



CÁLCULO DE FUNÇÕES DISTÂNCIA PARA O MODELO HÍBRIDO  
HAMILTON-JACOBI-POISSON ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS

Letícia de Barros dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo  
Coutinho

Rio de Janeiro  
Novembro de 2013

CÁLCULO DE FUNÇÕES DISTÂNCIA PARA O MODELO HÍBRIDO  
HAMILTON-JACOBI-POISSON ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS

Letícia de Barros dos Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

---

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

---

Prof. Renato Nascimento Elias, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2013

Santos, Letícia de Barros dos

Cálculo de Funções Distância para o Modelo Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson através do Método de Elementos Finitos/Letícia de Barros dos Santos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XV, 58 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 55 – 58.

1. Função distância. 2. Equação de Poisson. 3. Equação de Hamilton Jacobi. 4. Equação de Eikonal. 5. Método de Elementos Finitos. I. Coutinho, Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*Dedico essa conquista a minha  
mãe Rosinéia e ao meu pai  
Aramis.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente fizeram parte deste trabalho, em especial:

- Agradeço primeiro a Deus por mais essa conquista em minha vida.
- Aos meus pais pelo apoio, incentivo e compreensão em todos momentos da minha vida. Em especial, minha mãe Rosinéia, pelo amor e dedicação para com minha filha, Sophia, nos meus momentos de ausência. Sem palavras para agradecer.
- Ao Professor e Orientador Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho por ter acreditado em meu potencial para o desenvolvimento deste trabalho, pois sem ele nada disso seria possível.
- Ao Professor Renato Nascimento Elias por toda ajuda, explicações e sempre disponível em todos os momentos de necessidade.
- Ao Carlos Alberto Alvarez Henao pela disponibilidade e ajuda em parte deste trabalho; sempre de bom humor.
- Aos profissionais e amigos do Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD): Mara (o HD externo do Departamento, quem nos mantém a salvo de todas as burocracias ), Myrian (pelas conversas e orientações) e Orlando (pelas conversas sempre bem humoradas e permanência da rede e dos computadores funcionando), D. Sandra (também pelas ótimas conversas e o Santo cafezinho) e os amigos Fábio, Igor e Rodrigo (pelo carinho, amizade e sempre dispostos a ajudar).
- Aos meus amigos Ana Paula, Anna Cristina, Marcela e Marcelo, pelo o incentivo e amizade.

- Ao meu companheiro Felipe, por todo carinho e dedicação e pelos meus momentos de ausência. Pois tudo isto é para um bem maior, para o bem futuro da nossa família.
- Agradeço ao Centro Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CÁLCULO DE FUNÇÕES DISTÂNCIA PARA O MODELO HÍBRIDO  
HAMILTON-JACOBI-POISSON ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS

Letícia de Barros dos Santos

Novembro/2013

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Programa: Engenharia Civil

A determinação do movimento de interface se tornou foco de diversos estudos devido a complexidade computacional em definir os limites entre, por exemplo, dois fluidos de natureza distinta, gás e líquido, num mesmo problema. Um dos métodos para a representação da evolução da interface baseia-se em conjuntos de nível e é o objeto deste trabalho.

Diversas dificuldades surgem na tentativa de reproduzir o comportamento da interface em problemas de evolução temporal, no qual a curva de nível zero se perde. Dessa forma, o presente trabalho se destina a implementação computacional de um modelo de cálculo da distância ao conjunto de nível zero, que permite preservar as características da curva de nível original do problema para determinação do movimento da interface.

Os resultados numéricos obtidos por meio da presente implementação realizada, baseada no Método de Hamilton-Jacobi-Poisson, são confrontados com resultados analíticos, da análise por meio do Método da Função Sinal, e de modelos disponíveis na literatura científica.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CALCULO OF FUNCTION DISTANCE FOR MODEL HIBRIDO  
HAMILTON-JACOBI-POISSON THROUGH THE METHOD FINITE  
ELEMENT

Letícia de Barros dos Santos

November/2013

Advisor: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Department: Civil Engineering

The determination of interface motions has become important in many problems in science and engineering, particularly in immiscible fluids such as water and air. One of the most successful methods for such problems is the level set method, which is the subject of the present work. Several difficulties may arise in the level set method when treating the time evolution of complex interfaces. The objective of this work is the finite element implementation of a redistancing method able to preserve the level set as the problem evolves. The present implementation is based on the Hamilton-Jacobi-Poisson method and numerical results for several problems are compared with analytical solutions, the signed function method and other results available in the literature.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Função Distância</b>	<b>6</b>
2.1 Conjuntos de Nível . . . . .	7
2.1.1 Cálculo da função Distância . . . . .	10
<b>3 Equações Governantes</b>	<b>12</b>
3.1 Método da Equação de Poisson . . . . .	12
3.2 Método da equação de Eikonal/Hamilton-Jacobi . . . . .	14
3.3 Método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson . . . . .	15
3.4 Função Distância com Sinal - Reinicialização . . . . .	16
<b>4 Implementação Numérica</b>	<b>19</b>
4.1 Formulação Matemática . . . . .	19
4.1.1 Método Híbrido de Hamilton-Jacobi-Poisson . . . . .	19
4.1.2 Método da Função Distância com Sinal . . . . .	21
4.2 Formulação de Elementos Finitos . . . . .	22
4.2.1 Formulação Semidiscreta . . . . .	23
4.2.2 Formulação Variacional de Galerkin e Estabilizada . . . . .	24
4.2.3 Operador de Captura de Descontinuidade - CAU . . . . .	25
4.3 Discretização Espacial para o Elemento Triangular Linear e Integração no Tempo . . . . .	27
4.4 Algoritmos . . . . .	30
4.4.1 Método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson . . . . .	30
4.4.2 Método da Distância com Função Sinal . . . . .	32

<b>5</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>34</b>
5.1	Placa Plana . . . . .	35
5.2	Parede Sólida . . . . .	41
5.3	Aerofólio (NACA4412) . . . . .	47
5.3.1	Complexidade Computacional dos Algoritmos . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>53</b>
6.1	Conclusões . . . . .	53
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	54
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>55</b>

# Lista de Figuras

1.1	Tratamento da superfície livre: (a) acompanhamento da interface (b) captura interface [1] . . . . .	2
2.1	Função Distância aplicada ao objeto $\mathbf{O}$ [2] . . . . .	6
2.2	Representação da função implícita $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ [2] . . . . .	8
2.3	Representação da propagação de frente. A figura à esquerda apresenta a expansão de uma circunferência, e a figura à direita ilustra a tal circunferência como sendo a curva de nível zero da função $\phi$ [3]. . . . .	9
2.4	Evolução da interface ao longo do tempo [4]. . . . .	10
2.5	A interface evoluída para cada instante $t$ terá $\phi = 0$ [4]. . . . .	11
5.1	Domínio Placa Plana . . . . .	35
5.2	Malha1: 1681 nós e 3200 elementos . . . . .	35
5.3	Malha2: 3721 nós e 7200 elementos . . . . .	35
5.4	Função distância com contorno para uma Placa Plana - Malha1 . . . . .	36
5.5	Função distância com contorno para uma Placa Plana - Malha2 . . . . .	37
5.6	Gráfico de distâncias de Poisson e Função Sinal . . . . .	38
5.7	Gráfico de distâncias de HJP para $\alpha = 0, 0,5$ e $1$ e Função Sinal . . . . .	39
5.8	Erro relativo Placa Plana . . . . .	40
5.9	Domínio para uma Parede Sólida . . . . .	41
5.10	Função distância com contorno para uma Parede Sólida - Malha1 . . . . .	42
5.11	Função distância com contorno para uma Parede Sólida - Malha2 . . . . .	43
5.12	Solução final da função distância para uma seção do domínio . . . . .	44
5.13	Erro relativo para a Parede Sólida . . . . .	45
5.14	Domínio NACA4412 . . . . .	47
5.15	Malha: 7237 nós e 14086 elementos . . . . .	47
5.16	Função distância com contorno para o aerofólio NACA4412 . . . . .	48

5.17 Gráfico para uma seção da solução final : (a) $(x, y) = (0, 5; 0, 1)$ e $(x, y) = (0, 5; 1)$ ; (b) amplificação para a região compreendida entre $x = 0, 1$ a $x = 0, 4$ e $y = 0$ a $y = 0, 3$ . . . . .	49
5.18 Erro relativo entre a solução de Poisson e Hamilton-Jacobi-Poisson para $\alpha = 0$ . . . . .	50

# Lista de Símbolos

$A$	Área do elemento triangular
$c$	Vetor das grandezas transportadas
$\dot{c}$	Derivada temporal de $c$
$d, \hat{d}$	Distância aproximada
$\tilde{d}_p$	Distância de Poisson
$d_a$	Distância analítica
$d_{hj}$	Distância de Hamilton-Jacobi
$d_0$	Distância inicial
$e$	Elemento Triangular Linear
$\mathbf{F}$	Vetor dos termos independentes
$\mathbf{F}^e$	Vetor dos termos independentes ao nível do elemento
$\mathbf{F}_G^e$	Vetor Independente de Galerkin ao nível do elemento
$\mathbf{F}_{PG}^e$	Vetor Independente de Petrov-Galerkin ao nível do elemento
$H_\varepsilon(d)$	Função de Heaviside
$\mathbf{k}$	Tensor de difusão
$\mathbf{K}$	Matriz rigidez
$\mathbf{K}^e$	Matriz rigidez ao nível do elemento
$\mathbf{K}_{DG}^e$	Matriz rigidez difusiva de Galerkin ao nível do elemento
$\mathbf{K}_{AG}^e$	Matriz rigidez advectiva de Galerkin ao nível do elemento

$\mathbf{K}_{DPG}^e$	Matriz rigidez difusiva de Petrov-Galerkin ao nível do elemento
$\mathbf{K}_{APG}^e$	Matriz rigidez advectiva de Petrov-Galerkin ao nível do elemento
$\mathbf{K}_{CAU}^e$	Matriz rigidez do Operador de Captura - CAU ao nível do elemento
$L(\phi)$	Resíduo no interior do elemento
$\mathbf{M}$	Matriz de Massa
$\mathbf{M}^e$	Matriz de Massa ao nível do elemento
$\mathbf{M}_G^e$	Matriz de massa de Galerkin ao nível do elemento
$\mathbf{M}_{PG}^e$	Matriz de massa de Petrov-Galerkin ao nível do elemento
$n$	Passo de tempo anterior
$nsd$	Número de dimensão do espaço
$n + 1$	Passo de tempo atual
$N_i$	Matriz das Funções de Interpolação
$Pe$	Número de Peclet
$sign$	Função Sinal
$S$	Espaço das funções testes
$t$	Tempo
$t_{max}$	Tempo máximo
$\mathbf{u}_{hj}$	Campo de velocidade de Hamilton-Jacobi
$U$	Campo de Velocidade da Equação de Eikonal
$V$	Espaço das funções peso
$\alpha$	Parâmetro do Campo de velocidade de Hamilton-Jacobi
$\beta_{//}^e$	Velocidade do Operador de Captura
$\delta^e$	Coefficiente do Operador de Captura

$\epsilon$	Parâmetro ligado a espessura da interface
$\varepsilon$	Parâmetro de difusão de Hamilton-Jacobi
$\Gamma$	Tensor de Difusão do método Conjuntos de Nível
$\Gamma^*$	Fronteira da região de integração
$\omega$	Campo de Velocidade
$\Omega$	Domínio de Integração
$\phi$	Função de Nível
$\tau$	Parâmetro de Estabilização
$\theta$	Parâmetro da Regra Trapezoidal

# Capítulo 1

## Introdução

Problemas que envolvem o movimento de interfaces tem despertado um grande interesse em diversas áreas científicas como: mecânica dos fluidos, aeroespacial, crescimento de cristais, processamento de imagem, entre outras. Particularmente nos casos de escoamentos com superfície livre, o maior desafio computacional é justamente a determinação da posição da interface que separa os fluidos, como por exemplo, ar e água. Com isso, foram criados diversos métodos que procuram tratar de forma adequada tal fenômeno e eles podem ser classificados em dois grupos: os que acompanham o movimento da interface (do inglês *Interface Tracking Methods*) e os métodos que capturam de maneira real a interface (do inglês *Interface Capturing Methods*)[5], para qual este trabalho esta voltado.

Conforme em ELIAS [1], os métodos que acompanham o movimento da interface são classificados como métodos Lagrangeanos, para o qual a malha deve acomodar o posicionamento da interface, como ilustra a figura 1.1(a). Além disso, para este método há a necessidade de se adicionar a reconstrução da malha no processo de solução, enquanto os métodos de captura de interface fazem uso de uma função implícita que demarca a posição da interface por meio de uma malha fixa, como mostra a figura 1.1(b), sendo classificados como métodos Eulerianos

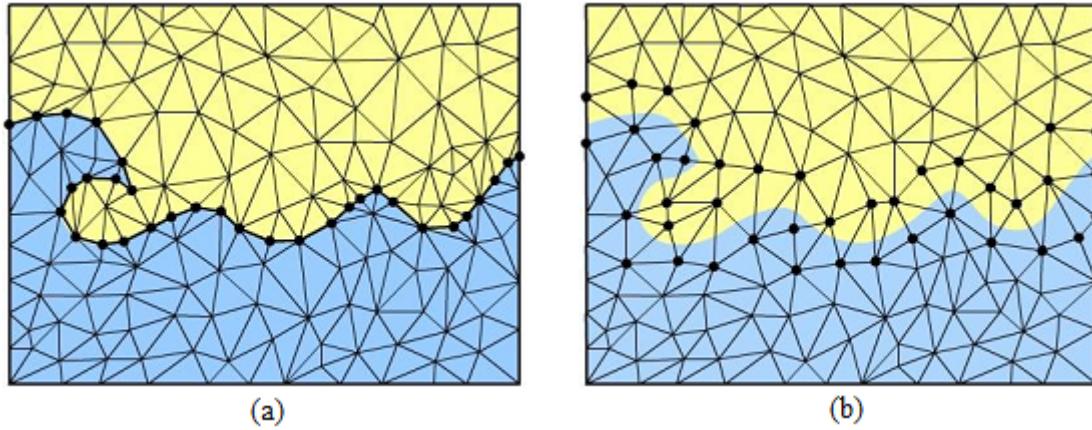


Figura 1.1: Tratamento da superfície livre: (a) acompanhamento da interface (b) captura interface [1]

Dentre os métodos de captura de interface existentes, os mais utilizados são o Método de Volume de Fluidos (VOF - do inglês *Volume of Fluid*) e o Método de Conjuntos de Nível (LS - do inglês *Level Set*<sup>1</sup>). Este trabalho tem como finalidade estudar somente o segundo método.

O método de conjuntos de nível, proposto inicialmente por OSHER e SETHIAN [6], é uma técnica numérica empregada para calcular a posição de frentes que se propagam, através do uso de uma função implícita que determina a menor distância de um dado ponto da malha até a interface [1]. A representação implícita da interface, cuja a equação do movimento é numericamente aproximada pelos mesmos esquemas de solução de leis de conservação hiperbólicas, é usualmente empregada devido sua eficácia no tratamento de mudanças topológicas e/ou descontinuidades, que eventualmente, podem surgir no decorrer da propagação da curva ou superfície estudada [7] [8].

Cabe ressaltar que, para este método, a função implícita que determina as fases dos fluidos, geralmente dois, é dada por uma função distância dotada com sinal. Por meio dessa função, a interface é representada pela curva de nível zero  $\phi = 0$ , onde  $\phi$  é a função de nível discretizada em uma malha computacional;  $\phi = -d$  no interior do domínio,  $\phi = +d$  fora do domínio e  $|\nabla\phi| = 1$ . Segundo SETHIAN e SMEREKA [7], o uso dessa função é capaz de tratar problemas de evolução de interface mantendo propriedades locais tais como a curvatura, o sentido da normal

<sup>1</sup>Também conhecido por Método da curva de Nível. Para este trabalho adotou-se a tradução literal: Método de Conjuntos de Nível

e a condição de contorno determinada pela posição da interface do problema a ser avaliado.

No entanto, em problemas que levam em conta a evolução da interface no tempo, a função distância não consegue manter a curva inicial de nível zero, deformando-a, perdendo precisão numérica e, por conseguinte, gerando grandes erros nas soluções. Para evitar esse tipo de problema, a função distância deve ser constantemente reinicializada para que a curva de nível zero seja mantida e somente os outros valores sejam atualizados, mas este processo pode ser computacionalmente custoso [7].

Na literatura existem poucos métodos disponíveis para cálculo de função distância. Conforme ELIAS [1] a maneira mais simples para se calcular distância é através de um algoritmo de força bruta, onde a distância é calculada ponto a ponto ao longo de uma malha, armazenando a menor distância de cada um. Entretanto, esse tipo de algoritmo é inviável devido ao seu custo computacional e a aplicação de métodos mais eficientes para calcular distâncias é uma área de pesquisa em aberto.

Uma das primeiras propostas consiste em resolver numericamente duas equações de transporte, na qual os valores próximos à interface (curva de nível 0), são empregados como condições de contorno que apontam direções para dentro e para fora da mesma, num esquema de integração de tempo até se atingir o estado estacionário. SUSSMAN *et al.* [9] melhoraram o método incorporando à função distância uma função sinal que especifica simultaneamente ambas as direções, resolvendo assim, uma única equação de transporte [10].

O cálculo de função distância ( $d$ ) também tem sido aplicado em uma variedade de modelos de turbulência, onde  $d$  é necessária apenas próxima a curva de nível zero abrangendo no máximo um terço da espessura da camada limite, conforme proposto por FARES e SCHRÖDER [11]. Segundo XIA *et al.* [12] o cálculo de distâncias também vem sendo muito utilizado em aplicações que englobam problemas como modelagem de sólidos e a construção de modelos geométricos.

Conforme dito anteriormente, devido ao custo na avaliação de  $d$ , algumas aproximações em códigos são perigosamente feitas, o que acarretam grandes imprecisões [13]. Com tudo, ao se modificar  $d$  para um  $\hat{d}$ , algumas deficiências podem

ser remediadas, como por exemplo, em modelos turbulentos onde a eficiência da solução pode ser comprometida em caso de geometrias convexas ( $\hat{d} \gg d$ ); ou ainda em modelos em que há um aumento na turbulência devido às proximidades de superfícies com cantos ( $\hat{d} < d$ ) [13].

Atualmente estão sendo desenvolvidos métodos baseados na solução de equações diferenciais, como o modelo proposto por FARES e SCHRÖDER [11] em 2002, que soluciona a equação hiperbólica de Hamilton-Jacobi modificando o Laplaciano para uma função dependente de  $d$ . TUCKER [14] em 2003 calcula distâncias através da equação elíptica de Poisson, onde  $d$  é construída por uma equação auxiliar que envolve a derivação analítica da mesma. ELIAS *et al.* [10] em 2007 desenvolvem um novo método para calcular distâncias através do método de elementos finitos, que recai na solução de uma equação em cada elemento. Este mostrou-se ser robusto e bastante econômico.

TUCKER [15] em 2011 propôs um novo modelo para calcular funções distância por meio do método de volume finitos, chamado de Método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson, por englobar a solução de uma equação de Poisson junto com a equação de Eikonal hiperbólica para tratar modelos turbulentos em geometrias diversas. E recentemente ÁLVAREZ e COUTINHO [16], em 2013, utilizam o método proposto por SUSSMAN *et al.* [9] para calcular distâncias através do Método Estabilizado de Elemento Finitos USFEM utilizando o esquema de Rothe de evolução do tempo.

Portanto, este trabalho tem por objetivo desenvolver, implementar e analisar o modelo proposto por TUCKER [15] através do método de elementos finitos, pelo fato dele se mostrar eficiente para cálculo de funções distância em diferentes tipos de geometrias envolvendo modelos turbulentos, no qual o cálculo de distâncias é um parâmetro chave para esse tipo de simulação. E por fim para testar sua eficiência, compará-lo ao método inicial proposto por SUSSMAN *et al.* [9], por ser um dos métodos mais eficazes e utilizados na literatura. Sendo assim, o restante dessa dissertação encontra-se organizada nos capítulos à seguir.

No capítulo 2 faz-se uma explanação sobre o que vem a ser função distância e como ela é utilizada no método de conjuntos de nível. Já no capítulo 3 apresentam-

se as equações que regem o problema. No capítulo 4 apresenta-se sua formulação matemática e a formulação pelo método de elementos finitos. De forma geral, por se tratar de um problema não linear, fez-se uso do algoritmo Preditor- Multicorretor (HUGHES [17]) para o esquema de integração no tempo, o qual gera um sistema linear que será resolvido através do método GMRES com pré-condicionamento conforme proposto em COUTINHO e ALVES [18]. No capítulo 5 são apresentados os resultados do modelo proposto e desenvolvido ao longo deste trabalho. E por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### Função Distância

Segundo JONES *et al.* [19] uma função distância pode ser definida como uma representação de um campo escalar, que obtém distâncias mínimas entre o objeto e os pontos do espaço no qual ele está envolvido, conforme ilustra a figura 2.1.

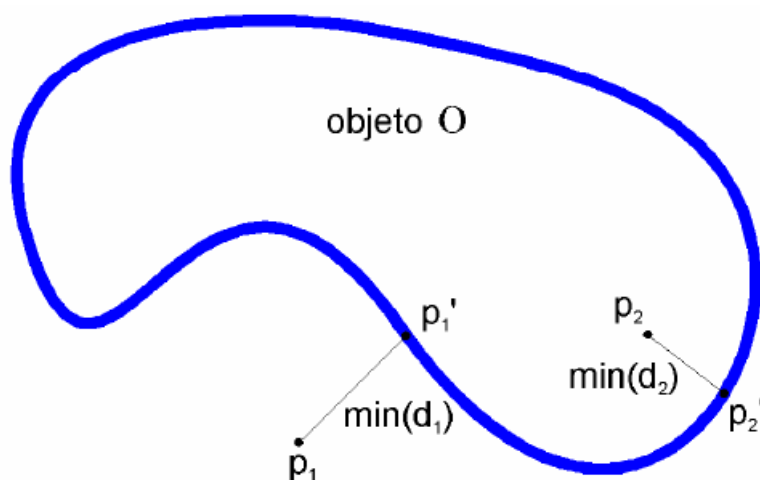


Figura 2.1: Função Distância aplicada ao objeto **O** [2]

A figura 2.1 indica a distância mínima entre o ponto  $p_2$  (interno ao objeto **O**) e a borda do objeto e a distância mínima entre o ponto  $p_1$  (externo ao objeto **O**) e o objeto. Sendo a função distância definida como:

$$dist(p) = \min_{p' \in \mathbf{O}} |p - p'| \quad (2.1)$$

onde  $p$  indica pontos arbitrários do espaço,  $p'$  são pontos pertencentes a borda do objeto  $\mathbf{O}$  e para  $p$  situados na borda de  $\mathbf{O}$  tem-se que  $dist(p) = 0$ .

Diversas são as aplicações que envolvem o cálculo de função distância. Na área de computação gráfica faz-se uso da função distância como uma poderosa ferramenta para processamento de objetos gráficos, podendo também ser utilizada para produzir metamorfose de objetos 3D, reconstruir superfícies a partir de um conjunto de seções bidimensionais e calcular esqueletos de objetos volumétricos [4].

De acordo com CARNEIRO [2], apesar da função distância ser conceitualmente simples, o seu cálculo não é trivial. Uma das principais dificuldades no cálculo de função distância está associada à passagem do universo matemático contínuo para o universo discreto. Isto porque um mesmo método, quando estudado no mundo discreto, pode apresentar propriedades completamente distintas daquelas apresentadas do ponto de vista contínuo[4]. Por exemplo, dada a natureza contínua do espaço na qual se localiza o objeto, cuja função distância deseja-se encontrar, a função também é contínua e representá-la computacionalmente seria muito difícil [2].

Quando o objeto é definido através de uma representação contínua, o cálculo de distâncias torna-se muito mais complexo e uma das possibilidades está voltada para uso da teoria de propagação de interfaces, no qual o método de Conjuntos de Nível é um dos métodos mais empregados [2].

## 2.1 Conjuntos de Nível

Um número significativo de problemas em diversas áreas se reduz ao estudo de propagação de interfaces, as quais usualmente representam a fronteira entre diferentes regiões e geometricamente, uma interface pode ser considerada uma curva ou uma superfície que divide dois meios interagindo entre si. A interface pode ser representada de duas formas: explícita ou implícita [3].

Uma função implícita está diretamente associada com a superfície e todas as iso-superfícies (ou conjuntos de nível) de um objeto. Neste método, a função implícita que representa um objeto corresponde a função distância deste objeto. A vantagem de se utilizar esta representação dá-se em sua eficiência para definir a forma geométrica de um objeto, pois o interior, exterior e a borda do objeto são facilmente identificados pelo valor da função implícita: negativo para o interior, positivo para o exterior e nulo para a borda, como mostra a figura a seguir [2]:

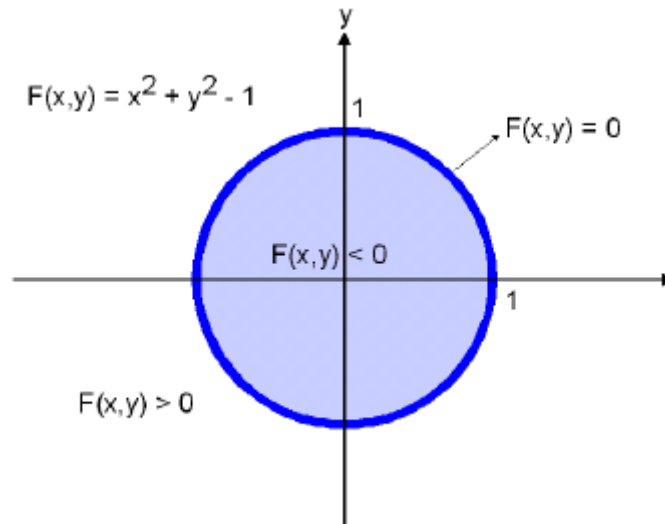


Figura 2.2: Representação da função implícita  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  [2]

Resumidamente pode-se dizer que a teoria de propagação de interfaces é feita da seguinte maneira: dada uma curva inicial, sua evolução é feita através de uma parametrização temporal, na qual a propagação ocorre na direção da normal, e a velocidade de propagação é dada em função da curvatura. E quando a velocidade de propagação é constante, a propagação de interface pode ser utilizada para o cálculo de funções distância [4].

Dentro deste contexto, o método de conjuntos de nível é uma técnica numérica que faz uso de representações implícitas da interface para capturar o seu comportamento por meio de um campo de velocidade. Sua representação implícita é através da função de distância que é geralmente utilizada como uma ferramenta geométrica para inicializar e manter uma superfície com algumas propriedades desejáveis, tais como a suavidade e gradiente constante [1].

Sua principal ideia consiste na propagação da interface de nível zero de uma função  $\phi$ . Conforme descrito em RODRIGUES [20] sua representação pode ser feita da seguinte maneira:

Seja a função  $z = \phi(x, y, t = 0)$ , de forma que dado um ponto qualquer  $(x, y)$  ela retorne uma altura  $z$  referente a distância entre o ponto  $(x, y)$  dado e a frente de propagação no instante de tempo  $t = 0$ . O gráfico de  $\phi$  que intersecta o plano  $xy$  exatamente na frente de propagação em  $t = 0$  é ilustrado na figura 2.3.

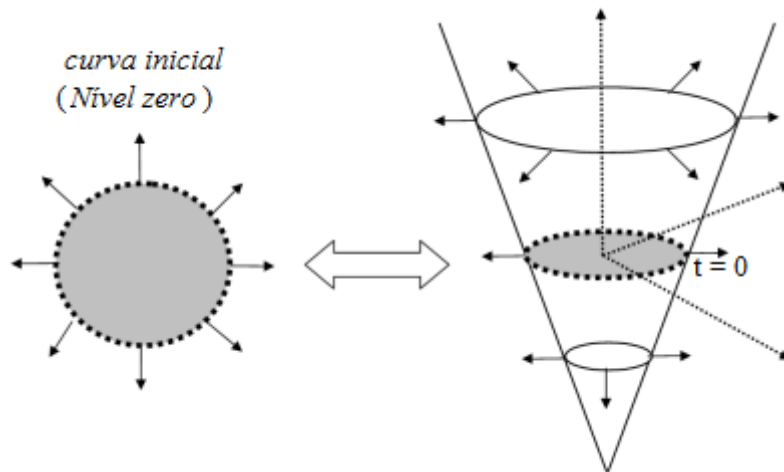


Figura 2.3: Representação da propagação de frente. A figura à esquerda apresenta a expansão de uma circunferência, e a figura à direita ilustra a tal circunferência como sendo a curva de nível zero da função  $\phi$  [3].

O gráfico de  $\phi$  representado sem preenchimento de cor, constitui a chamada superfície do conjunto de nível, e a interseção dessa superfície em cada plano horizontal delimita um conjunto de nível [20].

A superfície recebe o nome de superfície do conjunto de nível, por aceitar qualquer ponto como entrada e devolver um único valor como saída: a distância entre o ponto e a interface. E a borda da interface em cinza é chamada de nível zero; nela estão localizados todos os pontos que possuem a distância igual a zero [20].

Sendo assim, é possível ligar a evolução da função  $\phi$  à propagação da interface em relação ao tempo, e em qualquer momento da evolução, a frente da onda da propagação é dada pelo nível zero da função  $\phi$ , como mostra a figura a seguir:

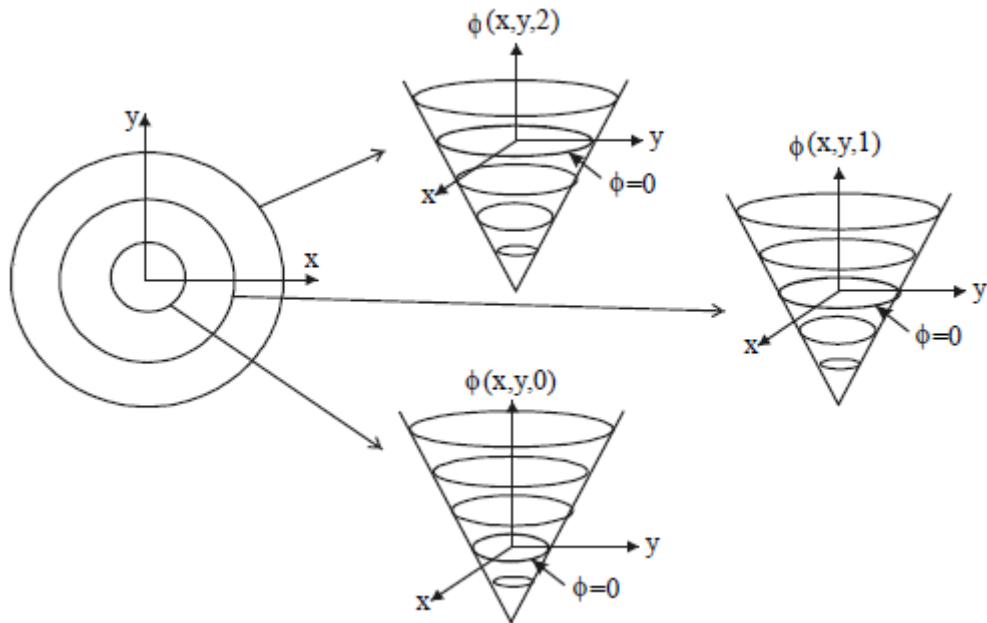


Figura 2.4: Evolução da interface ao longo do tempo [4].

### 2.1.1 Cálculo da função Distância

A distância ( $d$ ) passa ser avaliada a partir do momento em que a função  $\phi$  atinge o conjunto de nível  $\phi = 0$ , isto é, o conjunto de nível zero. A geração de funções distância pode ser resumida na solução da equação de Eikonal (2.2):

$$|\nabla T| F = 1 \quad (2.2)$$

Supondo  $F > 0$  a frente de propagação se expandirá e uma forma de determinar a evolução da frente é calcular o seu tempo de chegada  $T$  onde a curva cruza o ponto  $(x, y)$  [20].

A fronteira inicial é o lugar geométrico dos pontos onde  $T$  será nula. A solução da equação (2.2) para uma velocidade unitária dará para cada instante  $t$  a função distância com sinal ao conjunto de nível zero de  $t$  e a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$|\nabla d| = 1 \quad (2.3)$$

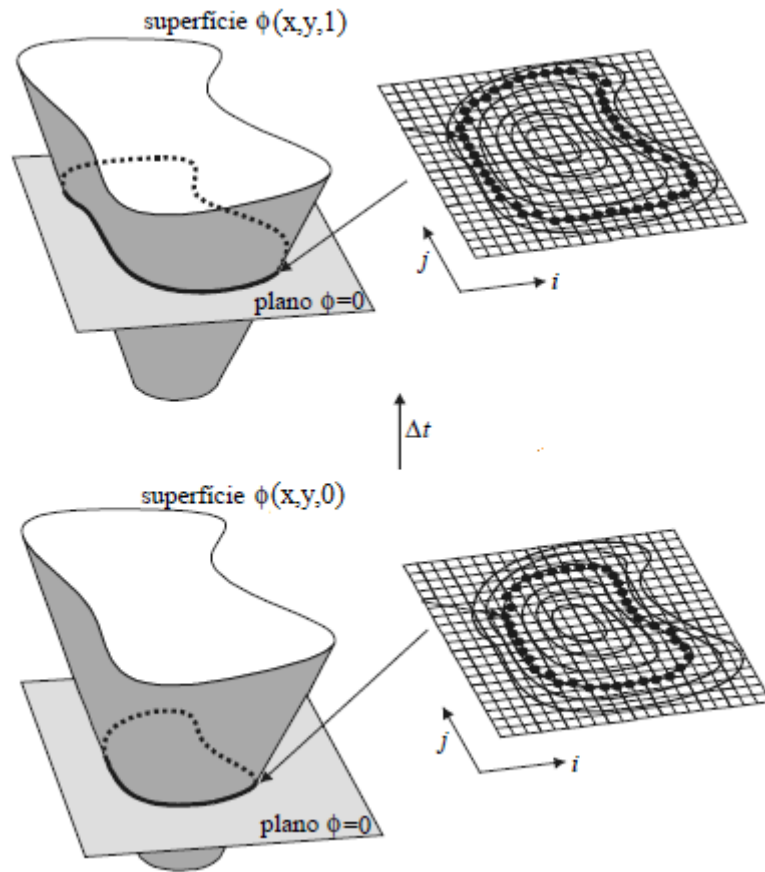


Figura 2.5: A interface evoluída para cada instante  $t$  terá  $\phi = 0$  [4].

Porém ao longo do tempo a função distância perde algumas de suas características, podendo ocasionalmente surgir descontinuidades no decorrer da evolução. Uma alternativa para evitar esse tipo de problema é reconstruir periodicamente a função  $\phi$  como uma função distância sinalizada, como será visto no próximo capítulo, por meio da seguinte equação [3]:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \text{sign}(d_0)(|\nabla d| - 1) = 0 \quad (2.4)$$

# Capítulo 3

## Equações Governantes

Neste Capítulo são apresentadas as equações que regem o problema para o cálculo de funções distância para os métodos proposto por TUCKER [15] e SUSSMAN *et al.* [9].

### 3.1 Método da Equação de Poisson

Existem diversas abordagens para realizar o cálculo da função distância, uma delas foi proposta por SPALDING [21], a qual consiste primeiro em resolver a equação diferencial de Poisson e a partir dos gradientes de  $\phi$  torna-se possível obter distâncias [15], como será visto adiante. Assim o método de Poisson é descrito por:

$$\nabla^2\phi = -1 \tag{3.1}$$

onde a distância é encontrada através da equação auxiliar  $\tilde{d}_p$ :

$$\tilde{d}_p = \pm \sqrt{\sum_{j=1,3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)^2} + \sqrt{\sum_{j=1,3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)^2} + 2\phi \tag{3.2}$$

que, ao ser comparada com a solução exata ( $d_e$ ) tem-se que:  $\tilde{d}_p = d_e$  para a propagação da distância em uma única direção do domínio,  $\tilde{d}_p > d_e$  para o domínio com geometria convexa e  $\tilde{d}_p < d_e$  para o domínio com geometria côncava.

Conforme descrito em XIA *et al.* [12], para se chegar na equação (3.2), considere como exemplo, o cálculo da distância para um modelo em 1D de tal forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -1 \quad (3.3)$$

com condição de contorno dada por

$$\phi(0) = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (3.4)$$

Integrando duas vezes a equação (3.3), tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + x - C_0 = 0 \quad \text{e} \quad \phi + \frac{x^2}{2} - C_0 x + C_1 = 0 \quad (3.5)$$

que, combinadas e aplicando a condição de contorno (3.4), forma a seguinte equação quadrática em  $x$ :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} x - \phi = 0 \quad (3.6)$$

e a solução  $x$ , ou ainda, a função distância  $\tilde{d}_p$ , pode ser expressa por:

$$\tilde{d}_p = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + 2\phi} \quad (3.7)$$

## 3.2 Método da equação de Eikonal/Hamilton-Jacobi

Motivado pelo custo computacional para o cálculo de função distância, SETHIAN [22] faz uso de um problema de valor inicial, através da seguinte equação de Hamilton-Jacobi (HJ) em regime estacionário:

$$|\nabla d| = 1 + \Gamma \nabla^2 d \quad (3.8)$$

com as condição de contorno a seguir:

$$d = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (3.9)$$

onde  $d$  é a distância e  $\Gamma$  é o coeficiente de difusão.

Ao tomar  $\Gamma = 0$ , a equação (3.8) passa a ser chamada de Equação de Eikonal:

$$|\nabla d| = 1 \quad (3.10)$$

E dessa forma, além da equação (3.10) representar a equação exata para  $d$ , o lado direito da mesma caracteriza a velocidade unitária de propagação de frente das superfícies, ou ainda, ao se definir um vetor  $\mathbf{U} = \nabla d$  a equação (3.10) pode ser escrita análoga a uma equação de advecção pura [13]

$$\mathbf{U} \cdot \nabla d = 1 \quad (3.11)$$

onde o vetor  $\mathbf{U}$  representa a velocidade de propagação de frente implícita na equação de Eikonal, com  $|\mathbf{U}| = 1$ . A equação (3.8) pode ainda ser reescrita como a equação

de advecção-difusão a seguir:

$$\mathbf{U} \cdot \nabla d = 1 + \Gamma \nabla^2 d \quad (3.12)$$

E se  $\Gamma = f(d)$  (veja [15] e [13]) a velocidade de propagação da frente está modificada e a equação Hamilton-Jacobi resultante passará a ter as mesmas características das equações (3.1) e (3.2) quanto ao impacto sobre as regiões com geometria côncava e convexa, isto é, para regiões côncavas a função distância é subestimada e para regiões convexas a função distância superestimada, respectivamente. Tais características são baseadas na equação integral para a função distância, proposta por LAUNDER *et al.* [23], a qual sugere um comportamento ideal para a função distância [15] [24].

### 3.3 Método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson

Vistos os métodos para se encontrar distâncias descritos nas duas seções acima, o método proposto por TUCKER [15], consiste em hibridizar as equações (3.1) e (3.8). Para tal, considere o campo de velocidade, abaixo:

$$\mathbf{u}_{hj} = \alpha \nabla d_{hj} + (1 - \alpha) \frac{\nabla \tilde{d}_p}{|\nabla \tilde{d}_p|} \quad (3.13)$$

E, partindo do princípio da Homogeneidade Dimensional<sup>2</sup> e da garantia de que  $d_{hj} = d$ , para  $d \rightarrow 0$ , sugere-se que  $\Gamma = \varepsilon d_{hj}$ , onde  $\varepsilon$  é uma constante tal que  $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$  [15].

---

<sup>2</sup>exigência de que ambos os membros de uma equação tenham as mesmas dimensões e unidades de medida; para que seja possível realizar adição e subtração entre os mesmos

Portanto, a equação de Hamilton-Jacobi pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{hj} \cdot \nabla d_{hj} = 1 + \varepsilon d_{hj} \nabla^2 d_{hj} \quad (3.14)$$

Dando origem a equação Hamilton-Jacobi-Poisson. Observe que a equação 3.13 é composta por dois termos, um referente a distância de Hamilton-Jacobi ( $d_{hj}$ ) e outro refere-se a derivada da distância de Poisson ( $\tilde{d}_p$ ). Dessa maneira, o parâmetro  $\alpha$  é quem governa a influência sobre cada termo na velocidade, e o mesmo, está compreendido entre 0 e 1 [15].

Como é de interesse deste trabalho o comportamento do método em regime transiente, a equação 3.14 passa a ser dependente de um pseudo-tempo ( $t$ ), podendo ser novamente reescrita como:

$$\frac{\partial d_{hj}}{\partial t} + \mathbf{u}_{hj} \nabla d_{hj} = 1 + \varepsilon d_{hj} \nabla^2 d_{hj} \quad (3.15)$$

onde  $\frac{\partial d_{hj}}{\partial t}$  é a derivada temporal relacionada a distância de Hamilton-Jacobi,  $\mathbf{u}_{hj}$  é o campo de velocidade e  $\varepsilon$  é o parâmetro para o coeficiente de difusão.

### 3.4 Função Distância com Sinal - Reinicialização

Apresenta-se nessa seção o método para reinicialização proposto por SUSSMAN *et al.* [9] para o cálculo de função distância. Um estudo mais completo sobre o uso de função distância com sinal pode ser encontrado em OSHER e FEDKIW [25].

Considere a equação de Eikonal advectiva (3.10) dependente de um pseudo-tempo  $t$  a seguir:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + |\nabla d| = 1 \quad (3.16)$$

com as condições de contorno e iniciais, como segue:

$$d = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (3.17)$$

$$d(\mathbf{x}, t) = d_0 \quad (3.18)$$

onde a condição inicial  $d(\mathbf{x}, t)$  é dada por :

$$d(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_+ \\ 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1, & \mathbf{x} \in \Omega_- \end{cases} \quad (3.19)$$

O ideal para essa equação seria que  $d$  ao movimentar-se no tempo mantivesse os seus valores na fronteira  $\partial\Omega$  (sem mudanças na curva em que  $d = 0$ ) e atualizasse os seus valores nos demais pontos do domínio, mas devido as influências que os valores negativos  $d$  podem ocasionar este fato não é garantido [26]. E para contornar esse problema, pode-se fazer o uso dos dois problemas abaixo [25]:

$$d_t + |\nabla d| = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega_+ \quad (3.20)$$

$$d_t - |\nabla d| = -1, \quad \mathbf{x} \in \Omega_- \quad (3.21)$$

onde os valores de  $d(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}$  próximo ou pertencentes à  $\partial\Omega$  podem ser usados como condição de contorno.

Para que não fosse necessário o uso das equações (3.20) e (3.21) separadamente; SUSSMAN *et al.* [9], introduziram a função sinal  $sign(d)$  em (3.22), transformando

a mesma em:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \text{sign}(d_0)(|\nabla d| - 1) = 0 \quad (3.22)$$

onde  $\text{sign}(d_0)$  é a função sinal definida como se segue:

$$\text{sign}(d_0) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_+ \\ 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1, & \mathbf{x} \in \Omega_- \end{cases} \quad (3.23)$$

O uso da equação 3.23, faz com que não haja a necessidade de utilizar condições de contorno em pontos próximos a interface, pois ela aborda simultaneamente distâncias que apontam respectivamente para fora e para dentro da interface, garantindo que não ocorra possíveis modificações em seus valores.

# Capítulo 4

## Implementação Numérica

Neste capítulo, apresentam-se as formulações matemáticas para os métodos Híbrido e Função Distância com Sinal, a formulação estabilizada de elementos finitos Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) para as equações transporte descritas no capítulo anterior, assim como o método de captura de descontinuidade (CAU) adicionado ao método SUPG para uma das formulações.

### 4.1 Formulação Matemática

#### 4.1.1 Método Híbrido de Hamilton-Jacobi-Poisson

##### 1. Método de Poisson

Dado a região  $\Omega \subset \mathbf{R}^{nsd}$ ,  $nsd = 1, 2$  ou  $3$  a dimensão do espaço; encontre  $\phi(\tilde{x})$  tal que:

$$\nabla^2 \phi = -1 \tag{4.1}$$

onde a distância de Poisson é dada pela equação auxiliar  $\tilde{d}_p$ :

$$\tilde{d}_p = \pm \sqrt{\sum_{j=1,2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)^2} + \sqrt{\sum_{j=1,2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)^2 + 2\phi} \quad (4.2)$$

## 2. Método de Hamilton-Jacobi-Poisson

Dado um escalar  $\varepsilon d_{hj} \in \mathbf{R}$  e campo vetorial  $\mathbf{u}_{hj}$  definido na região  $\Omega \subset \mathbf{R}^{nsd}$ , 1, 2 ou 3 a dimensão do espaço; encontre  $d_{hj}(\mathbf{x}, t)$  tal que:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \mathbf{u}_{hj} \nabla d_{hj} = 1 + \varepsilon d_{hj} \nabla^2 d_{hj} \quad (4.3)$$

com campo de velocidade como se segue:

$$\mathbf{u}_{hj} = \alpha \nabla d_{hj} + (1 - \alpha) \frac{\nabla \tilde{d}_p}{|\nabla \tilde{d}_p|} \quad (4.4)$$

e condição inicial,

$$d_{hj} = \tilde{d}_p$$

sendo  $d_{hj}$  é uma função de nível, suave definida em todo o domínio  $\Omega$  a ser determinada para cada instante de tempo  $t \in [0, T]$ .

Ambos os métodos são submetidos às condições de contorno essenciais e naturais:

$$d_{hj} = \tilde{d}_p = \phi = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial d_{hj}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \tilde{d}_p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao domínio  $\Omega$ .

### 4.1.2 Método da Função Distância com Sinal

Considere a equação:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \text{sign}(d_0)(|\nabla d| - 1) = 0 \quad (4.7)$$

Segundo OSHER e FEDKIW [25], pode-se tomar  $|\nabla d|$  como:

$$|\nabla d| = \frac{|\nabla d|^2}{|\nabla d|} = \frac{\nabla d}{|\nabla d|} \cdot \nabla d \quad (4.8)$$

fazendo com que a equação 4.7 possa ser reescrita como uma equação advectiva hiperbólica não linear [16].

Dado o campo vetorial  $\beta$  definido na região  $\Omega \subset \mathbf{R}^{nsd}$ ,  $nsd = 1, 2$  ou  $3$  a dimensão do espaço; encontre  $d(\mathbf{x}, t)$  tal que:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \beta \cdot \nabla d = \text{sign}(d_0) \quad (4.9)$$

$$\beta = \frac{\nabla d}{|\nabla d|} \text{sign}(d_0) \quad (4.10)$$

$$d(\mathbf{x}, t = 0) = d_0(\mathbf{x}, t)$$

onde  $\beta$  é um campo que aponta velocidades para dentro e para fora da interface de  $\Omega$  no sentido da normal. E a função sinal  $\text{sign}(d_0)$  do lado direito é o vetor de forças ( $f$ );  $d$  é uma função de nível, suave definida em todo o domínio  $\Omega$  a ser determinada para cada instante de tempo  $t \in [0, T]$  definida da seguinte maneira:

$$d(\mathbf{x}, t) \begin{cases} > 0, & \mathbf{x} \in \Omega_+ \\ = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ < 0, & \mathbf{x} \in \Omega_- \end{cases}$$

no qual  $\mathbf{x}$  indica a posição espacial aonde a função é avaliada,  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ,  $\Omega_- = \Omega \setminus \Omega_+$  e a interface  $\partial\Omega = \{x | d(\mathbf{x}, t) = 0\}$ . E a função sinal é definida como:

$$\text{sign}(d_0) = 2 \left( H_\epsilon(d) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.11)$$

onde  $H_\epsilon(d)$  é uma função de Heaviside, dada por:

$$H_\epsilon(d) = \begin{cases} 0, & \text{se } d < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{d}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{d\pi}{\epsilon}\right) \right], & \text{se } |d| \leq \epsilon \\ 1, & \text{se } d > \epsilon \end{cases}$$

A função de Heaviside é empregada para proporcionar uma variação suave para  $d$ , quando  $|d| \leq \epsilon$ , então  $|\nabla d| = 1$  e garantir que a interface tenha uma espessura igual a  $2\epsilon$ . E  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$  é um valor pequeno relacionado diretamente com a espessura da interface, dado aproximadamente por  $\frac{2\epsilon}{|d|}$ . Neste trabalho, conforme descrito em ÁLVAREZ e COUTINHO [16] adota-se  $\epsilon = \frac{1}{2} \min\{h\}$ , onde  $h$  é o tamanho característico do elemento.

## 4.2 Formulação de Elementos Finitos

Nesta seção a formulação estabilizada e a discretização temporal serão apresentadas para a equação de advecção-difusão, a qual representa uma formulação geral para as soluções dos métodos descritos na seção anterior, com as devidas colocações abaixo.

- **Método Híbrido de Hamilton-Jacobi-Poisson:** este método se trata simplesmente de uma equação de advecção-difusão com a particularidade do termo

fonte ser  $f = 1$ , o coeficiente de difusão  $\mathbf{k} = \varepsilon d_{hj}$  e o campo de velocidade  $\omega = \mathbf{u}_{hj}$ . Para este método foi utilizada a formulação estabilizada SUPG.

- **Método do Cálculo da distância com função sinal:** o método com a função sinal corresponde a uma equação de advecção pura com o campo de velocidade  $\omega = \beta$  e o termo fonte definido como  $f = \text{sign}(d_0)$  e para este modelo, juntamente com a formulação SUPG foi adicionado o método de operador de captura de descontinuidade não linear (CAU) que será caracterizado mais adiante.

### 4.2.1 Formulação Semidiscreta

Seja  $\Omega \subset \mathbf{R}^{nsd}$ ,  $nsd = 1, 2$  ou  $3$  a dimensão do espaço,  $\Gamma^*$  o seu contorno, em um intervalo de tempo  $[0, T]$ ;  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  um ponto qualquer em  $\Omega$  e  $\mathbf{n}$  a direção normal para fora do  $\Gamma^*$ . A equação de transporte em sua forma diferencial é apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \phi) = f \text{ em } \Omega \times [0, T] \quad (4.12)$$

submetida à condições de contorno essenciais e naturais:

$$\phi = g \text{ em } \Gamma_D^*$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \nabla \phi = q \text{ em } \Gamma_N^*$$

no qual  $\Gamma^* = \Gamma_D^* \cup \Gamma_N^*$  e  $\Gamma_D^* \cap \Gamma_N^* = \emptyset$  e condição inicial,

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \text{ em } \Omega$$

onde  $g$  e  $q$  são funções conhecidas,  $\Gamma_D^*$  e  $\Gamma_N^*$  são subconjuntos de  $\Gamma^*$ , e  $\phi(\mathbf{x}, t)$  é a função que queremos encontrar. O campo de velocidade conhecido e variável no

tempo é dado por  $\omega = \omega(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{k}$  é o tensor que contém os coeficientes de difusão e  $f$  o termo fonte conhecido. Pode-se dizer também que a equação (4.12) está em sua forma forte.

## 4.2.2 Formulação Variacional de Galerkin e Estabilizada

Considere os espaços das funções testes  $\phi^h$  e o espaço das funções peso  $w^h$ , encontre  $\phi^h \in S$  e  $w^h \in V$  tal que:

$$S = \{\phi^h | \phi^h \in H^1, \phi^h = g(t) \text{ em } \Gamma \times [0, T]\}$$

$$V = \{w^h | w^h \in H^1, w^h = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

onde  $\phi^h$  deve satisfazer as condições de contorno e  $w$  as condições não nulas no contorno.

A formulação variacional, ou a forma fraca, é obtida multiplicando a equação (4.12) pela função peso  $w^h$  e integrando-a. Feito isso, o problema se resume em: Encontrar  $\phi^h \in S^h$  e  $w^h \in V^h$  tal que:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} w^h + (\omega \cdot \nabla \phi^h) w^h + \mathbf{k} \nabla \phi^h \cdot \nabla w^h \right) d\Omega = \int_{\Omega} f w^h d\Omega + \int_{\Gamma_N} q w^h d\Gamma \quad (4.13)$$

onde o super índice  $h$  indica o tamanho característico do elemento referente a partição da malha de elementos finitos, onde  $h = \sqrt{2A}$  e  $A$  é área do elemento triangular.

Para problemas com a parcela de advecção predominante, faz-se necessário o uso de uma difusão artificial que atue na direção das linhas de corrente. No presente trabalho, adotou-se a formulação estabilizada Streamline/Upwind Petrov-Galerkin - SUPG, proposta por BROOKS e HUGHES [27].

Assim sendo, a formulação SUPG é encontrada somando à equação (4.13) ao operador linear  $\tau_{SUPG} \omega \nabla w^h$  multiplicado pela equação (4.12), gerando a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} w^h L(\phi^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} \tau_{SUPG} \omega \nabla w^h L(\phi^h) d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Observe que nesta expressão o primeiro termo é referente à formulação de Galerkin e o segundo corresponde à formulação estabilizada SUPG, com:

$$L(\phi^h) = \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \omega \cdot \nabla \phi^h - \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \phi^h) - f \quad (4.15)$$

sendo este o resíduo no interior do elemento.

Existem na literatura diversas maneiras para se encontrar o parâmetro de estabilização  $\tau_{SUPG}$ , o adotado neste trabalho é o mesmo proposto por CODINA [28], como se segue:

$$\tau_{SUPG} = \frac{1}{\frac{4k}{h^2} + \frac{2|\omega|}{h}} \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Operador de Captura de Descontinuidade - CAU

Como já mencionado neste capítulo, para o método da função distância com sinal além de se utilizar a formulação estabilizada SUPG foi necessário adicionar ao modelo uma difusão artificial, como forma de garantia da estabilidade e convergência do problema.

A difusão artificial adotada neste trabalho é feita pelo método Upwind Aproximado Consistente (CAU - do inglês *Consistent Approximate Upwind*), proposto por GALEÃO e DUTRA DO CARMO [29], por se tratar de um método bastante utilizado na literatura para este tipo de problema. Quando a vizinhança de uma região

com alto valor no gradiente está suscetível a uma solução descontínua, a formulação SUPG sozinha não consegue manter a estabilidade do problema; sendo assim necessário suavizar a solução nessa região. Uma forma de fazê-lo é utilizar o operador de captura de descontinuidade. O CAU é uma difusão artificial, ponderada pelo resíduo da equação a nível do elemento, tornando a solução do problema não linear [30].

Logo pode-se dizer que o CAU é um método empregado para aumentar a estabilidade nas regiões, ou vizinhanças, com altos valores para os gradientes na solução, definido da seguinte forma:

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} (\delta_e \nabla \phi^h \cdot \nabla w^h) d\Omega \quad (4.17)$$

$$\delta_e = \frac{1}{2} h \min \left( \frac{Pe^e}{4}, 0.7 \right) \frac{|L(\phi^h)|}{\|\nabla \phi^h\|} \quad (4.18)$$

$$Pe^e = \frac{1}{2} \frac{\|\beta_{//}^e\|^3}{(\beta_{//}^e)^T \mathbf{k} \beta_{//}^e} \quad (4.19)$$

$$\beta_{//}^e = \frac{\omega \nabla \phi^h}{\|\nabla \phi^h\|^2} \nabla \phi^h \quad (4.20)$$

onde  $\beta_{//}^e$  é a velocidade na direção paralela ao gradiente da solução,  $Pe^e$  é o número de Peclet correspondente a  $\beta_{//}^e$  e  $\delta_e$  é parâmetro do operador de captura definido em COUTINHO *et al.* [31].

### 4.3 Discretização Espacial para o Elemento Triangular Linear e Integração no Tempo

Aproxima-se  $\phi^h$  e  $w^h$  pelas expansões:

$$\phi^h = \sum_{i=1}^{nnos} N_i(\mathbf{x}) d_i(t) \quad (4.21)$$

$$w^h = \sum_{j=1}^{nnos} N_j(\mathbf{x}) c_j \quad (4.22)$$

onde  $N_i$  é a matriz das funções de interpolação a nível do elemento, dada como  $N_i = [N_1, N_2, N_3]$  e  $nnos$  o número total de nós pertencentes à malha.

Em seguida, unindo-se a equação(4.14) à equação (4.17) chega-se a formulação SUPG+CAU abaixo:

$$\underbrace{\int_{\Omega} w^h L(\phi^h) d\Omega}_{\text{Galerkin}} + \sum_{e=1}^{nel} \underbrace{\int_{\Omega} \tau_{SUPG} \omega \nabla w^h L(\phi^h) d\Omega}_{\text{SUPG}} + \sum_{e=1}^{nel} \underbrace{\int_{\Omega} (\delta^e \nabla \phi^h \cdot \nabla w^h) d\Omega}_{\text{CAU}} = 0 \quad (4.23)$$

Ao substituir as aproximações (4.21) e (4.22) na equação acima, se obtém as seguintes matrizes ao nível do elemento:

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}_G^e + \mathbf{M}_{PG}^e$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{DG}^e + \mathbf{K}_{AG}^e + \mathbf{K}_{DPG}^e + \mathbf{K}_{APG}^e + \mathbf{K}_{CAU}^e$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_G^e + \mathbf{F}_{PG}^e$$

onde os sub-índices  $G$  e  $PG$  correspondem as matrizes de Galerkin e Petrov-Galerkin, respectivamente;  $D$  a parcela de difusão e  $A$  advecção. E pela técnica denominada

*assembly* aplicada nas matrizes acima, obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares abaixo:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{K}(\mathbf{c})\mathbf{c} = \mathbf{F} \quad (4.24)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{K}$  a matriz rigidez e  $\mathbf{F}$  é o vetor dos termos independentes;  $\mathbf{c}$  é o vetor com as grandezas à serem transportadas e  $\dot{\mathbf{c}}$  a sua derivada temporal.

Com tudo, resta determinar a discretização temporal do problema, que neste trabalho é realizada pelo método implícito de integração no tempo denominado algoritmo Preditor-Multicorretor, apresentado por HUGHES [17]. Essa formulação gera uma sequência de sistemas de equações lineares não-simétrico em cada passo de tempo, o qual neste trabalho é resolvido através do algoritmo GMRES com pré-condicionamento diagonal [18].

Logo, o problema é posto da seguinte maneira: dada a equação

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{K}(\mathbf{c})\mathbf{c} = \mathbf{F}$$

submetida a condições iniciais

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0$$

encontre sua solução pelas seguintes equações:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{c}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n + \Delta t\dot{\mathbf{c}}_{n+\theta} \quad (4.26)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{n+\theta} = (1 - \theta)\dot{\mathbf{c}}_n + \theta\dot{\mathbf{c}}_{n+1} \quad (4.27)$$

com  $n + 1$  o passo de tempo atual,  $n$  o passo de tempo anterior,  $\dot{\mathbf{c}}_n$  e  $\mathbf{c}_n$  aproximações de  $\dot{\mathbf{c}}$  e  $\mathbf{c}$ , respectivamente;  $\Delta t$  o passo de tempo,  $\mathbf{F}_{n+1}$  o vetor dos termos independentes.

O parâmetro  $\theta$ , corresponde o tipo de algoritmo da família da regra trapezoidal que será adotado. Para  $\theta = 0$  tem-se o método de diferenças finitas para frente, para  $\theta = 1/2$  o método é chamado da regra trapezoidal ou Cranck-Nicholson e para  $\theta = 1$  o método é equivalente ao de diferenças finitas para trás. Neste trabalho adota-se  $\theta = 1/2$ .

### Algoritmo Preditor-Multicorretor:

O algoritmo preditor-multicorretor é dado pela equação de predição :

$$\mathbf{c}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{c}_n + (1 - \theta)\Delta t\dot{\mathbf{c}}_n \quad (4.28)$$

Avalia-se o resíduo em:

$$\Delta\mathbf{F}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{F}_{n+1} - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d})^{(i)} \quad (4.29)$$

Obtém-se a solução do sistema de equações efetivo:

$$\Delta\dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{(i)} = (\mathbf{M}^*)^{-1}\Delta\mathbf{F}_{n+1}^{(i)} \quad (4.30)$$

onde  $\mathbf{M}^*$  é uma matriz esparsa e não simétrica, também conhecida como matriz de massa efetiva, definida por:

$$(\mathbf{M}^*) = \mathbf{M} + \theta\Delta t\mathbf{K} \quad (4.31)$$

E calculando  $\dot{\mathbf{c}}_{n+1}$  pode-se corrigir o valor de  $\mathbf{c}_{n+1}$ , por:

$$\dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{(i)} + \Delta \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{(i)} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{c}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{c}_{n+1}^{(i)} + \theta \Delta t \dot{\mathbf{c}}_{n+1}^{(i)} \quad (4.33)$$

## 4.4 Algoritmos

Os algoritmos descritos a seguir combinam as metodologias descritas no presente trabalho para a obtenção de funções distância.

A formulação de elementos finitos para os métodos Híbrido e da Função Distância com Sinal, são baseadas nas descrições apresentadas por TUCKER [32] e ÁLVAREZ e COUTINHO [16], respectivamente.

### 4.4.1 Método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson

Os passos para o cálculo de distâncias através do método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson, compreendem: (i) resolver numericamente uma equação de Poisson, (ii) seguida por uma equação auxiliar que terá como resposta a distância de Poisson. Por conseguinte, define-se uma velocidade híbrida composta por dois componentes: uma com a velocidade de Poisson e outra com a velocidade de Hamilton-Jacobi, onde a proporção de cada componente na equação da velocidade é governada pelo parâmetro  $\alpha$ .

A velocidade híbrida é avaliada inicialmente por uma condição inicial e, iterativamente calcula-se a distância aproximada através da equação de Hamilton-Jacobi, onde a propagação da distância é obtida pela velocidade híbrida.

A seguir, encontra-se de forma simples a descrição para o presente algoritmo:

**Algoritmo 1 - Método Híbrido**

Dados:  $\phi = 0$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Delta t$ ,  $t_{max}$

1: Resolva a equação de Poisson

1.1: Calcule a distância de Poisson  $\tilde{d}_p$

2: Tome  $d_{hj}^n = \tilde{d}_p$

3: Calcule o número de:

3.1: passos de tempo ( $nsteps$ )

3.2: iterações para a multiorreção ( $niter$ )

4: defina  $aux = 0$

5: Para  $i = 1$  até  $nsteps$ , faça:

5.1:  $tempo = tempo + \Delta t$

5.2: Calcule os preditores

**Inicie a multiorreção**

5.3: para  $j = 1$  até  $niter$ , faça:

5.3.1: Se  $aux = 0$ , então:

Defina  $d_{hj} = \tilde{d}_p$

fim se

5.3.2: Defina:  $\mathbf{u}_{hj} = \alpha \nabla d_{hj} + (1 - \alpha) \frac{\nabla \tilde{d}_p}{|\nabla \tilde{d}_p|}$

5.3.3: defina  $aux = 1$

5.3.4: Monte as matrizes:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{F}$

5.3.5: Resolva o sistema Linear

5.3.6: Recupere a solução

5.3.7: Teste a convergência:

Se não convergir atualize  $\alpha$  ou  $\varepsilon$

fim para

fim para

6: Salve a solução

O parâmetro  $\alpha$  está definido entre 0 e 1, e a proporção de cada componente, é realizada de modo que o termo da velocidade referente a parcela de Hamilton-Jacobi seja multiplicado por  $\alpha$  e a parcela ligada à Poisson seja multiplicada por  $(1 - \alpha)$ , conforme indica o item 5.3.2. Repare que com a velocidade híbrida definida dessa forma, ao se empregar  $\alpha = 1$  o método consiste em utilizar somente a velocidade de Hamilton-Jacobi; para  $\alpha = 0$  faz-se uso apenas da velocidade de Poisson e com  $\alpha = 0,5$  tem-se a mesma medida para ambos os lados. E, ao se tomar  $\alpha < 0,5$  haverá uma maior proporção para a componente de velocidade de Poisson do que a componente de velocidade de Hamilton-Jacobi.

Toma-se como condição inicial para a resolução do método a distância aproximada de Poisson. Para resolver iterativamente a velocidade híbrida para o primeiro momento, como aponta o item 5.3.1, define-se que a distância de Hamilton-Jacobi seja igual à distância aproximada de Poisson. E posteriormente, a velocidade híbrida é atualizada através da distância aproximada do passo anterior até que a solução convirja.

#### **4.4.2 Método da Distância com Função Sinal**

O método da Função Distância com Sinal, proposto por SUSSMAN *et al.* [9] consiste em resolver a equação de Eikonal, com um campo de velocidade composto pela função sinal. A função sinal para este método é obtida em função da equação de Heaviside, como ilustra o algoritmo a seguir:

### Algoritmo 2 - Método da Distância com Sinal

Dados:  $d = 0$ ,  $d_0 = 1$ ,  $\Delta t$ ,  $t_{max}$

1: Tome  $d^n = d_0$

2: Calcule o número de:

2.1: passo de tempo ( $nsteps$ )

2.2: iterações para a multicorreção ( $niter$ )

3: Calcule a função de Heaveside  $H_\epsilon$

4: Defina: 4.1:  $sign(d_0) = 2 (H_\epsilon(d) - \frac{1}{2})$

4.2:  $f = sign(d_0)$

5: Para  $i = 1$  até  $nsteps$ , faça:

5.1:  $tempo = tempo + \Delta t$

5.2: Calcule os preditores

**Inicie a multicorreção**

5.3: para  $j = 1$  até  $niter$ , faça:

5.3.1: Defina:  $\beta = \frac{\nabla d}{|\nabla d|} sign(d_0)$

5.3.2: Monte as matrizes: **M**, **K** e **F**

5.3.3: Resolva o sistema Linear

5.3.4: Recupere a solução

5.3.5: Teste a convergência

fim para

fim para

6: Salve a solução

Observe que a função sinal, como descrita no item 4, é fixa e não varia com o tempo e o mesmo acontece com o termo fonte. A distância aproximada é encontrada iterativamente junto com o campo de velocidade, conforme o item 5, até que se alcance a convergência da solução.

# Capítulo 5

## Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados dos experimentos numéricos para a avaliação da função distância pelo Método Híbrido Hamilton-Jacobi-Poisson. E comparam-se os resultados com o Método da Função Distância com Sinal.

Os experimentos foram realizados para diferentes tamanhos de malhas bidimensionais, compostas por triângulos lineares. Para todos os experimentos numéricos foi empregado um passo de tempo  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$ , com um tempo de execução variável até se obter o estado estacionário. Para a resolução do sistema linearizado, utilizou-se o algoritmo GMRES com 5 vetores na base do sub-espaço de Krylov.

Os experimentos numéricos mostraram que a solução do Método da Função Distância com Sinal converge após 2 a 3 iterações em cada passo de tempo até atingir o estado estacionário, seguido do método Híbrido que converge com 3 a 10 iterações. Os valores utilizados para a tolerância dos algoritmos GMRES e preditor-multicorretor foi igual a  $1,0 \times 10^{-3}$ .

O parâmetro  $\alpha$  da velocidade para o cálculo da função distância de Hamilton-Jacobi-Poisson foi tomado, em todos os exemplos como:  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 1$ , a fim de avaliar a influência do campo de velocidade no comportamento da resposta.

## 5.1 Placa Plana

Considere o domínio quadrado indicado na figura 5.1, com domínio de dimensões  $[2 \times 2]$ ,  $\varepsilon = 0$  e  $d = 0$  na borda inferior, indicando a curva de nível zero. Os cálculos foram realizados em duas malhas estruturadas conforme mostram as figuras 5.2 e 5.3.

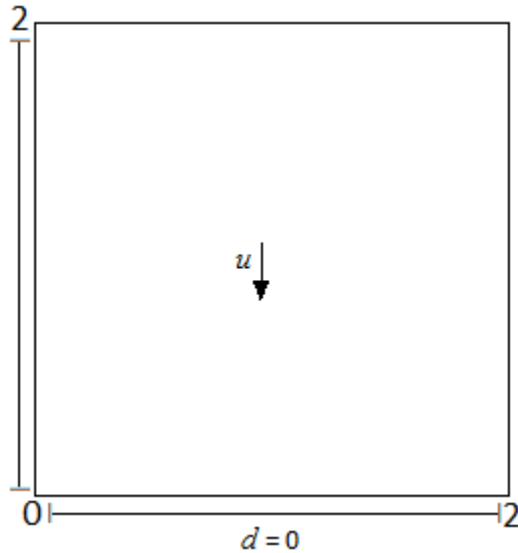


Figura 5.1: Domínio Placa Plana

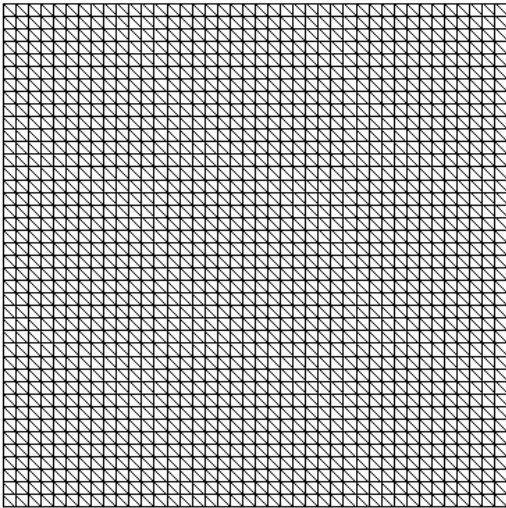


Figura 5.2: Malha1: 1681 nós e 3200 elementos

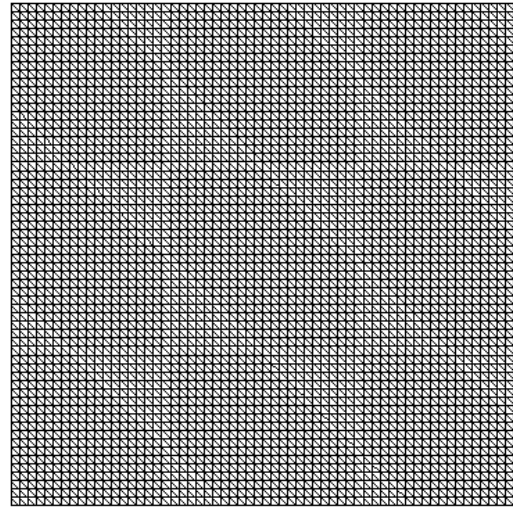


Figura 5.3: Malha2: 3721 nós e 7200 elementos

Para este modelo, a propagação da distância ocorre da borda superior para a borda inferior e, uma vez que o domínio apresenta dimensão  $[2 \times 2]$ , por se tratar de uma malha estruturada a menor distância entre os pontos será uma reta na direção

do eixo  $y$ , e assim, o valor para a função distância deve estar compreendido entre 0 e 2, para o qual 0 corresponde a distância mínima e 2 a distância máxima.

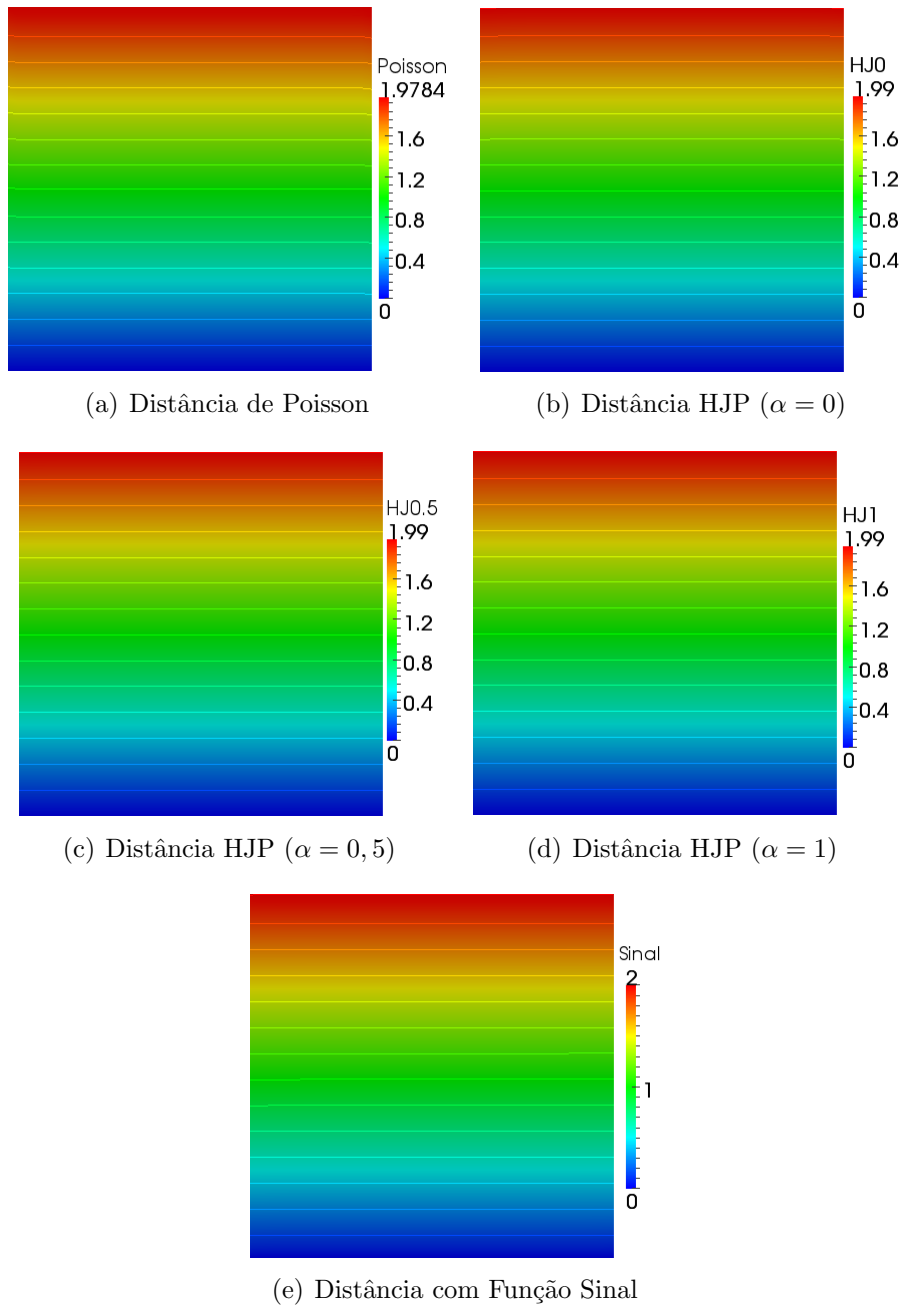


Figura 5.4: Função distância com contorno para uma Placa Plana - Malha1

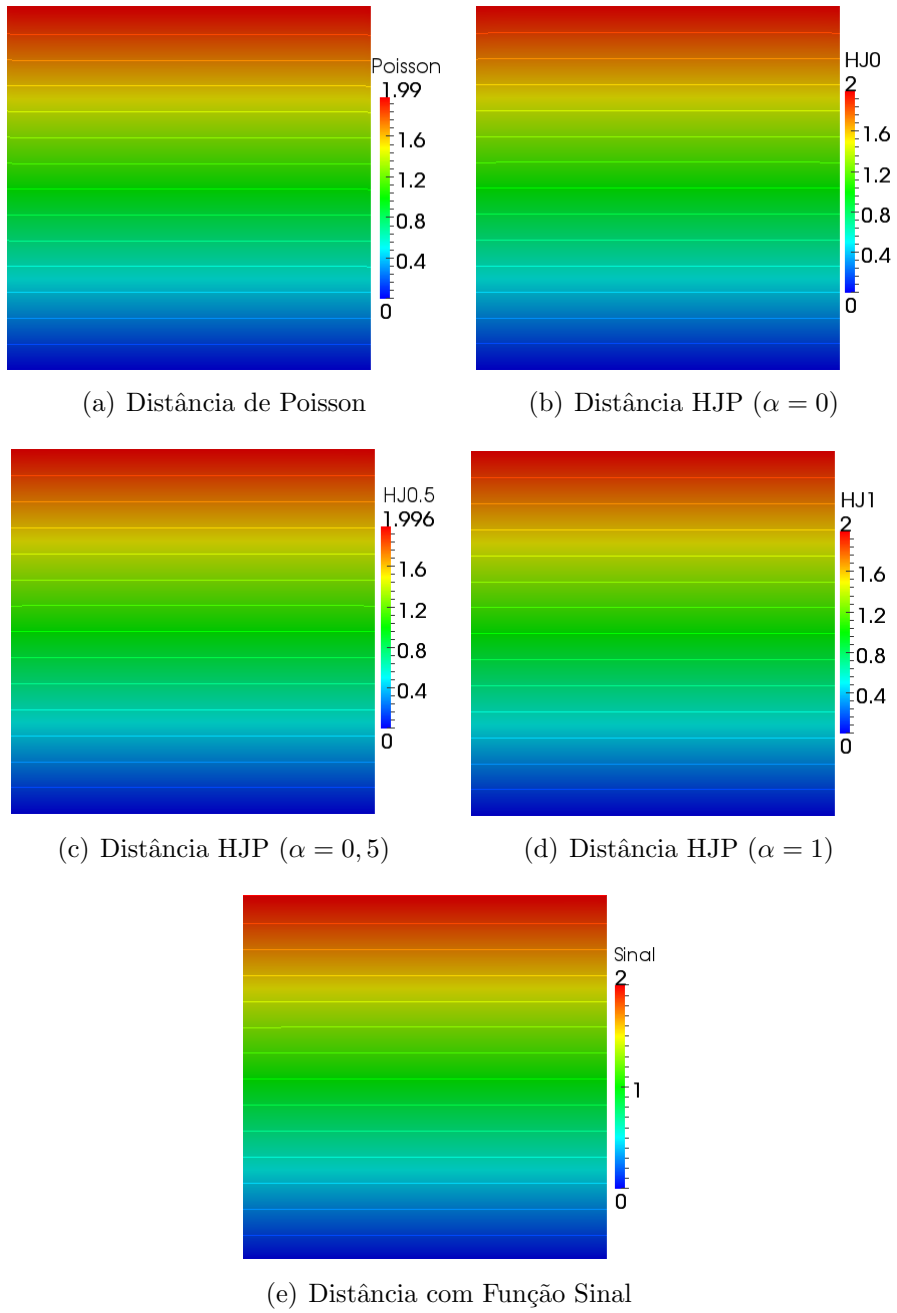


Figura 5.5: Função distância com contorno para uma Placa Plana - Malha2

Ao observar a figura 5.4, verifica-se que os métodos Híbrido e de Poisson, apesar de não atingirem valor máximo de 2, tal como obtido por meio do Método da Função Distância com Sinal, apresentam valor máximo próximo do esperado, cujo erro relativo com a solução exata não excede em 2%. Já no que se refere a figura 5.5, verifica-se que os três métodos avaliados apresentam melhor aproximação com relação à distância máxima.

Para a Malha2, a função distância do método Híbrido com  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  apresentam intervalos de solução equivalentes ao obtido através do método da Função Sinal, como ilustrado nas figuras 5.5(b), 5.5(d) e 5.5(e).

Avaliando de forma mais detalhada os resultados obtidos para a Malha2, observa-se que o método da Função Sinal proposto por SUSSMAN *et al.* [9] apresenta um salto próximo a curva de nível zero, diferentemente do verificado para os métodos de Poisson e Híbrido, como pode ser averiguado nas figuras 5.6 e 5.1 para a seção que vai de  $x = 1$  e  $y = 0$  até  $x = 1$  e  $y = 2$ .

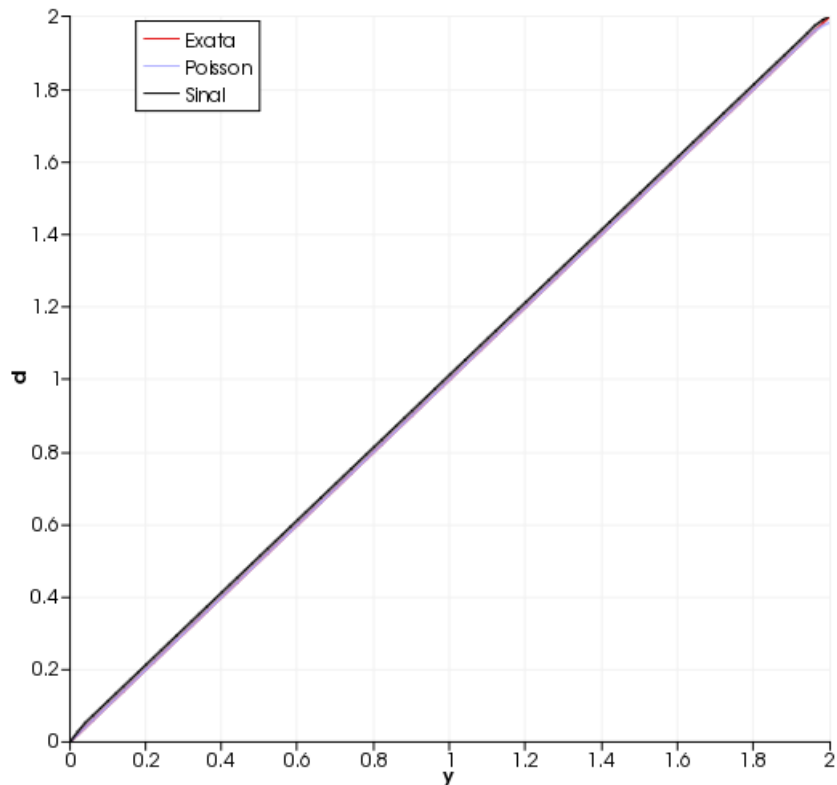


Figura 5.6: Gráfico de distâncias de Poisson e Função Sinal

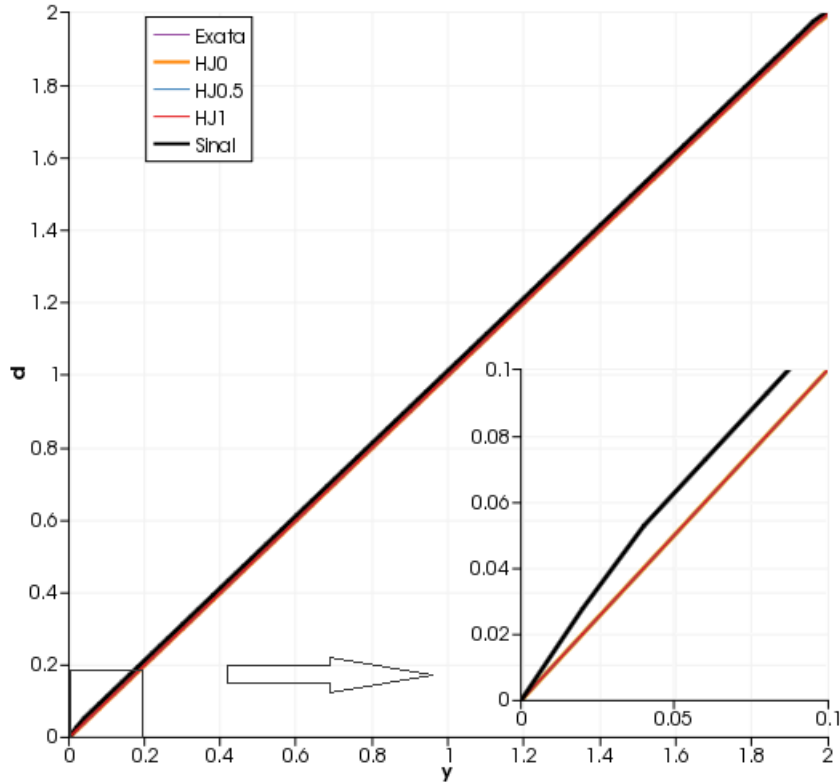
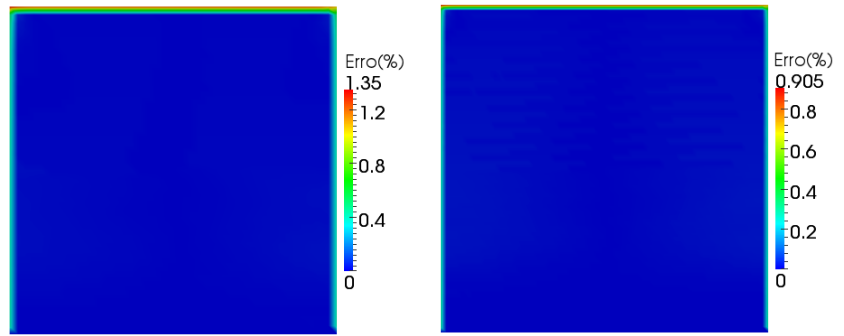


Figura 5.7: Gráfico de distâncias de HJP para  $\alpha = 0, 0,5$  e  $1$  e Função Sinal

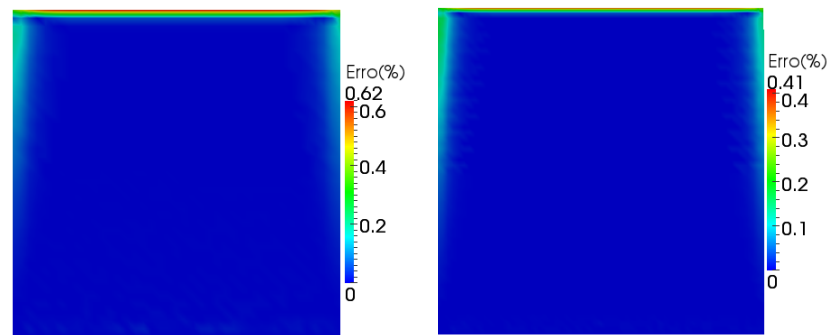
Uma alternativa para avaliação da precisão do Método Híbrido, consistiu em desenvolver uma comparação entre as distâncias computadas e a solução analítica por meio do erro relativo. A figura 5.8 ilustra os erros para a distância a partir da interface. Cabe ressaltar que, para este modelo, a solução analítica é dada efetivamente pelos valores das coordenadas do eixo  $y$ .

No que se refere ao erro relativo, os resultados demonstram que o método Híbrido proposto para este modelo é capaz de calcular distâncias de forma precisa, mesmo que as malhas apresentem um baixo refinamento. Tendo em vista a avaliação do erro sobre todo o domínio da placa, averigua-se que os erros obtidos estão concentrados no extremo oposto à curva de nível zero, estando os seus valores compreendidos entre  $0,2\%$  e  $1,35\%$ .

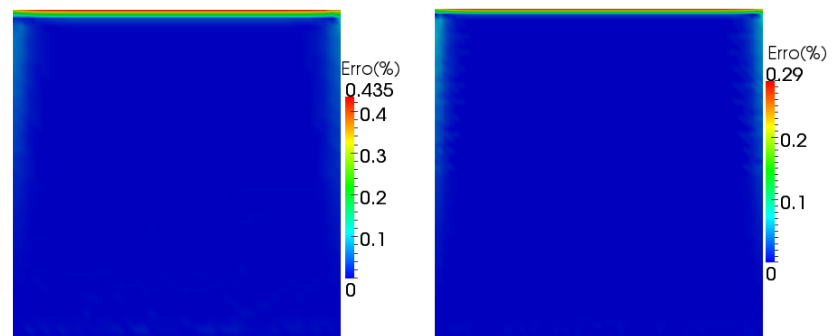
Os melhores resultados são obtidos a partir do refinamento da malha, o que pode ser comprovado através das figuras 5.8(b), 5.8(d), 5.8(f) e 5.8(h) para a Malha2 que apresenta erros menores que  $1\%$ .



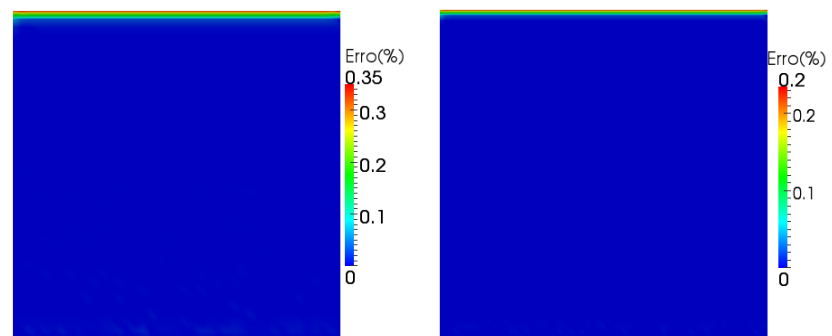
(a) Erro relativo de Poisson - Malha1 (b) Erro relativo de Poisson - Malha2



(c) Erro relativo HJP ( $\alpha = 0$ ) - Malha1 (d) Erro relativo HJP ( $\alpha = 0$ ) - Malha2



(e) Erro relativo HJP ( $\alpha = 0,5$ ) - Malha1 (f) Erro relativo HJP ( $\alpha = 0,5$ ) - Malha2



(g) Distância HJP ( $\alpha = 1$ ) - Malha1 (h) Distância HJP ( $\alpha = 1$ ) - Malha2

Figura 5.8: Erro relativo Placa Plana

## 5.2 Parede Sólida

Para este exemplo, considere o domínio quadrado  $[2 \times 2]$  com as mesmas malhas da seção anterior, com  $\varepsilon = 0,1$  e  $d = 0$  em todo contorno fazendo com que propagação da distância seja do centro da cavidade à borda de todo o domínio, conforme a figura abaixo:

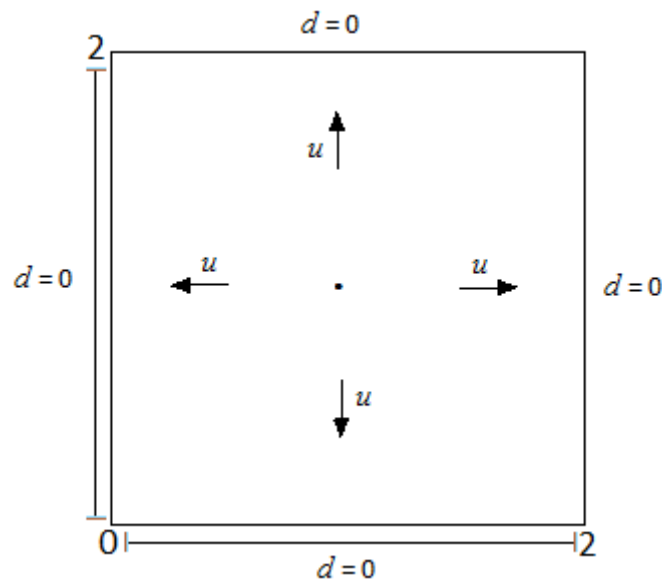


Figura 5.9: Domínio para uma Parede Sólida

Nas figuras 5.10 e 5.11, são apresentados os resultados da função distância para as malhas 1 e 2, respectivamente. Neste exemplo, diferentemente do que foi exibido na seção anterior, a solução para a função distância de Poisson apresenta uma aproximação inferior comparada aos outros métodos empregados, por não permitir uma boa representação do comportamento da solução no que tange às regiões côncavas. Todavia, verificou-se que o resultado obtido no presente trabalho apresenta semelhança com o encontrado por TUCKER [15].

Ainda sobre as figuras 5.10 e 5.11, observa-se que a melhor aproximação para a função distância é obtida primeiramente pelo método da Função Sinal com  $d_{max} = 0,98$ ; posteriormente o método Híbrido com  $d_{max} = 0,937$ , seguido por  $d_{max} = 0,926$  e  $d_{max} = 0,91$  para  $\alpha = 1; 0,5$  e  $0$ , respectivamente. Por fim, o método de Poisson com  $d_{max} = 0,767$ .

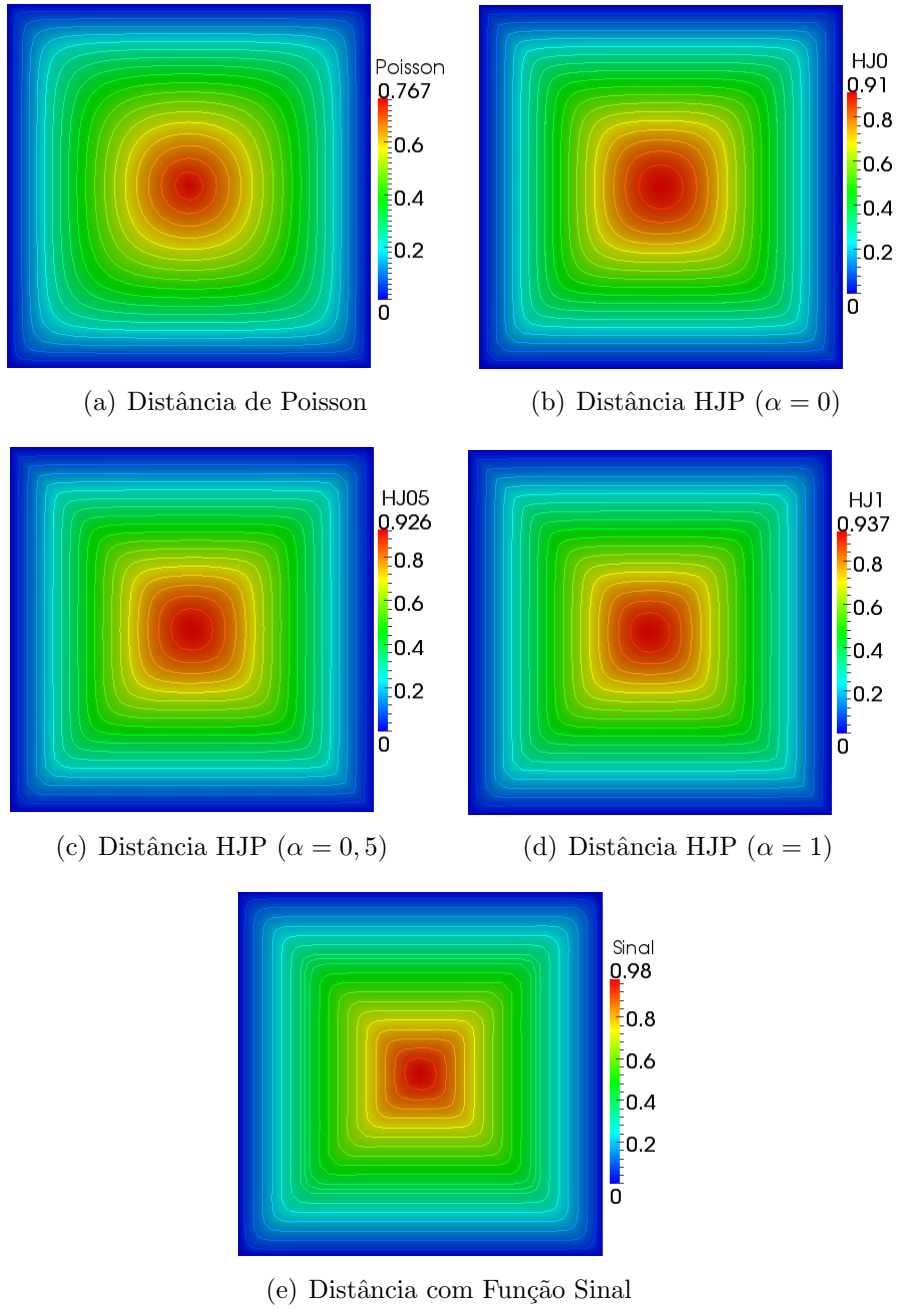


Figura 5.10: Função distância com contorno para uma Parede Sólida - Malha1

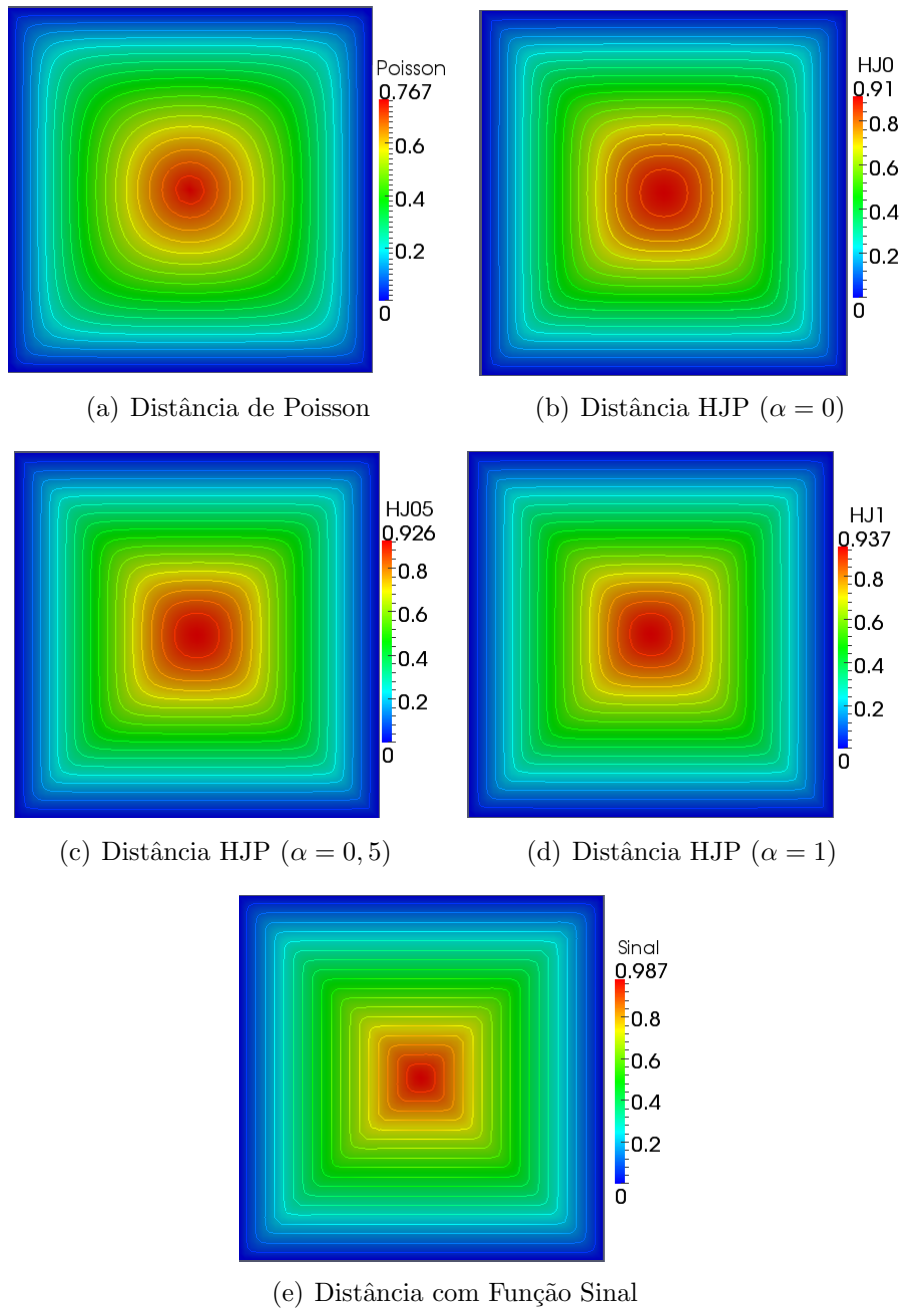
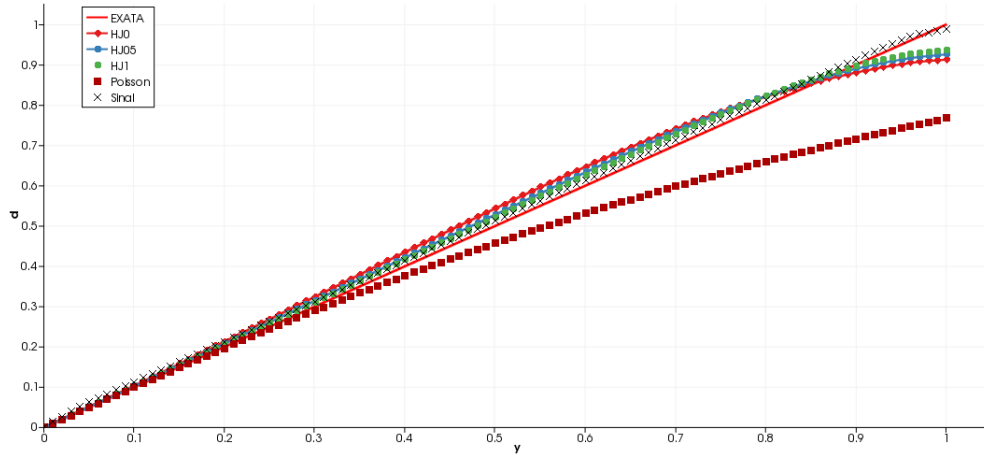
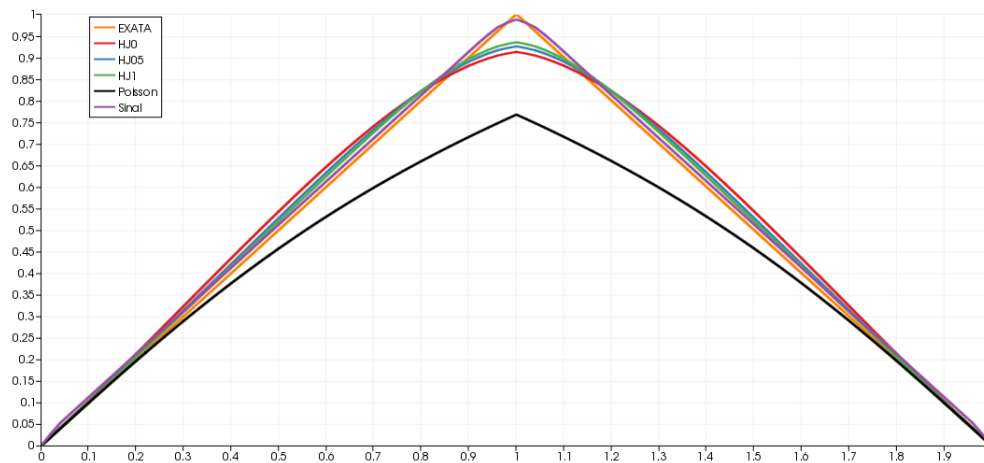


Figura 5.11: Função distância com contorno para uma Parede Sólida - Malha2

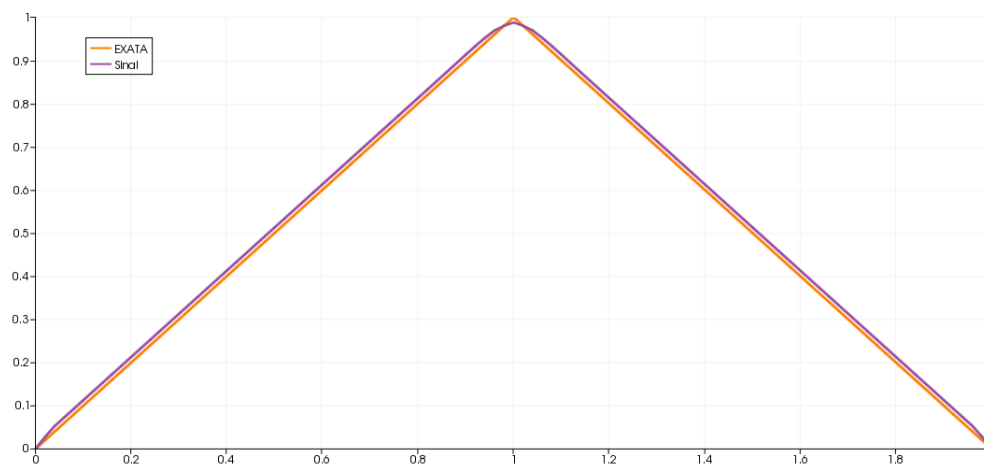
Como forma de averiguar melhor os resultados, foi realizada uma análise dentro de uma faixa do domínio compreendida entre  $x = 1, y = 0$  e  $x = 1, y = 2$  para as malhas 1 e 2, como ilustra a figura 5.12.



(a) distância  $x = 1, y = 0$  e  $x = 1, y = 1$  - Malha2



(b) distância  $x = 1, y = 0$  e  $x = 1, y = 1$  - Malha2



(c) distância  $x = 1, y = 0$  e  $x = 1, y = 1$  - Malha2

Figura 5.12: Solução final da função distância para uma seção do domínio

Constata-se que apesar do método da Função Sinal obter uma boa aproximação numérica (ver a figura 5.12(a)), o método Híbrido consegue um melhor resultado quanto as aproximações próximas à curva de nível zero. Para o método Híbrido a solução é mais suave próxima a curva de nível, enquanto o método da Função Sinal apresenta um salto na solução, como ilustra as figuras 5.12(b) e 5.12(c), respectivamente. E visto que a distância é propagada do centro para as paredes do modelo, espera-se que as soluções dentro desse intervalo estejam compreendidas entre 0 e 1, sendo 1 o valor máximo ( $d_{max}$ ) que a distância deve assumir.

As figuras 5.13(a) a 5.13(d) para a malha 2 indicam que, mesmo que os resultados apresentem um comportamento esperado, o erro relativo entre o valor da distância numérica e a solução analítica apontam resultados bem expressivos.

Este fato pode ser consequência da ausência de informação do artigo base (ver [15]) para o estudo do presente trabalho, no que se refere ao refinamento da malha próxima a curva de nível zero.

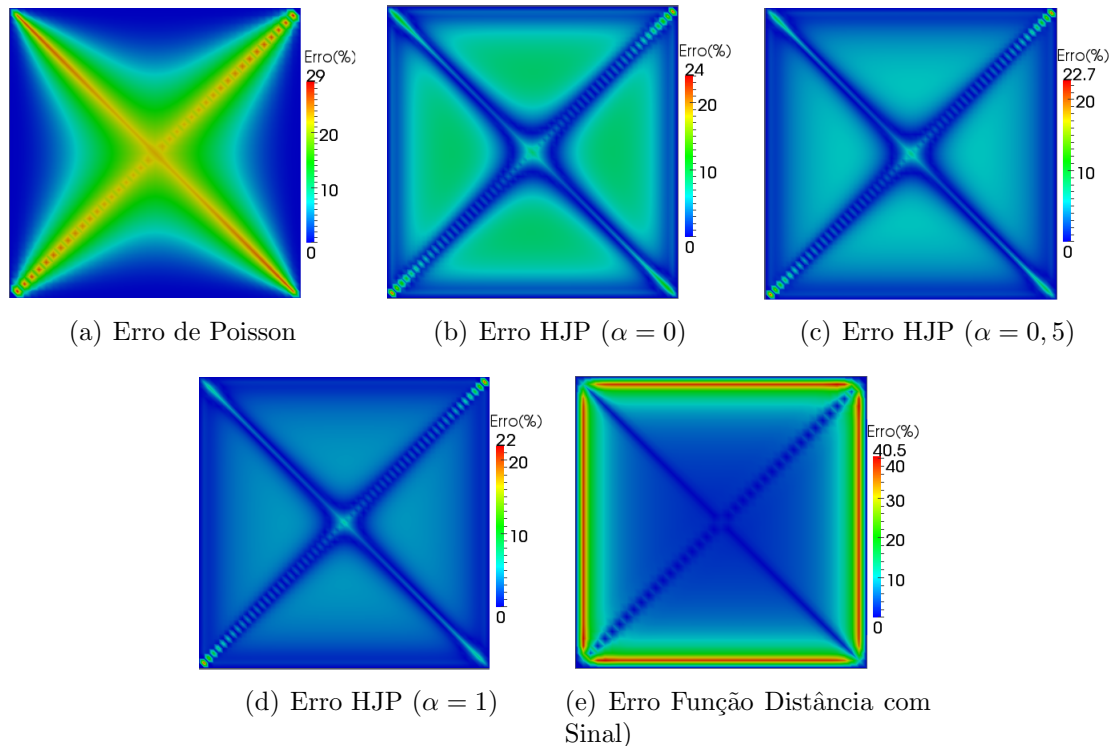


Figura 5.13: Erro relativo para a Parede Sólida

As tabelas 5.1 e 5.2 a seguir, informam o erro relativo para as distâncias aproximadas e para um nó pertencente a uma região côncava, para os métodos de Poisson, Híbrido e Função Sinal.

<b>Erro Relativo (%) para <math>d_{max}</math></b>				
Poisson	Híbrido $\alpha = 0$	Híbrido $\alpha = 0,5$	Híbrido $\alpha = 1$	Sinal
23,3	9	7,4	6,3	1,3

Tabela 5.1: Tabela de erro relativo para as distâncias aproximadas

<b>Erro Relativo (%) – <math>x = 0,5</math> e <math>y = 0,5</math></b>				
Poisson	Híbrido $\alpha = 0$	Híbrido $\alpha = 0,5$	Híbrido $\alpha = 1$	Sinal
24	3,04	2	2	0,2

Tabela 5.2: Tabela de erro relativo para um ponto do domínio com geometria côncava para  $x = 0,5$  e  $y = 0,5$

### 5.3 Aerofólio (NACA4412)

Este exemplo é constituído pelo aerofólio NACA4412 com seu interior vazado, dentro de um domínio quadrado com coordenadas de  $(-0,5; 1,5)$  no eixo  $x$  e  $(-1; 1,5)$  no eixo  $y$ , com  $\varepsilon = 0$  e  $d = 0$  no contorno do aerofólio indicando que a velocidade de propagação da distância se inicia da borda do quadrado ao contorno do aerofólio, como mostra a figura a seguir.

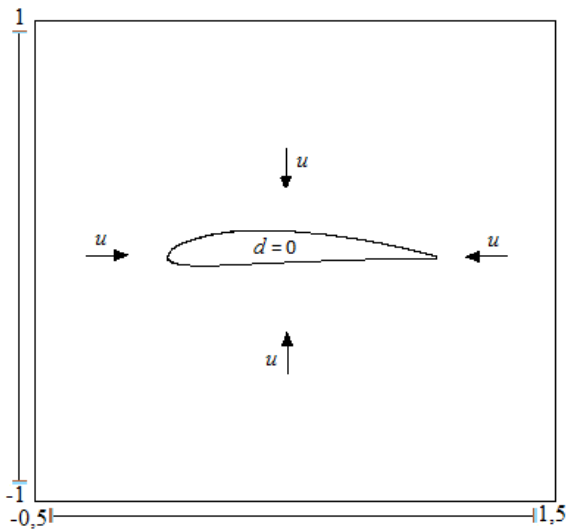


Figura 5.14: Domínio NACA4412

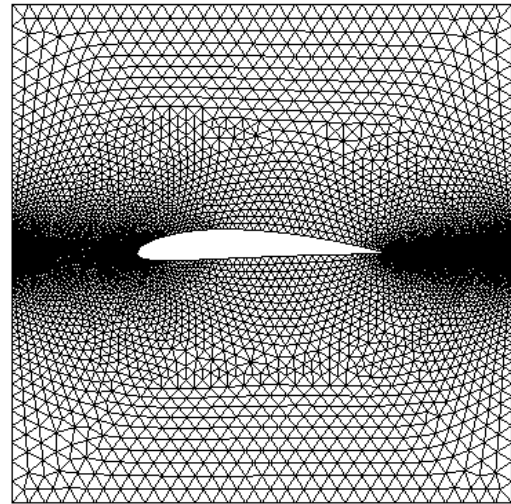


Figura 5.15: Malha: 7237 nós e 14086 elementos

A figura 5.16 indica as soluções com contorno para as funções distância para uma faixa do domínio que varia de  $-0,5$  a  $0,5$ . A figura 5.16(a) apresenta a solução analítica, 5.16(b) a solução aproximada de Poisson, as figuras 5.16(d) - 5.16(e) apontam as aproximações para o método Híbrido com  $\alpha = 0, 0,5$  e  $1$ , respectivamente.

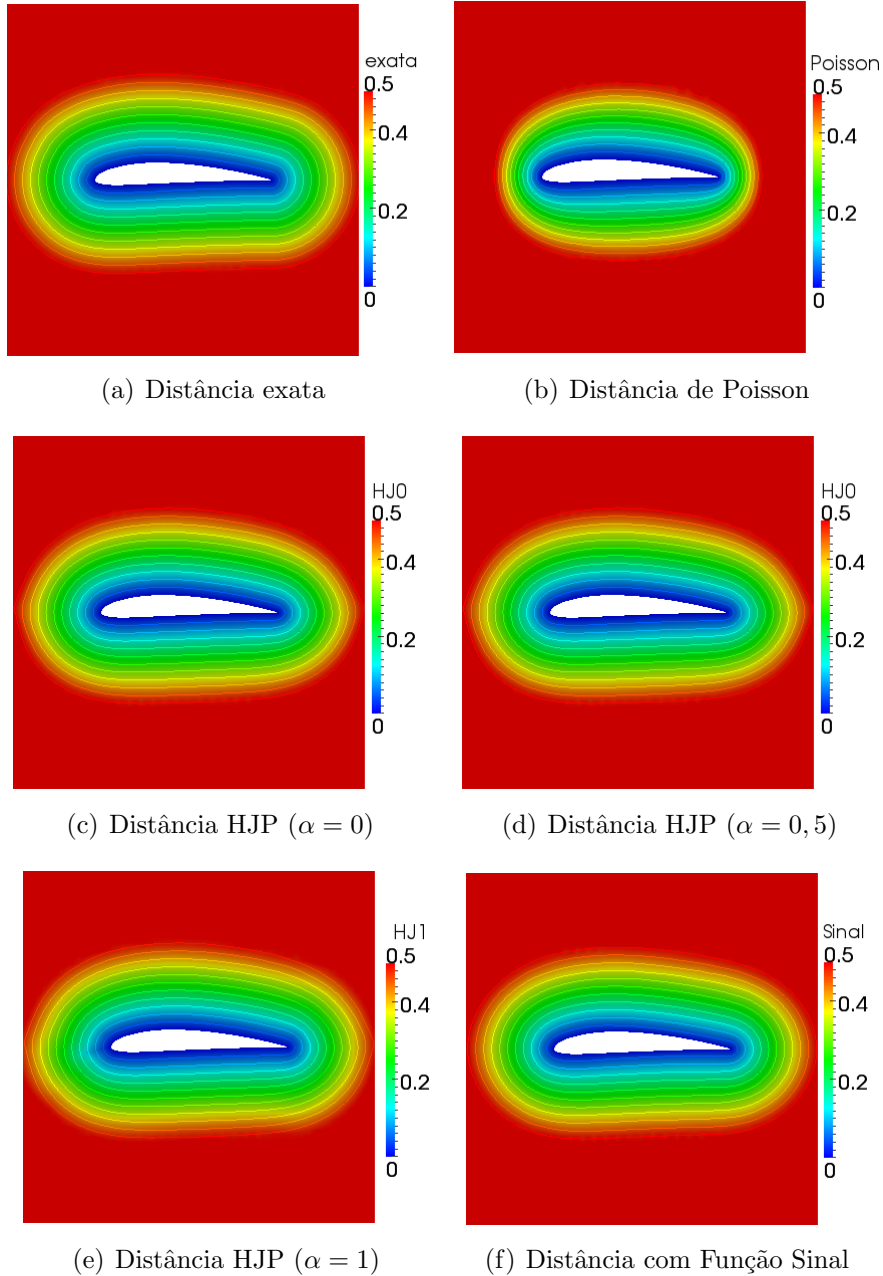
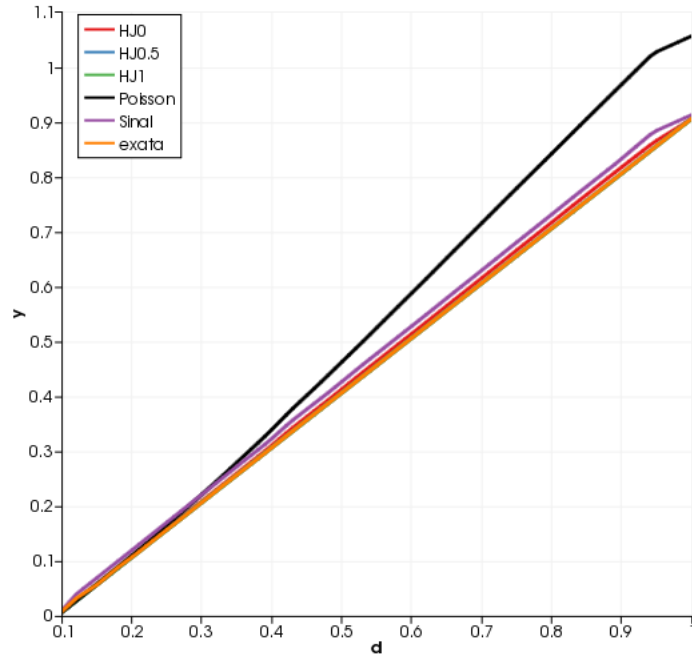


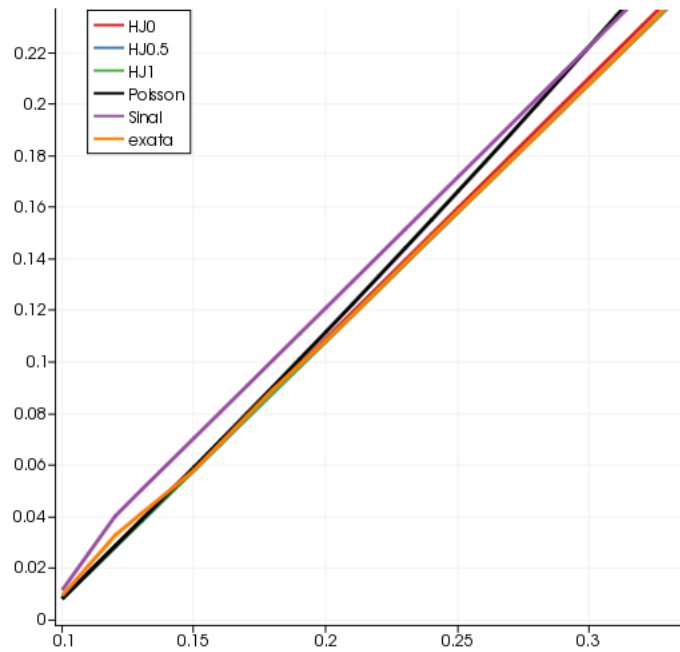
Figura 5.16: Função distância com contorno para o aerofólio NACA4412

Verifica-se através da figura 5.16, no que se refere aos contornos das funções, que os métodos Híbrido e Função Sinal apresentam características mais similares a solução analítica, se comparado ao método de Poisson. Este fato sugere que o Método de Poisson é mais suscetível a erros quanto a aproximação da solução nas regiões com geometrias fortemente convexas, como será visto mais adiante.

A figura 5.17, a seguir ilustra o comportamento das soluções para uma seção do domínio. Note que a solução de Poisson é a que mais se afasta da solução exata (veja a figura 5.17(a)) seguida pela solução do método da Função Sinal.



(a)



(b)

Figura 5.17: Gráfico para uma seção da solução final : (a)  $(x, y) = (0, 5; 0, 1)$  e  $(x, y) = (0, 5; 1)$ ; (b) amplificação para a região compreendida entre  $x = 0, 1$  a  $x = 0, 4$  e  $y = 0$  a  $y = 0, 3$

A figura 5.17(b), permite observar que para todos os resultados obtidos há um salto na solução próximo a curva de nível zero, porém, dentre os métodos avaliados o método híbrido foi o que mostrou melhor concordância com a solução exata apresentando uma menor dispersão próxima a curva de nível zero.

Na figura 5.18, no que tange ao tratamento das regiões com geometrias altamente convexas, bordos de ataque e de fuga, ao se confrontar o erro relativo entre a solução de Poisson e a solução híbrida para  $\alpha = 0$ , observou-se que esta apresenta maior impacto no tratamento dessas regiões.

Ainda sobre esta perspectiva, tem-se que as soluções, para ambos os métodos, são equivalentes longe das zonas de convexidade. Desconsiderando a possibilidade de erros numéricos, o método de Poisson nas zonas de convexidade se distancia da solução comparado ao método Híbrido para  $\alpha = 0$  em quase 99%.

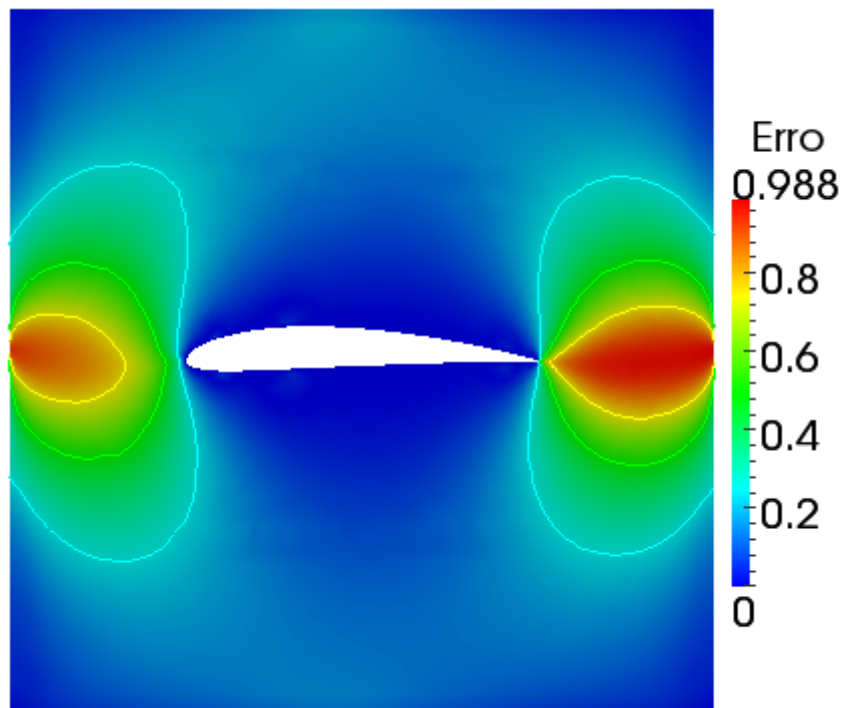


Figura 5.18: Erro relativo entre a solução de Poisson e Hamilton-Jacobi-Poisson para  $\alpha = 0$

### 5.3.1 Complexidade Computacional dos Algoritmos

A complexidade computacional consiste em medir a eficiência de um algoritmo por meio da análise dos recursos utilizados pelo mesmo para resolução de um problema. Esta envolve dois aspectos: i) análise da complexidade do espaço de memória requerido pelo algoritmo para processamento e execução das operações matemáticas; ii) análise da complexidade quanto ao tempo de execução do algoritmo [33].

As pesquisas atualmente, no que se refere a medida de complexidade de um algoritmo, estão mais direcionadas para projetar e analisar algoritmos quanto à sua eficiência, fornecendo a solução de um problema com a rapidez desejada, conforme em NOBRE [33]. Por conseguinte, a avaliação do tempo ou número de passos para executá-lo até a obtenção da solução, torna-se o fator de maior importância na análise de desempenho computacional [33]. Nessa perspectiva, o presente trabalho tem por objetivo analisar, única e somente, o tempo de execução de CPU (item ii) que consiste em computar o tempo gasto para processar as instruções dos algoritmos que constituem o programa desenvolvido.

Para tal, foram avaliados o tempo de CPU para os métodos de Poisson, Função sinal e Híbrido com o parâmetro  $\alpha = 0,5$ , conforme indicado na tabela 5.3. A escolha deste parâmetro está vinculada ao comportamento da propagação da distância, para o qual solução do problema terá a contribuição dos campos de velocidade de Hamilton-Jacobi e de Poisson na mesma proporção.

<b>Complexidade solução do algoritmo</b>			
Métodos	Sistema de solução		Tempo de CPU
Poisson	sistema simétrico	linear	0,468
Híbrido( $\alpha = 0,5$ )	sistema simétrico	linear não	110,932
Sinal	sistema não simétrico	linear não	304.904

Tabela 5.3: Tabela de tempo consumido pela CPU em segundos

Os resultados presentes na tabela 5.3 apontam que o método de Poisson, apesar de não obter uma ótima aproximação para com a solução exata, é o que apresenta o menor tempo de CPU ( $0,468s$ ), enquanto o método da Função Sinal que apresentou uma melhor aproximação foi o que mais consumiu tempo de CPU ( $304.904s$ ); já o método Híbrido obteve um tempo intermediário de consumo de CPU ( $110,932s$ ). Cabe ressaltar que para o método da distância com a Função Sinal houve a necessidade de adicionar a formulação do problema o método de captura do tipo CAU para garantir a estabilidade da solução, ao contrário do método Híbrido que fez uso somente da formulação SUPG para tal.

Neste contexto, para a avaliação de funções distância, o método de Poisson pode ser aplicado em problemas que não haja a necessidade de muita precisão. Quando o foco da análise corresponde a obtenção de boas aproximações, o uso do método Híbrido é bastante favorável, por apresentar solução cujo comportamento é mais próximo da exata, com um menor custo computacional, em termos de tempo de execução.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

### 6.1 Conclusões

Neste trabalho foi abordado o uso do Método Híbrido de Hamilton-Jacobi-Poisson para problemas que envolvem a reinicialização de funções distância para o método de captura de interface conhecido como método de Curvas de Nível. O método combina o uso da Equação de Poisson junto a equação de Hamilton-Jacobi para cálculo de distâncias através de um campo de velocidade híbrido englobando as mesmas. Sua implementação foi realizada através do método de elementos finitos estabilizado cuja eficiência foi testada por meio de uma comparação entre o método referido e o método de distância usado inicialmente por SUSSMAN *et al.* [9] por ser um dos métodos mais eficazes e utilizados na literatura. Foram realizados experimentos numéricos, a fim de desenvolver tal comparação.

O primeiro experimento consistiu em avaliar uma placa plana, para a qual foram estudadas duas configurações de refinamento de malha. Observou-se que a malha não apresenta influência significativa na solução, tendo em vista as malhas avaliadas. No que tange à análise do erro, verificou-se que os maiores percentuais de erro estão concentrados na região oposta a curva de nível zero, região esta que não apresenta grande interferência na solução do problema. Além disso, este experimento retornou que a solução obtida por meio do método Híbrido para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  mostrou uma

melhor concordância com a solução exata dentre os métodos analisados.

O segundo experimento permitiu analisar a influência das regiões côncavas, para qual o método de Poisson não se mostrou eficiente por não conseguir reproduzir a solução nestas regiões.

O terceiro, e último, experimento correspondeu a um aerofólio (NACA4412), para qual foi avaliado a influência das regiões convexas na solução. Verificou-se que o método de Poisson para essas regiões foi o que menos se aproximou da solução exata. Porém, este obteve um tempo de execução mais rápido, seguido do método Híbrido, que possui uma precisão aceitável. Este fato sugere que o método Híbrido possui um bom compromisso entre precisão e eficiência computacional.

De acordo com os resultados obtidos, torna-se possível observar que o modelo computacional implementado além de ser econômico e robusto, e por respeitar o esquema das leis de soluções hiperbólicas, pode ser facilmente implementado como um problema similar ao da equação geral da advecção-difusão.

O método mostrou-se eficaz próximo a curva de nível zero, por apresentar soluções mais suaves, comparado o método da Função Sinal que apresenta um salto nos valores para as distâncias em relação a solução exata.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Na realização de trabalhos futuros sugere-se:

- A extensão do método do Híbrido para problemas tridimensionais.
- Uma análise sobre a melhor forma de refinamento da malha, que acarrete uma melhor aproximação com a solução analítica.
- A implementação para outros tipos de elementos (quadriláteros quadráticos, cúbicos e etc.)

# Referências Bibliográficas

- [1] ELIAS, R. *Estruturas de Dados por Arestas para a Simulação Paralela de Escoamentos Incompressíveis pelo Método Estabilizado de Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [2] CARNEIRO, M. M. *Interfaces Assistidas para Deficientes Visuais utilizando Dispositivos Reativos e Transformadas de Distância*. Tese de Doutorado, PUC, Departamento de Informática, Rio de Janeiro, 2003.
- [3] ANDRADE, M. L. S. C. *Aplicação do método Level Set para segmentação e classificação de padrões e medidas de escoamento bifásico gás-líquido*. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2011.
- [4] PEIXOTO, A., VELHO, L. C. *Transformadas de distância*. PUC, 2000.
- [5] TEZDUYAR, T. E. “Finite elements in fluids: stabilized formulations and moving boundaries and interfaces”, *Computers & fluids*, v. 36, n. 2, pp. 191–206, 2007.
- [6] OSHER, S., SETHIAN, J. A. “Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”, *Journal of computational physics*, v. 79, n. 1, pp. 12–49, 1988.
- [7] SETHIAN, J., SMEREKA, P. “Level set methods for fluid interfaces”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 35, n. 1, pp. 341–372, 2003.
- [8] NAPOLITANO, L. M. *Implementação Numérica do Método Level Set para Propagação de Curvas e Superfícies*. Dissertação de Mestrado, USP, São Paulo, SP, Brasil, 2008.
- [9] SUSSMAN, M., SMEREKA, P., OSHER, S. “A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow”, *Journal of Computational physics*, v. 114, n. 1, pp. 146–159, 1994.

- [10] ELIAS, R. N., MARTINS, M. A. D., COUTINHO, A. L. G. A. “Simple finite element-based computation of distance functions in unstructured grids”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 72, n. 9, pp. 1095–1110, 2007.
- [11] FARES, E., SCHRÖDER, W. “A differential equation for approximate wall distance”, *International journal for numerical methods in fluids*, v. 39, n. 8, pp. 743–762, 2002.
- [12] XIA, H., TUCKER, P., COUGHLIN, G. “Novel applications of BEM based Poisson level set approach”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 36, n. 5, pp. 907–912, 2012.
- [13] TUCKER, P. G., RUMSEY, C. L., SPALART, P. R., et al. “Computations of wall distances based on differential equations”, *AIAA journal*, v. 43, n. 3, pp. 539–549, 2005.
- [14] TUCKER, P. “Differential equation-based wall distance computation for DES and RANS”, *Journal of Computational Physics*, v. 190, n. 1, pp. 229–248, 2003.
- [15] TUCKER, P. “Hybrid Hamilton-Jacobi-Poisson wall distance function model”, *Computers and Fluids*, v. 44, n. 1, pp. 130–142, 2011.
- [16] ÁLVAREZ, C. A. H., COUTINHO, A. L. G. A. “Cálculo de la función distancia para el método Level Set usando la formulaciónn estabilizada US-FEM/Rothe”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2013.
- [17] HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. DoverPublications, 2012.
- [18] COUTINHO, A., ALVES, J. “Parallel Finite Element Simulation of Miscible Displacements in Porous Media”, *SPE Journal*, v. 1, n. 4, pp. 487–500, 1996.
- [19] JONES, M. W., BAERENTZEN, J. A., SRAMEK, M. “3D distance fields: A survey of techniques and applications”, *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, v. 12, n. 4, pp. 581–599, 2006.
- [20] RODRIGUES, D. M. C. *Snakes Implícitas-Aplicação a Imagens Obtidas por Ultra-sonografia*. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2008.

- [21] SPALDING, D. “Calculation of turbulent heat transfer in cluttered spaces”. In: *Proceedings of the 10th international heat transfer conference, Brighton*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [22] SETHIAN, J. A. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, v. 3. Cambridge university press, 1999.
- [23] LAUNDER, B., REECE, G. J., RODI, W. “Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 68, n. 03, pp. 537–566, 1975.
- [24] TUCKER, P., LIU, Y. “Turbulence modeling for flows around convex features giving rapid eddy distortion”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 28, n. 5, pp. 1073–1091, 2007.
- [25] OSHER, S., FEDKIW, R. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, v. 153. Springer, 2003.
- [26] SHIN, J. *Mesh generation with a signed distance function*. Tese de Doutorado, KOREA UNIVERSITY, 2011.
- [27] BROOKS, A. N., HUGHES, T. J. “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 32, n. 1, pp. 199–259, 1982.
- [28] CODINA, R. “On stabilized finite element methods for linear systems of convection–diffusion–reaction equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 188, n. 1, pp. 61–82, 2000.
- [29] GALEÃO, A. C., DUTRA DO CARMO, E. G. “A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 68, n. 1, pp. 83–95, 1988.
- [30] WERNER, S., CATABRIGA, L., SANTOS, I. “Método de Estabilização Submalha Difusão Dinâmica Aplicado na Simulação de escoamento Miscível”, *Mecânica Computacional*, v. 29, pp. 4039–4053, 2010.
- [31] COUTINHO, A., DIAS, C., ALVES, J., et al. “Stabilized methods and post-processing techniques for miscible displacements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 15, pp. 1421–1436, 2004.

- [32] TUCKER, P. G. “WALL DISTANCE APPROXIMATION”. set. 8 2012. WO Patent 2,012,116,872.
- [33] NOBRE, R. H. *Paralelismo como Solução para Redução de Complexidade de Problemas Combinatoriais*. Dissertação de mestrado, Instituto Federal de Educação, Mestrado Profissionalizante em Computação Aplicada, Ceará, Brasil, 2011.