



TÉCNICA ALTERNATIVA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA UTILIZADA EM
MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS EM ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

João Pedro Franco de Mello

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago

Edivaldo Figueiredo Fontes Junior

Rio de Janeiro

Maio de 2018

TÉCNICA ALTERNATIVA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA UTILIZADA EM
MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS EM ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

João Pedro Franco de Mello

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Junior, D. Sc.

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2018

Franco de Mello, João Pedro

Técnica alternativa de integração numérica utilizada em métodos sem malha aplicados em elasticidade bidimensional/João Pedro Franco de Mello. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XII, 76 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: José Antônio Fontes Santiago

Edivaldo Figueiredo Fontes Junior

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 72 – 76.

1. métodos sem malhas. 2. método sem malha local de Petrov-Galerkin. 3. elasticidade. 4. integração numérica. I. Santiago, José Antônio Fontes *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar minha gratidão aos meus orientadores Prof. Santiago e Edivaldo, por todo estímulo e orientação dados durante este trabalho. Toda confiança depositada em mim, e em minhas atividades, foi essencial para meu desenvolvimento pessoal e como pesquisador.

À CAPES pelo suporte financeiro.

A toda a equipe e colegas de trabalho do LAMEC pelo apoio, companhia e aprendizado compartilhados ao longo desse ano.

À minha família que, apesar de estarem morando distante de mim, puderam sempre se fazer presente e me ampararam durante esta etapa de minha vida. Amo vocês.

Às pessoas sensacionais que conheci no Rio de Janeiro. Luiza, Vicente, Alvim e Mariana, que me acolheram como parte da família.

Aos meus amigos da COPPE: Ana Paula, uma amiga incrível, agradeço a amizade, irmandade e companheirismo que foram tão importantes durante esse ano; Danilo, uma pessoa fora de série, agradeço as conversas e discussões que me encorajaram durante essa fase; e Vinícius, um cara extraordinário, agradeço os debates e conselhos que muito me engrandeceram. Amigos para toda a vida.

À Kathleen, que é minha melhor amiga e maior companheira, esteve ao meu lado nos bons e maus momentos da minha vida e que sem ela jamais conquistaria o que conquistamos juntos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

TÉCNICA ALTERNATIVA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA UTILIZADA EM
MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS EM ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

João Pedro Franco de Mello

Maio/2018

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago

Edivaldo Figueiredo Fontes Junior

Programa: Engenharia Civil

Um dos processos mais complexos na solução de problemas por meio de métodos verdadeiramente sem malha é a integração numérica dos subdomínios locais, especialmente naqueles que não estão totalmente dentro do domínio global do problema. As integrações numéricas no método sem malha local de Petrov-Galerkin (MLPG) são realizadas por meio de técnicas de quadratura sobre os subdomínios locais. Uma das técnicas mais utilizadas é a da Quadratura Gaussiana. No entanto, existem divergências na utilização da quadratura de Gauss e este trabalho propõe uma abordagem diferente. Comumente, a quadratura é realizada através da determinação de pontos Gauss sobre o domínio e contorno do problema. Em seguida, são criados novos subdomínios utilizando como ponto central cada um dos pontos de Gauss e, por meio dos novos subdomínios, são calculadas funções de forma (Φ_i) e suas derivadas ($\Phi_{i,j}$). Este trabalho propõe uma técnica que utiliza como domínio de integração os próprios subdomínios criados pelo método dos mínimos quadrados móveis (MQM), diminuindo a intensidade computacional do MLPG. Por fim, será avaliado se a utilização das técnicas descritas é vantajosa em relação às técnicas tradicionais, que restringem o posicionamento de subdomínios nas proximidades do contorno global.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ALTERNATIVE NUMERICAL INTEGRATION IN MESHLESS METHODS
APPLIED TO BIDIMENTIONAL ELASTICITY

João Pedro Franco de Mello

May/2018

Advisors: José Antônio Fontes Santiago

Edivaldo Figueiredo Fontes Junior

Department: Civil Engineering

Numerical integration in the local subdomains is the most complex process in the solution of problems by a truly meshless method, especially if the boundary of the local subdomain surpasses the global boundary of the problem. Numerical integration in meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) is performed by quadrature techniques applied over local subdomains. One of the mostly used techniques is the Gauss quadrature. However, the gaussian quadrature is not a universally accepted integration technique and this work proposes an alternative approach to the numerical integration dilemma. Traditionally, in order to apply the gaussian quadrature, Gauss points are created over the domain and the boundary of the local subdomains. Subsequently, new subdomains are created using the Gauss points as their central point, which are used to compute the interpolation functions (Φ_i) and their derivatives ($\Phi_{i,j}$). This work proposes an integration technique which uses the integration subdomain as the local moving least squares (MLS) interpolation domains, decreasing the computational intensity of the MLPG. The performance of both, traditional and proposed, integration techniques are compared in terms of performance and viability.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS X

LISTA DE TABELAS XII

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	6
1.2	Objetivos Específicos	7
1.3	Organização do Trabalho.....	7
2	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO.....	9
2.1	Método dos mínimos quadrados móveis	10
2.2	Funções Peso	15
3	MÉTODO SEM MALHA LOCAL PETROV-GALERKIN EM ELASTICIDADE. 18	
3.1	Elasticidade.....	18
3.1.1	Estado Plano de Tensão	23
3.1.2	Estado plano de deformação	24
3.2	Formulação do MLPG	26
3.3	Discretização.....	29
4	TÉCNICAS NUMÉRICAS IMPLEMENTADAS.....	34
4.1	Considerações Iniciais	34
4.2	Quadratura de Gauss-Legendre	35
4.3	Formação do sistema de equação usando transformação de coordenadas.....	37
4.4	Técnicas de integração numérica.....	41
4.4.1	Técnica de integração tradicional	43
4.4.2	Técnica de integração proposta.....	46

4.5	Aplicação das Condições de Contorno	51
4.6	Descrição sucinta do programa computacional	53
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
5.1	Testes Iniciais	57
5.2	Barra retangular submetida a uma carga axial.....	58
5.3	Viga em balanço	62
5.4	Placa Trapezoidal.....	64
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	68
6.1	Conclusões.....	68
6.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	71
7	BIBLIOGRAFIA	72

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Monômios de um polinômio completo de grau m (adaptado de (RIBEIRO, 2013))	11
Figura 2: Função aproximada $\mathbf{uh}(\mathbf{x})$ e os parâmetros nodais \mathbf{ui} na aproximação por MQM (LIU & GU, 2005).....	12
Figura 3: Comportamento da função spline de 4ª ordem	16
Figura 4: Derivada primeira da função peso spline de 4ª ordem.....	17
Figura 5: Representação do contínuo de um sólido bidimensional	20
Figura 6: Placa fina submetida a um carregamento sob estado plano de tensão (UGURAL & FENSTER, 2003)	23
Figura 7: Estado plano de deformações em um corpo cilíndrico (UGURAL & FENSTER, 2003).....	24
Figura 8: Representação dos domínios e contornos do problema.	26
Figura 9: Montagem da matriz K global (LIU & GU, 2005)	33
Figura 10 : Subdomínio local em coordenadas cartesianas globais	37
Figura 11: Subdomínio em coordenadas cartesianas locais	38
Figura 12: Subdomínio representado em coordenadas polares	38
Figura 13 : Subdomínio normalizado	39
Figura 14: Diversas geometrias dos domínios locais de integração.....	42
Figura 15: Representação do subdomínio de integração e do subdomínio local. Onde \bullet é um ponto campo \mathbf{x}_i ; e \star é um ponto de Gauss	43
Figura 16: Subdomínios locais para pontos próximos ao contorno	44

Figura 17: Subdomínios locais para pontos no contorno	45
Figura 18: Subdomínio da integração proposta.....	46
Figura 19: Diferentes geometrias de subdomínios	47
Figura 20: Divisão do subdomínio em geometrias simples.....	48
Figura 21: Divisão do subdomínio em geometrias simples.....	49
Figura 22: Divisão do subdomínio em geometrias simples.....	49
Figura 23: Parametrização do triângulo de geometria linear (RIBEIRO, 2013).....	50
Figura 24: Transformação de coordenadas do triângulo	50
Figura 25: Distribuições Nodais do Exemplo Teste.....	57
Figura 26: Barra retangular e sua representação nodal.....	58
Figura 27: Cargas axiais aplicadas na barra	59
Figura 28: Comparativo do tempo necessário para a solução do exemplo 5.2	61
Figura 29: Viga engastada	62
Figura 30: Comparativo do tempo necessário para a solução do exemplo 5.3	63
Figura 31: Placa trapezoidal	65
Figura 32: Discretização da placa trapezoidal.....	65
Figura 33: Solução de referência para o deslocamento u_x obtida pelo ANSYS.....	66
Figura 34: Gráfico do erro \times número de pontos de Gauss	66
Figura 35: Número de Gauss \times Tempo de solução (s).....	67
Figura 36: Novo esquema de integração em desenvolvimento no LAMEC	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Deslocamentos horizontal no Nó 13 – Caso1 Integração Tradicional	59
Tabela 2: Deslocamentos horizontal no Nó 13 – Caso1 Integração Proposta	59
Tabela 3: Deslocamentos vertical no Nó 11 – Caso 2 Integração Tradicional	60
Tabela 4: Deslocamentos vertical no Nó 11 – Caso 2 Integração Proposta	60
Tabela 5: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 117 nós Integração Tradicional	60
Tabela 6: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 117 nós Integração Proposta	60
Tabela 7: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 425 nós Integração Tradicional	61
Tabela 8: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 425 nós Integração Proposta	61
Tabela 9: Erro do deslocamento vertical (u_y) do nó A utilizando técnicas de integração diferentes	64

1 INTRODUÇÃO

Na década de 70, iniciaram-se estudos em métodos numéricos que não exigissem a geração de malhas para solucionar problemas de equações diferenciais. Contribuindo, assim, para o advento dos Métodos sem Malha.

A pesquisa surge com o desenvolvimento do Método de Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas – do inglês, Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) (LUCY, 1977) e (GINGOLD & MONAGHAN, 1977). Esse método foi aplicado em dinâmica de gases em problemas astrofísicos bi e tridimensionais, como problemas de fissão em protoestrelas opticamente espessas.

Apesar de iniciar na década de 70, a popularização acadêmica dos Métodos sem Malha ocorreu na década de 90, na qual surgiram diversas formulações.

O Método dos Elementos Difusos – Diffuse Element Method (DEM) – desenvolvido por Nayroles (NAYROLES, et al., 1992) foi proposto a fim de solucionar alguns inconvenientes do Método dos Elementos Finitos (MEF): a dificuldade de gerar uma malha de boa qualidade e o fato de que as derivadas nos contornos dos elementos são descontínuas, enquanto a aproximação da solução é contínua dentro do elemento. Desta forma, a formulação do DEM não utiliza funções locais de interpolação de base polinomial, substituindo-as por polinômios encontrados por Mínimos Quadrados Ponderados (MQP). Essa substituição é válida apenas para a vizinhança do ponto no qual é centrado o subdomínio de integração, conhecido como ponto de interesse ou ponto base.

A formulação do Método de Galerkin livre de Elementos – Element-free Galerkin Method (EFG) (BELYTSCSKO, et al., 1994) baseia-se no princípio variacional de Galerkin, de forma semelhante àquela utilizada por MEF. Contudo, o EFG utiliza do método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) para construir as funções de aproximação e de ponderação da formulação fraca do problema. Inicia-se aqui, a utilização do MQM em Métodos sem Malha.

O Método dos Elementos Naturais – Natural Element Method (NEM) – ,apresentado por (BRAUM & SAMBRIDGE, 1995), emprega uma formulação fraca por meio do Método de Resíduos Ponderados (MRP) de Galerkin, utilizando como funções de aproximação as coordenadas naturais dos pontos vizinhos ao ponto de interesse.

O Método de Partículas Reprodutoras do Núcleo – Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) – (LIU, et al., 1993) deriva do SPH e ambos, portanto, possuem características semelhantes. A função de aproximação é obtida através de uma versão avançada de MQM aplicada a partículas e que leva em consideração o volume nodal atribuído a cada uma dessas partículas.

O maior diferencial apresentado pelo Método de Elementos Finitos Partição de Unidade – Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) – (MELENK & BABUŠKA, 1996) e (BABUŠKA & MELENK, 1997) em relação ao FEM clássico é a possibilidade oferecida pelo PUFEM de construir espaços de funções aproximações conformes a partir de sistemas de espaços de aproximações locais sem perda de propriedades de convergência (LI & MULAY, 2013).

Método dos Pontos Finitos – Finite Point Method (FPM) (OÑATE, et al., 1996) utilizou a técnica de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP) para a interpolação dos dados e o método de colocação pontual para resolver equações diferenciais que governam os problemas estudados. Uma das características do FPM é que a função de ponderação utilizada na aproximação é a função Delta de Dirac.

Todos os métodos acima, exceto os baseados em partículas e Delta de Dirac, necessitam da criação de subdomínios ou células auxiliares para realizar as integrações numéricas necessárias para montagem dos sistemas de equações lineares. Cabe salientar que o subdomínio de integração é empregado para a distribuição dos pontos de integração, no caso da quadratura de Gauss, os pontos de Gauss, e, portanto, não sustenta nenhuma ligação direta com a distribuição de pontos do problema. Esse é o diferencial do Método sem Malha Local Petrov-Galerkin (MLPG). E, particularmente, essa característica de verdadeiramente sem malha foi essencial na escolha desse método para esse trabalho.

O Método Meshless Local de Petrov-Galerkin – Sem malha Local Petrov-Galerkin (MLPG) (ATLURI & ZHU, 1998) – baseia-se em uma formulação fraca local de Petrov-Galerkin. Para isso, no método tradicional, subdomínios de interpolação locais são criados para cada ponto Gauss e a função é também aproximada para cada um. A aproximação é realizada utilizando a técnica dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) e ao gerar o sistema discreto de equações através da formulação residual Petrov-Galerkin permite que se escolha a função de aproximação e de ponderação de espaços de funções diferentes. A utilização de funções de espaços diferentes resulta em um sistema de equações que possui matrizes não-simétricas.

A formulação método sem malha baseada no método de Petrov-Galerkin mostra-se mais vantajosa em comparação com àquela baseada no método de Galerkin. Visto que, na formulação de Galerkin, a partir das derivadas de segunda ordem, as derivadas da função peso utilizadas na função de aproximação e ponderação apresentam descontinuidades no contorno dos subdomínios locais. Isto posto, a precisão da integração na região de descontinuidade está atrelada a sua divisão em sub-regiões e a utilização de esquemas de integração mais elaborados (RAJU & PHILLIPS, 2002). A utilização do método de Petrov-Galerkin, propicia um esquema de integração mais simples, porém de alta ordem, aplicada sobre o contorno como um todo soluciona o problema de forma precisa (PHILLIPS & RAJU, 2002).

Existem, portanto, diversas combinações entre funções de aproximação e funções de ponderação. Cada uma dessas combinações gera uma variação da formulação do MLPG. Foram propostas seis variações do MLPG (ATLURI & SHEN, 2002), expostas a seguir.

O MLPG-1 obtém as equações de governo do problema discretizada por meio de uma formulação fraca local. Utiliza como função de ponderação a mesma função peso utilizada da aproximação por MQM, Função de Base Radial ou a função de Shepard utilizadas para encontrar a função de aproximação.

No MLPG-2, as equações de governo discretizada são encontradas através de uma formulação fraca local não simétrica. A função de aproximação é encontrada através das mesmas técnicas do MLPG-1. A função de ponderação utilizada em cada subdomínio é a função de colocação Delta de Dirac. Nesse método, a integração numérica não é necessária, pois a matriz de “rigidez” e o vetor de “forças” são obtidos por meio das derivadas das funções de aproximação.

O MLPG-3 utiliza com função de ponderação o resíduo da equação de governo, encontrado através do método de MQM discretos. A função de aproximação é encontrada de maneira semelhante aos outros dois métodos anteriores.

O MLPG-4, também conhecido como Local Boundary Integral Equation (LBIE), utiliza como função de ponderação a solução fundamental modificada da equação diferencial no contorno do problema de governo. A função de aproximação é encontrada similarmente aos outros métodos.

O MLPG-5 usa a função degrau de Heaveside como função de ponderação. O problema é discretizado utilizando uma formulação local fraca simétrica. Uma característica interessante desse método é a de que a discretização do problema envolve apenas integrais de contorno sobre cada um dos subdomínios circulares, causando um aumento da efetividade dessa variação.

O MLPG-6 é a variação que utiliza uma formulação equivalente a formulação de Galerkin, utilizando a própria função de aproximação como função de ponderação em cada um dos subdomínios. O problema é discretizado por formulação fraca local simétrica. A função de aproximação, e conseqüentemente a função de ponderação, são encontradas por MQM, Função de Base Radial (FBR) ou função de Shepard. Contudo, segundo (ATLURI, et al., 1999), o MLPG-6 não é computacionalmente eficiente e não apresenta bons resultados.

Existem estudos e pesquisas que visam encontrar novas variações do MLPG (SOARES, et al., 2012).

O MLPG foi inovador na utilização de uma formulação fraca sem a necessidade de nenhuma malha auxiliar para realizar a integração numérica, isso se deve ao caráter local da formulação.

Após o desenvolvimento da formulação MLPG, algumas outras formulações “clássicas” foram desenvolvidas, pode-se citar: Point Interpolation Method (LIU & GU, 2001); Gradient Smoothing Method (LIU & XU, 2008); Generalized Meshfree Approximation (PARK, 2009) (PARK, et al., 2011) e Maximum Entropy Approximation Method (ORTIZ, et al., 2010) e (ORTIZ, et al., 2011).

Além destes, existem Métodos sem Malha desenvolvidos recentemente como: Hermite-Cloud Method (LI, et al., 2003); Point Weighted Least-Squares Method (WANG, et al., 2005).

No Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, trabalhos utilizando métodos sem malha vêm sendo desenvolvidos através dos anos.

Iniciou-se em 2007, na tese de (MIERS, 2007), na qual foram desenvolvidas aplicações do método das equações integrais de contorno local (Local Boundary Integral Equation LBIE) e Método livre de elemento de contorno (Boundary Element Free Method BEFM) em conjunto com a função de Green numérica em problemas de fratura linear elástica e elastoplásticas.

Posteriormente, em 2010 (DA SILVA, 2010) utilizou-se do método dos elementos de contorno com as forças inerciais e tensões plásticas aproximadas por uma interpolação por método dos mínimos quadrados móveis ortogonais para solucionar problemas elastoplásticos de estática e dinâmica, desta forma, evitou-se o uso de células de integração para discretização do domínio dos problemas.

Em 2013, a tese de (COSTA, 2013) desenvolveu uma solução alternativa eficiente para problemas de propagação acústica por meio do desenvolvimento do método das soluções fundamentais (MSF).

Em 2013 também, (FONTES, et al., 2013) uma solução por meio de MSF para solucionar problemas da mecânica da fratura linear elástica. Ademais, em 2014, (FONTES, et al., 2014) foram desenvolvidas técnicas avançadas e eficientes com aplicação em métodos sem malha para análise de problemas de elasticidade e da mecânica

da fratura, utilizando o MSF via superposição da função de Green numérica (FGN) e também o acoplamento iterativo entre MSF e FGN e o método local de Petrov-Galerkin (MLPG)

Em 2017, (KONDA, et al., 2017), utilizou o MLPG-1 com uma integração numérica alternativa na solução de problemas de análise de flexão de placas Reissner.

Como citado anteriormente, algumas variações do MLPG não necessitam de integração numérica para encontrar a solução do problema. Contudo, a variação utilizada nesse trabalho, MLPG-1, exige a integração numérica local sobre cada um dos subdomínios para solucionar as equações diferenciais do problema.

A integração numérica no MLPG-1 ainda é um tópico que exige estudos no intuito de melhorar a eficiência e a precisão.

1.1 MOTIVAÇÃO

Desde a década de 50, os métodos numéricos são utilizados para realizar simulações de problemas reais em engenharia. As simulações computacionais possibilitaram um desenvolvimento exacerbado em diversos campos acadêmicos. Devido ao avanço no ramo da computação, atualmente, a utilização de métodos numéricos que não necessitam de malhas mostra-se cada vez mais factível. Em consequência do aumento do interesse em métodos sem malha, especialmente o MLPG, faz-se necessário estudos que avaliem a viabilidade de sua utilização para solucionar problemas de engenharia.

Assim, na solução de equações diferenciais via métodos sem malha, um dos principais problemas encontrados é a realização de uma integração numérica eficiente. A integração numérica aplicada tradicionalmente ao método MLPG envolve um alto custo computacional, tornando-se um grande desafio na propagação dos métodos sem malha. A principal característica que contribui para a maior dificuldade desse processo é a necessidade de criação de um subdomínio de interpolação para cada um dos pontos de Gauss utilizados na integração numérica, aumentando exponencialmente o tempo necessário para a montagem do sistema de equações.

Portanto, o estudo em relação ao uso de um esquema de integração numérica alternativo que permita solucionar equações diferenciais de forma mais eficiente,

diminuindo o custo computacional, seria altamente benéfico para a popularização dos métodos sem malha.

Além da integração numérica, o estudo que avalie os impactos causados à solução devido à utilização de diferentes métodos de imposição das condições de contorno essenciais. Desta forma, busca-se aprimorar os parâmetros utilizados no MLPG a fim de otimizar a solução computacional.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Essa dissertação tem como objetivo principal o estudo de métodos sem malhas e desenvolvimento de técnicas eficientes de integração numérica a serem aplicadas em MLPG. Pode-se destacar como objetivos específicos:

- Estudo e aplicação de uma nova técnica de integração numérica a ser aplicada nos métodos sem malhas local Petrov-Galerkin em problemas de elasticidade 2D;
- Avaliar o impacto na solução do problema quando se realiza variações em parâmetros utilizados em MLPG como: número de pontos que discretizam o problema, número de pontos de Gauss, coeficientes de penalidade ou ordem da base monomial utilizada no MMQM.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução do assunto dessa dissertação (o método sem malha Local Petrov-Galerkin MLPG), assim como a motivação e os objetivos a serem perseguidos nesse estudo.

As técnicas utilizadas para a construção das funções de forma utilizadas pelo MLPG são explicitadas no Capítulo 2, em que são abordados o método dos Mínimos Quadrados Móveis e a escolha das funções de forma utilizadas.

O Capítulo 3 descreve detalhadamente o método MLPG aplicado em problemas de elasticidade 2D. Uma breve apresentação das equações diferenciais que governam a elasticidade é exposta. Ademais, a formulação fraca local do MLPG é desenvolvida e discretizada, apresentando as integrais que deverão ser solucionadas no problema.

O Capítulo 4 expõe a integração numérica utilizada para solucionar as integrais supracitadas. Retrata-se nesse Capítulo: a) o método numérico utilizado para realizar a integração: a Quadratura de Gauss-Legendre; b) as transformações de coordenadas usadas para simplificar os cálculos; c) a integração que é tradicionalmente utilizada no MLPG; d) uma técnica de integração alternativa proposta por esse trabalho; e) uma descrição da implementação numérica desenvolvida computacionalmente para o MLPG-1.

O Capítulo 5 discorre sobre resultados obtidos para problemas de elasticidade 2D utilizando a implementação computacional abordada no capítulo anterior.

No Capítulo 6, as conclusões alcançadas são expostas e são sugeridas propostas para trabalhos futuros.

Finalmente, no Capítulo 7 são encontradas as referências bibliográficas.

Essa dissertação foi integralmente realizada nos laboratórios LAMEC (Laboratório de Mecânica Computacional) do Programa de Engenharia Civil da COPPE na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

2 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O método sem malha Local Petrov-Galerkin utiliza funções aproximadas como soluções de problemas governado por equações diferenciais. Contudo, antes de calcular a solução aproximada, é necessário fazer a aproximação do campo de funções incógnitas utilizando funções de forma (LIU, 2010). Diferentemente do Método dos Elementos Finitos, as funções de forma são calculadas durante a solução do problema por meio de técnicas de interpolação entre os pontos campo, pertencentes a subdomínios, distribuídos sobre o corpo analisado.

A função aproximada utilizada pelo MLPG deve possuir algumas características a fim de garantir uma solução adequada.

A função de interpolação deve ser numericamente estável. A estabilidade tange dois sentidos: a estabilidade da interpolação e a estabilidade da solução. Estabilidade da interpolação significa que a função é estável mesmo que hajam pequenas perturbações no posicionamento dos nós dentro do subdomínio local e, portanto, as matrizes (utilizadas no processo de cálculo das funções de forma) devem ser bem condicionadas mesmo para nós distribuídos arbitrariamente (LIU & GU, 2005). A estabilidade da solução denota que as soluções numéricas obtidas utilizando as funções de forma não possuem “oscilações numéricas”, que podem ocorrer caso haja uma incompatibilidade entre o esquema de interpolação e a natureza física do problema.

O método sem malha deve convergir, em outras palavras, a solução numérica deve se aproximar da resposta analítica à medida que a distância entre nós tende a zero. Para que haja convergência, as funções de forma utilizadas devem satisfazer um certo grau de consistência (LIU, 2010). O grau de consistência de uma função de interpolação é igual a ordem da função polinomial a qual a função de interpolação é capaz de reproduzir fidedignamente.

A função de interpolação deve ter um caráter local, isto é, a função deve ter valor nulo para todos os pontos fora do subdomínio local. A localidade da função de

interpolação garante a esparsidade da matriz global e, conseqüentemente, melhora a eficiência computacional do método.

Além disso, as funções de forma devem ser linearmente independentes para todos os pontos campo, no intuito de formar uma base nodal (LI & MULAY, 2013). A independência é necessária para que as funções deslocamento construídas a partir da base nodal estabeleçam um sistema de equações discretas estável.

Existem diversos métodos utilizados na construção das funções de forma, entre eles, destacam-se:

- Métodos de Interpolação Pontual – Point Interpolation Method (PIM):
 - PIM polinomial;
 - PIM radial;
- Métodos de Mínimos Quadrados Móveis: (MQM)
 - Aproximação por MQM;
 - Aproximação por MQM Modificado;
- Métodos de Partição de Unidade – Partition of Unity (PU):
 - Elemento Finito de Partição de Unidade;
 - Nuvens-hp – hp clouds;

Um dos métodos de aproximação mais utilizados em métodos sem malha é o Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM). Segundo (ATLURI & SHEN, 2002) e (LIU & GU, 2005), o MMQM possui excelente precisão e eficiência computacional, tornando-o ideal para os métodos sem malha. Segundo (PECHER, 2006), a precisão da integração e, conseqüentemente, do método é controlada pela precisão da aproximação por MQM, atesta-se, então, a importância da construção de funções de forma adequadas.

2.1 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

Supondo um domínio global expresso por pontos arbitrariamente distribuídos. Ao redor de um ponto de interesse ou ponto base \mathbf{x}_i é traçado uma vizinhança circular, denominada de suporte local ou subdomínio Ω_i , dentro da qual a aproximação pelo MMQM será definida. A forma aproximada \mathbf{u}^h da função \mathbf{u} pode ser definida como:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})]^T$ é o vetor dos coeficientes que representam as funções à determinar de coordenadas espaciais do ponto \mathbf{x} ; e $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]$ é a base monomial composta por um conjunto de polinômios contínuos até a n -ésima ordem.

Esses monômios podem ser obtidos através dos polinômios completos de um triângulo de Pascal, como mostra a Figura 1 abaixo:

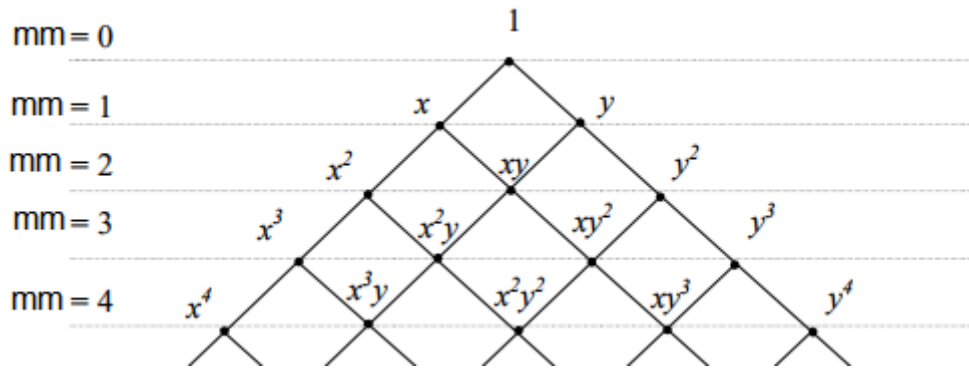


Figura 1: Monômios de um polinômio completo de grau mm (adaptado de (RIBEIRO, 2013))

Comumente, a aproximação pelo MMQM não exige polinômios de ordens superiores a 3. Os problemas de elasticidade bidimensional possuem derivadas de segunda ordem, contudo, a formulação fraca do MLPG-1 diminui esse requisito para derivadas de primeira ordem, portanto uma base linear que conseguir representar suavemente qualquer função e a suas primeiras derivadas é adequada. Portanto, utiliza-se o polinômio a seguir:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (2.2)$$

As dimensões dos subdomínios ao redor do ponto base \mathbf{x}_i são estabelecidas pela ordem da base monomial utilizada. Visto que, para garantir uma boa aproximação e que não haja singularidade na matriz, é necessário que dentro do subdomínio Ω_i esteja contido um número de pontos igual ou maior do que o número de componentes do vetor $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$. Desta forma, caso seja utilizado o vetor acima, seriam necessários ao menos 6 pontos contidos dentro do subdomínio Ω_i .

A função aproximada é obtida ao se determinar o vetor $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ através da minimização da norma ponderada L_2 :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{u}^h - \mathbf{u}_i]^2 \quad (2.3)$$

Substituindo (2.1) em (2.3):

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \left[\sum_{j=1}^{mm} \mathbf{p}^T(x_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i \right]^2 \quad (2.4)$$

onde $w_i(\mathbf{x})$ é a função peso associada à posição \mathbf{x} dos pontos campo dentro do subdomínio Ω_i ; n é o número de pontos campo dentro do subdomínio Ω_i ; u_i representa os valores prescritos para a função \mathbf{u} em $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, como mostra a Figura 2.

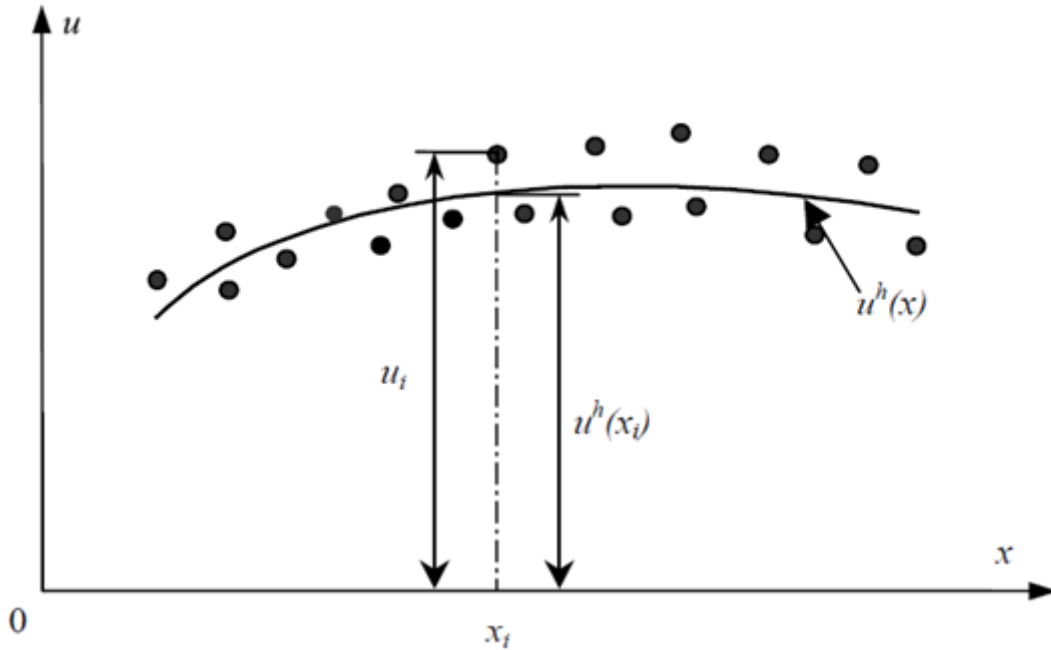


Figura 2: Função aproximada $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ e os parâmetros nodais \mathbf{u}_i na aproximação por MQM (LIU & GU, 2005)

Em outras palavras, o objetivo é encontrar o vetor solução aproximado $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ mais próximo possível da solução real $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, de tal forma que $\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}\|_2^2 = 0$. E o erro da aproximação estará em função da distância dos pontos campo \mathbf{x}_i até o ponto central \mathbf{x} do subdomínio, devido à presença da função peso $w_i(\mathbf{x})$.

Minimizando (2.4) em relação a $a_j(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left[\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \left[\sum_{j=1}^{mm} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i \right]^2 \right] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, mm \quad (2.5)$$

Escrevendo (2.5) em notação matricial, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{J}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u})^T \mathbf{W}(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u})] = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

Realizando as multiplicações matriciais, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{a}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}) \mathbf{a} - \mathbf{a}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u}) - (\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{P}) \mathbf{a} + \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Continuando a minimizar o funcional e substituindo $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{J}] &= [\mathbf{Q}\mathbf{a} + \mathbf{Q}^T \mathbf{a}] - (\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u}) - (\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u}) = \mathbf{0} = \\ &2\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a} - \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{P} é a matriz na qual estão agrupados os vetores $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ dos pontos campos contidos dentro do subdomínio Ω_i ; e \mathbf{W} é a matriz diagonal que agrupa os valores da função peso $w_i(\mathbf{x})$. Expressas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1) & \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_2) & \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_n) & \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

É possível reescrever (2.8) como um sistema linear com o seguinte formato:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}$.

Considerando que a matriz \mathbf{A} seja inversível, a equação (2.11) pode ser solucionada para $\mathbf{a}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.12)$$

Substituindo a expressão (2.12) em (2.1), tem-se:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.13)$$

A equação (2.13) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_x \quad (2.14)$$

sendo \mathbf{u}^h uma estimativa da função aproximada na forma de uma função interpolada; $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x})$ é o vetor de funções de forma da aproximação por MQM associado ao ponto base \mathbf{x}_i , tal que:

$$\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (2.15)$$

Para solucionar problemas de elasticidade, também será necessário a utilização das derivadas parciais da função de interpolação. De acordo com (BELYTSCHKO, et al., 1996), a equação (2.15) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

na qual:

$$\boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \quad (2.17)$$

A matriz \mathbf{A} é simétrica e, portanto, é possível obter $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ por meio de:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{p} \quad (2.18)$$

As derivadas parciais de $\boldsymbol{\gamma}$ podem ser calculadas a partir da derivação de (2.18):

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}_{,i} = \mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma} \quad (2.19)$$

A derivada parcial da função de interpolação ϕ_i pode ser obtida utilizando a expressão a seguir:

$$\boldsymbol{\phi}_{,i}^T = \boldsymbol{\gamma}_{,i}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B}_{,i} \quad (2.20)$$

2.2 FUNÇÕES PESO

A escolha da função peso adequada é um fator de suma importância na solução de problemas por Métodos sem Malha. A maioria das funções de forma utilizadas em Métodos sem Malha são funções em formato de sino.

Através da Equação (2.13) é possível afirmar que a continuidade da função de interpolação $\boldsymbol{\phi}$ depende da continuidade do monômio base \mathbf{p} e da suavidade das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} . Como as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são construídas a partir da função peso \mathbf{W} , a escolha da função peso possui caráter fundamental na performance da aproximação por MQM.

Segundo (LIU & GU, 2005), as funções peso comumente utilizadas em Métodos sem Malha devem possuir as seguintes propriedades:

- $\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0$ dentro do suporte local;
- $\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$ para qualquer ponto fora do suporte local;
- $\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ decresce monotonicamente a partir do ponto base \mathbf{x}_i ;
- $\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ é suficientemente suave, especialmente no contorno do suporte de forma a garantir que seja possível uma inclusão e exclusão suave de nós quando o domínio do suporte se move.

A escolha da função peso é arbitrária desde que atenda as propriedades supracitadas.

Nesse trabalho a função peso utilizada como função de ponderação do erro é a função Spline de quarta ordem, representada pela Figura 3, com suporte nos domínios locais, que possui ordem de continuidade 3:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$ é a distância Euclidiana entre qualquer ponto campo contido no subdomínio \mathbf{x} e o ponto central do subdomínio local \mathbf{x}_i ; e r_i é o raio do suporte local no qual a função peso está contida.

Para calcular as derivadas parciais das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} das equações (2.19) e (2.20), é preciso calcular a derivada da função peso \mathbf{W} . Logo, é necessário que a derivada seja contínua no interior do subdomínio local e valor nulo no seu contorno, como mostrado na Figura 4.

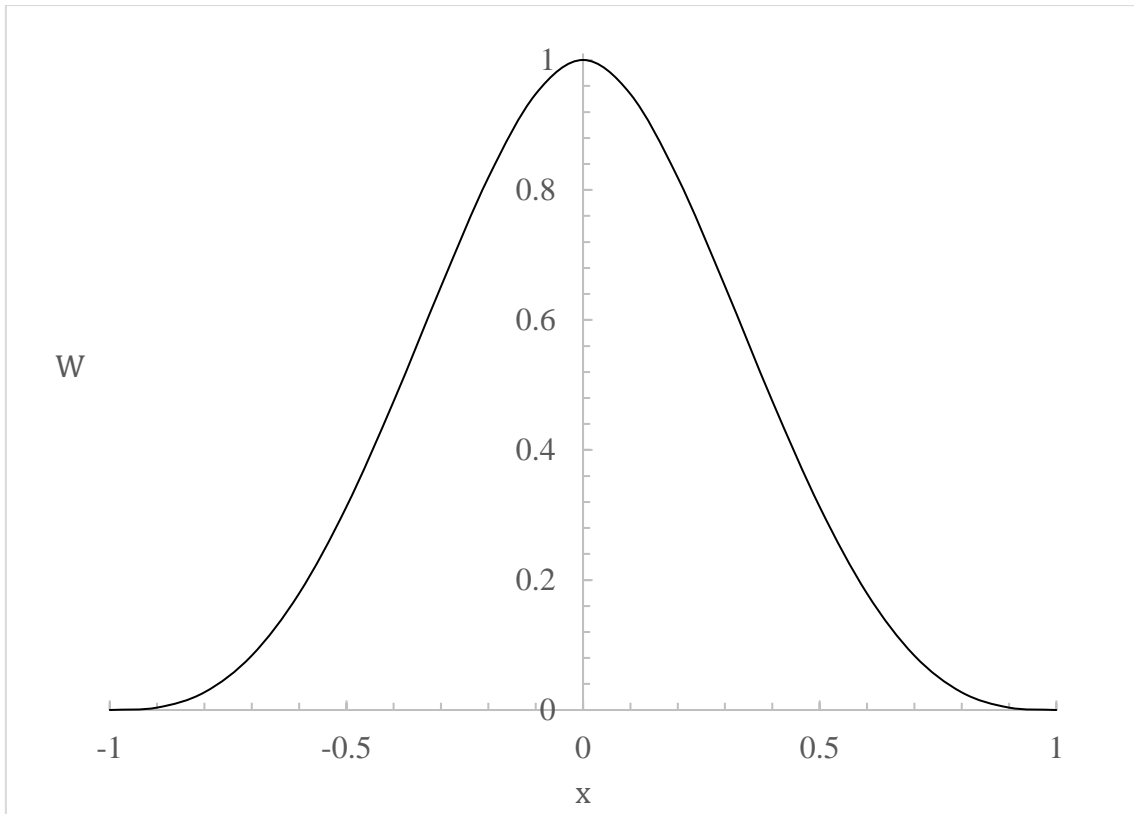


Figura 3: Comportamento da função spline de 4ª ordem

Essa função peso foi escolhida de acordo com o método de construção de função de interpolação abordado em (LIU & GU, 2005) e (ATLURI, et al., 1999) e atende a todos os pré-requisitos inescusáveis para a precisão do MPLG-1.

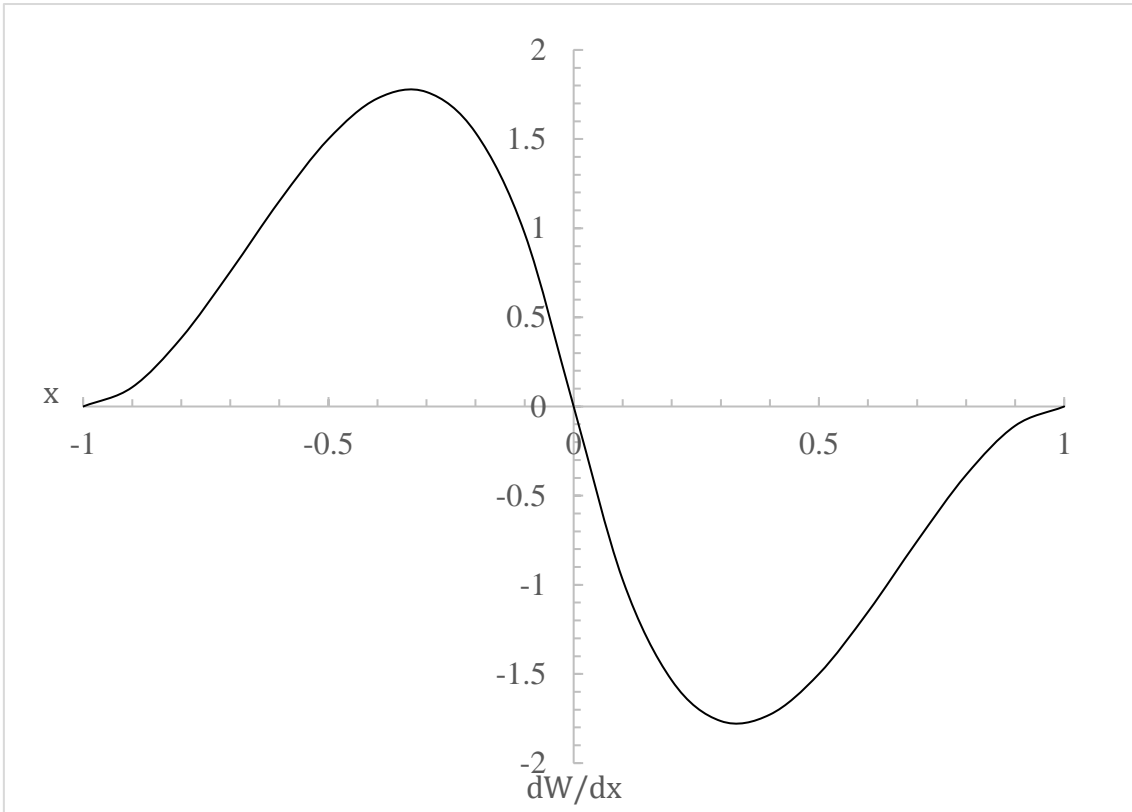


Figura 4: Derivada primeira da função peso spline de 4ª ordem

3 MÉTODO SEM MALHA LOCAL PETROV-GALERKIN EM ELASTICIDADE

Como citado anteriormente, existem métodos sem malha que utilizam células de integração auxiliares para efetuar a integração numérica necessária para montar o sistema linear matricial. Contudo, o método MLPG não possui essa exigência.

Isso se deve a utilização do método dos resíduos ponderados para a obtenção da formulação fraca, no qual as informações adquiridas a partir de um subdomínio local do ponto são utilizadas para tentar satisfazer a equação ponto a ponto. Portanto, a integração pode ser implementada localmente, executando integrações numéricas sobre os subdomínios locais. Ademais, o MLPG é estável por utilizar a formulação fraca (LIU, 2010)

Portanto, o problema é representado por um conjunto de pontos arbitrariamente distribuídos sobre o contorno e domínio, conhecido como domínio global. Este é dividido em subdomínios menores que são delimitados por uma vizinhança de influência ao redor de cada ponto. A implementação do método dos resíduos ponderados é aplicada aos subdomínios locais e, conseqüentemente, a formulação fraca do problema físico deve ser satisfeita localmente para cada um dos nós que representam o problema. Para garantir que haja uma representação fidedigna do problema, sem a perpetuação de erros de integração, é necessário que a união dos subdomínios locais cubra todo o domínio global do problema.

O MLPG utiliza o método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM), abordado no Capítulo (2.1) para construir as funções de forma utilizadas na solução do problema.

Contudo, anteriormente à apresentação da formulação do MLPG, será realizada uma apresentação sobre elasticidade.

3.1 ELASTICIDADE

Elasticidade é a propriedade de um material constituinte de um corpo, deformado sob ação de forças mecânicas ou térmicas, de retornar a sua configuração original quando

cessada a ação das forças (VILLAÇA & GARCIA, 1998). A teoria da elasticidade, portanto, se propõe a estudar o comportamento de corpos materiais que possuam a propriedade supracitada ao serem submetidos a ações externas.

Nesse trabalho, todos os corpos submetidos à ação de forças externas serão constituídos de materiais perfeitamente elásticos, ou seja, eles retornarão completamente a sua forma inicial após a retirada das forças.

Ademais, a estrutura molecular dos corpos elásticos não será considerada. Os materiais dos corpos estudados serão considerados:

- Homogêneos, possuem as mesmas propriedades em todos os seus pontos;
- Isótropos, tal que em cada ponto as propriedades são iguais em qualquer direção;

A determinação da distribuição de tensões, deformações e deslocamentos de um corpo elástico sob influência de um sistema de forças prescritas necessita obedecer a algumas considerações: condições de equilíbrio, relações de tensão-deformação e condições de compatibilidade.

De acordo com o princípio da conservação do momento linear, o comportamento de um sólido bidimensional, representado pela Figura 5, linearmente elástico em equilíbrio, submetido a um carregamento externo, pode ser descrito através das equações diferenciais do equilíbrio, que devem ser satisfeitas para qualquer ponto do interior do sólido:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

onde σ_{ij} é o coeficiente do tensor de tensões correspondente ao campo de deslocamentos u_i ; b_j corresponde a componente das forças de corpo; Ω é o domínio global do problema.

Ademais, deve-se descrever o problema no contorno global $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ através das condições de contorno, definidas por:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.2)$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.3)$$

onde \bar{u}_i corresponde à componente do deslocamento prescrito no contorno Γ_u ; \bar{t}_i é a componente da força de superfície prescrita no contorno Γ_t ; n_j é a componente do vetor normal unitário ortogonal ao contorno com sentido para fora do domínio.

Assim, o problema está completo e a sua solução resulta no campo de tensões e, consequentemente, deformações de um sólido elástico.

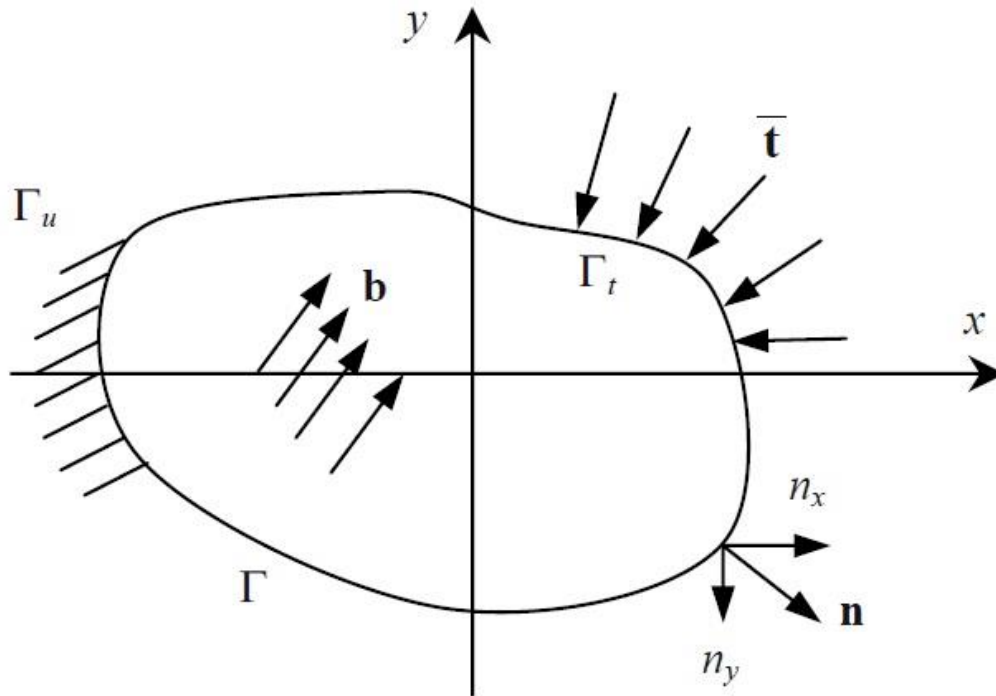


Figura 5: Representação do contínuo de um sólido bidimensional

As relações entre tensões e deformações devem ser relacionadas através das propriedades do material (relações constitutivas) que precisam estar de acordo com o comportamento conhecido do material. Esse trabalho considera que o material do qual os corpos estudados são compostos é linearmente elástico e, portanto, a relação entre as componentes de tensão e deformação é uma expressão linear.

Ao afirmar que o sólido é linearmente elástico, atribui-se ao material do qual o corpo é constituído as seguintes propriedades:

- A relação entre a tensão e as deformações resultantes é linear;
- Após a remoção da carga externa, as deformações desaparecem completamente;

- A taxa ou velocidade de carregamento não influi na análise;
- As deformações e a rotação são pequenas em relação ao tamanho do sólido do problema.

Por conseguinte, é possível expressar as componentes de tensão como funções lineares de nove componentes de deformação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.4)$$

onde C_{ijkl} é o tensor elástico completo com 81 coeficientes; σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy; ε_{kl} é o tensor das pequenas deformações.

Essas são as equações constitutivas clássicas da elasticidade.

Como mencionado previamente, o sólido considerado é composto por material homogêneo e isotrópico. Desta forma, os coeficientes do tensor elástico de quarta ordem tornam-se constantes e simétricos, conseqüentemente, podem ser escritos da seguinte forma:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.5)$$

A partir, da substituição da expressão (3.5) nas equações constitutivas (3.4), obtém-se: a Lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (3.6)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé definidas por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.7)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.8)$$

onde G é o Módulo de Elasticidade Transversal; E é o Módulo de Elasticidade Longitudinal; ν é coeficiente de Poisson.

As expressões (3.4) a (3.8) são válidas considerando a hipótese de pequenas mudanças de configuração, na qual assume-se que as componentes de deformação e as rotações sofridas pelos segmentos elementares são infinitesimalmente pequenos em

relação às dimensões do corpo. A partir dessa hipótese, é possível afirmar que a mudança de configuração (deformação) do sólido não introduz alterações perceptíveis na atuação do sistema de cargas (VILLAÇA & GARCIA, 1998).

Como citado anteriormente, as deformações resultantes dos carregamentos são muito pequenas em relação a unidade, portanto, é possível relacionar o tensor de deformações ε_{ij} com os deslocamentos u_i por meio da seguinte expressão:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.9)$$

Logo, obtém-se a expressão da tensão σ_{ij} em termos das derivadas dos deslocamentos através da substituição das equações (3.5) e (3.9) na equação (3.4):

$$\sigma_{ij} = Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} \quad (3.10)$$

onde u_k são os deslocamentos.

Finalmente, substituindo (3.10) na equação (3.1), obtém-se a equação de Navier:

$$u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (3.11)$$

As condições de compatibilidade de deformações garantem que a geometria do deslocamento e da deformação sejam consistentes com a preservação da continuidade do corpo (UGURAL & FENSTER, 2003). Portanto, quando há a deformação do corpo, o correspondente campo de deslocamentos deve ser representado por funções contínuas e unívocas, a fim de preservar a continuidade (VILLAÇA & GARCIA, 1998).

As equações de compatibilidades da deformação podem ser expressas de forma geral por:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{nk}}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ml}}{\partial x_n \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{nl}}{\partial x_m \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{mk}}{\partial x_n \partial x_l} = 0 \quad (3.12)$$

Nesse trabalho são estudados sólidos bidimensionais, desconsiderando o eixo z na geometria do domínio.

Existem dois tipos de estados típicos em sólidos bidimensionais. O primeiro é o estado plano de tensões, no qual a espessura do sólido na direção z é muito pequena em comparação com as demais dimensões nas direções x e y . Consequentemente, as forças externas são aplicadas sobre o plano x - y e a tensão em z é nula ($\sigma_z = 0$). O segundo é o estado plano de deformações que, por outro lado, possui a dimensão na direção z muito maior que as dimensões nas outras direções. Sendo assim, as forças externas são aplicadas uniformemente ao longo do eixo z e, devido à grande espessura, o deslocamento no eixo z é restringido ($\varepsilon_z = 0$).

A seguir serão abordadas as formulações para ambos os tipos de estado.

3.1.1 Estado Plano de Tensão

Considerando uma chapa plana representada pela Figura 6, na qual a carga é distribuída uniformemente sobre sua espessura paralelamente ao plano da chapa. As tensões σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são zero em ambas as faces. Portanto, as tensões atuantes são σ_x , σ_y e τ_{xy}

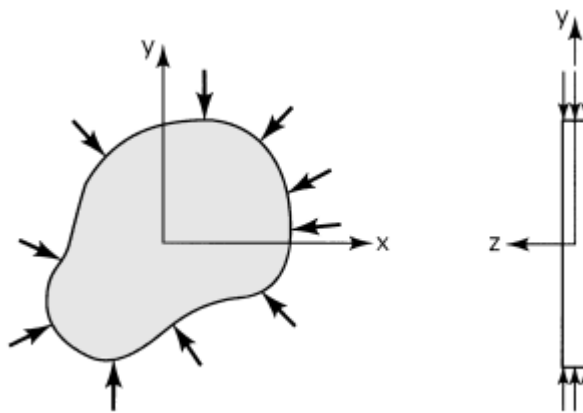


Figura 6: Placa fina submetida a um carregamento sob estado plano de tensão (UGURAL & FENSTER, 2003)

Substituindo as tensões atuantes na Lei de Hooke (3.6), obtém-se as relações deformação- tensão para o estado plano de tensão:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Contudo, ε_z não está contida em nenhuma outra equação de governo do estado plano de tensão e pode ser calculada independentemente.

3.1.2 Estado plano de deformação

Considerando um corpo cilindro longo submetido a um carregamento lateral, preso por planos rígidos em suas extremidades, representado pela Figura 7. Assume-se que o carregamento externo seja uma função apenas das coordenadas x e y .

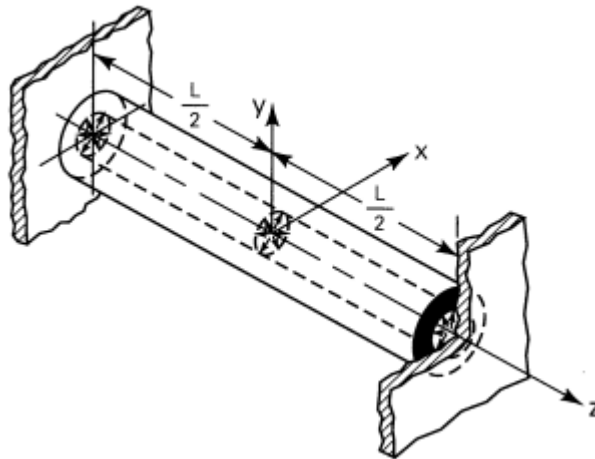


Figura 7: Estado plano de deformações em um corpo cilíndrico (UGURAL & FENSTER, 2003)

Apresentando essas considerações, espera-se que todas as seções transversais desse corpo apresentarão deformação idêntica, inclusive as seções próximas às

extremidades. Desta forma, há deformação nas direções x e y , mas os apoios nas extremidades impedem deslocamento em z , portanto $w = 0$.

Nesse caso, as deformações do corpo dependem apenas de x e y , escritas como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\tag{3.16}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

O estado plano de deformação pode ser descrito como aquele no qual cada ponto permanece no seu plano transversal após a aplicação da sollicitação (TIMOSHENKO & GOODIER, 1951).

A partir de (3.15), tem-se as seguintes relações tensão-deformação:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\tag{3.17}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

Contudo, a tensão σ_z não está contida em nenhuma outra equação de governo do estado plano de deformação e pode ser calculada independentemente.

3.2 FORMULAÇÃO DO MLPG

Seja a distribuição aleatória dos pontos no domínio Ω e contorno $\partial\Omega$, apresentada na Figura 8. Para um nó de interesse i , a forma fraca local da equação (3.1) pode ser apresentada em sua da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_Q} v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} v_i (u_i^h - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

onde v_i é função teste ou função de ponderação; e α é o coeficiente de penalidade, utilizado para forçar as condições de contorno essenciais na forma fraca.

Figura 8

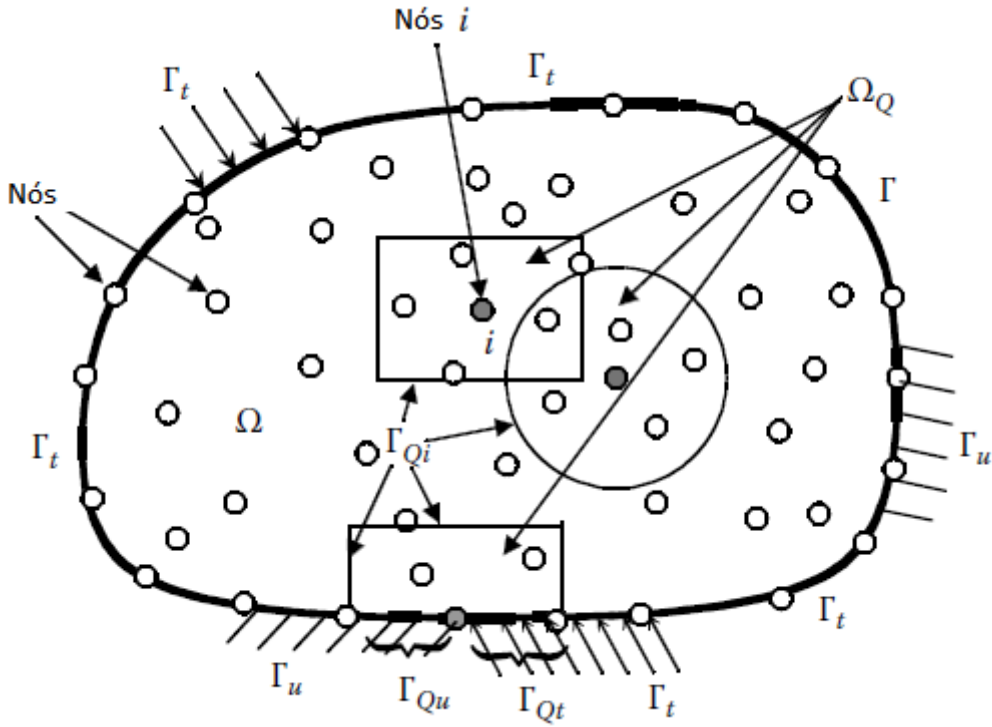


Figura 8: Representação dos domínios e contornos do problema.

Na Figura 8, pode-se observar o domínio global Ω com contorno essencial Γ_u e contorno natural Γ_t , domínio de integração Ω_Q com contorno interno Γ_{Qi} totalmente contido no domínio do problema, contorno interno que cruza com o contorno essencial Γ_{Qu} e contorno interno que cruza com o contorno natural Γ_{Qt} .

Inicialmente, a formulação apresentada é obtida por meio da imposição das condições de contorno essenciais pelo Método da Penalidade. Esse método consiste na

introdução de um parâmetro (α) que produz um custo alto para a violação das condições de contorno essenciais, portanto, o valor de α deve possuir uma ordem muito maior do que os outros termos do problema. A dificuldade em aplicar as condições de contorno de Dirichlet se deve ao fato de que as funções de aproximação calculadas pelo MQM não possuem a propriedade do delta de Kronecker.

Existem outras maneiras de impor as condições de contorno essenciais na formulação fraca, como o Método da Interpolação Direta no contorno, que posteriormente será abordado no decorrer desse trabalho.

Aplicando a integração por partes em (3.18), obtém-se:

$$\int_{\Omega_Q} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega_Q} v_i b_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_Q} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} v_i (u_i^h - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

onde:

$$\partial\Omega_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_Q \quad (3.20)$$

$$\Gamma_Q = \partial\Omega_Q \cap \Gamma \quad (3.21)$$

Substituindo as condições de contorno do problema (3.2) e (3.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_Q} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_Q} v_i b_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} v_i (u_i^h - \bar{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{Qt}} v_i \bar{t}_i d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{Qu}} v_i t_i d\Gamma - \int_{\Gamma_Q} v_i t_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como explicitado anteriormente, O MLPG utiliza dos princípios do Método de Petrov-Galerkin. Nesse método matemático a função tentativa u e a função teste v não pertencem ao mesmo espaço. Portanto, é possível escolher uma função teste v de tal maneira que ela possua valor nulo sobre Γ_Q (o contorno do subdomínio Ω_Q que está contido dentro do domínio do problema Ω). Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_Q} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_Q} v_i b_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} v_i (u_i^h - \bar{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{Qt}} v_i \bar{t}_i d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{Qu}} v_i t_i d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

É possível rearranjar de tal forma que se tenha a seguinte formulação local simétrica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_Q} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} v_i u_i^h d\Gamma - \int_{\Gamma_{Qu}} v_i t_i d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma_{Qt}} v_i \bar{t}_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} v_i \bar{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega_Q} v_i b_i d\Omega
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Avaliando a formulação fraca acima em cada um dos pontos de interesse do domínio do problema e escrevendo na forma matricial, tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\varepsilon}_v \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{v} \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{v} \mathbf{t} d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{v} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{v} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{v} \mathbf{b} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ corresponde à matriz de deformações corresponde ao vetor de tensões da função de ponderação obtida através da aproximação por MQM; e $\boldsymbol{\sigma}$ corresponde ao vetor de tensões da função aproximada.

Dado que se trata de um problema de elasticidade bidimensional, tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

3.3 DISCRETIZAÇÃO

O problema de elasticidade 2D solucionado por meio da formulação fraca apresentada na equação (3.25) permite uma distribuição do erro encontrado, de acordo com o método adotado, pois o MLPG satisfaz as equações de equilíbrio nos pontos campo plenamente apenas dentro dos domínios da integração numérica. Portanto, o MLPG desenvolve um sistema discreto de equações mais estáveis e precisas, que não necessitam atender exatamente as equações de equilíbrio em cada ponto campo, em comparação com métodos sem malha que utilizam formulações fortes (LIU, 2010). Logo, a equação (3.25) e as condições de contorno devem ser satisfeitas em todos os subdomínios de integração local de cada um dos pontos campo que discretizam o problema.

É possível calcular a função aproximada \mathbf{u}^h para os deslocamentos em um ponto campo \mathbf{x} qualquer utilizando as funções de forma obtidas por meio do MQM:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \\ \hat{v}_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \hat{\mathbf{u}}_{(2n \times 1)} \quad (3.34)$$

onde n é o número de pontos campo contidos no suporte local Ω_i referente ao ponto campo \mathbf{x} , a matriz $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz que contém as funções de interpolação obtidas pelo método dos Mínimos Quadrados Móveis construída utilizando estes mesmos pontos campo.

Por meio de relações obtidas em (TIMOSHENKO & GOODIER, 1951), é possível utilizar os deslocamentos para obter as deformações e, em seguida, as tensões por meio das relações:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.35)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.36)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor que contém as deformações nodais; $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor que contém as tensões nodais; \mathbf{u} é o vetor com as componentes de deslocamento; e \mathbf{D} é matriz de constantes elásticas do material; e \mathbf{B} é a matriz operador diferencial.

A matriz de constantes elásticas do material \mathbf{D} para o Estado Plano de Tensões é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

E, para problemas de Estado Plano de Deformações, pode ser apresentada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

E o operador diferencial \mathbf{B} é representado por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

E o vetor \mathbf{t} é o vetor de forças de superfície no ponto \mathbf{x} , que pode ser definido como:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.40)$$

onde \mathbf{N} é a matriz que contém as componentes do vetor normal ao contorno local.

Ademais, insere-se uma matriz \mathbf{S} nas integrais definidas apenas no contorno Γ_u no qual as condições de contorno de Dirichlet são empregadas. A matriz \mathbf{S} é utilizada para verificar o tipo de condição de contorno nos pontos campo dispostos sobre o domínio global, sendo definida por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

onde S_1 e S_2 são coeficientes unitários que estabelecem se há ou não condições de deslocamento prescrito, sendo $S_i = 1$ caso haja deslocamento prescrito e, caso contrário, $S_i = 0$.

Portanto, utilizando as expressões acima para representar um problema de elasticidade 2D, pode-se reescrever a formulação fraca do problema utilizando os deslocamentos fictícios $\hat{\mathbf{u}}$ como incógnita:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}_j \hat{\mathbf{u}}_j d\Omega_s + \alpha \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{S} \boldsymbol{\phi}_j \hat{\mathbf{u}}_j d\Gamma \\ & - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}_j \hat{\mathbf{u}}_j d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega_s \end{aligned} \quad (3.42)$$

A partir dessa expressão é possível construir um sistema de equações lineares global que considerará a contribuição de cada ponto campo \mathbf{x} no resultado final da incógnita fictícia $\hat{\mathbf{u}}_j$ do ponto base, dado pela equação:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \hat{\mathbf{u}}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.43)$$

onde, N é número de pontos total utilizado para representar o problema e as componentes K_{ij} da matriz \mathbf{K} são calculados pelas integrais:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}_j d\Omega_s + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{S} \boldsymbol{\phi}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}_j d\Gamma \quad (3.44)$$

e os componentes f_i do vetor de forças \mathbf{f} são calculados por:

$$f_i = \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega_s \quad (3.45)$$

A matriz \mathbf{K} é denominada Matriz de Rigidez Nodal do i -ésimo ponto base; e o vetor \mathbf{f} é denominado Vetor de Forças Nodais e é formado pela soma das contribuições das forças de volume aplicadas sobre o domínio do corpo analisado e das forças de superfície aplicadas sobre o contorno.

Em problemas de elasticidade 2D, a matriz \mathbf{K} possui dimensão $2N \times 2N$, pois cada nó possui apenas 2 graus de liberdade. Isso se deve a quantidade de incógnitas do problema. Caso um problema com h graus de liberdade fosse analisado, a matriz \mathbf{K} teria dimensão $hN \times hN$.

Cada componente K_{ij} representa a influência da rigidez do ponto campo \mathbf{x}_j sobre o ponto base \mathbf{x}_i . Por consequência, terão valores não-nulos apenas os componentes K_{ij} referentes aos pontos campo \mathbf{x}_j que estiverem contidos no subdomínio de influência do ponto base \mathbf{x}_i . A influência propiciada por um ponto campo \mathbf{x}_j sobre o ponto base \mathbf{x}_i é proporcional a distância entre ambos, isso se deve à utilização de funções Spline como função peso do MQM utilizado para calcular as funções de forma e, conseqüentemente, como função de ponderação do MLPG-1. Desta forma, a matriz global \mathbf{K} é não-simétrica e esparsa.

A componente \hat{u}_j do vetor de deslocamentos $\hat{\mathbf{u}}$ representa os deslocamentos fictícios do ponto campo, pois a aproximação por MQM exige um pós-processamento para encontrar os deslocamentos reais. Faz-se necessário, então, a aplicação da equação (3.42) para a obtenção dos deslocamentos reais.

A matriz global \mathbf{K} é montada por uma amálgama das matrizes de rigidez locais organizadas de acordo com as relações entre o número do nó e a posição das linhas e colunas. Portanto deve ser montado um esquema de numeração para especificar a topologia do sistema, como mostra a Figura 9. O deslocamento horizontal (\mathbf{u}_1) é governado pelas linhas e colunas ímpares da matriz global \mathbf{K} , segundo $(2i - 1)$, enquanto

o deslocamento vertical (\mathbf{u}_2), pelas linhas e colunas pares de \mathbf{K} seguindo a expressão (2i), onde i é o número do ponto campo.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1(2N-1)} & K_{1(2N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{K}_{(2i-1)1} & \mathbf{K}_{(2i-1)2} & \ddots & \mathbf{K}_{(2i-1)(2N-1)} & \mathbf{K}_{(2i-1)(2N)} \\ \mathbf{K}_{(2i)1} & \mathbf{K}_{(2i)2} & \ddots & \mathbf{K}_{(2i)(2N-1)} & \mathbf{K}_{(2i)(2N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(2N)1} & K_{(2N)2} & \dots & K_{(2N)(2N-1)} & K_{(2N)(2N)} \end{bmatrix}$$

Figura 9: Montagem da matriz K global (LIU & GU, 2005)

A montagem do vetor de deslocamentos fictícios $\hat{\mathbf{u}}$ e do vetor de forças \mathbf{f} é realizado de maneira semelhante.

4 TÉCNICAS NUMÉRICAS IMPLEMENTADAS

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um dos procedimentos mais custosos computacionalmente na solução de problemas por métodos sem malha é a integração numérica nos domínios da formulação fraca. Através dos últimos anos, novos métodos de integração foram desenvolvidos a fim de melhorar a eficiência e diminuir o custo computacional dos algoritmos.

A integração numérica garante a convergência do método numérico. Dominar e otimizar técnicas de integração numérica são fundamentais para garantir o desenvolvimento de algoritmos mais robustos e computacionalmente eficientes.

No procedimento de integração numérica, evidencia-se a diferença entre os métodos verdadeiramente sem malha daqueles que não o são.

Métodos não verdadeiramente sem malha utilizam durante a integração numérica uma malha auxiliar pouco complexa. Esses métodos dividem o domínio do problema em pequenos elementos planos, nos quais são realizados os procedimentos de integração da formulação fraca. Esse tipo de abordagem é mais antigo e está atrelado a formulação fraca de Galerkin. Algumas das técnicas mais conhecidas: Quadratura de Gauss no domínio global utilizada em EFG (DOLBOW & BELYTSCHKO, 1998), a integração nodal e a integração nodal estabilizada em diagramas de Voronoi (BEISSEL & BELYTSCHKO, 1996) e (CHEN, et al., 2001).

Os métodos sem malha não utilizam elementos ou malha para realizar essas integrações numéricas. As integrações são baseadas no suporte e, majoritariamente, utilizam o suporte local utilizado nas aproximações como domínio. Os diferentes métodos verdadeiramente sem malha utilizam diferentes técnicas de integração: a Quadratura de Gauss baseada no suporte utilizada no MLPG (ATLURI & SHEN, 2002), a Quadratura de Mínimos Quadrados Móveis na formulação de Galerkin (DUFLOT & NGUYEN-DANG, 2002), integrações utilizando técnicas de transformação de coordenadas (KHOSRAVIFARD & HEMATYAN, 2010), a Quadratura de Partição de União

(CARPINTERI, et al., 2002) e, inclusive, técnicas que são baseadas em métodos probabilísticos, a integração de Quase-Monte Carlo (ROSCA & LEITAO, 2008).

Além disso, existem Métodos sem Malha que não exigem nenhum tipo de integração numérica, como por exemplo o MLPG2, que utiliza um método de colocação da função Delta de Dirac como função teste em cada um dos suportes.

Para efeito desse trabalho, o foco será em torno de integrações baseadas no suporte e aplicados na formulação MLPG-1. Serão estudados especificamente as Quadraturas de Gauss aplicada sobre um domínio local.

4.2 QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

Como aludido anteriormente, existem diversas técnicas de integração numérica, contudo, esse trabalho se restringirá à utilização da Quadratura Gaussiana, sendo essa a técnica mais utilizada nos métodos sem malha (DOLBOW & BELYTSCHKO, 1999).

Em uma regra de quadraturas gaussianas genérica, a integral definida de uma função $f(x)$ é linearmente aproximada sobre um intervalo $[-1,1]$ por meio de uma função polinomial aproximável $g(x)$ e por uma função peso conhecida $W(x)$:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 W(x)g(x)dx \quad (4.1)$$

Que por sua vez, pode ser aproximada pelo somatório dos valores da função $g(x)$ em pontos específicos (x_i) multiplicados pelos pesos da função $W(x)$ nos pontos w_i .

$$\int_{-1}^1 W(x)g(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) \quad (4.2)$$

No caso específico da quadratura de Gauss-Legendre, a função peso $W(x)$ tem valor unitário, tal que é possível aproximar a integral da função $f(x)$ da seguinte maneira:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4.3)$$

onde n é o número de pontos x_i utilizados na quadratura.

Desta forma, é necessário calcular os nós x_i e seus respectivos pesos. As abscissas dos pontos de avaliação x_i são as raízes dos polinômios de Legendre de n-ésima ordem $P_n(x)$. Os polinômios de Legendre podem ser definidos pela seguinte formulação recursiva:

$$P_0(x) = 1 \quad (4.4)$$

$$P_1(x) = x \quad (4.5)$$

$$nP_n(x) = (2n - 1)xP_{n-1}(x) - (n - 1)P_{n-2}(x) \quad (4.6)$$

$$P'_n(x) = \frac{n}{x^2 - 1} (xP_n(x) - P_{n-1}(x)) \quad (4.7)$$

Esses polinômios, geralmente, não são analiticamente solucionáveis, portanto, as raízes devem ser aproximadas numericamente, nesse trabalho foi utilizada a iteração de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.8)$$

A iteração de Newton-Raphson deve ser iniciada com um palpite inicial, dado por:

$$x_0 = \cos\left(\pi \frac{i - \frac{1}{4}}{n + \frac{1}{2}}\right) \quad (4.9)$$

Após definir todas os nós x_i , é preciso calcular os pesos respectivos por meio da seguinte fórmula:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P'_n(x_i)]^2} \quad (4.10)$$

A popularidade da quadratura gaussiana em métodos sem malha se deve a sua capacidade de integrar exatamente polinômios unidimensionais, sendo possível integrar exatamente polinômios de ordem $2n - 1$ por meio de uma regra de Quadratura de Gauss de ordem n (STROUD & SECREST, 1966).

Ademais, devido a geometria dominante ser a circular, esse trabalho utilizará coordenadas polares, a fim de facilitar os cálculos matemáticos.

4.3 FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÃO USANDO TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Inicialmente, o subdomínio Ω_i em duas dimensões é representado como um círculo em coordenadas cartesianas, tomando seu centro como a origem do plano, como mostrado na Figura 10:

$$x_1^2 + x_2^2 = r_i^2 \quad (4.11)$$

onde x_1 e x_2 são as coordenadas do ponto base x_i do subdomínio Ω_i .

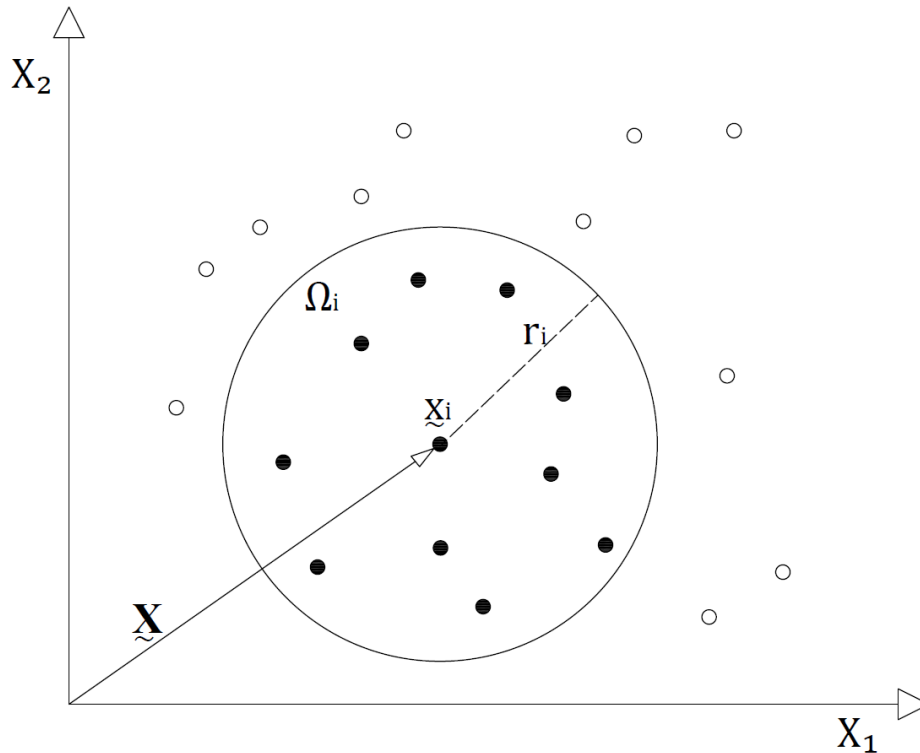


Figura 10 : Subdomínio local em coordenadas cartesianas globais

E:

$$\mathbf{x}_i(\mathbf{X}) = X_1 \mathbf{i} + X_2 \mathbf{j} \quad (4.12)$$

onde, \mathbf{x}_i é o ponto base; e \mathbf{X} é o vetor posição de \mathbf{x}_i .

Primeiramente, transforma-se o subdomínio de coordenadas cartesianas globais para coordenadas cartesianas locais, como mostrado pela Figura 11.

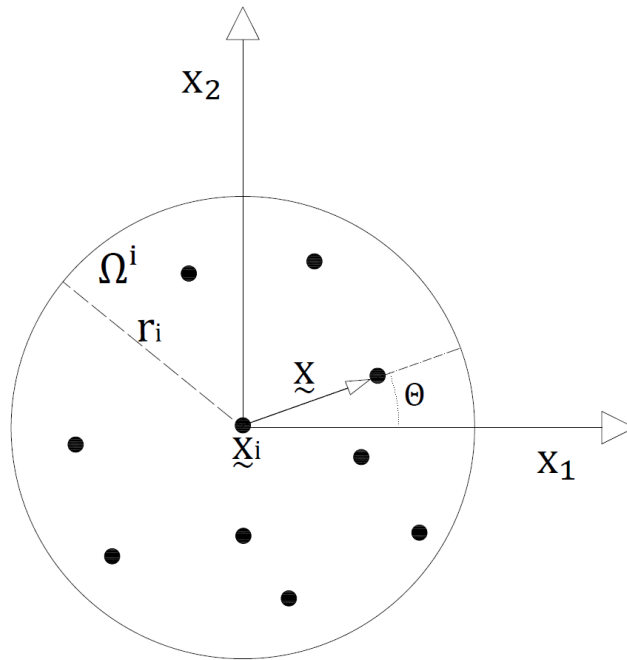


Figura 11: Subdomínio em coordenadas cartesianas locais

Para transformar de coordenadas cartesianas locais para coordenadas polares, conforme na

Figura 12, considera-se as seguintes variações:

$$0 \leq r(x_i, \mathbf{x}) \leq r_i \tag{4.13}$$

$$\theta_1 \leq \theta(x_i, \mathbf{x}) \leq \theta_2 \tag{4.14}$$

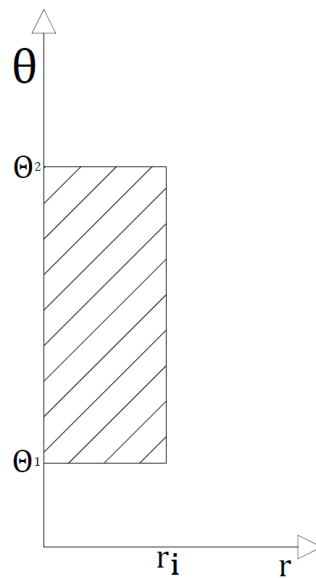


Figura 12: Subdomínio representado em coordenadas polares

Nas quais a relação entre coordenadas polares e cartesianas é dada por:

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad (4.15)$$

$$x_2 = r \sin(\theta) \quad (4.16)$$

E o Jacobiano da transformação é:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

E seu determinante:

$$|\mathbf{J}_1| = r \quad (4.18)$$

Em seguida, é necessário transformar o subdomínio em um domínio normalizado (ξ, η) definido entre $[-1,1]$, conforme Figura 13, a fim de facilitar a quadratura gaussiana.

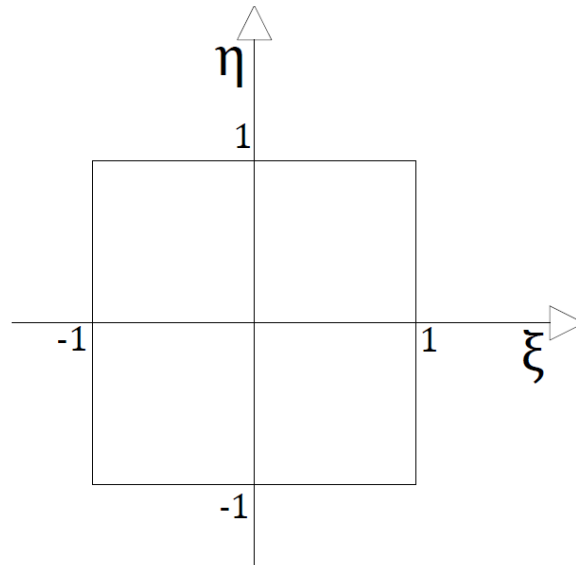


Figura 13 : Subdomínio normalizado

Isso posto, as relações entre coordenadas polares (r, θ) e as coordenadas normalizadas (ξ, η) é dada pelas seguintes expressões:

$$r = \frac{r_i}{2} (1 + \xi), \quad \xi \in [-1,1] \quad (4.19)$$

$$\theta = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\eta + \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right), \quad \theta \in [-1,1] \quad (4.20)$$

E o determinante do Jacobiano dessa transformação:

$$|\mathbf{J}_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{R_i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \end{vmatrix} = \frac{r_i(\theta_2 - \theta_1)}{4} \quad (4.21)$$

Após a realização das transformações e da aplicação da quadratura de Gauss-Legendre, a formulação discretizada dos elementos K_{ij} da matriz \mathbf{K} e dos elementos f_i do vetor \mathbf{f} do problema pode ser escrita da seguinte maneira:

$$K_{ij} = |\mathbf{J}_2| |\mathbf{J}_1| \sum_{j=1}^{ng} \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i \alpha_j \boldsymbol{\varepsilon}_w(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}_j(\xi, \eta) + \alpha |\mathbf{J}_3| \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i \mathbf{w}_i(\xi) \mathbf{S} \boldsymbol{\phi}_j(\xi, \eta) \quad (4.22)$$

$$+ |\mathbf{J}_3| \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i \mathbf{w}_i(\xi) \mathbf{N} \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}_j(\xi, \eta)$$

$$\mathbf{f}_i = |\mathbf{J}_3| \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i \mathbf{w}_i(\xi) \bar{\mathbf{t}} + \alpha |\mathbf{J}_3| \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i \mathbf{w}_i(\xi) \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.23)$$

$$+ |\mathbf{J}_2| |\mathbf{J}_1| \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} \alpha_i \alpha_j \mathbf{w}_i(\xi, \eta) \mathbf{b}$$

Para os termos nos quais a integração é definida somente sobre o contorno, a transformação é mais simples. A transformação necessária no contorno é uma transformação linear de uma reta qualquer ($x \in [x_1, x_2]$) para uma reta normalizada ($\xi \in [-1,1]$). Dada pela seguinte expressão:

$$x = \frac{(x_2 - x_1)}{2} \xi + \frac{(x_2 + x_1)}{2} \quad (4.24)$$

Ademais, o determinante do Jacobiano para a transformação linear aplicada sobre o contorno seguindo a expressão:

$$|J_3| = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|}{2} \quad (4.25)$$

4.4 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Após a apresentação das técnicas numéricas utilizadas na integração, a descrição e o desenvolvimento da integração numérica são apresentados.

Inicialmente, duas técnicas diversas serão implementadas computacionalmente: a) a Quadratura de Gauss aplicada sobre novos subdomínios gerados especificamente para a integração, estes serão circulares e terão como ponto central os pontos de Gauss, denominada para efeito desse trabalho de integração tradicional; e b) a Quadratura de Gauss-Legendre utilizando os próprios subdomínios do MQM como domínio de integração para cada ponto de Gauss. Primeiramente, será abordada a integração tradicional.

A Quadratura de Gauss é uma técnica de integração numérica muito utilizada no Método dos Elementos Finitos. Isso ocorre, pois, as equações a serem integradas possuem um caráter polinomial e a propriedade do delta de Kronecker, ademais os próprios elementos finitos fornecem os limites de integração para as integrais.

Contudo, nenhuma dessas condições é atendida pelo MLPG-1. As funções a serem integradas possuem características racionais. Ademais, a utilização de suportes locais em forma de círculo ou de seções circulares implica na falta de correspondência entre os limites de integração locais e globais, como mostrado na Figura 14. Não obstante, a quadratura gaussiana ainda fornece resultados precisos e confiáveis para a integração numérica no método MLPG.

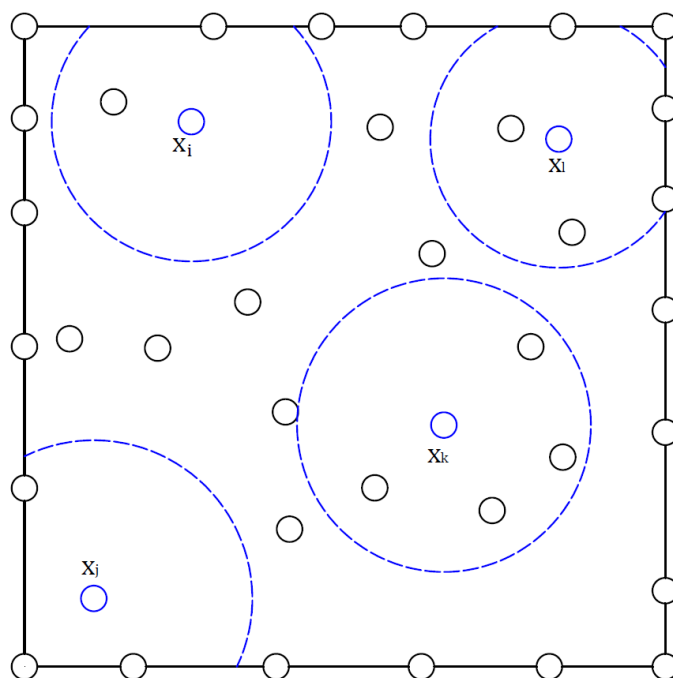


Figura 14: Diversas geometrias dos domínios locais de integração.

A incompatibilidade entre os limites do domínio global e os limites dos subdomínios locais é a razão principal para a proposição de uma técnica de integração alternativa. As técnicas de integração tradicionalmente utilizadas em métodos sem malha não solucionam essa incompatibilidade, mas a evitam ao limitar o posicionamento de pontos campo de tal forma que o subdomínio não cruze com o contorno global.

Por meio dessa limitação, os subdomínios locais teriam geometria circular ou semicircular, facilitando assim a delimitação dos limites de integração como descrito por (MAZZIA, et al., 2007). Contudo, a falta de pontos campo nas regiões próximas ao contorno global podem gerar resultados menos precisos, especialmente em problemas com cantos ou falhas.

Outrossim, as técnicas de integração comumente utilizadas são mais custosas computacionalmente. Isso se deve à necessidade da criação de subdomínios locais de interpolação para cada ponto de Gauss, e em seguida, efetuar uma aproximação por MQM utilizando-os como suporte local, aumentando o número de operações necessárias para obter a solução do problema.

4.4.1 Técnica de integração tradicional

A integração tradicional consiste, na delimitação, sobre cada ponto base \mathbf{x}_i , de um subdomínio local de integração Ω_{te}^I , que servirá como suporte da função de ponderação v . Em seguida, são distribuídos pontos de integração de Gauss \mathbf{x}_{G_j} dentro de Ω_{te}^I , e a partir das distancias entre os pontos de Gauss e o ponto central \mathbf{x}_i , calcula-se a função de ponderação $v(\mathbf{x})$, que no caso do MLPG-1 é a mesma função daquela utilizada como função peso do MQM.

Posteriormente, para cada \mathbf{x}_{G_j} é delimitado um outro subdomínio de interpolação Ω_{tr}^I , no qual a função peso w da interpolação por MQM tem valor não nulo, portanto, o suporte da função aproximada u^h . A aproximação por MQM é, então, realizada sobre Ω_{tr}^I utilizando todos ponto campo \mathbf{x}_j contido em Ω_{tr}^I para calcular a função de interpolação $\phi(\mathbf{x}_{G_j})$. Como pode ser visto na

Figura 15.

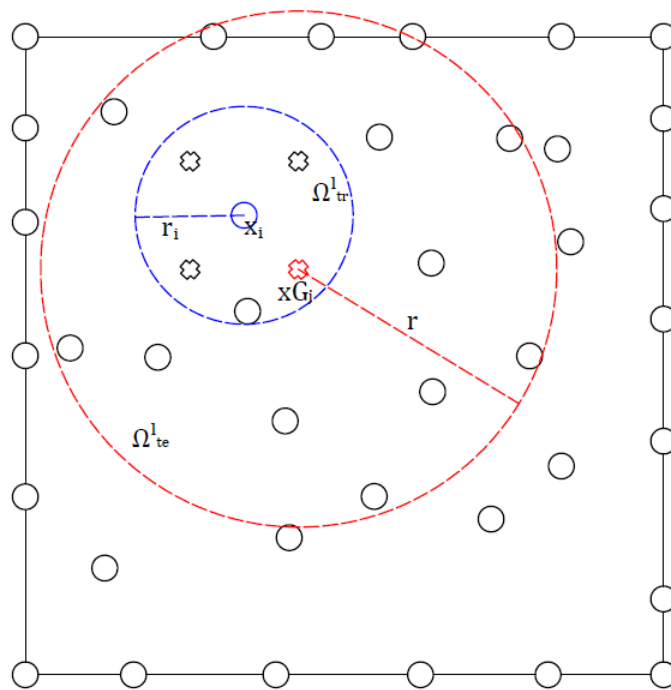


Figura 15: Representação do subdomínio de integração e do subdomínio local. Onde \bullet é um ponto campo \mathbf{x}_i ; e \star é um ponto de Gauss

Na Figura 15, o círculo azul corresponde ao subdomínio de integração Ω_{tr}^I centrado no ponto base x_i e tem como raio a distância até o ponto campo mais próximo; e o círculo vermelho ao subdomínio local Ω_{te}^I , centrado no ponto de Gauss em vermelho e tem como raio uma distância arbitrária, desde que seu subdomínio englobe pontos campo suficientes para garantir a convergência do MQM.

A escolha do raio do subdomínio de integração como a menor distância entre dois pontos campo é interessante, pois evita, na maioria dos casos, que hajam subdomínios com geometria complicada como: setores circulares ao analisarmos pontos campo próximos ao contorno. Na Figura 16 é possível perceber que mesmo para pontos nessa situação, o subdomínio de integração nunca atravessará os limites do domínio global, sendo assim, os limites de integração do subdomínio serão sempre 0 e 2π radianos. Para pontos do contorno, segue-se o mesmo raciocínio, desta forma a geometria dos subdomínios de integração, para domínios retangulares, será semicircular ou $\frac{1}{4}$ de círculo, como mostrado em Figura 17.

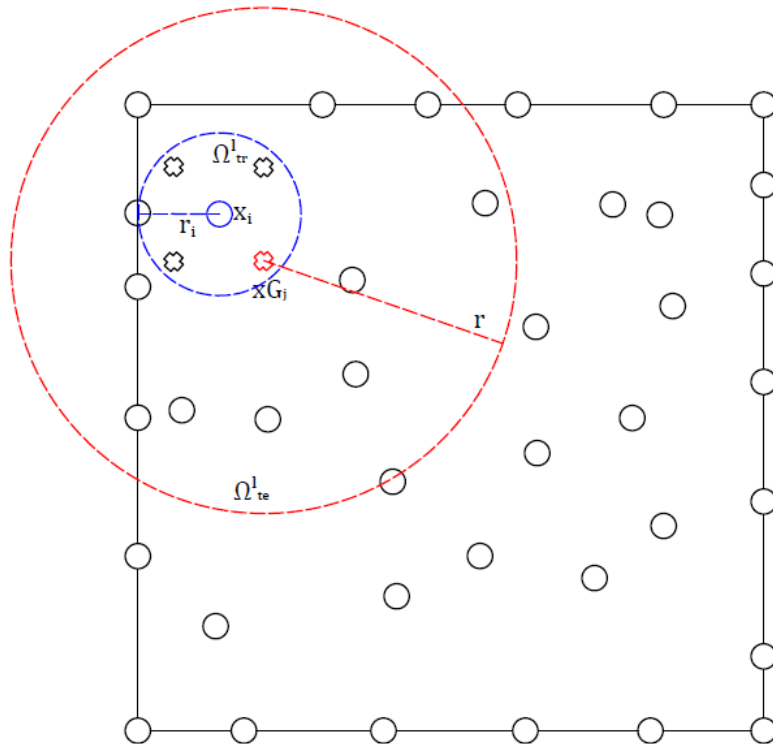


Figura 16: Subdomínios locais para pontos próximos ao contorno

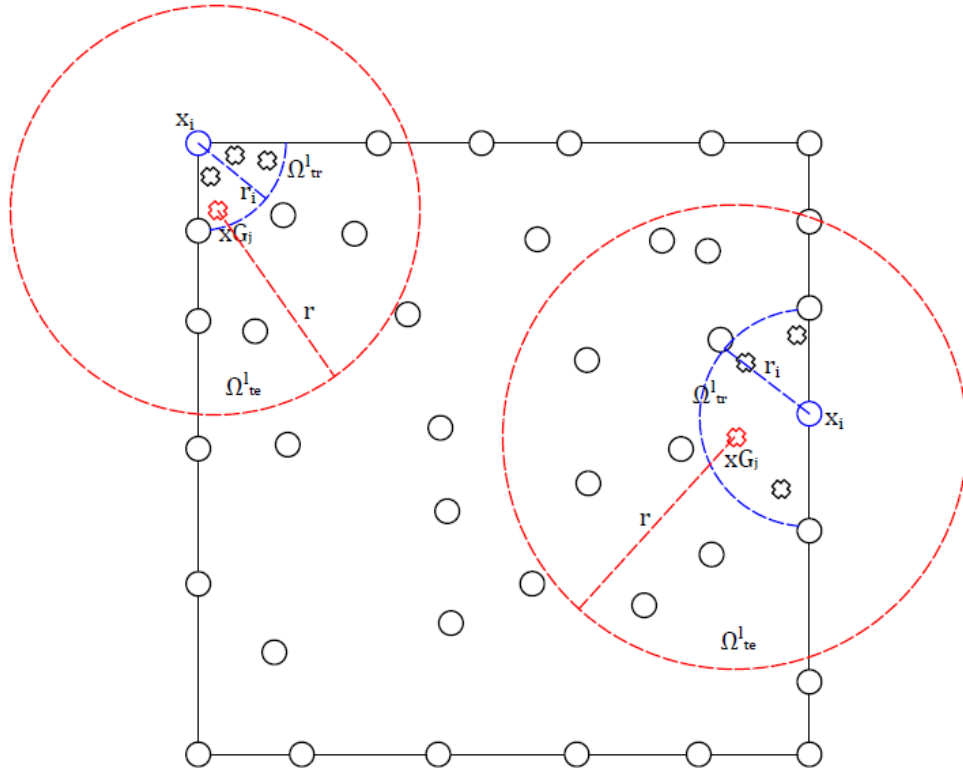


Figura 17: Subdomínios locais para pontos no contorno

A quadratura de Gauss é realizada utilizando as funções ponderação v e aproximada u^h encontradas no método elucidado em 3.3.

A matriz de “rigidez” global K é montada utilizando como elemento K_{IJ} o somatório das parcelas referentes aos pontos campos x_j contidos nos subdomínios de interpolação Ω_{te}^1 de cada um dos pontos de Gauss xG_j contido no subdomínio de integração Ω_{tr}^1 do ponto x_i .

O custo computacional da integração tradicional se deve ao fato de que todo o processo do método MQM deve ser repetido para todos os subdomínios gerados para cada ponto de Gauss, pois é necessário calcular a função de interpolação de cada subdomínio local. Portanto, o aumento do número de pontos campo usados para discretizar o problema ou o aumento do número de pontos de Gauss na integração numérica, amplifica exponencialmente a quantidade de operações necessárias (especialmente de inversão de matrizes) na solução.

4.4.2 Técnica de integração proposta

A integração proposta nesse trabalho procura otimizar computacionalmente a solução do MLPG-1.

A integração procura utilizar o mesmo subdomínio como base da função aproximada \mathbf{u} e da função de ponderação \mathbf{v} . Desta forma, não é necessário gerar um novo subdomínio para cada ponto de Gauss e, portanto, não é necessário calcular as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , suas derivadas ou suas inversas.

O raio do subdomínio de integração deve ser maior que o utilizado na integração tradicional, pois na integração proposta, o subdomínio de integração deve englobar todos os pontos campo que serão usados na montagem da matriz \mathbf{K} local do ponto base, como mostra a Figura 18.

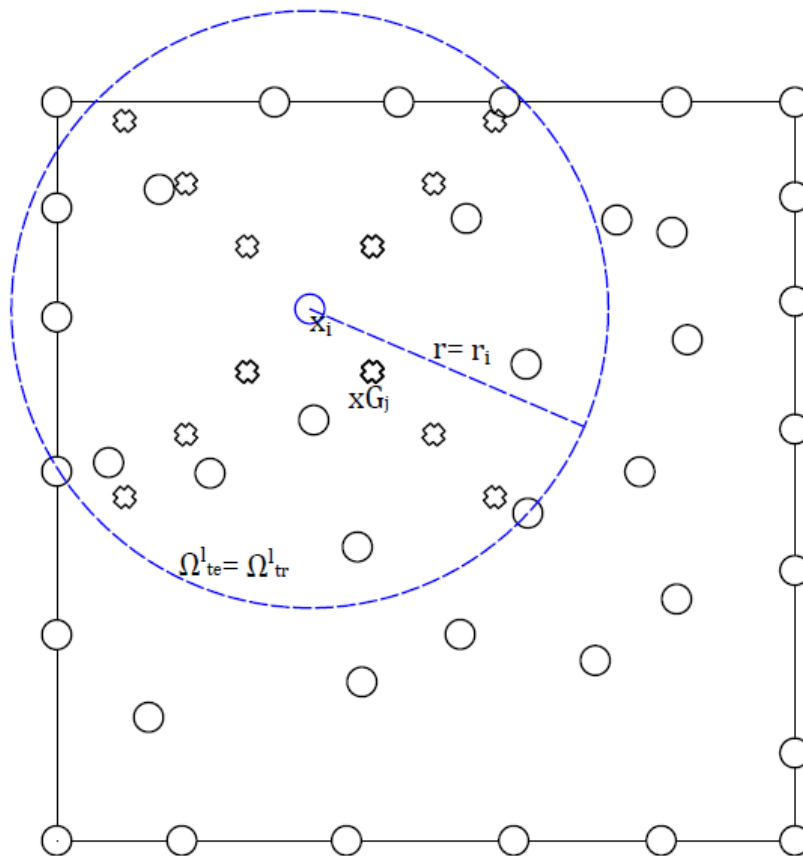


Figura 18: Subdomínio da integração proposta

Contudo, é possível perceber pela Figura 18 que há áreas do subdomínio de integração que não estão dentro do domínio global do problema e gerarão um erro caso sejam consideradas na integração numérica. Conseqüentemente, essas áreas precisam ser desconsideradas, gerando um outro inconveniente: a determinação dos limites de integração para subdomínios de geometria pouco convencional, como mostra na Figura 14.

Devido a geometria complexa, deve-se dividir os subdomínios em áreas de geometria mais simples e realizar a quadratura de Gauss separadamente em cada uma dessas áreas e, em seguida, somar as devidas contribuições.

Nesse trabalho, foram estipulados quatro modelos de integração numérica diferentes para domínios globais retangulares: (a) círculo completo, quando o subdomínio está totalmente contido dentro do domínio global; e (b) três para as três situações diferentes de intersecção entre o contorno global e o subdomínio de integração, mostrado na Figura 19.

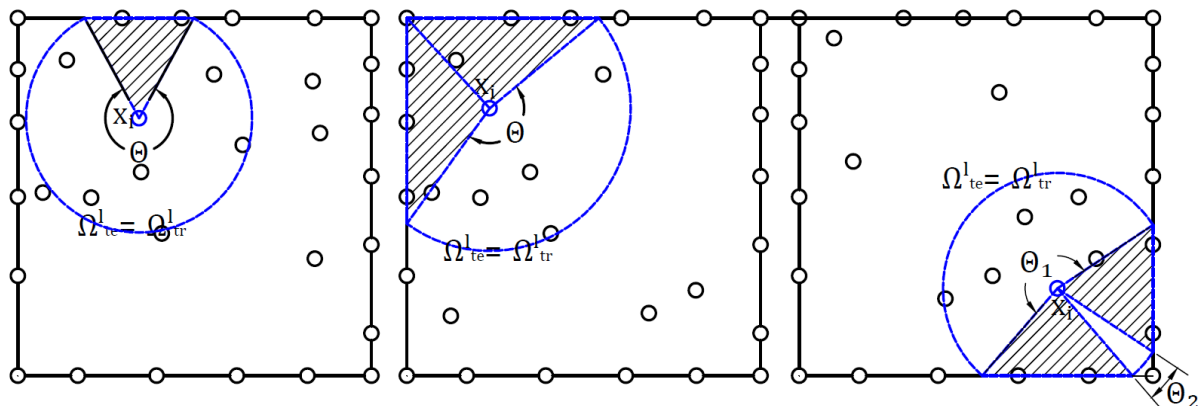


Figura 19: Diferentes geometrias de subdomínios

A integração desses subdomínios diferenciados é realizada através da divisão entre setores circulares e triângulos, nos quais a quadratura de Gauss será aplicada separadamente.

Para os pontos nos quais o subdomínio de integração não toca o contorno global, a integração é realizada de maneira semelhante àquela realizada pelo método tradicional.

Para os outros pontos, é necessário classificar em qual das geometrias da Figura 19, o subdomínio do ponto se encontra. Inicialmente, é necessário determinar as distâncias entre o ponto base do subdomínio de integração e os lados do contorno e entre o ponto base e os vértices.

Após classificar qual a geometria do subdomínio, realiza-se o procedimento adequado.

Para o primeiro tipo, no qual o subdomínio ultrapassa apenas um dos lados do contorno global, utiliza-se o valor conhecido do raio de integração e a distância (d_i) entre o ponto base e o contorno e a distância desconhecida (d) para montar um triângulo retângulo. E utilizando o teorema de Pitágoras, determina-se a d . Em seguida, determina-se o ângulo θ entre o raio (r_i) e d_i . Os dois triângulos são semelhantes, portanto, os cálculos são realizados apenas uma vez. Utilizando esses valores, é possível calcular quais serão os ângulos θ_1 e θ_2 , que são os limites da integração do domínio em setor circular, além dos pontos x_1 e x_2 , que são os limites de integração do contorno, como mostrado em Figura 20. A quadratura de Gauss será aplicada em um setor circular e em um triângulo isósceles.

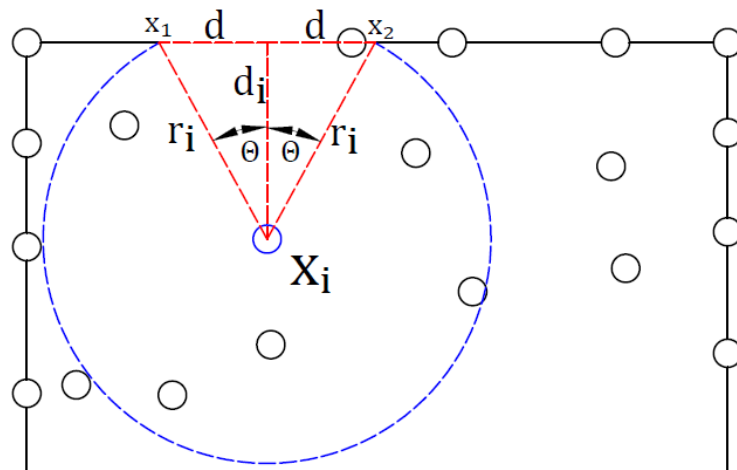


Figura 20: Divisão do subdomínio em geometrias simples

Para subdomínios que ultrapassam dois lados do contorno global e um dos vértices, o procedimento para calcular é semelhante, porém realizado duas vezes, pois a geometria é dividida em um setor circular e quatro triângulos, como mostrado em Figura

21. Nesse caso, é preciso notar que os triângulos não são necessariamente isósceles, portanto há a necessidade de calcular quatro ângulos θ e quatro comprimentos d desconhecidos diferentes. Nesse caso, a integração é aplicada em um setor circular e em 4 triângulos retângulos. Esse caso é o que possui o maior número de subdivisões, sendo, portanto, o mais custoso computacionalmente, pois cada subárea demandará uma quadratura de Gauss própria.

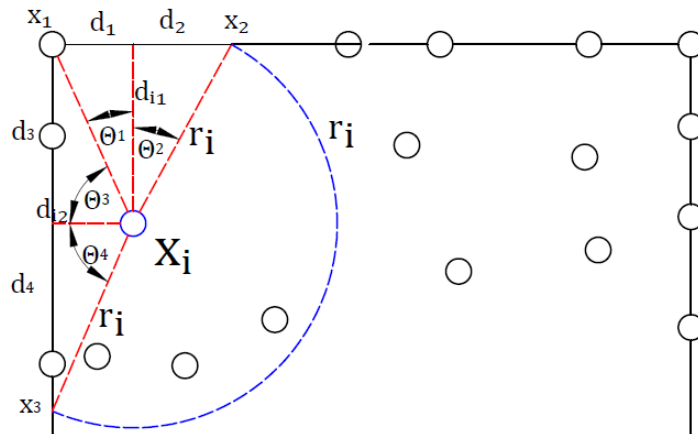


Figura 21: Divisão do subdomínio em geometrias simples

O último tipo de geometria é apenas uma aplicação especial daquele apresentado na Figura 20, contudo ao invés de calcular as propriedades geométricas de apenas um triângulo isósceles, calcula-se dois. O subdomínio é dividido conforme a Figura 22. A quadratura será aplicada em dois triângulos isósceles e dois setores circulares: o primeiro possui variação angular de $\theta = \theta_3$ e o segundo de $\theta = 2\pi - (2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3)$.

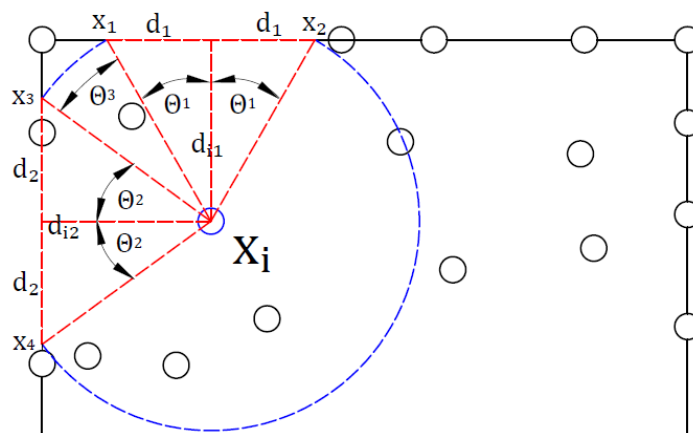


Figura 22: Divisão do subdomínio em geometrias simples

A quadratura de Gauss nos setores circulares foi descrita anteriormente no capítulo 4.4.1.

Contudo, as transformações dos domínios triangulares não foram descritas. Há a transformação de um triângulo qualquer para um triângulo normalizado, como mostra na Figura 24. A transformação de coordenadas é similar àquela apresentada por (RIBEIRO, 2013). As coordenadas do triângulo são determinadas por coordenadas de área (ξ_1, ξ_2, ξ_3), que são funções lineares que mapeiam um elemento triangular de coordenadas naturais, apresentadas na Figura 23:

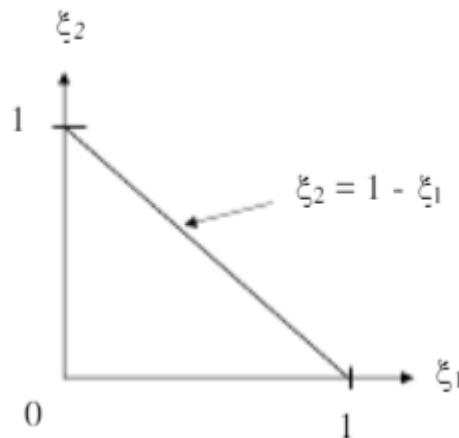


Figura 23: Parametrização do triângulo de geometria linear (RIBEIRO, 2013)

O determinante do Jacobiano da transformação é dado por:

$$|J| = 2\phi \tag{4.26}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

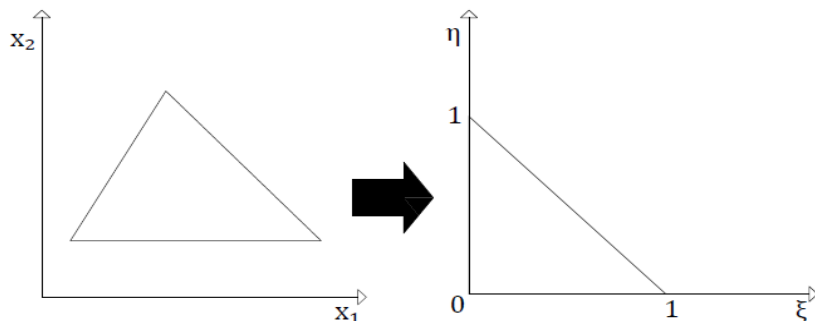


Figura 24: Transformação de coordenadas do triângulo

4.5 APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A formulação do MLPG-1 apresentada no capítulo utiliza o método das penalidades para impor as condições de contorno essenciais na formulação fraca do problema. Os coeficientes de penalidade α são números muito grandes para garantir que a diferença do valor prescrito e o valor aproximado seja muito pequena. Sendo assim, uma forma simples de impor as condições de contorno de Dirichlet e manter a dimensão e esparsidade da matriz \mathbf{K} .

Contudo, segundo (LIU, 2010), o método da penalidade é menos preciso que outros métodos como: Multiplicador de Lagrange e da Interpolação Direta. Ademais, a imposição das condições de contorno de Dirichlet não podem ser impostas precisamente, apenas aproximadamente, e, portanto, dependem do coeficiente de penalidade escolhido.

A escolha do coeficiente é uma outra desvantagem, pois dificilmente um mesmo coeficiente é aplicável em todo tipo de problema. Idealmente, escolhe-se um coeficiente de penalidade muito grande a fim de minimizar o erro, não obstante, um coeficiente grande demais pode gerar uma degeneração do sistema linear e pode causar instabilidade na solução numérica.

Apesar dos problemas, o método da penalidade é o método mais comumente utilizado no MLPG para todas as condições de contorno de Dirichlet (LIU & GU, 2005).

Alguns métodos alternativos são descritos para reflexão sobre os problemas descritos anteriormente, entre eles, o método da Interpolação Direta.

O método da Interpolação Direta se aproveita da localidade do MLPG ao estabelecer as equações do sistema linear, pois o sistema é montado ponto a ponto. Desta forma, é possível usar conjuntos de equações para pontos campo do domínio diferentes dos utilizados nos pontos de contorno. Portanto, para pontos campo localizados no contorno, é possível impor as condições de contorno essenciais utilizando uma equação de colocação de maneira oposta à aproximação via MQM.

Assumindo deslocamentos prescritos no i -ésimo ponto campo do contorno:

$$\begin{cases} u_i^h = \bar{u}_i \\ v_i^h = \bar{v}_i \end{cases} \quad (4.28)$$

Através da aproximação por mínimos quadrados móveis:

$$\mathbf{u}_i^h = \begin{Bmatrix} u_i^h \\ v_i^h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

O sistema acima produz duas equações lineares para o i -ésimo ponto campo:

$$\begin{cases} \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots + \phi_n u_n = \bar{u}_i \\ \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \dots + \phi_n v_n = \bar{v}_i \end{cases} \quad (4.30)$$

O ponto campo usado nesse exemplo possui condições de contorno prescritas em ambas as direções, contudo, gera-se apenas uma equação linear caso apenas uma das direções seja prescrita, enquanto o outro deslocamento será obtido por meio da solução do sistema global de equações.

A montagem da matriz global é realizada normalmente para todos os pontos campo do domínio. Entretanto, para os pontos campo localizados sobre o contorno, as linhas da matriz \mathbf{K} correspondentes são substituídas pelas equações (4.30). E o vetor de forças \mathbf{f} terá os componentes correspondentes a esses pontos substituídos pelos valores prescritos.

Desta forma a matriz modificada \mathbf{K} e o vetor \mathbf{f} possuem as seguintes formas:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1(2N-1)} & K_{1(2N)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_1 & 0 & \dots & \phi_N & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_N \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ K_{(2N)1} & K_{(2N)2} & \dots & K_{(2N)(2N-1)} & K_{(2N)(2N)} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ \vdots \\ \bar{u}_I \\ \bar{v}_I \\ \vdots \\ f_{Ny} \end{Bmatrix} \quad 4.32$$

A modificação da matriz global \mathbf{K} pode ser realizada para introduzir as condições de contorno sem causar grandes prejuízos na solução do problema, pois \mathbf{K} no MLPG não apresenta simetria. Desta forma, a substituição de suas linhas não interfere na solução do sistema linear de equações.

O método da interpolação direta é simples e eficiente no tratamento das condições de contorno essenciais. Sendo implementado para solução de problemas de elasticidade 2D em (LIU & GU, 2005)

4.6 DESCRIÇÃO SUCINTA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Os problemas de elasticidade 2D analisados nesse trabalho são solucionados por um programa implementado em Fortran 90, utilizando como compilador o Intel® Fortran 2015. As duas técnicas de integração numérica foram implementadas como sub-rotinas, mantendo a estrutura base do programa sem mudanças.

O programa segue fidedignamente os métodos apresentados anteriormente, desta forma, as funções de interpolação são calculadas por meio do método dos Mínimos Quadrados Móveis, tanto para o domínio de integração de cada ponto campo quanto para os subdomínios locais de cada ponto de Gauss. As matrizes montadas para representar o sistema linear de equações são apresentadas em (3.44) e (3.45) e integradas por meio da quadratura de Gauss. O sistema linear final é solucionado por meio de uma eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

Antes de iniciar a solução do problema, é necessário definir alguns parâmetros iniciais referentes a: a) o número de pontos que precisam estar contidos no subdomínio de interpolação; b) o número de pontos de Gauss empregados na quadratura; c) a ordem de aproximação da base polinomial; d) as propriedades físicas do material (módulo de

elasticidade e coeficiente de Poisson); e) o número de nós com condições de contorno prescritas; f) a função peso; g) e o coeficiente de penalidade utilizado.

Os pontos campo são distribuídos primeiramente sobre o contorno e em seguida no domínio. A disposição e numeração dos pontos campo têm significativa influência na solução por MLPG, visto que isso pode alterar a esparsidade da matriz \mathbf{K} e, portanto, a performance da solução.

Para a solução utilizando a integração tradicional traça-se o subdomínio de integração para cada ponto campo, nesse trabalho o raio utilizado foi a distância ao ponto campo mais próximo. Desta forma, os domínios de integração sempre são obtidos por geometrias mais simples de acordo com a sua posição no domínio ou contorno: os pontos campo dentro do domínio engendram círculos completos ou setores circulares como geometria de seus subdomínios de integração; os pontos campo localizados nos cantos do contorno global geram quarto de círculos; enquanto pontos campo do contorno terão semicírculos. Logo, assim são definidos os limites de integração de cada um dos subdomínios.

Em seguida são distribuídos os pontos de Gauss já em coordenadas normalizadas, de maneira semelhante àquela descrita no capítulo 4.2. Para cada ponto de Gauss é montado um suporte de interpolação, inicialmente contendo um número de pontos campo igual à ordem da base polinomial escolhida. Contudo, foi observado nesse trabalho que comumente um número de pontos campo igual à ordem da base polinomial não é suficiente para evitar a singularidade da matriz \mathbf{A} do MMQM. Portanto, o programa verifica o condicionamento da matriz \mathbf{A} e, caso haja singularidade, o raio do suporte é aumentado a fim de englobar mais pontos campo e, desta forma, melhorar o condicionamento da matriz.

Posteriormente, é aplicado o MMQM sobre cada subdomínio de interpolação a fim de calcular as funções de interpolação $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ e suas derivadas que serão empregadas no MLPG-1. Após a obtenção das funções de interpolação as integrais do MLPG são calculadas por meio da quadratura de Gauss, com o propósito de montar a matriz local $\mathbf{K}_{2 \times 2n}$ e o vetor local \mathbf{f}_{2n} . A sobreposição das matrizes locais $\mathbf{K}_{2 \times 2n}$ de todos os pontos

de Gauss inseridos no subdomínio de integração resultará no par de linhas correspondente aquele ponto base na matriz global $\mathbf{K}_{2N \times 2N}$ e vetor global \mathbf{f}_{2N} , como já explicado no capítulo 3.

Para a integração proposta, inicialmente, calcula-se o raio de integração centrado em um ponto base, garantindo que o subdomínio de integração inclua pontos campo suficientes para que a matriz \mathbf{A} não apresente problemas de singularidade. A dimensão do raio do subdomínio de integração será igual àquela do raio do subdomínio local, portanto, estes são sobrepostos.

Em seguida, são distribuídos os pontos de quadratura de Gauss no subdomínio de integração. Calcula-se, então, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} que serão utilizadas pelo MMQM. Essas matrizes são utilizadas para calcular a função de interpolação $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ e suas derivadas para todos os pontos de Gauss, mudando apenas o vetor de coordenadas do ponto de Gauss $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}G_j)$. Desta forma, é preciso calcular as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , suas inversas e suas derivadas apenas uma vez para cada ponto base.

A montagem da matriz \mathbf{K} e do vetor \mathbf{f} global é semelhante ao descrito anteriormente.

Esse trabalho utiliza dois métodos diferentes para aplicar as condições de contorno essenciais: penalidade e interpolação direta. O método da penalidade já aplica as condições de contorno de Dirichlet diretamente na formulação e, portanto, não há a necessidade de mudanças na matriz global \mathbf{K} . Contudo, para o método da interpolação direta, nesse ponto há a necessidade de fazer mudanças na matriz \mathbf{K} e no vetor \mathbf{f} para impor as condições de contorno do problema.

Esses procedimentos devem ser repetidos para cada ponto campo para realizar a montagem completa da matriz $\mathbf{K}_{2N \times 2N}$ e vetor \mathbf{F}_{2N} . Após a montagem do sistema linear global, a sua solução é determinada através de decomposição LU com pivoteamento parcial, por meio do solver DGRTSF na biblioteca Sparse Linear Equation Solver (SUPERLU).

Assim obtém-se o valor fictício \hat{u} da função incógnita \mathbf{u} . O valor aproximado do problema deve ser calculado pela multiplicação entre os valores fictícios encontrados \hat{u} e as funções de interpolação $\boldsymbol{\varphi}$, explicitado na equação (3.34).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo são apresentados e discutidos resultados de problemas de elasticidade 2D, solucionados pelo programa implementado nesse trabalho. Todos os exemplos foram solucionados no Laboratório de Mecânica Computacional da COPPE/UFRJ em um computador com as seguintes especificações: Processador Intel® Core™ i7-3770 CPU 3.40 GHz e 4.00GB de RAM.

5.1 TESTES INICIAIS

Inicialmente, será solucionado um problema simples para avaliar: (a) a disposição correta dos pontos campo; (b) o cálculo dos limites de integração; (c) a disposição dos pontos de Gauss; (d) a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares; (e) a imposição de condições de contorno em ambas as direções; (f) a capacidade do programa de solucionar problemas de elasticidade 2D.

Considerando problema teste em domínio de dimensões $[0,1] \times [0,1]$ com um deslocamento linear aplicado sobre seu contorno: $u_x = 1.0$ e $u_y = 1.0$. Três padrões de disposição nodal serão avaliados, como mostra a Figura 25: (a) 9 nós arranjados regularmente e nó interno centralizado; (b) 9 nós arranjados regularmente e nó interno descentralizado; (c) 16 nós arranjados arbitrariamente.

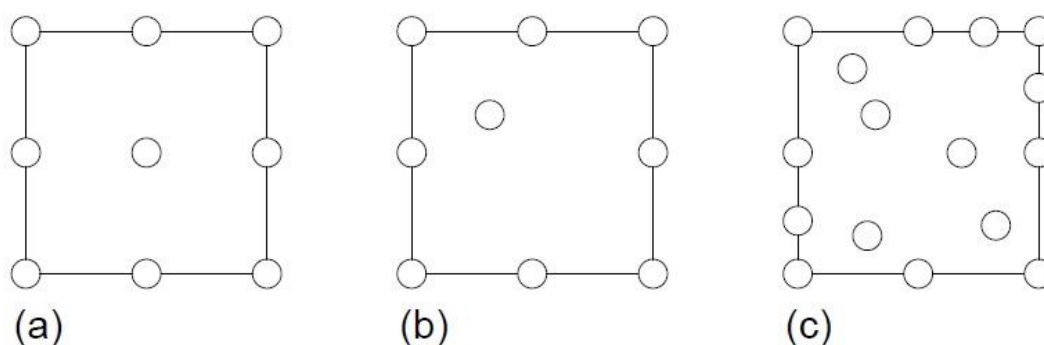


Figura 25: Distribuições Nodais do Exemplo Teste

Os três casos forma solucionados utilizando os seguintes parâmetros iniciais: 6 pontos de Gauss; coeficiente de penalidade $\alpha = 10^6$; base monomial linear; e $E = 1.0$ e $\nu = 0.0$.

Em todos os três casos, as condições de contorno prescritas foram atendidas corretamente. Portanto, o programa será utilizado para solucionar problemas de elasticidade 2D.

5.2 BARRA RETANGULAR SUBMETIDA A UMA CARGA AXIAL

Considere uma barra retangular com dimensões 6000×3000 e com as seguintes propriedades do material: $E = 1.0$ e $\nu = 0.25$. A barra e sua discretização nodal são representadas pelas Figura 26 (a) e Figura 26 (b).

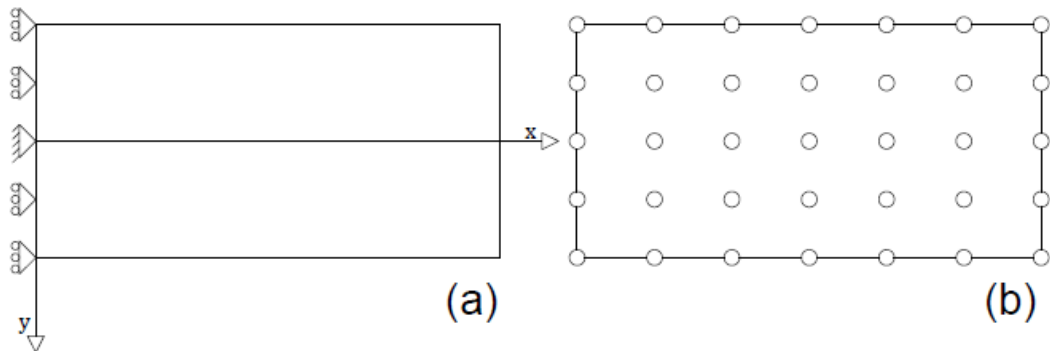


Figura 26: Barra retangular e sua representação nodal

A barra será submetida a dois tipos diferentes de solitação:(a) uma carga uniforme; (b) uma carga linearmente variável, apresentados na

Figura 27. Em ambos os casos, a carga será aplicada na extremidade direita da barra. A quadratura de Gauss utilizará 9×9 pontos de Gauss e o coeficiente de penalidade $\alpha = 10^6$ para ambos os casos. Ademais, ambas utilizarão raios de integração e de interpolação de dimensões iguais.

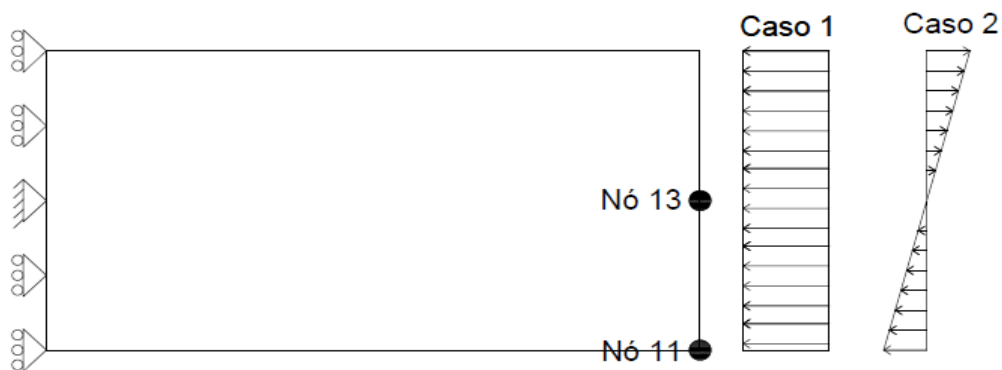


Figura 27: Cargas axiais aplicadas na barra

Os resultados da solução do problema estão apresentados nas Tabela 1 a Tabela 4. As funções de forma utilizadas na solução do problema foram calculadas usando duas bases monomiais distintas: linear e quadrática. Para o caso de carregamento 1, a solução analítica é dada pela expressão:

$$u_x = x \quad 5.1$$

$$u_y = -\frac{y}{4} \quad 5.2$$

Tabela 1: Deslocamentos horizontal no Nó 13 – Caso1 Integração Tradicional

Base Monomial	u_x		
	Analítico	Numérico	Erro
Linear	-6000	-5986.864	-0.22%
Quadrática	-6000	-5993.91	-0.102%

Tabela 2: Deslocamentos horizontal no Nó 13 – Caso1 Integração Proposta

Base Monomial	u_x		
	Analítico	Numérico	Erro
Linear	6000	5906.50	1.56%
Quadrática	6000	6075.30	1.255%

Os resultados mostram um nível de precisão aceitável no cálculo do deslocamento. Apesar da integração proposta apresentar um erro maior.

Para o caso de carregamento 2, a solução analítica é dada pela expressão:

$$u_x = \frac{2xy}{3} \quad 5.3$$

$$u_y = -\frac{\left(x^2 - \frac{y^2}{4}\right)}{3} \quad 5.4$$

Tabela 3: Deslocamentos vertical no Nó 11 – Caso 2 Integração Tradicional

Base Monomial	u_y		
	Analítico	Numérico	Erro
Linear	12000	10659.63	11.170%
Quadrática	12000	12035.679	0.297%

Tabela 4: Deslocamentos vertical no Nó 11 – Caso 2 Integração Proposta

Base Monomial	u_y		
	Analítico	Numérico	Erro
Linear	12000	10206.54	14.95%
Quadrática	12000	12156.60	1.305%

Devido aos resultados muito pobres, especialmente para a base monomial linear, o problema foi discretizado utilizando as seguintes distribuições de pontos campo: (a) 13×9 (117 nós), e 25×17 (425 nós). Os resultados estão dispostos nas Tabela 5 a Tabela 8:

Tabela 5: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 117 nós Integração Tradicional

Base Monomial	u_y		
	Analítico	Numérico	Erro
Linear	12000	12701.50	5.85%
Quadrática	12000	12005.62	0.047%

Tabela 6: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 117 nós Integração Proposta

Base Monomial	u_y		
	Analítico	Numérico	Erro
Linear	12000	12925.88	7.72%
Quadrática	12000	12279.56	2.330%

Tabela 7: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 425 nós Integração Tradicional

Base Monomial	u_y		
	Análítico	Numérico	Erro
Linear	12000	12124.05	1.03%
Quadrática	12000	12000.89	0.007%

Tabela 8: Deslocamentos verticais no Nó 11 – Caso 2 com 425 nós Integração Proposta

Base Monomial	u_y		
	Análítico	Numérico	Erro
Linear	12000	12259.02	2.16%
Quadrática	12000	12119.60	0.997%

É notável que no caso de carregamento 2, no qual a solução analítica do campo de deslocamentos é quadrática, as funções de forma obtidas através da base monomial linear conseguem reproduzir de maneira limitada o campo de deslocamentos, gerando erros mais expressivos. Isso se deve ao fato de que a consistência da aproximação por MQM depende da ordem da base monomial empregada. As funções de forma possuem consistência C^m , sendo m a ordem completa da base monomial.

Contudo, melhorando a discretização do problema, a solução do problema converge para uma solução com um erro mais aceitável. Apesar da melhora, diante dos resultados, recomenda-se a utilização uma base monomial de ordem igual ou superior a dois para solucionar problemas de elasticidade 2D.

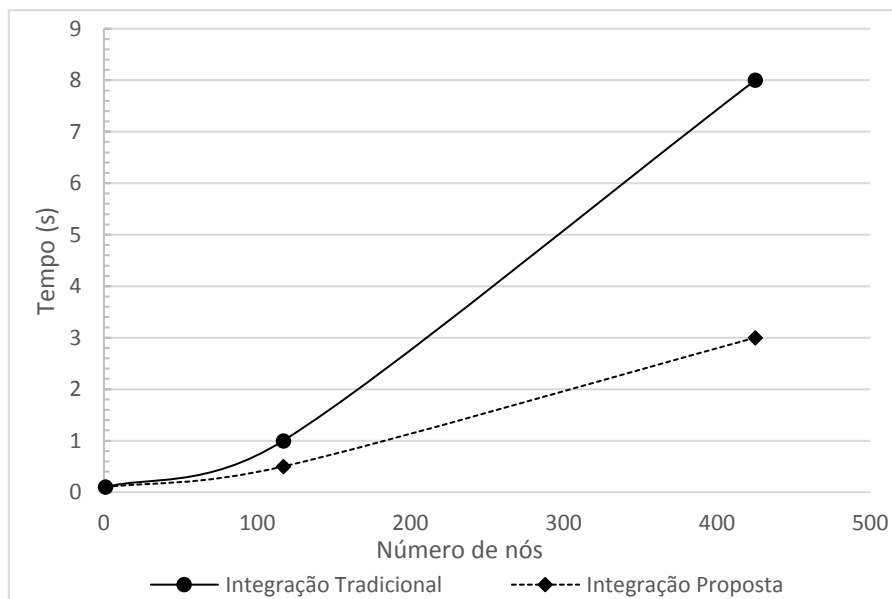


Figura 28: Comparativo do tempo necessário para a solução do exemplo 5.2

Apesar de pequena, diferença no tempo de solução é considerável, pois a integração proposta, para a discretização mais robusta (425 pontos campo), é quase 3 vezes mais rápida. No entanto, é perceptível que o processo de integração proposto apresenta uma precisão menor do que o método tradicional. É provável que o erro do método proposto esteja relacionado à descentralização da função peso de ponderação do MQM em relação ao ponto de Gauss.

5.3 VIGA EM BALANÇO

Considere uma viga engastada em balanço representada pela configuração nodal mostrada na Figura 29, por 121 nós. A viga possui as seguintes dimensões $L = 100\text{cm}$ e $h = 10\text{cm}$, módulo de elasticidade do material $E = 2.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. A viga será submetida a um carregamento pontual $p = 1000\text{N}$ na extremidade livre.

A solução analítica do problema é dada por:

$$u_x = -\frac{pyx^2}{2E} - \frac{vpy^3}{6E} - \frac{py^3}{6G} + \left(\frac{pL^2}{2E} - \frac{pc^2}{2G}\right)y \quad 5.5$$

$$u_y = \frac{vpxy^2}{2E} + \frac{px^3}{6E} - \frac{pL^2x}{2E} + \frac{pL^3}{3E} \quad 5.6$$

onde $c = \frac{h}{2}$

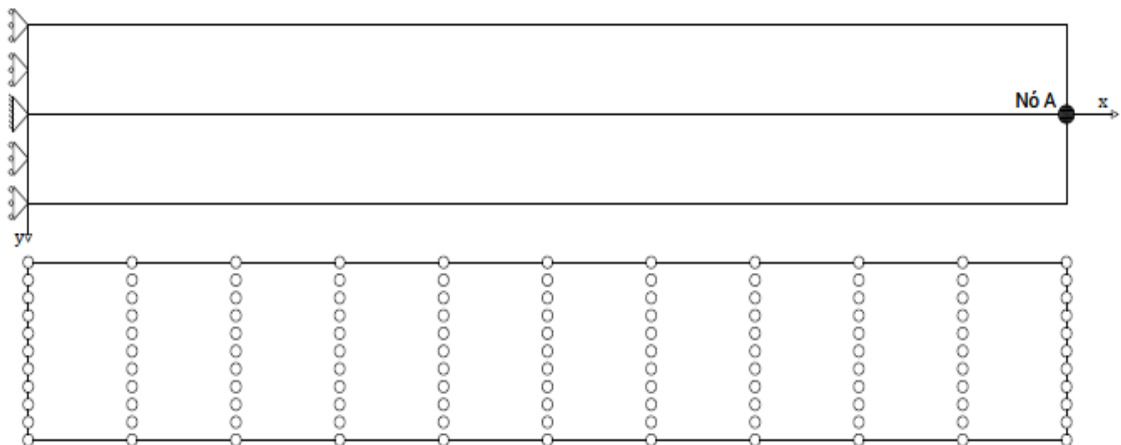


Figura 29: Viga engastada

Nesse exemplo, são comparados os dois esquemas de integração numérica: o tradicional e o proposto. Comparar-se-á o tempo necessário para solucionar o problema e a precisão obtida em ambos os métodos.

O gráfico apresentado pela Figura 30 exibe uma comparação entre o tempo necessário para a montagem do sistema de equações para o problema apresentado na Figura 29. Inicialmente, a viga é representada por 121 nós e não há diferença no tempo gasto por ambos os métodos (ambos montam o sistema de equações em 1 segundo). Contudo, a medida que o problema se torna mais robusto em relação ao número de pontos, percebe-se a diferença entre ambas os métodos de integração. Para uma discretização mais refinada (101×11) 1111 nós, a diferença é perceptível: a integração tradicional leva 38 segundos, enquanto a proposta 3 segundos. E para um número ainda maior de pontos a diferença torna-se realmente relevante, usando 4221 nós, a diferença no tempo de solução é 40 vezes menor.

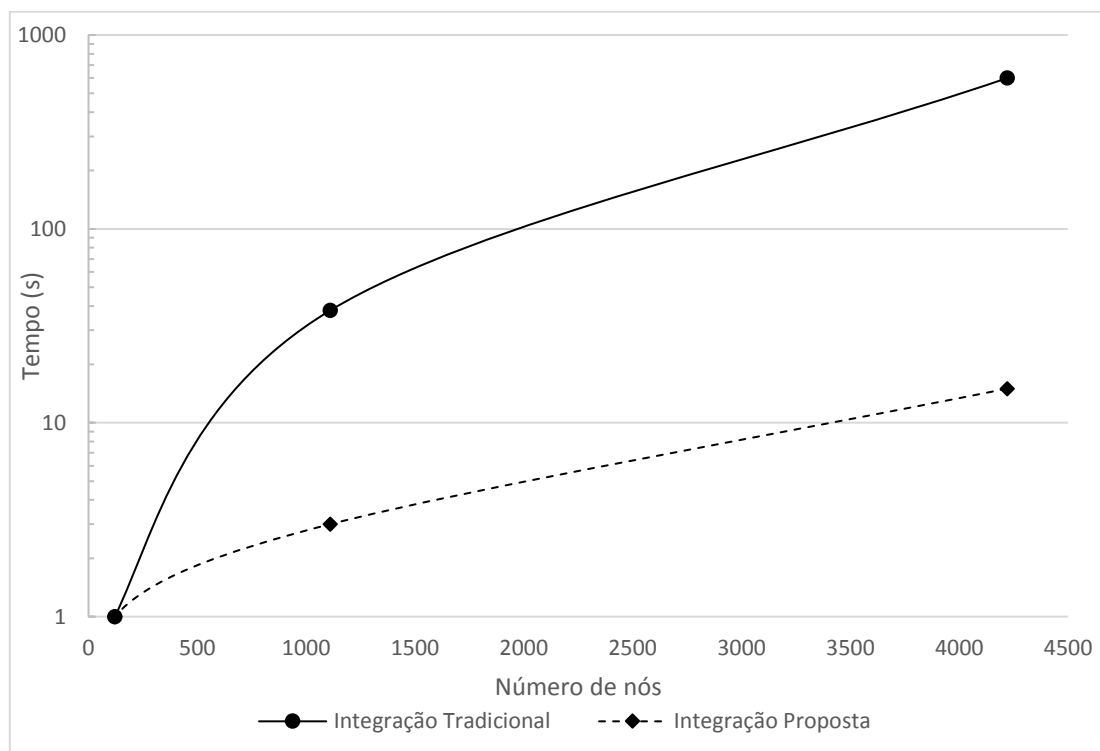


Figura 30: Comparativo do tempo necessário para a solução do exemplo 5.3

Contudo, há um declínio na precisão da resposta obtida, como mostrado na

Tabela 9.

Tabela 9: Erro do deslocamento vertical (u_y) do nó A utilizando técnicas de integração diferentes

Número de Pontos	Integração Tradicional			Integração Proposta		
	Analítico	Numérico	Erro	Analítico	Numérico	Erro
121	0.1667	0.1657	0.582%	0.1667	0.1638	1.720%
1111	0.1667	0.16668	0.006%	0.1667	0.1655	0.672%
4221	0.1667	0.1667	0.0003%	0.1667	0.16649	0.106%

5.4 PLACA TRAPEZOIDAL

Considerando uma placa trapezoidal fixada em ambas as bordas sobre os eixos dos planos e submetida a um carregamento axial unitário na direção do vetor \mathbf{n} como indicado na

Figura 32. Ademais, $E = 1.0$ e $\nu = 0.2$. A placa foi discretizada através de 90 pontos campo. A solução de referência para o problema foi obtida por meio da solução utilizando o software de elementos finitos ANSYS Mechanical APDL 19.0, por meio de uma discretização utilizando 7200 elementos do tipo SHELL 181, as soluções obtidas estão dispostas na

Figura 33. Nesse exemplo, além do uso de duas técnicas de integração diferentes, o parâmetro perturbado é o número de pontos de Gauss usado na integração numérica. Foram testadas soluções com: 2×2 , 4×4 , 8×8 , 10×10 , 12×12 , 16×16 , 20×20 e 24×24 pontos de Gauss.

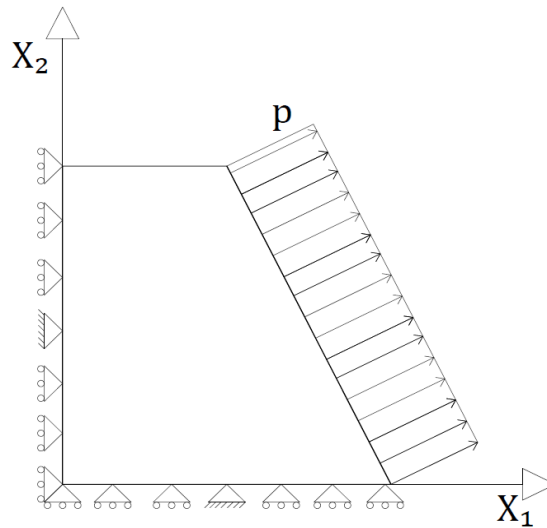


Figura 31: Placa trapezoidal

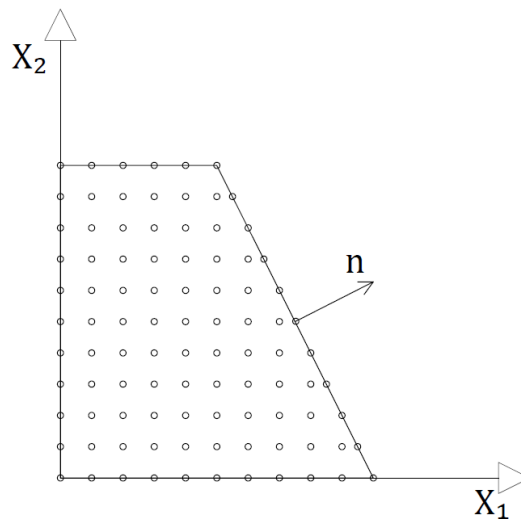


Figura 32: Discretização da placa trapezoidal

Os resultados obtidos podem ser observados na

Figura 34, na qual podemos perceber a convergência da solução para ambos os processos de integração. Contudo, a integração proposta apresenta um erro maior em relação à tradicional. É provável que o erro venha das funções de forma construídas por MQM, pois a função peso utilizada como ponderação do erro varia em função da distância, sendo assim, pontos de integração mais distantes do ponto central do subdomínio local do MQM podem apresentar erros maiores. E como o raio de integração da integração proposta é maior do que o da integração tradicional, os pontos de Gauss são

mais distantes do ponto base e, conseqüentemente, podem abrigar erros maiores. O erro maior também é perceptível no exemplo da viga em balanço.

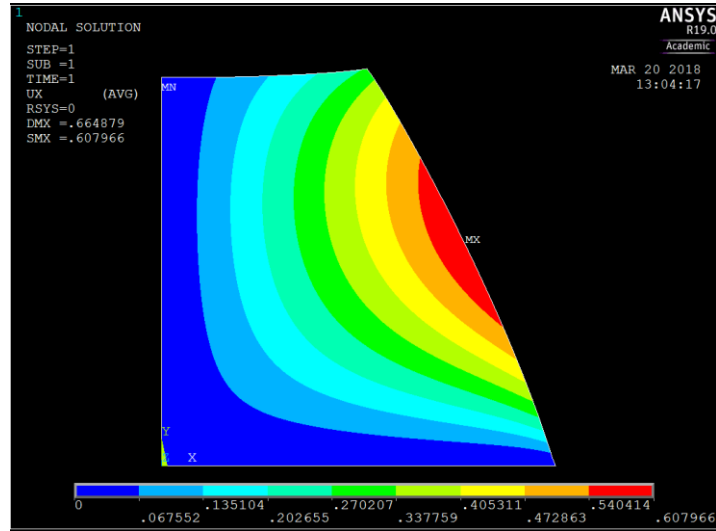


Figura 33: Solução de referência para o deslocamento u_x obtida pelo ANSYS

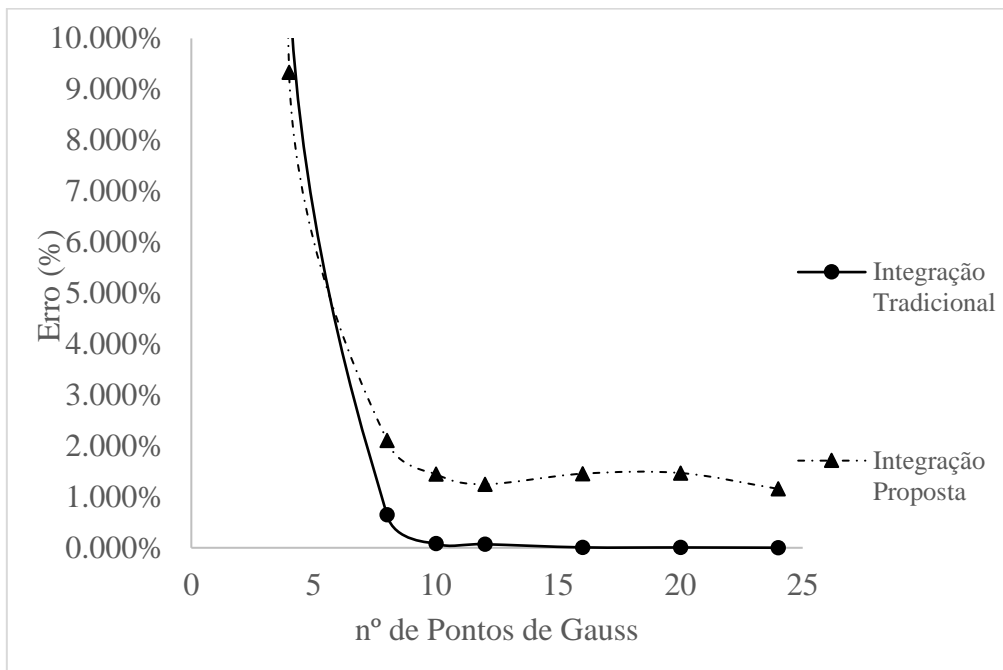


Figura 34: Gráfico do erro \times número de pontos de Gauss

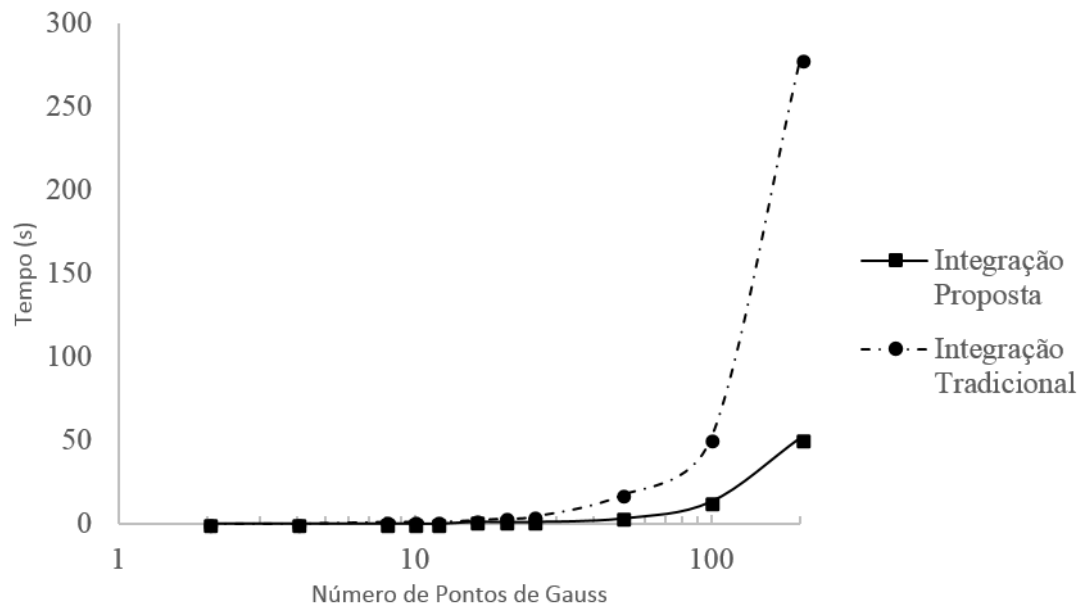


Figura 35: Número de Gauss \times Tempo de solução (s)

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

Nos últimos anos, métodos sem malha têm sido mais utilizados como uma alternativa confiável a outros métodos numéricos: Elementos Finitos e Diferenças Finitas.

Apesar dos avanços contínuos e relevantes em relação à precisão, eficiência computacional e estabilidade dos métodos sem malha, ainda há lacunas a serem estudadas a fim de solidificar a utilização dos métodos sem malha.

Este trabalho estudou especificamente um método sem malha, o Sem malha Local Petrov-Galerkin (MLPG). Ademais, a variação do MLPG utilizada nesse trabalho foi a MLPG-1, no qual a função de ponderação do MLPG é igual a função peso da aproximação por MQM.

O MLPG-1 mostrou-se um método apropriado para a solução das equações diferenciais que governam o problema da elasticidade 2D. As soluções encontradas foram condizentes com àquelas encontradas por meio de outros métodos numéricos e com a solução analítica.

A solução através do MLPG-1 apresentou-se estável em relação a alterações no número de pontos campo total, tal que a resposta aproximada convergia para a resposta analítica a medida em que o número de pontos campo usados para discretizar o problema aumentava.

Contudo, o número de pontos campo contidos dentro do suporte e, conseqüentemente as dimensões dos suportes locais, são parâmetros que causam alterações substanciais na solução. Devido ao caráter local do método MLPG, o aumento excessivo do raio de integração ou dos raios dos suportes locais causam a degeneração da solução. Ademais, há uma queda na eficiência computacional, pois diminui a esparsidade da matriz global

Em relação a imposição das condições de contorno essenciais, é possível afirmar que o método da colocação direta produz resultados mais precisos, em comparação com método da penalidade. Contudo, o método da colocação direta exige uma imposição direta por meio de uma substituição de linhas na matriz global \mathbf{K} . Além disso, o método de colocação diminui o número de integrais a serem solucionadas, diminuindo o número de operações necessárias para solucionar o problema, apesar de não ter havido uma diferença perceptível no tempo de solução para ambos os casos. O método da penalidade impõe as condições de contorno essenciais com uma menor precisão e só mostra funcionalidade para uma certa faixa de grandeza. Utilizando números muito pequenos ($< 10^3$) não ocorre a imposição, porém, para valores muito grandes ($> 10^{12}$) a solução obtida é trivial ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$).

A integração proposta e a tradicional divergem em dois pontos capitais: eficiência computacional e precisão da solução.

A eficiência computacional foi avaliada comparando a velocidade com a qual os métodos solucionavam os problemas. A medida em que os problemas se tornavam mais discretizados, por meio do aumento do número de pontos, a discrepância entre a velocidade de solução entre os dois métodos se tornava mais evidente, de tal forma que, a integração proposta foi até $40\times$ mais célere que seu contendidor. Essa diferença também foi constatada, em uma menor proporção, quando houve um aumento no número de pontos de Gauss utilizado na quadratura, apesar de que a diferença entre o tempo de solução dos métodos só é relevante para um número de pontos de Gauss exageradamente grande. Desta forma, é possível afirmar que o MLPG-1 utilizando integração proposta soluciona problemas de elasticidade 2D mais rapidamente do que o método tradicional de integração.

Contudo, a solução obtida pelo método proposto é pior. O erro obtido é maior devido à utilização do mesmo subdomínio como subdomínio de integração e de interpolação, pois o método dos mínimos quadrados móveis não está otimizado quando aplicado sobre os pontos de Gauss, visto que o ponto de Gauss não é mais o ponto central do subdomínio de interpolação. Sendo assim, há um erro intrínseco à aproximação maior

do que o apresentado pela integração tradicional. Isto posto, caso utilize-se da integração proposta, é preciso um número de pontos muito superior para obter-se a mesma ordem de precisão alcançada pelo método tradicional.

Assim sendo, o esquema proposto de integração exibe indícios de ser um método promissor. Apresentando uma velocidade muito superior e uma precisão aceitável, contudo a discretização precisa ser mais refinada a fim de obter uma precisão comparável com a apresentada pelo método tradicional.

Ademais, resultados recentes, ainda sendo estudados pelo LAMEC, mostram-se promissores utilizando um novo esquema de integração baseado no apresentado nesse trabalho. Mantendo ambos os subdomínios de integração e o de interpolação local concêntricos, porém diminuindo o raio do subdomínio de integração, como mostrado em Figura 36. Desta forma, a distribuição dos pontos de quadratura é realizada em uma área mais próxima ao ponto base, tornando essa quadratura uma representação mais correlata com a integração tradicional, melhorando a distribuição dos pesos dos pontos campo em relação aos pontos de Gauss.

Os resultados mais recentes mostram que essa integração mantém a eficiência computacional da integração proposta por esse trabalho, mas apresentando uma melhora significativa na precisão das soluções.

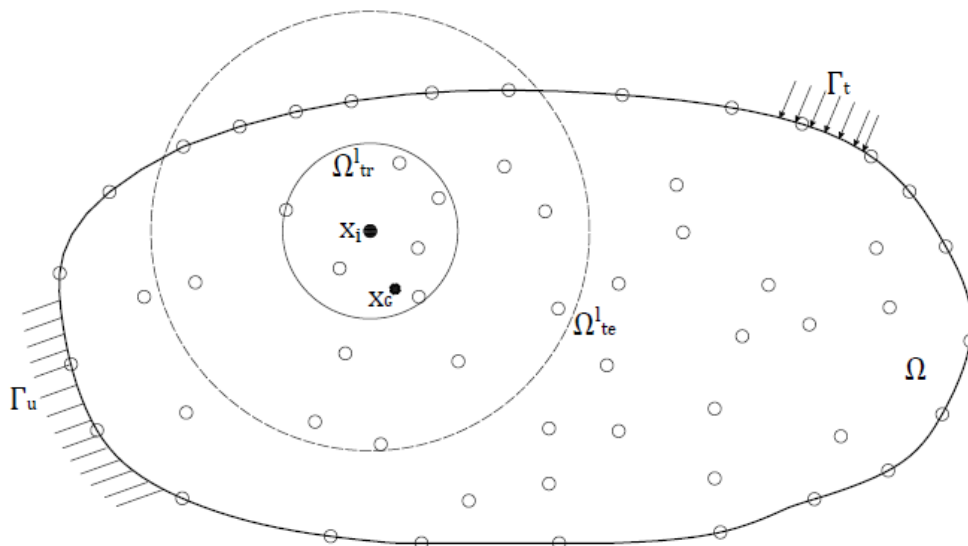


Figura 36: Novo esquema de integração em desenvolvimento no LAMEC

Sendo assim, a integração tradicional é uma alternativa viável para solucionar problemas que exigem um grande número de pontos, reduzindo expressivamente o custo computacional do MLPG-1, tornando o método sem malha mais exequível e comercialmente factível.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As recomendações que surgem dos estudos realizados nesse trabalho são exteriorizadas a seguir:

- Pode-se aplicar o esquema de integração proposto em uma das outras cinco vertentes do MLPG, a fim de analisar se há melhora quando troca-se a função de ponderação do MLPG;
- Estender a solução proposta para problemas de elasticidade tridimensional;
- Utilizar o MLPG-1 acoplado do esquema de integração proposto para solucionar outros tipos de problemas, especialmente problemas que apresentam solução laboriosa e intrincada quando solucionados por métodos que utilizam malha, como: fraturas, trincas e problemas que apresentam descontinuidades;
- Melhorar o armazenamento da matriz global, aproveitando de sua esparsidade;
- Utilizar o MLPG-1 acoplado do esquema de integração proposto para solucionar outros tipos de problemas, especialmente problemas que apresentam solução laboriosa e intrincada quando solucionados por métodos que utilizam malha, como: fraturas, trincas e problemas que apresentam descontinuidades.

7 BIBLIOGRAFIA

ATLURI, S. N., KIM, H. G. & CHO, J. Y., 1999. A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods. *Computational Methods*, Volume 24, pp. 348-372.

ATLURI, S. N. & SHEN, S., 2002. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. *Computer Modelling in Engineering and Sciences*, 3(1), pp. 11-51.

ATLURI, S. N. & ZHU, T., 1998. A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics. *Computational Mechanics*, Volume 22, pp. 117-127.

BABUŠKA, I. & MELENK, J. M., 1997. The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(4), pp. 727-758.

BEISSEL, S. & BELYTSCHKO, T., 1996. Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 139, pp. 49-74.

BELYTSCHKO, T., LU, Y. & GU, L., 1994. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), pp. 229-256.

BELYTSCHKO, T., ORGAN, D. & LIU, W. K., 1996. Smoothing and accelerated computations in the element free Galerkin method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 74, pp. 111-126.

BRAUM, J. & SAMBRIDGE, M., 1995. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, Volume 376, pp. 655-660.

CARPINTERI, A., FERRO, G. & VENTURA, G., 2002. The partition of unity quadrature in meshless methods.. *Computers and Structures*, Volume 54, pp. 987-1006.

CHEN, J. S., WU, C. T., YOON, S. & YOU, Y., 2001. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 50(2^a), pp. 435-466.

COSTA, E. G. A., 2013. *Aplicação dos Métodos dos Elementos de Contorno e das Soluções Fundamentais Usando Funções de Green para Problemas Acústicos*. Rio de Janeiro, RJ: Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ.

DA SILVA, K. I., 2010. *UMA APLICAÇÃO DA ESTRATÉGIA OMLS PARA ELASTOPLASTICIDADE DINÂMICA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO*. Rio de Janeiro, RJ: Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ.

DOLBOW, J. & BELYTSCHKO, T., 1998. An introduction to programming the meshless Element Free Galerkin method. *Computational Methods in Engineering*, Volume 5, pp. 207-241.

DOLBOW, J. & BELYTSCHKO, T., 1999. Numerical Integration of the Galerkin weak form in Meshfree Methods. *Computational Mechanics*, 23(3), pp. 219-230.

DUFLOT, M. & NGUYEN-DANG, H., 2002. A truly meshless Galerkin method based on a Moving Least Squares quadrature. *Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 18(6), pp. 441-449.

EOW, J. S., 2001. Electrostatic enhancement of coalescence of water droplets in oil: a review of the current understanding. *Chemical Engineering Journal*, pp. 173-192.

FONTES, E. F. F., SANTIAGO, J. A. F. & TELLES, J. C. F., 2013. On a regularized method of fundamental solutions coupled with the numerical Green's function procedure to solve embedded crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 37, pp. 1 - 7.

FONTES, E. F., SANTIAGO, J. A. F. & TELLES, J. C. F., 2014. *TÉCNICAS AVANÇADAS EM MÉTODOS VERDADEIRAMENTE SEM MALHA COM APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE E MECÂNICA DA FRATURA VIA SUPERPOSIÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA*. Rio de Janeiro, RJ: Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ.

- GINGOLD, R. A. & MONAGHAN, J., 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical*, Volume 181, pp. 375-389.
- KHOSRAVIFARD, A. & HEMATYAN, M. R., 2010. A new method for meshless integration in 2D and 3D Galerkin meshfree methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(1^a), pp. 30-40.
- KONDA, D., SANTIAGO, J. A. F. & TELLES, J. C. F., 2017. ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS COM CONSIDERAÇÃO DAS HIPÓTESES DE REISSNER ATRAVÉS DO MÉTODO SEM MALHA LOCAL DE PETROV-GALERKIN. *Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- LAGACE, P. A., 2001. *Structural Mechanics (Lecture Notes)*. Boston: MIT.
- LI, H. & MULAY, S. S., 2013. *MESHLESS METHODS AND THEIR NUMERICAL PROPERTIES*. 1 ed. Boca Raton: CRC Press.
- LI, H., NG, T. Y., CHENG, J. Q. & LAM, K. Y., 2003. Hermite–Cloud: a novel true meshless method. *Computational Mechanics*, 33(1), pp. 30-41.
- LIU, G. R., 2010. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. 2^a ed. Boca Raton: CRC Press.
- LIU, G. R. & GU, Y. T., 2001. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4), pp. 937-951.
- LIU, G. R. & GU, Y. T., 2005. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. 1^a ed. Netherlands: Springer.
- LIU, G. R. & XU, G. X., 2008. A gradient smoothing method (GSM) for fluid dynamics problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(10), pp. 1101-1133.
- LIU, W. K., ADEE, J. & JUN, S., 1993. Reproducing kernel and wavelets particle methods. *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, pp. 175-190.
- LUCY, L. B., 1977. “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”. *Astronomical*, Volume 82, pp. 1013-1024.

MAZZIA, A., FERRONATO, M. & GAMBOLATI, G., 2007. A comparison of numerical integration rules for the meshless local Petrov-Galerkin method. *Numerical Algorithms*, 45(1-4), pp. 61-74.

MELENK, J. M. & BABUŠKA, I., 1996. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. *Seminar für Angewandte Mathematik*.

MIERS, L. D. S., 2007. *FORMULAÇÕES NÃO-CONVENCIONAIS DE MÉTODOS DO TIPO MESHLESS BASEADOS NA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO..* Rio de Janeiro, RJ: Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ.

NAYROLES, B., TOUZOT, G. & VILLON, P., 1992. Generalizing the finite element. *Computational Mechanics*, Volume 10, pp. 307-318.

OÑATE, E., IDELSOHN, S. & ZIENKIEWICZ, O. C., 1996. A Finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22).

ORTIZ, A., PUSO, M. A. & SUKUMAR, N., 2010. Maximum-entropy meshfree method for compressible and near-incompressible elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 199, pp. 1859-1871.

ORTIZ, A., PUSO, M. A. & SUKUMAR, N., 2011. Maximum-entropy meshfree method for incompressible media problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 47, pp. 572-585.

PARK, C. K., 2009. *The development of a generalized meshfree approximation for solid and fracture analysis*. George Washington University, Washington, DC: s.n.

PARK, C. K., WU, C. T. & KAN, C. D., 2011. On the analysis of dispersion property and stable time step in meshfree method using the generalized meshfree approximation. *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 47, pp. 683-697.

PECHER, R., 2006. Efficient cubature formulae for MLPG and related methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 65, pp. 566-593.

PHILLIPS, D. R. & RAJU, I. S., 2002. *Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Bending Problems*, Hampton, Virginia: NASA - National Aeronautics and Space Administration.

RAJU, I. & PHILLIPS, D., 2002. *A meshless local Petrov-Galerkin for Euler-Bernoulli Beam Problems*. Hampton, Virginia: s.n.

RIBEIRO, F. L. B., 2013. *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*. Notas de Aula. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ.

ROSCA, V. E. & LEITAO, V. M. A., 2008. Quasi-Monte Carlo mesh-free integration for meshless weak formulations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(6^a), pp. 471-479.

SOARES, D., SLADEK, V. & SLADEK, J., 2012. Modified meshless local Petrov-Galerkin Formulations for Elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(12), pp. 1508-1828.

STROUD, A. H. & SECREST, D., 1966. *Gaussian Quadrature Formulas*. 1^a ed. s.l.:Prentice-Hall.

TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J., 1951. *Theory of Elasticity*. 2^a ed. s.l.:Mc Graw-Hill.

UGURAL, A. C. & FENSTER, S. K., 2003. *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 4^a ed. New Jersey: Prentice Hall.

VILLAÇA, S. F. & GARCIA, L. F. T., 1998. *Introdução à Teoria da Elasticidade*. 3^a ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ.

WANG, Q. X., LI, H. & LAM, K. Y., 2005. Development of a new meshless-point weighted least-squares (PWLS) method for computational mechanics. *Computational mechanics*, Volume 35, pp. 170-181.