



OTIMIZAÇÃO VIA ALGORITMOS META-HEURÍSTICOS DE PERFIS U  
ENRIJECIDOS FORMADOS A FRIO SUBMETIDOS À COMPRESSÃO AXIAL

Felipe Ramos de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Eduardo de Miranda Batista

Juarez Moara Santos Franco

Rio de Janeiro

Março de 2020

OTIMIZAÇÃO VIA ALGORITMOS META-HEURÍSTICOS DE PERFIS U  
ENRIJECIDOS FORMADOS A FRIO SUBMETIDOS À COMPRESSÃO AXIAL

Felipe Ramos de Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientadores: Eduardo de Miranda Batista

Juarez Moara Santos Franco

Aprovada por: Prof. Eduardo de Miranda Batista

Prof. Juarez Moara Santos Franco

Prof. Luciano Rodrigues Ornelas de Lima

Prof.<sup>a</sup>. Beatriz de Souza Leite Pires Lima

Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2020

Oliveira, Felipe Ramos de

Otimização via algoritmos meta-heurísticos de perfis u  
enrijecidos formados a frio submetidos à compressão axial  
/ Felipe Ramos de Oliveira. – Rio de Janeiro:  
UFRJ/COPPE, 2020.

IX, 104 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Eduardo de Miranda Batista

Juarez Moara Santos Franco

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de  
Engenharia Civil, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 91-97.

1. Colunas de Perfis Formadas a Frio. 2. Otimização. 3.  
Meta-heurística. I. Batista, Eduardo de Miranda *et al.* II.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa  
de Engenharia Civil. III. Título.

“Tente de novo, falhe  
novamente. Falhe  
melhor”

(Samuel Beckett)

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

OTIMIZAÇÃO VIA ALGORITMOS META-HEURÍSTICOS DE PERFIS U  
ENRIJECIDOS FORMADOS A FRIO SUBMETIDOS À COMPRESSÃO AXIAL

Felipe Ramos de Oliveira

Março/2020

Orientadores: Eduardo de Miranda Batista  
Juarez Moara Santos Franco

Programa: Engenharia Civil

Este estudo parte do princípio de que a geometria usual dos perfis de aço formados a frio (PFF) pode ser aprimorada por processos computacionais para aumentar sua capacidade de carga, levando a sistemas estruturais mais eficientes e econômicos. Esta dissertação tem como objetivo fornecer uma metodologia que permita o desenvolvimento de seções de colunas de PFF tipo U enrijecido com resistência à compressão máxima para aplicações práticas. Os algoritmos desenvolvidos neste trabalho atendem aos requisitos geométricos sugeridos pela NBR 14762, restrições práticas e de fabricações sugeridas por pela literatura especializada. A resistência à compressão das seções foi determinada pelo Método de Resistência Direta (MRD) adotado na Norma Brasileira e as cargas críticas de flambagem, exigidas por este procedimento foram determinadas pelo Método de Faixas Finitas (MFF) e por técnicas de Aprendizado de Máquina (AM). Foram comparados os desempenhos de quatro processos de otimização baseados em algoritmos meta-heurísticos distintos. Cinco perfis U enrijecidos disponíveis em catálogo de fabricantes foram tomados como referência nos estudos de otimização

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

OPTIMIZATION OF COLD-FORMED STEEL LIPPED CHANNEL COLUMNS  
USING METAHEURISTIC ALGORITHMS

Felipe Ramos de Oliveira

March/2020

Advisors: Eduardo de Miranda Batista  
Juarez Moara Santos Franco

Department: Civil Engineering

This study assumes that the usual geometry of cold formed steel (CFS) can be improved by computational processes to increase their capacity, leading to more efficient and economical systems. This dissertation aims to provide a methodology that allows the development of lipped channel columns with maximum capacity for practical applications. The algorithms developed in this work match the geometric requirements suggested by NBR 14762, practical and fabrication restrictions suggested by researches. The compressive strength of the CFS was determined by the Direct Strength Method (DSM) adopted in the Brazilian standard and the critical buckling loads required by the procedure that was calculated by the Finite Strip Method (FSM) and by Machine Learning (ML) techniques. The performance of four optimization processes based on different meta-heuristic algorithms were compared. Five stiffened U profiles available in the manufacturers catalog have been taken as a reference in the optimization studies.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS .....	4
1.2. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	5
<b>2. REVISÃO TEÓRICA.....</b>	<b>6</b>
2.1. ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE PERFIS DE AÇO FORMADOS A FRIO.....	6
2.1.1. <i>Fórmulas e modelos analíticos</i> .....	8
2.1.2. <i>Métodos numéricos para análise de flambagem elástica</i> .....	11
2.1.3. <i>Programas de código aberto e outros pacotes de software</i> .....	15
2.2. MÉTODO DA RESISTÊNCIA DIRETA (MRD).....	17
2.2.1. <i>Curvas de projeto do MRD</i> .....	18
2.2.2. <i>Resistência de colunas envolvendo a flambagem distorcional</i> .....	21
2.3. APRENDIZADO DE MÁQUINA.....	23
2.3.1. <i>Processos gaussianos para aprendizado de máquina supervisionado</i> ....	26
2.4. OTIMIZAÇÃO .....	27
2.5. ALGORITMOS BASEADOS NO MÉTODO DO GRADIENTE .....	28
2.6. ALGORITMOS INSPIRADOS NA NATUREZA.....	29
2.6.1. <i>Diversificação e intensificação</i> .....	31
2.6.2. <i>Algoritmo Genético (AG)</i> .....	32
2.6.3. <i>Evolução Diferencial (Differential Evolution - DE)</i> .....	35
2.6.4. <i>Otimização por Enxame de Partículas (Particle swarm optimization - PSO)</i> 38	
2.6.5. <i>Colônia Artificial de Abelhas (Artificial Bee Colony - ABC)</i> .....	41
2.7.1. <i>Método das Penalidades</i> .....	45
2.8. OTIMIZAÇÃO DE PERFIS DE AÇO FORMADOS A FRIO.....	46
2.8.1. <i>Exemplos de otimização de perfis de aço formados a frio</i> .....	47
<b>3. METODOLOGIA .....</b>	<b>51</b>
3.1. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	51
3.1.1. <i>Cálculo automatizado de resistência e modelos numéricos</i> .....	58
3.2. IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS INSPIRADOS NA NATUREZA.....	59
3.3. PREDITOR DE CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DISTORCIONAL.....	62
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>66</b>
4.1. OTIMIZAÇÃO VIA AG.....	66
4.2. OTIMIZAÇÃO VIA DE .....	75
4.3. OTIMIZAÇÃO VIA PSO .....	78
4.4. OTIMIZAÇÃO VIA ABC .....	80
4.5. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS.....	82
<b>5. CONCLUSÕES .....</b>	<b>89</b>
5.1. SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS .....	90
<b>6. REFERÊNCIAS .....</b>	<b>91</b>
<b>7. ANEXOS .....</b>	<b>98</b>

## SÍMBOLOS

### Letras Romanas Maiúsculas

$A$	Área da Seção Transversal
$C_w$	Constante de Empenamento
$E$	Módulo de Young (Módulo de Elasticidade)
$G$	Modulo de Elasticidade Transversal
$I$	Segundo Momento de Área
$J$	Constante de Torção
$K_e$	Matriz de Rigidez Elástica
$K_g$	Matriz de Rigidez Geométrica
$KL$	Comprimento Efetivo
$L$	Comprimento Nominal
$P_{crD}$	Carga Crítica de Flambagem Distorcional
$P_{crG}$	Carga Crítica de Flambagem Global
$P_{crL}$	Carga Crítica de Flambagem Distorcional
$P_n$	Resistência Nominal à Compressão Axial
$P_y$	Carga Crítica de Escoamento ( $P_y = A \cdot f_y$ )

### Letras Romanas Minúsculas

$b_f$	Largura da mesa
$b_s$	Largura do enrijecedor de borda
$b_w$	Largura da alma
$f_y$	Tensão de Escoamento
$k$	Coefficiente de Placa
$r_0$	Raio de Giração
$L_f$	Largura da bobina de aço
$t$	Espessura do Perfil

### Letras Gregas

$\lambda_D$	Índice de Esbeltez Associado a Flambagem Distorcional
$\lambda_G$	Índice de Esbeltez Associado a Flambagem Global
$\lambda_L$	Índice de Esbeltez Associado a Flambagem Local

## ABREVIACOES

ABC	Colônia Artificial de Abelhas
AISI	Instituto Americano de Ferro e Aço
AG	Algoritmo Genético
AM	Aprendizado de Máquina
COPPE	Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduao e Pesquisa de Engenharia
cFSM	Método das Faixas Finitas de Restringidas
D	Modo de Flambagem Distorcional
DE	Evoluo Diferencial
G	Modo de Flambagem Distorcional
GBT	Teoria de Viga Generalizada
GPR	Processo de Regressão Gaussiano
IA	Inteligência Artificial
L	Modo de Flambagem Local
LABEST	Laboratório de Estruturas e Materiais da COPPE
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEF	Método das Faixas Finitas
MLE	Método da Largura Efetiva
MRD	Método da Resistência Direta
NBR	Norma Brasileira
PFF	Perfis de Aço Formados a Frio
PSO	Otimizao por Enxame de Partículas
UE	U Enrijecido
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

## 1. INTRODUÇÃO

Estruturas constituídas de perfis de aço formados a frio (PFF) são adotadas na indústria da construção devido ao seu custo-benefício, sustentabilidade ambiental, facilidade de fabricação sob demanda e construção rápida. Os PFF são produzidos dobrando chapas finas de metal em uma variedade de formas de seção transversal por meio de laminação ou perfilação, ambos executados à temperatura ambiente. Esses perfis são usualmente adotados, dentre outros casos, em treliças, painéis de construção modulares, silos agrícolas, formas para concretagem, telhas autoportantes e como estrutura principal de suporte de carga em edifícios de baixo a médio porte. As fábricas de perfis laminados a frio podem produzir as seções transversais sob demanda, adaptadas a aplicações específicas, embora os custos associados a esta customização geralmente não favoreçam esta abordagem. A flexibilidade de produção de seções transversais complexas (Figura 1) e o processo industrial adaptável tornam o problema de maximizar a eficiência do uso de material através da seleção de seções transversais ideais um tópico promissor para a engenharia estrutural.

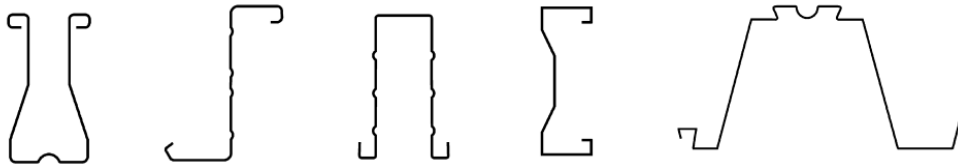


Figura 1: Seções transversais inovadoras e complexas [1].

A fabricação de PFF inicia com o aço bruto, que após fundido é derramado em placas que são reduzidas a tiras finas de aço. As tiras são novamente reduzidas em aço laminado a frio, produzido na forma de bobina (Figura 2 (a)) usualmente com largura de 1200 mm. Para transformar uma bobina de chapa fina em PFF, ela é primeiramente cortada na direção da sua largura em concordância com as dimensões projetadas para seção transversal do produto final e depois dobrada pelo maquinário de conformação. Para atender a uma ampla gama de aplicações estruturais e não estruturais, estão disponíveis várias opções de espessura (usualmente na faixa de 0,9 a 3,2 mm) e classes de aço (ZAR 250 e CRF 400, por exemplo).

Os equipamentos de fabricação em mesa de roletes (Figura 2 (b)), também conhecidos como equipamentos de conformação contínua, mais modernos (Figura 2 (c)) integram os projetos de desenho auxiliado por computador ao processo de fabricação para produzir

seções transversais customizadas. Em certas circunstâncias, fabricantes são capazes de fornecer equipamentos de conformação contínua que podem ser estacionados no canteiro de obras pela duração da execução do projeto. Dessa forma, a tecnologia atual de produção de PFF é capaz de reduzir consideravelmente o desperdício de material nas fábricas e na etapa construtiva.

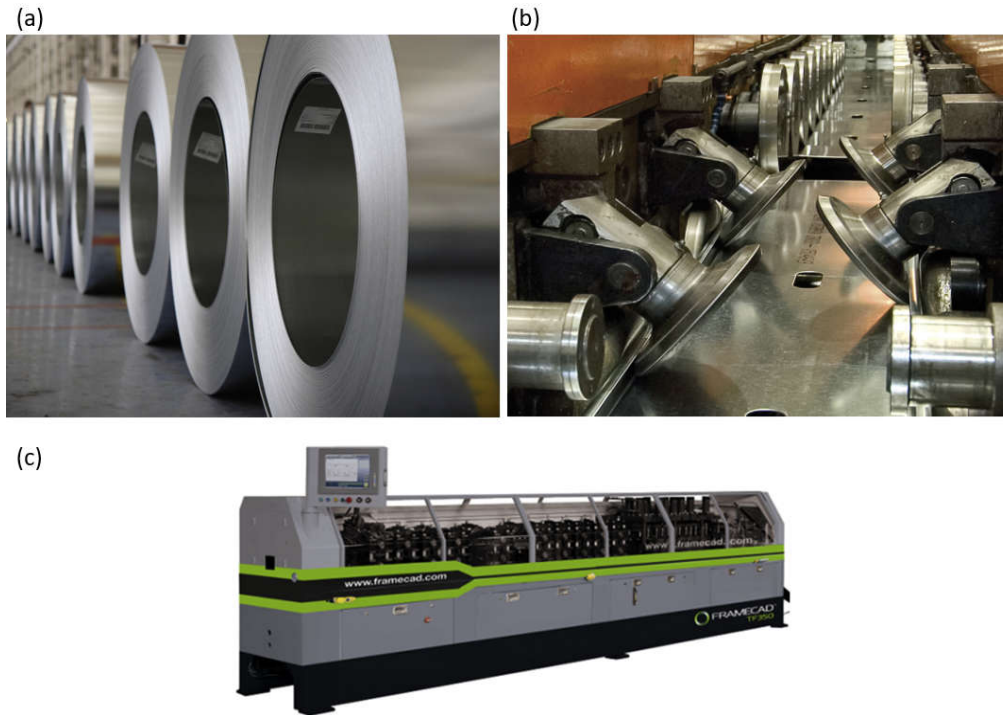


Figura 2: Processo de fabricação de PFF. (a) Bobinas; (b) mesa de rolete; (c) mesa de rolete automatizada [2].

Devido sua natureza delgada os PFF costumam apresentar esbeltezes elevadas. Dessa forma, a flambagem é um fenômeno de perda de estabilidade determinante para estimar a resistência desse tipo de elemento. Os principais modos de flambagem dos PFF são o global (G), local (L) e distorcional (D). O método adotado para calcular a capacidade resistente destes perfis tem influência significativa na formulação de problemas de maximização de resistência. Por exemplo, algumas das estratégias mais antigas adotam o Método da Largura Efetiva (MLE), que exige a redução de uma placa sob tensão longitudinal não linear em uma placa com largura efetiva sob tensão constante. Embora o custo computacional de processamento seja relativamente baixo, a sua implementação é geralmente complicada para seções transversais de geometria complexa.

O Método da Resistência Direta (MRD) apresenta um processo de cálculo muito mais simples que o MLE, exigindo apenas a carga crítica de flambagem local  $P_{crL}$ , a carga

crítica de flambagem distorcional  $P_{crD}$ , a carga crítica de flambagem global  $P_{crG}$  e a carga de escoamento  $P_y$  para estimar a capacidade resistente dos PFF. O MRD, embora calibrado apenas para os perfis mais usuais, lida com eficiência com seções transversais complexas e considera a flambagem distorcional como uma causa potencial de falha de PFF, o que é encarado como um avanço significativo em relação ao MLE. As equações do MRD são funções matemáticas simples que podem ser implementadas sem muito esforço em programas computacionais. Nesse sentido, o MRD favorece a otimização de PFF via algoritmos automatizados.

As práticas de aperfeiçoamento de estruturas de aço precedem a utilização de ferramentas computacionais e de algoritmos de otimização. Até a primeira metade do século XX, era comum a aplicação do princípio da estabilidade uniforme, que consiste em aproximar duas ou mais cargas críticas de flambagem. Parecia racional que isso poderia economizar material e reduzir o peso total das estruturas. Supunha-se que a solução com peso mínimo e resistência máxima sempre pudesse ser estabelecida entre estruturas que atendessem a este requisito. Posteriormente, verificou-se que esta estratégia pode induzir o que se conhece atualmente como interação modal, fenômeno que pode provocar perda significativa de resistência do perfil de aço. A otimização via princípio da estabilidade uniforme ficou como conhecida “otimização ingênua”, pelo fato de conduzir à interação G-L que até então era desconhecida e atualmente está incorporada nas normas de projeto. Com a descoberta do modo distorcional de flambagem diferentes possibilidades de interação foram reveladas. Até mesmo a formulação original do MRD, desconsidera os efeitos das diferentes formas de interação com o modo distorcional, o que deixa margem para a proposição de novas formas de “otimização ingênua”.

Atualmente a otimização da seção transversal de PFF é conduzida por algoritmos computacionais, que podem ser baseados em (i) princípios de busca determinísticos ou (ii) baseados em princípios de busca estocásticos. Os algoritmos baseados em métodos determinísticos são aplicáveis somente a problemas nos quais estão disponíveis as derivadas parciais da função objetivo em relação às variáveis de projeto da seção transversal. Por outro lado, operações de busca estocástica podem ser adotadas em praticamente qualquer problema de otimização uma vez que não dependem de informações do gradiente da função objetivo.

Entendendo por ótimo global como o melhor (máximo ou mínimo) valor possível que um problema de otimização pode assumir dentro de um espaço de busca e ótimo local como um ponto extremo (não global) do espaço de soluções. Tanto os algoritmos

baseados em princípios determinísticos quanto os baseados em princípios estocásticos, têm como objetivo a localização do ótimo global de uma função e, em ambos casos, a principal dificuldade é evitar a convergência prematura em um ótimo local.

As estratégias utilizadas para conduzir o processo de busca de algoritmos estocásticos, também conhecidos como meta-heurísticos, são geralmente analogias à eventos observados na natureza como fenômenos físicos, biológicos ou ao comportamento social de diferentes espécies de seres vivos. Ao utilizar tais estratégias de busca inspiradas na natureza, os algoritmos meta-heurísticos são capazes de gerar soluções apropriadas para diversos problemas de otimização, tão próximas ao ótimo global quanto possível, ao mesmo tempo que evitam a convergência prematura em ótimos locais.

### **1.1. Motivação e Objetivos**

As máquinas de conformação contínua são capazes de produzir diversas transformações sobre uma bobina de aço para fabricar PFF em uma variedade inumerável de recombinações. Ainda que não esteja disponível uma fórmula simples que relacione a complexidade de um perfil com seu custo de fabricação, sabe-se que um número maior de dobras requer mais tempo/custo da máquina. Adicionalmente, desconhece-se uma função contínua que estime os valores de força ou momentos críticos associados aos modos de flambagem L, D e G para o caso geral de geometrias de PFF. Dessa forma, esta dissertação foi organizada em quatro linhas principais de trabalho: (i) análise de flambagem por ferramentas numéricas, (ii) previsão da carga crítica de flambagem distorcional, (iii) cálculo automatizado da resistência pelo Método da Resistência Direta e (iv) otimização dimensional por algoritmos meta-heurísticos.

Motivado pela busca de um otimizador de forma de PFF prático e tão simples quanto possível, o objetivo principal desta dissertação é desenvolver uma ferramenta computacional de código aberto em linguagem MATLAB para a maximização da resistência à compressão de perfis de aço formados a frio perfis tipo U enrijecidos (UE), com base em previsões de MRD segundo desenvolvimentos recentes e ainda não incorporados em normas e considerando restrições de fabricação extraídas de trabalhos científicos referentes à otimização de PFF.

A figura 2 ilustra a configuração usual de um perfil UE, objeto de estudo dessa dissertação. Nessa figura,  $b_w$ ,  $b_f$  e  $b_s$  correspondem as dimensões nominais da alma, mesas e enrijecedores de borda, respectivamente.

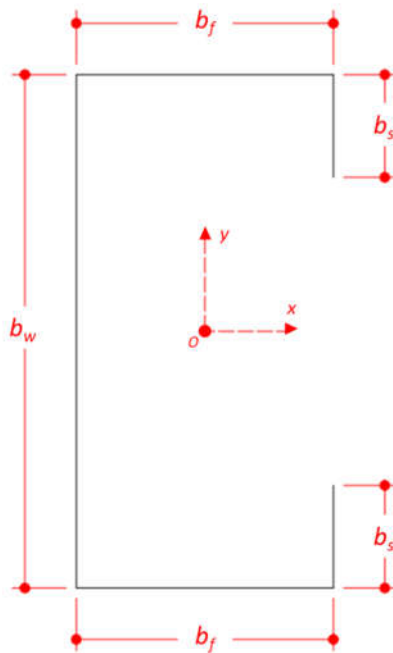


Figura 3: Seção típica de um perfil U enrijecido.

Os objetivos secundários desta dissertação são:

- i. Comparação do desempenho de diferentes algoritmos meta-heurísticos no problema de otimização de perfis U enrijecidos;
- ii. Apresentar o Aprendizado de Máquina como alternativa à obtenção da carga crítica de flambagem distorcional;

Adicionalmente, utilizando formulações analíticas, também é realizada uma breve discussão sobre suscetibilidade dos PFF otimizado à perda de resistência por interações modais do tipo L-D.

## 1.2. Organização da Dissertação

O capítulo dois apresenta uma revisão teórica sobre o comportamento estrutural de perfis de aço formados a frio, procedimentos de projeto, modos de falha envolvendo interações com a flambagem distorcional, aprendizado de máquina, otimização e os algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza, empregados nesta dissertação. O capítulo três compreende a metodologia desta dissertação. O capítulo quatro apresenta os resultados e discussões alcançados pela metodologia proposta. Finalmente, o capítulo cinco resume conjunto de conclusões alcançadas neste estudo.

## 2. REVISÃO TEÓRICA

### 2.1. Análise de Flambagem de Perfis de Aço Formados a Frio

Os perfis de aço formados a frio (PFF) apresentam seções transversais abertas de paredes finas relativamente esbeltas, o que os torna altamente suscetíveis a fenômenos de flambagem global (G) (flexão ou flexo-torção), local/placa (L) e distorcional (D). Dessa forma, seu comportamento estrutural e sua resistência são afetados, em maior ou menor grau, por esses fenômenos de perda de estabilidade, o que explica por que tais manifestações estão incorporadas nas especificações de normas de projeto referentes a PFF. Os modos de flambagem podem ser caracterizados de seguinte forma:

- i. Flambagem global: caracterizada pela flexão do perfil comprimido torno de seu eixo de menor inércia, podendo ocorrer em combinação com o fenômeno de torção (flexo-torção). A Figura 4 ilustra os modos flambagem global de um perfil UE submetido a compressão axial;

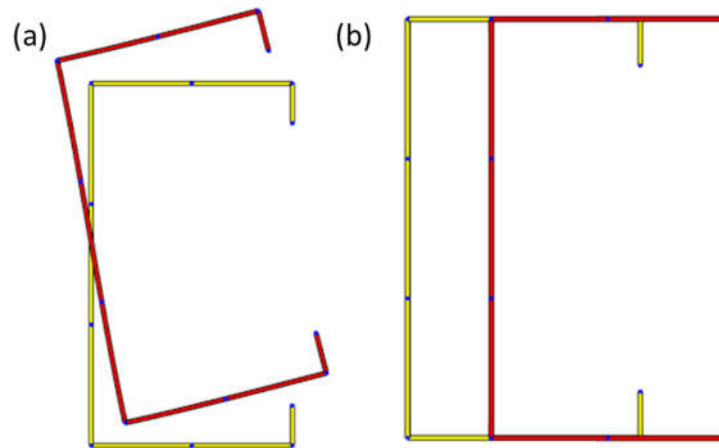


Figura 4: Modos de flambagem global de um perfil UE. (a) Flexo-torção; (b) flexão.

- ii. Flambagem local: caracterizada pela deformação dos subelementos que formam o perfil, sem o deslocamento ou mudanças de ângulos dos cantos dobrados de sua seção transversal. A Figura 5 ilustra diferentes modos de flambagem local de um perfil UE submetido a compressão axial;

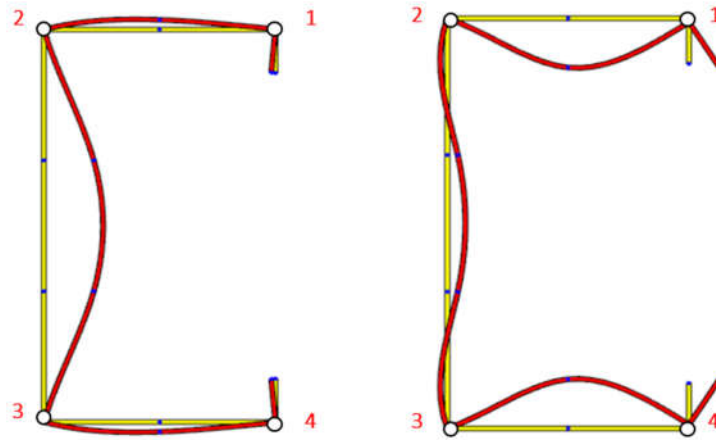


Figura 5: Diferentes modos de flambagem local de um perfil UE.

- iii. Flambagem distorcional: caracterizada pelo deslocamento ou mudanças de ângulos das arestas da seção transversal do perfil. A Figura 6 ilustra a flambagem distorcional de um perfil UE submetido a compressão axial.

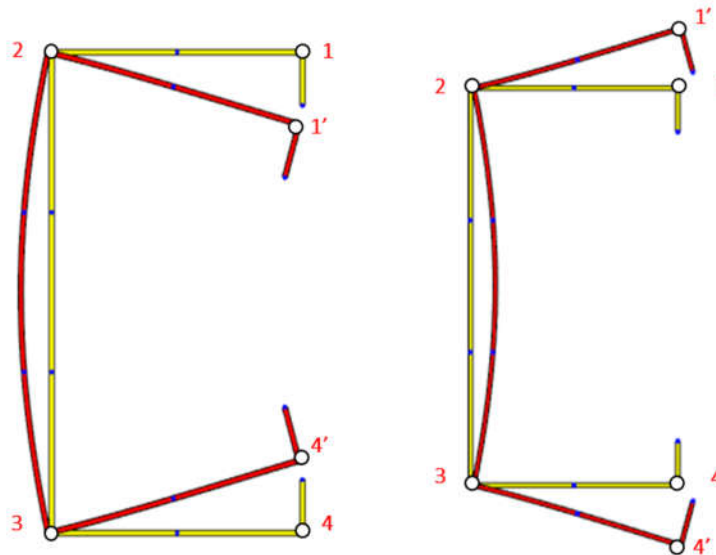


Figura 6: Diferentes modos de flambagem distorcional de um perfil UE.

Para examinar o comportamento da flambagem elástica dos perfis de aço formados a frio, estão disponíveis fórmulas analíticas (ou soluções de forma fechada) e métodos numéricos. A ênfase deste capítulo está nos métodos de solução numérica, concentrando-se em ferramentas computacionais para análise de flambagem elástica dos elementos de PFF, embora os modelos analíticos também sejam brevemente discutidos.

### 2.1.1. Fórmulas e modelos analíticos

A NBR14762 - Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio [3], fornece expressões analíticas para determinação das diferentes cargas de flambagem global. Dada uma barra de seção transversal constante sob compressão axial uniforme é possível utilizar a seguinte expressão para determinação da carga crítica global de flambagem por flexão ( $P_{Gx}$ ) em torno do eixo principal  $x$ :

$$P_{Gx} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{(K_x \cdot L_x)^2} \quad (1)$$

Onde  $E$  é o módulo de Young,  $I_x$  é o momento de inércia da seção transversal do perfil em torno de eixo principal  $x$ ,  $K_x \cdot L_x$  é o comprimento efetivo da coluna em torno de eixo principal  $x$ .

A carga crítica global de flambagem à flexão ( $P_{Gy}$ ) em torno do eixo  $y$  é dada por:

$$P_{Gy} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{(K_y \cdot L_y)^2} \quad (2)$$

Onde  $I_y$  é o momento de inércia da seção transversal do perfil em torno do eixo principal  $y$ ,  $K_y \cdot L_y$  é o comprimento efetivo da coluna em torno do eixo principal  $y$ .

A carga crítica de flambagem por torção em torno do eixo  $z$  ( $P_{Gz}$ ) para o caso de coincidência entre as posições dos centroides e do centro de cisalhamento (seções duplamente simétricas) é dada por:

$$P_{Gz} = \frac{1}{r_0^2} \cdot \left[ \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{(K_z \cdot L_z)^2} + G \cdot J \right] \quad (3)$$

Onde  $K_z \cdot L_z$  é o comprimento efetivo da coluna, levando em consideração as condições de impedimento de empenamento,  $r_0$  é o raio polar de giração em relação ao centro de cisalhamento,  $C_w$  é a constante de empenamento,  $G$  é o módulo transversal de Young e  $J$  é a constante de torção.

A carga crítica de flambagem à flexo-torção ( $P_{Gft}$ ) associada às seções monossimétricas é dada por:

$$P_{Gft} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_{Gx} + P_{Gz}}{2 \cdot [1 - (x_0/r_0)^2]} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot P_{Gx} \cdot P_{Gz} \cdot [1 - (x_0/r_0)^2]}{(P_{Gx} + P_{Gz})^2}} \right] \\ \frac{P_{Gy} + P_{Gz}}{2 \cdot [1 - (y_0/r_0)^2]} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot P_{Gy} \cdot P_{Gz} \cdot [1 - (y_0/r_0)^2]}{(P_{Gy} + P_{Gz})^2}} \right] \end{array} \right. \quad (4)$$

Onde  $x_0$  e  $y_0$  são as distâncias entre o centro de torção e o centroide na direção dos eixos principais  $x$  e  $y$ , respectivamente. Assumindo o caso de seções assimétricas gerais, a flambagem global  $P_{crG} = P_e$ , sempre relacionada ao modo de flambagem de flexo-torção, é a menor raiz positiva da seguinte equação cúbica:

$$r_0^2 \cdot (P_e - P_{Gx}) \cdot (P_e - P_{Gy}) \cdot (P_e - P_{Gz}) - P_e^2 \cdot (P_e - P_{Gy}) \cdot x_0^2 - P_e^2 \cdot (P_e - P_{Gx}) \cdot y_0^2 = 0 \quad (5)$$

As teorias clássicas de placas fornecem soluções analíticas para a carga crítica de flambagem local para placas isoladas retangulares apoiadas ao longo de suas bordas, quando sujeitas a compressão, flexão, cisalhamento ou uma combinação dessas cargas aplicadas no plano da placa. A NBR14762 [3], pautada na teoria de placas de TIMOSHENKO e GERE [4], fornece a seguinte expressão para determinação da carga crítica de flambagem local ( $P_{crL}$ ):

$$P_{crL} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot (b/t)^2} \cdot A \quad (6)$$

Onde  $\nu$  é o coeficiente Poisson do material,  $k$  é o coeficiente de flambagem de placa,  $b$  é a largura da placa,  $t$  é a espessura,  $A$  é a área bruta da seção.

O coeficiente de flambagem de placa  $k$  varia de acordo com a natureza do carregamento, como compressão uniforme, compressão e flexão no plano e cisalhamento, geralmente resumida nas normas de projeto na parte referente a estabilidade de estruturas metálicas. O coeficiente  $k$  varia igualmente com as condições de contorno da placa. Essa solução é estendida para placas dobradas, para as quais  $b$  é a largura da alma,  $A$  é a área da seção transversal e  $k$  é o coeficiente de flambagem da seção da placa dobrada. A NBR 14762 [3], pautada na hipótese de placas associadas de VON KÁRMÁN *et al.* [5], fornece a seguinte expressão para determinação coeficiente  $k$  de seções do tipo U enrijecido:

$$k = 6,8 - 5,8 \cdot (b_s/b_w) + 9,2 \cdot (b_s/b_w)^2 - 6 \cdot (b_s/b_w)^3 \quad (7)$$

Onde  $b_s$  é a largura das mesas da seção e  $b_w$  é a altura da alma.

Diversas pesquisas apresentam expressões analíticas para determinação da carga crítica de flambagem distorcional  $P_{crD}$ , mas ainda não há consenso no meio técnico sobre uma formulação unânime. Uma das propostas mais recentes de expressões matemáticas explícitas para a determinação de  $P_{crD}$  foi apresentada por CARDOSO *et al.* [6], que adotaram uma abordagem baseada em energia para formular duas expressões distintas

aplicáveis a perfis U enrijecidos. Os autores deste trabalho denominam de modelo de mesa flexível aquele que considera a junção mesa-enrijecedor de borda como um apoio flexível, para esse modelo aplica-se a seguinte equação:

$$P_{crD} = \frac{\frac{b_w \cdot D \cdot k_1^2}{60} \left[ \pi^2 \cdot \left( \frac{b_w}{L} \right)^2 + 20 + \left( \frac{120}{\pi^2} \right) \cdot \left( \frac{L}{b_w} \right)^2 \right] + \left( \beta^2 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{zw}}{L^2} + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_w}{L^2} + k_2^2 \cdot G \cdot J \right) + \frac{b_f \cdot D \cdot k_1^2}{210} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 22 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{b_f}{b_w} \right)^2 + 77 \cdot \pi^2 \cdot \left( \frac{b_f}{b_w} \right) + 70 \cdot \pi^2 \right] \cdot \left( \frac{b_f}{L} \right)^2 + \\ (224 - 280 \cdot \nu) \cdot \left( \frac{b_f}{b_w} \right)^2 + (560 - 700 \cdot \nu) \cdot \left( \frac{b_f}{b_w} \right) + 420 \cdot (1 - \nu) \end{array} \right\} + \frac{280}{\pi^2} \left( \frac{b_f}{b_w} \right)^2 \cdot \left( \frac{L}{b_f} \right)^2}{I_0 + A \cdot (\Delta Y_s + \beta)^2} \quad (8)$$

Onde  $D = E \cdot t^3 / [12 \cdot (1 - \nu^2)]$  é a rigidez da placa,  $L$  é o comprimento da coluna,  $b_f$  é a largura da mesa,  $I_0$  é o momento aparente de inércia polar relacionada ao centroide  $O$  da seção,  $\Delta Y_s$  é a distância entre a junção da mesa/alma e o centro de rotação  $S$ ,  $I_w$  constante de empenamento da mesas enrijecidas em relação a  $S$ ,  $I_{zw}$  é o parâmetro geométrico da seção transversal,  $\beta$  corresponde ao deslocamento de flexão da seção transversal em torno do eixo de menor inércia por unidade de rigidez da mesa, dada por:

$$\beta = \frac{b_f \cdot b_s^2 \cdot (2 \cdot b_f + 2 \cdot b_s + b_w)}{(b_f^2 + 4 \cdot b_f \cdot b_s + 2 \cdot b_f \cdot b_w + 6 \cdot b_s \cdot b_w) \cdot (2 \cdot b_s + b_f)} \quad (9)$$

Onde  $k_1$  e  $k_2$  são coeficientes que correlacionam a rotação geral da mesa com enrijecedor de borda e a rotação da alma, respectivamente, dados por:

$$k_1 = \frac{1}{1 + 2/3 \cdot (b_f/b_w)} \quad (10)$$

$$k_2 = \frac{(b_f + b_w)}{[1 + 2/3 \cdot (b_f/b_w)] \cdot b_w} \quad (11)$$

Também foram propostas fórmulas empíricas, usando programação meta-heurística e/ou redes neurais [7], [8], [9], para determinação da carga crítica de flambagem distorcional de PFF criados a partir de dados obtidos via expressões analíticas, dados experimentais e soluções numéricas como a Teoria Generalizada de Viga (*Generalized Beam Theory* – GBT) e o Método das Faixas Finitas (MFF). Os modelos empíricos costumam apresentar alta precisão e acurácia na previsão da carga crítica de flambagem distorcional, necessitando de um processo de simples implementação e possuindo baixo custo computacional de processamento. Todavia, como as formulações empíricas não são

desenvolvidas considerando o comportamento mecânico do perfil, fora do domínio de treino de teste (mesmo que muito próximos) esses modelos tendem a apresentar erros elevados.

### 2.1.2. Métodos numéricos para análise de flambagem elástica

Para examinar o comportamento de flambagem elástica de PFF, os principais métodos numéricos são o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Faixas Finitas (MFF), Teoria Generalizada de Viga (*Generalized Beam Theory* – GBT) e, mais recentemente, o Método das Faixas Finitas restringidas (cFSM).

#### 2.1.2.1. Método dos Elementos Finitos (MEF)

Com o intuito de capturar a deformação da seção transversal, o emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise de estabilidade de PFF é frequentemente realizado pelos elementos de casca, dada a natureza fina dos elementos que constituem um perfil formado a frio.

A análise de estabilidade de modelos construídos através de elementos finitos de casca fornece as cargas críticas de flambagem (autovalores  $\lambda$ ) e suas respectivas configurações deformadas (autovetores  $\varphi$ ). O problema de estabilidade associado pode ser expresso da seguinte forma:

$$(\mathbf{K}_e - \lambda \cdot \mathbf{K}_g) \cdot \varphi = 0 \quad (12)$$

Onde  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez elástica do elemento de casca adotado (podendo ser estabelecida a partir de diferentes teorias de placas),  $\mathbf{K}_g$  é a matriz de rigidez geométrica.

A análise de estabilidade de PFF via MEF é uma tarefa que requer experiência do usuário, principalmente devido caráter subjetivo da identificação modal da perda de estabilidade. Na análise de flambagem elástica, os três aspectos mais influentes são as (i) condições de contorno, (ii) densidade de malha e (iii) a escolha do modelo matemático do elemento finito de casca.

Ao mesmo tempo que os modelos em elementos finitos de casca podem simular cargas arbitrárias, seções transversais complexas e diversas condições de apoio, esse tipo de modelagem não fornece mecanismos para identificação modal de flambagem, ao em vez disso, é necessária um processo de investigação visual para classificar os modos de flambagem.

### 2.1.2.2. Método das Faixas Finitas (MFF)

O Método das Faixas Finitas (MFF) [10] é uma variante do MEF, mais eficiente em termos de esforço computacional e voltada para uma classe mais restrita de problemas. No MFF, os elementos de paredes finas são discretizados em faixas longitudinais (Figura 7 (b)) em vez da discretização em malha de elementos finitos (Figura 7 (a)). Como no MEF, um problema de autovalor semelhante ao apresentado na Equação 12 pode ser desenvolvido para execução da análise de estabilidade, porém com menos graus de liberdade envolvidos.

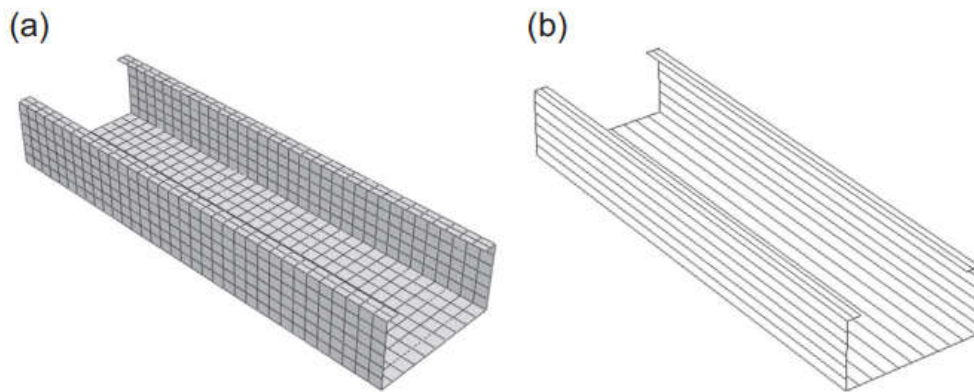


Figura 7: Elementos finitos de casca e faixas finitas; (a) malha MEF; (b) malha MFF [11].

O MFF é amplamente aplicado na análise de estabilidade em elementos estruturais de paredes finas sob tensão longitudinal, principalmente de perfis de aço formado a frio. A aplicação do MFF em elementos de PFF em condições simplesmente apoiadas, usando uma função senoidal, produz como solução uma curva de assinatura que expressa em termos de comprimento de meia-onda de flambagem e tensão crítica de flambagem (ou carga crítica, feita a devida conversão), o comportamento do elemento analisado.

A Figura 8 ilustra a curva de assinatura de uma coluna em perfil U enrijecido sob compressão axial uniforme, destacando os modos de flambagem L, D, G (flexo-torção e flexão). A carga crítica de flambagem local  $P_{crL}$  pode ser identificada como primeiro mínimo local da curva de assinatura, a carga crítica de flambagem distorcional  $P_{crD}$  pode ser identificada como segundo mínimo local da curva de assinatura e as cargas críticas de flambagem global  $P_{crG}$  são identificadas após o segundo ponto máximo da curva de assinatura.

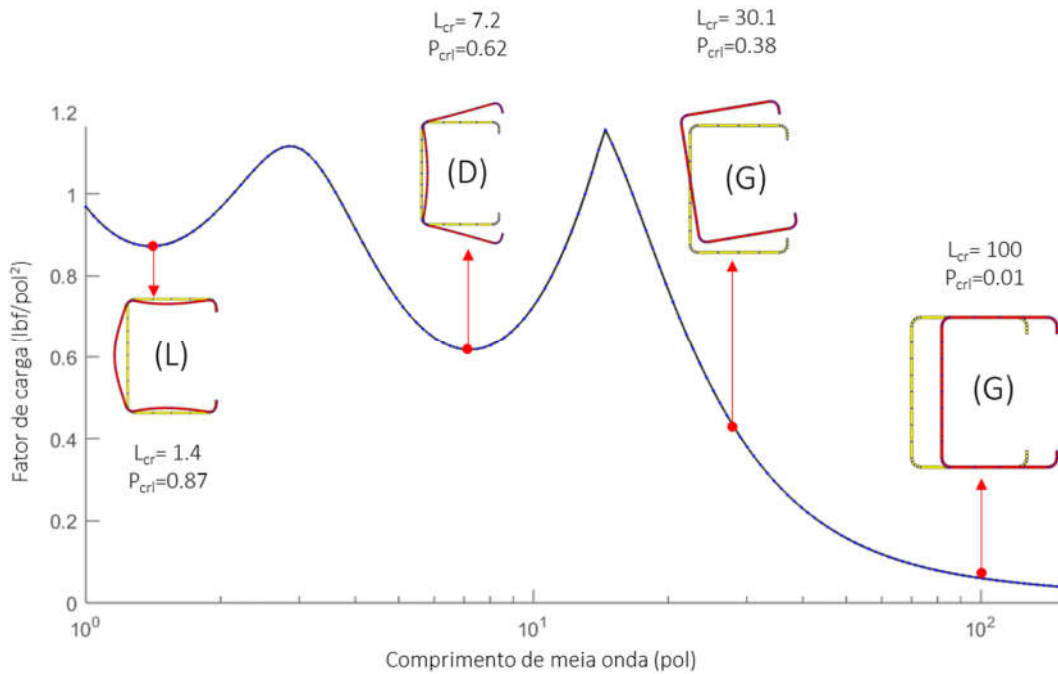


Figura 8: Uma curva assinatura típica do MFF para uma coluna em perfil U enrijecido.<sup>1</sup>

### 2.1.2.3. Método das Faixas Finita restringidas (*constrained Finite Strip Method*)

O Método das Faixas Finita restringidas [12], em inglês *constrained Finite Strip Method* (cFSM), expande as considerações do MFF dividindo o campo de deslocamento original do Método das Faixas Finitas em quatro categorias de modo de flambagem: local (L), distorcional (D), global (G) e de cisalhamento transversal (CT). A divisão é possível assumindo certos critérios mecânicos. De forma análoga, os modos de deformação também podem ser definidos [11].

A Figura 9 ilustra a decomposição modal e a identificação para a condição de contorno simplesmente apoiada de uma coluna de PFF tipo U enrijecido.

<sup>1</sup> Diversas figuras presentes nesta dissertação apresentam como separador decimal o caractere “.”, porque foram geradas por aplicativos que utilizam inglês como padrão.

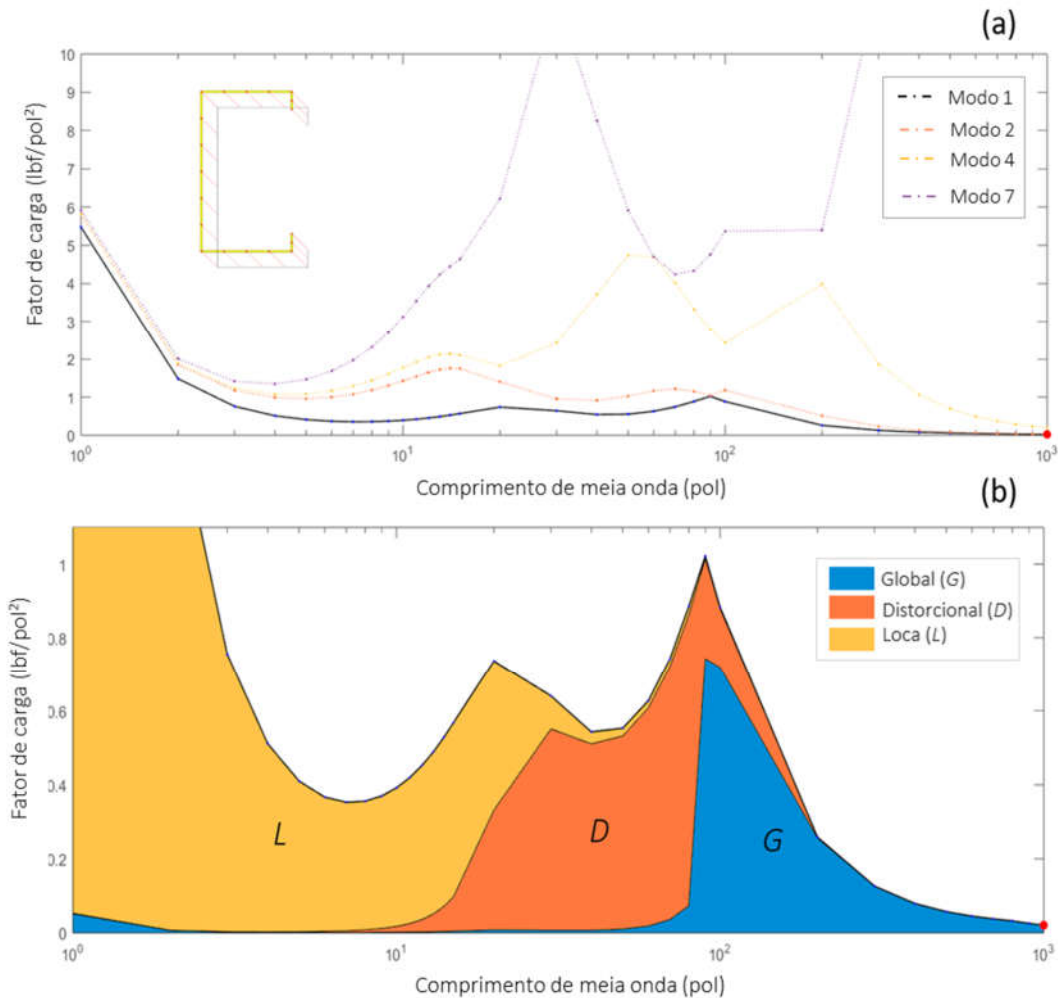


Figura 9: Decomposição modal e identificação de um perfil U enrijecido de paredes finas para uma coluna simplesmente apoiada pelo cFSM (CUFSM). (a) Decomposição modal; (b) identificação modal.

#### 2.1.2.4. Teoria Generalizada de Viga

Originalmente desenvolvido por SCHARDT [13], a Teoria Generalizada de Viga (*Generalized Beam Theory* – GBT) é aplicável a elementos de paredes finas e amplamente utilizada na análise de flambagem de PFF. Assim como no cFSM, a GBT é capaz de fornecer a separação e identificação dos modos de flambagem do perfil analisado. A GBT foi extensamente aplicada e ampliada pelo grupo de pesquisa do Instituto Superior Técnico (IST) da Universidade de Lisboa, por exemplo, o trabalho de GONÇALVES e CAMOTIM [14] permitiu ao GBT realizar análises não lineares, incluindo a não linearidade geométrica e de material. Trabalhos relacionados ao GBT podem ser encontrados em BEBIANO *et al.* [15], ABAMBRES *et al.* [16], [17], BASAGLIA *et al.* [18] e SILVESTRE e CAMOTIM [19].

A formulação robusta da GBT é considerada uma das teorias de vigas mais completas para análise de flambagem elástica de PFF. Contrastando com a formulação original do Método das Faixas Finitas restringidas, a GBT é aplicável a elementos de paredes finas de seção transversal fechada.

### **2.1.3. Programas de código aberto e outros pacotes de software**

#### **2.1.3.1. GBTUL**

O GBTUL [20], uma abreviação de GBT da Universidade de Lisboa, é um programa computacional gratuito normalmente aplicado para análises de flambagem elástica e vibração de PFF. O programa inclui a formulação atual do GBT. O GBTUL usa a vantagem da abordagem modal do GBT para fornecer a visualização dos modos de deformação e contribuição modal. O GBTUL permite a seleção de modos de deformação específico na análise, sendo também possível avaliar membros constituídos por um ou mais materiais isotrópicos ou ortotrópicos, e sob condições de apoio pré-determinadas. Nas análises de flambagem, o usuário pode definir qualquer combinação arbitrária de carregamento [18].

#### **2.1.3.2. CUFSM**

O CUFSM [21] é um *software* de código aberto, que emprega o MFF para fornecer a análises de flambagem elástica de membros de paredes finas. A implementação do Método das Faixas Finitas restringidas no CUFSM permite que este programa ofereça informações semelhantes ao GBTUL, como identificação e participação modal.

A Figura 10 ilustra uma curva de assinatura e a identificação modal de uma coluna em perfil Z enrijecido simplesmente apoiada sob compressão axial uniforme, possível devido a implementação do Método das Faixas Finitas restringidas na versão atual do CUFSM.

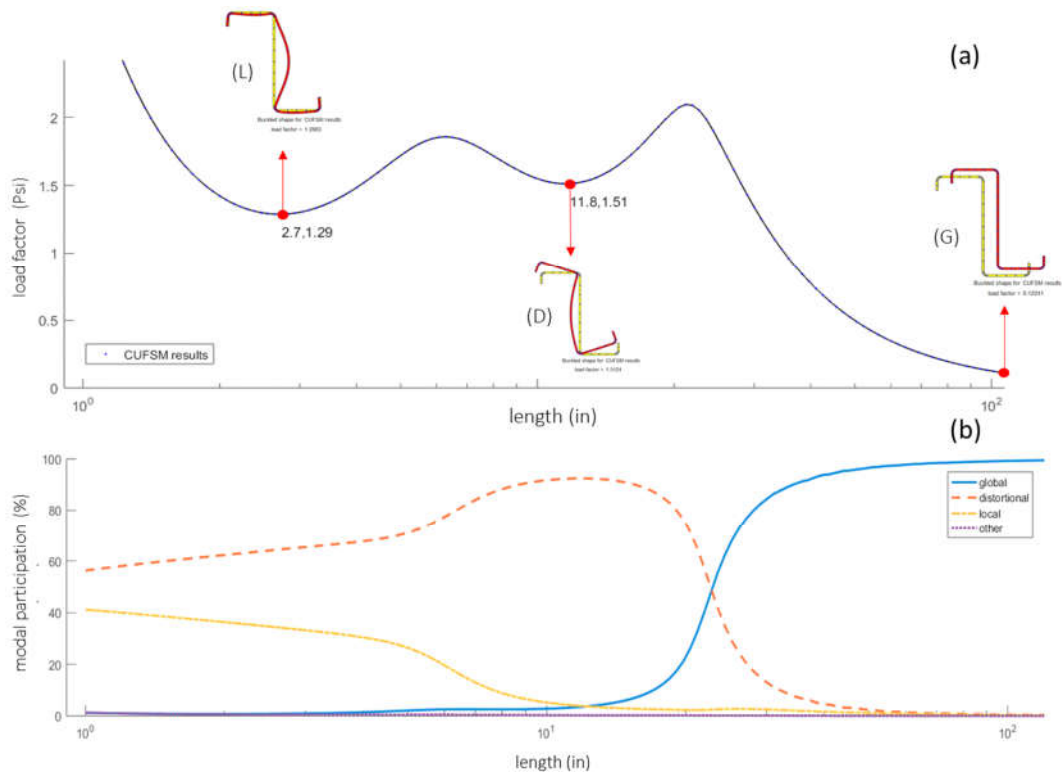


Figura 10: Resultados de uma análise de flambagem realizada pelo CUFMS (saída original em inglês). (a) Curva de assinatura e identificação modal; (b) participação modal.

Como no GBTUL, na análise realizada pelo CUFMS, o usuário pode especificar qualquer combinação de carregamento arbitrário (força axial, momento fletor, bimomento, por exemplo). O CUFMS fornece uma interface intuitiva e tem sido amplamente utilizado por pesquisadores devido à acessibilidade do código fonte em MATLAB.

### 2.1.3.3. FSrt

O FSrt é um *software* desenvolvido em MATLAB por LAZZARI [22], membro do grupo de pesquisa de estruturas de paredes finas da Universidade Federal do Rio de Janeiro (COPPE-UFRJ). Seu ambiente de desenvolvimento é inspirado no programa computacional CUFMS, que emprega o Método das Faixas Finitas para fornecer a análise de flambagem elástica. A implementação em programação vetorizada, que se utiliza de operações matriciais e vetoriais ao invés dos tradicionais *loops* de programação, foi planejada para melhorar o desempenho computacional em relação ao CUSFM, com uma interface de usuário limpa e leve (Figura 11). Dada a velocidade de processamento na análise de flambagem elástica, o FSrt tem um papel importante no problema de otimização proposto nesta dissertação, devido à redução do tempo de avaliação da função

objetivo. O FSrt é um trabalho ainda em desenvolvimento, mas que já se encontra operacional para várias aplicações, especialmente na otimização de PFF.

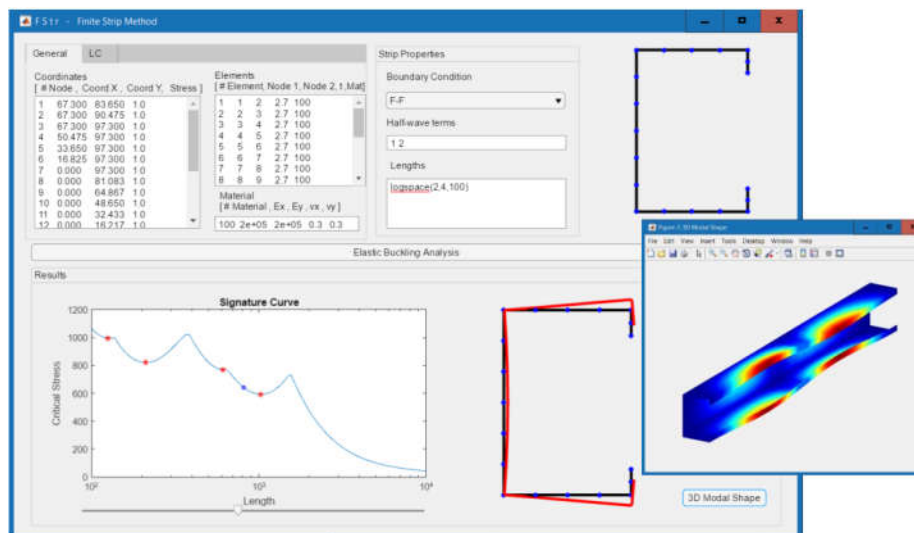


Figura 11: A interface gráfica do usuário do FSrt [22].

#### 2.1.3.4. Softwares de MEF

As ferramentas apresentadas anteriormente para análise de flambagem elástica de PFF são programas computacionais gratuitos que foram desenvolvidos em sua maioria em meio acadêmico. Por outro lado, os aplicativos MEF mais usuais são comerciais, mesmo os adotados pela comunidade científica. Entre eles destacam-se o ABAQUS FEA [23] e o ANSYS FEA [24].

### 2.2. Método da Resistência Direta (MRD)

O Método da Resistência Direta (MRD) foi inicialmente proposto por SCHAFER e PEKÖZ [25], como um procedimento para a determinação da capacidade resistente de PFF. O processo de cálculo simplificado do MRD contribuiu para sua rápida aceitação pela comunidade técnica e científica e sua inserção em diversas normas internacionais de projeto de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio. O MRD, na sua proposta original, considera a flambagem distorcional como uma possível causa da falha dos PFF e também apresenta expressões explícitas para cálculo de resistência para caso de interação G-L. Desde sua criação, as aplicações MRD tem sido expandida pelos constantes trabalhos de pesquisa na temática de PFF motivados, dentre outros razões, pelo desenvolvimento de perfis com seções transversais cada vez mais complexas por parte dos fabricantes.

Tradicionalmente, o projeto de PFF lida com a flambagem local, recorrendo primeiramente ao Método de Largura Efetiva (MLE), calibrado por WINTER [26], incorporado em praticamente todas as normas internacionais referentes a esse tipo de elemento estrutural. No contexto de estruturas formadas por PFF, esse método pode ser encontrado por exemplo na norma europeia *Eurocode 3- Design of steel structures* [27], na norma Norte-Americana de projeto de elementos estruturais de aço formados a frio (*North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members – AISI S100*) [28] e na norma brasileira NBR14762 – Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio [3]. Todavia, o MRD apresenta vantagens consideráveis em comparação com o MLE, derivadas do fato da seção transversal ser analisada como um todo, o que significa levar em conta, de forma realista, a interação entre as paredes da seção.

O Método da Resistência Direta foi calibrado a partir de um extenso banco de dados de ensaios experimentais de compressão e flexão de seções típicas de PFF em diferentes modos de falha [29]. O MRD parte da hipótese de que a resistência a compressão de um perfil de aço pode ser estimada a partir das suas cargas críticas de flambagem elástica ( $P_{crL}$ ,  $P_{crD}$  e  $P_{crG}$ ) e de sua tensão de escoamento ( $f_y$ ). Dessa maneira, a formulação do MRD incorpora considerações da plasticidade e estabilidade do elemento sob análise.

Como explicitado anteriormente, o MRD exige conhecimento prévio das cargas críticas de flambagem do elemento em consideração, o que torna necessário o emprego de ferramentas computacionais para análise de flambagem elástica, especialmente para determinar a tensão crítica associada a flambagem distorcional.

### **2.2.1. Curvas de projeto do MRD**

A norma brasileira NBR 14672 [3] permite o uso do MRD para determinar a resistência à compressão axial ( $P_n$ ) e nominal a flexão ( $M_n$ ) de diversas seções transversais de PFF. Para colunas e vigas, as formas típicas de seção transversal incluem seção de canal U, seção Z, perfis com enrijecedores de borda, seções transversais cartola ( $\Omega$ ) e tipo *rack*.

A Figura 12 ilustra algumas formas típicas de seção transversal adotadas em colunas e em vigas.

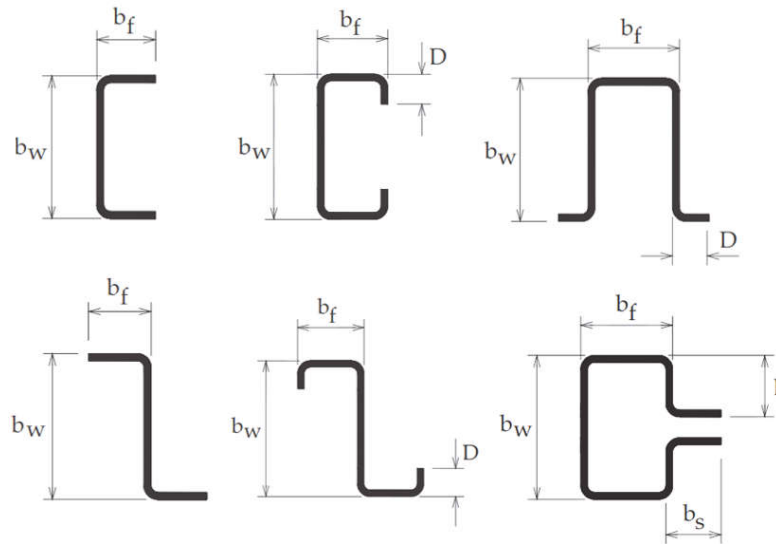


Figura 12: Formas típicas de seção transversal de PPF [3].

Mesmo membros de seções transversais típicos, aquelas consideradas no desenvolvimento, calibração e validação das curvas de projeto do MRD, devem atender aos critérios geométricos apresentados na Tabela 9 da NBR 14672 [3] para aplicação de equações explícitas. Vale ressaltar que as expressões analíticas disponíveis na norma estimam apenas as cargas críticas de flambagem local e global, como apresentado anteriormente. Dessa forma, a determinação da carga crítica de flambagem distorcional deve ser realizada via ferramentas computacionais.

As cargas de flambagem crítica local, distorcional e global da coluna e de vigas podem ser calculadas por análises de flambagem linear elástica de modelos computacionais em elementos finitos de casca, faixas finitas (MFF) ou teoria generalizada de viga (GBT). Enquanto a análise com elementos finitos de casca é geralmente realizada com pacotes de *softwares* comerciais, é possível executar os outros métodos disponíveis gratuitamente (alguns de código aberto), como GBTUL, CUFSM e FSrt por exemplo. Os elementos finitos de casca apresentam aplicação mais geral, pois podem lidar com colunas e vigas com maior variedade de condições de apoio e carregamento. No entanto, as análises por MFF ou GBT apresentam menor custo computacional e oferecem o recurso de identificação e participação modal. Os resultados obtidos pelo GBTUL e CUFSM geralmente são compatíveis com os oferecidos pela análise de elementos finitos de casca para membros prismáticos de paredes finas simplesmente apoiados [20].

### 2.2.1.1. Resistência à compressão

O MRD descreve resistência à compressão axial nominal  $P_n$  como a uma função  $f(P_{crG}, P_{crL}, P_{crD}, P_y)$ , onde  $P_y$  ( $P_y = A \cdot F_y$ ) é a carga de escoamento do perfil,  $P_{crG}$ ,  $P_{crL}$  e  $P_{crD}$  correspondem as cargas críticas dos modos de flambagem global, local e distorcional, respectivamente.

A resistência à compressão axial nominal na flambagem global é estimada por:

$$P_{nG} = \begin{cases} (0,658\lambda_G^2) \cdot P_y & \lambda_G \leq 1,5 \\ (0,877 / \lambda_G^2) \cdot P_y & \lambda_G > 1,5 \end{cases} \quad (13)$$

Onde  $\lambda_G$  é o índice de esbeltez associado a flambagem global, dado por:

$$\lambda_G = \left( \frac{P_y}{P_{crG}} \right)^{0,5} \quad (14)$$

Como a falha local dos perfis de aço formados a frio pode ocorrer em conjunto com a flambagem global, o MRD recomenda o cálculo da resistência nominal das colunas em falha na interação modal global-local (G-L). A resistência à compressão axial nominal na flambagem G-L é estimada pela seguinte curva de Winter:

$$P_{nL} = \begin{cases} P_{nG} & \lambda_L \leq 0,776 \\ \left( 1 - \frac{0,15}{\lambda_L^{0,8}} \right) \cdot \frac{P_{ne}}{\lambda_L^{0,8}} & \lambda_L > 0,776 \end{cases} \quad (15)$$

Onde  $\lambda_L$  é o índice de esbeltez associado a flambagem G-L, dado por:

$$\lambda_L = \left( \frac{P_{nG}}{P_{crL}} \right)^{0,5} \quad (16)$$

Observa-se que  $P_{nL}$  sempre deve ser calculado levando-se em consideração a falha interativa G-L introduzindo os termos  $P_{nG}$  e  $P_{ne}$  em vez de  $P_y$  na Equação 15 e Equação 16. A resistência nominal à flambagem distorcional é estimada pela seguinte curva de Winter:

$$P_{nD} = \begin{cases} P_y & \lambda_D \leq 0,561 \\ \left( 1 - \frac{0,25}{\lambda_D^{1,2}} \right) \cdot \frac{P_y}{\lambda_D^{1,2}} & \lambda_D > 0,561 \end{cases} \quad (17)$$

Onde  $\lambda_D$  é o índice de esbeltez associado flambagem distorcional, dado por:

$$\lambda_D = \left( \frac{P_y}{P_{crD}} \right)^{0,5} \quad (18)$$

Dessa forma, a resistência axial nominal da coluna é expressa como  $P_n = \min(P_{nL}, P_{nD}, P_{nG})$ . Vale ressaltar que os modos críticos de flambagem e os modos falha não são necessariamente os mesmos. Assim, há a necessidade de avaliar  $P_{nL}$ ,  $P_{nD}$ , e  $P_{nG}$ , devido às diferentes quantidades de reserva de resistência pós-flambagem referentes aos modos local, distorcional e global.

SCHAFFER [29] também avaliou a confiabilidade e a qualidade da metodologia de projeto do MRD para colunas. Demonstrando que essa abordagem de projeto fornece estimativas adequadas quando comparadas a um conjunto de 249 resultados experimentais de cargas de falhas, através da relação de carga de falha experimental aferida por carga de falha estimada ( $P_u/P_n$ ).

É importante destacar que as curvas de resistência do MRD, na sua concepção original, adotadas por diversas normas de projeto de estruturas formadas por PFF, não consideram nenhuma das possíveis perdas de resistência devido as interações modais envolvendo a flambagem distorcional.

### **2.2.2. Resistência de colunas envolvendo a flambagem distorcional**

O MRD, na sua formulação original [25], apresenta lacunas acerca dos fenômenos de interação que envolvem a flambagem distorcional, a saber: interação local-distorcional (L-D), distorcional-global (D-G) e local-distorcional-global (L-D-G). Grande parte da pesquisa sobre interação modal é dedicada ao estudo experimental e numérico de colunas em perfil UE, embora investigações diferentes seções transversais e formas de carregamento também tenham sido conduzidas.

Dentre as possíveis formas de interações modal envolvendo a flambagem distorcional, a interação L-D foi a primeira a ser investigada e portanto, a que também apresenta o maior volume de pesquisa relacionada. Diversos trabalhos de pesquisas relatam a perda de resistência devido a interação L-D, KWON e HANCOCK [30] e KWON *et al.* [31], por exemplo. Para MARTINS *et al.* [32] as principais causas da interação L-D são (i) proximidade das cargas críticas local e distorcional ( $0,8 \leq P_{crL}/P_{crD} \leq 1,3$ ), que causa forte interação entes os modos entre os modos de flambagem (interação verdadeira), na ausência dessa proximidade, (ii) a alta esbeltez não crítica pode causar interação secundária dos modos de flambagem, o que é relevante quando a flambagem local é o modo crítico. Esse último trabalho também descreve a interação verdadeira L-D como um potencial causador de perda significativa de resistência de perfis UE sob compressão axial.

Com base em uma investigação numérica e experimental envolvendo uma gama de colunas em perfil U enrijecido em falha local-distorcional abrangendo diversos valores de  $R_{\lambda DL}$  ( $R_{\lambda DL} = \lambda_D/\lambda_L$ ), MATSUBARA *et al.* [33] apresentaram estimativas precisas de carga de falha para  $\lambda_{Max} = \max(\lambda_L, \lambda_D) < 2,5$ . Esses resultados levaram à proposta de uma superfície de resistência a compressão axial em situação de falha local-distorcional ( $P_{nLD}$ ), relacionada às variáveis  $\lambda_{Max}$  e  $R_{\lambda DL}$  e descrita pela seguinte equação do tipo Winter:

$$P_{nL-D} = \left(1 - \frac{A}{\lambda_{Max}^B}\right) \cdot \frac{P_y}{\lambda_{Max}^B} \quad (19)$$

Os coeficientes A e B foram calibrados com base em resultados numéricos e experimentais, e equacionados da seguinte maneira:

$$A = \begin{cases} 0,15 & R_{\lambda DL} < 0,90 \\ 20,64 \cdot R_{\lambda DL}^3 - 57,75 \cdot R_{\lambda DL}^2 + 54,33 \cdot R_{\lambda DL} & 0,6 \leq R_{\lambda DL} \leq 1,05 \\ 0,25 & R_{\lambda DL} > 1,05 \end{cases} \quad (20)$$

$$B = \begin{cases} 0,80 & R_{\lambda DL} < 0,45 \\ 7,17 \cdot R_{\lambda DL}^4 - 25,76 \cdot R_{\lambda DL}^3 + 31,07 \cdot R_{\lambda DL}^2 - 14,21 \cdot R_{\lambda DL} + 2,9 & 0,6 \leq R_{\lambda DL} \leq 1,0 \\ 1,20 & R_{\lambda DL} > 1,0 \end{cases} \quad (21)$$

BATISTA *et al.* [34] aprimoraram a proposta de superfície única de resistência através de polinômio de grau mais baixo, calculando os coeficientes A e B da seguinte forma:

$$A = 0,40 \cdot R_{\lambda DL} - 0,17 \quad (22)$$

$$B = -2,64 \cdot R_{\lambda DL}^2 + 4,06 \cdot R_{\lambda DL} - 0,57 \quad (23)$$

A superfície de resistência definida pelas equações 23, 26 e 27 é apresentada na Figura 13.

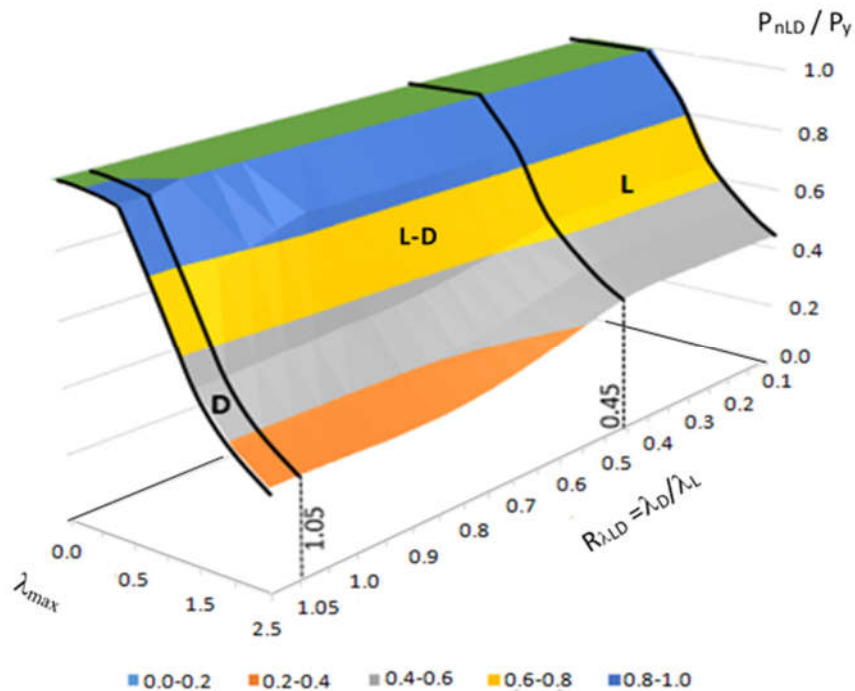


Figura 13: Superfície de resistência  $P_{nLD}/P_y$  para interação de flambagem L-D de PFF tipo U enrijecidos [34].

Em contraponto com a interação L-D, a interação D-G é que apresenta menor volume de trabalhos relacionados. Nesse contexto, vale citar as pesquisas recentes de MARTINS *et al.* [35], [36], CHONG *et al.* [9] e o trabalho de LAZZARI e BATISTA [22] produzido pelo grupo de pesquisa de paredes finas da COPPE. Dentre aos trabalhos de pesquisa relacionados à interação L-D-G vale destacar os trabalhos de SANTOS *et al.* [37], [38] (também produzidos na COPPE) e de YOUNG *et al.* [39], que apresentam resultados experimentais e numéricos de perda de resistência devido essa forma de interação.

### 2.3. Aprendizado de Máquina

O Aprendizado de Máquina (AM), em inglês *Machine Learning*, é um campo de inteligência artificial (IA) que usa algoritmos computacionais que aprendem e melhoram com a experiência. Explicando em poucas palavras, isso envolve o uso de um conjunto de dados empíricos para prever resultados de um conjunto de dados novos. Esses conjuntos de dados representam conjuntos de treinamento nos quais a máquina é capaz de estudar e extrair inferências ou “aprender”, usando o reconhecimento de padrões para tomar decisões por conta própria. Tais conclusões são comparadas a um conjunto de testes

de resultados reais para avaliar a precisão do algoritmo. À medida que número de dados nos conjuntos de treinamento aumenta, e o número de repetições de testes cresce o "aprendizado experimental" do algoritmo adotado progride, e mais precisas se tornam as predições [40].

A Figura 14 apresenta, de forma resumida, o fluxo básico para construção de um modelo de AM (também conhecidos como modelos baseados em dados).

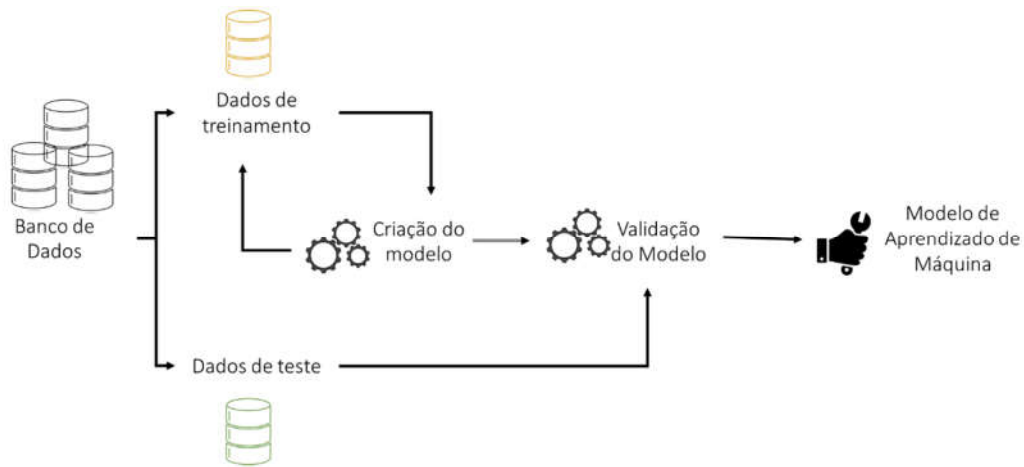


Figura 14: Construção de um modelo baseado em dados.

Os sistemas de Aprendizado de Máquina podem ser classificados de acordo com o tipo de supervisão que recebem durante o treino. Os dois principais sistemas são: (i) supervisionados e (ii) não supervisionados. O contraste fundamental entre os dois tipos é que o aprendizado supervisionado é realizado usando rótulos, ou seja, o usuário tem as informações prévias sobre o que os valores de saída devem assumir. Conseqüentemente, o aprendizado supervisionado pretende aprender uma função que, a partir de uma amostra de dados e resultados desejados, aproxima-se melhor da correlação entre entrada e saída observável. Por outro lado, o aprendizado não supervisionado não possui resultados identificados, portanto seu objetivo é prever a distribuição natural presente no interior de um banco de dados [41].

A Figura 15 ilustra as principais subdivisões do Aprendizado de Máquina e suas respectivas ramificações.

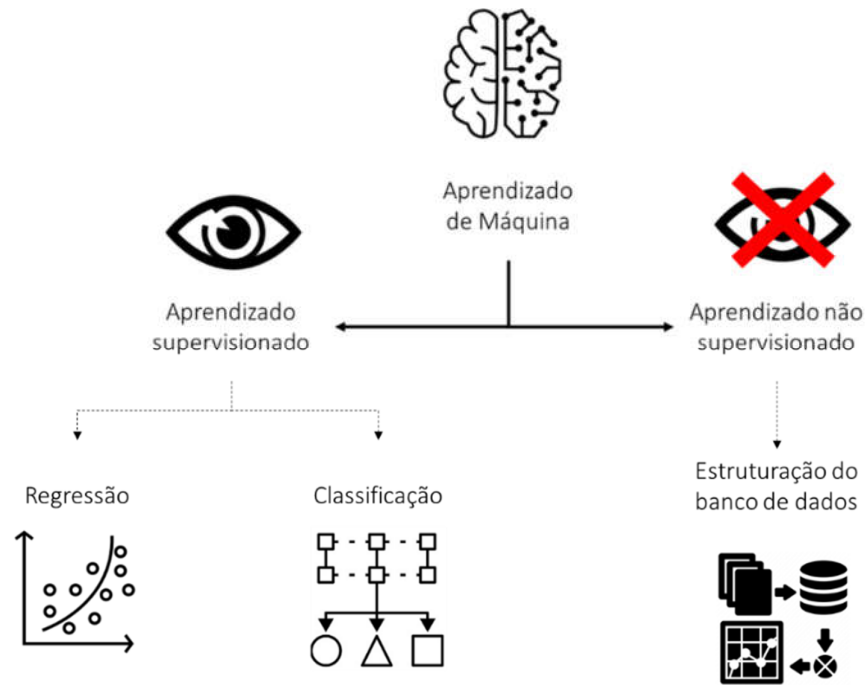


Figura 15: Subdivisões do Aprendizado de Máquina.

Uma forma de verificar a acurácia e a precisão de um modelo baseado em dados é comparar a distância entre os valores preditos entre si em relação a valores previamente conhecidos, denominados de dados rotulados (ou resposta verdadeira). Essa verificação muitas vezes é feita de forma gráfica, como a Figura 16 ilustra.

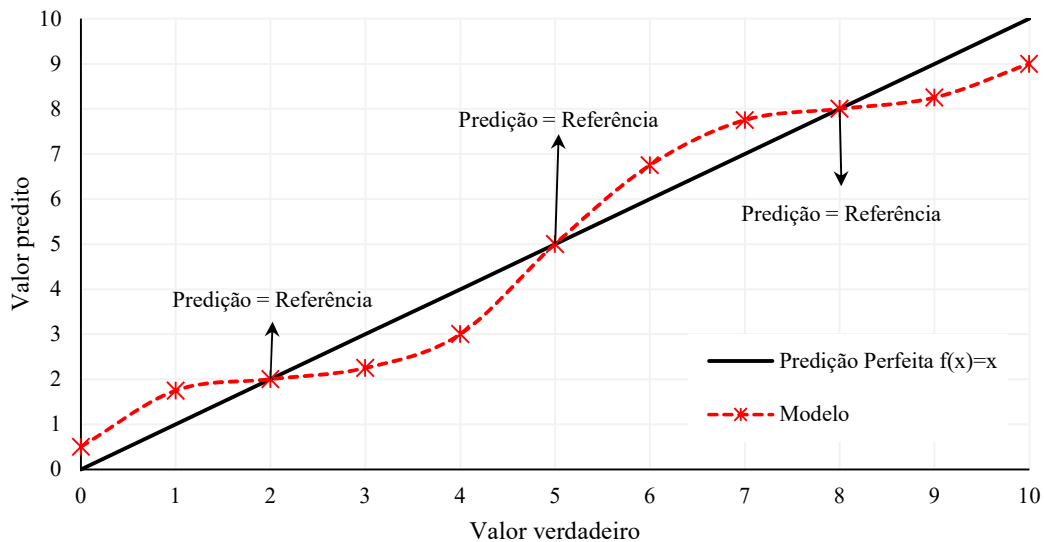


Figura 16: Comparação entre os resultados preditos por um modelo e os valores reais do problema.

Na Figura 16 o eixo  $x$  do gráfico corresponde aos valores de resposta verdadeira e o eixo  $y$  corresponde aos valores estimados pelo preditor. A reta de predição perfeita é construída relacionando os valores rotulados na forma  $f(x) = x$ , dessa maneira quanto mais próximos os valores preditos por um modelo estão da reta de predição perfeita mais preciso esse modelo será.

### 2.3.1. Processos gaussianos para aprendizado de máquina supervisionado

Um processo Gaussiano (*Gaussian process* - GP) é uma abstração da distribuição de probabilidade Gaussiana. Nesse método de regressão, são atribuídos valores aleatórios para as variáveis de entrada, escalares ou vetoriais, geradas segundo uma distribuição de probabilidade Gaussiana para um conjunto de soluções candidatas do problema. Resumidamente, uma função pode ser representada como um vetor longo, onde cada posição desse vetor corresponde o valor da função  $f(x)$  para um dado vetor de entradas  $\mathbf{X}$ . Um dos principais atrativos do esquema de GP é a capacidade de identificar o fluxo das informações que correlacionam candidatos e seus desempenhos [42].

A ideia geral da Regressão de Processo Gaussiano (*Gaussian Process Regression* - GPR) é que os dados de saída  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  podem ser pensados como uma amostra de uma distribuição Gaussiana multivariada ( $n$  - variável). Normalmente, assume-se que a média dessa distribuição seja 0. O Processo Gaussiano é representado como:

$$\mathbf{y} \sim N(0, \Sigma) \quad (24)$$

Onde  $\Sigma$  é a matriz de covariância determinada pela função de covariância  $k$  descrita pela seguinte função Gaussiana:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \cdot \exp(-0,5 \cdot (x - x')^T \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot (x - x')) \quad (25)$$

Onde  $x_i$  são as entradas do vetor  $\mathbf{X}$ ,  $\sigma_f$  é a variação do sinal e  $\mathbf{W}$  a matriz de covariância do núcleo gaussiano. Para funções contínuas é esperado uma covariância mais significativa entre os pontos mais próximos. Para uma função genérica de covariância  $k$  e entrada de dados de treinamento  $N$ , o Processo Gaussiano correspondente é dado por:

$$\mathbf{y} \sim N(0, \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X})) \quad (26)$$

Onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de Gram, responsável pela determinação da independência linear dos vetores de entrada. A previsão de  $\mathbf{y}_q$  para uma entrada diferente  $\mathbf{x}_q$  é feita assumindo

que a saída diferente  $\mathbf{y}_q$  também seja uma amostra de uma distribuição Gaussiana multivariada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_q \end{bmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} \mathbf{k}(X, X) & \mathbf{k}(x_q, X)^T \\ \mathbf{k}(x_q, X) & \mathbf{k}(x_q, x_q) \end{bmatrix}\right) \quad (27)$$

Os valores de saída  $\mathbf{y}_q$  dado  $X, \mathbf{y}$  e  $x_q$  produzem outra distribuição Gaussiana multivariada, que prediz a probabilidade de observar um novo valor de saída. A melhor projeção para o conjunto de amostras é a média  $\mathbf{y}_q$  e a variância dadas por:

$$\bar{\mathbf{y}}_q = \mathbf{K}(\mathbf{y}_q, X) \cdot \mathbf{K}(X, X)^{-1} \cdot \mathbf{y} \quad (28)$$

$$\text{var}(\mathbf{y}_q) = \mathbf{K}(x_q, x_q) - \mathbf{K}(x_q, X) \cdot \mathbf{K}(X, X)^{-1} \cdot \mathbf{K}(x_q, X)^T \quad (29)$$

Onde  $\text{var}$  é a variância de  $\mathbf{y}_q$  e  $\bar{\mathbf{y}}_q$  é a média de  $\mathbf{y}_q$ .

## 2.4. Otimização

Otimização é a tarefa de encontrar as melhores soluções para problemas específicos [43]. Essas soluções são encontradas ajustando as variáveis do problema para fornecer um valor extremo, máximo ou mínimo, da função objetivo. Como a maioria dos problemas de otimização do mundo real costuma ser altamente não-linear, eles exigem ferramentas de otimização refinadas [44]. Dessa forma, os programas de computador tornam-se ferramentas indispensáveis para solucionar problemas de otimização através de diversos algoritmos de pesquisa eficientes.

É usual expressar o processo de otimização na forma de minimização da função objetivo, de acordo com a seguinte expressão genérica:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize:} & f(x_1, x_2, x_3 \dots x_d) \\ \text{satisfazendo:} & c_i(x) \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3 \dots N \end{array} \quad (30)$$

Onde  $x_i$  correspondem as  $d$  variáveis de projeto, que podem ser contínuas, discretas ou uma mistura de ambas,  $N$  é o número de restrições, expressas pelas funções de restrição  $c_i$ , que podem ser restrições de igualdade ou desigualdades.

Assumindo o problema de otimização descrito na Equação 30, um ótimo global é definido como o menor valor possível que uma função  $f(x)$  pode assumir dentro do domínio de busca determinado (dependendo da função é possível a ocorrência de mais de um ótimo global). Por outro lado, um ótimo local é definido como um ponto extremo (não

global) da função, sendo o menor valor apenas quando comparado com seus vizinhos próximos.

Para alguns problemas de otimização, geralmente problemas lineares e/ou cuja a superfície de soluções é conhecida, a tarefa de identificar o ótimo global costuma ser simples. Porém, a maioria dos problemas de otimização, principalmente os que descrevem situações reais, costumam apresentar não linearidades e/ou superfícies de busca desconhecidas. Dessa forma, dada a impossibilidade de determinar se uma solução encontrada é o ótimo global em um problema de alta complexidade, quando um sistema não linear é otimizado assume-se que a solução é apenas um ótimo temporário. O usuário de um algoritmo de otimização deve estar ciente de que outros ótimos podem ou não existir com soluções melhores para função objetivo.

## **2.5. Algoritmos Baseados no Método Do Gradiente**

O Método do Gradiente foi uma das primeiras técnicas de otimização determinística a ser transcritas para a linguagem computacional. Para encontrar o custo mínimo (valor mínimo) de uma função, é utilizado um esquema iterativo em que cada etapa é executada na direção do gradiente, que corresponde à direção da inclinação máxima. Para isso, os algoritmos baseados em gradiente utilizam-se de processos de cálculos elaborados para evitarem o confinamento em mínimos locais. Problemas multimodais, ou seja, com múltiplos valores de extremo (mínimos ou máximos), são especialmente trabalhosos nesse aspecto (Figura 17 (b)). Esse método requer o gradiente de uma função específica em relação à cada uma de suas variáveis (vetor gradiente), e, eventualmente, da matriz Hessiana das derivadas de segunda ordem, que precisam ser atualizadas automaticamente durante o processo de otimização. Nos casos em que não se dispõem de formulação analítica, recorre-se ao Método das Diferenças Finitas, que geralmente é computacionalmente dispendioso para avaliação da funções multivariáveis, típicas dos problemas de engenharia [45].

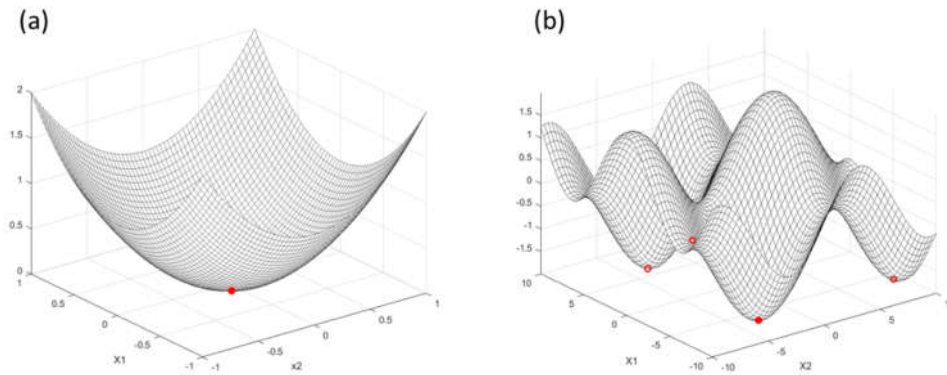


Figura 17: Problemas de otimização (MATLAB). (a) Função unimodal ;(b) Função multimodal.

O *Steepest Descent* (SD), também conhecido como método da fase estacionária ou ainda, como método do ponto de sela, é um exemplo de otimizador baseado no Método do Gradiente, que aplica apenas as derivadas de primeira ordem no ponto atual da função objetivo para conduzir o processo de busca. O SD apresenta uma interpretação matemática relativamente simples: um gradiente negativo é a direção do SD na vizinhança de uma solução candidata. O SD é comumente utilizado de forma isolada mas também pode ser integrado a outros algoritmos de otimização [46].

As técnicas baseadas no Método do Gradiente exigem continuidade e diferenciabilidade da função custo, sendo aplicáveis a um número grande, mas limitado, de problemas de engenharia já bem estabelecidos devido à natureza das variáveis envolvidas nesse tipo de tema. Na otimização de PFF, essas técnicas só são aplicáveis assumindo que as variáveis de projeto envolvidas no problema (dimensões nominais, comprimento de bobina, espessuras etc) podem ser representadas por números contínuos, o que não retrata adequadamente a realidade de fabricação desse tipo de elemento.

## 2.6. Algoritmos Inspirados na Natureza

Algoritmos estocásticos são frequentemente aplicados na otimização de problemas complexos de engenharia devido sua capacidade de adaptação às mais diversas situações. É comum nomear algoritmos que adotam processos estocásticos como meta-heurísticos. Esta dissertação também usa esta convenção. As táticas de busca, geralmente inspiradas por fenômenos da natureza, e a randomização presentes neste tipo de algoritmo são aplicadas com o intuito de evitar o confinamento em ótimos locais ao mesmo tempo que exploram o domínio à procura da solução global.

A meta-heurística é uma maneira, por tentativa e erro, de produzir soluções para problemas de otimização. Devido sua natureza estocástica, não se pode afirmar que as

soluções encontradas através de processos meta-heurísticos são de ótimos globais, sendo comum o mesmo algoritmo chegar as respostas diferentes para um mesmo problema. Dessa forma, aferir as informações estatísticas (média, máximo, mínimo etc.) dos diferentes resultados obtidos é a principal forma de determinar a eficiência dessa classe de algoritmo.

A proposta desses algoritmos, de fácil implementação, é gerar soluções candidatas para o problema de otimização tão boas quanto possível em um tempo de processamento computacional factível. Uma solução candidata é normalmente expressa na forma de um vetor  $\mathbf{x}$  contendo variáveis de projeto que se procura otimizar, de acordo com seguinte a formulação genérica:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3 \dots x_d] \quad (31)$$

Onde  $x_i$  correspondem as variáveis de projeto e  $d$  é o número de dimensões do problema. Ao final do processo de tentativa e erro (gerações, tempo, ciclos e etc.) espera-se as variáveis de projeto das soluções candidatas estejam tão próximas quanto possível entre si e da melhor solução do problema.

Os dois principais componentes dos algoritmos meta-heurísticos são intensificação e diversificação (exploração e exploração, respectivamente). A diversificação gera várias soluções para explorar o espaço de pesquisa em escala global. Por outro lado, a intensificação se concentra na busca em uma região específica do domínio de soluções.

Os algoritmos meta-heurísticos são geralmente baseados na analogia com o comportamento de populações ou com trajetória. Os Algoritmos Genéticos (AG), Evolução Diferencial (*Differential Evolution* - DE), Otimização de Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* - PSO), Colônia Artificial de Abelhas (*Artificial Bee Colony* - ABC), que usam múltiplos agentes ou partículas, são exemplos de algoritmos baseados em população. Por outro lado, o Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* - SA) é um exemplo de algoritmo baseado em trajetória.

Os algoritmos meta-heurísticos em geral, apresentam certas vantagens sobre algoritmos baseados em gradiente. Três vantagens são notáveis: a não necessidade do cálculo do gradiente, a alta capacidade de exploração do domínio de busca e a possibilidade de paralelizar o processamento.

### **2.6.1. Diversificação e intensificação**

A diversificação, também conhecida como exploração, é um mecanismo de pesquisa estocástica que procura investigar o espaço de busca na sua totalidade (processo chamado de busca global) através do distanciamento das soluções candidatas. A diversificação promove uma busca generalizada de soluções, tornando o processo de busca menos sujeito ao confinamento em um mínimo local. Porém, o distanciamento exagerado entre as soluções candidatas pode gerar dificuldade de convergência do algoritmo, principalmente na etapa final de pesquisa [46]. A diversificação também requer um número considerável de agentes de busca (cromossomos, partículas, abelhas etc.), o que costuma ser computacionalmente custoso devido a necessidade de muitas avaliações da função objetivo.

A intensificação, também conhecida como exploração, é um mecanismo de pesquisa estocástica que procura investigar regiões restritas do espaço de busca (processo chamado de busca local) através da aproximação das soluções candidatas. A intensificação promove uma busca especializada de soluções, acelerando a convergência do processo de busca. Porém, a proximidade exagerada entre soluções pode gerar convergência prematura do algoritmo, principalmente na etapa inicial de pesquisa.

O equilíbrio entre os parâmetros de diversificação e intensificação é fundamental para o funcionamento adequado de um algoritmo meta-heurístico. Pouca diversificação combinada como excesso de intensificação implica em uma convergência prematura de soluções. Por outro lado, o excesso de diversificação associada a pouca intensificação dificulta a determinação de uma área de busca restrita e, conseqüentemente, a uma convergência lenta de soluções (ou mesmo uma não convergência) e ao desperdício de recurso computacional.

A dosagem dos parâmetros de exploração e exploração é um problema em aberto para maioria dos algoritmos meta-heurístico. Em essência, o equilíbrio entre diversificação e intensificação é em si um problema de meta-otimização, conhecido como otimização de hiperparâmetros. Na programação meta-heurística, o ajuste da otimização de hiperparâmetros é o problema de escolher um conjunto de parâmetros ótimos para o melhor desempenho de um algoritmo. Além disso, esse ajuste depende de fatores, como o mecanismo de busca de um algoritmo, sua configuração de parâmetros e a função objetivo a ser considerada, pois mesmo dedicando-se a um único algoritmo seus parâmetros ideais tendem a mudar de problema para problema.

### 2.6.2. Algoritmo Genético (AG)

O Algoritmo Genético (AG), proposto originalmente por HOLLAND *et al.* [47] na década de 1970, é o pioneiro de um grande classe algoritmos baseados na teoria da evolução da espécies de Darwin conhecidos como algoritmos evolutivos. Os algoritmos evolutivos usam conceitos de operadores genéticos, como *crossover*, mutação e seleção. O funcionamento do AG independe de informações do gradiente da função objetivo, podendo lidar com problemas complexos e descontínuos com facilidade [48]. A natureza probabilística do *crossover* e da mutação fazem com que o AG explore o espaço de pesquisa com eficiência e aumentam a probabilidade de que otimização global seja alcançada. Os três operadores evolutivos mais usuais em no AG são:

- i. *Crossover*: o cruzamento de dois cromossomos (soluções) diferentes por troca de genes (variáveis de projeto) por uma parte correspondente de outro, a fim de produzir descendentes (novas soluções). Seu principal papel é fornecer a mistura das soluções e a convergência em um subespaço (intensificação).
- ii. Mutação: mudança de parte de um cromossomo para procriar nova qualidade genética. A mutação pode ocorrer em um único gene ou em vários genes simultaneamente. A mudança aleatória de partes de uma solução aumenta a diversidade da população e fornece um mecanismo para escapar de um mínimo local (diversificação);
- iii. Seleção: a sobrevivência dos mais aptos, significa que os cromossomos mais bem avaliados tem maior probabilidade de permanecer dentro da população. Isso geralmente requer alguma forma de elitismo.

O AG, na sua concepção original [47], pode ser descrito pelas seguinte etapas: (i) definição de uma função de aptidão (também conhecida como função de custo e função objetivo); (ii) criação de uma população de indivíduos; (iii) realização de um ciclo de evolução ou iterações avaliando a adequação de todos os indivíduos da população; e (iv) substituição da população antiga a cada iterações sucessivas gerando um nova população [45]. As etapas básicas de um algoritmo genético genérico são resumidas esquematicamente no Pseudocódigo 1.

---

**Algoritmo Genético (AG)**

---

1: Função objetivo  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d)^T$   
2: Definir aptidão  $F$   
3: Gerar população inicial  
4: Inicializar a  $p_c$  e  $p_m$   
5: **enquanto** ( $t <$  Número máximo de gerações)  
6:     Selecionar parte da população inicial para *crossover* e mutação  
7:     Proceder o *crossover* com uma probabilidade  $p_c$   
8:     Mutar com uma probabilidade de mutação  $p_m$   
9:     Selecionar soluções que continuarão na próxima geração  
10:    Atualizar  $t = t + 1$   
11: **fim enquanto**  
12: Devolver resultados

---

Pseudocódigo 1: Algoritmo Genético.

A probabilidade de *crossover*  $p_c$  é usualmente adotada no intervalo de 0,7 a 1,0. Por outro lado, a probabilidade de mutação  $p_m$  geralmente está na faixa de  $10^{-3}$  a  $10^{-1}$ . Pequenos valores de  $p_c$  induzem ocorrência escassa de *crossover*, o que não é eficiente para o processo evolutivo. Se o valor de  $p_m$  for muito alto, as soluções podem continuar se afastando entre si, mesmo que o final do processo de busca esteja se aproximando.

A escolha do tamanho da população  $n$  também é muito importante. No AG, pequenas populações têm dificuldade em continuar o processo de evolução e existe o risco de toda a população ficar confinada em um mínimo local. No mundo real, uma espécie com uma população pequena apresenta de perigo eminente de extinção. Em uma população pequena, se um indivíduo significativamente mais apto aparecer muito cedo, ele poderá reproduzir descendentes suficientes para sobrecarregar toda a população. Eventualmente, isso levará a uma convergência prematura de soluções. Por outro lado, se a população é muito grande, são necessárias mais avaliações da função objetivo, o que exigirá um alto custo computacional. Estudos e observações empíricas sugerem que o tamanho da população  $n = 40$  a 200 funciona para a maioria dos problemas [49].

Em termos de diversidade de aplicação, o AG é um dos algoritmos evolutivos mais populares. Uma variedade de problemas de otimização bem estabelecidos foi testada pelo AG clássico. Vale ressaltar que o AG na sua concepção original [47], costuma apresentar baixo desempenho devido a sua pouca capacidade de intensificação. Dessa forma, diversos algoritmos meta-heurísticos contemporâneos procuram aprimorar o AG melhorando os operadores evolutivos já estabelecidos e/ou aplicando técnicas híbridas de outros algoritmos [46].

O Algoritmo Genético clássico usa a representação binária para descrever as variáveis de projeto do problema de otimização, o que demanda um processo de codificação e posterior decodificação. Apesar de ser uma prática que tende ao desuso, muito da literatura acadêmica utiliza essa representação. As abordagens mais modernas adotam a representação real (isto é, ponto flutuante), que torna o processo de interpretação dos resultados muito mais simples.

Na representação real do GA, um dos operadores de *crossover* mais usuais é o *crossover* aritmético, que ocorre de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \beta \cdot \mathbf{p}_1 + (1 - \beta) \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{c}_2 &= \beta \cdot \mathbf{p}_2 + (1 - \beta) \cdot \mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad (32)$$

Onde  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$  são as soluções descendente do processo de crossover,  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  são os pais pré-selecionados,  $\beta \in [0,1]$  é um parâmetro de crossover.

Os pais ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ) podem ser escolhidos por estratégias como torneio, que seleciona cromossomo mais apto, dentro de um grupo aleatório de soluções candidatas, para cruzamento. Esta estratégia também possui um critério chamado pressão de seleção, que é uma medida probabilística da chance de participação de um candidato em um torneio. Se o número de indivíduos incluídos no torneio for maior, os indivíduos inaptos têm uma chance menor de serem selecionados, porque, se um indivíduo inapto for selecionado para participar de um torneio, há uma probabilidade maior de que um indivíduo apto também esteja nesse torneio.

Um dos operadores de mutação mais usuais na representação real do AG é a mutação Gaussiana, que consiste em substituir um gene por um número aleatório em uma distribuição normal. Em outras palavras, dado um cromossomo  $p$  com o  $j$ -ésimo gene selecionado para mutação, um novo cromossomo  $c$  é produzido da seguinte maneira:

$$\mathbf{c}_i = \begin{cases} N(\mathbf{p}_i, \sigma) & \text{se } i = j \\ \mathbf{p}_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (33)$$

Onde  $N(\mathbf{p}_i, \sigma)$  é um número aleatório de uma distribuição normal, dada a média de  $\mathbf{p}_i$  e o desvio padrão  $\sigma$ . Vale ressaltar que o processo de mutação pode ocorrer em múltiplos genes. O número de genes para mutação e sua  $j$ -ésima posição são sorteados aleatoriamente.

### 2.6.3. Evolução Diferencial (*Differential Evolution - DE*)

A Evolução Diferencial (*Differential Evolution - DE*) é um algoritmo de busca estocástica de base populacional de alto desempenho, que faz parte da classe de algoritmos evolutivos. O DE é considerado uma evolução do AG clássico pois, desde sua concepção original, utiliza números reais para representas as variáveis de projeto. Portanto, nenhuma codificação e decodificação são necessárias, o que contribuiu para sua popularização em diversos campos da ciência [50].

Assim como na maioria dos algoritmos evolutivos, incluindo o AG, o DE é constituído dos operadores evolutivos de (i) mutação, (ii) *crossover* e (iii) seleção. Como no AG, as variáveis de projeto em um espaço de pesquisa  $d$ -dimensional são representados como vetores. No entanto, diferentemente do AG, o DE realiza operações sobre cada componente. Quase todos processos são executados adotando uma abordagem vetorizada. No AG binário a mutação é realizada em um local ou em vários genes de um cromossomo, já na evolução diferencial um vetor de diferença de dois vetores populacionais selecionados aleatoriamente é usado para perturbar um vetor existente. A mutação vetorizada pode ser vista como uma abordagem mais prática em termos de implementação. De forma que AG, o *crossover* também é uma troca de genes de cromossomos ou segmentos vetoriais [50].

Para um problema de otimização  $d$ -dimensional com  $d$  variáveis de projeto, primeiro é criada uma população de  $n$  vetores de solução. Temos  $\mathbf{x}_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Para cada solução candidata  $\mathbf{x}_i$  em qualquer geração  $t$ , usualmente adota-se a seguinte notação:

$$\mathbf{x}_i^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_d^t) \quad (34)$$

Que consiste em  $d$  componentes no espaço  $d$ -dimensional. Esse vetor pode ser denominado, da mesma maneira como no AG, de cromossomo.

No processo vetorial de mutação do DE a cada geração  $t$ , são selecionados aleatoriamente três vetores distintos  $\mathbf{x}_p$ ,  $\mathbf{x}_q$  e  $\mathbf{x}_r$  que geram  $n$  novas solução candidatas, de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{x}_p^t + F \cdot (\mathbf{x}_q^t - \mathbf{x}_r^t) \quad (35)$$

onde  $\mathbf{v}_i$  é chamado de vetor doador,  $F$  é o fator de escala de mutação. Esse processo exige que o número mínimo de indivíduos da população seja  $n \geq 4$ , uma vez que  $n \leq 3$  tornaria o processo de seleção de  $\mathbf{x}_p$ ,  $\mathbf{x}_q$  e  $\mathbf{x}_r$  em determinístico ou inviável [57].

O parâmetro de *crossover*  $C_r$ , controla a taxa ou probabilidade de *crossover*. Há duas maneiras de prosseguir com o *crossover*: (i) binomial e (ii) exponencial. A binomial aplica o cruzamento em cada um das  $d$  variáveis de projeto. Ao gerar um número aleatório uniformemente distribuído  $r_i \in [0, 1]$ , o  $j$ -ésimo integrante de  $\mathbf{v}_i$  é alterado da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_{j,i}^{t+1} = \begin{cases} \mathbf{v}_{j,i} & \text{se } r_i \leq C_r \\ \mathbf{x}_{j,i}^t & \text{caso contrário} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (36)$$

onde  $\mathbf{u}$  é a solução descendente do processo de *crossover*. Dessa forma, pode ser decidido aleatoriamente a troca de cada componente por um vetor doador ou não. A Figura 18 ilustra a perturbação  $\delta = F(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_r)$  do vetor  $\mathbf{x}_p$  que gera um vetor doador  $\mathbf{v}_i$ , e a perturbação é causada.

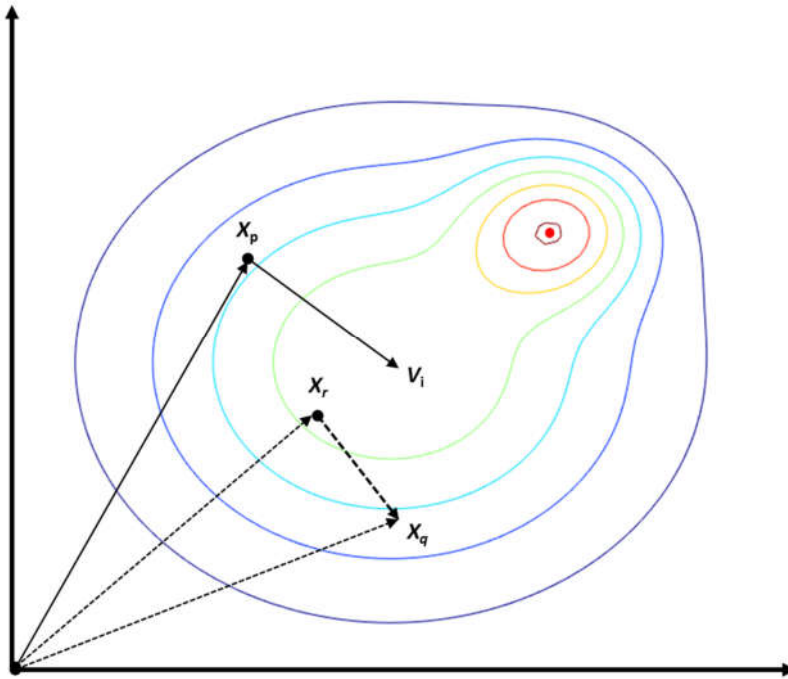


Figura 18: Representação esquemática da perturbação vetorial no DE.

No *crossover* exponencial, um segmento do vetor doador  $L \in [1, d]$  de comprimento variável  $k \in [0, d - 1]$  é utilizado pra produzir uma nova solução candidata, de acordo com a seguinte equação:

$$\mathbf{u}_{j,i}^{t+1} = \begin{cases} \mathbf{v}_{j,i} & \text{para } j = k, \dots, k - L + \in [1, d] \\ \mathbf{x}_{j,i}^t & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (37)$$

A seleção é semelhante à usada no AG. O indivíduo mais apto é selecionado de acordo com a avaliação da função de custo, conforme a equação a seguir demonstra:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} u_i^{t+1} & \text{se } f(u_i^{t+1}) \leq f(x_i^t) \\ x_i^t & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (38)$$

Para garantir que  $v_i^{t+1} \neq x_i^t$  é utilizado o parâmetro  $J$ , o que pode aumentar a capacidade exploratória. A eficiência da pesquisa global é controlada pelo fator de escala  $F$  e pela probabilidade de cruzamento  $C_r$ . As etapas do DE podem ser representadas esquematicamente no Pseudocódigo 2.

---

### **Evolução Diferencial (Differential Evolution - DE)**

---

- 1: Inicializar a população  $x$  com soluções geradas randomicamente
- 2: Atribuir o fator de escala  $F \in [0,2]$  e probabilidade de crossover  $C_r \in [0,1]$
- 3: **enquanto** (critério de parada)
- 4:     **durante**  $i = 1$  a  $n$
- 5:         Para cada  $x_i$ , escolher aleatoriamente 3 vetores distintos  $x_p, x_r$  e  $x_r$
- 6:         Gerar um novo vetor  $v$  por  $v_i^{t+1} = x_p^t + F \cdot (x_q^t - x_r^t)$
- 7:         Gerar um índice aleatório  $J_r \in \{1,2, \dots, d\}$  por permutação
- 8:         Gerar um número randômico vindo de uma distribuição normal  $r_i \in [0,1]$
- 9:         **durante**  $j = 1$  a  $d$
- 10:         Para cada parâmetro  $v_{j,i}$  ( $j$ -ésimo componente de  $v_i$ ), atualizar

$$u_{j,i}^{t+1} = \begin{cases} v_{j,i}^{t+1} & \text{if } r_i \leq C_r \text{ ou } j = J_r \\ x_{j,i}^t & \text{if } r_i > C_r \text{ ou } j \neq J_r \end{cases}$$

- 11:         **fim durante**
- 12:         Selecionar e atualizar solução

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} u_i^{t+1} & \text{if } f(u_i^{t+1}) \leq f(x_i^t) \\ x_i^t & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- 13:         **fim durante**
  - 14: **fim enquanto**
  - 15: Devolver resultados
- 

Pseudocódigo 2: Evolução Diferencial.

A escolha dos parâmetros de controle, o fator de escala  $F$  em especial, é a parte mais sensível do algoritmo DE. A literatura sugere valores de  $F$  entre 0,7 e 0,9, como uma boa primeira escolha. Também é sugerido valores de  $C_r$  entre 0,1, e 0,8, como um intervalo adequado,  $C_r = 0,5$  como uma boa primeira escolha [57]. Recomenda-se que o tamanho da população  $n$  dependa do número de dimensões  $d$  do problema. Ou seja,  $n = 5d$  a  $10d$ . O que pode ser impraticável para problemas de alta dimensionalidade, uma vez que o tamanho da população pode ser exageradamente grande [51].

#### 2.6.4. Otimização por Enxame de Partículas (*Particle swarm optimization - PSO*)

A inteligência de enxame é um campo da IA que estuda o comportamento de sistemas descentralizados e auto-organizados. Auto-organização é a capacidade de alguns sistemas formados por muitos indivíduos, de criar padrões de comportamento adaptáveis e não previsíveis, sem uma inteligência central. Observar organizações sociais encontradas na natureza, bem como as características comportamentais de suas colônias, inspira muitos algoritmos de inteligência de enxame, como a Colônia Artificial de Abelhas (*Artificial Bee Colony - ABC*) e o Algoritmo de Otimização de Vaga-Lume (*Firefly Optimization Algorithm - FOA*), por exemplo.

A Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization - PSO*) foi desenvolvida por KENNEDY e EBERHART [52], com base em enxames encontrados na natureza, como a revoada de pássaros e cardumes de peixes. O PSO se tornou um dos algoritmos mais populares baseados em inteligência de enxame, devido à sua simplicidade de programação e flexibilidade diante de vários problemas. Em vez de usar mutação e cruzamento, técnicas aplicadas no Algoritmos Genético (AG), o PSO usa aleatoriedade em números reais e comunicação mútua entre partículas.

Muitos algoritmos contemporâneos baseados em inteligência de enxame podem ter se inspirado em diferentes fenômenos da natureza, mas eles têm algumas semelhanças com componentes usados no PSO. Nesse sentido, o PSO abriu o caminho da computação baseada em inteligência de enxame [53].

O algoritmo PSO consiste em conjuntos de partículas com  $n$  indivíduos, onde cada um é aleatoriamente posicionado dentro de um espaço de busca. Cada indivíduo representa uma possível solução do problema proposto. Cada partícula tem velocidade  $v$  que é ajustada em cada etapa de tempo  $t$  de acordo com o desempenho individual dessa partícula específica, bem como o melhor desempenho do enxame como um todo. O desempenho de cada nova solução candidata é quantificado usando uma função objetivo, e o processo é repetido até que os critérios de parada sejam atendidos.

As soluções candidatas são representadas por um vetor  $x$ , que compreende um conjunto de parâmetros específico, inserindo as possíveis soluções de um problema dentro de uma região viável. No PSO, o vetor  $x$  representa a posição de uma partícula. A posição específica da partícula  $i$  em cada etapa  $t$  é dada por  $x_t^i$  e a velocidade da partícula  $i$  em cada etapa  $t$  é dada por  $v_t^i$ . A função objetivo  $f(x)$  determina o desempenho da

posição de cada partícula, o melhor valor da função objetivo de qualquer partícula no enxame no momento  $t$  é dado por  $f_t^i$ , o melhor valor histórico da função objetivo de todo o enxame de partículas até o tempo  $t$  ser dado por  $f_t^g$ , onde  $g$  designa o melhor global encontrado até o tempo  $t$  (também conhecido como melhor global atual). A melhor posição global de qualquer partícula no enxame no tempo  $t$  é dada por  $P_t^i$ , enquanto a melhor posição histórica da partícula no enxame  $i$  até o tempo  $t$  é dado por  $P_t^g$  [54]. A velocidade de cada partícula é atualizada a cada etapa de acordo com a seguinte equação:

$$v_{t+1}^i = w \cdot v_t^i + C_1 \cdot n_{r1} \cdot (P_t^i - x_t^i) + C_2 \cdot n_{r2} \cdot (P_t^g - x_t^i) \quad (39)$$

Onde  $n_{r1}$  e  $n_{r2}$  são números aleatórios de uma distribuição Gaussiana com valores entre 0 e 1,  $C_1$  e  $C_2$  são o fator de aceleração cognitiva (autoconfiança) e o fator de aceleração social, respectivamente, e  $w$  é o fator de inércia.

O fator de inércia  $w$  determina quanto da velocidade do passo anterior passa para o próximo. Valores altos de inércia fazem com que as partículas se comportem de forma mais independente e explorem o espaço da solução de forma lenta, enquanto valores mais baixos causam uma convergência mais rápida do enxame. Uma estratégia popular para selecionar o termo de inércia é usar um fator dinâmico que comece com alto valor e diminua gradualmente durante as interações do algoritmo. Essa abordagem traz a vantagem de uma convergência oportuna, enquanto força as partículas a explorar o espaço da solução [55]. A diminuição gradual de  $w$  é dada pela seguinte equação:

$$w_{(t)} = (w_{(0)} - w_{(t_{max})}) \cdot \frac{(t_{max}-t)}{t_{max}} + w_{(t_{max})} \quad (40)$$

O valor de  $t_{max}$  é o número máximo predefinido de iterações e  $w_{(0)}$  e  $w_{(t_{max})}$  são os valores inicial e final de  $w$ . Geralmente adota-se  $w_{(0)} = 0.9$  e  $w_{(t_{max})} = 0.1$ . O fator de aceleração cognitiva  $C_1$  (também conhecido como coeficiente cognitivo ou de autoconfiança), multiplicado por um número aleatório  $n_{r1} \in [0,1]$ , determina a influência do melhor desempenho histórico de cada partícula individual. O fator de aceleração social  $C_2$  (também conhecido como coeficiente de enxame) multiplicado por um número aleatório  $n_{r2} \in [0,1]$ , determina a influência do melhor desempenho histórico do enxame. Um alto valor de fator de aceleração social causa uma convergência mais rápida do algoritmo para a melhor posição de enxame, mas limita a exploração individual das partículas. Por outro lado, um elevado valor de autoconfiança faz com que cada partícula explore todas as regiões ideais completamente, mas pode atrasar a convergência. É

comum que o fator de aceleração cognitiva seja igual ou ligeiramente maior que o coeficiente de influência do enxame [55]. Esses coeficientes podem ser ajustados de iteração para iteração, conforme as seguintes equações demonstram:

$$C_1 = (C_{1(min)} - C_{1(max)}) \cdot \frac{t}{t_{max}} + C_{1(max)} \quad (41)$$

$$C_2 = (C_{2(min)} - C_{2(max)}) \cdot \frac{t}{t_{max}} + C_{2(max)} \quad (42)$$

Onde  $C_{1(max)}$  e  $C_{1(min)}$  são valores selecionados para fornecer um intervalo apropriado de valores para  $C_1$ , normalmente assumidos como 0,7 e 0,1, respectivamente. Da mesma forma,  $C_{2(max)}$  e  $C_{2(min)}$  são valores selecionados para fornecer um intervalo apropriado de valores para  $C_2$ , geralmente considerados como 0,9 e 0,2, respectivamente. Claramente, à medida que o processo continua,  $t$ , o número da iteração atual, se aproximará de  $t_{max}$  (iterações máximas permitidas) [56]. O tamanho do enxame ( $n$ ) é altamente dependente do número de dimensões e da complexidade do problema de otimização envolvido, sendo em si um tópico de diversas pesquisas. A literatura especializada sugere valores iniciais para  $n$  na faixa de 20 a 100 partículas [56].

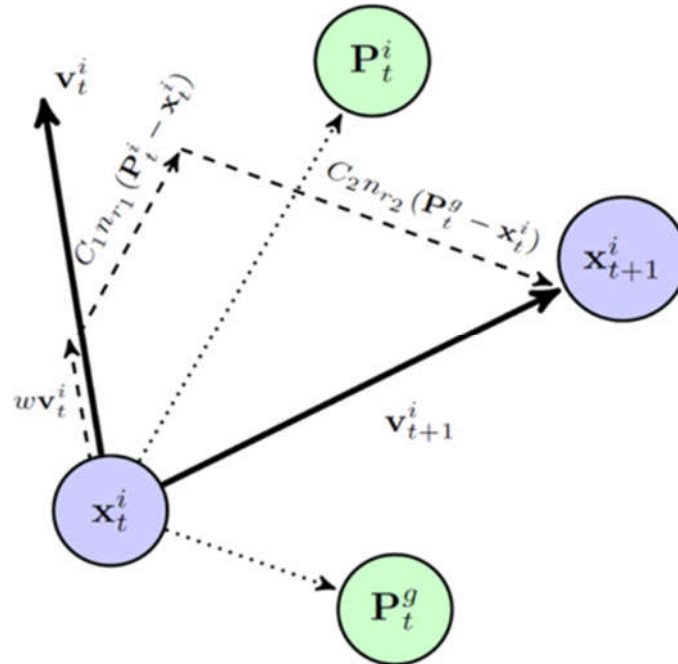


Figura 19: Mudança de posição das partículas no esquema do PSO [55].

A Figura 19 ilustra esquematicamente o movimento das partículas de acordo com as equações propostas pelo PSO. As etapas essenciais do algoritmo de Otimização por Exame de Partículas estão resumidas no pseudocódigo mostrado no Pseudocódigo 3.

---

**Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization - PSO*)**

---

- 1: Definir a função aptidão  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_1, x_1 \dots x_d)^T$
  - 2: Inicializar as posições  $x^i$  e velocidades  $v_i$  de  $n$  partículas
  - 3: Encontrar  $P_t^g$  do mínimo de  $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3) \dots f(x_n)\}$  em  $t = 0$
  - 4: **enquanto** (critério de parada)
  - 5:     **durante** laço em todas as  $n$  partículas e todas as  $d$  dimensões
  - 6:     Calcular as novas velocidades  $v_{t+1}^i = w \cdot v_t^i + C_1 \cdot n_{r1} \cdot (P_t^i - x_t^i) + C_2 \cdot n_{r2} \cdot (P_t^g - x_t^i)$
  - 7:     Calcular as novas posições  $x_{t+1}^i = x_t^i + v_{t+1}^i$
  - 8:     Avaliar a nova aptidão em  $x_{t+1}^i$
  - 9:     **fim durante**
  - 10:    Encontrar o ótimo global atual  $P_t^g$
  - 11:    Atualizar  $t = t + 1$  (pseudo tempo ou contador de iterações)
  - 11: **fim enquanto**
  - 12: Devolver resultados
- 

Pseudocódigo 3: Otimização por Enxame de Partículas.

### 2.6.5. Colônia Artificial de Abelhas (*Artificial Bee Colony - ABC*)

A Colônia Artificial de Abelhas (*Artificial Bee Colony - ABC*) foi proposta inicialmente por KARABOGA e BASTURK [57], consistindo em um método de enxame cooperativo inspirado no comportamento das abelhas. Este algoritmo teve considerável sucesso na solução de diversos problemas de otimização.

No algoritmo ABC, a colônia de abelhas é dividida em três grupos: (i) observadoras, (ii) operárias e (iii) batedoras. As fontes de néctar representam possíveis soluções para o problema de otimização e a quantidade de néctar dessas fontes representa as avaliações da função objetivo nesse dado ponto do espaço de busca. O total de abelhas operárias e observadoras é igual ao total de soluções possíveis na população. Na sua primeira etapa, o ABC cria uma população inicial  $P$  distribuída aleatoriamente com soluções populacionais de tamanho  $SN$  (número de fontes de alimento). Cada solução  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, SN$ ) é um vetor  $d$ -dimensional. Após a inicialização, a população de soluções é sujeita a repetição até um número máximo de ciclos (*maximum cycle number - MCN*). Cada abelha operária produz um ajuste nas soluções, que depende da sua avaliação individual ao longo do histórico de ciclos de busca.

Desde que a quantidade de néctar da nova solução seja maior que a anterior, a abelha armazena a nova posição e descarta a anterior. Caso contrário, ele mantém a posição da anterior em sua memória. Após cada abelha operária ter completado seu período de pesquisa, ocorre a troca de informações com as abelhas observadoras. Em uma colônia real de abelhas, isso é realizado através de uma “dança” (Figura 20). Os diferentes tipos

de coreografia dessa dança podem informar às abelhas observadoras a direção, a distância e a qualidade da fonte de néctar [58]. As abelhas observam as informações de néctar retiradas de todas as abelhas operárias e elegem uma fonte de néctar com probabilidade relacionada à sua quantidade de néctar. No caso das abelhas operárias, isso induz uma mudança na posição em sua memória e a verificação a quantidade de néctar da fonte candidata. Se e somente se, sua quantidade de néctar for maior que quantidade avaliada anteriormente, a abelha memoriza a nova posição e rejeita a anterior.

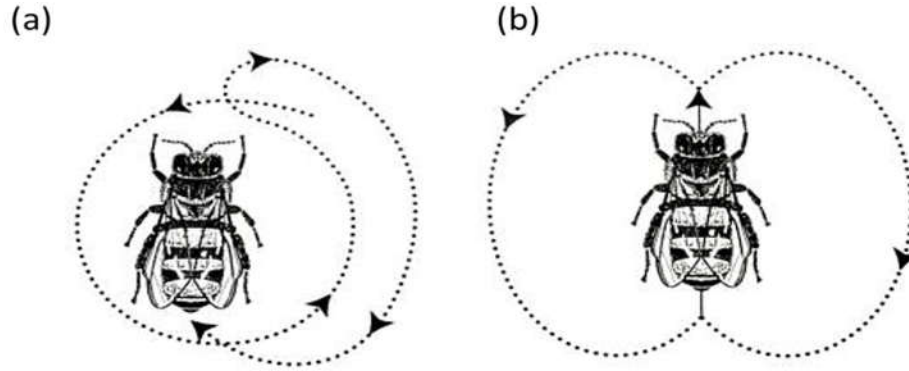


Figura 20: Coreografia das danças de aviso. (a) Dança circular; (b) dança agitada [59].

Inicialmente, as soluções candidatas são geradas aleatoriamente dentro do espaço de soluções, cada uma associada a uma abelha operária. A cada iteração, a abelha operária tenta descobrir uma nova solução possível pesquisando sua vizinhança de acordo com a seguinte equação:

$$v_{ij} = x_{ij} + r \cdot (x_{ij} - x_{kj}) \quad (43)$$

onde  $r$  é um número aleatório, no intervalo entre -1 e 1, e é um número aleatório diferente para cada valor de  $i$  e  $j$ ,  $k$  e  $j$  são selecionados aleatoriamente entre 1 e o número total de abelhas operárias e entre 1 e número máximo de dimensão do problema, respectivamente.

A variável  $x_{ij}$  é a solução atual e  $v_{ij}$  a solução candidata aprimorada. O índice  $i$  indica a abelha operária e  $j$  a variável de projeto específica. A comparação da qualidade das soluções é feita utilizando-se suas avaliações da função objetivo, se for verificada uma melhoria a abelha operária move-se para essa nova fonte de néctar.

Uma vez concluído esse processo, as informações de cada uma das abelhas operárias são apresentadas às abelhas observadoras que fazem um julgamento geral dessas fontes de néctar. As abelhas observadoras escolhem um com uma probabilidade  $p_i$  com base no valor relativo da fonte específica de néctar em comparação com todas as outras fontes.

Isso é implementado computando os valores, chamados valores de aptidão da função objetivo original, usando a seguinte equação:

$$fit_i = \begin{cases} \frac{1}{1+f(x_i)} & \text{se } f(x_i) \geq 0 \\ 1 + abs(f(x_i)) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (44)$$

Os valores das probabilidades ( $p_i$ ) são calculados a partir de:

$$p_i = \frac{fit_i}{\sum_i^m fit_i} \quad (45)$$

Onde  $fit_i$  é o ajuste é a aptidão da solução  $i$ , o somatório é para todas as abelhas operárias. Esses valores de  $p_i$  estão no intervalo de 0 a 1.

Uma característica crucial do algoritmo é abandonar soluções com pior avaliação, pois elas não forneceram uma melhoria no valor da função objetivo após vários ciclos. Se a nova fonte de néctar tiver uma quantidade néctar igual ou maior que a fonte anterior ela substituirá a melhor solução anterior. Caso contrário, a solução antiga é retida na memória. Em outras palavras, um mecanismo de seleção ganancioso é empregado como operação de seleção entre o antigo e o candidato. Se o número de vezes que não houve melhoria nesse local exceder um limite de valor  $l_v$ , esse local será abandonado e substituído por uma nova solução gerada aleatoriamente no espaço da solução usando:

$$x_{ij} = r_{minj} + r \cdot (r_{maxj} - r_{minj}) \quad (46)$$

Onde  $r$  é um número aleatório no intervalo entre 0 e 1,  $r_{minj}$  é o limite inferior das variáveis de projeto e  $r_{maxj}$  é o limite superior das variáveis de projeto. As etapas do ABC podem ser representadas esquematicamente de acordo com o Pseudocódigo 4.

---

#### Colônia Artificial de Abelhas (*Artificial Bee Colony - ABC*)

---

- 1: (a\*) Inicializar a população  $P$  e avalia-la
  - 2: **enquanto** (critério de parada)
  - 3: (b\*) Produzir novas soluções  $v_{ij} = x_{ij} + r \cdot (x_{ij} - x_{kj})$ , e avalia-las
  - 4: (b\*) Selecionar melhores soluções
  - 5: (c\*) Calcular o valor das probabilidades  $p_i = \frac{fit_i}{\sum_i^m fit_i}$  para cada solução  $x_{ij}$
  - 6: (c\*) Produzir novas soluções  $v_{ij}$  para as observadoras a parti  $x_{ij}$  selecionar  $p_i$  e avalia-las
  - 7: (d\*) Determinar quais soluções serão abandonadas pelas batedoras ,caso existam , e substitui-las por  $x_{ij} = r_{minj} + r \cdot (r_{maxj} - r_{minj})$  produzido aleatoriamente
  - 8: (d\*) Memorizar melhor solução encontrada até então
  - 9: **fim enquanto**
  - 10: Devolver resultados
- 

(a\*) - Fase de inicialização; (b\*) -Fase das abelhas operárias; (c\*) - Fase das abelhas observadoras; (d\*) - Fase das abelhas batedoras.

Pseudocódigo 4:Colônia Artificial de Abelhas.

Como mencionado anteriormente, o algoritmo ABC emprega três parâmetros de controle, que são o número de fontes de néctar iguais ao número de abelhas operárias e observadoras ( $SN$ ), o valor limite  $l_v$  e o número máximo de ciclos ( $MCN$ ), que depende do recurso computacional. Com base nos resultados empíricos da análise experimental conduzida [60], um tamanho populacional  $SN$  no intervalo de 15 a 50 e  $l_v$  no intervalo de 200 a 400, são adequados para diversos problemas. Como primeira aproximação de parâmetros é adequado utilizar  $SN = 30$  e  $l_v = 250$  para a maioria dos problemas avaliados na literatura [61]. É possível estabelecer uma conexão entre a pequena contagem de atualização de componentes e a escolha do valor limite. Um pequeno valor limite leva a convergência rápida do processo de otimização, muitas vezes prematura. Colônias de abelhas muito populosas apresentam convergência lenta, assim como em todos os outros algoritmos populacionais quando o número indivíduo é elevado.

## 2.7. Otimização com Restrições

Problemas de otimização, em especial aqueles que descrevem situações reais de projeto, usualmente apresentam restrições em sua formulação, na forma de equações e inequações. Praticamente todos os problemas de otimização em engenharia lidam com restrições. Normalmente, os problemas de otimização restrita são classificados em dois tipos: (i) duramente restritos, que possuem condições que precisam ser respondidas para cada variável, ou (ii) pouco restritos, que possuem condições que precisam ser atendidas apenas por parte das variáveis. Em geral, estas restrições podem ser implementadas como penalizações na função de custo com base na intensidade com que estas condições são violadas. Dessa forma, o problema de otimização pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \text{minimize:} & \quad f(x_i), & \quad i = 1, 2, \dots, d \\
 \text{satisfazendo:} & \quad g_j(x_i) \geq 0, & \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 & \quad h_k(x_i) = 0, & \quad k = 1, 2, \dots, q
 \end{aligned} \tag{47}$$

Onde  $x$  é um vetor com  $d$  elementos. Se quaisquer restrições de desigualdade tiverem a forma  $g_j(x) \leq 0$ , poderão ser convertidas em  $g_j(x) \geq 0$  multiplicando as equações de restrição por  $-1$ .

O conjunto de todos os pontos possíveis de um problema de otimização que satisfazem as restrições do problema, incluindo desigualdades, igualdades e limites laterais das variáveis (superior e inferior), é chamado de região viável. A Figura 21 ilustra um exemplo de uma região viável em um domínio de busca arbitrário.

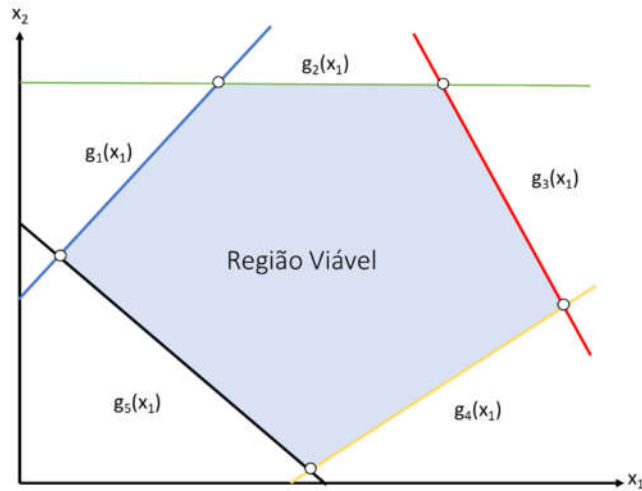


Figura 21: Região viável de um problema de otimização unidimensional com restrições de desigualdade.

As práticas tradicionais para aplicação de restrições incluem os métodos de penalidade e a separação da função objetivos de suas restrições. As abordagens mais contemporâneas adotam técnicas meta-heurísticas para ajuste de penalidade de forma interativa [62].

### 2.7.1. Método das Penalidades

O Método das Penalidades converte um problema de otimização com restrições em um problema irrestrito, introduzindo suas restrições na função objetivo revisada. A ideia geral dessa abordagem é adicionar à função objetivo uma expressão que produz um custo extra em casos de violações de restrições. Não obstante, isso introduz novos parâmetros no problema de otimização quando os valores adequados são usados, o problema irrestrito convertido geralmente pode ser resolvido com eficiência pela maioria dos algoritmos [63].

Este método baseia-se em definir uma função de penalidade para que o problema restrito seja transformado em um problema irrestrito. Uma formulação de penalidade comumente usada é:

$$C(x) = f(x) + P(x) \tag{48}$$

Onde é o termo de penalidade definido por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^N v_j \max \left( 0, g_j(x) \right)^2 + \sum_{i=1}^M \mu_i |h_i(x)| \tag{49}$$

Onde  $\mu_i \gg 1$  e  $v_j \gg 1$  são constantes de penalidade ou fatores de penalidade. A vantagem desse método é incorporar todas as restrições à nova função objetivo

Decidir quais fatores de penalidade são apropriados depende muito do problema que se está tratando e do impacto que a violação de restrição pode causar. Em geral, para a maioria das aplicações, os valores  $\mu$  e  $v$  estão em uma ordem de grandeza igual ou superior ao valor da função objetivo. As constantes de penalidade podem assumir valores diferentes a depender do problema tratado, na literatura o intervalo mais comum é entre  $10^2$  a  $10^{15}$ . Com o propósito de melhorar o desempenho das técnicas tradicionais de manipulação de restrições, é costume combina-las com algoritmos evolutivos, criando métodos de penalização que se adaptam as especificidades do problema de otimização e de suas restrições [63].

## 2.8. Otimização de Perfis de Aço Formados a Frio

A otimização estrutural é a busca de uma solução com o melhor desempenho possível, segundo objetivos estabelecidos pelo projetista. Um problema de otimização bem definido deve incluir variáveis de projeto e ao menos uma função objetivo, que usualmente está relacionada à minimização de peso, à maximização de capacidade resistente ou uma combinação de ambos. É costume formular a função objetivo como uma função de minimização (Equação 47) e, em caso de maximização de capacidade, inverte-se o sinal da função objetivo. As soluções de problemas práticos de otimização geralmente precisam satisfazer as restrições de igualdade e/ou desigualdade desenvolvidas a partir de necessidades de projeto, capacidade de fabricação e uso final, informações que nem sempre estão disponíveis para toda a cadeia de projetistas envolvida no desenvolvimento de um empreendimento de grande porte.

Uma característica importante da otimização estrutural de PFF é que ela geralmente envolve a solução de problemas de estabilidade da estrutura (ou elemento estrutural isolado) para a avaliação da função objetivo. Consequentemente, os problemas de otimização estrutural são geralmente baseados em simulação: as ferramentas de modelagem e análise estrutural são tipicamente acopladas no esquema de otimização [64]. A avaliação da função objetivo pode ser computacionalmente custosa dependendo do problema modelado, devido as etapas de cálculo envolvidas no processo.

Normalmente, a otimização de sistemas estruturais em PFF subdivide-se em:

- i. Otimização dimensional: nesta classe de problemas, as variáveis são as dimensões transversais dos elementos de barra em um sistema estrutural;

- ii. Otimização de forma: as variáveis são as proporções de um sistema estrutural, mantidas as dimensões transversais dos elementos de barra, seu número e relações de adjacência;
- iii. Otimização topológica: as variáveis são o número e as relações de adjacência entre elementos de barra em um sistema estrutural.

Na otimização dimensional, as variáveis de projeto são representadas por números reais positivos (tipicamente número racionais) entre certos limites. Para otimização da topologia, as variáveis de projeto são tipicamente representadas de forma booleana em um espaço de pesquisa discretizado. Para otimização de forma, variáveis de projeto são parâmetros (números racionais ou naturais) que podem definir a configuração de uma estrutura particular e estão vinculadas aos algoritmos generativos de forma.

### **2.8.1. Exemplos de otimização de perfis de aço formados a frio**

Diversas pesquisas aplicaram combinações de métodos de avaliação de resistência baseados em normas de projeto e algoritmos de busca na otimização dimensional e de forma de elementos de PFF. O trabalho pioneiro de otimização numérica de SEABURG e SALMON [65] aplicou o método *Steepest Descent* (SD) baseado em gradiente para explorar as dimensões das seções do tipo cartola com o Método de Largura Efetiva presente na especificação do AISI (1968) [66].

No campo dos métodos meta-heurísticos, livres de derivadas, o trabalho pioneiro é associado a ADELI *et al.* [67], que desenvolveu um modelo de rede neural computacional e o aplicaram à otimização de vigas de PFF com seções cartola ( $\Omega$ ), I e Z usando as especificações de projeto de fator de resistência à carga da norma norte-americana AISI, de 1991 [68]. Os trabalhos de LENG *et al.* [69]–[72] estudaram sistematicamente a otimização de forma de colunas de PFF, através de algoritmos estocásticos, em busca de seções transversais que maximizem a capacidade axial com uma chapa de aço de largura fixa. Neste trabalho, o MRD e CUFSM foram acoplados para avaliar a capacidade axial das colunas. Várias seções transversais ótimas foram identificadas para colunas de comprimento intermediário e comprimento longo, com mais de 100% de aumento de capacidade. No processo, eles também compararam o desempenho de algoritmos de pesquisa estocásticos e baseados em gradiente. Posteriormente, foram introduzidas restrições de uso e capacidade de fabricação, para que seções transversais otimizadas sejam mais prontamente fabricáveis e úteis na prática de construção [70]. O caso de um número limitado de rolos também foi levado em consideração como reflexo do custo de

fabricação em implementações com o algoritmo de Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* - SA) para executar uma pesquisa estocástica em um espaço de projeto restrito. Os resultados ofereceram de 50% a 200% de ganho de  $P_n$  em relação à seções U enrijecidas de referência, indicando que melhorias significativas podem ser obtidas através da otimização da seção transversal sem perda de praticidade e capacidade de fabricação [71]. Um trabalho contemporâneo de otimização da forma dos membros do PFF é creditado a PARASTESH *et al.* [73], que apresenta um método prático para otimizar a resistência de elementos simétricos de colunas e vigas de PFF aplicando o AG e incorporando restrições de fabricação e construção sob compressão axial aplicada com diferentes excentricidades.

A otimização da dimensão dos membros do PFF exige um formato de seção transversal predeterminado (um protótipo) e um julgamento do projetista para estabelecer as variáveis de projeto. A determinação das variáveis de projeto depende da forma selecionada, e a capacidade máxima e/ou peso mínimo, os quais são geralmente tomados como a função objetivo do processo de otimização.

A metodologia apresentada pelos trabalhos de LENG *et al.* [69]–[72] tornou-se uma das abordagens mais comuns para a otimização de perfis de aço formados a frio. MOJTABAE *et al.* [74] por exemplo, desenvolveram uma metodologia prática para otimização das seções de viga de PFF aplicando a otimização *Big Bang-Big Crunch*, buscando resistência máxima à flexão e deflexão mínima sob condições de estado de serviço e estado limite de utilização, respectivamente, de acordo com o *Eurocode 3* e considerando critérios de fabricação e uso final. A Figura 22 ilustra exemplos de perfis obtidos via otimização de forma livre.

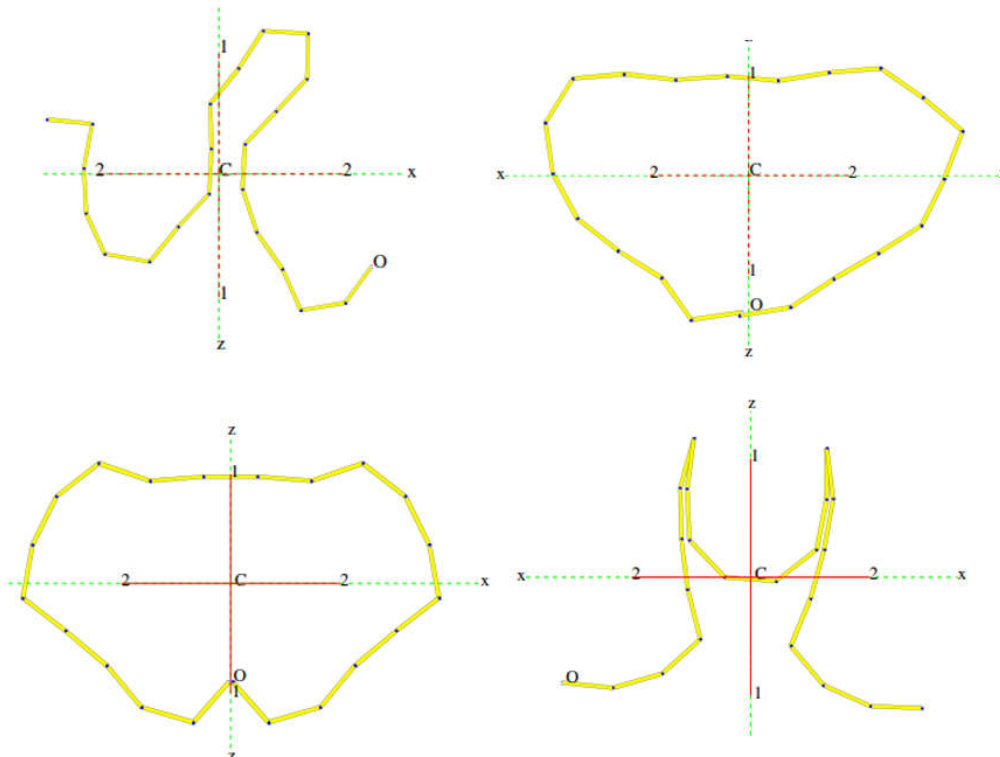


Figura 22: Seções ineficazes de PFF produzidos via otimização de forma livre [69].

Por outro lado, a otimização de PFF de forma livre sem restrições geralmente apresenta os melhores resultados em termos de capacidade resistente máxima, mas raramente as formas otimizadas são fabricáveis. LENG *et al.* [69] por exemplo, validou a aplicação de três algoritmos de otimização (SD, AG e SA) para maximizar a resistência à compressão de uma seção transversal de aço formados a frio aberto. Comparado as seções obtidas com perfil U enrijecido de aço formados a frio padrão, os resultados apresentam mais do que o dobro da resistência. Porém, devido à falta de restrições, os perfis são ineficazes dada a tecnologia atual de fabricação.

A pesquisa recente de ALAM *et al.* [75], buscou trazer uma nova perspectiva sobre a otimização de PFF, ao desenvolver um sistema de otimização integrada a análise de elementos finitos para obter os projetos ótimos de colunas de aço de seção transversal aberta formada a frio com carga crítica de flambagem máxima. A metodologia dessa pesquisa acoplou uma rotina de otimização que utiliza o AG nativo do MATLAB com a análise de flambagem do ANSYS, alcançando ganhos significativos em termos de carga crítica de flambagem (até 236%) para as seções transversais otimizadas. A Figura 23 ilustra o esquema de otimização adotado nessa pesquisa.

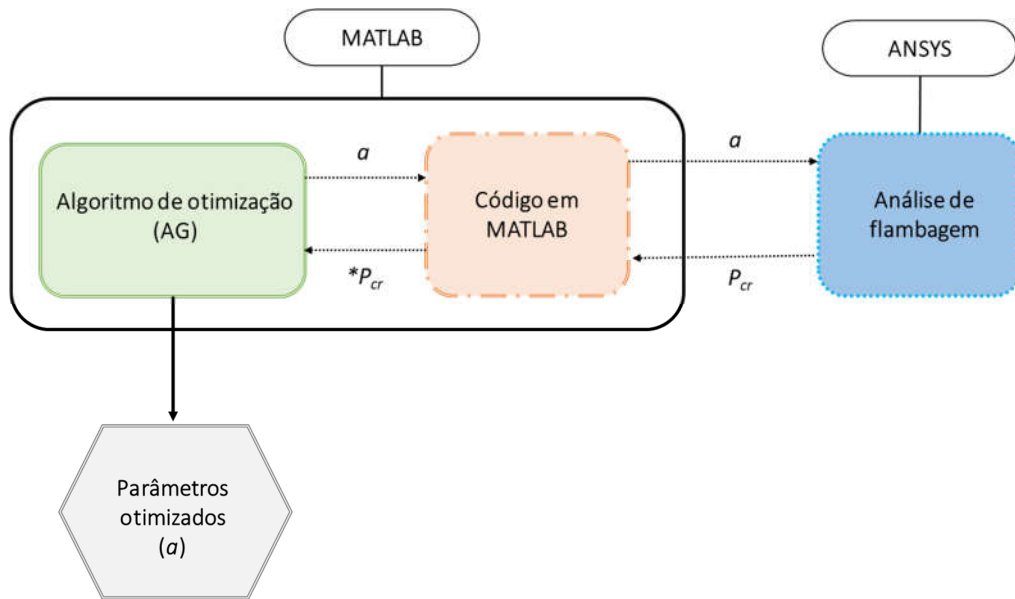


Figura 23: Esquema de otimização de PPF baseada no Método de Elementos Finitos [75].

### 3. METODOLOGIA

Com o objetivo de fornecer um programa de código aberto, a metodologia computacional neste trabalho foi implementada usando o MATLAB R2017b [76], sem o uso de ferramentas de otimização do tipo "caixa preta". O código-fonte, os resultados brutos e o banco de dados de treinamento estão disponíveis no repositório da dissertação ([github.com/FelipeRamosOliveira/Dissertation-Source-Code.git](https://github.com/FelipeRamosOliveira/Dissertation-Source-Code.git)). Todas as experiências foram realizadas usando uma máquina Intel (R) Core (TM) CPU i5-8300H de 2,3 GHz e 8 GB de RAM.

As dimensões dos perfis UE trabalhadas na metodologia proposta podem ser agrupadas em três níveis (ou domínios), são eles: (i) o domínio amplo de treinamento e validação da ferramenta de Aprendido de Máquina, (ii) o domínio intermediário de perfis tomados como referência para otimização e (iii) o domínio restrito de perfis gerados pelos algoritmos de otimização. Esses itens serão discutidos nos tópicos futuros desse capítulo. A Figura 24 ilustra os diferentes níveis da metodologia adotada.

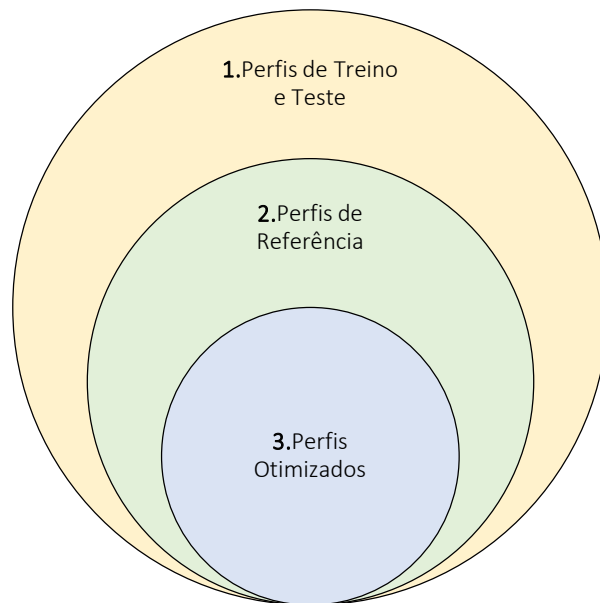


Figura 24: Níveis de perfis UE utilizados na metodologia.

#### 3.1. Problema de Otimização

As dimensões nominais da seção transversal U enrijecido do problema de otimização proposto e as de uma bobina de PFF são ilustradas na Figura 25.

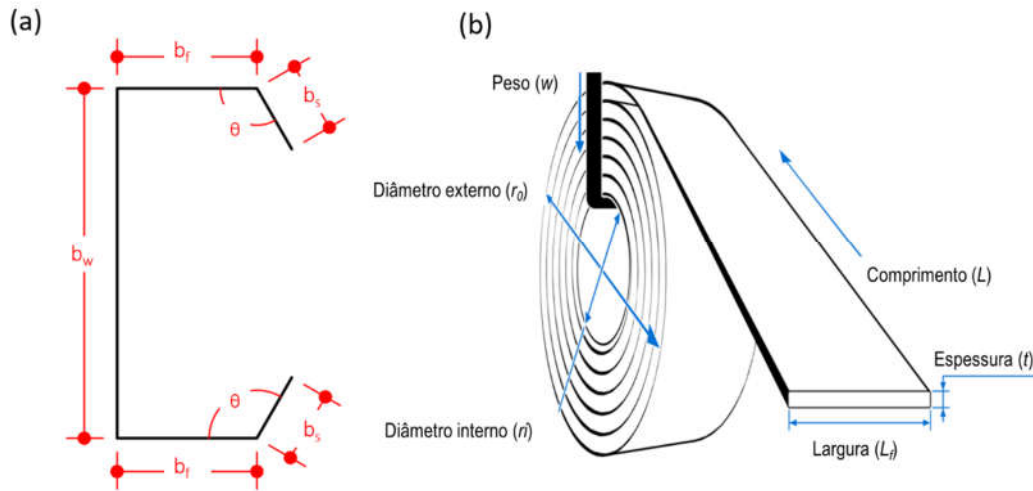


Figura 25: Seção transversal adotada. (a) Variáveis da seção; (b) Variáveis da bobina [77].

A metodologia desta dissertação apresenta um estudo de maximização da resistência à compressão axial centrada de perfis U enrijecidos, eleitos de um catálogo de seções comerciais do *Steel Framing Industry Association* (SFIA) [78]. Foram consideradas recomendações da NBR 14762 [3], limitações de fabricação e considerações práticas retiradas da literatura especializada. O problema de otimização foi formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{minimize: } f(x_1, x_2, x_3) = -P_n \\ & \text{satisfazendo: } g_j(x_i) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (50)$$

Onde  $P_n$  é a resistência à compressão nominal calculada de acordo com o Método da Resistência Direta (MRD).

O problema de otimização proposto é uma função das variáveis de projeto  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  que correspondem a relação  $b_s/b_w$ , a relação  $b_s/b_f$  e o ângulo  $\theta$  do enrijecedor de borda em relação a mesa do perfil, respectivamente. Dessa maneira, as soluções candidatas (cromossomos, partículas e abelhas artificiais) para o problema de otimização podem ser escritas na seguinte forma genérica:

$$x = [x_1 = b_s/b_w, x_2 = b_s/b_f, x_3 = \theta] \quad (51)$$

Durante a otimização assumiu-se uma tensão de escoamento  $f_y = 227 \text{ MPa}$ , módulo de Young  $E = 210 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , levando em consideração as especificações da SFIA [78].

Tomando como referência as recomendações na Tabela 9 da NBR 14762 [3], foram adotadas as seguintes restrições:

$$0,1 \leq b_s/b_w \leq 0,4 \quad (52)$$

$$0,1 \leq b_f/b_w \leq 1,0 \quad (53)$$

A restrição apresentada na Equação 52, tem como propósito principal garantir a efetividade do enrijecedor de borda no papel de evitar o modo distorcional. É muito importante ressaltar que o limite superior dessa equação é um relaxamento da prescrição da norma brasileira, que recomenda uma relação de enrijecedor de borda e alma ( $b_s/b_w$ ) não superior a 0,3. Esse relaxamento foi adotado a fim de tornar menos restrito o domínio de busca do problema de otimização.

A restrição apresentada na Equação 53 apresenta dois propósitos principais: (i) o limite estabelece uma dimensão da mesa que permita a fabricação do perfil (ii) o limite superior garante que mesa não se torne um subelemento excessivamente esbelto (mais que a própria alma do perfil), conduzindo ao modo de flambagem distorcional.

Baseando-se nas pesquisas de YE *et al.* [79]-[80] foram adotadas as seguintes restrições:

$$0,2 \leq b_s/b_f \leq 0,6 \quad (54)$$

$$45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ \quad (55)$$

Vale ressaltar que a restrição apresentada na Equação 53, adotada por YE *et al.* [79]-[80], é baseada em uma recomendação normativa da *Eurocode 3* [27], e tem como propósito principal garantir que o enrijecedor de borda ofereça rigidez à mesa do perfil. Já a restrição apresentada na Equação 55 é uma interpretação dessa mesma norma por parte dos autores, e limita as configurações geométricas possíveis às previamente estudadas por processo de experimentação.

A seção transversal típica do perfil deve ser constituída de elementos planos de forma a garantir um processo de fabricação simplificado, e que permita conexão entre PFF ou a sistemas de telhado, pisos e paredes, por exemplo. Isso contrasta com as formas frequentemente complexas e curvas encontradas como resultado de procedimentos de otimização de forma livre. Nessa dissertação, foram adotadas as considerações de fabricação comuns entre os trabalhos de YE *et al.* [79]-[80] e Leng *et al.* [69], de onde foram extraídas as seguintes considerações:

- i. Largura mínima de 30 *mm* nas mesas, para permitir a conexão entre perfis e painéis de vedação por meio de parafusos;
- ii. O enrijecedor de borda com largura mínima de 10 *mm*, a fim de evitar que ele quebre durante o processo de conformação;
- iii. Largura mínima de 100 *mm* na alma, a fim de permitir uma conexão (com uma placa de fixação, por exemplo) com pelo menos dois parafusos;
- iv. As dimensões do perfil devem ter tolerância máxima de 0,1 *mm*, de acordo com a precisão das formadoras de rolo e cortadores de bobinas usuais (precisão em polegadas ou milímetros, dependendo da base da unidade do equipamento de fabricação);
- v. As seções transversais devem ser monossimétricas e os ângulos de abertura dos enrijecedores de borda  $\theta$  devem ser múltiplos inteiros de 15° (domínio discreto).

É importante frisar que as limitações de fabricação propostas tanto por YE *et al.* [79]-[80] quanto Leng *et al.* [69], se referem a um grupo muito restrito de fabricantes. Dessa forma, dependendo da empresa que produz os PFF, o número de restrições e seus limites laterais tendem a ser diferentes.

Para estabelecer o ganho percentual de resistência pós otimização, é necessário primeiro determinar os valores de referência os quais se deseja aumentar. Dessa forma, um grupo de cinco perfis comerciais da SFIA [78] foi tomado como padrão. Esse grupo de perfis inclui os modelos SFIA 800S137-33 (U203,2x34,9x9,5x0,9), SFIA 600S137-43 (U152,4x34,9x9,5x1,1), SFIA 600S162-54 (U152,4x41,3x12,7x1,4), SFIA 800S162-68 (U200,3x41,3x12,7x1,8) e SFIA 1400S300-97 (U355,6x76,2x15,9x2,6), que neste trabalho foram nomeados de Protótipo 1, Protótipo 2, Protótipo 3, Protótipo 4 e Protótipo 5, respectivamente. Juntos eles contemplam quatro alturas de alma ( $b_w$ ), três larguras de mesa ( $b_f$ ), três larguras de enrijecedores de borda ( $b_s$ ) e cinco espessuras diferentes ( $t$ ). As seções de cantos arredondados foram modeladas como seções de cantos retos, de acordo com AISIS S100 [28]. É importante ressaltar que os protótipos de referência são parte de um grupo perfis da SFIA [78] utilizados para resistir a carregamentos de flexão, e foram adotados a fim de acentuar a variação geométrica entre os resultados obtidos na maximização de capacidade resistente ao carregamento de compressão.

A premissa principal do processo de otimização proposto na metodologia desta dissertação é oferecer um ganho resistência à compressão axial tão grande quanto possível

para os protótipos selecionados, mantendo suas respectivas áreas brutas de seção transversal constantes. A Figura 26 ilustra as dimensões dos perfis adotados como protótipos.

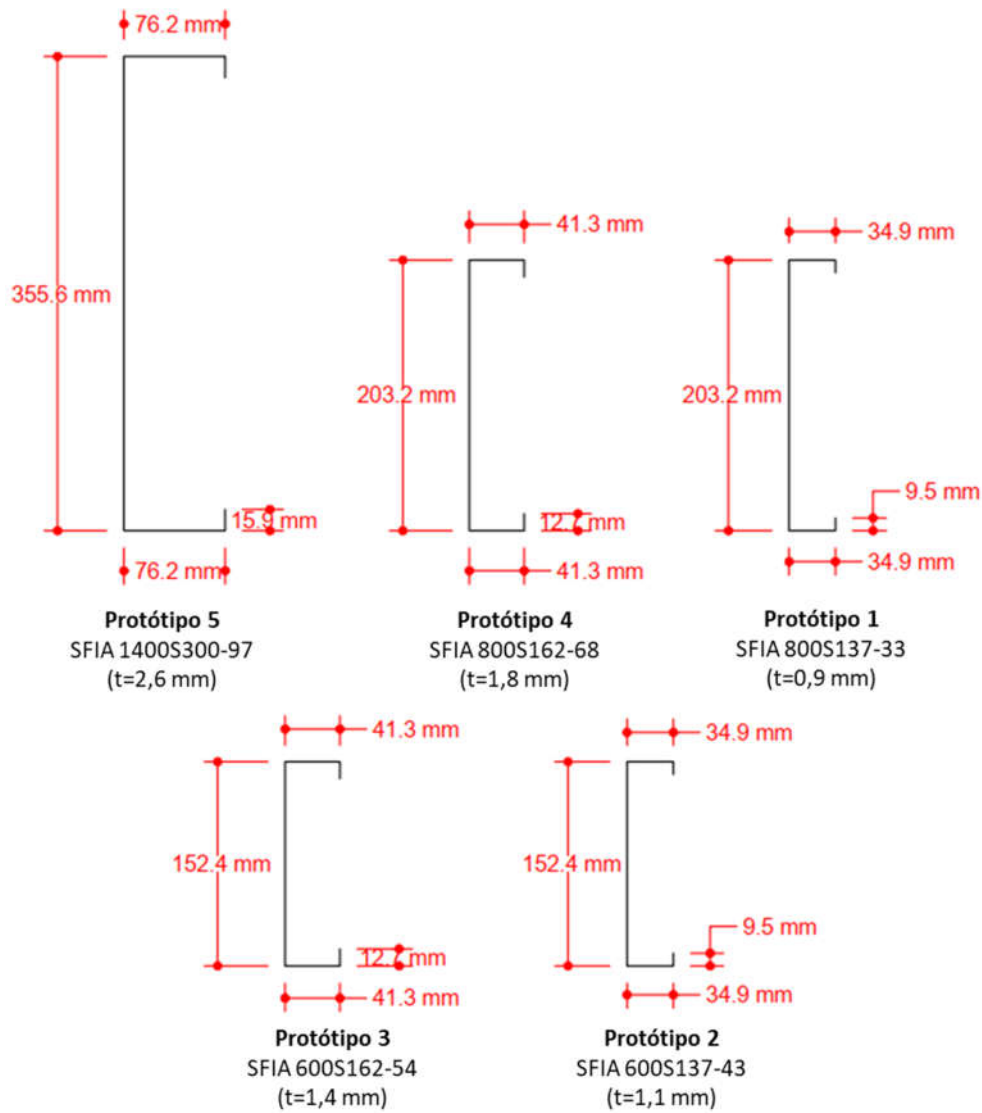


Figura 26: Protótipos SFIA adotados como referência.

Esta dissertação adotou sete comprimentos de coluna  $L$  para cada protótipo de PFF, com o objetivo de analisar a influência do modo G no processo de otimização.

A Tabela 1 apresenta as dimensões dos perfis referência e suas respectivas capacidades resistentes à compressão axial  $P_n$ , calculadas com base nas equações MRD. Cada par comprimento-protótipo corresponde a um problema de otimização diferente, totalizando 35 problemas de otimização.

Tabela 1: Protótipos SFIA utilizados como referência pra otimização.

Protótipo	L (mm)	L <sub>f</sub> (mm)	b <sub>w</sub> (mm)	b <sub>f</sub> (mm)	b <sub>s</sub> (mm)	t (mm)	λ <sub>L</sub>	λ <sub>D</sub>	λ <sub>G</sub>	P <sub>n</sub> (kN)
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000						3,2	0,6	0,9	17,8
	1250						3,2	0,6	1,1	15,8
	1500						3,2	0,6	1,4	13,6
	1750	292,0	203,2	34,9	9,5	0,9	3,2	0,6	1,6	11,4
	2000						3,2	0,6	1,8	9,6
	2250						3,2	0,6	2,0	8,3
	2500						3,2	0,6	2,3	7,2
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000						2,0	0,6	0,8	26,2
	1250						2,0	0,6	1,1	23,5
	1500						2,0	0,6	1,3	20,5
	1750	241,2	152,4	34,9	9,5	1,1	2,0	0,6	1,5	17,5
	2000						2,0	0,6	1,7	14,7
	2250						2,0	0,6	1,9	12,5
	2500						2,0	1,4	2,1	10,9
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000						1,6	0,6	0,7	45,4
	1250						1,6	0,6	0,9	42,3
	1500						1,6	0,6	1,0	38,7
	1750	260,4	152,4	41,3	12,7	1,4	1,6	0,6	1,2	34,9
	2000						1,6	0,6	1,4	30,9
	2250						1,6	0,6	1,5	26,9
	2500						1,6	1,2	1,7	23,3
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000						1,6	0,6	0,7	67,2
	1250						1,6	0,6	0,9	62,1
	1500						1,6	0,6	1,1	56,4
	1750	311,2	203,2	41,3	12,7	1,8	1,6	0,6	1,3	50,2
	2000						1,6	0,6	1,4	43,9
	2250						1,6	0,6	1,6	37,6
	2500						1,6	1,2	1,8	32,6
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000						2,0	0,6	0,4	160,8
	1250						2,0	0,6	0,5	156,8
	1500						2,0	0,6	0,6	152,1
	1750	539,8	355,6	76,2	15,9	2,6	2,0	0,6	0,7	146,6
	2000						2,0	0,6	0,8	140,6
	2250						2,0	0,6	0,9	134,0
	2500						2,0	0,6	1,0	127,0

Na Tabela 2 (e Figura 24) é possível notar que os Protótipos 1 e 2 aprestam  $b_s < 10 \text{ mm}$ , além de outras discordâncias com as restrições impostas. Pois, como descrito anteriormente (também ilustrado na Figura 24), o domínio de busca do problema de

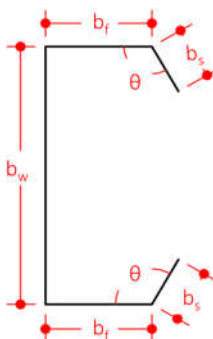
otimização proposto ( $D_{ot}$ ) é mais restrito que domínio dos perfis referência ( $D_{ref}$ ), ou seja,  $D_{ot} \in D_{ref}$ .

Todos os protótipos da SFIA [78] são baseados em um formato de U enrijecido (UE) tradicional (Figura 3), tipicamente dentro da capacidade de fabricação de empresas de laminação a frio. O perfil UE tradicional apresenta enrijecedores de borda de ângulo reto para atender melhor as práticas reais de fabricação e construção. Porém, com intuito de estudar a otimização com variáveis discretas, a variável  $\theta$  foi adicionada ao problema. Dessa forma, a seção transversal adotada para problema de otimização pode ser descrita com um UE com enrijecedores inclinados (Figura 25 (a)), uma forma variante da utilizada pela SFIA.

Uma das vantagens significativas dos algoritmos meta-heurísticos consiste na facilidade com que as restrições podem ser alteradas e/ou adicionadas. As restrições simplesmente resultam em uma limitação do espaço de pesquisa. Dessa forma, esta metodologia pode ser aplicada em outras seções transversais mais complexas. Além disso, os algoritmos meta-heurísticos implementados nessa dissertação também são capazes de trabalhar em espaços de pesquisa contínuos e discretos ao mesmo tempo.

A Tabela 2 resume as variáveis de projeto  $x_i$  e as restrições do problema geral de otimização.

Tabela 2: Variáveis de projeto e restrições do problema de otimização

Seção Adotada	Variáveis de Projeto	Restrições	Limites Laterias
	$x_1 = b_s/b_w$	$0,1 \leq b_s/b_w \leq 0,4$	$b_w \geq 100mm$
	$x_2 = b_s/b_f$	$0,1 \leq b_f/b_w \leq 1,0$	$b_f \geq 30mm$
	$x_3 = \theta$	$0,2 \leq b_s/b_f \leq 0,6$	$b_s \geq 10mm$
		$45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$	

Em adição às restrições já apresentadas, adotou-se um limite máximo de esbeltez  $\lambda_{constraint} = \min(\lambda_L, \lambda_D) \leq 2,5$  ao invés das restrições da NBR 14762 [3] referentes a razão largura-espessura dos subelementos.

### 3.1.1. Cálculo automatizado de resistência e modelos numéricos

Conforme explicado anteriormente, a função objetivo é maximização da resistência à compressão axial  $P_n$ , calculada automaticamente de acordo com o Método da Resistência Direta (MRD). As cargas críticas ( $P_{crG}$ ,  $P_{crL}$  e  $P_{crD}$ ) são obtidas pelo programa FSrt (implementado em MATLAB), que emprega o Método das Faixas Finitas (MFF), para realizar a análise de flambagem elástica. A Figura 27 (a) ilustra o modelo tridimensional do problema de otimização proposto antes da análise de flambagem, e a Figura 27 (b) ilustra a forma deformada pós análise de flambagem.

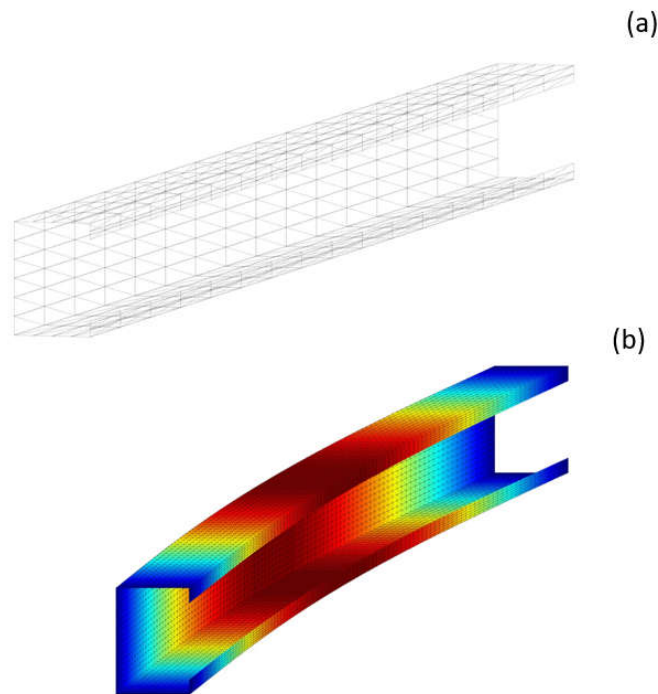


Figura 27: Modelo 3D (FSrt) do problema de otimização. (a) Perfil indeformado; (b) perfil deformado.

A análise em MFF é realizada assumindo um modelo numérico de uma coluna simplesmente apoiada sob carga axial uniforme com condições de empenamento livre em ambas as extremidades. A seção transversal é representada por 18 subelementos (19 pontos), como mostra a Figura 28.

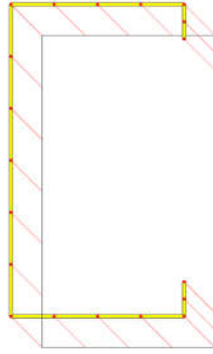


Figura 28: Modelo 2D (FSrt) para análise de flambagem elástica.

Em termos de programação, a análise de flambagem, o cálculo da resistência e a restrição de otimização formam uma função objetivo única  $f(x)$ , que é acessada pelos algoritmos de otimização meta-heurísticos a cada avaliação de custo

O Pseudocódigo 5 apresenta as etapas da função de custo C1, que acopla MFF ao MRD.

---

#### Função de Custo - C1

---

- 1: Do código principal, receba as propriedades do material  $E$ ,  $f_y$  e  $\nu$
  - 2: Do código principal, receba o comprimento da coluna  $L$
  - 3: Do código principal receba a largura da bobina  $L_f$  e a espessura  $t_c$
  - 4: Do algoritmo de otimização, receba uma solução candidata  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$
  - 5: Do algoritmo de otimização, receba as de restrições de desigualdade  $g(x)$
  - 6: Proceder a análise de flambagem da solução candidata empregando FSrt para determinar as cargas críticas  $P_{crG}$ ,  $P_{crL}$  e  $P_{crD}$
  - 7: Calcular a resistência à compressão  $P_n$  do candidato pelo MRD e definir  $f(x) = -P_n$
  - 8: Calcular a penalidade  $P(x) = \sum_{j=1}^N v_j \max(0, g_j(x))^2$ , então a função de custo como  $C(x) = f(x) + P(x)$
- 

Pseudocódigo 5: Função custo C1 (MFF-MRD).

### 3.2. Implementação dos Algoritmos Inspirados na Natureza

Esta dissertação propõe resolver o problema de otimização apresentado na seção anterior deste capítulo, aplicando os seguintes algoritmos meta-heurísticos baseados na natureza: Algoritmo Genético (AG), Evolução Diferencial (DE), Otimização de Enxame de Partículas (PSO) e Colônia de Artificial Abelhas (ABC). O procedimento de cada algoritmo foi descrito nos pseudocódigos do Capítulo 2. Foram adotadas no AG, as técnicas de *crossover* aritmético (Equação 32) e mutação gaussiana (Equação 33). No DE foi adotado o *crossover* exponencial (Equação 37). No PSO foram adotadas as técnicas

de redução de inércia (Equação 40) e de ajustes de fatores de aceleração (Equação 41 e Equação 42).

Esta dissertação trata o problema de otimização restrita usando o método das penalidades, apresentado na Equação 54, assumindo um constante de penalidade única =  $\mu = 10^3$  para todas as restrições propostas. Vale ressaltar que o valor da constante de penalidade compatibiliza a escala numérica da violação de restrição com a escala do valor da função de custo.

Para comparação, todos os algoritmos são executados em paralelo sobre o mesmo problema de otimização, quinze vezes cada problema. A metodologia de otimização adotada nesta dissertação está resumida no código principal, como mostra o Pseudocódigo 6.

---

#### **Código Principal da Ferramenta de Otimização**

---

- 1: Definir propriedades do material  $E$ ,  $f_y$  e  $\nu$  como variáveis globais
  - 2: Definir comprimento da coluna  $L$  como variável global
  - 3: Definir a matriz  $M_{SFIA}$  contendo as variáveis de projeto dos perfis de referência SFIA
  - 4: **durante**  $i = 1$  até o número de perfis em  $M_{SFIA}$
  - 5:     A partir de  $M_{SFIA}$  definir protótipo  $i$
  - 6:     A partir do protótipo  $i$  definir  $t$  como variável global
  - 7:     Calcular  $L_f = b_w + 2 \cdot (b_f + b_s)$  do protótipo  $i$  e definir como variável global
  - 8:     Calcular a resistência à compressão do protótipo  $i$   $P_n$  pelo DSM
  - 9:     Salvar  $P_n$  do protótipo  $i$   
       Otimizar protótipo  $i$  usando AG  
       Otimizar protótipo  $i$  usando DE  
       Otimizar protótipo  $i$  usando PSO  
       Otimizar protótipo  $i$  usando ABC
  - 10:    Salvar a saída de cada algoritmo de otimização
  - 11: **fim durante**
  - 12: Reavaliar os resultados da otimização usando MFF e MRD
  - 13: Calcular a otimização percentual
  - 14: Devolver resultados
- 

Pseudocódigo 6: Código principal da ferramenta de otimização.

Para estabelecer uma base de comparação, os algoritmos têm os mesmos critérios de parada, o qual interrompe o processo de otimização quando o número máximo de avaliações da função de custo ( $Max_{eval} = 10^4$ ) é atingido. Assim, é atribuído o mesmo recurso computacional a cada algoritmo. A Figura 29 ilustra o primeiro esquema de otimização proposto.

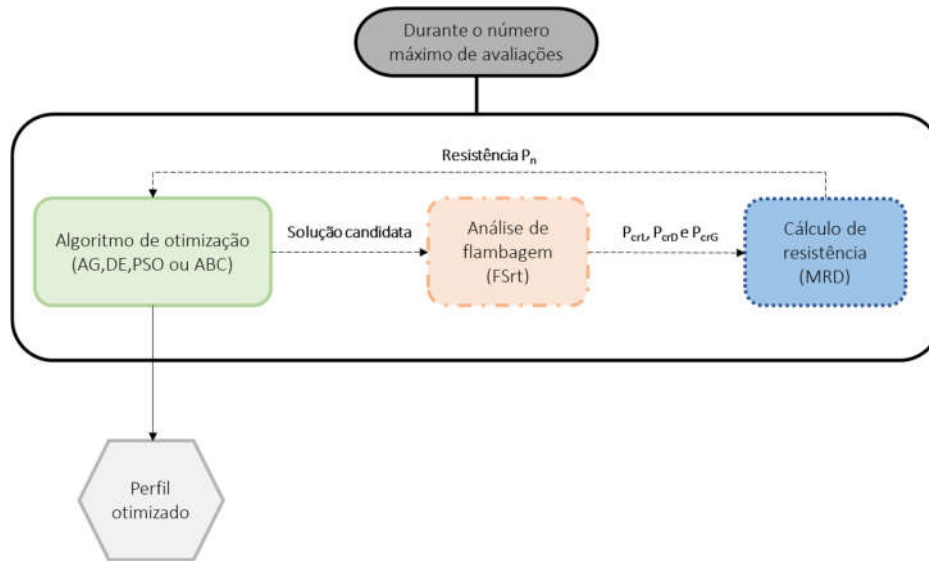


Figura 29: Primeiro esquema de otimização proposto.

A Tabela 3 apresenta os parâmetros adotados para cada algoritmo meta-heurístico inspirado na natureza empregado nesta dissertação.

Tabela 3: Parâmetros dos algoritmos meta-heurísticos.

ALGORITMO	PARÂMETRO	VALOR
AG	Tamanho da população ( $n$ )	40
	Tamanho do torneio	3
	Probabilidade de <i>crossover</i> ( $p_c$ )	0,7
	Probabilidade de mutação ( $p_m$ )	0,1
DE	Tamanho da população ( $n$ )	15
	Fator de escala ( $F$ )	0,85
	Probabilidade de <i>crossover</i> ( $C_r$ )	0,75
PSO	Tamanho da população ( $n$ )	30
	Inércia inicial ( $w_0$ )	0,9
	Inércia final ( $w_{tmax}$ )	0,1
	Máx. acel. cog. ( $C_{1max}$ )	0,7
	Máx. acel. social. ( $C_{2max}$ )	0,9
	Mín. acele. cog. ( $C_{1min}$ )	0,1
ABC	Fontes de néctar ( $NS$ )	30
	Limites ( $l_v$ )	250

Para trabalhar com a variável de projeto discreta  $\theta$ , os vetores de soluções candidatas são inicializados de forma independentes a partir de geradores de números aleatórios contínuos e discretos, e depois concatenados.

### 3.3. Preditor de Carga Crítica de Flambagem Distorcional

Como discutido anteriormente no Capítulo 2, não está consolidada na literatura uma formulação analítica unânime para flambagem crítica por distorção, geralmente exigindo métodos de solução numérica para avaliar esse fenômeno em particular. A análise de flambagem de PFF é normalmente realizada por *software* que emprega MFF, cFSM ou GBT devido ao seu menor custo computacional em comparação com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

No entanto, mesmo o *software* de métodos numéricos mais eficiente para análise de flambagem exige um esforço computacional razoável. De fato, todo o gargalo de otimização é a análise de flambagem (Linha 6, Pseudocódigo 5). Assim, buscando uma técnica de otimização computacional mais eficiente para PFF, este trabalho apresentou um preditor baseado no Aprendizado de Máquina (AM), capaz de substituir ferramentas numéricas para análise de flambagem.

Nesse contexto, foi adotada a Regressão de Processo Gaussiana (GPR) para previsão de flambagem distorcional. O modelo de GPR foi desenvolvido através do MATLAB *Statistics and Machine Learning Toolbox*™ [76], que fornece funções e aplicativos para descrever, analisar e modelar dados, além de criar modelos preditivos. O preditor GPR foi escolhido devido ao seu menor erro quadrático médio (EQM) quando comparado a outros vinte preditores, incluindo Redes Neurais e a Máquina de Vetores de Suporte (*Support Vector Machine* - SVM).

O modelo GPR no MATLAB utilizou a função quadrática exponencial como *kernel* (Equação 25), assumindo o erro médio de predição pós normalização dos resultados igual a zero. O modelo foi avaliado através da técnica de validação cruzada, assumindo nove lotes de treino e um lote de teste. O EQM do modelo proposto é 11,3, o  $R^2$  é 1,0, e o erro médio absoluto (EMA) é 3,75.

O preditor GPR foi treinado a partir de um banco de dados de perfis do tipo UE gerados de maneira aleatória. De tal forma que o domínio de busca do problema de otimização proposto ( $D_{ot}$ ) seja um subconjunto do domínio de treino do GPR ( $D_{GPR}$ ), ou seja,  $D_{ot} \in D_{GPR}$ . Essa escolha foi tomada visando possíveis expansões da aplicação do modelo de predição. O modelo preditivo de carga crítica distorcional treinado e o conjunto de dados PFF estão contidos no repositório desta dissertação.

A construção do banco de dados utilizado no treino do GPR foi realizada em três etapas. Primeiro foi criado um conjunto de 50.000 perfis UE gerados de maneira aleatória.

Em seguida foi realizada a análise de flambagem elástica de cada perfil, fornecendo suas respectivas curvas de assinatura. Por fim, assumindo que os dois primeiros mínimos locais da curva de assinatura de um perfil UE correspondem as cargas críticas relacionadas aos modos local e distorcional (Figura 8 e Figura 9), respectivamente, todos os perfis que apresentam menos de dois mínimos locais em sua curva de assinatura foram descartados. Ao todo o banco de dados é formado por 15.128 perfis diferentes, cerca de 30% do total de perfis gerados inicialmente, o que evidencia a dificuldade de identificação da carga crítica de flambagem distorcional.

Ao acoplar o preditor GPR para determinação da carga crítica de flambagem distorcional e as fórmulas analíticas da NBR 14762 [3] para os modos de flambagem local e global (Capítulo 2), é possível reescrever a função de custo  $C1$  (Pseudocódigo 5), substituindo a análise de flambagem via MFF. Dessa forma, é estabelecido o modelo substituto  $C2$ , menos custoso computacionalmente, para a função de custo. A Figura 30 ilustra o segundo esquema de otimização proposto.

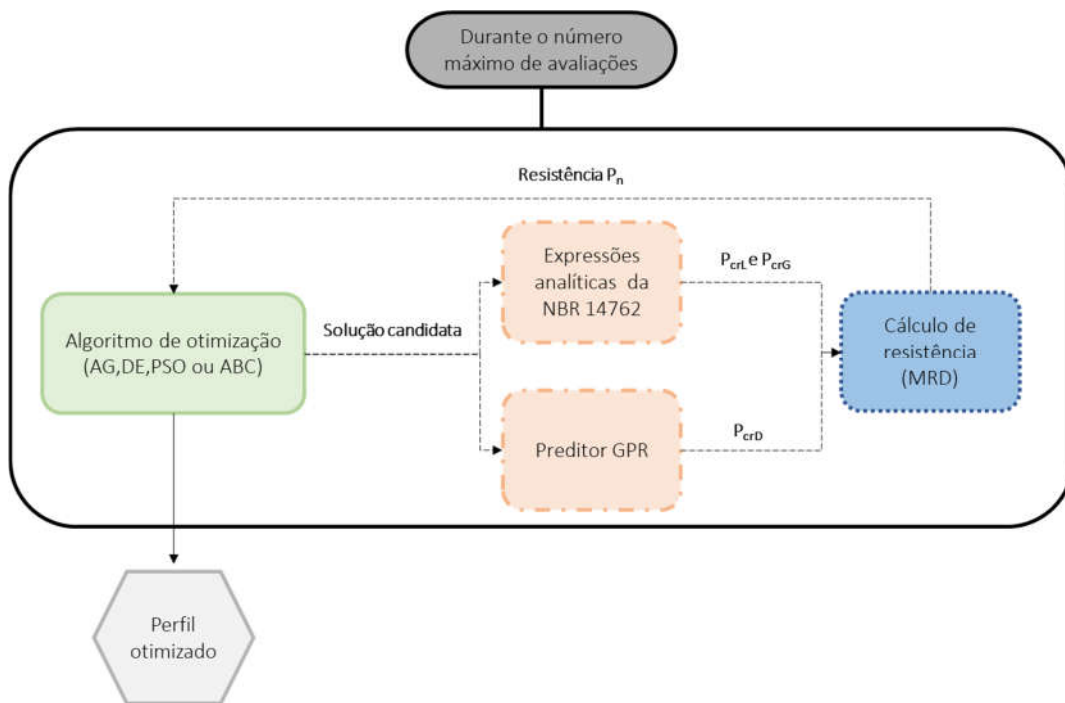


Figura 30: Segundo esquema de otimização proposto.

O Pseudocódigo 7 apresenta a função de custo  $C2$ , que acopla o GPR, fórmulas analíticas para determinação das cargas críticas de flambagem e o MRD.

---

### Função de Custo – C2

---

- 1: Do código principal, receba as propriedades do material  $E$ ,  $f_y$  e  $\nu$
  - 2: Do código principal, receba o comprimento da coluna  $L$
  - 3: Do código principal receba a largura da bobina  $L_f$  e a espessura  $t_c$
  - 4: Do algoritmo de otimização, receba uma solução candidata  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$
  - 5: Do algoritmo de otimização, receba as de restrições de desigualdade  $g(x)$
  - 6: Predizer  $P_{crD}$  usando o modelo GPR treinado
  - 7: Calcular  $P_{crL}$  usando a Equação 6 e Equação 7
  - 8: Calcular  $P_{crG}$  usando as Equações de 1 a 5
  - 9: Calcular a resistência à compressão  $P_n$  do candidato pelo MRD e definir  $f(x) = -P_n$
  - 10: Calcular a penalidade  $P(x) = \sum_{j=1}^N v_j \max(0, g_j(x))^2$ , então a função de custo como  $C(x) = f(x) + P(x)$
- 

Pseudocódigo 7: Função de custo C2 (GPR- fórmulas analíticas-MRD).

Assumindo que o valor de referência para a carga crítica distorcional seja fornecida pela análise do MFF conduzida pelo FSrt, a Figura 31 ilustra os resultados alcançados pelas previsões do GPR e expressões analíticas de CARDOSO *et al.* [6], para o cálculo de  $P_{crD}$ , de cento e cinquenta perfis de teste produzidos aleatoriamente. É importante ressaltar que as expressões de CARDOSO *et al.* [6] foram elaboradas para um domínio geométrico de perfis menor que o domínio do utilizado para treino e teste do GPR, portanto essa formulação é adotada na ausência de equações mais adequadas para descrever o problema e pode apresentar erros maiores do que os verificados pelos autores.

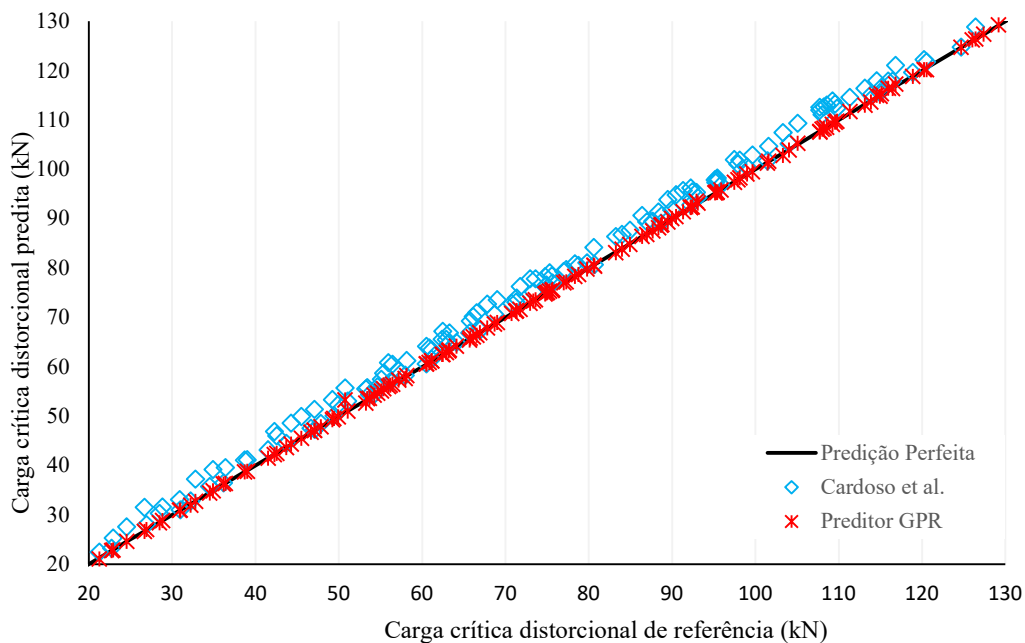


Figura 31: Comparação entre resultados para carga crítica distorcional.

Os resultados indicam um erro máximo entre a análise MFF e a previsão do GPR de 5% (desvio padrão do erro e erro absoluto médio igual a 0,1%) e erro de 16,2% (desvio padrão do erro e erro absoluto médio iguais a 3,8% e 3,1%, respectivamente) entre a análise de MFF e as previsões de CARDOSO *et al.* [6]. Assim o preditor GPR pode ser considerado, dentro dos limites do domínio de treinamento, tão confiável quanto as expressões analíticas atuais para flambagem distorcional.

Com os recursos de *hardware* descritos anteriormente, os tempos médios para avaliar a função de custo C1 e C2 foram 6E-01 segundos e 1,7E-03 segundos, respectivamente. Isto significa que a avaliação da função C1 é cerca de 360 vezes mais lenta do que a função C2, desenvolvida e adotada neste trabalho.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1. Otimização via AG

A Tabela 4 apresenta, em termos de acréscimo percentual de resistência, a dispersão dos resultados de otimização alcançados pelo AG clássico em quinze execuções diferentes do algoritmo, considerando o C1 como função de custo.

Tabela 4: Dispersão dos resultados de ganho de resistência alcançados pelo AG avaliando C1.

Protótipo	L (mm)	Melhor	Pior	Mediana	Média	Desvio Padrão	Coef. de Variação
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	82,3%	15,6%	73,5%	64,5%	22,1%	34,3%
	1250	99,2%	41,5%	85,9%	85,4%	13,5%	15,8%
	1500	116,0%	35,9%	102,8%	97,8%	19,9%	20,3%
	1750	149,8%	96,0%	120,1%	121,4%	17,0%	14,0%
	2000	170,5%	125,7%	148,2%	148,8%	11,9%	8,0%
	2250	195,5%	140,4%	168,7%	169,4%	15,8%	9,3%
	2500	207,1%	136,6%	188,3%	182,4%	19,9%	10,9%
Protótipo 2 (U152,42x34,9x9,5x1,1)	1000	44,6%	4,5%	37,1%	31,7%	13,1%	41,2%
	1250	49,4%	15,8%	42,8%	38,7%	10,9%	28,3%
	1500	57,8%	41,7%	50,4%	51,0%	4,4%	8,7%
	1750	74,5%	49,1%	65,6%	65,9%	6,6%	10,1%
	2000	90,6%	66,3%	78,6%	79,4%	6,9%	8,6%
	2250	103,3%	66,5%	88,3%	86,4%	10,1%	11,7%
	2500	106,2%	77,4%	96,0%	93,4%	10,5%	11,2%
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	34,5%	0,0%	29,0%	23,4%	12,4%	52,9%
	1250	35,8%	6,4%	31,4%	27,5%	7,9%	28,8%
	1500	37,5%	15,8%	29,7%	29,4%	5,7%	19,5%
	1750	42,2%	21,7%	35,5%	34,2%	5,5%	16,2%
	2000	51,7%	32,00%	42,3%	42,1%	5,8%	13,7%
	2250	59,9%	25,3%	50,7%	48,5%	8,7%	18,0%
	2500	60,5%	36,4%	49,6%	48,3%	6,9%	14,3%
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	62,9%	0,0%	51,5%	42,9%	21,2%	49,5%
	1250	65,8%	10,2%	58,8%	56,2%	13,9%	24,6%
	1500	78,0%	26,1%	63,5%	61,6%	12,8%	20,7%
	1750	84,6%	64,7%	72,8%	74,9%	6,6%	8,8%
	2000	99,7%	59,00%	84,0%	83,4%	10,0%	12,0%
	2250	113,7%	79,6%	101,2%	98,9%	11,7%	11,8%
	2500	124,5%	99,7%	107,4%	109,2%	7,0%	6,4%
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	59,5%	0,0%	40,5%	34,2%	20,6%	60,2%
	1250	54,5%	0,0%	23,0%	26,9%	18,1%	67,2%
	1500	47,9%	0,0%	37,4%	33,7%	14,1%	41,8%
	1750	62,3%	0,0%	41,4%	36,3%	20,3%	56,0%
	2000	61,2%	0,0%	39,7%	39,3%	18,3%	46,6%
	2250	63,5%	9,1%	52,6%	47,4%	19,6%	41,4%
	2500	62,2%	0,0%	47,1%	43,6%	17,9%	41,0%

Nota-se na Tabela 4 uma grande diferença entre os melhores e piores resultados alcançados em diferentes execuções do AG, chegando a uma diferença máxima de 80,1% (Protótipo 1 no comprimento  $L = 1500\text{ mm}$ ). Essa discrepância de resultados, conduziu aos altos valores de desvio padrão observados.

Nota-se Tabela 4, casos em que nenhum ganho de resistência foi alcançado considerando dois dígitos representativos. Esses resultados correspondem a um grupo de perfis que apresentaram mudanças geométricas muito pequenas quando comparadas à configuração original dos seus protótipos de referência. Em uma perspectiva de tempo de processamento, esses resultados apontam o desperdício de recurso computacional em algumas das execuções do AG clássico.

De forma geral a distância entre os valores das médias e medianas foi bem próximo, o que associado aos valores de máximo e mínimos observados na Tabela 4, indica uma distribuição simétrica dos resultados. Quando se trata de otimização, a distribuição simétrica dos resultados aponta um baixo desempenho do algoritmo, uma vez que o ideal é que os resultados se concentrem o mais próximo possível em torno de um só ponto (o ótimo global).

Observa-se que o coeficiente de variação ( $CV = Desv. Pad./Média$ ) dos protótipos otimizados é inversamente proporcional ao comprimento das colunas. Esse comportamento também ocorre nos outros algoritmos testados. A Figura 32 ilustra essa tendência de variação.

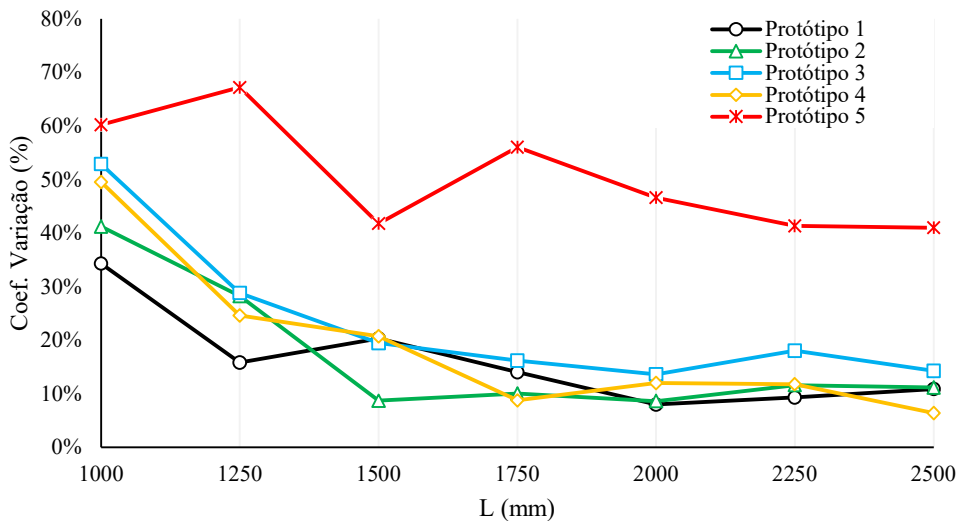


Figura 32: Coeficiente de variação de acordo com o comprimento da coluna - Função de custo C1.

A distribuição dos resultados apresentados também sugere a presença de mínimos locais na função objetivo, o que justifica as grandes diferenças observadas entre soluções alcançadas em diferentes execuções do AG clássico.

A Figura 33 ilustra a esbelteza média, considerando as quinze execuções do AG, dos perfis otimizados a partir do Protótipo 1. Nesse caso, os resultados indicam que a flambagem local é o modo de falha predominante, independente do comprimento analisado. Observa-se que a parti de  $L = 2250 \text{ mm}$ , as esbeltezes médias local e global são praticamente iguais.

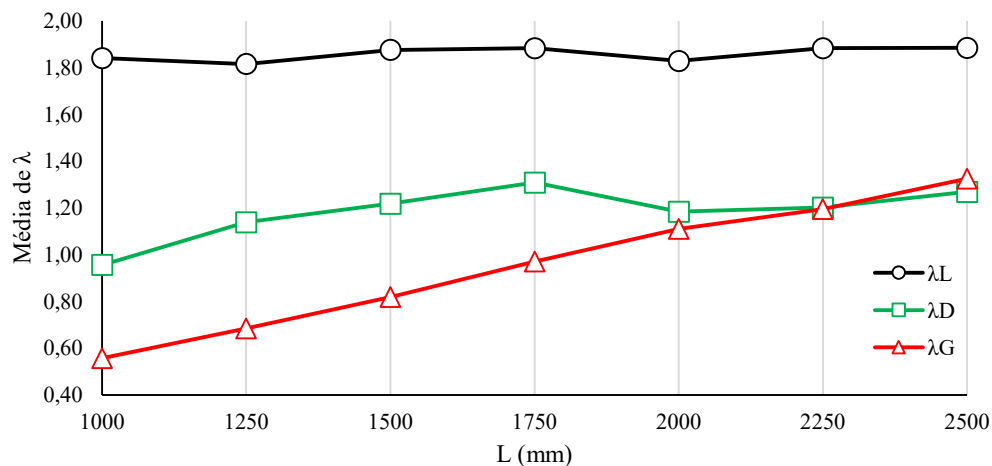


Figura 33: Esbelteza média das soluções alcançadas para o Protótipo 1,  $t = 0,9 \text{ mm}$  (AG).

A Figura 34 ilustra a curva de assinatura de uma das quinze soluções alcançadas pelo AG para o Protótipo 1 no comprimento  $L = 2500 \text{ mm}$  ( $b_w = 134,4 \text{ mm}$ ,  $b_f = 46,4 \text{ mm}$ ,  $b_s = 32,4 \text{ mm}$  e  $\theta = 90^\circ$ ), que apresenta proximidade entre as cargas críticas global e distorcional.

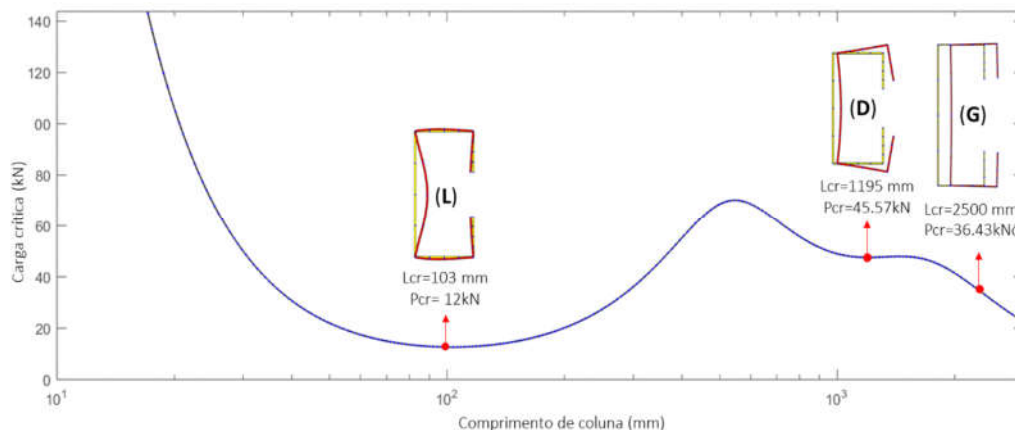


Figura 34: Proximidade entre os modos D e G de um Protótipo 1 otimizado (AG).

A Figura 35 ilustra a curva de assinatura de uma das quinze soluções alcançadas pelo AG para o Protótipo 1 no comprimento  $L = 2500 \text{ mm}$  ( $b_w = 102,2 \text{ mm}$ ,  $b_f = 69 \text{ mm}$ ,  $b_s = 25,9 \text{ mm}$  e  $\theta = 90^\circ$ ), que apresenta proximidade entre as cargas críticas local e global.

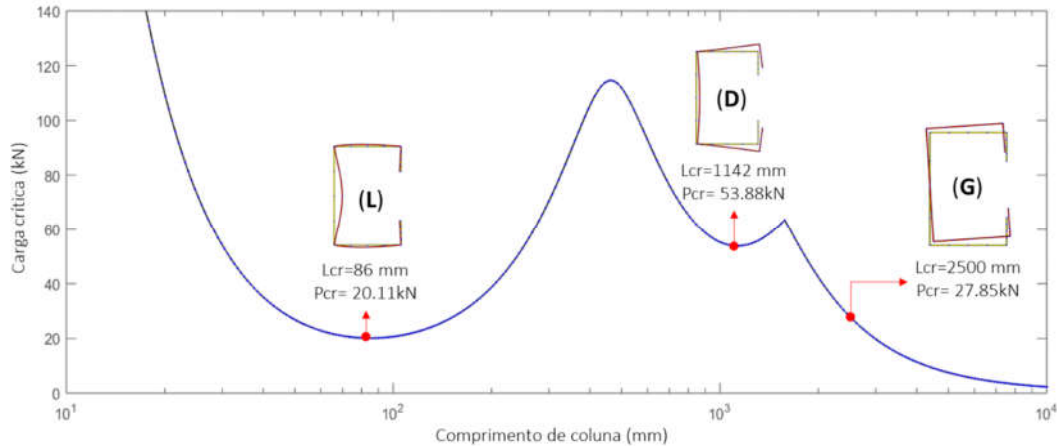


Figura 35: Proximidade entre os modos G e L de um Protótipo 1 otimizado (AG).

A Figura 36 ilustra a esbeltez média, considerando as quinze execuções do AG, dos perfis otimizados a partir do Protótipo 3. Nesse caso, os resultados indicam que a flambagem local é o modo de falha predominante até  $L = 2000 \text{ mm}$ , e depois desse ponto, o modo global se torna-se o modo de falha principal.

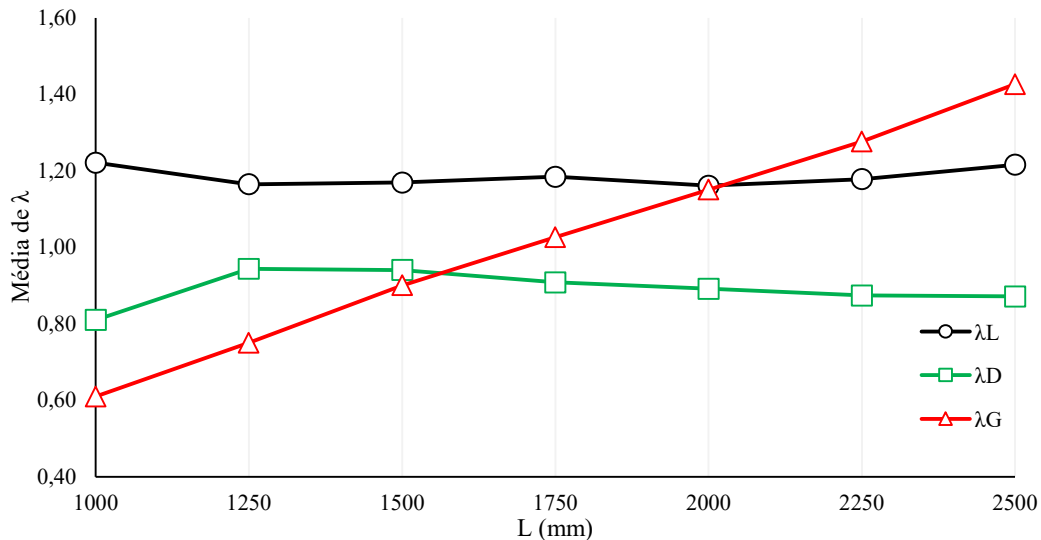


Figura 36: Esbeltez média das soluções alcançadas para o Protótipo 3,  $t = 1,4 \text{ mm}$  (AG).

A Figura 37 ilustra a curva de assinatura de uma das quinze soluções alcançadas pelo AG para o Protótipo 3 no comprimento  $L = 1500 \text{ mm}$  ( $b_w = 127,8 \text{ mm}$ ,  $b_f =$

46 mm,  $b_s = 20,3$  mm e  $\theta = 75^\circ$ ), que apresenta proximidade entre as cargas críticas global e distorcional.

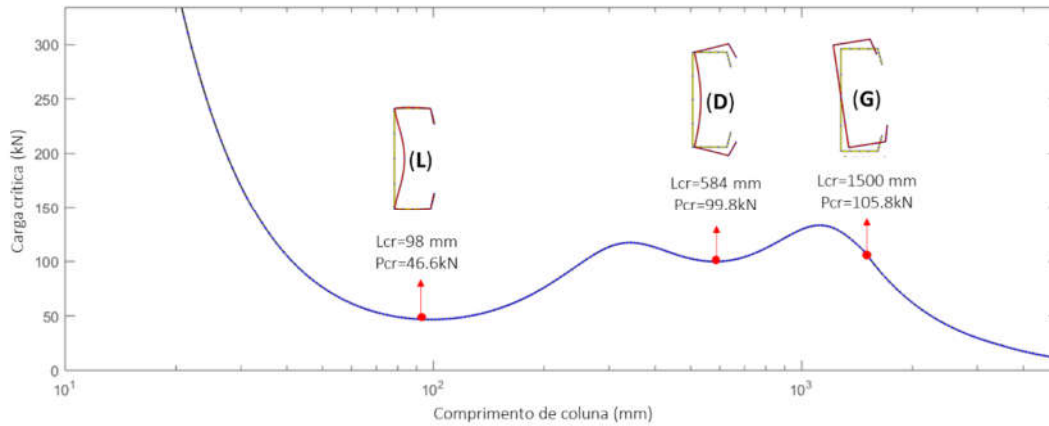


Figura 37: Proximidade entre os modos D e G de um Protótipo 3 otimizado (AG).

A Figura 37 ilustra curva de assinatura de uma das quinze soluções alcançadas pelo AG para o Protótipo 3 no comprimento  $L = 2250$  mm ( $b_w = 102,2$  mm,  $b_f = 47,7$  mm,  $b_s = 32,4$  mm e  $\theta = 90^\circ$ ), que apresenta proximidade entre as cargas críticas global e local.

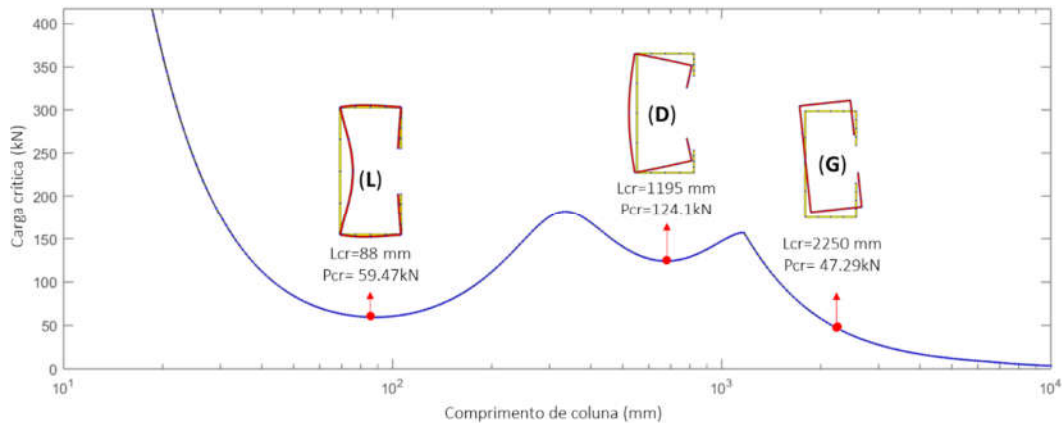


Figura 38: Proximidade entre aos modos G e L de um Protótipo 3 otimizado (AG).

Os resultados ilustrados nas Figuras 25 a 31 indicam que a medida em que o modo de falha global se torna predominante, menor é o coeficiente de variação dos resultados da otimização.

A Tabela 5 apresenta, em termos de acréscimo percentual de resistência, a dispersão dos resultados de otimização alcançados pelo AG clássico em quinze execuções diferentes do algoritmo, considerando o C2 como função de custo.

Tabela 5: Dispersão dos resultados de ganho de resistência alcançados pelo AG avaliando C2.

Protótipo	L (mm)	Melhor	Pior	Mediana	Média	Desvio Padrão	Coef. de Variação
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	83,3%	21,0%	71,0%	62,9%	21,1%	33,5%
	1250	92,0%	43,5%	84,7%	82,0%	12,5%	15,3%
	1500	119,4%	86,7%	107,4%	105,4%	10,4%	9,8%
	1750	136,6%	99,6%	124,8%	124,6%	9,9%	8,0%
	2000	164,5%	130,1%	148,7%	147,1%	10,8%	7,3%
	2250	194,0%	149,8%	175,5%	172,6%	13,4%	7,8%
	2500	217,6%	147,9%	182,5%	181,7%	20,7%	11,4%
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	44,1%	1,7%	36,3%	28,6%	14,5%	50,7%
	1250	52,2%	24,9%	44,1%	43,7%	6,5%	15,0%
	1500	59,4%	42,9%	51,8%	50,7%	4,8%	9,5%
	1750	72,5%	46,4%	64,7%	63,4%	7,4%	11,6%
	2000	90,4%	60,9%	76,0%	74,9%	9,0%	12,0%
	2250	99,7%	72,2%	88,5%	86,7%	7,7%	8,9%
	2500	112,3%	57,8%	87,5%	87,2%	13,1%	15,0%
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	33,4%	0,0%	28,2%	27,1%	8,2%	30,4%
	1250	37,3%	5,8%	30,6%	28,6%	7,4%	25,9%
	1500	42,1%	12,6%	33,8%	31,0%	8,7%	28,0%
	1750	46,1%	0,0%	31,8%	32,5%	12,1%	37,2%
	2000	50,4%	25,2%	42,7%	40,6%	7,6%	18,6%
	2250	60,6%	32,1%	42,4%	45,0%	8,4%	18,7%
	2500	66,4%	35,5%	48,5%	49,9%	9,4%	18,9%
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	62,4%	4,8%	52,9%	42,7%	20,8%	48,6%
	1250	69,0%	47,2%	56,9%	57,5%	6,9%	12,0%
	1500	79,0%	24,1%	68,1%	63,3%	16,3%	25,8%
	1750	87,7%	40,8%	80,7%	74,8%	14,8%	19,8%
	2000	94,1%	63,5%	80,8%	81,3%	9,9%	12,2%
	2250	113,1%	76,8%	96,4%	97,6%	9,9%	10,2%
	2500	123,1%	89,1%	113,6%	110,2%	9,1%	8,3%
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	60,2%	0,0%	33,1%	31,6%	20,2%	64,0%
	1250	59,3%	22,9%	38,1%	36,9%	10,3%	27,9%
	1500	61,1%	4,8%	27,0%	30,8%	16,0%	52,0%
	1750	58,5%	5,0%	40,5%	37,8%	16,0%	42,4%
	2000	61,9%	6,5%	48,6%	46,1%	15,1%	32,7%
	2250	65,1%	0,0%	55,0%	49,1%	19,1%	38,9%
	2500	65,9%	9,1%	56,1%	51,8%	15,4%	29,7%

Na Tabela 5 observa-se ,em perspectiva geral, resultados muito próximos aos da Tabela 4 .Assumindo a variabilidade natural do processo meta-heurístico do AG, C1 e C2 geram valores de otimização extremamente próximos. A Figura 39 e a Figura 40 ilustram esse fato.

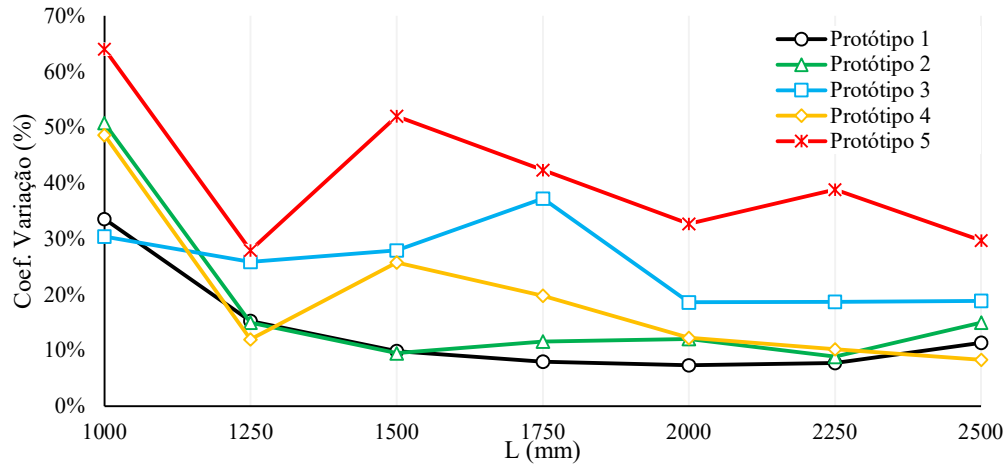


Figura 39: Coeficiente de variação de acordo com o comprimento da coluna - Função de custo C2.

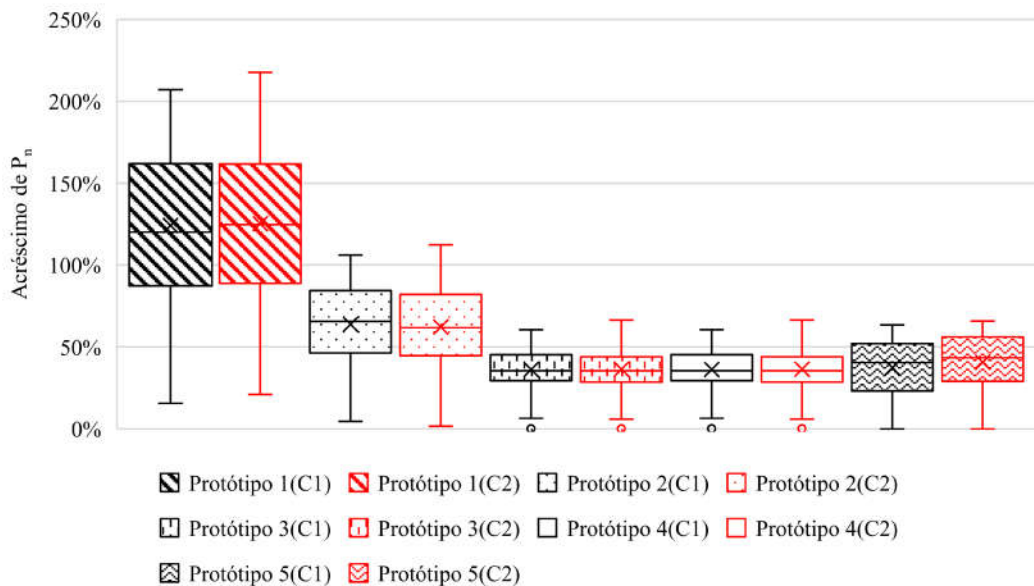


Figura 40: Comparação entre os resultados de C1 e C2 – AG (Todos Comprimentos).

Os resultados indicam que a função de custo C2 pode substituir a função de custo C1 com resultados compatíveis e menor custo computacional. A função de custo C2 foi eleita como a função de custo para os demais algoritmos, devido ao seu tempo de avaliação reduzido.

A Tabela 6 apresenta as especificações dos melhores perfis de UE produzidos pelo AG (considerando os melhores resultados alcançados em C1 e C2).

Tabela 6: Melhores resultados alcançados pelo AG, considerando C1 e C2.

<b>Protótipo</b>	<b>L (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>f</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>s</sub> (mm)</b>	<b>θ (°)</b>	<b>λ<sub>L</sub></b>	<b>λ<sub>D</sub></b>	<b>λ<sub>G</sub></b>	<b>P<sub>n</sub> (kN)</b>
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	102,4	56,3	38,5	75	1,7	0,6	0,5	32,7
	1250	100,4	59,6	36,2	90	1,7	0,6	0,7	31,5
	1500	100,6	60,5	35,2	75	1,7	1,0	0,8	29,9
	1750	100,8	56,9	38,7	75	1,7	1,1	0,9	28,5
	2000	105,8	56,6	36,5	75	1,8	1,1	1,0	26,0
	2250	102,2	57,6	37,3	60	1,7	1,1	1,2	24,3
	2500	101,8	56,2	38,9	75	1,7	1,1	1,3	22,9
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	100,4	45,5	24,9	60	1,3	1,0	0,6	37,7
	1250	100,8	43,6	26,6	60	1,3	1,0	0,8	35,7
	1500	104,0	45,8	22,8	60	1,4	1,0	0,9	32,2
	1750	100,4	45,2	25,2	60	1,3	1,0	1,1	30,5
	2000	100,6	41,9	28,4	45	1,3	1,1	1,2	28,0
	2250	101,2	42,8	27,2	60	1,4	1,0	1,3	25,5
	2500	101,6	41,5	28,3	75	1,4	0,9	1,5	23,1
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	102,0	48,9	30,3	75	1,1	0,8	0,6	61,1
	1250	100,8	49,9	29,9	90	1,1	0,8	0,7	58,1
	1500	106,8	46,5	30,3	75	1,1	0,8	0,8	53,7
	1750	103,0	47,6	31,1	60	1,1	0,9	1,0	51,0
	2000	106,0	45,8	31,4	75	1,1	0,8	1,1	46,9
	2250	105,6	46,0	31,4	75	1,1	0,8	1,2	43,1
	2500	103,6	46,5	31,9	75	1,1	0,8	1,3	38,7
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	104,2	64,8	38,7	75	0,9	0,6	0,5	109,6
	1250	104,2	66,7	36,8	75	0,9	0,7	0,6	105,0
	1500	100,2	65,8	39,7	75	0,9	0,7	0,7	100,9
	1750	105,8	63,4	39,3	75	0,9	0,8	0,8	94,2
	2000	111,6	64,7	35,1	75	0,9	0,8	1,0	85,1
	2250	114,8	59,2	39,0	75	1,0	0,8	1,0	80,4
	2500	126,0	55,3	37,3	60	1,0	0,8	1,1	73,3
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	164,6	148,5	39,1	75	1,0	0,6	0,4	257,6
	1250	169,0	148,1	37,3	90	1,0	0,6	0,5	249,8
	1500	160,0	152,8	37,1	75	1,0	0,6	0,6	244,9
	1750	170,2	145,2	39,6	75	1,0	1,0	0,6	237,9
	2000	172,8	146,8	36,7	75	1,0	1,0	0,7	227,6
	2250	167,8	146,4	39,6	60	1,0	1,0	0,8	221,3
	2500	166,0	149,4	37,5	75	1,0	1,0	0,9	210,8

Na Tabela 6 é possível observar que nenhuma das restrições impostas ao problema geral de otimização foram violadas pelo AG. Em termos de variação de dimensões, é possível observar que os perfis otimizados apresentam largura de almas menores que os protótipos de referência ( $\Delta b_w < 0$ ) e mesas e enrijecedores de borda maiores que os originais ( $\Delta b_f > 0$  e  $\Delta b_s > 0$ , respectivamente). Em termos de fenômenos de estabilidade, é possível observar a redução das esbeltezas local e global ( $\lambda_L$  e  $\lambda_G$ , respectivamente) e o aumento, na maioria dos problemas de otimização, da esbeltez distorcional ( $\lambda_D$ ). Esse comportamento também ocorre nos outros algoritmos testados.

A Figura 41 ilustra um exemplo de um dos melhores perfis obtidos pela otimização via AG. A mudança de forma ilustrada nessa figura, reproduz a tendência observada na Tabela 6.

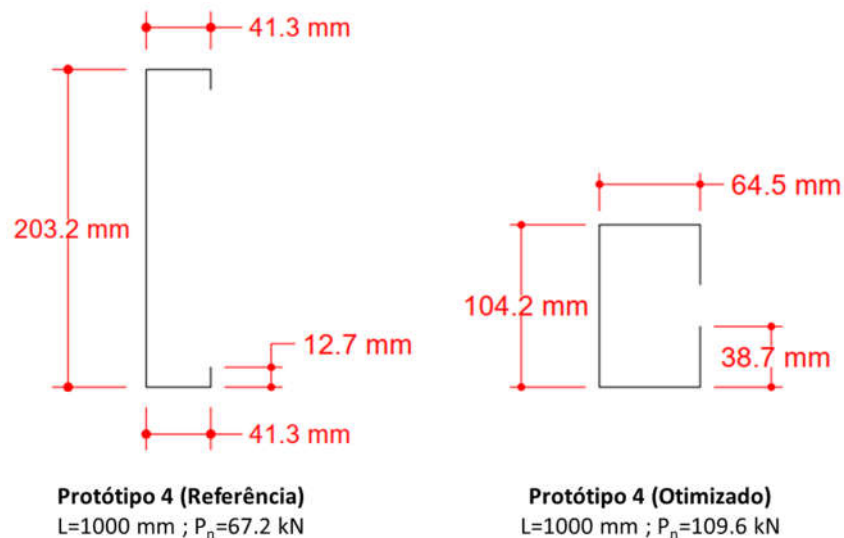


Figura 41: Mudança de forma de um perfil otimizado pelo AG.

Os protótipos de referência apresentam características desfavoráveis em termos de resistência à compressão axial (reiterando que são seções projetadas para resistir ao carregamento de flexão), são elas: (i) as alta esbeltezas locais ( $\lambda_L$ ), (ii) larguras de alma ( $b_w$ ) muito elevadas e (iii) o baixo valor de relação entre enrijecedor de borda e alma ( $b_s/b_w < 0,1$ ). Dessa forma, a redução de  $b_w$  nos perfis otimizados implica na redução  $\lambda_L$ , e conseqüentemente na melhora do desempenho dos protótipos. Em adição, o aumento da relação  $b_s/b_w$ , causada tanto pela redução de  $b_w$  quanto pelo aumento de  $b_s$ , apresentada nos protótipos otimizados favorece o desenvolvimento do modo flambagem distorcional (D), o que justifica o aumento de  $\lambda_D$  observado. Essas considerações podem ser reproduzidas para aos demais algoritmos testados.

## 4.2. Otimização via DE

A Tabela 7 apresenta, em termos de acréscimo percentual de resistência, a dispersão dos resultados de otimização alcançados pelo DE em quinze execuções diferentes do algoritmo, considerando o C2 como função de custo.

Tabela 7: Dispersão dos resultados de ganho de resistência alcançados pelo DE avaliando C2.

Protótipo	L (mm)	Melhor	Pior	Mediana	Média	Desvio Padrão	Coef. de Variação
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	84,7%	84,7%	84,7%	84,7%	0,0%	0,0%
	1250	100,2%	43,9%	100,2%	98,3%	10,3%	10,5%
	1500	121,1%	66,9%	121,1%	119,3%	9,9%	8,3%
	1750	149,1%	99,2%	149,1%	145,8%	12,7%	8,7%
	2000	176,6%	135,7%	176,6%	172,5%	12,5%	7,2%
	2250	198,8%	148,0%	198,8%	193,7%	15,5%	8,00%
	2500	215,2%	155,0%	215,2%	213,2%	11,0%	5,2%
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	45,1%	12,7%	45,1%	44,00%	5,9%	13,4%
	1250	52,8%	52,8%	52,8%	52,8%	0,0%	0,0%
	1500	63,0%	43,7%	63,0%	61,1%	5,9%	9,6%
	1750	76,4%	61,9%	76,4%	74,4%	5,0%	6,7%
	2000	91,7%	71,7%	91,7%	89,7%	6,1%	6,8%
	2250	102,5%	76,4%	102,5%	99,9%	8,0%	8,0%
	2500	108,4%	77,8%	108,4%	105,3%	9,3%	8,9%
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	36,0%	36,0%	36,0%	36,0%	0,0%	0,0%
	1250	39,0%	5,9%	39,0%	35,7%	10,1%	28,3%
	1500	42,9%	15,7%	42,9%	41,1%	6,9%	16,8%
	1750	47,8%	28,4%	47,8%	45,9%	5,9%	12,9%
	2000	54,0%	34,9%	54,0%	52,1%	5,8%	11,2%
	2250	60,9%	38,2%	60,9%	60,1%	4,1%	6,9%
	2500	62,1%	62,1%	62,1%	62,1%	0,0%	0,00%
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	64,8%	15,2%	64,7%	61,4%	12,6%	20,5%
	1250	71,1%	19,0%	71,1%	69,4%	9,5%	13,7%
	1500	78,0%	27,2%	78,0%	74,6%	12,9%	17,3%
	1750	86,9%	43,2%	86,9%	85,4%	8,0%	9,3%
	2000	98,5%	64,5%	98,5%	96,2%	8,6%	9,0%
	2250	112,8%	112,8%	112,8%	112,8%	0,0%	0,0%
	2500	122,9%	96,4%	122,9%	122,0%	4,8%	4,0%
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	51,7%	51,7%	51,7%	51,7%	0,0%	0,0%
	1250	55,3%	55,3%	55,3%	55,3%	0,0%	0,0%
	1500	59,4%	59,4%	59,4%	59,4%	0,0%	0,0%
	1750	63,3%	63,3%	63,3%	63,3%	0,0%	0,0%
	2000	64,3%	1,8%	64,3%	60,1%	15,9%	26,4%
	2250	65,7%	7,5%	65,7%	57,9%	20,1%	34,7%
	2500	67,5%	14,3%	67,5%	62,2%	16,2%	26,1%

Nota-se na Tabela 7, a proximidade entre os melhores e piores resultados alcançados em diferentes execuções do AG. Todavia, notam-se alguns valores discrepantes, chegando a uma diferença máxima de 60,5% (Protótipo 5 no comprimento  $L = 2000\text{ mm}$ ). Em todos os problemas de otimização houve ganhos de resistência de no mínimo de 1,8%. A proximidade de resultados conduziu aos baixos valores de desvio padrão observados.

De forma geral a distância entre os valores das médias e medianas foi bem próximo, o que associado à proximidade entre os máximo e mínimos observados na Tabela 7, indica uma distribuição assimétrica negativa dos resultados. Quando se trata de otimização, a distribuição assimétrica negativa aponta o alto desempenho do algoritmo, pois demonstra que os resultados se concentram mais próximos ao maior valor alcançado.

Vale ressaltar que nove dos resultados do DE apresentam coeficientes de variação iguais a zero. Nesses problemas, todas as quinze execuções atingiram o mesmo valor de ótimo. Duas possibilidades podem justificar isso: primeiro, a otimização ficou presa na mesma área confinada de pesquisa (um mínimo local) ou o algoritmo encontrou o mínimo global. A Figura 42 ilustra o diagrama de caixa dos resultados de otimização por protótipo (todos os comprimentos), nessa figura é possível observar a distribuição assimétrica negativa do ganho de resistência.

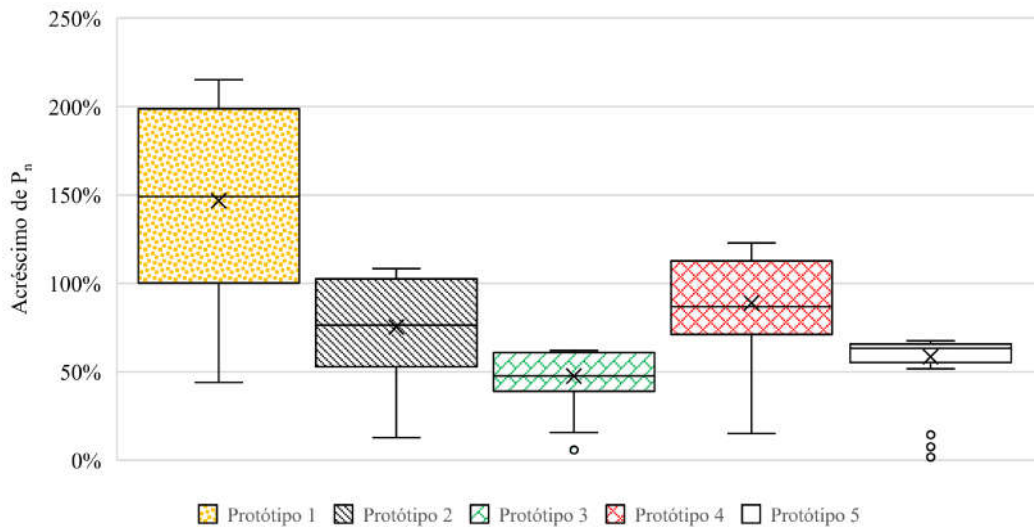


Figura 42: Diagrama de caixa dos resultados de otimização do DE

A Tabela 8 apresenta as especificações dos melhores perfis de UE produzidos pelo DE.

Tabela 8: Melhores resultados alcançados pelo DE.

<b>Protótipo</b>	<b>L (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>r</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>θ (°)</b>	<b>λ<sub>L</sub></b>	<b>λ<sub>D</sub></b>	<b>λ<sub>G</sub></b>	<b>P<sub>n</sub> (kN)</b>
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	0,5	32,9
	1250	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	0,6	31,6
	1500	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	0,8	30,1
	1750	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	0,9	28,4
	2000	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	1,0	26,6
	2250	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	1,1	24,7
	2500	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	1,3	22,7
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	100,0	41,6	29,0	90	1,3	0,6	0,6	38,0
	1250	100,0	41,6	29,0	90	1,3	0,6	0,8	35,8
	1500	100,0	41,6	29,0	90	1,3	0,6	0,9	33,4
	1750	100,0	41,6	29,0	90	1,3	0,6	1,1	30,8
	2000	100,0	41,6	29,0	90	1,3	0,6	1,2	28,1
	2250	100,0	41,6	29,0	90	1,3	0,6	1,3	28,1
	2500	100,0	56,5	39,5	90	1,7	0,6	1,3	22,7
Protótipo 3 (U152, 4x41,3x12,7x1,4)	1000	100,2	47,2	32,9	90	1,1	0,6	0,6	61,8
	1250	100,2	47,2	32,9	90	1,1	0,6	0,7	58,8
	1500	100,2	47,2	32,9	90	1,1	0,6	0,8	55,4
	1750	100,2	47,2	32,9	90	1,1	0,6	1,0	51,6
	2000	100,2	47,2	32,9	90	1,1	0,8	1,1	47,6
	2250	101,8	46,7	32,6	90	1,1	0,8	1,2	43,2
	2500	107,4	45,0	31,5	90	1,1	0,8	1,4	37,7
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	100,0	65,6	40,0	90	0,9	0,6	0,5	110,8
	1250	100,6	65,3	40,0	90	0,9	0,7	0,6	106,3
	1500	104,4	63,4	40,0	90	0,9	0,7	0,7	100,3
	1750	108,6	61,3	40,0	90	0,9	0,6	0,8	93,8
	2000	113,4	58,9	40,0	90	0,9	0,8	0,9	87,1
	2250	118,8	56,6	39,6	90	1,0	0,9	1,0	80,1
	2500	124,6	54,9	38,4	90	1,0	0,9	1,2	72,7
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	190,6	134,6	40,0	90	1,1	0,6	0,3	244,0
	1250	184,4	137,7	40,0	90	1,1	0,6	0,4	243,5
	1500	176,0	141,9	40,0	90	1,1	0,6	0,5	242,4
	1750	159,2	150,3	40,0	90	1,0	0,9	0,7	239,4
	2000	161,0	149,4	40,0	90	1,0	0,9	0,7	231,0
	2250	159,2	150,3	40,0	90	1,0	0,9	0,7	239,4
	2500	167,0	146,4	34,0	90	1,0	0,9	0,9	212,7

Na Tabela 8 é possível observar que nenhuma das restrições impostas ao problema geral de otimização foram violadas pelo DE. Também se observa que independente do comprimento adotado para o Protótipo 1, a configuram otimizada é a mesma.

### 4.3. Otimização via PSO

A Tabela 9 apresenta, em termos de acréscimo percentual de resistência, a dispersão dos resultados de otimização alcançados pelo PSO clássico em quinze execuções diferentes do algoritmo, considerando o C2 como função de custo.

Tabela 9: Dispersão dos resultados de ganho de resistência alcançados pelo PSO avaliando C2.

Protótipo	L (mm)	Melhor	Pior	Mediana	Média	Desvio Padrão	Coef. de Variação
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	82,3%	38,8%	62,4%	61,5%	12,4%	20,2%
	1250	96,1%	46,7%	70,9%	71,1%	13,5%	19,0%
	1500	119,4%	58,3%	89,9%	90,8%	17,4%	19,2%
	1750	147,1%	82,4%	112,0%	111,6%	16,0%	14,4%
	2000	175,7%	101,6%	130,1%	130,2%	15,7%	12,0%
	2250	185,3%	107,3%	137,8%	139,9%	22,1%	15,8%
	2500	206,4%	117,8%	157,1%	157,6%	24,2%	15,4%
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	41,6%	19,9%	29,9%	29,7%	5,6%	18,8%
	1250	49,2%	25,4%	38,9%	38,0%	7,4%	19,3%
	1500	59,4%	34,1%	45,5%	45,2%	7,7%	17,1%
	1750	78,0%	37,3%	52,4%	53,9%	11,9%	22,0%
	2000	89,0%	44,8%	64,4%	66,4%	11,9%	17,9%
	2250	98,1%	53,8%	70,5%	71,4%	10,8%	15,2%
	2500	96,8%	51,6%	76,2%	77,1%	12,1%	15,7%
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	31,3%	8,6%	22,9%	21,4%	6,5%	30,5%
	1250	37,8%	8,5%	25,9%	24,0%	7,5%	31,3%
	1500	38,9%	12,0%	26,0%	25,0%	6,6%	26,5%
	1750	39,2%	12,2%	26,2%	25,8%	7,8%	30,2%
	2000	45,3%	15,6%	35,00%	32,9%	8,3%	25,3%
	2250	56,0%	18,7%	38,1%	37,6%	11,0%	29,2%
	2500	61,3%	24,4%	34,7%	37,5%	9,4%	25,2%
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	63,0%	20,3%	38,5%	40,6%	11,7%	28,7%
	1250	68,8%	31,9%	48,1%	49,2%	10,1%	20,6%
	1500	75,8%	30,6%	57,7%	55,9%	11,7%	20,9%
	1750	85,0%	44,1%	64,5%	64,0%	12,0%	18,8%
	2000	90,3%	47,9%	74,6%	70,8%	11,0%	15,5%
	2250	112,4%	69,6%	88,2%	88,5%	12,9%	14,5%
	2500	118,8%	72,2%	88,8%	89,6%	11,7%	13,00%
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	58,6%	19,9%	39,7%	40,2%	11,5%	28,6%
	1250	61,5%	10,7%	36,2%	38,1%	14,2%	37,2%
	1500	61,9%	19,5%	36,2%	38,4%	13,5%	35,0%
	1750	59,8%	23,0%	37,9%	39,0%	12,0%	30,8%
	2000	62,3%	23,6%	44,4%	45,3%	10,2%	22,6%
	2250	64,5%	30,1%	49,0%	47,2%	10,9%	23,1%
	2500	67,1%	30,7%	47,0%	49,4%	11,9%	24,0%

Nota-se na Tabela 9 uma grande diferença entre os melhores e piores resultados alcançados em diferentes execuções do PSO, chegando a uma diferença máxima de 88,6% (Protótipo 1 no comprimento  $L = 2500 \text{ mm}$ ). Semelhante ao AG, os resultados indicam um baixo desempenho do PSO clássico.

A Tabela 10 apresenta as especificações dos melhores perfis de UE produzidos pelo PSO.

Tabela 10: Melhores resultados alcançados pelo PSO.

<b>Protótipo</b>	<b>L (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>r</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>θ (°)</b>	<b>λ<sub>L</sub></b>	<b>λ<sub>D</sub></b>	<b>λ<sub>G</sub></b>	<b>P<sub>n</sub> (kN)</b>
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	101,8	61,0	34,1	90	1,7	0,6	0,5	32,5
	1250	103,8	57,8	36,3	90	1,7	0,6	0,7	31,0
	1500	101,4	57,5	37,8	90	1,7	0,6	0,8	29,9
	1750	101,0	57,8	37,7	90	1,7	1,0	0,9	28,2
	2000	100,0	57,5	38,5	90	1,7	0,6	1,0	26,5
	2250	108,6	55,7	36,0	90	1,8	1,0	1,2	23,6
	2500	107,0	54,8	37,7	90	1,8	0,6	1,3	22,1
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	108,6	51,0	15,3	90	1,5	1,0	0,7	35,0
	1250	106,2	45,4	22,1	90	1,4	0,9	0,8	33,9
	1500	103,4	53,3	15,6	90	1,4	1,0	1,0	30,8
	1750	101,8	51,7	18,0	90	1,4	0,9	1,2	28,5
	2000	108,8	44,4	21,8	90	1,5	0,9	1,3	25,7
	2250	112,8	44,1	20,1	90	1,5	0,9	1,4	22,3
	2500	103,8	48,7	20,0	90	1,4	0,9	1,6	20,2
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	112,4	56,6	17,4	90	1,2	0,9	0,6	56,1
	1250	110,4	56,8	18,2	90	1,2	0,9	0,8	53,4
	1500	109,8	61,3	14,0	90	1,2	1,0	1,0	48,8
	1750	113,6	59,5	13,9	90	1,2	1,0	1,1	44,2
	2000	112,2	54,5	19,6	90	1,2	0,8	1,2	41,7
	2250	121,0	48,4	21,3	90	1,3	0,8	1,3	37,1
	2500	123,2	55,1	13,5	90	1,3	1,0	1,5	31,4
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	144,0	61,9	21,7	90	1,2	0,8	0,5	90,1
	1250	141,2	55,4	29,6	90	1,1	0,8	0,6	88,7
	1500	136,8	56,8	30,4	90	1,1	0,8	0,7	86,4
	1750	151,2	49,0	31,0	90	1,2	0,8	0,9	76,0
	2000	141,2	65,0	20,0	90	1,2	0,9	1,0	73,2
	2250	151,4	50,7	29,2	90	1,2	0,8	1,1	66,7
	2500	154,2	50,6	27,9	90	1,2	0,8	1,3	60,3
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	269,8	97,7	37,3	90	1,5	0,6	0,3	199,1
	1250	291,2	92,1	32,2	90	1,6	1,1	0,4	186,5
	1500	283,6	90,1	38,0	90	1,6	1,0	0,5	187,1
	1750	289,2	93,5	31,8	90	1,6	1,1	0,5	180,4
	2000	275,0	96,0	36,4	75	1,5	1,0	0,6	183,7
	2250	278,2	101,6	29,2	90	1,6	1,1	0,7	176,1
	2500	279,2	101,3	29,0	90	1,6	1,1	0,8	170,6

Na Tabela 10 é possível observar que nenhuma das restrições impostas ao problema geral otimização foram violadas pelo PSO.

#### 4.4. Otimização via ABC

A Tabela 11 apresenta, em termos de acréscimo percentual de resistência, a dispersão dos resultados de otimização alcançados pelo ABC em quinze execuções diferentes do algoritmo, considerando o C2 como função de custo.

Tabela 11: Dispersão dos resultados de ganho de resistência alcançados pelo ABC avaliando C2.

Protótipo	L (mm)	Melhor	Pior	Mediana	Média	Desvio Padrão	Coef, de Variação
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	84,9%	77,1%	83,7%	83,3%	1,8%	2,2%
	1250	100,3%	70,0%	99,6%	98,5%	5,4%	5,5%
	1500	120,9%	117,5%	120,2%	119,8%	0,9%	0,8%
	1750	148,6%	144,5%	147,5%	147,4%	1,1%	0,7%
	2000	176,3%	170,5%	174,9%	174,4%	1,6%	0,9%
	2250	198,6%	190,4%	196,3%	195,7%	2,5%	1,3%
	2500	214,7%	206,2%	213,1%	212,5%	2,1%	1,0%
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	44,6%	41,8%	43,8%	43,6%	0,8%	1,8%
	1250	52,5%	47,8%	51,3%	51,0%	1,2%	2,3%
	1500	62,8%	58,0%	61,5%	61,0%	1,3%	2,1%
	1750	76,2%	72,4%	73,9%	74,0%	1,1%	1,5%
	2000	90,2%	85,4%	89,6%	88,6%	1,6%	1,9%
	2250	102,3%	75,0%	98,6%	93,9%	9,3%	9,9%
	2500	107,9%	82,4%	103,2%	99,8%	7,5%	7,5%
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	35,9%	33,7%	34,9%	35,1%	0,5%	1,5%
	1250	38,9%	36,0%	38,0%	37,7%	0,8%	2,0%
	1500	47,6%	40,6%	46,0%	44,8%	2,6%	5,8%
	1750	47,6%	44,1%	46,6%	46,4%	0,9%	2,00%
	2000	53,9%	38,4%	51,9%	48,8%	5,5%	11,3%
	2250	61,1%	41,9%	58,9%	56,4%	5,6%	9,9%
	2500	62,0%	60,3%	61,4%	61,3%	0,5%	0,8%
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	64,9%	64,1%	64,7%	64,6%	0,2%	0,4%
	1250	71,3%	70,3%	71,00%	70,9%	0,3%	0,4%
	1500	78,6%	76,8%	77,8%	77,7%	0,5%	0,7%
	1750	87,4%	85,4%	86,8%	86,7%	0,6%	0,7%
	2000	98,9%	96,5%	98,1%	98,1%	0,5%	0,5%
	2250	113,1%	110,0%	112,2%	112,1%	0,9%	0,8%
	2500	122,9%	119,2%	122,2%	121,9%	0,9%	0,7%
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	57,3%	50,0%	52,8%	52,9%	2,3%	4,3%
	1250	58,5%	52,5%	55,5%	55,8%	1,9%	3,4%
	1500	61,9%	56,0%	59,9%	59,6%	1,3%	2,2%
	1750	63,2%	55,8%	62,6%	61,9%	1,6%	2,5%
	2000	64,3%	57,3%	63,4%	62,9%	1,9%	3,0%
	2250	65,6%	63,7%	65,2%	65,0%	0,6%	0,9%
	2500	67,3%	65,0%	66,6%	66,5%	0,6%	0,8%

Nota-se na Tabela 11 uma pequena diferença entre os melhores e piores resultados alcançados em diferentes execuções do ABC. Semelhante ao DE, os resultados indicam um alto desempenho do ABC.

Observa-se que os resultados do CV do ABC são os menores entre todos os algoritmos testados. Dessa forma, o ABC é algoritmo que apresenta os resultados mais acurados, apresentando uma média geral de CV de 2,7%. A Tabela 12 apresenta as especificações dos melhores perfis de UE produzidos pelo ABC.

Tabela 12: Melhores resultados alcançados pelo ABC.

<b>Protótipo</b>	<b>L (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>f</sub> (mm)</b>	<b>b<sub>w</sub> (mm)</b>	<b>θ (°)</b>	<b>λ<sub>L</sub></b>	<b>λ<sub>D</sub></b>	<b>λ<sub>G</sub></b>	<b>P<sub>n</sub> (kN)</b>
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	100,0	57,3	38,7	90	1,7	0,6	0,5	33,0
	1250	100,0	57,2	38,8	90	1,7	0,6	0,6	31,6
	1500	100,2	56,5	39,4	90	1,7	0,6	0,8	30,1
	1750	100,0	57,5	38,5	90	1,7	0,6	0,9	28,4
	2000	100,2	56,7	39,2	90	1,7	0,6	1,0	26,6
	2250	100,0	56,7	39,3	90	1,7	0,6	1,2	24,7
	2500	100,4	56,5	39,3	90	1,7	0,6	1,3	22,7
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	100,8	42,1	28,1	90	1,3	0,9	0,6	37,7
	1250	100,2	42,9	27,6	90	1,3	0,9	0,8	35,6
	1500	100,2	42,7	27,8	90	1,3	0,9	0,9	33,2
	1750	101,2	41,5	28,5	90	1,4	0,6	1,1	30,6
	2000	100,6	42,2	28,1	90	1,3	0,9	1,2	27,9
	2250	100,0	42,6	28,0	90	1,3	0,9	1,4	25,1
	2500	100,2	42,8	27,7	90	1,3	0,9	1,5	22,3
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	101,2	47,8	31,8	90	1,1	0,6	0,6	61,3
	1250	100,8	48,3	31,5	90	1,1	0,6	0,7	58,4
	1500	100,2	49,3	30,8	90	1,1	0,8	1,0	51,0
	1750	100,4	48,4	31,6	90	1,1	0,6	1,0	51,2
	2000	100,2	49,2	30,9	90	1,1	0,8	1,1	46,9
	2250	102,8	47,0	31,8	90	1,1	0,8	1,3	42,8
	2500	104,0	46,2	32,0	90	1,1	0,8	1,4	37,6
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	100,6	65,3	40,0	90	0,9	0,6	0,5	110,6
	1250	101,2	66,0	39,0	90	0,9	0,7	0,6	106,1
	1500	104,0	65,6	38,0	90	0,9	0,7	0,8	100,0
	1750	108,8	61,5	39,7	90	0,9	0,6	0,8	93,7
	2000	113,6	59,4	39,4	90	0,9	0,8	1,0	86,8
	2250	119,2	57,4	38,6	90	1,0	0,9	1,1	79,6
	2500	120,6	56,5	38,8	90	1,0	0,9	1,2	72,3
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	194,8	133,2	39,3	90	1,1	0,6	0,3	241,2
	1250	189,6	137,2	37,9	90	1,1	0,6	0,4	239,9
	1500	182,6	139,2	39,4	90	1,1	0,6	0,5	239,0
	1750	184,8	137,5	40,0	90	1,1	0,9	0,6	232,1
	2000	188,8	141,0	34,5	90	1,1	1,0	0,7	221,1
	2250	163,4	150,9	37,3	90	1,0	1,0	0,8	219,4
	2500	156,0	152,5	39,4	90	1,0	0,9	0,9	210,0

Na Tabela 12 é possível observar que nenhuma das restrições impostas ao problema geral otimização foram violadas pelo ABC.

#### 4.5. Comparação de Resultados

A Tabela 13 apresenta, em termos de aumento percentual da força, os melhores resultados alcançados por AG, DE, PSO e ABC nos trinta e cinco problemas de otimização.

Tabela 13: Melhores resultados alcançados pelos algoritmos meta-heurísticos

Protótipo	L (mm)	AG <sup>*a</sup>	DE	PSO	ABC	Vencedor
Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9)	1000	83,3%	84,7%	82,3%	84,9%	ABC
	1250	99,2%	100,2%	96,1%	100,3%	ABC
	1500	119,4%	121,1%	119,4%	120,9%	ABC
	1750	149,8%	149,1%	147,1%	148,6%	AG
	2000	170,5%	176,6%	175,7%	176,3%	DE
	2250	195,5%	198,8%	185,3%	198,6%	DE
	2500	217,6%	215,2%	206,4%	214,7%	AG
Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1)	1000	44,6%	45,1%	41,6%	44,6%	AG-ABC
	1250	52,2%	52,8%	49,2%	52,5%	ABC
	1500	59,4%	63,0%	59,4%	62,8%	DE
	1750	74,5%	76,4%	78,0%	76,2%	PSO
	2000	90,6%	91,7%	89,0%	90,2%	DE
	2250	103,3%	102,5%	98,1%	102,3%	AG
	2500	112,3%	108,4%	96,8%	107,9%	AG
Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4)	1000	34,5%	36,0%	31,3%	35,9%	DE
	1250	37,3%	39,0%	37,8%	38,9%	DE
	1500	42,1%	42,9%	38,9%	47,6%	ABC
	1750	46,1%	47,8%	39,2%	47,6%	DE
	2000	51,7%	54,0%	45,3%	53,9%	DE
	2250	60,6%	60,9%	56,0%	61,1%	ABC
	2500	66,4%	62,1%	61,3%	62,0%	AG
Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8)	1000	62,9%	64,8%	63,0%	64,9%	ABC
	1250	69,0%	71,1%	68,8%	71,3%	ABC
	1500	79,0%	78,0%	75,8%	78,6%	AG
	1750	87,7%	86,9%	85,0%	87,4%	AG
	2000	99,7%	98,5%	90,3%	98,9%	AG
	2250	113,7%	112,8%	112,4%	113,1%	AG
	2500	124,5%	122,9%	118,8%	122,9%	AG
Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6)	1000	60,2%	51,7%	58,6%	57,3%	AG
	1250	59,3%	55,3%	61,5%	58,5%	PSO
	1500	61,1%	59,4%	61,9%	61,9%	PSO-ABC
	1750	62,3%	63,3%	59,8%	63,2%	AG -DE
	2000	61,9%	64,3%	62,3%	64,3%	DE-ABC
	2250	65,1%	65,7%	64,5%	65,6%	DE
	2500	65,9%	67,5%	67,1%	67,3%	DE

\*a – Melhores resultados considerando C1 e C2

Na Tabela 13 observa-se que não há um vencedor unânime para todos os problemas de otimização propostos (comprimento da coluna-protótipo). Esse resultado era esperado, uma vez que não existe algoritmo ideal para todos os problemas de otimização. Os resultados indicam que, em geral, em 37,1% dos problemas de otimização, o AG alcançou os melhores valores de acréscimo de resistência. No entanto, o AG apresenta um CV médio de 24,3% (considerando os resultados de C1 e C2), o maior entre todos os algoritmos testados. Assim, dada a metodologia proposta nesta dissertação (em especial o número máximo de avaliações permitidas), dentre todos os algoritmos testados, o AG clássico apresenta os resultados menos acurados.

Dada a alta variância dos resultados é menos provável alcançar o melhor desempenho na primeira execução do AG do que nos demais algoritmos. Isso ratifica a importância de executar o algoritmo meta-heurístico mais de uma vez em um mesmo problema de otimização. Da mesma forma, a avaliação comparativa do desempenho de diferentes algoritmos também é crucial para a aplicação racional de uma ferramenta de otimização.

A Tabela 14 apresenta, em termos percentuais, as médias dos resultados de acréscimo de resistência à compressão e do CV dos algoritmos testados. Este trabalho propõe avaliar a eficiência dos algoritmos dividindo a média geral de CV pela média do acréscimo de  $P_n$ , dessa forma, quanto maior o valor dessa relação, mais eficiente é o algoritmo. Assim, nesse contexto, dentre todos os algoritmos testados, ABC é o mais eficiente.

Tabela 14: Acréscimo médio de resistência e CV médio por algoritmo testado

Protótipo	Acréscimo de $P_n$	Coef.de Variação (CV)	Acréscimo de $P_n$ / CV
GA <sup>a</sup>	67,7%	24,3%	2,8
DE	83,4%	9,7%	8,6
PSO	60,1%	22,1%	2,7
ABC	83,7%	2,7%	31

<sup>a</sup>a - Melhores resultados considerando C1 e C2

A Figura 43 ilustra os resultados da média normalizada do acréscimo de resistência de acordo com o percentual de avaliações dos algoritmos meta-heurísticos, considerando todos os trinta e cinco problemas de otimização. Observa-se que DE apresenta a curva de convergência mais rápida entre os algoritmos testados, exigindo, portanto, menos avaliações (menos esforço computacional) para alcançar seu melhor resultado. Assim,

neste contexto, entre todos os algoritmos testados, DE é o algoritmo com maior eficiência de tempo.

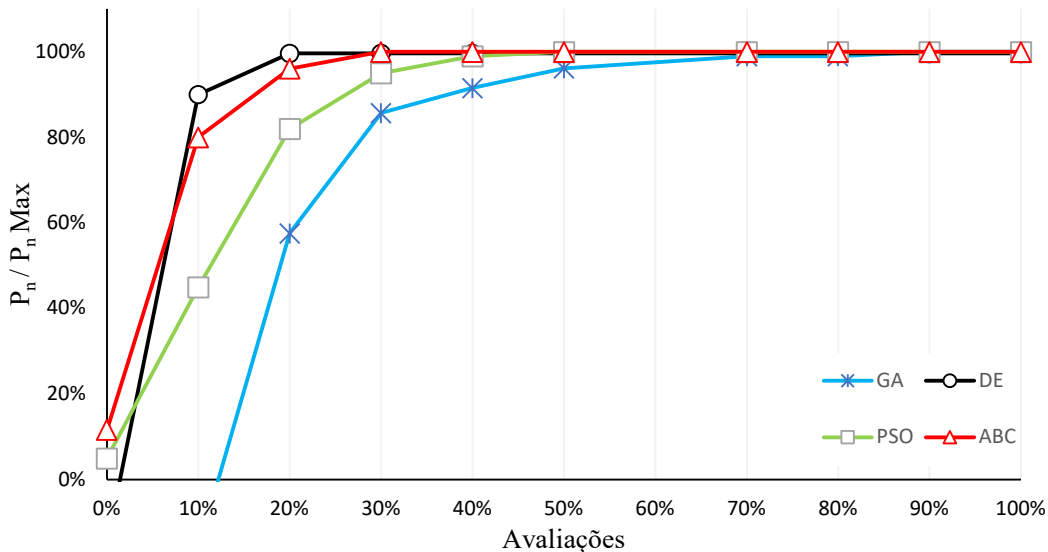


Figura 43: Curvas de convergência de algoritmos meta-heurísticos testados.

Devido à convergência lenta, os resultados indicam que o AG clássico e o PSO clássico apresentam problemas de intensificação, o que os leva a um pior desempenho em termos de tempo de processamento. Vale ressaltar que cada algoritmo de otimização requer seu próprio ajuste de intensificação e diversificação, otimização de hiperparâmetros. Dessa forma, quanto maior é o número de parâmetros de controle envolvidos na estratégia meta-heurística, mais complexa é a tarefa de otimizar seu funcionamento.

É importante ressaltar que tanto o Algoritmo Genético quanto a Otimização por Enxame de Partículas, são ambos pioneiros de dois campos da meta-heurística (algoritmos evolutivos e inteligência de enxame, respectivamente). Dessa forma, é natural que a Evolução Diferencial, um derivativo contemporâneo do AG, e a Colônia Artificial de Abelhas, um derivativo contemporâneo do PSO, apresentem desempenho melhor que seus algoritmos predecessores.

A consideração da perda de resistência à compressão devido à interação modal G-L pelas fórmulas analíticas do MRD (Equação 15) faz com que a baixa resistência das soluções que sofrem essa interação modal de flambagem afastem futuras soluções dessa zona de interação. Assim, sem restrições explícitas, os algoritmos meta-heurísticos tendem a evitar esse fenômeno. No entanto, a desconsideração da perda de resistência causada por interações envolvendo o modo de flambagem distorcional pelas normas de

projeto, incluindo a norma brasileira, pode levar a resultados de otimização enganosos. A Figura 44 ilustra a curva de assinatura do melhor resultado alcançado pelo ABC para Protótipo 5 no comprimento  $L = 2500 \text{ mm}$ , com indicações de uma possível interação modal envolvendo a flambagem distorcional (L-D-G, neste caso).

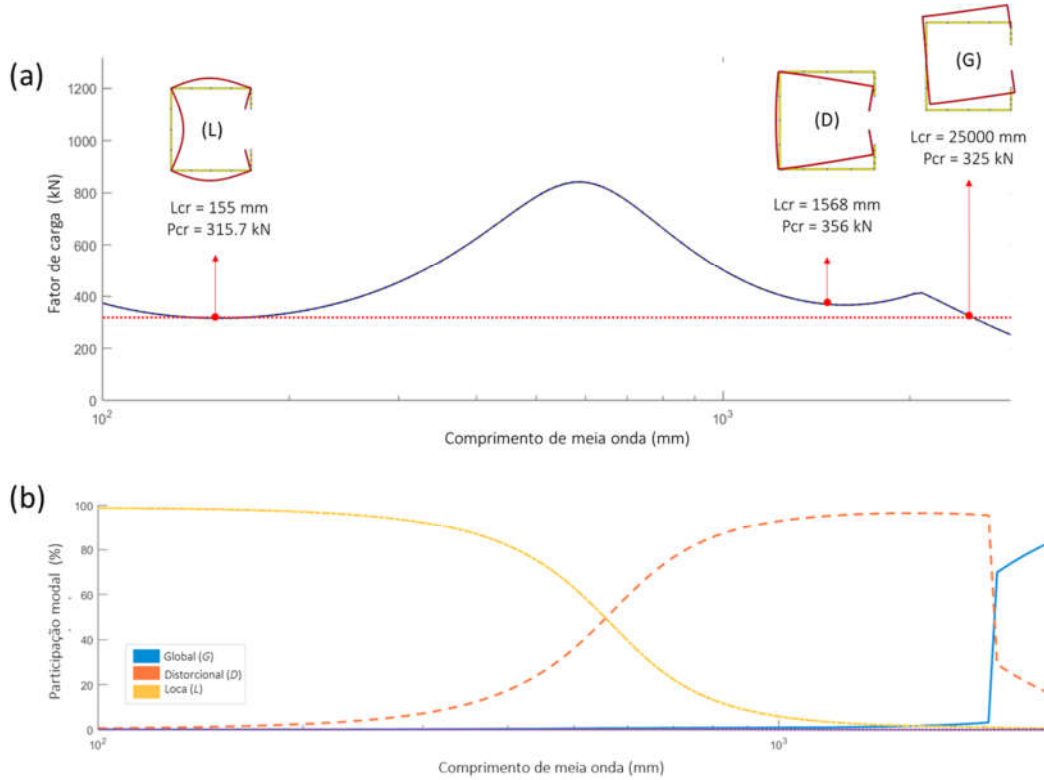


Figura 44: Protótipo 5 otimizado pelo ABC. (a) Curva de assinatura; (b) Participação modal.

Alguns protótipos otimizados indicam a possibilidade de fenômenos de interação envolvendo a flambagem distorcional D (L-D, D-G e L-D-G), devido à proximidade de suas cargas críticas de flambagem elástica, como o exemplo da Figura 44.

Os resultados alcançados por todos algoritmos meta-heurísticos nesta dissertação permitem estabelecer a matriz de correlação com os coeficientes de Pearson das variáveis representativas para o processo de otimização. A Figura 45 ilustra apenas os resultados relacionados ao ganho percentual de resistência.

	$\Delta b_w$ (mm)	$\Delta b_f$ (mm)	$\Delta b_s$ (mm)	$\Delta b_w/t$	$\Delta b_f/t$	$\Delta b_s/t$	$\Delta b_f/\Delta b_w$	$\Delta b_s/\Delta b_w$	$\Delta b_s/\Delta b_f$
Acréscimo de $P_n$	-0,04	-0,19	0,56	-0,69	0,02	0,75	0,2	0,07	-0,18

Escala	Correlação									
	Forte (-)			Fraca				Forte (+)		

Figura 45: Correlação das variáveis de otimização com o ganho de resistência.

Os resultados indicam que o principal fator para a o acréscimo de resistência é a relação entre a variação da largura dos enrijecedores de borda e a espessura do perfil ( $\Delta b_s/t$ ), sugerindo que os enrijecedores de borda de perfis otimizados são mais eficazes em termos de rigidez do que os dos protótipos originais. Outra forte correlação observada associa a redução da relação do comprimento alma e espessura do perfil ( $\Delta b_w/t$ ) com os resultados de otimização alcançados, sugerindo que o ganho de resistência está relacionado com a redução da esbeltez desse subelemento. É importante frisar que ao estabelecer quais são a variáveis mais relevantes para ganho de capacidade resistente, é possível propor novas variáveis de projetos (mais influentes) para o processo de otimização.

A Figura 46 ilustra as relações não lineares (difíceis de identificar a partir dos coeficientes de Person) entre as variáveis representativas para o processo de otimização.

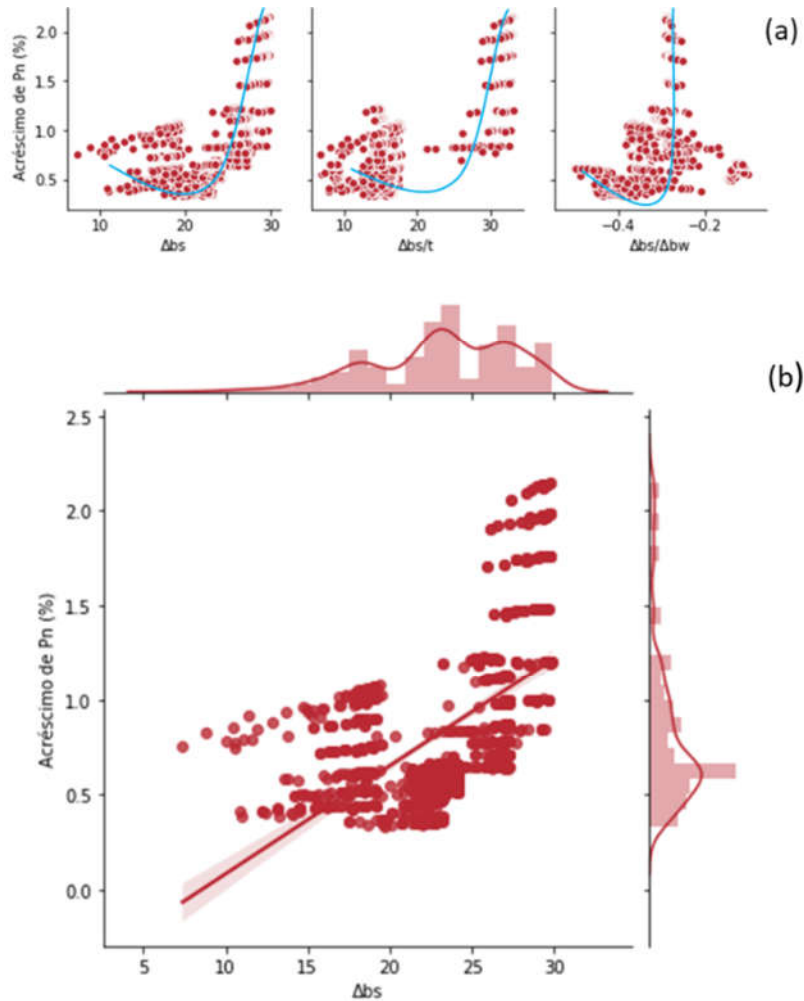


Figura 46: Correlação entre as variáveis representativas. (a) *pair plot* reduzido; (b) *joint plot*.

Na Figura 46 (a) observa-se que a inter-relação entre aumento de resistência percentual e  $\Delta b_s$  pode ser traçada quase como uma função exponencial. Assim como as variáveis fortemente correlacionadas da Figura 45,  $\Delta b_s$  pode desempenhar um papel adequado como variável de projeto para o processo de otimização. Também vale ressaltar na Figura 46 (b), que os resultados de ganho de resistência (considerando todos algoritmos testados) apresentam uma distribuição assimétrica negativa, o que sugere um bom despenho geral do processo de otimização proposto.

Uma breve visão geral sobre o processo de otimização conduzido nesta dissertação fornece os seguintes dados:

- i. Em termos de acréscimo percentual de resistência, os melhores resultados alcançados por todos os algoritmos meta-heurísticos ocorreram no comprimento das colunas  $L = 2500 \text{ mm}$ , independentemente da espessura observada;
- ii. Com base nas dimensões médias das formas finais dos PFF otimizados, e considerando apenas a capacidade axial como critério de projeto, a configuração ideal do Protótipo 1 (U203,2x34,9x9,5x0,9) deve apresentar  $b_f/b_w = 0,57$ ,  $b_s/b_w = 0,39$  e  $b_s/b_f = 0,69$ ;
- iii. Com base nas dimensões médias das formas finais dos PFF otimizados, e considerando apenas a capacidade axial como critério de projeto, a configuração ideal do Protótipo 2 (U152,4x34,9x9,5x1,1) deve apresentar  $b_f/b_w = 0,42$ ,  $b_s/b_w = 0,28$ , e  $b_s/b_f = 0,66$  ;
- iv. Com base nas dimensões médias das formas finais dos PFF otimizados, e considerando apenas a capacidade axial como critério de projeto, a configuração ideal do Protótipo 3 (U152,4x41,3x12,7x1,4) deve apresentar  $b_f/b_w = 0,43$ ,  $b_s/b_w = 0,31$ , e  $b_s/b_f = 0,65$ ;
- v. Com base nas dimensões médias das formas finais dos PFF otimizados, e considerando apenas a capacidade axial como critério de projeto, a configuração ideal do Protótipo 4 (U200,3x41,3x12,7x1,8) deve apresentar  $b_f/b_w = 0,57$ ,  $b_s/b_w = 0,36$ , e  $b_s/b_f = 0,63$ ;
- vi. Com base nas dimensões médias das formas finais dos PFF otimizados, e considerando apenas a capacidade axial como critério de projeto, a configuração ideal do Protótipo 5 (U355,6x76,2x15,9x2,6) deve apresentar  $b_f/b_w = 0,79$ ,  $b_s/b_w = 0,21$ , e  $b_s/b_f = 0,27$ ;

- vii.** Com base nas dimensões médias das formas finais de todos os protótipos otimizados a configuração ideal deve apresentar  $b_f/b_w = 0,56$ ,  $b_s/b_w = 0,31$ , e  $b_s/b_f = 0,58$ ;
- viii.** Com base na moda das formas finais de todos os protótipos otimizados, o ângulo ideal entre a alma e mesa deve ser  $\theta = 90^\circ$ .

## 5. CONCLUSÕES

Esta dissertação apresenta um método prático para obter PFF de seção tipo U enrijecidos mais eficientes para colunas simplesmente apoiadas, otimizando as dimensões da seção transversal. O processo de otimização é baseado em algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza, enquanto a resistência à compressão das seções é determinada usando o Método da Resistência Direta (MRD), conforme a norma NBR 14762- Dimensionamento de Estruturas de Aço Perfis Formados a Frio [3]. Cinco seções de aço de formadas a frio de referência, produzidas pela SFIA [78], foram tomados como protótipos, englobando quatro alturas de alma diferentes ( $b_w$ ), três larguras de mesa diferentes ( $b_f$ ), três larguras de enrijecedor de borda diferentes ( $b_s$ ) e cinco espessuras diferentes ( $t$ ). O processo de otimização foi conduzido considerando restrições de fabricação e de uso final. Com base nos resultados deste estudo, as seguintes conclusões podem ser tiradas:

- i. Os algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza são eficientes e práticos para produzir soluções adequadas para problemas de otimização de perfis aço formado a frio. Podendo ser empregados em problemas de alta complexidade com variáveis em domínios contínuos e discretos simultaneamente;
- ii. O Aprendizado de Máquina, em particular o GPR, é capaz de fornecer previsões confiáveis para carga crítica de flambagem distorcional, exigindo menos recursos computacionais do que a análise numérica tradicional (CUFSM, GBT e MEF, por exemplo);
- iii. O AG clássico, em termos de melhores resultados alcançados e dada a metodologia específica adotada nesta dissertação, é o melhor algoritmo meta-heurístico testado. Mas, em contraponto, alcança os resultados menos acurados;
- iv. Em termos de acurácia, e dada a metodologia específica adotada nesta dissertação, o ABC é o melhor algoritmo meta-heurístico testado, fornecendo os resultados de otimização mais confiáveis;
- v. Em termos de eficiência de tempo, e dada a metodologia específica adotada nesta dissertação, o DE é o melhor algoritmo meta-heurístico testado, exigindo menos recursos computacionais para seu máximo desempenho;
- vi. Ao aplicar o método de otimização proposto a colunas simplesmente apoiadas, é possível obter ganhos significativos na capacidade resistente à compressão das seções transversais, os resultados indicam acréscimos de resistência de até 217%;

- vii. A erosão de resistência é uma possível consequência da interação envolvendo o modo de flambagem distorcional, como alguns dos PFF otimizados desta dissertação sugerem apresentar. As restrições de fabricação e utilização impostas nesta dissertação, em adição as da NBR 14762, são capazes de evitar a perda de resistência devido a interação L-D na região viável delimitada. No entanto, a não consideração das interações D-G e L-D-G pelas normas de projeto pode levar a um novo tipo de otimização ingênua;
- viii. É pouco provável que a otimização ingênua, sugerida por alguns resultados, causada pela desconsideração das interações modais envolvendo o modo distorcional possam ser estruturalmente perigosas (diferente da interação G-L). Porém na perspectiva da otimização o ideal é evitar os resultados enganosos gerados pela falta de informação sobre tais fenômenos de interação.

### 5.1. Sugestão de trabalhos futuros

É importante ressaltar que, dada a generalidade dos métodos adotados é esperado que a metodologia apresentada nessa dissertação possa ser aplicada em PFF de seção transversal aberta mais complexa e em diferentes casos de carregamento e apoio.

Esta dissertação apresenta como subproduto dos algoritmos meta-heurísticos, mais de vinte milhões de seções transversais do tipo U enrijecido, incluindo formas otimizadas e soluções descartadas. Nesse sentido, sugere-se a aplicação de técnicas mais profundas de mineração de dados para extrair outras informações relevantes sobre o processo de otimização e explorar formas mais complexas de PFF (com mais variáveis).

Outras sugestões para trabalhos futuros são:

- i. Utilizar algoritmos auto adaptativos, com o intuito de melhorar a performance da metodologia de otimização adotada nesta dissertação, o Algoritmo de Evolução Diferencial Adaptativa Baseada no Histórico de Sucesso (*Success-history based adaptive Differential Evolution algorithm* - SHADE), por exemplo;
- ii. Incorporar formulações para cálculo de resistência de perfis sob modo de falha distorcional-global (D-G) e local-distorcional-global (L-D-G), com o propósito de evitar possíveis perfis otimizados de maneira enganosa;
- iii. Incorporar a ferramenta de otimização desenvolvida a um programa de análise de elementos finitos, a fim de (i) generalizar a metodologia para seções mais complexas (ii) e suprimir a etapa de cálculo de resistência via MRD.

## 6. REFERÊNCIAS

- [1] BECQUE, W.M.J, HAJIRASOULIHA, I., YE, J., 2015, “Cross-sectional optimization of cold-formed steel channels to Eurocode 3”, *Engineering Structures*, v.101, pp. 641-651.
- [2] WILLIAMS, L.W., 2016, *Introduction to recent trends in cold-formed steel construction*. 1 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [3] ABNT, 2010, “NBR 14762 -Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio”, Rio de Janeiro, RJ, BR.
- [4] TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M., 1963, *Theory Of Elastic Stability*. 2 ed. São Paulo, McGRAW-HILL.
- [5] VON KÁRMÁN, T, SECHLER, E., DONNELL, L., 1932, “The strength of thin plates in compression”, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, v.54, pp. 53-61.
- [6] CARDOSO, D. C. T., SALLES, G. C., BATISTA, E.M., P. B. GONÇALVES, 2017, “Explicit equations for distortional buckling of cold-formed steel lipped channel columns”, *Thin-Walled Structures*, v. 119, pp. 925-933.
- [7] ADELI, H., KARIM, A, 2002, “Neural Network Model for Optimization of Cold-Formed Steel Beams”, *Journal of Structural Engineering*, v.123, pp. 1687-1696.
- [8] PALA, M., 2006, “A new formulation for distortional buckling stress in cold-formed steel members”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, pp. 716-722.
- [9] REN, C., WANG, B., ZHAO, X., 2019, “Numerical predictions of distortional-global buckling interaction of perforated rack uprights in compression”, *Thin-Walled Structures*, v. 136, pp.192-301.
- [10] CHEUNG, Y.K., THAM, L.G., 1976, *Finite strip method*. 1 ed., Oxford, Pergamon.
- [11] LI, Z., 2016, “Advanced computational tools for elastic buckling analysis of cold-formed steel structures”, *Recent Trends in Cold-Formed Steel Construction*. 1 ed Amesterdã, Elsevier.
- [12] ÁDÁNY, S., SCHAFER, B.W., 2006, “Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples”, *Thin-Walled Structures*, v. 60, pp.173-184.
- [13] SCHARDT, R., 1994, “Generalized beam theory-an adequate method for coupled

- stability problems”, *Thin-Walled Structures*, v.19, pp. 161-180.
- [14] GONÇALVES, R., CAMOTIM, D., 2012, “Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members”, *Thin-Walled Structures*, v. 125, pp. 187-202.
- [15] GONÇALVES, R., BEBIANO, R., CAMOTIM, D., 2014, “On the shear deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory”, *Thin-Walled Structures*, v. 84, pp. 352-334.
- [16] ABAMBRES, M., CAMOTIM, D., SILVESTRE, N., 2014, “GBT-based elastic-plastic post-buckling analysis of stainless steel thin-walled members”, *Thin-Walled Structures*, v.83, pp.85-102.
- [17] ABAMBRES, M., CAMOTIM, D., SILVESTRE, N., 2013, “Physically non-linear GBT analysis of thin-walled members”, *Computers & Structures*, v. 129, pp. 148-165.
- [18] BEBIANO, R., BASAGLIA, C., CAMOTIM, D., GONÇALVES, R., 2018, “GBT buckling analysis of generally loaded thin-walled members with arbitrary flat-walled cross-sections”, *Thin-Walled Structures*, v. 123, pp. 11-24.
- [19] SILVESTRE, N., CAMOTIM, D., 2003, “Nonlinear Generalized Beam Theory For Cold-Formed Steel Members”, *International journal of structural stability and dynamics*, v. 3, pp. 461-490.
- [20] BEBIANO, R., CAMOTIM, D., GONÇALVES, R., 2018, “GBTUL 2.0 – A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration analysis of thin-walled members”, *Thin-Walled Structures*, v. 124, pp. 235-257.
- [21] SCHAFER, B.W, ÁDÁNY, S., “Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: Conventional and constrained finite strip methods”, *20<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures: Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, 18-22, St. Louis, Missouri, EUA, 2010.
- [22] LAZZARI, J.A., BATISTA, E.M. , “Behavior and Strength of Distortional-Global Interaction in Cold Formed Steel Lipped Channel Columns”, *XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 101-121, Natal, Rio Grande do Norte, BR, 2019.
- [23] DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2013, "ABAQUS documentation", version 6.12.
- [24] SWANSON ANALYSIS SYSTEM (SAS), 2009, "ANSYS, Reference Manual",

version 12.0.1.

- [25] SCHAFER, B.W., PEKÖZ,T., 1998, “Direct strength prediction of cold-formed steel members using numerical elastic buckling solutions”, *14<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures: Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, 15-16, St. Louis, Missouri, EUA.
- [26] WINTER, G., 1948, “Performance of thin steel compression flanges”, *Third Congress of Bridge and Structural Engineering*, 249-262, Liege, BE.
- [27] EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 1996, “Eurocode 3: Design of steel structures, Part1-3: General rules for cold formed thin gauge members and sheeting”, *European Convention for Constructional Steelwork*, Bruxelles, BE.
- [28] AISI, 2010, “S100-07/S2-10, North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, Supplement No.2”, Washington, DC, EUA.
- [29] SCHAFER, B.W., 2008, “Review: The Direct Strength Method of cold-formed steel member design”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 64, pp. 766-778.
- [30] KWON, Y.B., HANCOCK, G. J., 1992, “Tests o f cold - formed channels with local and dlstortional buckling”, *Journal of Structural Engineering*, v. 118, pp. 438-448.
- [31] KWON, Y. B., KIM, B. S., HANCOCK, G. J., 2009, “Compression tests of high strength cold-formed steel channels with buckling interaction”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 65, n. 2, pp. 278-289.
- [32] MARTINS, A. D., DINIS, P. B., CAMOTIM,D., PROVIDÊNCIA, P., 2015, “On the relevance of local-distortional interaction effects in the behaviour and design of cold-formed steel columns”, *Computers & Structures*, v. 160, pp. 57-89.
- [33] MATSUBARA, G.Y., BATISTA, E.M., SALLES, G.C., 2019, “Lipped channel cold-formed steel columns under local-distortional buckling mode interaction”,*Thin-Walled Structures*, v 137, pp. 251-270.
- [34] BATISTA, E.M, MATSUBARA, G.Y., FRANCO, J.M.S., 2019, “Local-distortional buckling interaction of cold-formed steel columns design approach”, *The international colloquium on stability and ductility of steel structures*, Praga , CZ.

- [35] MARTINS, A. D., CAMOTIM, D., DINIS, P.B., 2018, “Distortional-global interaction in lipped channel and zed-section beams: Strength, relevance and DSM design”, *Thin-Walled Structures*, v. 129, pp. 289-308 .
- [36] MARTINS, A. D., CAMOTIM, D., DINIS, P.B., 2018, “On the distortional-global interaction in cold-formed steel columns: Relevance, post-buckling behaviour, strength and DSM design”, *Journal of Constructional Steel Research*, v.145, pp. 449-470.
- [37] DINIS, P.B., BATISTA,E.M., CAMOTIM, D., SANTOS, E.S., 2012, “Local-distortional-global interaction in lipped channel columns: Experimental results, numerical simulations and design considerations”, in *Thin-Walled Structures*, v. 61, pp. 2- 13.
- [38] SANTOS, E.S., DINIS, P.B., BATISTA, E.M., CAMOTIM, D., 2014, “Cold-formed steel columns under L-D-G interaction”, *Twenty-Second International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures* , St. Louis, Missouri, EUA.
- [39] YOUNG, B., DINIS, P.B., CAMOTIM, D., 2018, “CFS lipped channel columns affected by L-D-G interaction. Part I: Experimental investigation”, *Computers & Structures*, v. 207, pp. 219-232.
- [40] STULP, F., SIGAUD, O., 2015, “Many regression algorithms, one unified model: A review”, *Neural Networks*, v. 69, pp. 60-79.
- [41] LIU, H., Zhang,Y., 2019, “Image-driven structural steel damage condition assessment method using deep learning algorithm”, *Measurement*, v. 133, pp. 168-181.
- [42] RASMUSSEN, C.E., *Gaussian processes for machine learning*, 2006. 1 ed., Massachusetts, MIT Press.
- [43] COSTA, L., OLIVEIRA, P., 2011, “An introduction to optimization”, *Optimization in Polymer Processing*.1 ed. Hauppauge, Nova Science Publishers Inc.
- [44] DING, Y., CHEN, L., Hao, K., 2018, *Bio-inspired optimization algorithms*.2.ed Nova York, Springer.
- [45] YANG, X., 2010. “Modern metaheuristic algorithms”, *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms* ,1 ed. New jersey, Luniver Press.
- [46] YANG, X., 2010. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms* ,1 ed. New jersey, Luniver Press.
- [47] HOLLAND, J. H., 1975, *Adaptation in natural and artificial systems: an*

- introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. 1 ed Massachusetts, MIT Press.
- [48] MAN, K.F., TANG, K.S., KWONG, S., 1996, “Genetic Algorithms: Concepts and Applications - Industrial Electronics”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 43, pp. 519-534.
- [49] EIBEN, A., HINTERDING, R., MICHALEWICZ, Z., 1999, “Parameter Control in Evolutionary Algorithms”, *IEEE Transactions on Communications* , v.54, pp. 19-46.
- [50] YANG, X., 2014 “Differential Evolution”, *Nature-Inspired Optimisation Algorithms*. 2 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [51] TANABE, R., FUKUNAGA, A.S., 2014, "Improving the search performance of SHADE using linear population size reduction", *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 1658-1665, Pequin, CN.
- [52] KENNEDY, J., EBERHART, R., 1994, “Particle Swarm Optimization”, *Giornale di malattie infettive e parassitarie*, v. 46, pp. 1942-1948.
- [53] GOPALAKRISHNAN, K., 2013, *Particle Swarm Optimization in Civil Infrastructure Systems: State-of-the-Art Review*. 1 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [54] CHOPARD, B., TOMASSINI, M., 2018, “Particle swarm optimization”, *Natural Computing Series -v. 18*. 2.ed Nova York, Springer.
- [55] BRYSON, J.T., JIN, X., AGRAWAL, S.K., 2016 “Optimal Design of Cable-Driven Manipulators Using Particle Swarm Optimization”, *Journal of Mechanisms and Robotics*, v. 8 , pp. 13-21.
- [56] YANG, X., 2014, “Particle Swarm Optimization”, *Nature-Inspired Optimization Algorithms*. 2 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [57] LINDFIELD, G., PENNY, J., 2017, “Ant Colony Optimization”, *Introduction to Nature-Inspired Optimization*. 1 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [58] LINDFIELD, G., PENNY, J., 2017, “Artificial Bee Colony Optimization”, *Introduction to Nature-Inspired Optimization*. 1 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [59] O. Feldwick, “Bees, colony collapse and the waggle-dance”, 2018. [Online]. Disponível em: <<https://medium.com/@oliverfeldwick/bees-colony-collapse-and-the-waggle-dance-64658b7e8478>>. [Acessado: 09-fev-2020].
- [60] BAJER, D., ZORIC, B., MARTINOVIC, G., “Empirical Analysis of Artificial Bee Colony Algorithm Parameters”, *Proceedings of International Conference on Smart Systems and Technologies*, 109-116, Osijek, HU, 2018.

- [61] TAPAO, A., CHEERAROT, R., 2017, "Optimal parameters and performance of artificial bee colony algorithm for minimum cost design of reinforced concrete frames", *Engineering Structures*, v. 151, pp. 802-820.
- [62] LINDFIELD, G., PENNY, J., 2017, "Integer, Constrained and Multi-Objective Optimization", *Introduction to Nature-Inspired Optimization*. 1 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [63] YANG, X., 2014 "How to Deal with Constraints", *Nature-Inspired Optimisation Algorithms*. 2 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [64] LENG, J., 2016, "Optimization techniques for structural design of cold-formed steel structures", *Recent Trends in Cold-Formed Steel Construction*. 1 ed. Amesterdã, Elsevier.
- [65] SEABURG, C.G., SALMON, P.A., 1971, "Minimum weight design of light gauge steel members", *Journal of the Structural Division.*, v. 97, pp.203-222.
- [66] AISI, 1968, "Specification for the Design of Cold-formed Steel Structural Members", Washington, DC, EUA.
- [67] ADELI, H., PARK, H. S., 1995, "A neural dynamics model for structural optimization-Theory", *Computers & Structures*, v. 57, pp. 391-399.
- [68] AISI, 1991, "Load and Resistance Factor Design Specification for Cold-formed Steel Structural Members", Washington, DC, EUA.
- [69] LENG, J., GUEST, J. K., SCHAFER, B.W., 2011, "Shape optimization of cold-formed steel columns", *Thin Walled Structures*, v. 49, pp. 1492-1503.
- [70] LENG, J., LI, Z., GUEST, J. K., SCHAFER, B.W., 2012, "Constrained shape optimization of cold-formed steel columns", *21<sup>st</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures - Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, St. Louis, Missouri, EUA.
- [71] LENG, J., LI, Z., GUEST, J. K., SCHAFER, B.W., 2014, "Shape optimization of cold-formed steel columns with fabrication and geometric end-use constraints", *Thin Walled Structures.*, v. 85, pp. 271-290.
- [72] LENG, J., LI, Z., GUEST, J. K., SCHAFER, B.W., 2016, "Thin-Walled Structures Two-level optimization for a new family of cold-formed steel lipped channel sections against local and distortional buckling", *Thin Walled Structures*, v. 108, pp. 64-74.
- [73] PARASTESH, H., HAJIRASOULIHA, I., TAJI, H., SABBAGH, A.B., 2019, "Shape optimization of cold-formed steel beam-columns with practical and

- manufacturing constraints”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 155, pp. 249-259.
- [74] MOJTABAEI, S. M., YE, J., HAJIRASOULIHA, I., 2019, “Development of optimum cold-formed steel beams for serviceability and ultimate limit states using Big Bang-Big Crunch optimisation”, *Engineering Structures*, v. 195, pp. 172-181.
- [75] ALAM, M.I., KANAGARAJAN, B., JANA, P., 2019, “Optimal design of thin-walled open cross-section column for maximum buckling load”, *Thin-Walled Structures*, v. 141, pp. 423-434.
- [76] MATH WORKS, 2017, "MATLAB Reference Manual", version R2017b.
- [77] BS Stainless Company, “Coil Calculator”, 2019. [Online]. Available at: <https://www.bsstainless.com/coil-calculator>. [Accessado: 30-jan-2020].
- [78] SFIA, 2015, “Technical guide for cold-formed steel framing products”, Arlinton, Viginia, EUA.
- [79] YE, J., HAJIRASOULIHA, I., BECQUE, J., ESLAMI, A., 2016, “Optimum design of cold-formed steel beams using Particle Swarm Optimisation method”, *Journal of Constructional Steel Research*, v.122, pp. 80-93.
- [80] YE, J., HAJIRASOULIHA, I., BECQUE, J., ESLAMI, A., 2016, “Development of more efficient cold-formed steel channel sections in bending”, *Thin-Walled Structures*, v. 101, pp. 1-13.

## 7. ANEXOS

A Figura A- 1 ilustra a matriz de correlações completa das variáveis de otimização representativas.

	$\Delta b_w$ (mm)	$\Delta b_f$ (mm)	$\Delta b_s$ (mm)	$\Delta b_w/t$	$\Delta b_f/t$	$\Delta b_s/t$	$\Delta b_f/\Delta b_w$	$\Delta b_s/\Delta b_w$	$\Delta b_s/\Delta b_f$	Acréscimo de $P_n$	Escala
$\Delta b_w$ (mm)	1,0	-0,9	-0,4	0,5	-1,0	0,3	0,9	-0,9	0,8	0,0	Forte (+)
$\Delta b_f$ (mm)	-0,9	1,0	0,1	-0,2	1,0	-0,5	-1,0	0,9	-0,7	-0,2	
$\Delta b_s$ (mm)	-0,4	0,1	1,0	-0,6	0,3	0,5	-0,1	0,2	-0,3	0,6	
$\Delta b_w/t$	0,5	-0,2	-0,6	1,0	-0,5	-0,7	0,2	-0,5	0,5	-0,7	Fraca
$\Delta b_f/t$	-1,0	1,0	0,3	-0,5	1,0	-0,2	-1,0	0,9	-0,8	0,0	
$\Delta b_s/t$	0,3	-0,5	0,5	-0,7	-0,2	1,0	0,5	-0,3	0,1	0,8	
$\Delta b_f/\Delta b_w$	0,9	-1,0	-0,1	0,2	-1,0	0,5	1,0	-0,9	0,7	0,2	Forte (-)
$\Delta b_s/\Delta b_w$	-0,9	0,9	0,2	-0,5	0,9	-0,3	-0,9	1,0	-1,0	0,1	
$\Delta b_s/\Delta b_f$	0,8	-0,7	-0,3	0,5	-0,8	0,1	0,7	-1,0	1,0	-0,2	
Acréscimo de $P_n$	0,0	-0,2	0,6	-0,7	0,0	0,8	0,2	0,1	-0,2	1,0	

Figura A- 1:Matriz de correlação completa.

Vale ressaltar que na Figura A- 1 a maior parte das correlações apresentadas não possuem sentido físico, sendo apenas relações entre variações geométricas (a relação  $\Delta b_s/\Delta b_w$  com  $\Delta b_s/\Delta b_f$ , por exemplo). Também é importante destacar que algumas fortes correlações observadas (positivas e negativas) ocorrem devido a dependência explícita entre as variáveis correlacionadas (a relação  $\Delta b_w$  com  $\Delta b_s/\Delta b_w$ , por exemplo).

Todavia, Figura A- 1 também apresenta correlações relevantes, à medida que a altura da alma é reduzida a resistência à compressão dos perfis aumenta, e a variação positiva da largura da alma em detrimento da variação negativa de  $\Delta b_f/\Delta b_w$ .

A Figura A- 2 (disponível no repositório da dissertação) ilustra a matriz de relações (*Pair plot*) completa das variáveis de otimização representativas.

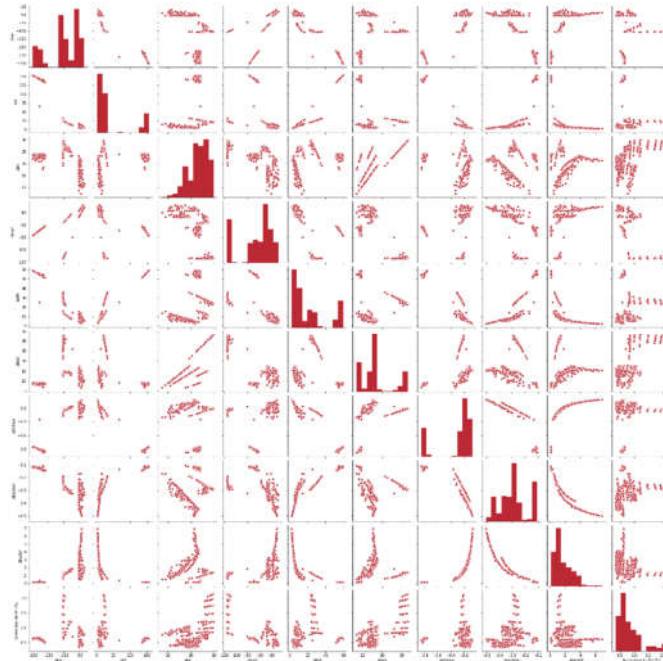


Figura A- 2: *Pair plot* das variáveis de otimização.

A Figura A- 3 ilustra os quadrantes do *Pair plot* das variáveis de otimização representativas.

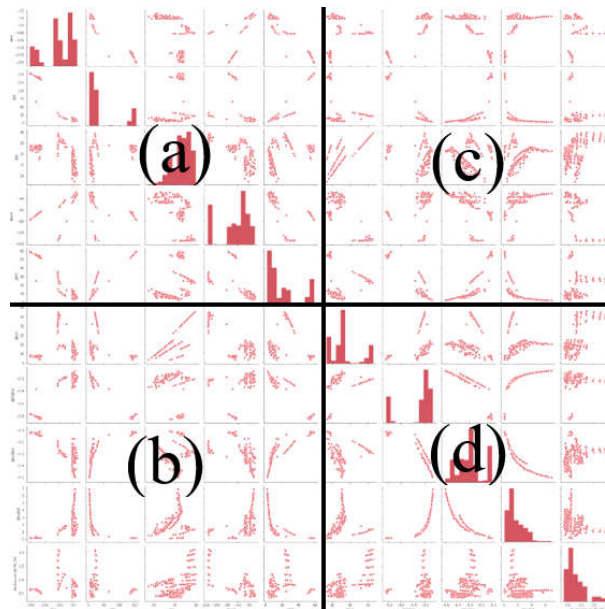


Figura A- 3: Quadrantes do *Pair plot* das variáveis de otimização.

A Figura A- 4 ilustra o quadrante (a) do *Pair plot* ilustrado na Figura A- 3

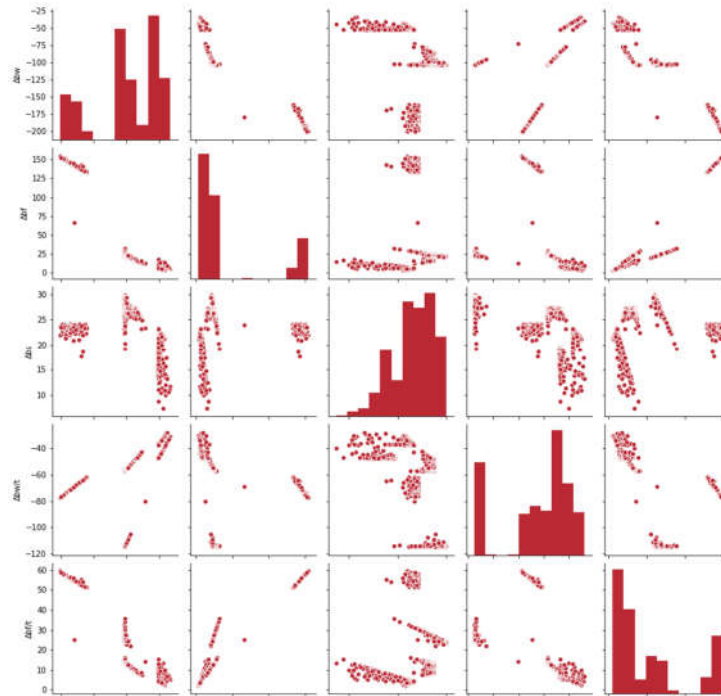


Figura A- 4: Quadrantes(a) do *Pair plot*.

A Figura A- 5 ilustra o quadrante (b) do *Pair plot* ilustrado na Figura A- 3

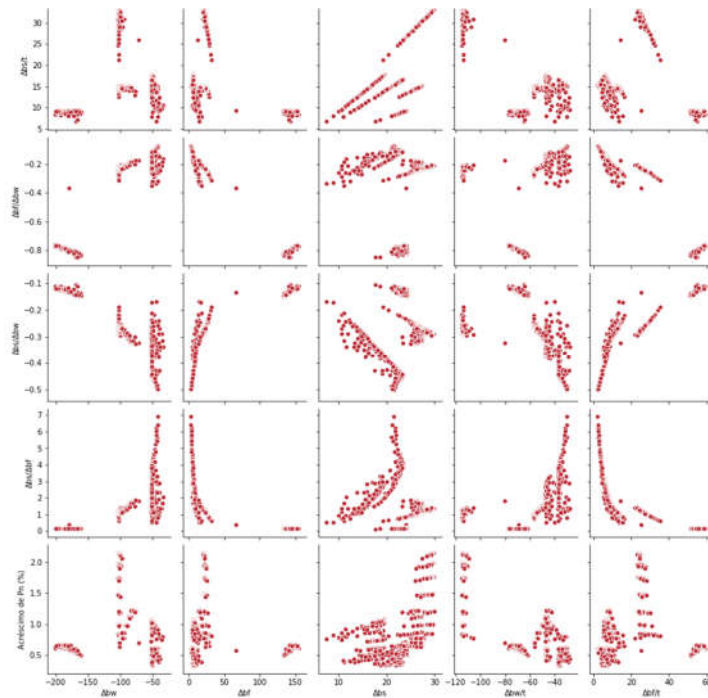


Figura A- 5: quadrantes(b) do *Pair plot*.

A Figura A- 6 ilustra o quadrante (c) do *Pair plot* ilustrado na Figura A- 3

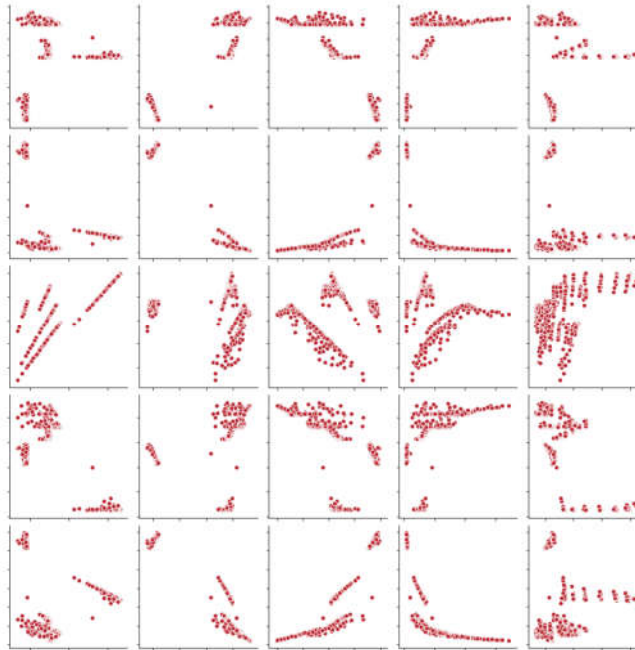


Figura A- 6: quadrantes(c) do *Pair plot*.

A Figura A- 7 ilustra o quadrante (d) do *Pair plot* ilustrado na Figura A- 3

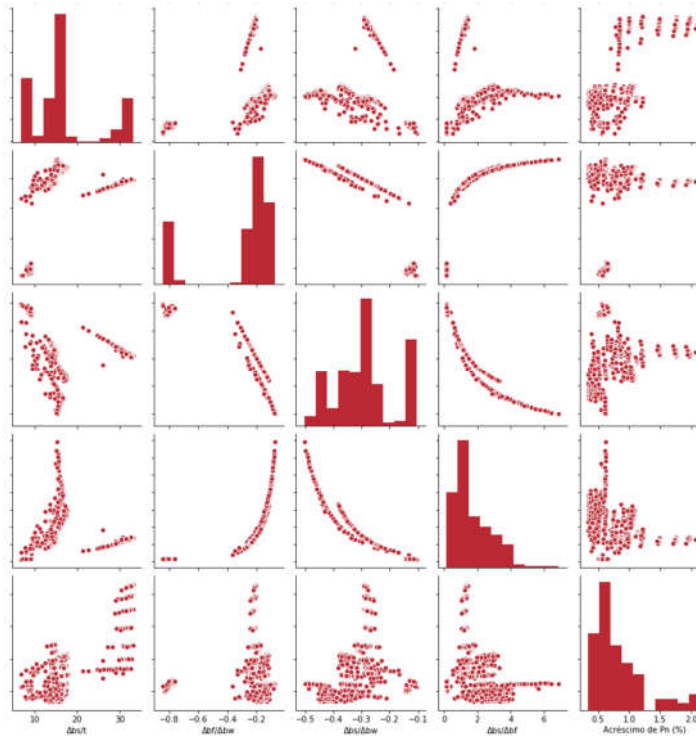


Figura A- 7: quadrantes(d) do *Pair plot*

A Figura A- 8 ilustra os melhores resultados de otimização Protótipo 1 e o respectivo algoritmo vencedor por comprimento de coluna.

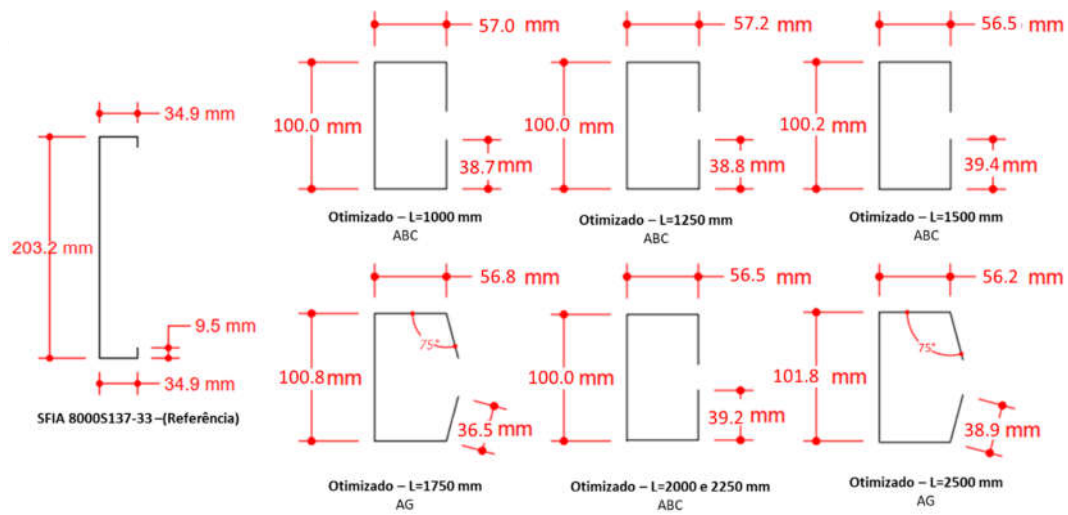


Figura A- 8: melhores resultados de otimização para o Protótipo 1.

A Figura A- 9 ilustra os melhores resultados de otimização do Protótipo 2 e o respectivo algoritmo vencedor por comprimento de coluna.

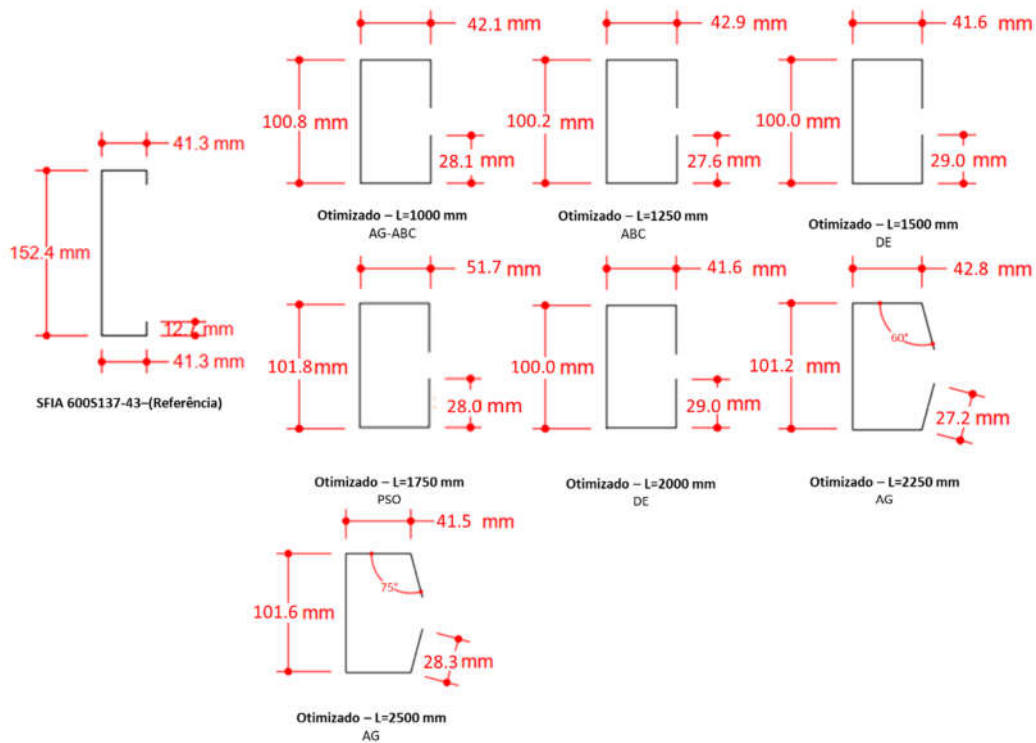


Figura A- 9: melhores resultados de otimização para o Protótipo 2.

A Figura A- 10 ilustra os melhores resultados de otimização do Protótipo 3 e o respectivo algoritmo vencedor por comprimento de coluna.

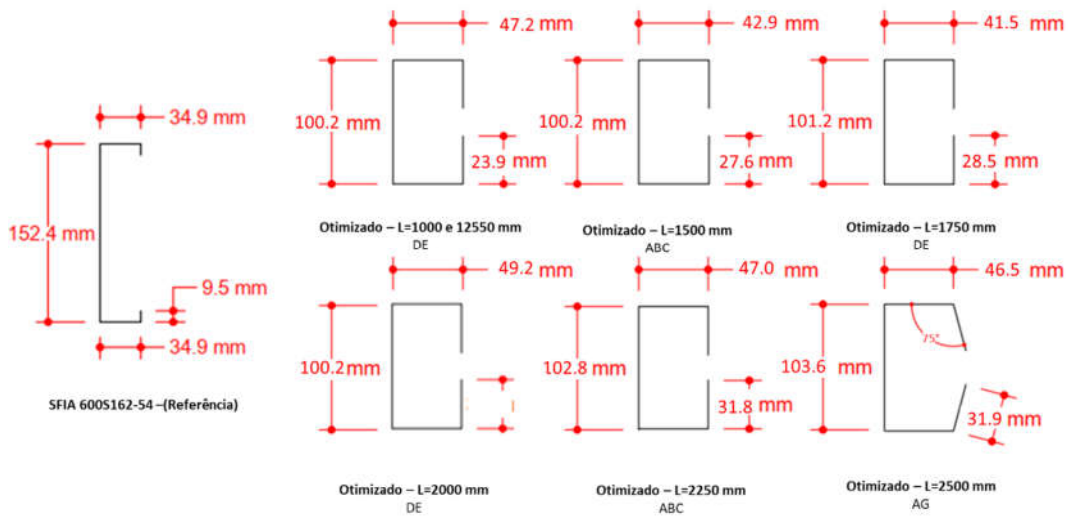


Figura A- 10: melhores resultados de otimização para o Protótipo 3.

A Figura A- 11 ilustra os melhores resultados de otimização do Protótipo 4 e o respectivo algoritmo vencedor por comprimento de coluna.

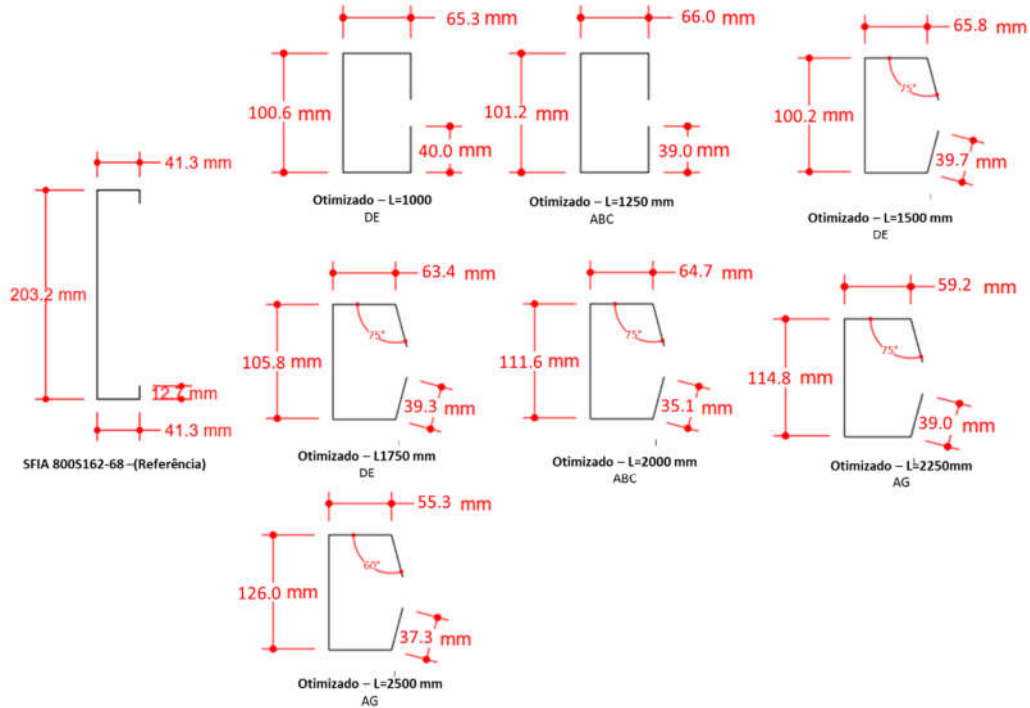


Figura A- 11: melhores resultados de otimização para o Protótipo 4.

A Figura A- 12 ilustra os melhores resultados de otimização do Protótipo 5 e o respectivo algoritmo vencedor por comprimento de coluna.

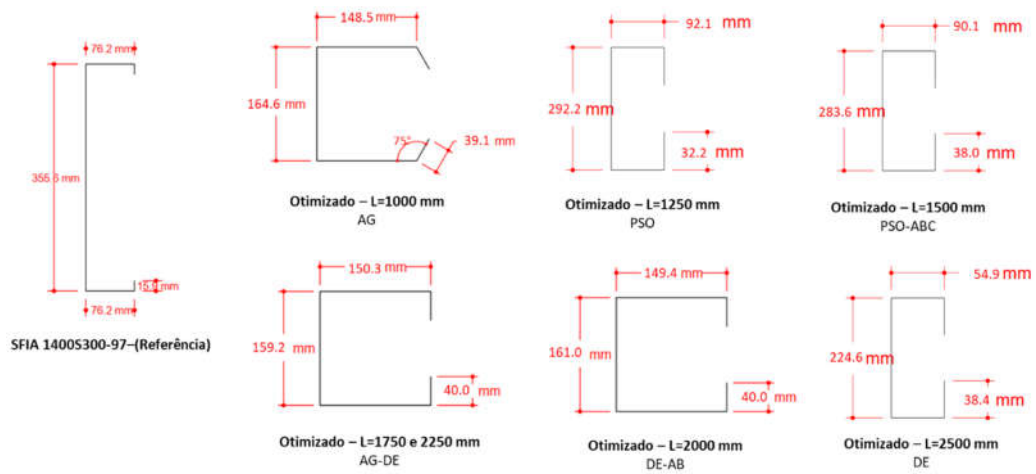


Figura A- 12: melhores resultados de otimização para o Protótipo 5.