



OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DE LAJES LISAS NERVURADAS COM PAINÉIS  
SÓLIDOS DE DIFERENTES TAMANHOS

Luiz Eduardo Maia Pinto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Ibrahim Abd El Malik Shehata

Rio de Janeiro

Junho de 2016

OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DE LAJES LISAS NERVURADAS COM PAINÉIS  
SÓLIDOS DE DIFERENTES TAMANHOS

Luiz Eduardo Maia Pinto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. Ibrahim Abd El Malik Shehata, Ph.D.

---

Prof<sup>a</sup>. Lídia da Conceição Domingues Shehata, Ph.D.

---

Prof<sup>a</sup>. Eliane Maria Lopes Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2016

Pinto, Luiz Eduardo Maia

Otimização do Projeto de Lajes Lisas Nervuradas com Painéis Sólidos de Diferentes Tamanhos/Luiz Eduardo Maia Pinto.– Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XV, 86 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Ibrahim Abd El Malik Shehata

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 82-86.

1. Lajes lisas. 2. Lajes nervuradas. 3. Otimização. I. Shehata, Ibrahim Abd El Malik. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

## **Agradecimentos**

À minha mãe, pelo apoio e incentivo em todas as minhas decisões, por estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu pai, pelo exemplo de profissional e de amor e dedicação ao trabalho, por todos os valores que me transmite.

À minha família, por todo o amor e por estar sempre presente, apesar da distância.

Ao Prof. Ibrahim, pela atenção e pelas valiosas contribuições sem as quais esse trabalho não teria sido realizado.

Aos professores da COPPE, pelos ensinamentos que permitiram que eu aprofundasse meus conhecimentos.

Aos professores da UFPB, que transmitiram os fundamentos que servem de alicerce para a minha vida profissional.

Aos amigos do mestrado, por terem me acompanhado ao longo dessa jornada, ajudando-me a superar os obstáculos.

Aos meus amigos, pela companhia e pelos momentos de alegria que tornam a vida mais leve.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

## OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DE LAJES LISAS NERVURADAS COM PAINÉIS SÓLIDOS DE DIFERENTES TAMANHOS

Luiz Eduardo Maia Pinto

Junho/2016

Orientador: Ibrahim Abd El Malik Shehata

Programa: Engenharia Civil

A busca por soluções sustentáveis na Engenharia tem se intensificado no decorrer dos últimos anos, não apenas por questões financeiras, mas também, ambientais. Os processos de otimização podem ser aliados nessa tentativa de aproveitamento mais racional dos materiais. As lajes lisas nervuradas surgem como uma evolução das lajes maciças ao eliminar as vigas e o concreto da região tracionada. Neste trabalho, são estudados painéis de lajes lisas nervuradas com vãos de 6,1 m, 7,32 m e 8,54 m. As dimensões do maciço são variadas a fim de se determinar o tamanho que leva ao menor consumo de armadura de flexão. Ao todo foram conduzidas 16 análises via MEF empregando elementos finitos tridimensionais. Em seguida, é proposto um método para estimar o consumo de armadura com base na distribuição dos momentos fletores no painel. Os resultados das análises são comparados entre si para avaliar o comportamento dos painéis em relação às mudanças nos parâmetros e indicar a dimensão do maciço que seria mais econômica do ponto de vista da armadura de flexão.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

PROJECT OPTIMIZATION OF WAFFLE FLAT SLABS WITH SOLID PANELS OF  
DIFFERENT SIZES

Luiz Eduardo Maia Pinto

June/2016

Advisor: Ibrahim Abd El Malik Shehata

Department: Civil Engineering

In the past few years, the search for sustainable solutions in Engineering has been intensified, not only because of financial reasons, but also environmental ones. Optimization processes may be allies in this effort to use materials more rationally. Waffle flat slabs are conceived as an evolution of solid slabs by eliminating beams and the concrete in tension zones. In the present work, slabs with spans of 6.1 m, 7.32 m and 8.54 m are studied. Solid panel dimensions are varied in order to determine the size that leads to the lowest consumption of flexural reinforcement. Analysis using FEM were carried out in 16 different panels using three-dimensional elements. Afterwards, a method to estimate the consumption of flexural reinforcement based on the bending moment distribution is proposed. Analysis results are compared with one another to evaluate the behaviour of panels in relation to changes in parameters and point out the solid dimension that would be more economical.

## Sumário

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Motivação .....	2
1.2	Objetivo .....	3
1.3	Metodologia .....	3
1.4	Estrutura da Dissertação .....	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1	Lajes Nervuradas .....	5
2.1.1	Aspectos construtivos .....	7
2.1.2	Recomendações da NBR 6118:2014.....	9
2.1.3	Recomendações da EN 1992-1-1:2004.....	10
2.1.4	Recomendações do ACI 318M-14.....	10
2.2	Lajes Nervuradas Lisas .....	11
2.3	Métodos de Análise e Modelagem em Elementos Finitos.....	15
2.4	Otimização Estrutural .....	18
2.4.1	Métodos clássicos .....	19
2.4.2	Métodos aleatórios .....	22
2.4.3	Otimização de lajes lisas maciças .....	25
2.4.4	Otimização de lajes nervuradas.....	29
3	MODELAGEM NUMÉRICA.....	33
3.1	Definição dos painéis de laje .....	33
3.2	Definição dos Apoios.....	36
3.3	Modelagem com Elementos de Casca .....	39
3.4	Modelagem com Elementos Sólidos.....	45
4	ESTIMATIVA DO CONSUMO DE ARMADURA DE FLEXÃO.....	50
4.1	Cálculo dos Momentos Fletores .....	50
4.1.1	Cálculo do momento no maciço.....	51

4.1.2	Cálculo do momento na região nervurada .....	52
4.2	Diagrama de Momento Fletor .....	53
4.3	Consumo de Aço.....	57
4.3.1	Analogia com viga contínua .....	57
4.3.2	Cálculo dos volumes de momento fletor.....	58
4.4	Processo de Otimização .....	59
5	RESULTADOS .....	61
5.1	Laje com Vão de 6,1 m .....	61
5.2	Laje com Vão de 7,32 m .....	65
5.3	Laje com Vão de 8,54 m .....	70
5.4	Considerações Finais .....	75
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	79
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	82

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Laje nervurada sem vigas.....	5
Figura 2.2 – Laje nervurada com blocos de EPS como material de preenchimento .....	7
Figura 2.3 – Moldes plásticos reaproveitáveis em laje nervurada protendida.....	8
Figura 2.4 – Laje com nervuras treliçadas pré-moldadas e bloco cerâmico.....	9
Figura 2.5 – Distribuição dos momentos radiais e tangenciais em função do modelo adotado: a) placa anelar com reação por unidade de comprimento e b) placa circular com reação por unidade de área (LEONHARDT e MÖNNIG, 1986, p. 135) .....	13
Figura 2.6 – Distribuição de momentos negativos no meio do vão e na linha de pilares em lajes lisas maciças e nervuradas (REGAN, 1981, p. 72) .....	13
Figura 2.7 – Esquema de laje alveolar protendida e variáveis de dimensionamento (KOSKISTO e ELLINGWODD, 1997, p. 300) .....	21
Figura 2.8 – Relação entre o custo total e a altura útil para diferentes preços do concreto (esquerda) e aço (direita) (GROSSI, 1998, pp. 98-99).....	21
Figura 2.9 – Seção transversal de ponte estudada por Cortês (2010, p. 145) e Carvalho (2014, p. 95) – Solução executada, não otimizada (dimensões em milímetros) .....	23
Figura 2.10 – Seção transversal analisada por Carvalho (2014, p. 88) – Aplicação 1 (dimensões em centímetros) .....	24
Figura 2.11 – Variação do custo total em função do preço dos insumos – Aplicação 1 (CARVALHO, 2014, p. 94) .....	25
Figura 2.12 – Sistema de laje lisa (SAHAB <i>et al.</i> , 2005, p. 313).....	26
Figura 2.13 – Planta dos pórticos eq. intermediários (SAHAB <i>et al.</i> , 2005, p. 314) .....	26
Figura 2.14 – Variáveis de dimensionamento (SAHAB <i>et al.</i> , 2005, p. 314).....	27
Figura 3.1 – Esquema em planta e em corte de molde com 16 cm de altura .....	33
Figura 3.2 – Esquema de laje nervurada com moldes reaproveitáveis.....	34
Figura 3.3 – Simbologia das características geométricas da laje .....	35
Figura 3.4 – Características geométricas da laje com vão de 6,1 m.....	35
Figura 3.5 – Características geométricas da laje com vão de 7,32 m.....	35
Figura 3.6 – Características geométricas da laje com vão de 8,54 m.....	35
Figura 3.7 – Painéis de laje estudados .....	36
Figura 3.8 – Área de influência do pilar .....	38

Figura 3.9 – Elemento quadrilátero do tipo <i>shell</i> mostrando os eixos locais, os nós e as faces (CSI, 2010, p. 158) .....	40
Figura 3.10 – Esforços e tensões no elemento <i>shell</i> (CSI, 2010, p. 189) .....	40
Figura 3.11 – Momentos fletores e torsões no elemento <i>shell</i> (CSI, 2010, p. 189) .....	41
Figura 3.12 – Laje desenhada no AutoCAD (vista superior) .....	42
Figura 3.13 – Laje desenhada no AutoCAD (vista inferior) .....	42
Figura 3.14 – Malha em elementos finitos com elementos de casca.....	43
Figura 3.15 – Detalhe do apoio e de região maciça na malha de elem. finitos de casca	44
Figura 3.16 – Malha em elementos de casca com suas respectivas espessuras.....	45
Figura 3.17 – Definição dos nós e faces do elemento <i>solid</i> (CSI, 2010, p. 215).....	46
Figura 3.18 – Malha em elementos finitos com elementos sólidos (vista superior) .....	47
Figura 3.19 – Malha em elementos finitos com elementos sólidos (vista inferior).....	48
Figura 3.20 – Detalhe do apoio e da região maciça da malha em elem. finitos sólidos.	49
Figura 3.21 – Definição das componentes de tensão no elem. sólido .....	49
Figura 4.1 – Localização da área estudada no painel (a) e localização dos pontos onde foram analisadas as tensões (b) .....	50
Figura 4.2 – Diagrama de tensões no interior do maciço .....	51
Figura 4.3 – Representação de trecho de nervura com indicação do local das tensões consideradas.....	52
Figura 4.4 – Diagrama de tensões na nervura .....	53
Figura 4.5 – Construção da curva geratriz da superfície de momento fletor negativo... 54	
Figura 4.6 – Construção da curva geratriz da superfície de momento fletor positivo no centro do painel .....	55
Figura 4.7 – Construção da curva da superfície de momento fletor positivo na linha de pilares .....	55
Figura 4.8 – Perspectiva das superfícies do diagrama aproximado de momento fletor . 56	
Figura 4.9 – Diagrama aproximado de momento fletor (vista superior).....	56
Figura 4.10 – Diagrama aproximado de momento fletor (vista frontal) .....	57
Figura 4.11 – Viga contínua formada por três vãos e submetida a carregamento uniformemente distribuído .....	57
Figura 4.12 – Diagrama de momento fletor para viga contínua.....	58
Figura 5.1 – Tensões normais $\sigma_{11}$ (MPa) nos painéis com vão de 6,1 m.....	63
Figura 5.2 – Volume de momento fletor positivo e negativo e razão entre eles em função do tamanho do maciço para vão de 6,1 m .....	64

Figura 5.3 – Volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço para vão de 6,1 m .....	65
Figura 5.4 – Tensões normais $\sigma_{11}$ (MPa) nos painéis com vão de 7,32 m.....	68
Figura 5.5 – Volume de momento fletor positivo e negativo e razão entre eles em função do tamanho do maciço para vão de 7,32 m .....	69
Figura 5.6 – Volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço para vão de 7,32m .....	70
Figura 5.7 – Tensões normais $\sigma_{11}$ (MPa) nos painéis com vão de 8,54 m.....	72
Figura 5.8 – Volume de momento fletor positivo e negativo e razão entre eles em função do tamanho do maciço para vão de 8,54 m .....	74
Figura 5.9 – Volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço para vão de 8,54m .....	74
Figura 5.10 – Distância relativa do centro do pilar à circunferência de momento nulo em função do comprimento relativo do maciço para cada vão .....	75
Figura 5.11 – Momento fletor negativo máximo adimensional em função do tamanho do maciço para cada vão.....	76
Figura 5.12 – Momento fletor positivo adimensional no centro do painel em função do tamanho do maciço para cada vão .....	77

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Dimensões dos elementos estruturais (PRASAD <i>et al.</i> , 2005).....	30
Tabela 2.2 – Resumo dos painéis mais vantajosos e relações entre comprimento do vão (L) e altura total da laje (h) e espaçamento entre nervuras (a) .....	32
Tabela 3.1 – Resumo das características das lajes.....	34
Tabela 3.2 – Resumo das propriedades do concreto .....	37
Tabela 3.3 – Área e dimensões calculadas dos pilares para cada comprimento de vão .	39
Tabela 4.1 – Comprimentos dos maciços em função do tamanho do vão e relação entre o tamanho do maciço e o comprimento do vão .....	60
Tabela 5.1 –Tensões e momentos fletores dentro do maciço para laje de vão 6,1 m em função do comprimento do maciço .....	61
Tabela 5.2 –Tensões e momentos fletores no centro do painel para laje de vão 6,1 m em função do comprimento do maciço .....	61
Tabela 5.3 – Tensões e momentos fletores na linha de pilares para laje de vão 6,1 m em função do comprimento do maciço .....	62
Tabela 5.4 –Dist. do centro do pilar à circunf. de momento nulo para vão de 6,1 m.....	62
Tabela 5.5 – Volume de momentos fletores positivo, negativo e total em função do comprimento do maciço para vão de 6,1 m.....	64
Tabela 5.6 – Tensões e momentos fletores dentro do maciço para laje com vão 7,32 m em função do comprimento do maciço .....	65
Tabela 5.7 – Tensões e momentos fletores no centro do painel para laje de vão 7,32 m em função do comprimento do maciço .....	66
Tabela 5.8 – Tensões e momentos fletores na linha de pilares para laje de vão 7,32 m em função do comprimento do maciço .....	66
Tabela 5.9 – Dist. do centro do pilar à circunf. de momento nulo para vão de 7,32 m..	66
Tabela 5.10 – Volume de momentos fletores positivo, negativo e total em função do comprimento do maciço para vão de 7,32 m.....	68
Tabela 5.11 – Tensões e momentos fletores dentro do maciço para laje de vão 8,54 m em função do comprimento do maciço .....	70
Tabela 5.12 – Tensões e momentos fletores no centro do painel para laje de vão 8,54 m em função do comprimento do maciço .....	71

Tabela 5.13 – Tensões e momentos fletores na linha de pilares para laje de vão 8,54 m em função do comprimento do maciço .....	71
Tabela 5.14 – Dist. do centro do pilar à circunf. de momento nulo para vão de 8,54 m	73
Tabela 5.15 – Volume de momentos fletores positivo, negativo e total em função do comprimento do maciço para vão de 8,54 m.....	73

## Lista de Símbolos

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_p$  – área de seção transversal do pilar

$E_{cs}$  – módulo de elasticidade secante do concreto

$F_c$  – força resultante de compressão

$F_d$  – valor de cálculo das ações

$F_t$  – força resultante de tração

$I$  – momento de inércia à flexão

$L$  – comprimento do vão

$M$  – momento fletor

$N$  – número de nervuras

$VM$  – volume no diagrama de momento fletor entre a superfície de momento fletor e o plano de momento nulo

### LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$a$  – espaçamento entre eixos de nervuras

$b_c$  – comprimento da base da seção transversal do pilar

$b_f$  – largura efetiva

$b_w$  – largura da nervura

$d$  – altura útil

$f_{cd}$  – resistência de cálculo do concreto

$f_{ck}$  – resistência característica à compressão do concreto

$f_y$  – tensão de escoamento das armaduras longitudinais

$f_{yw}$  – tensão de escoamento das armaduras transversais

$g$  – valor da ação permanente

$h$  – altura total da laje

$h_c$  – altura da seção transversal do pilar

$h_n$  – altura da nervura

$h_f$  – altura da mesa

$l_m$  – comprimento do maciço a partir do centro do apoio

$q$  – valor da ação variável

$r$  – distância do centro do apoio à circunferência de momento fletor nulo

$z$  – braço de alavanca

## LETRAS GREGAS

$\gamma_c$  – coeficiente de ponderação da resistência do concreto no estado-limite último

$\sigma$  – tensão normal

# 1 INTRODUÇÃO

O concreto, cuja principal matéria prima é o cimento, constitui o material de construção civil mais largamente empregado no mundo, correspondente a uma parcela muito superior à de outros materiais, como o aço e a madeira. O consumo mundial de cimento no ano de 2012 atingiu a marca de 3,7 bilhões de toneladas e, de acordo com projeções, esse número deverá continuar crescendo, alcançando 4,4 bilhões de toneladas em 2016 (PCA, 2013). De acordo com dados do Sindicato Nacional da Indústria do Cimento (2014), o Brasil foi responsável pelo consumo de 71 milhões de toneladas de cimento em 2013.

A essa posição de destaque do concreto em face de outros materiais, podem ser atribuídas diversas razões possíveis. A primeira diz respeito à grande resistência que o concreto possui à ação da água, quando comparado com a madeira ou o aço, por exemplo. Em seguida, destaca-se a facilidade com que o concreto pode ser moldado em uma considerável variedade de formas e tamanhos devido à sua característica plástica quando no estado fresco. Citam-se, também, as vantagens econômicas do concreto, por ser produzido com materiais de custo relativamente baixo e disponíveis em quase todas as partes do planeta. Além dessas, ainda são apontadas como vantagens do concreto a possibilidade de obtenção de estruturas monolíticas devido à boa aderência entre o concreto endurecido e o que é recém-lançado; a durabilidade, desde que seja bem executado com controle tecnológico e conforme as normas; e, por fim, a resistência ao fogo superior à do aço e da madeira (METHA e MONTEIRO, 2006; CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2013).

Contudo, para vencer um vão de mesmo tamanho, o elemento de concreto exige uma seção transversal de dimensões superiores ao que seria necessário caso o elemento fosse executado apenas em aço. Embora o aço tenha um peso específico maior que o do concreto, dadas as condições anteriores, é plausível supor que a estrutura em concreto seria mais pesada, constituindo um fator limitante para o seu uso em determinadas situações. Além disso, o concreto é bom condutor de calor e som, podendo haver necessidade de associação com outros materiais para adequar-se aos critérios de desempenho. Menciona-se ainda que reparos e adaptações podem ser de difícil execução (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2013).

Indubitavelmente, grande parte das estruturas não seria exequível se não fosse possível a associação do concreto com o aço. O princípio fundamental do concreto armado, que para receber tal denominação deve respeitar limites mínimos de taxa de armadura definidos por norma, está embasado na aderência entre os dois materiais, devendo, então, trabalhar solidariamente. O concreto possui baixa resistência à tração que, de modo geral para concretos de baixa resistência, situa-se na ordem de um décimo da resistência à compressão. Por outro lado, o aço apresenta alta resistência à tração, além de boa ductilidade.

Nos elementos submetidos à flexão, o concreto fica responsável por resistir aos esforços de compressão, enquanto que o aço absorve a parcela de tração. O aço, contudo, só começa a trabalhar quando suas barras são alongadas durante a deformação do concreto que as envolve, por isso a importância da aderência. Ademais, o concreto age como uma proteção que impede a corrosão do aço por agentes agressivos presentes no ambiente e ambos possuem coeficiente de dilatação térmica próximos para as temperaturas usuais. Portanto, o concreto armado busca extrair o ótimo do comportamento de cada material que o compõe.

## **1.1 Motivação**

No decorrer dos últimos anos, tem-se intensificado a preocupação das empresas com a redução de custos ligada à maior competitividade do mercado, além do crescente comprometimento com questões ambientais e sustentáveis, que favorecem a imagem das companhias. Essa ideia está fortemente associada à diminuição no consumo de insumos. Todavia, em engenharia estrutural, reduzir drasticamente a quantidade de certo material pode comprometer tanto o desempenho quanto a segurança da estrutura. De maneira oposta, ao se adotar um fator de segurança elevado, espera-se que haja incremento no montante de insumos e, conseqüentemente, maior custo. Portanto, um dos grandes desafios do projeto estrutural consiste em ponderar uma balança que ora tende para a economia, ora para a segurança.

Nesse sentido, a busca pelo uso mais racional e consciente das matérias primas implica, necessariamente, no desenvolvimento de técnicas e métodos que visem o aproveitamento mais eficiente de tais materiais. Assim, a otimização de estruturas insere-se nesse cenário na medida em que conduz ao dimensionamento de elementos que

consumam o mínimo de material, mas sem comprometer os requisitos de segurança e utilização.

As lajes representam uma parte considerável do consumo de concreto de uma edificação, logo, trabalhar com o dimensionamento otimizado dessas estruturas acarreta grande economia. Lajes nervuradas permitem vencer grandes vãos, podendo ainda, estar apoiadas diretamente sobre os pilares, eliminando a necessidade de vigas entre esses apoios verticais, tendo-se as denominadas lajes lisas nervuradas. Tais estruturas permitem a simplificação do projeto e da execução, a redução no uso de formas e o posicionamento mais fácil de instalações elétricas e hidro-sanitárias, condições que implicam em menor consumo de material e menor tempo de construção.

## **1.2 Objetivo**

Sabe-se que na região de ligação entre a laje e os pilares, há grande concentração de esforço cortante, tornando-se imprescindível a execução de um maciço ao redor dos apoios para evitar o puncionamento da laje. Nesse mesmo local, desenvolvem-se, ainda, momentos fletores negativos, solicitação que deve ser evitada na região das nervuras. Tais momentos são influenciados tanto pelo vão da laje quanto pelo tamanho do próprio maciço. Este trabalho tem como objetivo, então, buscar otimizar o dimensionamento das lajes nervuradas, minimizando os efeitos do momento negativo no consumo de armadura de flexão ao se variar o comprimento do vão e as dimensões do maciço. Com isso, espera-se alcançar uma solução estrutural que tanto economize material quanto atenda aos requisitos de segurança.

## **1.3 Metodologia**

A primeira etapa deste trabalho consiste em uma revisão bibliográfica sobre lajes nervuradas e a aplicação de técnicas de otimização em estruturas. Em seguida, com subsídio desses estudos precedentes, são escolhidas as tipologias dos painéis de laje que são avaliados, mais especificamente, o tamanho do vão, as características geométricas e, principalmente, os comprimentos dos maciços.

Tendo sido determinados os painéis de laje, parte-se para a modelagem numérica e análise estrutural feita através do Método dos Elementos Finitos com o auxílio do programa SAP2000. Os resultados das análises são tratados de maneira que se possa traçar o diagrama de momento fletor na região de interesse da estrutura.

Na próxima etapa, é proposto um método para estimar o consumo de armadura de flexão a partir do diagrama de momento fletor. Por fim, ao comparar os resultados de vários comprimentos de maciço para uma laje com mesmo tamanho de vão, pode-se determinar aquela que otimiza o consumo de armadura de flexão.

## **1.4 Estrutura da Dissertação**

A princípio, no Capítulo 2, são apresentados os principais tipos de lajes nervuradas e seus aspectos construtivos. São citadas algumas recomendações das normas concernentes a esse tipo de estrutura e, em seguida, faz-se uma breve explanação sobre as lajes lisas nervuradas e seu comportamento estrutural. Também são abordados os principais métodos de análise de lajes nervuradas. Esse capítulo ainda engloba uma revisão bibliográfica sobre estudos relacionados a otimização estrutural.

No Capítulo 3, são descritas as etapas de escolha dos painéis de laje e as suas principais características. Também é detalhado o método numérico empregado para realizar as análises dos painéis de laje, tais como a discretização, o tipo de elemento finito e as condições de contorno.

A maneira de estimar o consumo de armadura de flexão é apresentada no Capítulo 4. Primeiramente, é demonstrado o cálculo do momento fletor em cada ponto de interesse do painel e, depois, como o momento fletor é distribuído sobre a superfície da laje. O procedimento para estimar o consumo de aço é apresentado para uma viga e depois expandido para a laje. Por fim, comenta-se sobre o processo de otimização adotado.

O Capítulo 5 contém os resultados das análises para cada painel. São mostrados os momentos fletores positivos e negativos nos pontos de interesse do painel e os volumes de momentos fletores totais. Também são feitas as análises dos resultados e a correlação com um estudo precedente.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões deste estudo e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As lajes possuem duas funções estruturais, podendo se comportar como placas ou como chapas.

Na primeira situação, as lajes recebem as ações verticais na direção perpendicular ao seu plano médio e transmitem os esforços para os apoios, trabalhando, sobretudo, à flexão.

No que concerne o comportamento como chapa, as lajes atuam como diafragmas horizontais rígidos, transmitindo as ações horizontais para os pilares da estrutura. Nesse caso, a laje recebe, portanto, o carregamento ao longo do seu plano. O comportamento como chapa é fundamental para a estabilidade global da estrutura, principalmente em edifícios altos, tendo em vista que é através das lajes que os pilares contraventados se apoiam nos elementos de contraventamento. Fica garantida, assim, a segurança da estrutura quanto às solicitações laterais.

### 2.1 Lajes Nervuradas

A norma americana ACI 318M-14 define laje nervurada (Figura 2.1) como sendo uma combinação monolítica de uma capa e de nervuras regularmente espaçadas arranjadas em uma direção ou em duas direções ortogonais.



**Figura 2.1 – Laje nervurada sem vigas (Disponível em: <<http://www.atex.com.br/LajeNervurada>> Acesso em 27 maio de 2015)**

Segundo a NBR 6118:2014, lajes nervuradas são as lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos está localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte. Assim, as lajes nervuradas são aquelas em que a mesa de concreto resiste às tensões de compressão e as barras das armaduras às tensões de tração, sendo que cada nervura de concreto faz a ligação mesa-armadura, podendo também absorver tensões de compressão. Portanto, o comportamento nervura (viga) e mesa (laje) é análogo ao de uma viga de seção T (BOCCHI JUNIOR e GIONCO, 2010).

Paula (2003) afirma que, além de proporcionar a ligação mesa-armadura, a nervura tem a finalidade de proteger a armadura tracionada e permitir que a estrutura trabalhe de maneira monolítica, uma vez que o concreto na zona de tração (nervuras) tem a sua resistência desprezada no dimensionamento.

O sistema nervurado representa uma evolução natural das lajes maciças, pois resulta na eliminação da maior parte de concreto abaixo da linha neutra ou sua substituição por material inerte, que não colabora com a resistência. Assim, há um aumento econômico da espessura total da laje pela criação de vazios arranjados em um padrão, ao mesmo tempo que se proporciona a redução do peso próprio da estrutura e um aproveitamento mais eficiente do aço e do concreto (FRANCA e FUSCO, 1997).

Carvalho e Pinheiro (2013) sugerem que, para pavimentos em que o menor vão a ser vencido pelas lajes é pequeno ou médio (normalmente, menos que 5 m) e cujas cargas a serem suportadas não são tão elevadas, torna-se viável o emprego de lajes maciças apoiadas em vigas, tendo em vista que, nessa situação, a espessura necessária para a laje será pequena. Nesse tipo de sistema tradicional, há uma grande rigidez quanto aos deslocamentos verticais. Todavia, quando precisa-se vencer grandes vãos, as lajes maciças podem passar a ser antieconômicas, pois serão requeridas espessuras maiores para atender ao estado limite último e ao critério de pequenos deslocamentos verticais. Portanto, torna-se vantajoso o emprego de um sistema estrutural que alie um comportamento semelhante ao das placas com a eficiência das vigas na flexão, possuindo, assim, grande inércia e peso próprio reduzido.

Dentre as vantagens da utilização de lajes nervuradas destacadas por Carvalho e Pinheiro (2013), citam-se:

- a possibilidade de vencer grandes vãos, liberando espaço entre os pilares;
- execução com tecnologia semelhante à de lajes maciças, ao contrário de lajes protendidas que exigem equipamentos e mão de obra específicos;

- grande versatilidade de aplicação, podendo ser empregadas em pavimentos de edifícios de variados usos;
- adequam-se ao sistema de lajes sem vigas, apesar de ser necessária a introdução de maciços nas regiões dos pilares;
- menor consumo de concreto e aço que sistemas de laje maciça, reduzindo o peso próprio e aliviando as fundações;
- grande altura e peso próprio reduzido, permitindo suportar cargas mais elevadas.

### 2.1.1 Aspectos construtivos

As lajes nervuradas podem ser moldadas no local ou pré-fabricadas. O primeiro tipo compreende as lajes cujas etapas de execução são todas realizadas in loco. Logo, torna-se imprescindível o uso de fôrmas e escoramento, podendo ainda ser necessário usar material de enchimento.

O material de enchimento deve ser o mais leve possível, mas possuindo resistência suficiente para suportar as solicitações durante a execução. Nesse sentido, empregam-se bastante os blocos de EPS (poliestireno expandido), de concreto celular e cerâmicos, que ficam incorporados à laje, além dos moldes reaproveitáveis. O EPS (Figura 2.2) apresenta vantagens como a possibilidade de execução de um teto plano, a facilidade de corte, boa resistência às operações de montagem das armaduras e concretagem, vedação eficiente, baixa absorção de água, e módulo de elasticidade pequeno, assim como proporciona um bom isolamento térmico.



**Figura 2.2 – Laje nervurada com blocos de EPS como material de preenchimento**  
(Disponível em: <<http://www.cimentoitambe.com.br/eps-amplia-desempenho-termoacustico-do-concreto/>> Acesso em 27 de maio de 2015)

Os moldes reaproveitáveis (Figura 2.3), também denominados cubetas, são geralmente feitos de polipropileno ou metal. Os moldes suportam o peso do concreto fresco, das armaduras, dos equipamentos e das pessoas andando sobre sua superfície. Durante a execução, desmoldantes semelhantes aos aplicados nas lajes maciças devem ser utilizados na superfície das cubetas para facilitar o desmolde. Além disso, as fôrmas reaproveitáveis dispensam o uso do tabuleiro tradicional, que pode ser substituído por pranchas ou vigotas colocadas apenas nas regiões das nervuras. Logo, para o escoramento, basta o uso de barretes, travessas e pontaletes. A vantagem das cubetas reside no grande número de reutilizações que tais fôrmas podem ter e por não contribuírem com o peso próprio final da laje.



**Figura 2.3 – Moldes plásticos reaproveitáveis em laje nervurada protendida (Disponível em: <<http://www.atex.com.br/LajeNervurada>> Acesso em 27 maio de 2015)**

Nas lajes pré-moldadas (Figura 2.4), as nervuras são pré-moldadas, podendo ser confeccionadas na própria obra ou em fábricas. Essas vigotas são capazes de resistir ao peso próprio e às ações de construção, ficando posicionadas sobre as fôrmas das vigas e de cimbramento intermediário.

Bocchi Junior e Gionco (2010) citam que uma das principais vantagens de adotar lajes pré-moldadas é não haver necessidade de usar tabuleiro inferior da fôrma tradicional, pois os blocos posicionados entre as nervuras não permitem que o concreto recém-lançado escoe pela interface entre as vigotas pré-moldadas e os blocos.



**Figura 2.4 – Laje com nervuras treliçadas pré-moldadas e bloco cerâmico**

As vigotas podem ser pré-moldadas inteiramente em concreto armado ou concreto protendido ou ainda como armadura treliçada com uma placa de concreto na parte inferior. Os blocos podem ser confeccionados em material cerâmico, isopor ou concreto celular. De acordo com Pinheiro e Razente (2003), utiliza-se o bloco cerâmico como material de enchimento devido à facilidade de execução e ao bom isolamento térmico (em comparação com o concreto maciço). No entanto, esse material apresenta o inconveniente de possuir um elevado peso específico para um simples material de enchimento. Porém, frente aos outros materiais de enchimento como isopor, o bloco cerâmico ainda proporciona melhor aderência ao reboco para acabamento do teto, dispensando a aplicação de forro.

### **2.1.2 Recomendações da NBR 6118:2014**

A NBR 6118:2014 preconiza que a espessura da mesa, caso não existam tubulações embutidas, deve ser maior ou igual a  $1/15$  da distância entre as faces das nervuras e nunca inferior a 4 cm. Havendo tubulações embutidas de diâmetro menor ou igual a 10 mm, o valor mínimo absoluto da espessura da mesa passa a ser 5 cm. Para tubulações de diâmetro superior a 10 mm, deve-se adotar a espessura mínima de 4 cm acrescida do diâmetro da tubulação; se existir cruzamento entre os tubos, soma-se duas vezes o diâmetro. A NBR 6118:2014 ainda estipula que a espessura das nervuras não

pode ser inferior a 5 cm e que nervuras com espessura abaixo de 8 cm não podem conter amadura de compressão.

A NBR 6118:2014 estabelece condições que devem ser obedecidas para o projeto de lajes nervuradas. A verificação da flexão da mesa pode ser dispensada para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm e, para a verificação do cisalhamento na região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje. Para o caso de lajes com espaçamento entre eixos de nervura entre 65 cm e 110 cm, fica exigida a verificação da flexão da mesa e do cisalhamento das nervuras tratadas como vigas. Contudo, a verificação como laje fica permitida se o espaçamento entre eixos de nervuras for de até 90 cm e se a largura média das nervuras for superior a 12 cm. Para as lajes com espaçamento entre eixos de nervura maior que 110 cm, exige-se que a mesa seja projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

### **2.1.3 Recomendações da EN 1992-1-1:2004**

Assim como a norma brasileira, a EN 1992-1-1:2004 estabelece diretrizes para a verificação e dimensionamento de lajes nervuradas. Para fins de análise, os elementos das lajes nervuradas, ou seja, a mesa e as nervuras, não precisam ser tratadas separadamente desde que esteja garantida a rigidez torsional do conjunto. Essa hipótese pode ser considerada válida se:

- o espaçamento entre nervuras não ultrapassar 1500 mm;
- a altura da nervura abaixo da mesa não exceder 4 vezes a sua largura;
- a altura da mesa for superior a 1/10 da distância livre entre nervuras ou no mínimo igual a 50 mm, o que for maior;
- o espaçamento livre entre nervuras transversais não exceder em 10 vezes a altura total da laje.

Ademais, a EN 1992-1-1:2004 permite a redução da espessura da mesa de 50 mm para 40 mm na situação em que blocos permanentes são incorporados entre as nervuras.

### **2.1.4 Recomendações do ACI 318M-14**

Nesse mesmo sentido, a norma americana ACI 318M-14 também destina uma seção às condições que devem ser atendidas para a análise de lajes nervuradas. Define-se que as nervuras não devem ter largura inferior a 100 mm e a altura máxima deve ser de

três vezes e meia a menor largura da nervura. Além disso, o espaçamento entre faces de nervuras não pode exceder 750 mm. Caso as condições anteriores não sejam atendidas, o conjunto deve ser dimensionado separadamente como laje e vigas.

Entretanto, quando forem empregados como preenchimento permanente blocos cerâmicos ou outro material com resistência à compressão igual ou superior à do concreto da laje, podem ser feitas as seguintes considerações:

- para o cálculo da resistência ao cisalhamento e ao momento negativo, é permitido incluir a parede vertical do preenchimento em contato com as nervuras. Outras partes do preenchimento não devem ser incluídas no cálculo da resistência;

- a espessura da laje acima do preenchimento não deve ser inferior a  $1/12$  da distância livre entre nervuras, nem menos que 40 mm;

- em lajes nervuradas unidirecionais, a armadura na direção ortogonal às nervuras deve ser determinada na laje como exigido no item que trata da armadura para retração e variação de temperatura (armadura mínima).

Na situação em que forem utilizadas formas reaproveitáveis ou o material de preenchimento não satisfizer as condições anteriores, são válidas as recomendações:

- a espessura da mesa não deve ser inferior a  $1/12$  da distância livre entre nervuras, nem menor que 50 mm;

- a armadura normal à direção das nervuras deve ser determinada na laje como o exigido para flexão, considerando concentrações de carga, se houver, porém jamais inferior ao exigido pelo item que trata da armadura mínima.

Havendo tubulações ou condutos embutidos na laje, a espessura da mesa deve ser ao menos 25 mm maior que a altura total da tubulação em qualquer ponto. Além do mais, as tubulações também não devem reduzir significativamente a resistência da estrutura.

## **2.2 Lajes Nervuradas Lisas**

A NBR 6118:2014 define lajes-cogumelo como sendo aquelas diretamente apoiadas em pilares com capitéis, enquanto que as lajes lisas são apoiadas nos pilares sem capitéis. Ambas as estruturas constituem painéis de laje sem vigas. As vantagens desse tipo de laje residem na maior flexibilidade arquitetônica, na possibilidade de execução de pavimentos mais baixos e menor altura total do edifício, na redução do consumo de fôrmas, na simplificação das armaduras e da concretagem devido à eliminação das vigas,

na melhoria da qualidade final e diminuição de revestimentos e na facilidade de execução das instalações prediais.

No sistema tradicional (com vigas), a estrutura é hiperestática do ponto de vista das condições de apoio e o carregamento pode ser transmitido em uma única direção até alcançar as vigas, motivo pelo qual os momentos maiores localizam-se na direção do menor vão. Por outro lado, uma placa lisa retangular suportada por pilares em seus quatro cantos é isostática com relação ao apoio e a carga deve seguir primeiro em uma direção e depois na outra até chegar aos apoios pontuais, ou seja, todo o carregamento é transmitido em ambas as direções. Portanto, os momentos fletores maiores se produzem na direção do maior vão (MONTROYA *et al.*, 2000).

Dada a ausência de vigas, a força cortante de grande intensidade está necessariamente concentrada na região dos pilares, sendo o funcionamento a forma mais comum de ruptura. De acordo com Leonhardt e Mönning (1986), a região de momentos radiais nulos encontra-se em uma circunferência de raio aproximadamente  $0,22L$  distante do centro do apoio, sendo  $L$  o comprimento do vão. Ao longo do bordo dessa circunferência, atuam apenas a força cortante de menor intensidade e pequenos momentos tangenciais. Dada essa condição, Souza (2014) comprovou que é possível trabalhar regiões maciças de dimensões reduzidas do ponto de vista da resistência ao cisalhamento.

Os momentos radiais e tangenciais nas proximidades do pilar dependem da distribuição das forças de compressão no apoio. Se for considerada uma placa anelar carregada no bordo externo e com reação linearmente distribuída na circunferência do pilar (Figura 2.5a), há diminuição do momento radial e aumento do momento tangencial quando se aproxima do apoio. Para o caso de uma placa circular carregada no bordo externo e reação de apoio distribuída na superfície de contato com o pilar (Figura 2.5b), tem-se elevação dos momentos radial e tangencial na medida que se aproxima do apoio, embora o tangencial seja de menor intensidade que no caso anterior. Ademais, a força cortante varia hiperbolicamente em direção ao apoio, de modo que, na mesma região, valores muito altos do cortante coincidem com valores elevados de momentos principais negativos (LEONHARDT e MÖNNIG, 1986).

As lajes sem vigas podem ser maciças, nervuradas ou protendidas (CARVALHO e PINHEIRO, 2013). Para Regan (1981), a falta de rigidez torsional das lajes nervuradas lisas reduz a possibilidade de redistribuição de momento através da largura da seção, o que significa que a distribuição da armadura deve coincidir com a distribuição elástica dos momentos sempre que for possível. Comparada com a laje maciça, a laje nervurada

tem uma distribuição de momentos menos uniforme, como pode ser visto na Figura 2.6, onde estão representados os momentos negativos ao longo da linha de pilares e do vão central.

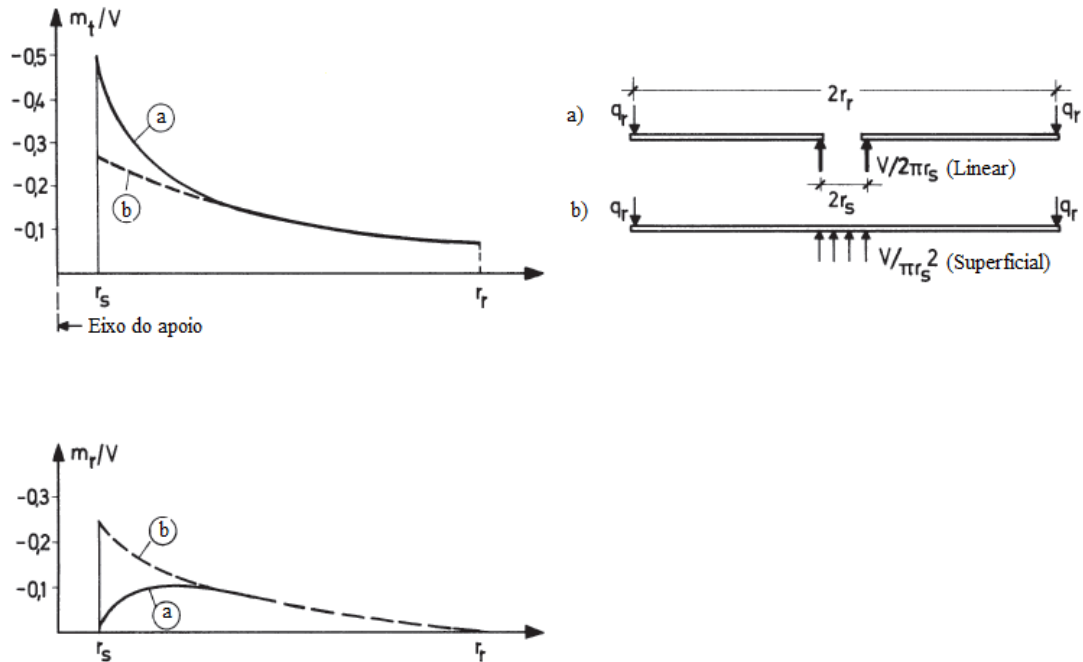


Figura 2.5 – Distribuição dos momentos radiais e tangenciais em função do modelo adotado: a) placa anelar com reação por unidade de comprimento e b) placa circular com reação por unidade de área (LEONHARDT e MÖNNIG, 1986, p. 135)

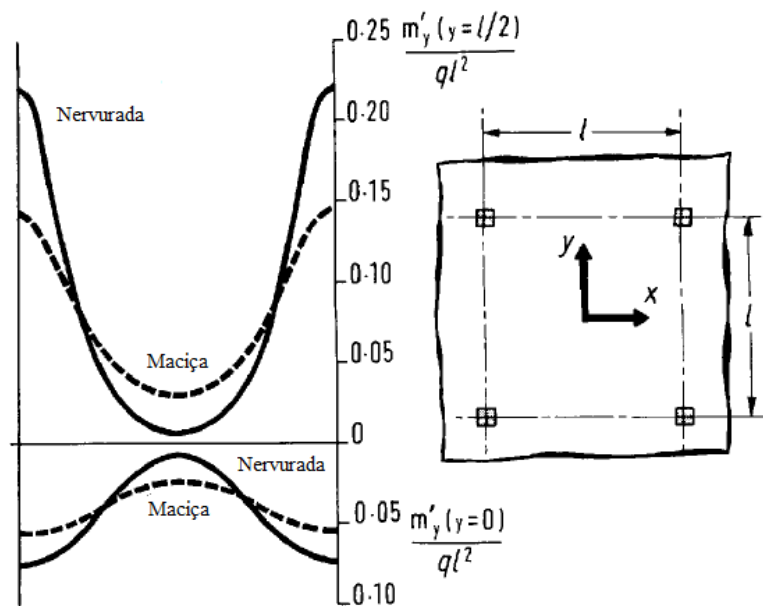


Figura 2.6 – Distribuição de momentos negativos no meio do vão e na linha de pilares em lajes lisas maciças e nervuradas (REGAN, 1981, p. 72)

Montoya *et al.* (2000) recomendam dimensões mínimas para os elementos estruturais que, embora não sejam obrigatórias, devem ser respeitadas se a análise das lajes lisas for feita por métodos simplificados, tais como o método direto e o método dos pórticos equivalentes:

- os pilares, dispostos numa malha ortogonal, não devem desviar da linha de eixo dos apoios de uma distância maior que 10% do vão na direção considerada;

- as dimensões dos pilares em ambas as direções devem ser tais que  $b_c$  e

$$h_c \geq \begin{cases} 25 \text{ cm} \\ h \\ L/20 \end{cases};$$

- a espessura total  $h$  da laje nervurada não deve ser inferior a 15 cm nem  $1/28$  do maior vão;

- a mesa de compressão deve ter espessura  $h_f$  maior que 5 cm ou superior a  $1/10$  do maior espaçamento entre nervuras;

- a largura das nervuras devem respeitar as condições:  $b_w \geq \begin{cases} 7 \text{ cm} \\ a/7 \\ h_n/4 \end{cases}$ ;

- o número de nervuras em cada direção deve ser superior a 6 e o espaçamento entre as nervuras inferior a 1 m;

- deve ser executada uma nervura no perímetro da laje com largura mínima de 25 cm ou  $h$ ;

- balanços devem ter comprimento máximo de 10 vezes a altura da laje;

- os maciços devem ter largura mínima de  $0,15L$  nas duas direções ortogonais.

Os autores, todavia, afirmam que as espessuras mínimas da laje citadas anteriormente podem conduzir a resultados antieconômicos, sendo mais recomendado, na prática, adotar 20 cm ou  $L/25$ .

Segundo Regan (1981), a extensão do maciço ao redor dos pilares deve ser governada por uma série de fatores. Para garantir a aplicabilidade das equações de resistência ao puncionamento, o maciço deve se estender por uma distância de no mínimo 2,5 vezes a altura útil da laje a partir da face do pilar. A dimensão do maciço em cada direção também deve ser tal que a capacidade resistente ao momento negativo das nervuras não seja excedida. Por fim, levando em conta que o maciço não seja prolongado além da circunferência de momentos nulos ao redor do pilar, o cortante máximo na sua periferia deve ser tomado igual a 1,1 vezes o valor médio  $e$ , a partir da escolha adequada das dimensões, torna-se dispensável a armadura transversal nas nervuras.

## 2.3 Métodos de Análise e Modelagem em Elementos Finitos

A análise estrutural das lajes lisas nervuradas é geralmente procedida usando três métodos.

O Método dos Pórticos Equivalentes permite que a laje nervurada seja tratada como laje maciça desde que sejam usadas propriedades geométricas equivalentes. São calculados os momentos fletores médios nas faixas de pilares e nas faixas intermediárias. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada no item 2.4.3. Contanto que o momento estático seja preservado, a segurança da estrutura estará garantida, sendo, assim, uma solução de limite inferior.

O Método da Analogia de Grelha transforma a laje nervurada em uma grelha equivalente formada por vigas de seção transversal T, de modo que as rigidezes em cada direção ortogonal estejam concentradas nas barras dessas respectivas direções.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste em dividir a estrutura em uma série de elementos, é o mais largamente empregado para determinar os esforços e deslocamentos. O método consiste em resolver uma equação diferencial através de uma aproximação por polinômios de grau baixo. Para aumentar a precisão da solução, ao invés de aumentar o grau do polinômio, torna-se mais vantajoso reduzir o tamanho dos elementos.

No MEF, a laje pode ser analisada por meio de elementos de placa ou elementos de barra. No elemento de barra, os momentos fletores dependem apenas da curvatura na direção do próprio elemento, enquanto que no elemento de placa os momentos fletores dependem da curvatura nas duas direções ortogonais. No elemento de placa, os momentos torsores nas direções ortogonais devem ser idênticos para garantir que o elemento esteja em equilíbrio, contudo, no modelo de grelha, não existe nenhum princípio matemático que garanta essa igualdade.

Ao se analisar a estrutura via MEF, deve-se dedicar atenção especial à discretização da estrutura, tamanho da malha, tipo de elemento e introdução das restrições. Inserindo o pilar como apoio pontual, os momentos fletores nesse ponto tenderão ao infinito o que, dependendo do refinamento da malha, poderão afetar os resultados em todo o modelo. Melo, Fonte e Horowitz (2000) contornaram esse problema modelando o pilar como uma placa de grande rigidez, de maneira que a rotação na face do pilar seja a mesma do seu centro. Além disso, eles modelaram as nervuras como elementos de barra com inércia à flexão da seção T e inércia à torção reduzida a 1%,

enquanto que a mesa, os maciços e as vigas de bordo foram modelados com elementos de placa.

Oliveira *et al.* (2000) avaliaram a deformação de lajes nervuradas comparando valores experimentais com aqueles obtidos por meio de modelos lineares e modelos que levam em consideração a não-linearidade física do concreto armado. O pavimento foi analisado como grelha em que elementos de barra substituem as nervuras mais a largura colaborante da mesa e os capiteis são modelados como elementos de placa. Também foi procedida uma análise do pavimento pelo modelo de laje equivalente, em que a espessura da laje maciça é determinada pela equivalência da rigidez à flexão das nervuras. Em regime linear, observou-se que ambos os modelos apresentaram resultados próximos entre si, além disso, desprezar a inércia à torção ou considerá-la integralmente fez variar os deslocamentos em 10%. Resultados mais próximos dos experimentais foram obtidos nos modelos de análise não-linear, embora não tenham sido capazes de exprimir com fidelidade o comportamento da estrutura próximo à ruptura.

Para a modelagem em elementos finitos, Stramandinoli (2003) usou um elemento do tipo casca plana para modelar a mesa. Esse elemento é a associação do elemento de placa com o elemento de membrana, portanto, apresenta as tensões de flexão da placa, que produzem momentos fletores e torsões, e as tensões de membrana, que correspondem às tensões de um problema de estado plano de tensões. Para considerar a menor rigidez à torção da laje nervurada, ao invés de reduzir o módulo de elasticidade transversal a 1%, optou-se por discretizar as nervuras como elemento do estado plano de tensões, onde existem apenas tensões no plano e, por conseguinte, não há torção da nervura.

Comparando os resultados da análise via MEF com a analogia de grelha, constatou-se que o primeiro apresenta resultados mais próximos dos experimentais. Na análise numérica em regime elástico linear, tanto o modelo de grelha quanto o modelo de laje maciça equivalente apresentam resultados parecidos. Contudo, ao comparar esses valores com resultados experimentais, notou-se uma discrepância de resultados, principalmente no modelo de laje maciça equivalente, decorrente da maior rigidez à torção dessa laje. O cálculo das lajes nervuradas como placas elásticas forneceu momentos elásticos e flecha menores do que pela analogia de grelha e MEF (STRAMANDINOLI, 2003).

Donin (2007) comparou os deslocamentos verticais e momentos fletores de lajes nervuradas modeladas com elementos finitos bidimensionais e tridimensionais com

resultados experimentais. O modelo com elementos sólidos forneceu resultados mais próximos dos experimentais nos pontos de deslocamento máximo negativo e positivo. Em relação aos momentos fletores, os resultados do modelo tridimensional assemelharam-se ainda mais com os experimentais em todos os pontos analisados, apresentando melhoras significativas em relação ao modelo bidimensional e ao método dos pórticos equivalentes.

Ao analisar um painel de laje nervurada lisa submetida a cargas elevadas (12 kN/m<sup>2</sup>), Schwetz, Gastal e Silva Filho (2013) modelaram a mesa, as nervuras, a vigas de bordo e os maciços com elementos de casca, enquanto que os pilares foram modelados com elementos de barra. Foram procedidas análises linear e não-linear com o MEF e da analogia de grelha e os resultados foram comparados com um modelo experimental em escala natural. Constatou-se a eficiência dos dois métodos, todavia, a analogia de grelha resultou em momentos negativos superiores aos do MEF, tanto nas ligações do viga de bordo quanto na região dos maciços.

Tendo sido expostos os trabalhos precedentes, evidencia-se que ao analisar lajes nervuradas lisas os métodos mais amplamente empregados são a analogia de grelha e o MEF. Tanto a analogia de grelha quanto o MEF forneceram resultados adequados quando comparados com resultados experimentais. A discrepância entre os valores obtidos pelos dois métodos não foi, na maioria dos casos, significativa. A vantagem da analogia de grelha reside, então, na simplicidade de implementação frente ao MEF, que é mais trabalhoso e de difícil utilização no dia a dia do projetista. Todavia, a análise pelo MEF tende a ser mais fiel à realidade devido à possibilidade de retratar a estrutura como ela será de fato concebida, podendo-se modelar os elementos, ligações e restrições com menos simplificações do que na analogia de grelha.

Conforme foi visto, não há um consenso sobre qual o melhor tipo de elemento para modelar as nervuras. Elementos de barra foram empregados para modelar as nervuras junto com a largura colaborante da mesa ou para modelar apenas a nervura, enquanto que a mesa foi discretizada com elemento de placa. Também foram encontrados trabalhos que modelaram toda a laje com elementos de placa, inclusive as nervuras. Os maciços são quase sempre modelados com elemento de placa. Há, ainda, quem prefira modelar a estrutura toda com elementos sólidos a fim de representá-la mais fielmente. Discute-se, por fim, se a rigidez à torção das nervuras deve ser desprezada ou não.

## 2.4 Otimização Estrutural

O processo de otimização consiste no emprego de técnicas para seleção das melhores alternativas a fim de se obter o modo mais eficaz de alcançar um determinado objetivo. Também pode ser entendido como a forma de aprimorar um certo processo possibilitando que o seu funcionamento ocorra da maneira mais eficiente. Matematicamente, a otimização compreende uma série de operações que devem ser executadas para que sejam determinados os valores máximo ou mínimo de uma dada função.

No que concerne a Engenharia Civil, sobretudo no dimensionamento estrutural, a otimização busca aproveitar ao máximo cada material com o mínimo de consumo, tomando como base as suas propriedades e levando em consideração as características geométricas dos elementos. Nesse sentido, no concreto armado tem-se uma combinação ótima do concreto com o aço da mesma forma como as lajes nervuradas representam uma otimização da laje maciça.

Na prática, ao dimensionar uma estrutura, o projetista apoia-se, basicamente, em sua própria experiência para lançar os valores iniciais das variáveis do problema e, em seguida, analisa individualmente uma quantidade bastante limitada de modelos mudando apenas alguns parâmetros. Por fim, os resultados são submetidos às restrições da norma empregada e é selecionada a estrutura que for mais interessante do ponto de vista do critério eleito pelo projetista, que pode ser menor peso total ou menor custo. Esse método, dito convencional ou tradicional, tem apresentado resultados satisfatórios, mas pode levar a soluções que não estejam próximas da ótima.

Assim, diversos métodos de busca podem ser utilizados em processos de otimização. De acordo com Goldberg (1989), as técnicas podem ser divididas em três grupos principais. O primeiro compreende aquelas baseadas em cálculo diferencial, na resolução de um sistema de equações não lineares obtido ao igualar o gradiente da função objetivo a zero. O segundo trata dos métodos enumerativos, em que o algoritmo, dentro de um espaço finito de busca (ou um espaço infinito discretizado) observa os valores da função objetivo em cada ponto, um por vez. Por fim, tem-se os métodos aleatórios, que englobam os algoritmos genéticos. Esses foram desenvolvidos na década de 70, porém, à época, sua aplicação em problemas de engenharia foi limitada devido ao alto custo computacional exigido, dada a grande quantidade de variáveis envolvidas.

### 2.4.1 Métodos clássicos

Um dos primeiros trabalhos referentes à otimização de sistemas estruturais de concreto armado foi desenvolvido por Friel (1974). Ele investigou os valores ótimos da taxa de armadura longitudinal e da altura útil de uma viga biapoiada de concreto armado com seção transversal retangular. Para tal, adotou uma função de custo a ser minimizada composta por quatro parcelas representando os custos do concreto, do aço e das formas, além de uma quarta parcela que levava em conta o incremento do custo da construção devido ao ocasional aumento da sua altura. Extremizando-se a função custo usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, pode-se, então, definir a expressão para a taxa geométrica de armadura ótima sujeita às restrições impostas pela norma de cálculo por ele adotada como limite admissível para a capacidade resistente à flexão de vigas de concreto armado.

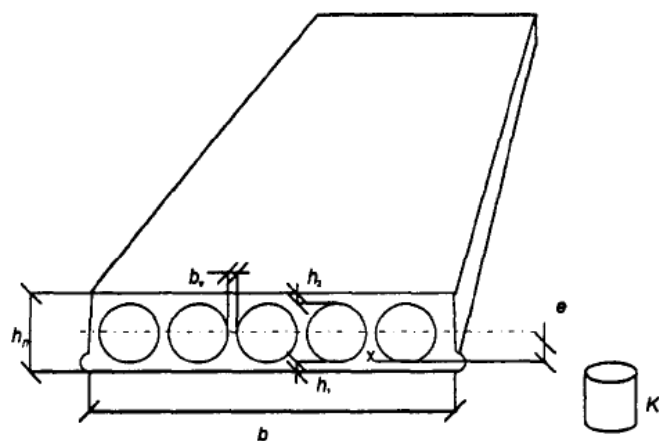
Complementando o trabalho de Friel (1974), Chou (1977) implementou técnicas de otimização em vigas de concreto armado com seção transversal em T, tendo em vista que as seções retangulares são um caso particular de seções T e que, geralmente, a viga é concretada monoliticamente com a laje. Analogamente ao estudo precedente, Chou (1977) utilizou o Método dos Multiplicadores de Lagrange para minimizar a função custo.

Nesse mesmo sentido, um programa de elementos finitos para análise de estruturas de concreto armado submetidas a cargas estáticas e dinâmicas foi concebido por Booz e Thlerauf (1984). Assim como os trabalhos anteriores, os autores buscaram a minimização da função custo, formulada a partir das parcelas do volume de concreto e de armadura longitudinal e da área das fôrmas. Foram apresentados exemplos do dimensionamento ótimo de um pórtico plano e de uma estrutura composta de vigas e lajes.

Estudo envolvendo a otimização de pilares submetidos à flexo-compressão normal e à flexo-compressão oblíqua foi desenvolvido por Zielinski *et al.* (1995). No primeiro caso abordado, foram consideradas como incógnitas as dimensões do pilar e a taxa de armadura; no segundo, além das dimensões do pilar e da taxa de armadura, o número de barras de aço também foi tratado como uma incógnita. Ademais, foram adotados dois conjuntos iterativos, um para encontrar a capacidade resistente da estrutura a partir de dimensões iniciais conhecidas, e outro para realizar a otimização sem as condições pré-fixadas. Compararam-se os resultados obtidos com aqueles determinados a partir dos métodos convencionais e ficou constatada a redução nas dimensões do pilar, na área de armadura longitudinal e no custo.

Balling e Yao (1997) investigaram se as dimensões ótimas das seções de concreto são insensíveis ao número, diâmetro e distribuição longitudinal das barras de aço. Para tanto, otimizaram-se vigas e pilares pelo “método multinível”, que simultaneamente otimiza o número, diâmetro e topologia da armadura junto com a base e a altura da seção, e segundo o “método tradicional”, que considera como variáveis de dimensionamento apenas a base e altura da seção e a área de armadura longitudinal. Foram analisados pórticos com um, dois e quatro andares. Verificou-se que as dimensões da seção (base e altura) são insensíveis ao diâmetro, número e posicionamento das barras. Além disso, ficou provado que o método multinível não produz um dimensionamento significativamente melhor que aquele do método tradicional, apesar do custo computacional mais elevado. Com base nisso, foi proposto um terceiro método, denominado simplificado, que se apoia na ideia de que a resistência controla o dimensionamento da armadura, enquanto que a rigidez, o peso e as limitações arquitetônicas interferem nas dimensões da seção de concreto. Esse método produz resultados bem mais rápidos que o método tradicional, porém igualmente satisfatórios.

Koskisto e Ellingwood (1997) buscaram a minimização de custos na produção de lajes alveolares protendidas (Figura 2.7). A função desenvolvida levava em consideração custos relativos ao planejamento e dimensionamento, produção e construção, além de associar um custo à probabilidade da laje atingir os estados limites último e de serviço. Foram analisadas lajes com vãos entre 6 m e 20 m, variando os parâmetros de dimensionamento e de custo. Ao elevar a probabilidade da estrutura atingir o estado limite último de 0,001% para 0,01%, constatou-se que não houve mudança significativa nos valores ótimos de espessura da laje, taxa de armadura, resistência do concreto e posicionamento da armadura ativa. Inferiu-se, então, que o processo de otimização não é governado pelo estado limite último. Por outro lado, com o aumento do vão e da sobrecarga, houve incremento da espessura da laje e da taxa de armadura ativa, como era esperado. Majorando a resistência do concreto, observou-se que as espessuras das lajes permaneceram as mesmas ou diminuíram em todos os painéis analisados, quando comparadas com aquelas dimensionadas com concreto de resistência inferior, enquanto que a taxa de armadura apresentou um leve aumento. Entretanto, o custo total ótimo foi quase sempre mais elevado. Portanto, os autores concluíram que o emprego de concreto de alta resistência não é o meio mais eficiente de se alcançar a otimização de lajes pré-moldadas.



$h_n$  = altura da laje  
 $b$  = largura da laje  
 $e$  = distância do cabo para o plano neutro  
 $b_w$  = largura entre vazios  
 $h_1$  = altura da camada inferior  
 $h_2$  = altura da camada superior  
 $K$  = resistência à compressão do concreto

Figura 2.7 – Esquema de laje alveolar protendida e variáveis de dimensionamento (KOSKISTO e ELLINGWODD, 1997, p. 300)

Grossi (1998) investigou o custo ótimo de vigas de concreto armado em função de variações no custo individual do concreto, do aço e das formas (Figura 2.8).

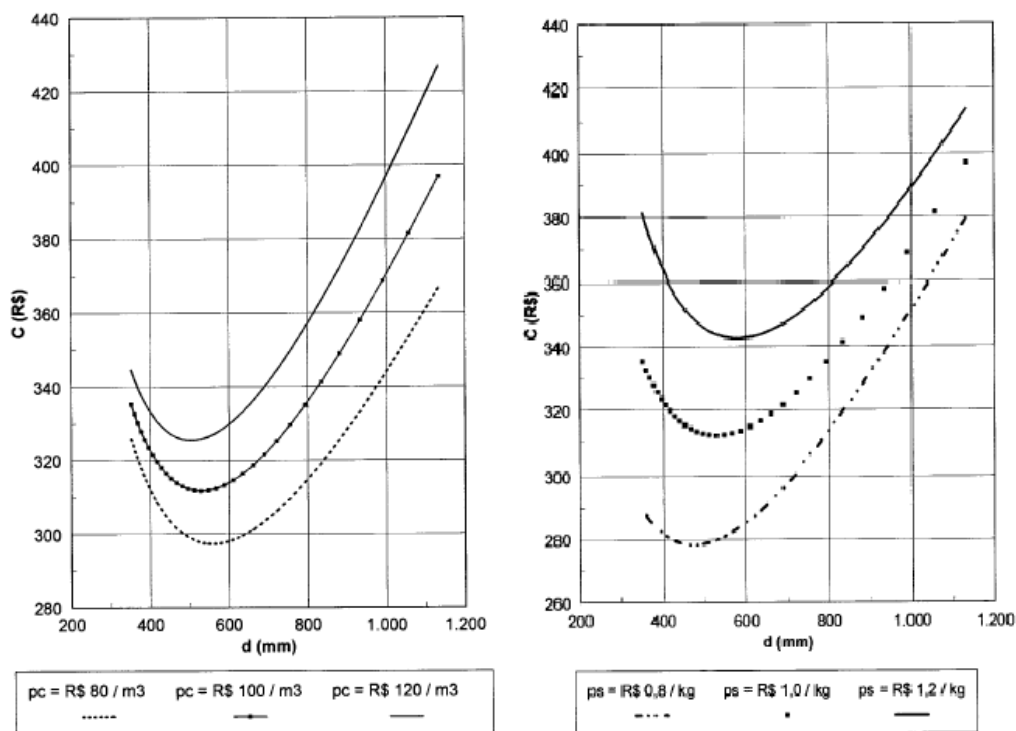


Figura 2.8 – Relação entre o custo total e a altura útil para diferentes preços do concreto (esquerda) e aço (direita) (GROSSI, 1998, pp. 98-99)

Foi observado que aumentos individuais nos preços do concreto e das formas conduzem à elevação do custo ótimo e redução da altura útil. Por outro lado, o aumento no preço do aço levou tanto ao acréscimo do custo ótimo quanto ao da altura útil. Portanto, para vigas com grande altura, o valor do custo ótimo será governado pelo preço do concreto, enquanto que para a situação contrária, vigas de altura pequena, o custo ótimo passa a ser mais influenciado pelo aço.

#### **2.4.2 Métodos aleatórios**

As técnicas estocásticas, embora de formulação menos complexa, requerem maior capacidade de processamento computacional. Portanto, foi apenas na última década do século XX que os algoritmos genéticos, ainda que de forma simples, passaram a ser empregados para otimização de sistemas estruturais. Um dos pioneiros nesse tipo de abordagem foi Jenkins (1991), que afirmou que os métodos, sejam determinísticos ou estocásticos, devem ser introduzidos para que seja evitado o risco de que a solução convirja para o que pode aparentemente ser um mínimo local. Além disso, observou-se que a melhor estrutura nem sempre é a mais barata e outros objetivos podem, às vezes, ser importantes e usados convenientemente em estudos de dimensionamento ótimo.

O método dos algoritmos genéticos, que se baseia na teoria da seleção natural das espécies e no cruzamento genético, é de implementação mais fácil que os métodos clássicos (determinísticos) por não haver necessidade de cálculos matemáticos complexos e poder ser aplicado a problemas contendo funções não diferenciáveis e múltiplos objetivos (ALEXANDRE, 2014). Consequentemente, não se precisa recorrer à simplificação matemática e podem ser resolvidos problemas com variáveis tanto contínuas quanto discretas.

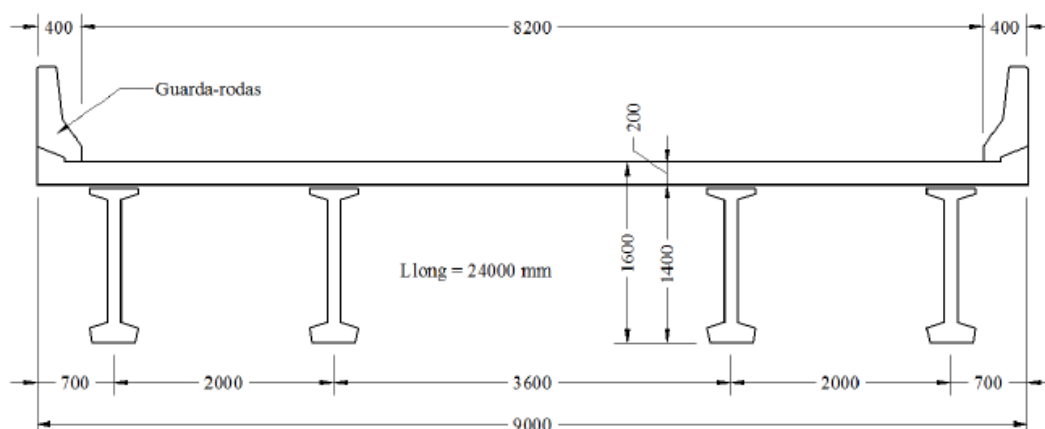
Em seu estudo sobre a aplicação de algoritmos genéticos a estruturas, Jenkins (1991) analisou uma viga treliçada metálica com o objetivo de encontrar a configuração geométrica e as seções das barras que conduzissem ao menor peso total da estrutura, avaliando, inclusive, a influência de parâmetros genéticos, como população inicial e número de gerações, na convergência da solução final.

Seguindo essa mesma linha, Rajeev e Krishnamoorthy (1992) demonstraram a eficiência do algoritmo genético através de um exemplo com uma treliça de três barras, cujo objetivo era minimizar o peso total da estrutura. Depois, a aplicação foi expandida para treliças com 10 e 25 barras e uma torre de transmissão com 160 elementos. Foi

discutida, ainda, a importância de parâmetros do algoritmo genético na convergência da solução ótima. Concluíram que o número de gerações necessário para a convergência diminui com o aumento da população, contudo, o resultado sempre foi convergente. Foram feitas comparações com estudos precedentes que se valeram de outros métodos de otimização e foi constatado que o algoritmo genético forneceu resultados melhores.

Bastos (2004) desenvolveu um programa para dimensionamento ótimo de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua empregando o método dos algoritmos genéticos para minimizar a função custo, levando em consideração as dimensões da seção, a taxa de armadura e a disposição e bitola das barras. Ele reproduziu em seu programa exemplos de seções encontradas na literatura que haviam sido calculadas através de outros métodos e constatou a robustez e a eficiência do algoritmo genético. Além do mais, em todos os casos analisados, houve redução no custo final da seção.

Cortês (2010) investigou a minimização do custo dos elementos da superestrutura de pontes em concreto armado e protendido (Figura 2.9), a partir dos parâmetros iniciais geométricos de largura do tabuleiro e vão entre pilares e do carregamento. O sistema estrutural estudado era constituído de longarinas biapoiadas, com seção transversal em formato de I, solidarizadas com o tabuleiro de rolamento constituído de painéis maciços em concreto armado. O processo de otimização implicou em determinar as armaduras de flexão ativa e passiva, diâmetro e espaçamento dos estribos das longarinas e o diâmetro e o espaçamento da armadura principal do tabuleiro.

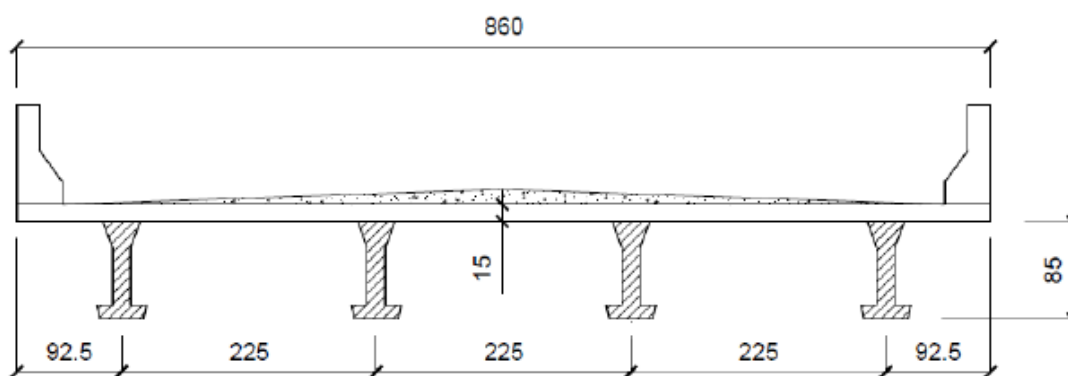


**Figura 2.9 – Seção transversal de ponte estudada por Cortês (2010, p. 145) e Carvalho (2014, p. 95) – Solução executada, não otimizada (dimensões em milímetros)**

Foram realizadas análises com três projetos de pontes já executados a fim de verificar a eficiência do programa desenvolvido. De modo geral, as soluções apresentadas pelo algoritmo foram melhores que as empregadas na construção das pontes. Os resultados confirmaram a preponderância do momento fletor na determinação da solução ótima, porém, demonstraram que outras condições de contorno também têm sua parcela de influência, como a redução no número de longarinas. Além disso, ele observou que as melhores soluções tendem a possuir maior braço de alavanca, o que implica em resistência superior da seção à flexão, conduzindo à redução do número de longarinas e ao menor consumo de concreto. Outro ponto de destaque é a preferência por maiores diâmetros das cordoalhas de protensão e concretos de menor classe de resistência, associada ao menor custo unitário.

A otimização de seções caixão foi apresentada no trabalho de Carvalho (2014). O autor desenvolveu um programa em algoritmos genéticos a fim de encontrar a solução mais econômica que atendesse às restrições impostas. A função custo foi minimizada levando em consideração a relação entre altura da seção, largura das almas, espessura do tabuleiro e suas respectivas taxas de armadura.

O autor fez três aplicações do programa. A primeira (Figura 2.10) consistia em calibrar os parâmetros do algoritmo genético através da comparação com os resultados obtidos pelo próprio programa ao variar os parâmetros e com aqueles encontrados por Olivieri (2004) em um estudo prévio. Foi obtida uma redução de mais de 30% no custo total ao aumentar a largura do balanço da seção estudada de 0,925 m para 1,75 m.



**Figura 2.10 – Seção transversal analisada por Carvalho (2014, p. 88) – Aplicação 1 (dimensões em centímetros)**

A segunda aplicação foi baseada no trabalho de Cortês (2010). Assim como no caso anterior, obteve-se uma economia de 46% do custo total ao alongar o balanço de

0,70 m para 2 m. Nota-se, portanto, a forte influência do comprimento do balanço. Ao fim das duas aplicações, o autor concluiu que a variação do custo total não ocorreu de forma linear mesmo que a variação dos insumos tenha seguido esse padrão (Figura 2.11). Além disso, a maior variação no custo total decorreu da alteração do preço do aço passivo, seguida do concreto e do aço ativo.

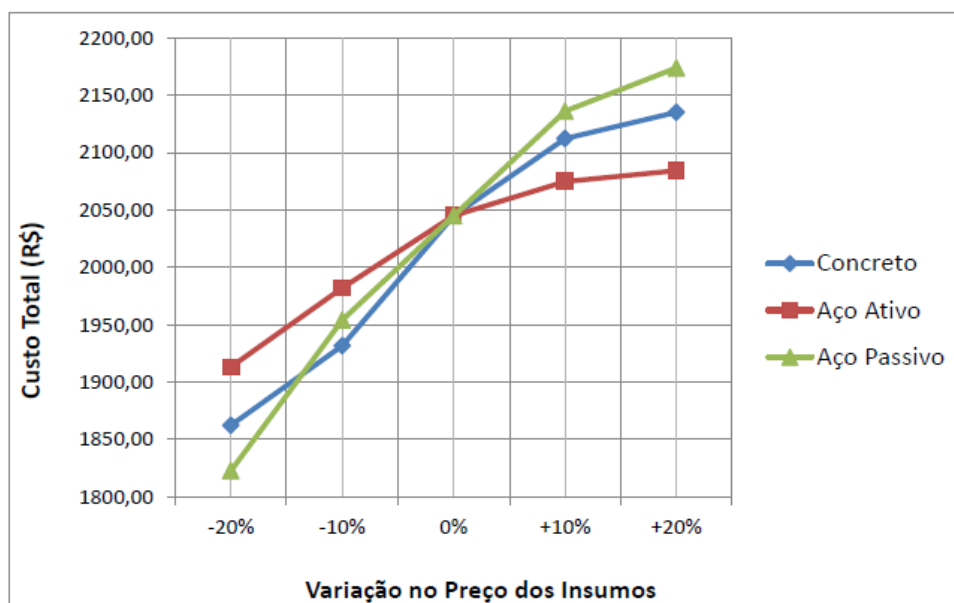


Figura 2.11 – Variação do custo total em função do preço dos insumos – Aplicação 1 (CARVALHO, 2014, p. 94)

A terceira aplicação referiu-se à comparação com uma seção caixão executada em um viaduto. Procedeu-se de forma análoga às situações anteriores, apesar de ter sido mantido fixo o comprimento do balanço original. O autor tirou as mesmas conclusões dos dois primeiros casos, contudo, ressaltou que o aço ativo passou a representar uma parcela no custo final maior que a do concreto (32% e 28%, respectivamente), ainda que o primeiro lugar continuasse pertencendo à armadura passiva (40%).

### 2.4.3 Otimização de lajes lisas maciças

Sahab *et al.* (2005) conduziram um estudo sobre a otimização do custo da construção de um edifício constituído por lajes lisas de concreto armado (Figura 2.12). A função objetivo compreendia o custo total do edifício, incluindo o custo com material e mão de obra para produção do concreto, armaduras e fôrmas destinados à execução das lajes, pilares e fundações.

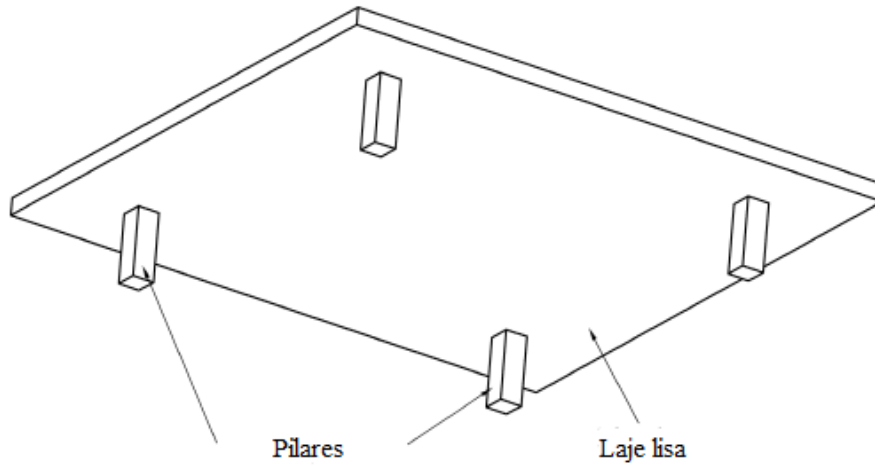


Figura 2.12 – Sistema de laje lisa (SAHAB *et al.*, 2005, p. 313)

A análise das lajes foi feita de acordo com o método dos pórticos equivalentes. Nesse tipo de análise, o painel retangular de laje apoiado em pilares dispostos em linhas retas e perpendiculares é dividido em uma série de faixas longitudinais e transversais (Figura 2.13). Em cada direção, executa-se a análise estrutural das faixas equivalentes de borda e intermediárias a fim de se obter os momentos fletores e esforços cortantes totais em diferentes seções da laje.

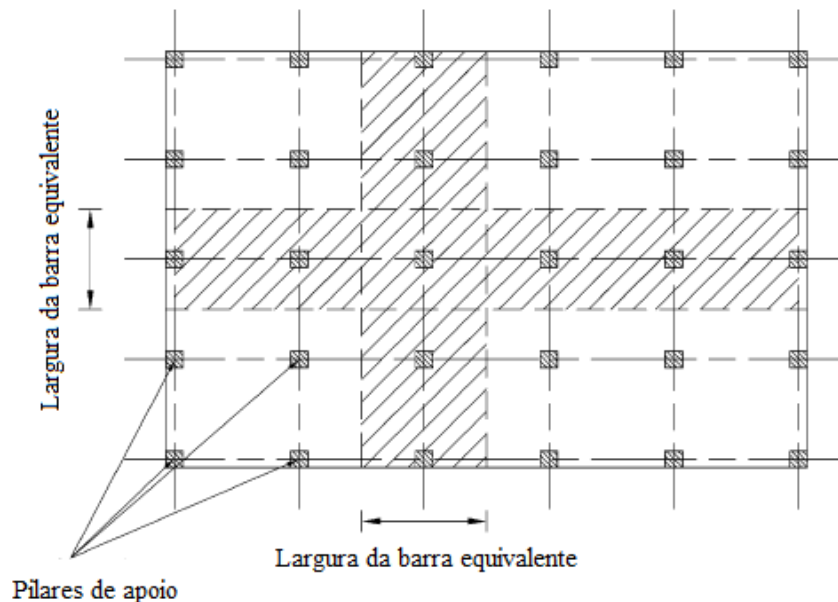


Figura 2.13 – Planta dos pórticos equivalentes intermediários (SAHAB *et al.*, 2005, p. 314)

Como o momento fletor ao longo da largura das faixas da laje (vigas equivalentes) em pórticos equivalentes é variável, então, a largura das vigas equivalentes é dividida em duas faixas, denominadas faixas de pilares e faixas intermediárias (Figura 2.14). O momento fletor médio em cada faixa é obtido como um percentual do momento fletor total em cada seção das vigas equivalentes. A armadura necessária em cada seção da laje é determinada de acordo com o momento fletor solicitante calculado em cada seção das faixas de pilares e intermediárias.

Constituíram as variáveis de dimensionamento o número de pavimentos e sua altura, a quantidade de vãos e os respectivos espaçamentos em ambas as direções, a espessura da laje e as armaduras de flexão. Os autores também incluíram a armadura de cortante na região dos pilares, para combater o puncionamento.

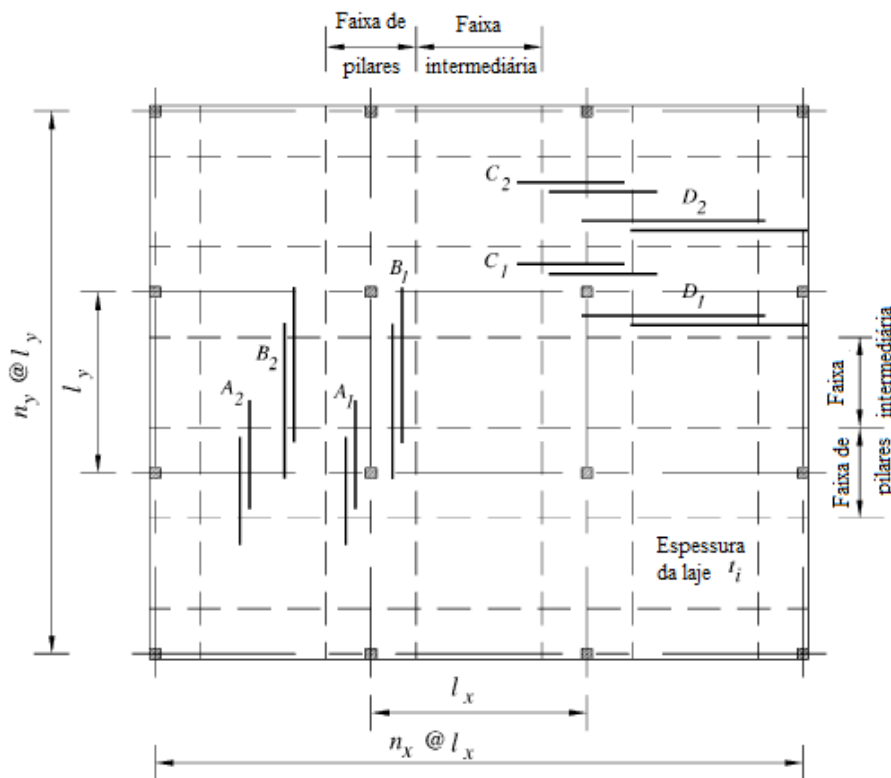


Figura 2.14 – Variáveis de dimensionamento (SAHAB *et al.*, 2005, p. 314)

No que tange as variáveis de dimensionamento dos pilares, foi adotado, por simplificação, que todos tinham seção retangular com dimensões submetidas à otimização. Além disso, foi admitido que a armadura longitudinal estava disposta nos quatro cantos dos pilares e que as barras de aço possuíam mesmo diâmetro. Foi suposto que o carregamento lateral era suportado por uma estrutura específica, não havendo,

portanto, variação significativa do esforço cortante ao longo da altura dos pilares, podendo-se definir o diâmetro e o espaçamento dos estribos apenas em função da bitola da armadura longitudinal.

O processo de otimização foi conduzido em três níveis. No primeiro nível, vários arranjos práticos de pilares para um edifício com determinado número de pavimentos e dimensões conhecidas do painel de laje retangular foram comparados uns com os outros a fim de encontrar o número ótimo de vãos nas duas direções. Para cada arranjo de pilares, o programa criava um modelo para análise estrutural considerando o método dos pórticos equivalentes, e fazia-se a otimização do dimensionamento da estrutura para o arranjo de pilares definido. O arranjo ótimo de pilares era aquele que, dentre todos os resultados obtidos a partir dos diferentes arranjos, levava ao menor custo total.

Para comprovar a validade do método desenvolvido, os autores analisaram alguns exemplos de edificações. No primeiro caso, foi estudado um edifício de um pavimento com quatro vãos de 5 m numa direção e três vãos de 6 m na outra. Foram fixados os carregamentos, resistências do concreto e do aço, valores dos cobrimentos, diâmetros das barras de aço disponíveis, e custo unitário do concreto, aço e fôrmas, incluindo a mão de obra.

Observou-se que, para a espessura ótima de 220 mm, a área de aço necessária entre dois vãos intermediários era governada pelo limite de deformação, ou seja, a quantidade de armadura nesses vãos aumentou quando comparada com a exigida para resistir à flexão. Assim, inferiu-se que elevar a taxa de armadura no meio de alguns vãos foi mais econômico que aumentar a espessura da laje inteira para atender aos requisitos de deslocamento vertical.

A espessura ótima foi 30 mm menor que a obtida pelo método convencional, logo, para evitar ruptura devido ao puncionamento no dimensionamento ótimo, os pilares de bordo requereram dimensões maiores que aquelas do dimensionamento convencional. Conseqüentemente, o custo total dos pilares foi 3,3% maior. Todavia, houve redução no custo total da estrutura de 2,8% usando a técnica de otimização, comprovando que o custo das lajes constitui a parte mais significativa no valor total da construção.

O segundo exemplo foi um edifício de quatro pavimentos com dimensões de laje e arranjo de pilares semelhantes aos do caso anterior. Foram analisadas duas condições, a primeira considerou que a espessura da laje e as dimensões dos pilares podiam variar de um piso para outro; na segunda situação, assumiu-se que esses parâmetros podiam variar a cada dois pavimentos.

Comparando os resultados, os autores perceberam que as dimensões ótimas dos elementos estruturais no caso de pavimentos agrupados eram iguais ou superiores aos do caso dos pavimentos desagrupados. Além disso, a redução de custos obtida através do dimensionamento ótimo no edifício de quatro pavimentos foi proporcionalmente superior àquela do edifício de um andar, ou seja, quanto mais elementos estruturais, maior a economia.

A terceira situação foi a de uma edificação comercial de três pavimentos idênticos com altura de 3,97 m cada um, com dimensões iguais a 37,5 m. O dimensionamento convencional desse edifício havia sido apresentado em um estudo anterior. Na primeira etapa, fixou-se o comprimento entre vãos em 7,5 m nas duas direções, perfazendo, portanto, cinco vãos. Confrontando os resultados dos dois métodos, notou-se uma economia de 23,3% quando adotado o dimensionamento ótimo. Observou-se também que o custo com lajes e pilares representavam, respectivamente, 89% e 11% do custo total para o dimensionamento convencional e 91% e 9% do custo total para o dimensionamento ótimo. Evidencia-se, portanto, que o custo das lajes corresponde a uma parcela substancial do valor da estrutura, enfatizando a importância da otimização dos painéis.

Ademais, em outro estudo para esse mesmo edifício, os autores investigaram as dimensões ótimas dos elementos estruturais, bem como o tamanho ótimo dos vãos entre pilares. Encontrou-se que o menor custo era alcançado para sete vãos de 5,357 m em ambas as direções. Comparado com o caso precedente, cujos vãos eram de 7,5 m, o dimensionamento com o arranjo ótimo de pilares apresentou uma economia de 36% e 13% para o dimensionamento convencional e ótimo, respectivamente.

#### **2.4.4 Otimização de lajes nervuradas**

Prasad *et al.* (2005) investigaram as dimensões ótimas de lajes nervuradas para pavimentos de tamanho médio (6 m a 12 m). O processo consistiu em determinar a altura, largura e espaçamento das nervuras que conduzisse à melhor distribuição do carregamento sem haver necessidade de armadura de cisalhamento.

Para tanto, foram analisados painéis de lajes quadrados de dimensões 6 m, 7 m e 8 m. A espessura da mesa foi tomada igual a 65 mm para todos os casos e as nervuras consideradas retangulares de largura 100 mm. A altura das nervuras foi variada de 130 mm a 260 mm, com incrementos de 10 mm ou 20 mm, enquanto que o espaçamento entre elas foi definido em função do número de nervuras em cada painel, adotando-se,

inicialmente, o valor de cinco e dando-se incrementos de duas nervuras até que todos os parâmetros estruturais fossem atendidos. Além disso, foram consideradas vigas de bordo de largura 1000 mm e altura igual a espessura total da laje. A Tabela 2.1 contém o resumo da geometria das lajes estudadas.

**Tabela 2.1 – Dimensões dos elementos estruturais (PRASAD *et al.*, 2005)**

Laje	Dimensões (m)	Número de nervuras	Espaçamento entre nervuras (a) (mm)	Largura efetiva ( $b_f$ ) (mm)	Altura da nervura ( $h_n$ ) (mm)
	$L_x = L_y$	$N_x = N_y$			
1	6	5	850	850	130, 140, 150, 160
2	6	7	638	638	130, 140, 150, 160
3	6	9	510	510	130, 140, 150, 160
4	7	5	1017	880	160, 180, 200, 220
5	7	7	763	763	160, 180, 200, 220
6	7	9	610	610	160, 180, 200, 220
7	8	5	1183	880	200, 220, 240, 260
8	8	7	888	880	200, 220, 240, 260
9	8	9	710	710	200, 220, 240, 260

Como carregamento, foram considerados o peso próprio da laje ( $25 \text{ kN/m}^3$ ) incluindo o revestimento ( $1,5 \text{ kN/m}^2$ ), além da sobrecarga de utilização ( $3 \text{ kN/m}^2$  e  $5 \text{ kN/m}^2$ ). Não foi levada em conta a influência de carregamentos laterais decorrentes de vento e sismo. Foram adotados aço com tensão de início de escoamento igual a 415 MPa e concreto com resistência à compressão de 20 MPa (painéis de 6 m e 7 m) e 40 MPa (vão de 8 m).

As lajes foram analisadas como uma grelha formada por vigas de seção T utilizando uma ferramenta computacional que fornece momentos fletores e torsores e esforço cortante nos elementos, e deslocamentos e rotações dos nós. Para a verificação, adotaram-se as recomendações das normas indiana e americana.

A análise para determinação dos tipos de lajes ótimos baseou-se na flecha máxima e no seu valor permitido pela norma, na porcentagem de carregamento total devido ao peso próprio, nos momentos fletores máximos (positivo e negativo) e no esforço cortante máximo. Os autores concluíram que para lajes de 6 m x 6 m, é mais vantajoso, do ponto de vista do peso próprio, aumentar a altura das nervuras do que a sua quantidade. Por outro lado, o aumento do número de nervuras conduz a uma redução do momento fletor por nervura e, conseqüentemente, a quantidade de aço por nervura. Contudo, essa medida

acarreta maior peso próprio, o que poderia levar a um consumo total de aço maior quando considerada toda a estrutura.

Comparando os painéis de 6 m x 6 m com os de 7 m x 7 m, os autores observaram que a altura das nervuras teve que ser substancialmente aumentada, inferindo que o tamanho do vão é um fator bastante relevante em comparação com os outros. Nesse caso, os autores concluíram que adotar uma camada dupla de armadura em nove nervuras com 180 mm de altura é mais eficiente que a adoção de sete nervuras de altura 200 mm, justificando que a camada dupla é preferível devido à ductilidade.

Analisando os painéis de 8 m x 8 m, os autores perceberam que tanto cinco quanto sete nervuras seriam insuficientes para atender às capacidades resistentes à flexão e ao cortante necessárias. Portanto, foi sugerido que o sistema mais adequado seria o de nove nervuras com 240 mm de altura e camada dupla de armadura.

Após a análise detalhada de cada tipologia de laje, os autores chegaram às seguintes conclusões:

- para o painel de 6 m x 6 m, a adoção de cinco nervuras de 140 mm de altura é a mais eficiente para uma sobrecarga de 3 kN/m<sup>2</sup>, enquanto que, para uma sobrecarga de 5 kN/m<sup>2</sup>, seria mais viável nove nervuras de altura 150 mm ou sete nervuras com altura de 160 mm;

- para o painel de 7 m x 7 m e sobrecarga de 3 kN/m<sup>2</sup>, o sistema mais eficiente é constituído por nove nervuras de 180 mm de altura, porém, para sobrecarga de 5 kN/m<sup>2</sup>, torna-se mais vantajosa a escolha de nove nervuras com 200 mm de altura;

- para o painel de 8 m x 8 m, a solução mais adequada seria a de nove nervuras de 240 mm de altura para sobrecarga de 3 kN/m<sup>2</sup>, e, para sobrecarga de 5 kN/m<sup>2</sup>, seria melhor empregar concreto com resistência à compressão de 40 MPa e nove nervuras de 220 mm de altura.

A Tabela 2.2 apresenta, de maneira resumida, as configurações mais vantajosas – altura total da laje, espaçamento entre nervuras e altura das nervuras – expostas anteriormente para cada comprimento de vão. O resultado para a laje de 8 m e sobrecarga de 5 kN/m<sup>2</sup> foi omitido por ter sido empregado nela um concreto de resistência à compressão superior ao das outras. Ademais, são mostradas as relações entre comprimento do vão e altura total da laje e espaçamento entre nervuras. A média aritmética da razão  $L/h$  para os cinco tipos de lajes contidos na Tabela 2.2 é igual a 27,7 e, para a razão  $L/a$ , essa mesma média vale 10,6.

**Tabela 2.2 – Resumo dos painéis mais vantajosos e relações entre comprimento do vão (L) e altura total da laje (h) e espaçamento entre nervuras (a)**

Comprimento do vão (L) (mm)	Sobrecarga (kN/m <sup>2</sup> )	Altura total da laje (h) (mm)	Número de nervuras (N <sub>x</sub> )	Espaçamento entre nervuras (a) (mm)	Altura da nervura (h <sub>n</sub> ) (mm)	L/h	L/a
6000	3	205	5	850	140	29,27	7,06
6000	5	215	9	510	150	27,91	11,76
7000	3	245	9	610	180	28,57	11,48
7000	5	265	9	610	200	26,42	11,48
8000	3	305	9	710	240	26,23	11,27

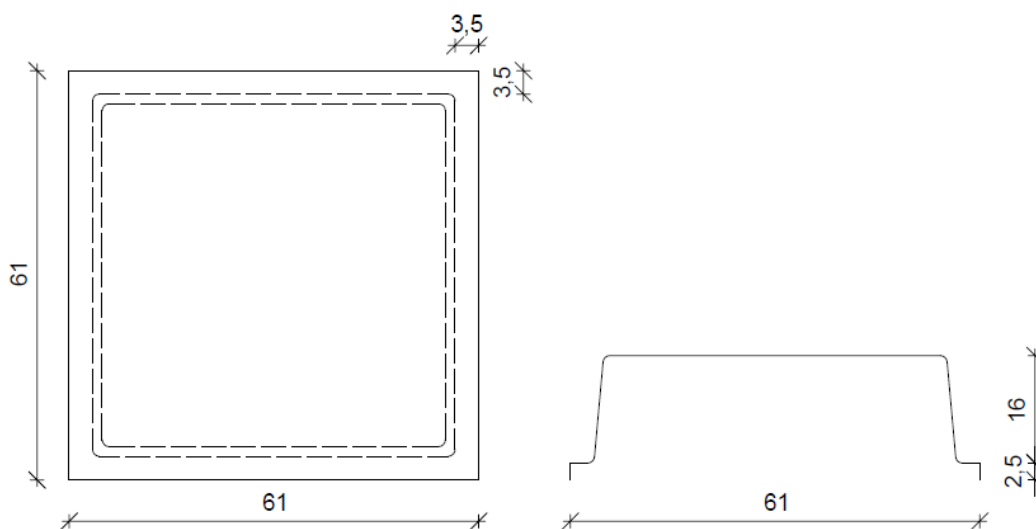
### 3 MODELAGEM NUMÉRICA

#### 3.1 Definição dos painéis de laje

Optou-se por vãos de comprimento iguais a 6 m, 7 m e 8 m por serem os tamanhos normalmente adotados para esse tipo de laje.

Uma grande preocupação deste estudo é possibilidade de aplicação prática dos resultados obtidos. Torna-se, então, fundamental que as fôrmas reaproveitáveis estejam disponíveis comercialmente, cujas dimensões de largura e altura variam de acordo com o fabricante. Nesse sentido, usou-se como referência os modelos de moldes plásticos reaproveitáveis apresentados no catálogo da ATEX (2015), empresa fornecedora das fôrmas e de atuação nacional.

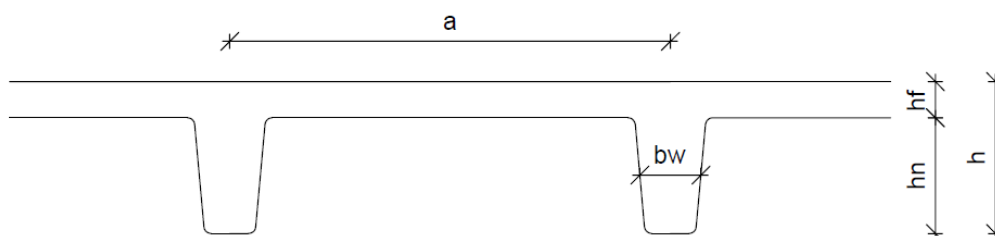
Foram adotados modelos do tipo ATEX 610, cujas fôrmas possuem base quadrada de lado igual a 61 cm e altura variável entre 16 cm e 30 cm. Também são oferecidas as meias fôrmas, moldes retangulares de comprimento 61 cm e largura 30,5 cm, destinado a locais onde não couber uma fôrma inteira. A Figura 3.1 apresenta um esquema em planta e em corte para esse tipo de molde.



**Figura 3.1 – Esquema em planta e em corte de molde reaproveitável com 16 cm de altura (dimensões em centímetros)**

O agrupamento consecutivo de tais moldes em ambas as direções ortogonais permite que seja criado o arranjo característico das lajes nervuradas bidirecionais,

conforme mostrado na Figura 3.2. Deve-se destacar que a largura da nervura é variável ao longo de sua altura, sendo mais larga na parte superior que na parte inferior. De maneira prática, adota-se no dimensionamento uma largura constante igual ao valor médio entre as duas larguras.



**Figura 3.2 – Esquema de laje nervurada com moldes reaproveitáveis**

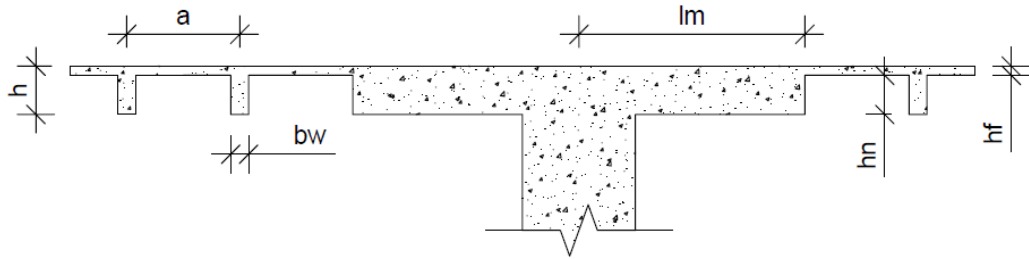
Tendo em vista a impossibilidade de se conseguir montar painéis com 6 m, 7 m e 8 m precisamente devido às dimensões dos moldes serem de 61 cm, foram adotados novos valores de vão iguais a 6,1 m, 7,32 m e 8,54 m, o que corresponde, respectivamente, a 10, 12 e 14 moldes.

Tomando como base as conclusões extraídas do trabalho de Prasad *et al.* (2005), selecionou-se a altura das lajes para cada painel de maneira que a relação  $L/h$  ficasse próxima de 28. Optou-se por manter constante a altura da mesa em 5 cm para todos os painéis. Assim, a laje com vão de 6,1 m tem altura 21 cm, sendo 16 cm correspondentes à altura da nervura e 5 cm relativos à altura da mesa. De maneira análoga, a laje com vão 7,32 m possui altura total de 26 cm (21 cm da nervura e 5 cm da mesa) e a laje de 8,54 m tem altura 31 cm (26 cm da nervura e 5 cm da mesa). Essas informações estão detalhadas na Tabela 3.1, que apresenta ainda as espessuras das nervuras e a relação  $L/h$ , além do peso próprio para cada tipo de laje.

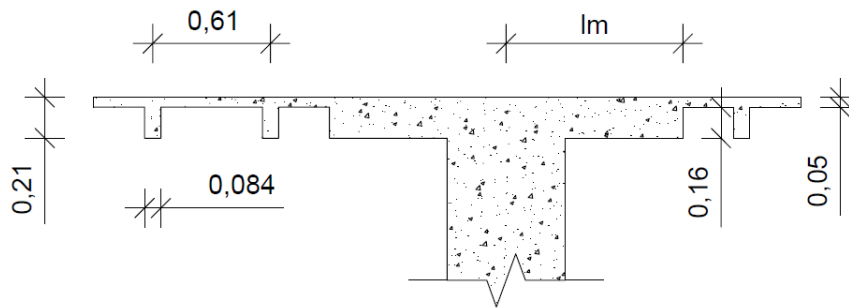
**Tabela 3.1 – Resumo das características das lajes**

Vão (L) (m)	Altura da nervura (hn) (cm)	Altura da mesa (hf) (cm)	Altura total (h) (cm)	L/h	Espessura da nervura (cm)			Peso próprio (kN/m <sup>2</sup> )
					Inferior	Superior	Média (bw)	
6,1	16	5	21	29,0	7	9,9	8,4	2,28
7,32	21	5	26	28,2	7	12,2	9,6	2,78
8,54	26	5	31	27,5	7	14,8	10,9	3,38

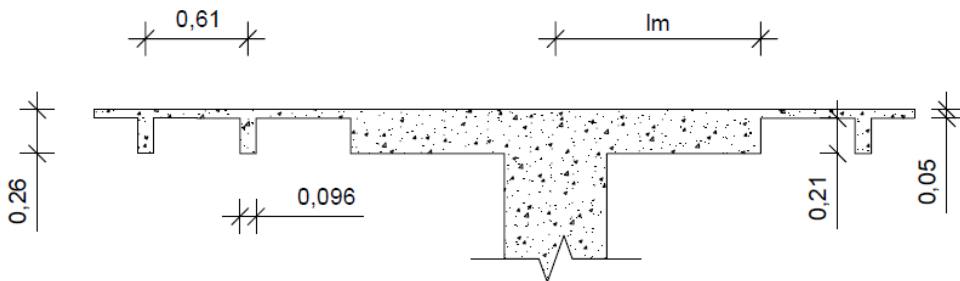
A Figura 3.3 apresenta graficamente a simbologia das características geométricas adotadas ao longo deste trabalho. As Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 contêm as dimensões que estão resumidas na Tabela 3.1 para as lajes de vãos 6,1 m, 7,32 m e 8,54 m, respectivamente.



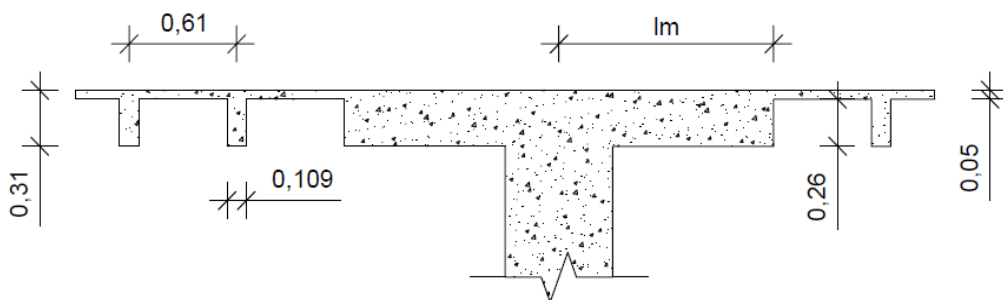
**Figura 3.3 – Simbologia das características geométricas da laje**



**Figura 3.4 – Características geométricas da laje com vão de 6,1 m (dimensões em metros)**

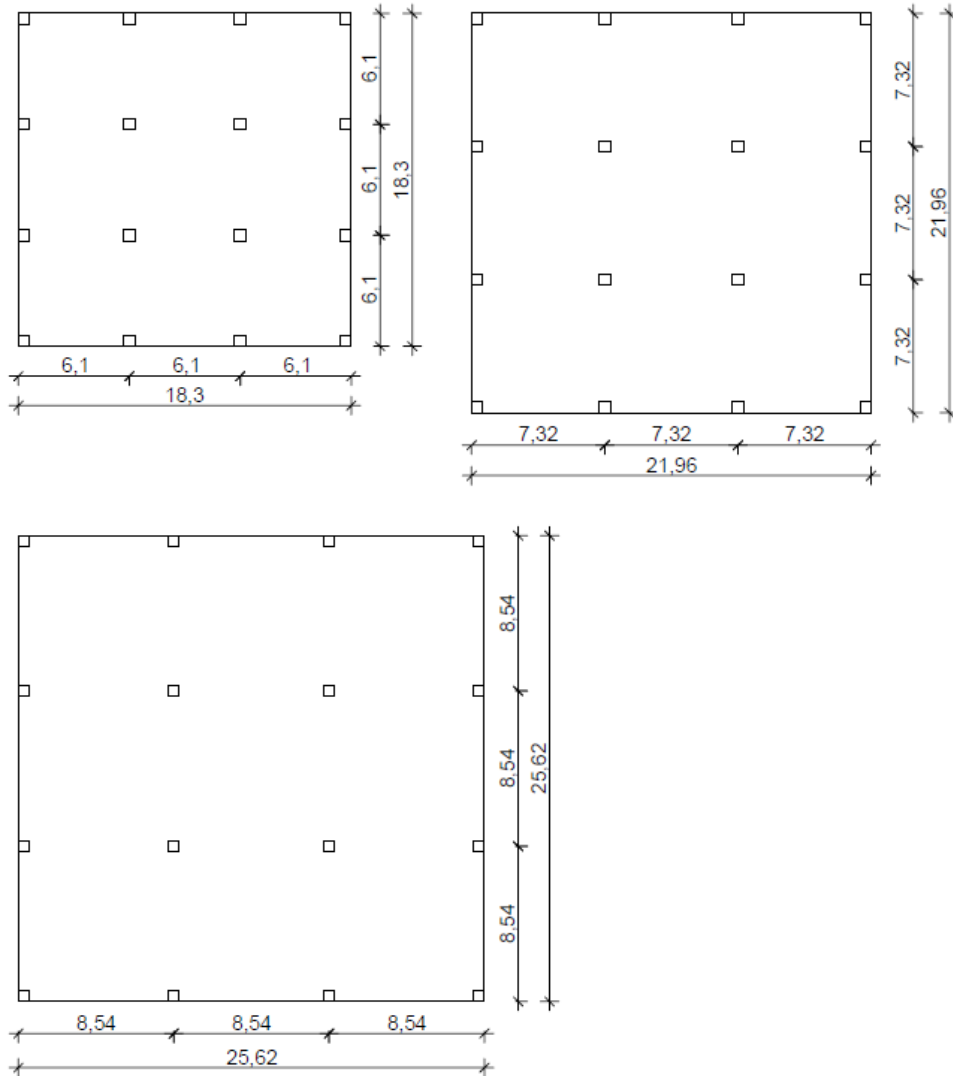


**Figura 3.5 – Características geométricas da laje com vão de 7,32 m (dimensões em metros)**



**Figura 3.6 – Características geométricas da laje com vão de 8,54 m (dimensões em metros)**

Para a análise das lajes através do Métodos dos Elementos Finitos (MEF), foram definidos painéis quadrados com três vãos em cada direção, sendo o tamanho do vão compreendido como a distância entre linhas de pilares consecutivas (Figura 3.7).



**Figura 3.7 – Painéis de laje estudados (dimensões em metros)**

### **3.2 Definição dos Apoios**

As dimensões dos pilares foram determinadas tomando como referência um edifício residencial de dez pavimentos. Foram considerados os pilares do primeiro pavimento, que suportam o peso de toda a estrutura acima.

Admitiu-se como ação permanente o peso próprio do concreto das lajes, conforme consta na Tabela 3.1, além do peso próprio do revestimento igual a 1,5 kN/m<sup>2</sup>. Foi adotada uma ação variável no valor de 3 kN/m<sup>2</sup>, semelhante à usada no estudo de Prasad *et al.* (2005). Foi empregada a combinação normal de ações para o estado-limite último, conforme o item 11.7 da NBR 6118:2014 e apresentado na Eq. ( 3.1 ).

$$F_d = 1,4g + 1,4q \quad (3.1)$$

Optou-se por usar um concreto de classe de resistência C35, o que corresponde à resistência à compressão característica do concreto aos 28 dias ( $f_{ck}$ ) igual a 35 MPa. A determinação da resistência de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ) é descrita no item 12.3 da NBR 6118:2014, obtida com a Eq. ( 3.2 ).

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.2)$$

Para a combinação normal no estado-limite último, o coeficiente de ponderação  $\gamma_c$  assume o valor 1,4, tendo-se, portanto, a resistência de cálculo  $f_{cd}$  igual a 25 MPa.

O módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs}$ ) pode ser estimado pelo procedimento descrito no item 8.2.8 da NBR 6118:2014. Considerando o uso de granito como agregado graúdo e concretos com  $f_{ck}$  entre 20 MPa e 50 MPa, o valor é dado pela Eq. ( 3.3 ).

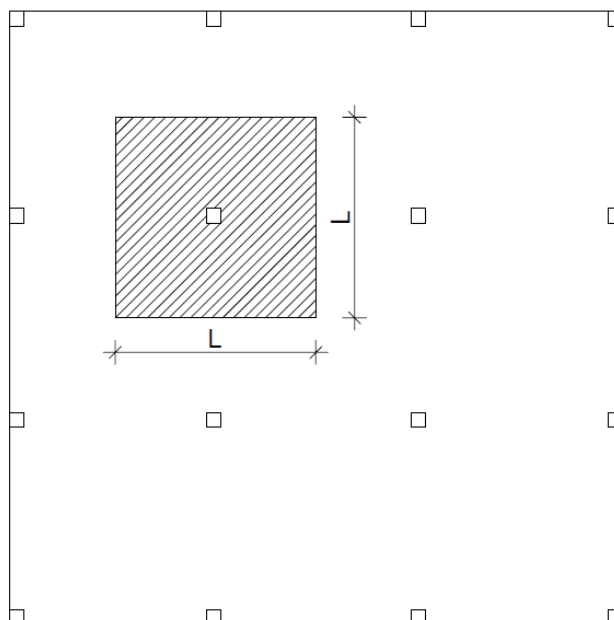
$$E_{cs} = \left(0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80}\right) 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.3)$$

Portanto, para o concreto adotado neste trabalho, o módulo de elasticidade secante é 29485 MPa, que pode ser aproximado para 29 GPa. A Tabela 3.2 resume as propriedades do concreto citadas anteriormente.

**Tabela 3.2 – Resumo das propriedades do concreto**

Classe de Resistência	$f_{ck}$ (MPa)	$f_{cd}$ (MPa)	$E_{cs}$ (GPa)
C35	35	25	29

Para determinar a área de influência de cada pilar, foi considerada a metade da distância entre dois pilares adjacentes, logo, duas vezes a metade do vão em cada direção. Como resultado, tem-se um quadrado de lado L (Figura 3.8).



**Figura 3.8 – Área de influência do pilar**

Para simplificar, optou-se por dimensionar pilares de seção quadrada, cuja área para um pilar foi calculada pela Eq. ( 3.4 ). Deve-se destacar que a ação de cálculo  $F_d$  contida na Eq.( 3.4 ) refere-se ao carregamento de dez pavimentos.

$$A_p = \frac{2F_d L^2}{f_{cd}} \quad ( 3.4 )$$

A Tabela 3.3 contém as áreas dos pilares e as dimensões da seção transversal de cada um para os três vãos selecionados. Embora os pilares externos estejam submetidos a um carregamento menor que os internos, eles foram considerados com as mesmas dimensões.

Visando facilitar a modelagem numérica, preferiu-se adotar em todos os casos pilares quadrados com dimensões iguais às da fôrma plástica, portanto, com lado 61 cm, tendo em vista que os valores calculados não se distanciaram significativamente dessa grandeza, exceto para o maior vão. Tal medida foi possível porque no cálculo levou-se em conta apenas o concreto, tendo sido desprezada a contribuição da armadura, logo, é

razoável afirmar que um pilar quadrado de lado 61 cm resistiria bem às solicitações impostas. Além disso, poderia ser empregado nos pilares um concreto de classe de resistência superior, sem que isso acarretasse interferência na análise dos painéis de laje.

**Tabela 3.3 – Área e dimensões calculadas dos pilares para cada comprimento de vão**

Comprimento do vão (L) (m)	6,1	7,32	8,54
Área do pilar ( $A_p$ ) (cm <sup>2</sup> )	2825	4368	6436
Dimensão do pilar (cm)	54 x 54	67 x 67	81 x 81

### 3.3 Modelagem com Elementos de Casca

Os painéis de laje estudados foram analisados através do MEF com o auxílio do programa SAP2000 versão 14.2.0. Inicialmente, foi feita uma modelagem usando apenas elementos de placa para discretizar a laje. Em seguida, os painéis foram modelados inteiramente com elementos sólidos.

O SAP2000 disponibiliza em sua biblioteca um elemento bidimensional denominado *shell*, que é utilizado para modelar o comportamento de membrana, placa e casca em estruturas planas e em três dimensões. A formulação combina o comportamento de membrana e de flexão de placas. A rigidez do elemento é determinada usando uma integração numérica com quatro pontos. As tensões, esforços internos e momentos são calculados no sistema de coordenadas local do elemento a partir da integração de Gauss com dois pontos e extrapolados para os nós do elemento. Cada nó possui seis graus de liberdade, sendo três translações e três rotações.

A Figura 3.9 apresenta um elemento quadrilátero do tipo *shell* mostrando seus eixos locais, nós e faces. A Figura 3.10 e a Figura 3.11 exibem, respectivamente, os esforços e tensões e os momentos fletores e torsões para esse mesmo elemento bidimensional.

Antes de ser modelada no SAP2000, a estrutura foi primeiramente introduzida no programa AutoCAD 2015, já que o software de desenho possui interface e ferramentas de edição que tornam o trabalho mais simples e ágil do que se a laje fosse lançada diretamente do SAP2000.

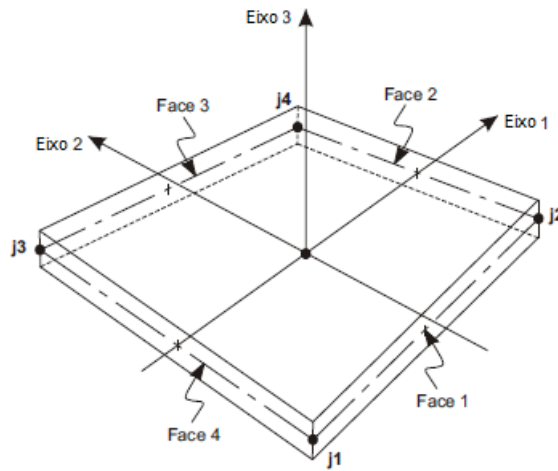


Figura 3.9 – Elemento quadrilátero do tipo *shell* mostrando os eixos locais, os nós e as faces (CSI, 2010, p. 158)

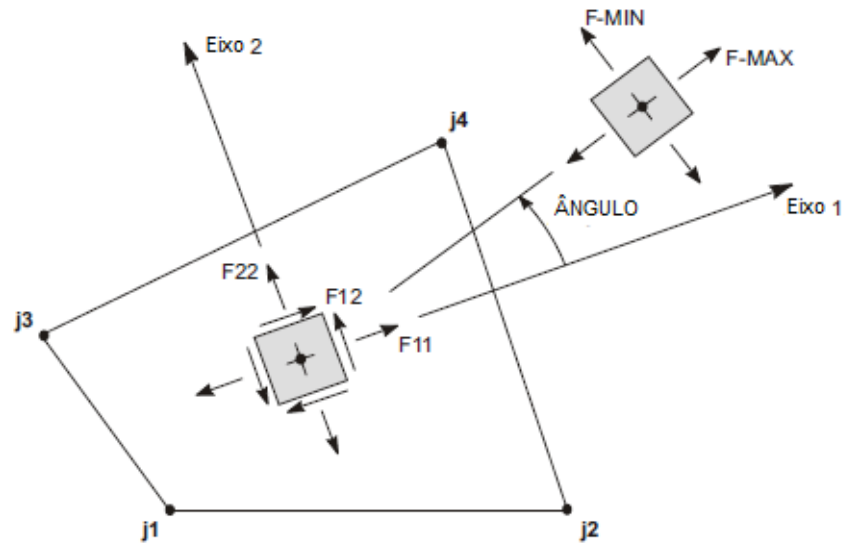


Figura 3.10 – Esforços e tensões no elemento *shell* (CSI, 2010, p. 189)

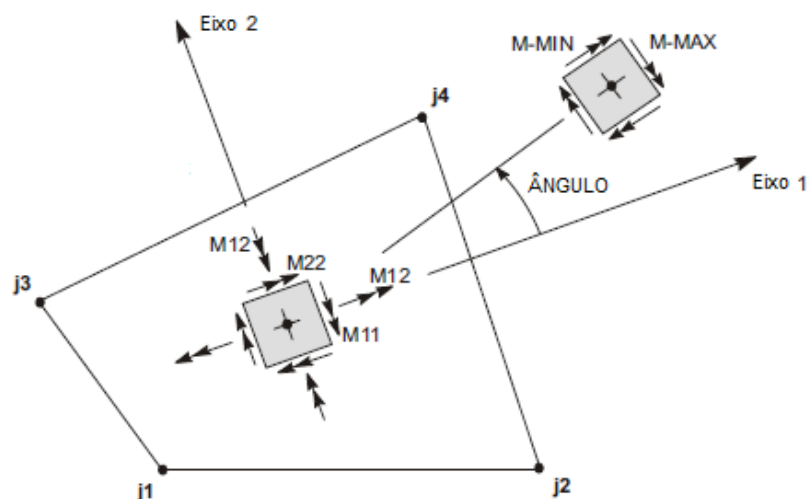
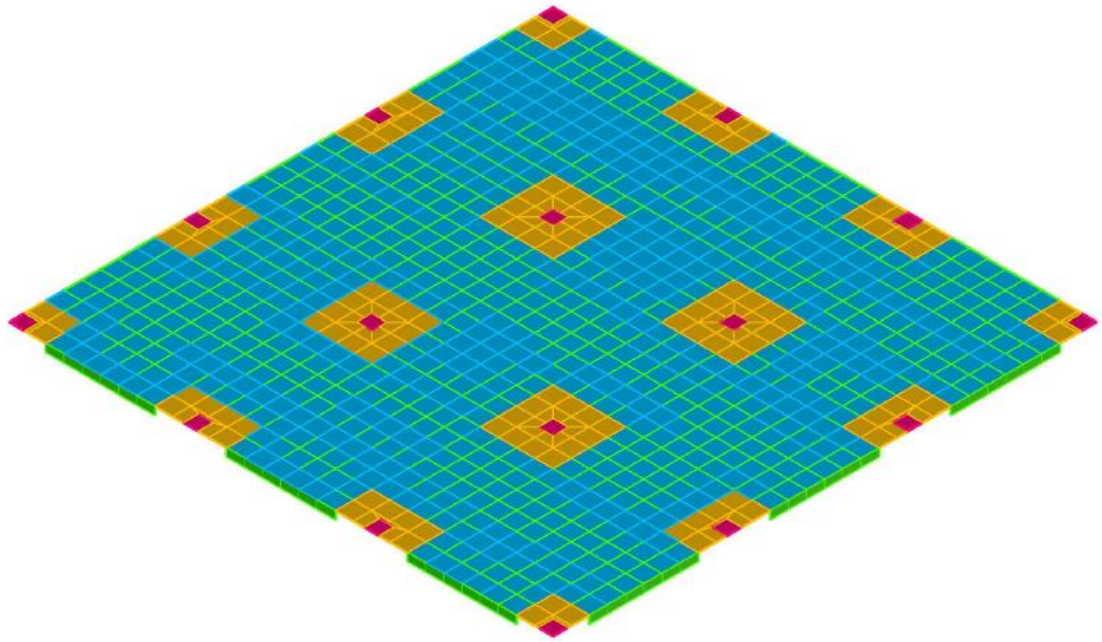
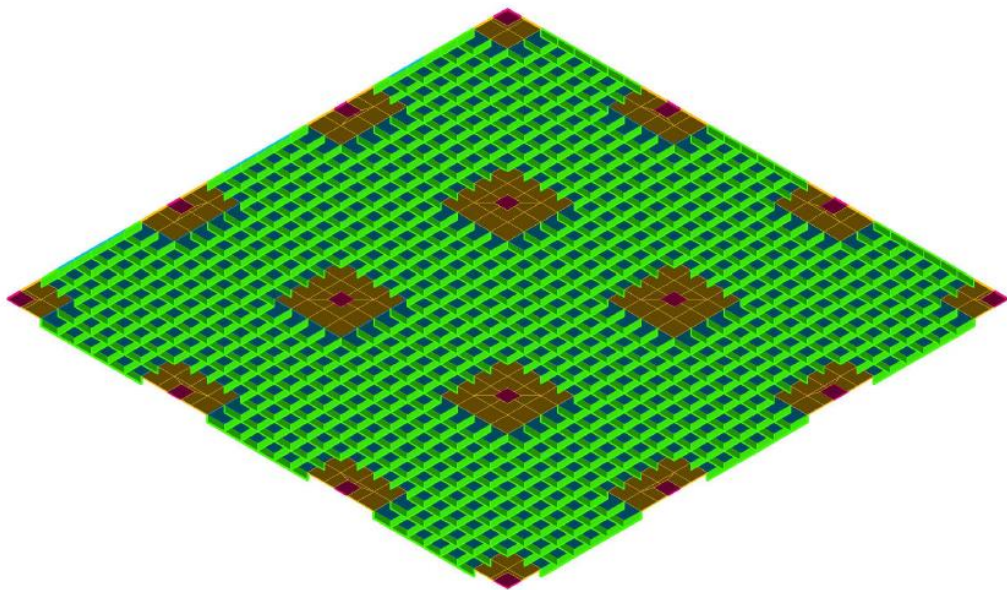


Figura 3.11 – Momentos fletores e torsores no elemento *shell* (CSI, 2010, p. 189)

No AutoCAD, cada componente da laje foi introduzido como *3DFace*, elemento que é reconhecido pelo SAP2000 e pode ser importado como *shell*. Os pontos são descritos no sentido anti-horário, de maneira que quando for feita a importação, o eixo normal ao plano do elemento esteja no mesmo sentido do eixo vertical no sistema global. Desse modo, foram desenhados individualmente os componentes da mesa com as mesmas dimensões das fôrmas reaproveitáveis, portanto, quadrados com 61 cm de lado. De maneira análoga, procedeu-se com os maciços, subdivididos em quadrados de dimensão 61 cm, e os pilares, cada um representado por um único elemento quadrado com 61 cm. Quanto às nervuras, essas foram desenhadas com comprimento de 61 cm e altura variável em função do tipo de molde empregado em cada um dos três painéis estudados. As nervuras foram lançadas em seus respectivos eixos, espaçadas de 61 cm nas duas direções. A mesa, os maciços e a região dos pilares foram posicionados de maneira que os seus planos médios coincidissem com a cota da parte superior das nervuras. A Figura 3.12 apresenta uma vista superior do painel de laje desenhado no AutoCAD e a Figura 3.13 contém a vista inferior desse mesmo painel. As nervuras estão representadas em verde; a mesa, em azul; os maciços, em laranja; e a região dos pilares, em roxo.



**Figura 3.12 – Laje desenhada no AutoCAD (vista superior)**

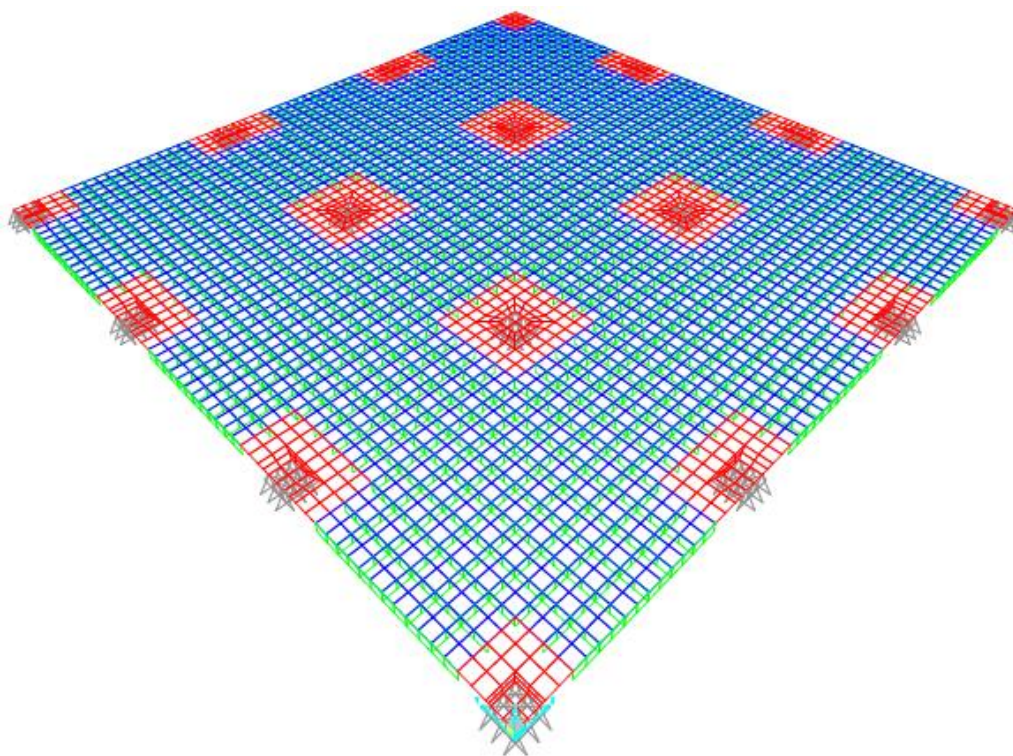


**Figura 3.13 – Laje desenhada no AutoCAD (vista inferior)**

A etapa seguinte consistiu em importar para o SAP2000 os desenhos feitos no AutoCAD. O processo de importação foi feito individualmente para cada grupo de elementos da laje (nervura, maciços, pilares e mesa). A cada um deles foram atribuídas as características do concreto, tais como peso específico, módulo de elasticidade,

resistência à compressão e coeficiente de Poisson. Também foram determinadas as características da seção; para o caso de placas, apenas a espessura.

Para a discretização em elementos finitos, cada área da mesa, pilares e maciço foi dividida ao meio nas duas direções ortogonais, gerando, assim, quatro quadriláteros cada uma. As nervuras, porém, foram divididas ao meio apenas no sentido perpendicular à maior direção. A malha do painel pode ser visualizada na íntegra na Figura 3.14.

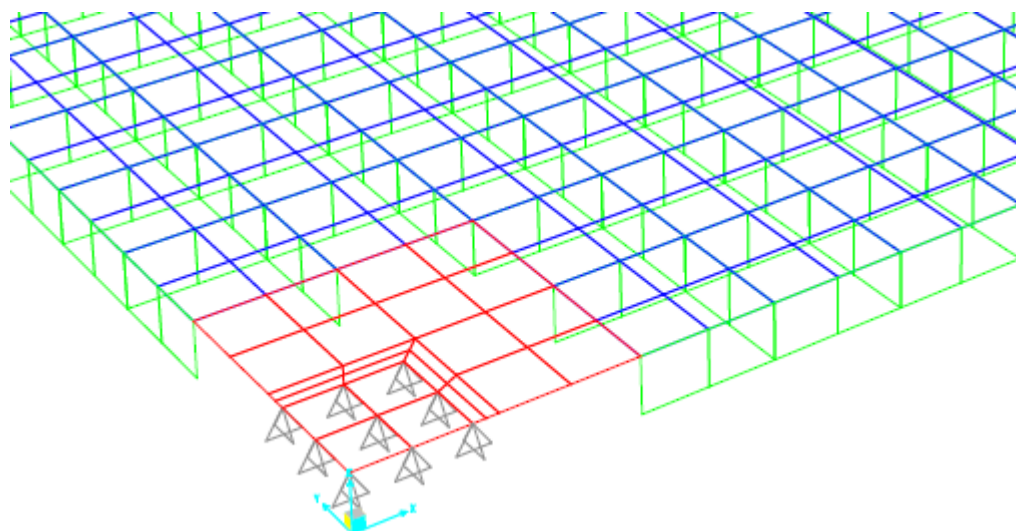


**Figura 3.14 – Malha em elementos finitos com elementos de casca**

As restrições ao deslocamento na região dos pilares foram impostas atribuindo-se apoios do segundo gênero em cada um dos nós dos vértices dos elementos que compõem a região dos pilares. Esse tipo de apoio impede as translações na direção dos três eixos globais. A Figura 3.15 apresenta a disposição dos apoios na região dos pilares, bem com uma visão detalhada dos elementos que compõem o maciço, as nervuras e a mesa.

Em todos os elementos foi aplicado o peso próprio do concreto na direção negativa do eixo vertical global, carregamento uniformemente distribuído sobre o plano do elemento e calculado como o peso específico multiplicado pela espessura da casca. Ainda foram consideradas as solicitações devidas ao peso próprio do revestimento e da sobrecarga também na direção negativa do eixo vertical global, mas apenas sobre elementos da mesa, dos maciços e dos pilares. Essas cargas são uniformemente

distribuídas no plano médio das cascas e definidas como forças por unidades de área. O carregamento total atuando em cada elemento é dado multiplicando a força pela área do plano médio do elemento. Em seguida, esse carregamento é repartido entre os nós do elemento.

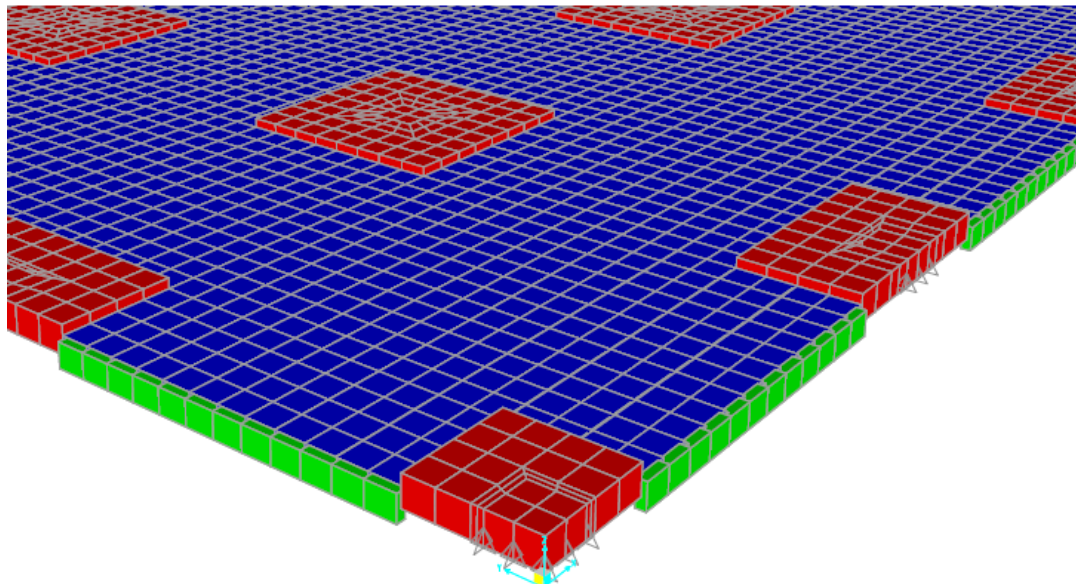


**Figura 3.15 – Detalhe do apoio e de região maciça na malha de elementos finitos de casca**

A modelagem usando apenas elementos de casca apresenta algumas limitações. Os maciços e as mesas foram lançados de maneira que seus planos médios estivessem ambos no mesmo plano. Porém, como esses dois elementos possuem espessuras diferentes, o topo do maciço acaba não coincidindo com o topo da mesa (Figura 3.16). Esse problema pode ser resolvido aplicando-se um *offset* em um dos dois elementos ou modificando o momento de inércia à flexão de um dos elementos para levar em consideração que, na situação ideal, os planos médios não são coincidentes.

Outro fator limitante concerne a ligação entre as nervuras e os maciços. As nervuras devem estar unidas ao maciço nas suas partes superior e inferior. A ligação da parte superior da nervura com o maciço ficou garantida devido à existência de um nó comum a esses dois elementos, que, por sua vez, é comum à mesa. Contudo, não foi possível estabelecer uma ligação entre o nó da base da nervura e a região inferior do maciço, permitindo que esse nó se deslocasse livremente sem encontrar a restrição da parte de baixo do maciço. Tendo em vista que, na estrutura real, estando a base da nervura ligada ao fundo do maciço, ambos devem possuir mesmo deslocamento, o que não acontece nesse tipo de modelagem, pois a nervura está ligada ao maciço somente na parte superior. Assim, as nervuras passam a trabalhar apenas como enrijecedores de uma mesa

que é extremamente fina em relação ao maciço. Como resultado, há uma concentração excessiva de momentos na região dos maciços que não reflete o comportamento real da laje.



**Figura 3.16 – Malha em elementos de casca com suas respectivas espessuras**

Tais problemas ficaram evidentes ao analisar os resultados fornecidos por esse tipo de modelagem. Tanto para as lajes com vão de 6 m quanto para as lajes com vão de 7 m, os momentos fletores negativos na região do maciço foram cerca cem vezes maiores que os momentos fletores positivos no centro do painel e no centro da linha de pilares.

Com isso, teve-se que recorrer a modelagem feita inteiramente usando elementos tridimensionais, que geram resultados mais consistentes com a realidade, como foi demonstrado por Donin (2007).

### **3.4 Modelagem com Elementos Sólidos**

O procedimento para a modelagem da laje usando apenas elementos tridimensionais foi análogo ao da modelagem com elementos *shell*. Primeiramente, foi feito um desenho no AutoCAD que depois foi importado no SAP2000. O tipo de elemento do AutoCAD que o SAP2000 reconhece como sólido é complexo de ser trabalhado. Como alternativa, desenhou-se a laje com elementos *3DFace*, os mesmos elementos da

modelagem como casca e, portanto, bidimensionais, que foram posteriormente extrudados dentro do SAP2000.

As nervuras foram lançadas em seu plano médio, enquanto que os maciços, os pilares e a mesa foram posicionados na cota topo da laje. O modelo do AutoCAD foi, então, importado para o SAP2000 e todos os elementos inseridos como *shell*. Em seguida, fez-se a divisão dos elementos. A região dos pilares, os maciços e a mesa foram divididos em dois nas duas direções ortogonais, gerando, assim, quatro elementos cada. As nervuras foram divididas ao meio apenas perpendicularmente à maior direção. Criou-se uma malha com elementos bidimensionais semelhante à empregada na modelagem como casca. A etapa seguinte consistiu em extrudar esses elementos bidimensionais para ter-se elementos tridimensionais do tipo *solid*.

O elemento *solid* possui oito nós e é baseado em uma formulação isoparamétrica que inclui nove modos de flexão incompatíveis opcionais. Esses modos incompatíveis melhoram significativamente o comportamento à flexão do elemento se ele tiver uma geometria retangular. Um esquema de integração numérica  $2 \times 2 \times 2$  é usado no *solid*. As tensões no sistema de coordenadas local do elemento são calculadas nos pontos de integração e extrapoladas para os nós do elemento. São ativados os três graus de liberdade relativos às translações em cada nó do elemento, os graus de liberdade rotacionais não são ativados. A Figura 3.17 apresenta a definição dos nós e das faces desse tipo de elemento.

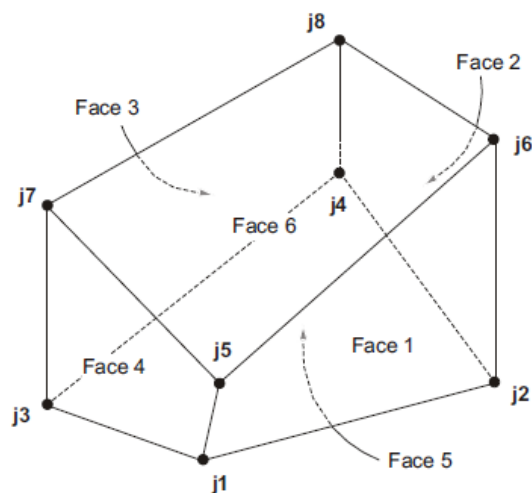


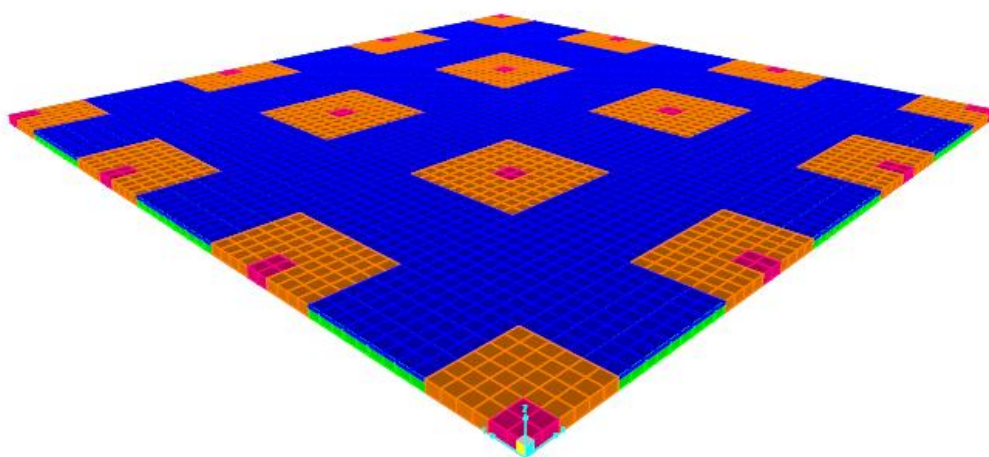
Figura 3.17 – Definição dos nós e faces do elemento *solid* (CSI, 2010, p. 215)

Como as nervuras foram desenhadas no seu plano médio, elas foram extrudadas para os dois lados, sendo metade da espessura para cada lado, com exceção das nervuras localizadas nos bordos do painel, que foram extrudadas apenas para a direção do interior do painel e ficaram, portanto, com metade da espessura das nervuras internas.

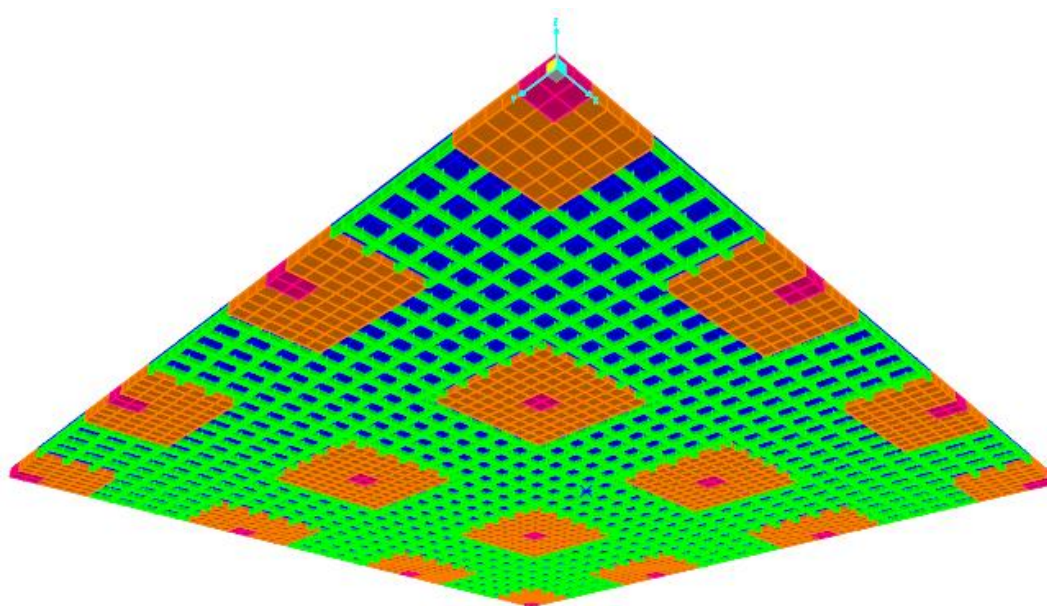
Estando a mesa, os maciços e a região dos pilares posicionados na parte superior da laje, eles foram extrudados na direção negativa do eixo vertical global. As regiões dos pilares, por estarem contidas dentro da região maciça, foram extrudadas para que ficassem com a mesma espessura dos maciços. Quanto à mesa, ao ser extrudada, resultou que sua parte inferior se encontrou com a parte superior dos sólidos das nervuras.

A modelagem usando elementos sólidos permite, portanto, que se tenha uma reprodução fiel da geometria real da estrutura ao representar com precisão a localização dos elementos e as ligações entre eles. A Figura 3.18 e a Figura 3.19 apresentam, respectivamente, as vistas superior e inferior da malha em elementos finitos tridimensionais do tipo *solid*. Os elementos da mesa são representados em azul, os do maciço têm cor laranja, os pilares estão em rosa e as nervuras são mostradas em verde.

Em seguida, é atribuído o tipo de material, nesse caso, o concreto para todos os elementos, cujas propriedades são resistência à compressão, peso específico e coeficiente de Poisson. Destaca-se que o concreto é tratado como material isotrópico nesta análise.



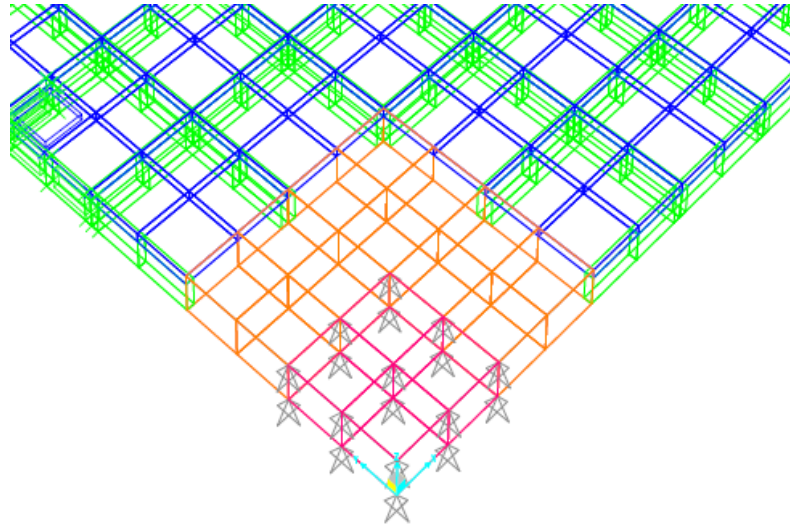
**Figura 3.18 – Malha em elementos finitos com elementos sólidos (vista superior)**



**Figura 3.19 – Malha em elementos finitos com elementos sólidos (vista inferior)**

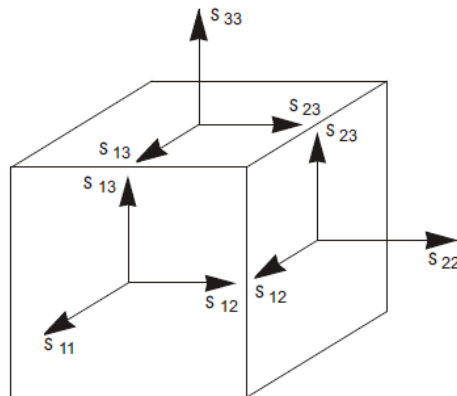
A restrição ao deslocamento foi imposta em todos os oito nós dos elementos sólidos que representam os pilares (Figura 3.20). Ficaram impedidas as translações na direção dos três eixos globais. Caso as restrições fossem impostas apenas aos nós da face inferior do elemento, haveria deslocamento relativo entre os nós da face superior, o que não seria possível, dada a continuidade do pilar e considerando que a laje estaria situada entre dois de seus tramos.

O peso próprio do concreto foi aplicado como uma força uniformemente distribuída sobre o volume do elemento, ela tinha intensidade igual ao peso específico do material e atuava na direção negativa do eixo global vertical. O peso próprio do revestimento e a sobrecarga foram atribuídos como uma pressão superficial atuando normal à face superior dos elementos da mesa, dos maciços e da região dos pilares. O sentido positivo dessa pressão foi sempre direcionado para o centro do sólido, logo, aplicando-a na face superior do elemento, ela estaria automaticamente no sentido negativo do eixo vertical global. A pressão atuando na face é integrada sobre a área dessa face e depois repartida entre seus quatro nós. Foram definidos, também, o tipo de aplicação da carga, que nesse caso foi estática, e o tipo de combinação, o que corresponde aos coeficientes de majoração para estado limite último e ao somatório linear das ações.



**Figura 3.20 – Detalhe do apoio e da região maciça da malha em elementos finitos sólidos**

Os resultados da análise com os elementos do tipo *solid* são mostrados em termos de componentes de tensão nas faces do elemento, cuja nomenclatura segue a convenção da Teoria da Elasticidade (Figura 3.21).



**Figura 3.21 – Definição das componentes de tensão no elemento sólido (CSI, 2010, p. 71)**

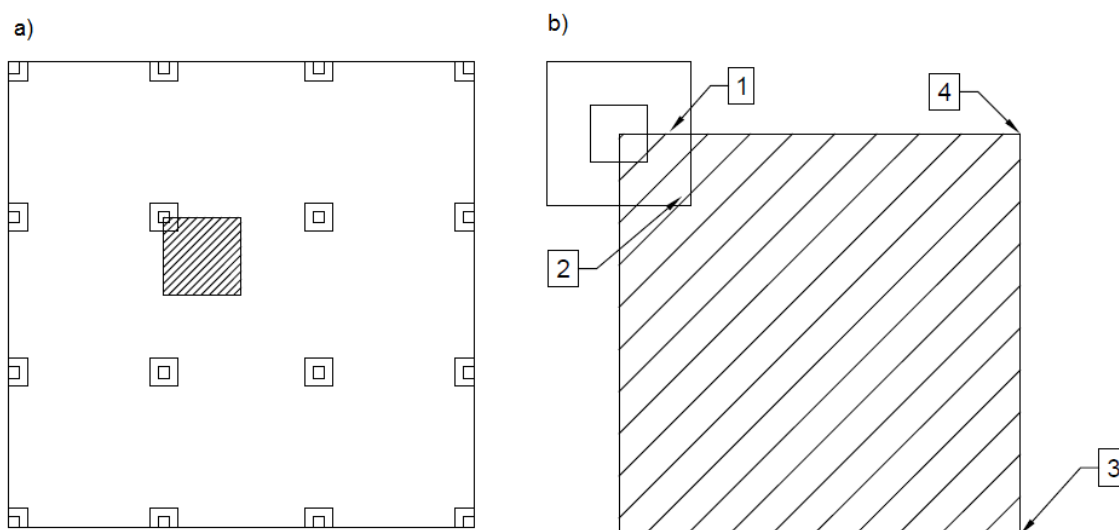
## 4 ESTIMATIVA DO CONSUMO DE ARMADURA DE FLEXÃO

A quantidade de armadura necessária para combater os esforços oriundos da flexão em uma estrutura é diretamente proporcional ao seu diagrama de momento fletor. Neste item, são detalhados os procedimentos empregados para determinar o diagrama de momento fletor da estrutura, assim como a metodologia para estimar o consumo de aço a partir do diagrama e o processo de otimização usado.

### 4.1 Cálculo dos Momentos Fletores

Os resultados das análises com elementos tridimensionais fornecidos pelo SAP2000 são apresentados em forma de tensão. Para determinar o digrama de momento fletor é necessário que essas tensões sejam convertidas em momentos. Antes de tudo, porém, é preciso determinar os pontos do painel onde serão feitas as análises dos resultados.

Devido à simetria do painel, foi escolhido apenas um quadrante da central laje, correspondente à região hachurada da Figura 4.1a.



**Figura 4.1 – Localização da área estudada no painel (a) e localização dos pontos onde foram analisadas as tensões (b)**

Foram selecionados, assim, quatro pontos principais onde seriam feitas as análises das tensões dentro dessa região (Figura 4.1b). O primeiro ponto está localizado dentro do

maciço, de maneira a se conseguir o momento fletor negativo máximo. Nem sempre o valor máximo foi encontrado na face do pilar, podendo estar um pouco mais afastado. O segundo ponto está sobre a região de transição entre os momentos fletores positivos e negativos, ou seja, a circunferência em torno do centro do apoio onde o momento fletor é nulo. O valor é medido a 45° do eixo vertical, partindo do centro do pilar em direção ao centro do painel. A localização desses dois primeiros pontos é, portanto, variável para cada tipo de painel estudado. O terceiro ponto situa-se exatamente no centro do painel onde, supostamente, os momentos fletores positivos são máximos. Por fim, o quarto ponto localiza-se no vão central entre duas linhas de pilares.

#### 4.1.1 Cálculo do momento no maciço

No maciço, espera-se que, por ser uma região de momento fletor negativo, a parte superior do elemento esteja submetida à tração, enquanto que a parte inferior esteja sujeita à compressão. Teoricamente, a tensão na borda superior do maciço em um determinado ponto deveria ser numericamente igual à tensão na borda inferior. Contudo, por tratar-se de uma solução via MEF, esses valores dificilmente coincidirão.

Para contornar esse problema, resolveu-se calcular a média entre os módulos das duas tensões (tração e compressão) e admitir esse resultado como sendo o mesmo para as bordas superior e inferior (Eq. ( 4.1 )).

$$\sigma_{med} = \frac{|\sigma_{sup}| + |\sigma_{inf}|}{2} \quad ( 4.1 )$$

O diagrama de tensões para uma seção do maciço assume, então, a configuração mostrada na Figura 4.2, com linha neutra passando pelo centroide da seção.

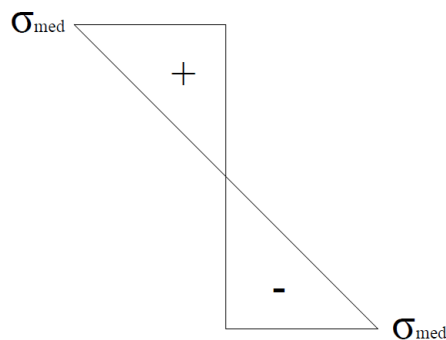


Figura 4.2 – Diagrama de tensões no interior do maciço

Assim, o momento fletor por unidade de comprimento no maciço pode ser calculado com a Eq. ( 4.2 ).

$$M = \frac{\sigma_{med} h^2}{6} \quad ( 4.2 )$$

#### 4.1.2 Cálculo do momento na região nervurada

Para o cálculo dos momentos nas regiões onde há nervuras, o procedimento foi análogo ao de uma viga de seção transversal T, com largura da mesa igual ao espaçamento entre eixos de nervuras. As tensões consideradas estão situadas nas duas bordas da mesa e no seu centro, conforme indicado na Figura 4.3.

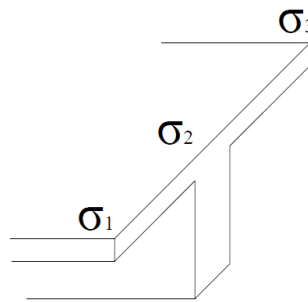
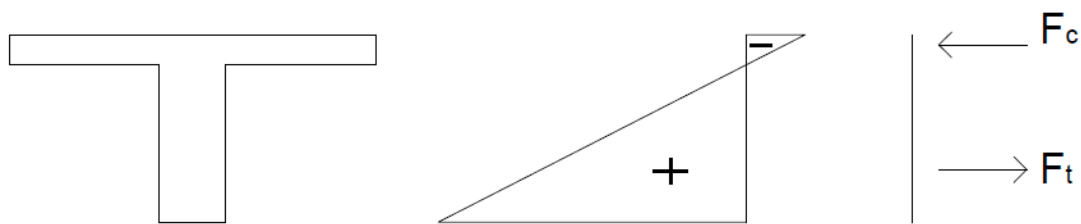


Figura 4.3 – Representação de trecho de nervura com indicação do local das tensões consideradas

Os valores medidos nos três pontos mostrados na Figura 4.3 são distintos, portanto, a fim de uniformizar a tensão na parte superior da mesa, recorre-se à média aritmética mostrada na Eq. ( 4.3 ). Não há necessidade de usar valores em módulo pois nessa região todas as tensões são de compressão.

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad ( 4.3 )$$

Como a linha neutra da seção situa-se muito próxima da transição entre nervura e mesa, optou-se por considerá-la como posicionada logo abaixo da mesa. Desse modo, toda a nervura estaria tracionada e toda a mesa submetida à compressão. A partir dessa ideia, obteve-se o diagrama de tensões apresentado na Figura 4.4.



**Figura 4.4 – Diagrama de tensões na nervura**

A força resultante de compressão  $F_c$  está localizada a um terço da parte superior da mesa e a força resultante de tração  $F_t$  está situada a um terço da base da nervura. Sendo assim,  $F_c$  pode ser determinada a partir da Eq. ( 4.4 ).

$$F_c = \frac{1}{2} \sigma_{med} h_f a \quad ( 4.4 )$$

Para que a seção esteja em equilíbrio, é necessário que  $F_c$  seja igual a  $F_t$ . Portanto, tem-se um binário de forças cujo braço de alavanca  $z$  é igual à distância entre  $F_c$  e  $F_t$ . Assim, a partir da Eq. ( 4.5 ), pode-se calcular o momento fletor por unidade de comprimento na região nervurada.

$$M = \frac{F_c z}{a} \quad ( 4.5 )$$

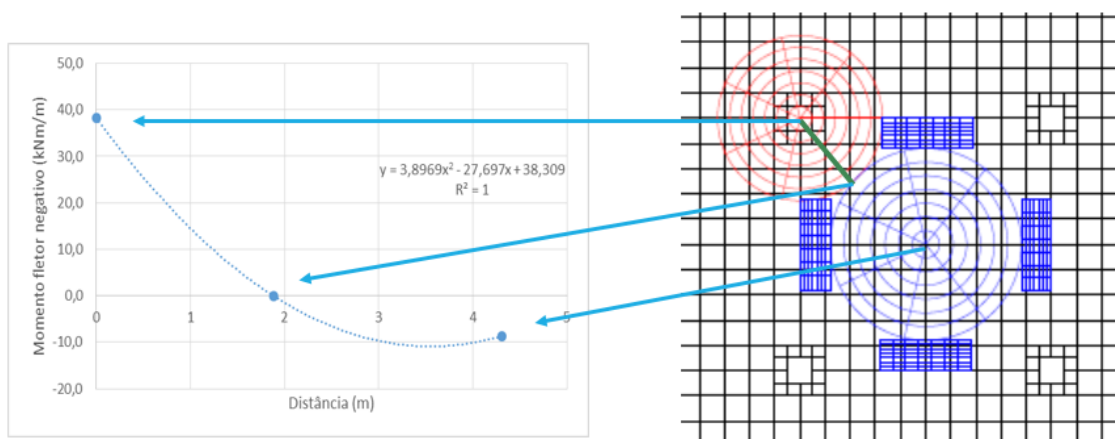
sendo  $z = \frac{2}{3} (h_f + h_n)$ .

## 4.2 Diagrama de Momento Fletor

Para traçar a superfície da região de momento negativo, adotou-se que o seu valor máximo está no eixo do pilar. Em seguida, determinou-se a distância do eixo do pilar até o ponto de momento nulo, na direção de 45°. O terceiro ponto considerado localiza-se no centro do painel, onde encontra-se o momento fletor máximo positivo, também é determinada a distância em linha reta do eixo do pilar ao centro do painel. Com esses três pontos, é possível traçar um polinômio de segundo grau. O trecho da parábola que vai do

centro do pilar ao ponto de momento zero será a geratriz da superfície de momento fletor negativo.

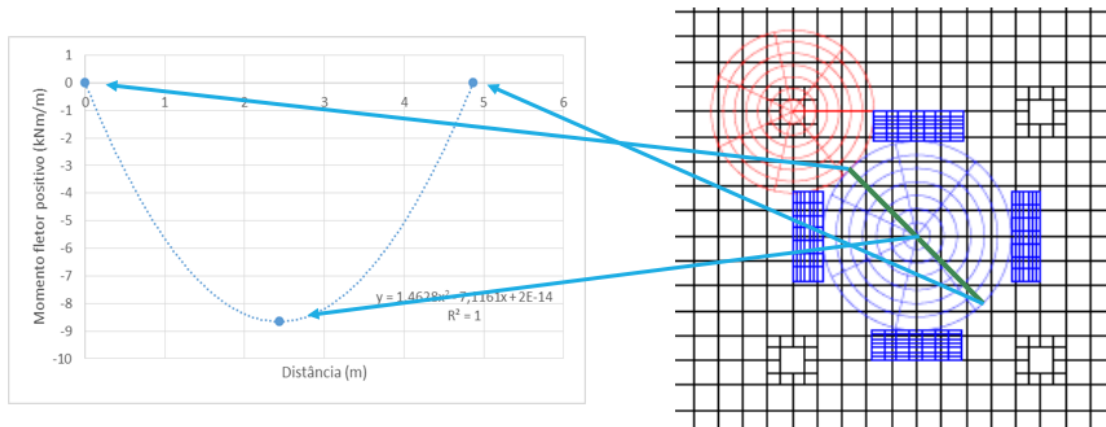
A Figura 4.5 exibe a curva citada anteriormente, onde o intervalo de interesse vai de 0 ao ponto onde a curva intercepta o eixo horizontal. Também é mostrada a equação da parábola. Ressalta-se que os valores de momento negativo estão situados acima do eixo horizontal e os momentos positivos estão abaixo desse eixo, essa inversão de sinais, contudo, não acarretará prejuízo para a análise futura.



**Figura 4.5 – Construção da curva geratriz da superfície de momento fletor negativo**

A zona de momento positivo no vão central da laje é calculada de maneira semelhante. Toma-se a distância do ponto de momento nulo até o centro do painel, onde está localizado o momento fletor positivo máximo. Devido à simetria, o momento deverá anular-se novamente a uma distância igual à primeira. Pode-se, então, traçar uma parábola de segundo grau no intervalo que vai de zero a duas vezes a distância entre o ponto de momento nulo e o centro do painel. O valor máximo da função, em módulo, localiza-se no centro do intervalo e equivale ao momento fletor positivo máximo.

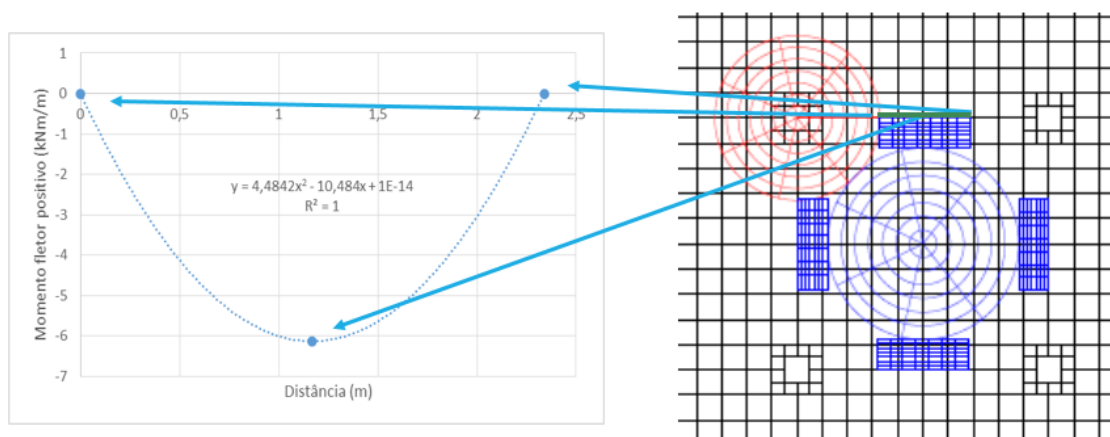
A Figura 4.6 apresenta a parábola e sua equação para a região de momento fletor positivo do centro do painel. Essa curva será a geratriz para o parabolóide de revolução que constituirá a superfície de momento positivo no centro do painel. Os sinais do momento estão invertidos para manter a convenção de que tais momentos são traçados abaixo do eixo horizontal.



**Figura 4.6 – Construção da curva geratriz da superfície de momento fletor positivo no centro do painel**

A outra região de momento positivo encontra-se entre os eixos de pilares. O momento máximo positivo situa-se a uma distância medida horizontalmente entre o ponto do momento nulo e metade do vão entre linhas de pilares. Por simetria, o momento deve anular-se novamente em uma distância igual. Assim, pode-se traçar uma parábola de segundo grau no intervalo que vai de zero a duas vezes distância supracitada. O momento fletor máximo localiza-se no meio do intervalo e a parábola cruza o eixo horizontal nos extremos do intervalo.

A Figura 4.7 mostra a curva da superfície de momento fletor positivo na linha de pilares e a sua equação de segundo grau.

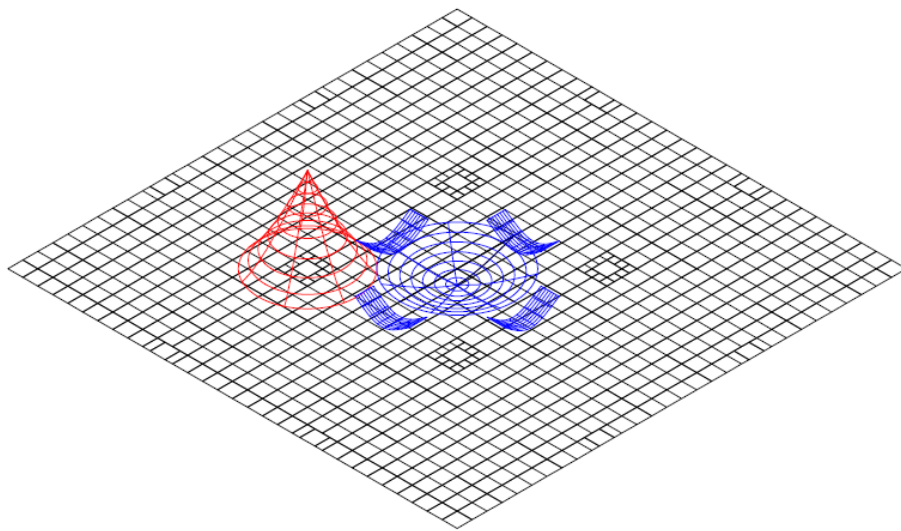


**Figura 4.7 – Construção da curva da superfície de momento fletor positivo na linha de pilares**

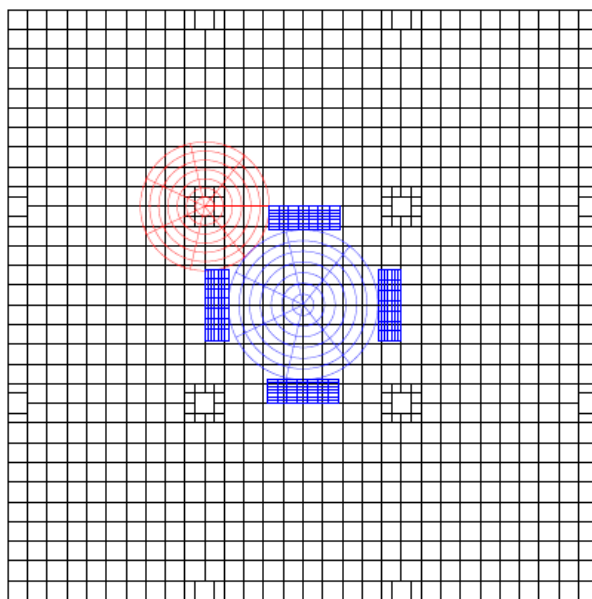
Assim como nas curvas anteriores, os sinais do momento estão invertidos. Todavia, essa curva não é geratriz de um parabolóide de revolução, como as duas

precedentes. A superfície de momento foi obtida extrudando a curva ao longo de uma reta que vai do centro da linha de pilares até o início da superfície de momento positivo no centro do painel.

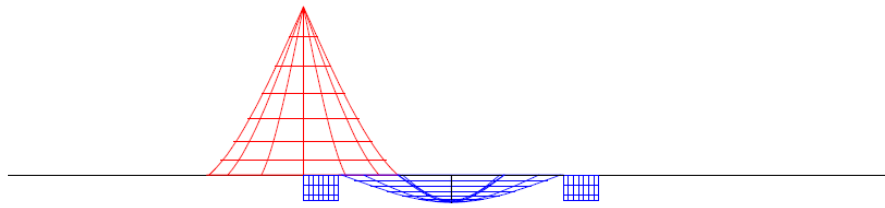
A Figura 4.8 apresenta uma perspectiva das superfícies do diagrama aproximado de momento fletor; em azul estão os momentos positivos e em vermelho os momentos negativos. A Figura 4.9 mostra uma vista superior do diagrama, onde é possível compreender com mais facilidade as distâncias citadas no cálculo das superfícies. Na Figura 4.10, tem-se uma vista frontal do diagrama onde é possível observar as alturas das superfícies de momento positivo e negativo.



**Figura 4.8 – Perspectiva das superfícies do diagrama aproximado de momento fletor**



**Figura 4.9 – Diagrama aproximado de momento fletor (vista superior)**



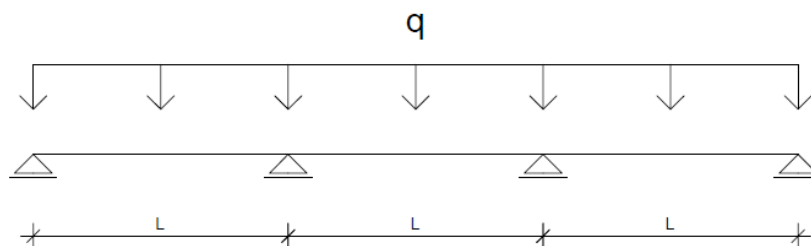
**Figura 4.10 – Diagrama aproximado de momento fletor (vista frontal)**

### 4.3 Consumo de Aço

O procedimento empregado para estimar o consumo de aço consistiu em determinar o volume compreendido sob a superfície do diagrama de momento fletor. A fim de tornar essa explicação mais clara, ela será primeiramente demonstrada para o caso de uma viga contínua e, em seguida, expandida para a laje.

#### 4.3.1 Analogia com viga contínua

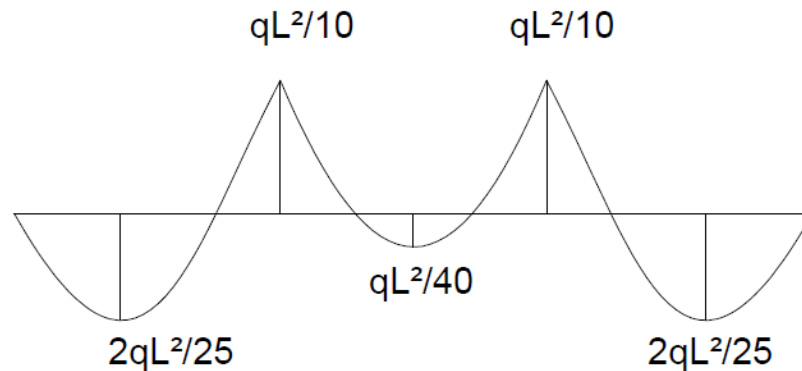
Considerando uma viga contínua formada por três vãos de comprimento  $L$ , de rigidez constante  $EI$  e submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $q$  ao longo de seu comprimento conforme mostra a Figura 4.11, a estática fornece o diagrama de momento fletor apresentado na Figura 4.12.



**Figura 4.11 – Viga contínua formada por três vãos e submetida a carregamento uniformemente distribuído**

O diagrama de momento resistente deve cobrir o diagrama de momento fletor solicitante da Figura 4.12. Logo, espera-se que o consumo total de armadura longitudinal necessária – desconsiderando-se o comprimento de ancoragem – seja proporcional à área

compreendida entre as curvas do diagrama e o eixo horizontal que contém os pontos de momento nulo.



**Figura 4.12 – Diagrama de momento fletor para viga contínua**

No caso da viga, que é uma estrutura linear, fala-se na área acima e abaixo do diagrama; analogamente, para uma laje, que é bidimensional, trabalha-se com o volume entre as duas superfícies.

Observando a Figura 4.8, que apresenta o diagrama aproximado de momento fletor em três dimensões, pode-se constatar volumes limitados pelas das superfícies mostradas. Tais volumes são aqui denominados *volumes de momento fletor* (VM). Esse conceito será a base do processo de estimativa do consumo de armadura de flexão necessária da laje.

### 4.3.2 Cálculo dos volumes de momento fletor

O cálculo dos volumes de momento fletor foi feito usando as equações de segundo grau semelhantes àsquelas apresentadas nas Figura 4.5 a 4.7. Esses volumes poderiam ser obtidos usando integrais duplas ou triplas, empregando coordenadas polares ou cilíndricas. Contudo, foi usado o artifício descrito a seguir devido à sua maior praticidade e rapidez, mas que conduz a resultados idênticos.

Primeiramente, determinou-se a área abaixo da curva dentro do intervalo desejado conforme a Eq. ( 4.6 ).

$$A = \int_a^b y(x)dx \quad (4.6)$$

Em seguida, obteve-se o momento estático de área em relação ao eixo vertical  $y$  através da Eq. ( 4.7 ).

$$Q_y = \int_a^b xy(x)dx \quad (4.7)$$

Assim, foi possível calcular a coordenada horizontal do centroide pela Eq. ( 4.8 ).

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{\int_a^b y(x)dx} \quad (4.8)$$

Por fim, o volume abaixo da superfície foi determinado fazendo a área percorrer uma volta completa em torno do eixo vertical, conforme explicita a Eq. ( 4.9 ).

$$V = 2\pi\bar{x}A \quad (4.9)$$

#### 4.4 Processo de Otimização

O processo de otimização deste trabalho concentrou-se apenas nas dimensões do maciço em função do comprimento do vão, ou seja, todas as demais variáveis, tais como espaçamento entre nervuras, largura das nervuras, espessura da mesa e altura total da laje foram mantidas constantes. Não se justifica, portanto, a aplicação de um método de otimização sofisticado, a exemplo de um algoritmo genético, quando se trabalha apenas com uma variável. Assim, o procedimento adotado consiste em fazer uma análise incremental dentro de um intervalo pré-definido para, em seguida, determinar o ponto ótimo.

Para os três painéis estudados, partiu-se de uma dimensão inicial do maciço correspondente a meia fôrma, ou seja, 0,305 m desde a face do pilar ou 0,61 m se considerado o centro do apoio, haja vista que o pilar tem a mesma dimensão de uma fôrma. Em seguida, aumentou-se o comprimento do maciço também em intervalos equivalentes a meia fôrma até se chegar à dimensão máxima em torno de 0,22L (item 2.2) a partir do centro do pilar. Esse valor de incremento foi escolhido devido à existência

comercial da meia fôrma, ficando, assim, garantido que o tamanho ótimo do maciço fosse exequível.

A Tabela 4.1 apresenta os comprimentos dos maciços para os três vãos estudados, assim como a relação entre essas duas variáveis. Por ser o menor dentre os três, o maciço do vão de 6,1 m precisou apenas de quatro incrementos para atingir o valor de 0,25L, superior ao máximo de 0,22L. Para os vãos de 7,32 m e 8,54 m, foram estudados seis comprimentos de maciço em cada caso, alcançando a relação 0,292L para o vão de 7,32 m e 0,25L para o vão de 8,54 m, ambos valores superiores a 0,22L. Optou-se por interromper as análises em um ponto acima da relação 0,22L como forma de assegurar que não haveria mudança na tendência mesmo após esse patamar.

**Tabela 4.1 – Comprimentos dos maciços em função do tamanho do vão e relação entre o tamanho do maciço e o comprimento do vão**

Vão (L) (m)	Comprimento do maciço (lm) (m)	lm/L
6,1	0,61	0,100
	0,915	0,150
	1,22	0,200
	1,525	0,250
7,32	0,61	0,083
	0,915	0,125
	1,22	0,167
	1,525	0,208
	1,83	0,250
	2,135	0,292
8,54	0,61	0,071
	0,915	0,107
	1,22	0,143
	1,525	0,179
	1,83	0,214
	2,135	0,250

## 5 RESULTADOS

Para cada painel de laje da Tabela 4.1, procedeu-se conforme descrito no Capítulo 4. Primeiramente, obtendo as tensões em cada um dos pontos desejados. Em seguida, calculando os momentos fletores. Depois, determinando as curvas do diagrama de momento e, por fim, calculando o volume abaixo da superfície de momento fletor.

### 5.1 Laje com Vão de 6,1 m

A Tabela 5.1 apresenta os valores de tensões lidos nas bordas superior e inferior do maciço, a tensão média entre esses dois valores e os momentos fletores negativos calculados. Os resultados são expostos em função de cada um dos quatro comprimentos de maciço adotados.

**Tabela 5.1 –Tensões e momentos fletores dentro do maciço para laje de vão 6,1 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,10	0,15	0,20	0,25
$\sigma_{sup}$ (kN/m <sup>2</sup> )	5248,50	4653,40	4983,80	5307,70
$\sigma_{inf}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-8881,80	-5770,80	-5712,50	-6154,20
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	7065,15	5212,10	5348,15	5730,95
M (kNm/m)	-51,93	-38,31	-39,31	-42,12

Na Tabela 5.2, encontram-se os valores das tensões e da força resultante de compressão, assim como o momento positivo calculados na região das nervuras localizada no centro do painel.

**Tabela 5.2 –Tensões e momentos fletores no centro do painel para laje de vão 6,1 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,10	0,15	0,20	0,25
$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2538,90	-2477,40	-2503,10	-2469,10
$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2514,60	-2450,10	-2472,30	-2415,10
$\sigma_3$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2477,90	-2490,70	-2499,60	-2471,80
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2510,47	-2472,73	-2491,67	-2452,00
F (kN)	-38,28	-37,71	-38,00	-37,39
M (kNm/m)	8,79	8,65	8,72	8,58

A Tabela 5.3 contém os resultados em função do comprimento do maciço na linha de pilares. São mostradas as tensões de compressão lidas na parte superior da mesa e o valor médio dessas três tensões, que é usado no cálculo da força resultante de compressão. O momento fletor positivo também é mostrado para cada um dos quatro comprimentos de maciço.

**Tabela 5.3 – Tensões e momentos fletores na linha de pilares para laje de vão 6,1 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,10	0,15	0,20	0,25
$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	-1798,50	-1733,10	-1772,50	-1808,10
$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	-1833,20	-1735,80	-1814,30	-1901,70
$\sigma_3$ (kN/m <sup>2</sup> )	-1815,80	-1784,00	-1773,30	-1807,20
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-1815,83	-1750,97	-1786,70	-1839,00
F (kN)	-27,69	-26,70	-27,25	-28,04
M (kNm/m)	6,36	6,13	6,25	6,44

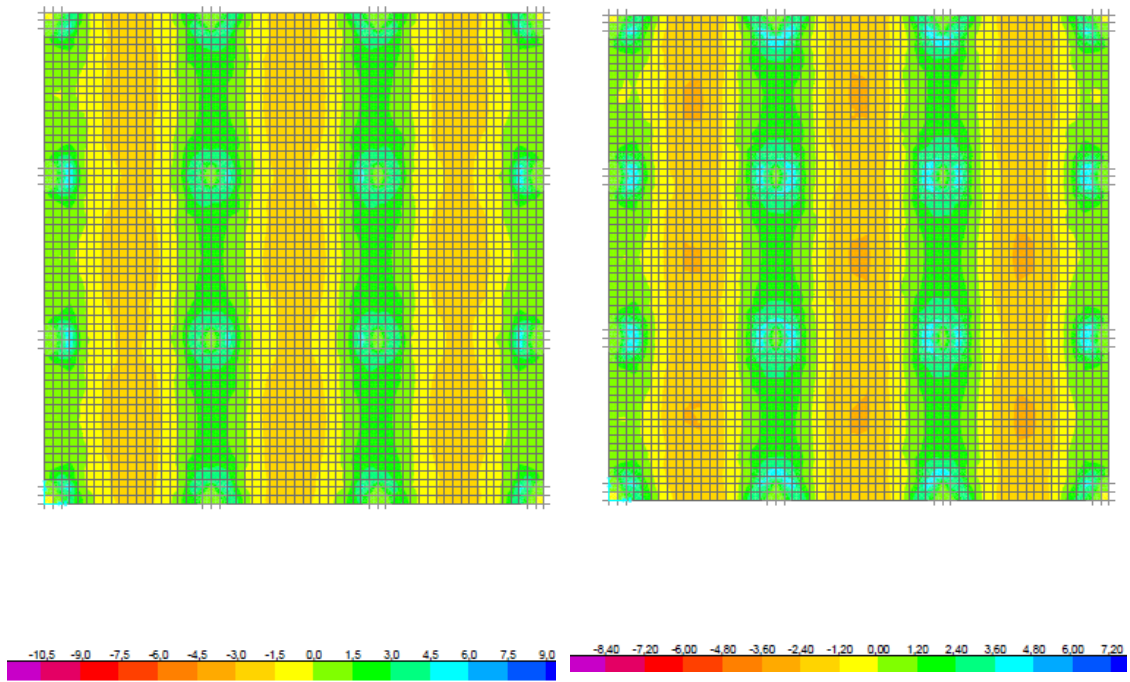
A Tabela 5.4 mostra as distâncias entre o centro do apoio e a circunferência de momento fletor nulo. Essa distância diminui quando o tamanho do maciço aumenta de 0,10L para 0,15L e volta a crescer para os maciços de tamanho 0,20L e 0,25L.

**Tabela 5.4 – Distância do centro do pilar à circunferência de momento nulo para vão de 6,1 m**

lm/L	0,10	0,15	0,20	0,25
r (m)	1,92	1,88	1,99	2,06
r/L	0,315	0,308	0,326	0,338

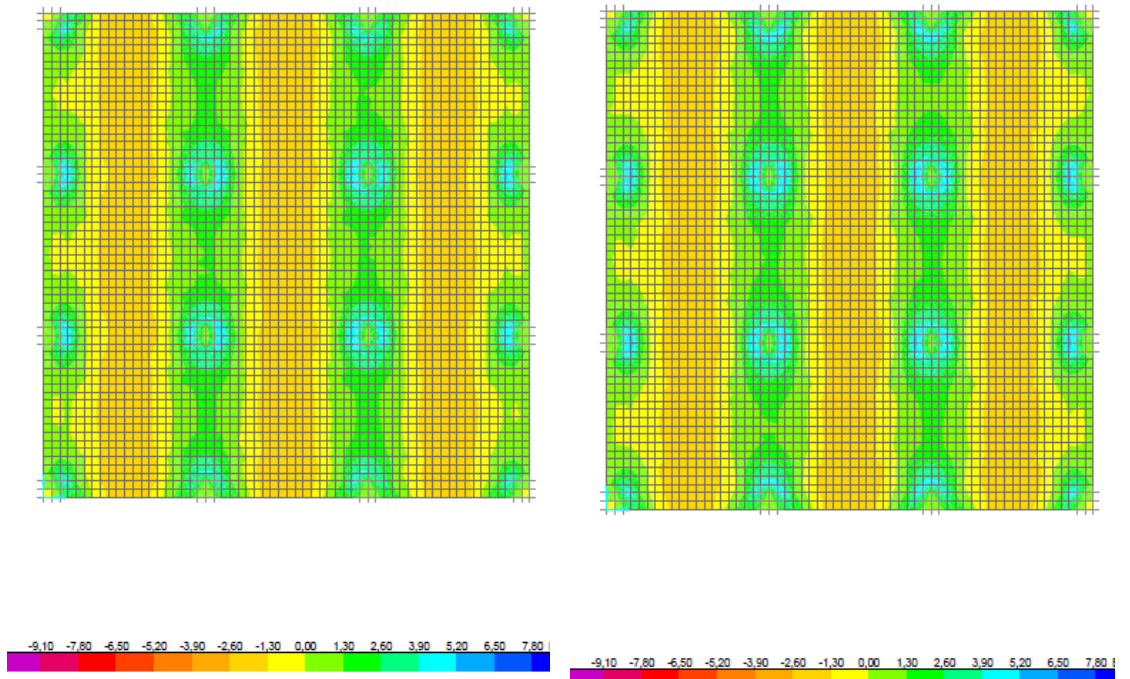
A Figura 5.1 apresenta os quatro painéis estudados para o vão de 6,1 m. São mostradas as tensões normais nos elementos sólidos na direção do eixo horizontal ( $\sigma_{11}$ ).

Na Tabela 5.5, são apresentados os valores do volume de momento negativo na região do maciço; de momento positivo no centro do painel, na linha de pilares e a soma dos dois; o volume total compreendido como a soma dos volumes de momentos positivos e negativos; e a razão entre o volume de momento negativo e positivo. A título de comparação, também são mostrados os valores calculados para uma laje maciça de altura igual à altura total da laje nervurada, porém, com o peso próprio da laje nervurada.



$l_m/L = 0,10$

$l_m/L = 0,15$



$l_m/L = 0,20$

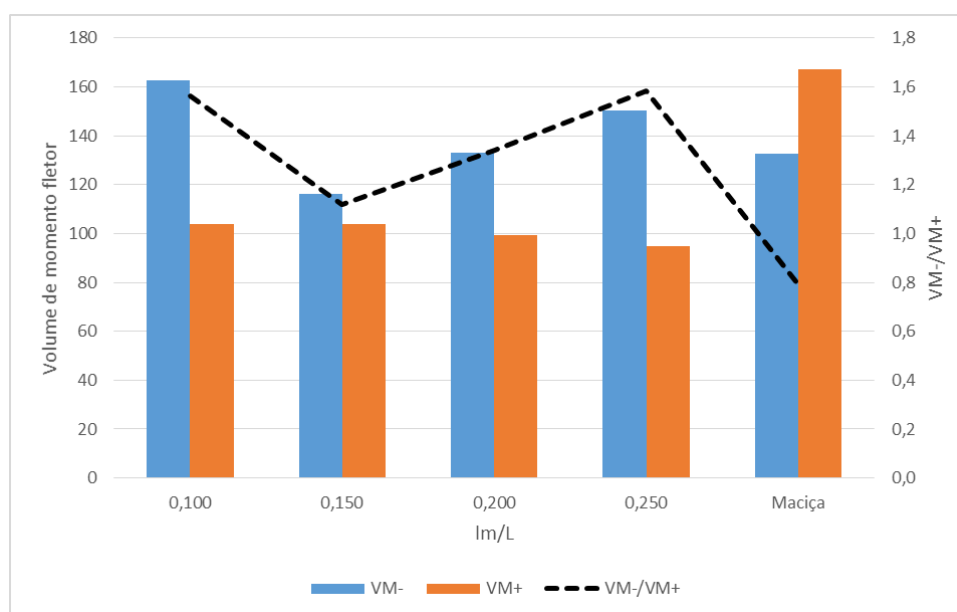
$l_m/L = 0,25$

**Figura 5.1 – Tensões normais  $\sigma_{11}$  (MPa) nos painéis com vão de 6,1 m**

**Tabela 5.5 – Volume de momentos fletores positivo, negativo e total em função do comprimento do maciço para vão de 6,1 m**

lm (m)	lm/L	VM-	VM+			VMtotal	VM-/VM+
			Centro	Linha	Total		
0,61	0,100	162,73	78,92	25,08	104,00	266,73	1,56
0,915	0,150	116,24	80,13	23,72	103,85	220,09	1,12
1,22	0,200	133,20	73,58	25,72	99,30	232,50	1,34
1,525	0,250	150,17	67,85	27,01	94,85	245,02	1,58
Maciça		132,58	101,32	65,92	167,25	299,82	0,79

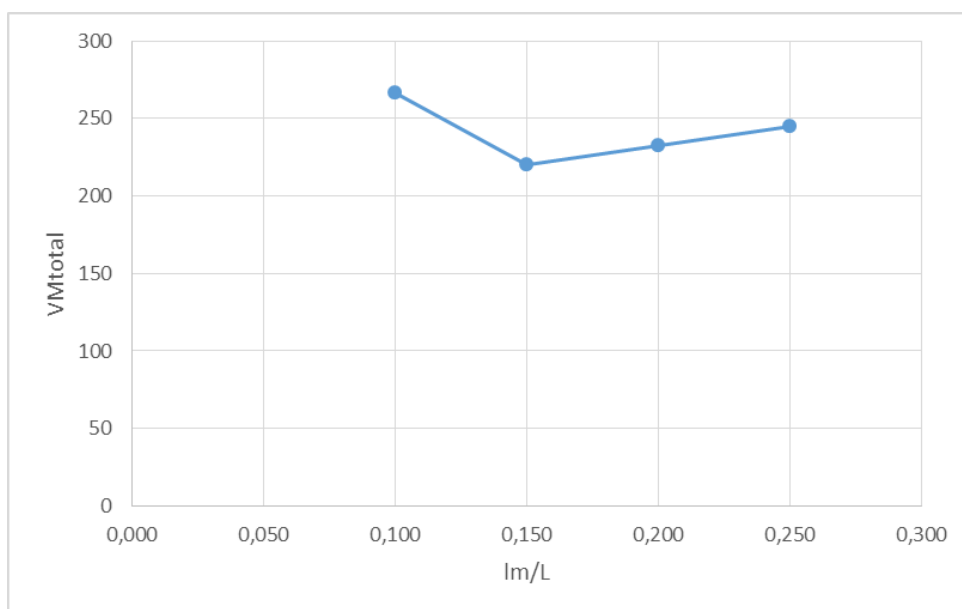
Na Figura 5.2, estão plotados os valores da Tabela 5.5. Observa-se que o volume de momento fletor positivo tende a permanecer aproximadamente constante, com uma leve redução à medida que cresce o tamanho do maciço. No que se refere ao volume de momento fletor negativo, há diminuição do seu valor quando o tamanho do maciço passa de 0,10L para 0,15L e volta a subir para os maciços de tamanho 0,20L e 0,25L.



**Figura 5.2 – Volume de momento fletor positivo e negativo e razão entre eles em função do tamanho do maciço para vão de 6,1 m**

A razão entre os volumes dos momentos negativo e positivo tem comportamento semelhante, diminuindo entre 0,10L e 0,15L e aumentado para 0,20L e 0,25L. É na laje com maciço 0,15L que a razão entre os volumes está mais próxima de 1, enquanto que o valor mais alto está em 0,25L. Para a laje maciça, o volume de momento positivo foi muito maior que para a laje nervurada e superior ao volume de momento negativo, cujo valor não diferiu muito daqueles encontrados para a laje nervurada.

O volume total de momento fletor é exibido na Figura 5.3. Assim como ocorre para o volume de momento negativo, o valor mínimo situa-se no maciço com tamanho 0,15L. Inference-se, então, a grande influência que o momento negativo exerce sobre o volume total, tendo em vista que praticamente não houve variação do momento positivo.



**Figura 5.3 – Volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço para vão de 6,1 m**

## 5.2 Laje com Vão de 7,32 m

Os momentos negativos máximos na região do maciço podem ser encontrados na Tabela 5.6. Eles são calculados a partir da força resultante de compressão que, por sua vez, é determinada através da média das tensões obtidas nas bordas superior e inferior do maciço.

**Tabela 5.6 – Tensões e momentos fletores dentro do maciço para laje com vão 7,32 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,083	0,125	0,167	0,208	0,250	0,292
$\sigma_{sup}$ (kN/m <sup>2</sup> )	6811,80	5680,50	6141,70	6317,50	6925,30	7202,40
$\sigma_{inf}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-10353,30	-6945,80	-6806,80	-7185,20	-7593,40	-7827,30
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	8582,55	6313,15	6474,25	6751,35	7259,35	7514,85
M (kNm/m)	-96,70	-71,13	-72,94	-76,07	-81,79	-84,67

Na Tabela 5.7, estão as três tensões de compressão da borda superior da mesa no centro painel, a força resultante de compressão e o momento fletor positivo.

**Tabela 5.7 – Tensões e momentos fletores no centro do painel para laje de vão 7,32 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,083	0,125	0,167	0,208	0,250	0,292
$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2963,10	-2793,30	-2846,00	-2835,70	-2691,30	-2759,50
$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2976,20	-2841,80	-2836,00	-2748,40	-2747,00	-2850,70
$\sigma_3$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2991,10	-2871,10	-2793,00	-2772,10	-2630,10	-2802,50
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2976,80	-2835,40	-2825,00	-2785,40	-2689,47	-2804,23
F (kN)	-45,40	-43,24	-43,08	-42,48	-41,01	-42,76
M (kNm/m)	12,90	12,29	12,24	12,07	11,65	12,15

A Tabela 5.8 apresenta os momentos fletores positivos na linha de pilares em função do comprimento do maciço. Também são encontradas as tensões, o valor médio entre elas e a força resultante de compressão calculada.

**Tabela 5.8 – Tensões e momentos fletores na linha de pilares para laje de vão 7,32 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,083	0,125	0,167	0,208	0,250	0,292
$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	-919,10	-1781,70	-1860,00	-1746,50	-1916,80	-1933,90
$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	-1934,60	-1856,00	-1820,40	-1799,80	-1879,00	-1906,40
$\sigma_3$ (kN/m <sup>2</sup> )	-968,30	-1792,80	-1805,80	-1779,30	-1922,80	-1943,00
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-1274,00	-1810,17	-1828,73	-1775,20	-1906,20	-1927,77
F (kN)	-19,43	-27,61	-27,89	-27,07	-29,07	-29,40
M (kNm/m)	5,52	7,84	7,92	7,69	8,26	8,35

As distâncias entre o centro do apoio e a circunferência onde o momento fletor é nulo são mostradas na Tabela 5.9 para cada tamanho de maciço.

**Tabela 5.9 – Distância do centro do pilar à circunferência de momento nulo para vão de 7,32 m**

lm/L	0,083	0,125	0,167	0,208	0,250	0,292
r (m)	2,15	2,36	2,38	2,45	2,33	2,35
r/L	0,294	0,322	0,325	0,335	0,318	0,321

A Figura 5.4 mostra as tensões normais nos elementos sólidos dos seis tipos de painéis analisados para o vão de 7,32 m.

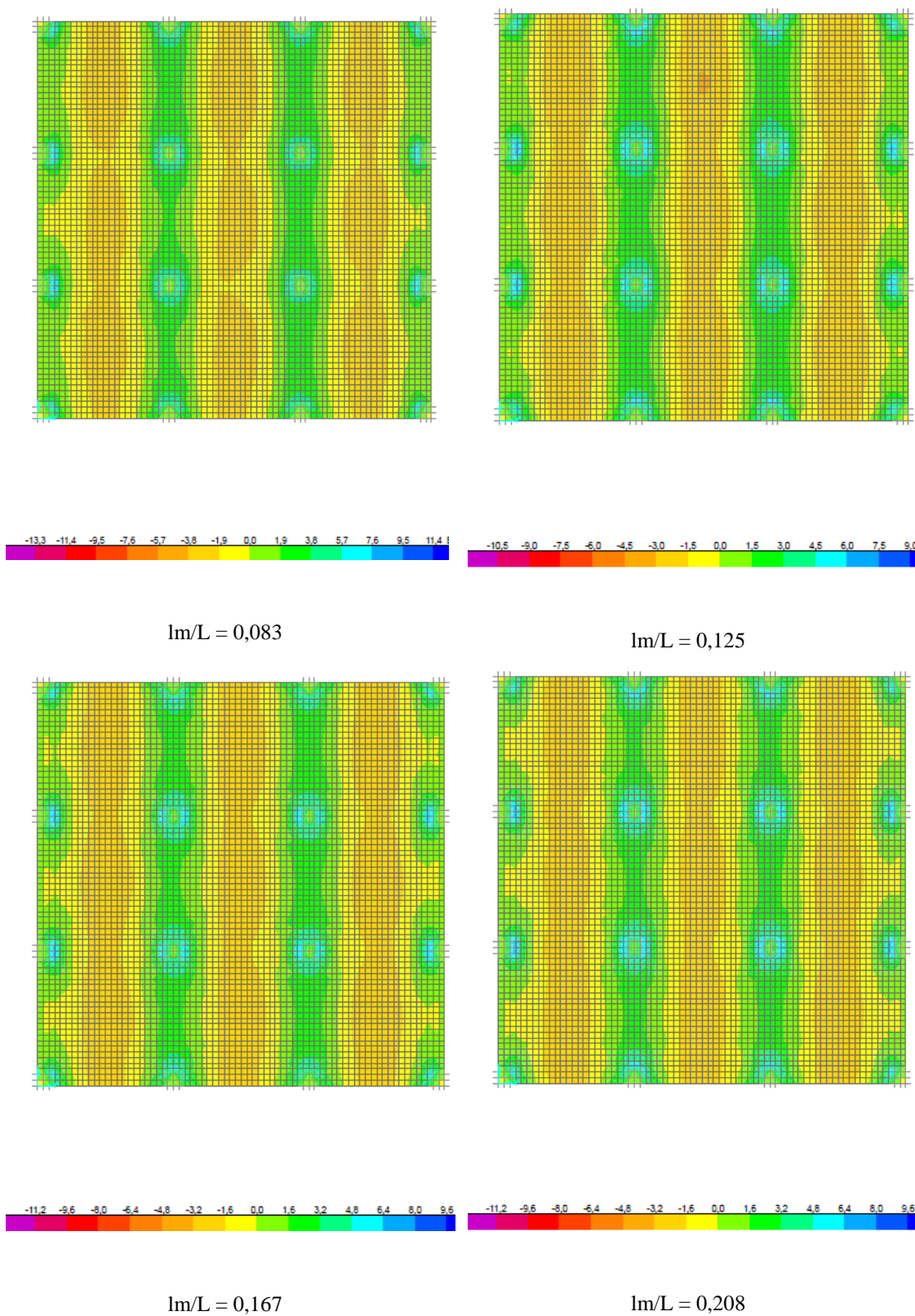
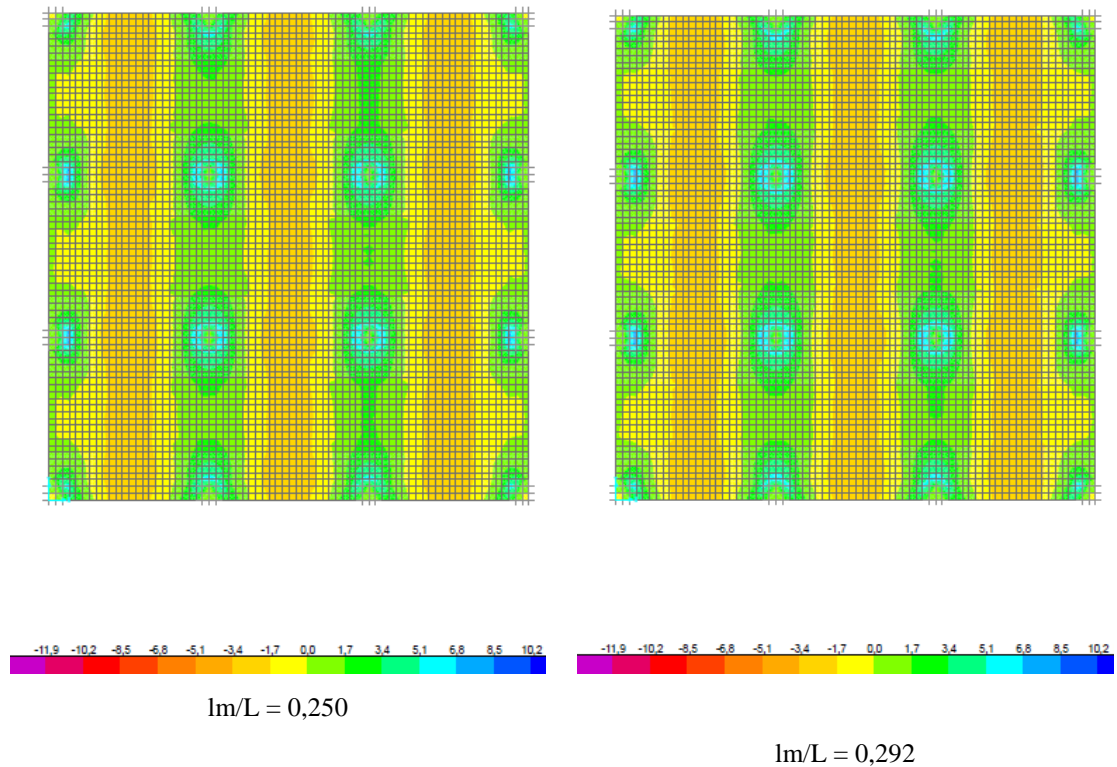


Figura 5.4 – Tensões normais  $\sigma_{11}$  (MPa) nos painéis com vão de 7,32 m (continua)



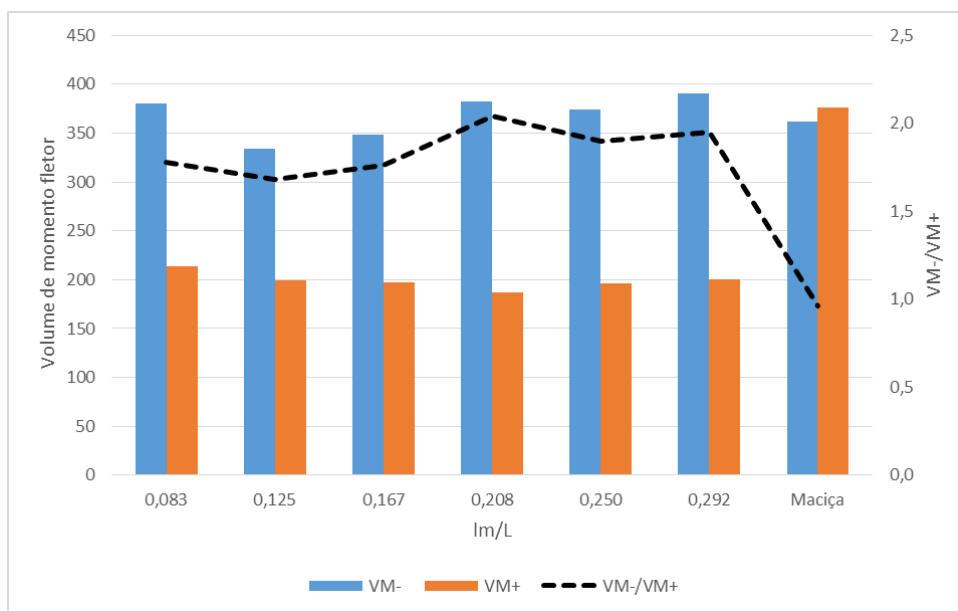
**Figura 5.4 – Tensões normais  $\sigma_{11}$  (MPa) nos painéis com vão de 7,32 m (continuação)**

A Tabela 5.10 contém, para cada comprimento de maciço, os volumes de momento fletor negativo, positivo e total, além da razão entre os volumes de momento positivo e negativo. Também constam os valores para a laje maciça de mesma altura que a laje nervurada.

**Tabela 5.10 – Volume de momentos fletores positivo, negativo e total em função do comprimento do maciço para vão de 7,32 m**

l <sub>m</sub>	l <sub>m</sub> /L	VM-	VM+			VMtotal	VM-/VM+
			Centro	Faixa	Total		
0,61	0,083	380,76	186,06	28,00	214,05	594,81	1,78
0,915	0,125	334,27	152,84	46,02	198,85	533,12	1,68
1,22	0,167	348,09	150,68	46,81	197,50	545,59	1,76
1,525	0,208	382,02	140,80	46,53	187,33	569,35	2,04
1,83	0,250	373,85	149,04	47,74	196,78	570,63	1,90
2,135	0,292	390,81	151,85	48,57	200,42	591,23	1,95
Maciça		361,91	222,02	153,71	375,72	737,64	0,96

Na Figura 5.5, nota-se que há uma queda do volume de momento fletor negativo quando o tamanho do maciço cresce de 0,083L para 0,125L, havendo, logo em seguida, uma tendência de alta até 0,292L, sendo interrompida apenas por uma leve redução em 0,250L. Não há variação significativa no volume momento fletor positivo, apesar de apresentar uma leve redução com o aumento do tamanho do maciço.

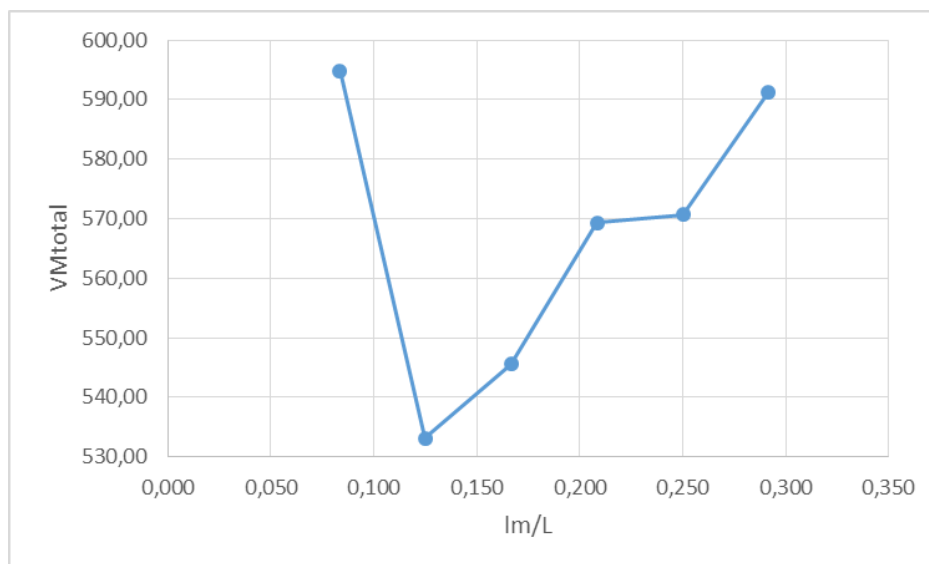


**Figura 5.5 – Volume de momento fletor positivo e negativo e razão entre eles em função do tamanho do maciço para vão de 7,32 m**

A razão entre os volumes de momento segue a tendência do volume de momento negativo, decrescendo entre 0,083L e 0,125L e tomando uma trajetória de elevação até 0,208L, caindo em 0,250L e voltando a subir para 0,292L. A menor razão está na laje com tamanho de maciço 0,125L e a maior, na laje com maciço 0,208L.

Em oposição às lajes nervuradas, a laje maciça apresenta volume de momento positivo maior que o de momento negativo. Além disso, a razão entre os dois volumes fica próxima de 1.

Na Figura 5.6, estão plotados os volumes de momento total em função do tamanho do maciço. Há uma queda brusca entre 0,083L e 0,125L, seguida por uma trajetória de alta, passando por um trecho quase constante entre 0,208L e 0,250L. Em 0,125L, encontra-se o valor mínimo.



**Figura 5.6 – Volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço para vão de 7,32m**

### 5.3 Laje com Vão de 8,54 m

Os momentos fletores negativos máximos localizados no maciço são mostrados na Tabela 5.11, assim como as tensões de tração na borda superior e as tensões de compressão na borda interior.

**Tabela 5.11 – Tensões e momentos fletores dentro do maciço para laje de vão 8,54 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,071	0,107	0,143	0,179	0,214	0,250
$\sigma_{sup}$ (kN/m <sup>2</sup> )	7876,80	7098,20	7153,50	7404,90	7924,40	8236,10
$\sigma_{inf}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-11580,70	-8124,20	-7721,70	-8092,20	-8599,60	-8847,80
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	9728,75	7611,20	7437,60	7748,55	8262,00	8541,95
M (kNm/m)	-155,82	-121,91	-119,13	-124,11	-132,33	-136,81

A Tabela 5.12 exibe, para a região central do painel, as tensões de compressão na mesa, seu valor médio, a força resultante de compressão e o momento fletor positivo, todos em função do comprimento do maciço.

Na Tabela 5.13, encontram-se as três tensões de compressão obtidas na borda superior da mesa na linha de pilares, a valor médio e a força resultante de compressão calculada a partir dela, e o momento fletor positivo.

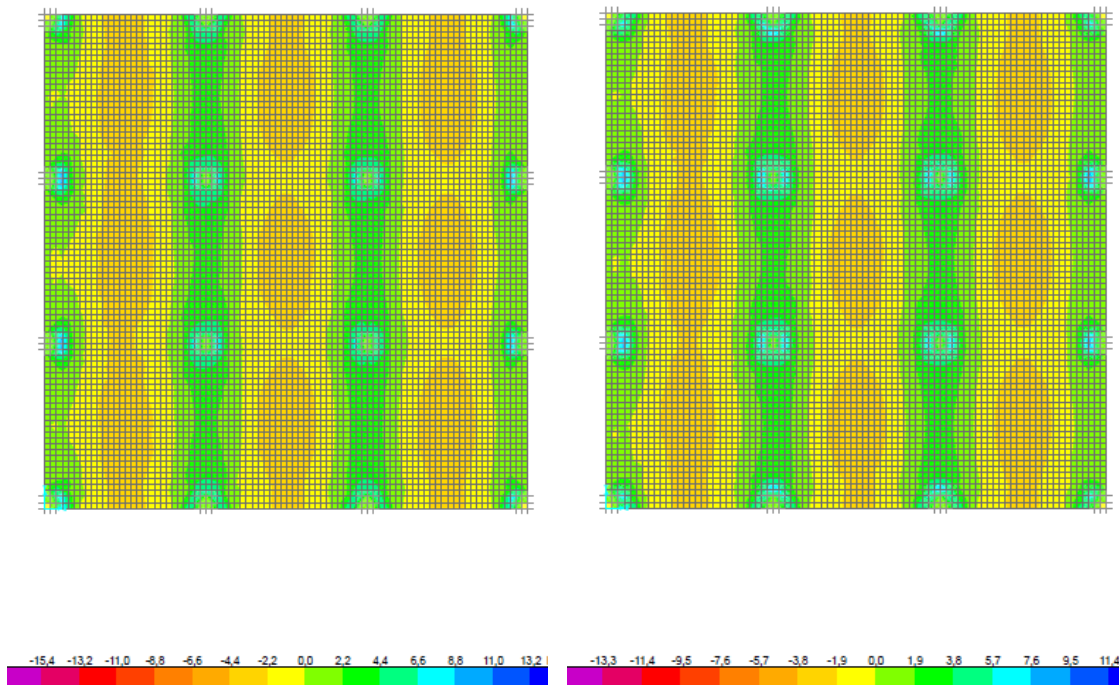
**Tabela 5.12 – Tensões e momentos fletores no centro do painel para laje de vão 8,54 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,071	0,107	0,143	0,179	0,214	0,250
$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	-3229,90	-2739,90	-3117,20	-3065,20	-2993,80	-2995,80
$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	-3163,90	-2712,20	-3068,50	-3025,80	-2942,20	-2953,50
$\sigma_3$ (kN/m <sup>2</sup> )	-3151,60	-2676,90	-3052,90	-3013,40	-2948,90	-2950,20
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-3181,80	-2709,67	-3079,53	-3034,80	-2961,63	-2966,50
F (kN)	-48,52	-41,32	-46,96	-46,28	-45,16	-45,24
M (kNm/m)	16,44	14,00	15,91	15,68	15,30	15,33

**Tabela 5.13 – Tensões e momentos fletores na linha de pilares para laje de vão 8,54 m em função do comprimento do maciço**

lm/L	0,071	0,107	0,143	0,179	0,214	0,250
$\sigma_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2003,60	-1722,80	-1998,40	-1899,00	-1962,10	-2001,00
$\sigma_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2048,50	-1769,60	-2057,00	-1944,20	-2009,20	-2035,00
$\sigma_3$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2070,80	-1791,80	-2051,90	-1949,50	-2016,20	-2061,50
$\sigma_{med}$ (kN/m <sup>2</sup> )	-2040,97	-1761,40	-2035,77	-1930,90	-1995,83	-2032,50
F (kN)	-31,12	-26,86	-31,05	-29,45	-30,44	-31,00
M (kNm/m)	10,54	9,10	10,52	9,98	10,31	10,50

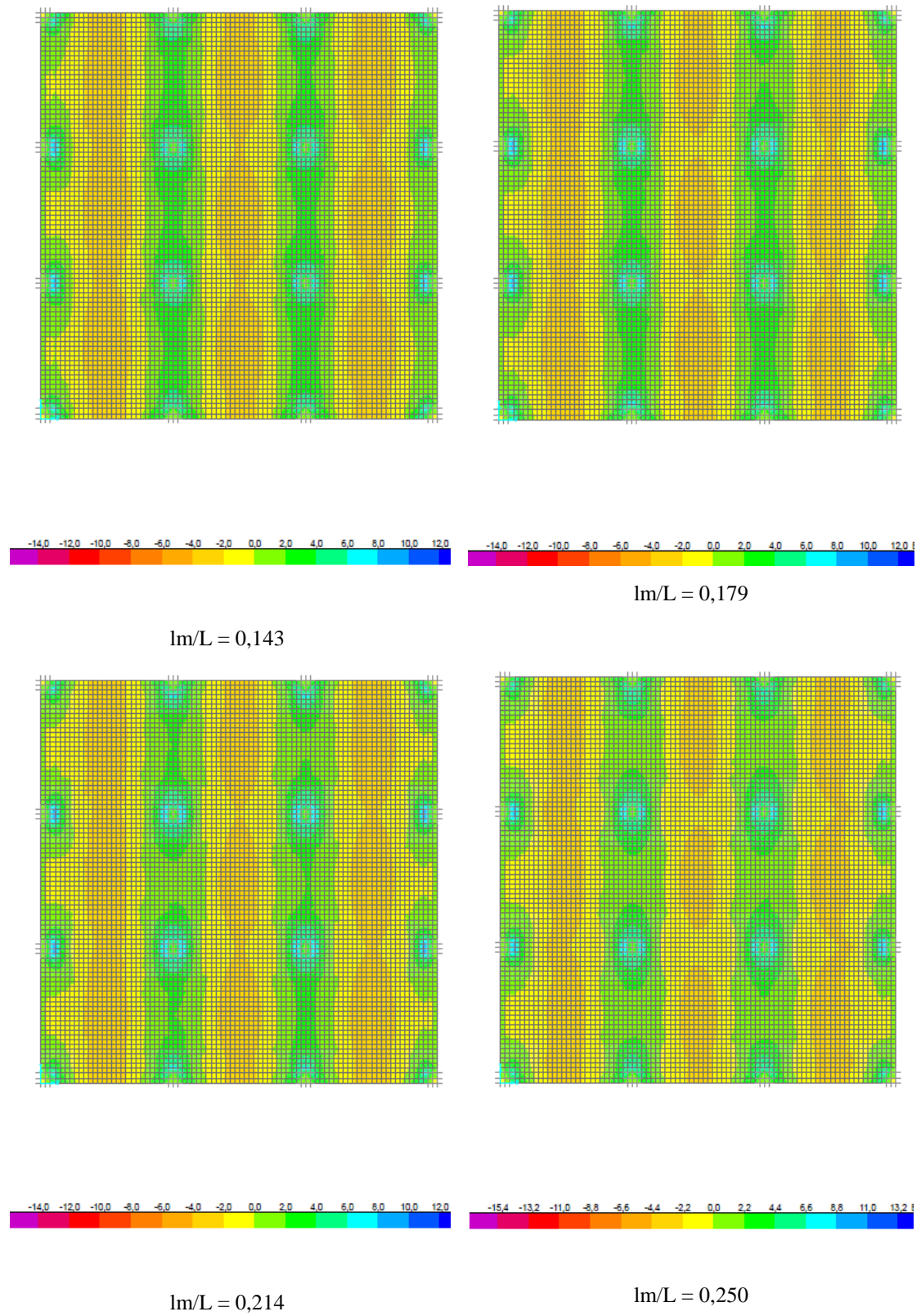
A Figura 5.7 apresenta as tensões normais na malha de elementos sólidos para a laje com vão entre apoios de 8,54 m e diferentes tamanhos de maciço.



lm/L = 0,071

lm/L = 0,107

**Figura 5.7 – Tensões normais  $\sigma_{11}$  (MPa) nos painéis com vão de 8,54 m (continua)**



**Figura 5.7 – Tensões normais  $\sigma_{11}$  (MPa) nos painéis com vão de 8,54 m (continuação)**

As distâncias do centro do apoio à circunferência de momento fletor nulo são mostradas na Tabela 5.14.

**Tabela 5.14 – Distância do centro do pilar à circunferência de momento nulo para vão de 8,54 m**

lm/L	0,071	0,107	0,143	0,179	0,214	0,250
r (m)	2,52	2,87	2,93	2,89	2,84	2,91
r/L	0,295	0,336	0,343	0,338	0,333	0,341

Na Tabela 5.15, estão contidos os valores dos volumes de momento fletor negativo, positivo e total para cada tamanho de maciço. Encontram-se, também, a razão entre os volumes de momento positivo e negativo, além dos resultados para a laje maciça de altura igual à laje nervurada.

**Tabela 5.15 – Volume de momentos fletores positivo, negativo e total em função do comprimento do maciço para vão de 8,54 m**

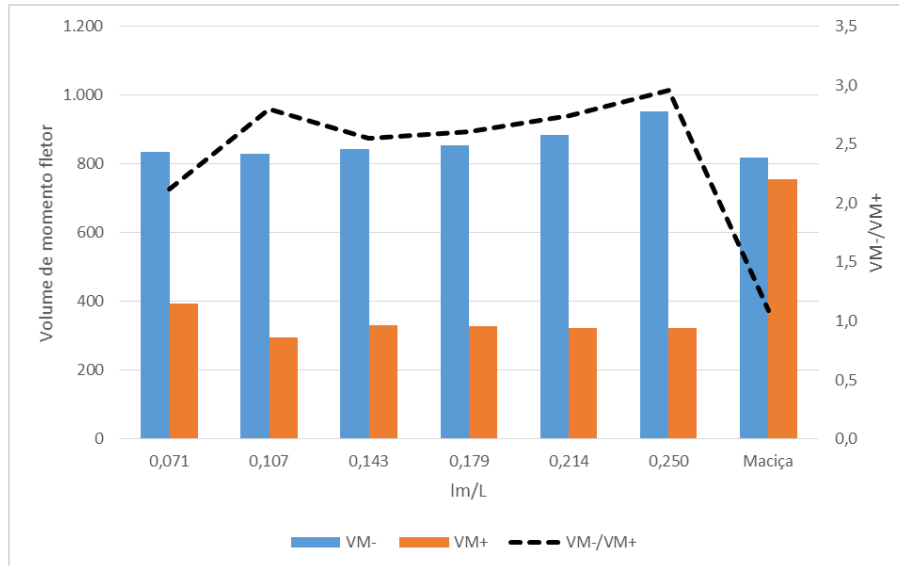
lm	lm/L	VM-	VM+			VMtotal	VM-/VM+
			Centro	Faixa	Total		
0,61	0,071	835,04	320,59	73,67	394,26	1229,30	2,12
0,915	0,107	828,12	220,91	74,97	295,88	1124,00	2,80
1,22	0,143	842,58	242,98	87,14	330,11	1172,69	2,55
1,525	0,179	853,26	244,76	82,16	326,93	1180,18	2,61
1,83	0,214	883,42	238,34	84,19	322,54	1205,95	2,74
2,135	0,250	953,16	235,07	86,99	322,06	1275,22	2,96
Maciça		819,33	441,93	313,59	755,51	1574,84	1,08

Na Figura 5.8, observa-se que o volume de momento positivo sofre uma queda entre 0,071L e 0,143L, voltando a subir quando se aumenta o tamanho do maciço, contudo, não há grande variação entre os valores, que permanecem praticamente constantes, flutuando entre 320 e 330. O volume de momento negativo também apresenta comportamento semelhante, situando-se um pouco acima de 800 para quase todos os tamanhos de maciço, apresentando uma leve tendência de crescimento a medida em que aumenta o tamanho do maciço.

A razão entre os volumes de momento negativo e positivo eleva-se entre 0,071L e 0,107L, em seguida, há uma diminuição até 0,143L, quando é retomada a trajetória de crescimento, que atinge seu ápice em 0,250L.

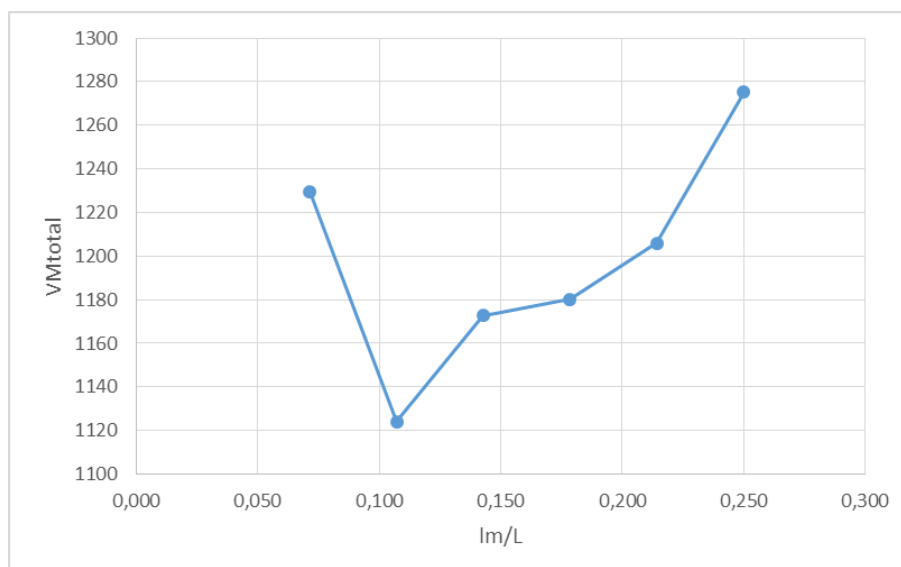
Diferentemente do observado nos vãos de 7,34 m e 6,1 m, o volume de momento fletor negativo é superior ao de momento positivo para a laje maciça. O volume de

momento negativo situa-se um pouco abaixo daqueles encontrados para a laje nervurada, enquanto que o volume de momento positivo se encontra bem acima. A razão entre os volumes é um pouco menor que 1.



**Figura 5.8 – Volume de momento fletor positivo e negativo e razão entre eles em função do tamanho do maciço para vão de 8,54 m**

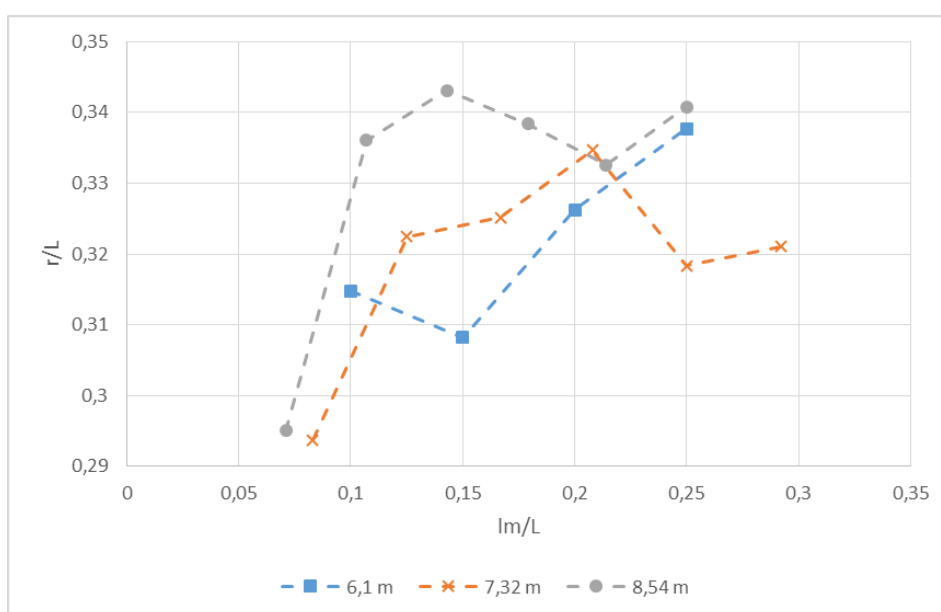
Estão plotados no gráfico da Figura 5.9 os valores do volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço. Assim como para os vãos menores, o valor mínimo encontra-se no segundo ponto, para o maciço de tamanho 0,107L. Depois desse ponto, o volume total cresce ininterruptamente até alcançar seu valor máximo em 0,250L.



**Figura 5.9 – Volume total de momento fletor em função do tamanho do maciço para vão de 8,54m**

## 5.4 Considerações Finais

Ao analisar o gráfico da Figura 5.10, que contém a distância da região de momento nulo em função do tamanho do maciço, observa-se que os valores variam pouco, entre 0,29 e 0,35, porém, situando-se acima de 0,22. Além disso, nota-se que quanto maior o tamanho do vão, maior é a distância do apoio à região de momento nulo. A distribuição para a laje de vão 6,1 m não seguiu o mesmo padrão das outras duas lajes de vão maiores. Enquanto que as lajes de vãos 8,54 m e 7,32 m seguem trajetórias ascendentes até o terceiro e quarto pontos, respectivamente, a laje de vão 6,1 m apresentou queda logo no segundo ponto. Não se pode, contudo, estabelecer um comportamento bem definido para essas curvas, tendo em vista que essas pequenas variações podem ser atribuídas ao tipo de modelagem numérica adotado.

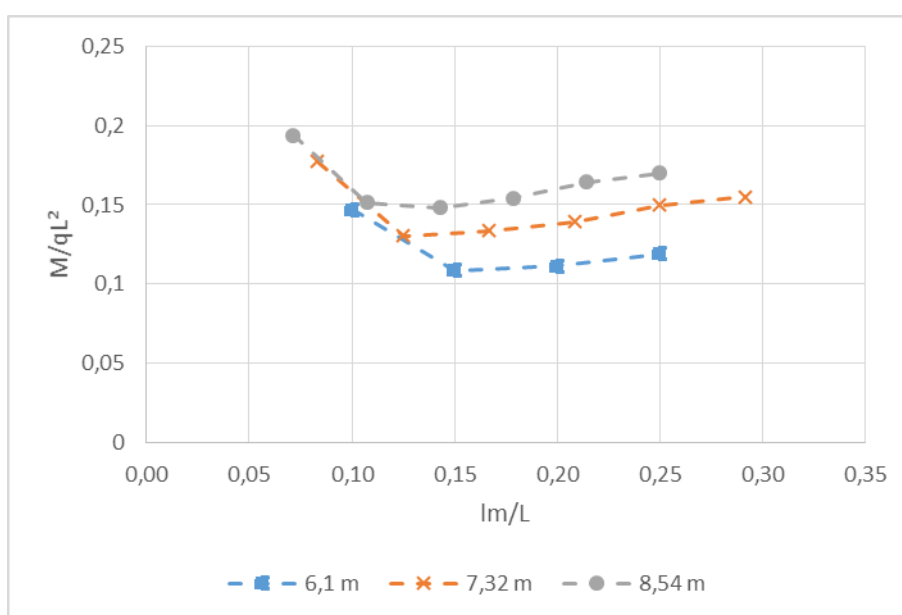


**Figura 5.10 – Distância relativa do centro do pilar à circunferência de momento nulo em função do comprimento relativo do maciço para cada vão**

Por outro lado, em todos os vãos estudados, o volume total de momento fletor apresentou redução entre os dois primeiros tamanhos de maciço. Entre esses dois primeiros pontos, o volume de momento fletor diminuiu 17,5% para as lajes com vão 6,1 m, 10,4% para a laje de vão 7,32 m e 8,6% para a laje com vão de 8,54 m. Inclusive, é justamente no segundo tamanho de maciço que estão os menores valores de volume total de momento dentre todos os pontos analisados no intervalo, que correspondem aos

maciços de tamanho 0,15L, 0,125L e 0,107L para as lajes de vão 6,1 m, 7,32 m e 8,54 m, respectivamente.

Comportamento análogo ao do volume total de momento fletor foi encontrado ao plotar os momentos fletores negativos máximos adimensionais na região do maciço (Figura 5.11). A redução do momento entre os dois primeiros pontos foi de 26,5% para as lajes com vão 6,1 m e 7,32 m e 21,7% para a laje com vão de 8,54 m. No que diz respeito ao volume de momento fletor negativo, a diminuição foi de 28,6% na laje com vão de 6,1 m, 12,2% para a laje com vão de 7,32 m e 0,8% para a laje com vão de 8,54 m.



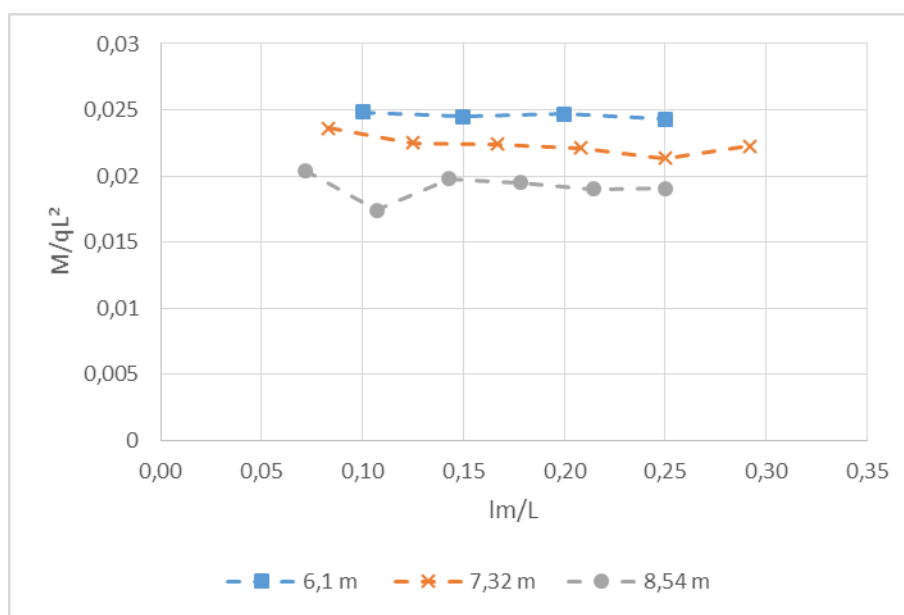
**Figura 5.11 – Momento fletor negativo máximo adimensional em função do tamanho do maciço para cada vão**

Os valores de momento fletor negativo e volume de momento fletor não caíram na mesma proporção porque o volume é influenciado ainda pela distância do apoio à região de momento nulo. Na laje com vão de 7,32 m, por exemplo, enquanto o momento fletor negativo decresceu 26,5%, o volume de momento fletor negativo reduziu apenas 12,2%, devido ao fato da distância do apoio à região de momento nulo ter sofrido um incremento de 9%. Situação análoga acontece na laje com vão de 8,54 m, cuja distância aumentou quase 14%.

Esses resultados assemelham-se com aqueles encontrados por Souza (2014) em seu estudo numérico-experimental, que verificou o cisalhamento e a flexão de lajes lisas nervuradas do apoio até a região de momentos radiais nulos (0,22L). Em seu trabalho, a

laje com menor dimensão possível do maciço (0,06L) rompeu-se por flexão devido ao esmagamento do concreto das nervuras na face do maciço. Ao duplicar o tamanho do maciço para 0,12L, observou-se uma redução do momento fletor negativo máximo no maciço de cerca de 12,5%, e a ruptura deu-se por cortante nas nervuras ligadas à região maciça.

Por ter se concentrado apenas na região de momento negativo, Souza (2014) não investigou até que ponto essa redução do momento fletor negativo influenciaria no comportamento do momento fletor positivo e qual seria sua relação com o consumo de armadura de flexão. Os valores de momento fletor positivo adimensional no centro do painel plotados no gráfico da Figura 5.12 demonstram que a tendência é que os momentos positivos decresçam de maneira muito suave com o aumento do tamanho do maciço, exceto para a laje com vão de 8,54 m que apresentou uma queda mais acentuada no segundo ponto.



**Figura 5.12 – Momento fletor positivo adimensional no centro do painel em função do tamanho do maciço para cada vão**

De modo geral, os momentos fletores negativos adimensionais aumentam de acordo com o comprimento do vão, sendo superiores para a laje com vão de 8,54 m que para as lajes com vãos de 7,32 m e 6,1 m. Contrariamente, os momentos fletores positivos adimensionais decrescem com o aumento do vão, sendo maiores para a laje com vão de 6,1 m que para as lajes com vãos de 7,32 m e 8,54 m.

Ainda de acordo com os resultados de Souza (2014), o aumento na taxa de armadura de flexão favorece a resistência ao esforço cortante, permitindo que se possa reduzir o tamanho do maciço e a quantidade de nervuras ligadas a ele. Nesse sentido, foi proposto um dimensionamento para o entorno da região maciça reduzida. Primeiramente, a escolha da altura da laje é baseada em critérios tais como distância entre pilares e máximo deslocamento vertical. A taxa de armadura de flexão é determinada pelo momento fletor negativo máximo. Em seguida, compara-se o momento fletor resistente das nervuras correspondente ao esmagamento do concreto com o momento fletor solicitante na face do maciço. Calcula-se, então, a carga de ruptura por punção da região maciça. Por fim, verifica-se a resistência à força cortante das nervuras na face da região maciça. Caso algum desses critérios não seja satisfeito, pode optar-se por aumentar a região maciça ou introduzir armadura específica para combater a solicitação cuja resistência não foi atendida.

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os trabalhos analisados comprovam a importância do emprego de técnicas de otimização no dimensionamento de estruturas de concreto armado. Tais métodos, apesar de não tão recentes, ganharam mais notoriedade ao mesmo tempo em que computadores mais potentes foram sendo desenvolvidos, possibilitando uma redução no tempo de execução. Em concreto armado, dado o maior número de variáveis envolvidas, a otimização torna-se um problema ainda mais complexo quando comparado com o aço ou a madeira, por exemplo.

Em todos os casos relatados neste trabalho, houve redução no custo de execução dos elementos e aproveitamento mais eficiente dos materiais. Os projetistas, contudo, ainda não têm lançado mão desse recurso de maneira ostensiva e a experiência do profissional é, portanto, fundamental, constituindo um fator decisivo no resultado final. Corriqueiramente, recorre-se ao dimensionamento convencional, que atende aos requisitos das normas, mas sem, necessariamente, chegar à solução ótima. Isso ficou bem demonstrado nos trabalhos que comparam os elementos executados com aqueles que foram fornecidos a partir dos métodos de otimização.

Todavia, a baixa popularidade dos métodos de otimização entre os projetistas deve ser revertida dentro dos próximos anos, devido a diversos fatores, sejam eles puramente econômicos ou mesmo porque alguns softwares comerciais já estão começando a incluir em seus processadores determinados recursos de otimização. Há que se destacar, porém, que os métodos de otimização, assim como os softwares de análise estrutural, não devem substituir e nem suplantam a competência e a experiência do projetista, mas apresentarem-se como mais uma ferramenta auxiliar no momento do dimensionamento.

No que concerne às lajes, notou-se uma certa escassez de trabalhos que se dedicam exclusivamente a esses elementos, principalmente as nervuradas. A maioria dos estudos concentra-se em vigas ou seções de pontes. Em menor escala, pode-se encontrar trabalhos sobre a otimização de pilares ou, ainda, aqueles que buscam um dimensionamento ótimo de toda a edificação, mas sem tratar a laje de maneira específica. É possível, ainda, reunir uma quantidade considerável de informações sobre a otimização de elementos pré-moldados.

Quando se trata da análise numérica das lajes lisas nervuradas, fica evidente que os dois métodos mais largamente empregados são a analogia de grelha e o MEF. Enquanto o primeiro alcança maior popularidade entre os projetistas devido a sua maior facilidade

de implementação, o segundo tende a fornecer resultados mais precisos. O tipo de elemento empregado no MEF também é alvo de discussão, assim como a consideração da rigidez à torção das nervuras. Neste trabalho, após análise com elementos de placa, optou-se por discretizar os painéis usando apenas elementos tridimensionais com o objetivo de reproduzir a estrutura mais fielmente, recorrendo-se a menos simplificações.

Após as análises dos painéis com vãos de 6,1 m, 7,32 m e 8,54 m, ficou evidente que os momentos fletores máximos negativos crescem de acordo com o vão. Por outro lado, os momentos fletores máximos positivos no centro da laje têm comportamento inverso, decrescendo com o aumento do vão. Os momentos fletores máximos negativos foram, em geral, cerca de 5 a 7,5 vezes maiores que os momentos fletores positivos no centro do painel.

Os momentos fletores positivos apresentaram pouca sensibilidade à variação dos maciços, tendendo a permanecer constantes ou diminuir lentamente em todos os vãos estudados a medida em que se aumentava o tamanho do maciço. Os momentos fletores negativos, contudo, possuem um ponto de mínimo muito bem definido para os três vãos estudados. Esse ponto coincide com o segundo menor tamanho possível de maciço, que equivale a  $0,15L$ ,  $0,125L$  e  $0,107L$  para as lajes de vão 6,1 m, 7,32 m e 8,54 m, respectivamente. A variação raio da região de momentos fletores nulos em função do tamanho do maciço e do tamanho do vão não ficou bem clara.

Como forma de estimar o consumo de armadura de flexão, estabeleceu-se um paralelo com a distribuição dos momentos fletores na laje através do conceito de volume de momento fletor. Evidenciou-se que os menores volumes de momento fletor situam-se para os mesmos tamanhos de maciço que concentram os menores momentos fletores negativos. Infere-se, assim, a grande sensibilidade que esse tipo de laje tem ao momento negativo nos apoios quando as dimensões do maciço variam, em detrimento da pequena mudança no volume de momento fletor positivo, tanto no centro do painel quanto na linha de pilares.

Sabe-se, previamente, que lajes lisas nervuradas com maciços de dimensões reduzidas podem resistir bem à força cortante (SOUZA, 2014), podendo haver ou não necessidade de armadura transversal nas nervuras. De fato, constatou-se com este trabalho que também é possível trabalhar com maciços de tamanho reduzido e obter redução no consumo de armadura de flexão.

Todavia, reduzir excessivamente o tamanho do maciço implica em aumentar os momentos fletores negativos e, conseqüentemente, o consumo de armadura de flexão.

Ainda que essa armadura tenha um efeito benéfico sobre a resistência ao cortante, há carência de estudos para quantificar o quanto essa contribuição é positiva. Assim, poder-se-ia supor que um aumento na armadura de flexão compensaria a eliminação da armadura transversal.

Cabe ao projetista, portanto, quando da concepção do projeto, ponderar sobre as diferentes variáveis que influenciam o custo total laje. Reduzir as dimensões do maciço significa economia de concreto, mas, por outro lado, pode levar a um maior consumo de armadura. Então, ficam como sugestões de trabalhos futuros que possam auxiliar essa tomada de decisão:

- verificar outros painéis de lajes com tamanhos diferentes e submetidos a carregamentos distintos;
- analisar lajes que também atendam às recomendações da NBR 15200:2004 sobre estruturas em situação de incêndio;
- considerar a influência do preço dos insumos (aço e concreto), além de outros componentes do custo total, como as fôrmas, por exemplo;
- buscar otimizar simultaneamente o consumo de armadura longitudinal e transversal;
- empregar ferramentas de otimização mais robustas, como algoritmos genéticos, cujos resultados tendem a ser ainda mais precisos.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDRE, L. J. **Otimização do pré-projeto de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos.** 2014. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2014.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M – 14).** Michigan: ACI, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:** Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15200:** Projeto de Estruturas de Concreto em Situação de Incêndio. Rio de Janeiro: ABNT, 2004.

ATEX DO BRASIL. **Dados Técnicos.** Lagoa Santa: ATEX, 2015. Disponível em: <<http://www.atex.com.br/Content/dadosTecnicos.pdf>>. Acesso em: 14 de julho de 2015.

BALLING, R. J.; YAO, X. Optimization of Reinforced Concrete Frames. **Journal of Structural Engineering.** v. 123, n. 2, p. 193 – 202, 1997.

BASTOS, E. A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos.** 2004. 168 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

BOCCHI JUNIOR, C. F.; GIONGO, J. S. **Concreto Armado:** Projeto e Construção de Lajes Nervuradas. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2010.

BOOZ, W.; THLERAU, G. B&B: A FE – Program for Cost Minimization in Concrete Design. **Numerical Mathematics.** v. 110, n. 1, p. 58 – 69, 1984.

CARVALHO, G. C. G. **Otimização de seções caixão de concreto armado e protendido pelo método dos algoritmos genéticos.** 2014. 141 f. Dissertação (Mestrado em

Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIRERO FILHO, J. R. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 3. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2013.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado – Volume 2**. 2. ed. São Paulo: PINI, 2013.

CHOU, T. Optimum Reinforced Concrete T-Beams Sections. **Journal of the Structural Division**. v. 103, n. ST8, p. 1605 – 1615, 1977.

COMPUTERS AND STRUCTURES INC. **CSI Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS, and SAFE**. Berkeley: CSI, 2010.

CORTÊS, C. F. M. **Otimização do projeto da superestrutura de pontes pré-fabricadas pelo método dos Algoritmos Genéticos**. 2010. 227 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2010.

DONIN, C. **Análise numérica de lajes nervuradas por meio do Métodos dos Elementos Finitos**. 2007. 158 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2007.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1 – 1: General rules and rules for buildings**. Bruxelas: CEN, 2004.

FRANCA, A. B. M.; FUSCO, P. B. **As Lajes Nervuradas na Moderna Construção de Edifícios**. São Paulo: AFALA & ABRAPEX, 1997.

FRIEL, L. L. Optimum Singly Reinforced Concrete Sections. **ACI Journal**. v. 71, n. 11, p. 556 – 558, 1974.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. 1. ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1989.

GROSSI, B. F. **Otimização de vigas de concreto armado**. 1998. 182 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1998.

JENKINS, W. M. Towards Structural Optimization Via the Genetic Algorithm. **Computers & Structures**. v. 40, n. 5, p. 1321 – 1327, 1991.

KOSKISTO, O. J.; ELLINGWOOD, B. R. Reliability-based optimization of plant precast concrete structures. **Journal of Structural Engineering**. v. 123, n. 3, p. 298 – 304, 1997.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Vorlesungen über Massivbau – Teil 2: Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau**. 3. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

MELO, F. A. P.; FONTE, A. O. C.; HOROWITZ, B. **Análise estrutural de lajes planas sob a ação de carregamento vertical, comparando modelos numéricos com experimentais**. In: XXIX JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL JUBILEO DON JULIO RICALDONI, 2000, Punta Del Este.

METHA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. 3. ed. São Paulo: IBRACON, 2008.

MONTOYA, P. J.; MESEGUER, A. G.; CABRÉ, F. M. **Hormigón Armado**. 14. ed. Barcelona: Gustavo Gili, 2000.

OLIVEIRA, R. S.; ARAÚJO, D. L.; CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. **Avaliação da Deformação de Lajes Nervuradas Considerando a Não-linearidade Física: Comparação entre Valores Teóricos e Experimentais**. ABECE, São Paulo, n. 4. Disponível em: <<http://www.abece.com.br/e-ArtigosABECE004.pdf>>. Acesso em: 5 de maio de 2015.

OLIVIERI, B. P. **Otimização do Projeto de Pontes Protendidas Pré-moldadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos**. 2004. 145 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

PAULA, W. C. **Comportamento Estrutural de Lajes Nervuradas de Concreto Armado com Base no Emprego do Programa ANSYS**. 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2007.

PINHEIRO, L. M.; RAZENTE, J. A. **Estruturas de Concreto**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2003.

PORTLAND CEMENT ASSOCIATION. **Market Intelligence**. Illinois: PCA, 2013. Disponível em: <<http://www.cement.org/market-economics>>. Acesso em: 17 de março de 2015.

PRASAD, J.; CHANDER, S.; AHUJA, A. K. Optimum dimensions of waffle slab for medium size floors. **Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)**. v. 3, n. 5, p. 183 – 197, 2005.

RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms. **Journal of Structural Engineering**. v. 118, n. 5, p. 1233 – 1250, 1992.

REGAN, P. E. **Behaviour of Reinforced Concrete Flat Slabs**. Londres: CIRIA, 1981.

SAHAB, M. G.; ASHOUR, A. F.; TOROPOV, V. V. Cost optimisation of reinforced concrete flat slab buildings. **Engineering Structures**. v. 27, n. 3, p. 313 – 322, 2005.

SCHWETZ, P. F.; GASTAL, F. P. S. L.; SILVA FILHO, L. C. P. Análise numérico-experimental de uma laje nervurada projetada como piso de uma quadra de tênis. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**. v. 6, n. 3, p. 375 – 391, 2013.

SINDICATO NACIONAL DA INDÚSTRIA DO CIMENTO. **Relatório Anual 2013**.  
SNIC: Rio de Janeiro, 2014.

SOUZA, S. S. M. **Resistência à Força Cortante de Lajes Lisas Nervuradas de Concreto Armado no Entorno da Região Maciça**. 2014. 213 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2014.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha**. 2003. 199 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2003.

ZIELINSKI, Z. A.; LON, W.; TROITSKY, M. S. Design of Reinforced Concrete Short-Tied Columns Using the Optimization Technique. **ACI Structural Journal**. v. 92, n. 5, p. 619 – 625, 1995.