COMPARAÇÃO ENTRE TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES EM ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Marcia Mayumi Imoto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

Rio de Janeiro
Março de 2017

COMPARAÇÃO ENTRE TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES EM ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Marcia Mayumi Imoto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

_____

Profª. Beatriz de Souza Leite Pires de Lima, D.Sc

_____

Profª. Solange Guimarães, D.Sc

_____

Prof. Afonso Celso de Castro Lemonge, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2017

Imoto, Marcia Mayumi

Comparação Entre Técnicas de Tratamento de Restrições em Algoritmos Evolutivos/ Marcia Mayumi Imoto. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

VIII, 64 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2017.

Referências Bibliográficas: p.42-44.

1. Otimização com Restrição. 2. Técnicas de Tratamento de Restrições. 3. Enxame de Partículas. 4. Evolução Diferencial. I. Lima, Beatriz de Souza Leite Pires de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

COMPARAÇÃO ENTRE TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES EM ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Marcia Mayumi Imoto

Março/2017

Orientador: Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

Programa: Engenharia Civil

Problemas de otimização com restrição são comumente encontrados em muitas áreas de conhecimento. Estão disponíveis várias abordagens para alcançar soluções confiáveis e viáveis para estes problemas. Nesse contexto, lidar com o problema implica em encontrar não apenas um algoritmo eficiente, mas também uma técnica adequada para lidar de forma confiável com soluções inviáveis. O presente trabalho investiga algumas abordagens bem conhecidas para lidar com restrições em algoritmos evolutivos, medindo seus desempenhos em dois algoritmos de busca diferentes, a Evolução Diferencial e o Enxame de Partículas. O bem conhecido conjunto de funções de *benchmark* do CEC 2006 foi o conjunto de problemas utilizados como estudos de caso. O trabalho destaca as características notáveis de cada técnica de tratamento como a sensibilidade à configuração dos parâmetros dos algoritmos, a estabilidade na entrega de soluções viáveis e a quantidade de melhores soluções.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

COMPARISON BETWEEN CONSTRAINT HANDLING TECHNIQUES IN EVOLUTIONARY ALGORITHMS

Marcia Mayumi Imoto

March/2017

Advisor: Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

Department: Civil Engineering

Constrained optimization problems are commonly found in many knowledge areas. Several approaches are available to reach reliable and feasible solutions for these problems. In this context, handling the problem imply in finding not only an efficient algorithm but also an adequate method to reliably handle infeasible solutions. The present work investigates some well-known approaches to handle constraints in evolutionary algorithms, measuring its performances in two different searching algorithms, differential evolution and particle swarm optimization. The well-known CEC 2006 suite of benchmark functions was the set of problems used as case studies. The work highlights the remarkable characteristics of each handling technique as the sensitiveness to the parameter configuration of the algorithms, the stableness in delivering feasible solutions and the amount of best overall solutions.

Sumário

Índice de Tabelas viii
1 Introdução 1
1.1 Objetivo 1
1.2 Organização do Trabalho 2
2 Enxame de Partículas 3
2.1 Parâmetros 5
2.1.1 Velocidade e Posição 5
2.1.2 Fator de Ponderação de Inércia 6
2.1.3 Coeficiente de Constrição 7
2.2 Topologia 7
3 Evolução Diferencial 9
3.1 Operadores 10
3.1.1 Reprodução e Mutação 11
3.1.2 Seleção 11
3.2 Parâmetros 12
3.3 Variantes do DE 12
4 Otimização com Restrição 13
5 Técnicas de Tratamento de Soluções 15
5.1 Técnicas do Enxame de Partículas 15
5.1.1 Técnicas de Tratamento da Posição 16
5.1.2 Técnicas de Tratamento da Velocidade 16
5.2 Técnicas da Evolução Diferencial 16
6 Técnicas de Tratamento de Restrições 18
6.1 Preferring Feasible Solution (PFS) 18
6.2 Stochastic Rank (SR) e Global Competitive Ranking (GCR) 19
6.3 Multiple Ranking (MR) 20
6.4 Adaptive Penalty Method (APM) 21
6.5 Balanced Ranking Method (BRM) 22
7 Metodologia 24
8 Experimentos 27
9 Resultados 28
10 Análise dos Resultados 37
11 Conclusão 41

1.1 Trabalhos Futuros 41
Referências 43
Anexo 46

Índice de Tabelas

Tabela 1- Configurações do Enxame de Partículas 24
Tabela 2- Configurações da Evolução Diferencial 24
Tabela 3- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 1) 28
Tabela 4- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 1) 29
Tabela 5- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 2) 30
Tabela 6- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 2) 30
Tabela 7- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 3) 31
Tabela 8- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 3) 32
Tabela 9- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 4) 33
Tabela 10- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 4) 3434
Tabela 11- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 5) 35
Tabela 12- Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 5) 35

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, existem diversos algoritmos estocásticos baseados em população que visam resolver problemas de otimização. Entre os mais usados e conhecidos estão: o Algoritmo Genético de Holland (1975), o Enxame de Partículas de Kennedy e Eberhart (1995) e a Evolução Diferencial de Storn e Price (1995). Em sua forma original, eles podem oferecer excelentes resultados para problemas sem restrições, entretanto, são incapazes de otimizar funções com restrição, que englobam a maioria dos problemas reais.

Para solucionar essa questão, diversas técnicas foram criadas, como: técnica de preservação de soluções viáveis, que rejeita soluções inviáveis e usa apenas as viáveis, técnica de tratamento de restrição, que incorpora as restrições à função de aptidão, transformando um problema com restrição em um problema sem restrição, e técnica de reparação de soluções inviáveis, que torna uma solução inviável em uma viável alterando as variáveis que geram a inviabilidade. Dentre elas, a técnica mais utilizada é a de tratamento de restrições e será o foco deste trabalho.

1.1 Objetivo

Esta dissertação teve origem em um trabalho que focava na técnica de tratamento de restrições Balanced Ranking Method (Rodrigues et al., 2015). A técnica é relativamente nova e, no momento do trabalho, seu autor a havia testado apenas no Algoritmo Genético. A ideia era verificar o seu desempenho em relação a técnicas bem conhecidas, como o Stochastic Ranking (Runarsson et al., 2000), usando o Enxame de Partículas como algoritmo de otimização.

Ao longo dos experimentos ficou claro que os resultados obtidos, apesar de serem bons, representavam casos muito específicos. A quantidade de variáveis vai além dos parâmetros definidos *a priori* pelo usuário que geralmente recebem atenção, como o tamanho da população e o coeficiente de penalidade. Definir como a população vai ser iniciada, como os indivíduos serão selecionados, como os indivíduos serão tratados ao saírem do espaço de busca, qual será condição de parada, são questões em relação ao processo de otimização que podem alterar consideravelmente os resultados com as diferentes técnicas de tratamento de restrições.

Diante disso, o objetivo desta dissertação é implementar, executar e comparar seis técnicas de restrições, Balanced Ranking Method, Adaptive Penalty Method, Preferring Feasible Solution, Stochastic Rank, Global Competitive Ranking e Multiple Ranking, em dois algoritmos de otimização, Enxame de Partículas e Evolução Diferencial, com diferentes configurações (partes do algoritmo de otimização). Dessa forma, é possível observar os resultados (melhor, média e quantidade de soluções viáveis) e os comportamentos peculiares das técnicas de tratamento de restrições.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: os dois primeiros capítulos abordam os algoritmos de otimização que foram usados nos experimentos. O capítulo 2 é sobre o Enxame de Partículas e o capítulo 3 é sobre a Evolução Diferencial. O capítulo 4 apresenta o problema da otimização com restrição, e as técnicas de tratamento de restrições são descritas nos dois capítulos seguintes. O capítulo 5 é sobre as diferentes técnicas de tratamento de soluções, tanto para o Enxame de Partículas quanto para a Evolução Diferencial. O capítulo 6 é sobre as técnicas de tratamento de restrições. Nos capítulos 7 e 8 são definidos, respectivamente, as configurações e os parâmetros que foram usados nos experimentos. O capítulo 9 apresenta um conjunto de tabelas de todas as configurações testadas, e que, em seguida, são analisadas no capítulo 10. E, finalmente, o capítulo 11 conclui o trabalho.

2 ENXAME DE PARTÍCULAS

O Enxame de Partículas (Particle Swarm Optimization ou PSO) é um método de otimização proposto por Kennedy e Eberhart (1995). Foi influenciado por metodologias da computação natural, como o Algoritmo Genético, que buscam, na natureza, padrões que ajudem na solução de problemas.

O algoritmo foi inspirado no comportamento social de animais que agem em grupos, como bando de pássaros e cardumes de peixes. Esses grupos são capazes de sincronizar seus movimentos para fugir de predadores, buscar alimentos e parceiros. A fim de evitar colisões entre indivíduos próximos, é necessário que cada membro do grupo mantenha a sua direção e a sua velocidade similares a de seus vizinhos. Para que todos saibam o caminho que devem seguir na busca por alimento e abrigo, o conhecimento de cada indivíduo é compartilhado entre o grupo. Essas observações ajudaram na definição de regras que serviram para modelar o algoritmo.

No PSO, o grupo ou população é chamado de enxame e cada indivíduo (solução) é uma partícula. Cada partícula possui um vetor de velocidade e um vetor de posição, que são influenciados por suas experiências anteriores e de sua vizinhança. Além disso, cada partícula possui uma aptidão, o que permite avaliar o seu desempenho em relação às demais partículas do enxame. Esses cinco valores (velocidade, posição, aptidão, melhor posição da partícula e melhor posição de sua vizinhança) associados a uma partícula são atualizados a cada iteração do algoritmo, simulando a sua constante movimentação e compartilhamento de informação. Os passos de cada iteração podem ser observados a seguir:

Pseudocódigo do PSO:

---

1. $t = 0$
2. for $i = 1$ to n
3. Inicie a posição $\vec{x}_{i,t}$
4. Inicie a velocidade $\vec{v}_{i,t}$
5. end for
6. do
7. $t = t + 1$

8. for $i = 1$ to n
9. Calcule a aptidão $f(\vec{x}_{i,t})$
10. if $f(\vec{x}_{i,t}) < f(\vec{p}_{i,t})$
11. $\vec{p}_{i,t} = \vec{x}_{i,t}$
12. end if
13. if $f(\vec{p}_{i,t}) < f(\vec{p}_g)$ then
14. $\vec{p}_g = \vec{p}_{i,t}$
15. end if
16. end for
17. for $i = 1$ to n
18. Atualize a velocidade $\vec{v}_{i,t}$ de acordo com a equação (eq.1)
19. Atualize a posição $\vec{x}_{i,t}$ de acordo com a equação (eq.2)
20. if $\vec{x}_{i,t} \notin S$ then
21. Aplique a técnica de tratamento de partícula
22. end if
23. end for
24. while (Critério de parada não for atingido)

Onde S é o espaço de busca, i é o índice da partícula, t é o instante de tempo atual, n é o tamanho da população, $\vec{x}_{i,t}$ é a posição da partícula i no instante t, $\vec{v}_{i,t}$ é a velocidade da partícula i no instante t, $\vec{p}_{i,t}$ é a melhor posição encontrada pela partícula i até o instante t, $\vec{p}_g$ é a melhor posição encontrada pelo enxame, $f(\vec{x}_{i,t})$ é a aptidão de $\vec{x}_{i,t}$, $f(\vec{p}_{i,t})$ é a aptidão de $\vec{p}_{i,t}$, $f(\vec{p}_g)$ é a aptidão de $\vec{p}_g$.

Na fase inicial, é criado o enxame com n partículas, que são posicionadas em um espaço de busca S de um determinado problema de otimização com função objetivo $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. É comumente usada a geração aleatória das partículas dentro do espaço de busca.

Cada partícula é avaliada e a sua aptidão $f(\vec{x}_{i,t})$ é comparada com a aptidão $f(\vec{p}_{i,t})$ de sua melhor posição já registrada $\vec{p}_{i,t}$. Essa última aptidão também é comparada com a aptidão $f(\vec{p}_g)$ da melhor posição $\vec{p}_g$ encontrada pelo enxame. Em problemas de minimização, uma posição $\vec{x}_1$ é considerada melhor do que $\vec{x}_2$ se $f(\vec{x}_1)$ for menor do que

$f(\vec{x}_2)$. Dessa forma, se $f(\vec{x}_{i,t})$ for menor do que $f(\vec{p}_{i,t})$, $\vec{p}_{i,t}$ passa a ser igual a $\vec{x}_{i,t}$, e, se $f(\vec{p}_{i,t})$ for menor do que $f(\vec{p}_g)$, $\vec{p}_g$ passa a ser igual a $\vec{p}_{i,t}$.

Em seguida, a velocidade $\vec{v}_{i,t}$ e a posição $\vec{x}_{i,t}$ de cada partícula são atualizadas. Se a partícula sair do espaço de busca, é aplicada uma técnica de tratamento para gerar novas posição e velocidade.

No final da iteração, é verificado se o critério de parada foi atingido. Se ele for satisfeito, o ciclo termina e a melhor solução encontrada é o $\vec{p}_g$.

2.1 Parâmetros

O PSO, em sua versão clássica, possui alguns parâmetros que precisam ser definidos antes da execução do algoritmo. O tamanho da população n é um desses parâmetros e seu valor muitas vezes é definido empiricamente, variando de acordo com o problema de otimização. O critério de parada é um valor ou um conjunto de valores que devem ser atingidos para finalizar o algoritmo. A quantidade de iterações e a quantidade de cálculos de função objetivo são dois critérios de parada bastante utilizados. Alguns parâmetros estão ligados ao problema de otimização, como a dimensão das partículas e os limites do espaço de busca.

2.1.1 Velocidade e Posição

O PSO original não possui operadores de seleção, reprodução e mutação. As partículas estão em constante movimento, o que significa que todas são atualizadas a cada iteração. A alteração de sua posição depende da atualização da velocidade. O cálculo é feito da seguinte forma:

$$\vec{v}_{i,t+1} = \vec{v}_{i,t} + \varphi 1 \,.\, rand1 \,.\, (\vec{p}_{i,t} - \vec{x}_{i,t}) + \varphi 2 . rand2 . (\vec{p}_g - \vec{x}_{i,t}) \quad (1)$$

$$\vec{x}_{i,t+1} = \vec{x}_{i,t} + \vec{v}_{i,t+1} \quad (2)$$

O primeiro termo da parte a direita da equação 1 é a inércia. Ela representa a necessidade da partícula em manter-se constante, com a mesma velocidade, evitando mudanças repentinas de direção. A inércia é a responsável por garantir a busca local e a global. O segundo termo é o componente cognitivo, representa a tendência do indivíduo a voltar para a melhor posição encontrada por ele. O terceiro termo é o componente social,

representa a tendência do indivíduo a voltar para a melhor posição encontrada pela sua vizinhança. Os $rand1$ e $rand2$ garantem a aleatoriedade necessária para que as partículas não voltem exatamente para as melhores posições e sim para áreas ao redor deles. Já as constantes $\varphi 1$ e $\varphi 2$ indicam o grau de confiança da partícula dado a si mesma e a sua vizinhança, respectivamente.

Para evitar velocidades muito altas ou baixas, que geram as chamadas "explosões" das partículas e impedem a convergência do enxame, é comum elas serem limitadas a um certo intervalo, que, em geral, é o mesmo do espaço de busca. Tal limitação é conhecida como "velocity clamping". Porém, mesmo limitando o deslocamento, o enxame ainda pode não convergir, uma vez que todas as partículas podem estar com a velocidade igual a máxima definida. Por esse motivo foram criados os controladores de velocidade, como o fator de ponderação de inércia e o coeficiente de constrição.

2.1.2 Fator de Ponderação de Inércia

Em 1998, Shi e Eberhart apresentaram o fator de ponderação de inércia, representado pela letra grega ω. O fator é empregado no cálculo da velocidade e pode ser visto a seguir:

$$\vec{v}_{i,t+1} = \omega.\vec{v}_{i,t} + \varphi 1\,.rand1\,.\left(\vec{p}_{i,t} - \vec{x}_{i,t}\right) + \varphi 2.rand2.(\vec{p}_g - \vec{x}_{i,t}) \quad (3)$$

$$\omega = \omega_{max} - Iteracao_{atual}\left(\frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{Iteracao_{max}}\right) \quad (4)$$

Onde ω é o fator de ponderação de inércia da iteração atual, ω_{max} e ω_{min} são, respectivamente, o maior e menor valor conferido a inércia, $Iteracao_{atual}$ é o número da iteração corrente e $Iteracao_{max}$ é o número máximo de iterações de uma rodada.

A função do fator ω é controlar a importância da velocidade da iteração anterior no deslocamento da partícula. Valores altos dão uma alta importância e garantem uma maior exploração, enquanto valores baixos a diminuem e garantem uma maior explotação. Dessa forma, ω deve começar com um valor alto e diminuir ao longo do tempo até chegar a um valor mínimo. Em geral, ω_{max} é igual a 0.9 e ω_{min} é igual a 0.4 (Eberhart et al., 2000). A equação 4 promove o equilíbrio entre busca local e global com o decréscimo gradual de ω ao longo das iterações.

Apesar de ajudar na convergência do enxame, o fator de ponderação de inércia tem um aspecto negativo que é a perda da capacidade de exploração em estágios avançados da busca, o que significa que o algoritmo pode ficar estagnado em mínimos locais.

2.1.3 Coeficiente de Constrição

O coeficiente de constrição, representado pela letra grega χ, foi apresentado por Clerc em 1999. Da mesma forma que o fator de ponderação de inércia, o coeficiente foi criado para garantir a convergência do enxame, mas de uma forma mais natural, sem depender da iteração. A sua aplicação na velocidade e o seu cálculo podem ser vistos a seguir:

$$\vec{v}_{i,t+1} = \chi.\left((\vec{v}_{i,t} + \varphi 1\,.rand1\,.\left(\vec{p}_{i,t} - \vec{x}_{i,t}\right) + \varphi 2.rand2.\left(\vec{p}_g - \vec{x}_{i,t}\right)\right) \quad (5)$$

Onde:

$$\chi = \begin{cases} \frac{2k}{\left|2-\varphi-\sqrt{\varphi^2-4\varphi}\right|} & se\ \varphi > 4 \\ \sqrt{k} & caso\ contrário \end{cases} \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi 1 + \varphi 2 \quad (7)$$

$$k \in [0,1]$$

Baseados na análise de convergência, Clerc e Kennedy sugerem que $\varphi 1$e $\varphi 2$ sejam iguais a 2.05 e k seja igual a 1, o que resulta em χ igual a 0.7289. Dessa forma, a velocidade anterior é multiplicada por 0.7289, enquanto os componentes cognitivos e sociais são multiplicados por 0.7289 * 2.05.

2.2 Topologia

Na atualização da velocidade, cada partícula leva em consideração a sua própria experiência e a de sua vizinhança. A topologia representa esse relacionamento social entre partículas, e mostra graficamente com quem elas vão compartilhar informações (Eberhart et al., 1996). Existem diversas topologias cada uma com suas vantagens e desvantagens. Duas das mais conhecidas são:

- Topologia estrela ou global best (gbest): todas as partículas estão conectadas entre si. Quando uma partícula atualiza a sua melhor posição, todo o enxame fica rapidamente sabendo. A convergência é rápida, pois todas as partículas se deslocam influenciadas pela mesma posição (gbest). Porém, o enxame é facilmente atraído para mínimos locais.

- Topologia anel ou local best (lbest): cada partícula está conectada apenas aos seus dois vizinhos adjacentes, o anterior e o posterior a ela. Quando uma partícula atualiza a sua melhor posição, apenas os seus dois vizinhos ficam sabendo de imediato. A passagem da informação para o resto do enxame é lenta, mas o algoritmo é mais capaz de sair de mínimos locais do que na versão gbest.

3 EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

A Evolução Diferencial (Differential Evolution ou DE) foi criada por Storn e Price e apresentada em 1995. A proposta era gerar um algoritmo de otimização capaz de satisfazer demandas comumente feitas pelos usuários. Ou seja, um algoritmo de fácil implementação e uso, paralelizável e com boa capacidade de convergência. O DE pode ser escrito em poucas linhas de código, possui poucos parâmetros definidos pelo usuário, pode ser parcialmente paralelizável e é capaz de chegar rapidamente e de forma consistente no ótimo global em diversas funções.

Pseudocódigo da variante DE/rand/1/bin:

---

1. $t = 0$
2. for $i = 1$ to n
3. Inicie o vetor alvo $\vec{x}_{i,t}$
4. end for
5. for $i = 1$ to n
6. Calcule a aptidão do vetor alvo: $f(\vec{x}_{i,t})$
7. end for
8. do
9. for $i = 1$ to n
10. Selecione 3 vetores aleatórios, sendo: $\vec{x}_{r1,t} \neq \vec{x}_{r2,t} \neq \vec{x}_{r3,t} \neq \vec{x}_{i,t}$
11. Selecione 1 inteiro aleatório no intervalo $[1, D]$: $jrand$
12. for $j = 1$ to D
13. if $rand \leq Cr$ or $j = jrand$
14. $v_{i,j,t} = \mathrm{x}_{r1,j,t} + F.(x_{r2,j,t} - x_{r3,j,t})$
15. if $v_{i,j,t} \notin S$
16. Aplique a técnica de tratamento de vetores
17. end if
18. $u_{i,j,t+1} = v_{i,j,t}$
19. else
20. $u_{i,j,t+1} = x_{i,j,t}$

21. end if
22. end for
23. end for
24. for $i = 1$ to n
25. Calcule a aptidão do vetor experimental: $f(\vec{u}_{i,t})$
26. if $f(\vec{u}_{i,t}) < f(\vec{x}_{i,t})$
27. $\vec{x}_{i,t+1} = \vec{u}_{i,t}$
28. else
29. $\vec{x}_{i,t+1} = \vec{x}_{i,t}$
30. end if
31. end for
32. $t = t + 1$
33. while (Critério de parada não for atingido)

Onde S é o espaço de busca, n é o tamanho da população, t é o instante de tempo atual, i é o índice do vetor, j é o índice de um elemento de um vetor, D é a quantidade de elementos de um vetor, $rand$ é um número real aleatório no intervalo $[0,1]$, $jrand$ é um inteiro aleatório no intervalo $[1, D]$, Cr é a taxa de reprodução, F é o fator ou peso diferencial, $\vec{x}_{i,t}$ é o vetor alvo i no instante t, $\vec{u}_{i,t}$ é o vetor experimental i no instante t, $\vec{v}_{i,t}$ é o vetor mutante i no instante t, $\vec{x}_{r1,t}$ é o vetor base da mutação e é um vetor aleatório, $\vec{x}_{r2,t}$ e $\vec{x}_{r3,t}$ são vetores aleatórios no instante t, $f(\vec{x}_{i,t})$ é a aptidão de $\vec{x}_{i,t}$, $f(\vec{u}_{i,t})$ é a aptidão de $\vec{u}_{i,t}$.

3.1 Operadores

Em sua busca pela melhor solução, o algoritmo submete a população a três operadores: reprodução, mutação e seleção. A forma como são aplicados é explicado a seguir.

Na fase inicial do algoritmo, é criada uma população com n vetores de D variáveis, que são posicionados em um espaço de busca S de um determinado problema de otimização com função objetivo $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Em seguida, é calculada a aptidão $f(\vec{x}_{i,t})$ de cada vetor. A partir dessa fase, o algoritmo entra em um ciclo que só termina se o critério de parada for atingido.

No passo seguinte, são gerados os vetores experimentais $\vec{u}_{i,t}$ através da reprodução e da mutação, que posteriormente serão usados na seleção.

3.1.1 Reprodução e Mutação

A reprodução inicia com seleção aleatória, para cada vetor alvo $\vec{x}_{i,t}$, de três vetores diferentes da população corrente ($\vec{x}_{r1,t}$, $\vec{x}_{r2,t}$, $\vec{x}_{r3,t}$) e de um inteiro no intervalo $[1, D]$ ($jrand$). Para cada elemento j de um vetor experimental $\vec{u}_{i,t}$, existe a possibilidade dele ser igual ao elemento j do vetor alvo $\vec{x}_{i,t}$ ou igual ao elemento j do vetor mutante $\vec{v}_{i,t}$.

$$u_{i,t+1} = \begin{cases} v_{i,j,t} & \text{se } rand \leq Cr \text{ ou } j = jrand \\ x_{i,j,t} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

Onde

$$v_{i,j,t} = \mathrm{x}_{r1,j,t} + F(\mathrm{x}_{r2,j,t} - \mathrm{x}_{r3,j,t}) \quad (9)$$

No DE, todos os indivíduos ou vetores da população são usados na reprodução. A ocorrência de um cruzamento entre vetor alvo e vetor mutante depende de uma taxa predefinida Cr e de um valor aleatório $jrand$. Esse último garante que pelo menos um elemento do vetor experimental seja igual ao do vetor mutante, mantendo-o sempre diferente do vetor alvo.

O grande diferencial do algoritmo é a forma que o vetor mutante é criado. A estratégia básica é usar a diferença entre vetores aleatórios para gerar perturbações em um outro vetor, resultando no vetor mutante. O número de vetores envolvidos e qual vetor sofrerá a perturbação são fatores que podem variar.

3.1.2 Seleção

Uma vez gerados os vetores experimentais $\vec{u}_{i,t}$, é calculada a aptidão $f(\vec{u}_{i,t})$ de cada um deles. Em seguida, a aptidão do vetor experimental de índice i é comparada com a aptidão do vetor alvo $f(\vec{x}_{i,t})$ de mesmo índice i. Em um problema de minimização, se a aptidão do vetor experimental for menor do que a do vetor alvo, o vetor resultante $f(\vec{x}_{i,t+1})$ é igualado ao vetor experimental. Caso contrário, o vetor resultante é igualado ao vetor alvo. O conjunto de vetores resultantes passa a ser o conjunto de vetores alvos

na iteração seguinte.

3.2 Parâmetros

O DE não possui muitos parâmetros que precisam ser pré-definidos, o que o torna bastante "amigável" com o usuário. O tamanho da população n varia de acordo com o problema. É recomendável que n seja maior ou igual a 4, para garantir que haja vetores suficientes para a mutação. Em geral, um valor entre $5 * D$ e $20 * D$ é suficiente. O fator diferencial F deve ser um número real entre [0,2]. Ele define a influência que a diferença de vetores exercerá no cálculo do vetor mutante. A taxa de reprodução Cr é um número real entre [0,1]. Valores altos resultam em rápida convergência da população e são bons para verificar se é possível achar rapidamente uma solução.

Assim como no Enxame de Partículas, no DE é necessário definir o critério de parada, a dimensão dos vetores e os limites do espaço de busca. Além dos parâmetros, o usuário deve definir a variante do DE a ser usada. Um das mais usadas é variante DE/rand/1/bin definida no pseudocódigo. Outras variantes são brevemente descritas a seguir.

3.3 Variantes do DE

O DE possui diversas variantes que são representadas seguindo o padrão DE/x/y/z (Mezura-Montes et al., 2006). Onde x representa o vetor base que sofrerá a mutação, podendo ser "rand" (um vetor aleatório é escolhido na população corrente) ou "best" (o vetor de melhor aptidão da população corrente), y é o número de perturbações que serão geradas no vetor mutante, em geral, 1 ou 2, e z é o tipo de reprodução, sendo "bin" (binária) ou "exp" (exponencial). Algumas das variações podem ser vistas a seguir:

DE/rand/1/z: $v_{i,G+1} = x_{r1,G} + F\left(x_{r2,G} - x_{r3,G}\right)$

DE/rand/2/z: $v_{i,G+1} = x_{r1,G} + F\left(x_{r2,G} + x_{r3,G} - x_{r4,G} - x_{r5,G}\right)$

DE/best/1/z: $v_{i,G+1} = x_{best,G} + F\left(x_{r1,G} - x_{r2,G}\right)$

DE/best/2/z: $v_{i,G+1} = x_{best,G} + F\left(x_{r1,G} + x_{r2,G} - x_{r3,G} - x_{r4,G}\right)$

DE/current-to-rand/1/z: $v_{i,G+1} = x_{i,G} + F\left(x_{r1,G} - x_{i,G}\right) + F\left(x_{r2,G} - x_{r3,G}\right)$

DE/current-to-best/1/z: $v_{i,G+1} = x_{i,G} + F\left(x_{best,G} - x_{i,G}\right) + F\left(x_{r1,G} - x_{r2,G}\right)$

4 OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO

Na otimização com restrição, as soluções devem satisfazer as condições impostas pelo problema para serem consideradas viáveis. Muitos problemas possuem, pelo menos, a restrição conhecida como *box*, que define os limites de seu espaço de busca. Também é possível que eles possuam restrições de igualdade e desigualdade, que definem dependências entre suas variáveis. Problemas de minimização com restrição são escritos da seguinte forma:

Minimizar $f(\vec{x})$

Sujeito às seguintes restrições:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \qquad i = 1, \dots, n \qquad \text{restrição de desigualdade} \qquad (10)$$

$$\mathrm{h}_j(\vec{x}) = 0 \qquad j = 1, \dots, m \qquad \text{restrição de igualdade} \qquad (11)$$

$$lb_k < x_k < ub_k \qquad k = 1, \dots, p \qquad \text{restrição } box \qquad (12)$$

Onde f é a função objetivo, $\vec{x}$ é uma solução, i é o índice de uma restrição de desigualdade, n é a quantidade de restrições de desigualdade, j é o índice de uma restrição de igualdade, m é a quantidade de restrições de igualdade, k é o índice de uma variável da solução, p é a quantidade de variáveis nas soluções (dimensão), lb_k é o limite inferior da variável de índice k, ub_k é o limite superior da variável de índice k.

Problemas com restrição de igualdade podem ser de difícil solução, já que ela exige que um valor específico seja atingido. Visando facilitar a busca por soluções viáveis, as restrições de igualdade são transformadas em restrições de desigualdade adicionando uma pequena tolerância $\varepsilon > 0$.

$$\left|\mathrm{h}_j(\vec{x})\right| - \varepsilon \leq 0 \qquad (13)$$

Muitos algoritmos de otimização, como as versões clássicas do Enxame de Partículas e da Evolução Diferencial, não possuem estratégias para solucionar problemas que envolvem restrições de igualdade e de desigualdade, uma vez que não diferenciam soluções viáveis de solução inviáveis. Por isso, é necessário que alguma técnica seja aplicada para que esses algoritmos possam tratar os problemas com restrição como se fossem problemas sem restrição.

Atualmente, existem muitas estratégias para tratar as restrições de igualdade e de desigualdade, como função de penalidade, algoritmo de reparação e separação do objetivo e das restrições. Esta dissertação foca apenas nas funções de penalidade, que serão abordadas com mais detalhes na seção 6.

5 TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE SOLUÇÕES

Em problemas que o espaço de busca é limitado entre determinados valores, é possível que um indivíduo (vetor de D elementos) saia dele ao ser atualizado. Por esse motivo, é necessário implementar uma estratégia que trate os indivíduos violadores, trazendo-os de volta para o espaço definido.

Uma estratégia muito usada em diversos algoritmos de otimização é a de reparação do indivíduo. Nela, a posição do indivíduo violador é alterada para outra que respeite os limites definidos. Existem algumas técnicas que fazem essa reparação, uma delas, é a técnica que desloca o indivíduo para o limite mais próximo dele.

$$x_{i,j,t} = \begin{cases} lb_j & \text{se } x_{i,j,t} < lb_j \\ ub_j & \text{se } x_{i,j,t} > ub_j \\ x_{i,j,t} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

Onde i é o índice do indivíduo, j é o índice do elemento do indivíduo, t é o instante de tempo, $x_{i,j,t}$ é o elemento j do indivíduo i no instante t, lb_j é o limite inferior do elemento j, ub_j é o limite superior do elemento j.

O problema dessa técnica é a possibilidade do indivíduo ser posicionado próximo de um mínimo local. Se não houver um indivíduo com melhor aptidão do que o indivíduo reparado, pode ocorrer da população inteira ser atraída para essa posição. Isso demonstra a importância da escolha da técnica de tratamento de indivíduos, uma vez que ela pode influenciar drasticamente a população.

5.1 Técnicas do Enxame de Partículas

A definição da velocidade máxima, o fator de ponderação de inércia e o coeficiente de constrição ajudam a atenuar o número de ocorrências dessas violações, mas não são capazes de impedi-las.

Kennedy, um dos autores do Enxame de Partículas sugere uma estratégia diferente da reparadora. Ao invés de alterar a velocidade e a posição, ele sugere manter os dois valores e substituir a aptidão da partícula por um valor muito alto. Desse modo, $\vec{p}_i$ (melhor posição encontrada pela partícula) e $\vec{p}_g$ (melhor posição encontrada pelo exame) não serão substituídos na iteração corrente. Nas iterações seguintes, a partícula será atraída por $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_g$, tendendo a voltar para o espaço de busca.

No PSO, a reparação de uma partícula envolve a alteração de dois valores: posição e velocidade. Para cada um, já há um conjunto de técnicas conhecidas (Helwig et al., 2012). Algumas estão listadas a seguir:

5.1.1 Técnicas de Tratamento da Posição

- Reinicialização: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, é substituído por um valor aleatório dentro dos limites estabelecidos.
- Limite mais próximo: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, é substituído pelo limite mais próximo a ele.
- Inalterada: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, não é alterado, permanecendo com o valor que viola os limites. Nesse caso, é necessária a alteração da velocidade da partícula.

5.1.2 Técnicas de Tratamento da Velocidade

- Zero: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, tem a sua velocidade igualada a zero.
- Inalterada: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, não sofre alteração em sua velocidade. Nesse caso, é necessária a alteração da posição da partícula.

Com a inicialização aleatória da posição e da velocidade, existe uma boa chance das partículas saírem do espaço já nas primeiras iterações (Helwig et al., 2012). Por isso, a escolha do tratamento deve ser bem pensada, uma vez que refletirá no comportamento inicial do enxame e, consequentemente, na qualidade da convergência.

5.2 Técnicas da Evolução Diferencial

Assim como no Enxame de Partículas, o elemento $x_{i,j,t}$ que violar os limites impostos pelo problema deve ser tratado. Abaixo estão algumas das técnicas conhecidas (Arabas et al., 2010):

- Limite mais próximo: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, é substituído pelo limite mais próximo a ele.
- Nova amostra: para cada elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, é realizada

uma nova mutação, gerando um elemento mutante $v_{i,j,t}$. Se $v_{i,j,t}$ estiver fora do espaço de busca, o processo é repetido com outro vetor base na mutação até que $v_{i,j,t}$ esteja dentro dos limites da função.

- Conservadora: o elemento $x_{i,j,t}$ que sair do espaço de busca, é substituído pelo elemento de mesmo índice do vetor base da mutação. Nesse caso, existe a chance do vetor resultante ser idêntico ao vetor base.

6 TÉCNICAS DE TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES

A maioria dos problemas reais de otimização possui restrições. Neles, as soluções que não satisfazem as restrições são consideradas inviáveis e as que satisfazem são consideradas viáveis. Uma vez que as soluções inviáveis não são almejadas como resposta final, é necessário usar alguma estratégia que consiga tratá-las.

A técnica de penalização é a forma mais usada para solucionar esses problemas, devido a sua facilidade de uso e aplicação. Uma técnica popular é a chamada *death penalty* (Michalewicz et al., 1996). As soluções inviáveis são rejeitadas e suas informações são ignoradas, apenas as soluções viáveis são consideradas. Apesar de ser simples, ela pode ter um desempenho ruim, se, por exemplo, o espaço de busca considerado viável for formado por pequenas regiões espalhadas.

A população inicial pode ser atraída para regiões viáveis afastadas do ótimo global viável ou ela pode não conter soluções viáveis. Por esse motivo, é interessante que as soluções inviáveis também sejam usadas na busca pela melhor solução.
Nas técnicas que não descartam as soluções inviáveis, é adicionada uma função de penalidade a função objetivo. Soluções inviáveis passam a ter uma aptidão, em geral, pior do que a das soluções viáveis, o que as tornam menos atrativas.

O principal problema dessa técnica está no equilíbrio entre função objetivo e função de penalidade. Se a técnica penalizar demais as soluções inviáveis, o algoritmo geralmente retorna uma solução de baixa qualidade, uma vez que a exploração de áreas inviáveis é desencorajada. Por outro lado, se a penalidade for muito baixa, o algoritmo dificilmente encontrará uma solução viável.

Ao longo dos anos, diferentes técnicas de penalização foram propostas para solucionar esses problemas. As técnicas que foram usadas neste trabalho serão detalhadas a seguir.

6.1 Preferring Feasible Solution (PFS)

A técnica proposta por Deb (2000) prioriza as soluções viáveis sobre as inviáveis. As comparações são feitas em pares de soluções. Quando as duas soluções são viáveis, é escolhida a que tem a menor função objetivo. Quando as duas soluções são inviáveis, é escolhida a que tem o menor somatório de violações. Se uma solução for viável e a outra inviável, a viável é sempre escolhida. A aptidão é calculada da seguinte forma:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & se\ g_j(\vec{x}) \geq 0 \\ f_{max} + \sum_{j-1}^{m} |g_j(\vec{x})| & caso\ contrário \end{cases} \quad (15)$$

$$j = 1, \ldots, m$$

Onde $\vec{x}$ é uma solução, $F(\vec{x})$ é a aptidão, $f(\vec{x})$ é o valor da função objetivo, f_{max} é o pior valor da função objetivo das soluções viáveis e $g_j(\vec{x})$ é o valor da função de restrição de índice j. Caso exista apenas soluções inviáveis na população, f_{max} é igual a zero.

A aptidão de uma solução viável é a sua própria função objetivo, enquanto a da solução inviável é a soma do pior valor da função objetivo das soluções viáveis com o somatório de suas violações. Dessa forma, uma solução inviável será sempre inferior a uma solução viável.

A maior vantagem dessa técnica é que ela não necessita da definição de um parâmetro de penalização, uma vez que não há comparação entre duas soluções que envolva função objetivo e somatório das violações. Além disso, a função objetivo das soluções inviáveis não precisa ser calculada o que pode significar uma economia de tempo de processamento.

6.2 Stochastic Rank (SR) e Global Competitive Ranking (GCR)

As técnicas Stochastic Rank e Global Competitive Ranking foram propostas por Runarsson e Yao (2000 e 2002). Ambas são baseadas na ordenação das soluções da população corrente em uma fila e fazem uso de um parâmetro P_f para promover o equilíbrio entre função objetivo e função de penalidade.

No SR, as soluções são enfileiradas e cada solução é comparada com a sua adjacente. Se ela for considerada melhor do que a sua vizinha de melhor colocação, elas trocam de posição. As regras usadas nas comparações são parecidas com as definidas por Deb. As soluções viáveis são comparadas pela função objetivo e as soluções inviáveis são comparadas pela função de penalidade. Já na comparação entre viável e inviável, a viável é priorizada. O diferencial fica por conta do P_f que adiciona uma chance das soluções serem comparadas apenas pela sua função objetivo. Dessa forma, soluções inviáveis podem atingir posições melhores na fila.

Entretanto, o parâmetro P_f deve ser definido pelo usuário e achar um valor adequado pode ser um processo trabalhoso, principalmente quando se quer usar o mesmo valor para diferentes funções sem perder a qualidade dos resultados. Um valor baixo pode gerar pouca perturbação no processo de ordenação dos indivíduos, enquanto um valor alto pode fazer com que todas as comparações sejam feitas pela função objetivo.

No GCR, cada solução é comparada com as demais soluções da população corrente, o que difere do SR que compara apenas soluções adjacentes. As soluções são posicionadas em duas filas, uma de acordo com a sua função objetivo e a outra de acordo com a sua função de penalidade. Em geral, a posição da solução é o valor usado no cálculo da aptidão. Esse valor muda quando duas ou mais soluções têm a mesma posição, neste caso, o valor que elas recebem na fila é a posição da melhor solução.

O parâmetro P_f indica a probabilidade da comparação ser feita apenas pela função objetivo. Se o valor de P_f for alto, maior será a importância da função objetivo. Se o valor de P_f for baixo, maior será a importância da função de penalidade .

A aptidão é calculada da seguinte forma:

$$F(x_i) = P_f \frac{rankFO(i) - 1}{tamPop - 1} + (1 - P_f)\frac{rankPen(i) - 1}{tamPop - 1} \quad (16)$$

Onde $rankFO(i)$ é a posição da solução i na lista ordenada de função objetivo, $rankPen(i)$ é a posição da solução i na lista ordenada de função de penalidade e $tamPop$ é o tamanho da população corrente.

6.3 Multiple Ranking (MR)

O Multiple Ranking (Ho & Shimizu, 2007) é uma técnica que propõe um forma de contornar o problema da junção dos valores das diferentes propriedades de uma solução (valor da função objetivo, somatório das violações e quantidade de restrições violadas) em uma única função. Uma vez que cada propriedade tem a sua ordem de grandeza, a qualidade da comparação dos valores gerados pela junção delas é questionável. Por esse motivo, o MR faz uma comparação separada para cada propriedade, ordenando as soluções em diferentes listas. As posições são então usadas no cálculo da aptidão, como pode ser visto a seguir:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} R_s + R_v & se\ não\ houver\ soluções\ viáveis \\ R_s + R_v + R_f & caso\ contrário \end{cases} \quad (17)$$

Onde R_s posição da solução na lista ordenada de somatório do quadrado das violações, R_v posição da solução na lista ordenada de número de violações e R_f posição da solução na lista ordenada de função objetivo.

A técnica só calcula a função objetivo quando existe pelo menos uma solução viável na população, uma vez que essa informação não é considerada importante na busca por soluções viáveis. Assim que a população possuir soluções viáveis, a função objetivo passa ser levada em consideração e os valores de R_s e R_v servem como função de penalidade. A aptidão calculada dessa forma permite que algumas soluções inviáveis tenham uma posição melhor do que soluções viáveis de função objetivo ruim.

6.4 Adaptive Penalty Method (APM)

Barbosa e Lemonge (2002) propuseram uma técnica capaz de adaptar os seus parâmetros com base nas características da própria população. Dessa forma, ele não necessita que o usuário defina os seus valores, o que facilita bastante o seu uso. O cálculo da aptidão pode ser visto a seguir:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & se\ \vec{x}\ for\ viável \\ \bar{f}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} k_j v_j(\vec{x}), & caso\ contrário \end{cases} \quad (18)$$

$$\bar{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & se\ f(\vec{x}) > \langle f(\vec{x}) \rangle \\ \langle f(\vec{x}) \rangle, & caso\ contrário \end{cases} \quad (19)$$

$$k_j = |\langle f(\vec{x}) \rangle| \frac{\langle v_j(\vec{x}) \rangle}{\sum_{n=1}^{m} [\langle v_n(\vec{x}) \rangle]^2} \quad (20)$$

Onde $\langle f(\vec{x}) \rangle$ é a média dos valores da função objetivo da população corrente e $\langle v_n(\vec{x}) \rangle$ é a média das violações da n-ésima função de restrição da população corrente.

A função de penalidade possui um coeficiente de penalidade para cada restrição. Seu valores independem do usuário pois mudam de acordo com as funções objetivo e as violações da população.

A aptidão de soluções viáveis é a sua própria função objetivo. Já a aptidão de soluções inviáveis depende de suas características e da população corrente. Se a sua função objetivo for maior do que $\langle f(\vec{x})\rangle$, a aptidão é a soma da função objetivo com a função de penalidade. Se a sua função objetivo for menor ou igual a $\langle f(\vec{x})\rangle$, a aptidão é a soma de $\langle f(\vec{x})\rangle$ com a função de penalidade. Dessa forma, algumas soluções inviáveis com boa função objetivo podem ser preservadas, mas nunca serão melhores do que as soluções viáveis com função objetivo menor que $\langle f(\vec{x})\rangle$.

6.5 Balanced Ranking Method (BRM)

O BRM [Rodrigues et al., 2015] foi inspirado por diversas técnicas de penalização já conhecidas, como o Multiple Ranking e o Adaptive Penalty Method. A ideia é usar as diferentes propostas para solucionar alguns problemas enfrentados pelas técnicas de penalização. O uso de listas ordenadas de soluções para resolver o problema das diferentes ordens de grandeza, os coeficientes de penalidade que são definidos automaticamente e mudam de acordo com a população corrente e a preferência pelas soluções viáveis em detrimento das inviáveis, resguardando as melhores viáveis, são alguns exemplos. Tudo isso, tentando manter um equilíbrio entre função objetivo e função de penalidade.

O cálculo da aptidão pode ser visto a seguir:

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} rank(f(\vec{x})) & se\ \vec{x}\ for\ viável \\ rank\big(p(\vec{x})\big) + \Delta + \Psi & caso\ contrário \end{cases} \tag{21}$$

$$p(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{m} (|v_n(\vec{x})|)^{\beta} \tag{22}$$

$$\beta = 2 + (\rho(\vec{x}) \times \sigma) \tag{23}$$

$$\rho(\vec{x}) = \frac{rank(f(\vec{x}),I)}{count(I)} \tag{24}$$

$$\sigma = \left[\frac{\hat{C}}{m \times Npop}\right]^2 \tag{25}$$

$$\Delta = count(\mathcal{F}) \times \frac{count(I)}{Npop} \tag{26}$$

$$\Psi = \begin{cases} 0 & se\ \left(\max\left(rank(p(\vec{x}), I)\right) + \Delta\right) > \max\left(rank(f(\vec{x}), F)\right) \\ \frac{\varphi}{count(I)-1} \times (rank(p(\vec{x}), I) - 1) & Caso\ contrário \end{cases} \tag{27}$$

$$\varphi = \max\left(rank(f(\vec{x}), F)\right) - (1 + \Delta) \tag{28}$$

Onde $rank(f(\vec{x}))$ é a posição da solução na lista de função objetivo, $rank\left(p(\vec{x})\right)$ é a posição da solução na lista de função de penalidade, $v_n(\vec{x})$ é a n-ésima função de restrição, Δ e Ψ são espaçadores, β é um fator atenuante, $\hat{C}$ é o total de restrições não violadas da população corrente, $count(I)$ é a quantidade de soluções inviáveis, $count(\mathcal{F})$ é a quantidade de soluções viáveis, $rank(f(\vec{x}), I)$ é a posição da solução inviável na lista de função objetivo, $rank(p(\vec{x}), I)$ é a posição da solução inviável na lista de função de penalidade e $rank(f(\vec{x}), F)$ é a posição da solução viável na lista de função objetivo. A função max() busca o maior valor de um conjunto.

A técnica gera duas filas ordenadas, uma para soluções viáveis e outra para soluções inviáveis, e as mescla em uma terceira fila virtual. Para priorizar as melhores soluções viáveis, as soluções inviáveis são "empurradas" em direção do final da fila através do fator Δ. Posteriormente, um espaçamento Ψ é gerado entre as soluções inviáveis para que não fiquem aglomeradas. Finalmente, a posição da solução nessa fila virtual é a sua aptidão.

7 METODOLOGIA

Neste trabalho, foram utilizados 2 algoritmos de otimização: o Enxame de Partículas e a Evolução Diferencial. Ambos foram mantidos próximos de suas versões originais, sem grandes modificações. Acopladas à eles, foram testadas 6 técnicas de tratamento de restrições: BRM, APM, GCR, SR, PFS e MR. O PSO foi testado com 3 configurações que diferem na topologia e no tratamento de soluções que saem do espaço de busca. O DE foi testado com 2 configurações que diferem no tratamento das soluções que saem do espaço de busca.

Tabela 1- Configurações do Enxame de Partículas

Configurações do PSO	Topologia	Tratamento de partículas	
		Posição	Velocidade
Configuração 1	Estrela	Limite mais próximo	Inalterada
Configuração 2	Anel	Limite mais próximo	Inalterada
Configuração 3	Anel	Inalterada	Zero

Tabela 2- Configurações da Evolução Diferencial

Configurações do DE	Tratamento de vetores
Configuração 4	Nova amostra
Configuração 5	Limite mais próximo

Inicialização

Os indivíduos foram inicializados de forma aleatória com uma distribuição uniforme entre o limite inferior e superior das variáveis. No PSO, tanto a velocidade quanto a posição das partículas foram inicializadas dessa forma, no intervalo do espaço de busca.

Avaliação

As técnicas de tratamento de restrição funcionam de forma semelhante a uma caixa preta, ou seja, recebem a população composta por um conjunto de soluções candidatas e retornam a aptidão de cada solução. Para tal, a maioria delas utiliza o método

de ordenação das soluções em uma fila (ou rank) de acordo com as características da população corrente, e retorna como aptidão a posição da solução nessa fila. Consequentemente, apenas as soluções que são avaliadas juntas, ou seja, que estão na mesma população, podem ser comparadas entre si corretamente. Uma vez que os dois algoritmos de busca comparam soluções da população corrente com soluções de populações passadas, é necessário alterá-los ligeiramente para que juntem todas em uma única população para serem avaliadas. Para o PSO, isso significa juntar a população corrente e o *pbest* de todas as partículas (na topologia estrela) em um único enxame. Já, para o DE, é necessário utilizar a sua versão geracional e juntar os pais com os filhos no momento de avaliar.

É importante frisar que, apesar de haver uma reavaliação de soluções passadas, não é necessário o recálculo da função objetivo e das funções de restrição delas, uma vez que os valores não mudam. Sendo assim, o número de cálculos de função objetivo por iteração é no máximo igual ao tamanho da população corrente.

Condições de Parada

O principal critério de parada é o número de cálculos de função objetivo. As técnicas que calculam a função objetivo de todos os indivíduos, como o BRM, o APM e o GCR, funcionam bem com essa condição. Entretanto, técnicas como o MR, que só calculam a função objetivo quando acham pelo menos uma solução viável na população, necessitam de mais critérios para não prolongarem excessivamente a rodada. Por esse motivo, optou-se também em adicionar um número máximo de cálculos de violação e um número máximo de iterações consecutivas sem soluções viáveis.

É importante deixar claro que essas condições de paradas podem não ser ideais. Encontrar o número máximo de cálculos de função objetivo e o número máximo de cálculos de violação, de forma a equilibrar o custo computacional para os dois tipos de técnicas citadas acima, não é uma tarefa fácil e os valores variam de função para função.

Solução Final

A solução final é a solução entregue pelo algoritmo no final de uma rodada. No PSO com topologia estrela, a solução final é o *gBest*. No PSO com topologia anel, a solução final é a solução de menor aptidão da lista de *lbest*. No DE, a solução final é a de menor aptidão da última população da rodada.

Em todas as configurações, a solução final pode ser viável ou inviável independentemente de ter existido uma solução viável em alguma população da rodada. Essa escolha foi feita pois algumas técnicas, como o BRM e o PFS, tentam manter as melhores soluções viáveis dentro da população, atribuindo a elas aptidões menores, funcionando de forma semelhante ao elitismo do Algoritmo Genético. Dessa forma, foi considerado injusto ter como solução final a solução viável de menor aptidão da rodada, mesmo havendo solução inviável com aptidão menor, uma vez que isso diminuiria a importância desse "elitismo" dessas técnicas.

As soluções finais inviáveis, apesar de terem sido armazenadas, não foram usadas nas tabelas na seção dos resultados.

8 EXPERIMENTOS

Em todos os testes, a população pop foi mantida com 70 indivíduos. O número máximo de cálculos de função objetivo $maxFO$ foi de 500000, o número máximo de cálculos de violação de restrição $maxViol$ foi de 1500000 e o número máximo de iterações consecutivas sem soluções viáveis $maxItInv$ foi igual a 7150.

No Enxame de Partículas, foram adicionados o fator de ponderação de inércia (Shi et al., 1998) e o coeficiente de constrição (Clerc, 1999) no cálculo da velocidade. Os valores dos parâmetros usados foram: $\omega_{max} = 0.9$; $\omega_{min} = 0.4$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 2.05$ e $k = 1$

Na Evolução Diferencial, foi usada a variante DE/rand/1/bin (Storn et al., 1996) com a taxa de recombinação Cr igual a 0.9. O fator diferencial F foi escolhido de forma aleatória com distribuição uniforme entre 0.4 e 0.9 a cada iteração do algoritmo (Karaboga et al., 2004).

Em cada configuração do PSO e do DE, foram aplicados os 6 métodos de penalização mencionados nesse trabalho. O GCR e o SR usaram um P_f igual a 0.35.

Para realizar os testes, foram usadas as 24 funções de benchmark do CEC 2006 (Liang et al., 2006) que compõem a chamada G-Suite. Cada função demandou 25 rodadas de cada algoritmo. A tolerância para violações de restrições de igualdade ε foi de 0.0001.

Os valores de $maxFO$, ε e rodadas são iguais aos de Max_FES, ϵ e runs, respectivamente, do CEC 2006. O valor de $maxItInv$ é a aproximação da divisão de $maxFO$ por pop. Os valores de pop , $maxViol$, Cr, F e P_f e a variante DE/rand/1/bin foram escolhidos após uma série de testes.

9 RESULTADOS

As tabelas a seguir mostram os resultados das 6 técnicas de tratamento de restrição nas 24 funções de benchmark das 5 configurações. As soluções inviáveis foram ignoradas, ou seja, apenas as soluções viáveis foram consideradas. O campo "Melhor" contem a melhor solução viável (solução viável de menor aptidão) das 25 rodadas, o campo "Média" contem a média aritmética das rodadas viáveis e o campo "Viáveis" contem a quantidade de rodadas viáveis. O negrito indica a(s) melhor(es) resposta(s) de cada função. O * significa que não houve rodada viável.

Tabela 3. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 1)

Função [melhor conhecido]		**BRM**	**MR**	**GCR**	**APM**	**SR**	**PFS**
G1 [-15.00]	MELHOR	-13	-11	-13.8281	**-15.00**	-12	-12
	MÉDIA	-9.36	-7.12	-8.033124	**-11.72**	-7.52	-6.52
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.697264	**-0.754143**	-0.674479	-0.617677	-0.67969	-0.666165
	MÉDIA	-0.417009	-0.454789	-0.469264	**-0.47392**	-0.46663	-0.446104
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.849003	-1.00015	**-1.00019**	-1.00015	-0.999137	-0.997697
	MÉDIA	0	-0.110149	-0.296253	**-0.825277**	-0.222518	-0.216928
	Viáveis	25	25	25	20	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	MÉDIA	**-30665.5**	-30646.33	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5128.18	5137.02	**5126.51**	5126.52	5126.56	5127.63
	MÉDIA	5720.30315	5818.1939	**5133.62**	5462.15647	5756.63	5868.4405
	Viáveis	19	23	24	17	17	19
G6 [-6961.81]	MELHOR	**-6961.81**	*****	*	*	**-6961.81**	**-6961.81**
	MÉDIA	**-6961.81**	*****	*	*	**-6961.81**	**-6961.81**
	Viáveis	10	0	0	0	5	13
G7 [24.3062]	MELHOR	25.0505	25.3207	25.0327	25.1649	25.6192	**25.0196**
	MÉDIA	86.87802	98.6656	**49.8247**	136.86287	78.0624	245.1898
	Viáveis	25	25	24	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	MÉDIA	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	Viáveis	25	25	25	24	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.637	680.633	680.638	680.633	680.635	**680.632**
	MÉDIA	680.702	680.681	680.671	**680.668**	680.689	680.6773
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7313.86	7358.2	7429.75	*****	**7092.91**	7223.13
	MÉDIA	11136.2	9450.84	**7429.75**	*****	9173.97	8854.29
	Viáveis	25	8	1	0	23	24
G11	MELHOR	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	0.750441	**0.7499**

[0.7499]	MÉDIA	0.759943	0.849924	0.90996	**0.7499**	0.990014	0.91994
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12	MELHOR	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
[-1]	MÉDIA	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 4. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 1)

Função [melhor conhecido]		**BRM**	**MR**	**GCR**	**APM**	**SR**	**PFS**
G13	MELHOR	0.067569	0.596451	**0.053946**	0.46306	0.133383	0.49351
[0.0539415]	MÉDIA	0.800617	0.948913	**0.286604**	1.29663	0.713099	1.01053
	Viáveis	25	24	25	25	25	25
G14	MELHOR	-47.3733	-47.3733	-47.3739	**-47.43**	-47.3733	-43.2702
[-47.7649]	MÉDIA	-38.5417	-38.2754	-41.59424	**-46.7272**	-39.9189	-37.9594
	Viáveis	24	23	24	25	23	21
G15	MELHOR	961.719	**961.715**	**961.715**	961.722	961.716	**961.715**
[961.715]	MÉDIA	964.536	965.6438	**961.7321**	965.685	963.0937	965.2241
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16	MELHOR	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	-1.90182	**-1.90516**	**-1.90516**
[-1.90516]	MÉDIA	-1.6337	-1.80768	**-1.90196**	-1.69133	-1.75101	-1.63447
	Viáveis	25	25	21	25	25	25
G17	MELHOR	8862.93	**8862.27**	*	9009.41	8870.98	8939.42
[8853.53]	MÉDIA	9035.31	9073.0892	*	9011.6	**9009.873**	9124.8475
	Viáveis	14	13	0	6	8	8
G18	MELHOR	-0.865977	-0.866016	**-0.866025**	**-0.866025**	-0.865946	-0.866024
[-0.866025]	MÉDIA	-0.830103	-0.860831	**-0.863107**	-0.848297	-0.849459	-0.843231
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G19	MELHOR	398.168	369.77	427.933	**277.046**	379.709	652.684
[32.6556]	MÉDIA	594.0126	**394.8235**	427.933	593.533	516.8767	736.5465
	Viáveis	5	2	1	5	3	2
G20	MELHOR	0.218538	*	*	*	0.382517	**0.147429**
[-]	MÉDIA	0.218538	*	*	*	0.382517	**0.175340**
	Viáveis	1	0	0	0	1	3
G21	MELHOR	*	*	*	*	*	*
[193.725]	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G22	MELHOR	*	*	*	*	*	*
[236.431]	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23	MELHOR	-138.747	-187.433	*	*	-0.56575	**-400.003**
[-400.055]	MÉDIA	229.573	242.838	*	*	**172.061**	265.259
	Viáveis	11	20	0	0	3	5
G24	MELHOR	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
[-5.50801]	MÉDIA	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 5. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 2)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	-12	-12
	MÉDIA	-10.6	-8.76	-9.72	**-13.92**	-8.4	-8.04
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	-0.67578	-0.783961	-0.802828	**-0.803392**	-0.785176	-0.792067
	MÉDIA	-0.543761	-0.684575	-0.683832	-0.690319	-0.644725	**-0.72155**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.364406	-0.0495238	-0.096378	**-0.534839**	-0.386852	-0.279344
	MÉDIA	-0.046819	-0.0054146	-0.01387	**-0.224254**	-0.0632641	-0.027967
	Viáveis	25	25	25	16	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	MÉDIA	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	5126.79	5126.74	**5126.5**	5126.52	**5126.5**	**5126.5**
	MÉDIA	5235.4	5298.43	**5129.01**	5160.12	5166.5932	5372.22
	Viáveis	25	24	25	23	25	25
G6 [-6961.81]	MELHOR	**-6961.81**	**-6961.81**	*	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	MÉDIA	**-6961.81**	**-6961.81**	*	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	Viáveis	16	7	0	1	13	22
G7 [24.3062]	MELHOR	**24.3327**	24.3895	24.347	24.374	24.346	24.3882
	MÉDIA	25.9176	**24.745**	24.7547	24.9596	24.847656	24.929736
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	MÉDIA	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	680.633	680.632	680.635	**680.631**	680.632	**680.631**
	MÉDIA	680.669	680.642	680.649	680.644	680.64316	**680.63924**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	7099.21	**7056.52**	7063.87	*	7066.98	7076.74
	MÉDIA	7715.56	7843.88	7604.16	*	**7333.2524**	7457.1384
	Viáveis	25	22	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**
	MÉDIA	0.7517	0.749952	0.750374	**0.749921**	0.769552	0.757948
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12 [-1]	MELHOR	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	MÉDIA	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 6. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 2)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.072143	0.0546468	**0.0540503**	0.066421	0.0569083	0.088176
	MÉDIA	0.483425	0.225142	**0.0748657**	0.415571	0.324129	0.473934
	Viáveis	25	23	25	25	25	25
G14	MELHOR	-47.3739	-47.3752	**-47.6317**	-47.4662	-47.5669	-47.5986

[-47.7649]	MÉDIA	-43.7285	-44.2435	-46.5747	**-46.7483**	-44.924	-43.2147
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15	MELHOR	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**
[961.715]	MÉDIA	962.186	962.076	**961.719**	961.776	961.739	961.801
	Viáveis	25	22	25	25	25	25
G16	MELHOR	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
[-1.90516]	MÉDIA	-1.90488	-1.90489	**-1.90516**	-1.90275	**-1.90516**	**-1.90516**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17	MELHOR	8857.43	8877.95	8866.97	8929.29	8856.87	**8854.92**
[8853.53]	MÉDIA	8947.59	8982.76	**8942.4**	8985.348	8955.14583	8981.8672
	Viáveis	25	22	23	10	24	25
G18	MELHOR	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	-0.866023	**-0.866025**	**-0.866025**
[-0.866025]	MÉDIA	-0.863784	-0.865072	-0.8653	**-0.86539**	-0.865024	-0.864967
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G19	MELHOR	125.895	268.573	38.9536	**34.1933**	159.515	117.754
[32.6556]	MÉDIA	426.496	580.014923	270.4945	**244.8747**	384.875833	477.307
	Viáveis	25	13	19	19	24	19
G20	MELHOR	0.146598	0.147429	0.14739	0.144519	**0.143938**	0.147197
[-]	MÉDIA	0.177861	0.17545	**0.163078**	0.166487	0.187977	0.18172
	Viáveis	18	17	8	3	15	19
G21	MELHOR	*	*	*	*	*	*
[193.725]	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G22	MELHOR	*	*	*	*	*	*
[236.431]	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23	MELHOR	**-400.003**	0	-87.2076	*	-246.926	-230.583
[-400.055]	MÉDIA	3.402009	42.857143	49.1135	*	**-6.76979**	52.3064
	Viáveis	25	21	19	0	25	25
G24	MELHOR	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
[-5.50801]	MÉDIA	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 7. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 3)

Função [melhor conhecido]		**BRM**	**MR**	**GCR**	**APM**	**SR**	**PFS**
G1	MELHOR	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**
[-15.00]	MÉDIA	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2	MELHOR	-0.803517	-0.803461	-0.803517	**-0.803597**	-0.802143	-0.803506
[-0.803619]	MÉDIA	-0.709946	**-0.780352**	-0.773936	-0.762207	-0.768595	-0.774332
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3	MELHOR	-0.788153	**-1.00028**	-0.951054	-0.925788	-0.784841	-0.907397
[-1.0005]	MÉDIA	-0.417758	**-0.911138**	-0.84619	-0.71886	-0.500498	-0.661026
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G4	MELHOR	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
[-30665.5]	MÉDIA	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5	MELHOR	5126.51	5126.55	**5126.5**	5126.55	**5126.5**	**5126.5**

[5126.5]	MÉDIA	**5128.31**	5156.24	5129.34	5132.9	5132.62	5131.9
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G6	MELHOR	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
[-6961.81]	MÉDIA	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G7	MELHOR	24.3726	24.3487	**24.3423**	24.3769	24.3928	24.375
[24.3062]	MÉDIA	24.7911	24.5304	24.6278	24.6028	**24.5267**	24.6112
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8	MELHOR	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
[-0.095825]	MÉDIA	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9	MELHOR	**680.632**	680.634	680.634	**680.632**	680.636	**680.632**
[680.63]	MÉDIA	680.687	680.65	680.642	680.664	680.647	**680.64**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10	MELHOR	7057.69	7067.82	7053.21	*	7052.03	**7049.33**
[7049.25]	MÉDIA	7196.42	7438.39	7215.65	*	**7176.27**	7191.33
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G11	MELHOR	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**
[0.7499]	MÉDIA	0.75001	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	0.749938	0.749908
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12	MELHOR	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
[-1]	MÉDIA	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 8. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração 3)

Função [melhor conhecido]		**BRM**	**MR**	**GCR**	**APM**	**SR**	**PFS**
G13	MELHOR	0.058324	0.0542655	0.054054	0.054713	**0.053945**	0.0583942
[0.0539415]	MÉDIA	0.262498	0.232393	**0.059586**	0.239011	0.245526	0.394895
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G14	MELHOR	**-47.5335**	-47.4444	-47.3009	-47.0934	-46.6571	-47.0287
[-47.7649]	MÉDIA	-45.256	-46.1327	**-46.279**	-45.8512	-45.5659	-45.0097
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15	MELHOR	**961.715**	**961.715**	**961.715**	961.718	961.716	**961.715**
[961.715]	MÉDIA	962.0327	961.8938	**961.7319**	962.207	961.93	962.057
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16	MELHOR	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
[-1.90516]	MÉDIA	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17	MELHOR	8870.49	8873.65	8856.52	8862.02	**8853.81**	8866.42
[8853.53]	MÉDIA	8911.584	8944.0084	**8885.409**	8898.51	8896.3332	8911.6932
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G18	MELHOR	-0.86602	-0.866024	-0.866023	-0.866011	-0.86596	**-0.866025**
[-0.866025]	MÉDIA	-0.816907	-0.856863	**-0.864011**	-0.860812	-0.818335	-0.853488
	Viáveis	25	25	14	25	25	25
G19	MELHOR	111.285	46.3742	**35.0995**	75.037	80.8946	101.786
[32.6556]	MÉDIA	219.6506	232.354	**44.4766**	147.404	144.4634	263.113
	Viáveis	25	22	25	25	25	25
G20	MELHOR	*	*	*	*	*	*

[-]	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G21 [193.725]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	-147.176	**-160.962**	699.249	*	-88.2519	-133.076
	MÉDIA	**20.9583**	100.776	699.249	*	99.0968	75.8087
	Viáveis	16	15	1	0	16	10
G24 [-5.50801]	MELHOR	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	MÉDIA	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 9. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 4)

Função [melhor conhecido]		**BRM**	**MR**	**GCR**	**APM**	**SR**	**PFS**
G1 [-15.00]	MELHOR	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**
	MÉDIA	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**
	MÉDIA	-0.800782	-0.801368	-0.801215	-0.799293	**-0.80238**	-0.80127
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	**-1.0005**	**-1.0005**	**-1.0005**	**-1.0005**	**-1.0005**	**-1.0005**
	MÉDIA	-0.625605	**-1.0005**	**-1.0005**	**-1.0005**	-0.798018	**-1.0005**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	MÉDIA	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**
	MÉDIA	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G6 [-6961.81]	MELHOR	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	MÉDIA	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G7 [24.3062]	MELHOR	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**
	MÉDIA	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	MÉDIA	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**
	MÉDIA	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	**7049.25**	**7049.25**	**7049.25**	*****	**7049.25**	**7049.25**
	MÉDIA	**7049.25**	**7049.25**	**7049.25**	*****	**7049.25**	**7049.25**

	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**
	MÉDIA	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**	**0.7499**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G12 [-1]	MELHOR	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	MÉDIA	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 10. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração4)

Função [melhor conhecido]		**BRM**	**MR**	**GCR**	**APM**	**SR**	**PFS**
G13 [0.0539415]	MELHOR	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**
	MÉDIA	0.290724	0.22328	**0.0539415**	0.315647	0.331042	0.315647
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**
	MÉDIA	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15 [961.715]	MELHOR	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**
	MÉDIA	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
	MÉDIA	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	**8853.539**	**8853.539**	**8853.539**	**8853.539**	**8853.539**	**8853.539**
	MÉDIA	8899.21	8912.85	**8853.539**	8886.14	8877.23	8909.84
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G18 [-0.866025]	MELHOR	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	-0.865909	**-0.866025**	**-0.866025**
	MÉDIA	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	-0.865786	**-0.866025**	**-0.866025**
	Viáveis	25	25	25	8	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	47.9033	36.1192	**32.6783**	39.0002	39.6382	38.9132
	MÉDIA	124.923	49.9231	**33.2089**	57.8971	62.5989	65.4858
	Viáveis	25	25	25	24	25	25
G20 [-]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G21 [193.725]	MELHOR	**193.725**	**193.725**	**193.725**	*	**193.725**	**193.725**
	MÉDIA	233.752	**198.964**	214.681	*	219.92	209.442
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**
	MÉDIA	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**	**-400.055**
	Viáveis	25	25	25	2	25	25
G24 [-5.50801]	MELHOR	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	MÉDIA	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 11. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G1 a G12 (Configuração 5)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G1 [-15.00]	MELHOR	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**	**-15**
	MÉDIA	**-14.9531**	-14.2331	-14.88	-14.92	-14.7781	-14.76
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G2 [-0.803619]	MELHOR	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**	**-0.803619**
	MÉDIA	-0.781878	-0.782107	-0.789324	**-0.789581**	-0.787272	-0.784976
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G3 [-1.0005]	MELHOR	-0.993497	**-1.0005**	**-1.0005**	**-1.0005**	-0.797025	**-1.0005**
	MÉDIA	-0.275469	**-1.0005**	-0.903183	**-1.0005**	-0.327433	-0.430293
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G4 [-30665.5]	MELHOR	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	MÉDIA	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**	**-30665.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G5 [5126.5]	MELHOR	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**
	MÉDIA	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**	**5126.5**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G6 [-6961.81]	MELHOR	**-6961.81**	**-6961.81**	*	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	MÉDIA	**-6961.81**	-6864.51	*	**-6961.81**	**-6961.81**	**-6961.81**
	Viáveis	25	16	0	25	25	25
G7 [24.3062]	MELHOR	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**
	MÉDIA	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**	**24.3062**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G8 [-0.095825]	MELHOR	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	MÉDIA	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**	**-0.095825**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G9 [680.63]	MELHOR	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**
	MÉDIA	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**	**680.63**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G10 [7049.25]	MELHOR	**7049.25**	**7049.25**	**7049.25**	*	**7049.25**	**7049.25**
	MÉDIA	7073.45	**7049.25**	**7049.25**	*	**7049.25**	**7049.25**
	Viáveis	25	25	25	0	25	25
G11 [0.7499]	MELHOR	**0.7499**	0.7611	0.900413	**0.7499**	0.803825	0.751044
	MÉDIA	**0.866404**	0.964253	0.993085	0.876328	0.992153	0.982656
	Viáveis	25	25	25	23	25	25
G12 [-1]	MELHOR	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	MÉDIA	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

Tabela 12. Comparação dos resultados de todos os métodos nas funções G13 a G24 (Configuração5)

Função [melhor conhecido]		BRM	MR	GCR	APM	SR	PFS
G13 [0.0539415]	MELHOR	0.0539545	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**	**0.0539415**
	MÉDIA	0.352768	0.254069	**0.177097**	0.331042	0.269464	0.254069
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G14 [-47.7649]	MELHOR	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**
	MÉDIA	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**	**-47.7649**

	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G15 [961.715]	MELHOR	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**
	MÉDIA	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**	**961.715**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G16 [-1.90516]	MELHOR	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
	MÉDIA	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**	**-1.90516**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25
G17 [8853.53]	MELHOR	**8853.53**	**8853.53**	**8853.53**	**8853.53**	**8853.53**	**8853.53**
	MÉDIA	8897.57	8909.93	**8853.53**	8882.51	8862.42	8892.04
	Viáveis	25	25	25	23	25	25
G18 [-0.866025]	MELHOR	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**
	MÉDIA	**-0.866025**	**-0.866025**	**-0.866025**	-0.865999	**-0.866025**	**-0.866025**
	Viáveis	25	25	25	19	25	25
G19 [32.6556]	MELHOR	77.975	45.314	**32.6554**	34.8305	47.4034	32.992
	MÉDIA	193.232	94.2253	**32.6843**	44.2973	80.084736	59.8133
	Viáveis	25	25	25	24	25	25
G20 [-]	MELHOR	0.121921	**0.12192**	**0.12192**	*	*	*
	MÉDIA	0.124155	0.128314	**0.121921**	*	*	*
	Viáveis	21	25	25	0	0	0
G21 [193.725]	MELHOR	**193.725**	193.755	*	*	**193.725**	**193.725**
	MÉDIA	425.536	**193.755**	*	*	229.462	213.898
	Viáveis	11	10	0	0	11	13
G22 [236.431]	MELHOR	*	*	*	*	*	*
	MÉDIA	*	*	*	*	*	*
	Viáveis	0	0	0	0	0	0
G23 [-400.055]	MELHOR	**-400.055**	-400.054	**-400.055**	*	**-400.055**	**-400.055**
	MÉDIA	-131.889	78.1151	**-356.301**	*	-160.898	-44.0264
	Viáveis	25	16	16	0	23	25
G24 [-5.50801]	MELHOR	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	MÉDIA	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**	**-5.50801**
	Viáveis	25	25	25	25	25	25

10 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para o melhor entendimento do conteúdo seguinte, as técnicas de tratamento das soluções que saem do espaço de busca foram mencionadas pelo acrônimo TTS e as técnicas de tratamento de restrição pelo acrônimo TTR.

A primeira configuração (Configuração 1) possui a topologia estrela (ou *gbest*). Ela foi escolhida por ser a versão mais conhecidas do Enxame de Partículas. A sua convergência é rápida, mas o enxame é facilmente atraído para mínimos locais. Essa característica foi observada em quase todas as funções, levando a médias ruins e a diversas rodadas sem soluções viáveis. Nestes últimos casos, era comum a melhor solução até então encontrada ficar oscilando entre valores inviáveis de um determinado local até o final da rodada. Além disso, as técnicas MR, GCR, APM e SR não resguardam a melhor solução viável da população, o que possibilitou a troca dela por uma solução inviável de melhor aptidão e levou a algumas rodadas inviáveis.

Para verificar até que ponto esses resultados estavam realmente sendo causadas pela estagnação em mínimos locais, um segundo teste (Configuração 2) foi realizado com a topologia anel (ou *lbest*), que é conhecida por sua lenta convergência e maior facilidade em sair de mínimos locais em relação a versão estrela.

Na Configuração 2, a melhora foi considerável em todos os aspectos em quase todas as funções. As médias da G19 do MR e da G10 do GCR pioraram por causa do aumento expressivo no número de rodadas viáveis. As alterações na G23, para melhor e para pior, são duvidosas, pois a maioria dos resultados foi zero, que é provavelmente um mínimo local, e o restante ficou bastante espalhado, com soluções finais bem distantes umas das outras. A função G3 mostrou uma alteração significativamente ruim nas médias das rodadas. Além disso, algumas funções, como a G6, continuaram com uma quantidade expressiva de rodadas inviáveis.

É de comum conhecimento que a TTS até então usada, a do limite mais próximo, pode melhorar ou piorar o resultado de uma função. Se ela tiver um mínimo local perto das bordas do espaço de busca, essa técnica pode “empurrar” o enxame para esse local. Se isso ocorrer logo no início da rodada, pode não existir partícula com aptidão menor do que a que está perto desse mínimo e consequentemente todo o enxame tenderá a ir para esse local.

Por esse motivo, um terceiro teste (Configuração 3) foi realizado com outra TTS, a que zera a velocidade da partícula. Os resultados deixam bem claro que houve de fato alguma influência da TTS no enxame. De um modo geral, na maioria das funções, o número de rodadas viáveis chegou a 25. As médias também melhoraram significativamente, devido a menor quantidade de rodadas presas em mínimos locais. Apenas nas funções G18, G20 e G23 ficou evidente que a Configuração 2 teve um desempenho melhor.

Ao comparar as diferentes configurações do PSO, algumas TTR tiveram resultados bem diferentes das demais em determinadas funções. Nas funções G10 e G23, o APM foi o único que não conseguiu chegar ao melhor conhecido em nenhuma das configurações testadas. Na função G18, da Configuração 3, o GCR foi o único a retornar um número inferior de resultados viáveis em relação à Configuração 2. Isso ocorreu devido as diversas trocas da melhor solução viável por uma inviável. Nas configurações 1 e 2, é possível que o GCR tenha sido beneficiado pela TTS, que o ajudou a manter os resultados viáveis. Na função G6, nas Configurações 1 e 2, todas as TTR tiveram problemas de estagnação em locais inviáveis, principalmente o GCR e o APM. Por outro lado, na configuração 3, todas as TTR chegaram ao ótimo nas 25 rodadas. Isso mostra como a TTS pode influenciar negativamente o resultado.

No geral, o GCR e o APM mostraram uma maior sensibilidade em relação às alterações no PSO. Dependendo do caso, eles sequer conseguem entregar uma solução viável. Porém, foram as duas TTR que entregaram as melhores médias em um maior número de funções. Já o BRM e o PFS foram as TTR que entregaram mais resultados viáveis, apesar de também mostrarem oscilações de desempenho nas diferentes configurações.

De todas as TTR, o GCR é o que demonstra ter a maior capacidade de evitar mínimos locais. Isso é evidente na Configuração 1, devido a característica da topologia estrela de estagnar em mínimos locais. Nas funções G5, G7, G13, G15, G16, as médias obtidas por ele foram bem próximas do melhor conhecido, ao contrário das demais TTR. Tal característica está ligada ao seu comportamento no início da busca, enquanto não há partículas viáveis no enxame. O GCR é a técnica que é melhor “guiada” pelas soluções inviáveis. Quando ele encontra uma solução viável, ela está relativamente próxima do ótimo, o que o faz evitar diversos mínimos locais viáveis.

Para tentar confirmar os resultados obtidos com o PSO, novos testes foram feitos com um outro algoritmo de otimização, a Evolução Diferencial. O DE/rand/1/bin foi escolhido por ser uma versão clássica, fácil de usar e que obtêm bons resultados em uma grande variedade de funções. Duas configurações foram testadas alterado apenas a TTS. A Configuração 4 usou a técnica que gera uma nova variável mutante para substituir a variável violadora e a Configuração 5 usou a técnica do limite mais próximo.

A comparação dos resultados das Configurações 4 e 5 confirma algumas das observações feitas no PSO sobre a influência das TTS e algumas das características das TTR. O GCR foi novamente um dos mais sensíveis às alterações, especialmente na G6 e na G21.

Em todas as rodadas dessas duas funções na configuração 5, ele foi rapidamente "empurrado" para um local inviável, onde ficou estagnado até o final da rodada. O DE também confirmou a capacidade do GCR em evitar mínimos locais, que é facilmente observada nas funções G13, G17 e G19.

O APM manteve a sua incapacidade de encontrar soluções viáveis na G10 e a sua dificuldade na G23. Além disso, ele foi o único a não retornar rodadas viáveis na G21 em todas as configurações. Na função G18 com a Configuração 4, ele teve problema com a troca da melhor solução viável por uma inviável, que amenizou na Configuração 5 com a ajuda da TTS.

A técnica de tratamento para o limite mais próximo tem uma influência negativa na função G3, o que pode explicar os resultados das configurações 1, 2 e 5. Porém, tal explicação não é suficiente para o BRM e o SR que continuaram com as médias ruins mesmo nas demais configurações. As duas TTR são capazes de chegar ao ótimo nessa função, mas têm problemas relacionados à velocidade de convergência e estagnação em mínimos locais.

Nem todos os resultados foram parecidos entre os dois algoritmos, alguns foram diferentes do esperado. Na função G23, o PSO teve resultados melhores com o tratamento do limite mais próximo, porém, os resultados do DE foram piores com ele. Analisando os retornos das funções, o que aparentemente está acontecendo é que essa TTS tende a empurrar o enxame para dois prováveis mínimos locais viáveis, 0 e 900. Dessa forma, ela aumenta o número de rodadas viáveis, mas tem o potencial de piorar as médias uma vez que esses mínimos estão longe do ótimo dessa função. O GCR e o MR mostraram um

comportamento um pouco diferente das demais TTR na configuração 5, sendo atraídos não só para os mínimos locais viáveis como também para um determinado local inviável.

O DE obteve resultados bem impressionantes, chegando ao ótimo em até 22 das 24 funções. O GCR na configuração 4 chegou a 19 funções com todas as rodadas perfeitas e o BRM e o MR chegaram a encontrar soluções viáveis em 23 funções na configuração 5. Na maioria das funções, as soluções finais podem ser divididas em 2 categorias: soluções iguais ao ótimo e soluções iguais a um mínimo local (viável ou inviável). Ou seja, ou o algoritmo chega ao ótimo ou fica preso em um mínimo local. Dessa forma, a média vira um indicador da capacidade da TTR em evitar mínimos locais.

11 CONCLUSÃO

Esse trabalho mostrou que todas as técnicas de tratamento de restrição testadas aqui têm potencial para chegar a resultados satisfatórios na maioria das funções, tanto com o Enxame de Partículas quanto com a Evolução Diferencial. Entretanto, uma configuração mal escolhida pode mudar consideravelmente os resultados. Muitos autores negligenciam uma parte importante dos algoritmos, a técnica de tratamento das soluções que saem do espaço de busca. É comum encontrar artigos que sequer indicam qual técnica foi usada em seus testes. Os resultados obtidos aqui mostram como as técnicas de tratamento de restrição são afetadas pelos diferentes algoritmos de busca e configurações, e deixam visíveis algumas características bem peculiares delas.

Com a análise dos resultados, é possível dizer que o GCR é um dos mais sensíveis às mudanças nas configurações e por isso precisa de uma maior atenção nas definições das diferentes partes do algoritmo e um maior número de testes para calibrá-lo. Porém, é o que pode gerar os melhores resultados em diferentes funções. O BRM, seguido pelo PFS e pelo SR, é o mais constante na entrega de resultados viáveis, independente da configuração escolhida. O APM é o que entrega resultados viáveis em um menor número de funções, mas mostra bons valores em algumas configurações, chegando a competir com o GCR.

A escolha do método a ser usado depende muito do esforço que vai ser posto no algoritmo de otimização e do tipo de resposta visado. Se a busca for pela quantidade de soluções viáveis sem ter que se preocupar muito com a eficiência do algoritmo base, o BRM é uma ótima escolha. Por outro lado, se a busca for pela qualidade das soluções viáveis entregues, o GCR apresenta melhores resultados. Todavia, ele exige um tempo maior do usuário no equilíbrio das diferentes partes do algoritmo de otimização e do parâmetro P_f da própria técnica.

1.1 Trabalhos Futuros

Os experimentos desta dissertação foram realizados usando as funções de *benchmark* do CEC 2006. Um objetivo a curto prazo e relativamente simples é trocar essas funções pelas funções de *benchmark* do CEC 2010 e comparar os resultados nas cinco configurações apresentadas aqui. Uma vez que essas funções possuem muitas dimensões, elas podem ser consideravelmente difíceis, o que pode aumentar a diferença

nos resultados com as diferentes técnicas, tornando mais fácil a comparação das médias e das melhores soluções obtidas, e, talvez, enfatizar as características observadas, como a sensibilidade do GCR.

Já, um desafio a longo prazo, seria propor um algoritmo novo ou uma alteração de um existente que defina bem todas as suas diferentes partes e que tenha uma estratégia para tratar as funções com restrição.

Os algoritmos de otimização que permitem que o usuário defina as suas diferentes partes e as formas de tratar as restrições são bastante flexíveis. Entretanto, algumas alterações podem piorar os resultados, por exemplo, a topologia estrela do PSO em relação a topologia anel. O acoplamento das técnicas de tratamento de restrições também podem demandar alterações no algoritmo de otimização, como foi feito neste trabalho e que aumentou o tempo de processamento. Além disso, é difícil dizer se a junção de um determinado algoritmo de otimização com uma determinada técnica de restrição faz sentido. Será que a operação de seleção do DE não está eliminando algumas soluções inviáveis que algumas técnicas de restrição estão tentando manter? Dessa forma, ter um algoritmo de otimização mais bem definido, coeso, pode acabar compensando a diminuição da sua flexibilidade.

REFERÊNCIAS

Arabas, J., Szczepankiewicz, A., & Wroniak, T., 2010. Experimental Comparison of Methods to Handle Boundary Constraints in Diff erential Evolution. *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN XI*, LNCS, vol. 6239, pp. 411-420.

Barbosa, H. J. C., & Lemonge, A. C. C., 2002. An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems. *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference - GECCO*, pp. 287–294, 9-13.

Barbosa, H. J. C., & Lemonge, A. C. C., 2008. An adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. *Frontiers in Evolutionary Robotics*, vol. 1, pp.9-34.

Clerc, M., 1999. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. *Proceeding of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*, Washington, DC, pp.1951-1957.

Deb, K., 2000. An Efficient Constraint Handling Method for Genetic Algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, n. 2, pp. 311-338.

Eberhart, R. C., Simpson, P., & Dobbins, R., 1996. *Computational Intelligence PC Tools*. Academic Press.

Eberhart, R. C., and Shi, Y. (2000). Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. *Proceedings of the 2000 International Congress on Evolutionary Computation*, San Diego, California, pp.84-88.

Helwig, S., Branke, J., & Member, S. M., 2012. Experimental analysis of bound handling techniques in particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 17, pp. 259-271.

Ho, P. Y., & Shimizu, K., 2007. Evolutionary constrained optimization using an addition of ranking method and a percentage-based tolerance value adjustment scheme. *Information Sciences*, vol. 177, n. 14, pp. 2985-3004.

Holland, J.H., 1975. Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor MI: University of Michigan Press.

Liang, J. J., Runarsson, T. P., Mezura-Montes, E., Clerc, M., Suganthan, P.N., Coello, C. A. C., & Deb, K., 2006. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2006 Special Session on Constrained Real-Parameter Optimization. Technical Report, Nanyang Technological University, Singapore.

Karaboga, D., & Ökdem, S., 2004. A simple and global optimization algorithm for engineering problems: differential evolution algorithm. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences* 12(1), 53–60.

Kennedy, J., & Eberhart, R., 1995. Particle Swarm Optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948. Perth, Australia.

Mezura-Montes, E., Velázquez- Reyes, J., & Coello, C.A.C., 2006. A Comparative Study of Differential Evolution Variants for Global Optimization. *Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation- GECCO06*, pp.485-492.

Michalewicz, Z., & Schoenauer, M., 1996. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation*, vol. 4, pp. 1–32.

Rodrigues, M.C., de Lima, B.S.L.P. & Guimarães, S., 2015. Balanced ranking method for constrained optimization problems using evolutionary algorithms. *Information Sciences*. (Aceito para publicação em 2015, doi:10.1016/j.ins.2015.08.012).

Runarsson, T.P., & Yao, X., 2000. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 4, n.3, pp. 284-294.

Runarsson, T.P., & Yao, X., 2002. Constrained Evolutionary Optimization: The Penalty Function Approach. Sarker, R., Mohammadian, M., & Yao, X. (eds.) *Evolutionary Optimization: International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 48, pp. 87-113. Springer, New York.

Shi, Y., & Eberhart, R., 1998. Parameter selection in Particle Swarm Optimization. *Proceeding of the 7th Annual Conference on Evolutionary Programming*, pp. 591-600. Springer-Verlag.

Storn, R., & Price, K., 1995. Differential evolution - A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. Technical Report TR-95-012, ICSI, USA.

Storn, R., & Price, K., 1996. Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, vol. 4, n. 11, pp. 341–359.

ANEXO

G1

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = 5\sum_{i=1}^{4} x_i - 5\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=5}^{13} x_i$$

$sujeito\ a$:

$$g_1(\vec{x}) = 2x_1 + 2x_2 + x_{10} + x_{11} - 10 \leq 0$$

$$g_2(\vec{x}) = 2x_1 + 2x_3 + x_{10} + x_{12} - 10 \leq 0$$

$$g_3(\vec{x}) = 2x_2 + 2x_3 + x_{11} + x_{12} - 10 \leq 0$$

$$g_4(\vec{x}) = -8x_1 + x_{10} \leq 0$$

$$g_5(\vec{x}) = -8x_2 + x_{11} \leq 0$$

$$g_6(\vec{x}) = -8x_3 + x_{12} \leq 0$$

$$g_7(\vec{x}) = -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0$$

$$g_8(\vec{x}) = -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0$$

$$g_9(\vec{x}) = -2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0$$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 1\ (i = 1, \dots, 9, 13)$

$0 \leq x_i \leq 100\ (i = 10, 11, 12)$

G2

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = -\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos^4(x_i) - 2\prod_{i=1}^{n}\cos^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i x_i^2}}\right|$$

$sujeito\ a$:

$$g_1(\vec{x}) = 0.75 - \prod_{i=1}^{n} x_i \leq 0$$

$$g_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 7.5n \leq 0$$

$onde$:

$n = 20$

$0 \leq x_i \leq 10 \ (i = 1, \dots, n)$

G3

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = -(\sqrt{n})^n \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$sujeito\ a$:

$$h_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0$$

$onde$:

$n = 10$

$0 \leq x_i \leq 10 \ (i = 1, \dots, n)$

G4

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = 5.3578547x_3^2 + 0.8356891x_1x_5 + 37.293239x_1 - 40792.141$$

$sujeito\ a$:

$$g_1(\vec{x}) = 85.334407 + 0.0056858x_2x_5 + 0.0006262x_1x_4 - 0.0022053x_3x_5 - 92 \leq 0$$

$$g_2(\vec{x}) = -85.334407 - 0.0056858x_2x_5 - 0.0006262x_1x_4 + 0.0022053x_3x_5 \leq 0$$

$$g_3(\vec{x}) = 80.51249 + 0.0071317x_2x_5 + 0.0029955x_1x_2 + 0.0021813x_3^2 - 110 \leq 0$$

$$g_4(\vec{x}) = -80.51249 - 0.0071317x_2x_5 - 0.0029955x_1x_2 - 0.0021813x_3^2 + 90 \leq 0$$

$$g_5(\vec{x}) = 9.300961 + 0.0047026x_3x_5 + 0.0012547x_1x_3 + 0.0019085x_3x_4 - 25 \leq 0$$

$$g_6(\vec{x}) = -9.300961 - 0.0047026x_3x_5 - 0.0012547x_1x_3 - 0.0019085x_3x_4 + 20 \leq 0$$

$onde$:

$78 \leq x_1 \leq 102$

$33 \leq x_2 \leq 45$

$27 \leq x_i \leq 45\ (i = 3,4,5)$

G5

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = 3x_1 + 0.000001x_1^3 + 2x_2 + \left(\frac{0.000002}{3}\right)x_2^3$$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -x_4 + x_3 - 0.55 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = -x_3 + x_4 - 0.55 \leq 0$

$h_3(\vec{x}) = 1000\sin(-x_3 - 0.25) + 1000\sin(-x_4 - 0.25) + 894.8 - x_1 = 0$

$h_4(\vec{x}) = 1000\sin(x_3 - 0.25) + 1000\sin(x_3 - x_4 - 0.25) + 894.8 - x_2 = 0$

$h_5(\vec{x}) = 1000\sin(x_4 - 0.25) + 1000\sin(x_4 - x_3 - 0.25) + 1294.8 = 0$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 1200\ (i = 1,2)$

$-0.55 \leq x_i \leq 0.55\ (i = 3,4)$

G6

$minimize$:

$f(\vec{x}) = (x_1 - 10)^3 + (x_2 - 20)^3$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 100 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 5)^2 - 82.81 \leq 0$

$onde$:

$13 \leq x_1 \leq 100$

$0 \leq x_2 \leq 100$

G7

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 + (x_3 - 10)^2 + 4(x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 + 2(x_6 - 1)^2 + 5x_7^2 + 7(x_8 - 11)^2 + 2(x_9 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + 45$$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -105 + 4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = 10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 \leq 0$

$g_3(\vec{x}) = -8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_1 - 12 \leq 0$

$g_4(\vec{x}) = 3(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 2x_3^2 - 7x_4 - 120 \leq 0$

$g_5(\vec{x}) = 5x_1^2 + 8x_2 + (x_3 - 6)^2 - 2x_4 - 40 \leq 0$

$g_6(\vec{x}) = x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 - 2x_1x_2 + 14x_5 - 6x_6 \leq 0$

$g_7(\vec{x}) = 0.5(x_1 - 8)^2 + 2(x_2 - 4)^2 + 3x_5^2 - x_6 - 30 \leq 0$

$g_8(\vec{x}) = -3x_1 + 6x_2 + 12(x_9 - 8)^2 - 7x_{10} \leq 0$

$-10 \leq x_i \leq 10\ (i = 1, \dots, 10)$

G8

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = -\frac{\sin^3(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)}{x_1^3(x_1 + x_2)}$$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = 1 - x_1 + (x_2 - 4)^2 \leq 0$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 10\ (i = 1, 2)$

G9

$minimize$:

$f(\vec{x}) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 - 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 + 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7$

$g_1(\vec{x}) = -127 + 2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = -282 + 7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 \leq 0$

$g_3(\vec{x}) = -196 + 23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 \leq 0$

$g_4(\vec{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 \leq 0$

$onde$:

$-10 \leq x_i \leq 10\ (i = 1, \ldots, 7)$

G10

$minimize$:

$f(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -1 + 0.0025(x_4 + x_6) \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = -1 + 0.0025(x_5 + x_7 - x_4) \leq 0$

$g_3(\vec{x}) = -1 + 0.01(x_8 - x_5) \leq 0$

$g_4(\vec{x}) = -x_1x_6 + 833.33252x_4 + 100x_1 - 83333.333 \leq 0$

$g_5(\vec{x}) = -x_2x_7 + 1250x_5 + x_2x_4 - 1250x_4 \leq 0$

$g_6(\vec{x}) = -x_3 x_8 + 1250000 + x_3 x_5 - 2500 x_5 \leq 0$

$onde$:

$100 \leq x_1 \leq 10000$

$1000 \leq x_i \leq 10000 \ (i = 2, 3)$

$10 \leq x_i \leq 1000 \ (i = 4, \ldots, 8)$

G11

$minimize$:

$f(\vec{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$

$sujeito\ a$:

$h(\vec{x}) = x_2 - x_1^2 = 0$

$onde$:

$-1 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, 2)$

G12

$minimize$:

$f(\vec{x}) = -(100 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 - (x_3 - 5)^2)/100$

$sujeito\ a$:

$g(\vec{x}) = (x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2 + (x_3 - r)^2 - 0.0625 \leq 0$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 10 \ (i = 1, 2, 3)$

$p, q, r = 1, \ldots, 9$

Uma solução é viável caso existam valores para p, q, r que respeitem a restrição.

G13

$minimize$:

$f(\vec{x}) = \boldsymbol{e^{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}}$

$sujeito\ a$:

$h_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0$

$h_2(\vec{x}) = x_2 x_3 - 5 x_4 x_5 = 0$

$h_3(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^3 + 1 = 0$

$onde$:

$-2.3 \leq x_i \leq 2.3 \ (i = 1, 2)$

$-3.2 \leq x_i \leq 3.2 \ (i = 3, 4, 5)$

G14

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{10} x_i \left(c_i + \ln \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{10} x_j} \right)$$

$sujeito\ a$:

$h_1(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_{10} - 2 = 0$

$h_2(\vec{x}) = x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 1 = 0$

$h_3(\vec{x}) = x_3 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} - 1 = 0$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 10 \ (i = 1, \dots, 10)$

$c_1 = -6.089$

$c_2 = -17.164$

$c_3 = -34.054$

$c_4 = -5.914$

$c_5 = -24.721$

$c_6 = -14.986$

$c_7 = -21.1$

$c_8 = -10.708$

$c_9 = -26.662$

$c_{10} = -22.179$

G15

$minimize$:

$f(\vec{x}) = 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3$

$sujeito\ a$:

$h_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$

$h_2(\vec{x}) = 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 10 \ (i = 1, 2, 3)$

G16

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = 0.000117y_{14} + 0.1365 + 0.00002358y_{13} + 0.000001502y_{16} + 0.0321y_{12} + 0.004324y_5 + 0.0001\frac{c_{15}}{c_{16}} + 37.48\frac{y_2}{c_{12}} - 0.0000005843y_{17}$$

$$g_1(\vec{x}) = \frac{0.28}{0.72}y_5 - y_4 \leq 0$$

$$g_2(\vec{x}) = x_3 - 1.5x_2 \leq 0$$

$$g_3(\vec{x}) = 3496\frac{y_2}{c_{12}} - 21 \leq 0$$

$$g_4(\vec{x}) = 110.6 + y_1 - \frac{62212}{c_{17}} \leq 0$$

$$g_5(\vec{x}) = 213.1 - y_1 \leq 0$$

$$g_6(\vec{x}) = y_1 - 405.23 \leq 0$$

$$g_7(\vec{x}) = 17.505 - y_2 \leq 0$$

$$g_8(\vec{x}) = y_2 - 1053.6667 \leq 0$$

$$g_9(\vec{x}) = 11.275 - y_3 \leq 0$$

$$g_{10}(\vec{x}) = y_3 - 35.03 \leq 0$$

$$g_{11}(\vec{x}) = 214.228 - y_4 \leq 0$$

$$g_{12}(\vec{x}) = y_4 - 665.585 \leq 0$$

$$g_{13}(\vec{x}) = 7.458 - y_5 \leq 0$$

$$g_{14}(\vec{x}) = y_5 - 584.463 \leq 0$$

$$g_{15}(\vec{x}) = 0.961 - y_6 \leq 0$$

$$g_{16}(\vec{x}) = y_6 - 265.916 \leq 0$$

$g_{17}(\vec{x}) = 1.612 - y_7 \leq 0$

$g_{18}(\vec{x}) = y_7 - 7.046 \leq 0$

$g_{19}(\vec{x}) = 0.146 - y_8 \leq 0$

$g_{20}(\vec{x}) = y_8 - 0.222 \leq 0$

$g_{21}(\vec{x}) = 107.99 - y_9 \leq 0$

$g_{22}(\vec{x}) = y_9 - 273.366 \leq 0$

$g_{23}(\vec{x}) = 922.693 - y_{10} \leq 0$

$g_{24}(\vec{x}) = y_{10} - 1286.105 \leq 0$

$g_{25}(\vec{x}) = 926.832 - y_{11} \leq 0$

$g_{26}(\vec{x}) = y_{11} - 1444.046 \leq 0$

$g_{27}(\vec{x}) = 18.766 - y_{12} \leq 0$

$g_{28}(\vec{x}) = y_{12} - 537.141 \leq 0$

$g_{29}(\vec{x}) = 1072.163 - y_{13} \leq 0$

$g_{30}(\vec{x}) = y_{13} - 3247.039 \leq 0$

$g_{31}(\vec{x}) = 8961.448 - y_{14} \leq 0$

$g_{32}(\vec{x}) = y_{14} - 26844.086 \leq 0$

$g_{33}(\vec{x}) = 0.063 - y_{15} \leq 0$

$g_{34}(\vec{x}) = y_{15} - 0.386 \leq 0$

$g_{35}(\vec{x}) = 71084.33 - y_{16} \leq 0$

$g_{36}(\vec{x}) = -140000 + y_{16} \leq 0$

$g_{37}(\vec{x}) = 2802713 - y_{17} \leq 0$

$g_{38}(\vec{x}) = y_{17} - 12146108 \leq 0$

$onde$:

$704.4128 \leq x_1 \leq 906.3855$

$$68.6 \leq x_2 \leq 288.88$$

$$0 \leq x_3 \leq 134.75$$

$$193 \leq x_4 \leq 287.0966$$

$$25 \leq x_5 \leq 84.1988$$

$$y_1 = x_2 + x_3 + 41.6$$

$$c_1 = 0.024x_4 - 4.62$$

$$y_2 = \frac{12.5}{c_1} + 12$$

$$c_2 = 0.0003535x_1^2 + 0.5311x_1 + -0.08705y_2x_1$$

$$c_3 = 0.052x_1 + 78 + 0.002377y_2x_1$$

$$y_3 = \frac{c_2}{c_3}$$

$$y_4 = 19y_3$$

$$c_4 = 0.04782(x_1 - y_3) + \frac{0.1956(x_1 - y_3)^2}{x_2} + 0.6376y_4 + 1.594y_3$$

$$c_5 = 100x_2$$

$$c_6 = x_1 - y_3 - y_4$$

$$c_7 = 0.950 - \frac{c_4}{c_5}$$

$$y_5 = c_6c_7$$

$$y_6 = x_1 - y_5 - y_4 - y_3$$

$$c_8 = (y_5 + y_4)0.995$$

$$y_7 = \frac{c_8}{y_1}$$

$$y_8 = \frac{c_8}{3798}$$

$$c_9 = y_7 - \frac{0.0663y_7}{y_8} - 0.3153$$

$$y_9 = \frac{96.82}{c_9} + 0.321y_1$$

$$y_{10} = 1.29y_5 + 1.258y_4 + 2.29y_3 + 1.71y_6$$

$$y_{11} = 1.71x_1 - 0.452y_4 + 0.580y_3$$

$$c_{10} = \frac{12.3}{752.3}$$

$$c_{11} = (1.75y_2)(0.995x_1)$$

$$c_{12} = 0.995y_{10} + 1998$$

$$y_{12} = c_{10}x_1 + \frac{c_{11}}{c_{12}}$$

$$y_{13} = c_{12} - 1.75y_2$$

$$y_{14} = 3623 + 64.4x_2 + 58.4x_3 + \frac{146312}{y_9 + x_5}$$

$$c_{13} = 0.995y_{10} + 60.8x_2 + 48x_4 - 0.1121y_{14} - 5095$$

$$y_{15} = \frac{y_{13}}{c_{13}}$$

$$y_{16} = 148000 - 331000y_{15} + 40y_{13} - 61y_{15}y_{13}$$

$$c_{14} = 2324y_{10} - 28740000y_2$$

$$y_{17} = 14130000 - 1328y_{10} - 531y_{11} + \frac{c_{14}}{c_{12}}$$

$$c_{15} = \frac{y_{13}}{y_{15}} - \frac{y_{13}}{0.52}$$

$$c_{16} = 1.104 - 0.72y_{15}$$

$$c_{17} = y_9 + x_5$$

G17

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 30x_1 & 0 \le x_1 < 300 \\ 31x_2 & 300 \le x_2 < 400 \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 28x_x & 0 \le x_2 < 100 \\ 29x_2 & 100 \le x_2 < 200 \\ 30x_2 & 200 \le x_2 < 1000 \end{cases}$$

$sujeito\ a$:

$$h_1(\vec{x}) = -x_1 + 300 - \frac{x_3 x_4}{131.078}\cos(1.48477 - x_6) + \frac{0.90798x_3^2}{131.078}\cos(1.47588) = 0$$

$$h_2(\vec{x}) = -x_2 - \frac{x_3 x_4}{131.078}\cos(1.48477 + x_6) + \frac{0.90798x_4^2}{131.078}\cos(1.47588) = 0$$

$$h_3(\vec{x}) = -x_5 - \frac{x_3 x_4}{131.078}\sin(1.48477 - x_6) + \frac{0.90798x_4^2}{131.078}\sin(1.47588) = 0$$

$$h_4(\vec{x}) = 200 - \frac{x_3 x_4}{131.078}\sin(1.48477 - x_6) + \frac{0.90798x_3^2}{131.078}\sin(1.47588) = 0$$

$onde$:

$0 \le x_1 \le 400$

$0 \le x_2 \le 1000$

$340 \le x_i \le 420 \ \ (i = 3, 4)$

$-1000 \le x_5 \le 1000$

$0 \le x_6 \le 0.5236$

G18

$minimize$:

$f(\vec{x}) = -0.5(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_9 - x_5x_9 \mp x_5x_8 - x_6x_7)$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = x_3^2 + x_4^2 - 1 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = x_9^2 - 1 \leq 0$

$g_3(\vec{x}) = x_5^2 + x_6^2 - 1 \leq 0$

$g_4(\vec{x}) = x_1^2 + (x_2 - x_9)^2 - 1 \leq 0$

$g_5(\vec{x}) = (x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 - 1 \leq 0$

$g_6(\vec{x}) = (x_1 - x_7)^2 + (x_2 - x_8)^2 - 1 \leq 0$

$g_7(\vec{x}) = (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 - 1 \leq 0$

$g_8(\vec{x}) = (x_3 - x_7)^2 + (x_4 - x_8)^2 - 1 \leq 0$

$g_9(\vec{x}) = x_7^2 + (x_8 - x_9)^2 - 1 \leq 0$

$g_{10}(\vec{x}) = x_2x_3 - x_1x_4 \leq 0$

$g_{11}(\vec{x}) = -x_3x_9 \leq 0$

$g_{12}(\vec{x}) = x_5x_9 \leq 0$

$g_{13}(\vec{x}) = x_6x_7 - x_5x_8 \leq 0$

$onde$:

$-10 \leq x_i \leq 10\ (i = 1, \dots, 8)$

$0 \leq x_9 \leq 20$

G19

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} c_{ij}x_{(10+i)}x_{(10+j)} + 2\sum_{j=1}^{5} d_j x_{(10+j)}^3 - \sum_{i=1}^{10} b_i x_i$$

$sujeito\ a$:

$$g_j(\vec{x}) = -2\sum_{i=1}^{5} c_{ij}x_{(10+i)} + 3d_j x_{(10+j)}^2 - e_j + \sum_{i=1}^{10} a_{ij}x_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 10 \ \ (i = 1, \dots, 15)$

$\vec{b} = [-40, -2, -0.25, -4, -4, -1, -40, -60, 5, 1]$

j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
e_j	-15	-27	-36	-18	-12
c_{1j}	30	-20	-10	32	-10
c_{2j}	-20	39	-6	-31	32
c_{3j}	-10	-6	10	-6	-10
c_{4j}	32	-31	-6	39	-20
c_{5j}	-10	32	-10	-20	30
d_j	4	8	10	6	2
a_{1j}	-16	2	0	1	0
a_{2j}	0	-2	0	0.4	2
a_{3j}	-3.5	0	2	0	0
a_{4j}	0	-2	0	-4	-1
a_{5j}	0	-9	-2	1	-2.8
a_{6j}	2	0	-4	0	0
a_{7j}	-1	-1	-1	-1	-1
a_{8j}	-1	-2	-3	-2	-1
a_{9j}	1	2	3	4	5
a_{10j}	1	1	1	1	1

Dados da G19

G20

$minimize$:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{24} a_i x_i$$

$sujeito\ a$:

$$g_i(\vec{x}) = \frac{x_i + x_{(i+12)}}{\sum_{j=1}^{24} x_j + e_i} \leq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$g_i(\vec{x}) = \frac{x_{i+3} + x_{(i+15)}}{\sum_{j=1}^{24} x_j + e_i} \leq 0 \quad (i = 4, 5, 6)$$

$$h_i(\vec{x}) = \frac{x_{i+12}}{b_{(i+12)} \sum_{j=13}^{24} \frac{x_j}{b_j}} - \frac{c_i x_i}{40 b_i \sum_{j=1}^{12} \frac{x_j}{b_j}} = 0 \quad (i = 1, \dots, 12)$$

$$h_{13}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{24} x_i - 1 = 0$$

$$h_{14}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{12} \frac{x_i}{d_i} + k \sum_{i=13}^{24} \frac{x_i}{b_i} - 1.671 = 0$$

$onde$:

$$0 \leq x_i \leq 10 \quad (i = 1, \dots, 24)$$

$$k = (0.7302)(530)\left(\frac{14.7}{40}\right)$$

i	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{c_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{e_i}$
1	0.0693	44.094	123.7	31.244	0.1
2	0.0577	58.12	31.7	36.12	0.3
3	0.05	58.12	45.7	34.784	0.4
4	0.2	137.4	14.7	92.7	0.3
5	0.26	120.9	84.7	82.7	0.6
6	0.55	170.9	27.7	91.6	0.3
7	0.06	62.501	49.7	56.708	

8	0.1	84.94	7.1	82.7	
9	0.12	133.425	2.1	80.8	
10	0.18	82.507	17.7	64.517	
11	0.1	46.07	0.85	49.4	
12	0.09	60.097	0.64	49.1	
13	0.0693	44.094			
14	0.0577	58.12			
15	0.05	58.12			
16	0.2	137.4			
17	0.26	120.9			
18	0.55	170.9			
19	0.06	62.501			
20	0.1	84.94			
21	0.12	133.425			
22	0.18	82.507			
23	0.1	46.07			
24	0.09	60.097			

Dados da G20

G21

$minimize$:

$f(\vec{x}) = x_1$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -x_1 + 35x_2^{0.6} + 35x_3^{0.6} \leq 0$

$h_1(\vec{x}) = -300x_3 + 7500x_5 - 75000x_6 - 25x_4x_5 + 25x_4x_6 + x_3x_4 = 0$

$h_2(\vec{x}) = -100x_2 + 155.365x_4 + 2500x_7 - x_2x_4 - 25x_4x_7 - 15536.5 = 0$

$h_3(\vec{x}) = -x_5 + \ln(-x_4 + 900) = 0$

$h_4(\vec{x}) = -x_6 + \ln(x_4 + 300) = 0$

$h_5(\vec{x}) = -x_7 + \ln(-2x_4 + 700) = 0$

$onde$:

$0 \leq x_1 \leq 1000$

$0 \leq x_i \leq 40 \quad (i = 2, 3)$

$100 \leq x_4 \leq 300$

$6.3 \leq x_5 \leq 6.7$

$5.9 \leq x_6 \leq 6.4$

$4.5 \leq x_7 \leq 6.25$

G22

$minimize$:

$f(\vec{x}) = x_1$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -x_1 + x_2^{0.6} + x_3^{0.6} + x_4^{0.6} \leq 0$

$h_1(\vec{x}) = x_5 - 100000x_8 + 10^7 = 0$

$h_2(\vec{x}) = x_6 - 100000x_8 + 100000x_9 = 0$

$h_3(\vec{x}) = x_7 - 100000x_9 + 5 \times 10^7 = 0$

$h_4(\vec{x}) = x_5 - 100000x_{10} + 3.3 \times 10^7 = 0$

$h_5(\vec{x}) = x_6 - 100000x_{11} + 4.4 \times 10^7 = 0$

$h_6(\vec{x}) = x_7 - 100000x_{12} + 6.6 \times 10^7 = 0$

$h_7(\vec{x}) = x_5 - 120x_2x_{13} = 0$

$h_8(\vec{x}) = x_6 - 80x_3x_{14} = 0$

$h_9(\vec{x}) = x_7 - 40x_4x_{15} = 0$

$h_{10}(\vec{x}) = x_8 - x_{11} + x_{16} = 0$

$h_{11}(\vec{x}) = x_9 - x_{12} + x_{17} = 0$

$h_{12}(\vec{x}) = -x_{18} + \ln(x_{10} - 100) = 0$

$h_{13}(\vec{x}) = -x_{19} + \ln(x_8 + 300) = 0$

$h_{14}(\vec{x}) = -x_{20} + \ln(x_{16}) = 0$

$h_{15}(\vec{x}) = -x_{21} + \ln(x_9 + 400) = 0$

$h_{16}(\vec{x}) = -x_{22} + \ln(x_{17}) = 0$

$h_{17}(\vec{x}) = -x_8 - x_{10} + x_{13}x_{18} - x_{13}x_{19} + 400 = 0$

$h_{18}(\vec{x}) = x_8 - x_9 - x_{11} + x_{14}x_{20} - x_{14}x_{21} + 400 = 0$

$h_{19}(\vec{x}) = x_9 - x_{12} - 4.60517x_{15} + x_{15}x_{22} + 100 = 0$

$onde$:

$0 \leq x_1 \leq 20000$

$0 \leq x_i \leq 10^6 \quad (i = 2, 3, 4)$

$0 \leq x_i \leq 4 \times 10^6 \quad (i = 5, 6, 7)$

$100 \leq x_8 \leq 299.99$

$100 \leq x_9 \leq 399.99$

$100.1 \leq x_{10} \leq 300$

$100 \leq x_{11} \leq 400$

$100 \leq x_{12} \leq 600$

$0 \leq x_i \leq 500 \quad (i = 13, 14, 15)$

$0.01 \leq x_{16} \leq 300$

$0.01 \leq x_{17} \leq 400$

$-4.7 \leq x_i \leq 6.25 \quad (i = 18, \ldots, 22)$

G23

$minimize$:

$f(\vec{x}) = -9x_5 - 15x_8 + 6x_1 + 16x_2 + 10(x_6 + x_7)$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = x_9x_3 + 0.02x_6 - 0.025x_5 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = x_9x_4 + 0.02x_7 - 0.015x_8 \leq 0$

$h_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

$h_2(\vec{x}) = 0.03x_1 + 0.01x_2 - x_9(x_3 + x_4) = 0$

$h_3(\vec{x}) = x_3 + x_6 - x_5 = 0$

$h_4(\vec{x}) = x_4 + x_7 - x_8 = 0$

$onde$:

$0 \leq x_i \leq 300 \quad (i = 1, 2, 6)$

$0 \leq x_i \leq 100 \quad (i = 3, 5, 7)$

$0 \leq x_i \leq 200 \quad (i = 4, 8)$

$0.01 \leq x_9 \leq 0.03$

G24

$minimize$:

$f(\vec{x}) = -x_1 - x_2$

$sujeito\ a$:

$g_1(\vec{x}) = -2x_1^4 + 8x_1^3 - 8x_1^2 + x_2 - 2 \leq 0$

$g_2(\vec{x}) = -4x_1^4 + 32x_1^3 - 88x_1^2 + 96x_1 + x_2 - 36 \leq 0$

$onde$:

$0 \leq x_1 \leq 3$

$0 \leq x_2 \leq 4$