

AJUSTE DE MODELO COMPUTACIONAL NA DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Michael Leone Madureira de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Ney Roitman
Daniel Alves Castello

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

AJUSTE DE MODELO COMPUTACIONAL NA DINÂMICA DE
ESTRUTURAS

Michael Leone Madureira de Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

Examinada por:

Prof. Ney Roitman, D.Sc.

Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.

Prof. Carlos Magluta, D.Sc.

Prof^a. Roberta de Queiroz Lima, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2017

Souza, Michael Leone Madureira de

Ajuste de modelo computacional na dinâmica de estruturas/Michael Leone Madureira de Souza. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XIII, 91 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Ney Roitman

Daniel Alves Castello

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 69 – 73.

1. Ajuste de Modelos. 2. Estimacão de Parâmetros.
3. Função de Verosimilhança. I. Roitman, Ney *et al.*
- II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A minha esposa Mariana e meus
pais Roberto e Vera*

Agradecimentos

A Deus acima de tudo.

A minha esposa pelo carinho, apoio e compreensão nos momentos ausentes para a realização deste trabalho.

Aos meus pais pelo amor, dedicação e ensinamentos que me permitiram chegar até aqui.

A minha família pelo suporte e incentivo ao longo de toda essa jornada.

Aos meus orientadores Ney Roitman e Daniel Alves Castello pela dedicação, aprendizado e incentivo na busca do conhecimento.

Aos colegas Laila Saraiva, Dianelys Vega, Mariana Miglio, Elvis Jhoarsy, Renato Lefone do LABEST do PEC-COPPE/UFRJ e Joan O'Connor do PEM-COPPE/UFRJ pela amizade e companheirismo.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

AJUSTE DE MODELO COMPUTACIONAL NA DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Michael Leone Madureira de Souza

Dezembro/2017

Orientadores: Ney Roitman
Daniel Alves Castello

Programa: Engenharia Civil

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento simples de ajuste de modelos computacionais para avaliação do comportamento dinâmico de estruturas. Foram realizados ensaios experimentais em uma viga bi-apoiada, onde a excitação externa é fornecida por impactos de um martelo instrumentado e as medições são realizadas em três pontos por acelerômetros piezoelétricos. O arranjo experimental é submetido a um processo de montagem e desmontagem para simular um cenário mais próximo do real, onde grande variabilidade das propriedades modais é, em geral, observada. O módulo de Young e os coeficientes do modelo de amortecimento proporcional são adotados como variáveis incertas e ajustadas ao longo de um procedimento de otimização. A propagação das incertezas é realizada a partir do método de simulação de Monte Carlo. O grande número de dados experimentais permite uma investigação da função de verossimilhança. O modelo calibrado é validado a partir da comparação entre os dados experimentais e as previsões numéricas para a curva de amortecimento e função de resposta de frequência (FRF). Por fim, o modelo validado é utilizado para identificação de danos, que neste trabalho são simulados pelo acréscimo de pequenas massas ao longo da estrutura. A otimização determinística é realizada a luz do problema inverso aplicado via método dos elementos finitos. A solução do problema inverso é buscada utilizando-se o algoritmo de enxame de partículas e a função *lsqnonlin* do Matlab.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MODEL UPDATING ANALYSES ON STRUCTURAL DYNAMICS

Michael Leone Madureira de Souza

December/2017

Advisors: Ney Roitman

Daniel Alves Castello

Department: Civil Engineering

The main objective of this work is to present model updating analyses. Experimental modal analyses are performed on a simply supported beam. Measurements come from three accelerometers and the input excitation is provided by an impact hammer. The experimental set-up is submitted to a process of assembling and disassembling the beam supports in order to simulate a scenario closer to the real one in which one may face variability of modal data. The Young's modulus and the coefficients of the proportional damping model are considered as the updating structural variables in optimization procedure. Data variability is taken into account along the model updating process by means of the likelihood function and through Monte Carlo simulation analysis. The great number of experimental data allows the likelihood function investigation. The calibrated model is assessed by comparing the model-predicted natural frequencies and the frequency response function (FRF) with their measured counterparts. Finally, the calibrated model is used for damage identification which is simulated by an addition of small masses on the structure. Inverse method is applied to perform this study based on a finite element analysis model updating.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	2
1.2 Objetivo e Organização do Trabalho	5
1.3 Metodologia	6
2 Desenvolvimento Teórico	10
2.1 Introdução	10
2.2 Problema Dinâmico	10
2.3 Formulação via Problema Inverso	11
2.4 Propagação de Incertezas	13
2.4.1 Simulações de Monte Carlo	13
2.4.2 Cálculo do Operador Jacobiano	15
2.5 Identificação de Dano	18
3 Procedimento Experimental	20
3.1 Introdução	20
3.2 Esquema Experimental	20
3.2.1 Descrição dos Ensaios	20
3.2.2 Descrição dos Ensaios com Simulação de Dano	23
3.3 Resultados Obtidos	24
3.3.1 Pós-Processamento e Tratamento Estatístico	24
3.3.2 Apresentação e Discussão dos Resultados	26
4 Apresentação e Discussão dos Resultados	34
4.1 Estimação do Parâmetro θ	34
4.2 Validação do Modelo	35
4.2.1 Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	35
4.2.2 Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	41

4.2.3	Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ - 1ª formulação	47
4.2.4	Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ - 2ª formulação	49
4.2.5	Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ - 3ª formulação	51
4.3	Identificação de Dano	55
4.3.1	Estimação do Parâmetro η	57
4.3.2	Avaliação das Predições Computacionais	62
5	Conclusão	67
	Referências Bibliográficas	69
A	Derivação do Operador J	74
B	Funções de Resposta em Frequência	77
B.1	FRFs Experimentais Íntegra X Danificada	77
B.2	FRFs na Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	78
B.3	FRFs na Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	81
B.4	FRFs na 3ª Formulação da Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	84
B.5	FRFs no Cenário A1 de Dano	87
B.6	FRFs no Cenário A2 de Dano	88
B.7	FRFs no Cenário B1 de Dano	89
B.8	FRFs no Cenário B2 de Dano	90

Lista de Figuras

1.1	Fluxograma do ajuste do modelo computacional.	8
1.2	Fluxograma da identificação de danos.	9
3.1	Vista da viga ensaiada e sua instrumentação	21
3.2	Ilustração do apoio da viga sobre o rolete.	21
3.3	Esquema experimental utilizado	22
3.4	Ilustração do aparato experimental.	22
3.5	Massas utilizadas na simulação de dano	23
3.6	Número de medições dos pólos experimentais.	25
3.7	Exemplo da saída da função <i>plotmatrix</i>	27
3.8	Dispersão dos polos experimentais.	28
3.9	Estimativa das pdfs das frequências naturais experimentais	29
3.10	Estimativa das pdfs das taxas de amortecimento experimentais	30
3.11	Comparação entre FRFs íntegra e danificada no AC1	33
4.1	Convergência das simulações para a hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	36
4.2	Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 1	37
4.3	Curva de amortecimento na hipótese 1.	38
4.4	FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1.	39
4.5	Regiões de ressonância da FRF no AC1.	41
4.6	Convergência das simulações para a hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$. Valores normalizados.	42
4.7	Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 2	42
4.8	Curva de amortecimento na hipótese 2.	44
4.9	FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2.	45
4.10	Regiões de ressonância da FRF no AC1 na hipótese 2	46
4.11	Dispersão do vetor de parâmetros para 1ª formulação da hipótese 3	47
4.12	Curva de amortecimento para 1ª formulação da hipótese 3.	48
4.13	Dispersão do vetor de parâmetros para 2ª formulação da hipótese 3	49
4.14	FRF no acelerômetro AC1 na 2ª formulação da hipótese 3.	50

4.15	Convergência das simulações para a 3ª formulação da hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$. Valores normalizados.	51
4.16	Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 3	52
4.17	Curva de amortecimento para a 3ª formulação da hipótese 3.	53
4.18	FRF no acelerômetro AC1 para a 3ª formulação da hipótese 3.	54
4.19	Regiões de ressonância da FRF no AC1 na 3ª formulação da hipótese 3	55
4.20	Ilustração da posição X em função da discretização pelo MEF.	58
4.21	Curvas de nível do funcional $S(\boldsymbol{\eta})$ no cenário A1	59
4.22	Curvas de nível do funcional $S(\boldsymbol{\eta})$ no cenário B2	60
4.23	Superfície 3D do funcional no cenário B2.	61
4.24	Identificação de dano supondo conhecida a posição da massa X_m	61
4.25	Identificação de dano supondo conhecida a magnitude da massa M_m	62
4.26	FRF no acelerômetro AC1 no cenário A1 de dano.	63
4.27	FRF no acelerômetro AC1 no cenário A2 de dano.	64
4.28	FRF no acelerômetro AC1 no cenário B1 de dano.	64
4.29	FRF no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.	65
4.30	APCC entre as FRFs numéricas no AC1 no cenário B2.	66
B.1	Comparação entre FRFs íntegra e danificada no AC2	77
B.2	Comparação entre FRFs íntegra e danificada no AC3	78
B.3	FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	78
B.4	FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	79
B.5	Regiões de ressonância da FRF no AC2 na hipótese 1	79
B.6	Regiões de ressonância da FRF no AC3 na hipótese 1	80
B.7	FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2	81
B.8	FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2	81
B.9	Regiões de ressonância da FRF no AC2 na hipótese 2	82
B.10	Regiões de ressonância da FRF no AC3 na hipótese 2	83
B.11	FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3	84
B.12	FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3	84
B.13	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3	85
B.14	Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3	86
B.15	FRF no acelerômetro AC2 no cenário A1 de dano.	87
B.16	FRF no acelerômetro AC3 no cenário A1 de dano.	87
B.17	FRF no acelerômetro AC2 no cenário A2 de dano.	88
B.18	FRF no acelerômetro AC3 no cenário A2 de dano.	88
B.19	FRF no acelerômetro AC2 no cenário B1 de dano.	89
B.20	FRF no acelerômetro AC3 no cenário B1 de dano.	89
B.21	FRF no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.	90

B.22 APCC entre as FRFs computacionais no AC2 no cenário B2	90
B.23 FRF no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.	91
B.24 APCC entre as FRFs computacionais no AC3 no cenário B2	91

Lista de Tabelas

3.1	Cenários de dano simulados	24
3.2	Resultado do tratamento estatístico dos dados experimentais.	26
3.3	Correlação entre as amostras experimentais da frequência natural e a taxa de amortecimento	31
3.4	Frequências naturais para a estrutura íntegra e com dano	32
4.1	Solução ótima do vetor θ	34
4.2	Correlação entre as variáveis do vetor θ na hipótese 1.	37
4.3	Correlação entre as variáveis do vetor θ na hipótese 2.	43
4.4	Correlação entre as variáveis do vetor θ para a 3ª formulação da hipótese 3.	52
4.5	Solução ótima do vetor η	58

Capítulo 1

Introdução

Modelos computacionais são utilizados para simular o comportamento de sistemas reais em praticamente todas as áreas da ciência e engenharia. Sua aplicação é muito variada: otimização, projeto, análise de estabilidade, análises preditivas, etc. [1]. No contexto de sistemas estruturais, esses modelos são geralmente utilizados para avaliar deformações, deslocamentos, tensões, respostas devido a cargas impostas, tais como ambientais, tráfego, etc.

Problemas reais possuem inúmeras informações que *a priori* são desconhecidas, ou incertas, geralmente relacionadas às propriedades do sistema físico, como, por exemplo, as condições de contorno, de carregamento, propriedades físicas, geométricas, etc. Muitas vezes, hipóteses são formuladas para contornar essa falta de informação, o que pode acabar levando a erros que diminuem a acurácia e, portanto, a qualidade da solução.

Infelizmente, a presença de incertezas não está relacionada somente ao sistema em análise. Tanto as hipóteses simplificadoras associadas ao processo de modelagem como os sinais aferidos nos ensaios experimentais podem gerar imprecisões nos dados utilizados para a solução do problema.

Neste cenário surge o conceito de ajuste de modelos (*model updating*) que pode ser entendido como um processo de calibração, ou ajuste, de determinados parâmetros do modelo. Nesse processo ocorre a reconstrução do modelo computacional da estrutura a partir de informações observadas sobre seu comportamento.

Sobre o prisma de problemas de vibração, por exemplo, são realizados ensaios experimentais na estrutura para inferir sobre determinadas propriedades dinâmicas do sistema, i.e., frequências naturais, formas modais, etc. com o objetivo de fornecer subsídios para o desenvolvimento de um modelo computacional que simule o comportamento da estrutura real.

A modelagem de incertezas é adicionada ao processo de ajuste de modelos computacionais. Nesta etapa, a investigação das incertezas associadas aos parâmetros do modelo ocorre a partir da inferência sobre os valores médios de suas incógnitas e

a influência dos respectivos desvios na predição numérica.

Destaca-se o fato de que uma das abordagens para a modelagem de incertezas baseia-se na Teoria da Probabilidade, [2].

Inúmeras são as aplicações do *model updating*, dentre as quais é possível citar: verificações de dimensionamento, validações, predições de resposta estrutural sobre condições de carga especiais ou excepcionais, estimação de propriedades estruturais, etc. Uma das aplicações mais difundidas na literatura técnica é a identificação de danos estruturais, [3] e [4].

Danos são definidos como modificações introduzidas nas estruturas de forma que sua performance atual e/ou futura seja prejudicada. Nesse contexto, de acordo com FARRAR *et al.* [5], SHM é o nome dado ao desenvolvimento da estratégia de identificação de danos nos campos da engenharia de estrutura, tanto civil quanto mecânica, naval e aeroespacial.

No presente trabalho considera-se a calibração e validação do modelo computacional de uma viga bi-apoiada e, posteriormente, a identificação de danos estruturais no sistema. É válido ressaltar que no contexto deste trabalho, o dano é simulado através da aplicação de massas pontuais ao longo do comprimento da estrutura.

1.1 Revisão Bibliográfica

O conceito de ajuste de modelos foi inicialmente introduzido por volta da década de 60 no âmbito da engenharia de controle e engenharia aeronáutica. Inicialmente denominado por identificação de sistemas (*system identification*), buscava o desenvolvimento de métodos de modelagem numérica baseados em observações do comportamento real dos sistemas. Essa área do conhecimento começou a receber atenção devido ao fato de que apesar de grande esforço dedicado à geração de modelos computacionais sofisticados, estes demonstravam pouca correlação quando tinham suas predições confrontadas com às obtidas experimentalmente.

De acordo com MOTTERSHEAD *et al.* [3] a diferença observada entre os dados experimentais e as predições pode ser ocasionada pelas incertezas relativas aos ensaios experimentais e também por: (i) erro relativo ao modelo matemático, i.e., incertezas inerentes às equações que governam o problema físico; (ii) erro relativo aos parâmetros, seja por hipóteses simplificadoras, condições de contorno inadequadas, etc. e (iii) erro relativo à ordem do modelo, problemas na discretização de sistemas complexos.

Quando a formulação matemática é conhecida, assim como sua ordem, o problema de identificação é reduzido para um problema de estimação de parâmetros.

Em 1971 ASTROM *et al.* [6] introduzem os fundamentos principais desta área de pesquisa. A formulação do problema está basicamente associada às entradas

(estímulos) e saídas (respostas) do sistema, a uma determinada classe de modelos e à escolha do modelo que melhor represente o caso de interesse. Os métodos de solução são divididos inicialmente em: métodos com processamento em tempo real, quando o processo é realizado durante a aquisição de informações do sistema, muito presente na engenharia de controle, e os métodos onde o processamento ocorre após a aquisição das informações. Os autores apresentam ainda inúmeras considerações sobre representações paramétricas, i.e., através de modelos de estado, e não-paramétricas, tais como funções de resposta impulsiva e séries de Volterra, discutindo as principais vantagens e desvantagens de cada abordagem.

O problema de estimação de parâmetros passa a ser um problema de otimização quando a escolha do modelo equivalente ao sistema físico é calibrado a partir da minimização de uma função custo. Sobre esse prisma, inúmeras questões são suscitadas, tais como a existência de mínimo global, unicidade da solução, a influência ou não do sinal de entrada na solução, etc. Os métodos decorrentes do processo de otimização estão associados geralmente a uma solução determinística, ou seja, definida a métrica para a busca da solução, esta é determinada sem que nenhuma consideração sobre sua incerteza seja desenvolvida.

Os métodos clássicos da estimação de parâmetros são baseados em aproximações por mínimos quadrados. Em 1795 Karl Friedrich Gauss definiu que "o valor mais provável de uma variável desconhecida é aquele para o qual a soma quadrática da diferença entre os dados observados e estimados, ponderada pelo grau de confiança na medição, é mínima", formulando o método dos mínimos quadrados. Desde então esse método vem sendo aprimorado para aplicação em diversos problemas. Nesse sentido, em 1981, STREJC [7] apresentou diversas formulações propostas para estimativas de parâmetros baseadas no método dos mínimos quadrados.

Com o surgimento de tecnologias de hardware e software mais eficientes e acessíveis, a análise via método dos elementos finitos, MEF, foi adotada quase como padrão por engenheiros e pesquisadores. Sua validação passou a ser realizada a partir da comparação entre os valores obtidos das análises experimentais e as previsões numéricas, [3].

A necessidade crescente de inferir o nível de confiança nos modelos computacionais fomentou a aplicação de teorias estatísticas, probabilísticas e estocásticas, no procedimento adotado para avaliar o grau de correlação entre a predição numérica e o comportamento real do sistema, [8] e [9]. A abordagem determinística cede espaço à uma solução dada por distribuições de probabilidade para as variáveis do vetor de parâmetros, [10].

Apesar de atrair a atenção da comunidade científica mais recentemente, já em 1980, ASTROM [11] apresentava um estudo completo dos métodos de maximização da função de verossimilhança e avaliação de erros dentro do conceito de ajuste de

modelos.

O cenário atual dessa linha de pesquisa no campo da dinâmica de estruturas apresenta inúmeros trabalhos que propõem novas metodologias para o processo de ajuste de modelos computacionais. Destaca-se ainda, o fato de que muitas destas abordagens já são utilizadas em problemas da indústria em estruturas de grande porte e complexas.

SHABBIR *et al.* [12] ajustaram o modelo computacional de uma passarela estaiada a partir da aplicação do algoritmo enxame de partículas com algumas modificações em seu código que objetivam diminuir o risco da otimização ser atraída por mínimos locais. Neste trabalho os autores realizaram ensaios com a estrutura em operação.

Outros autores também ensaiaram estruturas reais em estado operacional para proceder o ajuste numérico. É possível citar RIBEIRO *et al.* [13], REYNDERS *et al.* [14] e REN *et al.* [15].

WANG *et al.* [16] realizaram o ajuste computacional de uma placa de material compósito a partir de uma metodologia de processamento de imagens denominada por *digital image correlation*, DIC.

É crescente o número de metodologias de *model updating* que aplicam processos estatísticos, probabilísticos ou estocásticos, [17], a fim de realizar ajuste de modelos computacionais. Atualmente existem inúmeros trabalhos publicados que aplicam o Teorema de Bayes nesse processo. YUEN *et al.* [18] apresentam uma revisão de diversos métodos que podem ser divididos em procedimentos de ajuste a partir de medições de parâmetros modais e metodologias que utilizam sinais no domínio do tempo.

SIMOEN *et al.* [1] dissertaram sobre a necessidade da quantificação de incertezas relativas a certos parâmetros dos problemas físicos, ao mesmo tempo que apresentaram um comparativo entre as abordagens determinística, Bayesiana e Fuzzy em um problema de ajuste de modelo associado à identificação de danos. Uma viga em concreto armado foi construída e ensaiada em situação íntegra e danificada.

Ao também aplicar o conceito bayesiano, BEHMANESH *et al.* [19] confirmaram a necessidade de considerar os efeitos da variação da temperatura e amplitude da excitação no módulo de elasticidade do concreto, tanto no momento da calibração do modelo computacional quanto na identificação de dano simulado.

Outros trabalhos, [20], [21] e [22] combinaram o conceito Bayesiano de inferência com aplicação de algoritmos heurísticos, tais como algoritmos genéticos e de redes neurais, com métodos de confiabilidade estrutural e análise de risco, entre outros, para realizar o ajuste computacional.

No campo de *model selection* e *model class*, linha de pesquisa que propõe metodologias para realizar a escolha do melhor modelo possível para o ajuste computacional,

é possível citar os trabalhos de BECK [23] e YEUN [18].

Para concluir, tratando agora do presente trabalho, este se localiza entre as duas grandes metodologias enunciadas anteriormente, i.e., determinísticas e probabilísticas. Obtém-se informações acerca da incerteza dos parâmetros apesar da utilização da abordagem determinística. Considera-se, portanto, uma aproximação para o cálculo da matriz de covariância do vetor de parâmetros de interesse. A contribuição está assentada em uma breve avaliação da função de verosimilhança e seu impacto na validação de modelos computacionais.

1.2 Objetivo e Organização do Trabalho

Este trabalho objetiva aplicar uma estratégia simples de estimação de parâmetros e propagação de incertezas para avaliar a acurácia do modelo computacional adotado. Sua qualidade é aferida de acordo com o grau de correlação entre as previsões numéricas e os dados obtidos experimentalmente. Posteriormente, o modelo validado é utilizado para identificação de danos. As propriedades físicas do sistema real consideradas incertas, ou desconhecidas, são adicionadas ao problema como variáveis do vetor de parâmetros de interesse.

Inicialmente foram realizados ensaios experimentais para estimar duas propriedades modais, frequências naturais e taxas de amortecimento para um número de modos de vibração pré-definido. Após o devido tratamento estatístico, estes foram utilizados como dados de entrada para o processo de ajuste computacional.

Posteriormente validou-se o modelo computacional a partir da comparação entre os resultados experimentais e as previsões numéricas. A influência das incertezas relativas às variáveis do vetor de parâmetros foi levada em consideração no cálculo da curva de amortecimento e na obtenção das funções de resposta em frequência, FRFs. A propagação das incertezas foi medida a partir de gráficos de barra e de dispersão e as relações entre as variáveis estimada de acordo com o cálculo do coeficiente de correlação.

Por fim, utilizou-se o modelo calibrado, e a melhor função de verosimilhança obtida na validação dos resultados, para identificar os danos estruturais impostos à viga. Nesta análise, os danos foram simulados através da aplicação de massas pontuais ao longo do estrutura.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 2: descreve as abordagens teóricas, hipóteses e premissas adotadas ao longo de toda a análise.
- Capítulo 3: detalha o procedimento experimental, apresentando a metodologia e equipamentos utilizados para realização dos ensaios, além de apresentar

as frequências naturais e taxas de amortecimento estimados após as análises modais.

- Capítulo 4: apresenta os resultados alcançados na calibração e validação do modelo computacional, assim como detalha as soluções obtidas para a identificação de danos. Discussões sobre as previsões computacionais são realizadas.
- Capítulo 5: formula as conclusões obtidas após a análise crítica dos resultados e tece as considerações finais, propondo linhas de atuação para trabalhos futuros.

1.3 Metodologia

O processo de ajuste foi aplicado ao modelo computacional proposto para simular a resposta dinâmica de uma viga de alumínio bi-apoiada. Posteriormente, utilizou-se o modelo calibrado e a melhor função de verosimilhança obtida na validação dos resultados, para identificar os danos estruturais impostos à viga.

De forma a facilitar o entendimento da sistemática adotada neste trabalho, a Figura 1.1 apresenta um fluxograma das etapas realizadas no processo de ajuste do modelo computacional e a Figura 1.2 um outro fluxograma da etapa de identificação de danos.

O modelo da viga foi desenvolvido com auxílio do software Matlab versão 2014b [24] e os códigos disponibilizados pela *Lund University*, [25], escritos de acordo com a abordagem estabelecida pelo método dos elementos finitos, MEF. Foram utilizados elementos de pórtico plano e realizados estudos de convergência de malhas para assegurar a eficiência da discretização da estrutura.

Ensaio experimentais foram executados, ver Capítulo 3, para extrair as propriedades associadas à resposta dinâmica da viga de alumínio localizada no Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, LADEPIS. O sinal foi aferido por três acelerômetros piezoelétricos e a excitação fornecida através de impactos aleatórios aplicados através de um martelo também piezoelétrico.

Efetua-se o pós-processamento dos sinais a partir de dois programas desenvolvidos no LADEPIS, denominados: Analisador [26] e STFT [27]. O Analisador estima a FRF experimental, permitindo assim a obtenção das frequências naturais. Já o STFT, além das frequências, estima as taxas de amortecimento modal. Os resultados experimentais, x , são tratados estatisticamente e simplificados em variáveis aleatórias com média μ_x e desvio padrão σ_x .

É importante ressaltar que após os ensaios experimentais, e o respectivo tratamento estatístico, as variáveis aleatórias experimentais não sofreram nenhum tipo de reamostragem, seja ela experimental ou numérica.

Após a criação do modelo computacional, foram escolhidas três variáveis a serem otimizadas, são elas: o módulo de elasticidade, E , e os coeficientes do amortecimento proporcional de Rayleigh, α e β . Portanto, $\boldsymbol{\theta} = [E \quad \alpha \quad \beta]^T$. A escolha da variável E foi baseada no fato de que quaisquer incertezas geométricas e físicas poderiam ser incorporadas no ajuste do módulo de elasticidade. Já a escolha dos coeficientes α e β se deu em função da dificuldade de aferição precisa de suas magnitudes e sua elevada influência na resposta dinâmica.

A otimização foi executada através da redução progressiva do resíduo ξ entre a predição do modelo computacional e a resposta experimental, ou seja, pela minimização da função custo adotada, ver Capítulo 2. A função *lsqnonlin* [28] do Matlab foi escolhida para obter a solução ótima do vetor de parâmetros, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Ao término da otimização, iniciou-se a etapa de avaliação das incertezas de cada uma das variáveis ajustadas, bem como seus efeitos na resposta dinâmica da viga. Foram adotadas três hipóteses de construção da matriz de covariância dos dados, ou seja, foi realizada uma investigação a respeito da função de verosimilhança, ver Capítulo 2. A partir das simulações de Monte Carlo foi possível propagar as incertezas do vetor de parâmetros.

A análise crítica da qualidade do *model updating* foi baseada na comparação entre os dados experimentais e as predições do modelo computacional. Portanto, foram avaliadas a dispersão do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, a adequação da curva de amortecimento e as FRFs. Estimativas das regiões de confiança foram obtidas para balizar essa tomada de decisão, ver Capítulo 4.

Após o término da validação do modelo computacional, inicia-se a etapa de identificação do dano estrutural. No presente trabalho, este dano foi simulado através da aplicação de massas pontuais ao longo da estrutura, ver Capítulo 3. Foram eleitas duas novas variáveis para o processo de otimização, sendo elas: a posição X_m e a magnitude M_m da massa aplicada. Com isso, definiu-se o novo vetor de parâmetros como: $\boldsymbol{\eta} = [X_m \quad M_m]^T$.

Nesta etapa a otimização foi realizada com o auxílio do algoritmo enxame de partículas, [29] e [30], com pequenas adaptações implementadas para melhoria na convergência [31]. A análise crítica dos resultados foi baseada na qualidade da recuperação da informação real, i.e., posição e magnitude da massa em cada cenário de dano simulado. Adicionalmente foi feita uma comparação entre as FRFs experimentais e computacionais, ver Capítulo 4.

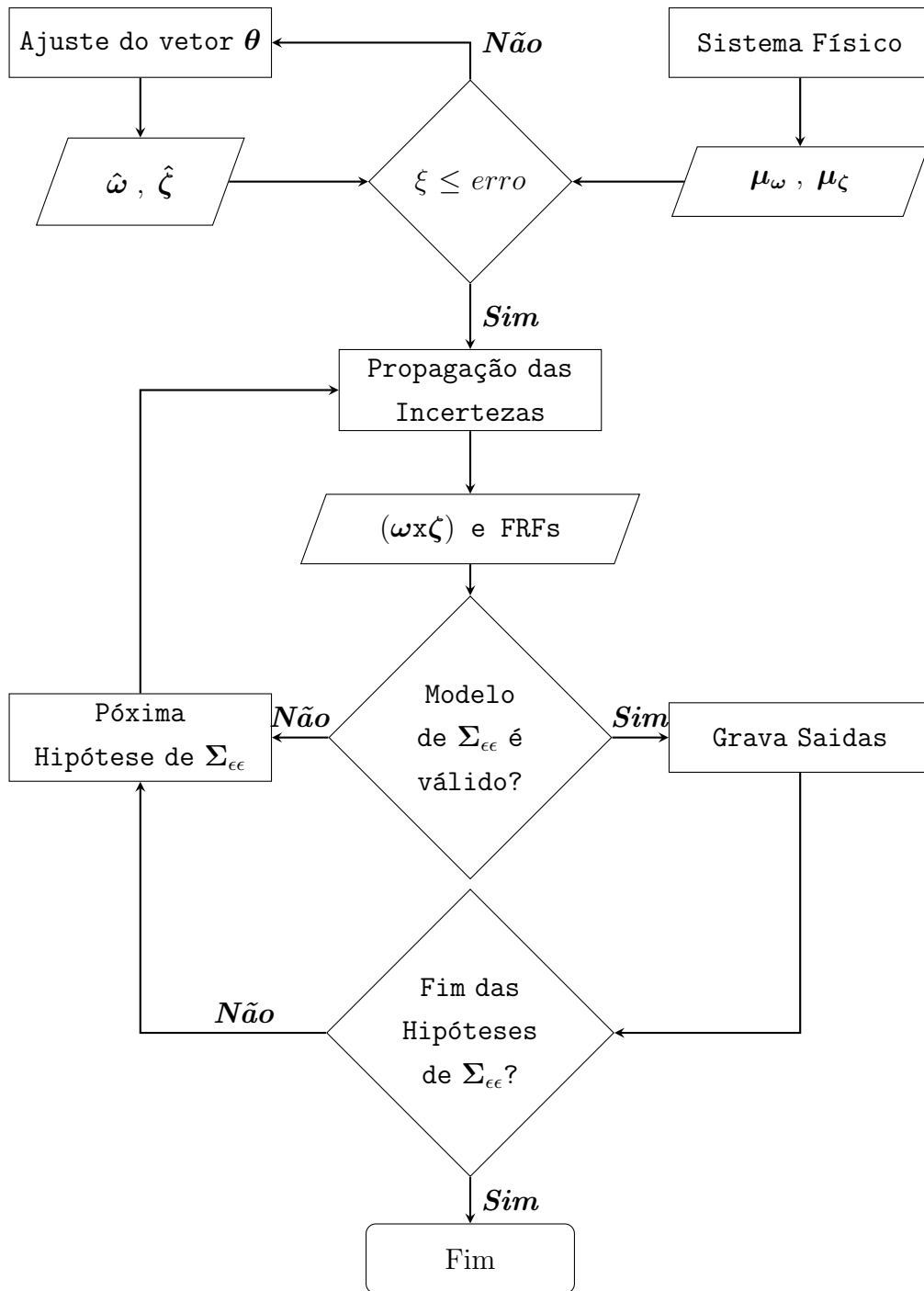


Figura 1.1: Fluxograma do ajuste do modelo computacional.

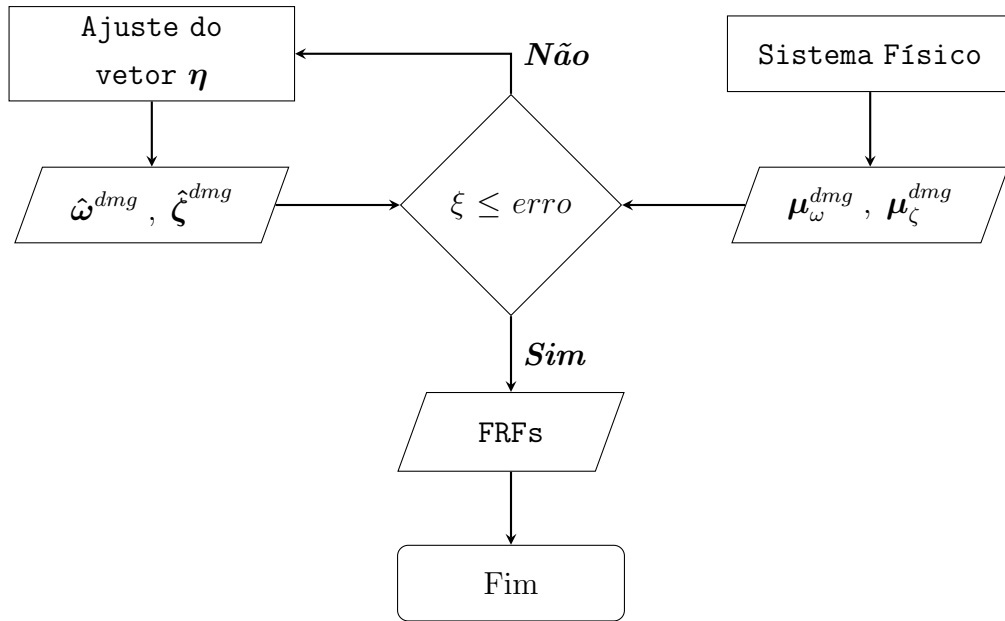


Figura 1.2: Fluxograma da identificação de danos.

Capítulo 2

Desenvolvimento Teórico

2.1 Introdução

O presente capítulo apresenta as hipóteses adotadas, desde as premissas formuladas para quantificação e propagação de incertezas, bem como às utilizadas na solução do problema dinâmico e de identificação de dano. A abordagem computacional também é apresentada.

2.2 Problema Dinâmico

A equação de movimento de sistemas lineares, para um modelo computacional que apresenta um número discreto de graus de liberdade $\mathbf{N}$ e amortecimento viscoso, é dada de acordo com a Eq. 2.1, [32]

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ são matrizes de dimensão ($\mathbf{N} \times \mathbf{N}$) e representam respectivamente as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez. O vetor $\mathbf{F}$ representa a excitação externa que atua no sistema. Já a aceleração, velocidade e deslocamento são definidos, respectivamente, pelos vetores $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ and $\mathbf{u}$.

A Eq. 2.1 pode ser reescrita como um sistema de $2\mathbf{N}$ equações diferenciais acopladas quando formulada considerando a representação em espaço de estados, como apresentada na Eq. 2.2, [33]

$$\mathbf{A} \mathbf{r} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{P}$ são dadas pela Eq. 2.3 e o vetor de estados $\mathbf{r}$ pela Eq. 2.4.

O amortecimento proporcional de Rayleigh é adotado como hipótese básica para o amortecimento da estrutura, [32].

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.5)$$

A função de resposta em frequência $H_{pq}(\omega)$ é dada de acordo com a Eq. 2.6

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\phi_{kp}\phi_{kq}}{\mu_k(i\omega - \lambda_k)} + \frac{\phi_{kp}^*\phi_{kq}^*}{\mu_k^*(i\omega - \lambda_k^*)} \right] \quad (2.6)$$

onde ϕ_{kp} representa o coeficiente do autovetor associado ao k -ésimo modo de vibração no p -ésimo grau de liberdade (relativo à medição da resposta), ϕ_{kq} o coeficiente do autovetor associado ao k -ésimo modo de vibração no q -ésimo grau de liberdade (relativo à excitação da estrutura), μ_k corresponde ao k -ésimo elemento da diagonal da matriz $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}$, onde $\mathbf{B}$ é dado pela Eq. 2.3, λ_k representa o k -ésimo autovalor do problema, N corresponde ao número de modos de vibração de interesse e ω a frequência angular em rad/s. O superíndice $(\bullet)^*$ indica o complexo conjugado da variável considerada.

2.3 Formulação via Problema Inverso

A equação governante de um sistema físico pode ser escrita, de forma compacta, pela Eq. 2.7,[34], onde $\mathbf{y}$ representa o vetor de dados, $\boldsymbol{\theta}$ o vetor dos parâmetros do modelo matemático e $\mathbf{G}$ é a função que governa o problema físico. Caso $\mathbf{y}$ e $\boldsymbol{\theta}$ sejam funções, $\mathbf{G}$ é denominado operador do sistema. Para problemas não lineares $\mathbf{G}$ é o operador que mapeia o espaço de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ para o espaço solução.

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.7)$$

É possível dividir a solução da Eq. 2.7 em duas abordagens, a saber;

- (i) **problema direto:** consiste na busca pelas predições $\mathbf{y}$ dado que a estrutura do modelo e seus parâmetros sejam conhecidos, assim como as condições de contorno, condições iniciais e a excitação que atua no sistema.
- (ii) **problema inverso:** considera-se que a estrutura do modelo $\mathbf{G}$ é conhecida e utilizam-se os dados disponíveis $\mathbf{y}$, a fim de obter os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

Na presente análise, o vetor de dados $\mathbf{y}$ contém as médias amostrais para as frequências naturais e taxas de amortecimento modal obtidas após ensaios na estrutura real, denominadas por $\boldsymbol{\mu}_\omega = [\mu_{\omega 1}, \dots, \mu_{\omega N}]^T$ e $\boldsymbol{\mu}_\zeta = [\mu_{\zeta 1}, \dots, \mu_{\zeta N}]^T$ respectivamente.

É necessário enfatizar que o vetor de dados $\mathbf{y}$ não se modifica ao longo do trabalho. Após a realização dos ensaios, a massa de dados de frequências naturais e taxas de amortecimento é condensada nas médias amostrais $\boldsymbol{\mu}_\omega$ e $\boldsymbol{\mu}_\zeta$ respectivamente.

Por outro lado, o vetor $\mathbf{y}^m$ representa as predições do modelo computacional para as mesmas características modais obtidas experimentalmente, i.e., frequência natural e taxa de amortecimento. Então, $\mathbf{y}^m = [\omega_1, \dots, \omega_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N]^T$.

O vetor de parâmetros desconhecidos, ou incertos, $\boldsymbol{\theta}$ é constituído de três variáveis relacionadas às propriedades físicas do sistema estrutural, são elas: o módulo de elasticidade E e os coeficientes do amortecimento proporcional de Rayleigh α e β .

Portanto, pode-se resumir tais definições de acordo com as Eq. 2.8, 2.9 e 2.10.

$$\mathbf{y} = [\boldsymbol{\mu}_\omega \quad \boldsymbol{\mu}_\zeta]^T \quad (2.8)$$

$$\mathbf{y}^m = [\boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{\zeta}]^T \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [E \quad \alpha \quad \beta]^T \quad (2.10)$$

Há na literatura diversas metodologias desenvolvidas para solucionar a Eq. 2.7 de acordo com as características do problema e com a abordagem escolhida, i.e. determinística ou estocástica. É possível citar, por exemplo, a solução de sistemas lineares pelo método dos mínimos quadrados e de sistemas não lineares pelo método de Gauss-Newton. Para maiores informações ver [6] e [3].

Do ponto de vista matemático, a solução do problema está intimamente ligada à dispersão dos dados observados, ou seja, a incerteza associada ao fenômeno de interesse. Neste sentido, adotou-se um modelo de observação, com a premissa de erro aditivo, $\boldsymbol{\epsilon}$, de acordo com a Eq. 2.11.

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.11)$$

A Eq. 2.11 é fundamentada na hipótese de que o modelo matemático, operador $\mathbf{G}$, é perfeito e a discrepância eventual entre os dados experimentais $\mathbf{y}$ e os computacionais $\mathbf{y}^m$ está relacionada à presença de incertezas/ruídos de medição, $\boldsymbol{\epsilon}$. Neste contexto, $\boldsymbol{\epsilon}$ é modelado de acordo com uma função de densidade de probabilidade (*probability density function*, pdf) normal Gaussiana com média zero e variância

desconhecida, $\epsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I})$.

Entretanto, conforme exposto no Capítulo 1, há inúmeras fontes que impõem erros à solução da equação da dinâmica e, conseqüentemente, às predições do operador $\mathbf{G}$. Com isso, a diferença entre os resultados experimentais e numéricos é dado por um resíduo definido como ξ . Portanto, o objetivo passa a ser encontrar a solução que minimiza esse resíduo.

É possível definir matematicamente essa busca pela melhor solução como um problema de otimização descrito pela Eq. 2.12.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in D_\theta}{\operatorname{argmin}} S(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.12)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ representa a solução ótima do vetor de parâmetros, D_θ representa o espaço solução e S é a métrica para avaliar a diferença entre os dados experimentais e computacionais, denominada função objetivo ou custo, tal que $S : \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

Para a presente análise foi adotada a função custo definida pela Eq. 2.13, [35]. A matriz $\mathbf{W}$ é dada de acordo com a hipótese estabelecida para a função de verosimilhança, detalhadas no Item 2.4.2.

$$S(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m)^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m) \quad (2.13)$$

Para obter a solução ótima, utilizou-se o código interno do Matlab denominado *lsqnonlin*, que tem o objetivo de realizar uma regressão não linear a partir de uma métrica pré-definida pelo usuário. Essa métrica corresponde a função custo definida na Eq. 2.13.

Apesar de o Matlab disponibilizar dois algoritmos dentro do código do *lsqnonlin* para proceder a otimização, *trust-region-reflective* (utilizado na presente análise) e o *Levenberg-Marquardt*, ambos são aplicáveis para minimizar diferenças quadráticas $\|\mathbf{S}\|_2$ e utilizam o conceito de vetor gradiente para atingir a convergência, [34]. Para mais detalhes sobre a função, ver [28].

2.4 Propagação de Incertezas

2.4.1 Simulações de Monte Carlo

A propagação das incertezas relativas ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é realizada a partir do conhecimento de sua pdf $\pi(\boldsymbol{\theta})$ com o auxílio de uma metodologia para sortear números aleatórios. Porém, invariavelmente em problemas reais, a distribuição de probabilidade deste vetor é desconhecida e, desta forma, é usual adotar hipóteses acerca dessa pdf.

Nesta análise adotou-se a hipótese de que o vetor $\boldsymbol{\theta}$ possui uma distribuição

normal truncada com média igual à solução ótima $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e matriz de covariância conhecida. Esse truncamento decorre da necessidade de que os valores sorteados sejam estritamente positivos.

Apesar de ser possível classificar, em algumas situações particulares, o truncamento como tendencioso (*biased*), este faz-se necessário dado que o modelo utilizado descreve um sistema físico rela. Dado este cenário, busca-se mensurar o impacto das hipóteses acerca das pdfs e das matrizes de covariância dos dados na validação do modelo computacional.

Nesse contexto o valor médio do vetor de parâmetros é adotado como igual à solução determinística obtida no processo de otimização, i.e., $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Para a estimativa da matriz de covariância do parâmetro, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}$, foi utilizado o procedimento de cálculo detalhado no Item 2.4.2.

É importante ressaltar que a inferência sobre $\boldsymbol{\theta}$ ocorre no campo da análise multivariada, haja vista que o vetor de parâmetros é função de três variáveis, conforme definido na Eq. 2.10.

Seja uma variável aleatória X com distribuição normal, média μ e variância σ^2 , sua pdf é dada pela Eq. 2.14, representada por $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e denominada função normal univariada. Porém, há situações onde mais de uma variável aleatória com distribuição normal é utilizada para solução do problema. Neste caso a função é denominada por função normal multivariada.

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.14)$$

A função multivariada é generalizada a partir da Eq. 2.14, onde a média μ e a variável x passam a ser vetores e a variância σ^2 é substituída pela matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$. A função normal multivariada é dada pela Eq. 2.15.

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}(2\pi)^d}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} \quad (2.15)$$

onde a incógnita d indica a dimensão da distribuição. Para mais distribuições de probabilidade e maiores informações sobre o campo de funções multivariadas, ver [2] e [36].

A propagação das incertezas, por sua vez, é realizada com o auxílio das simulações, ou análises, de Monte Carlo [37].

No presente trabalho as simulações de Monte Carlo foram executadas em ambiente Matlab com o auxílio do algoritmo desenvolvido por Tim Benham denominado *rmvnrnd*. Esse código gera números pseudo-aleatórios a partir de uma distribuição de probabilidades normal truncada. Para maiores informações, ver [38].

Após uma análise de convergência, conclui-se que 1000 simulações seriam su-

ficientes para que a geração de números pseudo-aleatórios convergisse. O critério de erro adotado foi visual, ou seja, o valor da razão entre a soma das médias das amostras sorteadas e o valor esperado, i.e., média e desvio padrão para cada modo de vibração, deve aproximar-se da unidade.

Para visualizar as realizações e a dispersão dos resultados obtidos pela análise de Monte Carlo, adotou-se a função *plotmatrix* do Matlab, [39]. Esse código apresenta um gráfico em forma de matriz quadrada onde o número de linhas é igual ao número de variáveis avaliadas. Os elementos da diagonal principal contém gráficos de barras e os elementos fora da diagonal contém os gráficos da dispersão entre as respectivas variáveis.

Para fundamentar a tomada de decisão sobre a qualidade do modelo computacional foram realizadas estimativas para os intervalos de 98% de confiança, através dos percentis de 1% e 99%. Para o cálculo dos percentis foi utilizada a função *prctile* do Matlab, [40].

2.4.2 Cálculo do Operador Jacobiano

Uma das técnicas para obtenção de uma estimativa para a matriz de covariância é a linearização da região próxima ao ponto de ótimo $\hat{\theta}$. Essa formulação é realizada a partir da derivação parcial das predições do problema físico em relação às variáveis que compõem o vetor de parâmetros, [35].

A linearização é calculada através do operador jacobiano $\mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2N_x \times N_p}$, e N_p representa o número de variáveis que compõem o vetor de parâmetros, i.e. $N_p = 3$. O jacobiano pode ser formulado matematicamente pela Eq. 2.16.

$$\mathbf{J}(\theta) = \left. \frac{\partial \mathbf{y}^m(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (2.16)$$

Esse procedimento de derivação parcial foi realizado numericamente a partir de um algoritmo escrito de acordo com o método das diferenças finitas e a escolha da formulação com diferença centrada.

Adicionalmente, o Anexo A apresenta a formulação do operador jacobiano a partir da derivação da equação do movimento, Eq. 2.1. Para maiores detalhes ver [41], [42], [43] e [44].

Portanto, após o cálculo do jacobiano é possível obter uma estimativa da matriz de covariância através da Eq. 2.17.

$$Cov(\theta)_{\theta=\hat{\theta}} = \hat{\Sigma}_{\theta} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \Sigma_{\epsilon\epsilon} \mathbf{J} (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{J}$ representa o operador jacobiano e $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ a matriz de variância dos dados.

Destaca-se aqui um ponto relevante no trabalho. Dado o fato da disponibilidade

de algumas dezenas de resultados experimentais para cada um dos modos de vibração avaliados, foi possível explorar o impacto da função de verossimilhança, [34], no processo de ajuste do modelo computacional.

De maneira mais específica, três cenários foram considerados para a construção da matriz de covariância dos dados $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$, utilizada para construção da função custo $S(\theta)$, Eq. 2.13, assim como para a obtenção do estimador $\hat{\Sigma}_\theta$, Eq. 2.17.

O presente trabalho adotou três hipóteses básicas a respeito de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$:

- **Hipótese 1:** a matriz $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é diagonal, Eq. 2.18. Não há variância cruzada, ou seja, a correlação entre os diferentes elementos da matriz é considerada nula. A matriz $\mathbf{W}$ da função custo é igual à matriz de covariância dos dados.

$$\Sigma_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \Sigma_{\epsilon\epsilon} \quad (2.18)$$

onde $\Sigma_{\omega\omega}$ e $\Sigma_{\zeta\zeta}$ simbolizam, respectivamente, a matriz diagonal das variâncias da frequência natural e taxa de amortecimento.

- **Hipótese 2:** a matriz $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é completa, Eq. 2.19. Aproveitando a grande quantidade de ensaios, calculou-se a variância da massa total de dados experimentais. Nesta hipótese a matriz $\mathbf{W}$ da função custo também é igual à matriz de covariância dos dados.

$$\Sigma_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\omega\omega} & \Sigma_{\omega\zeta} \\ \Sigma_{\zeta\omega} & \Sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \Sigma_{\epsilon\epsilon} \quad (2.19)$$

onde $\Sigma_{\omega\zeta}$ representa a covariância entre as frequências naturais e taxas de amortecimento e é simétrica à $\Sigma_{\zeta\omega}$.

- **Hipótese 3:** a matriz $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é diagonal na forma $\Sigma_{\epsilon\epsilon} = s^2 \mathbf{I}_{2N \times 2N}$. De acordo com BECK *et al.* [35], a covariância pode ser estimada no ponto de ótimo. Neste caso não há nenhuma informação sobre a covariância dos dados experimentais. Adicionalmente, essa hipótese foi subdividida em três formulação, a saber:

$$\mathbf{W} = \mathbf{1} \quad (2.20)$$

1ª formulação: considerada formulação padrão, [35].

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{2N - N_p} (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}^m) \quad (2.21)$$

2ª formulação: modificação na formulação padrão onde tenta-se diminuir a influência da ordem de grandeza das diferentes saídas, i.e., frequências naturais e taxas de amortecimento, na estimativa de $\hat{s}^2$.

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{2N - N_p} \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{y_r^m}{y_r} - 1 \right)^2 \quad (2.22)$$

Nessa formulação, o operador jacobiano é dado por:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial E} \frac{1}{\mu_{\omega_1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} \frac{1}{\mu_{\omega_1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} \frac{1}{\mu_{\omega_1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \omega_N}{\partial E} \frac{1}{\mu_{\omega_N}} & \frac{\partial \omega_N}{\partial \alpha} \frac{1}{\mu_{\omega_N}} & \frac{\partial \omega_N}{\partial \beta} \frac{1}{\mu_{\omega_N}} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial E} \frac{1}{\mu_{\zeta_1}} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \alpha} \frac{1}{\mu_{\zeta_1}} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} \frac{1}{\mu_{\zeta_1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \zeta_N}{\partial E} \frac{1}{\mu_{\zeta_N}} & \frac{\partial \zeta_N}{\partial \alpha} \frac{1}{\mu_{\zeta_N}} & \frac{\partial \zeta_N}{\partial \beta} \frac{1}{\mu_{\zeta_N}} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (2.23)$$

3ª formulação: adota-se como premissa que o módulo de elasticidade E e os coeficientes de amortecimento α e β são independentes.

Para o módulo de elasticidade E tem-se que:

$$\hat{s}_E^2 = \frac{1}{N-1} (\boldsymbol{\mu}_\omega - \boldsymbol{\omega}^m)^T (\boldsymbol{\mu}_\omega - \boldsymbol{\omega}^m) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{J}_E = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^m}{\partial E} \right|_{E=\hat{E}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_E = \hat{\sigma}_E^2 = \hat{s}_E^2 (\mathbf{J}_E^T \mathbf{J}_E)^{-1} \quad (2.25)$$

Para os coeficientes de amortecimento α e β tem-se que:

$$\hat{s}_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{N-2} (\boldsymbol{\mu}_\zeta - \boldsymbol{\zeta}^m)^T (\boldsymbol{\mu}_\zeta - \boldsymbol{\zeta}^m) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{J}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \alpha} \frac{1}{\mu_{\zeta_1}} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} \frac{1}{\mu_{\zeta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \zeta_N}{\partial \alpha} \frac{1}{\mu_{\zeta_N}} & \frac{\partial \zeta_N}{\partial \beta} \frac{1}{\mu_{\zeta_N}} \end{bmatrix}_{\alpha=\hat{\alpha}, \beta=\hat{\beta}} \quad (2.27)$$

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta} = (\mathbf{J}_{\alpha\beta}^T \mathbf{J}_{\alpha\beta})^{-1} \mathbf{J}_{\alpha\beta}^T \hat{s}_{\alpha\beta}^2 \mathbf{I} \mathbf{J}_{\alpha\beta} (\mathbf{J}_{\alpha\beta}^T \mathbf{J}_{\alpha\beta})^{-1} \quad (2.28)$$

Portanto, a estimativa da matriz de covariância do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ é dada por:

$$\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_E^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

O objetivo do cálculo da covariância dos dados com as três hipóteses é analisar o impacto dessas diferentes metodologias na construção da função de verosimilhança. A partir da obtenção de grande quantidade de resultados experimentais, conforme demonstrado no Capítulo 3, buscou-se avaliar a qualidade das predições numéricas em função do nível de informação *a priori* fornecido para o ajuste de modelos computacionais.

2.5 Identificação de Dano

Os danos na estrutura foram simulados a partir da aplicação de massas pontuais ao longo da estrutura. Este procedimento está descrito no Item 3.2.2.

De forma geral, o processo de identificação de dano segue as mesmas hipóteses estabelecidas nos itens 2.2 e 2.3. Nesta etapa o modelo computacional já está calibrado, i.e., $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{E} \quad \hat{\alpha} \quad \hat{\beta}]^T$.

Um novo vetor de parâmetros foi escolhido para o processo de identificação de dano, sendo composto por duas variáveis, a saber: posição X_m e a magnitude M_m das massas aplicadas à estrutura, de acordo com a Eq. 2.30.

$$\boldsymbol{\eta} = [X_m \quad M_m]^T \quad (2.30)$$

A representação dos dados seguem a mesma formulação apresentada na Eq. 2.8, ou seja, $\mathbf{y}$ para as médias amostras obtidas experimentalmente e $\mathbf{y}^m$ para as predições computacionais, porém, agora ambas na situação de dano. A métrica utilizada para avaliar a discrepância entre $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}^m$ continua sendo descrita pela função custo dada pela Eq. 2.13.

A escolha da função de verosimilhança utilizada para solução do problema de identificação de dano é vinculada à eficiência das hipóteses na comparação das predições computacionais e dados experimentais apresentada no Item 4.2.

Para realizar o processo de busca pela solução ótima foi utilizado o algoritmo enxame de partículas (*particle swarm optimization*, PSO), [29], que altera as matrizes globais de massa e de amortecimento em função do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta}$ e do

vetor ótimo $\hat{\theta}$, de acordo com as Eq. 2.31 e Eq. 2.32.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{D}(\hat{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = \hat{\alpha} \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) + \hat{\beta} \mathbf{K}(\hat{E}) \quad (2.32)$$

O PSO, possui um conceito de busca baseado na procura aleatória por uma população de partículas [30], onde a convergência é dada em função da melhor posição encontrada por uma delas. Foram adicionados novos coeficientes para melhorar a convergência do enxame de partículas, [31].

Define-se inicialmente o número de partículas, n_{par} , de iterações, n_{iter} , de variáveis a otimizar, n_{var} , além dos valores máximos e mínimos assumidos por cada variável do processo. O conceito básico que orienta a busca é que, a cada iteração, as n_{par} partículas recebem um valor aleatório referente a cada uma das n_{var} variáveis. Esse valor atribuído às partículas é entendido como suas respectivas posições.

De forma a tornar o entendimento mais claro, lança-se mão de um exemplo simples e ilustrativo onde existe um tabuleiro de dama com uma de suas casas pintadas de vermelho. O objetivo é utilizar o algoritmo para identificar essa posição. Inicia-se o processo lançando aleatoriamente no tabuleiro as n_{par} peças de dama. Mede-se a distância de cada peça à casa vermelha e ao final verifica-se qual é a menor distância obtida, melhor posição global, registrando-a. Posteriormente, as peças são jogadas novamente no tabuleiro, de forma aleatória, repetindo-se as etapas descritas anteriormente. Esse processo se encerra quando as n_{iter} são atingidas ou o critério de convergência é alcançado.

É necessário ressaltar que existe um procedimento que relaciona a posição das partícula com a melhor posição global, de forma a garantir a convergência da otimização. O conceito do PSO é resumidamente explicado pelo pseudo-código Algoritmo 1.

Algorithm 1 Enxame de Partículas

- 1: Gerar a 1ª população de partículas
 - 2: Calcular a posição inicial de cada partícula
 - 3: Definir a melhor posição global
 - 4: **while** $n < n_{iter}$ **do**
 - 5: Gerar nova população
 - 6: Calcular suas posições
 - 7: Verificar se a melhor posição global foi superada
 - 8: Avaliar critério de convergência
 - 9: **end while**
 - 10: X_m e M_m
-

Capítulo 3

Procedimento Experimental

3.1 Introdução

O presente capítulo apresenta em detalhes o aparato experimental utilizado, bem como o procedimento adotado para realização dos ensaios e estimação dos parâmetros modais. A estrutura ensaiada foi uma viga de alumínio bi-apoiada. Objetivou-se inferir sobre as frequências naturais e taxas de amortecimento dos primeiros seis modos de vibração. A excitação foi fornecida através de impactos de um martelo instrumentado e as respostas captadas por acelerômetros instalados ao longo do comprimento da viga.

O pós-processamento dos sinais foi realizado em dois programas desenvolvidos no Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, LADEPIS: Analisador [26] e STFT [27]. O Analisador estima as FRFs experimentais e frequências naturais, ao passo que o STFT infere sobre as taxas de amortecimento modal.

Os resultados experimentais v foram tratados estatisticamente e representados, de forma simplificada, a partir de sua média μ_v e desvio padrão σ_v .

O capítulo é organizado como se segue: o Item 3.2 apresenta o esquema experimental utilizado para a análise dinâmica, detalhando os sensores, equipamentos e sistemas de aquisição de dados, além do procedimento de ensaio e o Item 3.3 descreve o pós-processamento e o tratamento estatístico realizado nos dados experimentais e apresenta a dispersão das frequências naturais e taxas de amortecimento, com auxílio de histogramas.

3.2 Esquema Experimental

3.2.1 Descrição dos Ensaios

Com o objetivo de extrair informações para subsidiar o ajuste da modelagem computacional do problema, foram realizados ensaios em uma viga de alumínio bi-apoiada,

conforme ilustrado na Figura 3.1.

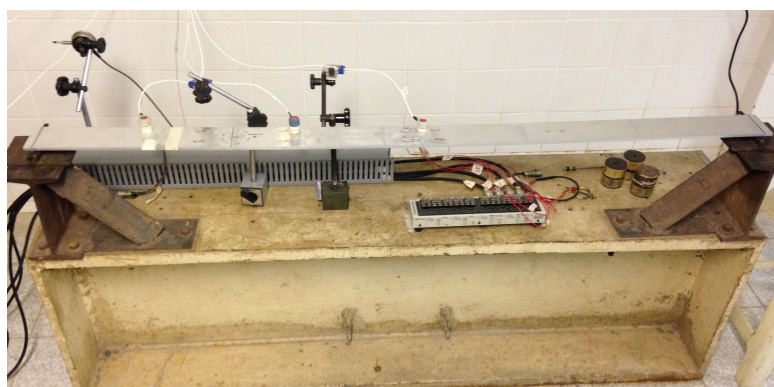


Figura 3.1: Vista da viga ensaiada e sua instrumentação

O LADEPIS disponibilizou todos os equipamentos necessários para a realização do ensaio experimental, a saber: a) viga de alumínio, estrutura bi-apoiada com seção retangular de 6mm de altura e 76,2mm de largura, e 1464mm de comprimento, conforme apresentada na Figura 3.1; b) martelo instrumentado fabricado pela PCB Piezotronics, modelo 086C01, Figura 3.3a; c) 3 acelerômetros piezoelétricos fabricados pela PCB Piezotronics, modelos 336C e 336C31, Figura 3.3b; e d) sistema de processamento de sinais, composto pelo condicionador de sinal, fabricado pela PCB Piezotronics, modelo 481, o sistema de aquisição, modelo APS2000 e o software, AqDados7, ambos produzidos pela Lynx Tecnologia, Figura 3.3c.

A estrutura é apoiada sobre roletes soldados nos perfis de aço, que por sua vez estão fixados na bancada de ensaio. De forma a reduzir a vibração entre os corpos na região do apoio, introduziu-se uma tira de borracha entre o rolete e a viga, permitindo assim a medição das acelerações. A Figura 3.3 detalha a região do apoio do aparato experimental.

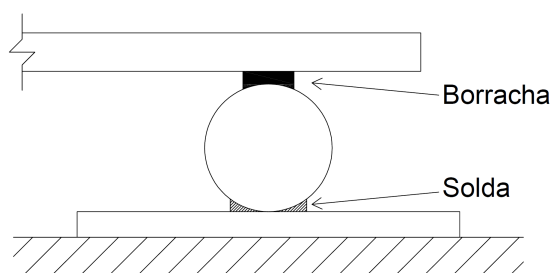


Figura 3.2: Ilustração do apoio da viga sobre o rolete.

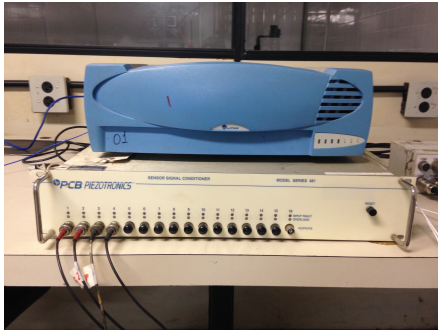
O ensaio foi do tipo SIMO (*single input multiple output*) e os acelerômetros foram instalados na direção vertical em três pontos distintos na superfície superior da viga. Tanto a posição do impacto quanto a posição dos acelerômetros mantiveram-se inalteradas em todos os ensaios realizados.



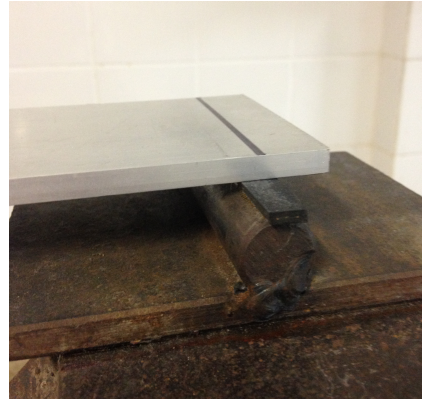
(a) Martelo



(b) Acelerômetros



(c) Sistema de processamento de sinais



(d) Imagem do apoio da viga

Figura 3.3: Esquema experimental utilizado

A posição dos acelerômetros e do impacto do martelo foram definidos de forma que fosse possível inferir sobre as propriedades modais, frequência natural ω e taxa de amortecimento ζ , para os primeiros seis modos de vibração. A Figura 3.4 ilustra a posição dos acelerômetros e dos impactos realizados.

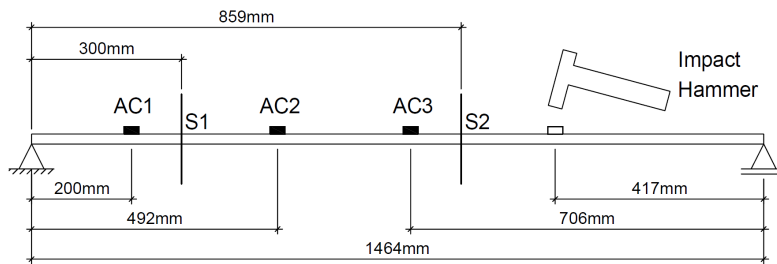


Figura 3.4: Ilustração do aparato experimental.

onde as siglas AC1, AC2 e AC3 representam as posições dos acelerômetros e as seções S1 e S2 as posições onde as massas foram aplicadas na etapa de ensaio com simulação de dano estrutural.

Os detalhes sobre os ensaios com danos simulados são descritos no Item 3.2.2.

O procedimento de ensaio contou com um processo de desmontagem e montagem da viga, buscando-se, assim, considerar diferenças no comportamento da taxa de amortecimento e das frequências naturais em função das possíveis diferentes for-

mas no posicionamento, por exemplo, dos apoios, dos fios de aquisição ligados aos acelerômetros, etc. A desmontagem e montagem da viga ocorreu entre ensaios consecutivos.

Esse processo tenta simular a variação das propriedades modais observada em estruturas em operação para as quais, em geral, observa-se certo nível de dispersão dos dados experimentais. Ao todo foram realizados 7 ensaios com 6 processos de montagem e desmontagem.

Os ensaios tiveram duração média de 10 minutos onde, em cada análise, foram aplicados 20 impactos com intervalos aleatórios. Ou seja, o intervalo entre excitações consecutivas variaram entre 21 e 39 segundos, resultando em um intervalo médio de 30 s.

Foi adotada uma frequência de amostragem de 1000 Hz, com um filtro passa baixa na ordem de 250 Hz, para garantir a análise dos sinais na faixa de 0 - 250 Hz.

As massas dos acelerômetros foram medidas para posterior inclusão no modelo computacional, sendo $m_{AC1} = 13,4g$, $m_{AC2} = 13,4g$ e $m_{AC3} = 11,8g$. As massas dos fios ligados aos acelerômetros não foram consideradas na modelagem numérica.

3.2.2 Descrição dos Ensaios com Simulação de Dano

Todos os equipamentos, bem como a metodologia apresentada no item 3.2.1 foram mantidos. O dano estrutural foi simulado através da aplicação de pequenas massas ao longo do comprimento da viga de alumínio.

A aplicação das massas pontuais foi realizada com o auxílio de uma pequena borracha aderente de forma à solidarizar os corpos, conforme ilustrado na Figura 3.5b.

Foram definidos quatro cenários de dano onde massas pontuais foram adicionadas no bordo superior da estrutura em duas seções específicas denominadas S1 e S2. As massas utilizadas estão detalhadas na Figura 3.5a e a disposição na viga encontra-se ilustrada na Figura 3.4.



(a) Massas pontuais



(b) Ligação massa-viga

Figura 3.5: Massas utilizadas na simulação de dano

Tabela 3.1: Cenários de dano simulados

Cenário	M_m	$\frac{M_m}{M_v}$	Seção
A1	158,4 g	9 %	S1
A2	49,6 g	3 %	S1
B1	94,5 g	5 %	S2
B2	36,9 g	2 %	S2

A criação desses cenários de dano objetivou investigar a capacidade de recuperação das informações experimentais posição e magnitude das massas com a redução gradativa de sua influência no comportamento global da estrutura. A razão entre a magnitude da massa pontual e da massa total da viga M_m/M_v , além de suas respectivas posições em cada cenário de dano, estão detalhados na Tabela 3.1.

Cada cenário de dano simulado foi ensaiado somente uma vez, com duração aproximada de 10 minutos, com a mesma metodologia detalhada no item 3.2.1, i.e., 20 impactos com intervalos aleatórios, variando entre 21 e 39 segundos, resultando em um intervalo médio de 30s. A análise com dano também contou com a desmontagem e montagem da viga, porém nesta etapa esse processo foi realizado entre ensaios de cenários de dano distintos.

Foi adotada a janela de 0 - 250 Hz para análise dos sinais, com a aplicação do filtro de passa baixa na ordem de 250 Hz e frequência de amostragem de 1000 Hz. As massas dos acelerômetros foram mantidas no modelo computacional.

3.3 Resultados Obtidos

3.3.1 Pós-Processamento e Tratamento Estatístico

Após a conclusão dos ensaios experimentais, iniciou-se a etapa de pós-processamento dos sinais obtidos durante a análise. De acordo com o estabelecido no Item 1.3, dois programas desenvolvidos no LADEPIS foram utilizados para estimar as frequências naturais, as taxas de amortecimento e as FRFs experimentais; são eles o Analisador [26] e o STFT [27].

O Analisador estima a função de resposta em frequência considerando o estimador H_V , [45] e o valor das frequências naturais são obtidas através dos picos das FRFs. O intervalo de duração do ensaio, número de médias calculadas, percentagem de sobreposição entre as janelas, bem como o tipo de janela são algumas das opções fornecidas pelo programa. Para esta análise as FRFs foram estimadas selecionando-se todo o sinal obtido em cada ensaio, com 100 médias, 65 % de sobreposição e janela Hamming.

Ao contrário do Analisador, onde selecionou-se o sinal de todo o ensaio, no STFT o intervalo observado é o da resposta dinâmica de um impacto por vez. A técnica denominada STFT (*Short Time Fourier Transform*), que deu origem ao nome do software de pós-processamento em questão, aplica as chamadas transformadas tempo-frequência (*TFDs*) no sinal para leva-lo a um domínio onde as informações da escala temporal e da escala em frequência estejam presentes simultaneamente, domínio tempo-frequência.

Isso decorre do fato de que na escala temporal é possível verificar a perda de energia ocasionada pelo amortecimento, onde o cálculo da taxa de amortecimento pode ser realizado com o decremento logarítmico, por exemplo. Porém, não é possível discernir os modos de vibração presentes no sinal. Quando passa-se para a escala da frequência, através da FFT (*Fast Fourier Transform*), por exemplo, o cenário se modifica. Os diversos modos são facilmente identificados, por outro lado, a informação sobre a energia dissipada é perdida.

Ao término do pós-processamento foram estimadas 21 FRFs, uma vez que a viga foi ensaiada 7 vezes e monitorada por 3 acelerômetros. A partir das funções de resposta em frequência, foi possível obter um grande número de pólos como ilustra a Figura 3.6.

A diminuição do número de medições do quarto e sexto modos decorreu da dificuldade de posicionar os acelerômetros e o impacto do martelo de forma a medir com a mesma qualidade todos os modos de vibração de interesse, ou seja, do 1º ao 6º modo.

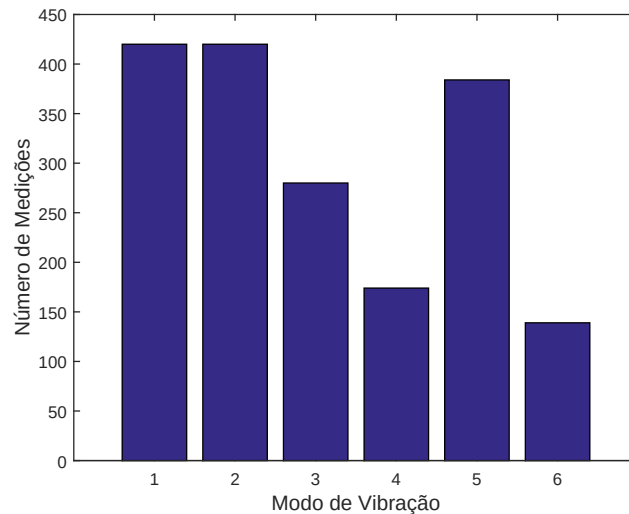


Figura 3.6: Número de medições dos pólos experimentais obtidos para os seis primeiros modos de vibração.

Com o auxílio do Matlab os polos experimentais estimados passaram então

por um tratamento estatístico onde a massa de dados foi modelada por variáveis aleatórias com média μ e desvio padrão σ , representando cada modo de vibração. A Tabela 3.2 detalha os resultados obtidos.

Tabela 3.2: Resultado do tratamento estatístico dos dados experimentais. Unidades: μ_ω em [Hz] e μ_ζ em [%].

Modo	Frequência Natural		Amortecimento	
	μ_ω	σ_ω	μ_ζ	σ_ζ
1 ^o	6,78	$\pm 0,01$	0,40	$\pm 0,03$
2 ^o	26,93	$\pm 0,01$	0,20	$\pm 0,01$
3 ^o	60,46	$\pm 0,04$	0,27	$\pm 0,04$
4 ^o	106,59	$\pm 0,10$	0,38	$\pm 0,03$
5 ^o	166,46	$\pm 0,24$	0,40	$\pm 0,07$
6 ^o	242,49	$\pm 0,52$	0,44	$\pm 0,08$

3.3.2 Apresentação e Discussão dos Resultados

Ensaio Modais

O ensaio na viga permitiu obter uma grande quantidade de dados experimentais conforme apresentado na Figura 3.6. Com o auxílio do Matlab, verificou-se a dispersão dos resultados em relação a cada modo de vibração através da função *plotmatrix*, [39].

Essa função apresenta os gráficos em forma de matriz quadrada, onde na diagonal são detalhados gráficos de barra e fora da diagonal gráficos de dispersão. Considerando, por exemplo, uma situação hipotética onde tem-se 8 realizações de um vetor $\mathbf{v}$ e que estas estão organizadas nas colunas da matriz V da seguinte forma:

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A posição a_{11} da Figura 3.7 apresenta o gráfico de barra das amostras da variável aleatória x , onde os valores: $\{-2, 1, 2\}$ aparecem uma vez cada; o valor $\{-1\}$ aparece duas vezes; e o $\{0\}$ aparece três vezes. De forma análoga, o gráfico presente na posição a_{22} ilustra o gráfico de barras das amostras da variável aleatória x^2 , onde o valor: $\{4\}$ aparece duas vezes e os valores $\{0, 1\}$ aparecem três vezes cada.

A posição fora da diagonal a_{21} ilustra os cinco pontos da parábola (x, x^2) , ao passo que o gráfico presente na posição a_{12} ilustra os mesmos cinco pontos, porém com o par ordenado (x^2, x) . Portanto as posições (i, j) e (j, i) representam o mesmo gráfico com eixos invertidos. Ou seja, a "matriz" é simétrica.

A partir dos gráficos de barras é possível verificar os valores mais prováveis de ocorrência para uma determinada variável submetida a um processo de simulação numérica ou amostragem experimental. Adicionalmente, é possível inferir sobre a relação entre as diversas variáveis presentes no estudo através dos gráficos de dispersão e dos coeficientes de correlação.

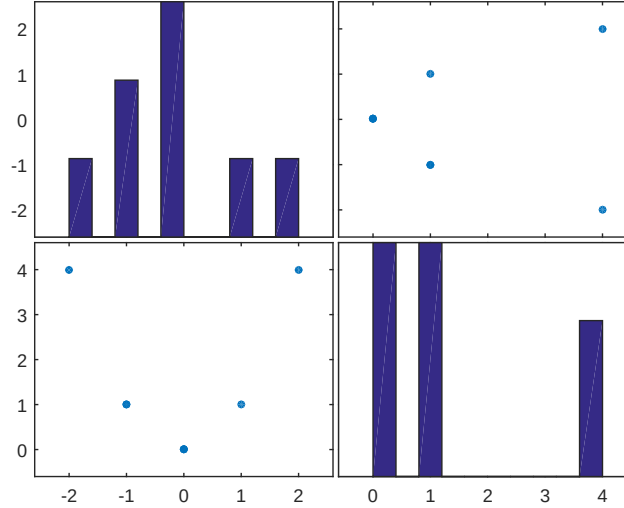


Figura 3.7: Exemplo da saída da função *plotmatrix* para o vetor *V*.

Passa-se agora à análise dos resultados experimentais, onde os polos experimentais estimados para os seis primeiros modos de vibração da viga bi-apoiada são apresentados na Figura 3.8.

Inicialmente é possível verificar que para os três primeiros modos de vibração, sub-figuras 3.8a, 3.8b e 3.8c, existe certa "segmentação" dos dados, tanto nos gráficos de barras quanto nos de dispersão. Ou seja, não foram amostrados valores entre, por exemplo 6,76 - 6,78 Hz ou 6,78 - 6,8 Hz, para as frequências naturais do primeiro modo de vibração.

Esse comportamento é repetido no 2º e 3º modos e pode ser devido às incertezas associadas ao processo de medição experimental, assim como uma dificuldade dos sistemas de aquisição e programas de identificação fornecerem valores com precisão da ordem de 10^{-2} , por exemplo. Ou seja, está relacionado a resolução da análise espectral do sistema de medição.

Ao analisar todos os gráficos de barras para os valores amostrados experimentalmente das frequências naturais, posição a_{11} de cada sub-figura da Figura 3.8, é possível perceber que existe uma região mais provável de se encontrar cada frequência natural e ainda que esse gráfico possui certa simetria.

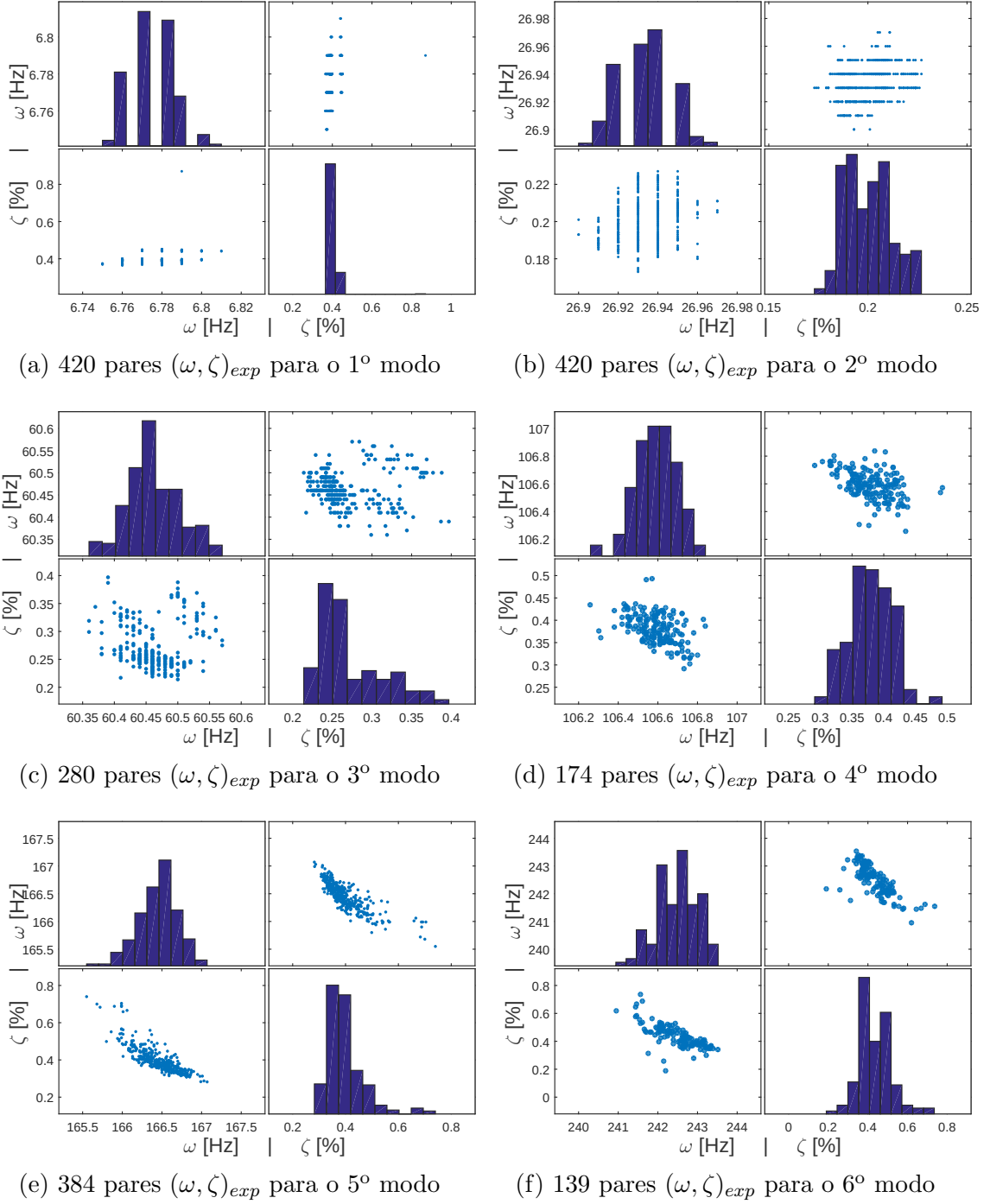


Figura 3.8: Dispersão dos polos experimentais estimados.

Utilizando a função *ksdensity* do Matlab, [46] estimou-se a pdf mais provável de originar as frequências naturais para cada um modos de vibração. De forma a obter uma visão geral, todas as realizações experimentais obtidas foram normalizadas pela média amostral de cada modo de vibração. Esse procedimento permite a união de todas as curvas em um único gráfico, conforme pode ser vista na Figura 3.9.

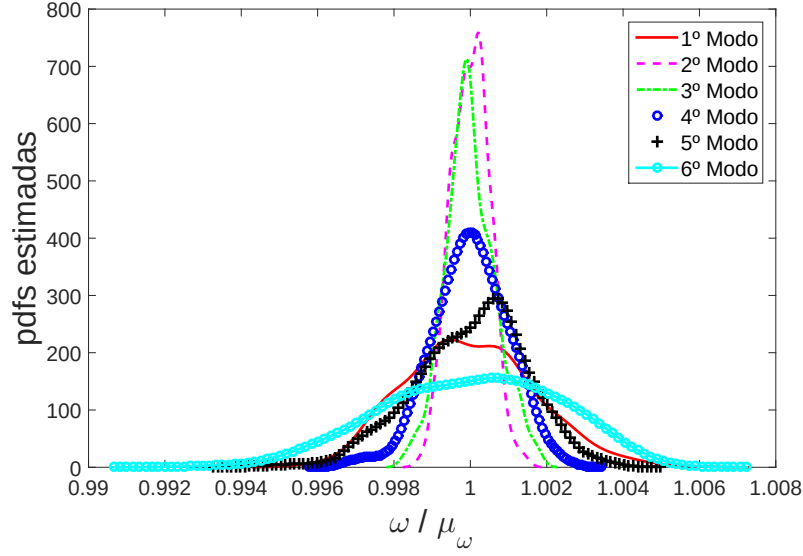


Figura 3.9: Estimativa das pdfs das frequências naturais experimentais dos seis primeiros modos de vibração.

A análise da Figura 3.9 permite concluir que, de forma geral, os desvios associados às frequências naturais para os seis primeiros modos de vibração são baixos, da ordem de 10^{-3} .

É interessante notar que conforme o número do modo de vibração se eleva, o suporte da distribuição de probabilidades aumenta. Esse comportamento sugere que o desvio padrão das frequências naturais seja maior para os modos de vibração com frequências mais altas.

Realizando esta mesma análise para os valores amostrados experimentalmente das taxas de amortecimento modal, posição a_{22} de cada sub-figura da Figura 3.8, é possível também verificar uma região mais provável de se encontrar cada taxa de amortecimento. Porém, sem a simetria e grau de semelhança entre os diferentes modos de vibração verificados nas frequências naturais.

Então, analogamente ao realizado para as frequências naturais, estimou-se a pdf mais provável de originar as taxas de amortecimento de cada modo de vibração, Figura 3.10.

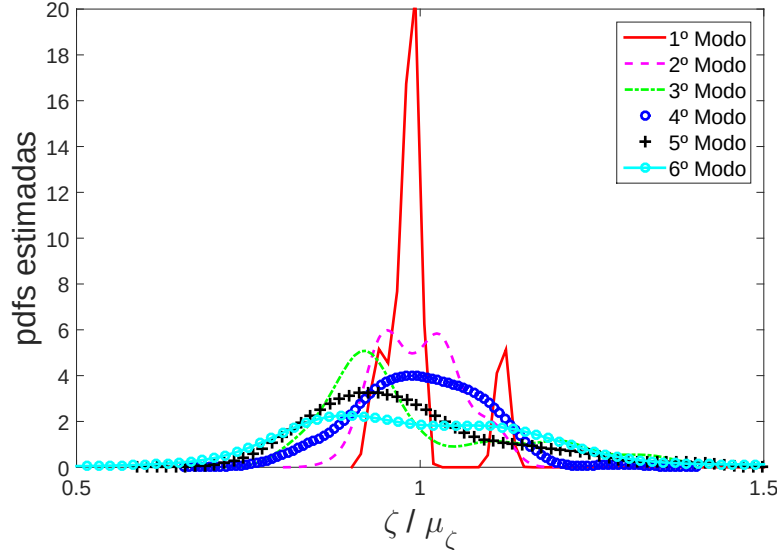


Figura 3.10: Estimativa das pdfs das taxas de amortecimento experimentais dos seis primeiros modos de vibração.

A análise da Figura 3.10 permite concluir que os desvios associados às taxas de amortecimento são superiores aos verificados para as frequências naturais, independente do modo de vibração avaliado. Além disso, as pdfs estimadas são diferentes para cada modo e não é mais possível verificar o mesmo grau de semelhança com a normal Gaussiana. Pelo contrário, o 1º e 2º modos de vibração assemelham-se a uma distribuição bimodal, por exemplo.

Ressalta-se, porém, que a incerteza associada às taxas de amortecimento aumenta conforme a frequência do respectivo modo de vibração se eleva. Essa conclusão é ocasionada pelo aumento do suporte das pdfs conforme a frequência do modo cresce.

Portanto, é possível concluir que independente da propriedade modal em análise, a incerteza na inferência das características dinâmicas da estrutura é maior em modos de vibração mais elevados.

Passa-se agora a avaliar as dispersões entre as frequências naturais e as taxas de amortecimento modal, posição a_{21} ou a_{12} de cada sub-figura da Figura 3.8.

Adicionalmente, foram realizados os cálculos do coeficiente de correlação, Eq. 3.1, de forma a obter uma estimativa sobre o grau de dependência linear entre essas duas propriedades modais em cada um dos seis modos de vibração analisados.

$$C = \frac{cov(\omega, \zeta)}{\sqrt{var(\omega)var(\zeta)}} \quad -1 \leq C_k \leq 0 \quad ou \quad 0 \leq C_k \leq 1 \quad (3.1)$$

O coeficiente de correlação calcula a dependência linear entre duas variáveis de interesse, onde o valor obtido desse cálculo está, em termos absolutos, entre zero e um. Quanto mais próximo de 1, maior é a correlação, ao passo que quanto mais

aproximar-se de 0, menor é a dependência entre as variáveis.

Tabela 3.3: Coeficiente de correlação entre as amostras experimentais da frequência natural e taxa de amortecimento.

Modo de Vibração	Coeficiente de Correlação
1º	0,306
2º	0,262
3º	0,006
4º	-0,468
5º	-0,823
6º	-0,734

Porém, mesmo que as pdfs que geraram os valores amostrais de frequência natural e taxa de amortecimento fossem conhecidas em cada um dos modos de vibração, não seria possível sugerir uma distribuição de probabilidades para o vetor de parâmetros θ , haja vista o comportamento não linear do mapeamento de θ em seu subespaço solução, i.e., $\theta \in D_\theta$.

Ensaio com Dano

Após o pós-processamento dos sinais medidos nos ensaios e o devido tratamento estatístico, ver Item 3.3.1, a Tabela 3.4 apresenta as médias amostrais das frequências naturais obtidas experimentalmente para a estrutura em situação íntegra, sem danos, e para os quatro cenários de dano simulados.

O desvio padrão verificado para a estimativa das frequências naturais nos cenários de dano simulado demonstraram, em termos gerais, o mesmo grau de incertezas obtido no pós-processamento da viga íntegra, i.e., na ordem de 0,01 Hz para os três primeiros modos de vibração, e de 0,3 Hz para o 4º, 5º e 6º modos.

Nesta etapa buscou-se avaliar somente o grau de aproximação para as frequências naturais uma vez que, devido às modificações impostas à estrutura nos cenários criados, o amortecimento estrutural, *a priori*, não é mais governado pelo modelo proporcional de Rayleigh.

A métrica adotada para avaliar a variação entre as frequências naturais no estado íntegro e danificado é dada por $\Delta\omega = \left(1 - \frac{\mu_\omega^{dmg}}{\mu_\omega}\right) \times 100\%$.

A análise da Tabela 3.4 permite verificar que todas as frequências naturais obtidas são inferiores às evidenciadas na situação íntegra. Esse comportamento era esperado, uma vez que, por exemplo, considerando um sistema dinâmico não amortecido com um grau de liberdade, as frequências naturais podem ser calculadas por

$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Portanto, seja em função do aumento da massa modal do sistema, ou a diminuição de sua rigidez, as frequências obtidas devem ser necessariamente inferiores às calculadas com suas propriedades iniciais.

Para um sistema com múltiplos graus de liberdade o conceito é análogo, porém a solução passa a ser calculada através do problema de autovalores e autovetores dado por $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$, onde a relação de proporcionalidade entre as frequências naturais e as matrizes globais de massa e rigidez é mantida.

Tabela 3.4: Frequências naturais para a estrutura íntegra e com dano. Unidades: μ_ω em [Hz] e $\Delta\omega$ em [%].

Modo	Íntegra	Cenário A1		Cenário A2		Cenário B1		Cenário B2	
	μ_ω	μ_ω^{dmg}	$\Delta\omega$	μ_ω^{dmg}	$\Delta\omega$	μ_ω^{dmg}	$\Delta\omega$	μ_ω^{dmg}	$\Delta\omega$
1°	6,78	6,59	2,7	6,71	0,9	6,50	4,1	6,66	1,7
2°	26,93	25,19	6,5	26,31	2,3	26,57	1,3	26,76	0,6
3°	60,46	57,16	5,5	59,14	2,2	59,16	2,2	59,84	1,0
4°	106,59	104,32	2,1	105,21	1,3	102,61	3,7	104,48	2,0
5°	166,46	165,25	0,7	165,78	0,4	165,46	0,6	165,87	0,4
6°	242,49	234,54	3,3	238,73	1,5	232,9	4,0	237,82	1,9

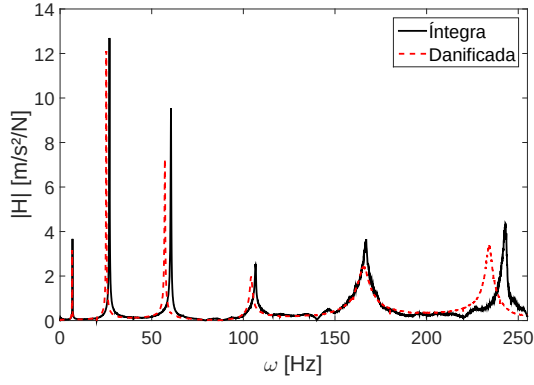
É possível verificar também que as maiores variações entre frequências naturais ocorreram nos cenários A1 e B1, uma vez que as magnitudes das massas impostas nesses casos são maiores do que as evidenciadas em A2 e B2, respectivamente.

De forma a facilitar a visualização da influência do dano simulado no comportamento estrutural, foram comparadas as FRFs experimentais íntegras e com danos na posição AC1 dos acelerômetros, para todos os cenários de dano simulados, Figura 3.11. As FRFs das demais posições dos acelerômetros são apresentadas no Apêndice B.

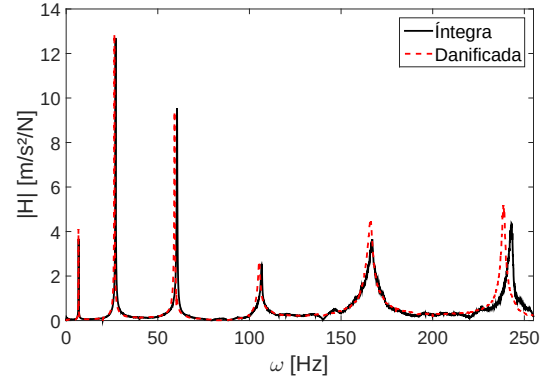
De maneira geral, a análise da Figura 3.11 permite afirmar que as massas impostas para simular danos estruturais não tiveram grande influência nas taxas de amortecimento modal, mesmo para os cenários onde as massas pontuais eram maiores, cenários A1 e B1. Portanto, o mesmo modelo de amortecimento utilizado para a situação íntegra deve ser capaz também de simular os cenários com danos.

Já para as frequências naturais, o cenário A1 é o que produz as maiores variações entre as FRFs íntegra e danificada, Figura 3.11a, seguido por B1, Figura 3.11c. Essas variações são evidenciadas principalmente nos modos de vibração com elevadas frequências naturais.

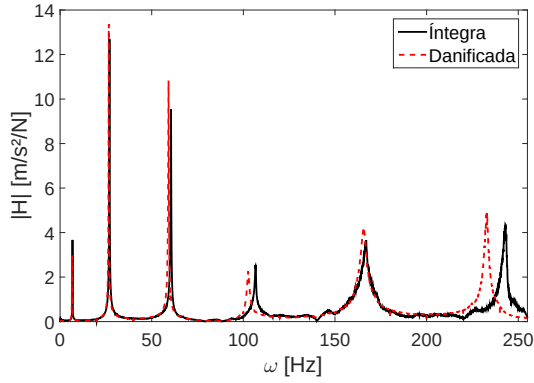
Por outro lado, a Figura 3.11b e 3.11d demonstram a baixa influência no comportamento dinâmico da estrutura nos cenários A2 e B2, onde as massas aplicadas representam, respectivamente, 3 % e 2 % da massa total da viga.



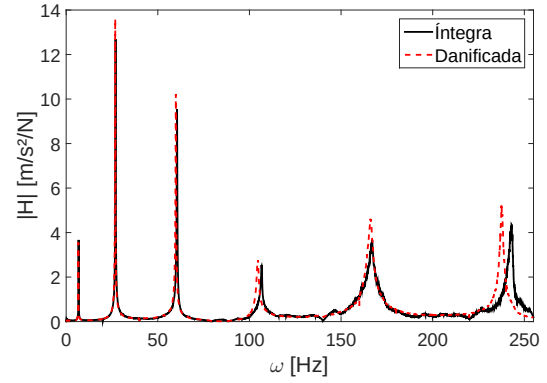
(a) FRFs experimentais para o cenário A1



(b) FRFs experimentais para o cenário A2



(c) FRFs experimentais para o cenário B1



(d) FRFs experimentais para o cenário B2

Figura 3.11: Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC1 dos acelerômetros.

Todos esses resultados estão detalhados na Tabela 3.4.

É válido ressaltar que quanto menor a diferença entre a resposta íntegra e danificada, maior a dificuldade em obter previsões computacionais acuradas no processo de identificação de dano.

Capítulo 4

Apresentação e Discussão dos Resultados

Após realizar o procedimento experimental, Capítulo 3, o processo de ajuste de modelos é iniciado. Conforme apresentado detalhadamente no fluxograma da Figura 1.1, o modelo computacional é calibrado, validado, e posteriormente, utilizado para identificação dos danos simulados, detalhado na Figura 1.2.

Os resultados obtidos são apresentados ao longo deste capítulo e divididos em três partes: no Item 4.1 encontram-se os resultados da calibração do modelo computacional, no Item 4.2 encontram-se os relativos à validação dos modelos de acordo com as hipóteses adotadas, e por fim, os resultados obtidos para a identificação da posição e magnitude das massas que simulam os danos estruturais são detalhados no Item 4.3

A avaliação desses resultados segue uma lógica de comparação de acordo com as respostas fornecidas por cada hipótese da matriz de covariância adotada. A hipótese 1, amplamente utilizada na literatura, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ diagonal, é o ponto central para a investigação da função de verossimilhança.

4.1 Estimação do Parâmetro θ

A solução ótima do vetor de parâmetros é apresentada na Tabela 4.1 de acordo com as três hipóteses estabelecidas.

Tabela 4.1: Solução ótima do vetor θ .

Hipótese de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$	E [GPa]	α	β
1	76,7	3,14 e-1	9,14 e-6
2	76,6	3,23 e-1	10,14 e-6
3	76,8	3,20 e-1	10 e-6

Após a análise da Tabela 4.1 é possível concluir que, do ponto de vista da otimização, não há diferença representativa entre as predições computacionais dos três modelos de função de verosimilhança utilizados.

Isso significa que, a princípio, para o presente trabalho, a solução ótima do vetor de parâmetros não depende do nível de informação *a priori* disponível para o processo de busca determinística, uma vez que todas as três hipóteses convergiram para a mesma solução.

Ao término do ajuste, iniciou-se a etapa de propagação das incertezas relacionadas ao vetor de parâmetros, as variáveis módulo de elasticidade E e os coeficientes do modelo proporcional de amortecimento α e β , Eq. 2.10. A avaliação da qualidade do modelo computacional proposto foi realizada posteriormente a análise da dispersão das predições numéricas.

4.2 Validação do Modelo

Estimativas para os intervalos de confiança foram obtidos após a propagação das incertezas das variáveis que constituem o vetor θ . Através dessa abordagem estatística foi possível fundamentar a tomada de decisão a respeito da qualidade do modelo computacional. Levando-se em consideração que um dos objetivos desta análise é a investigação da função de verosimilhança, buscou-se avaliar as dispersões de θ de acordo com a hipótese adotada para a matriz de covariância.

Para aferir a influência da incerteza de θ em $\mathbf{y}^m$, foram comparados os dados experimentais e numéricos para a curva de amortecimento ($\omega \times \zeta$) e para a função de resposta em frequência $H_{pq}(\omega)$.

De forma a não prolongar demasiadamente o presente item, somente as funções de resposta em frequência para a posição do acelerômetro AC1 foram apresentadas. As demais FRFs obtidas para a validação do modelo, posições dos acelerômetros AC2 e AC3, encontram-se no Apêndice B.

4.2.1 Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

Propagação das Incertezas

Conforme detalhado no Item 2.4, essa hipótese adota que a matriz de covariância $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é diagonal, Eq. 2.18. Não há variância cruzada, i.e., não existe correlação entre os diferentes elementos da matriz.

A propagação das incertezas associadas à θ foi realizada com 1000 simulações de Monte Carlo. A convergência das amostras foi atingida para esse número de gerações, tanto para as médias, como para os desvios das amostras, conforme é possível verificar na Figura 4.1.

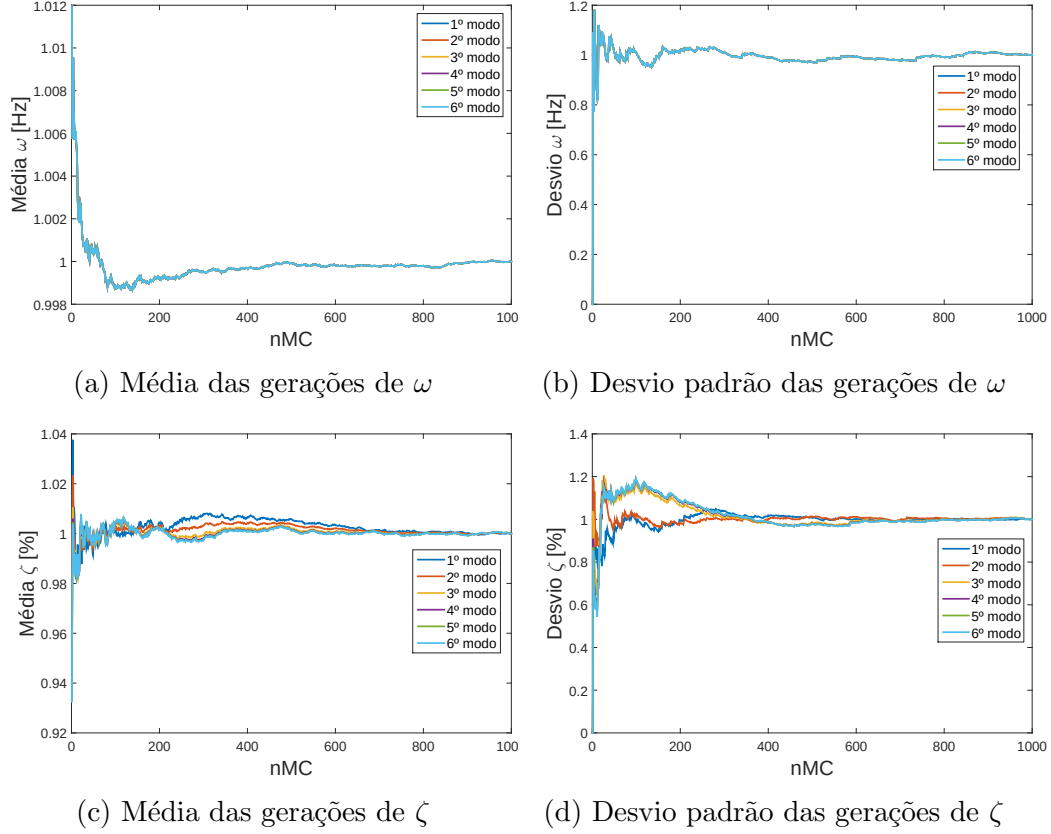


Figura 4.1: Convergência das simulações para a hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

Na Figura 4.1 as médias são normalizadas pela média contendo as amostras.

De maneira análoga ao realizado no Item 3.3 a dispersão dos resultados é analisada com o auxílio da função *plotmatrix* do Matlab. Para maiores informações sobre a função ver [39].

Os gráficos de barras de todas as variáveis da Figura 4.2, posição a_{11} para o módulo de elasticidade, a_{22} para o coeficiente α e a_{33} para o coeficiente β do modelo de amortecimento proporcional, indicam que os desvios das gerações das três variáveis tem ordens de grandeza razoáveis quando comparados com os valores ótimos obtidos na análise determinística.

Por exemplo, para E os resultados variam basicamente no intervalo $\{7, 5, 8, 0\} \times 10^{10}$, ou seja, apresenta uma variação de $0,5 \times 10^{10}$, que representa por volta de 7 % do valor ótimo, $\hat{E} = 7,67 \times 10^{10}$. Além disso, o gráfico não evidencia a ocorrência de nenhum truncamento durante a propagação das incertezas. Essas conclusões são verificadas também para α e β .

A análise da dispersão dos dados permite inferir sobre as relações de dependência linear entre as diversas variáveis que compõem o vetor de parâmetros. Na Figura 4.2 a posição a_{21} está associada a dispersão do par $(E \times \alpha)$, a posição a_{31} está associada ao par $(E \times \beta)$ e, por fim, a_{32} associada a $(\alpha \times \beta)$. A Tabela 4.2 apresenta os valores calculados do coeficiente de correlação para cada par de variáveis avaliados.

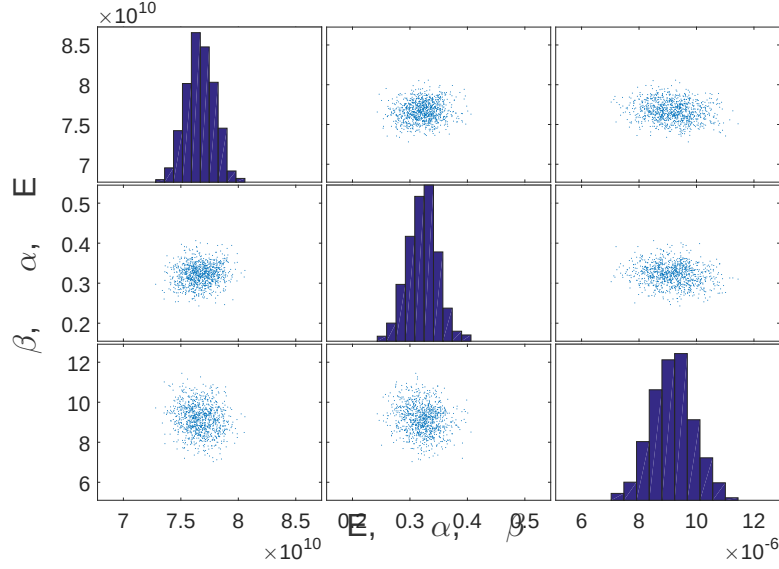


Figura 4.2: Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 1. Unidades: E em [Pa].

Tabela 4.2: Correlação entre as variáveis do vetor θ na hipótese 1.

Par de Variáveis	Coeficiente de Correlação
$(E \times \alpha)$	0,1108
$(E \times \beta)$	-0,0974
$(\alpha \times \beta)$	-0,1901

A partir da análise da Tabela 4.2 é possível verificar que a correlação entre as variáveis que compõem o vetor de parâmetros é baixa de maneira geral. Uma das possíveis explicações para essa conclusão vem do fato de que a matriz de covariância dos dados utilizada nesta hipótese, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é diagonal, e assim, portanto, não é capaz de fornecer informações sobre a variância cruzada, i.e., a covariância, dos dados experimentais.

A baixa correlação obtida entre as variáveis E , α e β , é um resultado, de certa forma, esperado do ponto de vista intuitivo do comportamento dinâmico das estruturas. Em diversos casos a frequência natural da estrutura pode ser estimada a partir do problema não amortecido.

Avaliação das Predições Computacionais

A Figura 4.3 apresenta a curva de amortecimento e a Figura 4.4 a FRF na posição do acelerômetro AC1. As duas curvas foram obtidas considerando a hipótese 1 da matriz de covariância dos dados.

Da análise da curva de amortecimento para a hipótese 1 é possível constatar que o modelo computacional obteve bons resultados na simulação dos cinco primeiros pólos da viga bi-apoiada. Entretanto, não foi capaz de simular os dados experimentais obtidos para o sexto modo de vibração que encontra-se totalmente fora do intervalo de confiança estimado.

A solução determinística, curva vermelha, se aproxima do resultado médio experimental, asterisco em azul, e o respectivo desvio de cada modo, barras verticais em azul, estão de maneira geral dentro do intervalo de 98 % de confiança.

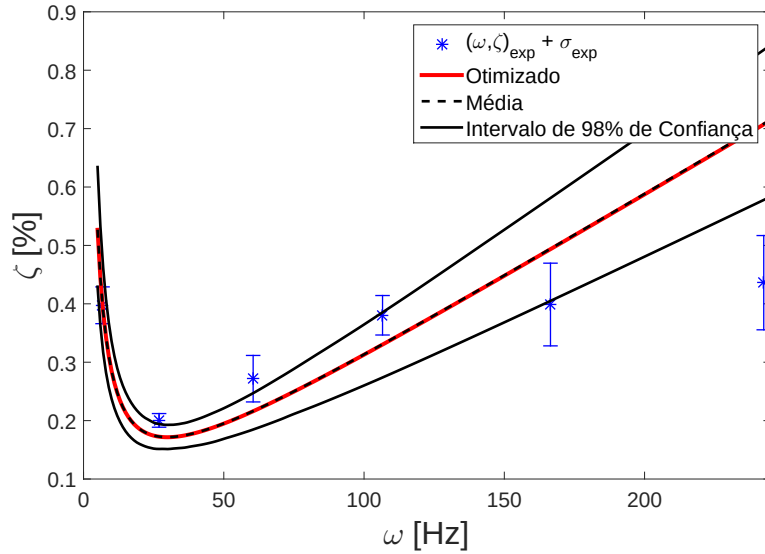


Figura 4.3: Curva de amortecimento na hipótese 1.

É possível acrescentar que, para este caso, a solução ótima converge para a solução média, curva preta pontilhada. Porém, essa convergência não é verificada para todo e qualquer cenário, conforme demonstrado posteriormente.

É interessante observar que do ponto de vista do comportamento global da viga as taxas de amortecimento variam entre $\{0, 2 - 0, 6\}$ %, aparentemente convergindo para algo em torno de 0,4 % se forem observados os últimos três modos de vibração.

Para o presente trabalho, surge então um questionamento sobre a adequação do modelo de amortecimento proporcional de Rayleigh para frequências mais altas da viga de alumínio, haja vista que esta formulação é crescente e os dados experimentais sugerem uma convergência das taxas de amortecimento.

Vale ressaltar que a não adequação do modelo de amortecimento prejudica, em certa medida, a avaliação das previsões computacionais para os modelos de função de verosimilhança, uma vez que a simulação do comportamento real pode não ter sido perfeitamente atingida por falhas em qualquer uma dessas hipóteses, ou até em ambas.

Portanto, considerando a alta sensibilidade das taxas de amortecimento, após a análise da Figura 4.3 é possível concluir que os resultados obtidos simulam o comportamento dinâmico da viga de alumínio de forma satisfatória para os cinco primeiros modos de vibração.

A Figura 4.4 apresenta a FRF para a posição do acelerômetro AC1. Conforme procedimento adotado anteriormente, as FRFs para as posições AC2 e AC3 encontram-se no Apêndice B.

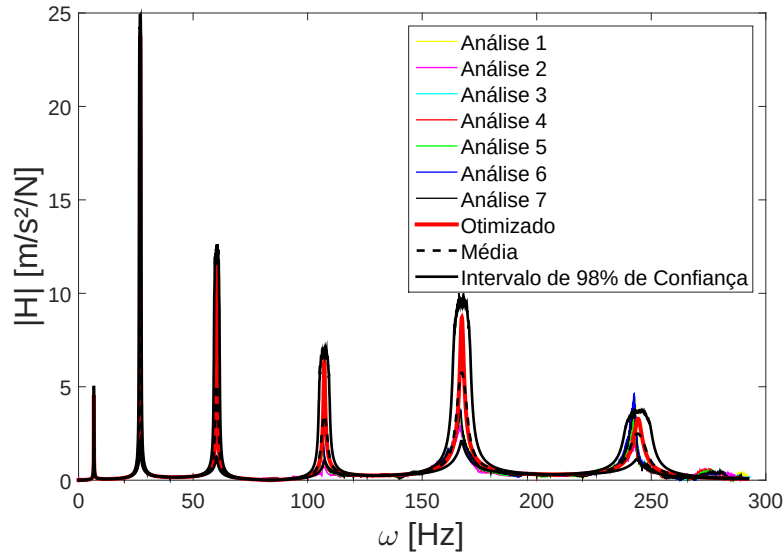


Figura 4.4: FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1.

A análise da FRF do acelerômetro AC1 evidencia o mesmo comportamento obtido para a curva de amortecimento, Figura 4.3, onde as FRFs dos sete ensaios experimentais realizados encontram-se no interior do intervalo de 98 % de confiança. O comportamento da incerteza também é análogo, ou seja, quanto maiores as frequências avaliadas, maior é a região englobada para as predições do modelo computacional, principalmente para a janela de frequências na região de ressonância.

De forma a permitir uma visualização mais precisa, a Figura 4.5 apresenta em detalhes as regiões de ressonância para cada um dos seis modos de vibração analisados.

Ao observar as regiões de ressonância da $H_{pq}(\omega)$ para a hipótese 1, percebe-se a inclusão de todas as FRFs experimentais no intervalo de confiança do modelo computacional, inclusive para o sexto modo de vibração, o que não ocorrera na análise da curva de amortecimento.

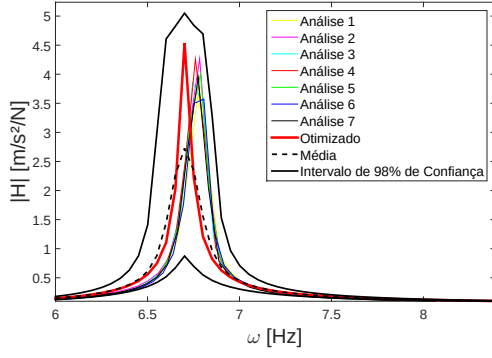
Por outro lado, as soluções ótima, curva vermelha, e média, linha preta pontilhada, não convergem para o mesmo resultado como verificado na curva de amortecimento, Figura 4.3. Pelo contrário, essas soluções alternam-se como a melhor

aproximação da FRF experimental em cada um dos modos de vibração analisados. Por exemplo, o 1º e 3º modos são melhor aproximados pela solução ótima, ao passo que para o 2º e 4º a solução média é mais satisfatória.

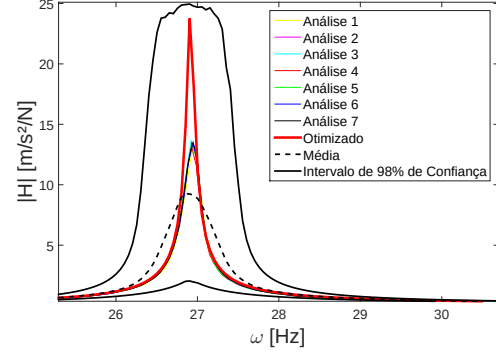
Nenhuma das duas soluções computacionais, i.e., ótima ou média, conseguiu aproximar-se com boa qualidade dos resultados experimentais do 4º e 5º modos de vibração. Um dos possíveis motivos é o que diz respeito à localização da excitação com o martelo e da medição pelo acelerômetro AC1, que não privilegiam a aferição de tal modo.

É interessante notar que ao contrário do evidenciado na curva de amortecimento, praticamente todas as FRF experimentais do 6º modo de vibração encontram-se no interior do intervalo de 98 % de confiança, conforme demonstra a Figura 4.5f. No entanto, não é possível concluir qual das duas soluções, a ótima ou a média, é a melhor. Isso pode ser devido ao fato do modelo computacional perder acurácia para os modos de vibração mais elevados.

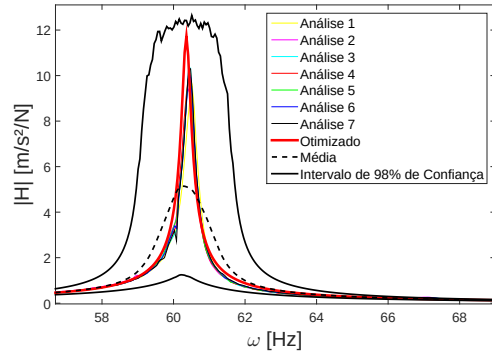
Portanto, haja vista a boa correlação entre os dados experimentais e computacionais, evidenciadas tanto na curva de amortecimento Figura 4.3, quanto nas FRFs, Figuras 4.4 e 4.5, tem-se sinais positivos a favor do modelo.



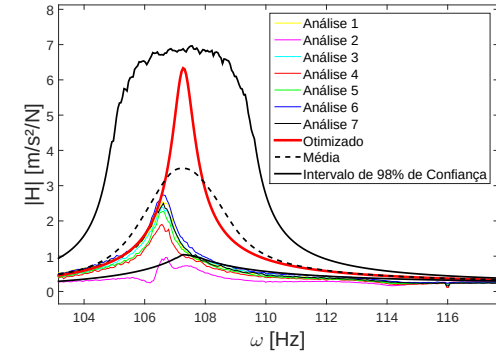
(a) Região de ressonância do 1º modo



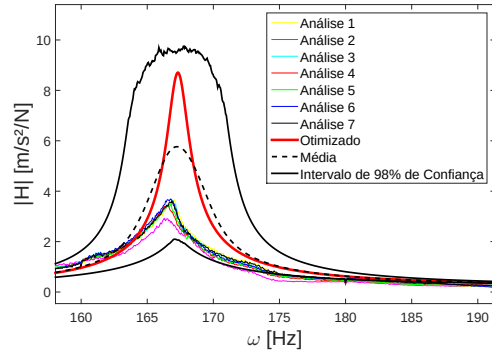
(b) Região de ressonância do 2º modo



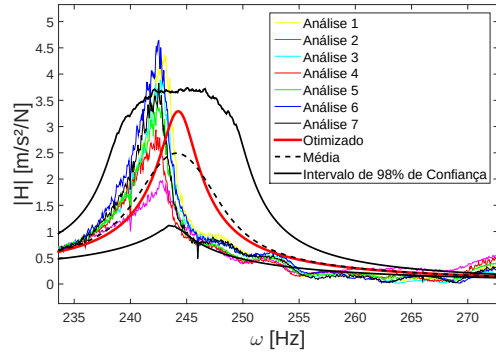
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura 4.5: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 1.

4.2.2 Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

Propagação das Incertezas

A hipótese 2 adota que a matriz de covariância $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é completa, Eq. 2.19, conforme abordado no Item 2.4. Aproveitando a grande quantidade de ensaios, calculou-se a variância da massa completa de dados experimentais.

A propagação das incertezas associadas à θ foi realizada de maneira análoga à hipótese 1, onde atingiu-se a convergência da amostragem com 1000 simulações de Monte Carlo, conforme é possível verificar na Figura 4.6.

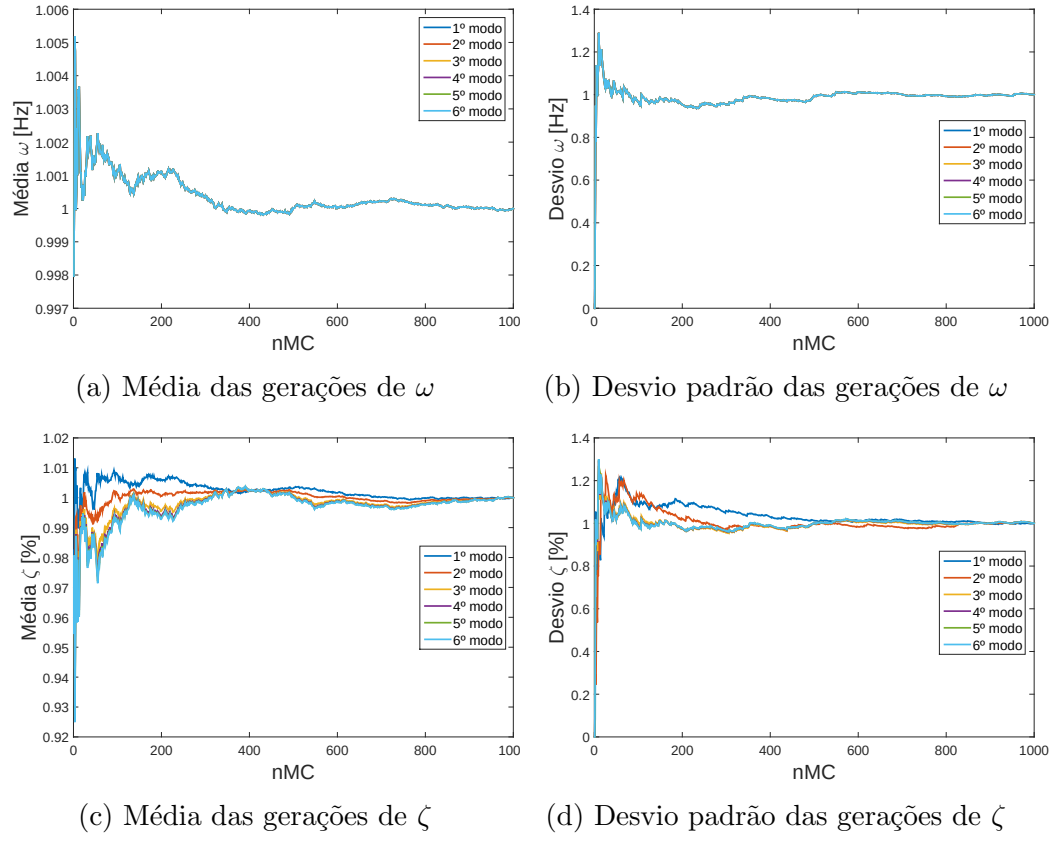


Figura 4.6: Convergência das simulações para a hipótese 2 de Σ_{ee} . Valores normalizados.

A Figura 4.7 apresenta o gráfico de barras e de dispersão das amostras geradas na propagação das incertezas relativas às variáveis que compõem o vetor θ .

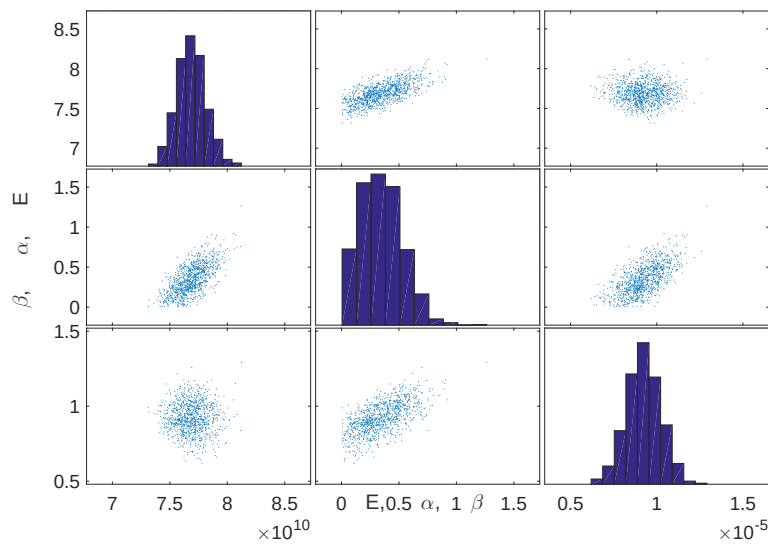


Figura 4.7: Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 2. Unidade: E em [Pa].

De maneira geral, os gráficos de barras das incertezas das variáveis obtidos pela hipótese 2, Figura 4.7 é bem similar com o obtido na hipótese 1, Figura 4.2. Os desvios das realizações são compatíveis com os valores ótimos estimados, apesar de para o coeficiente α , posição a_{22} , o gráfico de barras apresentar que ocorreu um truncamento durante o sorteio dos números aleatórios.

Por outro lado, os gráficos de dispersão são bem diferentes, independente do par de variáveis analisado. A Tabela 4.3 detalha os valores obtidos do coeficiente de correlação para a combinação em pares das variáveis E , α e β .

Tabela 4.3: Correlação entre as variáveis do vetor θ na hipótese 2.

Par de Variáveis	Coeficiente de Correlação
$(E \times \alpha)$	0,3075
$(E \times \beta)$	-0,7901
$(\alpha \times \beta)$	-0,3442

A Tabela 4.3 confirma a grande diferença nos gráficos de dispersão obtidos na hipótese 2 quando comparados com os verificados na hipótese 1. De maneira geral, os coeficientes de correlação sugerem uma dependência linear superior para as amostras geradas pela hipótese 2, inclusive com o par $(E \times \beta)$ saindo de um coeficiente, em valores absolutos, de 0,0974 para 0,7901, o que indica alta correlação, ou seja, forte dependência linear entre as variáveis.

Esse comportamento já era esperado, uma vez que o nível de informações fornecido *a priori* para o ajuste computacional na hipótese 2 é superior quando comparado com a hipótese 1. Portanto, uma das possíveis explicações para essa acentuada diferença na relação cruzada das variáveis, vem do fato de que a matriz de covariância dos dados utilizada nesta hipótese, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é completa. Ou seja, é capaz de fornecer informações sobre a variância cruzada, o que na hipótese 1, matriz diagonal, não era possível.

Entretanto, é válido ressaltar que essa conclusão não prova a dependência linear entre as variáveis. Apenas demonstra a influência da qualidade da informação *a priori* fornecida ao processo computacional.

Avaliação das Predições Computacionais

A Figura 4.8 apresenta a curva de amortecimento estimada de acordo com a hipótese 2. É possível verificar o mesmo comportamento observado na curva obtida para a hipótese 1, i.e., a solução ótima converge para a solução média, a solução determinística aproxima os valores médios experimentais, com seus respectivos desvios, até o quinto modo, etc.

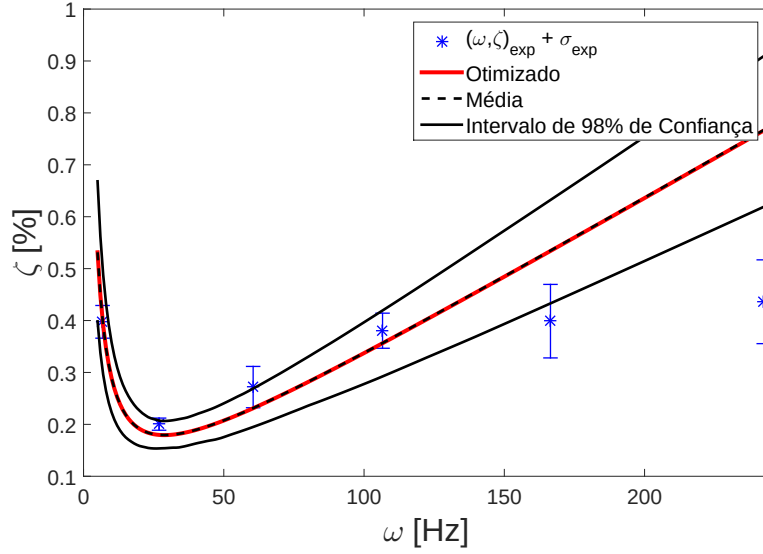


Figura 4.8: Curva de amortecimento na hipótese 2.

Vale para a hipótese 2 o mesmo questionamento levantado para a curva de amortecimento da hipótese 1, ou seja, a adequação do modelo de amortecimento proporcional para altas frequências. O modelo proposto por Rayleigh resulta em taxas de amortecimento continuamente crescentes para o aumento das frequências naturais, e, ao analisar a Figura 4.8, essa premissa parece não se adequar ao comportamento real da estrutura, uma vez que os dados experimentais sugerem uma convergência do amortecimento.

Porém, do ponto de vista do ajuste computacional, uma análise comparativa entre a Figura 4.3 e 4.8 permite constatar a quase identidade entre as previsões numéricas para as curvas de amortecimento considerando a hipótese 1, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ diagonal, e a hipótese 2, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ completa.

Corroborar para essa constatação o fato de que as taxas de amortecimento são propriedades modais muito sensíveis, difíceis de serem medidas de forma acurada, especialmente se tratando de estruturas civis que, de maneira geral, possuem ordem de grandeza baixa, inferior a 1 %.

Passa-se agora a análise da FRF para a posição do acelerômetro AC1, Figura 4.9. Objetivando não prolongar o presente item, conforme realizado anteriormente, as FRFs para as posições AC2 e AC3 são apresentadas no Apêndice B.

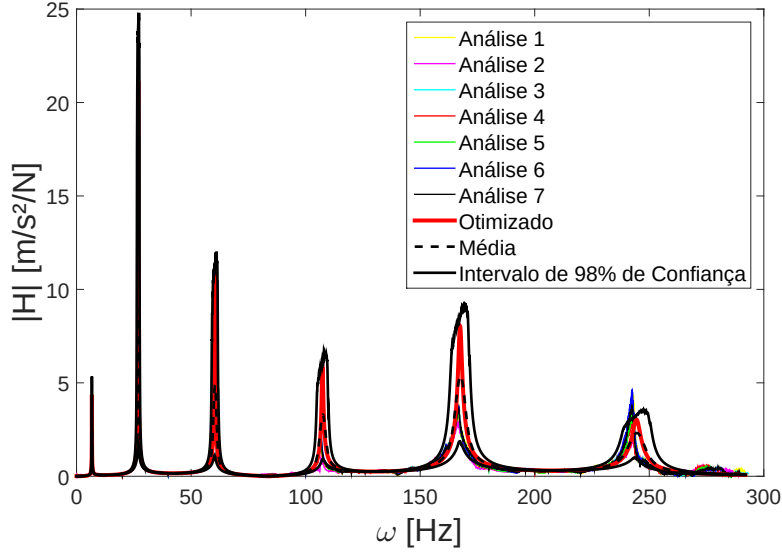


Figura 4.9: FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2.

A análise da FRF no acelerômetro AC1 evidencia o mesmo comportamento obtido para a respectiva curva de amortecimento. As FRFs dos sete ensaios experimentais encontram-se no interior do intervalo de 98 % de confiança e quanto maiores as frequências avaliadas, mais alargada é a região de confiança para as predições do modelo computacional.

De forma a permitir uma visualização mais precisa, a Figura 4.5 apresenta em detalhe as regiões de ressonância para cada um dos seis modos de vibração analisados.

A análise da Figura 4.10a à 4.10f confirma a inclusão de todas as FRFs experimentais na região de confiança do modelo computacional, inclusive para o sexto modo de vibração, assim como verificado para a hipótese 1.

Conclui-se então que as variâncias cruzadas são irrelevantes quando comparadas às variâncias diagonais, sendo possível portanto desconsiderá-las na propagação das incertezas dos parâmetros de interesse sem perda na qualidade das predições do modelo.

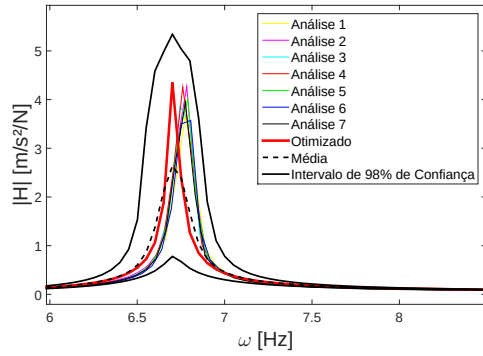
Portanto, é válido afirmar que a estimativa da matriz de covariância do vetor de parâmetros Σ_{θ} pela hipótese 1, $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ diagonal, fornece resultados numéricos muito próximos aos verificados na hipótese 2, onde a matriz de covariância dos dados $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ é completa.

Essa conclusão é importante pelo fato de que, geralmente, a utilização de matrizes diagonais reduz o esforço computacional e permite uma série de simplificações nos cálculos matriciais, quando comparadas com matrizes completas.

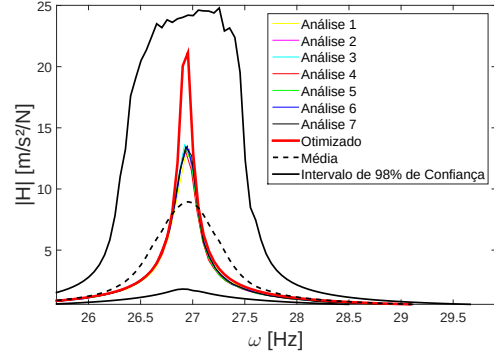
Além disso, fica clara a possibilidade de realizar um estudo sobre as incertezas do vetor de parâmetros sem que seja necessária a obtenção de grande massa de dados ex-

perimentais para estimar as matrizes de covariância, uma vez que ensaios podem ter elevado custo e demandarem muito tempo de processamento e pós-processamento.

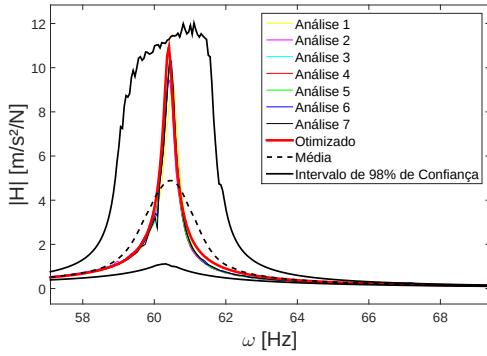
Portanto, é possível afirmar que, para este caso, não há diferença representativa nas predições do modelo computacional em função da escolha entre a hipótese 1 ou 2 para a matriz de covariância dos dados, demonstrando assim a viabilidade da formulação de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ como uma matriz diagonal.



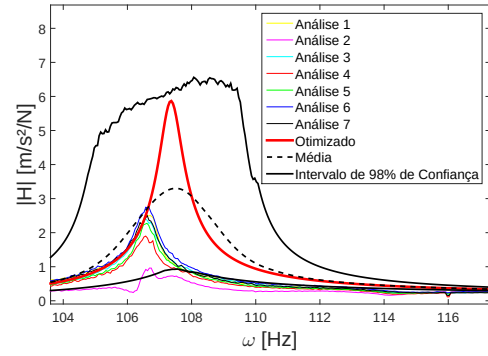
(a) Região de ressonância do 1º modo



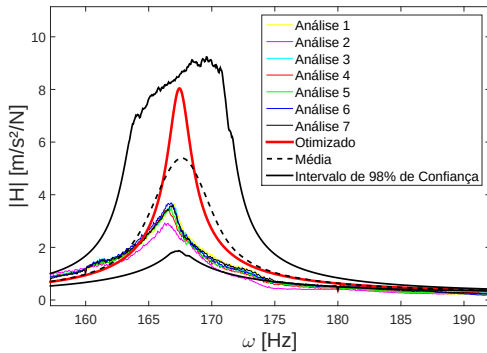
(b) Região de ressonância do 2º modo



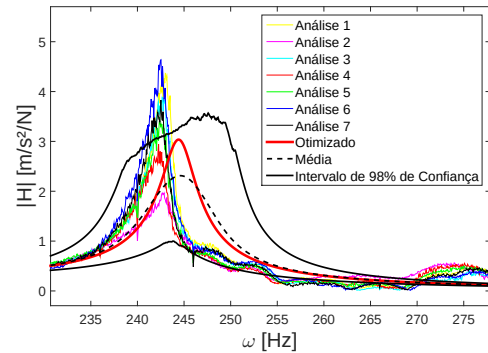
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura 4.10: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na hipótese 2.

4.2.3 Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ - 1ª formulação

Propagação das Incertezas

A última hipótese para formulação da matriz de covariância, hipótese 3, propõe, de acordo com BECK *et al.* [35], que a covariância pode ser estimada como uma matriz diagonal avaliada no ponto de ótimo do vetor de parâmetros.

Conforme detalhado no Item 2.4.2, a hipótese 3 foi dividida em três formulações distintas, onde neste item avalia-se a 1ª formulação adotada.

A propagação das incertezas, realizadas através das simulações de Monte Carlo, convergiu com 1000 realizações.

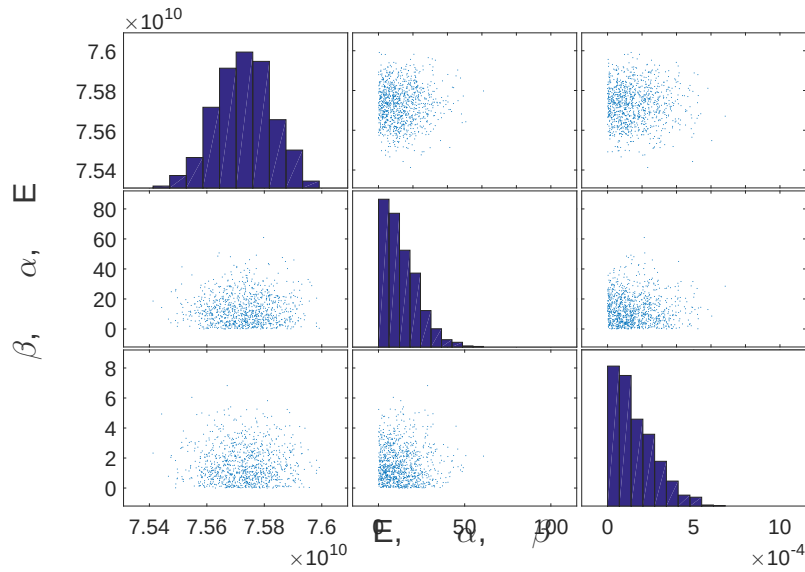


Figura 4.11: Dispersão do vetor de parâmetros para 1ª formulação da hipótese 3. Unidade: E em [Pa].

Ao observar a Figura 4.11, que apresenta a propagação das incertezas para o vetor θ , é evidente a diferença dos resultados em relação às outras duas hipóteses. O gráfico de barras do módulo de elasticidade possui variação dos resultados muito inferior às obtidas nas hipóteses 1 e 2, na ordem de $0,06 \times 10^{10}$, o que representa menos de 1 % do valor ótimo, e não indica nenhum tipo de truncamento realizado durante a simulação. Por outro lado, os gráficos de barras dos coeficientes de amortecimento revelam variação muito elevada nas gerações obtidas, levando assim ao truncamento da simulação.

Por exemplo, o gráfico de barras do coeficiente α indica resultados variando no intervalo $\{0, 50\}$ de uma variável que possui solução ótima de $\hat{\alpha} = 0,3$. Comportamento análogo é verificado para β , onde as amostras são verificadas no intervalo $\{0, 5\} \times 10^{-4}$ e a solução determinística vale $\hat{\beta} = 10 \times 10^{-6}$. Ou seja, a partir

desses resultados não há como realizar nenhum tipo de inferência sobre as variáveis, ficando o cálculo dos coeficientes de correlação inócuo.

A partir dessa propagação de incertezas do vetor θ as previsões computacionais devem ser fortemente impactadas, provavelmente não refletindo o comportamento dinâmico verificado em estruturas reais.

Avaliação das Previsões Computacionais

A Figura 4.12 apresenta a curva de amortecimento estimada de acordo com a 1ª formulação da hipótese 3. É evidente a grande diferença desta curva quando comparada com às obtidas com as hipóteses anteriores. Apesar de todos os dados experimentais dos pólos, médias e respectivos desvios, estarem dentro do intervalo de confiança, as incertezas relacionadas às taxas de amortecimento não permitem fundamentar qualquer análise sobre as previsões do modelo computacional.

Conforme suspeita levantada anteriormente, a curva de amortecimento fornecida por esta formulação não é satisfatória para análise crítica do comportamento dinâmico de uma estrutura real, em especial às estruturas civis que possuem, normalmente, baixas taxas de amortecimento.

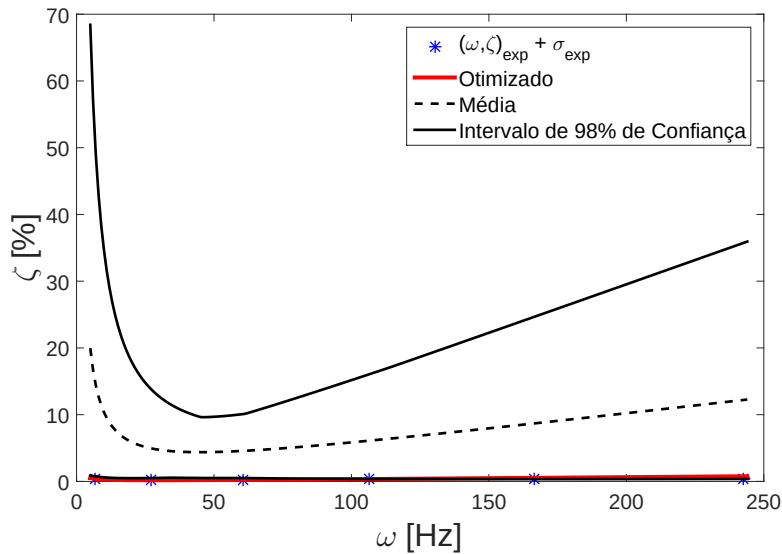


Figura 4.12: Curva de amortecimento para 1ª formulação da hipótese 3.

A elaboração do intervalo de confiança, neste caso, não aumentou o nível de informação para auxiliar na validação do modelo computacional. Pelo contrário, sua formulação aumenta, em muito, a possibilidade de variação das taxas de amortecimento.

Após a análise da curva de amortecimento, fica claro que para a presente análise a 1ª formulação da hipótese 3 não resultou em previsões computacionais satisfatórias

na investigação das incertezas relativas ao vetor de parâmetros e na curva de amortecimento, sendo, portanto, desnecessária a verificação das FRFs para a posição do acelerômetro AC1.

Portanto, o método proposto pela 1ª formulação da hipótese 3 foi considerado não válido para o presente estudo e descartado do hall de métodos a serem utilizados na etapa de identificação de danos.

4.2.4 Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ - 2ª formulação

Propagação das Incertezas

A 2ª formulação da hipótese 3 objetiva diminuir a diferença entre a magnitude das variáveis que compõem o vetor de parâmetros a partir da normalização das saídas do modelo computacional com as médias amostrais, conforme detalhado no Item 2.4.2.

A propagação das incertezas, conforme verificado para as demais hipóteses, também convergiu com 1000 simulações de Monte Carlo.

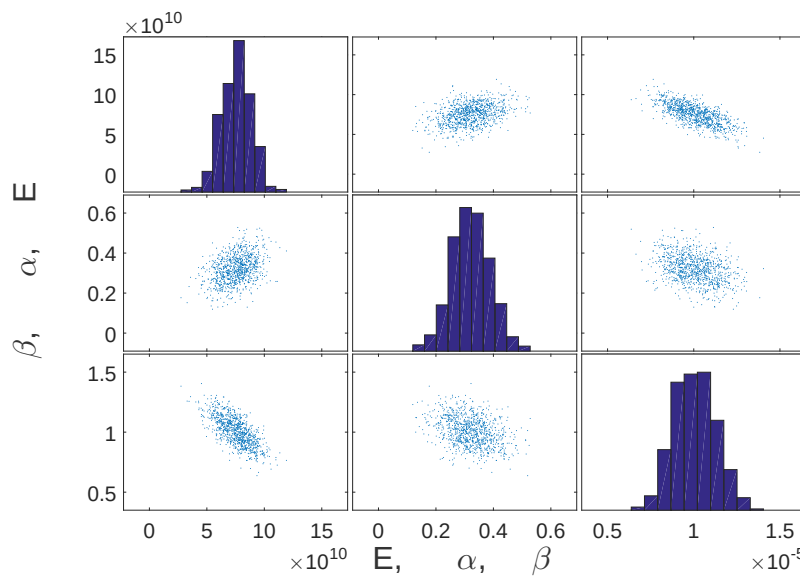


Figura 4.13: Dispersão do vetor de parâmetros para 2ª formulação da hipótese 3. Unidade: E em [Pa].

A Figura 4.13 apresenta as gerações para o vetor θ . Nesta formulação, todos os gráficos de barras demonstram que não houve nenhum truncamento durante as simulações. Para os coeficientes de amortecimento, a variação nas gerações obtidas é coerente com as respectivas soluções ótimas das variáveis, são da mesma ordem de grandeza, ponto positivo a favor dessa formulação em detrimento da 1ª.

Entretanto, ao analisar o gráfico de barras de E , é possível constatar que o intervalo das realizações, $\{5, 10\} \times 10^{10}$ é da mesma ordem de grandeza do valor

ótimo da variável $\hat{E} = 7,7 \times 10^{10}$. Por se tratar de uma variável de elevado impacto no comportamento estrutural, tal como é o caso do módulo de elasticidade, sugere-se a partir dos resultados obtidos na propagação das incertezas que, assim como o verificado na 1ª formulação, as previsões computacionais não devam ser satisfatórias para descrever o comportamento dinâmico de uma estrutura real.

Avaliação das Previsões Computacionais

A Figura 4.14 apresenta a FRF estimada de acordo com a 2ª formulação da hipótese 3 para a posição do acelerômetro AC1.

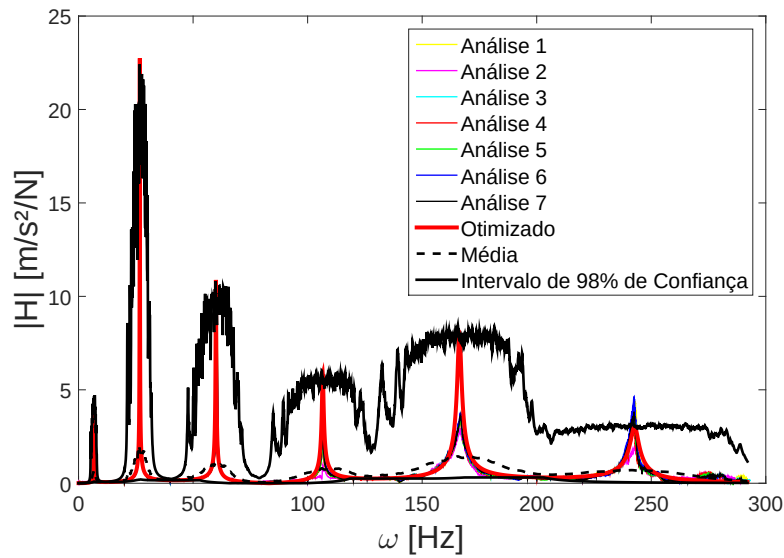


Figura 4.14: FRF no acelerômetro AC1 na 2ª formulação da hipótese 3.

Conforme verificado anteriormente na propagação das incertezas, Figura 4.13, a elevada dispersão associada ao módulo de elasticidade resultou em um intervalo para a região de ressonância muito elevado quando comparado às estimativas de intervalo de confiança obtidas nas outras hipóteses.

De forma análoga à conclusão obtida para a curva de amortecimento na 1ª formulação, a previsão computacional para a FRF no acelerômetro AC1 não é razoável para descrever o comportamento dinâmico de uma estrutura real, não fornecendo os subsídios necessários para qualquer tomada de decisão do ponto de vista de projeto de engenharia.

Portanto, o método proposto pela 2ª formulação da hipótese 3 também foi considerado não válido para o presente estudo e descartado do hall de métodos a serem utilizados na etapa de identificação de danos.

4.2.5 Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$ - 3ª formulação

Propagação das Incertezas

A última formulação da hipótese 3 adota que as variáveis módulo de elasticidade E e o par de coeficiente do amortecimento proporcional de Rayleigh (α , β) são independentes, conforme detalhado no Item 2.4.2.

A propagação das incertezas associadas à θ foi realizada com 1000 simulações de Monte Carlo. A convergência das amostras foi atingida para esse número de gerações, tanto para as médias, como para os desvios das amostras, conforme é possível verificar na Figura 4.15.

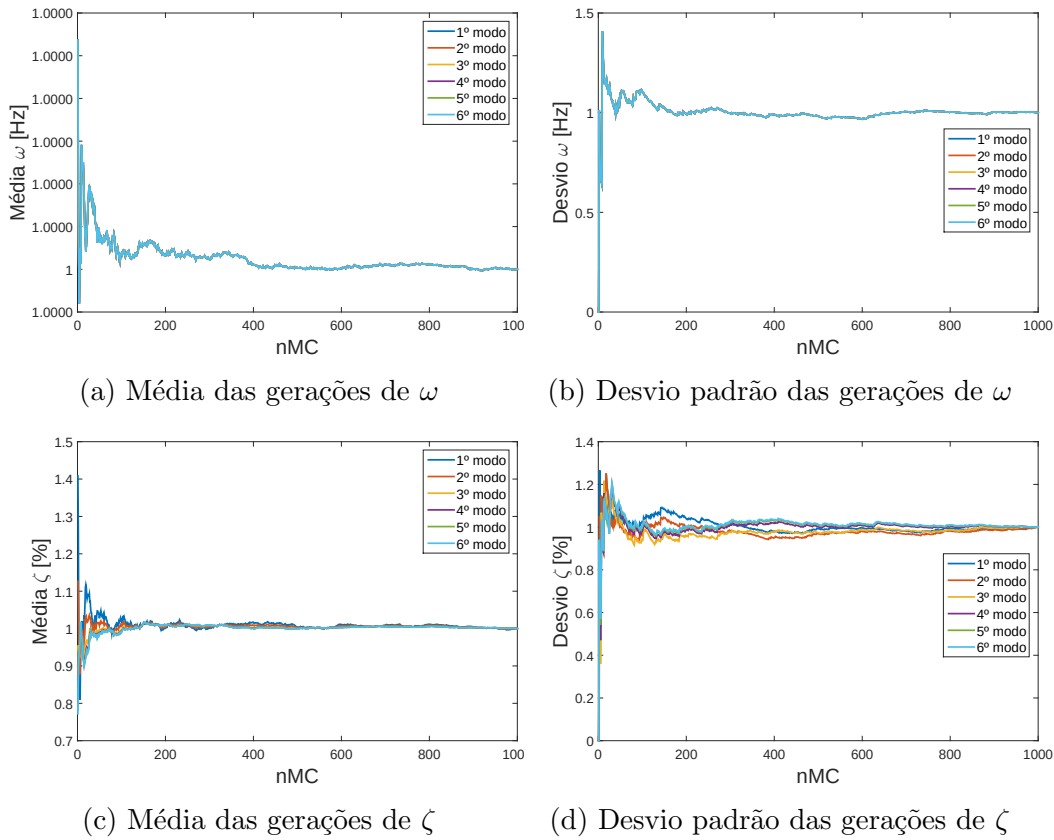


Figura 4.15: Convergência das simulações para a 3ª formulação da hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$. Valores normalizados.

Ao observar a Figura 4.16, que apresenta a propagação das incertezas para o vetor θ , é possível verificar que o gráfico de barras dos coeficientes α e β apresentam o intervalo de valores das realizações compatíveis com os valores ótimos calculados na análise determinística.

Por outro lado, ao analisar o gráfico de barras do módulo de elasticidade, é possível verificar que a variação das amostras é da ordem de $0,002 \times 10^{10}$, valor esse muito inferior à solução ótima, $\hat{E} = 7,7 \times 10^{10}$. Esse fato sugere que a região de

ressonância dos modos de vibração seja muito bem definida no momento da predição computacional das FRFs.

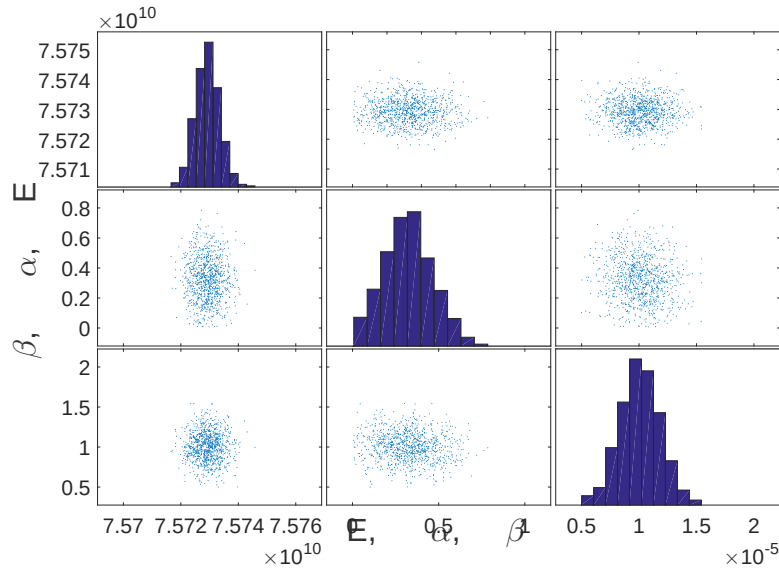


Figura 4.16: Dispersão do vetor de parâmetros para hipótese 3. Unidade: E em [Pa].

De forma análoga ao realizado nas hipóteses anteriores, o coeficiente de correlação foi calculado e apresentado na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Correlação entre as variáveis do vetor θ para a 3ª formulação da hipótese 3.

Par de Variáveis	Coeficiente de Correlação
$(E \times \alpha)$	-0,0033
$(E \times \beta)$	-0,0665
$(\alpha \times \beta)$	-0,1129

Conforme pode ser verificado na Tabela 4.4, as dependências lineares entre as variáveis é praticamente nula. Essa conclusão era inicialmente esperada em função de esta ser uma das premissas dessa formulação, E e $(\alpha \times \beta)$ serem independentes.

Avaliação das Predições Computacionais

A Figura 4.17 apresenta a curva de amortecimento estimada de acordo com a 3ª formulação da hipótese 3. De forma geral, o comportamento é similar às obtidas na hipótese 1 e 2, ou seja, a solução ótima, curva vermelha, converge para a solução média, curva preta pontilhada. Porém, nessa metodologia, tanto o valor

médio quanto o desvio dos pólos experimentais dos seis modos de vibração avaliados encontram-se no interior da estimativa de intervalo de confiança.

Outra diferença verificada é a elevada incerteza associada a região do primeiro modo de vibração. Nas hipóteses 1 e 2 as estimativas de intervalo de confiança iniciavam bem limitadas e aumentavam progressivamente com a elevação da frequência do modo de vibração avaliado.

É interessante verificar que a diminuição de informação *a priori* fornecida para o ajuste computacional, premissa básica da hipótese 3, aumenta a tolerância das predições computacionais. Esse efeito é intuitivo, haja vista que quanto menor é o nível de conhecimento de um sistema, maior deve ser a incerteza relacionada às respostas numéricas.

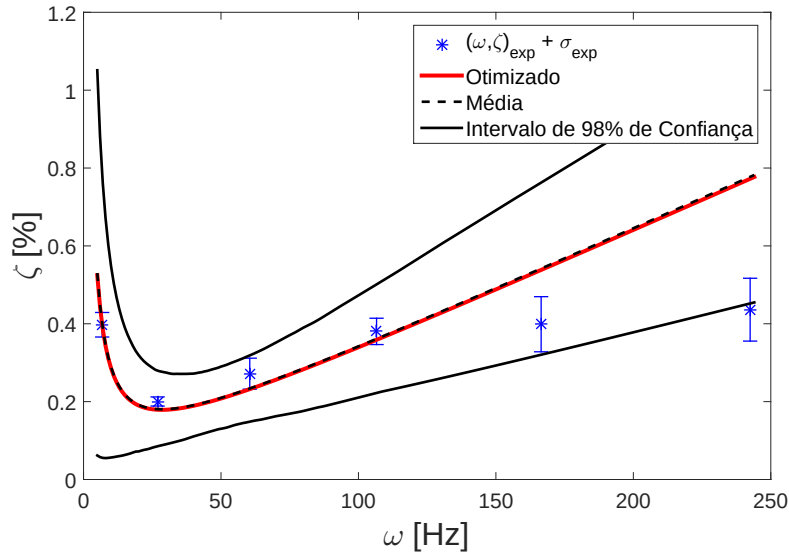


Figura 4.17: Curva de amortecimento para a 3ª formulação da hipótese 3.

A discussão levantada anteriormente sobre a formulação do modelo proporcional de amortecimento é menos conclusiva nesta formulação devido ao fato do intervalo de confiança envolver um número maior de valores possíveis para as taxas de amortecimento modais.

A Figura 4.18 apresenta a predição computacional da 3ª formulação da hipótese 3 na FRF para a posição do acelerômetro AC1. Conforme procedimento adotado nas hipóteses anteriores, a FRF para os demais acelerômetros AC2 e AC3 encontram-se no Anexo B.

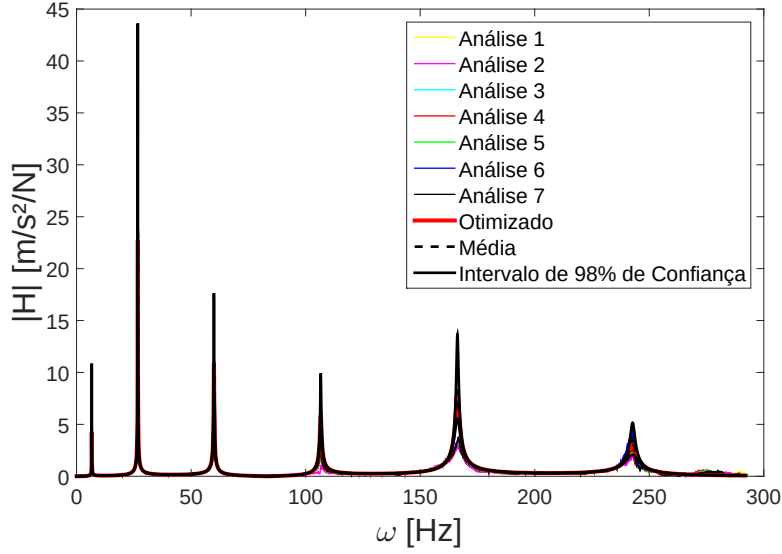


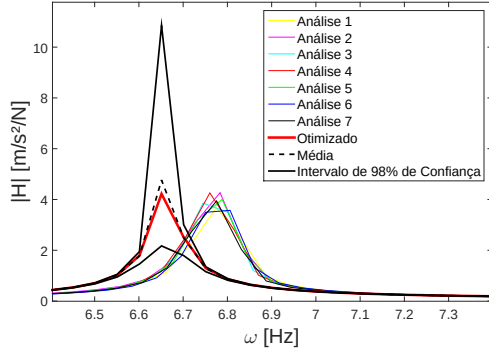
Figura 4.18: FRF no acelerômetro AC1 para a 3ª formulação da hipótese 3.

A baixa incerteza relacionada ao módulo de elasticidade, Figura 4.16, produz regiões de ressonância muito bem definidas, principalmente para os três primeiros modos de vibração. A Figura 4.19a ilustra, por exemplo, que uma diferença de 0,1 Hz na frequência natural do 1º modo já é suficiente para que as FRFs experimentais não estejam dentro do intervalo de 98 % confiança. Ao passo que a frequência do modo de vibração de interesse aumenta esse comportamento deixa de existir.

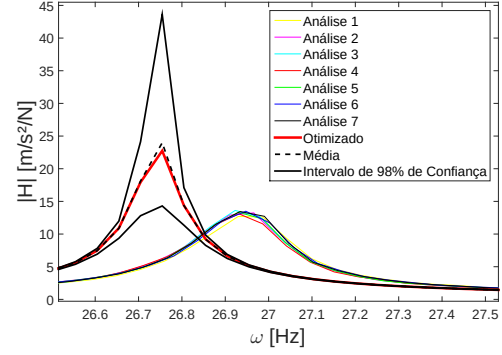
A predição computacional não foi capaz de simular satisfatoriamente o 4º e 5º modos de vibração. Isso pode ser explicado, por exemplo, pela localização da excitação do martelo e do ponto de medição do acelerômetro AC1 que não privilegiam a aferição de tais modos.

No entanto, haja vista o cenário onde o nível de informação *a priori* disponível para o ajuste computacional é baixo ou nulo, a 3ª formulação da hipótese 3 pode ser vista como uma alternativa bastante eficiente para a simulação numérica do comportamento dinâmico da estrutura.

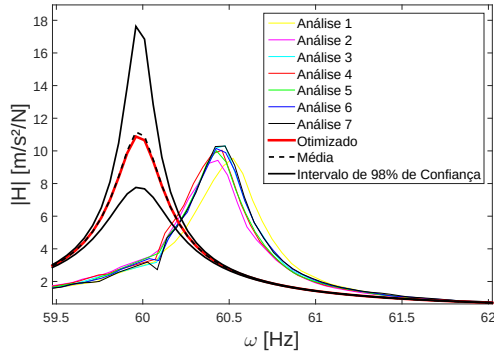
Portanto, de maneira similar às hipóteses 1 e 2, essa formulação é considerada válida para o presente trabalho. Entretanto, a 3ª formulação da hipótese 3 foi descartada do hall de metodologias a serem utilizadas na etapa de identificação de danos em função de sua menor qualidade quando comparada com as hipóteses 1 e 2.



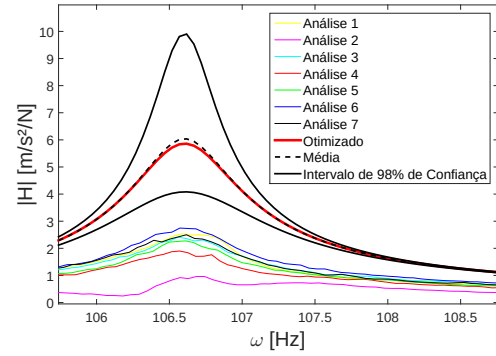
(a) Região de ressonância do 1º modo



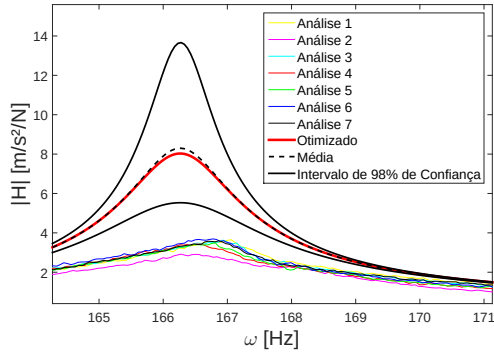
(b) Região de ressonância do 2º modo



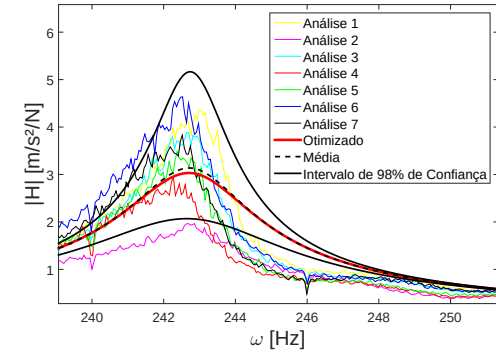
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura 4.19: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC1 na 3ª formulação da hipótese 3.

4.3 Identificação de Dano

Após a calibração e validação, o modelo computacional foi utilizado para identificar danos que no presente trabalho foram simulados a partir da aplicação de massas ao longo da estrutura e divididos em quatro cenários. Para maiores detalhes ver Capítulo 3.

Essa etapa da análise consiste na otimização de um novo vetor de parâmetros em função das variáveis que serão ajustadas, mantendo-se fixo o vetor θ na posição

dada pela solução determinística.

O modelo de função de verosimilhança adotado é o definido pela hipótese 1. Essa escolha se deu em razão da simplicidade de sua formulação e dos bons resultados obtidos quando comparada com a hipótese 2, Item 4.1, onde há uma grande quantidade de dados experimentais.

Conforme detalhado no Capítulo 2 a identificação de danos foi realizada no ambiente Matlab utilizando o algoritmo enxame de partículas com implementações em seu código de forma a auxiliar na convergência.

De forma a avaliar a qualidade do processo de identificação dos cenários de dano, ver Tabela 3.1, foram comparados os dados experimentais e a predição computacional para a posição e magnitude da massa imposta à estrutura, assim como o grau de correlação entre as funções de resposta em frequência $H_{pq}(\omega)$.

É válido ressaltar que nesta etapa não foram realizadas simulações de Monte Carlo para verificar a dispersão da posição ou magnitude da massa em cada cenário, assim como análises de sensibilidade do número de populações e de iterações a serem executadas durante a otimização.

Buscou-se somente a investigação da qualidade da predição computacional do dano a partir do modelo validado, verificando a variabilidade da posição e magnitude através de rodadas consecutivas do algoritmo.

Aproveitando a simetria da estrutura e os cenários de dano criados, ver Tabela 3.1, foram aplicadas restrições na busca da posição e magnitude das massas pelas partículas. A Eq. 4.1 apresenta as condições de contorno para o cenário A e a Eq. 4.2 para o cenário B de dano.

$$\text{cenário A: } \begin{cases} \{X_m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq X_m \leq 0,5L\} \\ \{M_m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq M_m \leq 0,5kg\} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{cenário B: } \begin{cases} \{X_m \in \mathbb{R} \mid 0,5L \leq X_m \leq L\} \\ \{M_m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq M_m \leq 0,5kg\} \end{cases} \quad (4.2)$$

Porém, mesmo aproveitando-se a simetria da estrutura, a presença de falsas predições computacionais é recorrente neste tipo de otimização, i.e., identificação de danos estruturais.

Então, sabendo-se que a função de resposta em frequência é uma das predições computacionais avaliadas para investigar o grau de proximidade das respostas numéricas, foi adotada a métrica APCC, (*amplitude-phase correlation coefficient*) para verificar a correlação entre FRFs de soluções acuradas e soluções falsas, ou entre FRFs experimentais e FRFs numéricas, etc.

O APCC é definido de acordo com a Eq. 4.3, [47].

$$APCC(\omega) = \frac{2\mathbf{a}^*(\omega)\mathbf{b}(\omega)}{\mathbf{a}^*(\omega)\mathbf{a}(\omega) + \mathbf{b}^*(\omega)\mathbf{b}(\omega)} \quad (4.3)$$

onde os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ contém as FRFs analisadas e o superíndice $(\bullet)^*$ indica o complexo conjugado.

Quanto mais próximo de 1 estiver o módulo do APCC, maior é o grau de correlação entre as FRFs comparadas. Esse valor decresce quanto menor for o nível de aproximação, indo à 0 no limite onde não há correlação alguma.

Portanto, a solução determinística obtida foi avaliada de acordo com o grau de proximidade em relação aos dados experimentais. As predições computacionais do vetor de parâmetros foram comparadas $\boldsymbol{\eta}$ com os dados reais dos cenários simulados e com as respectivas FRFs experimentais.

A métrica adotada para avaliar a variação entre a posição e magnitude das massas e as predições computacionais é dada por $\Delta v = \left(1 - \frac{v}{v^{exp}}\right) \times 100\%$, onde v representa a variável em análise.

De forma a não prolongar demasiadamente o presente item, somente as funções de resposta em frequência para a posição do acelerômetro AC1 são apresentadas. As demais FRFs, obtidas para as posições AC2 e AC3 dos acelerômetros, encontram-se no Apêndice B.

4.3.1 Estimação do Parâmetro η

Considerando as propriedades estocásticas do algoritmo enxame de partículas, o processo de otimização foi realizado 10 vezes consecutivas para cada cenário de dano simulado, onde buscou-se assim obter informações preliminares a respeito da eficiência do algoritmo em cada caso.

Essa análise inicial contou com a investigação das variações da posição e magnitude das massas obtidas e da verificação, ou não, da presença de falsas predições computacionais. Em função de tratar-se de um problema simples, o tempo gasto computacionalmente foi ínfimo e, portanto, desconsiderado nesse estudo.

A Tabela 4.5 apresenta os resultados obtidos para o vetor $\boldsymbol{\eta}$ após o tratamento estatístico. Verificam-se que as melhores aproximações ocorreram nos cenários de dano onde a magnitude das massas era maior, A1 e B1. A diferença entre os dados experimentais e a médias dos resultados numéricos foi inferior à 3 %.

Observando a variação das predições computacionais, nota-se que a posição tem desvio padrão de aproximadamente 30 mm, ao passo que para a magnitude da massa a variação é desprezível. Isso pode ser explicado em função do processo de discretização em elementos finitos.

Tabela 4.5: Solução ótima do vetor η . Unidades: X em [mm] e M em [g].

Cenário	Dado	Posição		Magnitude	
		X_m	ΔX_m	M_m	ΔM_m
A1	exp	300		150	
	comp	302 ± 33	0,6 %	146 ± 10^{-2}	2,7 %
A2	exp	300		49,6	
	comp	199 ± 27	33,7 %	$44,1 \pm 10^{-2}$	11,1 %
B1	exp	859		94,5	
	comp	861 ± 29	0,2 %	$94,2 \pm 10^{-3}$	0,3 %
B2	exp	859		36,9	
	comp	907*	5,6 %	39,3*	7,3 %

* Valor obtido uma única vez em 10 tentativas

De acordo com a ilustração contida na Figura 4.20, existe uma região próxima aos nós do MEF, correspondente à metade dos elementos de pórtico plano adjacentes, onde a posição sorteada no enxame de partículas é substituída pela posição do nó mais próximo. Ou seja, as incertezas na posição da massa dentro dessa região são completamente ignoradas no processo de otimização. Sabendo que os elementos finitos possuem um comprimento aproximadamente igual, essa variação é mantida constante ao longo do processo.

Por outro lado, uma vez adotadas 100 partículas e realizadas 50 gerações por rodada do algoritmo, a magnitude da massa é progressivamente diminuída até atingir um valor onde não seja mais possível minimizar a função custo. Como não há nenhuma restrição para M_m , o enxame de partículas consegue obter reduções no erro a partir de pequenas variações na magnitude da massa.

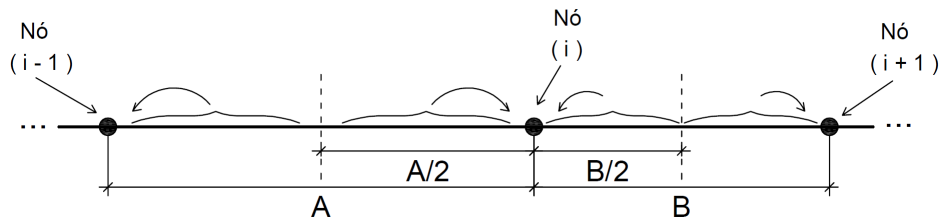


Figura 4.20: Ilustração da posição X em função da discretização pelo MEF.

É importante ressaltar que apesar de a Tabela 4.5 indicar uma predição computacional satisfatória para o cenário B2, inferior à 8 % de diferença com o dado experimental, esse valor foi obtido somente uma vez em 10 rodadas consecutivas do

algoritmo. Para esse caso específico, onde a magnitude da massa é de aproximadamente 2 % da massa total da viga, o enxame de partículas forneceu uma falsa predição. Em 9 das 10 otimizações realizadas o resultado obtido foi: $X_m = 1361$ mm e $M_m = 32,5$ g.

De forma a fazer uma investigação preliminar sobre outros possíveis falsos positivos, são apresentadas as curvas de nível do funcional em alguns cenários de dano. No presente item somente foram apresentadas as curvas para o cenário A1, Figura 4.21, e B2, Figura 4.22, por se tratarem dos cenários com a maior e menor magnitude de massa, respectivamente. As curvas para os casos A2 e B1 são semelhantes à obtida para B2 e por esta razão não foram apresentadas.

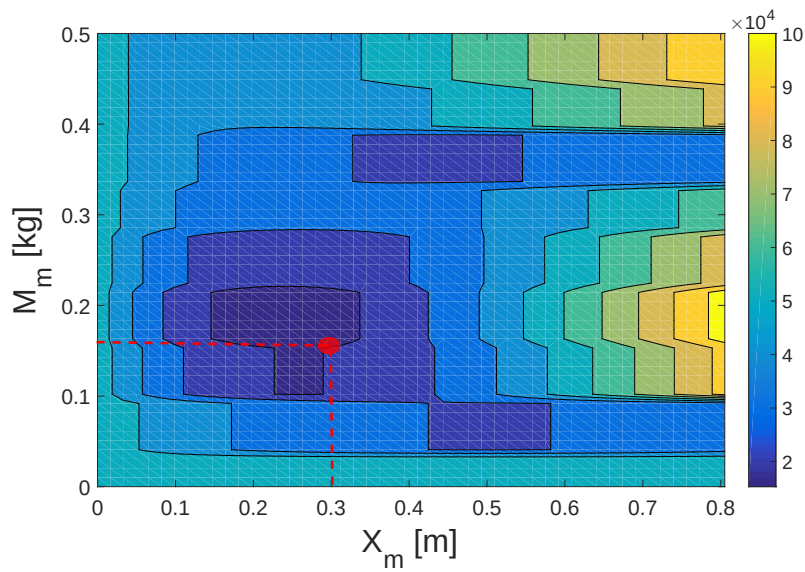


Figura 4.21: Curvas de nível do funcional $S(\eta)$ no cenário A1

Para o cenário A1, a Figura 4.21 ilustra uma curva de nível onde a região de mínimo é bem definida $\{0,2 \leq X_m \leq 0,4\}$ m e $\{0,1 \leq M_m \leq 0,2\}$ kg, o que está coerente com a resposta ótima fornecida pelo enxame de partículas e com os dados experimentais. Esse comportamento bem definido, porém, não ocorre para as curvas de nível dos cenários A2, B1 e B2.

Para os demais cenários, a variável posição permite inferir sobre uma provável região de mínimo, ou seja, entre $\{0,1 - 0,3\}$ m para A2 e entre $\{0,7 - 1,0\}$ m para os cenários B1 e B2. Porém, a variável magnitude da massa, eixo vertical, não é capaz de aumentar o nível de informação dessa região para seu espaço solução $\{0 - 0,5\}$ kg.

Isso indica que nessa região a variação de M_m influencia muito pouco no processo de minimização da função custo dos três cenários. A Figura 4.23 ilustra essa situação a partir da superfície 3D do funcional do cenário B2.

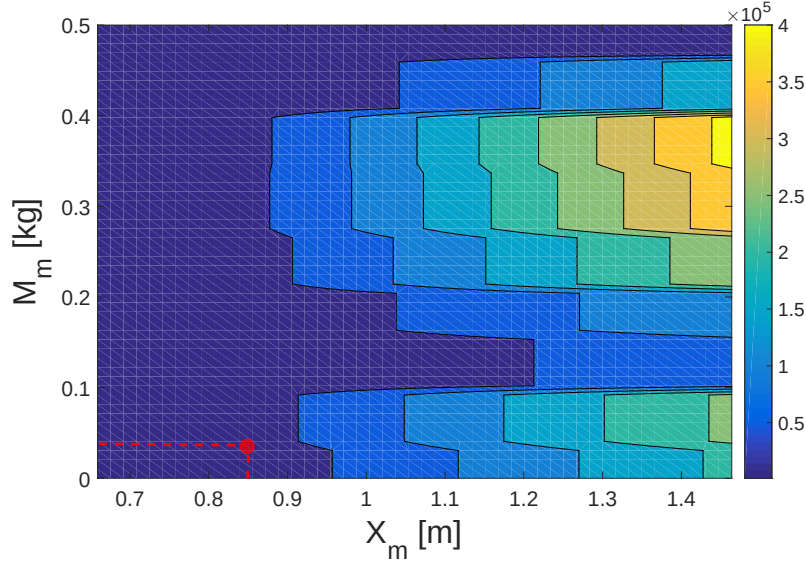


Figura 4.22: Curvas de nível do funcional $S(\boldsymbol{\eta})$ no cenário B2

É válido ressaltar que o cálculo dessas curvas de nível possuem diversas incertezas do ponto de vista da posição de mínimos. Por exemplo, o falso positivo encontrado para o cenário B2, $X_m = 1361$ mm $M_m = 32,5$ g, não é acusado na Figura 4.22 nem como provável região de mínimo.

Os mínimos globais encontrados durante a otimização pelo enxame de partículas não foram retratados nas curvas calculadas para os cenários A2, B1 e B2 em função da inviabilidade computacional de aplicar pequenos incrementos de forma à obter uma curva mais acurada.

Uma pequena sensibilidade foi realizada através do refinamento da malha para o cálculo da superfície 3D do funcional, onde passou-se de uma malha de 50 para 1000 elementos a um custo computacional estimado em 3,5 horas para cada cenário. Ao final das análises, todas as superfícies 3D refinadas se mostraram idênticas às iniciais.

Portanto, é possível afirmar que, para o presente trabalho, a avaliação da eficácia da identificação do dano através do estudo do funcional, seja por curvas de nível ou pelo gráfico 3D, não se mostrou eficiente. O algoritmo forneceu respostas numéricas muito próximas aos cenários de dano simulados que não foram evidenciadas no estudo da função custo.

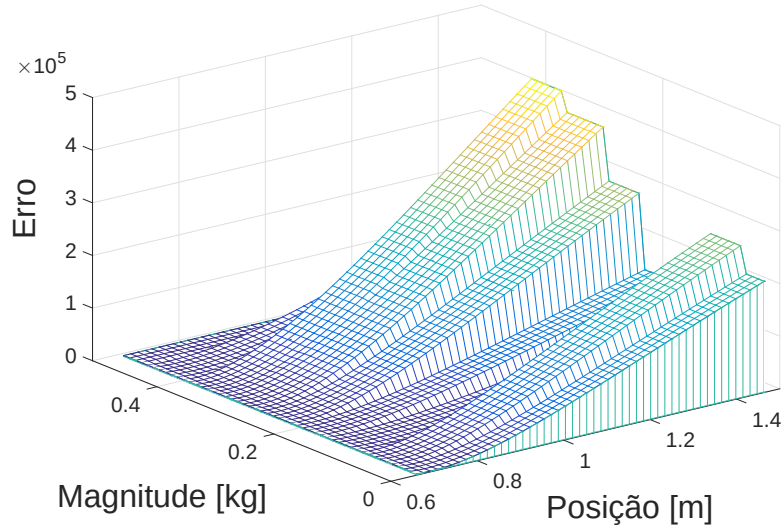


Figura 4.23: Superfície 3D do funcional no cenário B2.

Por fim, uma rápida investigação foi realizada a partir da divisão da identificação de danos em duas etapas distintas: na primeira etapa a posição é conhecida e busca-se identificar a massa, Figura 4.24, e na segunda a massa é conhecida e busca-se identificar a posição, Figura 4.25. Essa abordagem objetiva explorar mais a fundo o funcional $S(\boldsymbol{\eta})$.

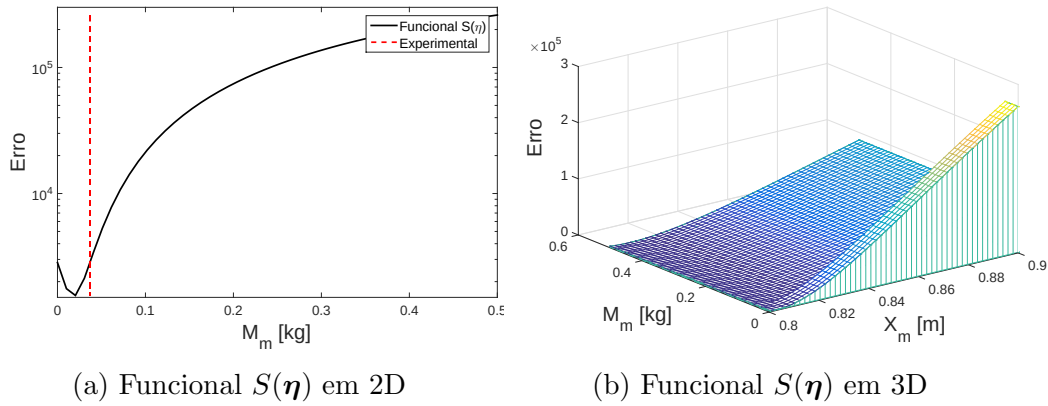


Figura 4.24: Identificação de dano supondo conhecida a posição da massa X_m

A análise da Figura 4.24a explica o motivo da variável massa, M_m , apresentar um desvio inferior à posição, Figura 4.25a. O funcional da identificação da massa é uma curva suave que possui somente um mínimo global. Por outro lado, já no caso da otimização da posição, a curva possui intervalos horizontais, onde existem pontos de brusca mudanças de inclinação do gráfico, "patamares". Esse fato foi explicado anteriormente e foi motivado pelo método de discretização e busca da solução ótima adotado.

O falso positivo encontrado no cenário de dano simulado B2, $X_m = 1361$ mm e $M_m = 32,5$ g, localiza-se no mínimo global do funcional. Ou seja, a formulação matemática do problema de identificação fornece um resultado que não é verificado no sistema físico real.

Além disso, é interessante observar que as duas soluções determinísticas obtidas para massa, solução acurada $M_m = 39,3$ g e falsa predição $M_m = 32,5$ g estão muito bem definidas no gráfico 3D do funcional para o caso onde supõe-se conhecida a massa e busca-se a posição, Figura 4.25.

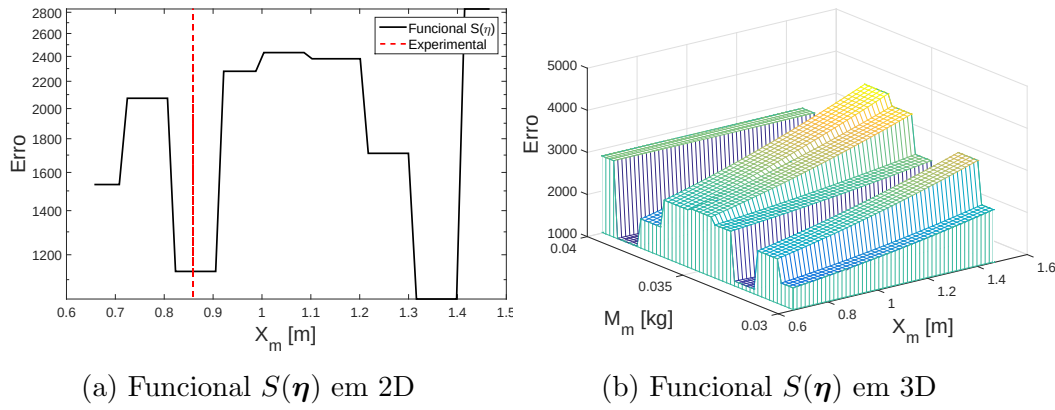


Figura 4.25: Identificação de dano supondo conhecida a magnitude da massa M_m

É importante ressaltar que do ponto de vista da engenharia de projeto, a presença de danos de pequena ordem são praticamente de impossível identificação, haja vista a presença de uma série de incertezas e limitações que estão associadas ao processo de otimização, medições experimentais e processamento de sinais, Capítulo 1.

4.3.2 Avaliação das Predições Computacionais

As funções de resposta em frequência do modelo computacional foram comparadas com as obtidas experimentalmente de forma a validar a modelagem numérica para o problema de identificação dos danos simulados. Somente as FRFs estimadas para a posição do acelerômetro AC1 são apresentadas no presente item. As demais FRFs, posições AC2 e AC3 dos acelerômetros, encontram-se no Apêndice B.

De forma geral, todas as predições computacionais da FRF produziram boas aproximações para a frequência natural dos modos de vibração. Variações mais elevadas foram verificadas para o 3º, 4º e 5º modo no cenário A1 e para o 6º modo no cenário B2.

As taxas de amortecimento estimadas pelo modelo computacional, por outro lado, não apresentaram a mesma acurácia das frequências, resultando em amplitudes bem diferentes às verificadas experimentalmente.

Observa-se que, salvo algumas exceções, as amplitudes dos gráficos experimentais, curva preta, são inferiores às obtidas na solução ótima, curva vermelha pontilhada, o que indica uma predição computacional inferior para as taxas de amortecimento quando comparadas com as experimentais.

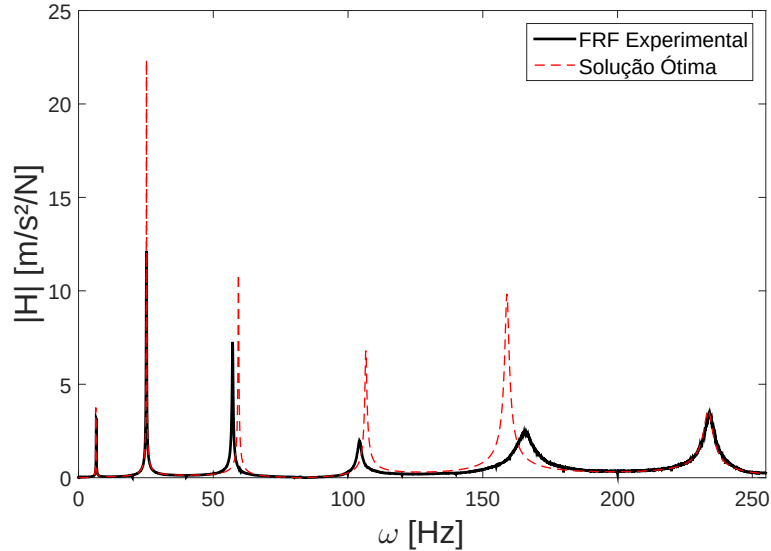


Figura 4.26: FRF no acelerômetro AC1 no cenário A1 de dano.

Conforme demonstrado através dos gráficos comparativos entre as FRFs íntegra e danificada no Item 3.3, a variação nas taxas de amortecimento foram inexpressivas em todos os cenários simulados. Com isso, esperava-se que as predições computacional mantivessem o mesmo nível de acurácia para os dois processos de otimização, o que não ocorreu.

A acurácia das predições computacionais para as taxas de amortecimento mantiveram nível aproximadamente igual nas duas etapas de otimização. Ou seja, os erros na simulação numérica do amortecimento não foram influenciados pela aplicação da massa pontual para simulação do dano estrutural.

Porém, é intuitivo notar que uma mudança do modelo de amortecimento, como por exemplo a substituição da hipótese de amortecimento proporcional para uma premissa geral não proporcional, pode fornecer predições numéricas mais acuradas para a FRF, uma vez que as frequências naturais foram bem recuperadas pelo algoritmo.

Conforme exposto na Tabela 4.5, o processo de otimização no cenário B2 resultou em duas possíveis soluções, a solução acurada, i.e., solução compatível com o cenário real simulado, e um falso positivo. A possibilidade de obter mais de uma solução reside no fato de o cenário B2 possuir magnitude da massa tão pequena que dificulta o algoritmo em recuperar a informação experimental.

Foi demonstrado no Item 3.3, a partir da Figura 3.11, que nesse caso de dano simulado o comportamento da estrutura íntegra é muito semelhante à estrutura danificada.

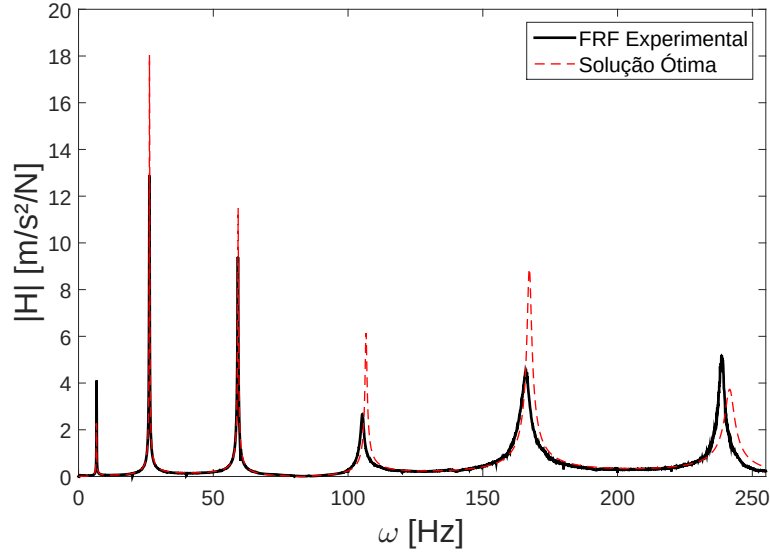


Figura 4.27: FRF no acelerômetro AC1 no cenário A2 de dano.

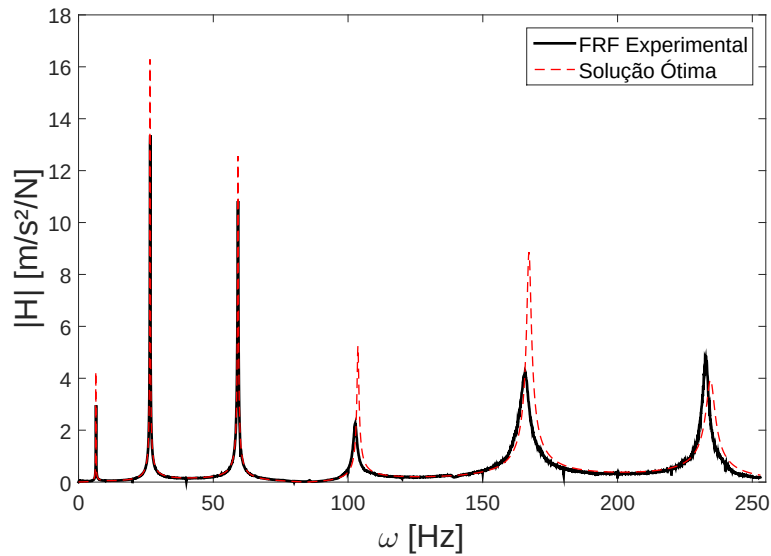


Figura 4.28: FRF no acelerômetro AC1 no cenário B1 de dano.

É válido ressaltar ainda que o falso positivo obtido pelo modelo computacional sempre foi relativo à posição da massa. A magnitude foi recuperada em todas as rodadas do algoritmo, com diferença inferior à 8 % em relação ao valor experimental.

Nota-se na Figura 4.29 que, apesar de as FRFs numéricas serem, de maneira geral, bem semelhantes, é possível verificar que a amplitude da ressonância do 2º

modo e a frequência natural do 6º diferem significativamente.

Aplicou-se então a métrica APCC, ver detalhes no Item 2.5, para avaliar o grau de correlação entre as FRF estimadas para solução acurada e a falsa predição. A Figura 4.30 apresenta os resultados para a posição do acelerômetro AC1. As demais FRFs estão apresentadas no Apêndice B.

O APCC evidencia variações entre as FRFs numéricas nos picos de ressonância de todos os modos de vibração avaliados. Diferenças entre as amplitudes das funções estimadas e pequenas defasagens na frequência natural são alguns dos motivos que produzem tais variações.

Esses resultados sugerem que talvez outra formulação da função custo seja capaz de evitar a falsa predição. Por exemplo, a minimização da FRF, ou da forma modal, poderia resultar em uma única solução para essa otimização. Porém, somente com estudos mais profundos seria possível afirmar qual das duas soluções seria obtida.

Caso não fosse possível modificar a função custo, uma outra possibilidade seria realizar a minimização com apenas alguns modos de vibração, escolhidos aleatoriamente entre o 1º e o 6º, de forma reiterada, até que fosse possível verificar uma convergência da solução.

Portanto, fica claro a necessidade de melhorar a metodologia da otimização determinística no processo de identificação de danos. Análises de sensibilidade, outras formulações para a função custo, algoritmos mais robustos ou até mesmo a introdução da Teoria da Probabilidade são ferramentas utilizadas para melhorar as predições computacionais e assim tornar os modelos numéricos mais confiáveis.

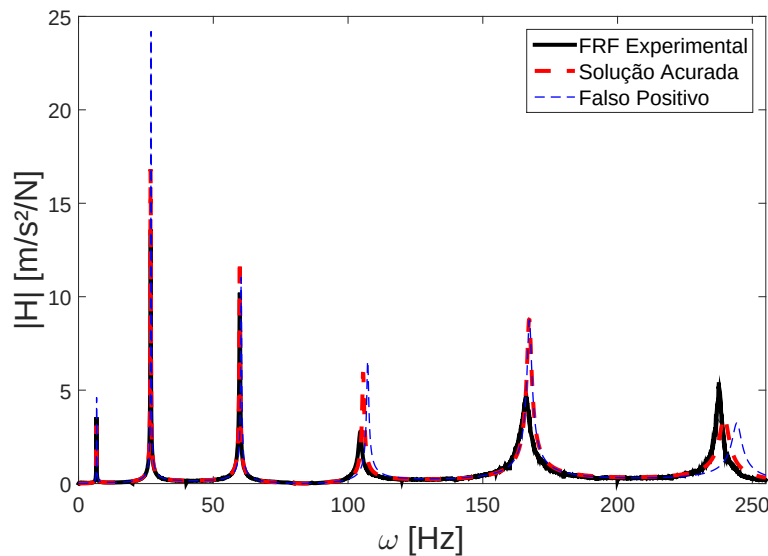


Figura 4.29: FRF no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.

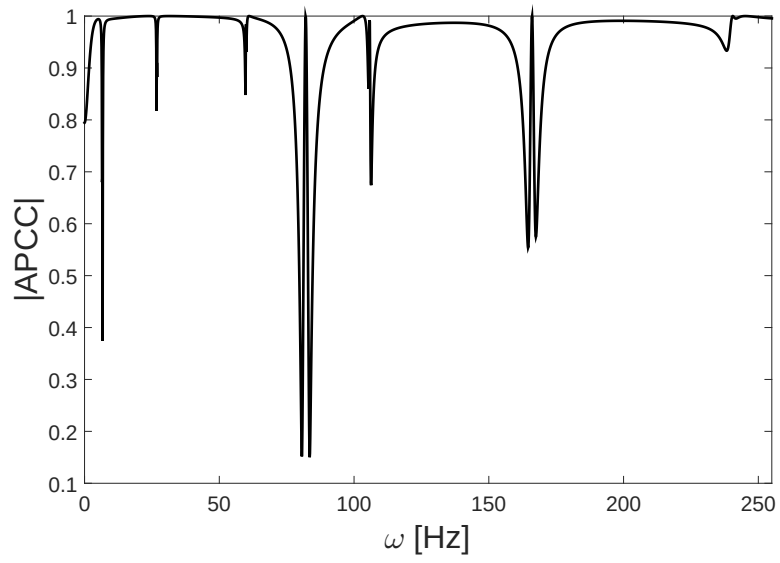


Figura 4.30: APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC1 no cenário B2 de dano.

Capítulo 5

Conclusão

No presente trabalho objetivou-se aplicar uma estratégia simples de estimação de parâmetros e propagação de incertezas para avaliar a acurácia do modelo computacional criado para simular o comportamento dinâmico de uma viga bi-apoiada.

A partir de uma grande quantidade de dados experimentais obtidos nos ensaios realizados, ver detalhes no Capítulo 3, foram estudadas diferentes hipóteses para o cálculo da matriz de covariância e seus impactos no modelo computacional. Ou seja, uma breve avaliação da função de verosimilhança e sua influência nas previsões numéricas.

Por fim, o modelo calibrado foi utilizado para a identificação de danos, que foram simulados a partir da aplicação de massas pontuais ao longo da estrutura.

A partir dos resultados obtidos na calibração, Item 4.1 e validação, Item 4.2, do modelo computacional conclui-se que:

- (i) Foi possível inferir sobre a incerteza associada ao vetor de parâmetros θ , mesmo em um processo de otimização determinística, a partir da estimação da sua matriz de covariância.
- (ii) As previsões computacionais obtidas a partir da premissa de covariância diagonal, hipótese 1, são muito semelhantes às obtidas para a matriz de covariância completa, calculada a partir de um grande número de dados experimentais, hipótese 2. Essa conclusão fundamenta a viabilidade da simplificação da matriz de covariância em uma matriz diagonal.
- (iii) As duas primeiras formulações da hipótese 3 foram consideradas insatisfatórias em função da baixa qualidade preditiva alcançada.
- (iv) A 3ª formulação da hipótese 3, covariância calculada na posição de ótimo do vetor de parâmetros com premissa de independência entre E e o par de coeficientes (α, β) , mostrou-se eficiente em um cenário adverso, onde o nível de informação *a priori* fornecido para o ajuste computacional é baixo ou nulo.

Para o processo de identificação dos danos simulados, Item 4.3.2 é possível concluir que:

- (v) A utilização do enxame de partículas se mostrou mais eficiente que a função *lsqnonlin* do Matlab, haja vista sua estratégia estocástica de otimização, especialmente para identificação da posição do dano simulado.
- (vi) Foi possível identificar a posição e magnitude das massas nos cenários A1, A2 e B1, mesmo apesar dos cenários criados resultarem em pequena influência no comportamento dinâmico da viga.
- (vii) O modelo computacional produziu duas respostas possíveis para o cenário mais crítico B2. Em 10 rodadas do algoritmo, a solução acurada da posição da massa foi obtida somente 1 vez.
- (viii) A predição computacional das FRFs dos cenários de dano simulado mostraram boa aproximação para as frequências naturais e certa dificuldade em simular as taxas de amortecimento.

De forma a aprofundar a análise do presente trabalho, ainda no contexto dos métodos determinísticos de otimização, são sugeridos para futuros trabalhos:

- nova formulação para função custo, onde a minimização seja realizada em função da FRF ou da forma modal, por exemplo, tanto para o processo de ajuste computacional, quanto para a etapa de identificação dos danos simulados.
- a aplicação de outros modelos de amortecimento na simulação do comportamento dinâmico da estrutura.
- a inferência sobre as incertezas relativas à posição e magnitude das massas obtidas como solução pelo algoritmo enxame de partículas.
- a aplicação das técnicas de calibração e validação apresentadas neste trabalho em outros tipos de estruturas, para a situação íntegra e com danos estruturais.

Referências Bibliográficas

- [1] SIMOEN, E., ROECK, G. D., LOMBAERT, G. “Dealing with uncertainty in model updating for damage assessment: A review”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 56, pp. 123–149, nov. 2015.
- [2] PAPOULIS, A. *Probability & Statistics*. 1 ed. , Prentice-Hall International, Inc, 1990.
- [3] MOTTERSHEAD, J. E., FRISWELL, M. I. “Model Updating In Structural Dynamics: A Survey”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 167, pp. 347–375, maio 1993.
- [4] FRISWELL, M. I. “Damage Identification Using Inverse Methods”, *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, v. 42, pp. 393–410, dez. 2006.
- [5] R.FARRAR, WORDEN, K. “An Introduction to Structural Health Monitoring”, *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, v. 42, pp. 303–315, dez. 2006.
- [6] ASTROM, K. J., EYKHOFF, P. “System Identification: A Survey”, *Automatica*, v. 7, pp. 123–162, 1971.
- [7] STREJC, V. “Least Squares Parameter Estimation”, *Automatica*, v. 16, pp. 535–550, mar. 1980.
- [8] OBERKAMPF, W. L., BARONE, M. F. “Measures of Agreement Between Computation and Experiment: Validation Metrics”, *Journal of Computational Physics*, v. 217, pp. 5–36, jun 2006.
- [9] ASME. *Guide for the Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*. Technical Report ASME V&V 10, ASME, 2006.
- [10] KAIPIO, J. P., SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems, Applied Mathematical Sciences*. 1a ed. New York, USA, Springer, 2005.

- [11] ASTROM, K. J. “Maximum Likelihood and Prediction Error Methods”, *Automatica*, v. 16, pp. 551–574, mar 1980.
- [12] SHABBIR, F., OMENZETTER, P. “Particle Swarm Optimization With Sequential Niche Technique for Dynamic Finite Element Model Updating”, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, v. 00, pp. 1–17, 2014.
- [13] RIBEIRO, D., CALÇADA, R., DELGADO, R., et al. “Finite Element Model Updating of a Bowstring-Arch Railway Based On Experimental Modal Parameters”, *Engineering Structures*, v. 40, pp. 413–435, 2012.
- [14] REYNDERS, E., TEUGHEL, A., ROECK, G. D. “Finite Element Model Updating and Structural Damage Identification Using OMAX Data”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, pp. 1306–1323, 2010.
- [15] REN, W.-X., CHEN, H.-B. “Finite Element Model Updating In Structural Dynamics By Using The Response Surface Method”, *Engineering Structures*, v. 32, pp. 2455–2465, 2010.
- [16] WANG, W., MOTTERSHEAD, J. E., IHLE, A., et al. “Finite Element Model Updating From Full-Field Vibration Measurement Using Digital Image Correlation”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, pp. 1599–1620, 2011.
- [17] GOVERS, Y., LINK, M. “Stochastic Model Updating - Covariance Matrix Adjustment From Uncertain Experimental Modal Data”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, pp. 696–706, 2010.
- [18] YUEN, K.-V. “Recent Developments of Bayesian Model Class Selection and Applications in Civil Engineering”, *Structural Safety*, v. 32, pp. 338–346, 2010.
- [19] BEHMANESH, I., MOAVENI, B. “Accounting for Environmental Variability, Modeling Errors, and Parameter Estimation Uncertainties in Structural Identification”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 374, pp. 92–110, abr. 2016.
- [20] SUN, H., BETTI, R. “A Hybrid Optimization Algorithm With Bayesian Inference for Probabilistic Model Updating”, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, v. 00, pp. 1–18, 2015.

- [21] STRAUB, D., KIUREGHIAN, A. D. “Bayesian Network Enhanced With Structural Reliability Methods: Methodology”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 136, pp. 1248–1258, 2010.
- [22] GOLLER, B., SCHUËLLER, G. I. “Investigation Of Model Uncertainties In Bayesian Structural Model Updating”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, pp. 6122–6136, 2011.
- [23] BECK, J. L. “Bayesian System Identification Based on Probability Logic”, *Structural Control and Health Monitoring*, v. 17, pp. 825–847, 2010.
- [24] MATLAB. “The MathWorks Inc.” Disponível em: [<\https://www.mathworks.com>](https://www.mathworks.com).
- [25] CALFEM. “CALFEM, A Finite Element Toolbox v 3.4”. Disponível em: [<\https://sourceforge.net/projects/calfem>](https://sourceforge.net/projects/calfem).
- [26] DE ANDRADE, R. F. M. *Desenvolvimento de um Sistema para Determinação Experimental de Funções de Resposta em Frequência para Excitações Simples e Múltiplas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [27] BUCHER, H. F. *Metodologias para a Aplicação de Técnicas Tempo-Frequência em Dinâmica Estrutural e ao Método dos Elementos de Contorno*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [28] LSQNONLIN. “Lsqnonlin MathWorks”. Disponível em: [<\https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html>](https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html).
- [29] KENNEDY, J., EBERHART, R. C. “A New Optimizer Using Particle Swarm Theory”, 1995.
- [30] KIRANYAZ, S., INCE, T., GABBOUJ, M. *Multidimensional particle swarm optimization for machine learning and pattern recognition*. 4a ed. Berlim, Heidelberg, Springer, 2014.
- [31] CLERC, M., KENNEDY, J. “The particle swarm - explosion, stability and convergence in a multidimensional complex space”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 6, pp. 58, dez. 2002.
- [32] CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*. 3 ed. , Computers & Structures, Inc., 1995.

- [33] GÉRADIN, M., RIXEN, D. J. *Mechanical Vibrations, Theory and Application to Structural Dynamics*. 3 ed. Chichester, UK, John Wiley & Sons Ltd, 2015.
- [34] ASTER, R., BORCHERS, B., THURBER, C. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. 1 ed. , Academic Press, 2004.
- [35] BECK, J. V., ARNOLD, K. J. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. John Wiley & Sons, 1976.
- [36] JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 6a ed. , Pearson, Prentice Hall, 2007.
- [37] GRINSTEAD, C. M., SNELL, J. L. *Introduction to Probability*. 2 ed. , American Mathematical Society, 2003.
- [38] RMVNRND. “Truncated Multivariate Normal Distribution MathWorks”. Disponível em: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/34402-truncated-multivariate-normal>.
- [39] PLOTMATRIX. “Plotmatrix MathWorks”. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/plotmatrix.html>.
- [40] PRCTILE. “Prctile MathWorks”. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/stats/prctile.html>.
- [41] NELSON, R. B. “Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives”, *AIAA Journal*, v. 14, n. 9, 1976.
- [42] FRISWELL, M. I., ADHIKARI, S. *Derivatives of Complex Eigenvectors Using Nelson’s Method*. Technical Notes 12, AIAA Journal.
- [43] CHOIA, K.-M., JOB, H.-K., KIMC, W.-H., et al. “Sensitivity Analysis of Non-Conservative Eigensystems”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 274, pp. 997–1011, 2004.
- [44] ADHIKARI, S., FRISWELL, M. I. “Eigenderivative Analysis of Asymmetric Non-Conservative Systems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 51, pp. 709–733, 2001.
- [45] BENDAT, J. S., PIERSON, A. G. *Random Data, Analysis and Measurement Procedures*. 2a ed. New York, Wiley, 1986.
- [46] KSDENSITY. “Ksdensity MathWorks”. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/stats/ksdensity.html>.

- [47] CASTELLO, D. A., MATT, C. F. T. “A Validation Metrics Based Model Calibration Applied on Stranded Cables”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering*, v. XXXIII, n. 4, pp. 417–427, oct 2011.

Apêndice A

Derivação do Operador J

A partir da formulação da equação do movimento para o problema elástico não amortecido tem-se:

$$\omega_r^2 \mathbf{M} \phi_r = \mathbf{K} \phi_r \quad (\text{A.1})$$

onde ω representa os autovalores, r representa o r -ésimo modo de vibração avaliado e $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$.

Realizando a derivação parcial da Eq. A.1 em função do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e pré-multiplicando por ϕ_r^T :

$$2\omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta_q} \mathbf{M} \phi_r + \omega_r^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_q} \phi_r + \omega_r^2 \mathbf{M} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_q} \phi_r + \mathbf{K} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q}$$

onde q representa a q -ésima variável que compõe o vetor de parâmetros.

Sabendo que $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_q} = 0$ então

$$2\omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta_q} \mathbf{M} \phi_r + \omega_r^2 \mathbf{M} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_q} \phi_r + \mathbf{K} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q}$$

$$2\omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta_q} \phi_r^T \mathbf{M} \phi_r - \phi_r^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_q} \phi_r = -\omega_r^2 \phi_r^T \mathbf{M} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q} + \phi_r^T \mathbf{K} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q}$$

A partir da normalização da massa $\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = 1$ tem-se:

$$2\omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta_q} - \phi_r^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_q} \phi_r = \phi_r^T [\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}] \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta_q}$$

Da Eq. A.1 sabe-se que $\phi_r^T (\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}) = \mathbf{0}$. Então:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta_q} = \frac{1}{2\omega_r} \phi_r^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_q} \phi_r \quad (\text{A.2})$$

Passa-se agora a avaliar o problema dinâmico com hipótese de amortecimento viscoso, governado pela Eq. 2.1. Aplicando $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi} e^{\lambda t}$ na Eq. 2.1 e derivando duas

vezes em relação ao tempo tem-se que:

$$[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}] \Phi e^{\lambda t} = \mathbf{0}$$

Considerando a hipótese de amortecimento proporcional de Rayleigh, Eq. 2.5:

$$[\lambda^2 + \alpha \lambda] \mathbf{M} \Phi = -[1 + \lambda \beta] \mathbf{K} \Phi$$

$$\left[\frac{-\lambda^2 - \alpha \lambda}{1 + \lambda \beta} \right] \mathbf{M} \Phi = \mathbf{K} \Phi \quad (\text{A.3})$$

Do ponto de vista espectral, o problema da Eq. A.1 é igual ao da Eq. A.3. Ou seja, $\Phi_r = \phi_r$ e $\frac{-\lambda_r^2 - \alpha \lambda_r}{1 + \lambda_r \beta} = \omega_r^2$. Portanto, tem-se que:

$$-\lambda_r^2 - \alpha \lambda_r = \omega_r^2 + \lambda_r \beta \omega_r^2$$

$$\lambda_r^2 + (\alpha + \beta \omega_r^2) \lambda_r + \omega_r^2 = 0$$

$$\lambda_r = \frac{-(\alpha + \beta \omega_r^2) \pm \sqrt{(\alpha + \beta \omega_r^2)^2 - 4\omega_r^2}}{2}$$

Sabendo que $\lambda_r = \Re[\lambda_r] + \Im[\lambda_r]j$ e adotando a representação $\lambda_r = -\zeta_r \omega_r + \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} j$ tem-se então

$$\frac{-(\alpha + \beta \omega_r^2)}{2} = -\zeta_r \omega_r$$

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta \omega_r \right)$$

Basta agora realizar a derivação parcial das taxas de amortecimento em função do vetor de parâmetros.

$$\frac{\partial \zeta_r}{\partial \theta_q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_q} \left(\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta \omega_r \right)$$

Após a expansão das derivações:

$$\frac{\partial \zeta_r}{\partial \theta_q} = \frac{1}{2\omega_r^2} \left[\omega_r^3 \frac{\partial \beta}{\partial \theta_q} + \omega_r \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_q} + (\beta \omega_r^2 - \alpha) \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta_q} \right] \quad (\text{A.4})$$

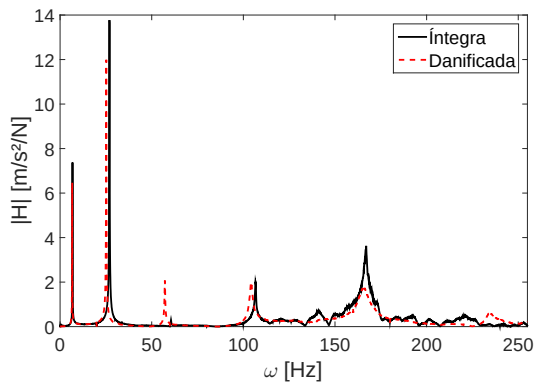
Por fim, a partir da Eq. A.2 e Eq. A.4 é possível obter o operador jacobiano:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta_q} \\ \vdots \\ \frac{\partial \omega_N}{\partial \theta_q} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta_q} \\ \vdots \\ \frac{\partial \zeta_N}{\partial \theta_q} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (\text{A.5})$$

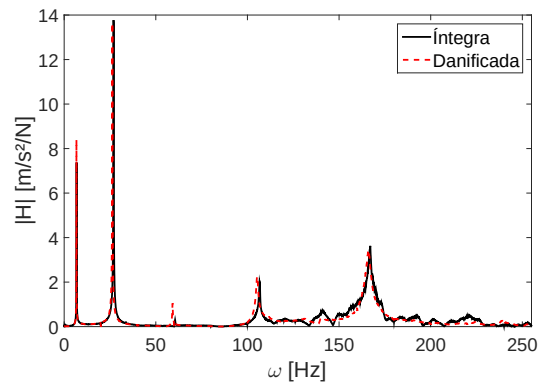
Apêndice B

Funções de Resposta em Frequência

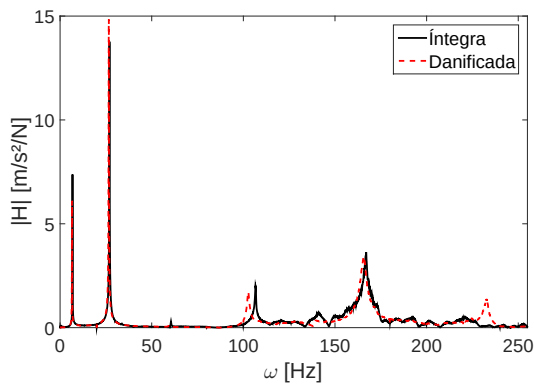
B.1 FRFs Experimentais Íntegra X Danificada



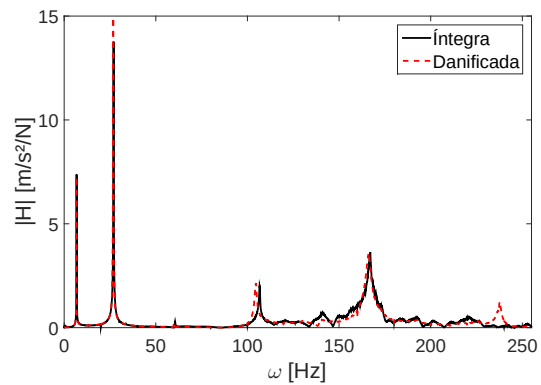
(a) FRFs experimentais para o cenário A1



(b) FRFs experimentais para o cenário A2

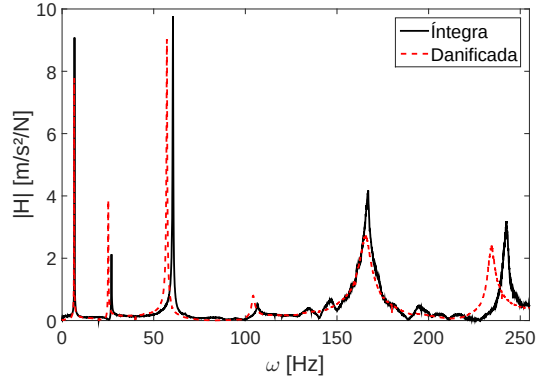


(c) FRFs experimentais para o cenário B1

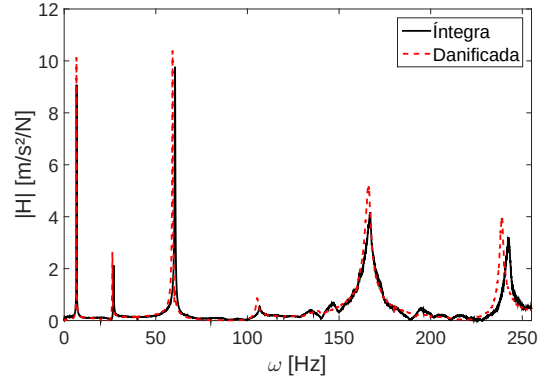


(d) FRFs experimentais para o cenário B2

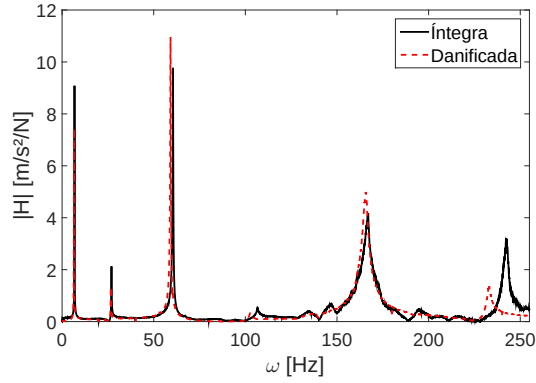
Figura B.1: Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC2 dos acelerômetros.



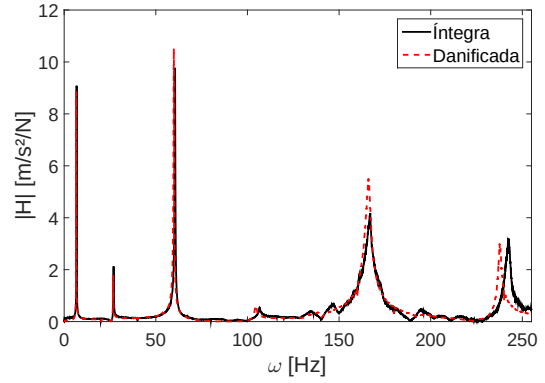
(a) FRFs experimentais para o cenário A1



(b) FRFs experimentais para o cenário A2



(c) FRFs experimentais para o cenário B1



(d) FRFs experimentais para o cenário B2

Figura B.2: Comparação entre FRFs íntegra e danificada para a posição AC3 dos acelerômetros

B.2 FRFs na Hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

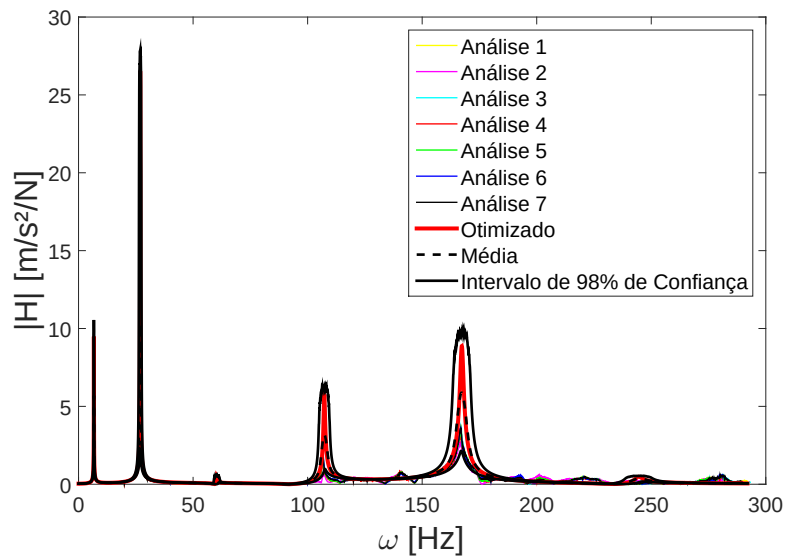


Figura B.3: FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

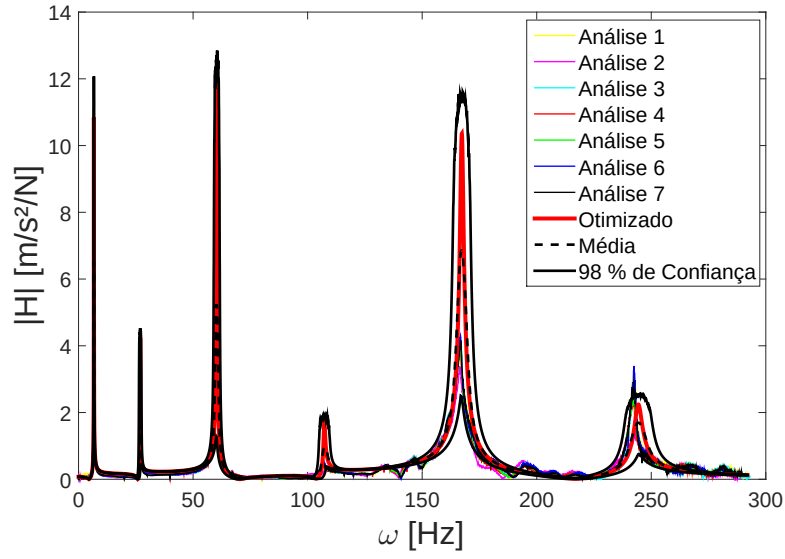
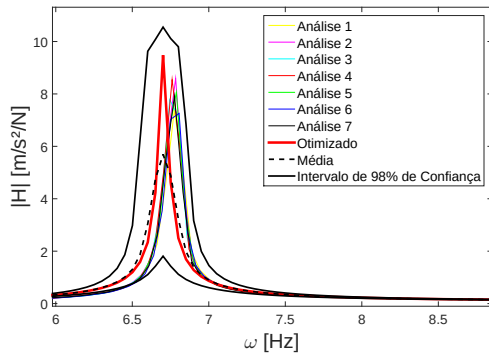
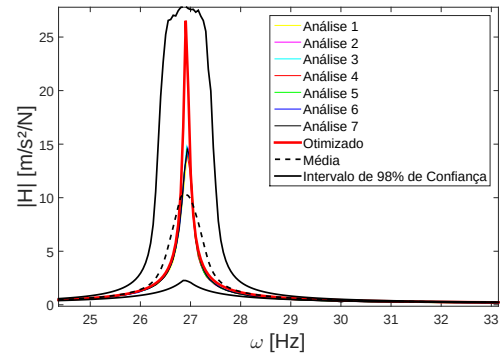


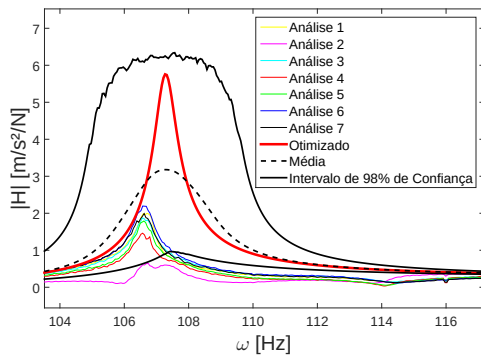
Figura B.4: FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



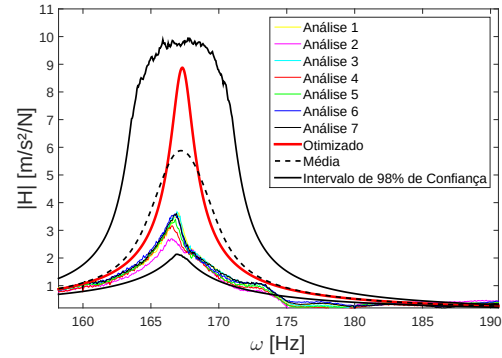
(a) Região de ressonância do 1º modo



(b) Região de ressonância do 2º modo

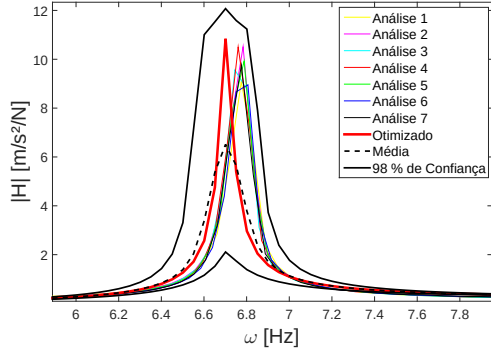


(c) Região de ressonância do 4º modo

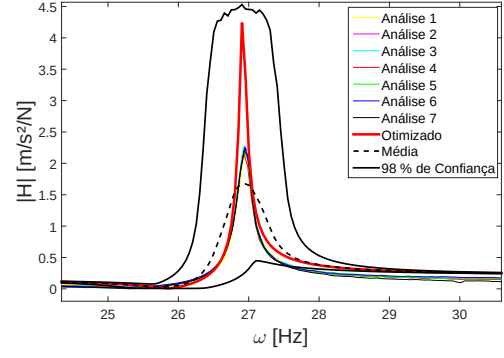


(d) Região de ressonância do 5º modo

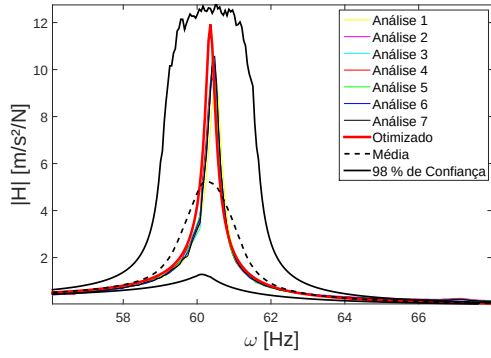
Figura B.5: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



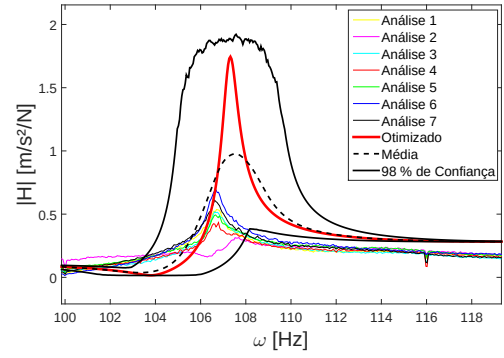
(a) Região de ressonância do 1º modo



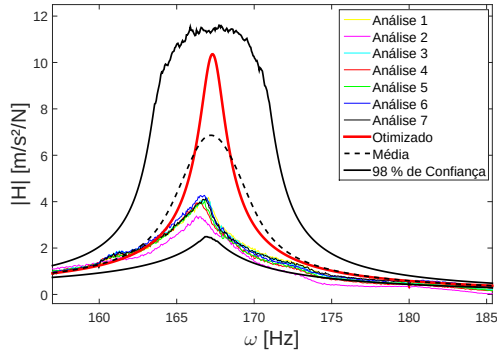
(b) Região de ressonância do 2º modo



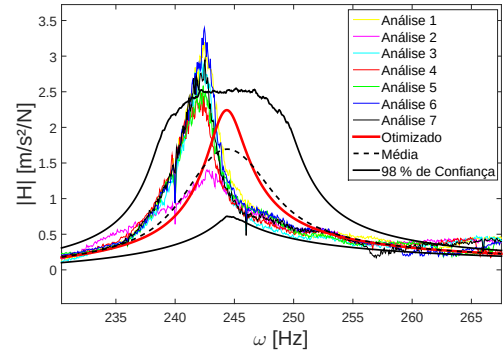
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura B.6: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 1 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

B.3 FRFs na Hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

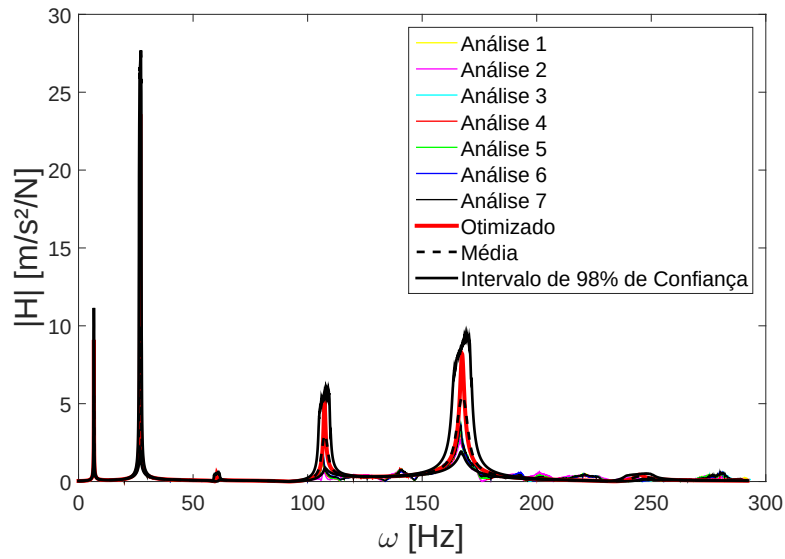


Figura B.7: FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

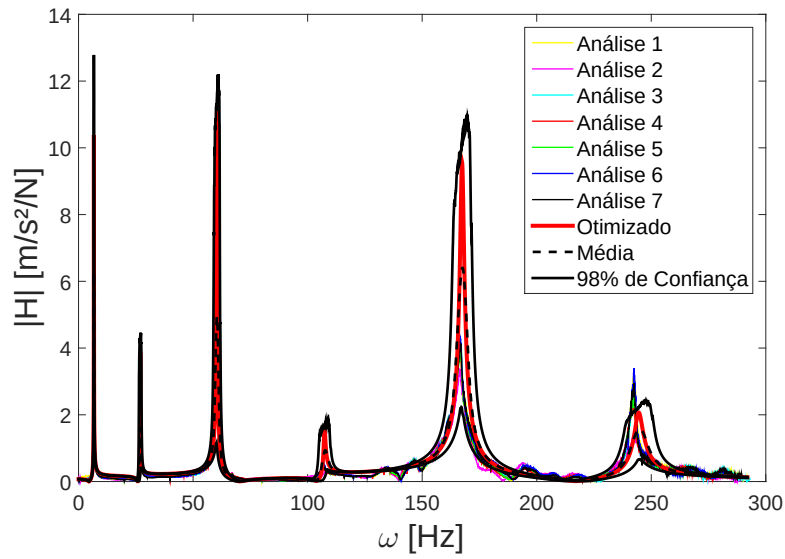
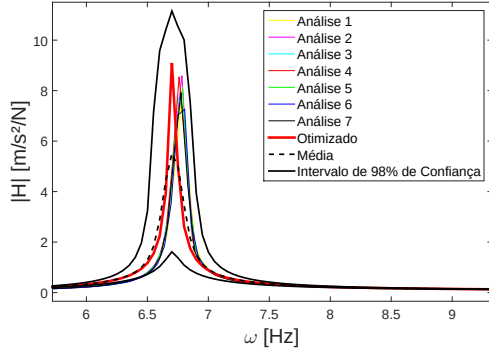
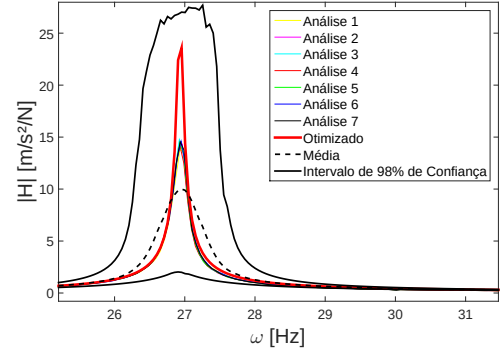


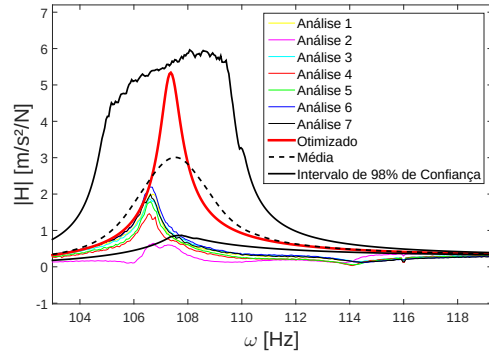
Figura B.8: FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



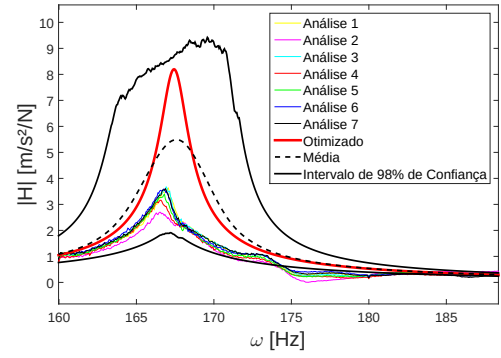
(a) Região de ressonância do 1º modo



(b) Região de ressonância do 2º modo

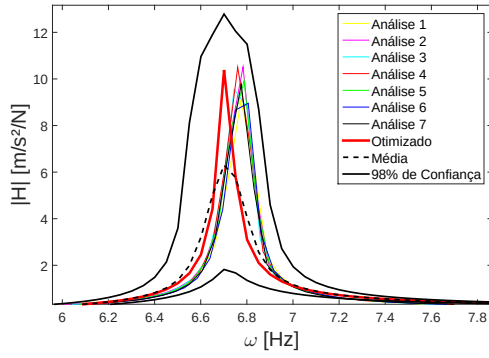


(c) Região de ressonância do 4º modo

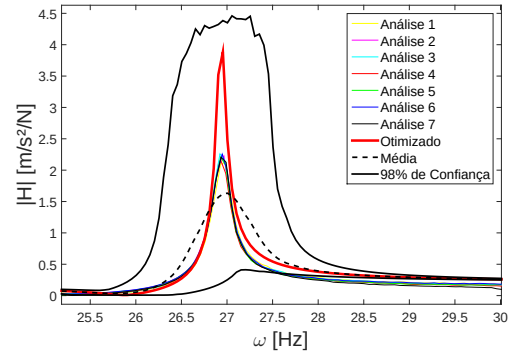


(d) Região de ressonância do 5º modo

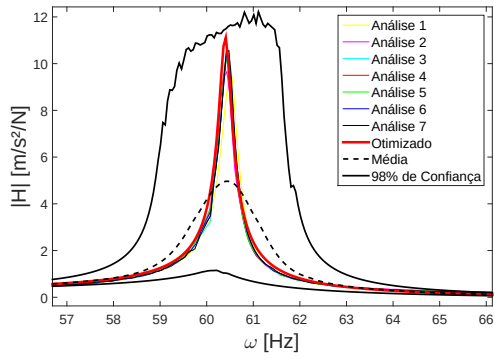
Figura B.9: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



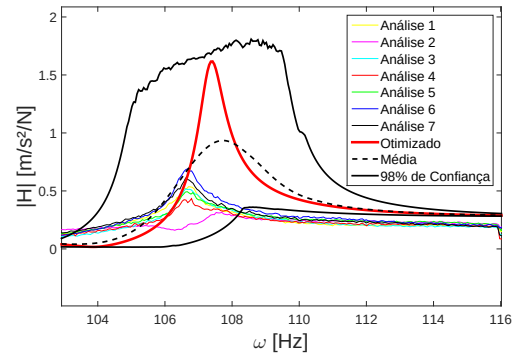
(a) Região de ressonância do 1º modo



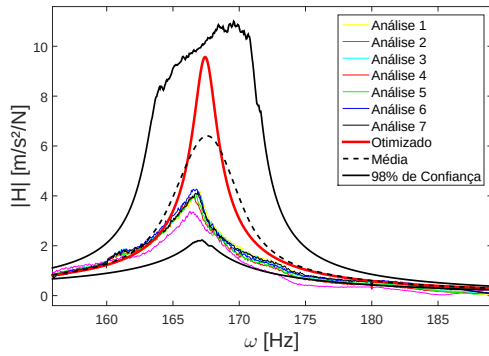
(b) Região de ressonância do 2º modo



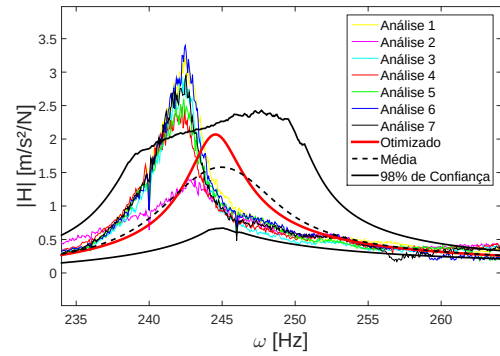
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura B.10: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 2 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

B.4 FRFs na 3ª Formulação da Hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$

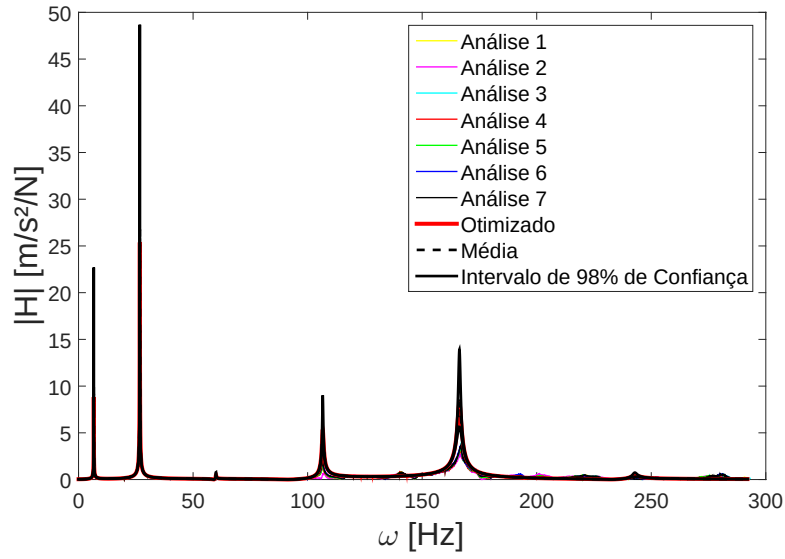


Figura B.11: FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

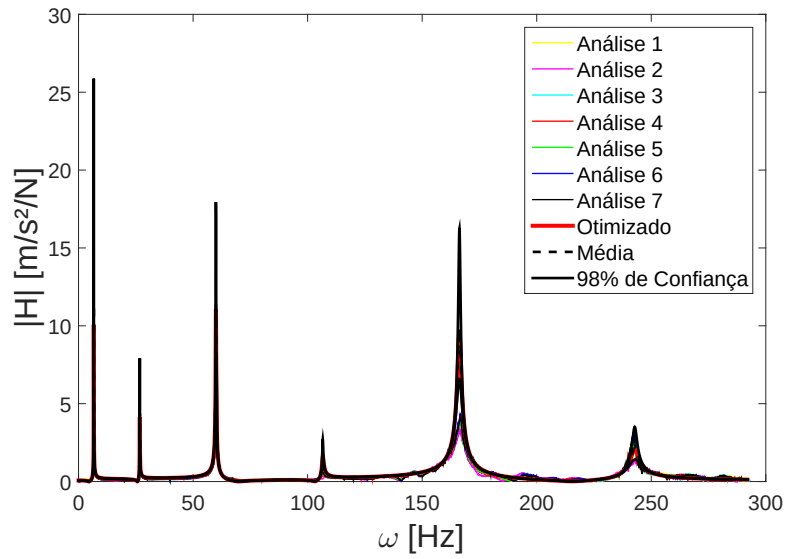
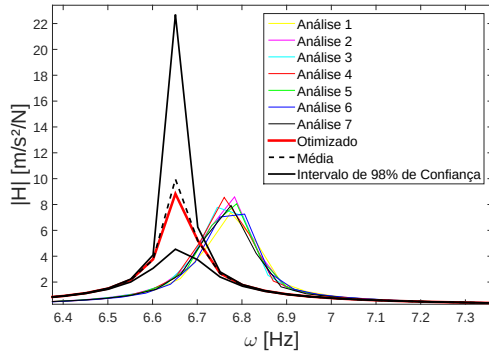
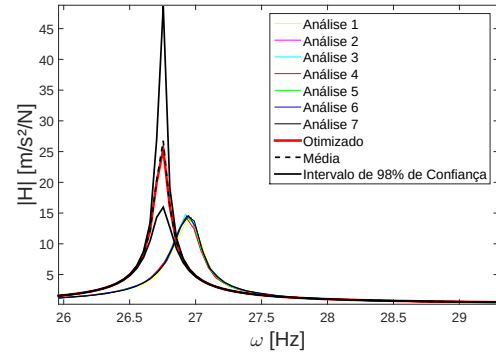


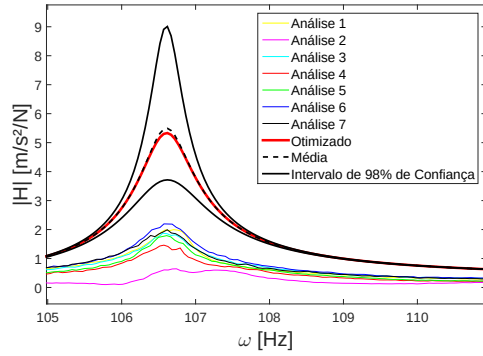
Figura B.12: FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



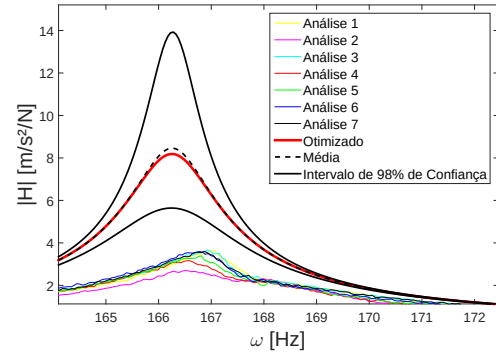
(a) Região de ressonância do 1º modo



(b) Região de ressonância do 2º modo

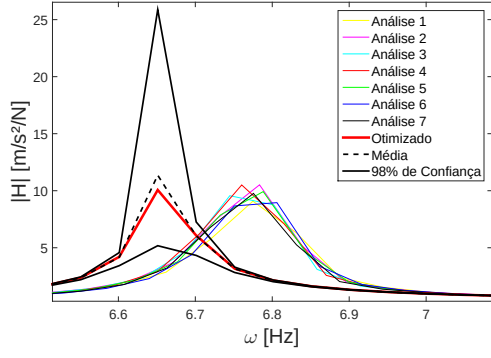


(c) Região de ressonância do 4º modo

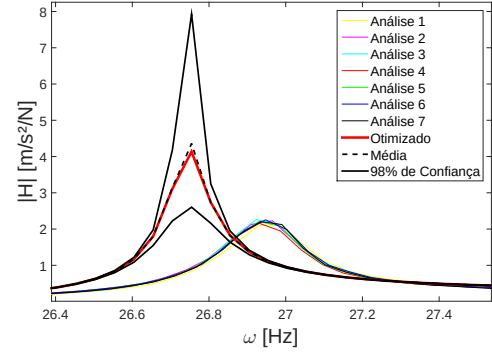


(d) Região de ressonância do 5º modo

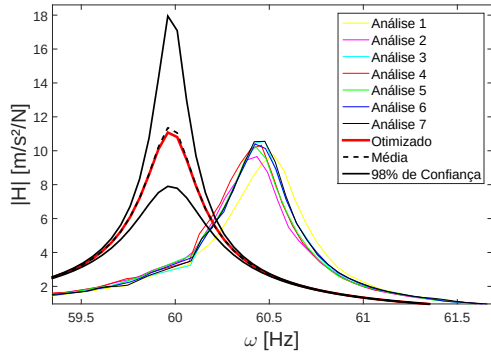
Figura B.13: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC2 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.



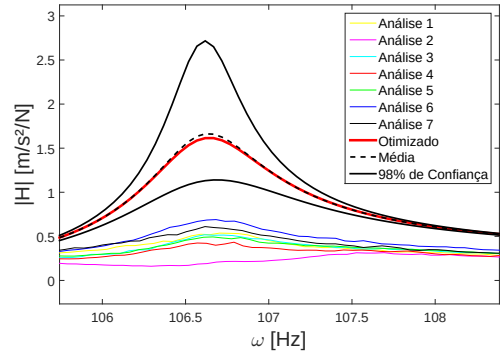
(a) Região de ressonância do 1º modo



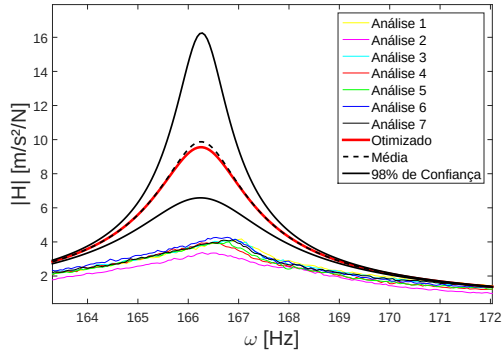
(b) Região de ressonância do 2º modo



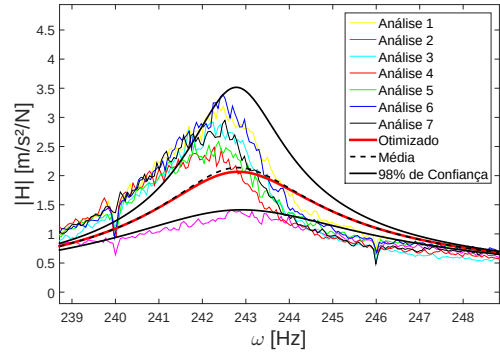
(c) Região de ressonância do 3º modo



(d) Região de ressonância do 4º modo



(e) Região de ressonância do 5º modo



(f) Região de ressonância do 6º modo

Figura B.14: Regiões de ressonância da FRF no acelerômetro AC3 na hipótese 3 de $\Sigma_{\epsilon\epsilon}$.

B.5 FRFs no Cenário A1 de Dano

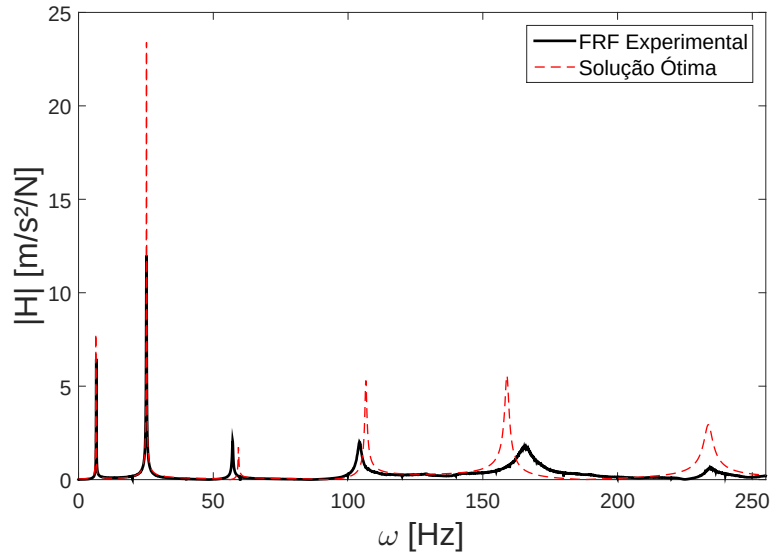


Figura B.15: FRF no acelerômetro AC2 no cenário A1 de dano.

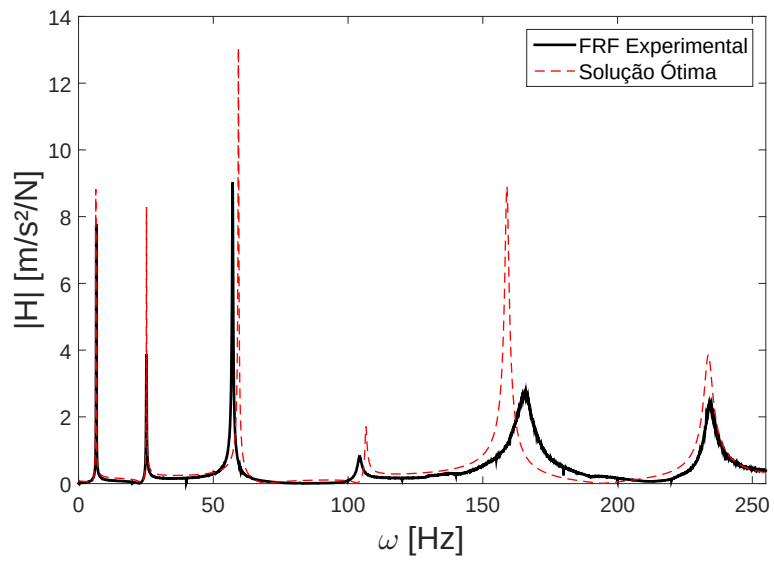


Figura B.16: FRF no acelerômetro AC3 no cenário A1 de dano.

B.6 FRFs no Cenário A2 de Dano

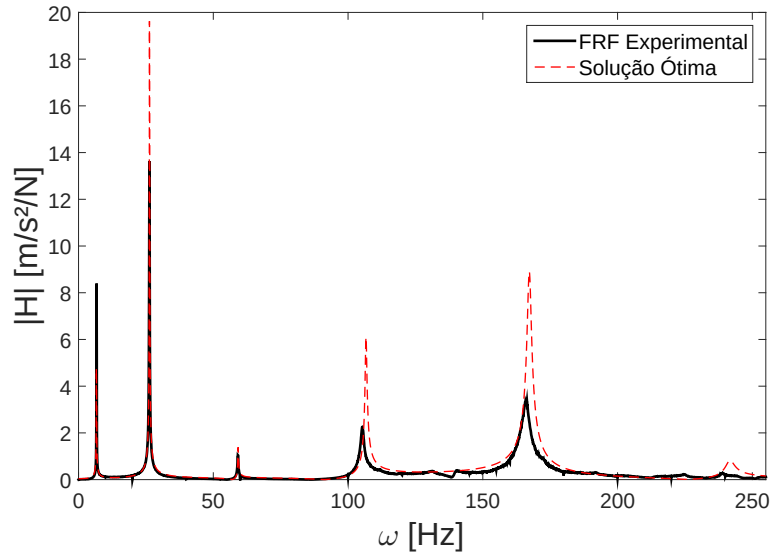


Figura B.17: FRF no acelerômetro AC2 no cenário A2 de dano.

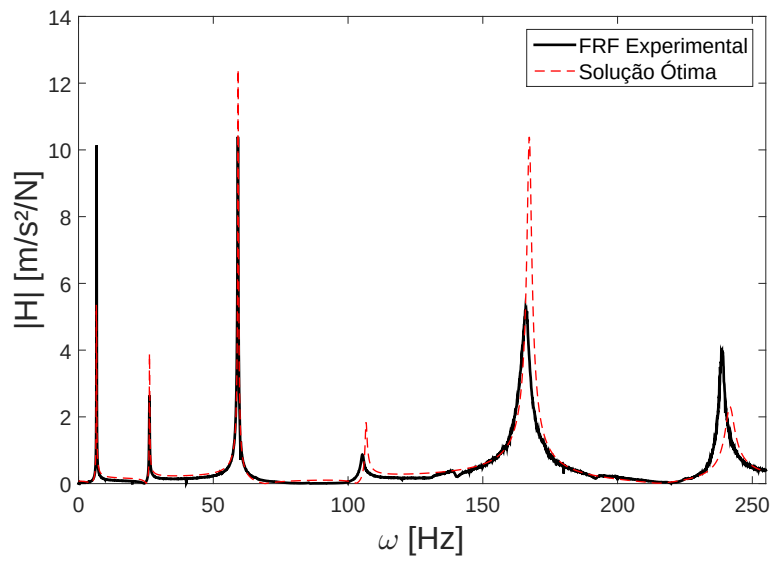


Figura B.18: FRF no acelerômetro AC3 no cenário A2 de dano.

B.7 FRFs no Cenário B1 de Dano

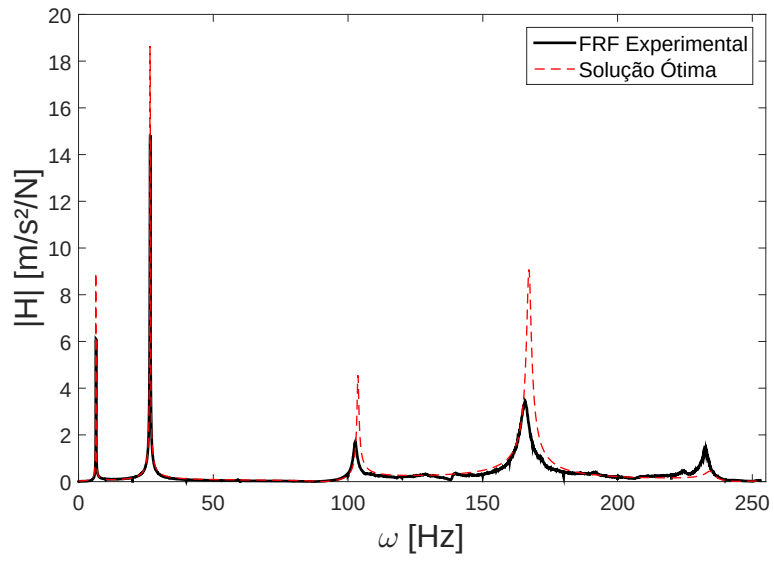


Figura B.19: FRF no acelerômetro AC2 no cenário B1 de dano.

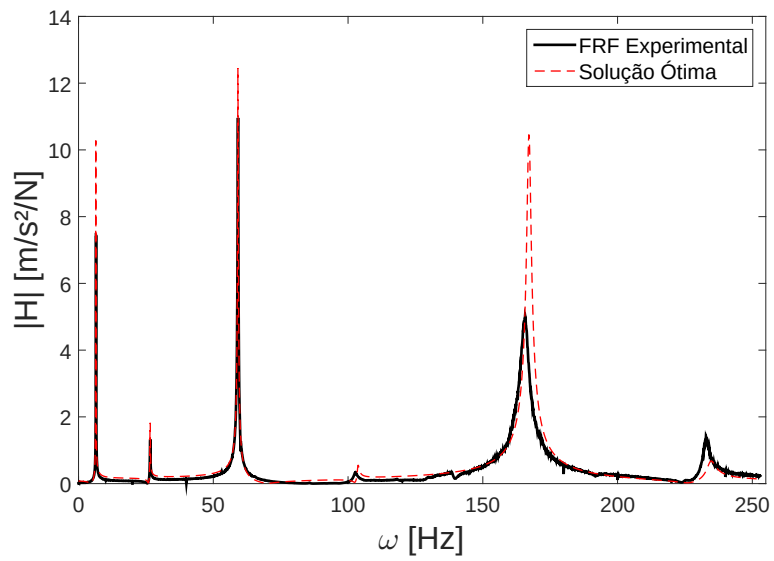


Figura B.20: FRF no acelerômetro AC3 no cenário B1 de dano.

B.8 FRFs no Cenário B2 de Dano

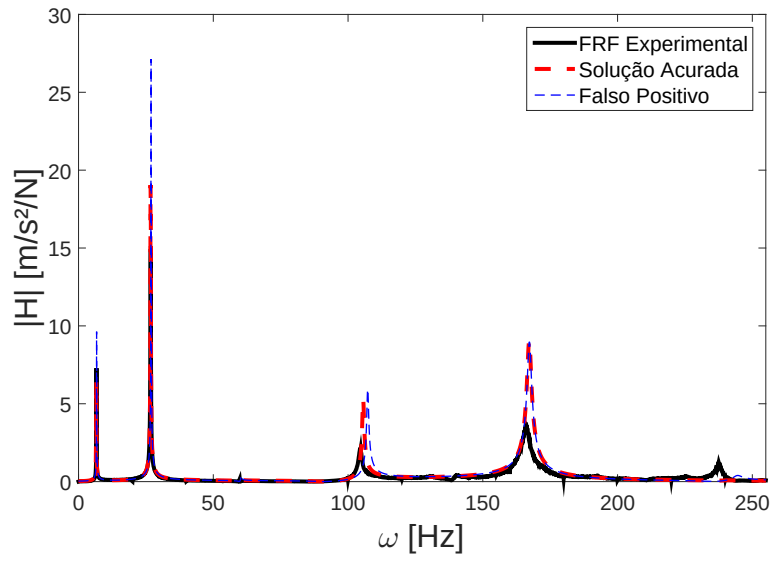


Figura B.21: FRF no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.

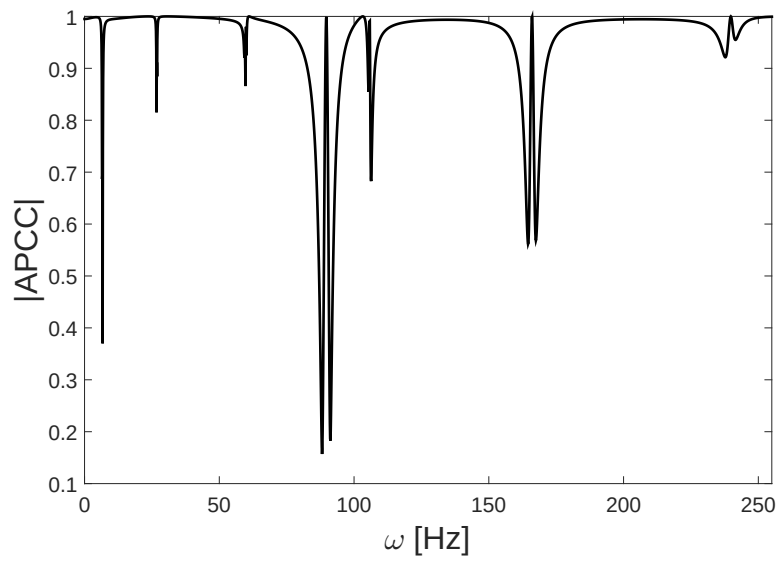


Figura B.22: APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC2 no cenário B2 de dano.

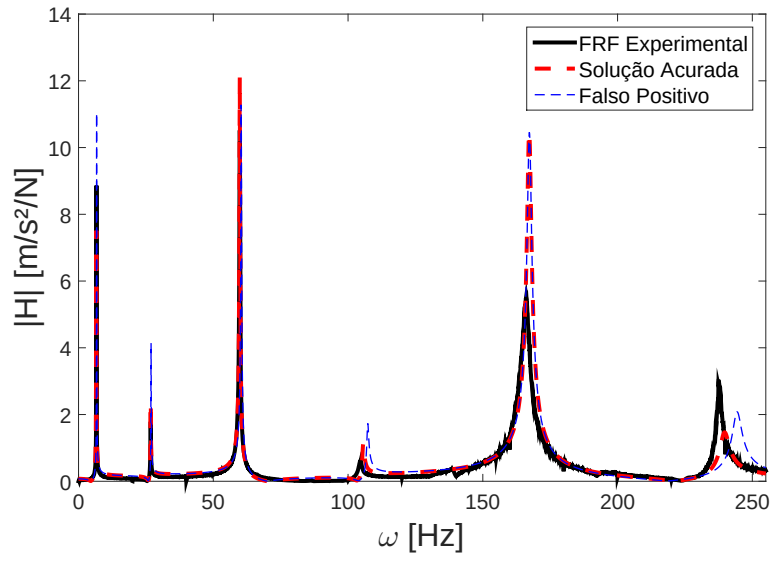


Figura B.23: FRF no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.

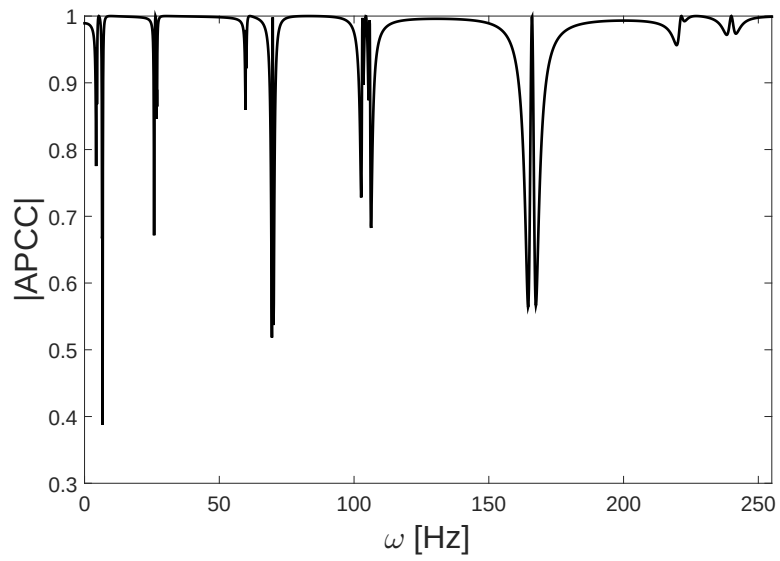


Figura B.24: APCC entre as FRFs computacionais no acelerômetro AC3 no cenário B2 de dano.