1}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k,l}^h - 2\varphi_{k+1,l+1}^h + 4\varphi_{k,l+1}^h - \varphi_{k,l+2}^h}{2h} + \frac{hf_{k,l+1}}{2}. \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k-1,l}^h - 2\varphi_{k,l+1}^h + 4\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k+1,l}^h}{2h} + \frac{hf_{k,l}}{2}. \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k+1,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k,l}^h - 2\varphi_{k+1,l+1}^h + 4\varphi_{k+1,l}^h - \varphi_{k+2,l}^h}{2h} + \frac{hf_{k+1,l}}{2}. \quad (4.19)$$

Desta forma, todos os nós tem suas equações definidas, a menos dos casos especiais apresentados a seguir.

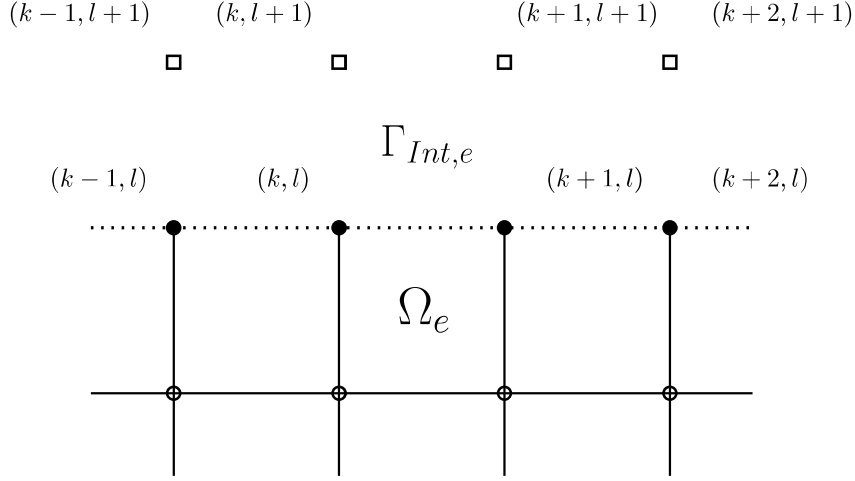


Figura 4.7: Interface de acoplamento abaixo de Ω_{DF}

Casos especiais

Seja um nó (k, l) pertencente ao contorno Γ do problema e à interface Γ_{Int} entre os subdomínios do MEF e do MDF, conforme indica a Fig. 4.8. Para este nó, a aproximação de $\partial\varphi^h/\partial x$ não poderá ser feita como nas Eqs.(4.10)-(4.11), em razão de não existir o nó $(k, l+1)$.

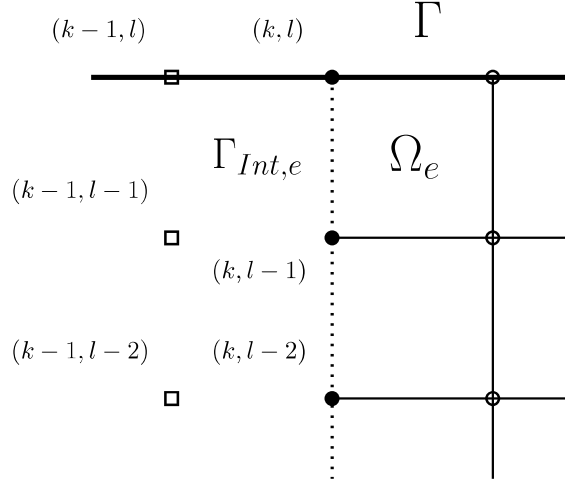


Figura 4.8: Detalhe do acoplamento - nó (k, l) pertencendo a Γ_{Int} e Γ

Caso a condição de contorno seja essencial, a aproximação será baseada no operador de diferença centrada, dado pela Eq.(3.9), i.e.,

$$\frac{\partial\varphi_{k,l}^h}{\partial x} = \frac{\varphi_{k+1,l}^h - \varphi_{k-1,l}^h}{2h}. \quad (4.20)$$

Por outro lado, se a condição de contorno for natural, a aproximação adotada será obtida via manipulação da Eq.(3.21), o que resulta em

$$\frac{\partial\varphi_{k,l}^h}{\partial x} = \frac{-\varphi_{k-1,l}^h + 2\varphi_{k,l}^h - \varphi_{k+1,l}^h}{h} - \frac{hf_{k,l}}{2} - \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y} \quad (4.21)$$

As aproximações de $\partial\varphi_{k,l}^h/\partial x$ ou $\partial\varphi_{k,l}^h/\partial y$ em outras condições, semelhantes à apresentada na Fig. 4.8, também podem ser obtidas de forma análoga a aqui apresentada.

4.2 Iterativo

A ideia básica do acoplamento iterativo consiste na resolução independente de cada subdomínio modelado, prescrevendo condições de contorno na interface de modo alternado até que um critério de convergência seja atendido.

Em TOSELLI e WIDLUND [24], são apresentadas algumas formulações de métodos de acoplamento iterativo, como o algoritmo de Dirichlet-Neumann, Neumann-Neumann, Dirichlet-Dirichlet, dentre outros. O método de Dirichlet-Dirichlet consiste em arbitrar um valor para condição natural em Γ_{Int} e resolver os dois subdomínios de maneira independente. Após esta etapa, toma-se a diferença do traço na interface entre os métodos e resolve-se os subdomínios para condição essencial em Γ_{Int} . Por fim, uma combinação linear das derivadas normais na interface, obtidas em cada subdomínio na última etapa, é comparada com o valor arbitrado inicialmente. O método de Neumann-Neumann é análogo ao anterior, a diferença sendo que o valor inicialmente arbitrado é para a condição de contorno essencial. Destaca-se o fato de que é necessário resolver quatro sistemas de equações para possibilitar a primeira avaliação de convergência nos métodos citados previamente.

Uma abordagem alternativa é o método Neumann-Dirichlet, por exemplo, no qual prescreve-se a derivada normal em Γ_{Int} num subdomínio e, após resolvê-lo, emprega-se o valor do traço encontrado como condição essencial no outro subdomínio. Ao final, compara-se o valor arbitrado para derivada normal em Γ_{Int} com uma ponderação do valor calculado na resolução do segundo subdomínio. Portanto, uma iteração completa consiste na resolução de dois sistemas de equações.

Em razão de sua maior simplicidade de implementação e diversidade de aplicações na literatura [8, 15, 35, 36], o algoritmo de Neumann-Dirichlet é escolhido para realizar o acoplamento iterativo neste trabalho.

4.2.1 Unidimensional

No caso de um problema unidimensional, destaca-se que a iteração deve ter início no subdomínio que contenha condição de contorno de Dirichlet. Este requisito é intrínseco ao algoritmo Neumann-Dirichlet, uma vez que a condição de contorno imposta em x_{Int} é do tipo natural.

Similarmente ao apresentado na seção 4.1.1, em relação ao nó de interface, existem duas possibilidades para o posicionamento das sub-regiões do MDF e do MEF. A

primeira opção considerada é o acoplamento iterativo MEF/MDF (EDI) e a segunda é o acoplamento iterativo MDF/MEF (DEI).

Objetivando ilustrar o conceito do método, será considerado um problema Dirichlet-Neumann, i.e., com condições de contorno essenciais à esquerda (Γ_D) e naturais à direita (Γ_N), sendo os demais arranjos de condição de contorno resolvidos de maneira análoga.

EDI

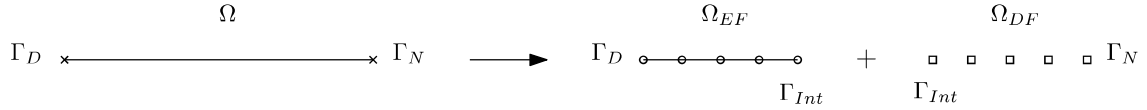


Figura 4.9: Conceito do acoplamento EDI

Definindo uma malha com N^{EF} nós no subdomínio do MEF e N^{DF} nós na sub-região do MDF (Fig. 4.9), seja φ_i^{EDI} a solução aproximada para o i -ésimo nó da malha completa, isto é, considerando uma numeração única para todos os nós do problema.

Inicialmente, o problema na região dos elementos finitos é resolvido, arbitrando um valor para $\varphi^{(1)}(x_{Int})$, daqui por diante nomeada como ${}^k D\varphi_{Int}^{EF}$, sendo k referente à k -ésima iteração e EF o índice associado ao subdomínio do MEF. O traço na interface é identificado por ${}^k \varphi_{Int}^{EF}$. Desta forma, a Eq.(4.2a) é atendida diretamente, fazendo

$${}^k \varphi_{Int}^{DF} = {}^k \varphi_{Int}^{EF}. \quad (4.22)$$

Posteriormente, o problema no subdomínio do MDF é resolvido, impondo a Eq.(4.22) como condição de contorno de Dirichlet em x_{Int} . Sendo assim, a solução via diferenças finitas pode ser usada para estimar a derivada primeira ${}^k D\varphi_{Int}^{DF}$ na interface dos subdomínios usando a Eq.(3.10)

$${}^k D\varphi_{Int}^{DF} = \frac{\varphi_{Int+1}^{DF} - \varphi_{Int}^{DF}}{h} + \frac{hf(x_{Int})}{2}. \quad (4.23)$$

Assumindo uma tolerância tol , o critério de convergência é dado por

$$\frac{\|{}^k D\varphi_{Int}^{DF} - {}^k D\varphi_{Int}^{EF}\|}{\|{}^k D\varphi_{Int}^{DF}\|} < tol. \quad (4.24)$$

Caso a inequação anterior não seja atendida, o laço é reiniciado, atualizando a derivada primeira como condição de contorno para o problema associado ao MEF por

$${}^{k+1} D\varphi_{Int}^{EF} = {}^k D\varphi_{Int}^{DF}. \quad (4.25)$$

Alcançada a convergência na k -ésima iteração, a solução numérica φ^{EDI} fica então definida por

$$\varphi^{EDI} = \left\{ \begin{array}{c} {}^k\varphi_0^{EF} \\ {}^k\varphi_1^{EF} \\ \vdots \\ {}^k\varphi_{Int-1}^{EF} \\ {}^k\varphi_{Int}^{EF} = {}^k\varphi_{Int}^{DF} \\ {}^k\varphi_{Int+1}^{DF} \\ \vdots \\ {}^k\varphi_{N^{EF}+N^{DF}-2}^{DF} \\ {}^k\varphi_{N^{EF}+N^{DF}-1}^{DF} \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

DEI

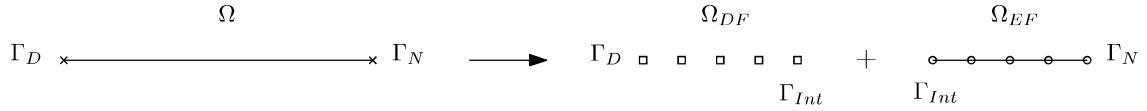


Figura 4.10: Conceito do acoplamento DEI

Similarmente ao que foi definido no item anterior, sejam os dois subdomínios MDF e MEF com N^{DF} e N^{EF} nós (Fig. 4.10), respectivamente, e seja φ_i^{DEI} a solução para o i -ésimo nó da malha completa.

Como primeiro passo, o problema na região das diferenças finitas é resolvido, arbitrando um valor para $\varphi^{(1)}(x_{Int})$, deste ponto em diante nomeada como ${}^kD\varphi_{Int}^{DF}$, sendo k referente à k -ésima iteração e DF o índice associado ao subdomínio do MDF. O traço na interface é identificado por ${}^k\varphi_{Int}^{DF}$. Sendo assim, a Eq.(4.2a) é atendida diretamente, fazendo

$${}^k\varphi_{Int}^{EF} = {}^k\varphi_{Int}^{DF}. \quad (4.27)$$

Subsequentemente, o problema no subdomínio do MEF é resolvido, impondo a Eq.(4.27) como condição de contorno essencial em x_{Int} . Sendo assim, a solução via elementos finitos pode ser usada para estimar a derivada primeira ${}^kD\varphi_{Int}^{EF}$ na interface dos subdomínios como sendo

$${}^kD\varphi_{Int}^{EF} = \frac{\varphi_{Int+1}^{EF} - \varphi_{Int}^{EF}}{h}. \quad (4.28)$$

Analogamente ao descrito no item anterior, o critério de convergência é dado por

$$\frac{\|{}^kD\varphi_{Int}^{EF} - {}^kD\varphi_{Int}^{DF}\|}{\|{}^kD\varphi_{Int}^{EF}\|} < tol. \quad (4.29)$$

Caso o critério não seja atendido, o laço é reiniciado, atualizando a derivada primeira como condição de contorno para o problema associado ao MDF por

$${}^{k+1}D\varphi_{Int}^{DF} = {}^kD\varphi_{Int}^{EF}. \quad (4.30)$$

Atendendo a tolerância tol na k -ésima iteração, a solução numérica φ^{DEI} fica então definida por

$$\varphi^{DEI} = \left\{ \begin{array}{c} {}^k\varphi_0^{DF} \\ {}^k\varphi_1^{DF} \\ \vdots \\ {}^k\varphi_{Int-1}^{DF} \\ {}^k\varphi_{Int}^{DF} = {}^k\varphi_{Int}^{EF} \\ {}^k\varphi_{Int+1}^{EF} \\ \vdots \\ {}^k\varphi_{N^{EF}+N^{DF}-2}^{EF} \\ {}^k\varphi_{N^{EF}+N^{DF}-1}^{EF} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

4.2.2 Bidimensional - Comentário

Conforme resultados apresentados no capítulo 6, é necessário um mínimo de duas iterações para atingir a convergência do algoritmo Neumann-Dirichlet para o problema 1D proposto. Ainda como apontado naquele capítulo, considerando problemas não lineares, nos quais há a necessidade de recalcular as matrizes do problema, o tempo para solução dos sistemas seria, aproximadamente, o dobro daquele do método não iterativo.

Além disso, considerando as aplicações futuras do acoplamento MEF/MDF, nas quais o objetivo é empregar o método das diferenças finitas na maior porção possível do domínio, podem surgir algumas complicações no método iterativo de acoplamento. Uma vez que naquele método os subdomínios são resolvidos separadamente, o problema associado ao MEF poderá apresentar vazios, exigindo um refinamento elevado da malha nas regiões próximas aos cantos do *grid* de diferenças finitas. Este tema será mencionado novamente no capítulo 7.

Adicionalmente, considerando as estruturas semelhantes das matrizes do MEF e do MDF, o processo de formação da matriz global do sistema é menos custoso do que de algumas alternativas, como ocorre no caso do acoplamento direto MEF/MEC, onde é necessário inverter matrizes.

Portanto, com base no exposto, o acoplamento iterativo bidimensional não será abordado.

Capítulo 5

Implementação Computacional

O presente capítulo apresenta, sucintamente, as etapas necessárias para realizar os acoplamentos direto e iterativo MEF/MDF, em 1D, e o acoplamento direto MEF/MDF em 2D. Os códigos foram desenvolvidos em linguagem C++ [37]. O fato de a linguagem escolhida ser orientada a objetos facilitou o desenvolvimento dos algoritmos e a transição do problema unidimensional para o bidimensional. A visualização dos resultados obtidos foi feita a partir de códigos implementados em GNU Octave [38], em função da sua facilidade de manipulação dos dados.

5.1 Problemas Unidimensionais

O diagrama exposto na Fig. 5.1 apresenta as principais fases do código implementado para problemas unidimensionais: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

A fase de pré-processamento consiste das etapas de leitura de dados e do mapeamento dos subdomínios. Na primeira etapa, a discretização do problema, as condições de contorno, o termo de fonte f e as equações usadas para acoplar os métodos são lidos pelo programa. Na etapa de mapeamento, cria-se uma rotulação para os nós, identificando-os como modelados pelo MEF ou pelo MDF. Estas etapas são comuns aos dois tipos de acoplamento, direto e iterativo.

As rotinas associadas aos métodos aproximados, elaboradas na fase de processamento, são baseadas nas formulações desenvolvidas nos capítulos 3 e 4. O *solver* de sistema de equações utilizado para os problemas unidimensionais baseia-se numa simples adaptação do Método de Eliminação de Gauss, operando apenas os coeficientes não nulos da matriz do problema.

Na fase de pós-processamento, a norma de Lebesgue e a seminorma de $H^1(\Omega)$ são calculadas com base nos resultados obtidos. As plotagens dos resultados são feitas em algoritmo desenvolvido no GNU Octave.

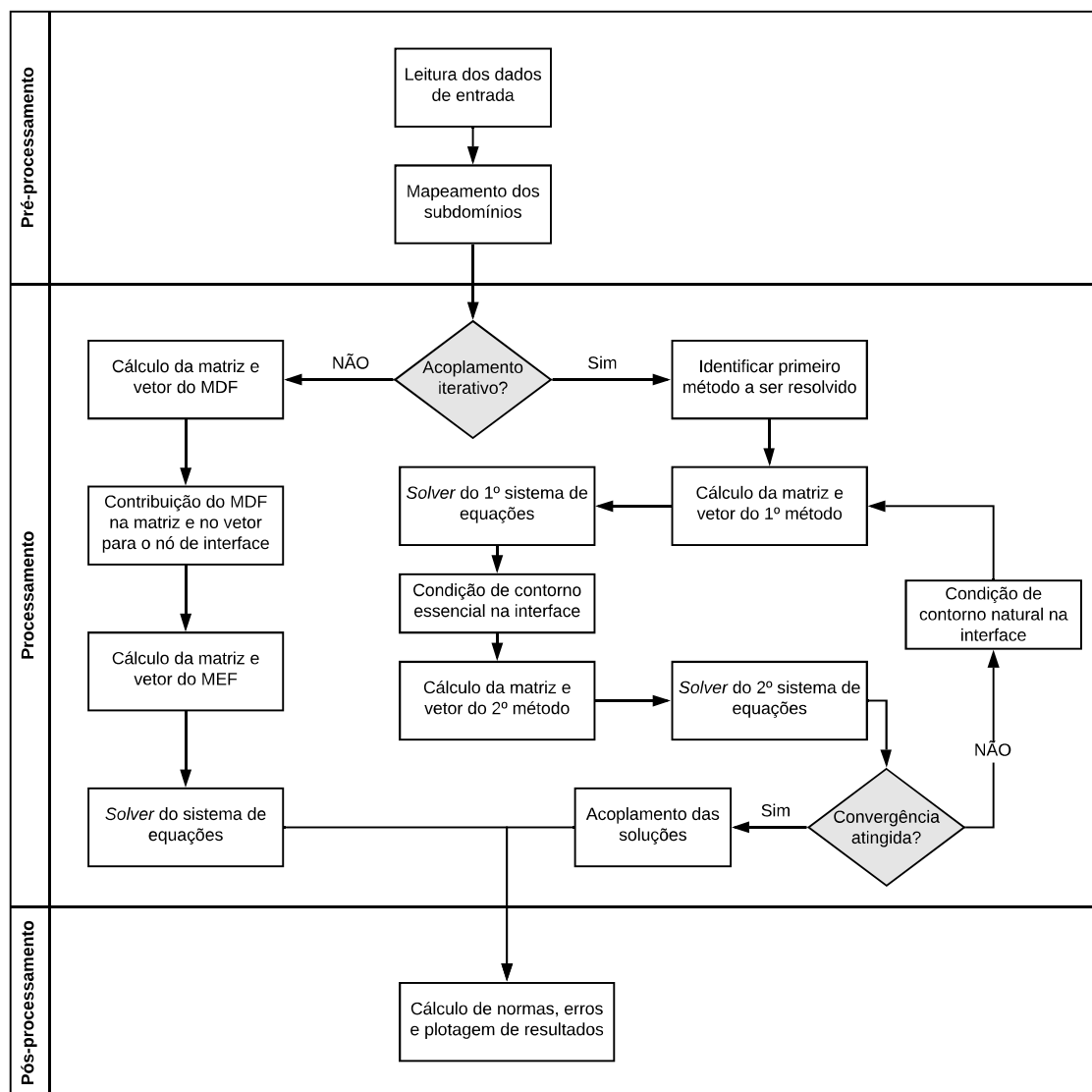


Figura 5.1: Diagrama de processamento do código - Problemas Unidimensionais

5.2 Problemas Bidimensionais

Analogamente ao esquema apresentado na seção anterior, a Fig. 5.2 apresenta o diagrama com as fases do código implementado para problemas bidimensionais.

As diferenças entre as fases de processamento deste algoritmo em relação a versão unidimensional são a ausência da implementação do acoplamento iterativo e dos cálculos dos erros e normas citados previamente. As demais etapas funcionam de modo similar ao código esquematizado na Fig. 5.1. Para solução dos sistemas de equações, empregou-se a rotina `dgssv()` do *software* SuperLU [39], um pacote de bibliotecas para solução de sistemas de equações lineares esparsas, típicas de métodos como o MDF e o MEF.

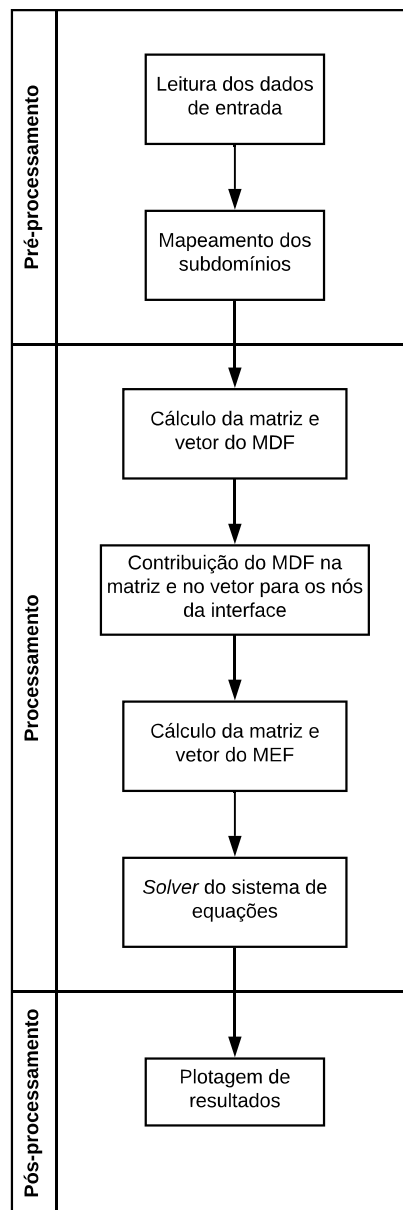


Figura 5.2: Diagrama de processamento do código - Problemas Bidimensionais

Capítulo 6

Experimentos Numéricos

Os experimentos numéricos apresentados a seguir objetivam validar os códigos desenvolvidos e viabilizar análises de precisão e eficiência do método de acoplamento direto.

O primeiro experimento, unidimensional, é feito de modo a possibilitar estudos de taxa de convergência, tempo de processamento para solução dos sistemas de equações e avaliação do número de iterações necessárias para convergência do método iterativo. Também é feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo acoplamento direto via operador diferença centrada, Eq. (4.4) e Eq. (4.7), e pela técnica do nó virtual, Eq.(4.5) e Eq.(4.8).

O segundo experimento foca em dois problemas bidimensionais, com o objetivo de validar o código desenvolvido, por meio de uma comparação direta entre os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e pelo acoplamento MEF/MDF. Neste experimento, também são comparados os tempos de montagem das matrizes associadas ao MEF, aplicado em todo domínio, e da matriz relativa ao acoplamento direto. No primeiro problema, metade do domínio é discretizado em elementos finitos, sendo a outra metade um *grid* de diferenças finitas. O segundo problema emprega uma decomposição do domínio mais eficiente, usando o MDF em 81% da região do problema, sendo o MEF aplicado nas bordas do domínio. Uma análise da redução do tempo de montagem da matriz do problema também é feita, avaliando diferentes proporções de área entre os subdomínios do MEF e do MDF.

Todos os experimentos realizados possuem solução analítica, sendo estas apresentadas nos seus respectivos tópicos.

6.1 Exemplo Unidimensional

Nesta seção, o experimento numérico permite avaliar a acurácia e eficiência computacional dos métodos de acoplamento DENI e EDNI, conforme apresentados no capítulo 4.

O problema em questão foi resolvido usando malhas regulares. O domínio foi uniformemente discretizado em 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 partições. Para os métodos acoplados, o domínio foi dividido ao meio, sendo a largura da malha de elementos finitos a mesma do espaçamento do *grid* de diferenças finitas. Foram empregados elementos finitos isoparamétricos lineares. A tolerância adotada como critério de convergência dos métodos de acoplamento iterativo foi de $tol = 10^{-4}$.

O método de solução do sistema de equações lineares utilizado baseia-se na Eliminação de Gauss. O *solver* opera apenas os coeficientes não nulos das matrizes, i.e., apenas as operações necessárias são efetuadas, permitindo uma comparação direta entre o tempo gasto nas resoluções de sistemas de equações entre os métodos iterativo e direto.

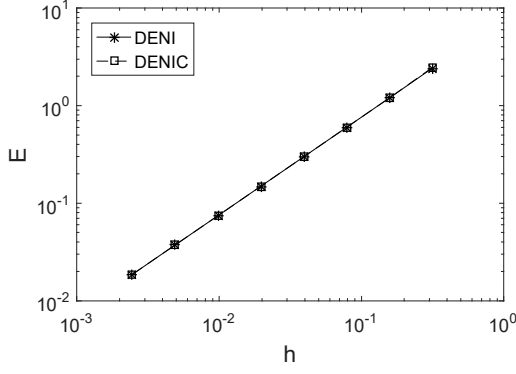
A primeira análise consiste em verificar qual equação de acoplamento retorna a melhor solução para os métodos diretos. Com esta finalidade, os erros na seminorma de $H^1(\Omega)$ e na norma de $L^2(\Omega)$ [31] são avaliados para EDNI, EDNIC, DENI e DENIC. Posteriormente, avalia-se a acurácia do MDF, MEF, EDNI, EDI, DENI e DEI. O desempenho do método de acoplamento iterativo é avaliado em relação ao número de iterações necessárias para convergência vs. erro na norma de $L^2(\Omega)$. Com a finalidade de avaliar a eficiência computacional dos métodos, uma tabela é apresentada com tempo de execução adimensional para resolver os sistemas de equações necessários.

O problema em estudo é modelado por

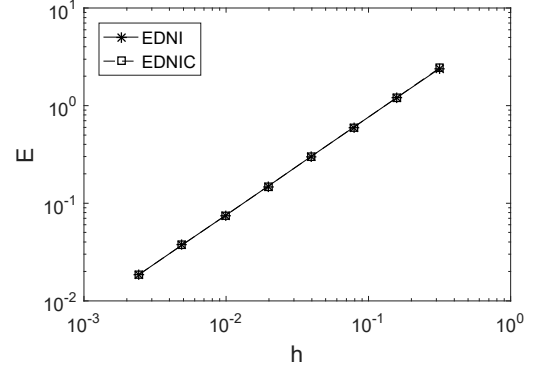
$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi^{(2)}(x) = f(x) \\ \varphi^{(1)}(0) = -1; \varphi(2\pi) = 0 \\ f(x) = -4[\sin(2\pi) + \cos(2\pi)(x - 2\pi)] \end{array} \right., \text{ para } 0 < x < 2\pi, \quad (6.1)$$

com a solução analítica dada por

$$\varphi_{ana,0}(x) = \cos(2x)(2\pi - x). \quad (6.2)$$

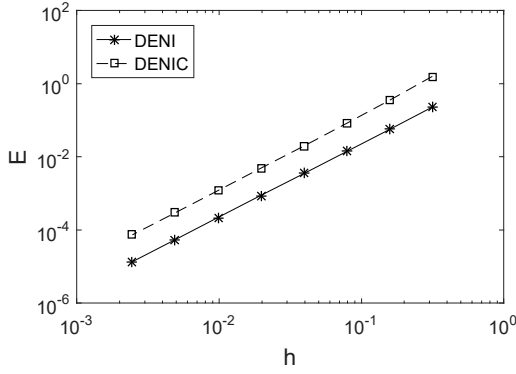


(a)

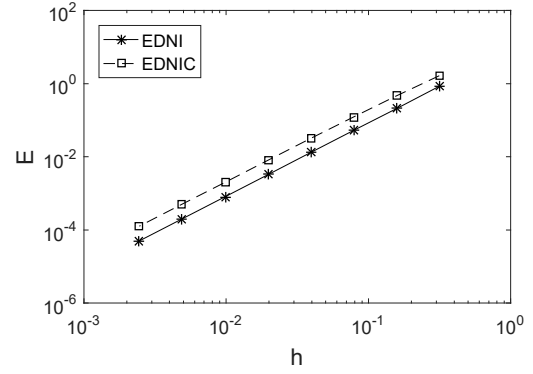


(b)

Figura 6.1: Avaliação da equação de acoplamento direto - $E = |\varphi - \varphi^h|_{H^1}$ vs. h



(a)

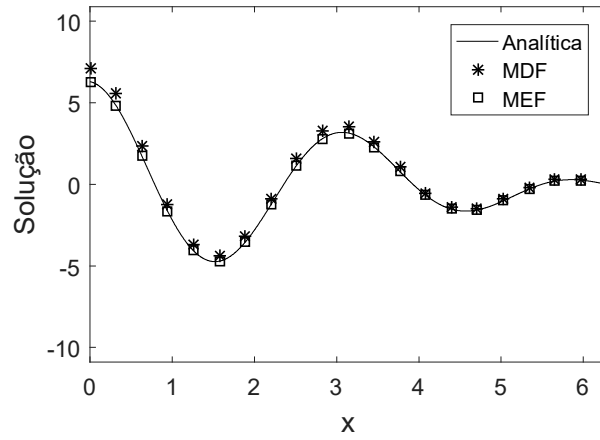


(b)

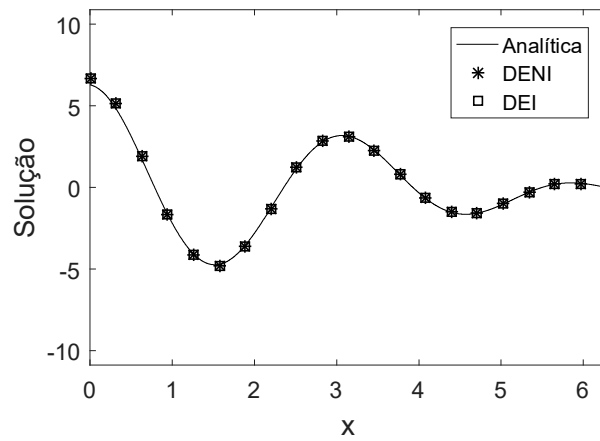
Figura 6.2: Avaliação da equação de acoplamento direto - $E = |\varphi - \varphi^h|_{L^2}$ vs. h

Com base na Fig. 6.1, pode-se inferir que o erro na seminorma de $H^1(\Omega)$ é equivalente para todos os métodos, indicando que possuem a mesma acurácia quanto a esta seminorma. Por outro lado, na Fig. 6.2a o método DENI apresentou uma acurácia de aproximadamente cinco vezes melhor que aquela de DENIC, em relação à norma de Lebesgue. Na Fig. 6.2b observa-se que o método EDNI demonstrou uma precisão na norma de $L^2(\Omega)$ próxima de duas vezes e meia maior que aquela de EDNIC. Destaca-se que os quatro métodos possuem a mesma taxa de convergência naquela norma. Desta forma, uma vez que a acurácia de DENI e EDNI foram as melhores, apenas estes métodos serão considerados nos experimentos subsequentes.

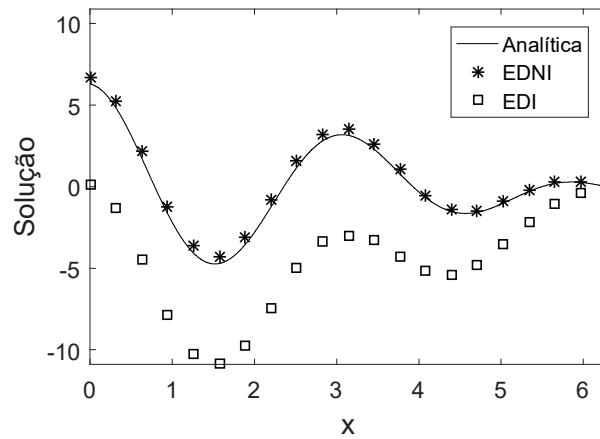
A mérito de ilustração, os resultados para 20 partições são apresentado na Fig. 6.3.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.3: Soluções numéricas para 20 partições do domínio

A Fig. 6.4 indica os erros na seminorma de $H^1(\Omega)$ e a Fig. 6.5 apresenta os erros na norma de $L^2(\Omega)$.

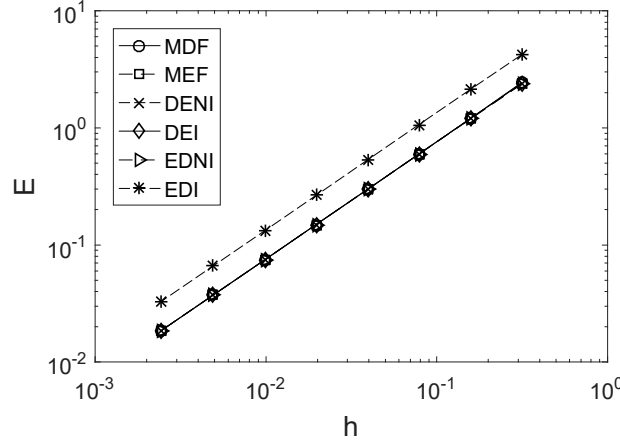
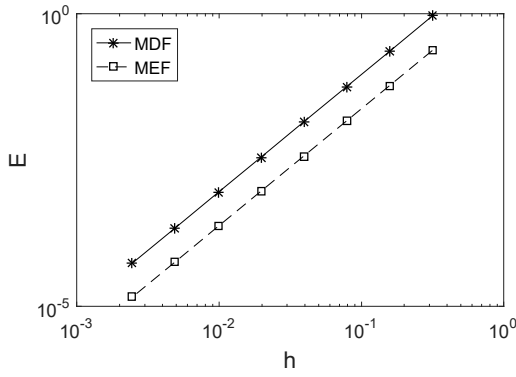
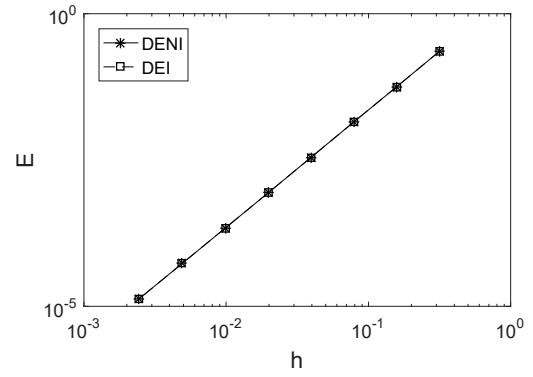


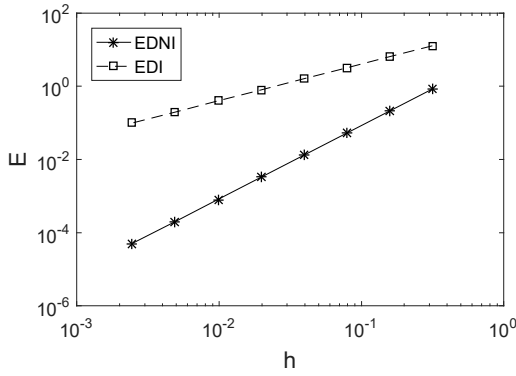
Figura 6.4: Acurácia das soluções numéricas - $E = |\varphi - \varphi^h|_{H^1}$ vs. h



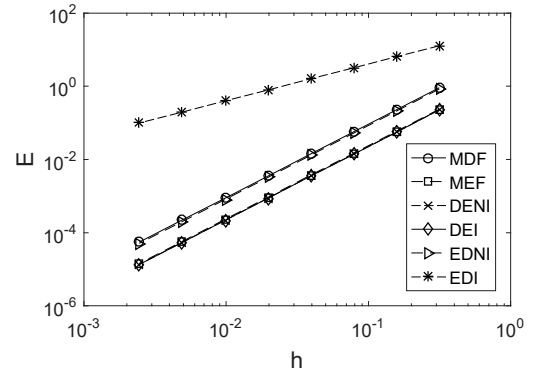
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.5: Acurácia das soluções numéricas - $E = |\varphi - \varphi^h|_{L^2}$ vs. h

A partir da Fig. 6.4 pode-se concluir que o método EDI é o menos acurado, apresentando um erro aproximadamente duas vezes maior que os outros métodos, apesar de possuir a mesma taxa de convergência. Todas as outras soluções apresentam a mesma acurácia e taxa de convergência.

Na Fig. 6.5 é indicado que a alternativa menos acurada, em termos da norma de $L^2(\Omega)$, é o acoplamento EDI, que apresenta uma taxa de convergência próxima da unidade. Destaca-se que os acoplamentos diretos EDNI e DENI e o iterativo DEI obtiveram melhor resultado que o MDF. Ainda considerando a norma de Lebesgue, o MEF, DENI e DEI tiveram resultados equivalentes. A menos do acoplamento EDI, todos os demais apresentaram a mesma taxa de convergência, próxima de dois.

Com o objetivo de avaliar a relação entre a acurácia da solução e o número de iterações computadas, é ilustrado na Fig. 6.6 os erros na norma de $L^2(\Omega)$ correspondente à solução obtida de cada iteração dos acoplamentos DEI e EDI. Aquela figura indica que a solução ótima é alcançada com duas iterações, i.e., não há melhoria da qualidade da solução aproximada efetuando-se mais iterações.

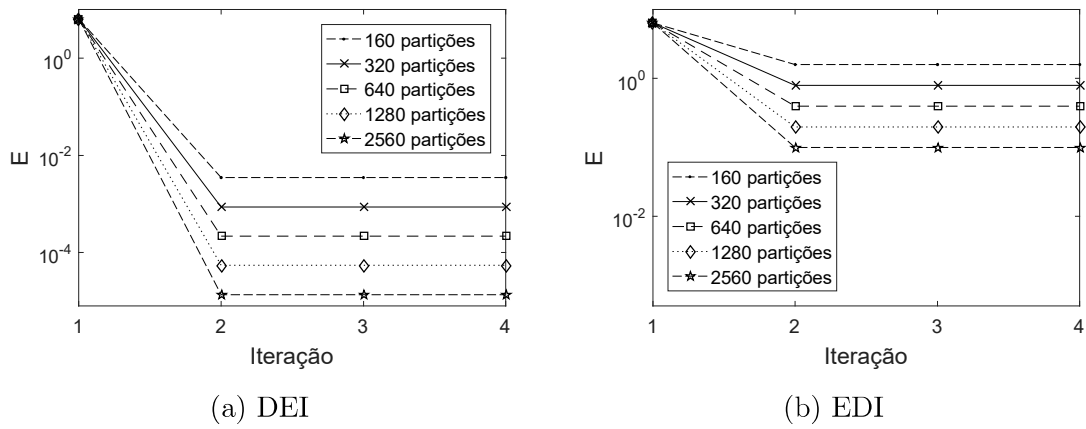


Figura 6.6: Limitação de acurácia - $E = |\varphi - \varphi^h|_{L^2}$ vs. Iteração

Tabela 6.1: Tempo adimensional para solução dos sistemas de equações

h	t^{DEI} / t^{DENI}	t^{EDI} / t^{EDNI}
0.314159	1.868	1.975
0.157080	2.001	1.734
0.078540	2.016	1.925
0.039270	1.977	1.915
0.019635	1.918	1.986
0.009817	1.916	1.762
0.004909	1.720	1.719
0.002454	1.970	1.943

A tabela anterior é apresentada a fim de avaliar a performance computacional dos métodos de acoplamento, sob o aspecto do tempo despendido para resolução dos sistemas de equações lineares. Os tempos adimensionais são calculados dividindo-se o tempo gasto pelo método de acoplamento iterativo e o tempo requerido pelo seu correspondente no acoplamento direto.

Na Tabela 6.1, t^{DEI} e t^{DENI} são os tempos despendidos pelos acoplamentos DEI e DENI, respectivamente, para solucionar os sistemas de equações relacionados a cada método. Analogamente, t^{EDI} e t^{EDNI} são os tempos descritos anteriormente, associados aos métodos EDI e EDNI. Daquela tabela, pode-se inferir que os métodos iterativos demandam aproximadamente o dobro do tempo requerido pelos métodos diretos para resolver as equações algébricas, considerando a implementação desenvolvida neste trabalho.

Note que, uma vez que o problema aqui tratado é linear, poder-se-ia dispensar uma nova resolução das matrizes dos subdomínios no acoplamento iterativo, empregando, por exemplo, a decomposição LU. Contudo, caso o problema fosse não linear, haveria a necessidade de recalculas as matrizes do problema, sendo esta a razão pela qual foram computados os tempos de solução dos sistemas de equação em todas as iterações. Desta forma, o acoplamento direto proposto apresenta um bom potencial de aplicação a problemas não lineares.

6.2 Exemplos Bidimensionais

Os exemplos a seguir objetivam verificar a validade do código desenvolvido, bem como evidenciar o ganho de tempo proporcionado pelo acoplamento direto em relação a aplicação exclusiva do MEF, sob o aspecto do tempo de montagem das matrizes dos sistemas de equações.

Os problemas foram resolvidos usando malhas regulares. Nos dois primeiros exemplos, o domínio foi uniformemente discretizado, com 20, 40 e 60 partições para cada lado da região quadrada $(0;1) \times (0;1)$. No primeiro exemplo, o domínio é dividido em duas partes iguais, aplicando o MEF e o MDF em cada uma. Já o segundo exemplo consiste em empregar o MDF em 81% da região do problema (18×18 , 36×36 e 54×54 elementos), enquanto o MEF é aplicado a uma faixa com 1, 2 e 3 elementos de largura, respectivamente para cada malha empregada, contornando a região definida pelo MDF. Esses exemplos ilustram a validade da implementação computacional.

O terceiro exemplo estuda a relação entre o uso de diferenças finitas na malha acoplada e a redução do tempo de montagem da matriz. A avaliação é feita para uma malha exclusivamente composta por elementos finitos, outra só para diferenças finitas e cinco malhas acoplando o MEF e o MDF, com a região de diferenças finitas sendo 20%, 35%, 50%, 65% e 80% da área total do problema.

6.2.1 Exemplo 1

Conforme comentado, o domínio usado neste primeiro exemplo é $\Omega = (0; 1) \times (0; 1)$. Um esquema ilustrando uma malha com 6×6 partições e a distribuição de métodos e seus subdomínios é apresentado na Fig. 6.7. As malhas efetivamente usadas na modelagem consistem em 20×20 , 40×40 e 60×60 partições.

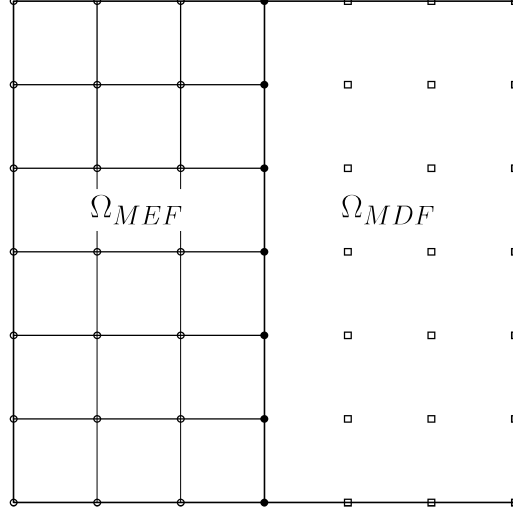


Figura 6.7: Exemplo 1 - bidimensional - esquema de subdomínios

O enunciado do problema é dado por

$$-\nabla^2 \varphi = f, \quad (6.3a)$$

$$\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad (6.3b)$$

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y), \quad (6.3c)$$

sendo as funções auxiliares $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ dadas por

$$f_1(x, y) = 16y^2(y-1)^2 \left(1024x^2 - 1024x + \frac{640}{3} \right), \quad (6.4)$$

$$f_2(x, y) = \frac{64x(x-1)(2x-1)^2(192y^2 - 192y + 32)}{3}. \quad (6.5)$$

A solução analítica do problema em questão é

$$\varphi_{ana,1}(x, y) = (16y^4 - 32y^3 + 16y^2) \left(\frac{-256x^4 + 512x^3 - 320x^2 + 64x}{3} \right). \quad (6.6)$$

A função $\varphi_{ana,1}$ é representada na Fig. 6.8. A fim de apresentar as soluções obtidas pelo acoplamento MEF/MDF e pelo MEF, tomam-se os resultados nas seções $x = 0,25$, $x = 0,75$ e $y = 0,50$, indicados nas Fig. 6.9, Fig. 6.10 e Fig. 6.11,

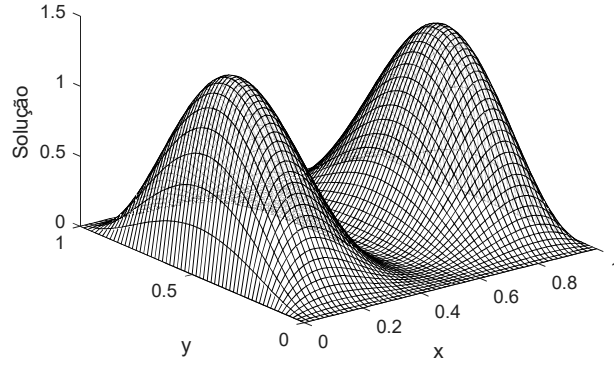
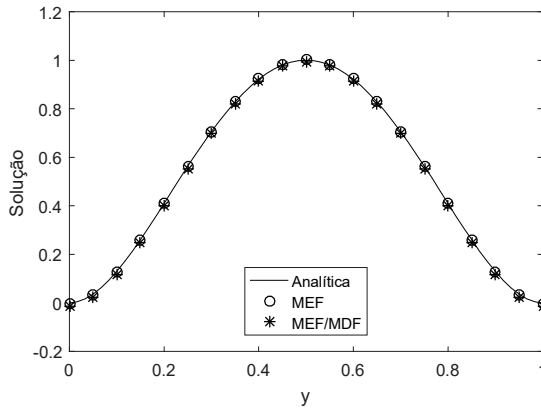
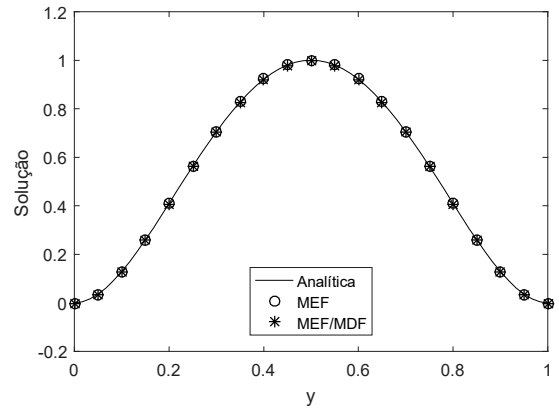


Figura 6.8: Solução analítica $\varphi_{ana,1}$

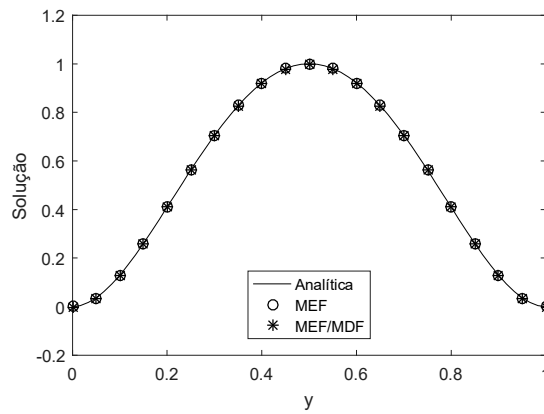
respectivamente. Nota-se que a qualidade da resposta do acoplamento MEF/MDF é equiparável a do MEF, ambas próximas da solução analítica.



(a) Malha 20×20

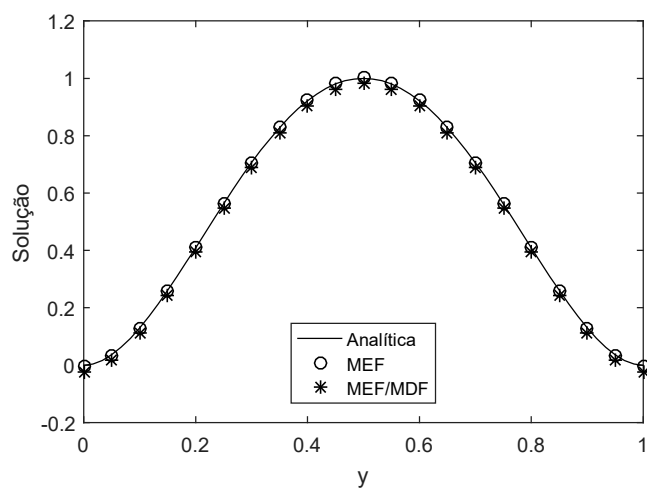


(b) Malha 40×40

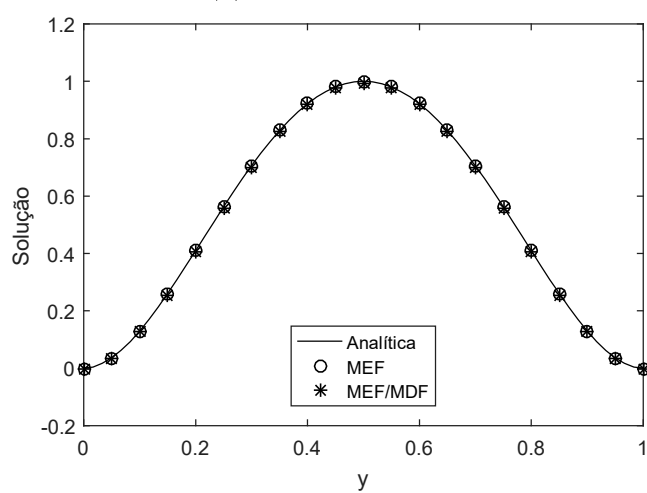


(c) Malha 60×60

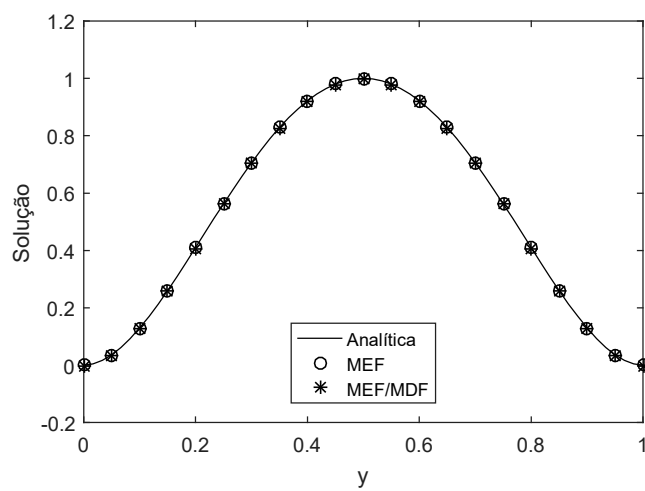
Figura 6.9: Exemplo 1 - bidimensional - soluções na seção $x = 0,25$



(a) Malha 20×20

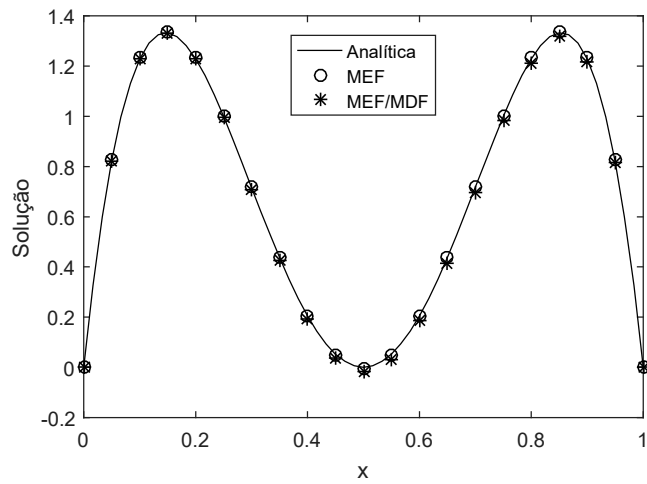


(b) Malha 40×40

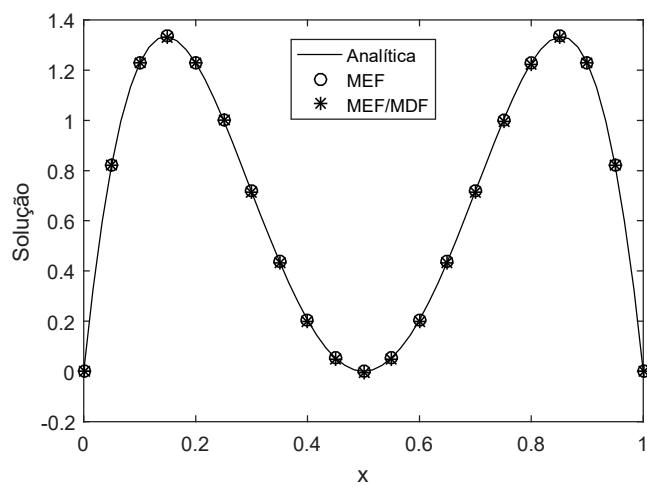


(c) Malha 60×60

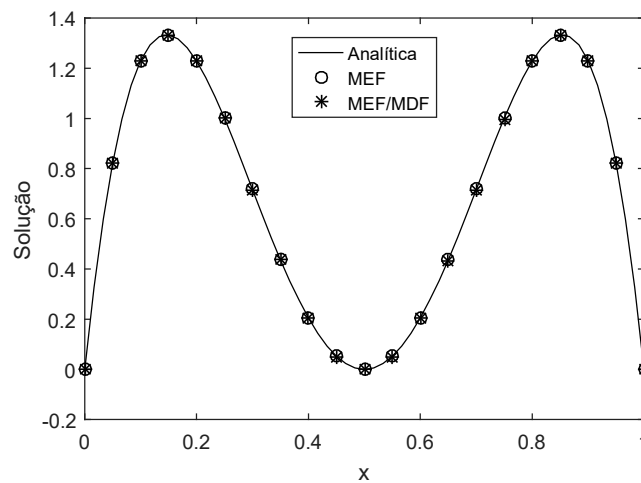
Figura 6.10: Exemplo 1 - bidimensional - soluções na seção $x = 0,75$



(a) Malha 20×20



(b) Malha 40×40



(c) Malha 60×60

Figura 6.11: Exemplo 1 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,50$

6.2.2 Exemplo 2

Assim como no exemplo anterior, o domínio usado nesta seção é $\Omega = (0; 1) \times (0; 1)$. Para ilustrar o conceito da disposição dos subdomínios do MEF e do MDF, apresenta-se o esquema para uma malha 10×10 na Fig. 6.12. A modelagem empregou malhas com 20×20 , 40×40 e 60×60 partições.

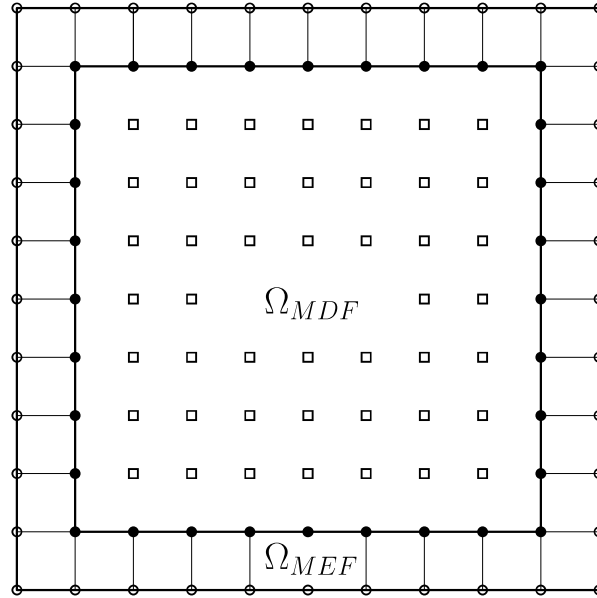


Figura 6.12: Exemplo 2 - bidimensional - esquema de subdomínios

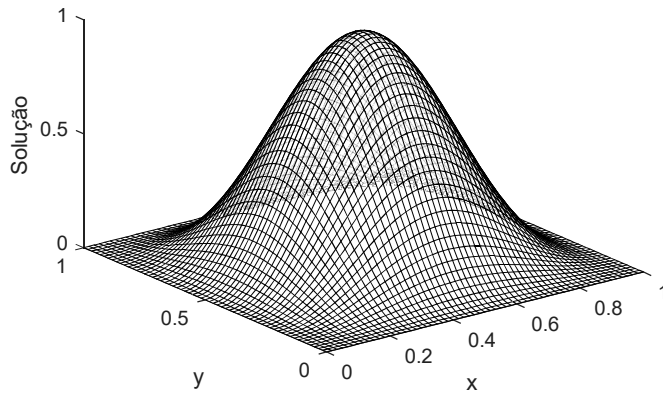


Figura 6.13: Solução analítica $\varphi_{ana,2}$

O problema deste exemplo é enunciado a seguir

$$-\nabla^2 \varphi = f, \quad (6.7a)$$

$$\varphi(0, y) = \varphi(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad (6.7b)$$

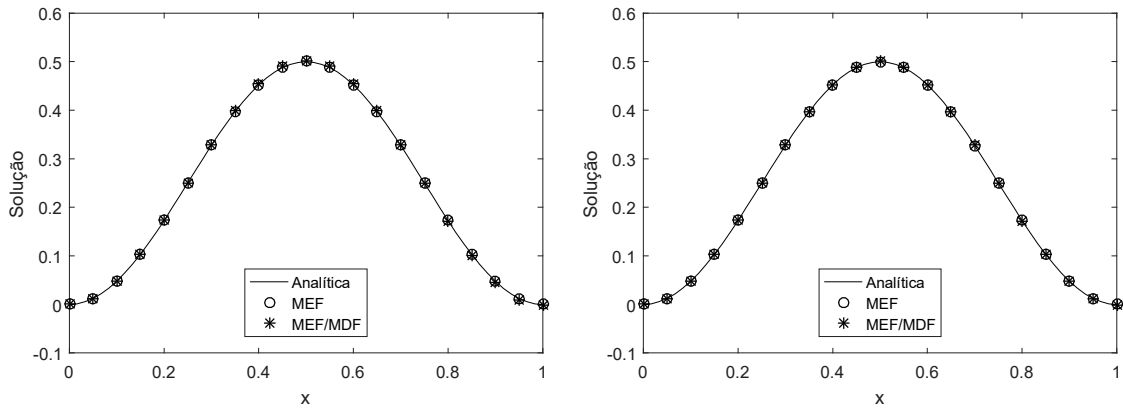
$$f(x, y) = 2\pi^2 [4\text{sen}^2(\pi x)\text{sen}^2(\pi y) - \text{sen}^2(\pi x) - \text{sen}^2(\pi y)], \quad (6.7c)$$

com sua solução analítica dada por

$$\varphi_{ana,2}(x, y) = \frac{[\cos(2\pi x + \pi) + 1][\cos(2\pi y + \pi) + 1]}{4}. \quad (6.8)$$

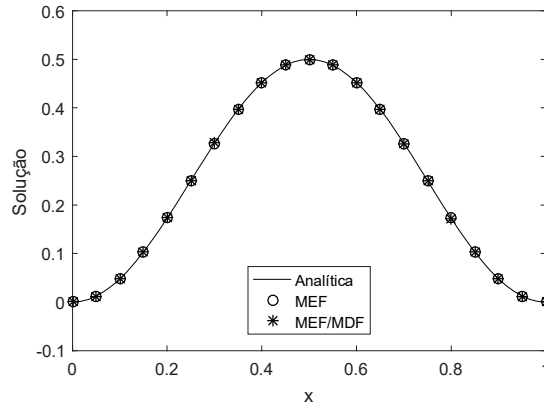
O gráfico da solução $\varphi_{ana,2}$ é apresentado na Fig. 6.13.

Analogamente ao que foi feito no exemplo anterior, as seções $y = 0,25$, $y = 0,50$ e $y = 0,75$ são tomadas para apresentar os resultados numéricos na Fig. 6.14, Fig. 6.15 e Fig. 6.16, respectivamente. Não são apresentados os resultados das seções para x , já que são equivalentes a aqueles para y , conforme esperado. Tal como no exemplo anterior, as soluções numéricas obtidas via acoplamento MEF/MDF e via MEF concordam muito bem com a solução analítica.



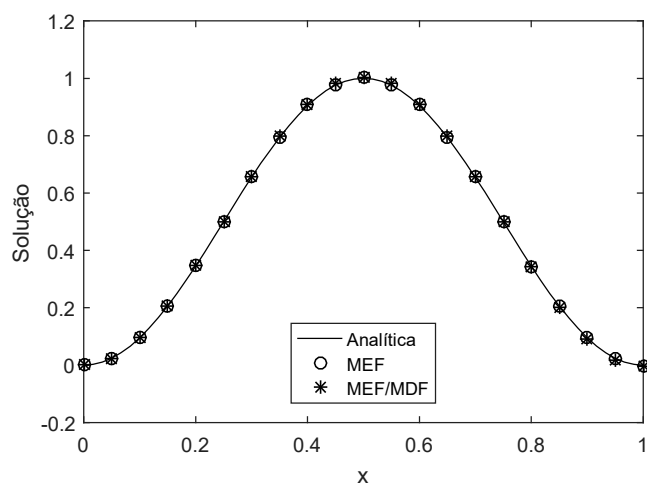
(a) Malha 20×20

(b) Malha 40×40

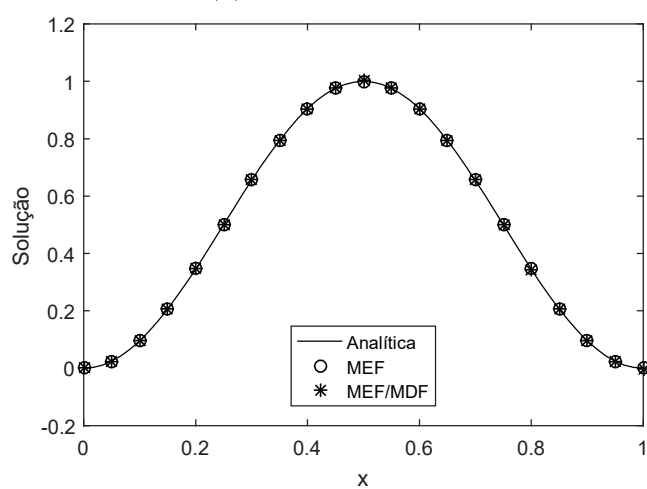


(c) Malha 60×60

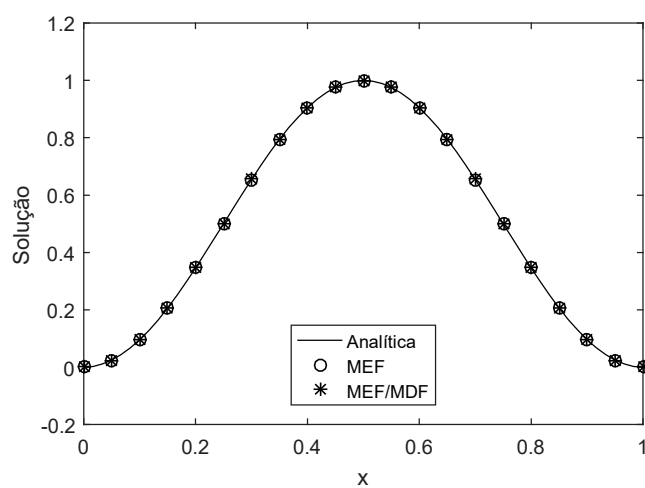
Figura 6.14: Exemplo 2 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,25$



(a) Malha 20×20

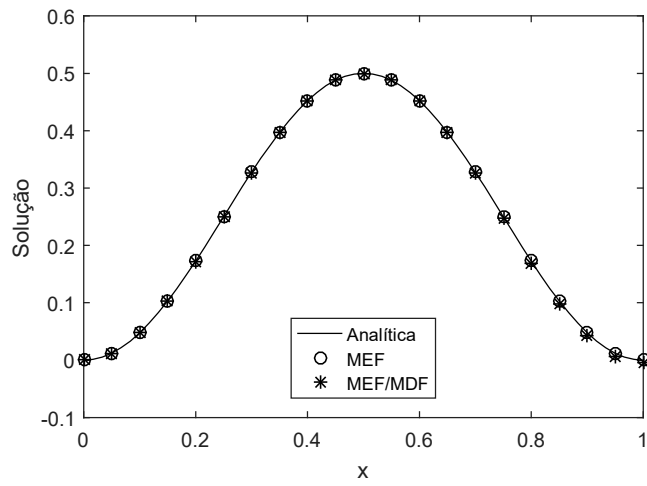


(b) Malha 40×40

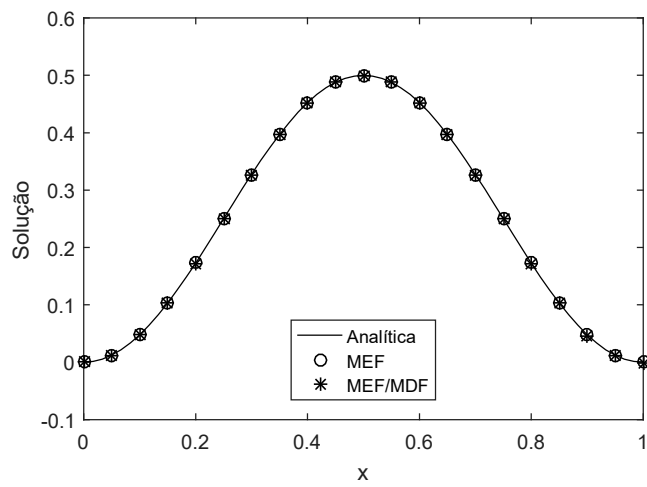


(c) Malha 60×60

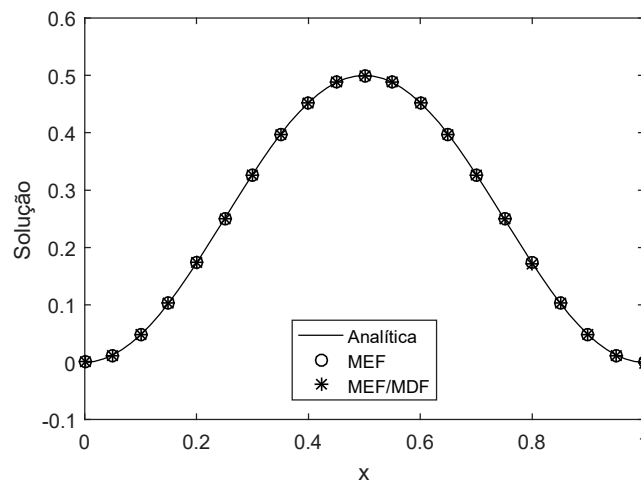
Figura 6.15: Exemplo 2 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,50$



(a) Malha 20×20



(b) Malha 40×40



(c) Malha 60×60

Figura 6.16: Exemplo 2 - bidimensional - soluções na seção $y = 0,75$

6.2.3 Exemplo 3

Este último exemplo objetiva evidenciar a redução no tempo de montagem da matriz do problema, em razão da eficiência do método das diferenças finitas. As malhas empregadas nessa avaliação são uniformes, constituídas por 100×100 partições. A comparação se dá entre resolver o problema utilizando apenas o MEF e usando o acoplamento MEF/MDF, observando diferentes arranjos de subdomínios. Os casos analisados são: apenas emprego do MEF ou do MDF, e acoplamentos com 20%, 35%, 50%, 65% e 80% do domínio modelados por diferenças finitas. A Fig. 6.17 apresenta o conceito de alguns dos esquemas utilizados.

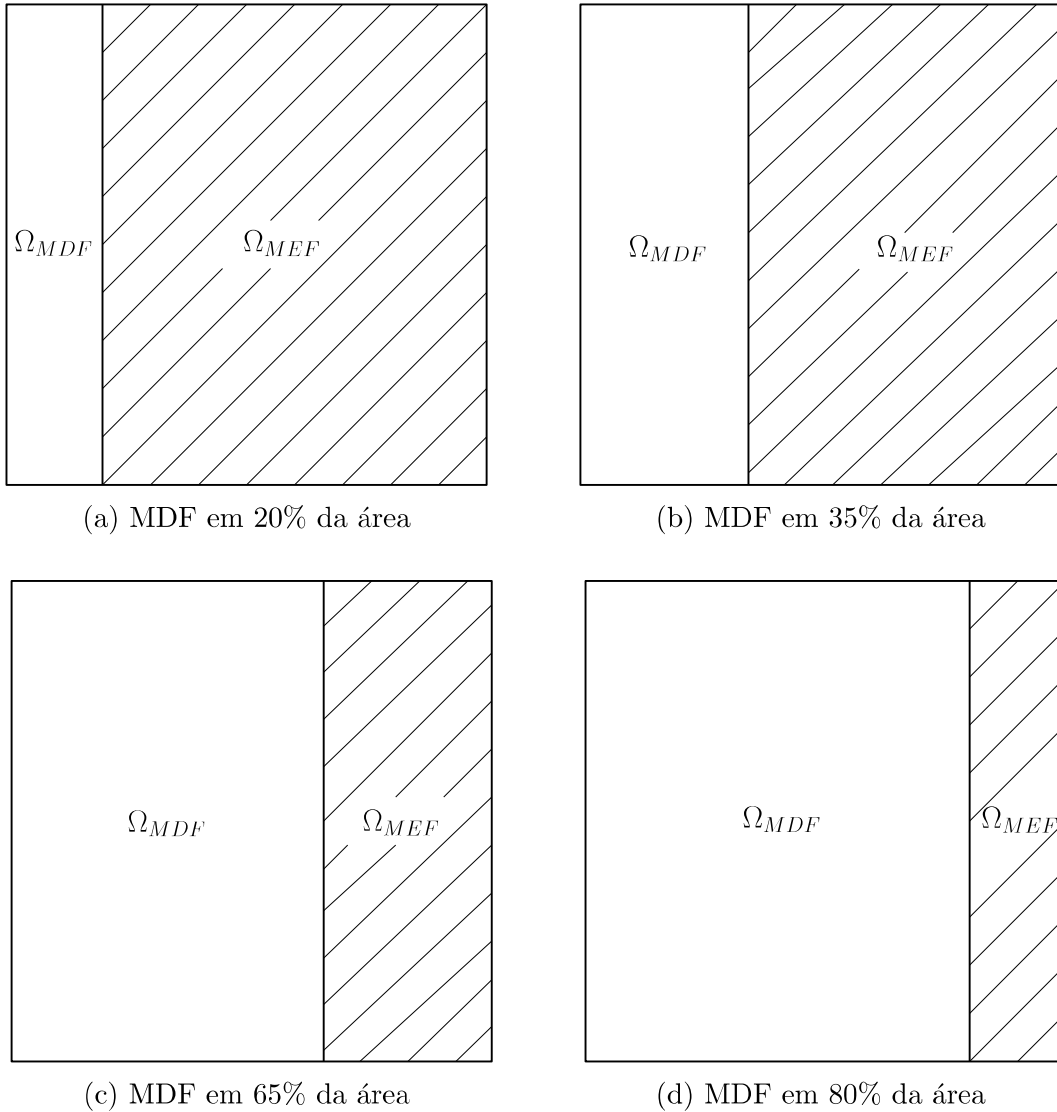


Figura 6.17: Exemplo 3 - bidimensional - Alguns esquemas de subdomínios usados

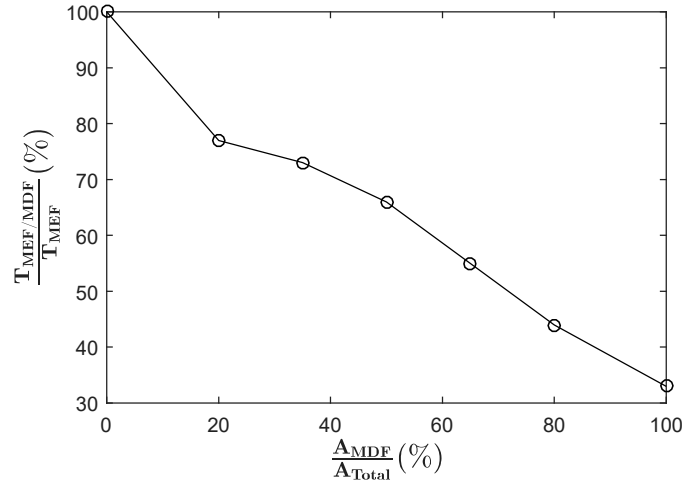


Figura 6.18: Redução do tempo de montagem da matriz do problema

Na Fig. 6.18, os termos $T_{MEF/MDF}$ e T_{MEF} designam o tempo necessário para montagem das matrizes dos métodos de seus respectivos índices. Já A_{MDF} e A_{Total} correspondem à área do subdomínio do MDF e à área total do domínio, respectivamente. A partir deste gráfico, nota-se a significativa melhoria do desempenho computacional proporcionada pelo acoplamento direto MEF/MDF. Este fato sugere a aplicação da técnica de acoplamento a problemas nos quais é necessário calcular repetidas vezes a matriz do problema, como ocorre em problemas transientes e não lineares.

Capítulo 7

Considerações Finais

Nesta dissertação foi desenvolvida uma metodologia não iterativa para acoplar o método dos elementos finitos com o método das diferenças finitas para o Operador de Laplace. Conforme mencionado previamente, o acoplamento direto atingiu uma performance superior ao MEF, em termos de tempo de montagem da matriz, e superior aos métodos iterativos, em relação ao tempo gasto na resolução dos sistemas de equações algébricas.

Embora a formulação aqui apresentada tenha um caráter elementar, há um grande potencial de aplicação do acoplamento direto MEF/MDF a problemas não lineares e transientes, nos quais é necessária a resolução de múltiplos sistemas de equações. Nestes tipos de problema, o ganho de eficiência computacional seria significativo, conforme constatou-se no exemplo 3 do experimento bidimensional.

Também pode-se efetuar múltiplas partições em subdomínios regidos pelo MDF (Fig. 7.1). Aplicando o método de diferenças finitas à maior parte do domínio, busca-se reduzir o tempo de montagem da matriz associada ao sistema de equações.

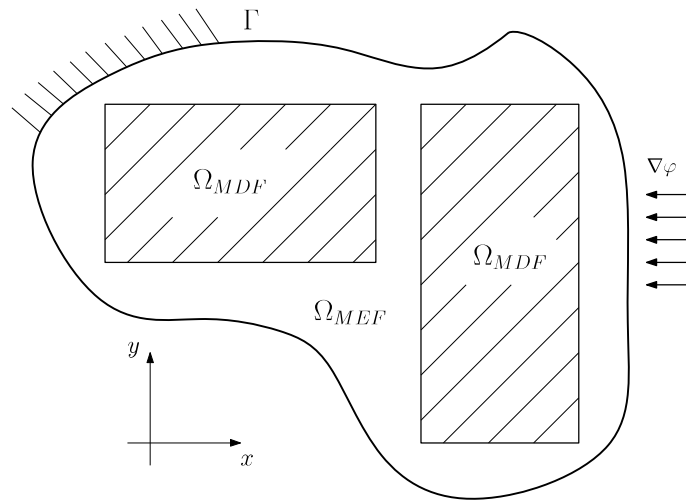


Figura 7.1: Conceito do acoplamento MEF/MDF em múltiplos subdomínios

No tocante ao acoplamento iterativo, esquemas de decomposição do domínio, conforme o apresentado anteriormente, podem gerar dificuldades. Tendo em mente que os subdomínios seriam resolvidos isoladamente, o problema associado ao MEF apresentaria vazios onde se encontram os *grids* de diferenças finitas. A fim de captar a irregularidade geométrica dos cantos dos retângulos vazios, seria necessário refinar a malha do MEF nas regiões próximas da irregularidade, onerando computacionalmente o problema.

Além disso, considerando problemas de autovalores, como ocorre na análise dos modos de vibração de estruturas, por exemplo, a abordagem iterativa pode calcular frequências naturais associadas a cada subdomínio modelado. Contudo, considerando o problema global, podem surgir outros autovalores (ou frequências) não identificados nas partições resolvidas separadamente, comprometendo a análise do sistema como um todo.

7.1 Conclusões

Inicialmente, no experimento unidimensional foram avaliadas duas equações para efetuar o acoplamento MEF/MDF, uma baseada no operador de diferença centrada para derivada primeira (Eq.(4.4) e Eq.(4.7)) e a outra baseada na estratégia do nó virtual (Eq.(4.5) e Eq.(4.8)). A última abordagem apresentou o melhor resultado para o problema tratado na seção 6.1.

Conforme verificado no capítulo 6, os acoplamentos EDNI e DENI resultaram em soluções mais acuradas do que aquela obtida via diferenças finitas, sendo menos custosas computacionalmente do que o método dos elementos finitos, uma vez que reduzem a quantidade de integrações numéricas.

Ainda sobre o experimento unidimensional, apesar do acoplamento DENI apresentar a mesma acurácia que sua versão iterativa DEI, seu custo computacional associado à solução dos sistemas de equações foi aproximadamente a metade do custo via método iterativo. Sendo assim, o acoplamento DENI foi a melhor estratégia para resolver o problema proposto.

Nos dois primeiros exemplos da seção 6.2, validou-se o código computacional para o acoplamento MEF/MDF para problemas bidimensionais. O terceiro exemplo daquela seção ilustrou a redução do tempo de montagem da matriz do problema, comparando diferentes malhas acopladas com o MEF. Deste modo, ficaram comprovadas a acurácia e eficiência computacional do método de acoplamento proposto.

7.2 Sugestões de Trabalhos Futuros

Em vista dos resultados obtidos com esta dissertação, são feitas algumas sugestões para futuros trabalhos na área:

- Elaborar acoplamentos para elementos e operadores de diferenças finitas de ordem superior, considerando equações adequadas nas interfaces entre os métodos;
- Desenvolver o acoplamento MEF/MDF aplicado a problemas regidos por outras classes de EDP, i.e., parabólicas e hiperbólicas;
- Avaliar desempenho do acoplamento proposto nesta dissertação em problemas não lineares, sob o aspecto da eficiência computacional na montagem das matrizes;
- Aplicar a técnica apresentada a problemas de geometria irregular, empregando o MEF para modelar o contorno não regular e o MDF na maior parte possível do domínio.

Referências Bibliográficas

- [1] CHAPRA, S. C., CANALE, R. P. *Numerical Methods for Engineers, 6th Edition*. McGraw-Hill Higher Education, 2009.
- [2] LEVEQUE, R. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems (Classics in Applied Mathematics)*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [3] SMITH, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Clarendon Press, 1986.
- [4] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.
- [5] ZIENKIEWICZ, O., CHAN, A. “Coupled problems and their numerical solution”. In: *Advances in Computational Nonlinear Mechanics*, Springer, pp. 139–176, 1989.
- [6] BURGOS, R. G. *Solução de problemas vibroacústicos bidimensionais: exemplos, códigos e aplicações computacionais*. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, 2017.
- [7] RIBEIRO, P. M. V. *Soluções analíticas para cavidades acústicas bidimensionais com aplicação ao estudo da interação dinâmica barragem-reservatório*. Tese de D.Sc., Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2010.
- [8] HE, M., BISHOP, P., KASSAB, A., et al. “A coupled FDM/BEM solution for the conjugate heat transfer problem”, *Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals*, v. 28, n. 2, pp. 139–154, 1995.
- [9] LINDSTRÖM, J., NORDSTRÖM, J. “A stable and high-order accurate conjugate heat transfer problem”, *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 14, pp. 5440–5456, 2010.

- [10] MCDONALD, B. H., WEXLER, A. “Finite-Element Solution of Unbounded Field Problems”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 20, n. 12, pp. 841–847, Dec 1972. ISSN: 0018-9480. doi: 10.1109/TMTT.1972.1127895.
- [11] ZIENKIEWICZ, O. C., KELLY, D. W., BETTESS, P. “The coupling of the finite element method and boundary solution procedures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, n. 2, pp. 355–375, 1977. doi: 10.1002/nme.1620110210.
- [12] BREBBIA, C., GEORGIOU, P. “Combination of boundary and finite elements in elastostatics”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 3, n. 3, pp. 212–220, 1979.
- [13] PAULA, F. A. D. *Elementos de Contorno com equilíbrio: uma formulação consistente para problemas de potencial e elasticidade*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.
- [14] FONTES JR., E. F. *Uma Abordagem Multithreading para o Acoplamento entre os Métodos dos Elementos de Contorno e Finitos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.
- [15] SOARES JR., D. *Análise dinâmica de sistemas não-lineares com acoplamento do tipo solo-fluido-estrutura por intermédio dos métodos dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [16] HIGUERA, P. E. O. *Acoplamento Iterativo MEC-MEF para Subdomínios com Malhas Não Coincidentes por Meio de Multiplicadores de Lagrange Localizados*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.
- [17] AOUB, B., RAHMANI, O., NAIT-ABDELAZIZ, M. “A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 44, n. 7-8, pp. 2523–2539, 2007.
- [18] LIAO, K., HU, C. “A coupled FDM–FEM method for free surface flow interaction with thin elastic plate”, *Journal of marine science and technology*, v. 18, n. 1, pp. 1–11, 2012.
- [19] OKA, F., YASHIMA, A., SHIBATA, T., et al. “FEM-FDM coupled liquefaction analysis of a porous soil using an elasto-plastic model”, *Applied Scientific Research*, v. 52, n. 3, pp. 209–245, 1994.

- [20] SOARES JÚNIOR, D., MANSUR, W. J., LIMA, D. L. “An explicit multi-level time-step algorithm to model the propagation of interacting acoustic-elastic waves using finite element/finite difference coupled procedures”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 17, n. 1, pp. 19, 2007.
- [21] WONG, K. C., SUMMERS, R. M., KEBEBEW, E., et al. “Pancreatic tumor growth prediction with elastic-growth decomposition, image-derived motion, and FDM-FEM coupling”, *IEEE transactions on medical imaging*, v. 36, n. 1, pp. 111–123, 2016.
- [22] VON ESTORFF, O., FIRUZIAAN, M. “Coupled BEM/FEM approach for nonlinear soil/structure interaction”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, n. 10, pp. 715–725, 2000.
- [23] BOULBRACHENE, M., CORTEY-DUMONT, P., MIELLOU, J. “Mixing finite elements and finite differences in a subdomain method”. 1988.
- [24] TOSELLI, A., WIDLUND, O. *Domain decomposition methods-algorithms and theory*, v. 34. Springer Science & Business Media, 2006.
- [25] MOCZO, P., BYSTRICKÝ, E., KRISTEK, J., et al. “Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures”, *Bulletin of the seismological Society of America*, v. 87, n. 5, pp. 1305–1323, 1997.
- [26] MA, S., ARCHULETA, R. J., LIU, P. “Hybrid modeling of elastic P-SV wave motion: A combined finite-element and staggered-grid finite-difference approach”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 94, n. 4, pp. 1557–1563, 2004.
- [27] HUANG, Z.-P., ZHANG, M., WU, W.-Q., et al. “A domain decomposition method for numerical simulation of the elastic wave propagation”, *Chinese Journal of Geophysics*, v. 47, n. 6, pp. 1233–1240, 2004.
- [28] WOLF, S., FAVREAU, P., IONESCU, I. “Hybrid unstructured FEM–FDM modeling of seismic wave propagation. Application to dynamic faulting.” 2008.
- [29] QIAO, J., ZOU, J., YUAN, J., et al. “Calculation of ion-flow field of HVDC transmission lines in the presence of wind using finite element-finite difference combined method with domain decomposition”, *IEEE Transactions on Magnetism*, v. 52, n. 3, pp. 1–4, 2015.

- [30] BEILINA, L. “Domain decomposition finite element/finite difference method for the conductivity reconstruction in a hyperbolic equation”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 37, pp. 222–237, 2016.
- [31] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. 1 ed. New York, Academic Press, 1975.
- [32] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., NITHIARASU, P., et al. *The finite element method*, v. 3. McGraw-hill London, 1977.
- [33] ERN, A., GUERMOND, J.-L. *Theory and practice of finite elements*, v. 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] JACOB, F., TED, B. *A first course in finite elements*. Wiley, 2007.
- [35] BÖRGERS, C. “The Neumann-Dirichlet domain decomposition method with inexact solvers on the subdomains”, *Numerische Mathematik*, v. 55, n. 2, pp. 123–136, 1989.
- [36] ITO, K., TOIVANEN, J. “Preconditioned iterative methods on sparse subspaces”, *Applied mathematics letters*, v. 19, n. 11, pp. 1191–1197, 2006.
- [37] SAVITCH, W. J. *Absolute C++*. Pearson Education, 2010.
- [38] HANSEN, J. S. *GNU Octave: Beginner’s Guide: Become a Proficient Octave User by Learning this High-level Scientific Numerical Tool from the Ground Up*. Packt Publishing Ltd, 2011.
- [39] DEMMEL, J. W. “SuperLU users’ guide”, 1999.