



**COPPE/UFRJ**

IMAGEAMENTO POR TOMOGRAFIA SÍSMICA DE DIFRAÇÃO APLICADA AO  
MAPEAMENTO DE ESTRUTURAS GEOLÓGICAS

Raul Flores da Fonseca

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Webe João Mansur

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2010

IMAGEAMENTO POR TOMOGRAFIA SÍSMICA DE DIFRAÇÃO APLICADA AO  
MAPEAMENTO DE ESTRUTURAS GEOLÓGICAS

Raul Flores da Fonseca

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

---

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.

---

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

---

Prof. Marco Aurélio Chaves Ferro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2010

Fonseca, Raul Flores da

Imageamento por Tomografia Sísmica de Difração Aplicada ao Mapeamento de Estruturas Geológicas / Raul Flores da Fonseca. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XII, 78 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Webe João Mansur

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2010.

Referencias Bibliográficas: p.61.

1. Tomografia de Difração. 2. Lippmann-Schwinger. 3. Transformada de Fourier. I. Mansur, Webe João. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

## AGRADECIMENTOS

A parte dos agradecimentos traz um grande prazer em ser escrita. Com ela surgem todas as pessoas que contribuíram de forma proveitosa ao meu trabalho, assim como nas outras tarefas que desempenhei por todo o período do curso. É difícil organizar a sequência de apresentação das personalidades de quem tanto gostaria de agradecer. Por isso, o melhor critério que achei foi o cronológico.

Então, inicio os agradecimentos revelando todo o apoio recebido por meus familiares, principalmente os mais próximos. Tudo que fazemos apresenta a nossa marca pessoal, que é influenciada por todo o contexto social que nos inserimos. Como a maior parte de meu relacionamento social ocorre com a minha família, admito que, implicitamente nas linhas de meu trabalho, existem traços de cada um deles.

Dentro do contexto da COPPE/UFRJ, apresento meus agradecimentos ao meu orientador, Prof. Webe João Mansur, pelos ensinamentos, dicas e compreensão demonstrados por ele durante todo o curso. Mas ressalto, sobretudo, a confiança depositada em mim, pois a mesma foi indispensável à finalização desse trabalho acadêmico. Lembro também de agradecer ao Prof. Marco Aurélio Chaves Ferro, pois além de ter feito parte da banca examinadora, me propôs a candidatura a este curso enquanto eu ainda cursava a graduação.

Continuo os agradecimentos saudando o Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia. Sou muito grato pelos ensinamentos recebidos durante suas aulas e nossas conversas, e por ter aceito o convite de participação na banca examinadora. Na sequência, agradeço ao Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo pela participação na banca examinadora, como também pelos momentos de diálogo pelos corredores do Programa.

Neste último parágrafo tenho o prazer de agradecer ao Secretariado do Programa, especialmente à Sra. Ivone Silva de Araújo. Tenho um grande apreço, nunca me esquecendo das questões administrativas de que ela sempre me salvou. E assim termino, lembrando de Ana Paula Vieira, João Paulo Lima Santos, Michelle de Oliveira Alves, Rodrigo Silveira Camargo e Wellington Luís Assis Pereira, meus amigos de turma, laboratório, projetos e estudos. Figuram estes por último devido à ordem cronológica, mas preciso ressaltar que são e foram as melhores e maiores companhias durante todos esses dois anos de curso.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## IMAGEAMENTO POR TOMOGRAFIA SÍSMICA DE DIFRAÇÃO APLICADA AO MAPEAMENTO DE ESTRUTURAS GEOLÓGICAS

Raul Flores da Fonseca

Fevereiro/2010

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta os fundamentos teóricos e o desenvolvimento prático de um programa capaz de gerar uma imagem através de tomografia por difração, quando esta é baseada no teorema generalizado da projeção de fatias. A difração do meio é modelada através da equação de Lippmann-Schwinger aproximada (por Born ou Rytov) e a dedução matemática é adaptada do domínio contínuo para o domínio discreto, através da transformada discreta de Fourier. São apresentados exemplos simulados computacionalmente, contemplando três configurações conhecidas na indústria do petróleo: entre poços (cross well), sísmica vertical (vertical seismic profile) e reflexão na superfície (surface reflection). O trabalho finaliza com a crítica sobre os exemplos testados, e conclusões acerca de possíveis problemas durante a aplicação prática desse tipo de tomografia, na visualização de estruturas geológicas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

IMAGING BY SEISMIC DIFFRACTION TOMOGRAPHY APPLIED TO  
GEOLOGICAL STRUCTURES MAPPING

Raul Flores da Fonseca

February/2010

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work presents the theoretical fundamentals and practical development of a computational routine, able to image a medium through diffraction tomography, when it's based on the generalized projection slice theorem. The diffraction field of the media is modeled with the Lippman-Schwinger equation, with Born or Rytov approximations, and the mathematical deduction is adapted from the continuous domain to the discrete one using the discrete Fourier transform. Examples are shown and simulated numerically, for three configurations, well-known by the petroleum industry: cross well configuration (cwc), vertical seismic profile (vsp) and surface reflection configuration (src). The work ends reviewing all the sampled examples, and conclusions about possible failures when using that kind of tomography in order to map geological structures.

## SUMARIO

Lista de figuras .....	viii
Lista de tabelas .....	ix
Lista de símbolos .....	x
1. Introdução e desenvolvimento .....	1
1.1. Conceito de tomografia.....	2
1.2. Transformada de Fourier e função impulso .....	4
1.3. Dedução da equação de Lippmann-Schwinger.....	9
2. Estruturação do código fonte .....	14
2.1. Configuração entre poços .....	15
2.1.1. Simulador .....	20
2.1.2. Implementação computacional.....	24
2.2. Configuração vertical.....	27
2.2.1. Simulador .....	30
2.2.2. Implementação computacional.....	31
2.3. Configuração por reflexão .....	32
2.3.1. Simulador .....	35
2.3.2. Implementação computacional.....	36
3. Resultados das simulações .....	37
4. Conclusões e observações .....	47
4.1. Sugestões de trabalhos futuros.....	59
5. Bibliografia .....	61
Apêndice A – Aproximação de Born .....	62
Apêndice B – Aproximação de Rytov .....	64
Apêndice C – Tomografia por raio.....	69

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tomografia computadorizada (CT) obtida em [2] .....	2
Figura 2 – Composição usual de um joelho analisado em 3D .....	2
Figura 3 – Tomografia computadorizada de um esquife selado obtida em [3] .....	3
Figura 4 – Propagação do campo incidente e difratado pelo meio.....	10
Figura 5 – Esquema da configuração entre poços (cwc) .....	15
Figura 6 – Esquema físico da configuração entre poços .....	16
Figura 7 – Exemplo de simulação da configuração entre poços .....	21
Figura 8 – Superposição da resposta .....	26
Figura 9 – Esquema da configuração vertical (vsp) .....	27
Figura 10 – Esquema físico da configuração vertical.....	28
Figura 11 – Exemplo de simulação da configuração vertical.....	31
Figura 12 – Esquema da configuração por reflexão (src).....	32
Figura 13 – Esquema físico da configuração por reflexão .....	32
Figura 14 – Exemplo de simulação da configuração de reflexão.....	35
Figura 15 – Característica do primeiro meio estudado.....	37
Figura 16 – Característica do segundo meio estudado .....	38
Figura 17 – Característica do terceiro meio estudado .....	38
Figura 18 – Característica do quarto meio estudado .....	38
Figura 19 – Exemplo de posicionamento das fontes e receptores (cwc).....	39
Figura 20 – Esquema de aquisição de dados .....	69
Figura 21 – Recomposição do meio estudado .....	71

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tomografia por difração, Born, entre poços.....	40
Tabela 2 – Tomografia por difração, Rytov, configuração entre poços .....	41
Tabela 3 – Tomografia por difração, Born, configuração vertical .....	42
Tabela 4 – Tomografia por difração, Rytov, configuração vertical .....	43
Tabela 5 – Tomografia por difração, Born, configuração de reflexão na superfície.....	44
Tabela 6 – Tomografia por difração, Rytov, configuração de reflexão na superfície....	45
Tabela 7 – Informação resultante da configuração entre poços .....	53
Tabela 8 – Informação resultante da configuração vertical.....	54
Tabela 9 – Informação resultante da configuração de reflexão.....	55
Tabela 10 – Ensaios por raio com imagem 5x5.....	74
Tabela 11 – Ensaios por raio com imagem 10x10.....	75
Tabela 12 – Ensaios por raio com imagem 20x20.....	76
Tabela 13 – Ensaios por raio com imagem 40x40.....	77
Tabela 14 – Ensaios por raio com imagem 100x100.....	78

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $c_0$  Velocidade de referência de propagação da onda
- $c$  Velocidade de propagação da onda, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$
- $d_{ef}$  Distância entre fontes consecutivas
- $d_{er}$  Distância entre receptores consecutivos
- $d_f$  Distância comum do conjunto de fontes, referentes ao eixo  $\hat{i}$  ou eixo  $\hat{k}$
- $d_r$  Distância comum do conjunto de receptores, referentes ao eixo  $\hat{i}$  ou eixo  $\hat{k}$
- $\mathcal{D}$  Operador linear
- $\mathcal{F}_t$  Transformada de Fourier temporal
- $\mathcal{F}_\omega^{-1}$  Transformada de Fourier temporal inversa
- $\mathcal{F}_x$  Transformada de Fourier espacial
- $\mathcal{F}_k^{-1}$  Transformada de Fourier espacial inversa
- $\mathcal{F}_{t_n}$  Transformada discreta de Fourier temporal (DFT)
- $\mathcal{F}_{\omega_m}^{-1}$  Transformada discreta de Fourier temporal inversa (IDFT)
- $\mathcal{F}_{x_n}$  Transformada discreta de Fourier espacial (DFT)
- $\mathcal{F}_{k_m}^{-1}$  Transformada discreta de Fourier espacial inversa (IDFT)
- $\mathcal{F}_{x,z}$  Transformada de Fourier espacial 2D
- $\mathcal{F}_{k_x,k_z}^{-1}$  Transformada de Fourier espacial inversa 2D
- $\mathcal{F}_{x_n,z_m}$  Transformada discreta de Fourier espacial 2D (DFT2D)
- $\mathcal{F}_{k_{x_l},k_{z_j}}^{-1}$  Transformada discreta de Fourier espacial inversa 2D (IDFT2D)
- $\mathcal{G}$  Função de Green, ou resposta do meio à função impulso
- $\mathcal{H}_0^{(1)}$  Função de Hankel de ordem-zero do primeiro tipo
- $i$  Unidade imaginária =  $\sqrt[2]{-1}$
- $k_0$  Frequência espacial de referência ou número de onda de referência, dependente da frequência angular  $\omega$
- $k_1$  Módulo da componente vertical do vetor  $\mathbf{k}_0$
- $k_{n_f}, \gamma_{n_f}$  Frequência espacial, ou número de onda, correspondente à posição física  $r_{n_f}$  da fonte  $n_f$
- $k_{n_r}, \gamma_{n_r}$  Frequência espacial, ou número de onda, correspondente à posição física  $r_{n_r}$  do receptor  $n_r$

- $k$  Frequência espacial ou número de onda, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $\mathcal{L}$  Operador diferencial linear
- $\tilde{M}$  Função do modelo, dependente das coordenadas  $k_x, k_z$
- $M$  Função do modelo, dependente das coordenadas cartesianas  $x, z$
- $N_f$  Número total de elementos do conjunto  $f$
- $n_f$  Um número do conjunto  $f$ , que contém  $N_f$  elementos
- $\tilde{p}$  Pressão total da onda acústica, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $p$  Pressão total da onda acústica, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e do tempo  $t$
- $\tilde{p}_B^{(n)}$  Campo de Born de ordem  $n$
- $\tilde{\tilde{p}}_d$  Pressão da onda acústica difratada, dependente das coordenadas  $k_{n_f}, k_{n_r}$  e da frequência angular  $\omega$
- $\tilde{p}_d$  Pressão da onda acústica difratada, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $\tilde{p}_{dg}$  Pressão da onda acústica difratada gravada, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $p_{dg}$  Pressão da onda acústica difratada gravada, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e do tempo  $t$
- $\tilde{p}_f$  Pressão da onda acústica aplicada pela fonte, dependente da fonte  $n_f$  e da frequência angular  $\omega$
- $p_f$  Pressão da onda acústica aplicada pela fonte, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e do tempo  $t$
- $\tilde{p}_i$  Pressão da onda acústica incidente, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $r_{n_f}$  Posição física da fonte  $n_f$ , dependente das coordenadas cartesianas  $x, z$
- $r_{n_r}$  Posição física do receptor  $n_r$ , dependente das coordenadas cartesianas  $x, z$
- $\mathbf{r}$  Vetor posição  $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$
- $t$  Tempo
- $x_{n_f}$  Posição horizontal física da fonte  $n_f$
- $x_{n_r}$  Posição horizontal física do receptor  $n_r$

- $x, y, z$  Coordenadas cartesianas
- $\Delta z$  Altura do elemento da simulação
- $\Delta x$  Largura do elemento da simulação
- $\delta$  Função Delta de Dirac, ou função impulso
- $\varphi_d$  Função de diferença complexa de fase, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $\varphi_i$  Função incidente complexa de fase, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $\varphi_t$  Função total complexa de fase, dependente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  e da frequência angular  $\omega$
- $z_{n_f}$  Posição vertical física da fonte  $n_f$
- $z_{n_r}$  Posição vertical física do receptor  $n_r$
- $\gamma_1$  Módulo da componente horizontal do vetor  $\mathbf{k}_0$
- $\nabla^2$  Laplaciano =  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- $\omega$  Frequência angular ou circular

## 1. INTRODUÇÃO E DESENVOLVIMENTO

A parte inicial da dissertação apresenta os recursos teóricos, necessários para atender aos objetivos propostos no plano de estudo de mestrado. Aqui se faz a introdução dos conceitos e equações utilizadas por todo texto, de forma a minimizar o número de referências externas nos capítulos seguintes. Os sub-itens tratados no capítulo foram cuidadosamente escolhidos e se verá, ao longo da leitura, que existe uma forte conexão entre cada um deles. Informações adicionais, mas não essenciais, estão dispostas como anexos ao final do texto, assim como, de acordo com a brevidade do assunto, apresentados como notas de rodapé.

Adiante, neste capítulo, estão descritos tópicos sobre o conceito de tomografia, com o intuito de iniciar a leitura, trazendo a motivação e a filosofia por trás de uma aplicação tomográfica<sup>1</sup>. Em seguida, estão equações e propriedades da transformada de Fourier, que são a base do desenvolvimento matemático da tomografia apresentada, e a aplicação da identidade de Green, necessária para a solução diferencial do problema. Por último, é deduzida a equação de Lippmann-Schwinger, extremamente necessária, pois com ela se deduzem as equações que permitem o imageamento tomográfico.

Com o propósito de inserir um aspecto prático ao trabalho, os capítulos restantes apresentam aplicações simuladas da tomografia de difração, com exemplos fictícios. Após a dedução teórica das equações de mapeamento, cada tipo de configuração é testada, com um conjunto específico de meios, onde cada um representa um tipo de estrutura geológica. Esta abordagem se faz necessária, com o objetivo de tentar avaliar, de forma bem generalizada, as possíveis orientações de estratos de um meio geológico.

Com as observações e sugestões de estudos futuros, o trabalho se encerra, inferindo alguns aspectos da qualidade das imagens obtidas. No caso do presente trabalho, considerando todos os aspectos metodológicos dos ensaios, sugere-se que é preciso um palpite inicial para se garantir bons resultados com a aplicação dessa técnica. Não obstante, seus resultados podem ser considerados de valor acessório e complementar, na confirmação de investigações geológicas analisadas por outros métodos de visualização.

---

<sup>1</sup> A tomografia médica é o que há de mais popular entre as aplicações da tomografia. Tais exames baseiam-se na tomografia por raio, que pode ser vista no apêndice C, e KAK *et al.* [1] afirmam que tal tomografia é um caso particular do tipo de tomografia a ser apresentada neste trabalho.

## 1.1. Conceito de tomografia

A tomografia é um processo de imageamento muito utilizado na medicina<sup>1</sup>, como ilustrado pela Figura 1, porém seu conceito é levado a aplicações em outras atividades. Dentro do tema da dissertação, seu enfoque será dado na área de Geofísica, mas aplicações podem ser encontradas na Astrofísica, Arqueologia, Biologia, Oceanografia e nas Ciências dos Materiais. É importante frisar nesse momento que, para cada tipo de meio físico a ser estudado, existe o processo tomográfico<sup>2</sup> correspondente, capaz de apresentar os melhores resultados possíveis.

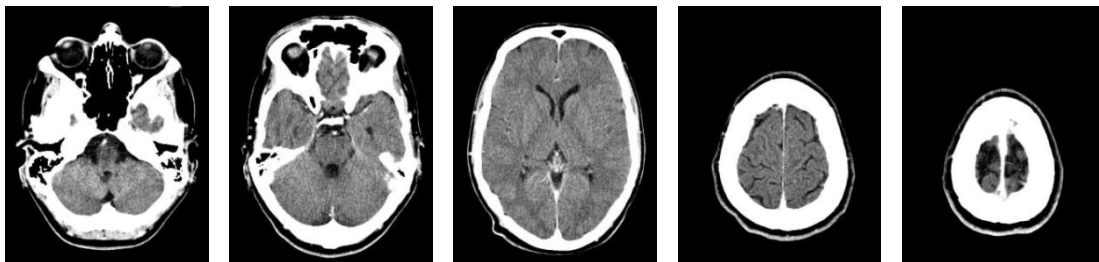


Figura 1 – Tomografia computadorizada (CT) obtida em [2]

A idéia básica de uma tomografia é a determinação de características desconhecidas de um meio, através do estudo de sua resposta, quando o mesmo é perturbado por algum tipo de energia com intensidade conhecida. Revendo também o significado dos dois elementos que formam a palavra, o processo pode ser considerado como o reconhecimento das propriedades de pequenos pedaços. O mais usual é que esses pedaços juntos formem uma imagem plana, representando as características de uma seção do elemento estudado, como mostrado pela Figura 2, mas nada impede, matematicamente, que uma estrutura tridimensional<sup>3</sup> possa ser recuperada também.

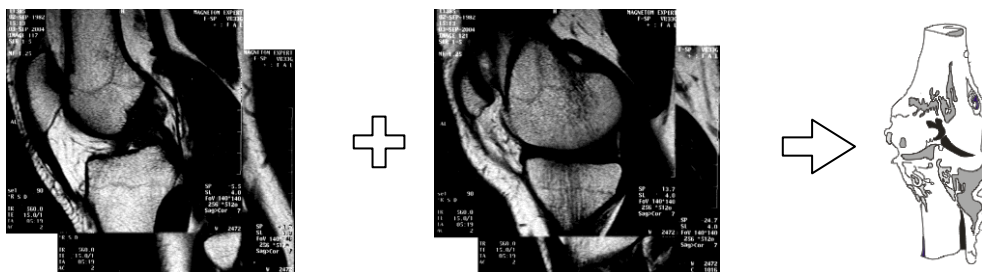


Figura 2 – Composição usual de um joelho analisado em 3D

<sup>1</sup> A tomografia usada na medicina é conhecida como tomografia computadorizada (CT).

<sup>2</sup> KAK *et al.* [1] apresentam três tipos de tomografia: raio, difração e reflexão.

<sup>3</sup> Normalmente, estruturas tridimensionais são formadas através da composição de uma sucessão de fatias bidimensionais, alinhando-as paralelamente.

É esperado que a energia se propague pelo meio de forma a não comprometê-lo. Também é usual que haja um conjunto de receptores, fontes e o modelo a ser conhecido. De acordo com o tipo de energia<sup>1</sup> escolhida a se propagar pelo meio, relaciona-se uma equação que governará o fenômeno, o que acarreta considerações particulares às fontes e aos receptores, como suas disposições espaciais. A grande vantagem da tomografia reside em sua aplicação, de fora do meio, isto é, de maneira não invasiva. Assim, podem-se obter informações de objetos, ou regiões, inseridos em meios adversos, inacessíveis, delicados ou mesmo valiosos, como visto na figura abaixo:



*Oriental Institute, University of Chicago*©

Figura 3 – Tomografia computadorizada de um esquiife selado obtida em [3]

Por hora, o enfoque tomográfico será dado à identificação de estruturas geológicas. A disposição física possível dos receptores e fontes sugere a utilização da tomografia por difração. Seria muito difícil aplicar a tomografia por raio em tais estruturas, devido à disposição que essa forma requer<sup>2</sup>. Em se tratando da capacidade de visualização, KAK *et al.* [1] desaconselham a utilização da tomografia de raio quando as dimensões das não-homogeneidades passam a ser comparáveis ao comprimento de onda aplicado. Por outro lado, TIEN-WHEN *et al.* [4] prevêm aplicações da tomografia de raio em alguns casos de investigações geológicas.

Divergências à parte, ambos confirmam a dependência entre as dimensões das não-homogeneidades, o contraste de propriedades do meio, e o comprimento de onda utilizado no imageamento. Nenhum deles apresenta uma relação numérica entre fatores, restando apenas suposições de superioridade e inferioridade. Enfim, a aplicação em geofísica desse tipo de tomografia está mais evidente por disposições físicas e geométricas, que não podem ser aceitas para o caso da tomografia por raio.

---

<sup>1</sup> A tomografia médica utiliza Raios-X e a equação de propagação despreza efeitos de difração. O resultado é o mapeamento da atenuação da intensidade do feixe de onda por todo corpo analisado.

<sup>2</sup> Tal forma pode ser vista no exemplo do apêndice C.

## 1.2. Transformada de Fourier e função impulso

Os itens tratados aqui são de grande importância na matemática, principalmente nas áreas que trabalham diretamente com equações diferenciais. Em se tratando da transformada de Fourier, há em [1] um capítulo especial, apenas para abordar considerações sobre processamento de sinal. No entanto, estão dispostas aqui apenas as equações utilizadas nos itens seguintes. TIEN-WHEN *et al.* [4] apresentam a transformada de Fourier com a equação abaixo:

$$\mathcal{F}_t[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \tilde{f}(\omega) \quad (1.1)$$

Associada à essa transformada, existe sua forma inversa:

$$\mathcal{F}_\omega^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = f(t) \quad (1.2)$$

A transformada discreta de Fourier temporal (DFT) é uma forma muito útil computacionalmente. Essa equação foi utilizada por todo esse trabalho, e pode ser conhecida da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_{t_j}[f(t_j)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)} = \tilde{f}(\omega_m) \quad (1.3)$$

que apresenta sua inversa como:

$$\mathcal{F}_{\omega_j}^{-1}[\tilde{f}(\omega_j)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega_m) e^{i\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)} = f(t_n) \quad (1.4)$$

Por uma questão apenas de nome, as equações acima são ditas transformadas temporais: muda-se o domínio da função do tempo para o domínio da frequência angular. A equação abaixo já se chama de transformada espacial, pois leva do domínio do espaço para o domínio da frequência espacial. De forma elementar, não existe diferença matemática alguma entre essas duas funções, apenas se diferencia para não causar más interpretações físicas.

$$\mathcal{F}_x[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx = \tilde{f}(k) \quad (1.5)$$

$$\mathcal{F}_k^{-1}[\tilde{f}(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) \cdot e^{ikx} dk = f(x) \quad (1.6)$$

$$\mathcal{F}_{x_j}[f(x_j)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) e^{-i\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)} = \tilde{f}(k_m) \quad (1.7)$$

$$\mathcal{F}_{k_j}^{-1}[\tilde{f}(k_j)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(k_m) e^{i\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)} = f(x_n) \quad (1.8)$$

Como se pode ver, a transformada de Fourier é uma transformação linear, e não necessariamente unidimensional. Será utilizada mais a frente a transformada de Fourier espacial 2D, que é desenvolvida a seguir:

$$\mathcal{F}_x[f(x, z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) \cdot e^{-ik_x x} dx = \tilde{f}(k_x, z)$$

$$\mathcal{F}_z[\tilde{f}(k_x, z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, z) \cdot e^{-ik_z z} dz = \tilde{f}(k_x, k_z)$$

$$\mathcal{F}_z[\mathcal{F}_x[f(x, z)]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) \cdot e^{-ik_x x} dx \cdot e^{-ik_z z} dz = \tilde{f}(k_x, k_z)$$

$$\mathcal{F}_{x,z}[f(x, z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) \cdot e^{-i[k_x x + k_z z]} dx dz = \tilde{f}(k_x, k_z) \quad (1.9)$$

Considerando agora, sua forma inversa:

$$\mathcal{F}_{k_x}^{-1}[\tilde{f}(k_x, k_z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_z) \cdot e^{ik_x x} dk_x = \tilde{f}(x, k_z)$$

$$\mathcal{F}_{k_z}^{-1}[\tilde{f}(x, k_z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x, k_z) \cdot e^{ik_z z} dk_z = f(x, z)$$

$$\mathcal{F}_{k_z}^{-1}[\mathcal{F}_{k_x}^{-1}[\tilde{f}(k_x, k_z)]] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_z) \cdot e^{ik_x x} dk_x \cdot e^{ik_z z} dk_z$$

$$\mathcal{F}_{k_x, k_z}^{-1}[\tilde{f}(k_x, k_z)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_z) \cdot e^{i[k_x x + k_z z]} dk_x dk_z \quad (1.10)$$

A transformada de Fourier 2D também possui a forma discreta:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x_a, z_s}[f(x_a, z_s)] &= \frac{1}{N_n N_m} \sum_{n=0}^{N_n-1} \sum_{m=0}^{N_m-1} f(x_n, z_m) e^{-2\pi i \left(\frac{nl}{N_n} + \frac{mj}{N_m}\right)} \\ &= \tilde{f}(k_{x_l}, k_{z_j})\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$\mathcal{F}_{k_{x_l}, k_{z_s}}^{-1}[\tilde{f}(k_{x_l}, k_{z_s})] = \sum_{l=0}^{N_l-1} \sum_{j=0}^{N_j-1} \tilde{f}(k_{x_l}, k_{z_j}) e^{2\pi i \left(\frac{nl}{N_n} + \frac{mj}{N_m}\right)} = f(x_n, z_m) \quad (1.12)$$

Uma importante propriedade da transformada de Fourier trata sobre sua derivada. Resgatando (1.2):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}_\omega^{-1}[\tilde{f}(\omega)] \quad (1.2)$$

$$\frac{d[f(t)]}{dt} = \frac{d\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega\right]}{dt}$$

$$\frac{d[f(t)]}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \frac{d[e^{i\omega t}]}{dt} d\omega$$

$$\frac{d[f(t)]}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \cdot \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}_\omega^{-1}[i\omega \cdot \tilde{f}(\omega)]$$

Aplicando a derivada mais uma vez<sup>1</sup>:

$$\frac{d^2[f(t)]}{dt^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \cdot \tilde{f}(\omega) \cdot \frac{d[e^{i\omega t}]}{dt} d\omega$$

$$\frac{d^2[f(t)]}{dt^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^2 \cdot \tilde{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}_\omega^{-1}[-\omega^2 \cdot \tilde{f}(\omega)]$$

com a transformada de Fourier nos dois lados da igualdade:

$$\mathcal{F}_t \left[ \frac{d^2[f(t)]}{dt^2} \right] = \mathcal{F}_t \left[ \mathcal{F}_\omega^{-1}[-\omega^2 \cdot \tilde{f}(\omega)] \right]$$

$$\mathcal{F}_t \left[ \frac{d^2[f(t)]}{dt^2} \right] = -\omega^2 \cdot \tilde{f}(\omega) \quad (1.13)$$

---

<sup>1</sup> A dedução se restringiu apenas à segunda derivada da equação, mas TIEN-WHEN *et al.* [4] apresentam uma forma recursiva genérica, para qualquer ordem de derivação.

O outro assunto deste sub-item gira em torno da função impulso. Essa função é conhecida como Delta de Dirac, representada pela letra grega  $\delta$ . A mesma possui a propriedade de deslocar uma função  $f(\mathbf{x})$  genérica, da seguinte maneira:

$$f(\mathbf{a}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d\mathbf{x} \quad (1.14)$$

desde que  $\mathbf{a} \in \Omega$ . Curiosamente, aplicando a transformada de Fourier (1.5) sobre a função impulso, surge a seguinte relação:

$$\mathcal{F}_x[\delta(x - a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) \cdot e^{-ikx} dx = e^{-ika} \quad (1.15)$$

e aplicando a transformada inversa:

$$\mathcal{F}_k^{-1}[\mathcal{F}_x[\delta(x - a)]] = \mathcal{F}_k^{-1}[e^{-ika}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ika} \cdot e^{ikx} dk \quad (1.16)$$

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-a)} dk \quad (1.17)$$

A função de Green usada em ASTER *et al.* [5], que representa a resposta de um sistema quando lhe é aplicado o Delta de Dirac, pode ser definida como:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathcal{D}[\mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{a}')] \quad (1.18)$$

onde o operador  $\mathcal{D}$  é um operador linear e  $\mathbf{a}$  uma posição do domínio.

Agora será mostrado como as relações (1.18) e (1.14) são imprescindíveis à solução de problemas lineares, que surgirão mais a frente. Formulando um problema com a seguinte estrutura, onde um operador diferencial linear  $\mathcal{L}$ , operando apenas sobre a variável  $\mathbf{x}$ , é aplicado da seguinte forma:

$$\mathcal{L}[f(\mathbf{x})] = h(\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

Para esse operador, a função de Green possui a seguinte característica:

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}')] = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.20)$$

Multiplicando a equação acima, dos dois lados, pela função  $h(\mathbf{x}')$ :

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}')] = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') \quad (1.21)$$

Como o operador é linear, e se aplica apenas sobre a variável  $\mathbf{x}$ :

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}')] = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') \quad (1.22)$$

Aplicando uma integral apenas sobre a variável  $\mathbf{x}'$  por todo o domínio:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}[\mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' &= - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ \mathcal{L} \left[ \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] &= - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1.23)$$

Pela equação (1.14):

$$\mathcal{L} \left[ \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] = -h(\mathbf{x}) \quad (1.24)$$

Comparando as equações (1.24) e (1.19), chega-se à seguinte conclusão:

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}') \cdot h(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}' \quad (1.25)$$

Essa equação é muito útil na solução de problemas lineares. Quando é desconhecida a função  $f(\mathbf{x})$ , mas informada a função  $h(\mathbf{x})$ , através da identidade de Green, pode-se solucionar o problema estudado. No caso dessa dissertação, o operador diferencial linear aplica-se espacialmente, apenas em duas variáveis, estudando-se imagens planas. Nada impede a utilização de funções de Green que atendam ao mesmo operador, porém com mais variáveis a serem estudadas<sup>1</sup>. Esse tipo de observação é retratada por TIEN-WHEN *et al.* [4], quando se apresentam funções de Green capazes de atender a um mesmo operador diferencial, porém cada um deles se aplica a duas e a três dimensões.

---

<sup>1</sup> Estudos em 3D, por exemplo.

### 1.3. Dedução da equação de Lippmann-Schwinger

A dedução matemática da tomografia por difração inicia-se com a equação da onda, pois é através da mesma que se estuda a propagação de energia difratada. No momento, trata-se da onda acústica, mas KAK *et al.* [1] afirmam que esse tipo de tomografia pode ser aplicado com ondas eletromagnéticas<sup>1</sup>. Combinando as equações de continuidade, propriedades elásticas e equilíbrio de forças em fluidos, e simplificações como pequenas variações de densidade, condensação, deslocamentos e velocidade das partículas que compõem o meio, KINSLER *et al.* [6] apresentam a seguinte equação para a onda acústica 3D:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 p \quad (1.26)$$

Arrumando a equação de acordo com TIEN-WHEN *et al.* [4], e explicitando melhor as variáveis da equação:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \cdot \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.27)$$

Aplicando a transformada de Fourier (1.1) na equação acima, deduz-se a equação de Helmholtz, que é a equação da onda no domínio da frequência:

$$\nabla^2 \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) + k^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (1.28)$$

A EDP<sup>2</sup> acima participa usualmente de um sistema de equações diferenciais para se resolver um problema, como descrito a seguir. Conhecendo a função  $k^2(\mathbf{r}, \omega)$ , assim como as condições iniciais e de contorno, é possível descobrir a pressão  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$ . Essa solução existe, e se consegue ter conhecimento da função  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$ , de forma aproximada ou mesmo analítica. A tomografia por difração propõe que se determine  $k^2(\mathbf{r}, \omega)$ , através do conhecimento das condições iniciais e de contorno, e da função  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$ . O que dificulta a solução desse problema é a impossibilidade de conhecer  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$  dentro do meio estudado. É interessante perceber que os dois problemas apresentados são resolvidos com ferramentas baseadas na transformada de Fourier.

---

<sup>1</sup> KAK *et al.* [1] afirmam que ainda não há estudos sobre tomografia por difração vetorial. Por tanto, é considerada apenas a equação escalar da onda.

<sup>2</sup> Equação diferencial parcial.

O próximo passo tem o intuito de manipular a equação (1.28), para se identificar mudanças de velocidade de propagação no meio estudado. KAK *et al.* [1] e TIEN-WHEN *et al.* [4] reproduzem o raciocínio de Lippmann e Schwinger alterando a função  $k^2(\mathbf{r}, \omega)$ , atrelando-a a uma velocidade de referência<sup>1</sup>. O mecanismo sugere que por todo o meio se propaguem ondas incidentes, com essa velocidade de referência, para todas as frequências estudadas. Essa propagação ocorrerá de forma homogênea e bem conhecida, mas ao encontro de qualquer diferença de velocidade de propagação, a onda difratará. O mecanismo por hora apresentado pode ser observado pela Figura 4. Em suma, pelo meio existirão dois campos de onda se propagando, o incidente e o difratado:

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.29)$$

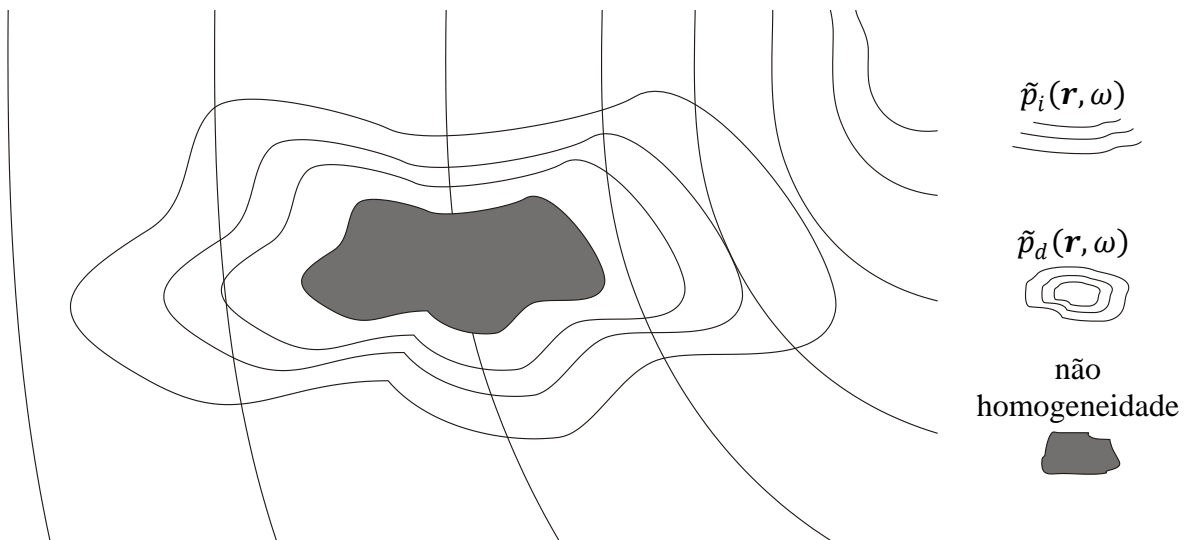


Figura 4 – Propagação do campo incidente e difratado pelo meio<sup>2</sup>

Uma vez que se arbitre uma velocidade de referência  $c_0$ :

$$k_0(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \quad (1.30)$$

Considerando a seguinte manipulação de  $k^2(\mathbf{r}, \omega)$ :

<sup>1</sup> Tome nota: a velocidade de referência é única para cada ensaio tomográfico. É uma constante, independente, e deve ser bem estimada, pois a qualidade da tomografia depende de seu valor adotado. Uma boa técnica preconiza que a velocidade de referência escolhida deva ser maior que as possíveis velocidades de propagação encontradas no meio estudado.

<sup>2</sup> O desenho e a equação (1.29) são válidos tanto no domínio do tempo como no da frequência. Não se esquecer que a transformada de Fourier é uma transformação linear.

$$\begin{aligned}
k^2(\mathbf{r}, \omega) &= k^2(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) = k_0^2(\omega) - [k_0^2(\omega) - k^2(\mathbf{r}, \omega)] \\
k^2(\mathbf{r}, \omega) &= k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \left[ 1 - \frac{k^2(\mathbf{r}, \omega)}{k_0^2(\omega)} \right] = k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right] \\
k^2(\mathbf{r}, \omega) &= k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \left[ 1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right] \tag{1.31}
\end{aligned}$$

Definindo a função do modelo  $M(\mathbf{r})$ , e substituindo em (1.31):

$$M(\mathbf{r}) = \left[ 1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right] \tag{1.32}$$

$$k^2(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) \tag{1.33}$$

Retornando à equação (1.28) de Helmholtz, agrupando  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$ :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) + k^2(\mathbf{r}, \omega) \cdot \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\
[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r}, \omega)] \cdot \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Substituindo em (1.34) as equações (1.33) e (1.29):

$$\begin{aligned}
[\nabla^2 + k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})] \cdot [\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)] &= 0 \\
[\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \\
= k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) [\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)] & \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Analisando a equação, conclui-se que o lado direito da igualdade representa as fontes de difração do meio. Se acaso não ocorrer diferença de velocidade de propagação,  $c(\mathbf{r}) = c_0$ , todo esse lado da igualdade é zero, pois  $M(\mathbf{r}) = 0$ . Como pode ser visto, o campo de onda incidente e o difratado são responsáveis por gerar toda a energia difratada pelo meio<sup>1</sup>.

No lado esquerdo estão representadas as propagações das ondas incidente e difratada pelo meio homogêneo. A componente  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega)$  é o campo sem as variações de velocidade de propagação. Dessa forma, o campo incidente também é solução da

---

<sup>1</sup> Ocorre na formulação uma retroalimentação: o próprio campo difratado também sofre difração.

equação (1.34). Por isso a parcela  $[\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega)$  é nula<sup>1</sup>. Com essa afirmação, a equação (1.35) recebe a seguinte simplificação:

$$[\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})[\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)] \quad (1.36)$$

A essa altura, o campo de propagação difratado está equacionado de forma diferencial. A solução pode ser definida através da aplicação de um Delta de Dirac sobre o operador diferencial. No caso da equação (1.36), o Delta está aplicado na posição  $\mathbf{r}'$ . Considerando  $[\nabla^2 + k_0^2(\omega)]$  um operador linear e a resposta da equação (1.25):

$$\begin{aligned} [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) &= - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}')[\tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}', \omega)] \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.37)$$

A fórmula acima é conhecida por equação de Lippmann-Schwinger, e através dela se conhece o campo de onda difratado gerado por um meio não-homogêneo. A função de Green  $\mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}')$ , na integral, transfere a amplitude e a fase de  $k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}')[\tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}', \omega)]$ , em cada parte do volume  $d\mathbf{r}'$  para o ponto  $\mathbf{r}$ . De acordo com TIEN-WHEN *et al.* [4], a função de Green 2D, para o caso da equação (1.37), possui as seguintes formas<sup>2</sup>:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') = \frac{i}{4} \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega) \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (1.38)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (r_z - r'_z) + \gamma_1 \cdot |r_x - r'_x|]} dk_1 \quad (1.39)$$

onde:

$$k_0^2 = k_1^2 + \gamma_1^2 \quad (1.40)$$

---

<sup>1</sup> As referências estudadas não comprovam essa afirmação. Mais a frente será definido que  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}_f)$ , mas isso causa uma contradição, pois a função de Green não é solução homogênea da EDP.

<sup>2</sup> O intervalo de integração da equação (1.39) sugere que  $\gamma_1$  apresenta valores complexos. Nesse ponto, de acordo com KAK *et al.* [1], tratam-se de ondas evanescentes, existentes apenas para atender condições de contorno da equação homogênea da onda. Como a amplitude delas decai rapidamente ao se distanciar do contorno, as mesmas podem ser ignoradas quando a distância é maior que  $10\lambda$  das não-homogeneidades.

A equação (1.37) precisa ser linearizada, antes de dar continuidade às deduções. A existência da função  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  nos dois lados na equação dificulta a relação<sup>1</sup> entre essa mesma função e  $M(\mathbf{r})$ . KAK *et al.* [1] e TIEN-WHEN *et al.* [4] apresentam duas formas de linearização da equação: Born e Rytov. Ambas estão apresentadas nos apêndices A e B, respectivamente. O importante é que as duas formas existentes apresentam como resultado a mesma equação, a mostrar:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \cong - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A.2) ou (B.19)}$$

Nota-se que sumiu o termo  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  de dentro da integral, cessando a retroalimentação do sistema. Outra simplificação importante a ser aplicada refere-se ao campo de onda incidente  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega)$ . Uma grande vantagem de um processo tomográfico é o conhecimento da energia aplicada sobre o sistema. Esse luxo é bem explorado através da imposição do conhecimento do campo incidente. KAK *et al.*[1] adotam  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , onde  $\|\mathbf{k}\| = k_0$ . Trata-se de uma onda plana<sup>2</sup>, com sua frequência espacial e direções definidas. Essa adoção em si não é viável para mapeamentos geológicos. De forma diferente, TIEN-WHEN *et al.* [4] preferem<sup>3</sup> que  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}_f)$ , que representa uma onda circular<sup>2</sup>, centrada em  $\mathbf{r}_f$ , com frequência espacial  $k_0$ . Seguindo essa adoção, a equação (A.2) ou (B.19) recebe a seguinte escrita:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \cong - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_f) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.41)$$

Agora, a equação está bem mais simples. De relance, pode-se perceber que  $\mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_f)$  transfere para todo o domínio a função Delta aplicada em  $\mathbf{r}_f$ . Depois, ao encontrar uma não-homogeneidade em  $\mathbf{r}'$  (parte do domínio),  $\mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}')$  transfere essa perturbação até  $\mathbf{r}$ . Por último, a integral existe para que todas as contribuições do domínio sejam levadas até o ponto  $\mathbf{r}$ . Com a equação acima, será dada a devida continuidade no capítulo 3, pois lá se encontram os três tipos de tomografia por difração aplicados nesse trabalho.

---

<sup>1</sup> Não foi encontrado nas referências bibliográficas comentários sobre a utilização da equação (1.37) de forma não linear.

<sup>2</sup> No domínio do tempo.

<sup>3</sup>  $\mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}_f)$  nada mais é que ondas planas, do tipo  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , mas aplicadas em todas as direções a partir de um centro  $\mathbf{r}_f$ . De fato, o desenvolvimento da tomografia por difração apresentado por KAK *et al.* [1] é mais generalizado, mas inviável para aplicações em geofísica.

## 2. ESTRUTURAÇÃO DO CÓDIGO FONTE

Esta fase da dissertação compromete-se a descrever todo o trabalho de desenvolvimento do programa computacional. O mais importante são os destaques de discretização, pois não foi possível ainda criar um programa que enfrentasse a questão tomográfica de forma contínua. Existe, associado ao programa, um simulador de difração. Gerar uma ferramenta de solução obrigatoriamente exige seu respectivo gerador de problemas.

A tomografia por difração apresentada por KAK *et al.* [1] é bem generalizada, porém não possui qualquer enfoque prático. A referência [4], por sua vez, é especializada em geofísica e se propõe a aplicações, inclusive apresentado casos de estudo ao final do livro. Nisso, a tomografia é apresentada dentro de três configurações possíveis, chamadas de configuração entre poços, configuração sísmica vertical e configuração de reflexão na superfície. Como se verá no restante do capítulo, o que determina cada configuração é a disposição dos receptores e fontes utilizados na amostragem. Antes de demonstrar cada uma delas, TIEN-WHEN *et al.* [4] observam que, no fundo, todas são muito semelhantes entre si.

Pensando nessa informação, procurou-se estruturar o programa com a capacidade de englobar qualquer tipo de disposição física de receptores e fontes, mas não houve sucesso. Em alguns pontos da dedução matemática consideram-se valores absolutos, que de uma forma ou de outra, abririam espaços a programações paralelas. O que se percebeu, no entanto, que a diferença na programação era tão pequena, que os códigos fontes de cada uma das configurações são muito similares. Tal ínfima diferença também foi observada na estruturação do simulador de difração de cada uma das configurações.

Ao final do capítulo, observa-se que apenas a interpretação do fenômeno e a identificação de limitações do processo são complexos. Depois de estruturado o programa é que pode se ver a simplicidade da aplicação das fórmulas desenvolvidas. No capítulo seguinte apresentam-se algumas respostas tomográficas de problemas simulados, para ilustrar o procedimento apresentado, bem como a qualidade das imagens obtidas com o mesmo.

## 2.1. Configuração entre poços

A tomografia com esse tipo de configuração dispõe os receptores e as fontes sonoras em dois poços verticais em subsuperfície. Um poço fica responsável por abrigar os receptores, enquanto o segundo abriga as fontes. O objetivo final é a identificação geológica do subsolo que existe entre os dois, de forma a mapear a velocidade de propagação de ondas acústicas por todo seu meio. A figura abaixo ilustra a configuração:

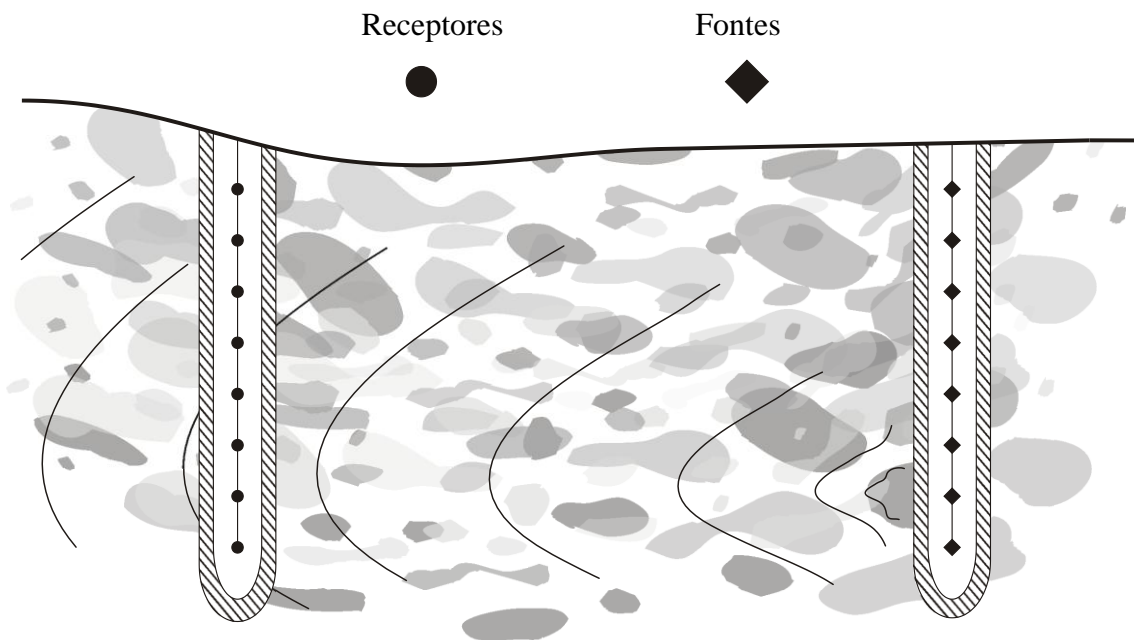


Figura 5 – Esquema da configuração entre poços (cwc)

O mecanismo de amostragem é composto dos seguintes passos:

- 1) Primeiro elege-se uma frequência angular  $\omega$  qualquer;
- 2) Aplica-se, em uma das fontes, um sinal harmônico com frequência  $\omega$  e fase e amplitude conhecidos;
- 3) Com o sinal aplicado, registra-se, em cada um dos receptores, a amplitude e a fase do sinal, apenas<sup>1</sup> com a frequência  $\omega$ ;
- 4) Para todas as fontes, reinicia-se do estágio (2) aplicando-se o sinal harmônico;

<sup>1</sup> Erros de medições e não-linearidades do meio e da propagação da onda podem gerar sinais que possuam conteúdo de espectro além da frequência  $\omega$ . O método despreza essa informação.

- 5) O conjunto de gravações já está apto a gerar uma imagem tomográfica, mas pode-se reiniciar do estágio (1), elegendo uma frequência angular diferente;

Quanto mais frequências angulares forem ensaiadas, mais informação existirá para compor a imagem. O ensaio também pode ser feito de uma vez, aplicando um sinal composto de um amplo espectro de frequência. Basta registrar a resposta e o sinal, e aplicar a transformada de Fourier em ambos. O que não se pode fazer, com a metodologia implementada, é aplicar o sinal em mais de uma fonte ao mesmo tempo, apenas se for com conteúdo de espectro distintos. Abaixo está apresentado o esquema espacial, para se dar início à dedução da tomografia nesta configuração:

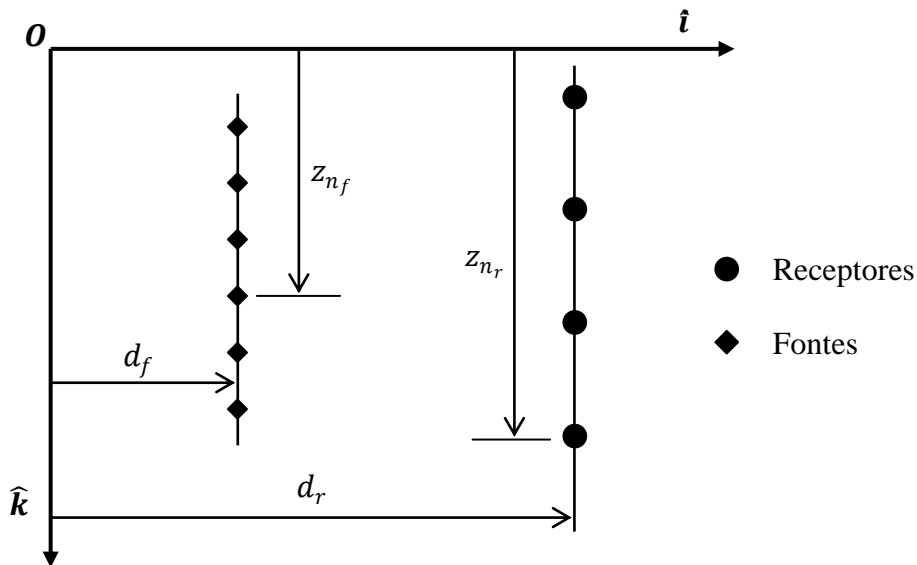


Figura 6 – Esquema físico da configuração entre poços

O desenvolvimento matemático condiciona o fato de a linha de fontes e receptores ser contínua ao longo dos poços. Isso é uma abstração, que se desfaz na simulação e implementação computacional, uma vez que essas duas etapas se realizam em domínio discreto. Nos sub-itens seguintes será definida uma distância fixa entre os elementos de cada um dos poços. Porém, sem poluir a dedução do momento, resgata-se a equação (1.41), substituindo apenas pela igualdade:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_f) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.41)$$

Repara-se que, de acordo com as etapas apresentadas na página anterior,  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  é uma função complexa<sup>1</sup> e possui valores dependentes de duas grandezas. A primeira delas é a posição  $\mathbf{r}$  que o receptor ocupa ao longo do poço, o que é óbvio pela informação dentro dos parênteses. A segunda remete à fonte escolhida. É claro, como dito antes, que na metodologia implementada, o ensaio não pode ser feito aplicando-se o sinal em duas fontes ao mesmo tempo com a mesma frequência em estudo, mas em contrapartida é inegável que a mudança da posição  $\mathbf{r}_f$  não sensibilize a função em questão. Como o par da posição de fontes e receptores a define:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_f}, \mathbf{r}_{n_r}, \omega) = - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_{n_f}) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}_{n_r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.1)$$

Substituindo na equação acima as coordenadas cartesianas e a função de Green pela equação apresentada em (1.39):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(x_{n_f}, z_{n_f}; x_{n_r}, z_{n_r}; \omega) \\ = -k_0^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (z - z_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |x - x_{n_f}|]} dk_1 \\ \times \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (z_{n_r} - z) + \gamma_2 \cdot |x_{n_r} - x|]} dk_2 dx dz \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aproveitando as restrições geométricas apresentadas na figura anterior:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(d_f, z_{n_f}; d_r, z_{n_r}; \omega) \\ = -k_0^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (z - z_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |x - d_f|]} dk_1 \\ \times \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (z_{n_r} - z) + \gamma_2 \cdot |d_r - x|]} dk_2 dx dz \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para simplificar a visualização,  $\tilde{p}_d(d_f, z_{n_f}; d_r, z_{n_r}; \omega)$  será representada apenas por  $\tilde{p}_d(z_{n_f}, z_{n_r})$ , mostrando que para uma frequência  $\omega$  fixa, a função varia de acordo com a profundidade da fonte e do receptor pelo poço.  $k_0^2(\omega)$  também será representado por  $k_0^2$ , mas não se pode esquecer que, uma vez adotada outra frequência de estudo, seu

---

<sup>1</sup>  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  é uma função complexa, e só em casos muito especiais apresenta antissimetria entre a parte imaginária de seus valores. Mais adiante, ela sofrerá uma transformada de Fourier, e como dificilmente apresenta correspondência entre conjugados, o resultado dessa transformada também será uma função complexa.

valor deve ser modificado pela equação (1.30). A substituição da função de Green trouxe quatro novas variáveis, que se relacionam da seguinte forma:

$$k_0^2 = k_1^2 + \gamma_1^2 \quad (1.40)$$

$$k_0^2 = k_2^2 + \gamma_2^2 \quad (2.4)$$

Da mesma forma como se deduz a tomografia por raio, aplica-se a transformada de Fourier espacial (1.9) sobre a equação (2.3):

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{z_{n_f}, z_{n_r}} \left[ \tilde{p}_d(z_{n_f}, z_{n_r}) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (z - z_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |x - d_f|]} dk_1 \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (z_{n_r} - z) + \gamma_2 \cdot |d_r - x|]} dk_2 dx dz \cdot e^{-i[k_{n_f} \cdot z_{n_f} + k_{n_r} \cdot z_{n_r}]} dz_{n_f} dz_{n_r} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observa-se que  $\frac{k_0^2}{16\pi^2}$  pode sair de todas as integrais. Considerar que  $M(x, z)$  seja nula fora do domínio restrito pelo dois poços, reflete nos valores absolutos  $|x - d_f|$  e  $|d_r - x|$ , que podem ser substituídos por  $(x - d_f)$  e  $(d_r - x)$ , pois no momento que esses valores forem negativos, independente da resposta,  $M(x, z)$  estará anulando o resultado. A integração em relação a  $x$  e  $z$  pode ser levada a toda a equação, pois  $e^{-i[k_{n_f} \cdot z_{n_f} + k_{n_r} \cdot z_{n_r}]} dz_{n_f} dz_{n_r}$  não depende dessas variáveis.

$$\begin{aligned} & \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r}) \\ &= \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (z - z_{n_f}) + \gamma_1 \cdot (x - d_f)]} dk_1 \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (z_{n_r} - z) + \gamma_2 \cdot (d_r - x)]} dk_2 \\ & \times e^{-i[k_{n_f} \cdot z_{n_f} + k_{n_r} \cdot z_{n_r}]} dz_{n_f} dz_{n_r} dx dz \end{aligned} \quad (2.6)$$

A integral referente à  $dz_{n_f}$  será agrupada, com a respectiva variável, dentro da integral referente à  $dk_1$ . O mesmo será feito para  $dz_{n_r}$ , agrupada dentro de  $dk_2$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r}) &= \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot z + \gamma_1 \cdot (x - d_f)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_1 + k_{n_f}) \cdot z_{n_f}]} dz_{n_f} dk_1 \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot z + \gamma_2 \cdot (d_r - x)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_{n_r} - k_2) \cdot z_{n_r}]} dz_{n_r} dk_2 dx dz
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Pela equação (1.17) deduzem-se as seguintes relações:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_1 + k_{n_f}) \cdot z_{n_f}]} dz_{n_f} = 2\pi \cdot \delta(-k_1 - k_{n_f}) \tag{2.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_{n_r} - k_2) \cdot z_{n_r}]} dz_{n_r} = 2\pi \cdot \delta(k_2 - k_{n_r}) \tag{2.9}$$

Que substituindo na equação (2.7):

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r}) &= \frac{k_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot z + \gamma_1 \cdot (x - d_f)]} \delta(-k_1 - k_{n_f}) dk_1 \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot z + \gamma_2 \cdot (d_r - x)]} \delta(k_2 - k_{n_r}) dk_2 dx dz
\end{aligned} \tag{2.10}$$

E aplicando a propriedade (1.14) do Delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r}) &= \frac{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}}{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
&\times e^{-i[\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f}] \cdot x} e^{-i[k_{n_f} - k_{n_r}] \cdot z} dx dz
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Não se esquecendo que:

$$k_0^2 = k_{n_f}^2 + \gamma_{n_f}^2 \tag{2.12}$$

$$k_0^2 = k_{n_r}^2 + \gamma_{n_r}^2 \tag{2.13}$$

Comparando a equação (2.11) com (1.9), pode-se identificar a transformada espacial de Fourier na função  $M(x, z)$ . Isso significa que, o conhecimento<sup>1</sup> da função  $\tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})$  habilita a reconstrução da função  $\tilde{M}(k_x, k_z)$ . Invertendo<sup>2</sup> os resultados, chega-se à identificação das propriedades do meio, visualizada através da função  $M(x, z)$ . Para deixar bem claro o que foi dito:

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.14)$$

onde:

$$k_x = \gamma_{n_r} - \gamma_{n_f} \quad (2.15)$$

$$k_z = k_{n_f} - k_{n_r} \quad (2.16)$$

Todos os coeficientes do lado esquerdo da igualdade em (2.14) são conhecidos. Sendo assim, é possível a reconstrução do meio estudado. TIEN-WHEN *et al.* [4] esmiúçam as propriedades geométricas da equação, e toda a interferência que a configuração em particular pode exercer sobre a resposta do meio. É um estudo interessante e vital para a geração do código fonte. Mais a frente será apresentado um pouco dessas propriedades apenas para explicar melhor a implementação computacional.

### 2.1.1. Simulador

No momento, inicia-se a discretização do domínio contínuo. Assim, o trabalho começa a se caracterizar mais com a figura 6, onde é possível distinguir os pontos onde estão os receptores e as fontes. A discretização foi obrigatória para que se pudesse implementar computacionalmente o simulador, assim como o programa tomográfico.

Para a simulação foi eleito o programa *Wolfram Mathematica*© 7. A escolha foi direcionada para o único programa conhecido que possui, intrinsecamente, a função de Green usada na equação de Lippmann-Schwinger aproximada.

---

<sup>1</sup> Através das amostragens apresentadas no início.

<sup>2</sup> Pela transformada espacial de Fourier inversa 2D.

Considere o meio a ser apresentado da forma como ilustrado pela figura 7. Ele é composto de uma malha quadrada 3x3, onde cada elemento possui sua velocidade de propagação  $c(x_n, z_n)$ . Cada elemento que o compõe é um quadrado, onde  $\Delta x = \Delta z = 1$ . Essa adoção simplifica muita coisa, mas um outro valor poderia ser adotado. Do lado direito do meio estão dispostos três receptores, enquanto do lado esquerdo posicionam-se três fontes. Cada elemento de borda da malha recebe um desses elementos bem no meio da aresta. Por assim dito, a  $d_r = 3$  e  $d_f = 0$ :

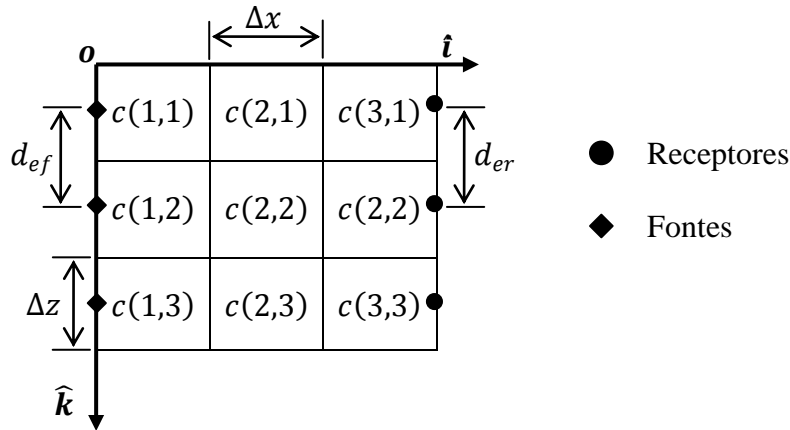


Figura 7 – Exemplo de simulação da configuração entre poços

A discretização da linha de receptores e de fontes obriga a criação<sup>1</sup> da distância fixa entre fontes e da distância fixa entre receptores  $d_{ef} = d_{er} = 1$ . Deve ser definida também a velocidade de referência  $c_0 = 100$ . Com essa definição, a função  $M(x_n, z_n)$  pode ser calculada por (1.32).

A simulação considera que cada fonte emita o mesmo sinal pré-determinado<sup>2</sup>. A forma de onda a ser empregada precisa estar no domínio da frequência. Para tal, a função discreta é transformada por (1.3). Para o exemplo,  $N_t = 7$  e o intervalo  $\Delta t = 0,01$ . Agora, reescreve-se a equação<sup>3</sup> que regerá o funcionamento do simulador:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega_n) = - \int_A k_0^2(\omega_n) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_f) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.41)$$

Usando a equação de Green na forma (1.38):

<sup>1</sup> As últimas variáveis serão necessárias, pois  $\tilde{p}_d(z_{nf}, z_{nr})$  será discreta e aplicar-se-á a transformada rápida de Fourier espacial 2D no programa computacional

<sup>2</sup> O sinal em si não precisa ser específico. Pode ser qualquer, desde que conhecido.

<sup>3</sup> A simulação deveria ser feita com a equação (1.37). Portanto  $\tilde{p}_d$  na simulação também é aproximado.

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega_n) &= \frac{k_0^2(\omega_n)}{16} \int_A \cdot M(\mathbf{r}') \\ &\times \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}'\|) \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.17)$$

E como o domínio de integração está discretizado:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) &= \tilde{p}_f(\omega_n) \cdot \frac{k_0^2(\omega_n)}{16} \sum_{(x_n=1, z_n=1)}^{(x_n=3, z_n=3)} M(x_n, z_n) \\ &\times \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|\right) \\ &\times \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_r} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|\right) \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (2.18)$$

Basta explicar que  $\mathbf{r}(x_n, z_n)$  é a posição do centro de cada elemento que compõe o meio,  $\tilde{p}_f(\omega)$  é a componente complexa<sup>1</sup> do sinal aplicado e que no domínio discreto  $\omega_n = \frac{2\pi n}{N\Delta t}$ , onde  $n$ , no caso, vai de 1 a  $N/2$ . Como, para frequências negativas, a componente complexa é conjugada às componentes de frequências positivas, não há necessidade de repetir o cálculo para  $n < 1$ .

Uma vez determinadas as componentes complexas de  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n)$ , basta aplicar<sup>2</sup> a transformada discreta de Fourier inversa (1.8) para se obter o sinal gravado pelo receptor. Refazendo a simulação para cada uma das combinações entre fontes e receptores, consegue-se o conjunto de informações necessárias para se obter uma tomografia por difração. Se a aproximação desejada for a de Born, a resposta  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n)$  já é suficiente. Quando for necessária uma simulação obtida através da aproximação de Rytov, substitui-se (1.41) pela equação (B.17):

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega_n) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega_n) \cong - \int_V \tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega_n) \cdot k_0^2(\omega_n) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (B.17)$$

Aplicando as discretizações antes sugeridas:

<sup>1</sup> A informação estática não é usada na tomografia, pois leva a casos de indeterminação.

<sup>2</sup> Foi implementada no programa a transformada rápida de Fourier (FFT), que é uma rotina computacional que oferece os mesmos resultados, mas com tempo de execução computacional menor.

$$\begin{aligned}
& \tilde{p}_i(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) \\
&= -i \cdot \tilde{p}_f(\omega_n) \cdot \frac{k_0^2(\omega_n)}{4} \sum_{(x_n=1, z_n=1)}^{(x_n=3, z_n=3)} M(x_n, z_n) \\
&\times \tilde{p}_i(\mathbf{r}(x_n, z_n), \omega_n) \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_r} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|) \Delta x \Delta z
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Mas como  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega_n)$  é conhecido:

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega_n) = \frac{i}{4} \cdot \tilde{p}_f(\omega_n) \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}\|) \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) &= \frac{-i \cdot k_0^2(\omega_n)}{4 \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}_{n_r}\|)} \\
&\times \sum_{(x_n=1, z_n=1)}^{(x_n=3, z_n=3)} M(x_n, z_n) \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|) \\
&\times \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_r} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|) \Delta x \Delta z
\end{aligned} \tag{2.21}$$

E com (B.18):

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) [e^{\varphi_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n)} - 1] = \tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) &= \frac{i}{4} \cdot \tilde{p}_f(\omega_n) \\
&\times \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}_{n_r}\|) \cdot [e^{\varphi_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n)} - 1]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Essa última equação calcula o campo difratado da aproximação de Rytov. Toda a informação calculada integra um conjunto de dados possíveis para obter uma imagem tomográfica através do programa de imageamento criado, que está apresentado no subitem seguinte.

### 2.1.2. Implementação computacional

A montagem do código baseou-se no desenvolvimento de (1.41). Independente da forma de obtenção dos dados simulados, um mesmo código fonte é capaz de dar uma resposta razoável. Por isso, o ponto de partida do programa se abriga em (2.14):

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.14)$$

Quando o processo de amostragem termina, sobram como dados  $p_{dg}(z_{n_f}, z_{n_r}, t_n)$ ,  $d_r$ ,  $d_f$ ,  $d_{er}$ ,  $d_{ef}$ ,  $p_f(t_n)$ ,  $N_t$  e  $\Delta t$ . O primeiro<sup>1</sup> passo consiste em mudar o domínio de  $p_{dg}(z_f, z_r, t_n)$  e  $p_f(t_n)$  com (1.3), para depois normalizar o sinal recebido, através da razão entre  $\tilde{p}_{dg}(z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m)$  e  $\tilde{p}_f(\omega_m)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t_j} [p_{dg}(z_{n_f}, z_r, t_j)] &= \frac{1}{N_t} \sum_{n=0}^{N-1} p_{dg}(z_{n_f}, z_{n_r}, t_n) e^{-i\left(\frac{2\pi mn}{N_t}\right)} \\ &= \tilde{p}_d(z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{F}_{t_j} [p_f(t_j)] = \frac{1}{N_t} \sum_{n=0}^{N-1} p_f(t_n) e^{-i\left(\frac{2\pi mn}{N_t}\right)} = \tilde{p}_f(\omega_m) \quad (2.25)$$

$$\tilde{p}_d(z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m) = \frac{\tilde{p}_{dg}(z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m)}{\tilde{p}_f(\omega_m)} \quad (2.26)$$

onde:

$$\omega_m = \frac{2\pi \cdot m}{N_t \Delta t} \quad (2.27)$$

Então aplica-se a FFT (1.11) sobre  $\tilde{p}_d(z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m)$ , com relação às variáveis de posição  $d_{er}$  e  $d_{ef}$ :

---

<sup>1</sup>  $\tilde{p}_f(\omega_m)$  é único para cada frequência angular, pois optou-se que cada fonte emita o mesmo sinal sonoro.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{z_j, z_{j_r}} \left[ \tilde{p}_d \left( z_{j_f}, z_{j_r}, \omega_m \right) \right] \\
&= \frac{1}{N_r N_f} \sum_{n_r=0}^{N_r-1} \sum_{n_f=0}^{N_f-1} \tilde{p}_d \left( z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m \right) \cdot e^{-2\pi i \left( \frac{l \cdot n_f}{N_r} + \frac{j \cdot n_f}{N_f} \right)} \\
&= \tilde{p}_d \left( k_{n_f}, k_{n_r}, \omega_m \right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde:

$$k_{n_f} = \frac{2\pi \cdot n_f}{N_f d_{ef}} \tag{2.29}$$

$$k_{n_r} = \frac{2\pi \cdot n_r}{N_r d_{er}} \tag{2.30}$$

Nas tentativas de implementação, pode-se identificar a necessidade da mudança de limites de domínio. Por exemplo, se existem 20 fontes, entende-se que  $z_{n_f} = [1,20]$ . A FFT, aplicada ao exemplo, permite respostas para  $k_{n_f} = [1,20]$  ou  $k_{n_f} = [-10,10]$ , mas os resultados só puderam ser obtidos quando adotada a segunda forma. Como  $\tilde{p}_d \left( z_{n_f}, z_{n_r}, \omega_m \right)$  é uma função complexa, que não necessariamente apresenta simetria da parte imaginária, a forma  $k_{n_f} = [0,10]$  não pode ser adotada, sob o risco de perda de informação.

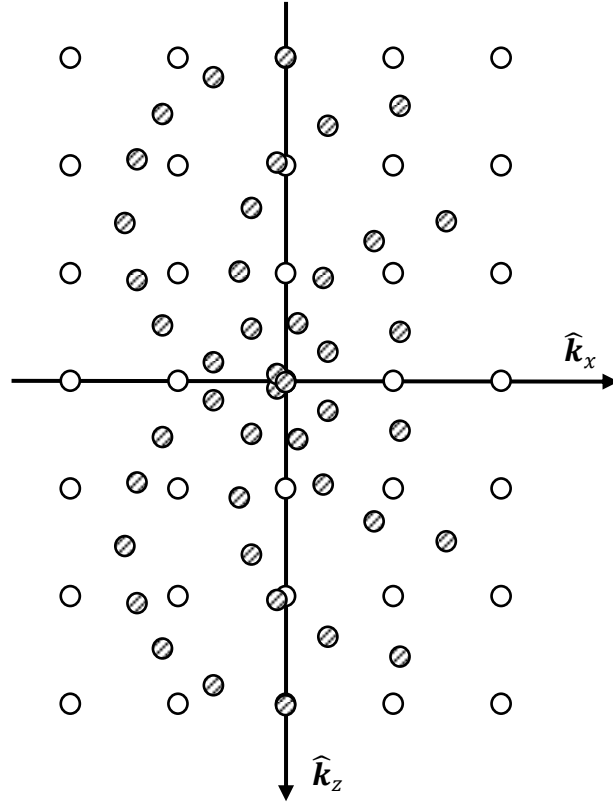
O próximo passo consiste em operar a divisão do lado esquerdo de (2.14), onde todos os elementos são conhecidos. É nessa hora que se decide<sup>1</sup> sobre o valor de  $c_0$ , a fim de se calcular  $k_0$ ,  $\gamma_{n_r}$  e  $\gamma_{n_f}$ . Com a divisão calculada, e as equações (2.15) e (2.16), o gráfico de  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  pode ser reconstituído, para depois aplicar-se a FFT inversa (1.12) e obter  $M(x, z)$ , e finalmente, por (1.32) obter a velocidade de propagação pelo meio  $c(x, z)$ .

A grande dificuldade que o processo descrito acima possui é o fato da posição calculada por (2.15) e (2.16) não coincidir com os pontos igualmente espaçados pelos eixos  $\hat{k}_x$  e  $\hat{k}_z$ . A relação das equações (2.15) e (2.16) com as variáveis  $k_{n_f}$  e  $k_{n_r}$  faz com que o valor da divisão caia em locais inapropriados à uma boa aplicação da FFT

---

<sup>1</sup> Não foi encontrada uma referência capaz de ajudar na estimativa da velocidade de referência.

inversa. A figura abaixo mostra um exemplo de superposição dos pontos da função discreta  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  e o posicionamento dos pontos da divisão:



○ Posição de  $(k_x, k_y)$  na malha

⊗ Posição de  $(\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f}, k_{n_f} - k_{n_r})$

Figura 8 – Superposição da resposta

O mau posicionamento mostrado acima foi contornado através de regressões lineares. O algoritmo tinha o trabalho de armazenar apenas o valor das posições  $(\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f}, k_{n_f} - k_{n_r})$  mais próximas de  $(k_x, k_y)$ . Ao final, uma regressão simples prevê o valor no ponto  $(k_x, k_y)$ , considerando a distância que os pontos  $(\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f}, k_{n_f} - k_{n_r})$  mantêm de  $(k_x, k_y)$ . Feito isso, é apenas questão de aplicar (1.12) sobre  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  para obter  $M(x, z)$  e  $c(x, z)$ .

## 2.2. Configuração vertical

A demonstração das outras duas formas de tomografia por difração ocorrerá de forma sumária. O desenvolvimento matemático, assim como a simulação e a implementação computacional, são muito parecidos entre cada uma das configurações. Por isso são apresentados os passos, de forma bem larga, para não tornar a dissertação maior, sem qualquer adição de conteúdo.

A tomografia do momento utiliza-se apenas de um poço vertical, que guarda os receptores. As fontes sonoras são dispostas em alinhamento horizontal, sobre a superfície. Nada impede que o conjunto de receptores mude de posição com o conjunto de fontes. Para melhor ilustrar, encontra-se abaixo a seguinte figura:

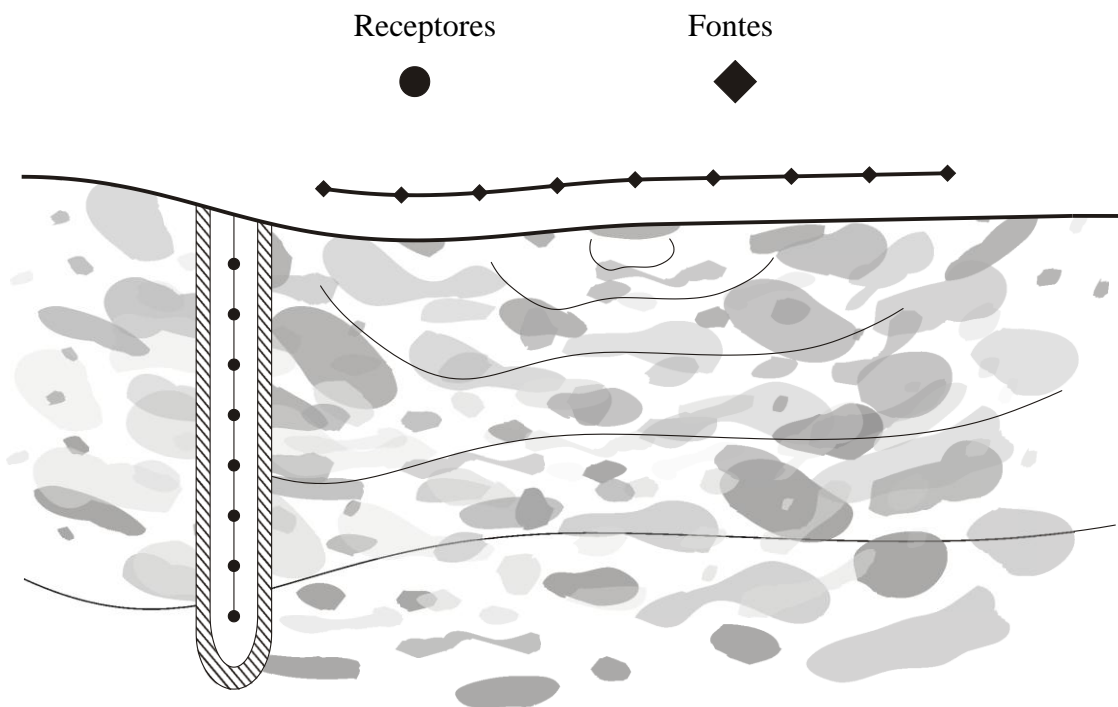


Figura 9 – Esquema da configuração vertical (vsp)

O procedimento de amostragem é idêntico ao mostrado anteriormente. Abaixo está apresentado o esquema espacial, para se dar início à dedução da tomografia nesta configuração:

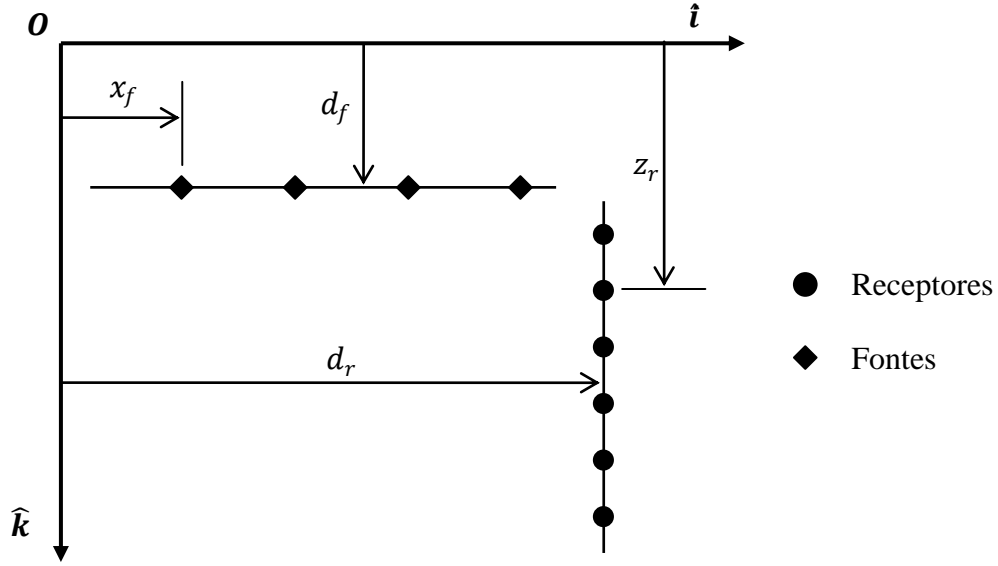


Figura 10 – Esquema físico da configuração vertical

Como na dedução anterior, resgata-se a equação (1.41), substituindo apenas pela igualdade:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_f) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.41)$$

Considerando o par da posição de fontes e receptores:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_f}, \mathbf{r}_{n_r}, \omega) = - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_{n_f}) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}_{n_r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.31)$$

Substituindo na equação as coordenadas cartesianas e a função de Green pela equação apresentada em (1.39):

$$\begin{aligned} & \tilde{p}_d(x_{n_f}, z_{n_f}; x_{n_r}, z_{n_r}; \omega) \\ &= -k_0^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1(x-x_{n_f})+\gamma_1|z-z_{n_f}|]} dk_1 \\ & \times \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2(z_{n_r}-z)+\gamma_2|x_{n_r}-x|]} dk_2 dx dz \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nesse momento ocorre uma mudança no argumento da função  $\mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_{n_f})$ . Essa modificação é necessária, pois o alinhamento das fontes está rotacionado em

relação à posição na configuração entre poços. Aproveitando as restrições geométricas apresentadas na figura anterior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{p}_d(x_{n_f}, d_f; d_r, z_{n_r}; \omega) \\
&= -k_0^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (x-x_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |z-d_f|]} dk_1 \\
&\quad \times \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (z_{n_r}-z) + \gamma_2 \cdot |d_r-x|]} dk_2 dx dz
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Removendo da equação as variáveis que não mudam por toda a dedução e aplicando a transformada de Fourier espacial (1.9) sobre a equação (2.33):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{x_{n_f}, z_{n_r}} [\tilde{p}_d(x_{n_f}, z_{n_r})] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (x-x_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |z-d_f|]} dk_1 \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (z_{n_r}-z) + \gamma_2 \cdot |d_r-x|]} dk_2 dx dz \\
&\quad \times e^{-i[k_{n_f} \cdot x_{n_f} + k_{n_r} \cdot z_{n_r}]} dx_{n_f} dz_{n_r}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Os valores absolutos  $|d_r - x|$  e  $|z - d_f|$  podem ser substituídos por  $(d_r - x)$  e  $(z - d_f)$  pela mesma razão anterior. Manipulando a equação:

$$\begin{aligned}
& \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r}) \\
&= \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot x + \gamma_1 \cdot (z-d_f)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_1+k_{n_f}) \cdot x_{n_f}]} dx_{n_f} dk_1 \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[-k_2 \cdot z + \gamma_2 \cdot (d_r-x)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_{n_r}-k_2) \cdot z_{n_r}]} dz_{n_r} dk_2 dx dz
\end{aligned} \tag{2.35}$$

E pela equação (1.17) deduz-se as seguintes relações:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_1+k_{n_f}) \cdot x_{n_f}]} dx_{n_f} = 2\pi \cdot \delta(-k_1 - k_{n_f}) \tag{2.36}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_{n_r}-k_2) \cdot z_{n_r}]} dz_{n_r} = 2\pi \cdot \delta(k_2 - k_{n_r}) \tag{2.37}$$

Substituindo na equação (2.35) e aplicando a propriedade (1.14) do Delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r}) &= \frac{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}}{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\ &\times e^{-i[k_{n_f} + \gamma_{n_r}] \cdot x} e^{-i[k_{n_r} - \gamma_{n_f}] \cdot z} dx dz \end{aligned} \quad (2.38)$$

Não se esquecendo que:

$$k_0^2 = k_{n_f}^2 + \gamma_{n_f}^2 \quad (2.12)$$

$$k_0^2 = k_{n_r}^2 + \gamma_{n_r}^2 \quad (2.13)$$

Apresentando na mesma forma que a configuração anterior, finaliza-se com:

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.14)$$

Mas com a particularidade que:

$$k_x = k_{n_f} + \gamma_{n_r} \quad (2.39)$$

$$k_z = k_{n_r} - \gamma_{n_f} \quad (2.40)$$

### 2.2.1. Simulador

A forma de simular usando a configuração tomográfica de agora é idêntica à apresentada para a configuração entre poços. O pequeno detalhe de diferença está na posição das fontes. Agora o alinhamento delas ocorre na horizontal, e as posições de  $\mathbf{r}_f$  mudam na equação (2.18). Para o simulador, isso representa apenas uma mudança na orientação do vetor que posiciona as fontes.

Considerando o mesmo exemplo da simulação anterior, com as mesmas condições, exceto o alinhamento das fontes, a figura abaixo diagrama o problema da seguinte forma:

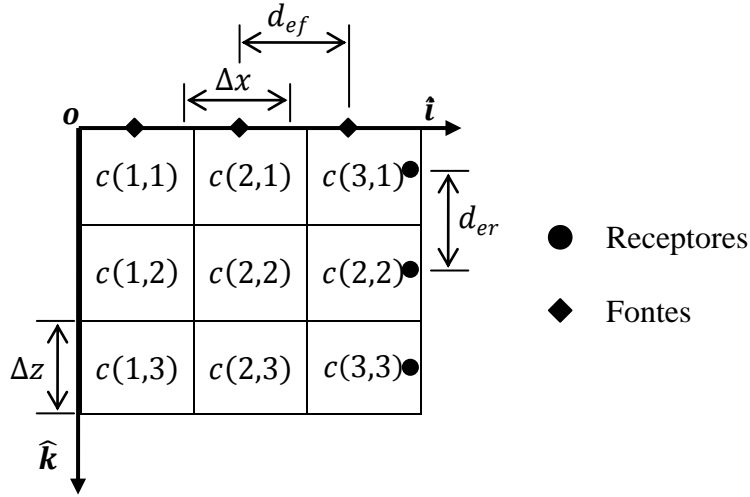


Figura 11 – Exemplo de simulação da configuração vertical

A mudança sutil afeta apenas a orientação das fontes, no entanto  $d_f = 0$ . A aplicação das simulações com aproximação de Born e Rytov respeitam as mesmas equações (2.18) e (2.23) apresentadas na simulação da configuração entre poços.

### 2.2.2. Implementação computacional

Assim como a simulação, a implementação computacional pouco difere entre as configurações estudadas, baseada também na seguinte equação:

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.14)$$

Aplicam-se todos os estágios já apresentados na implementação anterior, até que se obtenha o resultado da divisão do lado esquerdo da equação acima. Mais uma vez, a posição calculada por (2.39) e (2.40) não coincide com os pontos igualmente espaçados pelos eixos  $k_x$  e  $k_z$ . O mau posicionamento dessa configuração é distinto da configuração anterior, mas é resolvido da mesma forma: ao final, como antes, uma regressão simples prevê o valor no ponto  $(k_x, k_y)$ , considerando a distância que os pontos  $(k_{n_f} + \gamma_{n_r}, k_{n_r} - \gamma_{n_f})$  mantêm de  $(k_x, k_y)$ . Feito isso, é apenas questão de aplicar (1.12) em  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  para obter  $M(x, z)$  e  $c(x, z)$ .

### 2.3. Configuração por reflexão

A última configuração de tomografia estudada aqui não utiliza poços verticais. As fontes sonoras e os receptores são dispostos alinhados horizontalmente, sobre a superfície. A dedução matemática, assim como a implementação computacional se assemelha muito à forma entre poços. Para melhor ilustrar, encontra-se abaixo a seguinte figura:

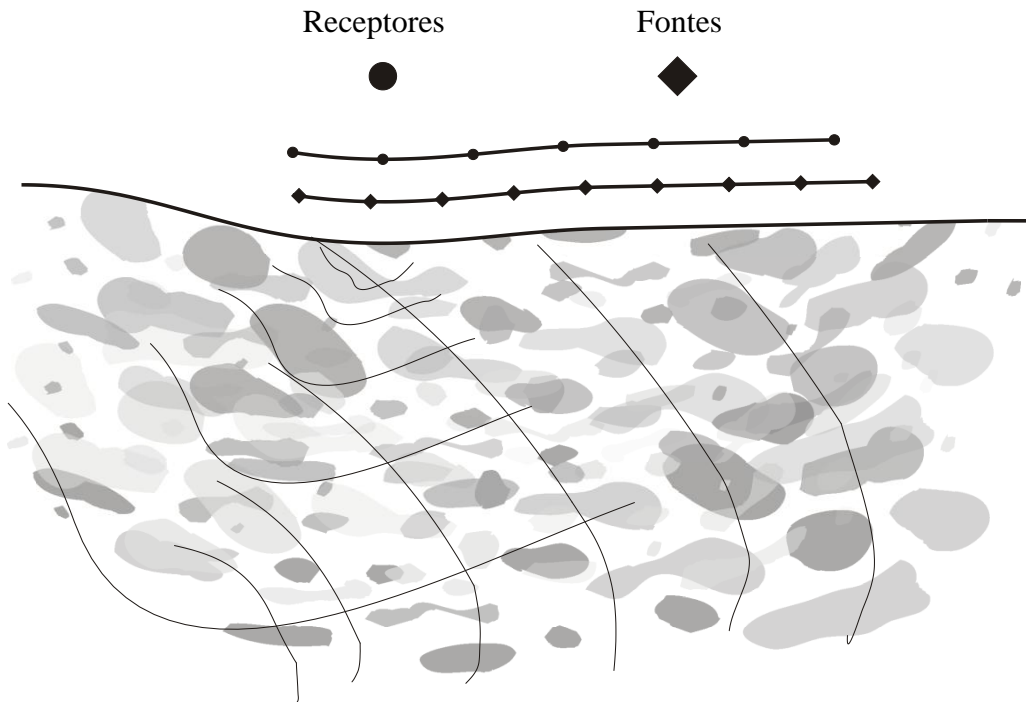


Figura 12 – Esquema da configuração por reflexão (src)

O procedimento de amostragem é idêntico aos anteriores. Abaixo está apresentado o esquema espacial, para se dar início à dedução da tomografia nesta configuração:

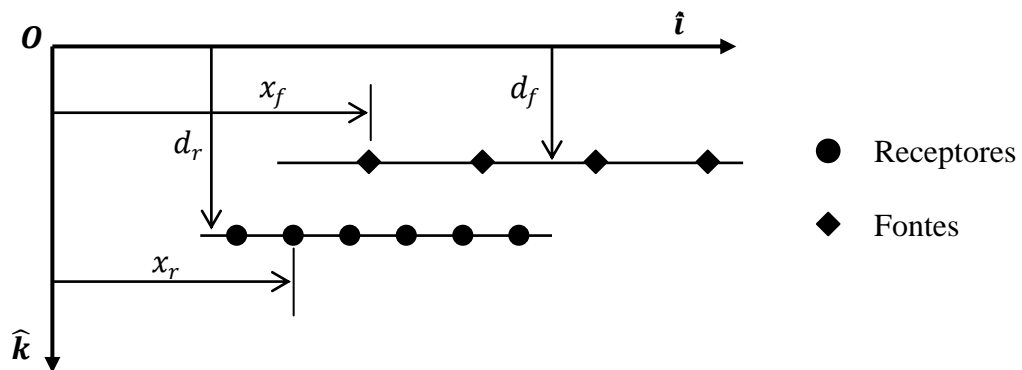


Figura 13 – Esquema físico da configuração por reflexão

Como na dedução anterior, resgata-se a equação (1.41), substituindo apenas pela igualdade:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_f) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.41)$$

Considerando o par da posição de fontes e receptores:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_f}, \mathbf{r}_{n_r}, \omega) = - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_{n_f}) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}_{n_r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.41)$$

Substituindo na equação as coordenadas cartesianas e a função de Green pela equação apresentada em (1.39):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(x_{n_f}, z_{n_f}; x_{n_r}, z_{n_r}; \omega) &= -k_0^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (x-x_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |z-z_{n_f}|]} dk_1 \\ &\times \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (x_{n_r}-x) + \gamma_2 \cdot |z_{n_r}-z|]} dk_2 dx dz \end{aligned} \quad (2.42)$$

Além do alinhamento em  $\mathcal{G}(\mathbf{r}' \downarrow \mathbf{r}_{n_f})$ , percebe-se o mesmo em  $\mathcal{G}(\mathbf{r}_{n_r} \downarrow \mathbf{r}')$ .

Essa modificação é necessária, pois agora as linhas de fonte e de receptores possuem disposição horizontal. Aproveitando as restrições geométricas apresentadas na figura anterior:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(x_{n_f}, d_f; x_{n_r}, d_r; \omega) &= -k_0^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (x-x_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |z-d_f|]} dk_1 \\ &\times \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (x_{n_r}-x) + \gamma_2 \cdot |d_r-z|]} dk_2 dx dz \end{aligned} \quad (2.43)$$

Removendo da equação as variáveis que não mudam por toda a dedução, e aplicando a transformada de Fourier espacial (1.9) sobre a equação (2.43):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{x_{n_f}, x_{n_r}} \left[ \tilde{p}_d \left( x_{n_f}, x_{n_r} \right) \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot (x - x_{n_f}) + \gamma_1 \cdot |z - d_f|]} dk_1 \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[k_2 \cdot (x_{n_r} - x) + \gamma_2 \cdot |d_r - z|]} dk_2 dx dz \\
&\quad \times e^{-i[k_{n_f} \cdot x_{n_f} + k_{n_r} \cdot x_{n_r}]} dx_{n_f} dx_{n_r}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Os valores absolutos  $|d_r - z|$  e  $|z - d_f|$  podem ser substituídos por  $-(d_r - z)$  e  $(z - d_f)$  pela mesma razão anterior. Manipulando a equação:

$$\begin{aligned}
& \tilde{p}_d \left( k_{n_f}, k_{n_r} \right) \\
&= \frac{k_0^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} e^{i[k_1 \cdot x + \gamma_1 \cdot (z - d_f)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_1 + k_{n_f}) \cdot x_{n_f}]} dx_{n_f} dk_1 \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_2} e^{i[-k_2 \cdot x - \gamma_2 \cdot (d_r - z)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_{n_r} - k_2) \cdot x_{n_r}]} dx_{n_r} dk_2 dx dz
\end{aligned} \tag{2.45}$$

E pela equação (1.17) deduzem-se as seguintes relações:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_1 + k_{n_f}) \cdot x_{n_f}]} dx_{n_f} = 2\pi \cdot \delta(-k_1 - k_{n_f}) \tag{2.46}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[(k_{n_r} - k_2) \cdot x_{n_r}]} dx_{n_r} = 2\pi \cdot \delta(k_2 - k_{n_r}) \tag{2.47}$$

Substituindo na equação (2.45) e aplicando a propriedade (1.14) do Delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_d \left( k_{n_f}, k_{n_r} \right) &= \frac{k_0^2 \cdot e^{i(-\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}}{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
&\quad \times e^{-i[k_{n_f} + k_{n_r}] \cdot x} e^{-i[-\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f}] \cdot z} dx dz
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Não se esquecendo que:

$$k_0^2 = k_{n_f}^2 + \gamma_{n_f}^2 \tag{2.12}$$

$$k_0^2 = k_{n_r}^2 + \gamma_{n_r}^2 \quad (2.13)$$

Um pequeno detalhe diferencia essa solução com as configurações anteriores:

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(-\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.49)$$

Mas com a particularidade que:

$$k_x = k_{n_f} + k_{n_r} \quad (2.50)$$

$$k_z = -\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f} \quad (2.51)$$

### 2.3.1. Simulador

Mais uma vez, a simulação da tomografia por reflexão assemelha-se também às formas anteriores. O pequeno detalhe de diferença está na posição dos receptores, quando comparado à simulação vertical. Considerando o alinhamento horizontal das fontes e receptores, as posições de  $\mathbf{r}_f$  e  $\mathbf{r}_r$  mudam na equação (2.18). Para o simulador, isso representa apenas uma mudança na orientação dos vetores que posicionam as fontes e os receptores.

Considerando, pela última vez, o mesmo exemplo da simulação anterior, com as mesmas condições, exceto o alinhamento das fontes e receptores, a figura abaixo diagrama o problema da seguinte forma:

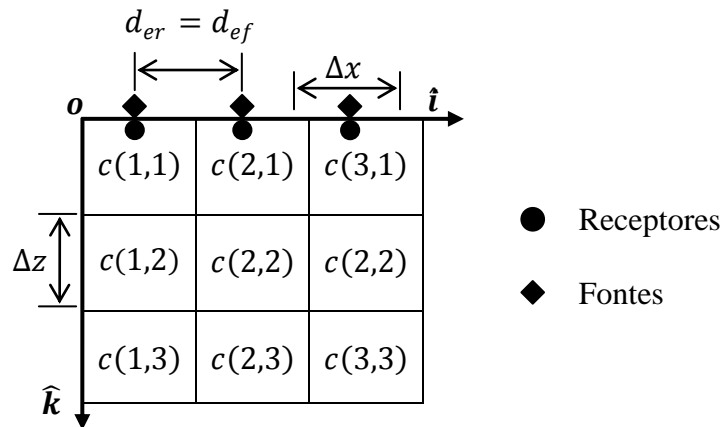


Figura 14 – Exemplo de simulação da configuração de reflexão

A aplicação das simulações com aproximação de Born e Rytov respeitam as mesmas equações (2.18) e (2.23) apresentadas na simulação da configuração entre poços.

### 2.3.2. Implementação computacional

Assim como a simulação, a implementação computacional pouco difere entre as configurações estudadas. Baseado na seguinte equação:

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(-\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.49)$$

Aplicam-se todos os estágios já apresentados antes, até que se obtenha o resultado da divisão do lado esquerdo da equação acima. A única diferença existente na equação utilizada é o sinal de  $\gamma_{n_r} \cdot d_r$ . Isso é facilmente contornado, invertendo do sinal de  $d_r$  no momento da aquisição dos dados. Assegura-se esse artifício, pois a variável é usada apenas nesse momento. Com esta alteração, o mesmo programa é capaz de processar todas as configurações apresentadas, onde a única diferença entre cada uma delas está no posicionamento de  $(k_x, k_z)$ .

Como repetido, a posição calculada por (2.50) e (2.51) não coincide com os pontos igualmente espaçados pelos eixos  $k_x$  e  $k_z$ . Uma regressão simples prevê o valor no ponto  $(k_x, k_y)$ , considerando a distância que os pontos  $(k_{n_f} + k_{n_r}, -\gamma_{n_r} - \gamma_{n_f})$  mantêm de  $(k_x, k_y)$ . Feito isso, é apenas questão de aplicar (1.12) em  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  para obter  $M(x, z)$  e  $c(x, z)$ .

### 3. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Uma forma de observar a funcionalidade da tomografia por difração é através da simulação computacional de meios pré-determinados. No início, tais meios foram usados com o objetivo de conseguir um resultado de todo o estudo feito, mas acabaram sendo a melhor maneira de apresentar os resultados obtidos. O que se vê aqui neste capítulo é apenas uma aplicação simulada, mas que tira um pouco de proveito dos conceitos abordados na bibliografia estudada.

O conjunto de ensaios a ser exposto aborda os dois tipos apresentados de aproximação e as três configurações descritas. Infelizmente, o processo de amostragem é bem demorado, principalmente a simulação. Isso limitou o número de meios examinados. Por outro lado, um conjunto de análises, utilizando meios aleatórios, poderia tornar a dissertação vazia, com o risco de não se concluir nada.

A saída foi estabelecer um critério para a eleição dos meios. Uma vez que a teoria toda envolvida é linear, supõe-se a validade do princípio da superposição. Então, adotaram-se quatro meios simples, imaginando que combinações entre eles fossem capazes de gerar condições mais complexas. TIEN-WHEN *et al.* [4] mostram que cada tipo de configuração possui uma espécie de meio que apresenta os melhores resultados, e vice-versa. Essa idéia é bem explicada na bibliografia, e é preciso afirmar que a escolha dos meios aglutinou essa característica apresentada por TIEN-WHEN *et al.* [4]. Com os meios determinados, segue a descrição de cada um deles, pelas figuras 15,16, 17 e 18, onde a imagem da esquerda corresponde ao meio estudado, a imagem central é uma versão de alto contraste<sup>1</sup> e a terceira esquematiza as propriedades do meio:

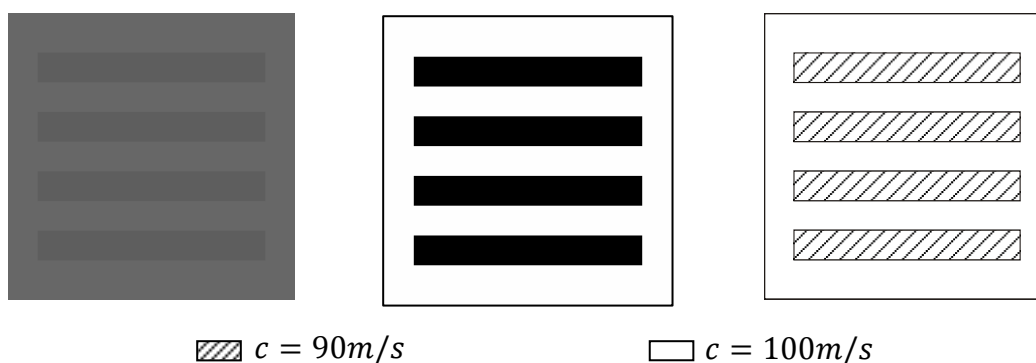


Figura 15 – Característica do primeiro meio estudado

<sup>1</sup> A imagem com alto contraste serve para visualizar as não-homogeneidades do meio, caso a impressão, ou fotocópia, transforme a primeira imagem em um grande borrão cinza.

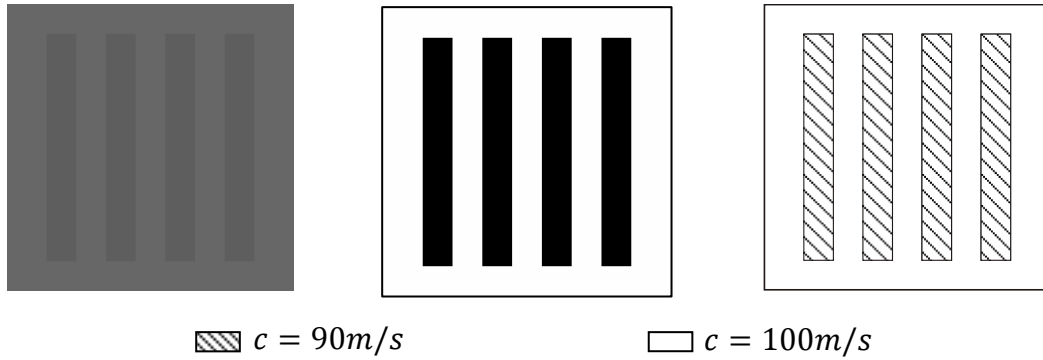


Figura 16 – Característica do segundo meio estudado

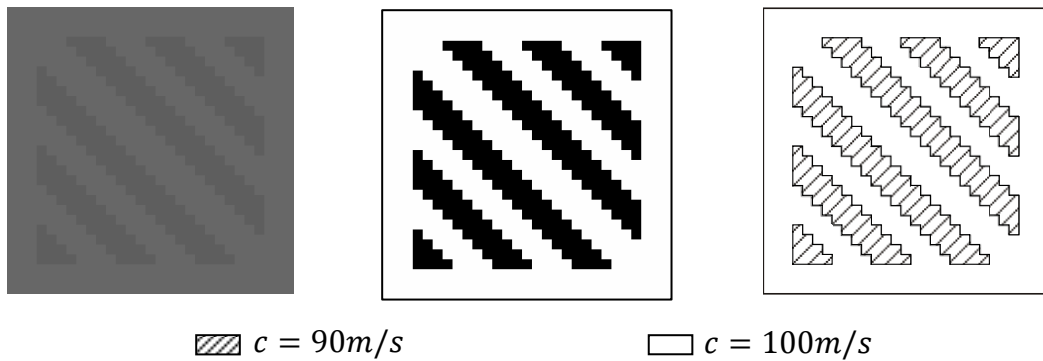


Figura 17 – Característica do terceiro meio estudado

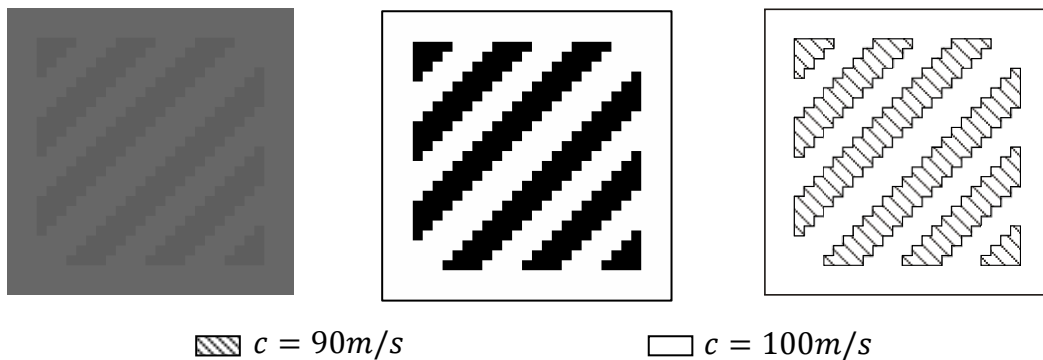


Figura 18 – Característica do quarto meio estudado

A origem do sistema cartesiano foi posicionada no canto esquerdo superior das imagens. A direção  $\hat{i}$  está na horizontal, da esquerda para direita, enquanto a direção  $\hat{k}$  é vertical, de cima para baixo. Cada imagem possui  $29m$  de altura e largura, que são formadas com  $29 \times 29$  pixels, e a velocidade de referência adotada foi de  $c_0 = 100m/s$ .

O posicionamento das fontes e receptores se fez sempre pelas bordas de cada imagem, ilustrado pela figura 19, respeitando cada uma das três configurações, como mostrado nas seções referentes às simulações, no capítulo anterior. Foram utilizadas 29

fontes e 29 receptores, espaçados entre si com  $d_{ef} = d_{er} = 1m$ . As fontes aplicam no meio um sinal parabólico com a seguinte característica<sup>1</sup>:

$$p_i(\mathbf{r}_f, t_j) = \frac{(j-1) \cdot (j - N_t)}{5} \quad (3.1)$$

Onde  $N_t = 29$ ,  $\Delta t = 0,01s$  e  $j = 1, \dots, N_t$ .

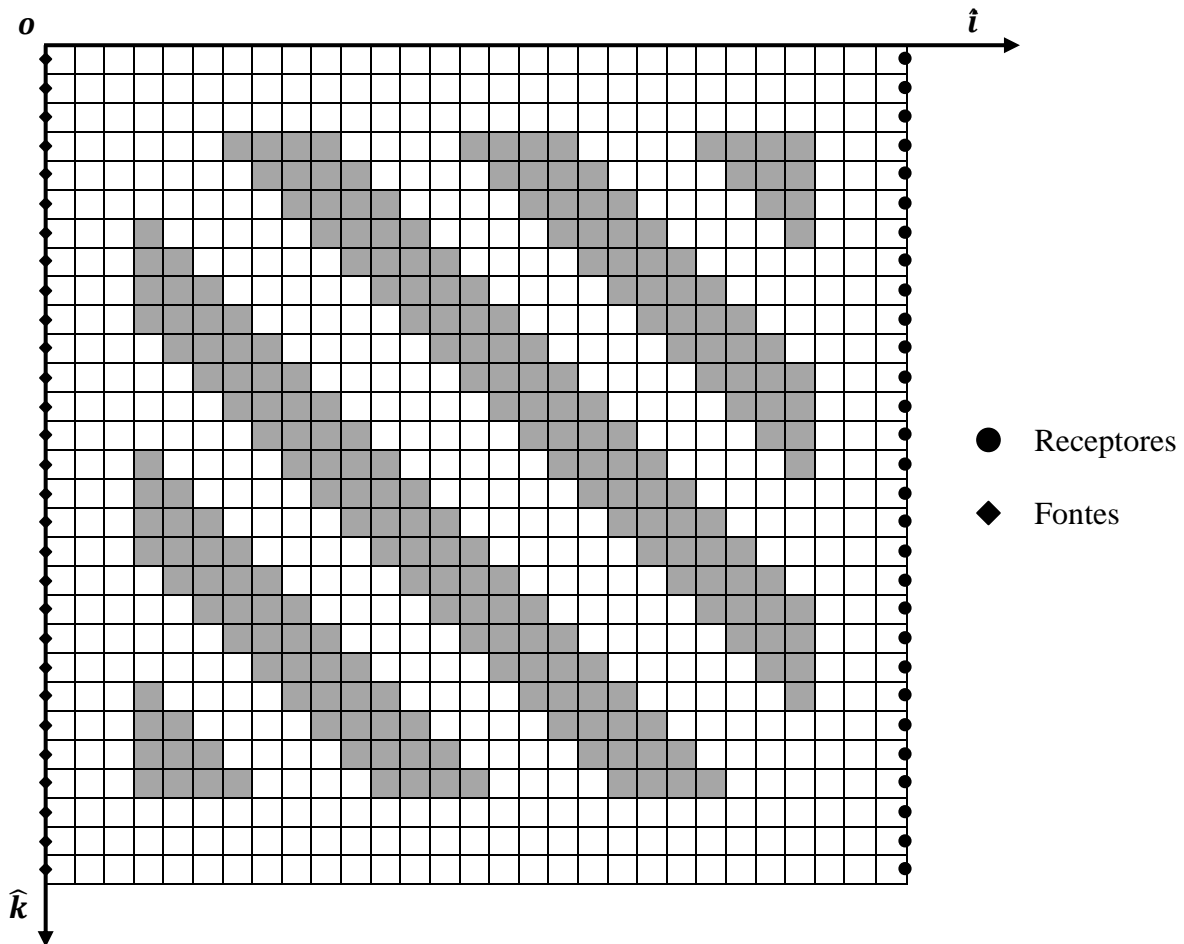


Figura 19 – Exemplo de posicionamento das fontes e receptores (cwc)

As informações simuladas (por Born ou Rytov) são levadas ao programa, que gera a tomografia de difração, de acordo com a configuração selecionada. Em seguida, está apresentado todo o conjunto de ensaios obtidos, da tabela 1 a 6, divididos pelo tipo de configuração. À esquerda posiciona-se a imagem original, seguida pela imagem reconstituída. Complementa-se a visualização com a imagem reconstituída com alto contraste e, por último, a imagem diferença. O erro médio calculado é apenas a média dos valores contidos em cada pixel da figura diferença.

<sup>1</sup> A função impulso ocasiona um ponto de singularidade na posição das fontes. Essa questão não foi aprofundada por falta de tempo, mas nitidamente carece de muita atenção.

Tabela 1 – Tomografia por difração, Born, entre poços

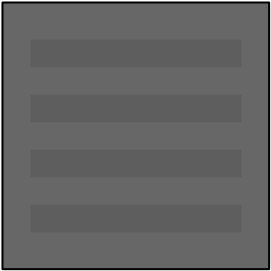
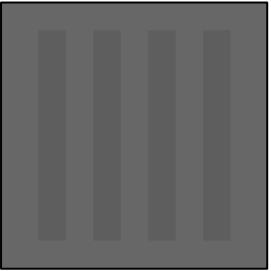
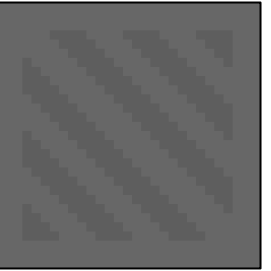
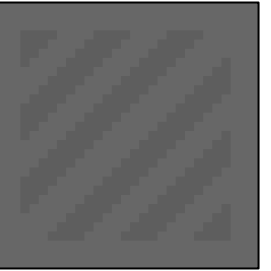
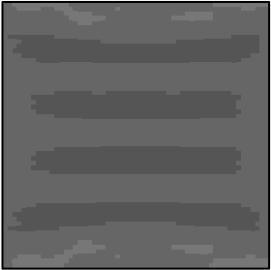
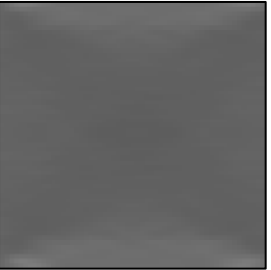
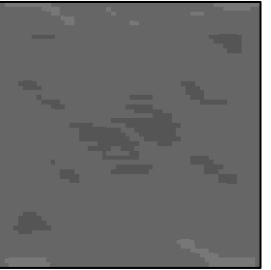
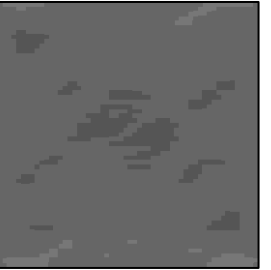
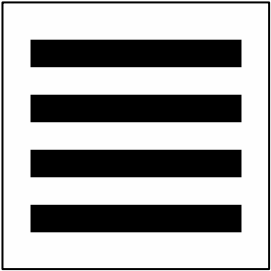
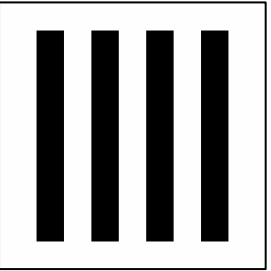
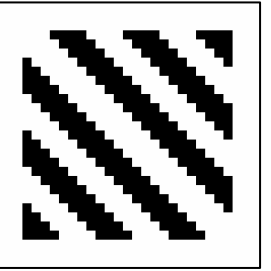
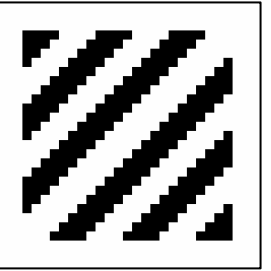
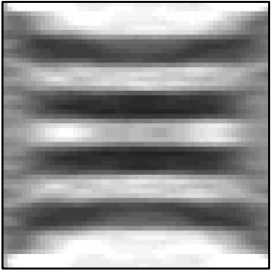
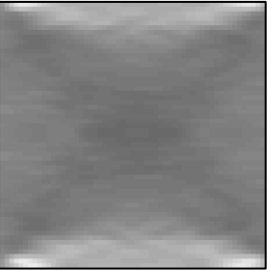
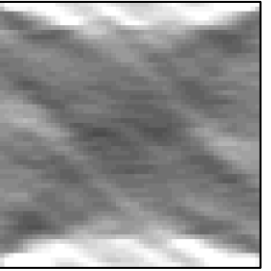
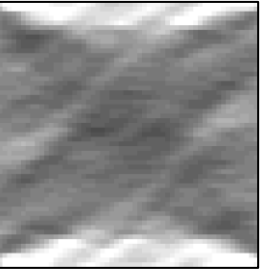
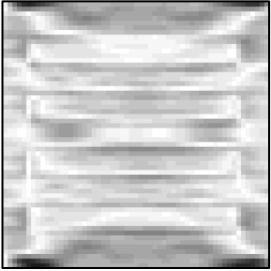
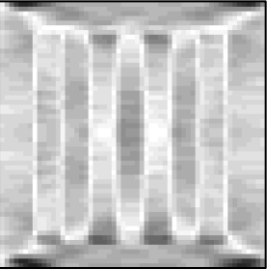
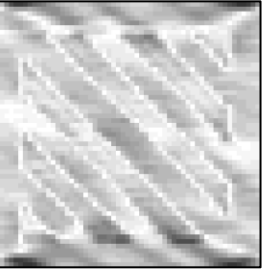
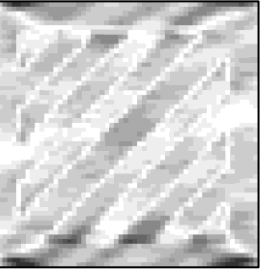
	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Original				
Recuperada				
Contraste original				
Contraste recuperada				
Contraste diferença				
Erro	5,34472	5,52631	5,01015	4,94890

Tabela 2 – Tomografia por difração, Rytov, configuração entre poços

	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Original				
Recuperada				
Contraste original				
Contraste recuperada				
Diferença				
Erro	5,28962	5,54570	4,97199	4,90027

Tabela 3 – Tomografia por difração, Born, configuração vertical

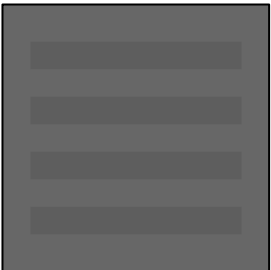
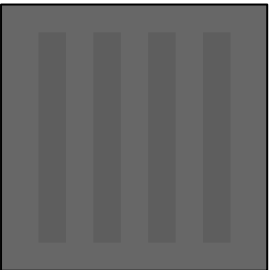
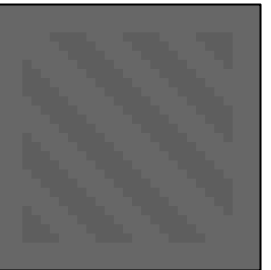

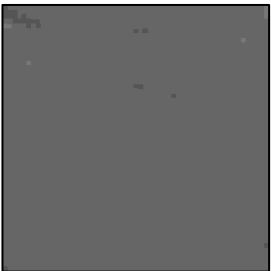
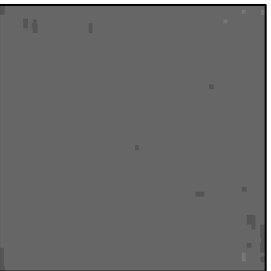
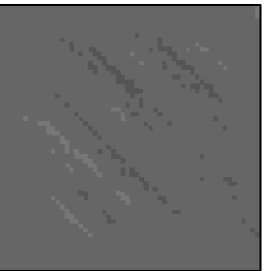
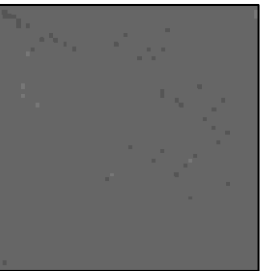
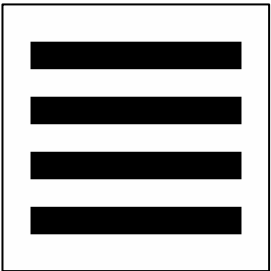
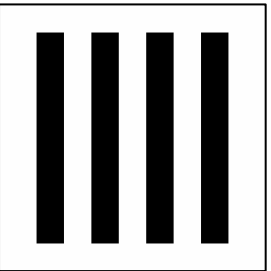
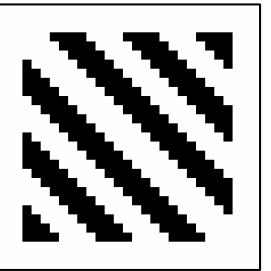
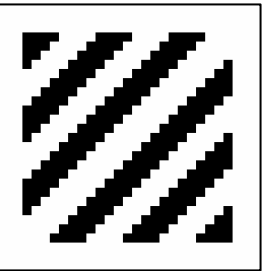
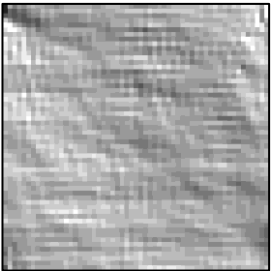
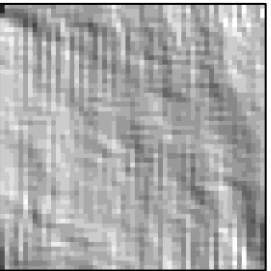
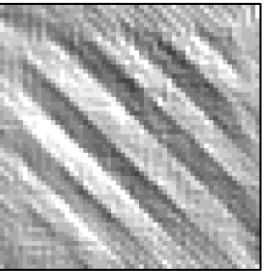
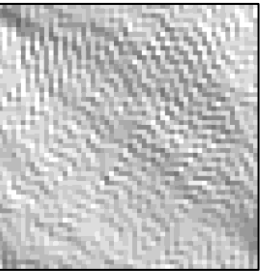

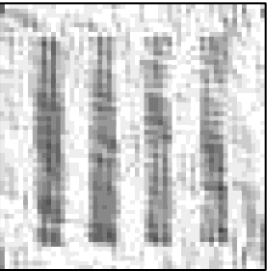
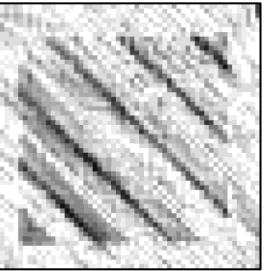
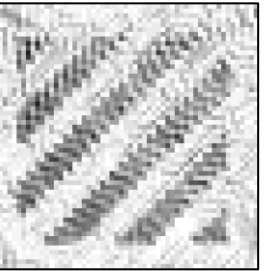
	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Original				
Recuperada				
Contraste original				
Contraste recuperada				
Contraste diferença				
Erro	5, 18344	5, 12896	4, 92859	5, 15604

Tabela 4 – Tomografia por difração, Rytov, configuração vertical

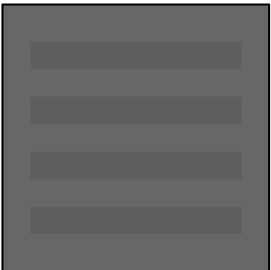
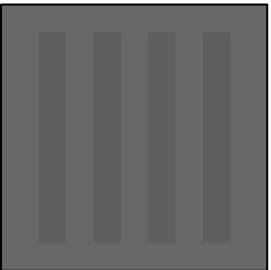
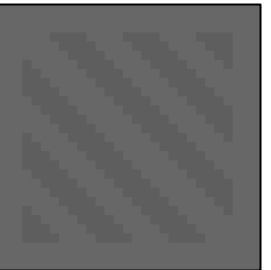
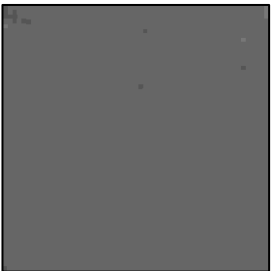
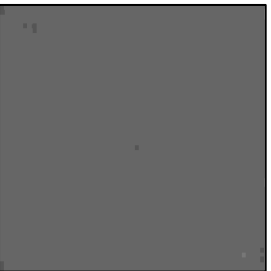
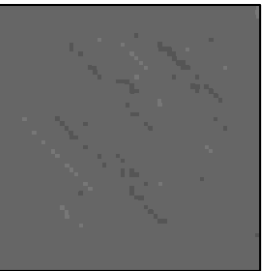
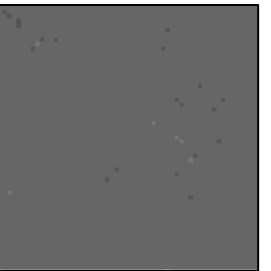
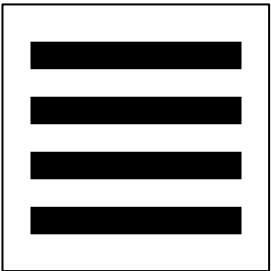
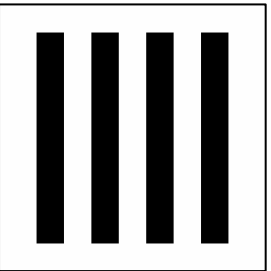
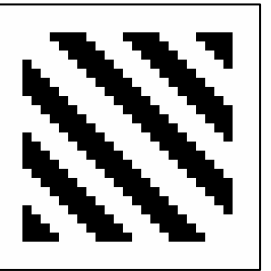
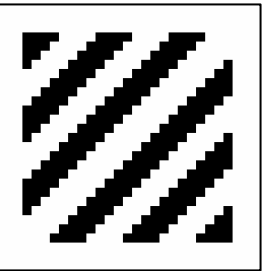
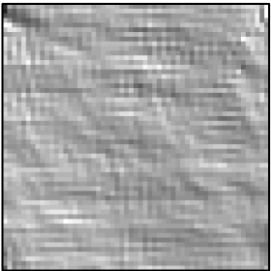
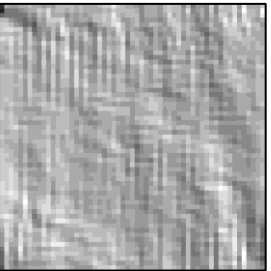
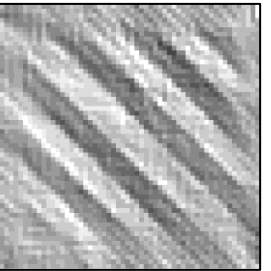
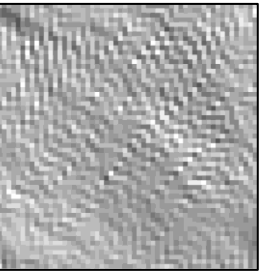


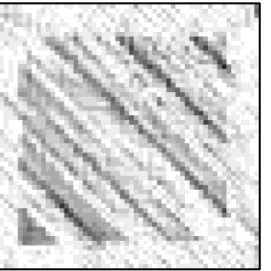
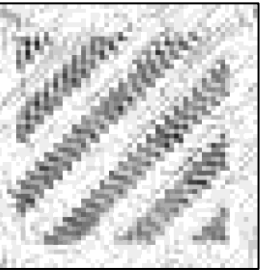
	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Original				
Recuperada				
Contraste original				
Contraste recuperada				
Diferença				
Erro	4,94213	4,91258	4,55832	4,97753

Tabela 5 – Tomografia por difração, Born, configuração de reflexão na superfície

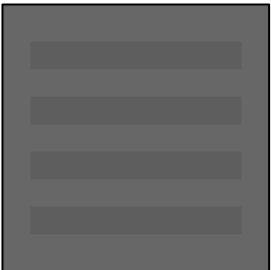
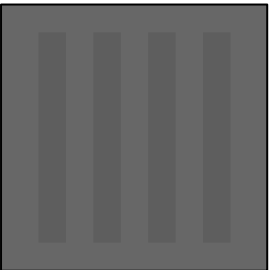
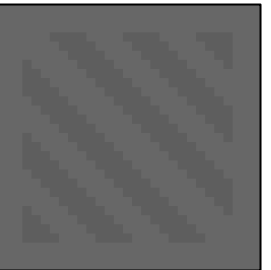


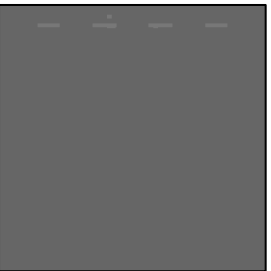
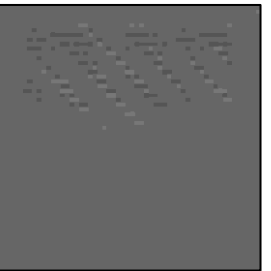
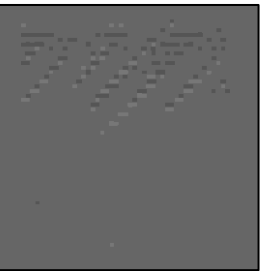
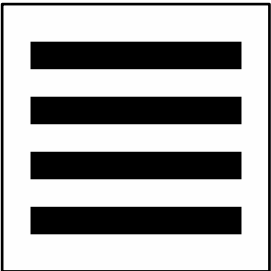
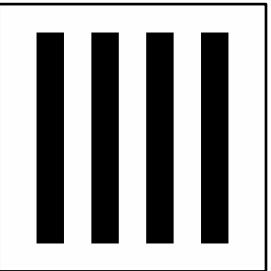
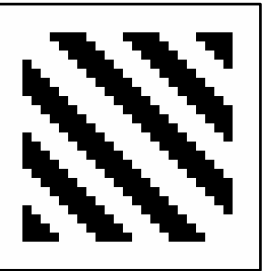
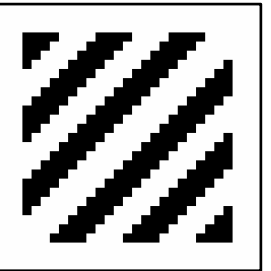
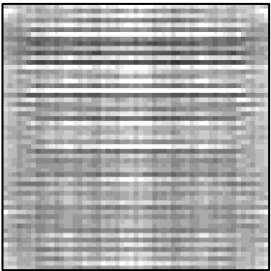
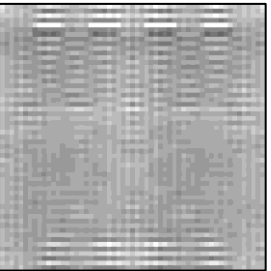
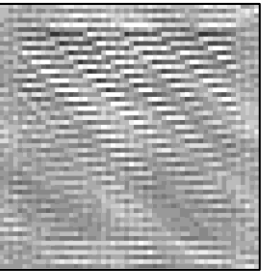
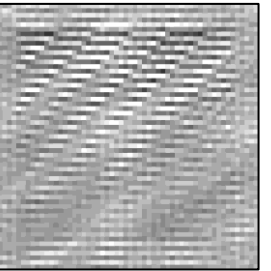

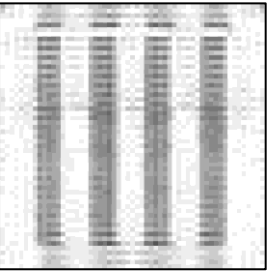
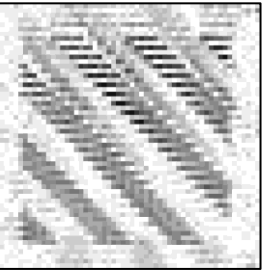
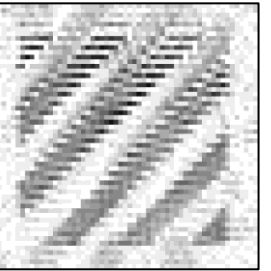
	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Original				
Recuperada				
Contraste original				
Contraste recuperada				
Contraste diferença				
Erro	5, 61557	4, 60572	5, 47706	5, 49492

Tabela 6 – Tomografia por difração, Rytov, configuração de reflexão na superfície

	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Original				
Recuperada				
Contraste original				
Contraste recuperada				
Diferença				
Erro	5, 61711	4, 59987	5, 46629	5, 48199

O conjunto apresentado é limitado quanto a sua dimensão, mas capacita o leitor a ter uma ideia sobre as peculiaridades que uma aplicação prática possa ter. No quarto capítulo estão elencadas todas as observações pertinentes, sobre tudo que foi mostrado até agora, com maior destaque à qualidade das imagens obtidas nas simulações.

Em se tratando das imagens apresentadas, algumas informações são necessárias para sua melhor interpretação. As imagens originais apresentam o conteúdo do meio, representando, através dos tons de cinza, a velocidade de propagação da onda acústica. Uma imagem em tons de cinza apresenta, em cada pixel, uma variação de 8 bits, que se traduz como uma variação de zero a 255, onde o zero corresponde ao preto e, ao fim da escala, encontra-se o branco, identificado por 255. Então, áreas com tons mais escuros significam regiões com menor velocidade de propagação, e o contrário se observa nas regiões mais claras.

As relações apresentadas são fidedignas às imagens originais e recuperadas. Por outro lado, a fim de facilitar a visualização da diferença entre a imagem recuperada e a imagem original, assim como as nuances escondidas nas imagens recuperadas, admitiu-se um tratamento de imagem para cada uma delas. As imagens que demonstram a diferença ficaram claras demais, e para tal aplicou-se um balanceamento de contraste, onde todos os tons abaixo de 230 foram levados a zero, e o restante, até 255, varia linearmente do preto até o branco. Para interpretar essas imagens é preciso entender que áreas claras representam regiões onde a tomografia por difração trouxe resultados próximos à realidade simulada, enquanto pontos escuros guardam um grande erro até a imagem original. Para as imagens recuperadas, a faixa de contraste residiu entre 80 e 110, de forma que a interpretação é idêntica à imagem original.

#### 4. CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

O fechamento da dissertação ocorre com as conclusões que surgiram durante todo o processo de pesquisa e escrita. Após a organização de todas as imagens e conceitos sobre tomografia é que se pode pontuar alguns aspectos, referentes à teoria descrita no primeiro capítulo, assim como sobre a parte prática contida nos restantes. Com o objetivo de deixar o texto com clareza, serão apresentados tópicos curtos, contendo uma observação por vez. No final do capítulo constam sugestões de futuros estudos.

##### 1) A reflexão da onda e a equação de Lippmann-Schwinger aproximada

Após a dedução da equação de Lippmann-Schwinger, indaga-se se a mesma é capaz de modelar a reflexão das ondas acústicas que se propagam pelo meio estudado. Para solucionar a dúvida, idealizou-se uma configuração contendo um meio homogêneo infinito 2D, uma fonte posicionada sobre o eixo  $\hat{\mathbf{i}}$  e dois receptores também posicionados sobre o mesmo eixo da fonte, mas equidistantes da origem do sistema. O meio a ser estudado possui propriedades diferentes apenas sobre o eixo  $\hat{\mathbf{k}}$ , tal que  $M(x, z) = 0 \forall x \neq 0$  e fora dessa condição,  $M(0, z) = M(z)$ , como se fosse um “espelho”. Substituindo essas condições na equação(1.41), e considerando a função de Green na forma (1.38):

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) &= \int_A \frac{k_0^2(\omega)}{16} \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}'\|) \\
 &\quad \times \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) d\mathbf{r}' \\
 \tilde{p}_d(x_r, z_r; \omega) &= \frac{k_0^2(\omega)}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, z) \\
 &\quad \times \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x_f - x)^2 + (z_f - z)^2}\right) \\
 &\quad \times \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x_r - x)^2 + (z_r - z)^2}\right) dz \\
 \tilde{p}_d(x_{r1}, 0; \omega) &= \frac{k_0^2(\omega)}{16} \int_{-\infty}^{\infty} M(z) \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x_f)^2 + (-z)^2}\right) \\
 &\quad \times \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0 \sqrt{(x_{r1})^2 + (-z)^2}\right) dz
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

E para o segundo receptor:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(x_{r2}, 0; \omega) &= \frac{k_0^2(\omega)}{16} \int_{-\infty}^{\infty} M(z) \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0\sqrt{(x_f)^2 + (-z)^2}\right) \\ &\times \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0\sqrt{(x_{r2})^2 + (-z)^2}\right) dz \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como  $(x_{r2})^2 = (x_{r1})^2$ , conclui-se que  $\tilde{p}_d(x_{r1}, 0; \omega) = \tilde{p}_d(x_{r2}, 0; \omega)$ . Isso induz a pensar que a equação de Lippmann-Schwinger apenas modela a difração da energia pelo meio. Em um caso de reflexão, como parte da energia é desviada ao atravessar a interface, é de se esperar que  $\tilde{p}_d(x_{r1}, 0; \omega) \neq \tilde{p}_d(x_{r2}, 0; \omega)$ . A diferença de pressão citada pode ser observada quando calculada a pressão total nos receptores:

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.29)$$

$$\tilde{p}(x_{r1}, 0; \omega) = \tilde{p}_i(x_{r1}, 0; \omega) + \tilde{p}_d(x_{r1}, 0; \omega)$$

$$\tilde{p}(x_{r1}, 0; \omega) = \frac{i}{4} \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0|x_{r1} - x_f|) + \tilde{p}_d(x_{r1}, 0; \omega) \quad (4.3)$$

Para o segundo receptor:

$$\tilde{p}(x_{r2}, 0; \omega) = \frac{i}{4} \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0|x_{r2} - x_f|) + \tilde{p}_d(x_{r2}, 0; \omega) \quad (4.4)$$

Como  $|x_{r2} - x_f| \neq |x_{r1} - x_f|$ , é grande a possibilidade de  $\tilde{p}(x_{r2}, 0; \omega) \neq \tilde{p}(x_{r1}, 0; \omega)$ . Mesmo assim, o importante é ter mostrado que a equação de Lippmann-Schwinger aproximada não modela a reflexão das ondas acústicas. Com isso, deduz-se que a tomografia por difração não seja capaz de aproveitar as reflexões que o meio produz no campo incidente e difratado. Essa ideia prevê uma deficiência na inversão, e a dúvida se a equação de Lippmann-Schwinger sem aproximações seria capaz de modelar a reflexão da onda acústica pelo meio estudado. Como dito antes, a equação (1.37) foi deduzida de forma escalar. Seria uma grande sugestão também a procura, ou desenvolvimento, de uma equação de Lippmann-Schwinger vetorial, pois talvez os efeitos de difração, refração e reflexão sejam todos modulados com uma única equação.

## 2) A perspectiva de visualização de imagens maiores

É de se esperar que o programa criado seja capaz de visualizar grandes áreas geológicas. De fato, o aumento do tamanho das imagens traz um erro associado cada

vez maior, como pode se supor ao ler o apêndice C. Esse erro causa uma queda de definição da imagem, a ponto de perder o detalhamento das formas visualizadas.

Talvez, de acordo com a aplicação, essa perda de qualidade não afete a investigação em si, mas há de se convir que o método de posicionamento das respostas precisa ser aprimorado. A regressão linear associa um erro cada vez maior à imagem, que não melhora, mesmo que seja entregue uma quantidade maior de dados ao programa. Como as imagens obtidas nesse trabalho já pecam quanto à sua visualização (com apenas duas exceções), obter imagens maiores pode ser extremamente frustrante.

### 3) Comparação entre as aproximações de Rytov e Born

Pôde-se observar que o programa tomográfico se sensibiliza um pouco, de acordo com o tipo de simulação utilizada para se gerar o modelo. Essa mudança pode ser observada por uma discreta diferença entre os erros médios calculados de cada figura. Talvez uma escolha mais criteriosa dos meios possibilite um maior contraste comparativo entre as duas aproximações.

Observa-se que as respostas apresentam variações suaves<sup>1</sup> de propriedade, diferente das condições abruptas existentes nas imagens originais. Essa suavidade retrata as condições necessárias<sup>2</sup> à aplicação das aproximações, tanto de Born, quanto de Rytov. Esse fato limita o potencial de resposta, e para superá-lo deve ser necessário utilizar outras abordagens de linearização da equação de Lippmann-Schwinger.

Cada conjunto de aproximação oferece resultados parecidos. De uma maneira geral, Rytov apresenta os menores erros médios calculados, quando comparado com as imagens tomográficas obtidas pela aproximação de Born.

### 4) Comparação entre as três configurações ensaiadas

O exame das imagens obtidas leva à conclusão que apenas duas delas apresentam bons resultados. Trata-se do primeiro e terceiro meios, ensaiados na configuração entre poços e vertical, respectivamente, tanto simulados com a aproximação Born como a Rytov. Essa observação não é uma surpresa, e está de acordo

---

<sup>1</sup> Excetuando a configuração de reflexão na superfície.

<sup>2</sup> A aproximação de Born também necessita que o meio estudado apresente um gradiente de variação baixo.

com a explicação dada por KAK *et al.* [1], através do estudo das funções que regem cada uma das configurações. Começando pela configuração entre poços:

$$\frac{4 \cdot \gamma_{n_r} \cdot \gamma_{n_f} \cdot \tilde{p}_d(k_{n_f}, k_{n_r})}{k_0^2 \cdot e^{i(\gamma_{n_r} \cdot d_r - \gamma_{n_f} \cdot d_f)}} = \tilde{M}(k_x, k_z) \quad (2.14)$$

A manipulação da equação acima listada, conjuntamente com as equações (2.12), (2.13), (2.15) e (2.16), considerando o tipo de modelo ensaiado nesse trabalho, mostra os pontos de  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  possíveis de serem recuperados pela equação (2.14). Mesmo que a equação fosse analisada de maneira contínua, em vez de pontos, existiria uma sombra de um “oito”, simétrico em relação aos dois eixos, na configuração entre poços.

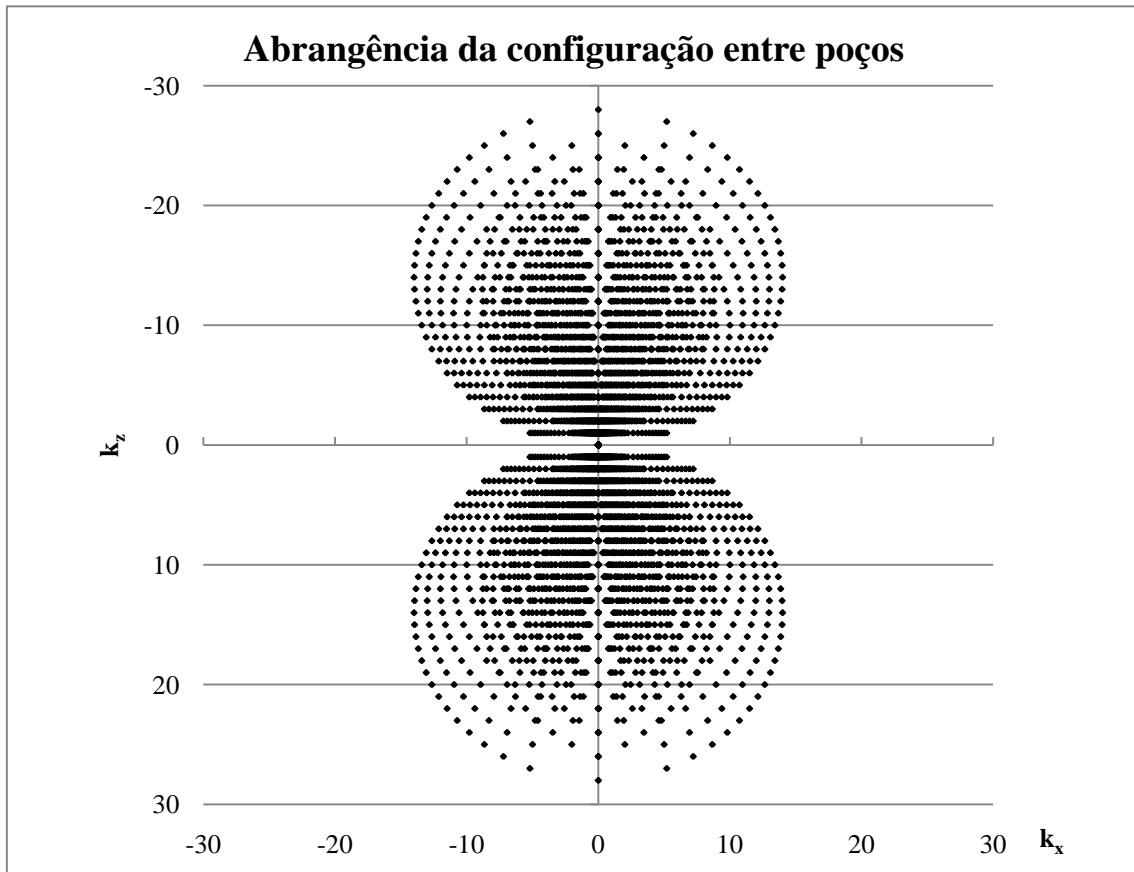


Gráfico 1 – Área de atuação da equação (2.14) na configuração entre poços

O que se observa, com o gráfico acima, é que a configuração entre poços apresenta uma tendência em seu imageamento. Nesse caso, imagens com um conteúdo muito denso em volta do eixo  $\hat{k}_z$  terão uma visualização mais fiel à realidade, mas todo conteúdo que estiver fora da área desse “oito” será descartado pela inversão (IFFT2D).

Isso pode causar certa desconfiança no método, pois uma imagem recuperada sem informação representa duas coisas: um meio sem não-homogeneidades, ou que a informação existente está fora no espectro de visualização<sup>1</sup> da configuração.

Agora é a vez de analisar a configuração vertical. Utilizando as equações (2.12), (2.13), (2.14), (2.39) e (2.40), da mesma forma que antes, obtém-se o seguinte gráfico, que mostra a abrangência de espectro dessa configuração:

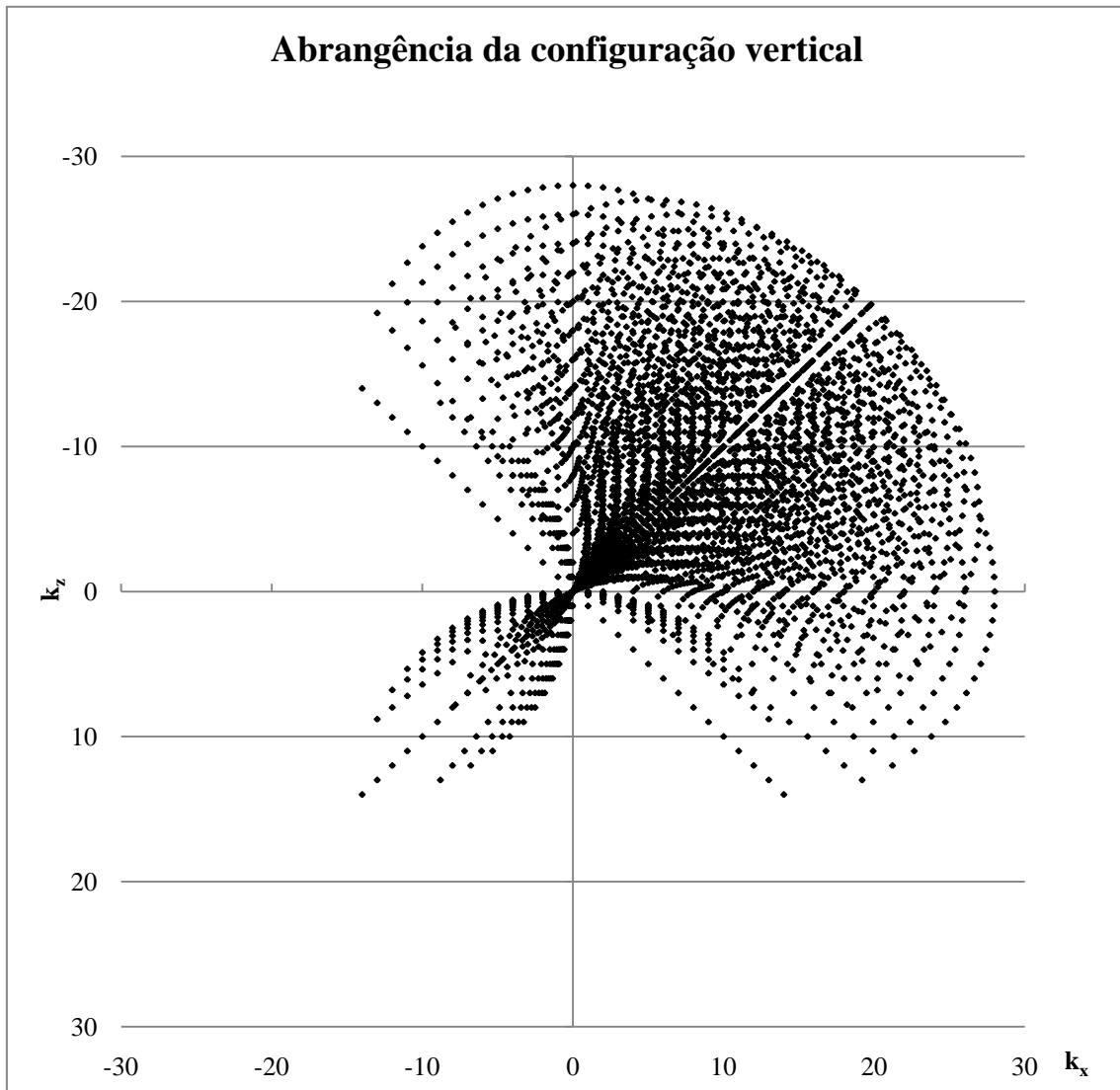


Gráfico 2 – Área de atuação da equação (2.14) na configuração vertical

Por último, a configuração de reflexão na superfície é analisada. Utilizando as equações (2.12), (2.13), (2.49), (2.50) e (2.51), obtém-se o seguinte gráfico, que mostra a abrangência de espectro dessa configuração:

<sup>1</sup> Para a configuração entre poços é a tal zona do “oitto”.

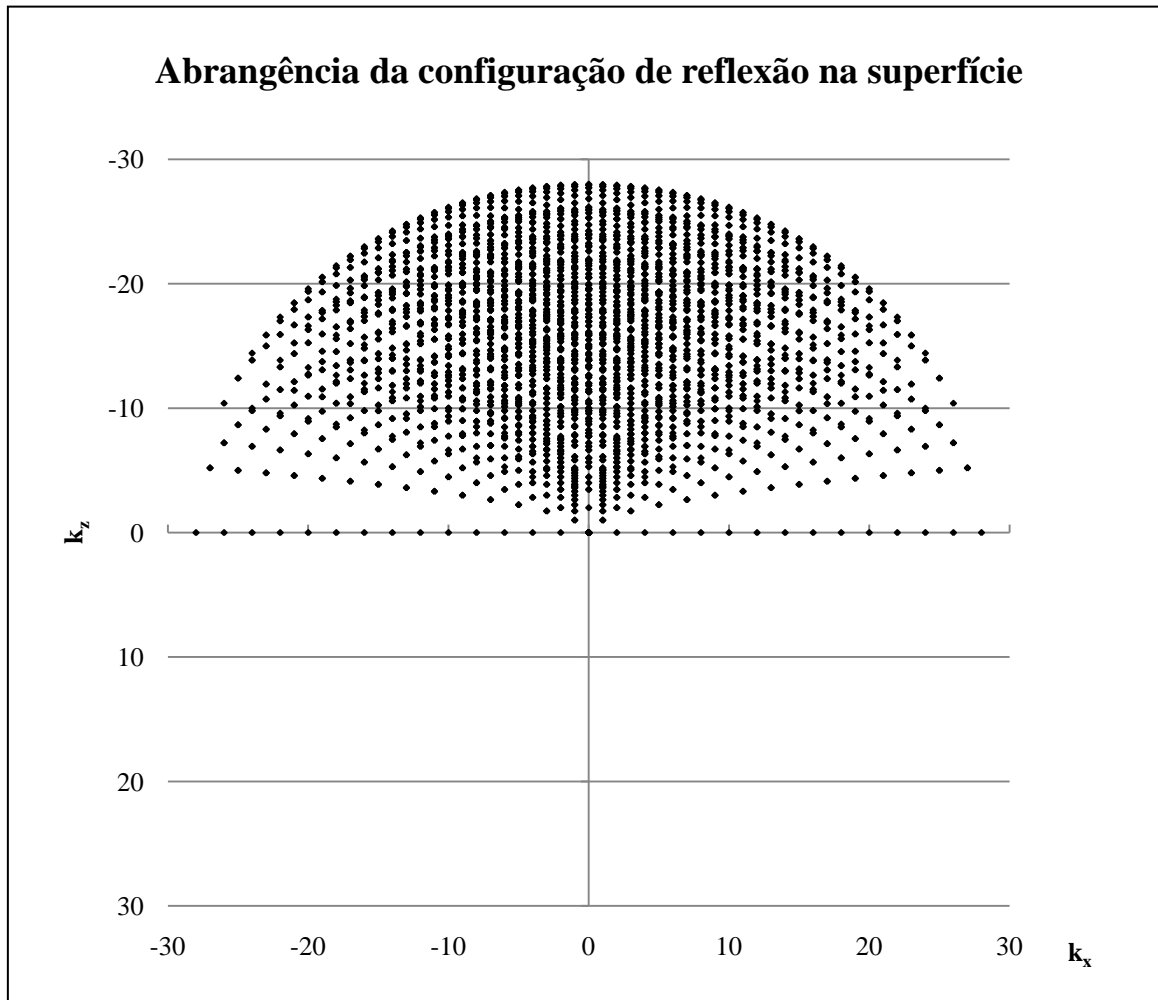


Gráfico 3 – Área de atuação da equação (2.14) na configuração de reflexão

Não foi mencionado acima que a análise da função (2.14), nas três configurações propostas, ocorreu apenas para os números de onda  $k_0$  positivos. A análise para os valores negativos é redundante, contendo apenas o conjugado de tudo que já foi obtido. A simetria no gráfico deve ser respeitada, pois a imagem original é uma função real.

A seguir, nas tabelas 7, 8 e 9, estão dispostas as imagens contendo o campo  $\tilde{M}(k_x, k_z)$  de cada meio estudado, para as três configurações consideradas. A maneira de visualização apresenta apenas o módulo de cada parte discreta e, quanto maior esse módulo, mais clara será a sua representação. Abaixo de cada imagem original, encontra-se uma imagem melhorada por contraste, onde se observa melhor as áreas que possuem algum conteúdo de informação. Em seguida estão dispostas as máscaras de corte e por último, são ilustradas as imagens “cortadas” pela abrangência de espectro de cada configuração:

Tabela 7 – Informação resultante da configuração entre poços

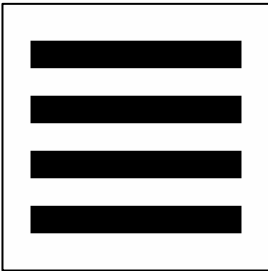
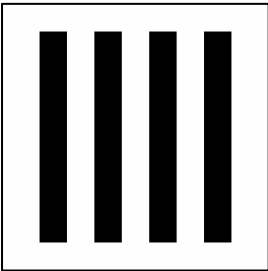
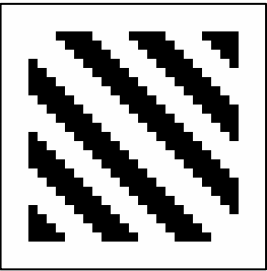
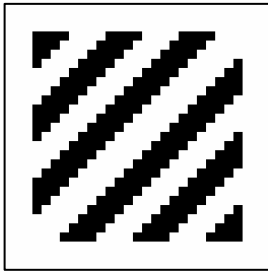
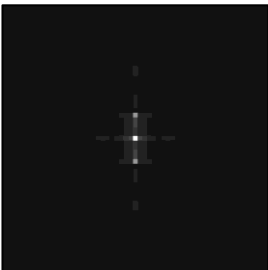
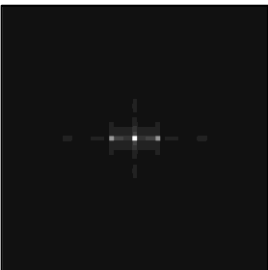
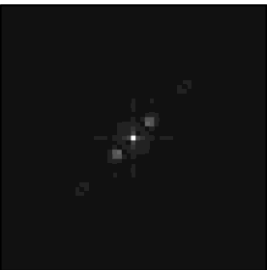
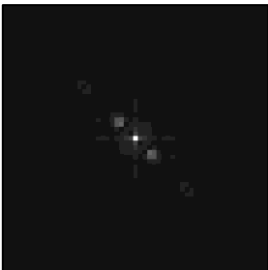
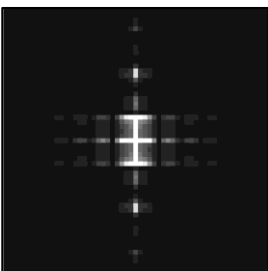
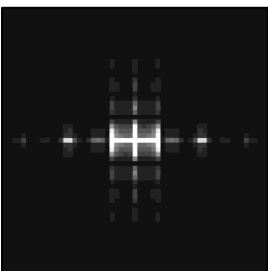
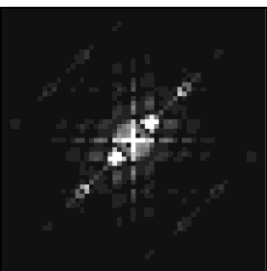
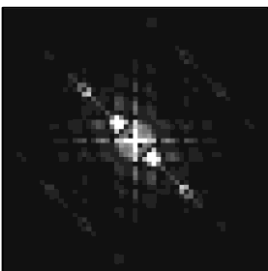
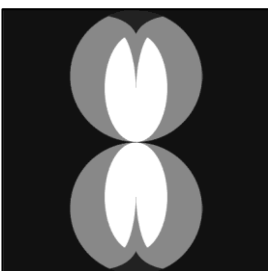
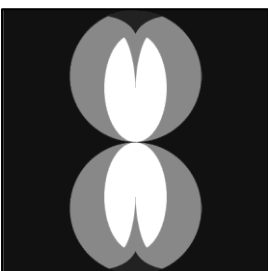
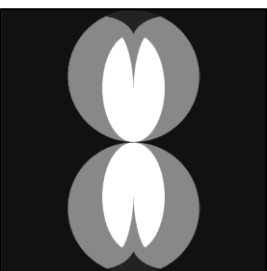
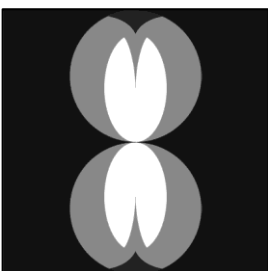
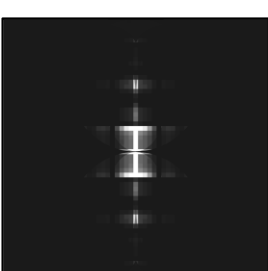
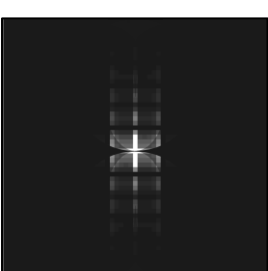
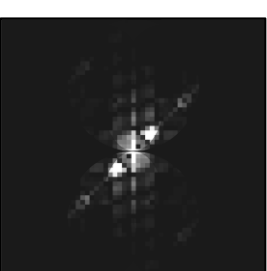
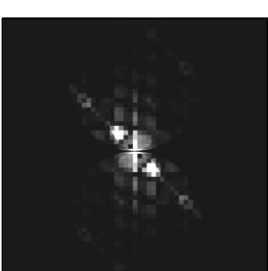
	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Contraste original				
$\tilde{M}$ original				
$\tilde{M}$ contraste original				
Máscara de corte				
Imagem cortada				

Tabela 8 – Informação resultante da configuração vertical

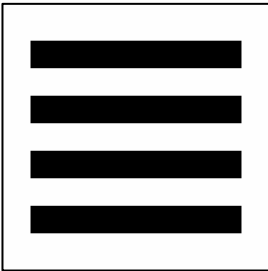
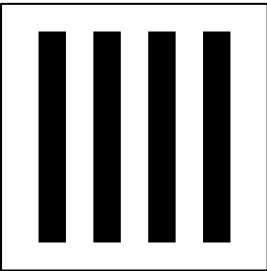
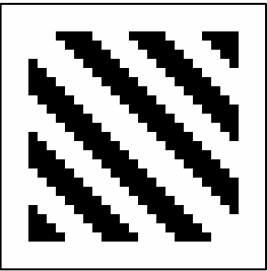
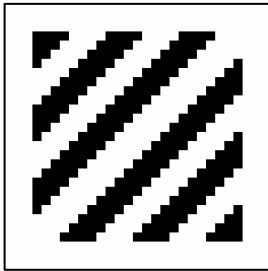
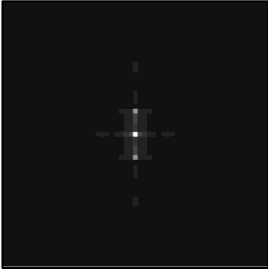
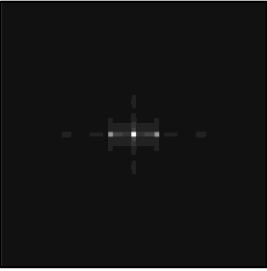
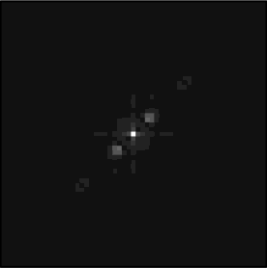
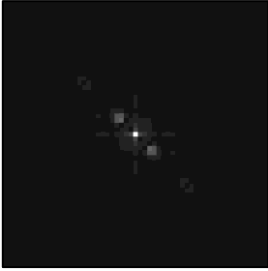
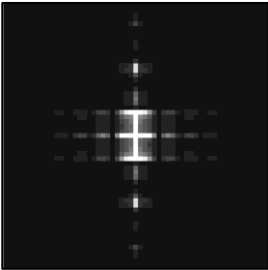
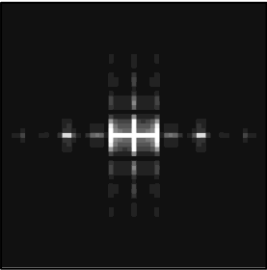
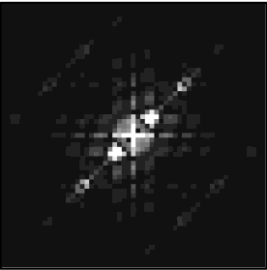
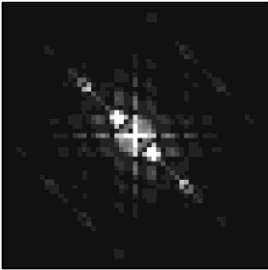
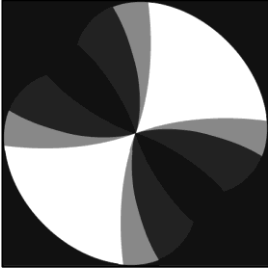
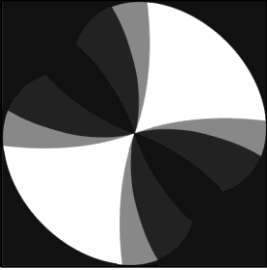
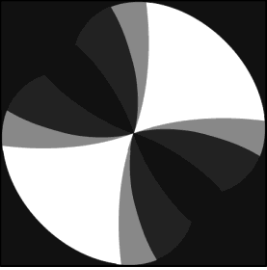
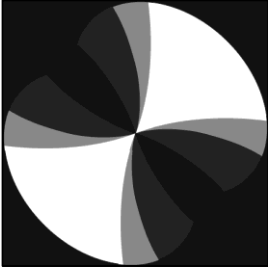
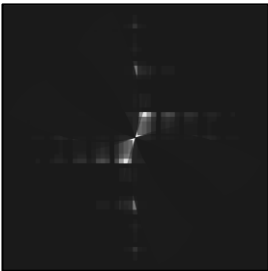
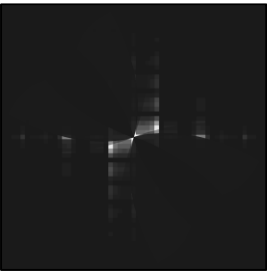
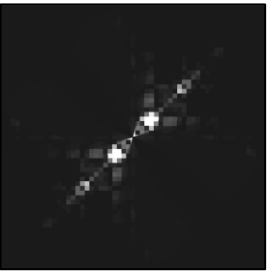
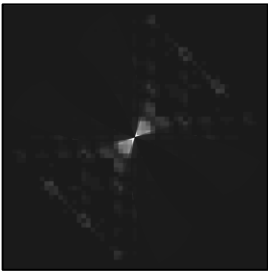
	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Contraste original				
$\tilde{M}$ original				
$\tilde{M}$ contraste original				
Máscara de corte				
Imagem cortada				

Tabela 9 – Informação resultante da configuração de reflexão

	1º meio	2º meio	3º meio	4º meio
Contraste original				
$\tilde{M}$ original				
$\tilde{M}$ contraste original				
Máscara de corte				
Imagem cortada				

Olhando as imagens, pode-se observar que, devido ao “corte” que cada configuração faz na resposta, existe uma relação entre o tipo de meio analisado. No caso da configuração entre poços, o primeiro meio apresenta uma boa imagem de resposta, pois a parte importante do conteúdo de não-homogeneidades se enquadra bem na máscara de corte. Alguma não-homogeneidade pôde ser vista nos terceiro e quarto meios, pois alguma informação conseguiu passar, mas como existiu um pouco de “corte”, não houve como identificar nada além da orientação de estratificação dos meios. Já o segundo meio foi muito prejudicado com o corte, de forma que a sua imagem recuperada, por não poder conter informação suficiente, não passou de uma mancha cinza.

Na configuração vertical, a máscara de corte apresentou-se muito restritiva, quando considerados os meios estudados. Isso acarretou em apenas o terceiro meio poder ser visualizado com segurança. Por parte dos primeiro e segundo meios, apenas a estratificação foi identificada, de forma bem precária. O quarto meio sofreu um corte tão grande na informação, que não se torna digno de uma identificação geológica.

A configuração de reflexão na superfície apresenta a máscara de corte mais abrangente entre as três configurações. Mas, foi uma surpresa receber os resultados das simulações, pois nenhum deles apresentou as não-homogeneidades de forma concreta. Era esperado que, pelo menos, o primeiro meio pudesse ser visualizado. As imagens cortadas dessa configuração são muito semelhantes às imagens cortadas apresentadas na configuração entre poços, por isso surge uma grande dúvida sobre a implementação do programa para essa configuração, ou mesmo o simulador usado. O problema de identificar se existe algum erro no código fonte é que os programas são muito parecidos, e como funcionou muito bem para as duas primeiras configurações, não há onde se suspeitar sobre a localização de algum erro.

Mesmo com esta última questão, o que se conclui sobre esse método de imageamento apresentado é a restrição entre a forma de aplicação (configuração) e característica do meio estudado. Uma boa aplicação da tomografia por difração necessita de um “palpite” inicial sobre a orientação das não-homogeneidades do subsolo. Por isso, o método recebe um caráter acessório, ou apenas de confirmação, indo contra a expectativa inicial do autor.

Mas a restrição do método não pode ser definida de maneira tão pétrea. Existe a possibilidade, sem confirmação, de que a máscara de corte de cada configuração possa ser modificada. Os modelos mostrados nesse capítulo correspondem exatamente às características das simulações do capítulo anterior. Nada impede a variação dos parâmetros, como  $c_0$ ,  $N_t$  e  $\Delta t$ . Especula-se que essas variáveis modifiquem a dimensão dos “cortes”, e talvez a abertura se torne ampla ao ponto de desprezar uma parte menor da informação das não-homogeneidades. Isso possibilitaria um pouco de versatilidade e exatidão à tomografia de difração, tornando o resultado independente da configuração escolhida.

5) Sobre uma alternativa de inversão:

Outra forma evidente de obter resultados com esse tipo de tomografia aponta para a aplicação de problemas inversos. Observando a equação de Lippmann-Schwinger aproximada, fica nítida tal abordagem. Relembrando a equação:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \cong - \int_A k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A.2) ou (B.19)}$$

A partir do momento que a equação é discretizada, como apresentado nas subseções relativas aos simuladores:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_n) &= \tilde{p}_f(\omega_n) \cdot \frac{k_0^2(\omega_n)}{16} \sum_{(x_n=1, z_n=1)}^{(x_n=3, z_n=3)} M(x_n, z_n) \\ &\times \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|) \\ &\times \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0(\omega_n) \|\mathbf{r}_{n_r} - \mathbf{r}(x_n, z_n)\|) \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (2.18)$$

Organiza-se de forma matricial, apenas um par fonte-receptor:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_1) \\ \tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_2) \\ \vdots \\ \tilde{p}_d(\mathbf{r}_{n_r}, \omega_l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1}(\omega_1) & S_{1,2}(\omega_1) & \dots & S_{n,m}(\omega_1) \\ S_{1,1}(\omega_2) & S_{1,2}(\omega_2) & \dots & S_{n,m}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}(\omega_l) & S_{1,2}(\omega_l) & \dots & S_{n,m}(\omega_l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M(x_1, z_1) \\ M(x_1, z_2) \\ \vdots \\ M(x_n, z_m) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

tal que:

$$S_{n,m}(\omega_l) = \tilde{p}_f(\omega_l) \cdot \frac{k_0^2(\omega_l)}{16} \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0(\omega_l) \left\| \mathbf{r}_{n_f} - \mathbf{r}(x_n, z_m) \right\| \right) \cdot \mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0(\omega_l) \left\| \mathbf{r}_{n_r} - \mathbf{r}(x_n, z_m) \right\| \right) \Delta x \Delta z \quad (4.6)$$

Que transforma a equação (2.18) em um sistema linear como tal:

$$\{\tilde{p}_d\} = [S]\{\tilde{M}\} \quad (4.7)$$

que é a maneira típica de formulação de um problema inverso, como é definido por ASTER *et al.* [5].

Por curiosidade, a matriz  $[S]$  deve ter 79.239.861 elementos<sup>1</sup>, caso os mesmos dados das simulações sejam utilizados na obtenção de uma imagem. Por experiência prática, o tempo de processamento de um problema com a referida matriz é maior que o tempo gasto pelo programa criado neste trabalho. Esse alto custo computacional pode ser admissível, quando são levadas em conta a possibilidade de se obter imagens mais completas e também a liberdade de posicionamento das fontes e receptores. Como pode ser visto, a equação (4.7) não restringe a posição ou orientação dos elementos de amostragem, pois a mesma modela o problema para apenas um par de fonte-receptor. Pela linearidade do sistema, a inserção de outros pares é feita de forma aditiva, aumentando as linhas da matriz  $[S]$  e do vetor  $\{\tilde{p}_d\}$ .

#### 6) Considerando o contorno do problema

Não se pode deixar de analisar a idéia hipotética de contorno infinito no problema estudado. As configurações apresentadas são propostas de aplicações práticas, mas falta a modelagem da superfície que limita o subsolo e o ambiente acima do solo. Essa questão é mais pertinente à fase de simulação, mas precisa-se esclarecer que as equações (A.2), (B.19) e (2.14) também não levam em consideração essa observação.

A interface entre os meios pode ter sido confundida com o eixo  $\hat{\mathbf{i}}$  em todas as figuras 6, 10 e 12, mas é preciso entender que não há reflexão nessa linha divisória. Os meios estudados foram simulados “imersos” infinitamente, por todos os lados, em um meio constante, com velocidade de propagação  $c_0$ . Como a equação tomográfica é obtida iniciando-se da mesma equação que gera a simulação, há de se concluir que qualquer imagem tomográfica obtida terá como premissa a “imersão” neste meio

---

<sup>1</sup>  $n_M \cdot n_r \cdot n_f \cdot n_\omega = 57 \times 57 \times 29 \times 29 \times 29 = 79.239.861$

hipotético. Ao final, uma imagem reconstituída através de dados obtidos em campo pode apresentar informações sobre o meio que não condizem com a realidade.

O que se conclui depois de todas essas explicações é que, basicamente, o programa de tomografia por difração é capaz de oferecer uma boa resposta frente ao baixo custo computacional apresentado. É bem verdade que ele precise de algumas melhorias em seu código-fonte, principalmente na parte relativa à regressão linear para a solução do problema de mau posicionamento. É possível que exista uma forma de aumentar a máscara de corte de cada configuração, através da manipulação das constantes de amostragem do sinal. Mas, quando há a necessidade de se visualizar um meio complexo, mas que não exija uma resposta imediata do programa, talvez o imageamento baseado nos problemas inversos seja capaz de oferecer um detalhamento de informação melhor que o apresentado pelo teorema generalizado de fatias. Caso a solução do problema inverso seja obtida por um método iterativo, nada mais consensual em se utilizar a resposta obtida pelo teorema generalizado de fatias como estimativa inicial na busca de sua solução.

#### **4.1. Sugestões de trabalhos futuros**

O trabalho então termina, apresentando sugestões para trabalhos futuros. Aqui são apresentadas ideias de continuidade, que antes estavam implícitas no texto deste capítulo:

- 1) Estudar a possibilidade de se manipular a dimensão das “máscaras de corte” de cada uma das configurações, com o objetivo de tornar o método de investigação apresentado mais versátil;
- 2) Determinar uma nova fórmula para quantificar o erro existente em cada imagem recuperada, de forma a representar a qualidade da tomografia em números;
- 3) Abordar a tomografia de difração sísmica como teoria dos problemas inversos, comparando a qualidade das imagens obtidas e o custo computacional envolvido em relação à tomografia baseada no teorema generalizado de fatias;

- 4) Aplicar a tomografia por difração considerando a reflexão da onda pelo meio estudado, e não apenas a difração da onda, como ocorre com a equação de Lippmann-Schwinger;
- 5) Estudar um método melhor para se resolver o problema de mau posicionamento da resposta obtida, diferente da regressão linear usada neste trabalho;
- 6) Aplicar condições de contorno, principalmente quando se trata na superfície que delimita o subsolo e o ambiente livre;
- 7) Estudar uma forma de se obter as equações de inversão tomográfica, com a aplicação das transformadas de Fourier, sem que sejam necessárias as aproximações de Born e Rytov na equação de Lippmann-Schwinger;

## 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] KAK, A.C., SLANEY, M., *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. New York, IEEE Press, 1999.
- [2] HÄGGSTRÖM, M., *Computed tomography of human brain*: Wikipedia.org,2008.  
Disponível em:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Computed\\_tomography\\_of\\_human\\_brain\\_-\\_large.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Computed_tomography_of_human_brain_-_large.png)  
Acesso em: 10 jan. 2010, 22:16:32.  
Direito de reprodução garantido, autorizado pelo autor.
- [3] THOMSON, R., *Photos: 3000 year old mummy seen using high-tech scanner*: *ComputerWeekly.com*, 2009. Disponível em:  
<http://www.computerweekly.com/galleries/234740-9/Showing-Meresamun-inside-the-coffin.htm> Acesso em: 10 jan. 2010, 22:41:12.  
Direito de reprodução garantido, autorizado por Emily Teeter, Ph.D.
- [4] TIEN-WHEN, L., INDERWIESEN, P.L., *Fundamentals of Seismic Tomography*. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists, 1994.
- [5] ASTER, C.R., BORCHERS, B., THURBER, H.C., *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Burlington, Elsevier Academic Press, 2005.
- [6] KINSLER, L.E., FREY, A.R., *Fundamentals of Acoustics*. London, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

## APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DE BORN

A aproximação de Born<sup>1</sup> é a forma mais simples de linearizar a equação de Lippmann-Schwinger. Revendo a equação (1.37):

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') [\tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}', \omega)] \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.37)$$

Supõe-se que o campo difratado  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  possua amplitudes muito pequenas<sup>2</sup>, quando comparado ao campo de onda incidente  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega)$ . Dessa forma, surge a seguinte relação:

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \cong \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \quad (A.1)$$

Substituindo (A.1) na equação de Lippmann-Schwinger, obtém-se:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \cong - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (A.2)$$

KAK *et al.* [1], por sua vez, apresentam uma forma recursiva de linearização. Considerando que na equação (A.2) a resposta linear do campo difratado  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{p}_B^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)$ , por nomeação apenas:

$$\tilde{p}_B^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (A.3)$$

Aplicando  $\tilde{p}_B^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)$  como o campo difratado  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  em (1.37):

$$\tilde{p}_B^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) = - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') [\tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) + \tilde{p}_B^{(1)}(\mathbf{r}', \omega)] \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (A.4)$$

E reaplicando recursivamente a operação, surge o campo de Born de ordem n:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_B^{(n)}(\mathbf{r}, \omega) = & - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') [\tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) + \tilde{p}_B^{(n-1)}(\mathbf{r}', \omega)] \\ & \times \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (A.5)$$

<sup>1</sup> TIEN-WHEN *et al.* [4] e KAK *et al.* [1] apresentam a mesma forma de aproximação de Born.

<sup>2</sup> Essa condição obriga que o meio estudado seja pouco difrativo. Assim, meios com não-homogeneidades muito grandes apresentarão imagens tomográficas muito disformes quanto à realidade.

Na equação acima, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{p}_B^{(n)}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \tilde{p}_d^{(n)}(\mathbf{r}, \omega)$ . O resultado seria a aplicação da equação de Lippmann-Schwinger não-linear, onde ocorre a retroalimentação do campo difratado, atuando como incógnita e parâmetro da equação. KAK *et al.* [1] consideram a equação (A.5) como uma boa maneira de se estudar o processo de difração de um meio. Porém, não existem ainda algoritmos de imageamento baseados nela. Por ora, a inversão apresentada nessa dissertação está baseada na (A.2), que seria a equação do campo de Born de primeira ordem.

## APÊNDICE B – APROXIMAÇÃO DE RYTOV

A equação de Lippmann-Schwinger possui uma segunda forma de linearização. Levando em consideração uma outra suposição, a aproximação de Rytov consegue apresentar a mesma equação linear obtida pela aproximação de Born, porém sua obtenção é mais trabalhosa. A dedução matemática não inicia da equação de Lippmann-Schwinger, como no apêndice A, mas sim da própria equação de Helmholtz. Lembrando que a equação (1.28) está no domínio da frequência,  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$  possui então conteúdo complexo, e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) = A(\mathbf{r}, \omega) \cdot e^{i\theta(\mathbf{r}, \omega)} \quad (\text{B.1})$$

Por sua vez,  $A(\mathbf{r}, \omega)$  será declarada como um valor real e a complexidade da função  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$ , quando houver, ficará a cargo de  $e^{i\theta(\mathbf{r}, \omega)}$ . Trabalhando mais sobre a variável  $A(\mathbf{r}, \omega)$ , se a mesma for transformada em uma função exponencial real, a equação (B.1) passa a ter a seguinte escrita:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) &= e^{\sigma(\mathbf{r}, \omega)} \cdot e^{i\theta(\mathbf{r}, \omega)} \\ \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) &= e^{\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\theta(\mathbf{r}, \omega)} \\ \tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) &= e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo  $\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega)$  da equação (B.2) na equação de Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r}, \omega)] \cdot e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Aplicando a modificação de  $k^2(\mathbf{r}, \omega)$  apresentada na equação (1.33):

$$[\nabla^2 + k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})] \cdot e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Com o operador Laplaciano:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)}] + [k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})] \cdot e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} &= 0 \\ \nabla \cdot [e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, \omega)] + [k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})] \cdot e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} &= 0 \\ e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} \cdot [\nabla^2 \varphi_t(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, \omega)] & \\ + [k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})] \cdot e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Eliminando a parcela comum  $e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)}$ , para todos os valores que  $e^{\varphi_t(\mathbf{r}, \omega)} \neq 0$ :

$$\nabla^2 \varphi_t(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_t(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

Definindo uma função complexa, tal que:

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} \quad (\text{B.7})$$

E a relação entre as funções de fase até aqui criadas nesse apêndice:

$$\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) = \varphi_t(\mathbf{r}, \omega) - \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.6) recebe a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + [\nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] \\ & \quad \times [\nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] + k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) = 0 \\ & \nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + 2\nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \\ & \quad \times \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega) - k_0^2(\omega) \\ & \quad \times M(\mathbf{r}) = 0 \\ & [\nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega)] + \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\ & \quad + 2\nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\ & \quad - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Na dedução da equação de Lippmann-Schwinger, para se chegar a (1.36), houve a necessidade de afirmar que  $[\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = 0$ . Considerando (B.7):

$$[\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$[\nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega)] \cdot e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} = 0 \quad (\text{B.11})$$

E se  $e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} \neq 0$ , pode-se afirmar que o somatório dentro dos colchetes é igual a zero. Removendo essa parcela nula da equação (B.9) e arranjando os termos:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + 2\nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\ & = -\nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Tanto TIEN-WHEN *et al.* [4], quanto KAK *et al.* [1] mudam o enfoque de desenvolvimento para  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)$ . TIEN-WHEN *et al.* [4] afirmam que o

produto será a forma de se medir o campo difratado nessa aproximação. Aplicando o Laplaciano sobre ele, surge:

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 [\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] \\
& \quad = \nabla \cdot [\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] \\
& \nabla^2 [\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] \\
& \quad = \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \nabla^2 \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + 2 \nabla \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad \quad + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

E lembrando a nulidade de (B.10) e a definição (B.7), e substituindo na equação acima:

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) = -k_0^2(\omega) \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \\
& \nabla^2 [\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] \\
& \quad = -\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot k_0^2(\omega) \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + 2 \nabla \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad \quad + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \nabla^2 [\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)] + \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot k_0^2(\omega) \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad = 2 \nabla \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad = 2 \nabla e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad = 2 e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad = 2 \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad = \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot [2 \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + \nabla^2 \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)]
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Observando bem, os termos dentro dos colchetes já apareceram na dedução, e podem ser encontrados na equação (B.12). Substituindo-os:

$$\begin{aligned}
& [\nabla^2 + k_0^2(\omega)] \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\
& \quad = \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot [-\nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

E da mesma forma como foi solucionada a equação diferencial na dedução da equação (1.37), obtém-se<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \int_V \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot [\nabla\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) - k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r})] \\ & \times \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

A equação apresentada relaciona de forma não-linear a função  $M(\mathbf{r})$  e  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)$ , pois como pode ser visto,  $\varphi_d(\mathbf{r}, \omega)$  é uma incógnita que aparece nos dois lados da equação. Assim, tanto a simulação da resposta difratada de um meio, assim como a sua reconstrução de propriedades através do conhecimento desta resposta são questões bem complicadas de se resolver. Por isso, considera-se agora a aproximação de Rytov, que assume  $\nabla\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \ll 1$ . Com essa afirmação<sup>2</sup>, o termo  $\nabla\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla\varphi_d(\mathbf{r}, \omega)$  tende a não participar mais da equação (B.16), surgindo a seguinte forma linear:

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot \varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \cong - \int_V \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) \cdot k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{B.17})$$

Mas, precisa-se entender que a simulação de difração através da aproximação de Rytov não pode resultar da aplicação da equação (B.17), diretamente. Com as definições (B.7), (B.2), (B.8) e (1.29):

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{1.29})$$

$$e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} = e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} + \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$$

$$e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega) + \varphi_d(\mathbf{r}, \omega)} - e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} = \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$$

$$e^{\varphi_i(\mathbf{r}, \omega)} [e^{\varphi_d(\mathbf{r}, \omega)} - 1] = \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega) [e^{\varphi_d(\mathbf{r}, \omega)} - 1] = \tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{B.18})$$

---

<sup>1</sup> A função de Green, nesse caso, possui a mesma formulação apresentada em (1.38) e (1.39). Basta lembrar que quem define a função de Green é o operador existente no problema. No caso é  $\nabla^2 + k_0^2(\omega)$ .

<sup>2</sup> Essa aproximação permite que as não-homogeneidades sejam grandes, o que é um limite para a aproximação de Born. TIEN-WHEN *et al.* [4] e KAK *et al.* [1] comparam as duas aproximações, e mostram que a aproximação de Born também obriga que  $\nabla\varphi_d(\mathbf{r}, \omega) \ll 1$ .

Com a última equação, surge a diferença entre as duas aproximações. Com o conhecimento de  $\tilde{p}_i(\mathbf{r}, \omega)$  e  $\varphi_d(\mathbf{r}, \omega)$ , pode-se conhecer exclusivamente o campo  $\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega)$  gerado pela equação (B.17). Parece um pouco confuso, mas esse pequeno detalhe faz com que as simulações do campo difratado das duas aproximações sejam diferentes. Mas, para efeito da inversão tomográfica, será considerado que a aproximação de Rytov ofereça a mesma equação final de Born:

$$\tilde{p}_d(\mathbf{r}, \omega) = - \int_V k_0^2(\omega) \cdot M(\mathbf{r}') \cdot \tilde{p}_i(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r} \downarrow \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{B.19})$$

O desenvolvimento matemático desta aproximação é realmente cansativo e maior, quando comparado com a aproximação do apêndice anterior. Naturalmente, quando o campo difratado é muito pequeno, ambas as aproximações apresentam respostas similares, como afirma TIEN-WHEN *et al.* [4]. Porém, toda diferença surge quando as não-homogeneidades do meio se tornam significativamente maiores, pois nesse caso a tendência é que as respostas obtidas por Rytov se assemelhem mais com a realidade.

## APÊNDICE C – TOMOGRAFIA POR RAIOS

A tomografia por raios é a forma mais conhecida de tomografia aplicada. Seus conceitos são mais simples que a tomografia de difração. Inclusive, KAK *et al.* [1] afirmam que ela não passa de um caso particular da tomografia que é alvo dessa dissertação. Por acaso, nela não existem conceitos vitais ao entendimento da tomografia por difração, mas ela será disposta agora, pois através desse caso particular foi-se capaz de concluir algo sobre o erro que tais inversões podem associar à imagem recuperada.

O desenvolvimento matemático da tomografia por raios é muito simples também. Tudo parte da capacidade do meio de atenuar a amplitude da energia que lhe é aplicada na hora do estudo. Essa tomografia é chamada por raios, pois desconsidera desvios ou difrações dessa energia, como mostra a figura 20. O feixe penetra o meio, percorre por todo ele sem desviar, refletir ou se espalhar, e do lado oposto se capta a intensidade de saída. A razão entre a intensidade de entrada e de saída é o dado que importa nesse caso. É com ela que se obtém a imagem recuperada do meio estudado. Para iniciar, considere o fenômeno acima regido pela seguinte equação:

$$R(u, \theta) = \int_L I(x, z) dv \quad (C.1)$$

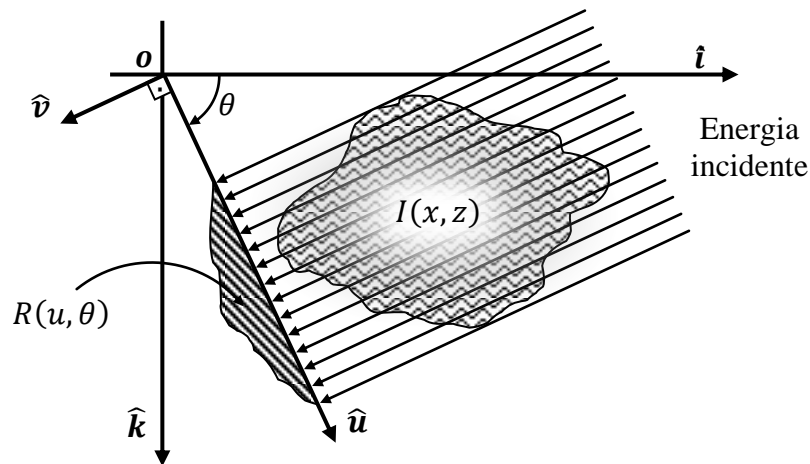


Figura 20 – Esquema de aquisição de dados

A função  $R(u, \theta)$  apresenta a atenuação que os feixes, paralelos ao eixo  $\hat{v}$ , sofrem ao transpor o meio.  $I(x, z)$ , nada mais é que a função atenuação que o feixe

sofre, dependente apenas das coordenadas cartesianas<sup>1</sup>. Uma vez que só haja atenuação dentro do meio estudado, podem-se expandir os limites da integral da seguinte forma:

$$R(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) dv \quad (\text{C.2})$$

Aplicando a transformada de Fourier espacial (1.5) sobre a função  $R(u, \theta)$ , de forma que o domínio  $u$  seja transformado no domínio  $k$ :

$$\mathcal{F}_u[R(u, \theta)] = \tilde{R}(k, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(u, \theta) \cdot e^{-iku} du \quad (\text{C.3})$$

Substituindo (C.2) em (C.3), e lembrando que  $v$  e  $u$  são variáveis independentes entre si:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(k, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) dv \cdot e^{-iku} du \\ \tilde{R}(k, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) \cdot e^{-iku} dv du \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Os eixos  $\hat{v}$  e  $\hat{u}$  são ortogonais entre si, assim como os são os eixos  $\hat{i}$  e  $\hat{k}$ . A referência que há entre esses pares de eixos é o ângulo  $\theta$ . É trivial então, que as variáveis  $v$ ,  $u$ ,  $x$  e  $z$  se relacionem de acordo com as seguintes equações:

$$u = \cos(\theta) \cdot x + \sin(\theta) \cdot z \quad (\text{C.5})$$

$$v = -\sin(\theta) \cdot x + \cos(\theta) \cdot z \quad (\text{C.6})$$

E substituindo<sup>2</sup> em (C.4):

$$\begin{aligned} \tilde{R}(k, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) \cdot e^{-ik[\cos(\theta) \cdot x + \sin(\theta) \cdot z]} dx dz \\ \tilde{R}(k, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) \cdot e^{-i[k \cdot \cos(\theta) \cdot x + k \cdot \sin(\theta) \cdot z]} dx dz \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Considerando  $k \cdot \cos(\theta) = k_x$  e  $k \cdot \sin(\theta) = k_z$ , chega-se a inversão propriamente dita:

<sup>1</sup> A equação (C.1) é uma sucessão de integrais de linha, conhecida na matemática como transformada de Radon.

<sup>2</sup> O módulo do Jacobiano é igual a 1. Por isso  $dvdu = dx dz$ .

$$\tilde{R}(k, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) \cdot e^{-i[k_x \cdot x + k_z \cdot z]} dx dz \quad (C.8)$$

Interpretando a equação (C.8), claramente pode se relacionar a transformada de Fourier espacial de  $R(u, \theta)$  e a transformada de Fourier 2D espacial de  $I(x, z)$ , como mostrada na equação (1.9). Isso significa que, ao se ter a função  $R(u, \theta)$ , se levada ao domínio da frequência espacial, ter-se-á a imagem do meio  $\tilde{I}(k_x, k_z)$  estudado, como ilustra a figura 21. É claro que o processo final reside em aplicar a transformada inversa (1.10) para que o conhecimento de  $I(x, z)$  seja obtido.

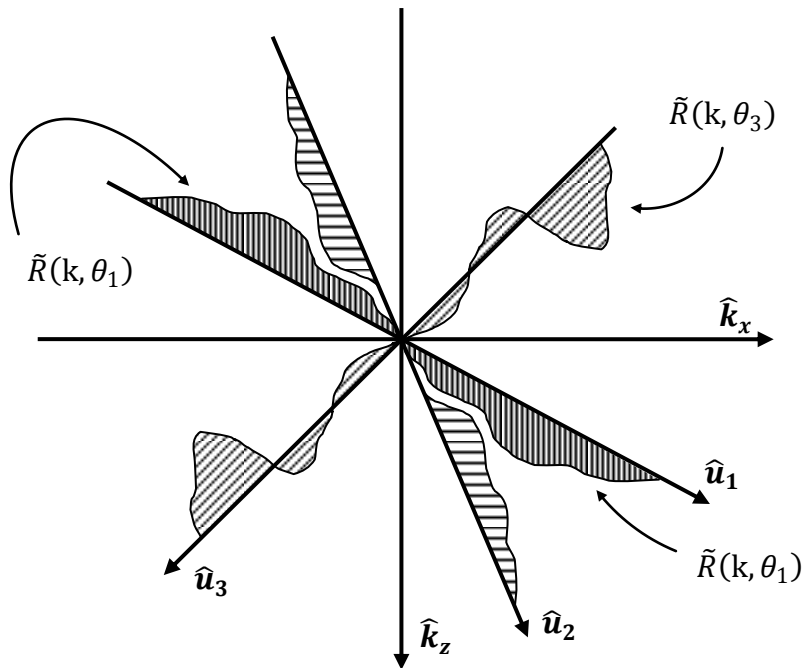


Figura 21 – Recomposição do meio estudado<sup>1</sup>

Criou-se, baseado nas equações apresentadas, um simulador que reproduz a equação (C.1), assim como um programa capaz de reconstituir o meio estudado através da equação (C.8). A discretização das equações usadas causou o mesmo tipo de mau posicionamento de resposta apresentado nas configurações da tomografia de difração<sup>2</sup>. Mais uma vez, a questão foi solucionada com regressões lineares até que o mapeamento discreto de  $\tilde{I}(k_x, k_z)$  fosse completado.

O programa, assim como o simulador, são inteiramente funcionais e apresentam respostas de acordo com o número assumido de fatias. Isso permitiu um pequeno teste

<sup>1</sup> Representação apenas da parte complexa. A parte real das funções  $\tilde{R}(k, \theta_n)$  são funções pares em relação à origem.

<sup>2</sup> Ver Figura 8.

da qualidade da tomografia, relacionando o tamanho do meio estudado, o número de fatias e o erro médio apresentado. O passo a passo dos ensaios é dado a seguir:

- 1) com uma mesma imagem original realizou-se um conjunto de simulações, cada uma com um número diferente de fatias;
- 2) em seguida, os dados simulados são processados pelo programa de tomografia de raio, apresentando uma imagem reconstituída;
- 3) comparando as duas imagens existentes, cria-se uma imagem de subtração, onde quanto mais clara a diferença entre elas, mais próximas são entre si;
- 4) determinada a diferença entre as imagens, equaciona-se uma média entre o valor de todos os pixels da imagem de subtração.

Os resultados dos ensaios estão dispostos pelo tamanho da figura estudada, nas tabelas 10 a 14. Primeiro apresenta-se a imagem original, no centro encontra-se a imagem reconstituída, e no canto direito resta a imagem de subtração. Cada conjunto traz consigo o erro calculado para cada um dos testes realizados. Abaixo consta o gráfico que relaciona o erro médio com o número de fatias simuladas, que resume os dados obtidos:

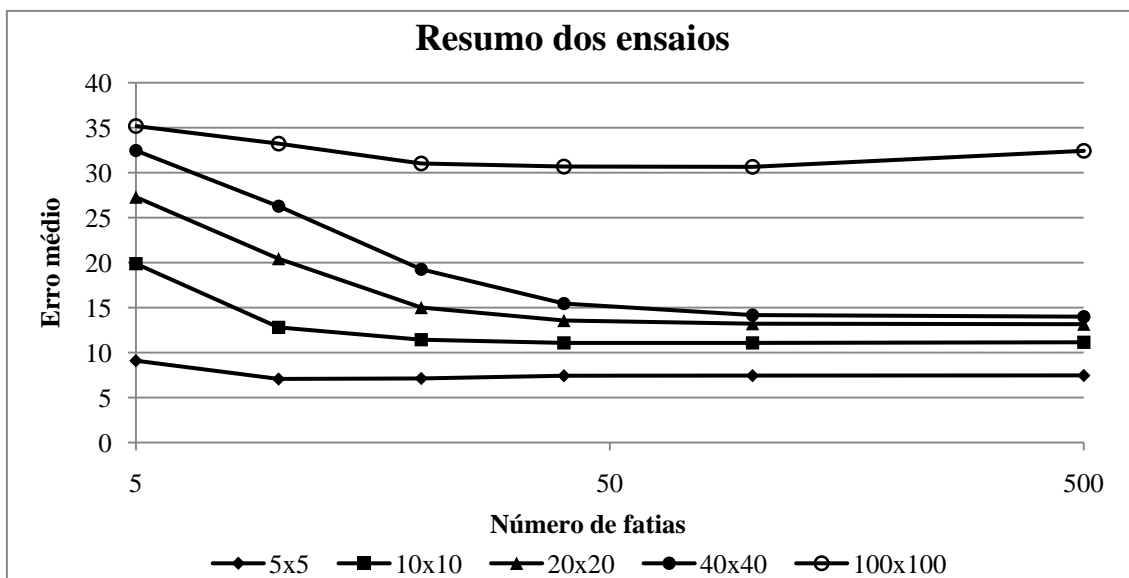


Gráfico 4 – Composição dos erros obtidos através dos ensaios

Analisando cada conjunto de resultados referentes a um tamanho de figura, observa-se que:

- 1) em todos os casos, a tomografia foi capaz de oferecer uma resposta satisfatória, de acordo com as imagens ensaiadas;
- 2) o aumento do número de fatias reflete na diminuição do erro médio calculado;
- 3) o erro médio calculado não diminui proporcionalmente com o aumento do número de fatias.

Analisando o conjunto completo de ensaios, comparando-se as imagens de todos os tamanhos, pontua-se que:

- 4) O erro médio calculado é proporcional ao tamanho da figura, mesmo quando se fixa o número de fatias simuladas;
- 5) Imagens maiores precisam de um número maior de fatias para se obter uma tomografia compatível com a imagem avaliada;
- 6) O erro médio calculado não aumenta proporcionalmente, quando comparados pelo número de fatias.

O conjunto de observações acima induz a pensar que tomografias de tamanhos maiores, utilizando a metodologia adotada, resultariam em imagens com erros muito grandes. Isso afetaria a confiabilidade do exame, tornando-o uma avaliação acessória. De fato, como o erro médio de estagnação<sup>1</sup> não aumenta proporcionalmente com o tamanho da imagem, talvez exista um valor de erro crítico, que seja associado a todo tipo de tomografias em imagens grandes e com muitas fatias.

De qualquer forma, a abordagem feita até agora, com discretizações a base da FFT e regressões lineares, não seria adequada a estudos em imagens maiores. Para se ter ideia, o erro calculado médio do último ensaio apresentado corresponde, no mínimo, a um erro médio absoluto em torno de 6%. Existem abordagens capazes de gerar resultados muito melhores, mas não estão descritas aqui, para se manter coerência com a abordagem usada na tomografia por difração.

---

<sup>1</sup> Calculado de ensaios com muitas fatias.

Tabela 10 – Ensaio por raio com imagem 5x5

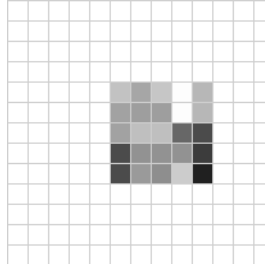
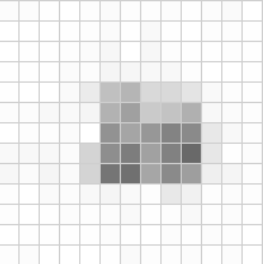
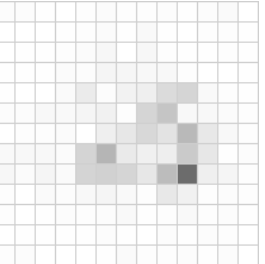
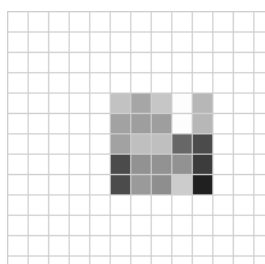
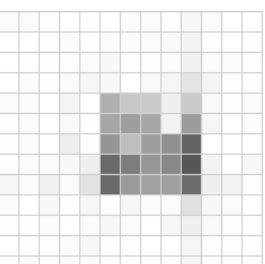
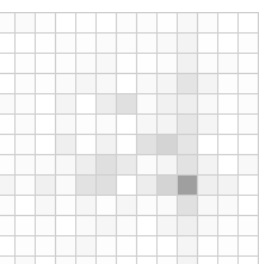
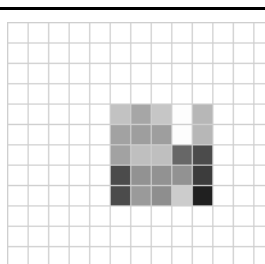
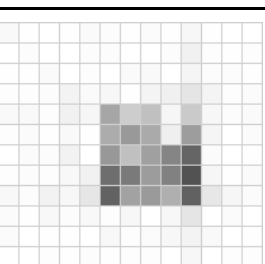
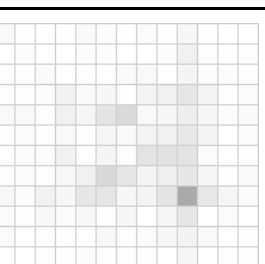
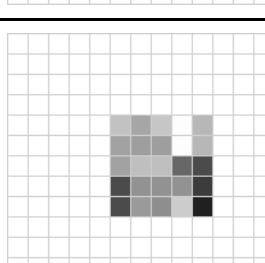
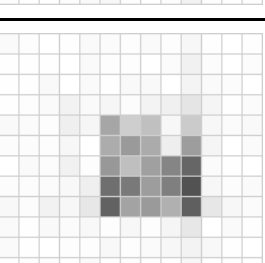
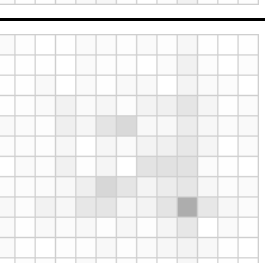
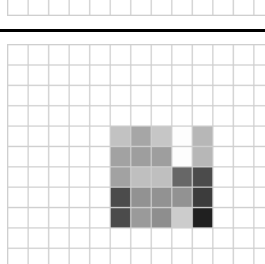
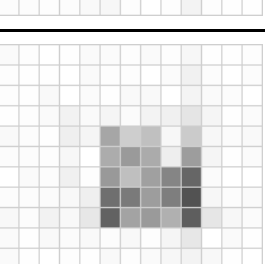
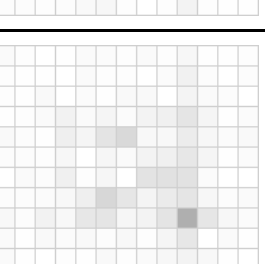
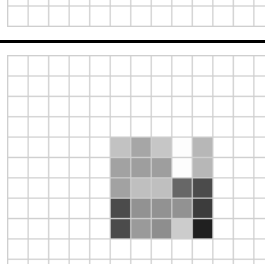
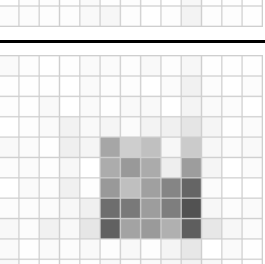
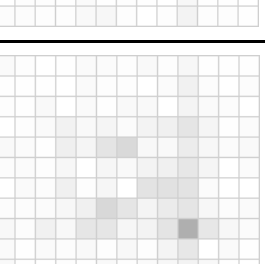
Original	Recuperada	Diferença	Erro
			<p>5 fatias Erro: 9,09467</p>
			<p>10 fatias Erro: 7,06508</p>
			<p>20 fatias Erro: 7,13017</p>
			<p>40 fatias Erro: 7,42603</p>
			<p>100 fatias Erro: 7,44378</p>
			<p>500 fatias Erro: 7,45562</p>

Tabela 11 – Ensaios por raio com imagem 10x10

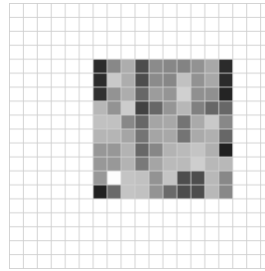
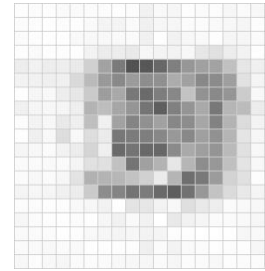
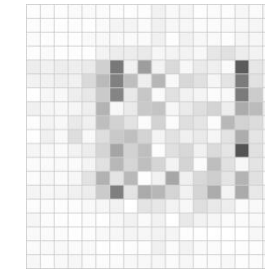
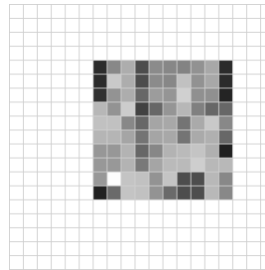
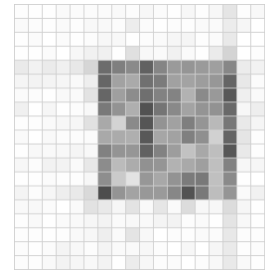
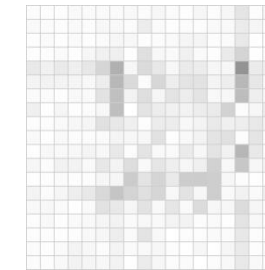
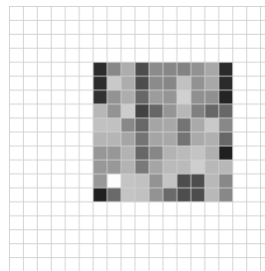
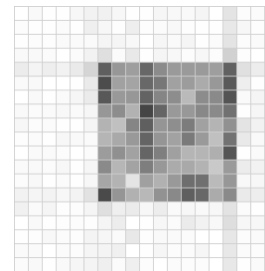
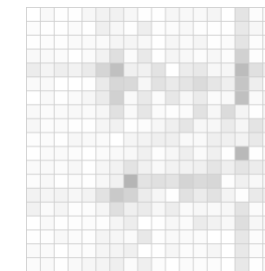
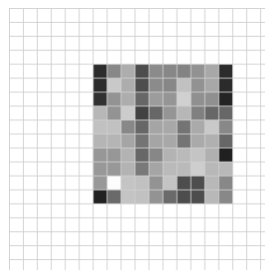
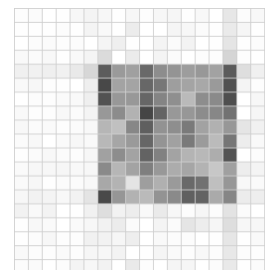
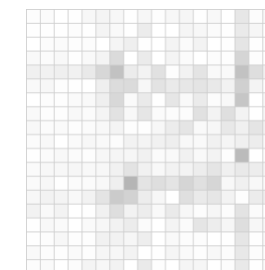
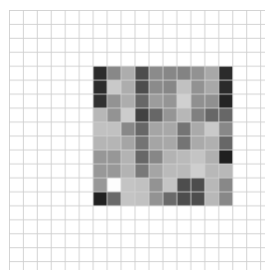
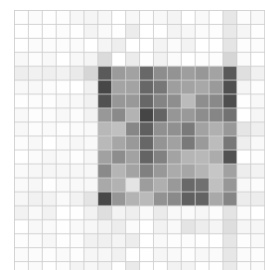
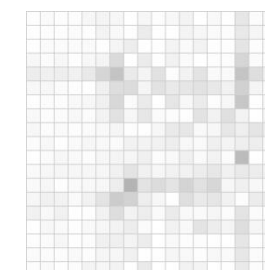
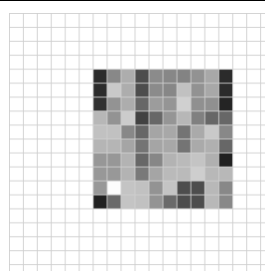
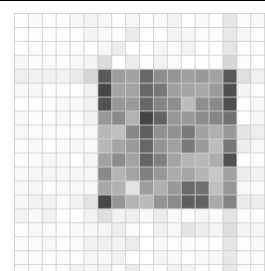
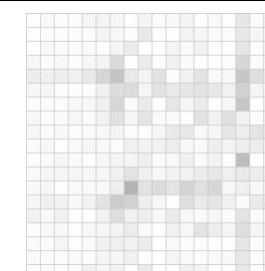
Original	Recuperada	Diferença	Dados
			<p>5 fatias                      Erro: 19,88088</p>
			<p>10 fatias                      Erro: 12,80609</p>
			<p>20 fatias                      Erro: 11,43213</p>
			<p>40 fatias                      Erro: 11,07756</p>
			<p>100 fatias                      Erro: 11,07479</p>
			<p>500 fatias                      Erro: 11,14127</p>

Tabela 12 – Ensaios por raio com imagem 20x20

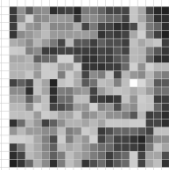
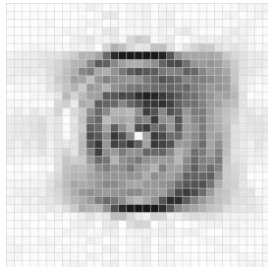
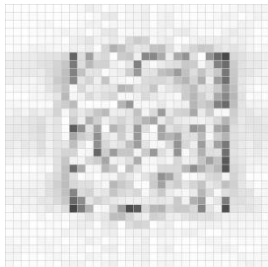
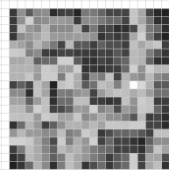
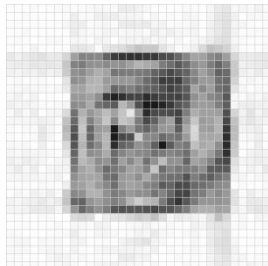
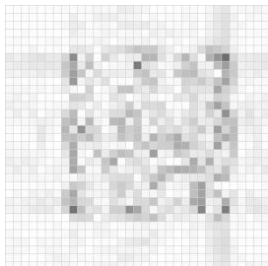
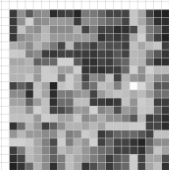
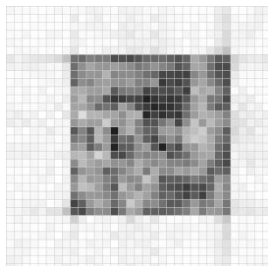
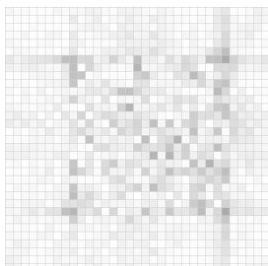
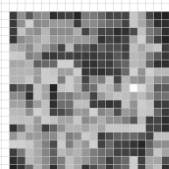
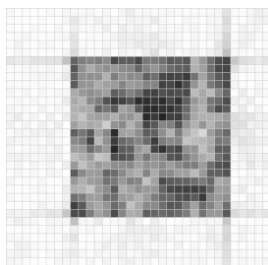
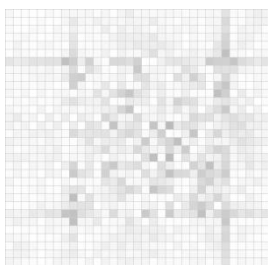
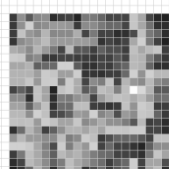
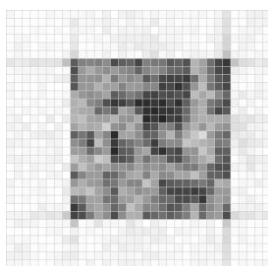
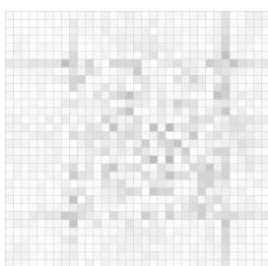
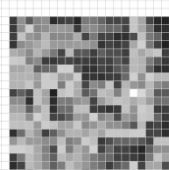
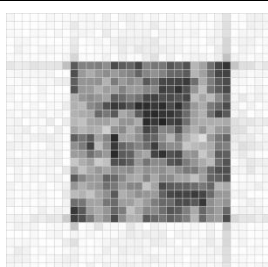
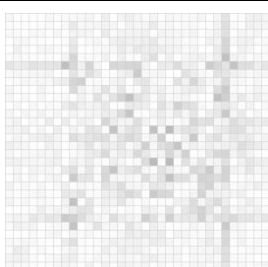
Original	Recuperada	Diferença	Dados
			<p>5 fatias                      Erro: 27,28007</p>
			<p>10 fatias                      Erro: 20,44260</p>
			<p>20 fatias                      Erro: 15,00550</p>
			<p>40 fatias                      Erro: 13,56565</p>
			<p>100 fatias                      Erro: 13,21303</p>
			<p>500 fatias                      Erro: 13,15610</p>

Tabela 13 – Ensaios por raio com imagem 40x40

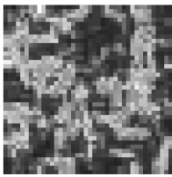

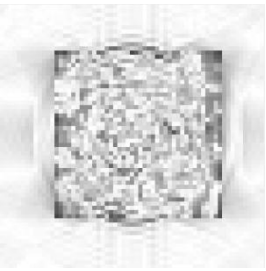
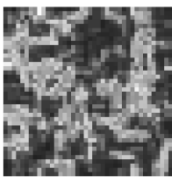
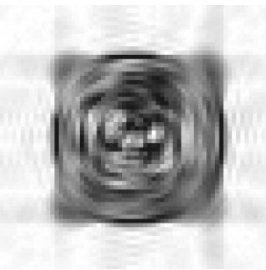
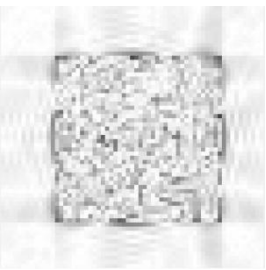
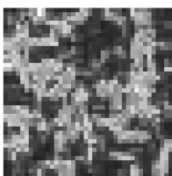
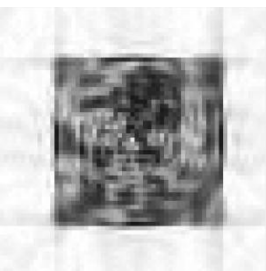
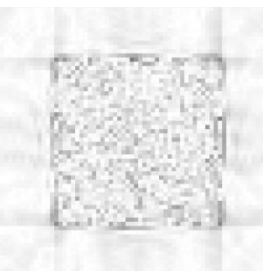
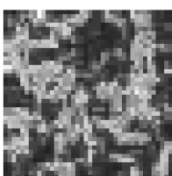
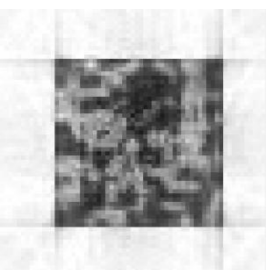
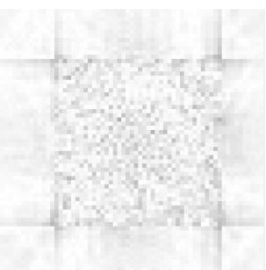

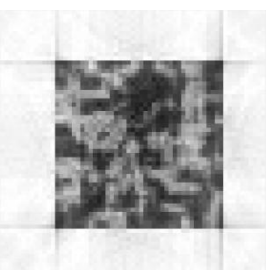
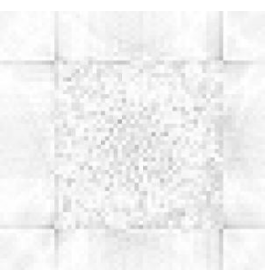

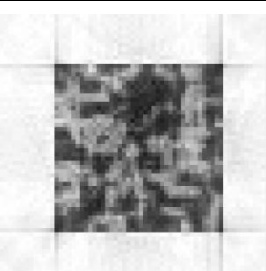
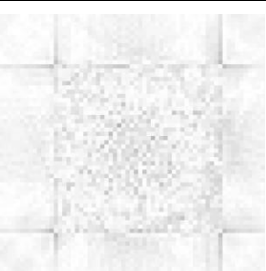
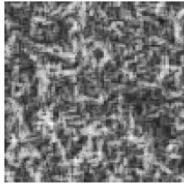
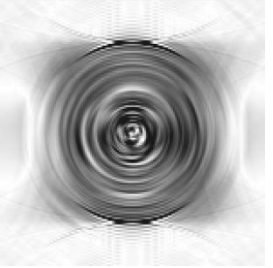
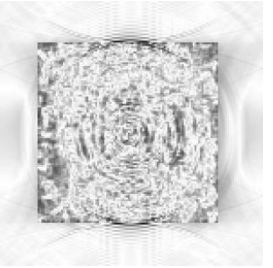
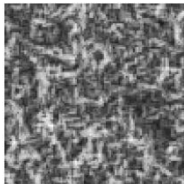

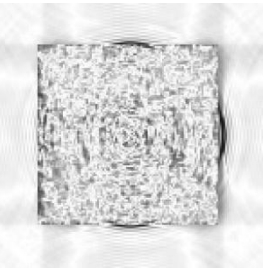
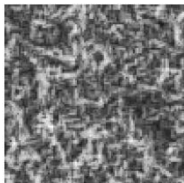
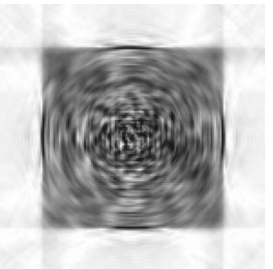
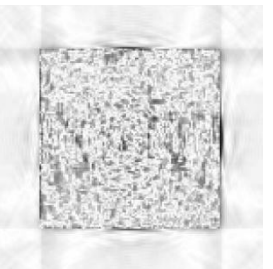
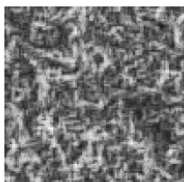
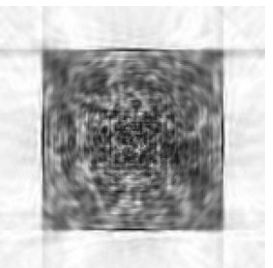
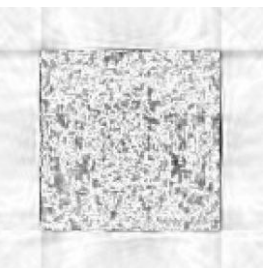
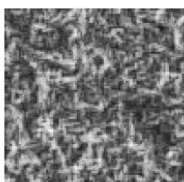
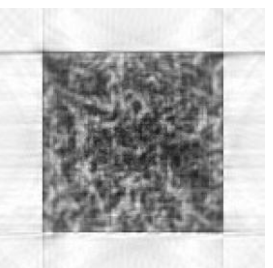
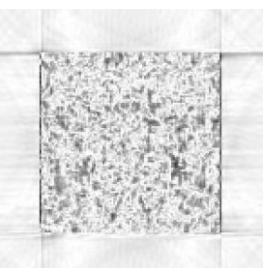
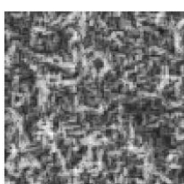
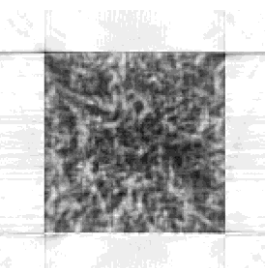
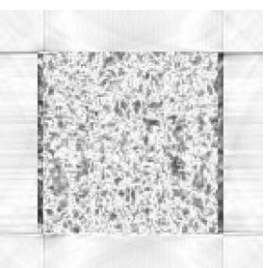
Original	Recuperada	Diferença	Dados
			<p>5 fatias Erro: 35,18918</p>
			<p>10 fatias Erro: 26,27261</p>
			<p>20 fatias Erro: 19,26379</p>
			<p>40 fatias Erro: 15,45351</p>
			<p>100 fatias Erro: 14,17233</p>
			<p>500 fatias Erro: 13,98689</p>

Tabela 14 – Ensaio por raio com imagem 100x100

Original	Recuperada	Diferença	Dados
			<p>5 fatias                      Erro: 35,18918</p>
			<p>10 fatias                      Erro: 33,22347</p>
			<p>20 fatias                      Erro: 31,02323</p>
			<p>40 fatias                      Erro: 30,67569</p>
			<p>100 fatias                      Erro: 30,64635</p>
			<p>500 fatias                      Erro: 32,42917</p>