



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Programa de Engenharia Civil

NELSON OLIVEIRA SANTOS

**MODELOS DE DANO PARA
CONCRETO**

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2015



MODELOS DE DANO PARA CONCRETO

Nelson Oliveira Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Eduardo de Moraes Rego
Fairbairn

José Claudio de Faria Telles

Rio de Janeiro

Março de 2015

MODELOS DE DANO PARA CONCRETO

Nelson Oliveira Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Eduardo de Moraes Rego Fairbairn, Dr.Ing.

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.

Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2015

Santos, Nelson Oliveira

Modelos de dano para concreto /Nelson Oliveira Santos. –
Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XXI, 100 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Eduardo de Moraes Rego Fairbairn

José Claudio de Faria Telles

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de
Engenharia Civil, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 98-100.

1. Dano. 2. Energia da Fratura. 3. Simulação
Computacional. 4. Carregamento Monótono. I. Fairbairn, Eduardo
de Moraes Rego *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

Aos meus pais,
Manoel Renilson Silva dos
Santos e Cleonice Oliveira Santos, por
todo esforço a fim de me proporcionar
um estudo de qualidade.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter suprido todas as minhas necessidades. A Ele seja dada toda honra, glória e louvor!

A minha família, Manoel Renilson, Cleonice, Margarida, Ester, Cleide e Larinha, pelo apoio concedido durante todos estes anos de estudos. Sem eles na minha vida não teria chegado até aqui.

A minha noiva Jamyle, pela paciência, compreensão, afeto e carinho nestes dois anos de mestrado.

Aos professores Eduardo Fairbairn e José Telles por concordaram em compartilhar um pouco do grande conhecimento acadêmico que possuem.

Aos professores José Mário Feitosa Lima, Maria do Socorro São Mateus, Cíntia Maria Ariane Fontes e Fernando Luiz Bastos Ribeiro por todo o apoio e incentivo.

Aos meus colegas Alfredo Flores, Érica Carneiro, Eudes Marinho, Karyne Ferreira, Mariane Rita, Rafaela Sanchez, Renato Evangelista, Rodrigo Costa, Vinícius Telles, Willian Godoy, pelos momentos de estudos e descontração.

Aos irmãos da igreja Assembleia de Deus das Nações Ministério Monte Sinai, em especial ao José Wellington Vargas e à família do Pr. João Alves, pelo acolhimento e carinho.

Ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse até aqui meu muito obrigado.

Uma coisa que realmente desejo
do SENHOR é o privilégio de viver
durante toda a minha vida na sua
presença, para descobrir a cada dia a
bondade do SENHOR e buscar a sua
orientação.

Sl. 27:04

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELOS DE DANO PARA CONCRETO

Nelson Oliveira Santos

Março/2015

Orientadores: Eduardo de Moraes Rego Fairbairn

José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

A modelagem de fissuração do concreto introduz o problema de não objetividade dos resultados quando há concentração de deformações.

Neste trabalho, a fim de contornar o problema de não objetividade dos resultados, modelos de dano que tomam a energia de fissuração como propriedade do material são propostos. Os modelos foram implementados em um programa que usa como método numérico o Método dos Elementos Finitos (MEF) para realização de análise da propagação de fissuras no concreto.

Para verificação da implementação foi reproduzido numericamente um ensaio de flexão a três pontos de uma viga em concreto armado e de uma viga em concreto reforçado por fibras metálicas, além de ser reproduzido numericamente um ensaio de tração simples de uma viga de concreto reforçado por fibras de PVA.

Os resultados numéricos obtidos foram comparados com os experimentais encontrados na literatura e constatou-se a pertinência dos modelos de dano propostos neste trabalho.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DAMAGE MODEL FOR CONCRETE

Nelson Oliveira Santos

March/2015

Orientadores: Eduardo de Moraes Rego Fairbairn

José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

The modeling of concrete cracking introduces the problem of non-objectivity of the results when there is concentration of strains.

In this work, in order to avoid the problem of non-objectivity of the results, damage models that take the energy of cracking as a material property are proposed. The models were implemented in a program that uses the Finite Element Method (FEM) for performing analysis of crack propagation in concrete.

To verify the implementation, tests were numerically reproduced, such as three point flexural tests on standard reinforced concrete beam and on metallic fiber reinforced beam, as well as a simple tensile test on a PVA fiber reinforced concrete beam.

The numerical results were compared with experimental ones found in the literature and shown the relevance of damage models proposed in this work.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	CONCRETO.....	1
1.2	DANO.....	2
1.3	JUSTIFICATIVA	4
1.4	OBJETIVO	5
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	5
2	COMPORTAMENTO DO CONCRETO	7
2.1	FORMAÇÃO DE FISSURAS NO CONCRETO	7
2.2	COMPORTAMENTO NÃO SIMÉTRICO DO CONCRETO	9
2.2.1	Comportamento do concreto a compressão	9
2.2.2	Comportamento do concreto a tração	10
3	TEORIA DE DANO	12
3.1	DANO.....	12
3.1.1	Variável de dano	13
3.1.2	Tensão Efetiva	14
3.1.3	Princípio de Equivalência em Deformação	15
3.1.4	Caracterização do Dano Pela Variação do Módulo de Elasticidade.....	16
3.1.5	Princípio de Equivalência em Tensão.....	17

3.2	MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS	18
3.2.1	Hipóteses.....	18
3.2.2	Deformação Equivalente	19
3.2.3	Critério de dano proposto	20
3.2.4	Comportamento Assimétrico do Concreto	22
4	TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA	26
4.1	COMENTÁRIOS SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	26
4.1.1	Critério de Convergência.....	33
4.1.2	Elemento Triangular Linear.....	33
4.2	VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO	38
4.2.1	Evolução das Variáveis de Dano	38
4.2.2	Influência dos Parâmetros $\epsilon d_0, A_t, B_t, A_c$ e B_c sobre a Curva Tensão x Deformação	41
4.2.3	Viga Armada de Mazars	45
4.3	PROBLEMA DA NÃO-OBJETIVIDADE	55
4.4	ENERGIA DA FRATURA	58
4.4.1	Lei de Evolução de Dano para um Comportamento <i>Softening</i> Linear	61
4.4.2	Calculo de Deslocamento Final de um Ensaio de Tração Direta	64
4.4.3	Previsão de resultados Numéricos	67
4.4.4	Validação da Largura de Banda (h)	71

5	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	81
5.1	ENSAIO PARA DETERMINAÇÃO DA ENERGIA DA FRATURA	81
5.1.1	Características do Concreto e Ensaio de Flexão a Três Pontos com Entalhe	83
5.1.2	Lei de Evolução de Dano.....	86
5.1.3	Resultados.....	87
5.2	FISSURAÇÕES MÚLTIPLAS	89
5.2.1	Compósito Reforçado com Fibras de PVA	89
5.2.2	Ensaio de Tração Direta em Compósito SHCC.....	90

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Representação das fases do concreto	8
Figura 2.2 - Modos de aberturas das fissuras	9
Figura 2.3 - Curva tensão deformação - ensaio de compressão uniaxial	10
Figura 2.4 - Curva tensão deformação - ensaio de tração uniaxial.....	11
Figura 3.1 - Elemento Danificado	13
Figura 3.2 - Tensão Efetiva e Deformação Equivalente.....	15
Figura 3.3 – Equivalência em Tensão	17
Figura 3.4 - Modelo de Dano Elástico.....	18
Figura 3.5 - Definição de ϵ_{d0}	20
Figura 3.6 - Representação gráfica da superfície $\lambda(D)$	21
Figura 3.7 - Propagação de fissura no concreto.....	22
Figura 3.8 –Curvas experimentais e teóricas para tração e compressão uniaxial.....	23
Figura 4.1 - Coordenadas de área de um ponto P	33
Figura 4.2 – Variação Linear das Coordenadas de Área	34
Figura 4.3 – Vértices do Triângulo.....	35
Figura 4.4 - Triângulo de Geometria Linear no Domínio de Coordenadas Naturais	36
Figura 4.5 - Ensaio Uniaxial.....	39
Figura 4.6 - Início do Processo de Evolução de Dano, $\epsilon_{d0} = 1.10 - 4$	41
Figura 4.7 - Velocidade do Processo de Evolução de Dano, $\epsilon_{d0} = 1.10 - 4$	41

Figura 4.8 - Influência do Parâmetro ϵd_0	42
Figura 4.9 - Influência do Parâmetro A_t	43
Figura 4.10 - Influência do Parâmetro B_t	43
Figura 4.11 - Influência do Parâmetro B_c	44
Figura 4.12 - Influência do Parâmetro A_c	44
Figura 4.13 - Influência dos Parâmetro A_c e B_c	45
Figura 4.14 - Detalhamento Viga de 3 pontos.....	46
Figura 4.15 - Disposição dos Triângulos na Malha.....	46
Figura 4.16 - Disposição dos nós no Domínio	47
Figura 4.17 - Elementos de Treliza	47
Figura 4.18 - Condições de Contorno.....	48
Figura 4.19 - Comportamento da Viga de Concreto Armado	49
Figura 4.20 – Curva Tensão x Deformação Equivalente.....	50
Figura 4.21 - Estado de Dano da Viga para $P = 15$ KN	51
Figura 4.22 - Estado de Dano da Viga para $P = 20$ KN	52
Figura 4.23 - Estado de Dano da Viga para $P = 25$ KN	53
Figura 4.24 - Estado de Dano da Viga para $P = 30$ KN	54
Figura 4.25 - Discretização do Domínio para um Corpo Submetido ao Ensaio de Tração Direta	56
Figura 4.26 - Curva Carga x Deslocamento para um caso não objetivo.	57
Figura 4.27 - Método Direto Para Determinação de G_f	58

Figura 4.28 - Obtenção da Deformação Final	60
Figura 4.29 – Deformação Total para Comportamento <i>Softening</i> Linear	61
Figura 4.30 – Comportamento <i>Softening</i> linear.....	62
Figura 4.31 – Curva de Evolução de Dano para uma Lei de Linear de <i>Softening</i>	63
Figura 4.32 – Ensaio de tração Direta	65
Figura 4.33 – Ensaio de Tração Direta com Desenvolvimento de uma Fissura.....	67
Figura 4.34 – Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_1 do Caso 1	68
Figura 4.35 - Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_2 do Caso 1	68
Figura 4.36 - Ensaio de Tração Direta com Desenvolvimento de duas Fissura.....	69
Figura 4.37 Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_2 do Caso 2.....	70
Figura 4.38 - Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_2 do Caso 2	70
Figura 4.39 - Curva Tensão x Deslocamento Para um ensaio de Tração Direta – malha com 6 elementos	72
Figura 4.40 - Curva Tensão x Deformação Para um ensaio de Tração Direta – malha com 6 elementos	73
Figura 4.41 - Evolução do Dano Para um ensaio de Tração Direta – malha com 6 elementos.....	73
Figura 4.42 – Curva Tensão x Deslocamento Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos	74
Figura 4.43 - - Curva Tensão x Deformação Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos	75
Figura 4.44 – Evolução do Dano Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos.....	75

Figura 4.45 - Curva Tensão x Deslocamento Para um ensaio de Tração Direta – malha com 600 elementos	76
Figura 4.46 - Curva Tensão x Deformação Para um ensaio de Tração Direta – malha com 600 elementos	77
Figura 4.47 - Evolução do Dano Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos	77
Figura 4.49 – Curva Tensão x Deslocamento para Fissura Distribuída em todo Corpo	79
Figura 4.50 - Curva Tensão x Deformação para Fissura Distribuída em todo Corpo....	80
Figura 4.51 – Evolução do Dano para Fissura Distribuída em todo Corpo.....	80
Figura 5.1 – Curva Carga x Deslocamento de um Ensaio de Flexão a três pontos e as complementares para o cálculo de G_f	82
Figura 5.2 – Ensaio de Flexão a Três Pontos com Entalhe	82
Figura 5.3 – Curvas Carga x Deslocamento Vertical do Concreto Reforçado com 1% de Fibras Metálicas e CBCA	84
Figura 5.4 – Curva para Determinação de f_t	85
Figura 5.5 – Curva <i>Softening</i> Proposta por Hordijk	86
Figura 5.6 – Discretização da Viga para Ensaio Numérico de Flexão a Três Pontos	87
Figura 5.7 - Confronto entre Respostas Experimentais e Numérica	88
Figura 5.8 - Configuração Final de Dano do Ensaio de Flexão a Três Pontos.....	89
Figura 5.9 - Curva Típica de um Compósito de Multiplas Fissura	90
Figura 5.10 – Características Geométricas para o Ensaio de Tração Direta	91
Figura 5.11 – Comportamento <i>Hardening</i>	91

Figura 5.12 – Discretização do Domínio para Ensaio Numérico de Tração Direta	92
Figura 5.13 – Curva Tensão x Deformação de ensaio de Tração Direta - M01	93
Figura 5.14 – Evolução do Dano no Ensaio de Tração Direta – M01.....	93
Figura 5.15 - Curva Tensão x Deformação de ensaio de Tração Direta - M02.....	94
Figura 5.16 - Evolução do Dano no Ensaio de Tração Direta – M02	94
Figura 5.17 - Curva Tensão x Deformação de ensaio de Tração Direta - M03.....	95
Figura 5.18- Evolução do Dano no Ensaio de Tração Direta – M03	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Parâmetros para o Ensaio de Flexão de Viga	48
Tabela 4.2 - Dimensões de Largura de Banda.....	60
Tabela 5.1 – Características Geométricas da Viga para Ensaio de Flexão a Três Pontos	83
Tabela 5.2 – Tabela de Cálculo para Determinação de Gf	84
Tabela 5.3 - Tabela de Cálculo para Determinação de ft	86
Tabela 5.4 - Resultados de Carga Máxima x Deslocamento Vertical	89
Tabela 5.5 - Dados de Entrada para Ensaio Numérico.....	92

LISTA DE SÍMBOLOS

S	Área
\vec{n}	Vetor normal
\tilde{S}	Área que efetivamente resiste aos esforços
S_D	Área total de defeitos
D_n	Variável de Dano orientado pelo vetor \vec{n}
D	Variável escalar de Dano
σ	Tensão usual
F	Força unidimensional
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
ε^e	Deformação Elástica
ε^p	Deformação Plástica
E	Módulo de Elasticidade de Material Não Danificado
\tilde{E}	Módulo de Elasticidade de Material Danificado
φ^+	Variável Uniaxial de Dano para Tração
φ^-	Variável Uniaxial de Dano para Compressão
f_0^+	Última Tensão para Comportamento Elástico na Tração
f_0^-	Última Tensão para Comportamento Elástico na Compressão
f_u^+	Tensão Última na Tração
f_u^-	Tensão Última na Compressão
J_i	i -ésimo Invariante do Tensor Desviador
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação Equivalente
$\langle \varepsilon_i \rangle_+$	Parte Positiva da Deformação Principal i
ε_i	Deformação principal i
ν	Coefficiente de Poisson
$S(D)$	Superfície Limite de Dano
ε_{d0}	Deformação para Máxima Tensão em Ensaio de Tração Uniaxial
\dot{D}	Taxa de Dano
D_T	Variável de Dano de Tração

D_C	Variável de Dano de Compressão
\dot{D}_T	Taxa de Dano de Tração
\dot{D}_C	Taxa de Dano de Compressão
A_C, B_C, A_T, B_T	Parâmetros do Material
α_C	Coefficiente que Multiplica Variável de Dano de Compressão
α_T	Coefficiente que Multiplica Variável de Dano de Tração
$\underline{\tilde{\sigma}}$	Tensor de Tensões Principais Efetivas
$\underline{\underline{D}}_0$	Tensor Elástico do Material sem Dano
$\underline{\varepsilon}$	Tensor de Deformações Principais
$\langle \underline{\sigma} \rangle_+$	Parte Positiva do Tensor de Tensões Principais Efetivas
$\langle \underline{\sigma} \rangle_-$	Parte Negativa do Tensor de Tensões Principais Efetivas
σ_i	Tensão Principal i
$\underline{\varepsilon}_T$	Parte de Tração do Tensor de Deformação Principal
$\underline{\varepsilon}_C$	Parte de Compressão do Tensor de Deformação Principal
ε_V^+	Variável Cinética Representativa do Estado Local de Extensão
\mathbf{k}_e	Matriz de Rigidez do Elemento
\mathbf{D}	Matriz Constitutiva Para um Estado de Dano Isotrópico
$\tilde{\mathbf{k}}_e$	Matriz de Rigidez Efetiva de um Elemento
\mathbf{K}	Matriz de Rigidez Global
\mathbf{U}	Vetor de Deslocamento Global
\mathbf{F}	Vetor de Forças Globais
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de Deslocamentos Impostos
\mathbf{u}	Vetor de Deslocamentos Calculados
σ_0	Estado de Tensões Elásticas
Γ	Resíduo
$\Delta \mathbf{U}$	Vetor de Variação de Deslocamentos Globais
φ	Tolerância Pré-estabelecida para Convergência
L_i	Coordenadas de Área para um Elemento Triangular Linear ($i=1, 2, 3$)
$\hat{\mathbf{u}}$	Deslocamento Aproximado
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana

N_i	Funções de Interpolação
ξ_i	Coordenadas Naturais (i=1, 2, 3)
σ_{max}	Tensão Máxima
E_c	Módulo de Elasticidade do Concreto
E_a	Módulo de Elasticidade do Aço
$\Delta\bar{u}$	Incremento de deslocamento imposto
M_z	Momento em Torno da Direção z
I_z	Momento de Inércia em torno da Direção z
Ω_o	Subdomínio formado por Elementos sem fissura
Ω_{mf}	Subdomínio formado por elementos com micrifissuração
Ω_f	Subdomínio formado por elementos fissurados
h	Largura de Banda
G_f	Energia da Fratura por unidade de área
u_p	Deslocamentos permanentes
u_{fi}	Deslocamento Final
u_{ult}	Deslocamento Último
ε_f	Deformação de Fissuração
g_f	Energia da fratura por unidade de volume
ε_{fi}	Deformação Final
ε_{ult}	Deformação Última
f_t	Tensão de Tração de Início de Dano
u_e	Deslocamento Elástico
u_r	Deslocamento recuperado
L_d	Comprimento Característico do Dano
n_{fx}	Número de fissuras até a posição x
n_{fL}	Número de fissuras desenvolvidas ao longo de todo comprimento do corpo
W	Energia Total do Corpo
δ_0	Deslocamento final na flexão
f_{net}	Resistencia a Tração na flexão
l_{ch}	Comprimento Característico de Hillerborg

$f_{t,ul}$

Resistência a tração máxima para comportamento hardening

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONCRETO

O concreto é um material de construção constituído por mistura de aglomerante (cimento) com um ou mais materiais inertes (agregado graúdo e miúdo) e água e trata-se do segundo material mais consumido no mundo sendo inferior apenas ao consumo da água. Estima-se que anualmente são consumidos 11 bilhões de toneladas de concreto. Esta posição quanto ao consumo deve-se ao emprego do material em diversos tipos de construção desde construções mais simples a construções mais complexas, podendo citar como exemplo seu uso em casas de alvenaria, em rodovias, em pontes, em edifícios, mesmo os mais altos do mundo, em torres de resfriamento, em usinas hidrelétricas e nucleares, em obras de saneamento e até mesmo em plataformas de extração petrolífera móveis.

Metha e Monteiro (2006) citam três grandes razões que justificam este alto consumo do concreto nas construções:

- A primeira razão é que, ao contrário da madeira e do aço comum, o concreto é um material que possui excelente resistência à água. Tal característica se destaca desde o início de seu uso, uma vez que as primeiras aplicações do material consistiram de aquedutos e muros de contenção construídos pelos romanos. Atualmente o uso do concreto em estruturas de controle, armazenamento e transporte de água como barragens e canais é bastante comum em todo o mundo.
- A segunda razão é que o concreto nas primeiras horas apresenta consistência plástica enrijecendo-se ao passar do tempo. Tal característica lhe confere a vantagem de tomar qualquer forma proposta por quem idealiza a estrutura.
- E a terceira razão é que fatores como valor relativamente barato dos agregados, água e cimento Portland, e também a vasta disponibilidade destas matérias-primas que compõe o concreto, atraem os engenheiros para o seu uso.

Estas vantagens levaram o concreto ao posto de material mais usado pelos engenheiros na construção civil. Conseqüentemente estudos para conhecer seu comportamento tiveram avanços e modelos constitutivos foram formulados baseados

em teoria da elasticidade, plasticidade, fratura e dano com o intuito de descrever tal comportamento quando submetido a solicitações.

Os avanços das pesquisas permitiram identificar que ainda na fase de cura do concreto ocorre a formação de fissuras numa região próxima dos agregados graúdos chamada de zona de transição. A formação dessas microfissuras, antes mesmo do concreto ser submetido à carga externa e à propagação delas após aplicação de carga é o principal responsável por características peculiares do concreto como resposta não simétrica a tração e compressão, fragilidade do concreto à tração e comportamento não linear após certa quantidade de carga.

1.2 DANO

A fim de prever a ruptura associada à deformação lenta dos metais submetidos à tensão constante, Kachanov, em 1958, propôs a Mecânica do Dano tornando-se o pesquisador pioneiro desta teoria. Segundo Mazars (1984) a Mecânica do Dano surge com intuito de descrever macroscopicamente a influência da degradação da matéria devido ao surgimento, crescimento e aglutinação de microfissuras no interior do material, ou seja, a teoria descreve como se dá a deterioração do material partindo de um estado inicial sem dano algum até um estado final quando é possível observar macroscopicamente as fissuras, que é o estado danificado do material.

Uma variável escalar ψ foi proposta por Kachanov para representar o estado de dano do material. ψ assumia valores sempre positivos e variava de 0 a 1, sendo que $\psi = 1$ representava um estado totalmente danificado do material e $\psi = 0$ representava um estado inicial sem dano. Álvares (1993) esclarece que a ideia de representar o estado de dano por um campo escalar era pelo fato de acreditar inicialmente que as características de isotropia inicial do material não sofriam mudanças devido ao processo de deterioração sofrido pelo mesmo.

Lemaitre e Chaboche (1985) explicam que a diferença existente entre um elemento de volume altamente danificado e um elemento de volume sem dano ou virgem é muito pouca, portanto, a representação do estado de deterioração do material, ou seja, a mensuração do dano é um problema difícil de ser resolvido e para isso é necessário pensar em uma variável interna que represente o estado danificado do

material. Guello (2002) lembra que o dano não é uma grandeza física possível de ser mensurada de forma direta tornando-se sua quantificação factível por meio da redução progressiva de uma propriedade mecânica global como a rigidez do material.

A mudança das características mecânicas do material devido à modificação das propriedades elásticas, como também, modificação do comportamento visco-plástico ou plástico, principalmente em metais e formação de deformações residuais fora do domínio plástico, notadamente em materiais ditos frágeis, são exemplos citados por Mazars (1984) que traduzem os efeitos do dano sobre o comportamento mecânico dos materiais. O dano, portanto, permite considerar os efeitos dos processos de deterioração no comportamento mecânico macroscópico. (ÁLVARES, 1993)

O modelo de dano apresentado por Kachanov apresenta limitações uma vez que o fenômeno real de dano no material é muito mais complexo do que o proposto inicialmente pelo pesquisador. A fim de descrever melhor o fenômeno de dano diferentes modelos foram propostos posteriormente.

Em 1985 Lamaitre e Chaboche formalizam a denominada Mecânica do Dano Contínuo fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis. Tal fundamentação foi suporte para Lamaitre e Chaboche formularem leis constitutivas que permitem prever com suficiente precisão a resposta não-linear de estruturas submetidas a ações externas.

Para descrever o dano no concreto, Mazars (1984) propôs pela primeira vez o modelo de dano para este material. Ao longo dos anos outros modelos surgiram, podendo citar o modelo de La Borderie, Mazars e Pijaudier-Caobot (1991) e Flórez-López (1993), dentre outros.

Os modelos de dano para o concreto podem ser divididos em dois grandes grupos: modelo de dano isotrópico e o modelo de dano anisotrópico. O modelo isotrópico considera que em todas as direções a distribuição das fissuras e cavidades que caracterizam o dano são uniformes e, portanto, uma variável escalar é suficiente para descrever o estado de dano. Já no modelo anisotrópico tal uniformidade não é verdadeira e uma variável tensorial é necessária para descrever o estado danificado do material.

O modelo isotrópico sendo conceitualmente simples tem a vantagem de um número pequeno de parâmetros a serem identificados e a desvantagem de ter sua aplicação limitada a algumas situações. A quantidade de aplicações pode ser ampliada caso faça-se uso do modelo de dano anisotrópico, porém os parâmetros deste modelo são de complexa identificação.

1.3 JUSTIFICATIVA

Com a tentativa de descrever o comportamento do concreto diversos modelos ao longo dos anos foram desenvolvidos baseados nas teorias de elasticidade, plasticidade e mais recentemente na mecânica do dano. Quanto a este último podem-se citar os modelos constitutivos para concreto de Mazars (1984), La Borderie, Mazars e Pijaudier-Caobot (1991) e Flórez-López (1993).

Apesar do concreto ser bastante estudado, as características deste material como heterogeneidade, resposta não simétrica à tração e à compressão, mudanças nas propriedades mecânicas devidas à evolução da microfissuração, o torna um material com comportamento bastante complexo e os modelos construídos ficam restritos a um campo de interesse específico devido à dificuldade que existe de formular uma lei constitutiva que reproduza o comportamento do material submetido a um tipo qualquer de solicitação.

Um dos processos que se destaca no concreto é a evolução de fissuração que tem início antes mesmo do material ser submetido a carregamento. Uma grandeza física que mede o processo de fissuração no concreto é a energia de fissuração ou energia de fratura e representa a energia por unidade de área para que o concreto fissure. Portanto, quanto maior a energia de fratura maior é a ductilidade do material.

Realmente, o processo de fissuração do concreto ganha destaque devido ao fato de ser o principal processo responsável por conferir ao concreto resposta não simétrica a tração e compressão, justifica o fato do concreto ser frágil a tração e ainda contribuir para o comportamento não linear do concreto. Sendo a Mecânica do Dano Contínuo uma teoria para análise dos efeitos de deterioração do material o seu uso para descrever o comportamento do concreto é de grande êxito.

1.4 OBJETIVO

Neste trabalho é desenvolvida uma ferramenta computacional baseada no método dos elementos finitos para análise do comportamento do concreto submetido a carregamentos monótonos considerando as contribuições dos modelos constitutivos de dano desenvolvidos a partir do modelo apresentado por Mazars (1984). Tais modelos tentam descrever o comportamento não linear do concreto a partir da degradação de sua rigidez. Os modelos de dano desenvolvidos usa a energia da fratura como propriedade do material e insere um comprimento interno característico, onde se desenvolve as deformações localizadas a fim de que solução seja objetiva, isto é, a fim de que a solução convirja para um resultado fisicamente real. Portanto este trabalho verificará se os modelos sugeridos com o intuito de solucionar o problema da não objetividade dos resultados, problema tal encontrado no modelo de Mazars (1984), são suficientes para descrever de forma mais realista o comportamento do concreto.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1 é apresentado de forma resumida o fenômeno responsável por comportamentos peculiares do concreto tais como não linearidade e comportamento não simétrico quando submetido a tração e compressão. Também é apresentada de forma resumida a teoria de dano, sua origem e os modelos baseados nesta teoria que são usados para descrever o comportamento do concreto. Por fim é feita a justificativa e é declarado o objetivo do trabalho.

O capítulo 2 lembra a importância que o concreto tem para engenharia e os motivos pelo qual é usado em larga escala. De forma detalhada é explicado a origem das fissuras, como se dá sua propagação e também explica os comportamentos do concreto que são oriundos de tal fenômeno.

No capítulo 3 os conceitos da teoria de dano e as formas indiretas de medi-lo são apresentadas. O modelo constitutivo de dano para concreto desenvolvido por Mazars é explicado nesse capítulo destacando-se deste modelo as hipóteses consideradas, o critério de início de dano adotado e a forma de medir o estado de deterioração do

concreto considerando seu comportamento não simétrico quando submetido a tração e compressão.

No capítulo 4 é apresentado o tratamento numérico, baseado no método dos elementos finitos, necessário para desenvolvimento da ferramenta computacional que prevê o comportamento do concreto considerando a não linearidade e a degradação da rigidez. Nesse capítulo também é feita uma alerta sobre o problema da não objetividade do modelo de Mazars (1984), é apresentado a proposta de solução para ter modelos objetivos e por fim são realizadas várias análises numéricas para verificação da solução proposta.

No capítulo 5 é feita apresentação e análise dos resultados obtidos, comparando os resultados experimentais encontrados na literatura com os resultados numéricos obtidos por meio dos modelos desenvolvidos.

Por fim são feitas as conclusões a respeito dos resultados encontrados para os novos modelos, além de serem apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

2 COMPORTAMENTO DO CONCRETO

2.1 FORMAÇÃO DE FISSURAS NO CONCRETO

Define-se o concreto como produto resultante da mistura de cimento Portland com areia, brita e água. Macroscopicamente, pode-se considerar o concreto como um material bifásico constituído de partículas de agregado com formas e tamanhos variados dispersa em uma matriz de pasta de cimento. Por meio de uma seção transversal do concreto facilmente se distinguem estas duas fases.

Já numa análise microscópica o concreto apresenta-se como um material trifásico. É possível identificar uma terceira fase formada na região próxima dos agregados graúdos. Esta fase é denominada de zona de transição, isto porque nesta região a pasta de cimento hidratada tem microestrutura muito diferente da matriz de pasta de cimento ou argamassa no sistema.

Metha e Monteiro (2006) explicam que a identificação da interface pasta de cimento-agregado como uma terceira fase no sistema justifica muitos aspectos do comportamento do concreto sob tensão. Um exemplo é o comportamento não simétrico do concreto quando submetido a tensão de tração e compressão, como será visto no item 2.2.

A zona de transição é a fase mais frágil do concreto apresentando resistência muito menor do que as outras duas fases: agregado e matriz cimentícia. Esta fragilidade é atribuída à forma como se dá seu desenvolvimento. Inicialmente, no concreto fresco recém-compactado, é formada uma película de água ao redor dos grandes agregados aumentando a relação água/cimento nesta região. Pelo fato de tal região ter relação água/cimento elevada quando comparado a da matriz cimentícia os produtos cristalinos (etringita e hidróxido de cálcio) formados nesta região apresentam cristais relativamente maiores levando a zona de transição ter uma estrutura mais porosa. A formação posterior de silicato de cálcio hidratado (C-S-H) e de uma segunda geração de cristais menores de etringita e hidróxido de cálcio preenche parte dos vazios aumentando a densidade da região, mas o ganho de resistência não é significativo. A Figura 2.1 ilustra as três fases do concreto.

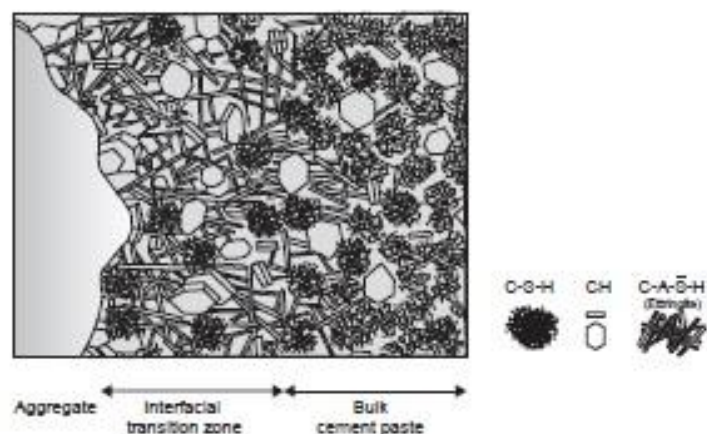


Figura 2.1 - Representação das fases do concreto
(MEHTA E MONTEIRO, 2006)

Devido a fragilidade da zona de transição, Botta (1998) explica que ainda na fase da cura do concreto, fenômenos como a retração por secagem, geram fissuras distribuídas em seu volume, porém concentrando predominantemente na interface entre agregados e massa cimentícia. Botta (1998) ainda explica que as fissuras nesta zona são chamadas de primárias enquanto as situadas na massa de cimento e areia são secundárias. Nota-se que antes mesmo de o concreto ser carregado este já apresenta fissuras.

Quando o concreto é carregado, Mehta e Monteiro (2006) explicam que baixos níveis de energia são necessários para aumentar as fissuras já existentes nas zonas de transição. Conclui-se que o início do dano no concreto inicia predominantemente na zona de transição. Só em níveis de tensão de cerca de 70% da resistência última que as fissurações na matriz de argamassa iniciam (fissuras secundárias). Com o aumento da tensão as fissuras na matriz se propagam unindo-se às fissuras primárias. A formação de um sistema de fissuras leva o concreto ao completo dano.

A mecânica da fratura traz uma importante classificação dos modos característicos de abertura da fissuração no concreto. A seguir são apresentados três modos possíveis:

Modo I – A fissura se desenvolve num plano perpendicular ao do carregamento devido a um esforço de tração uniaxial.

Modo II – As superfícies da fissura escorrega entre si devido a aplicação de um esforço cisalhante na direção paralela ao escorregamento das superfícies da fissura.

Modo III – Ocorre também um escorregamento entre as superfícies da fissura devido a um esforço cisalhante perpendicular a direção da fissura.

A Figura 2.2 ilustra os modos de aberturas de fissura no concreto.

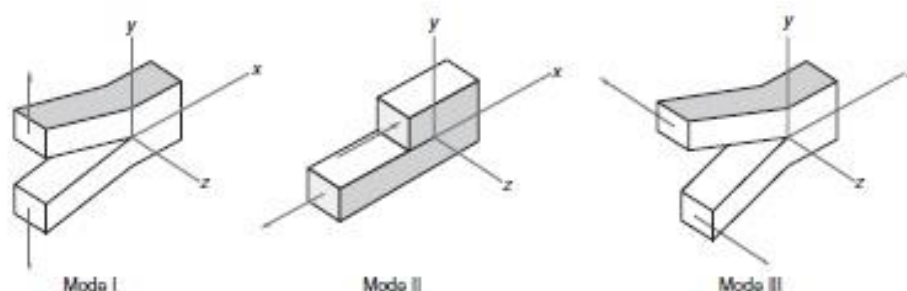


Figura 2.2 - Modos de aberturas das fissuras
(MEHTA E MONTEIRO, 2006)

2.2 COMPORTAMENTO NÃO SIMÉTRICO DO CONCRETO

Segundo Mehta e Monteiro (2006) a determinação dos comportamentos do material sob diferentes estados de tensão sofre grande influência da presença de microfissuras na região entre matriz, pasta de cimento e agregado, denominado de zona de transição.

2.2.1 Comportamento do concreto a compressão

Mehta e Monteiro (2006) e Botta (1998) explicam que da análise da danificação do concreto submetido à compressão é possível concluir que até 30% da tensão máxima do ensaio uniaxial de compressão as fissuras permanecem estáveis na região da interface e o comportamento do concreto é linear-elástico. Aumentando a carga até 75% ou 90% do seu valor máximo as fissuras se desenvolvem segundo o modo II que são fissuras a 45° em relação à direção da carga e o modo I ainda na região da interface agregado-argamassa o que leva a curva tensão-deformação apresentar um aumento gradual na curvatura. Segundo Álvares (1993), a combinação entre as aberturas I e II é atribuída ao efeito do coeficiente de Poisson e a heterogeneidade do material que

produzem alongamentos e tensão de tração no ensaio uniaxial de compressão. É a essa combinação de aberturas que se atribui o fato do concreto submetido a compressão apresentar fissuras preferivelmente na direção da carga.

A curva tensão-deformação curva-se acentuadamente, tornando-se quase horizontal, a partir de 75% da carga máxima. Tal comportamento pode ser atribuído à instabilidade e às rupturas locais na argamassa. Mehta e Monteiro (2006) justificam esta instabilidade ao fato que a partir deste ponto a energia necessária para aliviar as fissuras é inferior a energia interna disponível levando a união de fissuras entre a matriz e a zona de transição e conduzindo o corpo-de-prova a sua ruptura completa. A Figura 2.3 apresenta a curva tensão-deformação que expressa o comportamento do concreto submetido a um ensaio de compressão uniaxial.

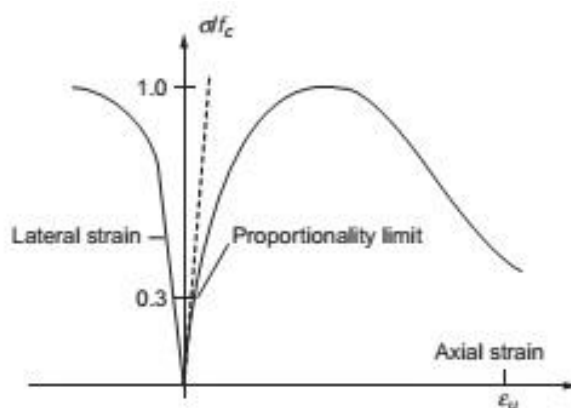


Figura 2.3 - Curva tensão deformação - ensaio de compressão uniaxial
MEHTA E MONTEIRO (2006)

2.2.2 Comportamento do concreto a tração

A partir da análise do ensaio de tração uniaxial é possível observar diferenças importantes no comportamento quando comparado ao ensaio de compressão, apesar de que, segundo Mehta e Monteiro (2006), o formato da curva tensão-deformação, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do concreto submetido à tração uniaxial serem semelhantes aos de compressão.

Uma diferença importante é o fato de que o concreto quando submetido à tração uniaxial interrompe muito menos as fissuras do que quando submetido à compressão,

isto é, a facilidade com que as fissuras se propagam sob tensão de tração é muito maior do que sob tensão de compressão. Segundo Chen apud Mehta e Monteiro (2006) por interromper muito menos as fissuras, a ruptura na tração ocorre por poucas fissuras unidas umas às outras, e não por muitas pequenas fissuras isoladas, como nos estados de tensão de compressão.

Este comportamento do concreto a tensão de tração leva-o a apresentar um intervalo de propagação de fissuras estável muito menor do que quando comparado à propagação de fissuras estável sob tensão de compressão. Isto explica porque o concreto é um material frágil quando submetido à tração apresentando máxima carga de ruptura de 9 a 14 vezes menor do que a carga máxima de ruptura a compressão.

Botta (1998) explica que até cerca de 80% da tensão de pico o concreto apresenta forte tendência linear-elástico e devido à velocidade de propagação das fissuras verifica-se uma queda acentuada da curva tensão-deformação logo após atingir a máxima tensão. A Figura 2.4 ilustra o comportamento frágil do concreto quando submetido a tensão de tração.

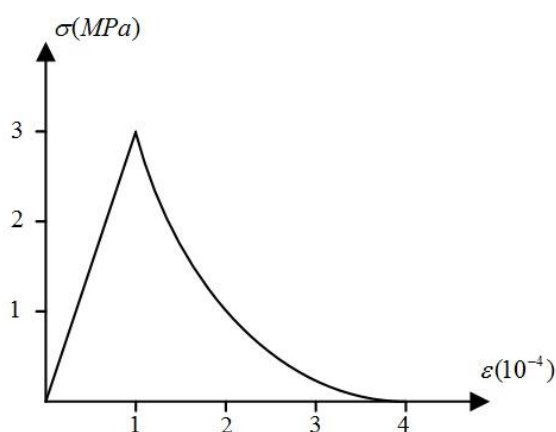


Figura 2.4 - Curva tensão deformação - ensaio de tração uniaxial

Ainda é preciso salientar que a propagação das fissuras no concreto submetido a ensaio de tração uniaxial ocorre em direção perpendicular à da sollicitação, segundo o modo I de abertura. Pode-se concluir que as fissuras crescem preferivelmente em modo I sempre que o material apresentar alongamentos. ÁLVARES (1993)

3 TEORIA DE DANO

3.1 DANO

Segundo Murakami (2012), o desenvolvimento de cavidades nos processos de fratura dos materiais em escalas microscópicas, mesoscópicas e macroscópicas, juntamente com a deterioração em suas propriedades mecânicas recebe o nome de dano.

Para Lemaitre e Chaboche (1985), o fenômeno de dano representa as descontinuidades superficiais para as microfissuras, ou volumétricas para as cavidades sendo um processo reológico que não se confunde com a deformação, mesmo se as causas iniciais dos dois fenômenos forem idênticas.

Tomando arbitrariamente um ponto perto de uma fissura de um corpo submetido a uma força externa F , é possível observar uma quantidade de cavidades microscópicas ou microfissuras na região ao redor do ponto observado. Estas cavidades geralmente resultam da quebra de ligações atômicas ou são defeitos a nível atômico.

Observando à escala microscópica entende-se, portanto, que a fissura de um material é um processo nuclear de microcavidades ou microfissura devido a ruptura de ligações. Ampliando a escala de observação e tendo uma visão macroscópica a fissura observável nada mais é do que a aglutinação destas microcavidades.

Considerando que um elemento de volume representativo é aquele com dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade na distribuição dos defeitos nele contidos e suficientemente pequenas para ser considerado como um ponto do material do contínuo tem-se que o material desprovido de dano ou em estado virgem é aquele que não apresenta fissuras ou cavidades à escala microscópica e o estado final de dano é a ruptura de um elemento de volume, ou seja, a existência de uma fissura macroscópica do tamanho de um elemento de volume representativo.

A teoria do dano descreve, portanto, a evolução dos processos entre o estado são e o início da fissuração macroscópica do material.

3.1.1 Variável de dano

Considerando um sólido danificado isola-se um elemento de volume representativo de área S orientado pela sua normal \vec{n} . Nesta seção as microfissuras e as microcavidades têm uma distribuição aleatória.

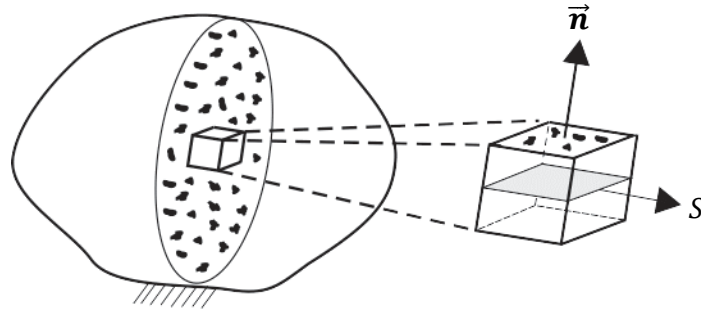


Figura 3.1 - Elemento Danificado
(LEMAITRE e CHABOCHE, 1985)

Tomando \tilde{S} como a área que efetivamente resiste aos esforços tem-se que $\tilde{S} < S$ devido aos defeitos existentes na seção S e, portanto, a diferença:

$$S_D = S - \tilde{S} \quad 3.1$$

representa a área total destes defeitos.

Lemaitre e Chaboche (1985) definem a variável de dano como:

$$D_n = \frac{S_D}{S} \quad 3.2$$

Sendo, portanto, a medida mecânica de dano local ou a densidade superficial do dano relacionado a direção \vec{n} .

Fisicamente a variável de dano (D_n) é interpretada como a área relativa das fissuras e corte das cavidades pelo plano normal à direção \vec{n} .

A variável de dano é sempre positiva, assumindo valores entre 0 e 1, sendo que $D_n = 0$ corresponde ao estado não danificado ou virgem do material e $D_n = 1$

corresponde a um elemento de volume rompido em duas partes conforme um plano normal \vec{n} . Portanto tem-se que o intervalo $0 \leq D_n < 1$ caracteriza o estado de dano.

Um dano é dito anisotrópico quando as fissuras e as cavidades do material danificado não são distribuídas uniformemente em todas as direções e o valor da variável D_n depende da orientação \vec{n} . Já um material se apresenta em estado de dano isotrópico quando a distribuição das fissuras e cavidades são uniformes em todas as direções e neste caso o valor da variável D_n não depende da orientação \vec{n} e, portanto, o escalar D caracteriza completamente o estado de dano.

3.1.2 Tensão Efetiva

Considera-se um elemento de volume representativo. Supõe-se que a área S deste elemento está submetida a uma tensão σ devido à aplicação de uma força unidimensional F levando o elemento a um estado de dano D . Nesta situação a área que está efetivamente resistindo à tensão provocada pelo força F é:

$$\tilde{S} = S - S_D \quad 3.3$$

Da equação 3.2 é possível deduzir que:

$$\tilde{S} = S(1 - D) \quad 3.4$$

Nos casos unidimensionais, diz que $\sigma = \frac{F}{S}$ é a tensão usual que satisfaz as equações de equilíbrio. Havendo um dano isotrópico D , tem-se:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad 3.5$$

$\tilde{\sigma}$ representa o efeito de aumento de tensão devido a redução da área provocada pelo dano e é denominada de tensão efetiva, trata-se da tensão da seção que efetivamente resiste aos esforços, portanto a variável de dano leva diretamente a noção de tensão efetiva. Tal tensão é sempre maior que a tensão usual σ devido a seção danificada ser menor que a seção sem dano.

Segundo Murakami (2012) o efeito de tensão efetiva pode incluir também o efeito das concentrações de tensão nos vazios e o efeito de interação entre os vazios.

Como o estado de dano é caracterizado pelo intervalo $0 \leq D < 1$, é possível deduzir que para um material sem dano, ou virgem, $\tilde{\sigma} = \sigma$ e no momento da ruptura $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$.

3.1.3 Princípio de Equivalência em Deformação

Conforme Murakami (2012), a noção de tensão efetiva pode ser generalizada o que significaria dizer que o efeito mecânico da tensão usual σ agindo em um elemento de volume representativo na configuração corrente danificada é equivalente à tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ numa configuração fictícia não danificada, isto é, uma configuração equivalente à virgem. Portanto a deformação do material danificado submetido a tensão usual σ deve ser igual a de um material fictício não danificado submetido a uma tensão efetiva $\tilde{\sigma}$. Por essa hipótese, os comportamentos elástico, plástico, viscoplástico do material podem ser corrigidos da mesma maneira.

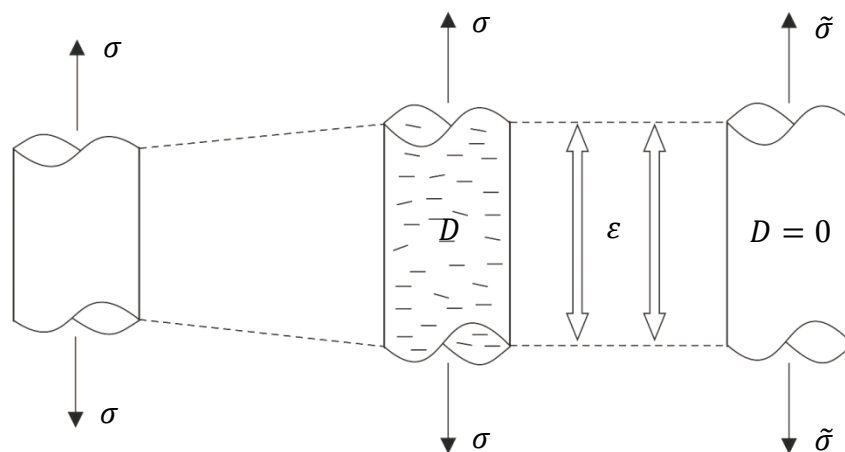


Figura 3.2 - Tensão Efetiva e Deformação Equivalente
(LEMAITRE e CHABOCHE, 1985)

Segundo Lemaitre e Chaboche (1985), basta substituir nas leis de comportamento do material são (material sem dano) a tensão usual σ pela tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ para obter o comportamento à deformação unidimensional ou tridimensional do material afetado pelo dano.

Sendo assim a lei de elasticidade linear unidimensional de um material danificado é escrita como:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad 3.6$$

Substituindo a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$, tem-se

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(1 - D)E} \quad 3.7$$

A simplicidade do princípio permite estabelecer um formalismo coerente e eficaz.

3.1.4 Caracterização do Dano Pela Variação do Módulo de Elasticidade

À medida que o dano se desenvolve no material, sabe-se que a quantidade de microfissuras e microcavidades cresce. A proporção que estes defeitos aumentam o material perde rigidez. Uma vez que o módulo de elasticidade é o parâmetro mecânico que proporciona a medida de rigidez do material, este pode ser utilizado para caracterizar um estado de dano.

Do Princípio de Equivalência em Deformação sabe-se que a deformação do material danificado submetido a tensão usual σ deve ser igual a de um material fictício não danificado submetido a uma tensão efetiva $\tilde{\sigma}$, portanto:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad 3.8$$

onde \tilde{E} é o módulo de elasticidade do material danificado, também chamado de módulo efetivo.

Da equação 3.8 é possível expressar a tensão efetiva por meio da variação dos módulos de elasticidade:

$$\tilde{\sigma} = \frac{E}{\tilde{E}} \sigma \quad 3.9$$

Combinando as equações 3.5 e 3.9 é possível deduzir:

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad 3.10$$

Isolando D no lado esquerdo da equação nota-se que o dano pode ser caracterizado pela variação do módulo de elasticidade do material danificado:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad 3.11$$

3.1.5 Princípio de Equivalência em Tensão

Este princípio parte da noção de módulo efetivo e considera que a deformação $\tilde{\epsilon}$ sofrida por um elemento de volume representativo na configuração equivalente à virgem permite obter a mesma tensão σ que um material não danificado, ou sem dano, estaria submetido. Portanto:

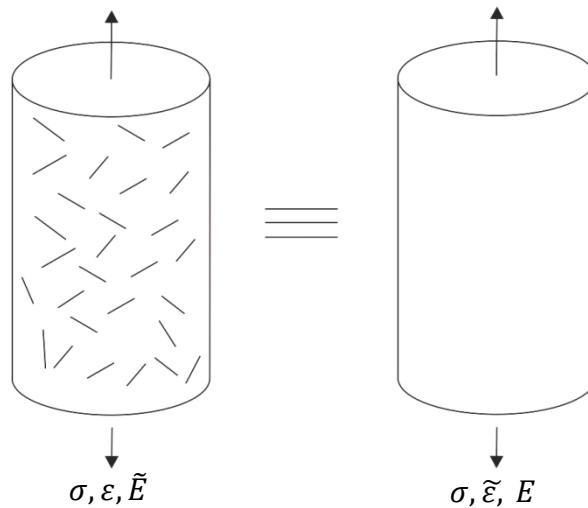


Figura 3.3 – Equivalência em Tensão
MAZARS (1984)

Para um material danificado a tensão é escrita como:

$$\sigma = \epsilon \tilde{E} \quad 3.12$$

e para um material equivalente ao virgem a tensão é escrita como:

$$\sigma = \tilde{\epsilon} E \quad 3.13$$

Das equações 3.12, 3.13 e considerando a noção de módulo efetivo é possível deduzir:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon(1 - D) \quad 3.14$$

Portanto, da equação 3.14 é possível calcular, para um estado de dano D fornecido, a deformação que um material equivalente ao virgem sofre a fim de gerar a mesma tensão do material danificado.

3.2 MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS

O modelo de dano proposto por Mazars (1984) despreza deformações permanentes de qualquer origem observáveis no ensaio de laboratório. Trata-se, portanto, de um modelo de dano essencialmente elástico conforme ilustrado pela Figura 3.4. Apesar da simplificação, o modelo representa adequadamente evidências experimentais do concreto principalmente para casos de carregamentos monótonos.

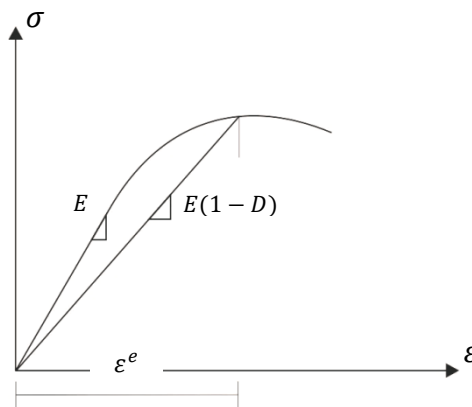


Figura 3.4 - Modelo de Dano Elástico
(MAZARS, 1984)

3.2.1 Hipóteses

O modelo apresenta as seguintes hipóteses básicas:

- quanto à solicitação, supõe-se que o dano é causado pela presença de deformações, ao menos, ao longo de uma das direções principais;
- quanto ao comportamento, o concreto em processo de dano evolutivo apresenta comportamento elástico, o que significa desprezar qualquer deformação permanente evidenciada experimentalmente numa situação de descarregamento;
- quanto ao dano, considera-se que seja isotrópico. Apesar de que o dano inicialmente pode ser considerado como isotrópico, análises experimentais

evidenciam que, em geral, o dano conduz a uma anisotropia do concreto. Porém para diminuir o número de variáveis a fim de simplificar a identificação e os cálculos estruturais considera-se o dano isotrópico. Tal escolha restringe a aplicação do modelo a carregamentos proporcionais ou cíclico mas, vale salientar, que não compromete o comportamento assimétrico do concreto quanto a tração e compressão.

3.2.2 Deformação Equivalente

Para traduzir o estado de solitação local, Mazars (1984) propõe utilizar um parâmetro de equivalência. Tal parâmetro se assemelha à tensão equivalente $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$, onde J_2 é o segundo invariante do tensor desviador, definido por von Mises, muito utilizado em plasticidade. A ideia é representar um estado triaxial por um estado uniaxial equivalente. O parâmetro de equivalência proposto por Mazars é a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ que é dado pela seguinte expressão:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad 3.15$$

onde $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ é a parte positiva da deformação principal na direção i , definida como:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2} [\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad 3.16$$

Verifica-se da expressão 3.16 que:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i \text{ se } \varepsilon_i \geq 0 \quad \text{e}$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 \text{ se } \varepsilon_i < 0.$$

A deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ caracteriza o estado local de extensão do material, dá o mesmo peso as três direções do espaço e permite encontrar os resultados de tração uniaxial. Nas aplicações seguintes é possível verificar tais características:

- No caso de tração na direção i :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_i$$

- No caso de compressão na direção 1:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = -\nu\varepsilon_1\sqrt{2}$$

- No caso de compressão biaxial nas direções 1 e 2:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_3^2} = \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}$$

- No caso de compressão triaxial:

$$\tilde{\varepsilon} = 0$$

3.2.3 Critério de dano proposto

É possível associar o início e a evolução de dano à noção de deformação equivalente que traduz o estado de dano local. Considera-se que o dano inicia quando a deformação equivalente atinge certo valor limite $\lambda(0)$. Este valor é a deformação ε_{d0} correspondente a máxima tensão que um corpo-de-prova atinge num ensaio tração uniaxial, conforme ilustra a Figura 3.5.

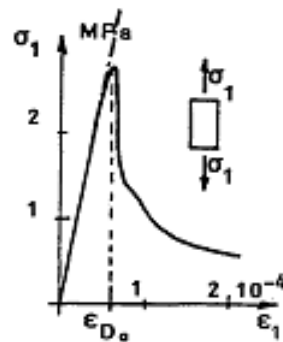


Figura 3.5 - Definição de ε_{d0}
(MAZARS, 1984)

O critério que determina a evolução de dano para um caso mais geral é dado pela seguinte função:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \lambda(D) \leq 0 \text{ com } \lambda(0) = \varepsilon_{d0} \quad 3.17$$

sendo D a variável escalar de dano.

Para definir $\lambda(D)$ basta substituir a expressão 3.15 na equação $f(\tilde{\varepsilon}, D) = 0$.
Obtém-se então:

$$\lambda(D) = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad 3.18$$

A superfície confere a mesma importância às três deformações principais e graficamente é representado por um oitavo de uma esfera de raio $\lambda(D)$, conforme ilustra a Figura 3.6.

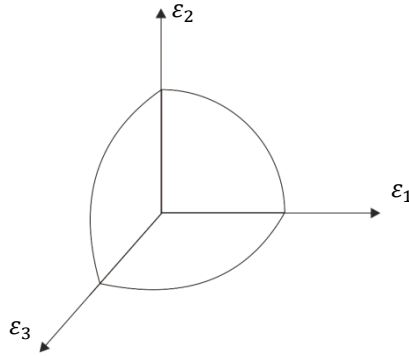


Figura 3.6 - Representação gráfica da superfície $\lambda(D)$

A lei de evolução no tempo da variável de dano D é dada, de forma termodinamicamente consistente, pelas seguintes relações escritas em taxas:

$$\dot{D} = 0 \text{ se } f < 0, \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \quad 3.19$$

$$\dot{D} = F(\tilde{\varepsilon}) \langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ \text{ se } f = 0, \text{ e } \dot{f} = 0 \quad 3.20$$

onde $(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$ e $F(\tilde{\varepsilon})$ é uma função contínua e positiva da deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$, o que leva a:

$$\dot{D} \geq 0 \quad \forall \quad \tilde{\varepsilon} \quad 3.21$$

A função $F(\tilde{\varepsilon})$, que governa a evolução do dano, é definida em resultados experimentais e deve ser capaz de reproduzir as curvas de ensaios uni, bi e triaxiais de corpos de prova de concreto.

3.2.4 Comportamento Assimétrico do Concreto

O concreto apresenta comportamento não simétrico quando submetido à compressão e à tração o que leva a evolução de microfissuras de forma diferenciada a depender do tipo de sollicitação. Quando submetido à tração, a evolução das microfissuras no concreto ocorre na direção perpendicular ao esforço e quando submetido à compressão a evolução das microfissuras ocorre na direção paralela ao esforço.

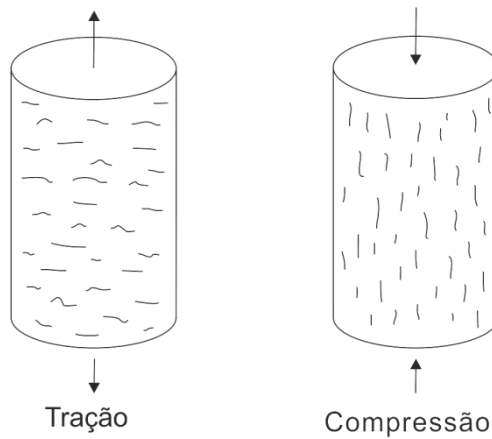


Figura 3.7 - Propagação de fissura no concreto

A fim de descrever tal comportamento do concreto, Mazars (1984) propôs duas variáveis escalares de dano independentes D_T e D_C . Estas variáveis representam teoricamente as regiões não-lineares das curvas tensão-deformação de tração e compressão uniaxiais. Assim a lei de evolução no tempo para estas variáveis são:

$$\dot{D}_T = F_T(\tilde{\varepsilon})\langle\dot{\tilde{\varepsilon}}\rangle_+ \quad 3.22$$

$$\dot{D}_C = F_C(\tilde{\varepsilon})\langle\dot{\tilde{\varepsilon}}\rangle_+ \quad 3.23$$

Para um carregamento proporcional crescente ou radial, as variáveis de dano D_T e D_C proposta por Mazars são dadas pelas seguintes expressões:

$$D_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{[B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}} \quad 3.24$$

$$D_C(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{[B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}} \quad 3.25$$

onde A_C e B_C são parâmetros do material obtidos mediante ensaio uniaxial de compressão, A_T , B_T são parâmetros do material obtidos mediante ensaios uniaxial de tração e ε_{d0} é a deformação correspondente à maior tensão que o corpo de prova atinge quando submetido a um ensaio de tração uniaxial, como visto no item 3.2.3.

A identificação dos parâmetros A_C , B_C , A_T , B_T e ε_{d0} , por meio de ensaios uniaxiais de tração e compressão, permite reproduzir as curvas experimentais obtidas para mesmas solicitações, como ilustra a Figura 3.8.

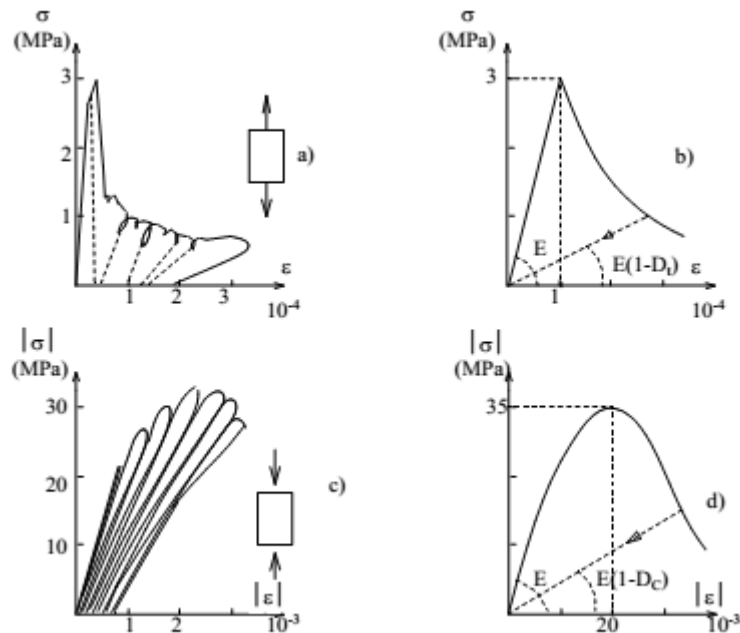


Figura 3.8 –Curvas experimentais e teóricas para tração e compressão uniaxial (PITUBA, 1998)

Apesar da semelhança entre as curvas experimentais e teóricas é possível observar a ausência de deformação permanente no modelo teórico e a diminuição da rigidez nas retas de descarregamento, consequência das hipóteses assumidas por Mazars (1984) para o modelo.

Para uma sollicitação pluriaxial, Mazars (1984) propõe para a variável de dano D um valor intermediário entre D_C e D_T em função da intensidade das duas sollicitações. Isto é, a variável D é obtida através de uma combinação linear entre D_C e D_T :

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad 3.26$$

com α_T e α_C tal que:

$$\text{em caso de tração pura} \quad \alpha_C = 0$$

$$\text{em caso de compressão pura} \quad \alpha_T = 0$$

$$\text{em caso de combinação} \quad \alpha_C + \alpha_T = 1$$

O tensor de tensões principais efetivas é definido através da relação elástica isotrópica, aplicando o tensor elástico do material sem dano $\underline{\underline{D}}_0$ no tensor de deformações principais do instante de análise.

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{\varepsilon}} \quad 3.27$$

sendo $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ tensor de tensões efetivas.

Devido ao comportamento não simétrico do concreto separa-se o tensor de tensões efetivas em duas partes. Uma parte positiva $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+$ e outra negativa $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_-$, de modo que:

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ + \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- \quad 3.28$$

onde:

$$\langle \sigma_i \rangle_+ = \frac{1}{2} (\sigma_i + |\sigma_i|) \quad 3.29$$

$$\langle \sigma_i \rangle_- = \frac{1}{2} (\sigma_i - |\sigma_i|) \quad 3.30$$

O tensor de deformações principais $\underline{\underline{\varepsilon}}$ também é dividido duas partes, $\underline{\underline{\varepsilon}}_T$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}_C$, de modo que:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_T + \underline{\varepsilon}_C \quad 3.31$$

onde:

$$\underline{\varepsilon}_T = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_+ \underline{I} \quad 3.32$$

$$\underline{\varepsilon}_C = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_- \underline{I} \quad 3.33$$

sendo \underline{I} a matriz identidade e E o módulo de elasticidade do material.

Ainda os tensores de deformações $\underline{\varepsilon}_T$ e $\underline{\varepsilon}_C$ podem ser divididos em partes positiva e negativa:

$$\underline{\varepsilon}_T = \langle \varepsilon_T \rangle_+ + \langle \varepsilon_T \rangle_- \quad 3.34$$

$$\underline{\varepsilon}_C = \langle \varepsilon_C \rangle_+ + \langle \varepsilon_C \rangle_- \quad 3.35$$

Por fim os coeficientes α_T e α_C são dados pelas seguintes expressões:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad 3.36$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad 3.37$$

onde:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+ + \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+$$

Tem-se que ε_V^+ é uma variável cinética representativa do estado local de extensão.

4 TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA

Neste capítulo será apresentado o tratamento numérico, baseado no método dos elementos finitos (MEF), necessário para desenvolver a ferramenta computacional que tem intuito de prever o comportamento do concreto considerando a não linearidade e a degradação de rigidez do material submetido a carregamento monótono.

4.1 COMENTÁRIOS SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

No Método dos Elementos Finitos a matriz de rigidez de um elemento é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t \mathbf{D}_0 (\mathbf{B}_e) d\Omega \quad 4.1$$

sendo \mathbf{B}_e uma matriz gerada pela aplicação de um operador diferencial às funções de interpolação correspondente ao i -ésimo nó do elemento (N_i) e \mathbf{D}_0 a matriz constitutiva elástica do elemento íntegro. A seguir são apresentadas a matriz \mathbf{B}_e para um problema de estado plano e as matrizes constitutivas elásticas para um problema de estado plano de tensão e deformação respectivamente:

$$\mathbf{B}_e = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n-1}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n-1}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{array} \right] \quad 4.2$$

sendo n o número de nós do elemento.

$$\mathbf{D}_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Matriz Constitutiva do Estado Plano de} \\ \text{Tensões)} \end{array} \quad 4.3$$

$$\mathbf{D}_0 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Matriz Constitutiva do} \\ \text{Estado Plano de} \\ \text{Deformações)} \end{array} \quad 4.4$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e ν o coeficiente de Poisson.

A matriz constitutiva para um estado de dano isotrópico é obtida substituindo o módulo de elasticidade íntegro do material E pelo módulo de elasticidade do material danificado também chamado de módulo efetivo \tilde{E} dado pela expressão 3.10 e novamente apresentado abaixo:

$$\tilde{E} = (1 - D)E$$

Tal substituição permite deduzir a seguinte expressão:

$$\mathbf{D} = (1 - D)\mathbf{D}_0 \quad 4.5$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva para um estado de dano isotrópico.

A matriz de rigidez de um elemento finito submetido a um estado de dano é obtida de forma análoga, isto é, substituindo a matriz constitutiva íntegra \mathbf{D}_0 pela matriz constitutiva \mathbf{D} de um estado de dano, o que leva a:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t \mathbf{D}(\mathbf{B}_e) d\Omega \quad 4.6$$

sendo $\tilde{\mathbf{k}}_e$ a matriz de rigidez do elemento em um estado de dano ou matriz de rigidez efetiva.

Substituindo a equação 4.5 em 4.6 tem-se:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t [(1 - D)\mathbf{D}_0](\mathbf{B}_e) d\Omega \quad 4.7$$

Desenvolvendo a expressão 4.7:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t \mathbf{D}_0(\mathbf{B}_e) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t D \mathbf{D}_0(\mathbf{B}_e) d\Omega \quad 4.8$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \mathbf{k}_e - \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t D \mathbf{D}_0(\mathbf{B}_e) d\Omega \quad 4.9$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \mathbf{k}_e - \Delta \mathbf{k}_e(D) \quad 4.10$$

Da equação 4.10 observa-se que a matriz de rigidez de um estado de dano é obtida tirando da matriz de rigidez de um estado íntegro uma matriz ligada ao dano. É possível observar também que para

$$D = 0 \rightarrow \Delta \mathbf{k}_e(0) = \mathbf{0} \quad \text{e para} \quad D = 1 \rightarrow \Delta \mathbf{k}_e(1) = \mathbf{k}_e.$$

Ou seja, um elemento sem dano tem matriz de rigidez coincidente com a matriz de rigidez elástica e à medida que o estado de dano do elemento evolui a rigidez do elemento diminui tendendo a zero.

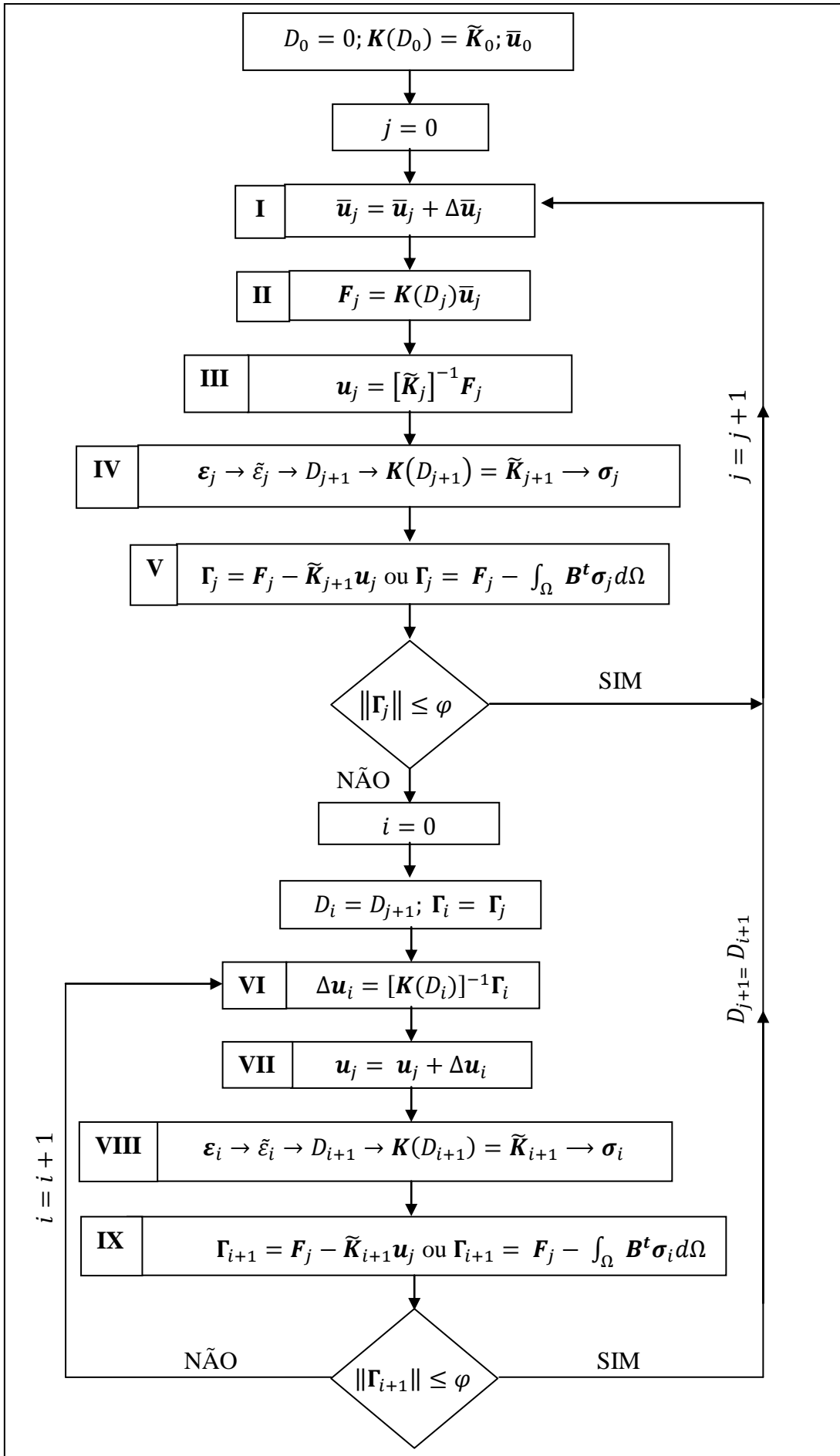
A contribuição de rigidez de cada elemento é armazenada numa matriz de rigidez global formando o sistema:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

onde \mathbf{K} , \mathbf{U} e \mathbf{F} são matriz de rigidez global, vetor global de deslocamentos e vetor global de forças externas respectivamente.

A fim de solucionar o sistema de equações formado considerando o comportamento não linear do concreto e ainda para obter resultados da parte descendente da curva Carga x Deslocamento ou Tensão x Deformação foi adotado um método incremental/iterativo conduzido por incrementos de deslocamentos.

O esquema a seguir representa o algoritmo utilizado para obter a solução do sistema:



O algoritmo apresentado consiste nos seguintes passos:

I – O processo incremental inicia impondo os deslocamentos que determinam as condições de contorno do corpo.

II – Dado o vetor de deslocamentos impostos ($\bar{\mathbf{u}}$), calculam-se as forças (\mathbf{F}) que provoca tais deslocamentos multiplicando a matriz de rigidez (\mathbf{K}) atualizada com o vetor de deslocamentos impostos.

III – Monta-se o sistema $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ e calculam-se os deslocamentos de todos os nós das malhas.

IV – Com o vetor de deslocamentos calculam-se as deformações correspondente a cada elemento por meio da seguinte equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_e \mathbf{u} \quad 4.11$$

De posse das deformações, calcula-se, para cada elemento, a deformação equivalente ($\tilde{\varepsilon}$) por meio da equação 3.15 e é avaliado se o elemento alcançou o critério de início de dano. Nesta etapa é necessário verificar também a evolução do estado de dano do elemento, isto porque considera-se que o estado de dano do elemento é sempre crescente, ou seja, uma vez que a variável escalar de dano do elemento atinge um valor não nulo mesmo se o corpo for descarregado o estado de dano não regride. Isto garante a impossibilidade de o corpo ser restaurado após ter sido danificado. Para tanto o valor da variável escalar de dano de um passo de cada elemento é sempre comparada com o valor de dano do elemento correspondente ao último estado de equilíbrio do corpo. Caso a variável de dano atual seja maior adota-se tal como valor de dano do elemento, caso seja menor adota-se como valor de dano o valor da variável do último estado de equilíbrio do corpo.

$$D_{j+1} = \begin{cases} D_{j+1} & \text{se } D_{j+1} \geq D_j \\ D_j & \text{se } D_{j+1} < D_j \end{cases}$$

Uma vez que foram obtidos os valores das variáveis de dano de cada elemento atualiza-se a matriz de rigidez e calcula-se o estado de tensões de cada elemento que

pode ser realizada de duas maneiras. Observa-se que se multiplicar ambos os lados da equação 4.5 pelo vetor deformação do elemento tem-se:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = (1 - D)\mathbf{D}_0\boldsymbol{\varepsilon} \quad 4.12$$

e portanto

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\boldsymbol{\sigma}_0 \quad 4.13$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 - D\boldsymbol{\sigma}_0 \quad 4.14$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 - \Delta\boldsymbol{\sigma}_0(D) \quad 4.15$$

Ou seja, o estado de tensões danificado de um elemento $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser obtido retirando do estado de tensões elástico ($\boldsymbol{\sigma}_0$) um estado de tensão ligado ao dano ($\Delta\boldsymbol{\sigma}_0(D)$).

Outra forma é simplesmente multiplicar a matriz constitutiva atualizada do elemento pelo vetor de deformações.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad 4.16$$

V - Dada a matriz de rigidez atualizada calcula-se os esforços internos para cada nó da malha multiplicando a matriz de rigidez do elemento pelo vetor de deslocamento obtido e por fim acumulando num vetor global \mathbf{R} .

$$\mathbf{R}_e = \tilde{\mathbf{k}}_e \mathbf{u} \quad 4.17$$

Substituindo a equação 4.6 na equação 4.17 tem-se:

$$\mathbf{R}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t \mathbf{D}(\mathbf{B}_e) d\Omega \cdot \mathbf{u} \quad 4.18$$

$$\mathbf{R}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t \mathbf{D}(\mathbf{B}_e \mathbf{u}) d\Omega \quad 4.19$$

$$\mathbf{R}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad 4.20$$

$$\mathbf{R}_e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_e)^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad 4.21$$

Portanto, observa-se da equação 4.21 que o esforço interno também pode ser obtido pela integração do produto entre a matriz (\mathbf{B}_e) pelo último estado de tensão calculado $(\boldsymbol{\sigma})$.

Subtraindo da carga aplicada (\mathbf{F}) os esforços internos obtidos (\mathbf{R}) calcula-se o resíduo $(\boldsymbol{\Gamma})$ e aplica o critério de convergência adotado. Se for verificada convergência, considera-se que o corpo atingiu equilíbrio e volta-se ao passo I acrescentando outro incremento de deslocamento. Caso não seja verificada a convergência inicia-se o processo iterativo.

VI - O processo iterativo inicia formando com o resíduo obtido do último passo e a matriz de rigidez atualizada o sistema $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{U} = \boldsymbol{\Gamma}$.

VII - Obtido o vetor de variação de deslocamento $(\Delta \mathbf{U})$ devido ao resíduo aplicado atualiza o vetor de deslocamento \mathbf{U} .

VIII - Dados os deslocamentos calcula-se as deformações $(\boldsymbol{\varepsilon})$ correspondentes a cada elemento, a deformação equivalente $(\tilde{\varepsilon})$, o valor da variável escalar de dano (D) , verifica a evolução do estado de dano, atualiza a matriz de rigidez (\mathbf{K}) e calcula as tensões $(\boldsymbol{\sigma})$ correspondentes a cada elemento. É bom salientar que o estado de dano do passo atual é comparado com o valor de dano correspondente ao do último estado de equilíbrio do corpo. Portanto, é possível que durante o processo iterativo o valor de dano do passo atual seja menor do que o do passo anterior se tal valor ainda for maior do que o valor de dano correspondente ao último estado de equilíbrio.

IX - Dada a matriz de rigidez atualizada calcula-se os esforços internos (\mathbf{R}) , o resíduo $(\boldsymbol{\Gamma})$ e por fim aplica o critério de convergência. Caso o critério de convergência seja satisfeito o corpo encontra-se em equilíbrio e volta-se ao passo I acrescentando outro incremento de carga, caso não seja satisfeito volta-se ao passo VI aplicando o novo vetor de resíduo calculado.

4.1.1 Critério de Convergência

A fim de verificar se o corpo atingiu o equilíbrio num processo incremental/iterativo é necessário estabelecer um critério de convergência.

O critério adotado na ferramenta computacional desenvolvida consiste em comparar a razão C_i/C_0 com o valor de tolerância (φ) pre-estabelecida. Sendo C_i igual a norma do vetor resíduo ($\|\Gamma\|$) no i -ésimo passo e C_0 o maior valor entre 1 e a norma do vetor resíduo no primeiro passo logo após o corpo atingir o equilíbrio.

4.1.2 Elemento Triangular Linear

Em todos os casos deste trabalho o domínio foi discretizado usando uma malha formada por elementos do tipo triangular linear.

Nos elementos triangulares isoparamétricos é conveniente o uso das coordenadas de área para construção das funções de interpolação. Dada a Figura 4.1, o ponto P com coordenadas x e y pode ser definido em coordenadas de área por:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \qquad L_2 = \frac{A_2}{A} \qquad L_3 = \frac{A_3}{A} \qquad 4.22$$

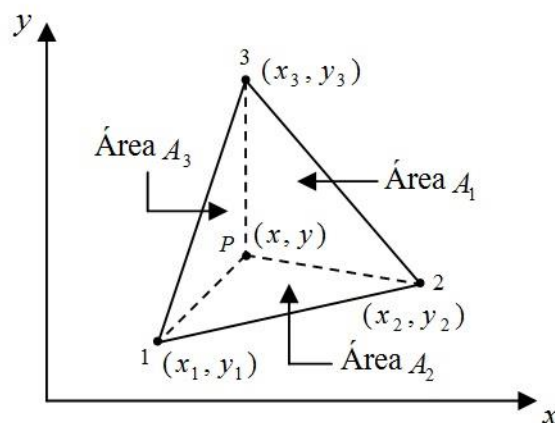


Figura 4.1 - Coordenadas de área de um ponto P

Sendo A a área total do triângulo formado pelos pontos 123, A_1 área do triângulo formada pelos pontos P23, A_2 área do triângulo formada pelos pontos P13 e A_3 área do

triângulo formada pelos pontos $P12$. É nítido, portanto, que para qualquer triângulo é válida a igualdade:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad 4.23$$

Uma vez que as deformações do elemento são derivadas em relação ao sistema de coordenadas cartesianas é necessário estabelecer uma relação que seja possível definir as coordenadas de área em função de x e y . É possível observar da Figura 4.2 que as coordenadas de área variam linearmente no triângulo assumindo o valor 1 no próprio vértice e 0 na aresta oposta.

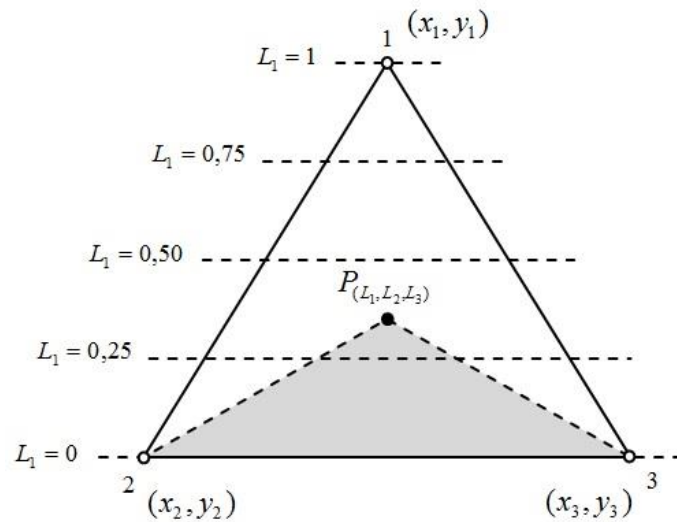


Figura 4.2 – Variação Linear das Coordenadas de Área

Portanto, a geometria de um triângulo linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \quad 4.24$$

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \quad 4.25$$

A partir das equações 4.23, 4.24 e 4.25 é possível formar o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad 4.26$$

O que permite obter as coordenadas de área em função das coordenadas x e y :

$$L_i = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2A}, i = 1,2,3 \quad 4.27$$

Onde:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad 4.28$$

e ainda

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k \quad 4.29$$

$$c_i = x_k - x_j$$

Sendo os índices i, j, k os vértices tomados em sequência no sentido antehorário conforme Figura 4.3.

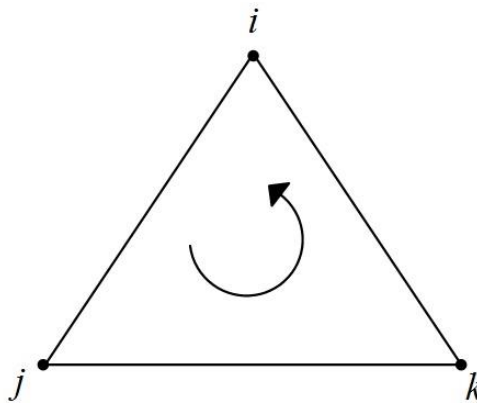


Figura 4.3 – Vértices do Triângulo

Para um triângulo de geometria linear no domínio triangular de coordenadas naturais (ξ_1, ξ_2) como mostra a Figura 4.4 tem-se que as coordenadas de área são dadas por funções lineares:

$$L_1 = N_1 = \xi_1 \quad L_2 = N_2 = \xi_2 \quad L_3 = N_3 = \xi_3 \quad 4.30$$

Partindo da equação 4.3 pode ainda obter L_3 em função de ξ_1 e ξ_2 :

$$L_3 = N_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad 4.31$$

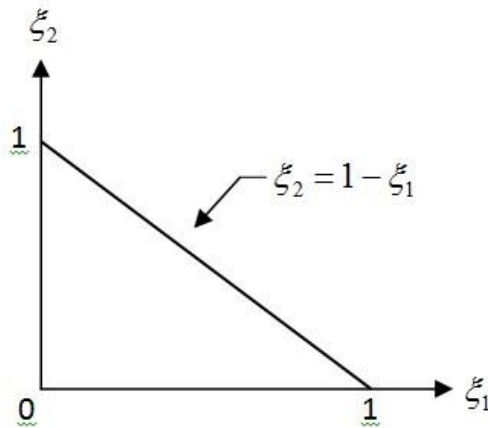


Figura 4.4 - Triângulo de Geometria Linear no Domínio de Coordenadas Naturais

A geometria do triângulo então pode ser escrita em função das coordenadas naturais ξ_1 e ξ_2 . Substituindo as equações 4.30 e 4.31 na equação 4.24 e 4.25 tem-se:

$$x = \sum_{i=1}^{n=3} N_i(\xi_1, \xi_2)x_i \quad 4.32$$

$$y = \sum_{i=1}^{n=3} N_i(\xi_1, \xi_2)y_i \quad 4.33$$

No Método dos Elementos Finitos os resultados são dados por aproximação do tipo:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i \quad 4.34$$

O termo isoparamétrico consiste em utilizar parâmetros iguais para mapear a geometria do elemento e interpolar a solução aproxima. Desta forma $\varphi_i = N_i$ e a matriz \mathbf{B}_e , que é formada pelas derivadas das funções de interpolação, passa a ser escrita em termos das coordenadas naturais ξ_1 e ξ_2 . Portanto a integral que define a matriz de rigidez no método dos elementos finitos passa a ser calculada no domínio de coordenadas naturais:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^t(\xi_1, \xi_2) \mathbf{D} \mathbf{B}_e(\xi_1, \xi_2) d\Omega \quad 4.35$$

Para tanto é necessário mudar o domínio e os limites de integração para o de coordenadas naturais. Esta mudança é feita por meio da matriz jacobiana (J) de transformação de coordenadas.

Para um elemento triangular linear em um domínio regular de coordenadas naturais a matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad 4.36$$

sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} &= x_1 - x_3 & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} &= x_2 - x_3 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} &= y_1 - y_3 & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} &= y_2 - y_3 \end{aligned} \quad 4.37$$

E as derivadas da função de interpolação em relação a x e y são obtidas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad 4.38$$

A matriz jacobiana relaciona um elemento infinitesimal no domínio real a um elemento infinitesimal no domínio de coordenadas naturais:

$$d\Omega = \det J d\xi_1 d\xi_2 \quad 4.39$$

Assim a integral de um elemento no domínio de coordenadas naturais pode ser realizada da seguinte forma:

$$k_e = \int_{\xi_1=0}^1 \int_{\xi_2}^{1-\xi_2} \mathbf{B}_e^t(\xi_1, \xi_2) \mathbf{D} \mathbf{B}_e(\xi_1, \xi_2) \det J d\xi_1 d\xi_2 \quad 4.40$$

4.2 VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO

Para validação da implementação é importante conhecer como se dá a evolução das variáveis de dano (D_T, D_C) e como os parâmetros propostos por Mazars (1984) influenciam a curva tensão x deformação. A seguir são apresentadas curvas de evolução das variáveis de dano, bem como, comparações entre curvas tensão x deformação obtidas devido a variação de um dos parâmetros à medida que mantém os demais constantes. Por fim, são confrontados os resultados obtidos por meio da ferramenta computacional desenvolvida com os resultados experimentais encontrados na literatura.

4.2.1 Evolução das Variáveis de Dano

Para o caso de um ensaio uniaxial a Lei Constitutiva do concreto danificável pode ser escrita como:

$$\sigma = E\varepsilon(1 - D(\tilde{\varepsilon})) \quad 4.41$$

Tal lei é composta de duas fases:

- Fase Linear

$$\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_{d0} \quad \text{Material são,} \quad D(\tilde{\varepsilon}) = 0$$

- Fase Não Linear devido a degradação da rigidez

$$\tilde{\varepsilon} > \varepsilon_{d0} \quad \text{Material danificado,} \quad D(\tilde{\varepsilon}) \neq 0$$

Dado um tensor de deformações para um ensaio uniaxial na direção 1, conforme ilustra a Figura 4.5:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad 4.42$$

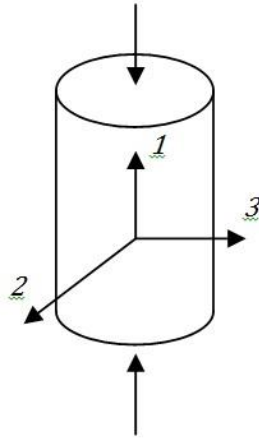


Figura 4.5 - Ensaio Uniaxial

tem-se que a deformação equivalente ($\tilde{\epsilon}$), pelo conceito apresentado na seção 3.2.2, assume os seguintes resultados:

- Para ensaio de tração na direção 1 ($\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 < 0$ e $\epsilon_3 < 0$)

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_1^2 + 0 + 0} = \epsilon_1 \quad 4.43$$

- Para o ensaio de compressão na direção 1 ($\epsilon_1 < 0, \epsilon_2 > 0$ e $\epsilon_3 > 0$)

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{0 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2} = -\nu\epsilon_1\sqrt{2} \quad 4.44$$

Portanto as equações 3.24 e 3.25 podem ser reescritas para o caso particular de um ensaio uniaxial de tração ou compressão:

$$D_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_T)}{\epsilon_1} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\epsilon_1 - \epsilon_{d0})]} \quad 4.45$$

$$D_C(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_C)}{-\nu\epsilon_1\sqrt{2}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(-\nu\epsilon_1\sqrt{2} - \epsilon_{d0})]} \quad 4.46$$

Assumindo $\epsilon_T = \epsilon_1$, $\epsilon_C = -\epsilon_1$ e ϵ_{d0} como valor mínimo que a deformação equivalente ($\tilde{\epsilon}$) deve assumir para dar início ao processo de dano do elemento, tem-se que:

- Para tração

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{do} = \varepsilon_T \quad 4.47$$

- Para Compressão

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{do} = \nu \varepsilon_C \sqrt{2} \quad 4.48$$

ou ainda

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_{do}}{\nu \sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_T}{\nu \sqrt{2}} \quad 4.49$$

Adotando o coeficiente de poisson (ν) igual a 0,2 como a NBR 6118 sugere tem-se:

$$\varepsilon_C \cong 3,54 \varepsilon_T \quad 4.50$$

Da equação 4.50 é possível verificar que na simulação numérica do ensaio de compressão o elemento inicia seu processo de danificação com deformação de cerca de 3,54 vezes maior quando comparado ao valor de deformação para um ensaio de tração o que traduz o comportamento menos frágil do concreto quando submetido a compressão. O fato do processo de danificação do elemento para uma simulação numérica do ensaio de tração iniciar com valores de deformações menores, quando comparado ao ensaio de compressão, conduz o ensaio ter maior velocidade de evolução do dano e menor tensão máxima. Ou seja, para um mesmo valor de deformação equivalente a variável de dano de tração (D_t) assume valores maiores do que a variável de dano de compressão (D_c). Portanto, o conceito de deformação equivalente sugerido por Mazars (1984) traduz o comportamento não simétrico do concreto. Isso é facilmente perceptível quando traça-se os gráficos da evolução do dano em função das deformações de tração (ε_t) e compressão (ε_c), e em função da deformação equivalente ($\tilde{\varepsilon}$), Figura 4.6 e Figura 4.17 respectivamente. Tais gráficos são obtidos das equações 4.45 e 4.46 tendo adotado para parâmetros os seguintes valores: $\varepsilon_{do} = 1,0 \times 10^{-4}$, $A_t = 0,8$, $B_t = 1,0 \times 10^4$, $A_c = 1,0$ e $B_c = 2,0 \times 10^3$.

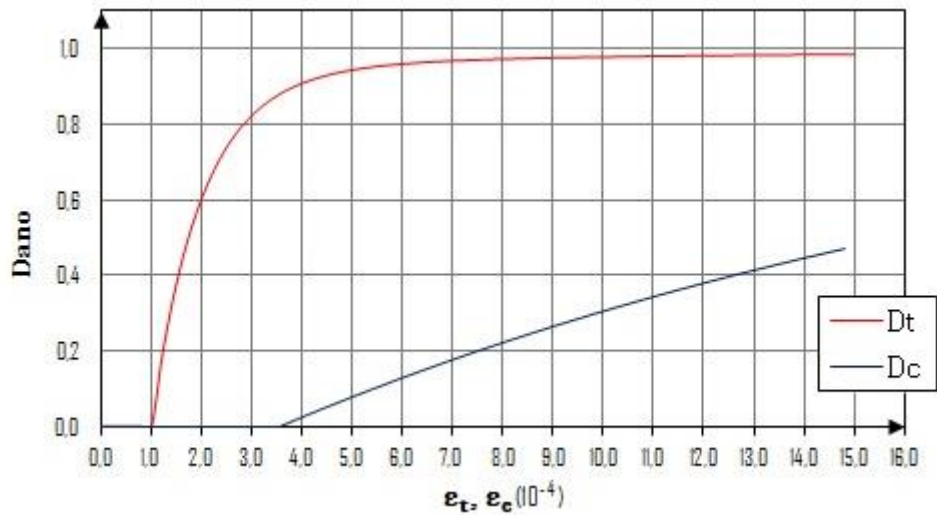


Figura 4.6 - Início do Processo de Evolução de Dano, $\varepsilon_{d0} = 1.10^{-4}$

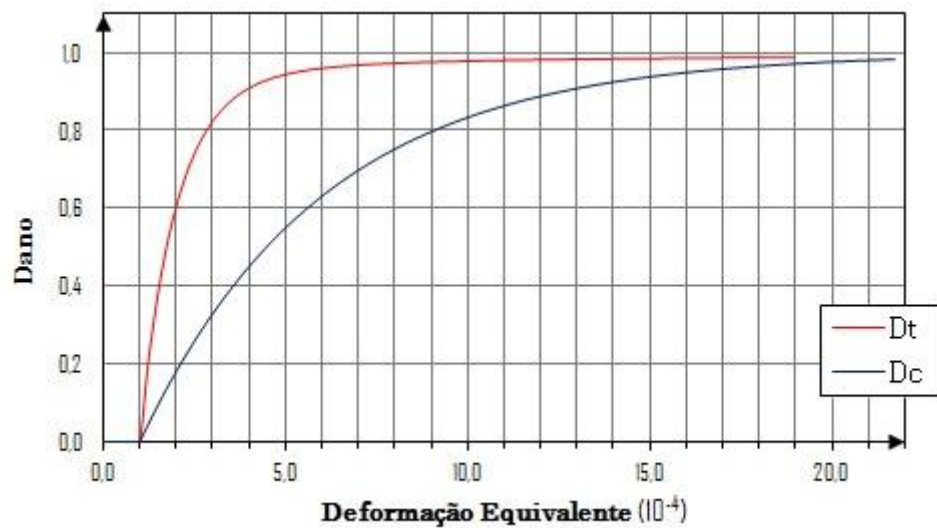


Figura 4.7 - Velocidade do Processo de Evolução de Dano, $\varepsilon_{d0} = 1.10^{-4}$

4.2.2 Influência dos Parâmetros ε_{d0} , A_t , B_t , A_c e B_c sobre a Curva Tensão x Deformação

A substituição das equações 4.45 e 4.46 na equação 4.41 permite encontrar as equações constitutivas do concreto para o ensaio de tração e compressão uniaxial.

- Equação Constitutiva para o ensaio de tração uniaxial

$$\sigma_t = E \left[\varepsilon_{d0}(1 - A_t) + \frac{A_t \varepsilon_1}{\exp[B_t(\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0})]} \right] \quad 4.51$$

- Equação Constitutiva para o ensaio de compressão uniaxial

$$\sigma_c = E \left[\frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{-v\sqrt{2}} + \frac{A_c \varepsilon_1}{\exp[B_c(-v\varepsilon_1\sqrt{2} - \varepsilon_{d0})]} \right] \quad 4.52$$

Os parâmetros ε_{d0} , A_t , B_t , A_c e B_c compoem as equações constitutivas do concreto para o estado danificado e por isto é de fundamental importância tomar conhecimento da influência que estes têm sobre a curva tensão x deformação. Nos trabalhos de Álvares (1993) e Guello (2002) encontra-se uma análise matemática detalhada da influência de cada parâmetro. Neste trabalho, assim como no trabalho de Mazars (1984), é apresentado apenas de forma gráfica qual parte da curva cada parâmetro influencia.

Primeiramente, fazendo-se a análise do parâmetro ε_{d0} verifica-se que este tem influência no início da não linearidade da curva e na sua inclinação. Verifica-se também que $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} \sigma_t(\varepsilon_1) = E \varepsilon_{d0}(1 - A_t)$. Portanto o parâmetro ε_{d0} juntamente com o parâmetro A_t influenciam no valor assintótico da curva. A Figura 4.8 apresenta as curvas para valores de ε_{d0} variando de 0,5 a 1,5.

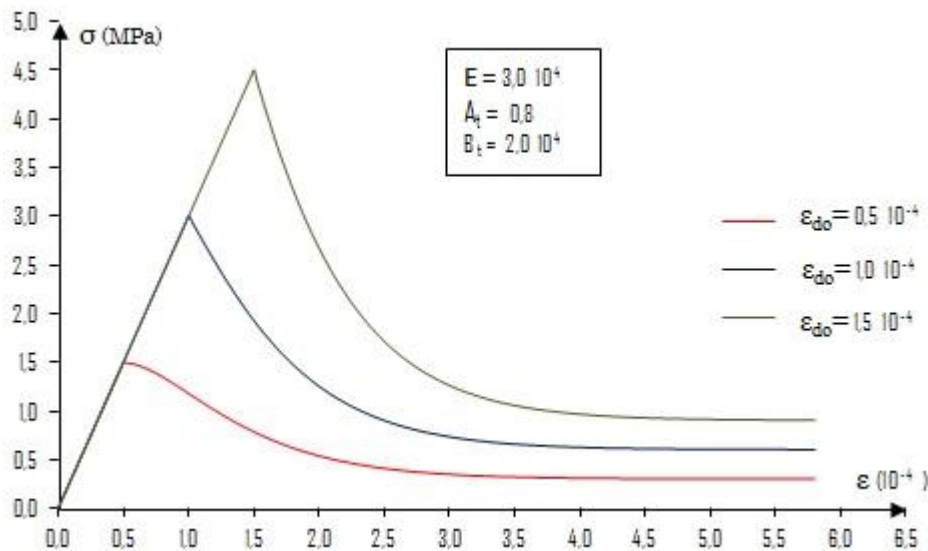


Figura 4.8 - Influência do Parâmetro ε_{d0}

Variando os valores do parâmetro A_t verifica-se que este, assim como o ε_{d0} , influencia na inclinação da curva no início da sua não linearidade, além de ser claramente notável que tal parâmetro tem papel importantíssimo no seu valor assintótico de tal forma que caso assuma valor nulo leva a curva descrever o comportamento de

uma material com comportamento plástico perfeito. A Figura 4.9 apresenta as curvas para valores de A_t variando de 0,0 a 1,0.

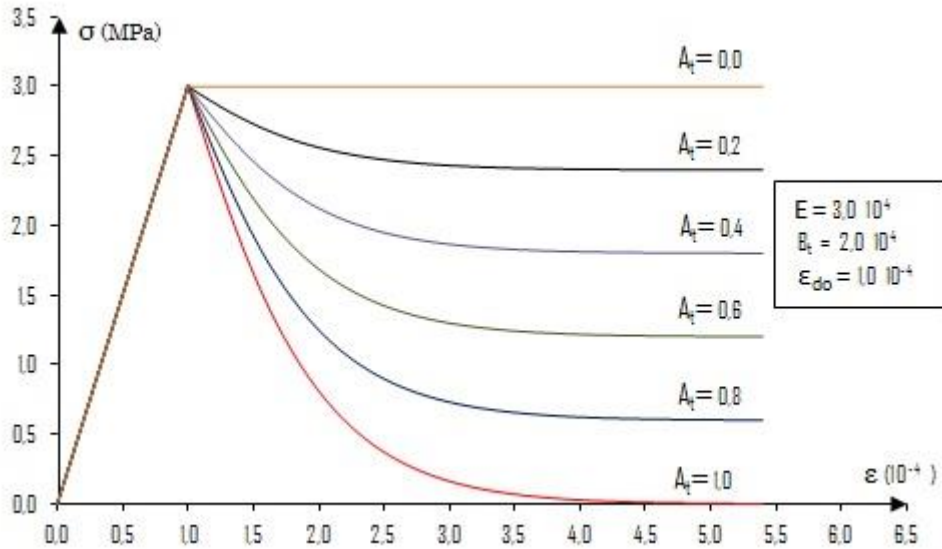


Figura 4.9 - Influência do Parâmetro A_t

Já o parâmetro B_t tem influência no sinal da curva no início do trecho não linear além de influenciar no valor da tensão máxima (σ_{max}) que a curva pode obter. Ao observar a Figura 4.10 facilmente chega-se a tais conclusões.

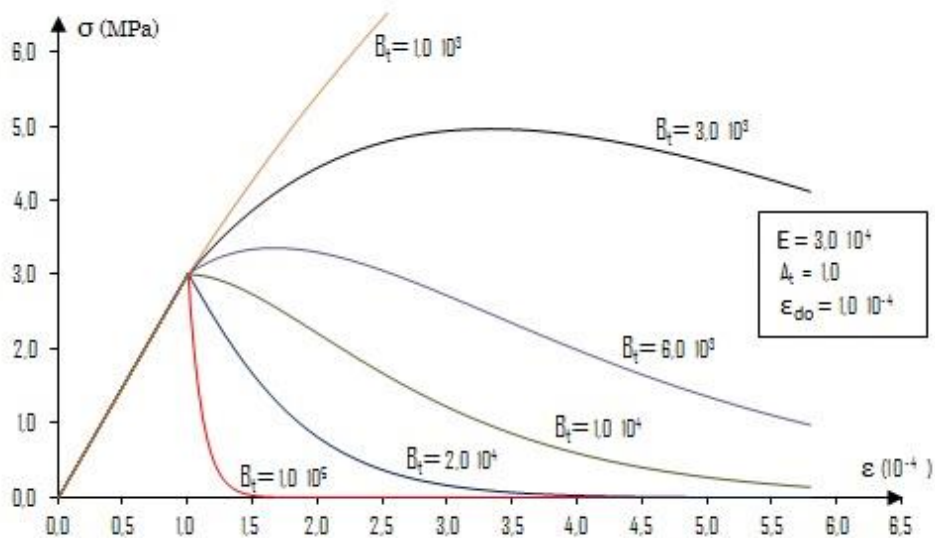


Figura 4.10 - Influência do Parâmetro B_t

Na Figura 4.11 são apresentadas curvas encontradas variando o parâmetro B_c . Observa-se que o papel do parâmetro B_c é semelhante ao papel do parâmetro B_t .

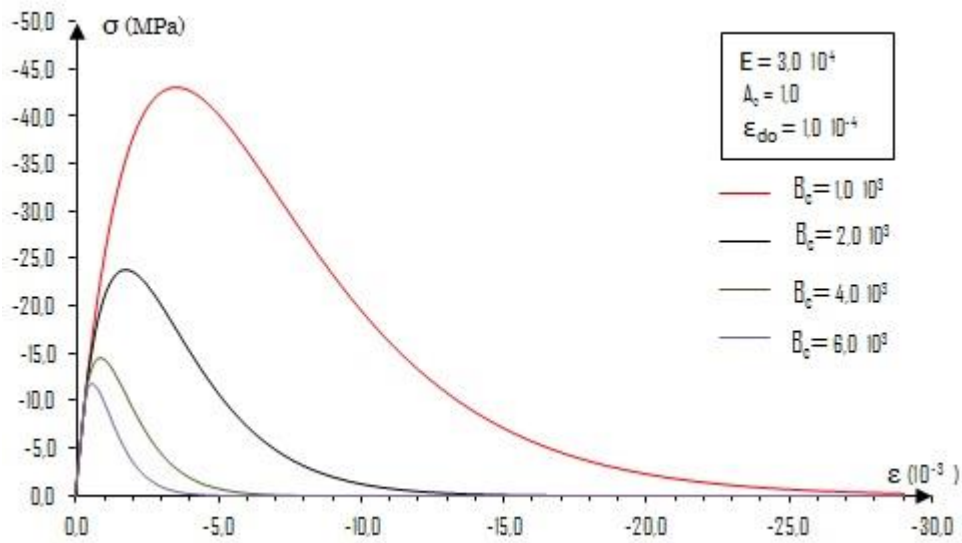


Figura 4.11 - Influência do Parâmetro B_c

Analisando as curvas da Figura 4.12 obtidas devido a variação do parâmetro A_c , percebe-se que este tem influência sobre o valor de deformação última, valor que corresponde a tensão nula no trecho *softening* da curva, além de influenciar, assim como o parâmetro B_c , o valor de tensão de pico da curva (σ_{max}).

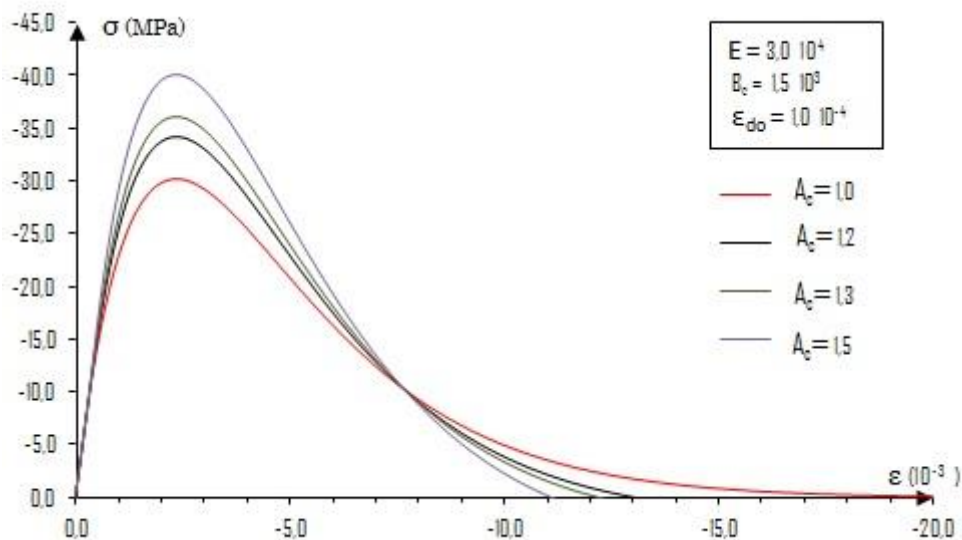


Figura 4.12 - Influência do Parâmetro A_c

A Figura 4.13 apresenta uma análise comparativa das curvas obtidas ora variando o parâmetro A_c e mantendo o B_c constante, ora variando o parâmetro B_c e

mantendo A_c constante. Tal análise se faz importante pois tanto A_c quanto B_c influenciam no valor de tensão máxima.

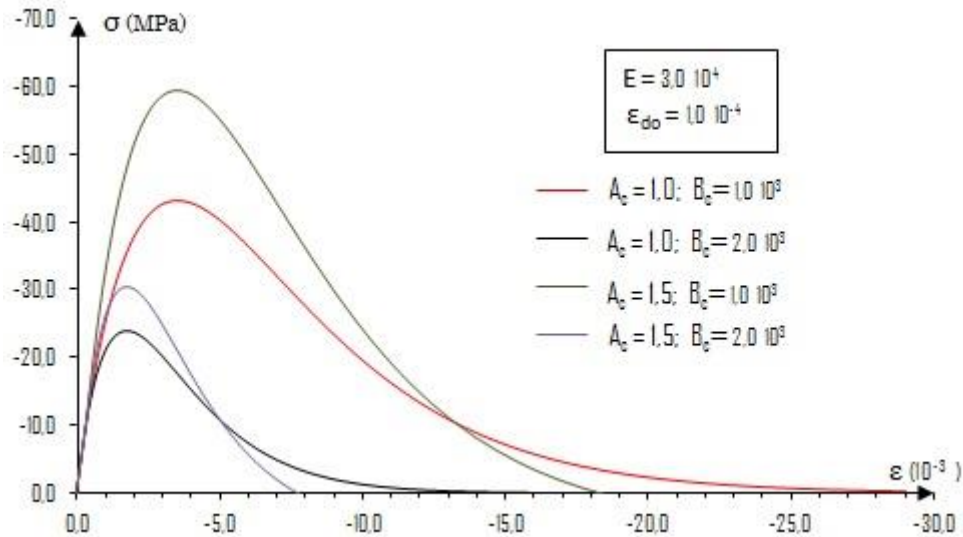


Figura 4.13 - Influência dos Parâmetro A_c e B_c

Mazars (1984) sugere intervalos de valores para os parâmetros a fim de que a equação constitutiva descreva o comportamento do concreto a tração e a compressão. Os intervalos sugeridos por Mazars são os apresentados abaixo:

$$0,5 \cdot 10^{-4} \leq \varepsilon_{d0} \leq 1,5 \cdot 10^{-4}$$

$$0,7 \leq A_t \leq 1,0$$

$$1 \leq A_c \leq 1,5$$

$$10^4 \leq B_t \leq 10^5$$

$$10^3 \leq B_c \leq 2 \cdot 10^3$$

4.2.3 Viga Armada de Mazars

A fim de validar a ferramenta computacional desenvolvida baseada no método dos elementos finitos optou-se por simular um ensaio de flexão a três pontos de uma viga armada. O resultado numérico obtido foi comparado com os resultados experimentais encontrados na literatura.

A viga ensaiada numericamente possui as mesmas características da viga apresentada no trabalho de Mazars (1984). Trata-se de uma viga com seção de 150x220 mm, distância entre apoios igual a 1400 mm, com área de aço igual a 226,19 mm², cobrimento de 15 mm, módulo de elasticidade do concreto (E_c) e do aço (E_a) iguais a $3 \cdot 10^4 MPa$ e $19,6 \cdot 10^4 MPa$, respectivamente, coeficiente de Poisson do concreto (ν) igual a 0,2 e carga aplicada no centro do vão, como ilustra a Figura 4.14.

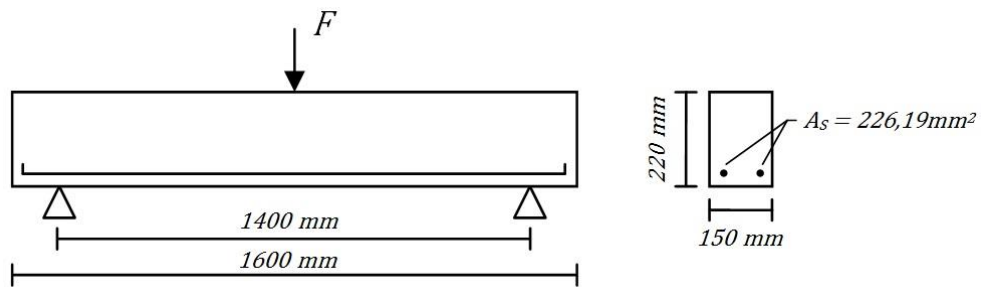


Figura 4.14 - Detalhamento Viga de 3 pontos

Devido a simetria do problema apenas metade do domínio foi discretizado por meio de uma malha regular formada por triângulos lineares isósceles. Oitocentos e sessenta e quatro (864) triângulos compõe a malha escolhida, sendo que tais triângulos foram agrupados em blocos quadrados, cada bloco formado por oito triângulos dispostos no sentido horário, conforme ilustra a Figura 4.15.

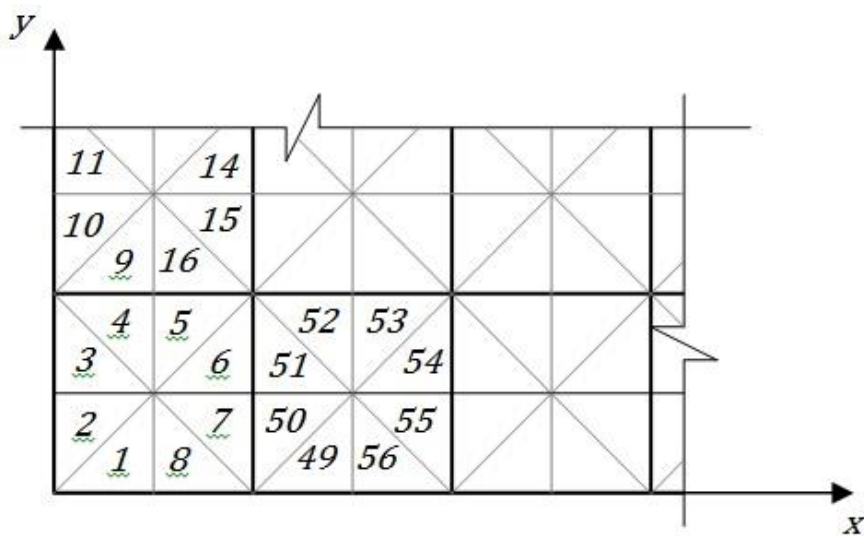


Figura 4.15 - Disposição dos Triângulos na Malha

A malha possui 481 nós numerados de baixo para cima e da esquerda para direita, sendo que na direção do eixo y foram distribuídos 13 nós enquanto que na direção do eixo x foram distribuídos 37 nós.

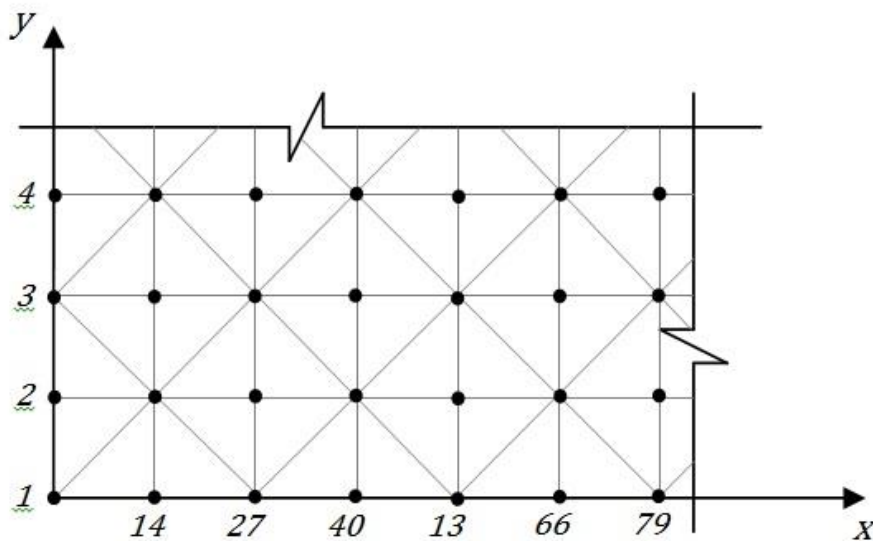


Figura 4.16 - Disposição dos nós no Domínio

Neste trabalho optou-se por simular as barras de aço por meio de elementos de treliça. Trinta e seis (36) elementos de treliça são distribuídos paralelos ao eixo x , tendo suas extremidades em dois nós consecutivos a partir do nó 2, conforme ilustra a Figura 4.17. Optou-se por considerar o aço tendo comportamento elástico durante toda a análise.

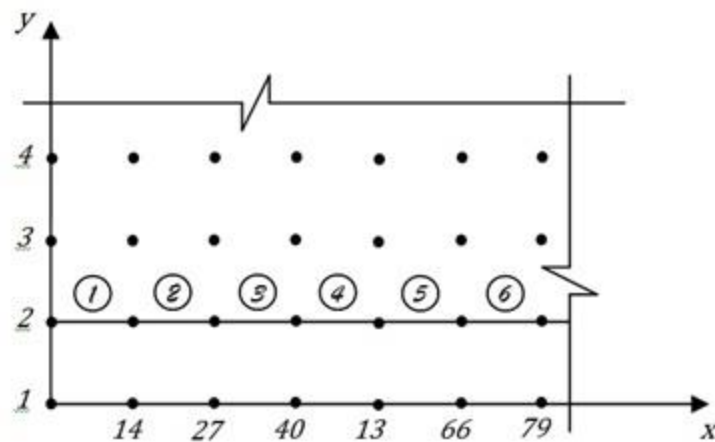


Figura 4.17 - Elementos de Treliça

O ensaio de flexão da viga foi analisado como um problema de estado plano de tensão e o incremento de deslocamento ($\Delta\bar{u}$) adotado foi igual a $1.10^{-3}mm$, imposto no nó 481. Deslocamentos nulos foram impostos no nó 66 na direção y , simulando o apoio, e nos nós 469 a 481 na direção x , caracterizando a simetria.

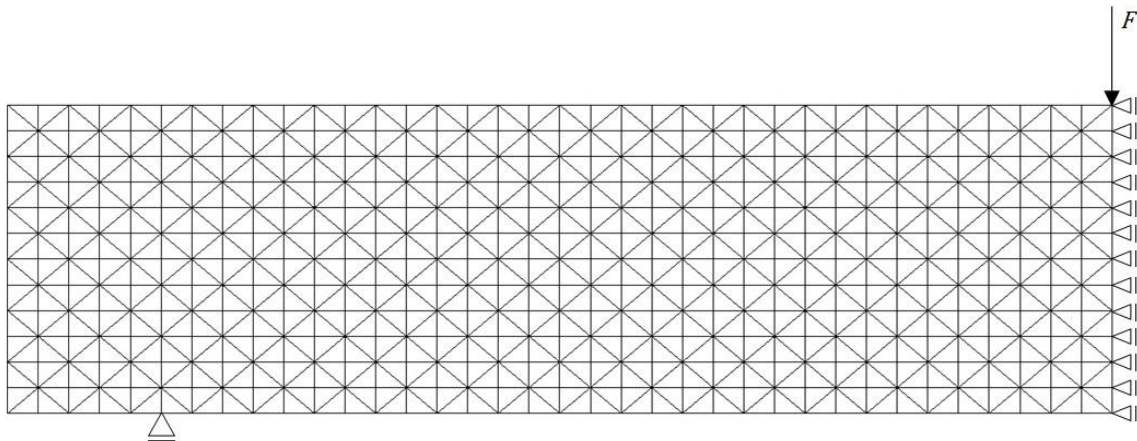


Figura 4.18 - Condições de Contorno

Os parâmetros propostos por Mazars (1984) para simular o ensaio desta viga são apresentados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1 – Parâmetros para o Ensaio de Flexão de Viga

$\varepsilon_{d0} = 1,15.10^{-4}$	
$A_t = 0,8$	$A_c = 1,4$
$B_t = 2,0.10^4$	$B_c = 1,85.10^3$

O gráfico da carga x deslocamento vertical (q), medido no centro do vão entre os apoios, obtido por meio da ferramenta computacional é comparado com os resultados encontrados através de três ensaios de flexão a três pontos. Observando a Figura 4.19, onde o resultado numérico é confrontado com os experimentais, verifica-se que a implementação desenvolvida é capaz de prever o comportamento do concreto armado.

A irregularidade da parte não linear na curva carga x deslocamento é característico de um ensaio numérico que simula um concreto armado. Tal comportamento é observado e comentado no trabalho de Álvares (1993). Álvares atribui

a irregularidade da resposta ao algoritmo explícito de integração do modelo constitutivo, porém, mesmo com a irregularidade, o resultado obtido é satisfatório para fins práticos.

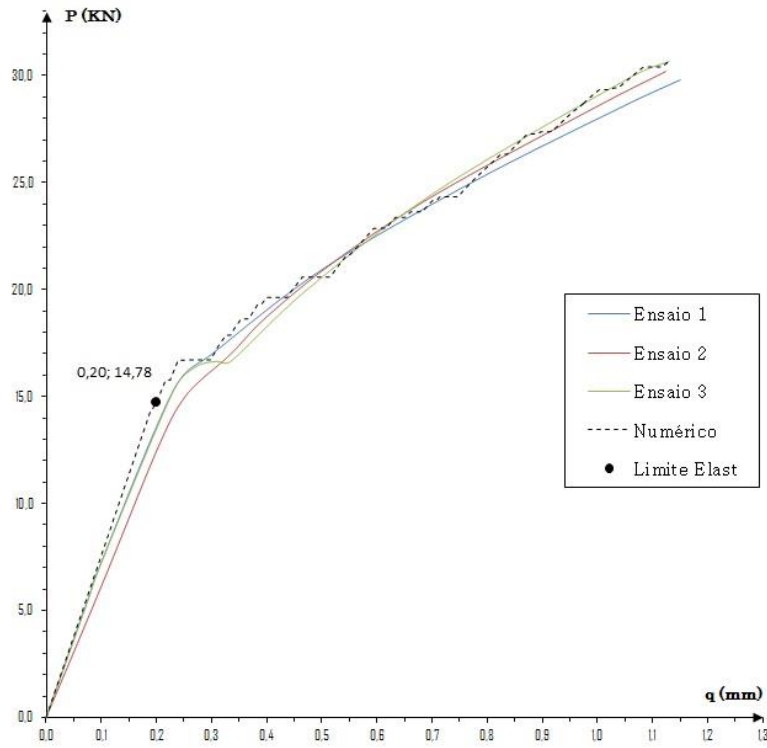


Figura 4.19 - Comportamento da Viga de Concreto Armado

A fase elástica da implementação pode ser verificável por meio da Teoria da Elasticidade, que propõe a equação diferencial 4.53 como meio de ser obtida a linha elástica de uma viga.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad 4.53$$

A partir da equação dos momentos fletores chega-se a uma função $y(x)$ que representa a configuração deformada. Para o caso de uma viga bi-apoiada submetida a uma carga no meio do vão central tem-se a seguinte expressão para o cálculo do deslocamento máximo da viga:

$$y_{max} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{PL^3}{48EI_z} \quad 4.54$$

sendo P a carga aplicada, L distância entre apoios, I_z momento de inércia em torno do eixo principal.

A carga aproximada de $14,78KN$, apresentada na Figura 4.19 como limite elástico, refere-se ao último valor de carga correspondente a uma deformação equivalente (ϵ) menor que o critério de início de dano (ϵ_{d0}) apresentado na Tabela 4.1. Aplicando a carga limite na equação 4.54 chega-se, pela teoria da elasticidade, a um deslocamento máximo (y_{max}) igual a $0,21\text{ mm}$, valor muito próximo ao encontrado numericamente que é aproximadamente igual a $0,20\text{ mm}$, validando, portanto, o trecho elástico da implementação.

O trecho não linear também pode ser validado comparando a curva teórica Tensão x Deformação Equivalente, obtida por meio dos parâmetros dados, com a curva Tensão x Deformação Equivalente de um elemento triangular que sofre dano, obtida por meio da ferramenta computacional. A Figura 4.20 confronta a curva teórica com a curva do elemento 823 e a nítida semelhança entre elas valida a implementação do trecho não linear.

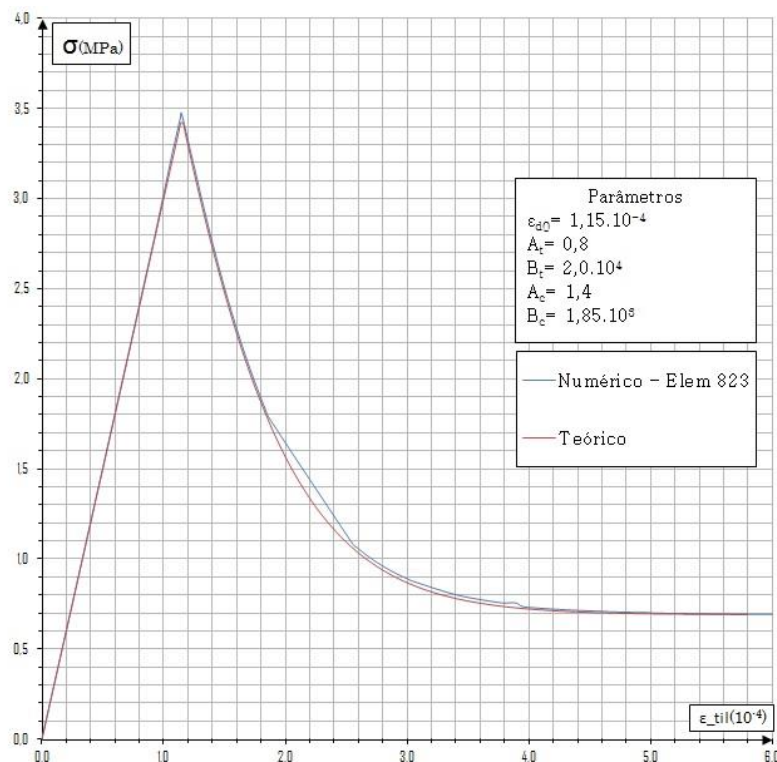


Figura 4.20 – Curva Tensão x Deformação Equivalente

Por meio do programa ParaView, versão 4.1.0, é possível visualizar o nível de dano de cada elemento para um determinado valor de carga aplicada. A Figura 4.21, Figura 4.22, Figura 4.23 e Figura 4.24 apresentam a propagação do dano na viga ensaiada.

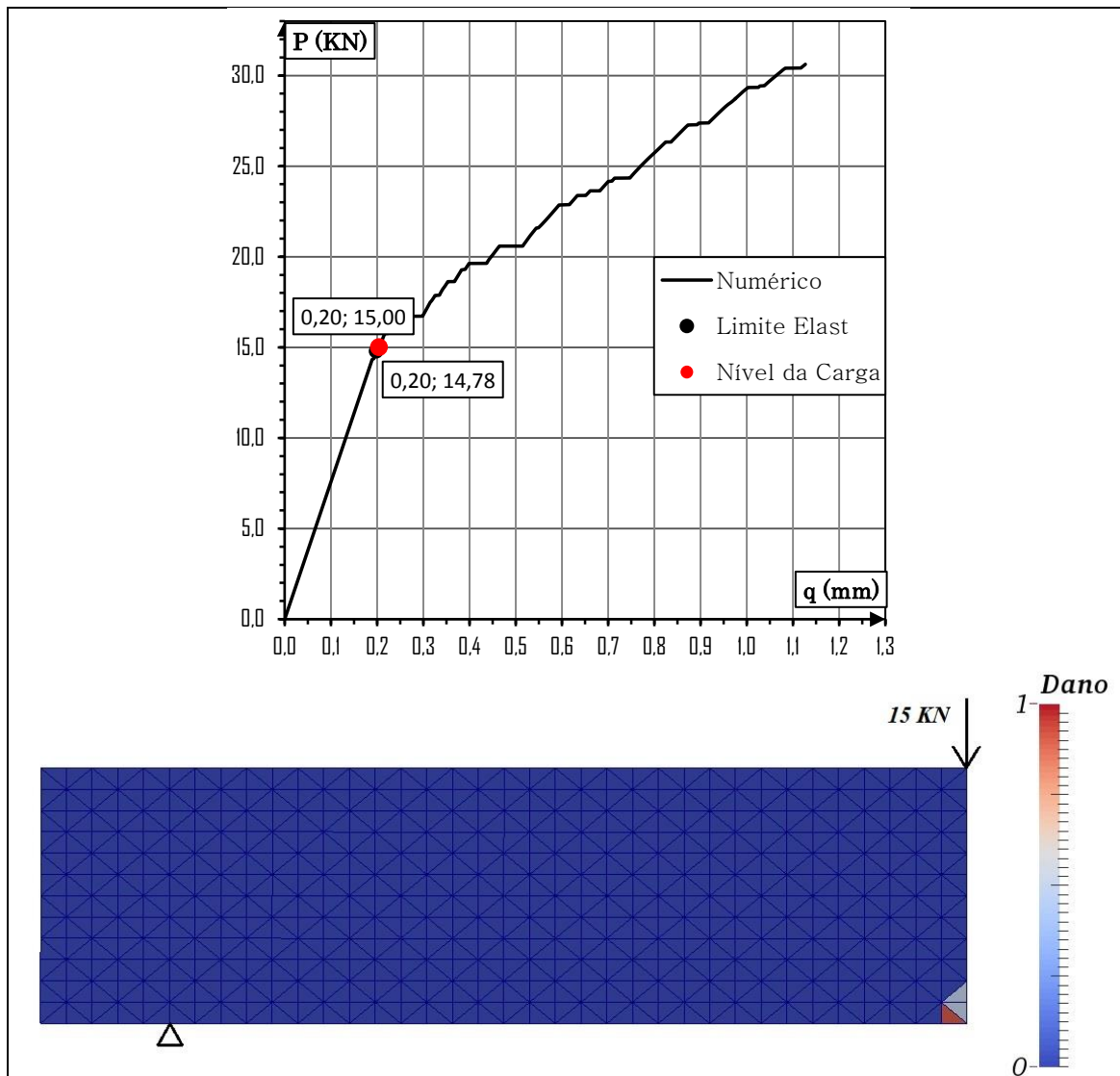


Figura 4.21 - Estado de Dano da Viga para $P = 15$ kN

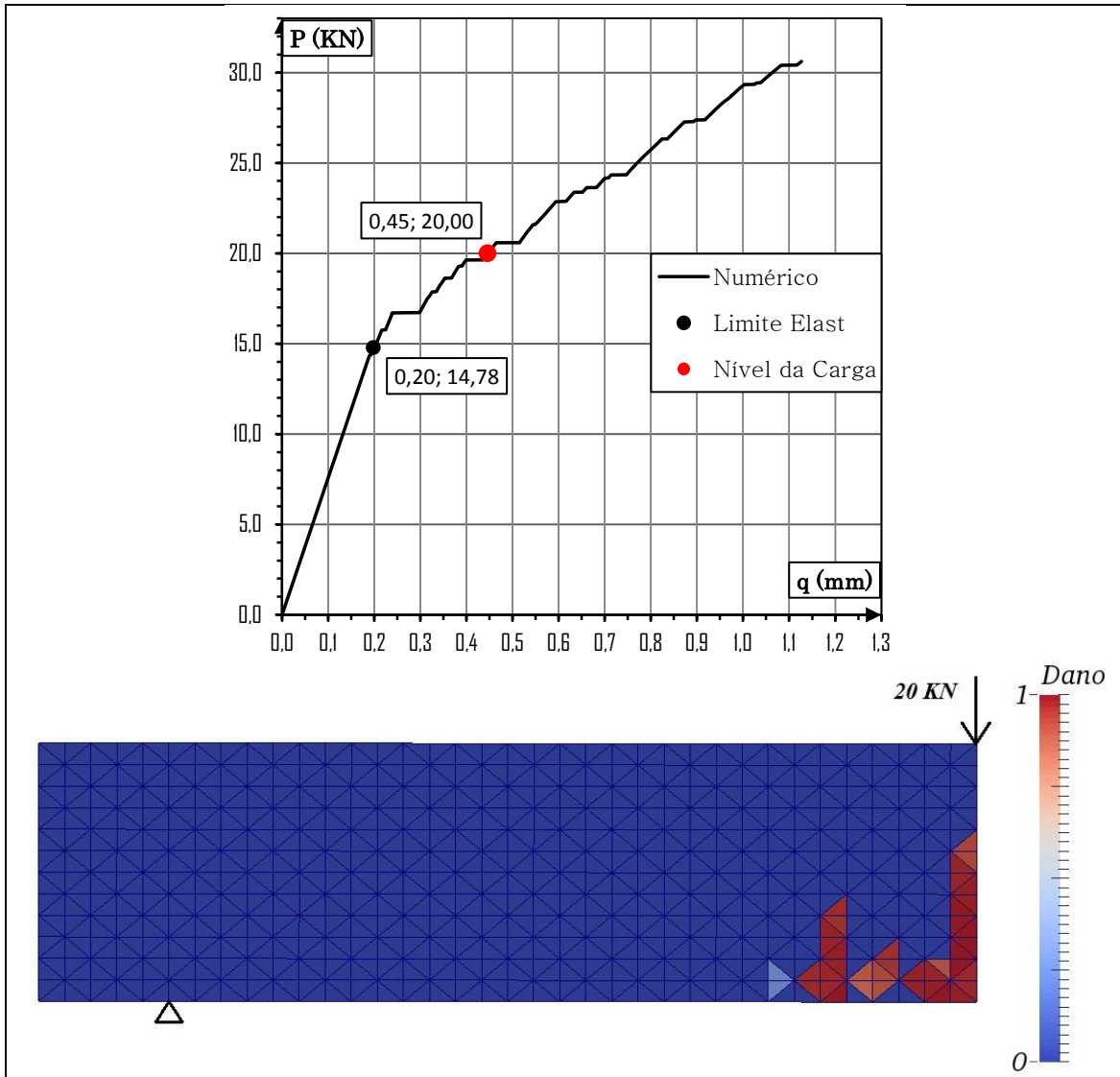


Figura 4.22 - Estado de Dano da Viga para $P = 20\text{ KN}$

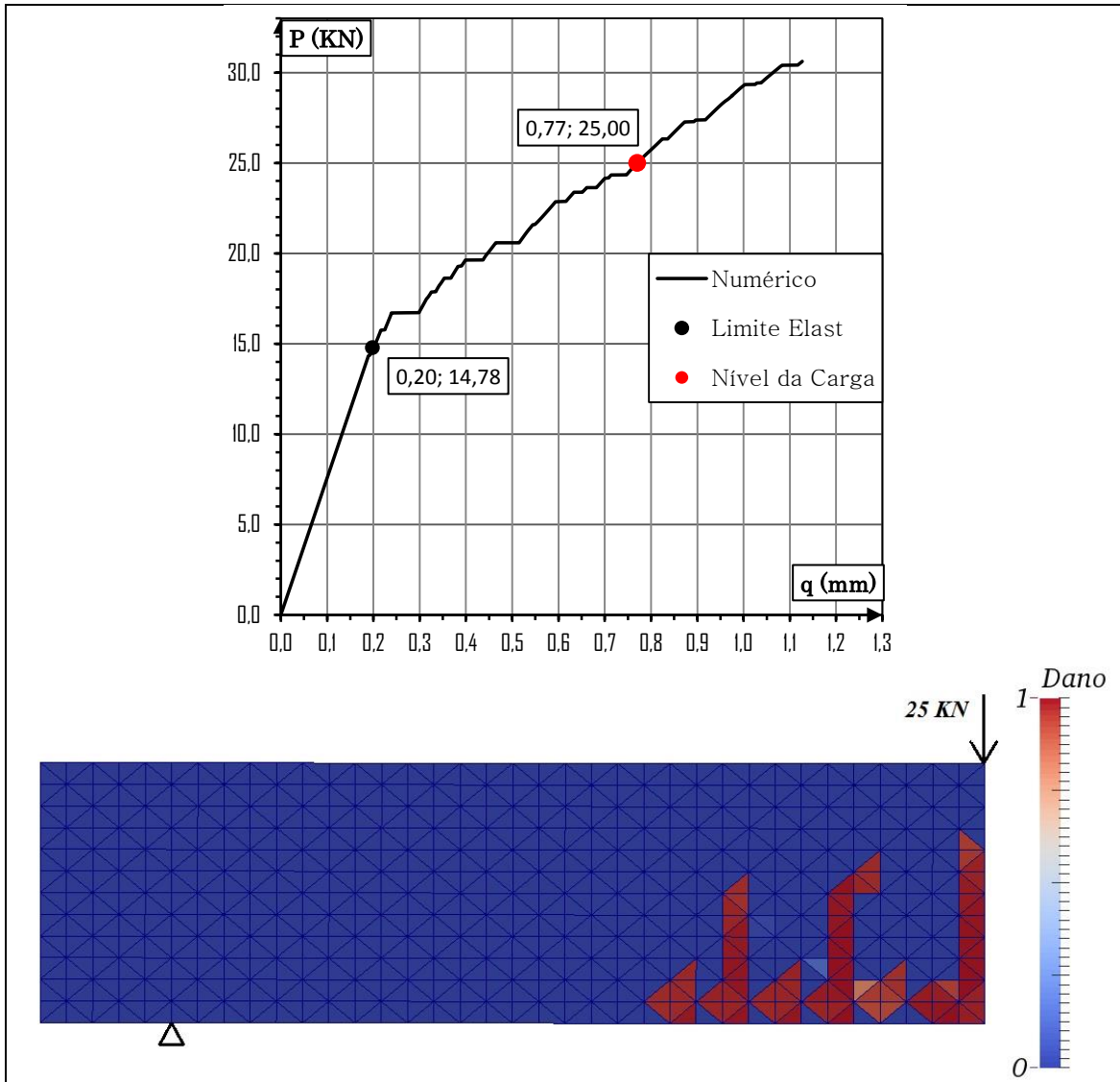


Figura 4.23 - Estado de Dano da Viga para $P = 25\text{ KN}$

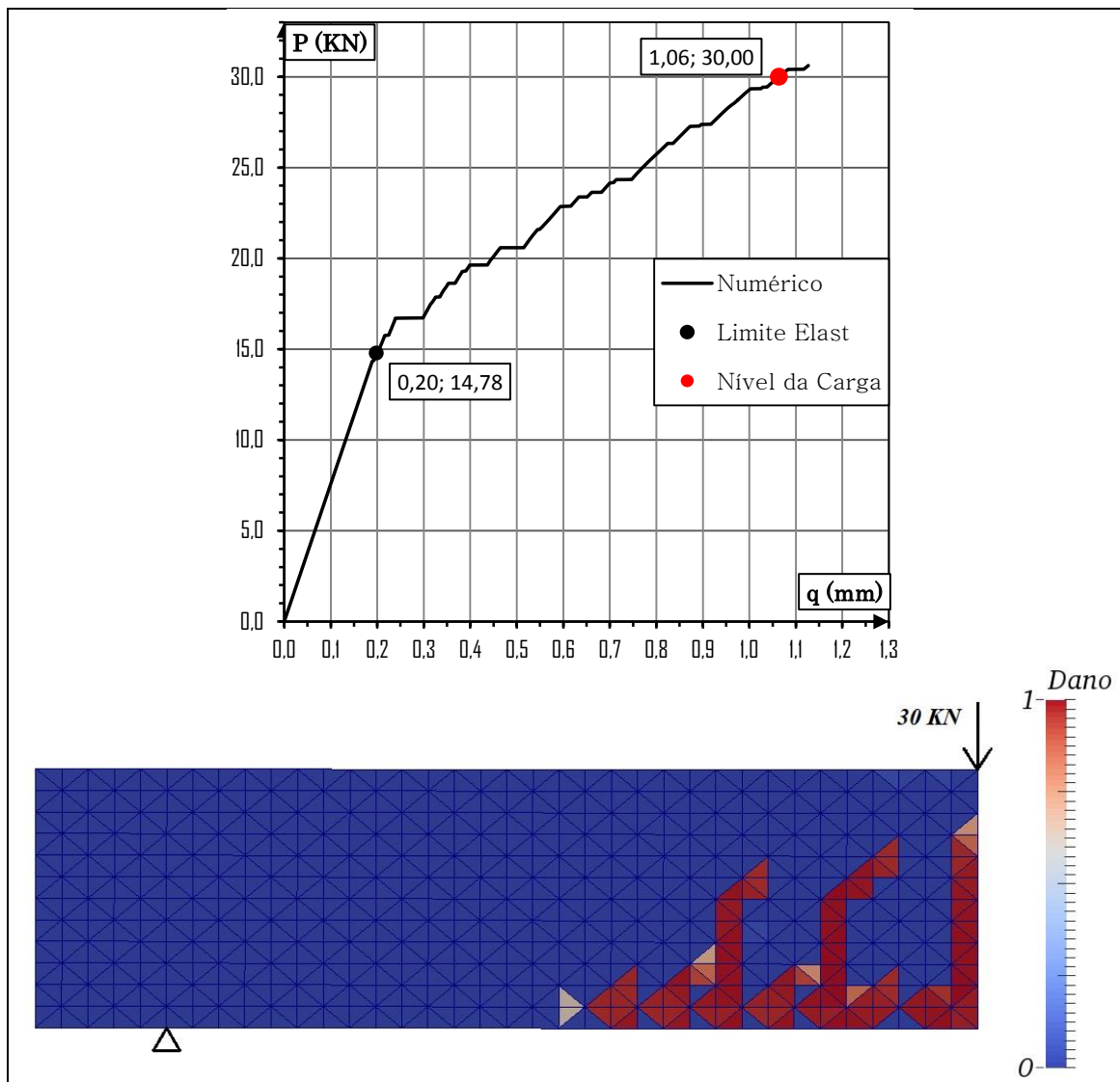


Figura 4.24 - Estado de Dano da Viga para $P = 30 \text{ kN}$

Observa-se que a propagação do dano evolui da parte inferior da viga (região tracionada) para parte superior da viga (região comprimida), como também ao longo da barra de aço, que devido a flexão da viga está resistindo ao esforço de tração. Tal comportamento é o esperado uma vez que a velocidade de evolução do dano para deformações de tração é maior do que para deformações de compressão. Observa-se também que a propagação do dano é semelhante à propagação de fissuras na viga e ambos se desenvolvem devido ao esforço de tração, portanto pode-se tomar o dano como uma grandeza que identifica a propagação de fissura no concreto.

Com a evolução do dano pode-se identificar três subdomínios. Um subdomínio formado por elementos que permanecem com valores de dano nulos (Ω_0), um segundo

subdomínio formado por elemento com valores de dano entre 0 e 1 (Ω_{mf}) e um terceiro subdomínio formado por elementos com valores de dano igual a 1 (Ω_f). Fisicamente Ω_o refere-se ao concreto que permanece com comportamento elástico, Ω_{mf} refere-se às microfissurações desenvolvidas mas que não são visíveis e Ω_f refere-se as fissuras visíveis.

4.3 PROBLEMA DA NÃO-OBJETIVIDADE

A apresentação de comportamento *softening* após pico de tensão num gráfico tensão x deformação é um comportamento que surge devido à propagação de microfissuras que podem ser identificadas por meio do avanço do dano. Este comportamento segundo Pijaudier-Cabot e Bazant (1987) é característico de materiais frágeis como o concreto puro e alguns reforçados com fibras, rochas, compósitos, dentre outros.

O comportamento *softening*, corresponde a uma redução de tensões com aumento de deformação. Este fenômeno ocorre entre o início da fissuração (microfissuras ou fissuras não visíveis) e estende-se até o aparecimento de fissuras visíveis. Portanto, o aparecimento de fissuras visíveis é o estado que caracteriza seu fim. Tal comportamento tende a localizar a deformação numa região. Esta deformação localizada é responsável pela sensibilidade da solução em elementos finitos à malha conduzindo a soluções não convergentes. Isto significa que embora a malha seja refinada a solução obtida por meio do método numérico não converge para um resultado fisicamente real e portanto a resposta numérica não é objetiva.

Uma maneira de identificar o problema de não objetividade é simular numericamente um ensaio de tração direta. A seguir são apresentados quatros resultados para um corpo de dimensões iguais a 0,3 x 0,1 x 0,1 com módulo de Elasticidade (E) igual a $3 \cdot 10^4 MPa$ e poisson (ν) igual a 0,2 discretizados por uma malha regular de elementos triangulares lineares (Figura 4.25). Os parâmetros usados para a curva foram: $\varepsilon_{do} = 1,0 \times 10^{-4}$, $A_t = 1,0$ e $B_t = 0,9 \times 10^4$. As análises realizadas consideraram o corpo submetido a um estado plano de tensão.

Para os elementos que distam 0,1 m do engaste foi adotado um valor inicial de dano igual a 0,01 ($D_o = 0,01$) com o propósito de que tal faixa tenha menor resistência e tenha-se, portanto, controle quanto a posição onde se desenvolverão as microfissuras. Na Figura 4.25 tais elementos estão hachurados.

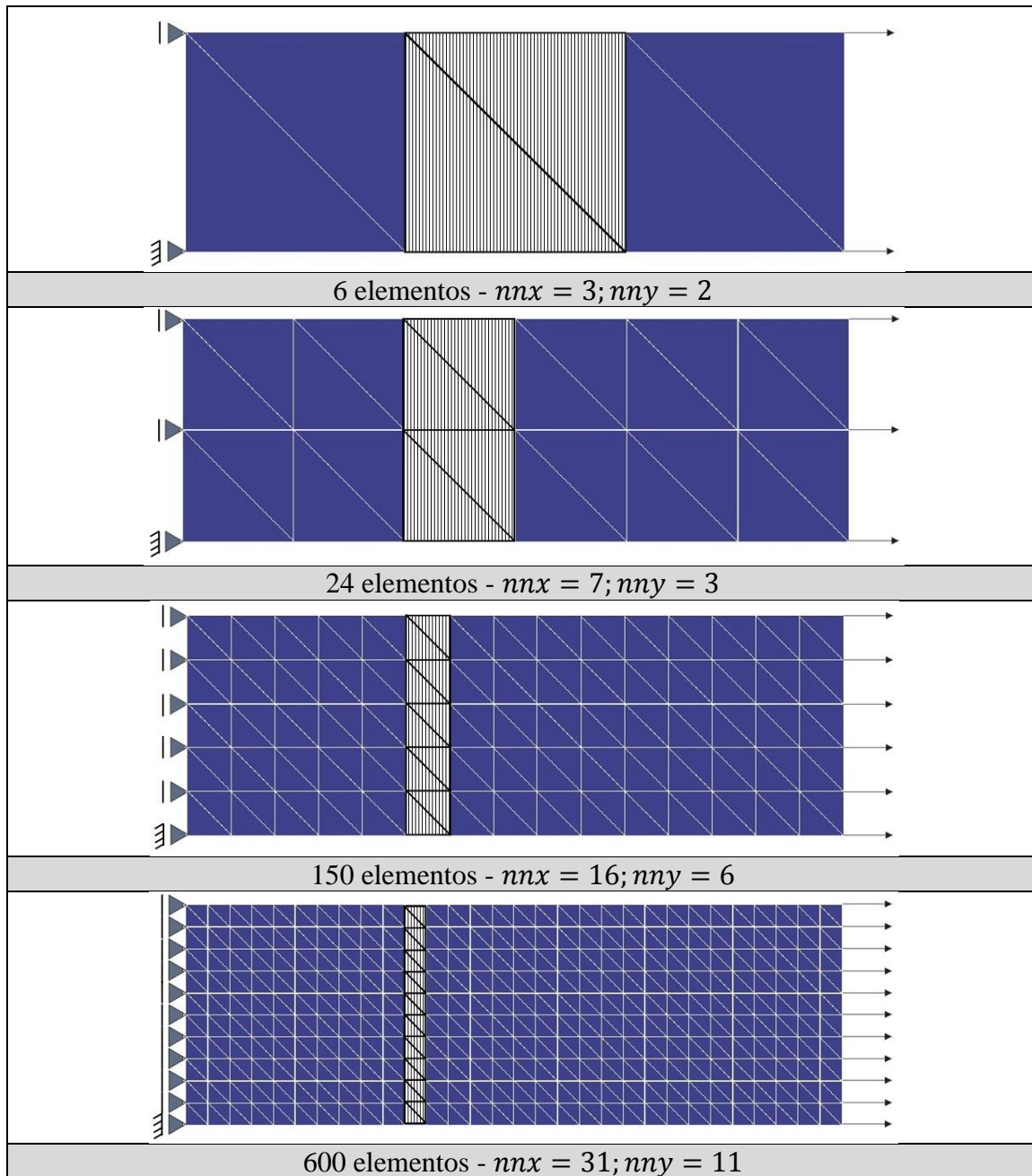


Figura 4.25 - Discretização do Domínio para um Corpo Submetido ao Ensaio de Tração Direta

A Figura 4.26 apresenta as curvas carga x deslocamento de um ponto que está a 0,3 m do engaste obtidas para as quatro malhas.

À medida que a malha é refinada verifica-se que o trecho *softening* não parece convergir para uma curva de ruptura real. Driemeier (1999) explica tal resultado pelo fato de a equação governante prever o mecanismo de ruptura como uma zona de localização com espessura nula o que leva a solução em elementos finitos tentar captar esta zona localizando as deformações na linha de elementos de menor rigidez independente das dimensões dos elementos e conseqüentemente levando ao problema de não objetividade.

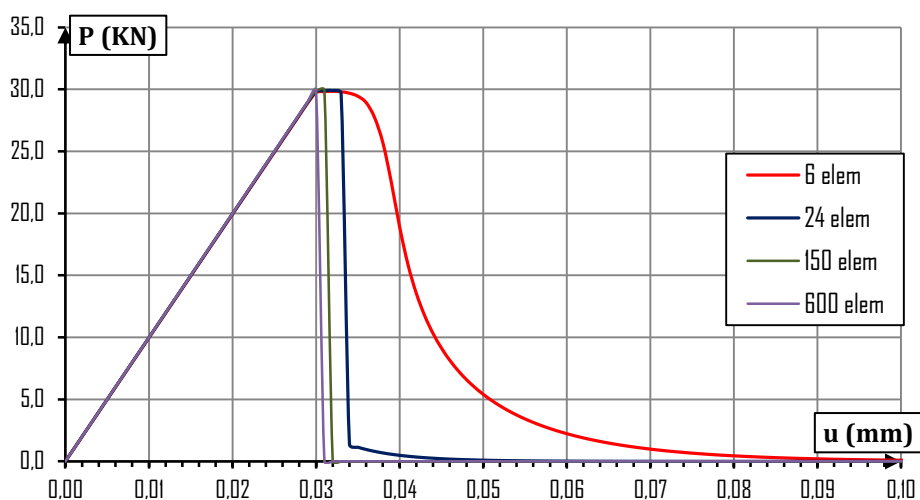


Figura 4.26 - Curva Carga x Deslocamento para um caso não objetivo.

O problema de não objetividade, segundo Peerligts *et al* (2001), não é exclusivo da Teoria de dano. Outras Teorias, como o de Plasticidade, que tenta no meio contínuo reproduzir o comportamento *softening* do material também apresentam o mesmo problema. E também não está relacionado a um método numérico em específico, uma vez que outros métodos de discretização apresentam irregularidades na resposta quando submetido a circunstâncias similares.

Sluys (1992) apresenta em seu trabalho quatro técnicas para contornar o problema de não objetividade. As técnicas apresentadas por Sluys (1992) são: Contínuo Micropolar, Integral Não-Local, Modelos com Gradientes e Energia da Fratura. Todas as quatro técnicas tem em comum um comprimento interno (h) adotado como uma característica do material a fim de definir uma zona de concentração das deformações.

Segundo Botta (1998), a técnica da Energia da Fratura (G_f) resolve não só o problema de não objetividade como também o problema de irregularidade da solução numérica em termos de carga x deslocamento, como é o caso da resposta encontrada na seção 4.2.3. Tal técnica foi a escolhida neste trabalho para contornar o problema de não objetividade da malha.

4.4 ENERGIA DA FRATURA

A imposição da energia da fratura como uma propriedade do material é uma das técnicas que contorna a não objetividade da malha. Segundo Driemeier (1999) esta imposição garante uma zona de localização com espessura definida por um comprimento interno característico (h).

Uma maneira direta de determinar a energia da fratura é por meio da curva tensão x deslocamento obtida através de um ensaio de tração direta. Considera-se que uma parte da área entre a curva e o eixo dos deslocamentos corresponde a tal energia. Esta consideração, segundo Proença (1988), se justifica uma vez que ao atingir a tensão máxima (σ_t) a zona de fissuração se forma concentrando a deformação adicional do corpo. Considerar toda a área sob a curva como sendo o valor da Energia da Fratura seria superestima-la uma vez que até o corpo atingir tensão máxima (σ_t) deformações permanentes se formam e estes não estão localizados na zona de fissuração. A Figura 4.27 apresenta a área que corresponde a Energia da Fratura, sendo que $u' = u - u_p$.

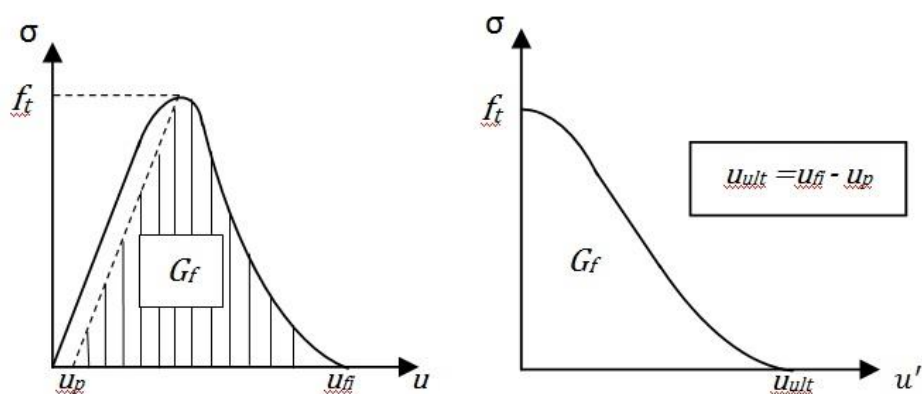


Figura 4.27 - Método Direto Para Determinação de G_f

Vale salientar que a Energia da Fratura seria toda a área sob a curva tensão x deslocamento se o concreto não desenvolver deformações permanentes antes de atingir a tensão máxima o que levaria $u_p = 0$ e $u_{fi} = u_{ult}$.

A partir da Figura 4.27 é possível deduzir a forma analítica de cálculo da energia da fratura:

$$G_f = \int_0^{u_{ult}} \sigma du' \quad 4.55$$

Para um modelo de microfissuração distribuída tem-se que a fissura se desenvolve numa zona de comprimento (h) e portando a deformação devido a fissura pode ser dado por:

$$\varepsilon_f = \frac{u'}{h} \quad 4.56$$

o que permite escrever 4.55 como:

$$G_f = \int_0^{\varepsilon_{ult}} \sigma h d\varepsilon \quad 4.57$$

ou ainda:

$$g_f = \int_0^{\varepsilon_{ult}} \sigma d\varepsilon \quad 4.58$$

e tem que:

$$\frac{G_f}{h} = g_f \quad 4.59$$

Considera-se neste modelo que a deformação total é composta por uma deformação referente ao concreto, com comportamento elástico, e outra parte por deformações referente a microfissuração e conseqüentemente não recuperável. A curva Tensão x Deformação, portanto, é obtida somando os dois gráficos em relação ao eixo das ordenadas (σ).

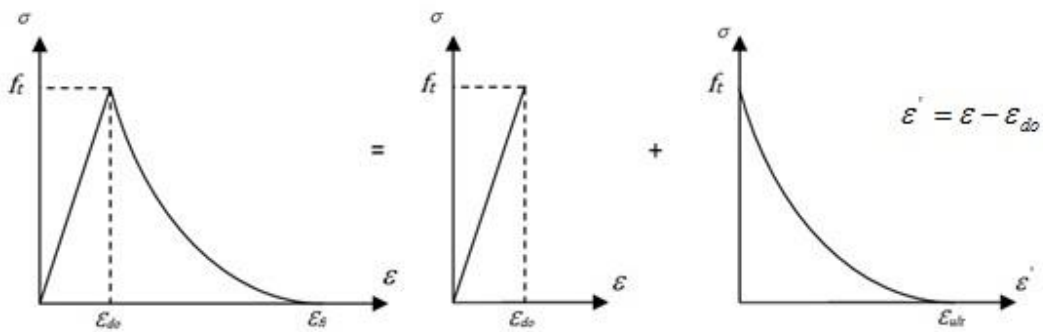
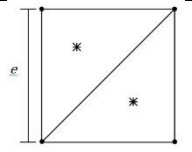
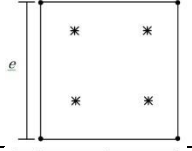
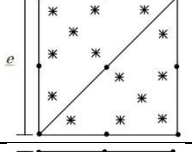
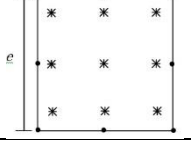


Figura 4.28 - Obtenção da Deformação Final

Para a implementação numérica do modelo, a largura da zona onde se desenvolve as microfissuras é dado de forma implícita. No caso do método dos elementos finitos associa-se a largura da zona, também chamada de largura de banda, a uma das dimensões do elemento finito.

Rots (1988) em seu trabalho, por meio de tentativa e erro, sugere valores de dimensões de largura de banda para malha regular a serem adotadas em função do elemento e da quantidade de pontos de integração. A Tabela 4.2 apresenta tais valores sugeridos.

Tabela 4.2 - Dimensões de Largura de Banda

Element type and integration	Effective band width h for zig-zag fracture propagation through regular mesh (found by trial-and-error for present problem)
	e
	$e\sqrt{2}$
	$\frac{1}{2}e\sqrt{2}$
	e

(ROTS, 1988)

Para validação da largura de banda sugerida por Rots (1988) e verificação do uso da energia da fratura para contornar o problema de não objetividade é necessário desenvolver uma lei de evolução de dano a partir de uma lei constitutiva que considere a energia da fratura como propriedade do material e insira de forma implícita a largura de banda a fim de encontrar resultados objetivos em termos de carga x deslocamento ou tensão x deslocamento.

4.4.1 Lei de Evolução de Dano para um Comportamento *Softening* Linear

Existem várias leis constitutivas para simular o comportamento *softening* dos materiais. Neste trabalho, para a dedução de uma lei constitutiva que leve em consideração a energia da fratura como propriedade do material optou-se inicialmente por considerar linear o comportamento *softening* do concreto, como ilustra a Figura 4.29.

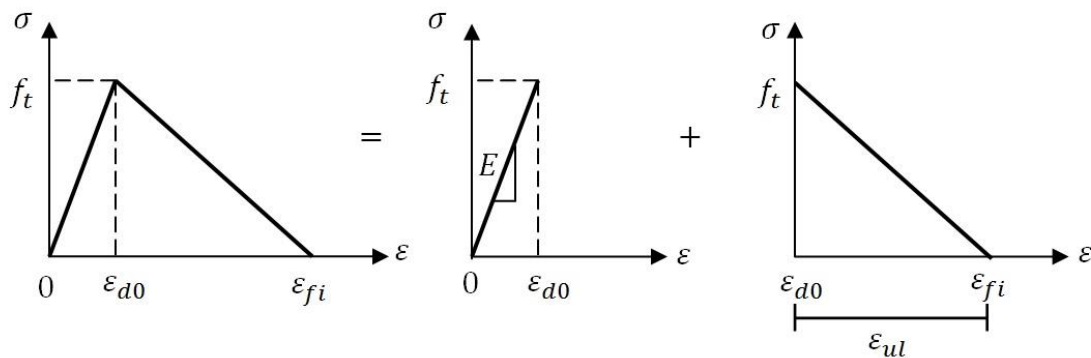


Figura 4.29 – Deformação Total para Comportamento *Softening* Linear

Considerando $\epsilon' = \epsilon - \epsilon_{d0}$ graficamente tem que:

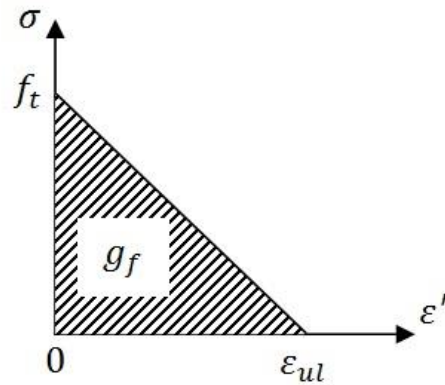


Figura 4.30 – Comportamento *Softening* linear

A tensão no processo *softening* trata-se da tensão obtida devido ao dano. A lei constitutiva do concreto pós pico é dada por:

$$\sigma(\varepsilon') = f_t \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_{ult}} \right) \quad 4.60$$

Sabe-se que:

$$\sigma(\varepsilon) = [1 - D(\varepsilon)]E\varepsilon \quad 4.61$$

Da equação 4.61, deduz-se que a lei de evolução do dano pode ser dada por:

$$D(\varepsilon) = 1 - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E\varepsilon} \quad 4.62$$

A Figura 4.29 permite deduzir que:

$$\varepsilon_{ul} = \varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do} \quad 4.63$$

$$f_t = E\varepsilon_{do} \quad 4.64$$

o que permite reescrever a equação 4.60 como:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon_{do} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{do})}{(\varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do})} \right] \quad 4.65$$

Substituindo na equação 4.62 tem-se:

$$D(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_{do}}{\varepsilon} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{do})}{(\varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do})} \right] \quad 4.66$$

Para a lei de evolução de dano desenvolvida tem-se que:

$$D(\varepsilon_{do}) = 0 \quad \text{e} \quad D(\varepsilon_{fi}) = 1$$

Observa-se portanto que de fato a lei toma ε_{fi} como estado que caracteriza o fim do processo *softening*, uma vez que para tal valor de deformação o elemento assume dano igual a 1 o que caracteriza-o como elemento fissurado. Tem-se que:

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} 0; & \varepsilon < \varepsilon_{do} \\ 1 - \frac{\varepsilon_{do}}{\varepsilon} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{do})}{(\varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do})} \right]; & \varepsilon_{do} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{fi} \\ 1; & \varepsilon > \varepsilon_{fi} \end{cases}$$

A Figura 4.31 apresenta uma curva de evolução de dano para $\varepsilon_{do} = 1.0 \times 10^{-4}$ e $\varepsilon_{fi} = 10.0 \times 10^{-4}$.

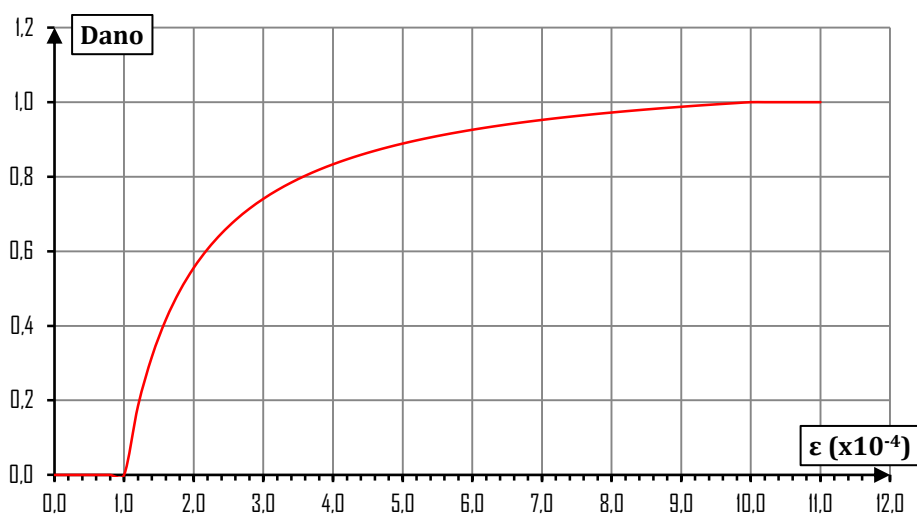


Figura 4.31 – Curva de Evolução de Dano para uma Lei de Linear de *Softening*

Sabe-se que:

$$g_f = \int_0^{\varepsilon_{ul}} \sigma(\varepsilon') d\varepsilon' \quad 4.67$$

o que leva a:

$$g_f = \frac{\varepsilon_{ult} f_t}{2} \quad 4.68$$

Substituindo a equação 4.56 em 4.68 tem-se:

$$u_{ult} = \frac{2G_f}{f_t} \quad 4.69$$

Substituindo 4.59, 4.63 e 4.64 em 4.68 chega a expressão de deformação final ε_{fi} .

$$\varepsilon_{fi} = \frac{2G_f}{hE\varepsilon_{do}} + \varepsilon_{do} \quad 4.70$$

sendo h a largura de banda que pode assumir em função do tipo de elemento e da quantidade de pontos de integração o valor sugerido por Rots (1988).

O número de parâmetros para definir a curva passam a ser apenas dois: ε_{do} (Deformação correspondente a máxima tensão no ensaio de tração uniaxial) e G_f (Energia por unidade de área para o concreto fraturar).

4.4.2 Cálculo de Deslocamento Final de um Ensaio de Tração Direta

Sendo conhecido o módulo de elasticidade do concreto (E), a deformação referente a tensão máxima (ε_{do}), a energia por unidade de área para o concreto fraturar (G_f) e adotando-se uma largura de banda (h), pode-se calcular o deslocamento final (u_{fi}) para uma distância qualquer x em relação ao engaste de um ensaio de tração direta.

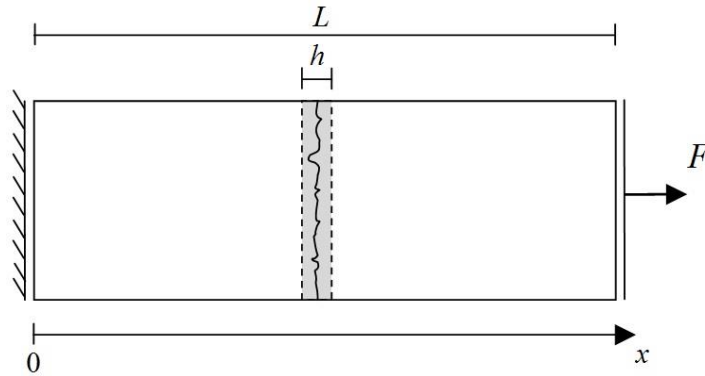


Figura 4.32 – Ensaio de tração Direta

O deslocamento final em um ponto $u_{fi}(x)$ é encontrado por meio do somatório de três deslocamentos distintos:

$$u_{fi}(x) = u_e(x) + u_{ult}(x) + u_r(x) \quad 4.71$$

Sendo $u_e(x)$ o deslocamento desenvolvido durante a fase elástica, isto é, antes do corpo atingir tensão máxima e ocorrer concentração do desenvolvimento de deformações em uma zona. Tal deslocamento é obtido pela seguinte expressão

$$u_e(x) = x \cdot \varepsilon_{do} \quad 4.72$$

Para o cálculo dos outros dois deslocamentos é necessário calcular o que convencionou denominar de comprimento característico de dano (L_d) que é obtido multiplicando o número de fissuras desenvolvidas até a posição x (n_{fx}) pela largura de banda (h):

$$L_d(x) = n_{fx} \cdot h \quad 4.73$$

A expressão para calcular u_{ult} já foi deduzida na seção 4.4.1 e é novamente apresentada aqui:

$$u_{ult}(x) = \frac{2G_f(x)}{f_t} \quad 4.74$$

Trata-se do deslocamento desenvolvido devido a fissuração, sendo $G_f(x)$ a energia de fissuração necessária para abrir as fissuras desenvolvidas até a posição x e que é calculada pela seguinte expressão:

$$G_f(x) = \frac{L_d(x) \cdot G_f}{L_d(L)} \quad 4.75$$

ou ainda,

$$G_f(x) = \frac{n_{fx} \cdot G_f}{n_{fL}} \quad 4.76$$

sendo n_{fL} número de fissuras desenvolvidas ao longo de todo o comprimento da viga. Por meio da equação 4.74 e 4.76 verifica-se que u_{ult} não depende da discretização da malha, mas simplesmente das propriedades do material (G_f, E, ε_{do}) e, para uma dada posição, do número de fissuras desenvolvidas até ali (n_{fx}) comparado ao número total de fissuras (n_{fL}).

Considerando que o concreto é puramente elástico tem-se que quando o corpo concentra o desenvolvimento da deformação numa zona as demais regiões descarregam elasticamente provocando a recuperação de parte do deslocamento desenvolvido na fase elástica. A terceira parcela do somatório [$u_r(x)$] trata-se do deslocamento que é recuperado e pode ser calculada multiplicando o comprimento onde ocorre descarregamento elástico [$x - L_d(x)$] pela deformação elástica de início de dano (ε_{do}):

$$u_r(x) = [x - L_d(x)] \cdot (-\varepsilon_{do}) \quad 4.77$$

Uma vez que a largura de banda (h), numa discretização em elementos finitos, é tomada como uma das dimensões do elemento tem-se que à medida que a malha é refinada h tende a zero levando o comprimento característico de dano L_d também tender a zero. A equação 4.77 permite deduzir que nestas condições o u_r tende a $-u_e$ o que significa que quase todo deslocamento elástico é recuperado e sendo assim o deslocamento final u_{fi} tende a ser igual ao desenvolvido devido a fissuração u_{ult} . Este resultado numérico é exatamente o que se espera de uma curva *softening* real de um que não desenvolve deformações permanentes antes de atingir tensão máxima, como já comentado. Portanto, o uso da energia da fratura como propriedade do material permite o resultado ser independente da malha resolvendo o problema de não objetividade.

4.4.3 Previsão de resultados Numéricos

A partir das equações apresentadas na sessão 4.4.2 serão previstos resultados numéricos para dois casos. O primeiro caso será previsto resultados da curva tensão x deslocamentos para um ensaio de tração direta com o desenvolvimento de uma fissura ($n_{fL} = 1$). O segundo caso será previsto resultados da curva tensão x deslocamento para um ensaio de tração direta com o desenvolvimento de duas fissuras ($n_{fL} = 2$). Para ambos os casos será considerado que a malha esteja extremamente refinada o que leva, como já comentado, a $u_{fi} = u_{ult}$.

- **Caso 1**

Posição da fissura: $x = x_f$

Serão previstos as curvas tensão x deslocamento para duas posições: x_1 e x_2 , sendo $x_1 < x_f < x_2$.

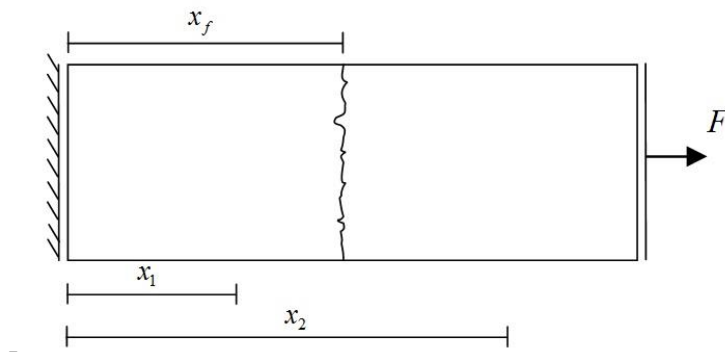


Figura 4.33 – Ensaio de Tração Direta com Desenvolvimento de uma Fissura

Curva para posição $x = x_1$

$$u_e(x_1) = x_1 \varepsilon_{do};$$

$$n_{fx_1} = 0 \text{ e portanto } G_f(x_1) = 0;$$

$$u_{ult}(x_1) = 0 \text{ e portanto } u_{fi}(x_1) = 0$$

Por ser um trecho que está antes da fissura, durante a fase elástica há um deslocamento com variação linear. Porém, após o corpo atingir tensão máxima ocorre recuperação do deslocamento elástico e tem consequentemente deslocamento final (u_{fi}) nulo (Figura 4.34)

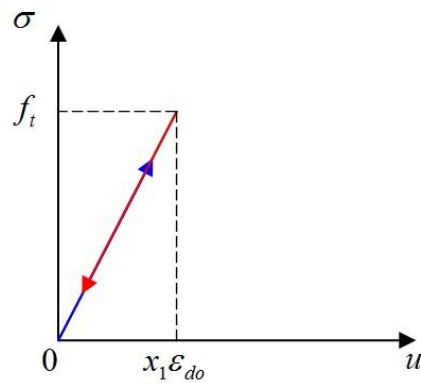


Figura 4.34 – Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_1 do Caso 1

Curva para posição $x = x_2$

$$u_e(x_2) = x_2 \varepsilon_{do};$$

$$n_{fx_2} = 1 \text{ e portanto } G_f(x_2) = G_f;$$

$$u_{ult}(x_2) = \frac{2G_f}{f_t} \text{ e portanto } u_{fi}(x_2) = \frac{2G_f}{f_t}$$

Constata-se que para uma posição pós fissura o deslocamento final é diferente de zero (Figura 4.35).

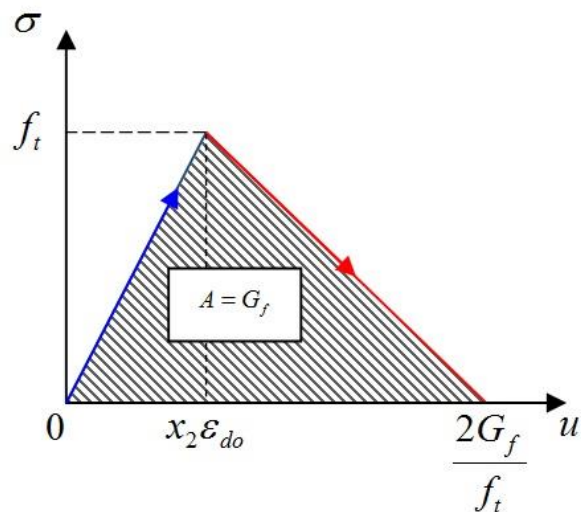


Figura 4.35 - Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_2 do Caso 1

Observa-se que a área sob a curva é numericamente igual a energia total (G_f), o que significa que toda a energia foi usada para abrir a fissura até a posição x_1 .

- **Caso 2**

Posição da fissura 1: $x = x_{f1}$;

Posição da fissura 2: $x = x_{f2}$, sendo $x_{f1} < x_{f2}$.

Serão previstos as curvas tensão x deslocamento para três posições: x_1, x_2 e x_3 , sendo $x_1 < x_{f1}$; $x_{f1} < x_2 < x_{f2}$ e $x_3 > x_{f2}$.

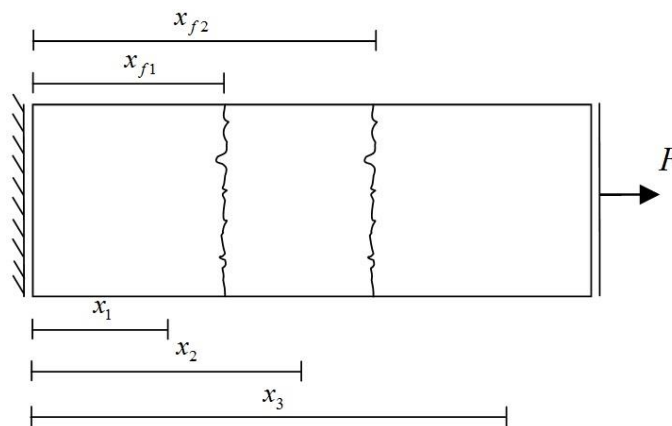


Figura 4.36 - Ensaio de Tração Direta com Desenvolvimento de duas Fissura

Curva para a posição $x = x_1$.

A curva é obtida de forma idêntica ao do caso 1.

Curva para a posição $x = x_2$

$$u_e(x_2) = x_2 \varepsilon_{do};$$

$$n_{fx_2} = 1 \text{ e portanto } G_f(x_2) = \frac{1}{2} G_f;$$

$$u_{ult}(x_2) = \frac{G_f}{f_t} \text{ e portanto } u_{fi}(x_2) = \frac{G_f}{f_t}$$

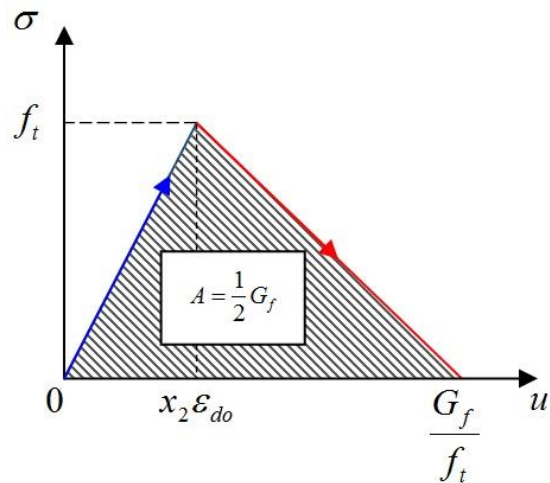


Figura 4.37 Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_2 do Caso 2

O valor da área sob a curva é coerente, uma vez que até a posição x_2 apenas metade das fissuras foram abertas e conseqüentemente apenas metade da energia foi necessária para abrir a fissura.

Curva para a posição $x = x_3$

$$u_e(x_3) = x_3 \varepsilon_{do};$$

$$n_{fx_3} = 2 \text{ e portanto } G_f(x_3) = G_f;$$

$$u_{ult}(x_3) = \frac{2G_f}{f_t} \text{ e portanto } u_{fi}(x_2) = \frac{2G_f}{f_t}$$

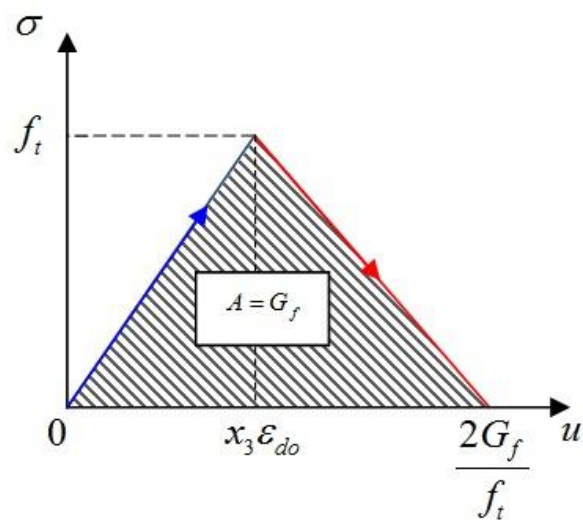


Figura 4.38 - Curva Tensão x Deslocamento para Posição x_2 do Caso 2

Observa-se que a uma posição após todas as fissuras abertas a área sob a curva coincide com a energia de fratura total (G_f). Outro aspecto observável é que na posição x_2 o deslocamento final u_{fi} é metade do deslocamento final da posição x_3 , uma vez que nesta posição acumula-se o deslocamento de duas fissuras, enquanto que em x_2 apenas de uma fissura.

4.4.4 Validação da Largura de Banda (h)

A fim de verificar a validade da largura de banda proposta por Rotts (1988) novamente foi realizado o ensaio numérico de tração direta de um corpo com mesmas características, propriedades do apresentado na seção 4.3, só que desta vez adotando para a curva *softening* a lei constitutiva apresentada na seção 4.4.1, que leva em consideração a energia da fratura como propriedade do material, e usando a largura de banda sugerida por Rotts (1998) para um elemento triangular linear com um ponto de integração. Espera-se que à medida que a malha seja refinada o resultado se convirja para os previstos na seção 4.4.3.

A seguir são apresentados os resultados para o caso de desenvolvimento de uma fissura. Para garantir o desenvolvimento de apenas uma fissura e ter controle da posição que se desenvolverá foi adotado para todos os elementos que distam 0,1 m do engaste valor de dano inicial igual 0,01 ($D_o = 0,01$) Para as malhas com 3, 24 e 600 elementos é apresentada a curva tensão x deslocamento referente a três posições: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$, $x_3 = 0,3$. Trata-se, portanto, de uma posição antes do desenvolvimento da fissura (x_1) e outras duas posições pós fissura (x_2 e x_3). Também é apresentada a curva tensão x deformação e a evolução de dano de três elementos: um elemento que está posicionado antes da fissura (elemento 1), um elemento que recebe valor inicial de dano diferente de zero (elemento2) tratando-se, portanto, de um elemento onde se concentrará as deformações após o corpo atingir pico de tensão e um elemento que está após a linha da fissura (elemento3).

Dados:

$$G_f = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m} / \text{m}^2$$

$$\varepsilon_{do} = 1,0 \times 10^{-4}$$

$$E = 3,0 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$nf_L = 1,0$$

6 elementos	
$h = 0,1 \text{ m}$	$g_f = 15 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m}/\text{m}^3$
CÁLCULOS	
Para $x = x_1 = 0,1 \text{ m}$:	
$n_{f_{0,1}} = 0$	$u_e(0,1) = 0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,1) = 0$	$u_{ult}(0,1) = 0$
$G_f(0,1) = 0$	$u_r(0,1) = -0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,1) = 0$	
Para $x = x_2 = 0,2 \text{ m}$:	
$n_{f_{0,2}} = 1$	$u_e(0,2) = 0,2 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,2) = 0,1 \text{ m}$	$u_{ult}(0,2) = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
$G_f(0,2) = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m}/\text{m}^2$	$u_r(0,2) = -0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,2) = 1,1 \times 10^{-4} \text{ m}$	
Para $x = x_3 = 0,3 \text{ m}$:	
$n_{f_{0,3}} = 1$	$u_e(0,3) = 0,3 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,3) = 0,1 \text{ m}$	$u_{ult}(0,3) = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
$G_f(0,3) = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m}/\text{m}^2$	$u_r(0,3) = -0,2 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,3) = 1,1 \times 10^{-4} \text{ m}$	

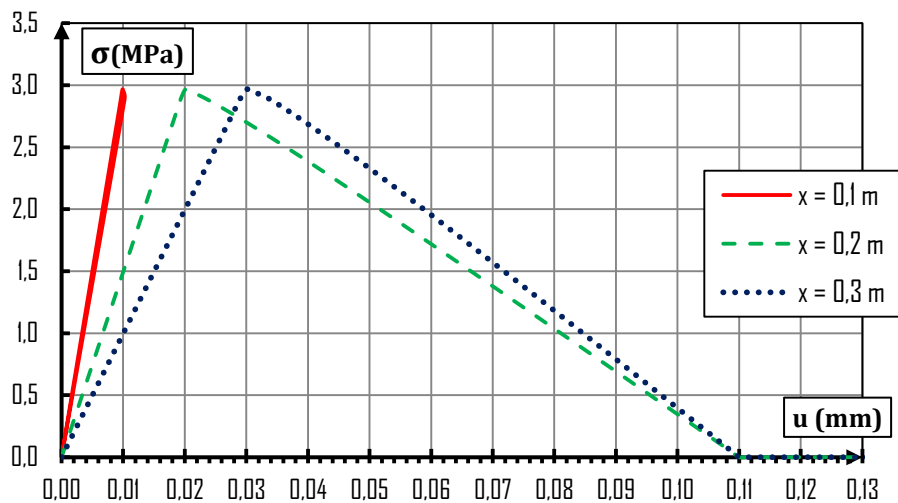


Figura 4.39 - Curva Tensão x Deslocamento Para um ensaio de Tração Direta – malha com 6 elementos

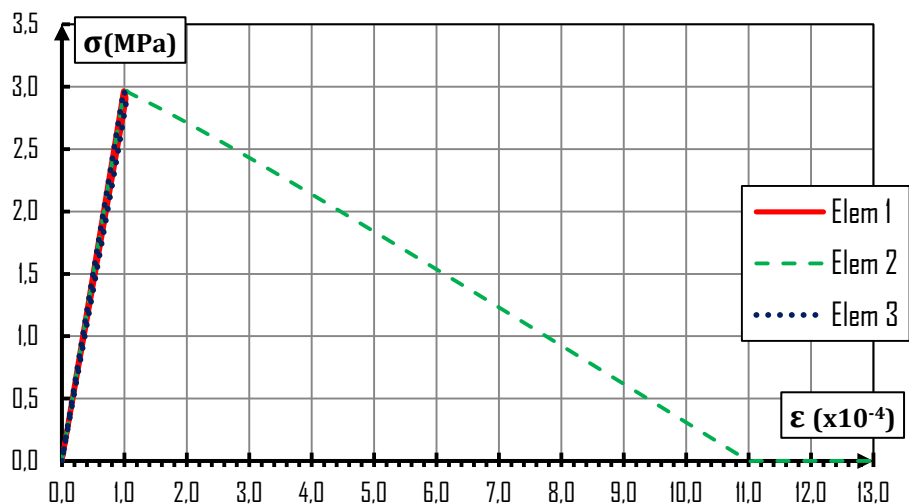


Figura 4.40 - Curva Tensão x Deformação Para um ensaio de Tração Direta – malha com 6 elementos

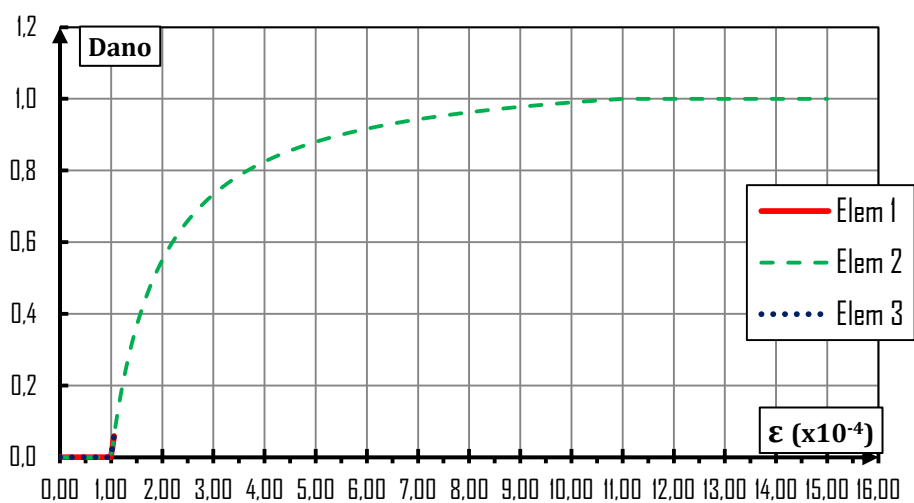


Figura 4.41 - Evolução do Dano Para um ensaio de Tração Direta – malha com 6 elementos

24 elementos	
$h = 0,05 \text{ m}$	$g_f = 30 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m}/\text{m}^3$
CÁLCULOS	
Para $x = x_1 = 0,1 \text{ m}$:	
$n_{f_{0,1}} = 0$	$u_e(0,1) = 0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,1) = 0$	$u_{ult}(0,1) = 0$
$G_f(0,1) = 0$	$u_r(0,1) = -0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,1) = 0$	
Para $x = x_2 = 0,2 \text{ m}$:	
$n_{f_{0,2}} = 1$	$u_e(0,2) = 0,2 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,2) = 0,05 \text{ m}$	$u_{ult}(0,2) = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
$G_f(0,2) = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m}/\text{m}^2$	$u_r(0,2) = -0,15 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,2) = 1,05 \times 10^{-4} \text{ m}$	
Para $x = x_3 = 0,3 \text{ m}$:	
$n_{f_{0,3}} = 1$	$u_e(0,3) = 0,3 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,3) = 0,05 \text{ m}$	$u_{ult}(0,3) = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
$G_f(0,3) = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m}/\text{m}^2$	$u_r(0,3) = -0,25 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,3) = 1,05 \times 10^{-4} \text{ m}$	

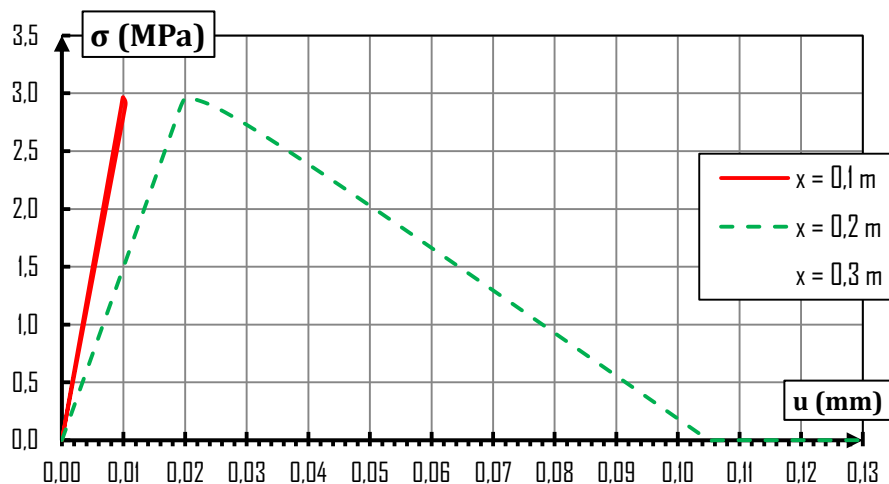


Figura 4.42 – Curva Tensão x Deslocamento Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos

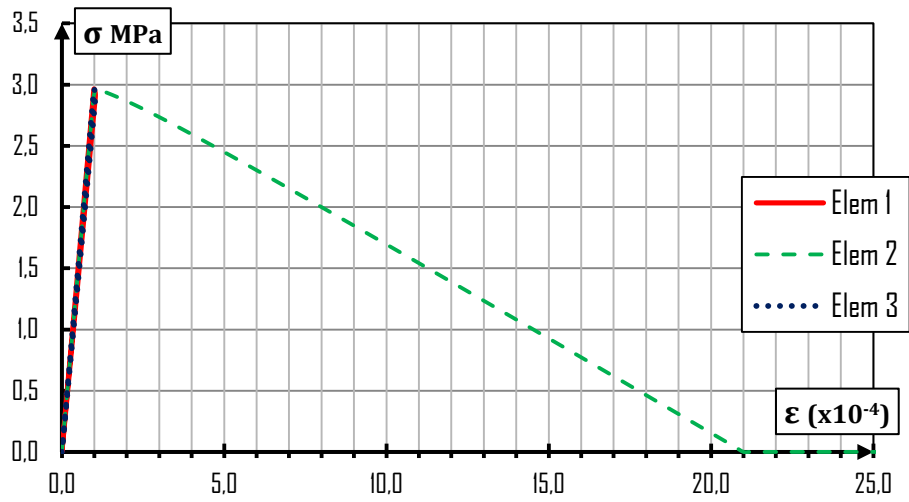


Figura 4.43 - - Curva Tensão x Deformação Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos

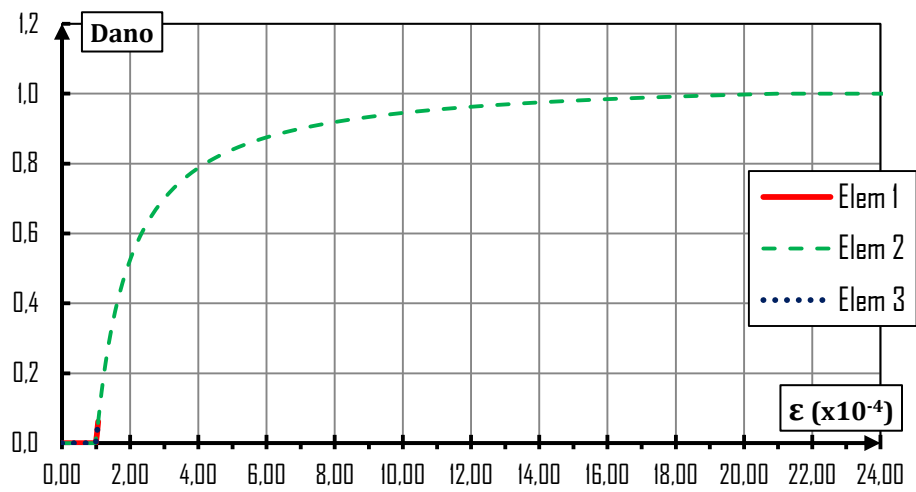


Figura 4.44 – Evolução do Dano Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos

600 elementos	
$h = 0,01\text{ m}$	$g_f = 150 \times 10^{-4} \text{ MN.m/m}^3$
CÁLCULOS	
Para $x = x_1 = 0,1\text{ m}$:	
$n_{f_{0,1}} = 0$	$u_e(0,1) = 0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,1) = 0$	$u_{ult}(0,1) = 0$
$G_f(0,1) = 0$	$u_r(0,1) = -0,1 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,1) = 0$	
Para $x = x_2 = 0,2\text{ m}$:	
$n_{f_{0,2}} = 1$	$u_e(0,2) = 0,2 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,2) = 0,01 \text{ m}$	$u_{ult}(0,2) = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
$G_f(0,2) = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN.m/m}^2$	$u_r(0,2) = -0,19 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,2) = u_{fi}(0,2) = 1,01 \times 10^{-4} \text{ m}$	
Para $x = x_3 = 0,3\text{ m}$:	
$n_{f_{0,3}} = 1$	$u_e(0,3) = 0,3 \times 10^{-4} \text{ m}$
$L_d(0,3) = 0,01 \text{ m}$	$u_{ult}(0,3) = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$
$G_f(0,3) = 1,5 \times 10^{-4} \text{ MN.m/m}^2$	$u_r(0,3) = -0,29 \times 10^{-4} \text{ m}$
$u_{fi}(0,3) = 1,01 \times 10^{-4} \text{ m}$	

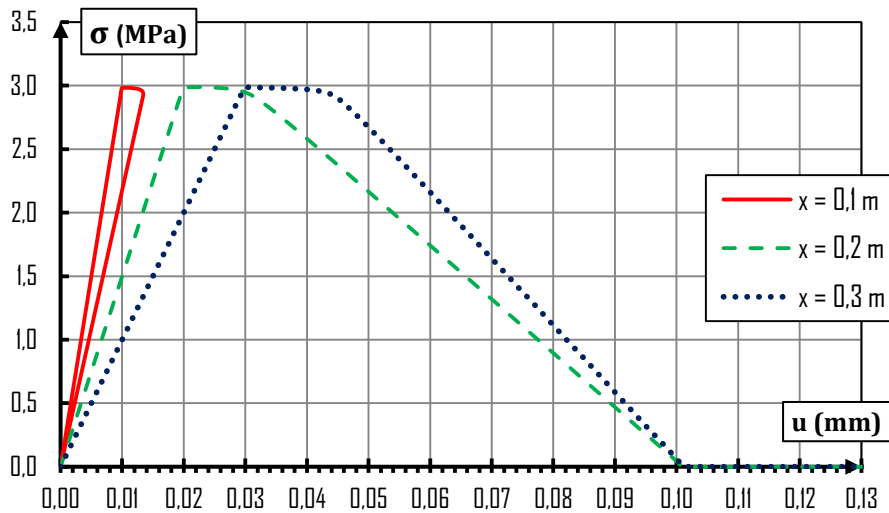


Figura 4.45 - Curva Tensão x Deslocamento Para um ensaio de Tração Direta – malha com 600 elementos

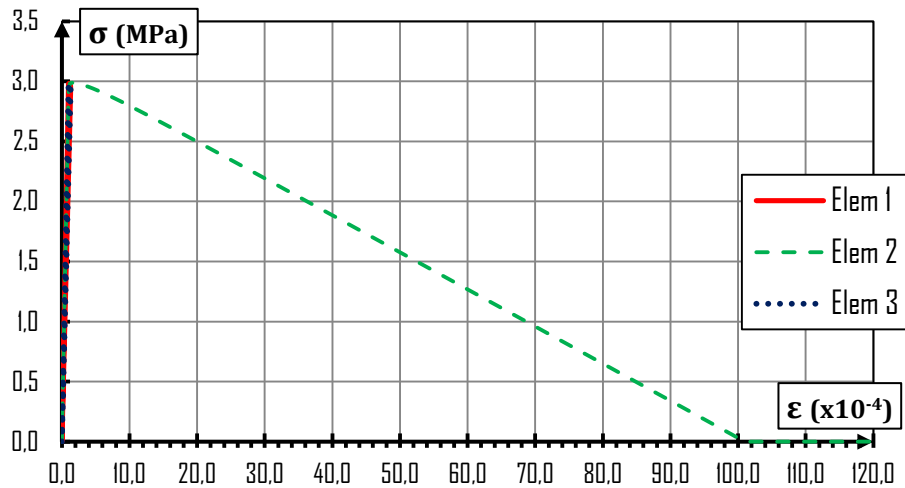


Figura 4.46 - Curva Tensão x Deformação Para um ensaio de Tração Direta – malha com 600 elementos

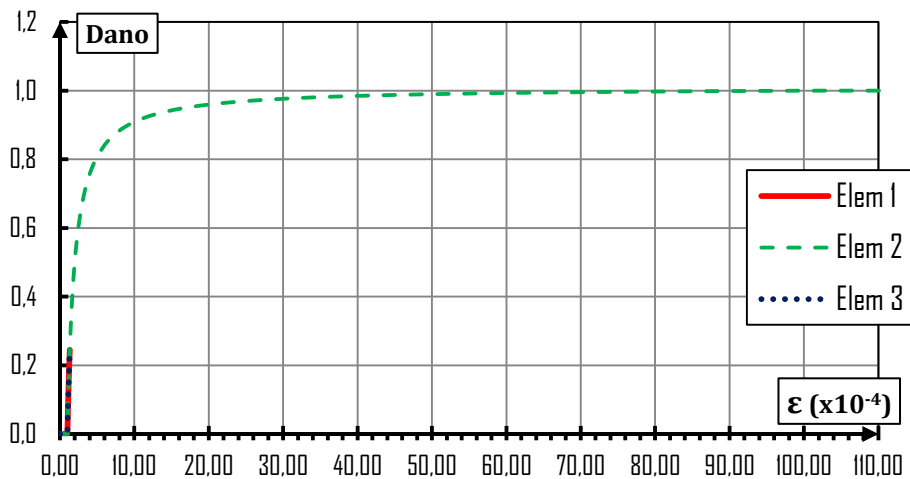


Figura 4.47 - Evolução do Dano Para um ensaio de Tração Direta – malha com 24 elementos

À medida que a malha é refinada observa-se que de fato o deslocamento final (u_{fi}) converge para o previsto na seção 4.4.3 ($u_{fi} = \frac{2G_f}{f_t}$), portanto, tem-se uma resposta que converge para um resultado fisicamente real. Como esperado observa-se que a área definida pelo trecho *softening* da curva tensão x deformação, que corresponde à fissuração do corpo, é igual a g_f (energia por unidade de volume) e finalmente por meio da curva de evolução de dano verifica-se que outros elementos

antes e depois do trecho onde se concentram as deformações sofrem dano até o momento que as deformações se concentram na zona mais frágil, o que explica o fato de o corpo ter descarregamento com rigidez diferente do inicial como também o trecho *softening* na curva Tensão x deslocamento não ser linear. Isto é visualmente perceptível à medida que a malha é refinada. Diante das coerências dos resultados constata-se a validade da largura de banda (h) proposta por Rots (1988).

Existem concretos reforçados por fibras que não rompem devido a formação de apenas uma fissura, mas o reforço permite a formação de múltiplas fissuras até o corpo chegar ao colapso. A seguir é simulado o caso em que o corpo sofre múltiplas fissuras. Para tanto nenhum elemento recebe valor de dano inicial diferente de zero para que não haja concentração de deformações. Neste caso não há necessidade de definir uma largura de banda (h) uma vez que as deformações serão distribuídas por todo o corpo.

Já que as deformações estão distribuídas em todo o corpo não há elemento que recupere o deslocamento desenvolvido na fase elástica e, portanto, $u_r = 0$. Por meio da equação 4.77 é possível definir que para o caso de fissuras distribuídas em todo o corpo tem-se que $L_d(x) = x$. O resultado da simulação numérica é apresentado para a malha com 6 elemento.

Dados:

$$G_f = 0,9 \times 10^{-4} \text{ MN} \cdot \text{m} / \text{m}^2$$

$$\varepsilon_{do} = 1,0 \times 10^{-4}$$

$$E = 3,0 \times 10^4 \text{ MPa}$$

CÁLCULOS	
Para $x = x_1 = 0,1m$:	
$L_d(0,1) = 0,1$	$u_e(0,1) = 0,1 \times 10^{-4} m$
$G_f(0,1) = 0,3 \times 10^{-4}$	$u_{ult}(0,1) = 0,2 \times 10^{-4} m$
$u_{fi}(0,1) = 0,3 \times 10^{-4} m$	
Para $x = x_2 = 0,2m$:	
$L_d(0,2) = 0,2m$	$u_e(0,2) = 0,2 \times 10^{-4} m$
$G_f(0,2) = 0,6 \times 10^{-4} MN.m/m^2$	$u_{ult}(0,2) = 0,4 \times 10^{-4} m$
$u_{fi}(0,2) = 0,6 \times 10^{-4} m$	
Para $x = x_3 = 0,3m$:	
$L_d(0,3) = 0,1m$	$u_e(0,3) = 0,3 \times 10^{-4} m$
$G_f(0,3) = 0,9 \times 10^{-4} MN.m/m^2$	$u_{ult}(0,3) = 0,6 \times 10^{-4} m$
$u_{fi}(0,3) = 0,9 \times 10^{-4} m$	

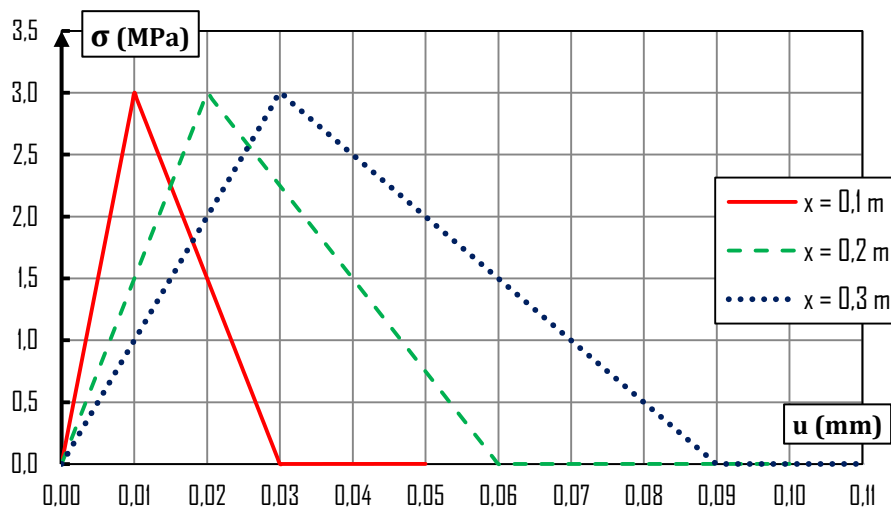


Figura 4.48 – Curva Tensão x Deslocamento para Fissura Distribuída em todo Corpo



Figura 4.49 - Curva Tensão x Deformação para Fissura Distribuída em todo Corpo

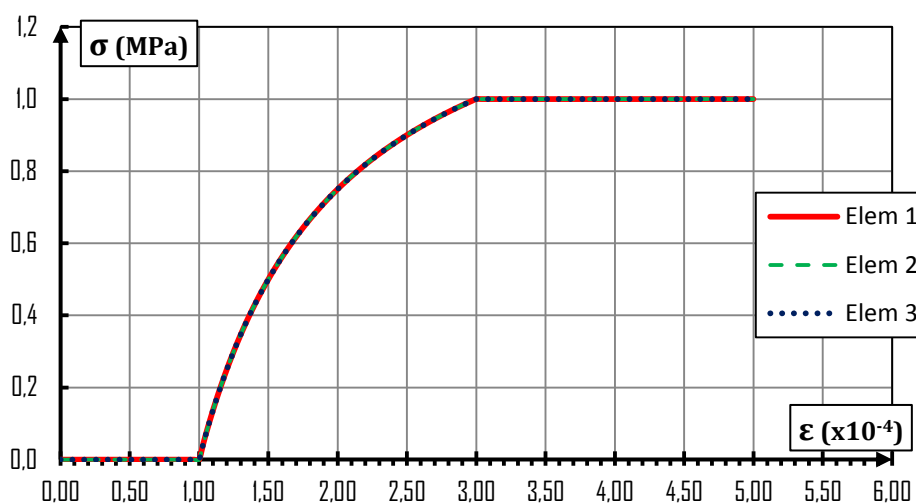


Figura 4.50 – Evolução do Dano para Fissura Distribuída em todo Corpo

Uma vez que não há deslocamento recuperável a curva tensão x deslocamento é obtida com exatidão mesmo sem refinar a malha e pelo mesmo motivo tem-se que o deslocamento final (u_{fi}) é o valor previsto no caso 2 da seção 4.4.3 somado ao deslocamento elástico (u_e).

Verifica-se ainda que o deslocamento em qualquer ponto do corpo pode ser dado por $u(x) = x\varepsilon$ e é válido tanto para deformação elástica quanto para deformação de fissuração.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são confrontados resultados obtidos por meio da simulação numérica com resultados de experimentos encontrados na literatura. Primeiramente é simulado um ensaio para o cálculo da resistência à tração na flexão. Trata-se de um método para determinação da energia da fratura e consiste num ensaio de flexão a três pontos de uma viga com entalhe no centro do vão entre os apoios, o que gera concentração de deformações. Após, é simulado um ensaio de tração direta para um concreto reforçado por fibras de PVA o que permite o desenvolvimento de múltiplas fissuras e até mesmo um enrijecimento do concreto após máxima tensão elástica. Neste caso as fibras permitem o desenvolvimento de fissuras ao longo de todo o concreto.

5.1 ENSAIO PARA DETERMINAÇÃO DA ENERGIA DA FRATURA

A energia da fratura (G_f) é uma propriedade do concreto que pode ser determinada por meio de um ensaio de tração direta. Tal ensaio não só permite a determinação de G_f bem como fornece módulo de elasticidade do concreto (E), resistência máxima a tração (f_t) e conseqüentemente é possível determinar deformação de início de dano (ε_{do}), todos importantes para realização da análise numérica.

Com o objetivo de determinar de forma precisa o G_f é necessário que o ensaio de tração direta seja o mais estável possível. Para isto, a deformação deve aumentar lentamente a fim de evitar saltos abruptos. Sendo o concreto um material frágil a dificuldade de manter o ensaio de tração direta estável é muito grande e, devido a esta inconveniência, o ensaio não é usado como padrão para determinação da energia da fratura.

Uma forma indireta de calcular a energia da fratura do concreto é proposto por Hillerborg (1985). No seu trabalho, Hillerborg (1985) propõe que a energia total absorvida no ensaio de flexão é dada pela seguinte soma:

$$W = W_0 + W_1 + W_2 \quad 5.1$$

sendo W_0 área sob a curva Carga x Deslocamento ($F \times \delta$), W_1 energia devido ao peso próprio da estrutura dado por:

$$W_1 = F_1 \delta_0$$

5.2

e W_2 energia devido aos equipamentos de ensaio que é aproximadamente igual a W_1 .

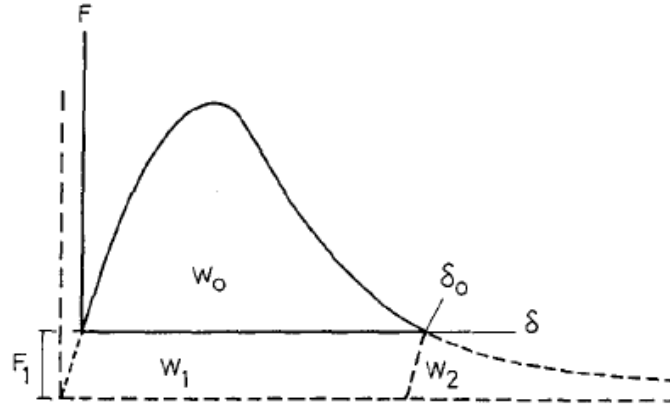


Figura 5.1 – Curva Carga x Deslocamento de um Ensaio de Flexão a três pontos e as complementares para o cálculo de G_f .

(HILLERBORG, 1985)

Considerando que só há absorção de energia na zona de fraturamento ou zona de dano o cálculo de G_f , segundo Hillerborg (1985) é dado por:

$$G_f = \frac{W}{(d - a_0)b} = \frac{W_0 + 2F_1\delta_0}{(d - a_0)} \quad 5.3$$

onde d e a_0 são características geométricas da viga (Figura 5.2), F_1 é o peso próprio da viga e δ_0 é a deflexão final da viga medida no meio do vão central.

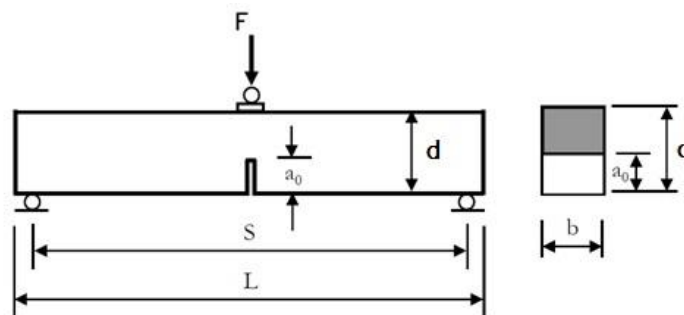


Figura 5.2 – Ensaio de Flexão a Três Pontos com Entalhe

5.1.1 Características do Concreto e Ensaio de Flexão a Três Pontos com Entalhe

Bettin (2013) reproduziu em seu trabalho o ensaio de flexão a três pontos para determinação da energia da fratura. A viga ensaiada por Bettin (2013) é formada por um concreto que tem parte de seu aglomerante substituído por cinza de bagaço de cana-de-açúcar (CBCA) e reforçado por fibras metálicas.

A cinza de bagaço de cana-de-açúcar (CBCA) quando usada substituindo parte do cimento no concreto pode melhorar as suas propriedades mecânicas e aumenta a durabilidade do concreto. O reforço do concreto por fibras metálicas também contribui para melhorar suas propriedades mecânicas a exemplo da resistência à tração e compressão, tenacidade e resistência à fadiga. Mas dentre todos os melhoramentos mecânicos se destaca a contribuição ao melhoramento da resistência ao cisalhamento. A contribuição ao melhoramento mecânico do concreto devido reforço por fibras metálicas depende de vários fatores, tais como: tipo de fibras, comprimento, diâmetros, formas, fração volumétrica e arranjo espacial.

O concreto ensaiado por Bettin (2013) foi reforçado com 1% de fibras e teve 15% do cimento substituído por CBCA. O módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν) do concreto foram determinados por meio do ensaio de compressão e são:

$$E = 29,2 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,2$$

E as características geométricas são apresentados na Tabela 5.1:

Tabela 5.1 – Características Geométricas da Viga para Ensaio de Flexão a Três Pontos

L (mm)	S (mm)	d (mm)	b (mm)	a_o (mm)
400	350	100	100	17

Três vigas foram ensaiadas e as curvas Carga x Deslocamento são apresentadas na Figura 5.3:

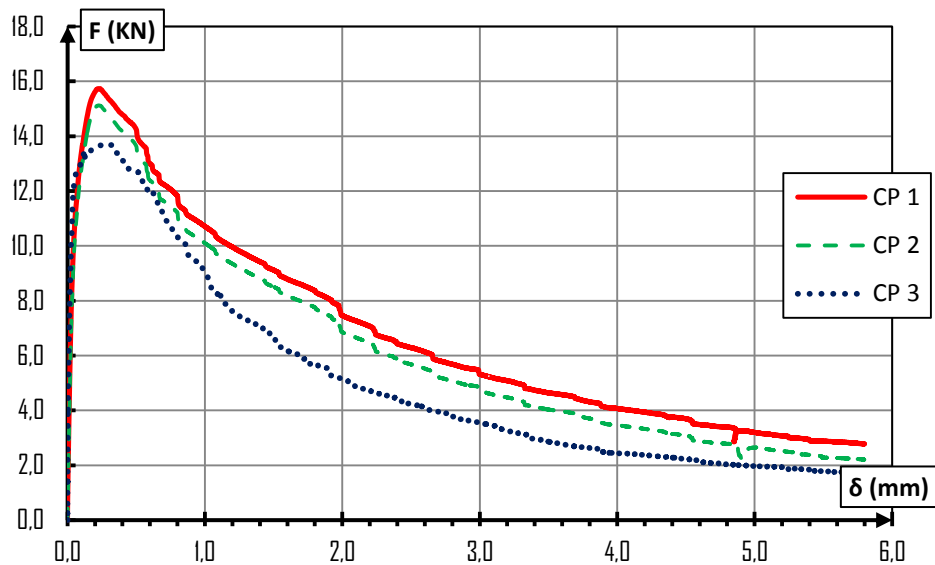


Figura 5.3 – Curvas Carga x Deslocamento Vertical do Concreto Reforçado com 1% de Fibras Metálicas e CBCA

As áreas sob as curvas Carga x Deslocamento Vertical, obtidas por meio do ensaio de flexão a três pontos, permite determinar a energia da fratura (G_f) pelo método desenvolvido por Hillerborg (1985) sendo que optou-se por não levar em consideração a contribuição dos equipamentos (W_2) para o cálculo de G_f .

Tabela 5.2 – Tabela de Cálculo para Determinação de G_f

Corpos de Prova	Energia Absorvida	Massa da Viga	Deslocamento na Ruptura	Área Ligada	Energia de Fratura
	W_o (N.mm)	m (Kg)	δ_o (mm)	A_{lig} (mm ²)	G_f (N.mm/mm ²)
CP_1	39138,28	9,70	5,8	8300	4,78
CP_2	35599,88	9,65	5,8	8300	4,36
CP_3	29398,22	9,64	5,8	8300	3,61
g (m/s ²) = 9,81		$G_{f_médio}$ =			4,25 (±0,6)

Para obter ε_{do} , será calculado a resistência à tração da viga a partir da curva proposta por Hillerborg (1985) que é aqui apresentada na Figura 5.4. Para tanto é necessário calcular o momento máximo para o ensaio de flexão (M_{max}) que no caso de uma viga com carga no vão central é dado por:

$$M_{max} = \frac{P_{max}S}{4} \quad 5.4$$

A partir do momento máximo calcula-se a resistência a tração na flexão (f_{net}), pela teoria da elasticidade:

$$f_{net} = \frac{6M_{max}}{B(d - a_o)^2} \quad 5.5$$

e então, calcula-se o que Hillerborg chama de comprimento característico l_{ch} pela seguinte expressão:

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_{net}^2} \quad 5.6$$

Por meio do l_{ch} chega-se ao valor da abcissa da curva da Figura 5.4 e encontra-se um valor na ordenada que corresponde a f_{net}/f_t que leva ao valor de f_t e por fim a ε_{do} pela relação $f_t = E\varepsilon_{do}$.

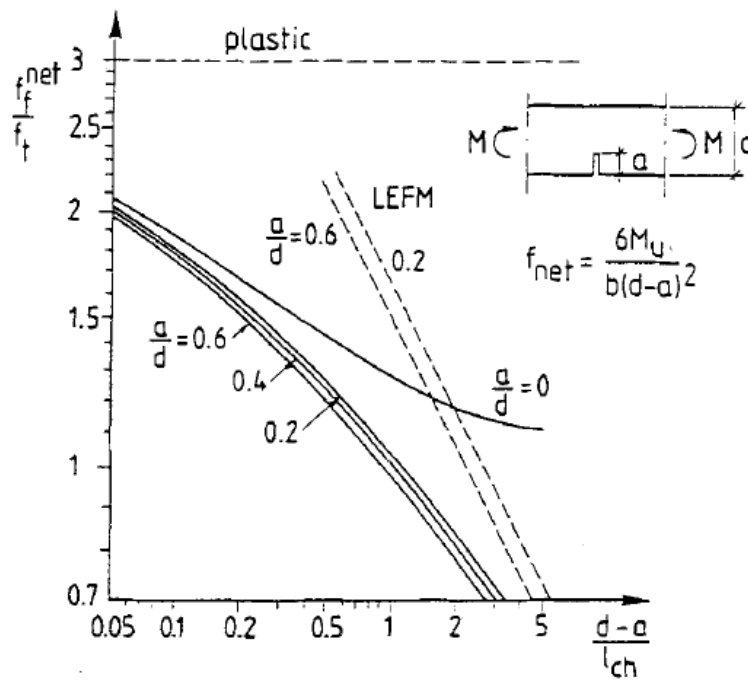


Figura 5.4 – Curva para Determinação de f_t
(HILLERBORG, 1985)

A Tabela 5.3 apresenta as etapas de calcula até a obtenção de f_t .

Tabela 5.3 - Tabela de Cálculo para Determinação de f_t

Corpos de Prova	Carga Máxima	M_{max}	f_{net}	l_{ch}	$(d - a_o)/l_{ch}$	f_{net}/f_t	f_t
	$P_{max}(N)$	$N.m$	(N/mm^2)	(mm)	<i>Adimen</i>	<i>Adimen</i>	(N/mm^2)
CP_1	15735,28	1376837,00	11,99	862,69	0,10	1,85	6,48
CP_2	15125,28	1323462,00	11,53	933,68	0,09	1,85	6,23
CP_3	13701,14	1198849,75	10,44	1137,87	0,07	1,85	5,64
						$f_{t \text{ médio}} = 6,12 (\pm 0,4)$	

Obs.: O valor entre parênteses correspondem ao desvio padrão.

Conhecido a resistência a tração do concreto tem-se a deformação inicial de dano:

$$\varepsilon_{do} = 2,1 \times 10^{-4}.$$

5.1.2 Lei de Evolução de Dano

Para simular o trecho *softening* da curva a função de evolução de dano foi deduzida de forma análoga ao apresentado na seção 4.4.1, sendo que a lei constitutiva aqui usada é a proposta por Hordijk et al apresentada no manual do DIANA, por acreditar que tal curva descreve melhor o trecho *softening* de um concreto reforçado com fibras. A lei constitutiva proposta por Hordijk é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma(\varepsilon') = f_t \left(1 + \left(c_1 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_{ult}} \right)^3 \exp \left(-c_2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_{ult}} \right) - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_{ult}} (1 - c_1^3) \exp(-c_2) \right) \quad 5.7$$

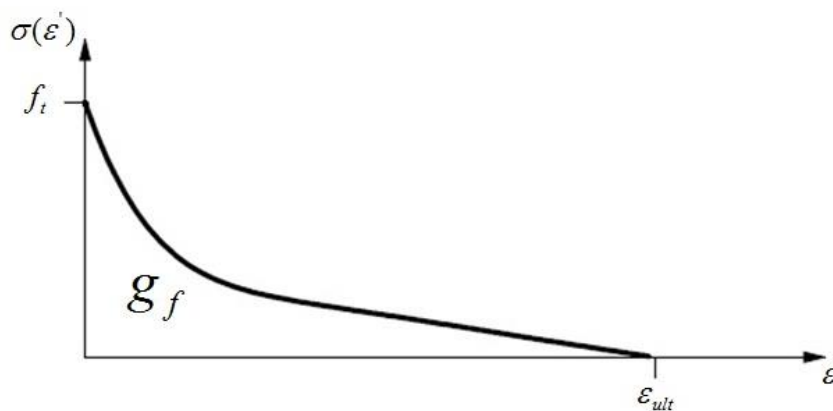


Figura 5.5 – Curva *Softening* Proposta por Hordijk

sendo $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_{do}$ e $\varepsilon_{ul} = \varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do}$ tem-se que:

$$D(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{do}} \left\{ 1 + \left[c_1 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{do})}{(\varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do})} \right]^3 \exp \left[-c_2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{do})}{(\varepsilon - \varepsilon_{do})} \right] - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{do})}{(\varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do})} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \right\} \quad 5.8$$

A deformação última é obtida pela seguinte integral:

$$g_f = \int_0^{\varepsilon_{ul}} \sigma(\varepsilon') d\varepsilon' \quad 5.9$$

tomando $c_1 = 3$ e $c_2 = 6,93$ tem que ε_{ul} é dado por:

$$\varepsilon_{ul} = 5,136 \frac{g_f}{f_t} \quad 5.10$$

lembrando que $g_f = \frac{G_f}{h}$.

5.1.3 Resultados

Devido à simetria do ensaio de flexão a três pontos apenas metade da viga foi discretizada. Quatrocentos (400) triangulos com função de interpolação linear discretizam a viga, sendo que na direção x foram distribuídos 21 nós e na direção y 11 nós.

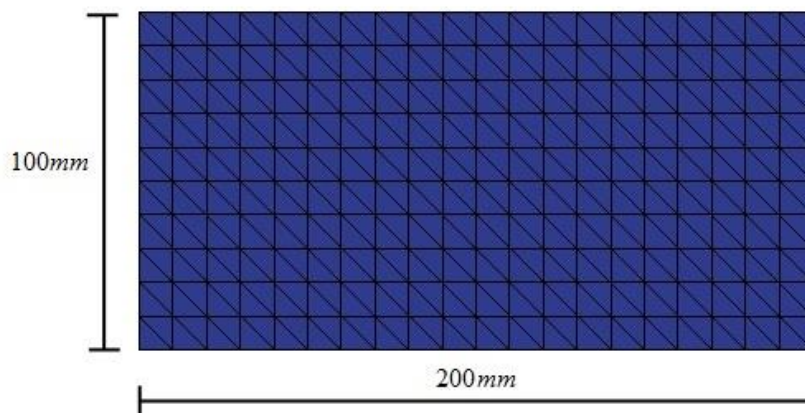


Figura 5.6 – Discretização da Viga para Ensaio Numérico de Flexão a Três Pontos

Sendo G_f igual a $4,25 \text{ N}\cdot\text{mm}/\text{mm}^2$, $f_t = 6,12 \text{ N}/\text{mm}^2$ e largura de banda (h), para esta discretização, igual a 10 mm é possível, por intermédio da equação 5.10, calcular o ε_{ul} para a Lei de *softening* proposta por Hordijk. Portanto os dados de entrada para análise do comportamento mecânico do concreto reforçado com vigas metálicas são:

$$E = 29200 \text{ N}/\text{mm}^2 \quad \varepsilon_{do} = 2,1 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_{ul} = 3,57 \times 10^{-1}$$

A Figura 5.7 confronta os resultados obtidos experimentalmente por Benti (2013) com o resultado numérico.

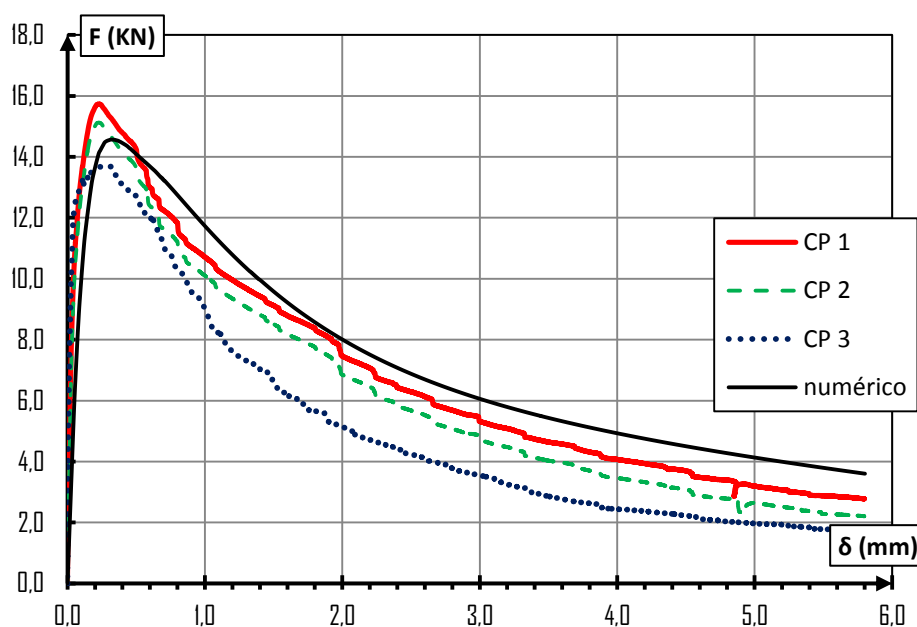


Figura 5.7 - Confronto entre Respostas Experimentais e Numérica

Pelas semelhanças entre as curvas observa-se que de fato a lei de evolução de dano desenvolvida baseado na curva *softening* de Hordijk é capaz de descrever o comportamento não linear do concreto reforçado com fibras metálicas. As cargas máximas com seus respectivos deslocamentos para os ensaios experimentais e numérico são apresentados na Tabela 5.4 e a configuração de estado de dano do concreto é apresentado na Figura 5.8.

Tabela 5.4 - Resultados de Carga Máxima x Deslocamento Vertical

CP's	Experimental		Numérico	
	F_{max} (KN)	Desl (mm)	F_{max} (KN)	Desl (mm)
CP1	15,74	0,23	14,57	0,33
CP2	15,13	0,23		
CP3	13,70	0,26		
Média	14,85	0,24		

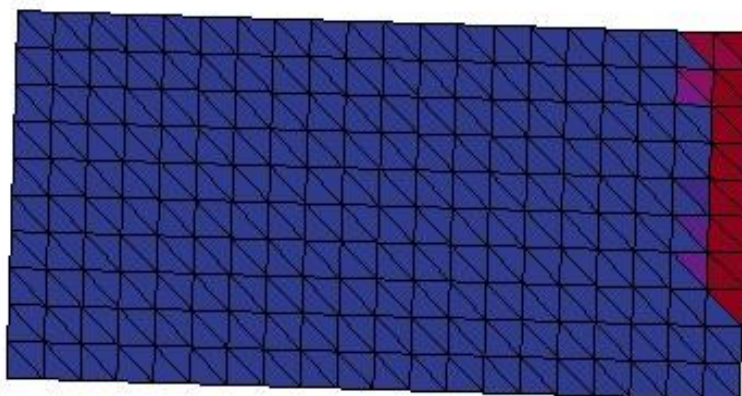


Figura 5.8 - Configuração Final de Dano do Ensaio de Flexão a Três Pontos.

5.2 FISSURAÇÕES MÚLTIPLAS

O concreto convencional trata-se de um material frágil, o que lhe confere menor resistência quando submetido a esforço de tração comparado a esforço de compressão. A fim de contornar o problema da fragilidade do concreto e retardar o seu processo de fissuração ao longo dos anos foram desenvolvidos os concretos reforçados com fibras. A inserção da fibra como reforço do concreto permite tal material absorver maior energia o que lhe confere maior tenacidade.

5.2.1 Compósito Reforçado com Fibras de PVA

O material ensaiado trata-se de um compósito cimentício reforçado com fibras de PVA. A inserção da fibra de PVA permite o compósito atingir deformação de até 3%. Vale aqui lembrar que devido ao seu comportamento frágil o concreto convencional tem capacidade de deformação de 0,01 a 0,015%. O reforço com fibras de PVA leva o compósito cimentício assumir um comportamento conhecido por *strain hardening*, quando submetido a uma temperatura de até 145°C, o que significa que após o corpo atingir máxima tensão elástica, ao contrário do *strain softening*, ocorre aumento

de tensão a medida que a deformação cresce, trata-se portanto de um enrijecimento do material.

Um compósito cimentício reforçado por fibras de PVA é do tipo SHCC, do inglês *strain hardening cementitious composites*. Magalhães (2010) caracterizou experimentalmente tal compósito no que diz respeito ao seu processo de fratura verificando a sua grande ductilidade que decorre da formação de múltiplas microfissuras que devido ao reforço por fibras portam-se de forma controlada até que ocorra a localização e colapso do corpo. A vantagem que esse material apresenta, segundo Magalhães (2010), é a possibilidade de trabalhar mesmo no estado multi-fissurado.

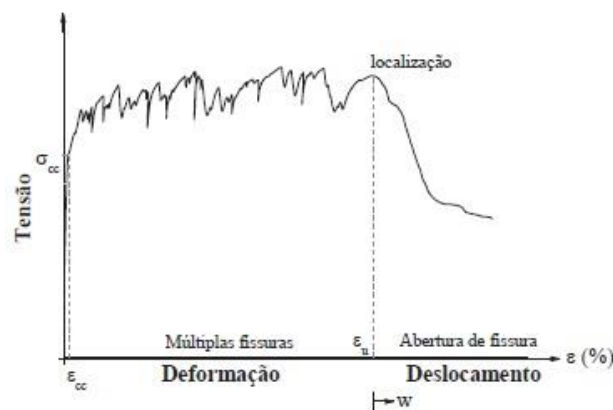


Figura 5.9 - Curva Típica de um Compósito de Múltiplas Fissura
(MAGALHÃES, 2010)

5.2.2 Ensaio de Tração Direta em Compósito SHCC

O ensaio de tração direta foi realizado em placas retangulares de dimensões $12,5 \times 40 \times 400 \text{ mm}$ os valores obtidos foram tensão de primeira fissura (f_t), deformação correspondente a primeira fissura (ε_{do}), tensão máxima pós fissuração $f_{t,ul}$ e deformação referente a localização do dano (ε_{fi}).

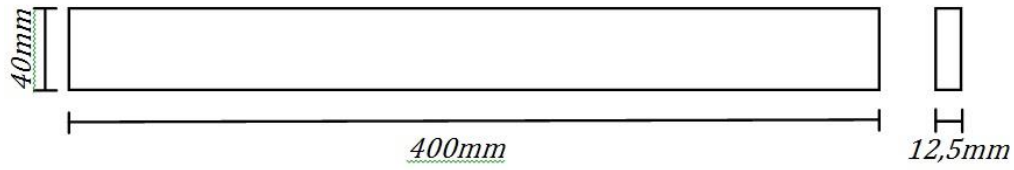


Figura 5.10 – Características Geométricas para o Ensaio de Tração Direta

Para realização do ensaio numérico de tração direta é necessário desenvolver uma lei de evolução de dano que considere o comportamento hardening do compósito.

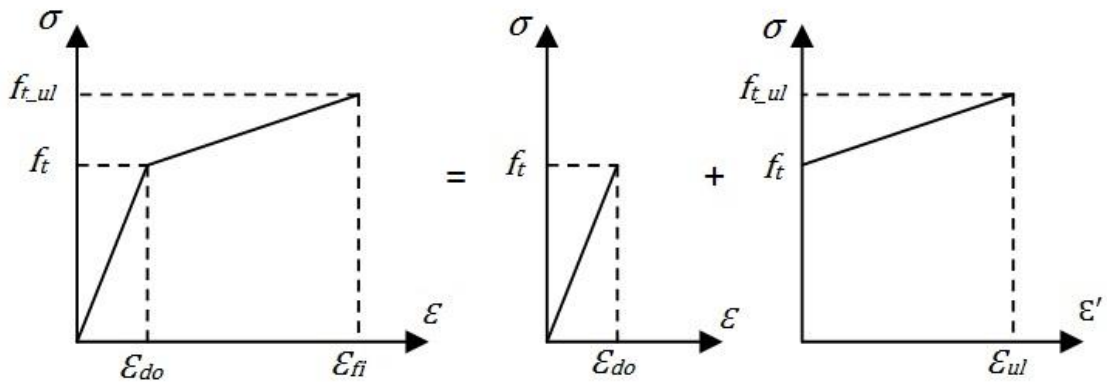


Figura 5.11 – Comportamento Hardening

Considerando $\Delta f_t = f_{t,ul} - f_t$, e tomando o enrijecimento como linear, a lei constitutiva que descreve o comportamento hardening é dada por:

$$\sigma(\varepsilon') = \frac{\Delta f_t}{\varepsilon_{ul}} \varepsilon' + f_t \quad 5.11$$

sendo $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_{do}$ e $\varepsilon_{ul} = \varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do}$ tem-se que:

$$D(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{E\varepsilon} \left[\frac{\Delta f_t}{(\varepsilon_{fi} - \varepsilon_{do})} (\varepsilon - \varepsilon_{do}) + f_t \right] \quad 5.12$$

Para esta lei de dano tem-se que:

para $\varepsilon = \varepsilon_{do} \rightarrow D(\varepsilon_{do}) = 0$ e

para $\varepsilon = \varepsilon_{fi} \rightarrow D(\varepsilon_{fi}) = 1 - \left(\frac{f_{t,ul}}{E\varepsilon_{fi}} \right)$.

Uma vez que ocorre a primeira fissura, apesar do enrijecimento do compósito devido a ação das fibras, a rigidez do corpo passa a ser muito menor quando comparado a rigidez na fase elástica e portanto tem-se que $E\varepsilon_{fi} \gg f_{t,ul}$ o que leva a $D(\varepsilon_{fi})$ assumir valor muito próximo de 1, caracterizando um alto estado de dano no corpo.

Foram realizados por Magalhães (2010) três ensaios de tração direta, cada uma para uma mistura (M01, M02, M03) que foram dosadas a fim de terem consistência entre 270 – 300mm. A Tabela 5.5 apresenta a média referente a cada mistura encontrada a partir de três corpos de prova. Tais resultados servirão como parâmetros de entrada para a simulação numérica.

Tabela 5.5 - Dados de Entrada para Ensaio Numérico

Misturas	f_t (MPa)	$\varepsilon_{do} \times 10^{-4}$	E (MPa)	$f_{t,ul}$ (MPa)	$\varepsilon_{fi} \times 10^{-2}$
M01	2,39 ($\pm 0,23$)	1,29 ($\pm 0,12$)	18527,13	2,67 ($\pm 0,07$)	1,04 ($\pm 0,13$)
M02	2,27 ($\pm 0,54$)	1,54 ($\pm 0,02$)	14740,26	3,06 ($\pm 0,23$)	1,00 ($\pm 0,05$)
M03	2,28 ($\pm 0,34$)	1,71 ($\pm 0,61$)	13333,33	3,42 ($\pm 3,42$)	1,5 ($\pm 0,15$)

Obs.: Os valores entre parênteses correspondem ao desvio padrão para três amostras.

Sabe-se que para o caso de distribuição da fissuração em todo o corpo não há necessidade de que seja refinada a malha para obter resultados precisos já que neste caso não ocorre recuperação do deslocamento elástico. Para simular o ensaio de tração direta o domínio foi discretizado por 20 elementos triangulares lineares, sendo que na direção x foi distribuído 11 nós e na direção y 2 nós e a análise considerou o corpo no Estado Plano de Tensão.

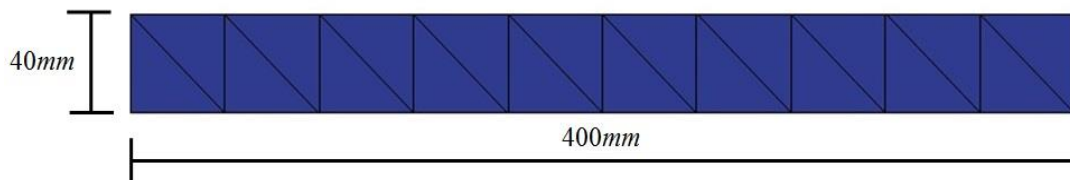


Figura 5.12 – Discretização do Domínio para Ensaio Numérico de Tração Direta

Os resultados obtidos numericamente para o ensaio de tração direta são apresentados a seguir com as respectivas curvas de evolução do dano.

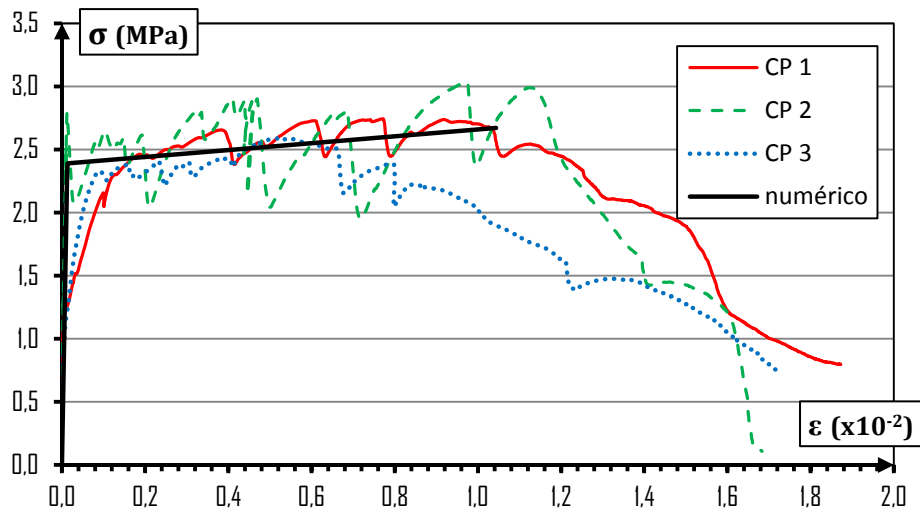


Figura 5.13 – Curva Tensão x Deformação de ensaio de Tração Direta - M01

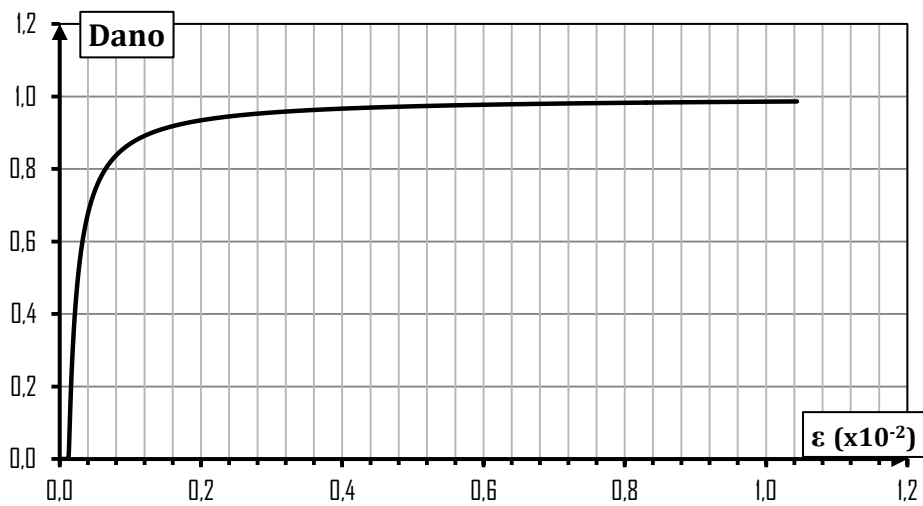


Figura 5.14 – Evolução do Dano no Ensaio de Tração Direta – M01

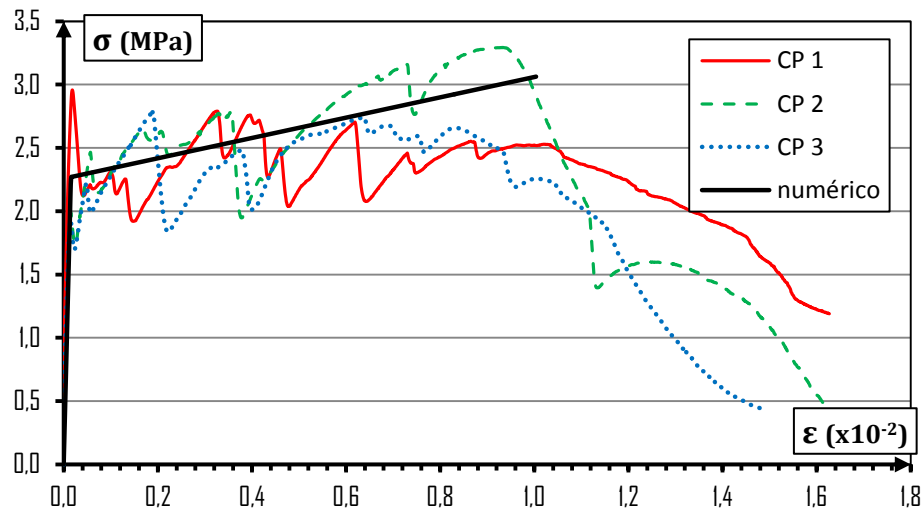


Figura 5.15 - Curva Tensão x Deformação de ensaio de Tração Direta - M02

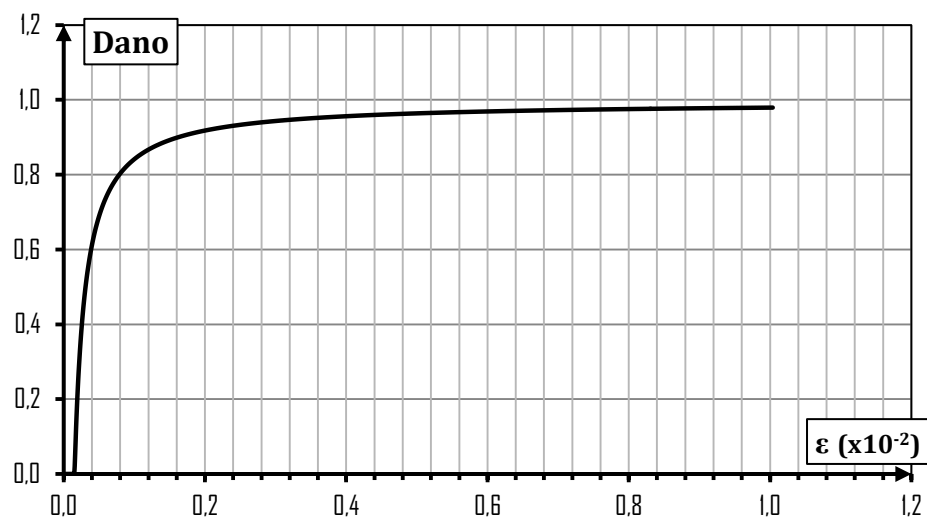


Figura 5.16 - Evolução do Dano no Ensaio de Tração Direta - M02

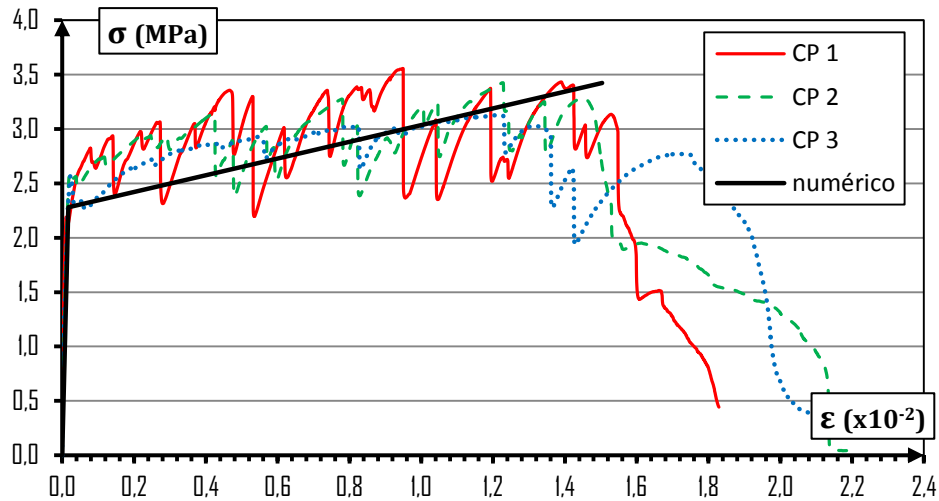


Figura 5.17 - Curva Tensão x Deformação de ensaio de Tração Direta - M03

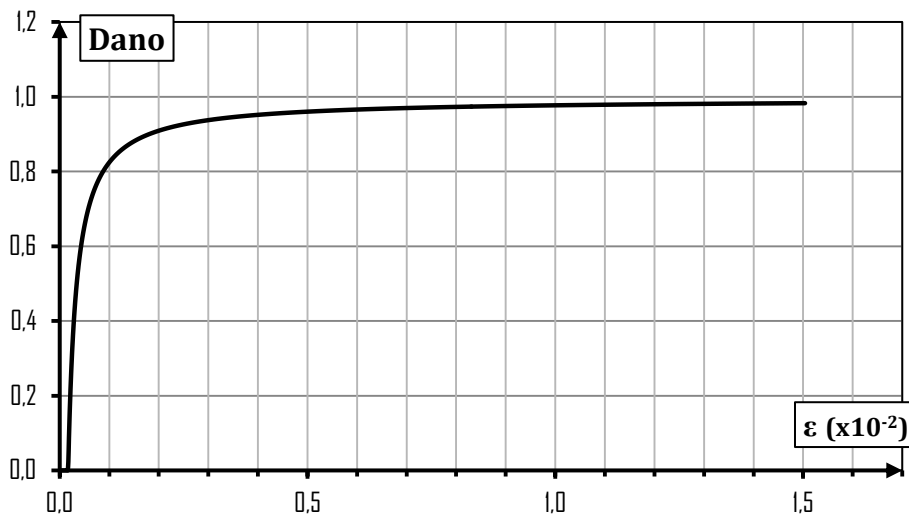


Figura 5.18- Evolução do Dano no Ensaio de Tração Direta – M03

Observa-se que um concreto que permite distribuição de fissuras em todo o corpo pode ser modelado sem estabelecer uma largura de banda, uma vez que os resultados obtidos numericamente nitidamente representam uma média dos três corpos ensaiados para cada mistura. Isso significa que há objetividade nos resultados por não haver concentração de deformação numa zona. Verifica-se também que o valor de dano, à medida que a deformação aproxima de ϵ_{fi} tende para uma assíntota muito próximo de 1, ou seja, o corpo apresenta um alto estado de dano (múltiplas fissuras) mas não houve ainda colapso total. De fato o colapso só ocorre após a deformação se concentrar numa zona, que é representado nas curvas pelo trecho final *softening*.

CONCLUSÃO

Diante dos resultados numéricos obtidos a partir da ferramenta computacional desenvolvida para análise não linear, verifica-se que de fato a Teoria de dano foi capaz de prever o comportamento do concreto quando fissurado para os casos aqui estudados. Foi possível também certificar que a variável de dano identifica fisicamente a fissuração do concreto.

Verificou-se que modelos que tentam representar a fissuração no meio contínuo, como os modelos de dano, sofrem problemas de não objetividade dos resultados para casos em que há concentração de deformação e para contornar tal problema uma solução é o uso da energia da fratura como propriedade do material e a inserção de um comprimento interno característico, onde se desenvolva as deformações localizadas. No presente trabalho, diante das coerências dos resultados e a semelhança encontrada entre os resultados numéricos e os experimentais certificou-se que a largura de banda proposta por Rots (1984) para elementos triangulares lineares é válida também para os modelos aqui desenvolvidos.

E por fim observou-se que os modelos de dano deduzidos a partir de curvas *softening* ou curvas *hardening* são capazes de descrever o comportamento do concreto seja para casos onde há colapso do corpo devido a abertura de apenas uma fissura como também para casos em que é possível ocorrer múltiplas fissuras.

Devido a limitação do tempo, mais análises não foram realizadas neste trabalho e, portanto, constituem-se como propostas para trabalhos futuros. As propostas sugeridas são:

- Deduzir lei de evolução de dano a partir de curva *hardening* não linear.
- Analisar casos submetidos ao estado plano de deformação e casos tridimensionais.
- Verificação da validade das demais larguras de bandas sugeridas por Rots (1984) e não usadas neste trabalho para os modelos de dano que usa a energia da fratura como propriedade do material.

- Desenvolvimento de modelos que considere as deformações permanentes desenvolvidas antes de o concreto atingir tensão de pico e iniciar o trecho *softening* da curva tensão x deformação.
- Verificar se modelos anisotrópico de dano descrevem melhor o comportamento do concreto devido a fissuração.

REFERÊNCIAS

ÁLVARES, M. S., 1993, *Estudo de um Modelo de Dano para Concreto: Formulação, Identificação, Parâmetro e Aplicação com o Emprego do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de M.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

BETTIN, W. P., 2013, *Modelagem de Lajes Alveolares com Utilização de Concreto com Fibras Metálicas e Cinza do Bagaço de Cana-de-açúcar*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

BOTTA, A. S., 1998. *Cálculo de Esforços e Deslocamentos em Estruturas Reticuladas Considerando-se a Mecânica Do Dano para a Modelagem do Concreto Armado*. Dissertação de M.Sc. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

DRIEMEIER, L., 1999, *Contribuição ao Estudo da Localização de Deformações com Modelos Constitutivos de Dano e Plasticidade*. Tese de D.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

FLÓREZ-LÓPEZ, J., 1993 “Modelos de Daño Concentrado para la Simulation Numerica del Colapso de Pórticos Planos”, *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería*, v. 9, n. 2, pp. 123-139.

FX+FOR DIANA 2010, *DIANA - Finite Element Analysis -User's Manual* release 9.4.3, editado por Jonna Manie, Delft, The Netherlands, 2010.

GUELLO, G. A., 2002, *Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por Meio da Mecânica do Dano*. Dissertação de M.Sc., Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

HILLERBORG, A., 1985, “The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Energy G_f of Concrete”, *Matériaux et Constructions*, v. 18, n. 106, pp. 291 - 296

LA BORDERIE, C.; MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. , 1991, *Response of Plain and Reinforced Concrete Structures under Cyclic Loadings.*, , Rapport Interne, n. 123, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. , 1985, *Mécaniques des Matériaux Solides*. 1 ed. Paris, Dunod.

MAGALHÃES, M. S., 2010, *Caracterização Experimental de Compósitos Cimentícios Reforçados com Fibras de PVA: Processo de Fratura, Propriedades Térmicas, Deformações Diferidas e Estabilidade Térmica*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MAZARS, J., 1984, *Appication de la Mecanique de L'endommagement au Comportement non Lineaire et a la Rupture du Beton de Structure*. Tese de D.Sc., Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Université Pierre et Marie Curie – C.N.R.S., Cachan, França.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M., 2006, *Concrete: Microstructure, Properties and Materials*. 3 ed. Berkeley, McGraw-Hill.

MURAKAMI, S., 2012, *Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. 1 ed. New York, Springer.

NBR 6118: 2003 – Projetos de Estruturas de Concreto – Procedimentos.

PARAVIEW, *Paraview - Parallel Visualization Application*, version 4.1.0 (software).

PEDROSO, F. L., trimestral 2009, “Concreto: A Origem e a Evolução do Material Construtivo mais Usado pelo Homem”, *Revista Concreto e Construção-IBRACON*, ano XXXVII, n. 53, pp. 14-19.

PEERLINGS, R. H. J., BORST, R., BREKELMANS, W. A. M., *et al*, 2002, “Localisation Issues in Local and Nonlocal Continuum Approaches to fracture”, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21, pp. 175 – 189.

PETRUCCI, E. G. R., 1993, *Concreto de Cimento Portland*. 12 ed. São Paulo, Globo.

PIJAUDIER-CABOT, G., BAZANT, Z. P., 1987, “Nonlocal Damage Theory”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 113, n. 10 (Oct), pp. 1512 – 1533.

PROENÇA, S. P. B., 1988, *Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições*. Tese de D.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

ROTS, J. G., 1988, *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Proefschrift van de Drs., Technische Universiteit Delft, Delft, Nederland.

SLUYS, L. J., 1992, *Wave Propagation, Localisation and Dispersion in Softening Solids*. Proefschrift van de Drs., Technische Universiteit Delft, Delft, Nederland.