UM ESQUEMA EXPLÍCITO BASEADO EM FUNÇÕES DE GREEN PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

Prof. Marco Aurélio Chaves Ferro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2008

OYARZÚN HIGUERA, PABLO ENRIQUE

Um esquema explícito baseado em funções de Green para propagação de ondas acústicas no domínio do tempo [Rio de Janeiro] 2008

XVII, 118 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 2008)

Dissertação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Equação escalar da onda
2. Análise transiente
3. Elementos de contorno
4. Elementos finitos
5. Acoplamento iterativo

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha esposa, Paola,

e ao nosso filho, Diego.

Agradecimentos

Agradeço à PETROBRAS, a través do Centro de Pesquisas e Desenvolvimento Leopoldo Miguez de Mello (CENPES), pela bolsa subministrada durante o período de tempo em que o trabalho foi desenvolvido, e ao professor Webe J. Mansur pela sábia orientação ao longo deste tempo. Também aos amigos do LAMEC/COPPE, pelos conhecimentos outorgados e a importante contribuição ao nosso mútuo crescimento pessoal.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

UM ESQUEMA EXPLÍCITO BASEADO EM FUNÇÕES DE GREEN PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

Fevereiro/2008

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho apresenta as formulações matemáticas do método dos elementos de contorno e do método dos elementos finitos, incluindo o tratamento numérico para integração temporal da equação escalar da onda em duas dimensões. Na formulação de elementos de contorno, incluem-se os termos das condições iniciais mediante a implementação de células no domínio, e se incorpora o método θ linear com a finalidade de gerar resultados mais estáveis, no caso em que uma variação linear no tempo para o fluxo for considerada. Na formulação para elementos finitos, calcula-se a função de *Green* em forma explícita, para depois ser aplicada no processo de marcha no tempo. Os métodos usados na obtenção da função de *Green* são os métodos explícitos de *Runge-Kutta* e das diferenças centrais. Finalmente, é descrito um esquema de acoplamento iterativo entre os métodos dos elementos de contorno e dos elementos finitos, baseado na técnica de superposição de subdomínios, equivalente a definir uma zona a ser discretizada por ambos os métodos. A técnica aqui descrita é adequada para modelar na análise da propagação de ondas acústicas em meios infinitos e semi-infinitos, consequentemente podendo ser aplicada na migração reversa no tempo em geofísica, onde somente as condições naturais são prescritas na superfície do continuo.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

AN EXPLICIT SCHEME BASED ON GREEN'S FUNCTIONS APPLIED TO ACOUSTIC WAVES PROPAGATION IN TIME DOMAIN

Pablo Enrique Oyarzún Higuera

February/2008

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work presents the mathematical formulations of the boundary element method and the finite element method, including the numerical treatment for time integration of the two-dimensional scalar wave equation. Initial conditions are included in the boundary element method formulation by considering cells over the domain where those conditions are prescribed, and the linear θ method is implemented to improve the stability of the results, in the case that a time linear interpolation function is assumed to represent the flux variation. In the finite element method, the *Green's* function is determined and it is then applied in the time stepping process. The *Runge-Kutta* and central differences methods are used to compute the *Green's* function explicitly. Finally, a boundary element and finite element iterative coupling scheme is described, based on overlapping domain decomposition approach, equivalent to define a zone that is discretized by both methods. The technique described here is suitable for modeling the acoustic waves propagation in infinite or semi-infinite media, thus can be applied to reverse migration in geophysics, where only natural conditions are prescribed on the boundaries.

Índice

1. Introdução 1

1.1 Observações preliminares 2

1.2 Breve revisão bibliográfica 5

1.3 Objetivos e conteúdo do presente trabalho 8

2. Formulação do MEC 10

2.1 Equação escalar da onda 11

2.2 Solução fundamental, formulação integral 12

2.3 Implementação numérica 17

2.4 Integrais das contribuições das condições iniciais 25

2.5 Derivadas das contribuições das condições iniciais 29

2.6 Contribuições dos termos das fontes concentradas 31

2.7 Método θ linear aplicado ao MEC, no domínio do tempo 32

3. Formulação do MEF 36

3.1 Descrição do método dos elementos finitos, discretização no espaço 37

3.2 Família de algoritmos de *Newmark*, discretização no tempo 38

3.3 Métodos de *Green*, discretização no tempo 41

3.3.1 Formulação de Green 41

3.3.2 Método ExGA Runge-Kutta 44

3.3.3 Método ExGAH diferenças centrais 45

4. Técnicas de acoplamento MEC/MEF do tipo iterativo 48

4.1 Antecedentes preliminares 49

4.2 Descrição das técnicas de acoplamento iterativo MEC/MEF 51

4.2.1 Método em paralelo Schwarz Neumann-Neumann (análise estática) 53

4.2.2 Método em paralelo Schwarz Dirichlet-Neumann (análise estática) 55

4.2.3 Método seqüencial Schwarz Dirichlet-Neumann (análise estática) 56
4.2.4 Método seqüencial baseado na existência de uma região discretizada pelos dois métodos (análise estática) 56
4.2.5 Método seqüencial baseado na existência de uma região discretizada pelos dois métodos (análise dinâmica) 62
5. Exemplos numéricos, análise de resultados 67
5.1 Considerações preliminares 68
5.2 Barra fixa em um extremo, com fluxo aplicado na extremidade livre 68
5.3 Barra fixa em um extremo, com fluxo aplicado na extremidade livre e condições iniciais 80
5.4 Membrana sob condição inicial de velocidade 86
6. Conclusões 93
6.1 Considerações e conclusões a partir do trabalho 94
6.2 Sugestões para futuras pesquisas 96
7. Referências bibliográficas 97
Apêndices 103
Apêndice A:
Integrais dos coeficientes das matrizes *G* e *H* do MEC 104
Apêndice B:
Integrais das contribuições dos termos das condições iniciais no MEC 109
Apêndice C:
Detalhes da obtenção de algumas equações do MEF 113

Lista de figuras

Figura 2.1: Geometria do continuo de domínio Ω e contorno Γ 11

Figura 2.2: Representação do ponto fonte e do ponto campo, no contorno e no interior do domínio. Representação do vetor *r* 12

Figura 2.3: Significado geométrico do termo $\overline{c}(S)$ 16

Figura 2.4: Esquema de cálculo dos coeficientes das matrizes *G* e *H* na marcha do tempo 19

Figura 2.5: Função de interpolação linear para ϕ^m e θ^m 20

Figura 2.6: Função de interpolação constante para θ^m 21

Figura 2.7: Discretização linear do contorno Γ 22

Figura 2.8: Função de interpolação linear no espaço para *u*, *v* e *p* no contorno Γ 23

Figura 2.9: Coordenadas de área e valores de *u* e *v* na célula 26

Figura 2.10: Coordenadas absolutas e relativas ao nó *i* 27

Figura 2.11: Conceito geométrico do $r_t^i(\theta)$ 29

Figura 2.12: Esquema no tempo para o método θ linear 33

Figura 3.1: Esquema geométrico referente à técnica para aproximar a integral em (3.32) 44

Figura 4.1: Região discretizada pelo MEC, para o método baseado em uma interface entre as duas regiões 52

Figura 4.2: Região discretizada pelo MEF, para o método baseado em uma interface entre as duas regiões 52

Figura 4.3: Discretização da região pelo MEC, considerando a existência de uma zona discretizada pelos dois métodos 57

Figura 4.4: Discretização da região pelo MEF, considerando a existência de uma zona discretizada pelos dois métodos 57

Figura 4.5: Esquema para efetuar o acoplamento iterativo no caso $\Delta t_B > \Delta t_F$ 63

Figura 4.6: Esquema para efetuar o acoplamento iterativo no caso $\Delta t_B < \Delta t_F$ 65
Figura 5.1: Esquema geométrico e condições iniciais para o exemplo da barra com fluxo aplicado na extremidade livre 68
Figura 5.2: Função *Heaviside* para o fluxo prescrito 69
Figura 5.3: Discretização espacial da barra pelo MEC 69
Figura 5.4: Esquema dos pontos a serem considerados no problema da barra 70
Figura 5.5: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 1) 71
Figura 5.6: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 1) 71
Figura 5.7: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 1) 72
Figura 5.8: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 1) 72
Figura 5.9: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 1) 73
Figura 5.10: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 1) 73
Figura 5.11: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 2) 74
Figura 5.12: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 2) 74
Figura 5.13: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 2) 75
Figura 5.14: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 2) 75
Figura 5.15: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 2) 76
Figura 5.16: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 2) 76

Figura 5.17: Discretização da barra por elementos finitos, esquema de pontos para impressão dos resultados 77
Figura 5.18: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, considerando o MEF *ExGA Runge-Kutta* 78
Figura 5.19: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, considerando o MEF *ExGAH diferenças centrais* 78
Figura 5.20: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, para o MEF *ExGA Runge-Kutta* na vizinhança do Δt_{cr} 79
Figura 5.21: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, para o MEF *ExGAH diferenças centrais* na vizinhança do Δt_{cr} 79
Figura 5.22: Esquema do problema da barra com fluxo aplicado na extremidade livre e condições iniciais em Ω_0 80
Figura 5.23: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m constante (modelo 2) 81
Figura 5.24: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m constante (modelo 2) 81
Figura 5.25: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m constante (modelo 2) 82
Figura 5.26: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m linear (modelo 2) 82
Figura 5.27: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m linear (modelo 2) 83
Figura 5.28: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m linear (modelo 2) 83
Figura 5.29: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, considerando o MEF *ExGA Runge-Kutta* 84

Figura 5.30: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, considerando o MEF *ExGA diferenças centrais* 84
Figura 5.31: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, para o MEF *ExGA Runge-Kutta* na vizinhança do Δt_{cr} 85
Figura 5.32: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, para o MEF *ExGAH diferenças centrais* na vizinhança do Δt_{cr} 85
Figura 5.33: Esquema da geometria e condições de contorno da membrana homogênea 86
Figura 5.34: Esquema de pontos para impressão de resultados e discretização da membrana em elementos de contorno 87
Figura 5.35: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana, considerando função θ^m constante 88
Figura 5.36: Valor do fluxo *p* para o ponto B da membrana, considerando função θ^m constante 88
Figura 5.37: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana, considerando função θ^m linear 89
Figura 5.38: Valor do fluxo *p* para o ponto B da membrana, considerando função θ^m linear 89
Figura 5.39: Esquema de discretização da membrana para a resolução pelo MEF usando *ExGA* 90
Figura 5.40: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana considerando o MEF *ExGA Runge-Kutta* 91
Figura 5.41: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana considerando o MEF *ExGAH diferenças centrais* 91
Figura C.1: Elemento quadrilátero isoparamétrico 117

Lista de símbolos

Símbolos romanos:

$[A]$	Matriz de amplificação
A_1, A_2, A_3	coordenadas de área nas células do domínio
$[B]$	Matriz do operador gradiente aplicado sobre a matriz das funções de interpolação a nível de elemento
c	velocidade de propagação da onda no meio
D_{ij}^{nm}	contribuição ao cálculo do coeficiente H_{ij}^{nm} das matrizes do método dos elementos de contorno
E_{ij}^{nm}	contribuição ao cálculo do coeficiente G_{ij}^{nm} das matrizes do método dos elementos de contorno, para função de interpolação θ^m linear
$\{F\}$	vetor de forças
$\{F^e\}$	vetor de forças a nível de elemento
F_i^n	contribuição das condições iniciais de cada uma das células, referentes ao nó *i*, para o instante de tempo *n*
G	*resposta impulsiva* do sistema, função de *Green*
G_{ij}^{nm}	coeficientes das matrizes *G* do MEC, correspondentes à resposta avaliada em um ponto campo *j*, para o instante de tempo *m*, correspondente a uma fonte impulsiva de valor unitário sendo aplicada no ponto fonte *i*, para o instante de tempo *n*
H	*resposta degrau* do sistema
$\mathcal{H}$	*função de transferência*, transformada de *Laplace* da função de *Green*
H_{ij}^{nm}	coeficientes das matrizes *H* do MEC, correspondentes à resposta avaliada em um ponto campo *j*, para o instante de tempo *m*, correspondente a uma fonte impulsiva de valor unitário sendo aplicada no ponto fonte *i*, para o instante de tempo *n*
$[J]$	matriz *Jacobiana*

$[K]$ matriz de rigidez

$[K^e]$ matriz de rigidez a nível de elemento

L_{ij}^{nm} contribuição ao cálculo do coeficiente G_{ij}^{nm} das matrizes do método dos elementos de contorno, para função de interpolação θ^m constante

$[M]$ matriz de massa

$[M^e]$ matriz de massa a nível de elemento

$[N]$ matriz de funções de interpolação a nível de elemento

$\{\hat{n}\}$ vetor normal unitário, ortogonal ao contorno Γ, apontando para fora do domínio

n_i coordenada do vetor normal $\{\hat{n}\}$, na direção *i* do plano cartesiano

n_s número de subintervalos para o cálculo da *função de Green*

nen número de nós de um determinado elemento *e*, em um modelo de elementos finitos

O_l *l*-ésima célula na prescrição das condições iniciais pelo método dos elementos de contorno

p fluxo, derivada do potencial *u* em relação à normal

p_i valor do fluxo referente ao nó *i*

p^* derivada da *solução fundamental u** em relação à normal (*fluxo fundamental*)

p_i^n valor do fluxo referente ao nó *i*, para o instante de tempo *n*

$\overline{p}$ valor prescrito de *p*, no contorno Γ_2 (condição natural ou de *Neumann*)

q ponto campo no interior do domínio Ω

Q ponto campo localizado no contorno Γ

$R_{li}^{\alpha n}$ contribuição aos termos de velocidade *v* referente ao nó *i*, para o instante de tempo *n*, das condições iniciais do nó α na célula O_l

r módulo do vetor que assinala a posição do ponto campo *j*, referente ao ponto fonte *i*

r_j módulo do vetor posição que assinala a posição do ponto campo *j*, referente a um sistema de referência inercial

r_s	módulo do vetor posição que assinala a posição do ponto *s* onde se aplica a fonte, referente a um sistema de referência inercial
s	ponto fonte no interior do domínio Ω
S	ponto fonte localizado no contorno Γ
S_i^n	contribuição ao nó *i* das fontes concentradas, localizadas no interior do domínio, para o instante de tempo *n*
t	variável temporal
t_0	valor inicial para a variável temporal
t_n	valor do tempo correspondente ao *n*-ésimo instante
$T_{li}^{\alpha n}$	contribuição aos termos de potencial *u* referente ao nó *i*, para o instante de tempo *n*, das condições iniciais do nó α na célula O_l
u	potencial na equação escalar da onda
u_i	valor do potencial *u* referente ao nó *i*
u_0	valor inicial do potencial *u*, para o tempo $t = t_0$
$u_{0\alpha}$	valor inicial do potencial *u*, para o tempo $t = t_0$, referente ao nó α das células
u^*	*solução fundamental* correspondente ao potencial da equação escalar da onda
u_i^n	valor do potencial *u* referente ao nó *i*, para o instante de tempo *n*
u_0^*	valor inicial de *u**, para o tempo $t = t_0$
$\overline{u}$	valor prescrito de *u*, no contorno Γ_1 (condição essencial ou de *Dirichlet*)
$\{U^e\}$	vetor dos valores nodais do potencial *u* a nível do elemento *e*
v	velocidade escalar, correspondente à primeira derivada do potencial *u* em relação ao tempo
v_i	valor da velocidade escalar *v* referente ao nó *i*
v_0	valor inicial da velocidade escalar *v*, para o tempo $t = t_0$
$v_{0\alpha}$	valor inicial da velocidade escalar *v*, para o tempo $t = t_0$, referente ao nó α das células
v^*	primeira derivada da *solução fundamental* u^* em relação ao tempo

v_i^n valor da velocidade escalar referente ao nó *i*, para o instante de tempo *n*

v_0^* valor inicial de *v**, para o tempo $t = t_0$

w função de peso

x_i , y_i coordenadas referentes ao nó *i*

$\breve{x}_\alpha$, $\breve{y}_\alpha$ coordenadas referentes ao nó α das células, e relativas ao ponto que possui as coordenadas x_i e y_i

$\{x^e\}$ vetor das coordenadas nodais em *x* a nível do elemento *e*

$\{y^e\}$ vetor das coordenadas nodais em *y* a nível do elemento *e*

Símbolos gregos:

α parâmetro do método de *Newmark*

β função de interpolação espacial para a função de peso

γ densidade da fonte, função das coordenadas espaciais *x* e *y* e do tempo *t*

Γ_1 parte do contorno Γ para a prescrição de condições essenciais

Γ_2 parte do contorno Γ para a prescrição de condições naturais

$\delta(q-s)$ função *delta de Dirac*

δ_{ij} símbolo do *delta de Kronecker*

Δt passo de tempo: intervalo entre dois instantes de tempo consecutivos

Δt_B valor do passo de tempo a ser usado no MEC

Δt_F valor do passo de tempo a ser usado no MEF

ε valor suficientemente pequeno – tolerância para definir o critério de detenção para algum método iterativo

ζ_j função de interpolação espacial para *p*, referente ao nó *j*

η coordenada natural (ou intrínseca)

$\mathrm{H}(t-a)$ função *Heaviside*

θ parâmetro do método θ linear

θ^m função de interpolação temporal para *p*, referente ao *m*-ésimo instante de tempo

κ parâmetro de relaxação para o método iterativo de acoplamento MEC/MEF do tipo *Schwartz Neumann-Neumann* em paralelo

λ parâmetro do método de *Newmark*

μ função de interpolação no espaço, para as condições iniciais nas células

ξ coordenada natural (ou intrínseca)

ξ_p coordenada natural, referente ao elemento e_p

ξ_q coordenada natural, referente ao elemento e_q

τ tempo no qual a fonte impulsiva de valor unitário da função de *Green* está sendo aplicada

$[\mathrm{T}]$ matriz de conversão, a qual relaciona as trações do MEC com as forças nodais do MEF em uma interface

ϕ^m função de interpolação temporal para *u* e *v*, referente ao *n*-ésimo instante de tempo

φ_j função de interpolação espacial para *u* e *v*, referente ao nó *j*

ψ_i *i*-ésimo autovalor da matriz de amplificação $[A]$

ω parâmetro de relaxação para os métodos de acoplamento iterativo MEC/MEF do tipo *Schwartz Dirichlet-Neumann* (em paralelo e seqüencial)

ω_i *i*-ésimo peso de *Gauss* a ser considerado nas integrações numéricas

Ω domínio

Ω_0 parte do domínio onde são prescritas as condições iniciais

Outros símbolos:

$[\nabla]$ matriz do operador gradiente no método dos elementos finitos

1

Introdução

1.1. Observações preliminares

Há muitos anos, os métodos numéricos começaram a ser usados para resolver os mais diversos problemas de engenharia, principalmente devido ao intenso avanço nas áreas da computação, tanto na criação de *softwares* como no desenvolvimento de *hardwares*. Os dois métodos a serem estudados neste trabalho são: o *método dos elementos de contorno* (MEC) e o *método dos elementos finitos* (MEF).

O MEC [1-3] é freqüentemente usado em domínios de geometria complexa, por exemplo, com aberturas ou que contêm alta concentração de tensão (ou fluxo), já que no caso do MEF a malha que é usada na discretização do contínuo deve ser muito refinada, com a finalidade de obter resultados de boa precisão nestas zonas. Também o MEC produz bons resultados em domínios infinitos ou semi-infinitos e em problemas de propagação de ondas, já que ao discretizar este tipo de domínio pelo MEF, elementos com condição de contorno não reflexiva devem ser incluídos [4].

No entanto, o MEF [4-6] é mais adequado na representação de meios heterogêneos ou com não-linearidade física ou geométrica. Por exemplo, no caso do meio não homogêneo, o problema fica mais simples discretizando o domínio em pequenos elementos, considerando cada elemento tendo propriedades físicas diferentes. Quanto mais complexo for o comportamento físico do material, mais complexas serão as soluções fundamentais requeridas pelo MEC para a sua resolução.

Há algumas décadas, surgiu a idéia de se combinar os dois métodos, dando origem aos diferentes tipos de acoplamento MEC/MEF que atualmente existem na literatura, tendo como principal objetivo aproveitar as vantagens de cada um desses métodos.

Em relação ao MEC, o presente trabalho apresenta a forma inversa da equação escalar da onda em duas dimensões no domínio do tempo, bem como os procedimentos necessários para a sua solução numérica. Para isso, os coeficientes das matrizes G e H, bem como as contribuições dos termos das fontes, devem ser calculados para o *tempo de retardo* [1,2] e para todos os instantes de tempo anteriores ao dito instante. Isto é devido à existência de integrais de convolução na equação integral do método. A

solução fundamental em duas dimensões é representada por uma função temporal, multiplicada por uma função *Heaviside*, obtida neste trabalho a partir da integração da *função de Green* do problema tri-dimensional (caracterizada pela existência de uma função *delta de Dirac*) na direção perpendicular ao plano 2D considerado [1,2]. No que diz respeito às funções de interpolação para representar a variação no espaço, escolhidas tanto para o potencial *u* quanto para o fluxo *p*, neste trabalho são consideradas somente funções lineares. Enquanto isso, para representar a variação temporal, é considerada função linear para o potencial e funções constante e linear para o fluxo. Assumindo, em relação à variável temporal, função de interpolação linear para o potencial e para o fluxo, faz-se necessário a implementação do método θ linear adaptado ao MEC para melhorar a estabilidade dos resultados [7]. Para calcular os valores das derivadas do potencial em pontos internos, é necessário obter as derivadas dos coeficientes das matrizes *G* e *H* do MEC, bem como as derivadas das contribuições das condições iniciais e das fontes, nas quais se deve aplicar o processo de limite ou empregar alguma outra técnica, como por exemplo, o conceito de *parte finita de uma integral* [8,9].

A respeito do MEF, particularmente em relação aos métodos passo a passo no tempo [5,6,10,11], existem os *métodos de Green* [12-20], nos quais primeiro é obtida a *função de Green* do problema [1,12,13,21], geralmente definida pela resposta a um "carregamento" de valor unitário localizado em um ponto P_i, para um instante de tempo t_n. Posteriormente esta solução é aplicada sucessivamente no avanço do tempo, resultando em um algoritmo que pode ser mais eficiente que os métodos passo a passo convencionais, principalmente quando estes últimos são implícitos. A obtenção desta função pode ser feita de forma *implícita* [16] ou *explícita* [17-20]. No primeiro caso, as equações que expressam a *função de Green* são introduzidas diretamente no algoritmo de marcha no tempo, não sendo necessário armazená-las. No segundo caso a *função de Green* é calculada numericamente por algum dos algoritmos passo a passo tradicionais, tais como *Runge-Kutta* e diferenças centrais, sendo posteriormente empregada no processo de integração temporal. No presente trabalho aqueles dois procedimentos para achar a *função de Green* explicitamente [18] são usados, ou seja, o método de *Runge-Kutta* (*ExGA-RK*) e o método das diferenças centrais usando *matriz degrau* H (*ExGAH-dc*). Vale mencionar que se encontra na literatura a criação de um algoritmo unificado,

para o tratamento tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência, aplicado a modelos não-lineares na análise modal mediante elementos finitos [22].

Como alternativa para a resolução de problemas de propagação de ondas existem os sistemas acoplados, nos quais o domínio é discretizado usando diferentes métodos em distintas regiões deste. No presente trabalho, apresenta-se uma breve revisão das técnicas de acoplamento entre o MEC e o MEF, tanto de *acoplamento direto* [23-30] quanto de *acoplamento iterativo* [31-37. No *acoplamento direto* faz-se a montagem de uma matriz global, contendo tanto as contribuições dos coeficientes das matrizes de rigidez e de massa do MEF quanto as contribuições dos coeficientes das matrizes *G* e *H* do MEC, sendo em geral um procedimento mais caro computacionalmente. No *acoplamento iterativo* os subdomínios são tratados de forma independente, sendo possível explorar as vantagens de cada um dos métodos. Os algoritmos de acoplamento iterativo podem ser classificados usando dois critérios: segundo a forma em que os subdomínios são resolvidos, ou segundo a forma em que estes são discretizados [4]. O primeiro critério inclui, por um lado, os *métodos paralelos*, nos quais os subdomínios são resolvidos em forma simultânea após impor condições na interface para finalmente comparar os valores obtidos com aqueles assumidos no início. Por sua parte, os *métodos seqüenciais* são aqueles nos quais, após assumir a condição na interface, um dos subdomínios é resolvido e os seus resultados são usados como condição de contorno para o outro subdomínio. O segundo critério pode estabelecer a existência ou não de uma zona comum entre os subdomínios, a qual será discretizada pelos dois métodos. O ponto de detenção das iterações para ambos os critérios, pode ser estabelecido definindo uma tolerância dentre os valores atual e da iteração anterior do potencial ou do fluxo na interface, e um número máximo de iterações.

O método de acoplamento proposto no presente trabalho considera uma zona do domínio que é discretizada por ambos os métodos. Com esta técnica se evita fazer a transformação de *forças nodais*, usadas no MEF, em *forças de superfície* requeridas pelo MEC na zona de união dos subdomínios [34]. Outra vantagem deste procedimento consiste em poder discretizar subdomínios pelo MEF prescrevendo somente condição natural [34]. Este procedimento, utilizado principalmente em modelos não dependentes

do tempo, será estendido para problemas dinâmicos governados pela equação escalar da onda.

1.2. Breve revisão bibliográfica

Nas últimas décadas, o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF) têm evoluído com rapidez [1-6], devido à grande variedade de pesquisas desenvolvidas em diferentes áreas, tais como engenharia civil, mecânica, eletrônica, nuclear, acústica, e muitas outras.

Em relação ao MEC, *Brebbia et al.* [3] apresentaram as formulações para resolver problemas estáticos, tanto lineares (elásticos) quanto não lineares (inelásticos, elasto-plásticos, fratura), usando as equações de *Laplace*, *Poisson* e da elasto-estática. As soluções fundamentais para problemas dinâmicos no domínio do tempo e no domínio da freqüência, mediante a aplicação da transformada de *Laplace*, também foram mostradas. A formulação dinâmica em duas dimensões, no domínio do tempo, foi definida e apresentada por *Mansur* [1], tanto para a equação escalar da onda quanto para elasto-dinâmica. *Domínguez* [2] mostrou mais tarde a formulação do MEC para problemas dinâmicos harmônicos e transientes (domínio da freqüência e do tempo) considerando as equações antes mencionadas, além de incluir dupla reciprocidade em elasto-dinâmica transiente, formulação para fratura, interação dinâmica solo-estrutura e análise dinâmica em meios poroelásticos. *Yu et al.* [7] estabeleceram uma técnica baseada no método *linear* θ para estabilizar as soluções obtidas, no caso de assumir função de interpolação linear no tempo para o fluxo. *Mansur et al.* [8] e *Carrer & Mansur* [9] apresentaram os resultados do cálculo das derivadas dos coeficientes das matrizes do MEC usando o conceito de *parte finita de uma integral*, com a finalidade de obter, respectivamente, as derivadas do potencial (equação escalar da onda) e do deslocamento (equação da elasto-dinâmica) em pontos interiores.

Existem inúmeros livros textos publicados, cobrindo uma grande variedade de tópicos, podendo-se citar *Zienkiewicz & Taylor* [4], *Bathe* [5], *Hughes* [6], etc.

Dentre os algoritmos para o avanço no tempo, destaca-se aquele proposto por *Newmark* [10], que estabeleceu aproximações por diferenças finitas das derivadas

temporais da equação de equilíbrio mediante o uso de dois parâmetros, gerando assim uma família de algoritmos implícitos e explícitos com controle de estabilidade e acurácia numéricas. *Zienkiewicz* [11] mostrou que o método proposto por *Newmark* (bem como *Houbolt* e *Wilson-θ*) pode ser obtido mediante a aplicação do método dos resíduos ponderados à variável temporal, sendo o método de *Newmark* um caso particular deste procedimento, dependendo das funções de interpolação e de ponderação escolhidas.

Wrobel [12] apresentou a formulação matemática do método dos elementos de contorno para problemas do tipo potencial e fluxo viscoso, enquanto *Carrer* [13] desenvolveu técnicas implícitas para problemas estáticos e dinâmicos no método dos elementos de contorno aplicado à elastoplasticidade. *Zhong & Williams* [14] apresentaram um método de integração temporal bastante preciso, conhecido como "*Precise Time Step Integration Method*", o qual consiste em transformar a equação diferencial de segunda ordem para um sistema de equações lineares de primeira ordem, obtendo a sua solução analítica. Uma vez que esta solução corresponde a uma função exponencial, ela é expressa em série de *Taylor* e truncada no termo de quarta ordem. Um processo iterativo é adotado com a finalidade de se obter uma aproximação da série truncada. Apesar de melhorado, este método teve maior aplicação em equações diferenciais de primeira ordem, porque o processo de modificar a equação de segunda ordem é caro computacionalmente.

Fung [15] sugeriu um algoritmo bastante preciso no qual calcula numericamente as respostas *impulso* e *degrau*, sendo usadas nas equações de equilibrio dinâmico fazendo uso da simetria das matrizes envolvidas, bem como a disposição banda dos seus elementos. Enquanto isso, *Soares & Mansur* [16] estabeleceram uma variante muito interessante na resolução do problema dinâmico passo a passo no tempo, baseando os cálculos na obtenção numérica e implícita da *função de Green*, denominada *Implicit Green Approach* (*ImGA*). *Loureiro* [18,19], *Dors* [17] e *Mansur et al.* [20] apresentaram a formulação explícita geral para integrar no tempo as equações da dinâmica através do uso das *funções de Green*, estabelecendo o procedimento denominado *Explicit Green Approach* (*ExGA*). *Dors* [17] estendeu o *ExGA* para elastodinâmica e introduziu o conceito de sub-malha, que torna o método competitivo tendo em vista a grande redução no custo do cálculo das matrizes de *Green*. Alguns

enfoques mais detalhados do conceito da *função de Green* podem ser achados nos trabalhos de *Mansur* [1] e *Graff* [21]. *Soares & Mansur* [22] estabeleceram um algoritmo unificado aplicável tanto para o domínio do tempo quanto para o domínio da freqüência na resolução de problemas não-lineares usando análise modal pelo MEF.

No entanto, existem muitos problemas onde o procedimento mais adequado para a sua resolução consiste em usar técnicas de acoplamento entre diferentes métodos numéricos, aproveitando as vantagens que têm cada um deles. No contexto do acoplamento entre o MEC e o MEF, *Zienkiewicz et al.* [4] definiram os esquemas de acoplamento *direto*, mediante a montagem das matrizes de coeficientes dentro de um sistema só, sendo em geral de mais cara implementação, e os de acoplamento *iterativo*, os quais aproveitam melhor as vantagens de cada método.

Com relação ao acoplamento *direto* MEC/MEF, *Brebbia & Georgiou* [23], *Li et al.* [24] e *Leung et al.* [25] propuseram procedimentos para resolver problemas lineares e estáticos, enquanto que *Von Estorff & Prabucki* [26] e *Von Estorff & Antes* [27] mostraram métodos de acoplamento para resolver problemas dinâmicos. A respeito do comportamento não-linear, *Pavlatos & Beskos* [28] e *Yazdchi et al.* [29] apresentaram, respectivamente, aplicações à elasto-plasticidade e ao comportamento sísmico não-linear de alguns tipos de elementos de concreto. *Guoyou et al.* [30] mostraram um procedimento com a finalidade de estabilizar o acoplamento direto, usando o método *linear* θ para problemas dinâmicos.

Dentre as técnicas de acoplamento *iterativo* MEC/MEF, *Lin et al.* [31] propuseram um método que utiliza uma conversão em termos de energia, a qual relaciona as *forças de superfície* do MEC com as *forças nodais* do MEF, na interface dos subdomínios que estão sendo discretizados pelos diferentes métodos. *Elleithy et al.* [32] foram além do procedimento seqüencial *Dirichlet-Neumann*, com o objetivo de resolver problemas da fratura considerando material elasto-plástico, e apresentaram uma breve revisão dos métodos já existentes para problemas lineares. *Kamiya & Iwase* [33] usaram o método dos gradientes conjugados, o complemento *Schur* e condensação para atualizar os valores das incógnitas nas interfaces, enquanto *Elleithy & Al-Gahtani* [34] apresentaram um procedimento baseado em definir uma área entre os subdomínios que é discretizada pelos dois métodos, não sendo necessário fazer aquela conversão de

forças de superfície do MEC para *forças nodais* do MEF. No entanto *Elleithy et al.* [35] propuseram um procedimento seqüencial de acoplamento iterativo MEC/MEF para problemas estáticos com comportamento elástico linear do material, definindo as condições para uma escolha adequada do parâmetro de relaxação ω, com o objetivo de garantir a convergência. *Soares et al.* [36] apresentaram um procedimento seqüencial de acoplamento iterativo, aplicável a problemas dinâmicos não lineares, considerando discretização temporal com diferentes passos de tempo. Outra pesquisa neste contexto foi apresentada por *Soares* [37], para problemas de interação solo-fluido-estrutura.

1.3. Objetivos e conteúdo do presente trabalho

Este trabalho tem como objetivo descrever a implementação numérica dos métodos dos elementos de contorno e dos elementos finitos, aplicados à resolução da equação escalar da onda em duas dimensões no domínio do tempo, resolvendo alguns exemplos e comparando os resultados obtidos. O algoritmo computacional do método dos elementos de contorno (MEC), que é baseado no método θ linear, inclui o tratamento de condições iniciais mediante a consideração de células no interior do domínio, onde estas condições são prescritas, além do cálculo das derivadas do potencial em pontos internos e das contribuições dos termos das fontes. Em relação ao método dos elementos finitos (MEF), a integração temporal é baseada em matrizes de *Green* calculadas explicitamente (*ExGA*). Propõe-se um esquema de acoplamento iterativo MEC/MEF-*ExGA* assumindo uma região discretizada pelo MEC, outra pelo MEF-*ExGA* e uma zona discretizada pelos dois métodos, permitindo, como será visto, a solução de casos nos quais somente se prescrevem condições naturais no contorno [34].

No segundo capítulo do presente trabalho apresenta-se a formulação do método dos elementos de contorno, aplicada à resolução de problemas lineares e homogêneos da equação escalar da onda, em duas dimensões e no domínio do tempo, incorporando fonte e também condições iniciais mediante a inclusão de células no domínio. Devido à natureza da solução fundamental em duas dimensões, incluída na formulação integral do MEC [1], é necessário desenvolver um processo de convolução, tanto com os coeficientes das matrizes G e H como também com as contribuições dos termos das fontes. As funções de interpolação espaciais, para o potencial e o fluxo, são consideradas lineares, enquanto as funções de interpolação no tempo usadas no trabalho

são: função linear para potencial e funções linear e constante para o fluxo, incluindo-se o método θ linear para estabilizar os resultados no caso de escolher função de interpolação linear no tempo para o fluxo.

No terceiro capítulo apresenta-se a formulação linear dos elementos finitos para a equação escalar da onda, descrevendo-se sua discretização espacial mediante o método dos resíduos ponderados. A integração temporal é efetuada usando os métodos de *Newmark* e os procedimentos baseados em matrizes de *Green* conhecidos como *ExGA-RK* e *ExGAH-dc*. Nestes métodos o processo de integração temporal é feito através de matrizes de *Green* calculadas mediante discretização espacial pelo MEF, e temporal pelo método de *Runge-Kutta* (*ExGA-RK*) ou diferenças centrais (*ExGAH-dc*). Os procedimentos conhecidos como *métodos de Green*, se baseiam em encontrar inicialmente a *função de Green* do problema, para depois aplicar dita função na marcha do tempo. O cálculo da *função de Green* é feito explicitamente, e os métodos usados para tais fins são *ExGA-RK* e *ExGAH-dc*.

No quarto capítulo, apresentam-se alguns tipos de acoplamento MEC/MEF existentes na literatura. Da-se uma maior ênfase a um procedimento que consiste em definir uma zona do domínio que é discretizada usando ambos os métodos. No presente trabalho estende-se aquele procedimento para a análise dinâmica no domínio do tempo, considerando escolha independente do passo de tempo em cada método.

No quinto capítulo, o presente trabalho mostra e compara os resultados de alguns exemplos resolvidos pelo método dos elementos de contorno e pelo método dos elementos finitos. A comparação dos resultados com aqueles obtidos usando o acoplamento iterativo sugerido, será considerada como sugestão para futuros trabalhos.

Finalmente, o sexto capítulo apresenta as conclusões obtidas, e também apresenta algumas sugestões possíveis para trabalhos futuros.

2

Formulação do MEC

2.1. Equação escalar da onda

A equação escalar da onda, para meios homogêneos e isotrópicos, com intensidade de fonte γ e sem considerar amortecimento, apresenta-se a seguir,

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -\gamma \tag{2.1}$$

onde u é o potencial solução da equação (2.1), c é a velocidade de propagação da onda, e a fonte γ é função das coordenadas espaciais x e y e do tempo t.

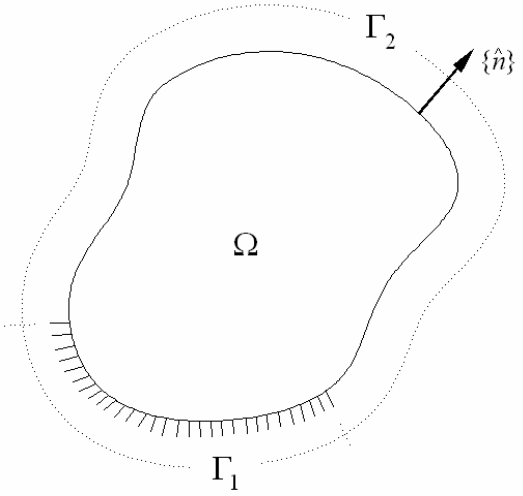

Figura 2.1: Geometria do continuo de domínio Ω e contorno Γ.

Uma solução particular da equação (2.1) pode ser obtida, para um domínio Ω que possui um contorno $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (figura 2.1), prescrevendo as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, y, t_0) &= u_0(x, y) \\ v(x, y, t_0) &= \dot{u}(x, y, t_0) = v_0(x, y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

para o tempo $t = t_0$. As condições essencial e natural nos contornos Γ_1 e Γ_2, respectivamente, são escritas como

$$u = \overline{u}$$
$$p = u_{,i} n_i = \frac{\partial u}{\partial n} = \overline{p} \tag{2.3}$$

Nas expressões (2.3), e também ao longo do trabalho, o índice repetido representa suma nos índices, sendo n_i as componentes do vetor normal unitário $\{\hat{n}\}$, ortogonal ao contorno Γ (figura 2.1).

2.2. Solução fundamental, formulação integral

Uma das principais características do MEC consiste em definir uma função conhecida como *solução fundamental*, a qual deve satisfazer identicamente a equação diferencial, mas não necessariamente as condições de contorno. Em geral, para a *solução fundamental* considera-se a resposta em um *ponto campo q*, para um tempo *t*, considerando uma fonte (ou carregamento) impulsiva de magnitude unitária, aplicada em um *ponto fonte s*, para um tempo *τ* (figura 2.2).

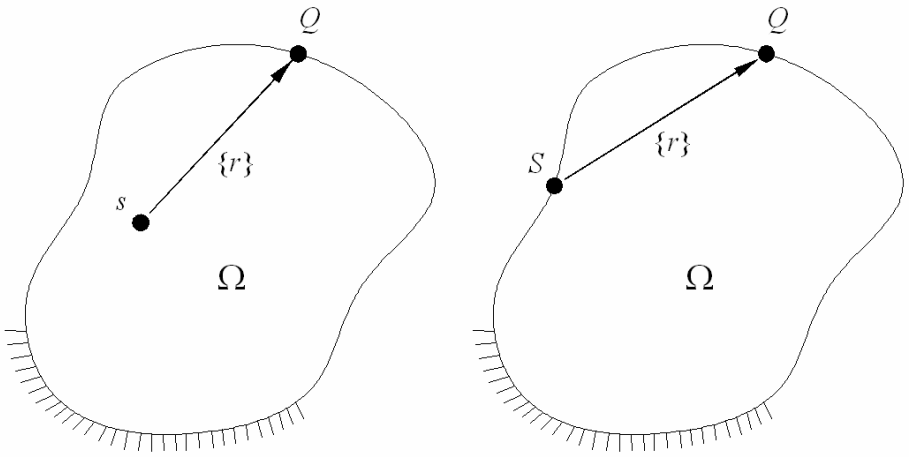

Figura 2.2: Representação do ponto fonte e do ponto campo, no contorno e no interior do domínio. Representação do vetor *r*.

A solução da equação (2.1) em duas dimensões, para um domínio infinito, com fonte γ^* de intensidade

$$\gamma^* = 4\pi\ \delta(q-s)\delta(t-\tau) \tag{2.4}$$

é a seguinte [1],

$$u^*\left(q,t;s,\tau\right)=\frac{2c}{\sqrt{c^2\left(t-\tau\right)^2-r^2}}\mathrm{H}\left[c\left(t-\tau\right)-r\right] \tag{2.5}$$

$$p^*\left(q,t;s,\tau\right)=\frac{\partial u^*\left(q,t;s,\tau\right)}{\partial n}=\frac{\partial u^*\left(q,t;s,\tau\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} \tag{2.6}$$

Na equação (2.5), $\mathrm{H}\left[t-a\right]$ denota a função *Heaviside*, onde se o argumento $t-a$ for maior ou igual a zero, o valor da função é 1, caso contrário é nulo.

O termo $\delta\left(t-a\right)$ em (2.4) corresponde à função *delta de Dirac*, e as suas principais propriedades são as seguintes:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-a\right)dt=1\\&\delta\left(t-a\right)=0\quad\text{se}\quad t\neq a\end{aligned} \tag{2.7}$$

r nas equações (2.5) e (2.6) corresponde à distância entre os pontos *campo* e *fonte*, respectivamente q e s.

Aplicando o método dos resíduos ponderados no espaço e no tempo sobre a equação (2.1), usando a *solução fundamental* como sendo a função de peso, chega-se a

$$\begin{aligned}&\int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega\left(\nabla^2u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}+\gamma\right)u^*\,d\Omega\right\}d\tau\\&\qquad=\int_0^{t^+}\left\{\int_{\Gamma_2}\left(p-\overline{p}\right)u^*\,d\Gamma\right\}d\tau-\int_0^{t^+}\left\{\int_{\Gamma_1}\left(u-\overline{u}\right)p^*\,d\Gamma\right\}d\tau\end{aligned} \tag{2.8}$$

Inclui-se o $t^+=t+\varepsilon$ como limite superior das integrais em (2.8), com ε suficientemente pequeno, com a finalidade de evitar o limite de integração coincidindo

exatamente com o pico da função *delta de Dirac* [1-2]. Integrando duas vezes por partes em relação à variável τ, chega-se a

$$\int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma \left(u^* p - p^* u\right)\, d\Gamma\right\}\, d\tau + \int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega \left(\nabla^2 u^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2}\right) u\, d\Omega\right\}\, d\tau$$
$$+\int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega \left(u^*\gamma\right)\, d\Omega\right\}\, d\tau + \frac{1}{c^2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u^*}{\partial \tau}u - \frac{\partial u}{\partial \tau}u^*\right)\Bigg|_0^{t^+}\, d\Omega = 0 \qquad (2.9)$$

Aplicando a definição de *solução fundamental* e substituindo (2.4) em (2.9), obtém-se

$$\int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma \left(u^* p - p^* u\right)\, d\Gamma\right\}\, d\tau - \int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega 4\pi\ \delta(q-s)\delta(t-\tau)\ u\, d\Omega\right\}\, d\tau$$
$$+\int_0^{t^+}\left\{\int_\Omega \left(u^*\gamma\right)\, d\Omega\right\}\, d\tau - \frac{1}{c^2}\int_\Omega \left(v_0^*\, u_0 - v_0\, u_0^*\right)\, d\Omega = 0 \qquad (2.10)$$

Na expressão anterior,

$$v_0^* = \left|\frac{\partial u^*}{\partial \tau}\right|_{\tau=t_0}$$
$$u_0^* = \left|u^*\right|_{\tau=t_0} \qquad (2.11)$$

Aplicando as propriedades (2.7) da função *delta de Dirac* na segunda integral em (2.10), deduz-se a expressão integral para o potencial u em pontos internos ao domínio Ω [1,2]:

$$u(s,t) = \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma u^*(Q,t;s,\tau)\ p(Q,\tau)\ d\Gamma(Q)\right\}\, d\tau\right.$$
$$\left.-\int_0^{t^+}\left\{\int_\Gamma p^*(Q,t;s,\tau)\ u(Q,\tau)\ d\Gamma(Q)\right\}\, d\tau\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{c^2}\int_{\Omega} v_0^*(q,t;s)\; u_0(q)\; d\Omega(q) \\
&+\frac{1}{c^2}\int_{\Omega} u_0^*(q,t;s)\; v_0(q)\; d\Omega(q) \\
&+\int_0^{t^+}\left\{\int_{\Omega} u^*(q,t;s,\tau)\; \gamma(q,\tau)\; d\Omega(q)\right\} d\tau\Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

A letra maiúscula em (2.12) para Q e S, significa que o ponto campo q e o ponto fonte s ficam localizados no contorno Γ (figura 2.2).

No entanto, pode ser demonstrado [1,2] que a equação para u em pontos localizados no contorno Γ fica

$$
\begin{aligned}
\overline{c}(S)\; u(S,t) = \frac{1}{4\pi}\Bigg(&\int_0^{t^+}\left\{\int_{\Gamma} u^*(Q,t;S,\tau)\; p(Q,\tau)\; d\Gamma(Q)\right\} d\tau \\
&-\int_0^{t^+}\left\{\int_{\Gamma} p^*(Q,t;S,\tau)\; u(Q,\tau)\; d\Gamma(Q)\right\} d\tau \\
&-\frac{1}{c^2}\int_{\Omega} v_0^*(q,t;S)\; u_0(q)\; d\Omega(q) \\
&+\frac{1}{c^2}\int_{\Omega} u_0^*(q,t;S)\; v_0(q)\; d\Omega(q) \\
&+\int_0^{t^+}\left\{\int_{\Omega} u^*(q,t;S,\tau)\; \gamma(q,\tau)\; d\Omega(q)\right\} d\tau\Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

onde o termo $\overline{c}(S)$ é determinado pela geometria na vizinhança do contorno, e corresponde ao quociente entre o ângulo interior α no contorno do domínio, e "2π" (figura 2.3), ou seja [1-3,12]

$$
\overline{c}(S) = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{2.14}
$$

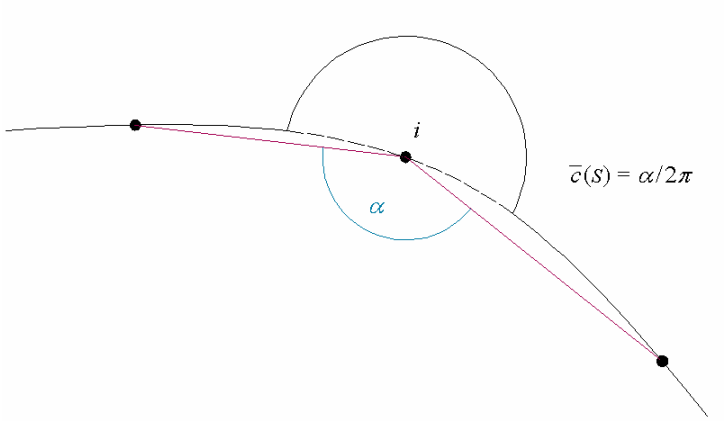

Figura 2.3: Significado geométrico do termo $\overline{c}(S)$.

Substituindo a equação (2.6) em (2.13) e desenvolvendo, a expressão para *u* nos pontos do contorno [1] resulta ser

$$\overline{c}(S)\,u(S,t) = \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{t^+} \left\{ \int_\Gamma \left(u^* p \right) d\Gamma \right\} d\tau + \int_0^{t^+} \left\{ \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n}\left(B^* u + u^* \frac{v}{c} \right) d\Gamma \right\} d\tau \right.$$
$$+ \frac{1}{c^2}\int_\Omega \left(u_0^* v_0 \right) d\Omega + \frac{1}{c}\int_\Omega \left(-B_0^* u_0 + u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0^* \frac{u_0}{r} \right) d\Omega$$
$$\left. + \int_0^{t^+} \left\{ \int_\Omega \left(u^* \gamma \right) d\Omega \right\} d\tau \right) \qquad (2.15)$$

Na equação anterior tem-se

$$B^* = B^*(Q,t;S,\tau) = \frac{2c\left[c(t-\tau) - r \right]}{\sqrt{\left[c^2 (t-\tau)^2 - r^2 \right]^3}} \mathrm{H}\left[c(t-\tau) - r \right] \qquad (2.16)$$

$$B_0^* = B_0^*(Q,t;S) = B^*(Q,t;S,t_0) \qquad (2.17)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial \tau} \qquad (2.18)$$

2.3. Implementação numérica

Após obter as equações integrais do MEC, válida para pontos no interior do domínio Ω e para pontos sobre o contorno Γ, pode-se discretizar as expressões para o potencial, a velocidade e o fluxo usando funções de interpolação no espaço e no tempo. Pode-se considerar,

$$u(Q,\tau) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{m=1}^{n} \phi^m(\tau)\ \varphi_j(Q)\ u_j^m\right) \tag{2.19}$$

$$v(Q,\tau) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{d\phi^m(\tau)}{d\tau}\ \varphi_j(Q)\ u_j^m\right) \tag{2.20}$$

$$p(Q,\tau) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{m=1}^{n} \theta^m(\tau)\ \zeta_j(Q)\ p_j^m\right) \tag{2.21}$$

nas quais o contorno é dividido em *J* elementos e o eixo do tempo em *n* instantes. As funções de interpolação adotam, por definição, os seguintes valores,

$$\begin{aligned} \varphi_j(Q_i) &= \delta_{ij} \\ \zeta_j(Q_i) &= \delta_{ij} \\ \phi^m(t_n) &= \delta_{mn} \\ \theta^m(t_n) &= \delta_{mn} \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde δ_{ij} e δ_{mn} são funções *delta de Kronecker*, as quais assumem o valor 1 se os sub-índices coincidirem, e 0 caso contrário. Os valores de *u* e *p* no lado direito das equações (2.19), (2.20) e (2.21), são os valores nodais referentes ao instante de tempo *m*, ou seja,

$$\begin{aligned} u_j^m &= u(Q_j, t_m) \\ p_j^m &= p(Q_j, t_m) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Reescrevendo a equação (2.15) para cada nó *i* e cada valor de tempo t_n, substituindo as aproximações (2.19), (2.20) e (2.21) para as variáveis *u*, *v* e *p*, respectivamente, chega-se a

$$\overline{c}\left(S_i\right)\, u_i^n + \frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{J} H_{ij}^{nm}\; u_j^m\right) = \frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{J} G_{ij}^{nm}\; p_j^m\right) + F_i^n + S_i^n\right\} \quad (2.24)$$

na qual

$$H_{ij}^{nm} = -\int_{\Gamma} \frac{\partial r\left(S_i,Q\right)}{\partial n\left(Q\right)}\; \varphi_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_n}\left[\phi^m\left(\tau\right)\; B^*\left(Q,t_n;S_i,\tau\right) + \frac{1}{c}\frac{d\phi^m\left(\tau\right)}{d\tau}\; u^*\left(Q,t_n;S_i,\tau\right)\right] d\tau\right\} d\Gamma\left(Q\right) \quad (2.25)$$

$$G_{ij}^{nm} = \int_{\Gamma} \zeta_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_n} \theta^m\left(\tau\right)\; u^*\left(Q,t_n;S_i,\tau\right)\; d\tau\right\} d\Gamma\left(Q\right) \quad (2.26)$$

$$F_i^n = \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} u_0^*\left(q,t_n;S_i\right)\; v_0\left(q\right)\; d\Omega\left(q\right) + \frac{1}{c}\int_{\Omega} u_0^*\left(q,t_n;S_i\right)\; \frac{\partial u_0\left(q\right)}{\partial r\left(S_i,q\right)}\; d\Omega\left(q\right) + \left(t_n - t_0\right)\int_{\Omega} \frac{1}{r\left(S_i,q\right)}\; B_0^*\left(q,t_n;S_i\right)\; u_0\left(q\right)\; d\Omega\left(q\right) \quad (2.27)$$

$$S_i^n = \int_0^{t_n}\left\{\int_{\Omega} u^*\left(q,t_n;S_i,\tau\right)\; \gamma\left(q,\tau\right)\; d\Omega\left(q\right)\right\} d\tau \quad (2.28)$$

As expressões (2.27) e (2.28) para F_i^n e S_i^n na equação (2.24), respectivamente, são as contribuições ao nó *i* das condições iniciais nas células do domínio, e das fontes concentradas, para o instante de tempo *n*.

Considerando Δt constante ao longo da marcha no tempo, as funções de interpolação temporais ϕ^m e θ^m possuem a propriedade de translação [1,2], o que significa que para algum instante de tempo *m*,

$$t_m - t_{m-1} = \Delta t \;\Rightarrow\; \phi^m(t) = \phi^{m+l}(t + l\,\Delta t) \tag{2.29}$$

sendo *l* inteiro positivo. Portanto

$$H_{ij}^{nm} = H_{ij}^{(n+l)(m+l)} \tag{2.30}$$

$$G_{ij}^{nm} = G_{ij}^{(n+l)(m+l)} \tag{2.31}$$

Devido a isso, evitam-se muitas operações redundantes no cálculo dos coeficientes das matrizes para cada passo de tempo, tal como é mostrado na figura 2.4.

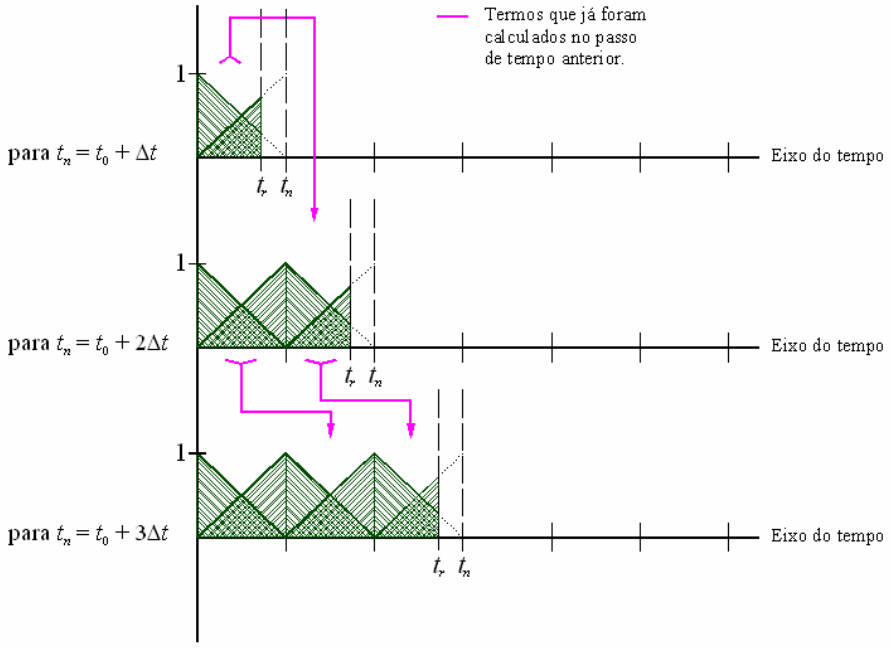

Figura 2.4: Esquema de cálculo dos coeficientes das matrizes *G* e *H* na marcha do tempo.

A partir desta figura, no primeiro instante de tempo ($t_n = t_0 + \Delta t$) são calculadas as contribuições assinaladas junto ao tempo de retardo t_r, mas no instante seguinte

($t_n = t_0 + 2\Delta t$) a mesma contribuição aparece defasada em um instante de tempo, e não é necessário recalcula-la.

Considerando função de interpolação linear no tempo para *u*, *v* e *p* (ver figura 2.5), tem-se

$$\phi^m(\tau) = \theta^m(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t} & \text{se } t_{m-1} < \tau < t_m \\ \dfrac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} & \text{se } t_m < \tau < t_{m+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.32}$$

Substituindo as expressões (2.32), da função de interpolação linear, em (2.25) e (2.26), após desenvolver [1] obtêm-se

$$H_{ij}^{nm} = \left(H_{ij}^{nm}\right)_I + \left(H_{ij}^{nm}\right)_F \tag{2.33}$$

$$G_{ij}^{nm} = \left(G_{ij}^{nm}\right)_I + \left(G_{ij}^{nm}\right)_F \tag{2.34}$$

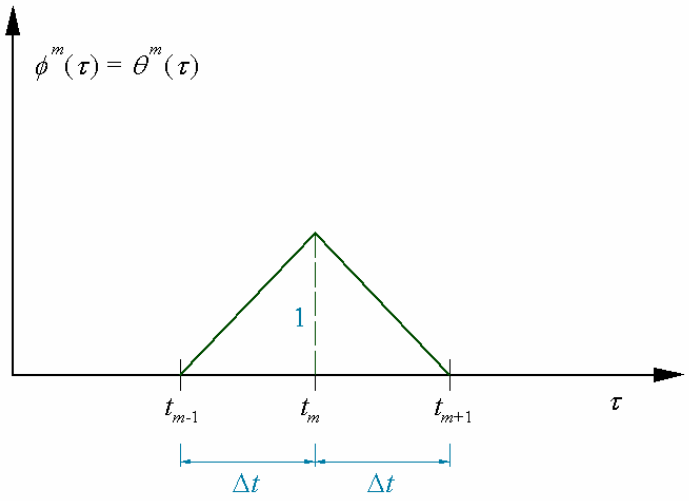

Figura 2.5: Função de interpolação linear para ϕ^m e θ^m.

sendo

$$\left(H_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n}\ \varphi_j(Q)\ \left(D_{ij}^{nm}\right)_I\ d\Gamma \tag{2.35}$$

$$\left(H_{ij}^{nm}\right)_F = \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n}\ \varphi_j(Q)\ \left(D_{ij}^{nm}\right)_F\ d\Gamma \tag{2.36}$$

$$\left(G_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \zeta_j(Q)\ \left(E_{ij}^{nm}\right)_I\ d\Gamma \tag{2.37}$$

$$\left(G_{ij}^{nm}\right)_F = \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \zeta_j(Q)\ \left(E_{ij}^{nm}\right)_F\ d\Gamma \tag{2.38}$$

Nos termos (2.35) ao (2.38), presentes nas equações (2.33) e (2.34), o sub-índices I e F representam, respectivamente, a contribuição considerando as partes à esquerda e à direita do t_m na figura 2.5. As expressões para os coeficientes $\left(D_{ij}^{nm}\right)_I$, $\left(D_{ij}^{nm}\right)_F$, $\left(E_{ij}^{nm}\right)_I$ e $\left(E_{ij}^{nm}\right)_F$ se mostram no item A.1 do apêndice A.

Para $\theta^m(\tau)$ constante (ver figura 2.6),

$$\theta^m(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_{m-1} < \tau < t_m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.39}$$

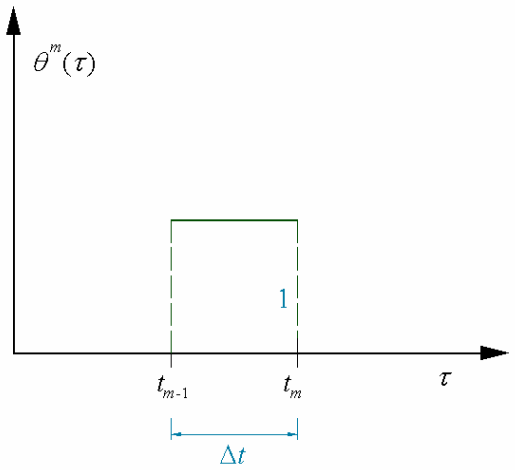

Figura 2.6: Função de interpolação constante para θ^m.

e tem-se

$$\left(G_{ij}^{nm}\right)=\frac{2}{c\cdot\Delta t}\int_{\Gamma}\zeta_j(Q)\ \left(L_{ij}^{nm}\right)\ d\Gamma \tag{2.40}$$

onde o termo $\left(L_{ij}^{nm}\right)$ se mostra no item A.2 do apêndice A.

A etapa seguinte corresponde a assumir uma discretização do contorno Γ. No trabalho considera-se o uso de funções de interpolação lineares na discretização do contorno. Na figura 2.7 mostra-se o contorno Γ, o qual é representado por uma série de segmentos retos, e_k elementos. l_k e $\{\hat{n}\}_k$ são respectivamente o comprimento do elemento e o vetor normal unitário. Considerando dois elementos e_p e e_q tendo um nó em comum j, como se mostra na figura 2.8, as funções lineares no espaço em coordenadas intrínsecas, são representadas por

$$\varphi_j(\xi)=\zeta_j(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\xi_p\right) & \text{se } Q\in e_p\\ \frac{1}{2}\left(1-\xi_q\right) & \text{se } Q\in e_q\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases} \tag{2.41}$$

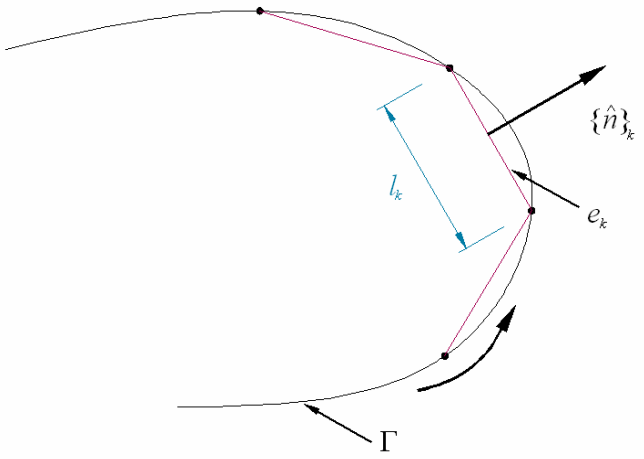

Figura 2.7: Discretização linear do contorno Γ.

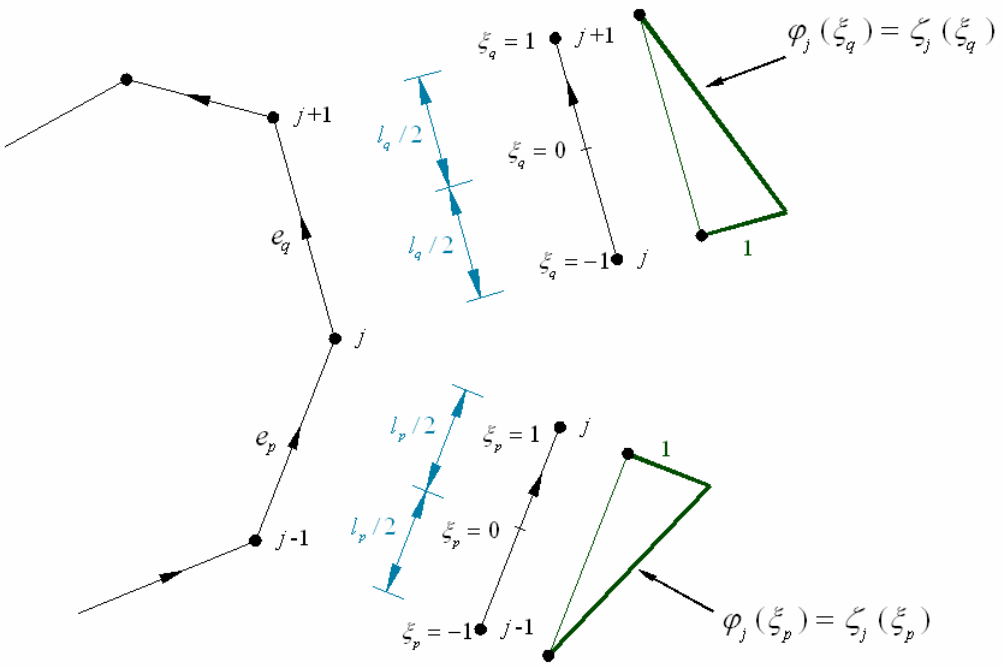

Figura 2.8: Função de interpolação linear no espaço para *u*, *v* e *p* no contorno Γ.

Considerando (2.41), as equações (2.35) a (2.38) podem ser expressas por

$$\left(H_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{2}{c\,\Delta t}\left[\int_{e_p} \frac{\partial r}{\partial n}\,\varphi_j(Q)\,\left(D_{ij}^{nm}\right)_I\,d\Gamma_p + \int_{e_q} \frac{\partial r}{\partial n}\,\varphi_j(Q)\,\left(D_{ij}^{nm}\right)_I\,d\Gamma_q\right] \tag{2.42}$$

$$\left(H_{ij}^{nm}\right)_F = \frac{2}{c\,\Delta t}\left[\int_{e_p} \frac{\partial r}{\partial n}\,\varphi_j(Q)\,\left(D_{ij}^{nm}\right)_F\,d\Gamma_p + \int_{e_q} \frac{\partial r}{\partial n}\,\varphi_j(Q)\,\left(D_{ij}^{nm}\right)_F\,d\Gamma_q\right] \tag{2.43}$$

$$\left(G_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{2}{c\,\Delta t}\left[\int_{e_p} \zeta_j(Q)\,\left(E_{ij}^{nm}\right)_I\,d\Gamma_p + \int_{e_q} \zeta_j(Q)\,\left(E_{ij}^{nm}\right)_I\,d\Gamma_q\right] \tag{2.44}$$

$$\left(G_{ij}^{nm}\right)_F = \frac{2}{c\,\Delta t}\left[\int_{e_p} \zeta_j(Q)\,\left(E_{ij}^{nm}\right)_F\,d\Gamma_p + \int_{e_q} \zeta_j(Q)\,\left(E_{ij}^{nm}\right)_F\,d\Gamma_q\right] \tag{2.45}$$

Alternativamente, escolhendo-se $\theta^m(\tau)$ constante, as equações (2.44) e (2.45) são substituídas pela equação (2.46) abaixo:

$$\left(G_{ij}^{nm}\right) = \frac{2}{c\ \Delta t}\left[\int_{e_p} \zeta_j(Q)\ \left(L_{ij}^{nm}\right)\ d\Gamma_p + \int_{e_q} \zeta_j(Q)\ \left(L_{ij}^{nm}\right)\ d\Gamma_q\right] \qquad (2.46)$$

No caso em que $n = m$ no termo $\left(H_{ii}^{nm}\right)_I$ dado pela equação (2.42) considerando $i = j$, o integrando possui uma singularidade do tipo $1/r$, motivo pelo qual a integral resultante teria que ser calculada no sentido do *valor principal de Cauchy*. No entanto, no caso de elementos de contorno lineares no espaço, as contribuições desaparecem devido à ortogonalidade entre o contorno Γ_k e a normal $\{\hat{n}\}_k$, já que $\partial r/\partial n = 0$. Para as integrais dos termos $\left(G_{ii}^{nm}\right)_I$, pode-se obter uma maior precisão integrando-as analiticamente [1].

Para obter os valores das derivadas do potencial em pontos internos, em relação às coordenadas do espaço *x* e *y*, e ao tempo *t*, é necessário calcular as derivadas dos termos $\left(D_{ij}^{nm}\right)_I$, $\left(D_{ij}^{nm}\right)_F$, $\left(E_{ij}^{nm}\right)_I$ e $\left(E_{ij}^{nm}\right)_F$ presentes nos coeficientes $\left(H_{ij}^{nm}\right)_I$, $\left(H_{ij}^{nm}\right)_F$, $\left(G_{ij}^{nm}\right)_I$ e $\left(G_{ij}^{nm}\right)_F$, respectivamente, assinalados nas expressões (2.35) a (2.38), no caso de ter função de interpolação linear para representar a variação temporal do potencial *u* e do fluxo *p*. Em conseqüência, assumindo função de interpolação constante para representar a variação temporal do fluxo *p*, corresponde obter as derivadas no espaço e no tempo do termo $\left(L_{ij}^{nm}\right)$, presente no coeficiente $\left(G_{ij}^{nm}\right)$ e mostrado na equação (2.40). Tais derivadas se apresentam nos itens A.3 e A.4 do apêndice A do presente trabalho.

Por exemplo, para calcular a derivada em *x* do coeficiente $\left(G_{ij}^{nm}\right)_I$ na expressão (2.37), deve ser calculada a derivada do termo $\left(E_{ij}^{nm}\right)_I$ fazendo uso da regra da cadeia, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \zeta_j(Q)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(E_{ij}^{nm}\right)_I\ d\Gamma$$

$$= \frac{2}{c\cdot\Delta t}\int_\Gamma \zeta_j(Q)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(E_{ij}^{nm}\right)_I\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot d\Gamma \qquad (2.47)$$

Seguindo a mesma regra, pode-se obter a correspondente derivada em *y*. Para a derivada em *x* do coeficiente $\left(H_{ij}^{nm}\right)_I$ na expressão (2.35), é necessário aplicar a regra da cadeia sobre um produto de funções, tal como é mostrado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\ \left(D_{ij}^{nm}\right)_I\right]\ \varphi_j(Q)\ d\Gamma$$

$$= \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\ \left(D_{ij}^{nm}\right)_I + \frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{ij}^{nm}\right)_I\right]\ \varphi_j(Q)\ d\Gamma$$

$$= \frac{2}{c\ \Delta t}\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\ \left(D_{ij}^{nm}\right)_I + \frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(D_{ij}^{nm}\right)_I\ \frac{\partial r}{\partial x}\right]\ \varphi_j(Q)\ d\Gamma \qquad (2.48)$$

As derivadas no tempo dos mencionados coeficientes podem ser calculadas diferenciando diretamente as contribuições *D* e *E* no apêndice A, segundo for o caso.

2.4. Integrais das contribuições das condições iniciais

O termo das condições iniciais, representado pela equação (2.27), considerando um tempo inicial t_0, é

$$F_i^n = \frac{1}{c^2}\int_\Omega u_{0i}^{*n}\ v_0\ d\Omega(q) + \frac{1}{c}\int_\Omega u_{0i}^{*n}\ \frac{\partial u_0}{\partial r}\ d\Omega(q)$$

$$+\left(t_n - t_0\right)\int_\Omega \frac{1}{r}\ B_{0i}^{*n}\ u_0\ d\Omega(q) \qquad (2.49)$$

sendo $u_{0i}^{*n} = u_0\left(q, t_n; S_i, t_0\right)$ e $B_{0i}^{*n} = B_0\left(q, t_n; S_i, t_0\right)$. Após discretizar o domínio em células triangulares O_l, chega-se a

$$F_i^n = \sum_{l=1}^{L} \left\{ \frac{1}{c^2} \int_{O_l} u_{0i}^{*n} \; v_0 \; d\Omega(q) + \frac{1}{c} \int_{O_l} u_{0i}^{*n} \; \frac{\partial u_0}{\partial r} \; d\Omega(q) \right.$$

$$\left. + (t_n - t_0) \int_{O_l} \frac{1}{r} \; B_{0i}^{*n} \; u_0 \; d\Omega(q) \right\} \qquad (2.50)$$

Definindo as coordenadas de área A_1, A_2 e A_3 em cada célula (ver figura 2.9), podem-se definir funções de interpolação para representar a variação das grandezas dentro delas. Assim,

$$\mu_1 = \frac{A_1}{A} \qquad \mu_2 = \frac{A_2}{A} \qquad \mu_3 = \frac{A_3}{A} \qquad (2.51)$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \qquad (2.52)$$

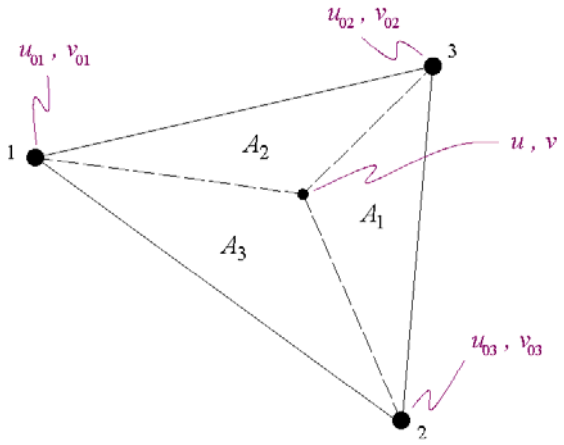

Figura 2.9: Coordenadas de área e valores de *u* e *v* na célula.

e então, tem-se

$$u_0 = u_{0\alpha} \mu_\alpha \qquad (2.53)$$

$$v_0 = v_{0\alpha} \mu_\alpha \qquad (2.54)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = u_{0\alpha} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial r} \qquad (2.55)$$

Nas equações (2.53) a (2.55), $u_{0\alpha}$ e $v_{0\alpha}$ são os valores iniciais de *u* e da sua derivada no tempo, respectivamente, para o nó α pertencente à célula O_l. Assumindo

uma variação bi-linear da condição inicial dentro da célula, a função de interpolação μ_α pode ser expressa conforme a seguir,

$$\mu_\alpha = \frac{A_\alpha^0}{A} + \frac{1}{2A}\left(b_\alpha \ \breve{x} + a_\alpha \ \breve{y}\right) \tag{2.56}$$

$$a_\alpha = \breve{x}_\gamma - \breve{x}_\beta \qquad b_\alpha = \breve{y}_\beta - \breve{y}_\gamma \tag{2.57}$$

$$2A_\alpha^0 = \breve{x}_\beta \ \breve{y}_\gamma - \breve{x}_\gamma \ \breve{y}_\beta \qquad A = \frac{1}{2}\left(b_\alpha \ a_\beta - b_\beta \ a_\alpha\right) \tag{2.58}$$

$$\alpha = 1,2,3 \qquad \beta = 2,3,1 \qquad \gamma = 3,1,2 \tag{2.59}$$

Em (2.56), (2.57) e (2.58), $\breve{x}$ e $\breve{y}$ correspondem a coordenadas relativas, usando como referência o nó *i* (ver figura 2.10), em conseqüência,

$$x = x_i + \breve{x} = x_i + r \ \cos\left(\theta\right) \tag{2.60}$$

$$y = y_i + \breve{y} = y_i + r \ sen\left(\theta\right) \tag{2.61}$$

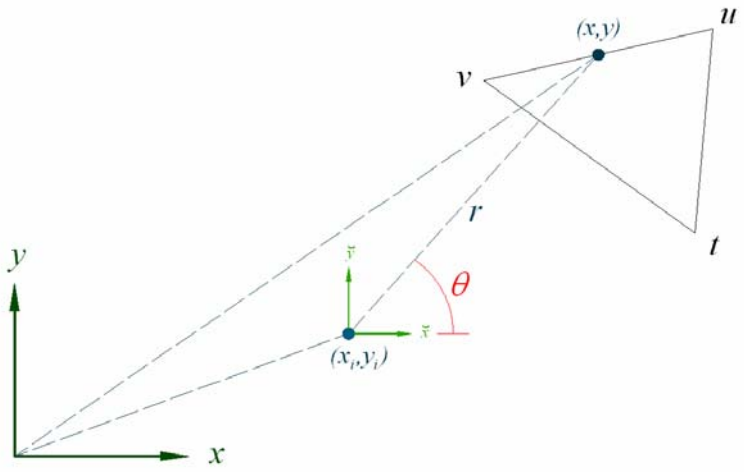

Figura 2.10: Coordenadas absolutas e relativas ao nó *i*.

Considerando a função de interpolação μ_α em coordenadas polares, sabendo que $\breve{x} = r \ cos\left(\theta\right)$ e $\breve{y} = r \ sen\left(\theta\right)$, chega-se a

$$\mu_\alpha = C_\alpha + D_\alpha(\theta)\ r \quad \text{, com} \begin{cases} C_\alpha = \dfrac{A_\alpha^0}{A} \\ D_\alpha(\theta) = \dfrac{1}{2A}\left(b_\alpha\ \cos(\theta) + a_\alpha\ sen(\theta)\right) \end{cases} \tag{2.62}$$

Tendo em conta o anterior, as expressões (2.53), (2.54) e (2.55) resultam ser

$$u_0 = u_{0\alpha}\left[C_\alpha + D_\alpha(\theta)\cdot r\right] \tag{2.63}$$

$$v_0 = v_{0\alpha}\left[C_\alpha + D_\alpha(\theta)\cdot r\right] \tag{2.64}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = u_{0\alpha} D_\alpha(\theta) \tag{2.65}$$

Substituindo estas expressões na equação (2.50), tem-se,

$$F_i^n = \sum_{l=1}^{L}\left(R_{li}^{\alpha n}\ v_{0\alpha} + T_{li}^{\alpha n}\ u_{0\alpha}\right) \tag{2.66}$$

com

$$R_{li}^{\alpha n} = \frac{1}{c^2}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\int_0^{g_t^i(\theta)} u_{0i}^{*n}\left[C_\alpha + D_\alpha(\theta)\ r\right]_l r\ dr\ d\theta \tag{2.67}$$

$$T_{li}^{\alpha n} = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\int_0^{g_t^i(\theta)}\left(\frac{1}{c}\ u_{0i}^{*n}\ D_\alpha(\theta)\ r + (t_n - t_0)\ B_{0i}^{*n}\left[C_\alpha + D_\alpha(\theta)\ r\right]\right)_l dr\ d\theta \tag{2.68}$$

sendo $t = 1,2,3$, $u = 2,3,1$ e $v = 3,1,2$, e de acordo com a figura 2.11,

$$g_t^i(\theta) = \begin{cases} r_t^i(\theta) & r_t^i(\theta) < c\ (t_n - t_0) \\ c\ (t_n - t_0) & r_t^i(\theta) > c\ (t_n - t_0) \end{cases} \tag{2.69}$$

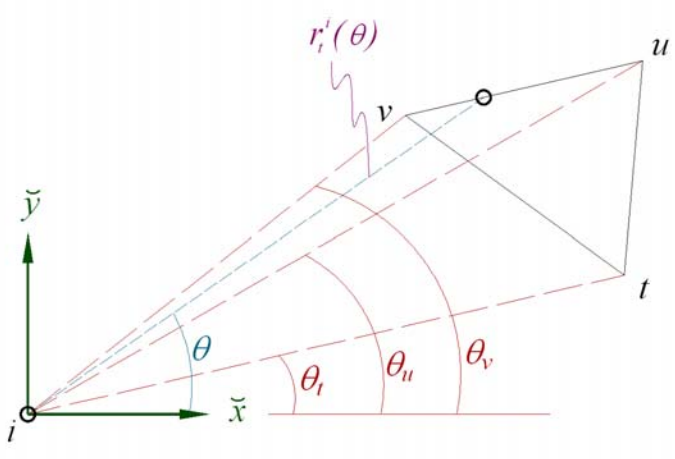

Figura 2.11: Conceito geométrico do $r_t^i(\theta)$.

Em (2.69), de acordo com esta figura, tem-se

$$r_t^i(\theta) = \frac{-2\,A_t^0}{b_t\,\cos(\theta) + a_t\,sen(\theta)} \tag{2.70}$$

As expressões (2.67) e (2.68), para $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$, são mostradas no item B.1 do apêndice B.

2.5. Derivadas das contribuições das condições iniciais

Com a finalidade de calcular as derivadas do potencial para pontos internos, em especial aquelas em relação às coordenadas espaciais *x* e *y*, deve-se usar a regra de *Leibnitz*, pois os limites das integrais (2.67) e (2.68), ou seja, θ_u e θ_v, são funções das coordenadas do ponto *i*.

Escrevendo os resultados dos coeficientes $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$, das equações (B.4) e (B.5) do apêndice B, da seguinte forma:

$$R_{li}^{\alpha n} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} I_R(\theta, x_i, y_i)\, d\theta \tag{2.71}$$

$$T_{li}^{\alpha n} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} I_T\left(\theta, x_i, y_i\right)\, d\theta \tag{2.72}$$

e usando a regra de derivação de *Leibnitz*, as suas derivadas resultam ser

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial x_i}\, d\theta - I_R\left(\theta_u, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_u}{\partial x_i} + I_R\left(\theta_v, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_v}{\partial x_i} \right\} \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial y_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial y_i}\, d\theta - I_R\left(\theta_u, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_u}{\partial y_i} + I_R\left(\theta_v, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_v}{\partial y_i} \right\} \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial x_i}\, d\theta - I_T\left(\theta_u, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_u}{\partial x_i} + I_T\left(\theta_v, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_v}{\partial x_i} \right\} \tag{2.75}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial y_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial y_i}\, d\theta - I_T\left(\theta_u, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_u}{\partial y_i} + I_T\left(\theta_v, x_i, y_i\right)\, \frac{\partial \theta_v}{\partial y_i} \right\} \tag{2.76}$$

onde

$$I_R = \frac{1}{c} \left\{ 2\, C_\alpha\, \left(c\left(t_n - t_i\right) - V_1\, V_2 \right) + D_\alpha\left(\theta\right) \left[-g_t^i\left(\theta\right)\, V_1\, V_2 + c^2 \left(t_n - t_i\right)^2 V_3 \right] \right\} \tag{2.77}$$

$$I_T = 2 \cdot \left\{ C_\alpha \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right) + D_\alpha (\theta) \left(c(t_n - t_i) \left[V_3 + \frac{V_1}{V_2} \right] - V_1 \; V_2 \right) \right\} \tag{2.78}$$

Entretanto, fazendo uso do teorema fundamental do cálculo, tem-se

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R (\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial t_n} \, d\theta \tag{2.79}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T (\theta, x_i, y_i) \right\}}{\partial t_n} \, d\theta \tag{2.80}$$

Alguns detalhes do cálculo destes termos são mostrados no apêndice B do trabalho.

2.6. Contribuições dos termos das fontes concentradas

Definindo distribuições de fonte concentradas, do tipo seguinte:

$$\gamma(q, \tau) = f(\tau) \; \delta(q - q_c) \tag{2.81}$$

onde q_c assinala o ponto onde a fonte está sendo aplicada. A equação (2.28) após a integração no espaço e fazendo uso das propriedades da função *delta de Dirac*, fica

$$S_i^n = \int_0^{t_n} f(\tau) \; u^*(q_c, t_n; S_i, \tau) \; d\tau \tag{2.82}$$

Interpolando linearmente para $f(\tau)$, tem-se

$$f(\tau) = \sum_{m=1}^{N} \theta^m (\tau) \, f^m \tag{2.83}$$

Em (2.83), $\theta^m(\tau)$ é dado por (2.32) e $f^m = f(t_m)$. O resultado da expressão (2.82), após substituir (2.83) e desenvolver, é

$$S_i^n = \sum_{m=1}^{N} w_i^{nm} f^m \tag{2.84}$$

onde

$$w_i^{nm} = \frac{2}{c\ \Delta t}\left\{\left(E_i^{nm}\right)_I^c + \left(E_i^{nm}\right)_F^c\right\} \tag{2.85}$$

Os coeficientes $\left(E_i^{nm}\right)_I^c$ e $\left(E_i^{nm}\right)_F^c$ em (2.85) são calculados usando as mesmas expressões correspondentes no apêndice A, mas fazendo $r = r_c$, onde $r_c = \left|r_j - r_s\right|$. r_j é r_s são, respectivamente, o módulo dos vetores posição do ponto campo *j* e do ponto *s* onde se aplica a fonte.

2.7. Método θ linear aplicado ao MEC, no domínio do tempo

O método θ linear é usado no presente trabalho com o objetivo de melhorar a estabilidade dos resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno, quando se assume uma variação temporal linear para o fluxo, porém o carregamento é uma função que não é continua [7]. O procedimento é bastante similar ao método *Wilson* θ. A técnica, quando usada no método dos elementos finitos, é incondicionalmente estável, assumindo uma variação linear da aceleração a partir do tempo t até o tempo $t + \theta \cdot \Delta t$.

Para aplicar o método antes mencionado ao MEC, assume-se um último passo de tempo diferente e igual a $t_{n+\theta} - t_n$, em lugar de $t_{n+1} - t_n$, tal como é mostrado na figura 2.12.

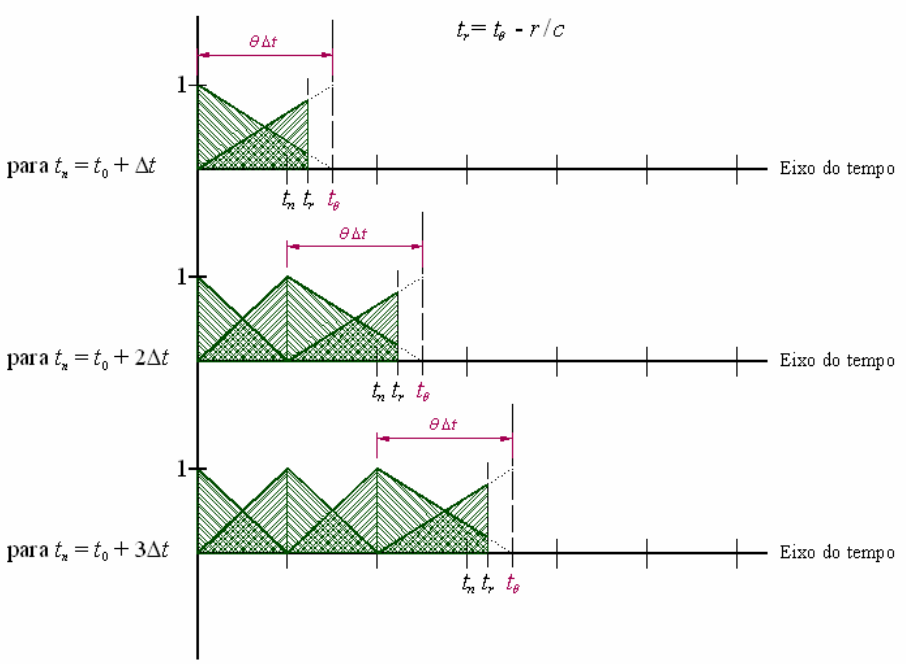

Figura 2.12: Esquema no tempo para o método θ linear.

A relação entre as respostas para o nó i, referentes aos tempos t_{n+1} e $t_{n+\theta}$, assumindo variação linear para o potencial e para o fluxo, pode ser expressa conforme a seguir,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{u_i^{n+\theta} - u_i^n}{t_{n+\theta} - t_n} \tag{2.86}$$

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{p_i^{n+\theta} - p_i^n}{t_{n+\theta} - t_n} \tag{2.87}$$

Isolando u_i^{n+1} e p_i^{n+1}, e tendo em conta que $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ e $\theta \cdot \Delta t = t_{n+\theta} - t_n$, chega-se a

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\theta} u_i^{n+\theta} + \frac{\theta - 1}{\theta} u_i^n \tag{2.88}$$

$$p_i^{n+1} = \frac{1}{\theta} p_i^{n+\theta} + \frac{\theta - 1}{\theta} p_i^n \tag{2.89}$$

Escrevendo as equações (2.24) a (2.28) para o instante $n+1$, em vez do instante n, tem-se

$$\overline{c}\left(S_i\right)\ u_i^{n+1}+\frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{J}H_{ij}^{(n+1)m}\ u_j^m\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{m=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{J}G_{ij}^{(n+1)m}\ p_j^m\right)+F_i^{(n+1)}+S_i^{(n+1)}\right\} \tag{2.90}$$

na qual

$$H_{ij}^{(n+1)m}=-\int_{\Gamma}\frac{\partial r\left(S_i,Q\right)}{\partial n\left(Q\right)}\ \varphi_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_{n+1}}\left[\phi^m\left(\tau\right)\ B^*\left(Q,t_{n+1};S_i,\tau\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{c}\frac{d\phi^m\left(\tau\right)}{d\tau}\ u^*\left(Q,t_{n+1};S_i,\tau\right)\right]d\tau\right\}\ d\Gamma\left(Q\right) \tag{2.91}$$

$$G_{ij}^{(n+1)m}=\int_{\Gamma}\zeta_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_{n+1}}\theta^m\left(\tau\right)\ u^*\left(Q,t_{n+1};S_i,\tau\right)\ d\tau\right\}\ d\Gamma\left(Q\right) \tag{2.92}$$

$$F_i^{n+1}=\frac{1}{c^2}\int_{\Omega}u_0^*\left(q,t_{n+1};S_i\right)\ v_0\left(q\right)\ d\Omega\left(q\right)$$

$$+\frac{1}{c}\int_{\Omega}u_0^*\left(q,t_{n+1};S_i\right)\ \frac{\partial u_0\left(q\right)}{\partial r\left(S_i,q\right)}\ d\Omega\left(q\right)$$

$$+\left(t_{n+1}-t_0\right)\int_{\Omega}\frac{1}{r\left(S_i,q\right)}\ B_0^*\left(q,t_{n+1};S_i\right)\ u_0\left(q\right)\ d\Omega\left(q\right) \tag{2.93}$$

$$S_i^{n+1}=\int_0^{t_{n+1}}\left\{\int_{\Omega}u^*\left(q,t_{n+1};S_i,\tau\right)\ \gamma\left(q,\tau\right)\ d\Omega\left(q\right)\right\}\ d\tau \tag{2.94}$$

Agora, as expressões equivalentes, avaliadas no instante de tempo $n+\theta$, são as seguintes [7]:

$$\overline{c}\left(S_i\right)\ u_i^{n+\theta}+\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}H_{ij}^{(n+\theta)(n+\theta)}\ u_j^{(n+\theta)}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}G_{ij}^{(n+\theta)(n+\theta)}\ p_j^{(n+\theta)}+\frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{J}H_{ij}^{(n+\theta)m}\ u_j^m\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{J}G_{ij}^{(n+\theta)m}\ p_j^m\right)+F_i^{(n+\theta)}+S_i^{(n+\theta)}\right\} \tag{2.95}$$

$$H_{ij}^{(n+\theta)m}=-\int_{\Gamma}\frac{\partial r\left(S_i,Q\right)}{\partial n\left(Q\right)}\ \varphi_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_{n+\theta}}\left[\phi^m\left(\tau\right)\ B^*\left(Q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{c}\frac{d\phi^m\left(\tau\right)}{d\tau}\ u^*\left(Q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\right]d\tau\right\}\ d\Gamma\left(Q\right) \tag{2.96}$$

$$G_{ij}^{(n+\theta)m}=\int_{\Gamma}\zeta_j\left(Q\right)\left\{\int_0^{t_{n+\theta}}\theta^m\left(\tau\right)\ u^*\left(Q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\ d\tau\right\}\ d\Gamma\left(Q\right) \tag{2.97}$$

$$F_i^{n+\theta}=\frac{1}{c^2}\int_{\Omega}u_0^*\left(q,t_{n+\theta};S_i\right)\ v_0\left(q\right)\ d\Omega\left(q\right)$$

$$+\frac{1}{c}\int_{\Omega}u_0^*\left(q,t_{n+\theta};S_i\right)\ \frac{\partial u_0\left(q\right)}{\partial r\left(S_i,q\right)}\ d\Omega\left(q\right)$$

$$+\left(t_{n+\theta}-t_0\right)\int_{\Omega}\frac{1}{r\left(S_i,q\right)}\ B_0^*\left(q,t_{n+\theta};S_i\right)\ u_0\left(q\right)\ d\Omega\left(q\right) \tag{2.98}$$

$$S_i^{n+\theta}=\int_0^{t_{n+\theta}}\left\{\int_{\Omega}u^*\left(q,t_{n+\theta};S_i,\tau\right)\ \gamma\left(q,\tau\right)\ d\Omega\left(q\right)\right\}\ d\tau \tag{2.99}$$

Inicialmente, obtêm-se $u_i^{n+\theta}$ e $p_i^{n+\theta}$ usando (2.95), para depois calcular u_i^{n+1} e p_i^{n+1} mediante as relações (2.88) e (2.89). No capítulo 5 apresentam-se alguns exemplos, incluindo o uso do método θ linear.

3

Formulação do MEF

3.1. Descrição do método dos elementos finitos, discretização no espaço

A *forma original* de resíduos ponderados no espaço e no tempo, sobre a equação escalar da onda (2.1), já foi apresentada na equação (2.8). Aplicando resíduos ponderados somente no espaço, tem-se

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\gamma\right)w\,d\Omega = \int_{\Gamma_2}\left(p-\overline{p}\right)w\,d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left(u-\overline{u}\right)\frac{\partial w}{\partial n}\,d\Gamma \tag{3.1}$$

A equação anterior corresponde à mesma citada no capítulo anterior, mas agora substituindo a *solução fundamental* u^* pela função de peso w. A *forma fraca* de resíduos ponderados, resultado de integrar por partes uma vez a equação anterior, é mostrada a seguir e alguns detalhes da sua obtenção são apresentados no item C.1 do apêndice C:

$$\int_{\Omega}\left(\nabla u\bullet\nabla w\right)\,d\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}w\right)\,d\Omega=\int_{\Gamma_2}\left(\overline{p}\;w\right)\,d\Gamma+\int_{\Omega}\left(\gamma\;w\right)\,d\Omega \tag{3.2}$$

Substituindo aproximações para u e w em base às mesmas funções de interpolação no espaço (método de *Galerkin*), gera-se o seguinte sistema de equações escrito em forma matricial (item C.2 do apêndice C),

$$\left[M\right]\left\{\ddot{u}\right\}+\left[K\right]\left\{u\right\}=\left\{F\right\} \tag{3.3}$$

onde as matrizes de massa e rigidez $\left[M\right]$ e $\left[K\right]$ são o resultado da montagem das seguintes matrizes a nível de elemento,

$$\left[K^e\right]=\int_{\Omega^e}\left(\left[\nabla\right]\left[N\right]\right)^T\left(\left[\nabla\right]\left[N\right]\right)\,d\Omega \tag{3.4}$$

$$\left[M^e\right] = \int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} \left[N\right]^T \left[N\right] \, d\Omega \tag{3.5}$$

$$\left\{F^e\right\} = \int_{\Gamma_2^e} \left[N\right]^T \left\{\overline{p}\right\} \cdot d\Gamma + \int_{\Omega^e} \left[N\right]^T \left\{\gamma\right\} \cdot d\Omega \tag{3.6}$$

Nas expressões anteriores, $\left[N\right]$ é a matriz de funções de interpolação a nível de elemento, e

$$\left[\nabla\right] = \left[\partial/\partial x \quad \partial/\partial y\right]^T \tag{3.7}$$

Alguns detalhes da obtenção das expressões anteriores são apresentados no apêndice C. A escolha de funções de interpolação, junto com o relativo ao mapeamento de elementos isoparamétricos, aparece detalhada no item C.3 do apêndice C.

3.2. Família de algoritmos de *Newmark*, discretização no tempo

Uma vez discretizada a equação escalar da onda no espaço, é usual para a discretização no tempo usar aproximações de diferenças finitas para as derivadas de *u*. O método de marcha no tempo proposto há algumas décadas por *Newmark* [10], consiste em estabelecer uma família de métodos de resolução passo a passo, tanto explícitos quanto implícitos [5,16-20], em função de dois parâmetros (α e λ). Nesse método, a seguinte aproximação é assumida para a variável *u* e a sua primeira derivada no tempo, para o instante de tempo $n+1$,

$$\dot{u}^{(n+1)} = \dot{u}^{(n)} + \left[\left(1-\lambda\right)\ddot{u}^{(n)} + \lambda \; \ddot{u}^{(n+1)}\right]\Delta t \tag{3.8}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \dot{u}^{(n)} \; \Delta t + \left[\left(1/2-\alpha\right)\ddot{u}^{(n)} + \alpha \; \ddot{u}^{(n+1)}\right]\left(\Delta t\right)^2 \tag{3.9}$$

Um dos possíveis algoritmos para a solução passo a passo de (3.3), usando as expressões (3.8) e (3.9), apresenta-se a seguir [5],

- Cálculo das matrizes $[K]$ e $[M]$.
- Prescrição das condições iniciais para a variável *u* e as suas derivadas no tempo: $u^{(0)}$, $\dot{u}^{(0)}$ e $\ddot{u}^{(0)}$.
- Selecionar o passo de tempo Δt, e o valor dos parâmetros α e λ.
- Calcular as constantes seguintes:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \qquad a_1 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \qquad a_2 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$
$$a_3 = \Delta t\left(1-\lambda\right) \qquad a_4 = \lambda\ \Delta t \tag{3.10}$$

- Efetuar o cálculo da matriz efetiva,

$$[A] = [K] + a_0 [M] \tag{3.11}$$

- *Loop* no tempo: fazendo *n* desde 0 até $NT-1$,

$\rightarrow$ Cálculo do vetor efetivo,

$$\{R\} = \left\{F^{(n+1)}\right\} + [M]\left(a_0 \left\{u^{(n)}\right\} + a_1 \left\{\dot{u}^{(n)}\right\} + a_2 \left\{\ddot{u}^{(n)}\right\}\right) \tag{3.12}$$

$\rightarrow$ Solução para o passo de tempo $n+1$,

$$\left\{u^{(n+1)}\right\} = [A]^{-1} \{R\} \tag{3.13}$$

$\rightarrow$ Cálculo das grandezas derivadas,

$$\left\{\ddot{u}^{(n+1)}\right\} = a_0 \left(\left\{u^{(n+1)}\right\} - \left\{u^{(n)}\right\}\right) - a_1 \left\{\dot{u}^{(n)}\right\} - a_2 \left\{\ddot{u}^{(n)}\right\} \tag{3.14}$$

$$\left\{\dot{u}^{(n+1)}\right\} = \left\{\dot{u}^{(n)}\right\} + a_3 \left\{\ddot{u}^{(n)}\right\} + a_4 \left\{\ddot{u}^{(n+1)}\right\} \tag{3.15}$$

Vários métodos conhecidos de marcha no tempo são deduzidos a partir da família de métodos proposta por *Newmark* (tabela 2.1), assumindo diferentes valores para os coeficientes α e λ [5].

Tabela 2.1: Valores dos parâmetros α e λ para diferentes métodos passo a passo.

	Valor do α	Valor do λ
Regra do trapézio	1/4	1/2
Diferenças centrais	0	1/2
Fox-Goodwin	1/12	1/2
Aceleração linear	1/6	1/2

O algoritmo mostrado acima não é válido para o método das diferenças centrais, que se caracteriza por ser explícito condicionalmente estável e mais eficiente. Um algoritmo válido para aquele método apresenta-se a seguir [5],

- Cálculo das matrizes $[K]$ e $[M]$.
- Prescrição das condições iniciais para a variável e as suas derivadas no tempo: $u^{(0)}$, $\dot{u}^{(0)}$ e $\ddot{u}^{(0)}$.
- Selecionar o passo de tempo Δt.
- Calcular as constantes seguintes:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \qquad a_1 = \frac{1}{2\ \Delta t}$$
$$a_2 = 2\ a_0 \qquad a_3 = \frac{1}{a_2} \tag{3.16}$$

- Calcular o vetor,

$$\left\{u^{(-1)}\right\} = \left\{u^{(0)}\right\} - \Delta t \left\{\dot{u}^{(0)}\right\} + a_3 \left\{\ddot{u}^{(0)}\right\} \tag{3.17}$$

- Efetuar o cálculo da matriz efetiva,

$$[A] = a_0 [M] \tag{3.18}$$

- *Loop* no tempo: fazendo *n* desde 0 até $NT-1$,

  $\rightarrow$ Cálculo do vetor efetivo,

$$\{R\} = \left\{F^{(n)}\right\} - \left(\left[K\right] - a_2\left[M\right]\right)\left\{u^{(n)}\right\} - a_0\left[M\right]\left\{u^{(n-1)}\right\} \tag{3.19}$$

  $\rightarrow$ Solução para o passo de tempo $n+1$,

$$\left\{u^{(n+1)}\right\} = \left[A\right]^{-1}\{R\} \tag{3.20}$$

  $\rightarrow$ Cálculo das grandezas derivadas,

$$\left\{\ddot{u}^{(n)}\right\} = a_0\left(\left\{u^{(n-1)}\right\} - 2\left\{u^{(n)}\right\} + \left\{u^{(n+1)}\right\}\right) \tag{3.21}$$

$$\left\{\dot{u}^{n}\right\} = a_1\left(\left\{u^{n+1}\right\} - \left\{u^{n-1}\right\}\right) \tag{3.22}$$

3.3. Métodos de *Green*, discretização no tempo

Como já foi visto, a *função de Green* corresponde a uma solução da equação diferencial, considerando funções *delta de Dirac* (no espaço e no tempo) no termo das fontes.

3.3.1 Formulação de Green

Aplicando a transformada de *Laplace* sobre a equação (3.3), e isolando a variável *u* no domínio transformado $\left(\mathscr{L}\left[u\right]\right)$, chega-se a [16-20]

$$\mathscr{L}\left[\{u(t)\}\right] = \left[\mathcal{H}(s)\right]\left(s\left[M\right]\{u(0)\} + \left[M\right]\{\dot{u}(0)\}\right) + \left[\mathcal{H}(s)\right]\mathscr{L}\left[\{F(t)\}\right] \tag{3.23}$$

onde $\left[\mathcal{H}(s)\right]$ representa a matriz da *função de transferência*

$$\left[\mathcal{H}(s)\right] = \left(s^2\left[M\right] + \left[K\right]\right)^{-1} \tag{3.24}$$

Aplicando a transformada inversa de *Laplace* em (3.23), tendo em conta (3.24), obtém-se a expressão para a variável *u*. Derivando uma vez aquele resultado, em relação ao tempo, obtém-se a expressão para a velocidade. Assim,

$$\begin{aligned}\{u(t)\} &= [\dot{\mathrm{G}}(t)][M]\{u(0)\} + [\mathrm{G}(t)][M]\{\dot{u}(0)\} \\ &\quad + \int_0^t [\mathrm{G}(t-\tau)]\{F(\tau)\}\,d\tau \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\{\dot{u}(t)\} &= [\ddot{\mathrm{G}}(t)][M]\{u(0)\} + [\dot{\mathrm{G}}(t)][M]\{\dot{u}(0)\} \\ &\quad + \int_0^t [\dot{\mathrm{G}}(t-\tau)]\{F(\tau)\}\,d\tau \end{aligned} \tag{3.26}$$

Nas equações mostradas acima, $[\mathrm{G}(t)]$ é chamada *resposta impulsiva* do sistema, e é dada por

$$[\mathrm{G}(t)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{H}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(s^2[M] + s[K]\right)^{-1}\right] \tag{3.27}$$

Pode-se demonstrar [14-20] que $[\mathrm{G}(t)]$ corresponde à solução da seguinte equação,

$$[M][\ddot{\mathrm{G}}(t)] + [K][\mathrm{G}(t)] = [0] \tag{3.28}$$

considerando as condições iniciais

$$\begin{aligned}[\mathrm{G}(0)] &= [0] \\ [\dot{\mathrm{G}}(0)] &= [M]^{-1}\end{aligned} \tag{3.29}$$

Assumindo $t = \Delta t$ em (3.25) e (3.26), pode-se definir uma relação recursiva para ser usada na marcha no tempo. Assim, tem-se

$$\left\{u^{t+\Delta t}\right\} = \left[\dot{\mathrm{G}}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{u^{t}\right\} + \left[\mathrm{G}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{\dot{u}^{t}\right\} + \int_0^{\Delta t} \left[\mathrm{G}(\Delta t - \tau)\right]\left\{F\left(t+\tau\right)\right\} d\tau \tag{3.30}$$

$$\left\{\dot{u}^{t+\Delta t}\right\} = \left[\ddot{\mathrm{G}}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{u^{t}\right\} + \left[\dot{\mathrm{G}}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{\dot{u}^{t}\right\} + \int_0^{\Delta t} \left[\dot{\mathrm{G}}\left(\Delta t - \tau\right)\right]\left\{F\left(t+\tau\right)\right\} d\tau \tag{3.31}$$

Cabe mencionar que nas equações (3.30) e (3.31), Δt pode ser substituído por $\Delta t / n_s$, sendo n_s o número de subintervalos a serem considerados nos cálculos da *função de Green*, para o instante Δt.

As integrais de convolução em (3.25) e (3.26) podem ser calculadas em forma aproximada fazendo, por exemplo, [14-20]

$$\int_0^{\Delta t} \left[\mathrm{G}(\Delta t - \tau)\right]\left\{F\left(t+\tau\right)\right\} d\tau \approx \sum_{j=1}^{k}\left[\psi_1(j)\right]\left\{F^{t}\right\} + \sum_{j=1}^{k}\left[\psi_2(j)\right]\left\{F^{t+\Delta t}\right\} \tag{3.32}$$

na qual (figura 3.1)

$$\left[\psi_1(j)\right] = \frac{\Delta t}{k}\left[\mathrm{G}\left(\Delta t - j\frac{\Delta t}{k}\right)\right]\left(1 - \frac{j}{k}\right)$$
$$\left[\psi_2(j)\right] = \frac{\Delta t}{k}\left[\mathrm{G}\left(\Delta t - j\frac{\Delta t}{k}\right)\right]\frac{j}{k} \tag{3.33}$$

A partir das equações (3.32) e (3.33) reconhece-se que a função é integrada usando interpolação constante dentro de cada subintervalo. O número *k* pode ser o mesmo número de subintervalos *n* ou, pelo menos, algum divisor deste.

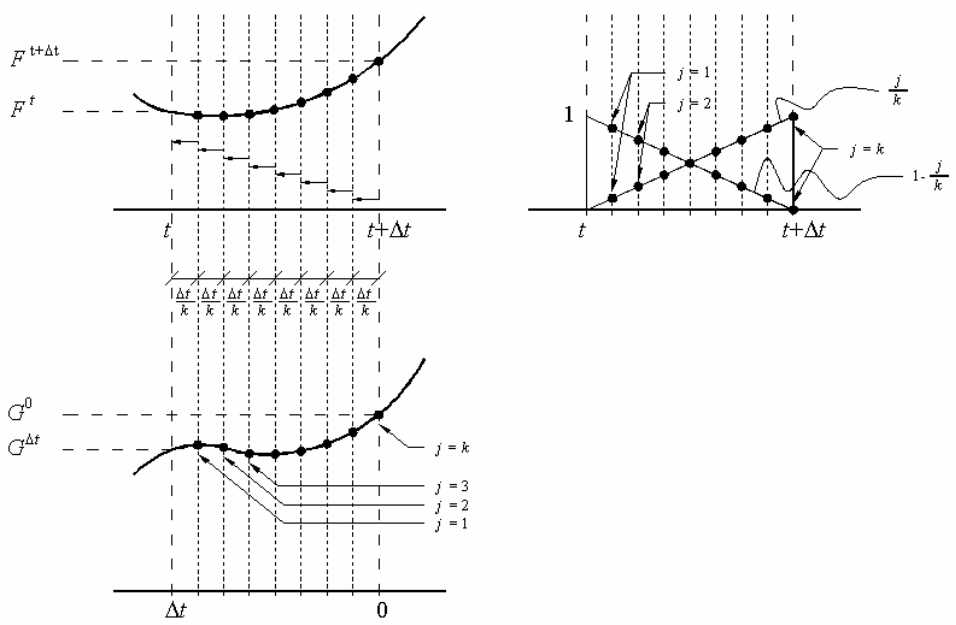

Figura 3.1: Esquema geométrico referente à técnica para aproximar a integral em (3.32).

3.3.2 Método ExGA Runge-Kutta

O método é baseado no cálculo das matrizes de *Green* usando o método passo a passo conhecido como *Runge-Kutta* de quarta ordem [18,19]. Assim, sem incluir amortecimento, tem-se

$$\left[\mathrm{G}^{t+\Delta t/n_s}\right]=\left[\mathrm{G}^{t}\right]+\frac{\Delta t}{n_s}\left[\dot{\mathrm{G}}^{t}\right]+\frac{1}{6}\frac{\Delta t^2}{n_s^{\,2}}\left(\left[W_1\right]+\left[W_2\right]+\left[W_3\right]\right) \tag{3.34}$$

$$\left[\dot{\mathrm{G}}^{t+\Delta t/n_s}\right]=\left[\dot{\mathrm{G}}^{t}\right]+\frac{1}{6}\frac{\Delta t}{n_s}\left(\left[W_1\right]+2\left[W_2\right]+2\left[W_3\right]+\left[W_4\right]\right) \tag{3.35}$$

onde

$$\left[W_1\right]=-\left[M\right]^{-1}\left[K\right]\left[\mathrm{G}^{t}\right] \tag{3.36}$$

$$\left[W_2\right]=-\left[M\right]^{-1}\left[K\right]\left(\left[\mathrm{G}^{t}\right]+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{n_s}\left[\dot{\mathrm{G}}^{t}\right]\right) \tag{3.37}$$

$$\left[W_3\right]=-\left[M\right]^{-1}\left[K\right]\left(\left[\mathrm{G}^{t}\right]+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{n_s}\left[\dot{\mathrm{G}}^{t}\right]+\frac{1}{4}\frac{\Delta t^2}{n_s^{\,2}}\left[W_1\right]\right) \tag{3.38}$$

$$[W_4] = -[M]^{-1}[K]\left([\mathrm{G}^t] + \frac{\Delta t}{n_s}[\dot{\mathrm{G}}^t] + \frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{n_s{}^2}[W_2]\right) \tag{3.39}$$

Por sua parte, a matriz $[\ddot{\mathrm{G}}(\Delta t)]$ das segundas derivadas temporais pode ser obtida considerando a seguinte relação:

$$[\ddot{\mathrm{G}}(\Delta t)] = -[M]^{-1}[K][\mathrm{G}(\Delta t)] \tag{3.40}$$

O método descrito é explícito condicionalmente estável, motivo pelo qual o passo de tempo deve ser escolhido de modo que [18,19]

$$\frac{\Delta t}{T} < \frac{n_s\sqrt{2}}{\pi} \tag{3.41}$$

3.3.3 Método ExGAH diferenças centrais

O método apresentado nesta seção é baseado na formulação de *Green* da seção *3.3.1*, incluindo, além disso, o conceito da *matriz degrau* $[\mathrm{H}]$ [18,19]. A forma de obter a matriz $[\mathrm{G}]$ da *função de Green*, pelo método das diferenças finitas sem incluir amortecimento, pode ser resumido conforme a seguir,

$$\frac{n_s{}^2}{\Delta t^2}[M][\mathrm{G}^{t+\Delta t/n_s}] = \left(\frac{2\cdot n_s{}^2}{\Delta t^2}[M] - [K]\right)[\mathrm{G}^t] - \frac{n_s{}^2}{\Delta t^2}[M][\mathrm{G}^{t-\Delta t/n_s}] \tag{3.42}$$

onde

$$[\mathrm{G}^{-\Delta t/n_s}] = [\mathrm{G}^0] - \frac{\Delta t}{n_s}[\dot{\mathrm{G}}^0] + \frac{\Delta t^2}{2\,n_s{}^2}[\ddot{\mathrm{G}}^0] \tag{3.43}$$

$$[\ddot{\mathrm{G}}^0] = -[M]^{-1}[K][\mathrm{G}^0] \tag{3.44}$$

As derivadas das matrizes podem ser calculadas de acordo com o seguinte:

$$\left[\dot{\mathrm{G}}^{\Delta t}\right]=\frac{n_s}{2\,\Delta t}\left(\left[\mathrm{G}^{(1+1/n_s)\Delta t}\right]-\left[\mathrm{G}^{(1-1/n_s)\Delta t}\right]\right) \tag{3.45}$$

$$\left[\ddot{\mathrm{G}}^{\Delta t}\right]=\frac{n_s^{\,2}}{\Delta t^2}\left(\left[\mathrm{G}^{(1+1/n_s)\Delta t}\right]-2\,\left[\mathrm{G}^{\Delta t}\right]+\left[\mathrm{G}^{(1-1/n_s)\Delta t}\right]\right) \tag{3.46}$$

No processo anteriormente descrito, a matriz $[\mathrm{G}]$ é obtida considerando as condições iniciais (3.29), enquanto a matriz $[\mathrm{H}]$ corresponde à solução do seguinte problema de valor inicial [18,19]:

$$[M]\left[\ddot{\mathrm{H}}(t)\right]+[K][\mathrm{H}(t)]=[0] \tag{3.47}$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{H}(0)\right]&=[M]^{-1}\\ \left[\dot{\mathrm{H}}(0)\right]&=[0]\end{aligned} \tag{3.48}$$

Devido ao anterior, as matrizes $[\mathrm{H}]$ podem ser calculadas usando o mesmo método descrito nas equações (3.42) a (3.46), com a exceção de ter que considerar neste caso as condições iniciais (3.48).

Resumindo, o método *ExGAH* consiste em calcular as matrizes $[\mathrm{G}]$ e $[\mathrm{H}]$ para depois obter o vetor $\{u\}$, e a sua derivada no tempo, usando as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\{u(t)\}=&[\mathrm{H}(t)][M]\{u(0)\}+[\mathrm{G}(t)][M]\{\dot{u}(0)\}\\ &+\int_0^t[\mathrm{G}(t-\tau)]\{F(\tau)\}\,d\tau\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}\{\dot{u}(t)\}=&\left[\dot{\mathrm{H}}(t)\right][M]\{u(0)\}+\left[\dot{\mathrm{G}}(t)\right][M]\{\dot{u}(0)\}\\ &+\int_0^t\left[\dot{\mathrm{G}}(t-\tau)\right]\{F(\tau)\}\,d\tau\end{aligned} \tag{3.50}$$

Finalmente, admitindo $t = \Delta t$ e expressando uma relação recursiva para o esquema de marcha no tempo, tem-se

$$\left\{u^{t+\Delta t}\right\} = \left[\mathrm{H}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{u^{t}\right\} + \left[\mathrm{G}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{\dot{u}^{t}\right\} + \int_{0}^{\Delta t}\left[\mathrm{G}\left(\Delta t-\tau\right)\right]\left\{F\left(t+\tau\right)\right\}d\tau \tag{3.51}$$

$$\left\{\dot{u}^{t+\Delta t}\right\} = \left[\dot{\mathrm{H}}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{u^{t}\right\} + \left[\dot{\mathrm{G}}(\Delta t)\right]\left[M\right]\left\{\dot{u}^{t}\right\} + \int_{0}^{\Delta t}\left[\dot{\mathrm{G}}\left(\Delta t-\tau\right)\right]\left\{F\left(t+\tau\right)\right\}d\tau \tag{3.52}$$

De acordo com o anterior, Δt pode ser substituído por $\Delta t/n_s$, o qual significa considerar n_s subintervalos para obter as matrizes de *Green* no instante Δt.

O método *ExGAH – diferenças centrais* é explícito condicionalmente estável, devido ao qual o passo de tempo deve ser escolhido de tal modo que [16,17]

$$\frac{\Delta t}{T} < \frac{n_s}{\pi} \tag{3.53}$$

4

Técnicas de acoplamento MEC/MEF do tipo iterativo

4.1. Antecedentes preliminares

As técnicas de acoplamento MEC/MEF são cada vez mais usadas na obtenção da solução de equações diferenciais, devido principalmente a que cada um destes métodos tem suas próprias vantagens e desvantagens em determinados problemas. Alguns exemplos de aplicação são:

- A análise de uma estrutura considerando uma região com não linearidade geométrica, sendo discretizada usando o MEF, e outra região elástica ou poro-elástica, abordada mediante o MEC.

- Estudar o comportamento plástico (ou elasto-plástico) na vizinhança de uma abertura, podendo a zona plástica ser discretizada pelo MEF, enquanto a zona elástica usando o MEC.

- Em problemas de interação solo-estrutura, o solo pode ser discretizado usando o MEC, como tratando-se de uma região infinita ou semi-infinita, e a estrutura usando o MEF. Em problemas de interação fluido-estrutura, o fluido pode ser discretizado usando o MEC e a estrutura pelo MEF. No caso de solo-fluido-estrutura, o solo pode ser discretizado usando MEC, o fluido usando MEC ou o MEF, e para a estrutura o MEF.

Há algumas décadas começou a idéia de usar *acoplamento direto* [23-30] entre o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF), o qual consiste em montar as matrizes de ambos os métodos em um sistema, resolvendo em forma simultânea as incógnitas das duas regiões em que o domínio é dividido. Uma destas regiões é discretizada usando o MEC e a outra pelo MEF. Um tipo de técnica consiste em transformar a parte do domínio discretizada pelo MEC em um "super-elemento", do jeito que as equações do MEC para esta região possam ser transformadas em equações de elementos finitos equivalentes (*FEM hosted*). Assim, aquelas contribuições são montadas nas matrizes do sistema, juntando-as com as contribuições da região discretizada pelo MEF. Entretanto, existem também as técnicas do tipo *BEM hosted*, e também aquelas que não podem ser classificadas dentro dos dois tipos. Resumindo, a idéia de *acoplamento direto* estabelece uma equação unificada para o

domínio completo, alterando a formulação de um dos métodos para fazê-lo compatível com o outro.

Embora o método *FEM hosted* tenha maiores vantagens sobre o *BEM hosted*, a construção da equação matricial unificada é muito complicada, se for comparada com a equação simples do MEF. Além do mais, apresentam-se outros inconvenientes, tais como a obtenção de um sistema de equações com matriz de coeficientes assimétrica e cheia (não do tipo banda). Com a finalidade de superar essas dificuldades, as técnicas de *acoplamento iterativo* [28-34] pretenderam aproveitar da melhor forma as vantagens que tem por separado cada um destes métodos.

Ainda que as técnicas de *acoplamento iterativo* apresentem muitas vantagens em relação às técnicas de *acoplamento direto*, é necessário definir claramente as condições para atingirem a convergência [35]. No *acoplamento iterativo*, as regiões são tratadas de forma independente, assumindo inicialmente alguma condição na interface, a qual será recalculada no final de cada iteração. Este tipo de técnicas possui a vantagem de possibilitar o uso de códigos computacionais usuais, com a finalidade de resolver as regiões do domínio em forma independente (pelo MEC ou pelo MEF).

Uma dificuldade ou inconveniente nas técnicas de acoplamento iterativo, desde o ponto de vista da convergência do método, aparece na hora de resolver problemas onde se tenha que prescrever somente condição natural na região discretizada pelo MEF. No entanto, alguns esforços têm sido feitos com o objetivo de superar tal dificuldade.

Na forma seqüencial do método conhecido como *Schwarz Dirichlet-Neumann* [31], é atribuído um valor arbitrário para o vetor de potencial (ou deslocamento) na interface, com a finalidade de ser usado na região discretizada pelo MEC, e assim calcular as *forças de superfície*: as *forças nodais*, equivalentes às *forças de superfície* na interface, são usadas como condições de contorno para logo obter, na outra região mediante o MEF, os valores atualizados do potencial (ou deslocamento) nesta interface, e finalmente ser comparados com os valores iniciais.

A técnica descrita no presente trabalho [34] considera a existência de uma zona que é discretizada por ambos os métodos (*overlapping*), porém sendo o método modificado para a resolução de problemas dinâmicos. Com este método não é necessário transformar, por conceitos de energia, as *forças de superfície* do MEC em *forças nodais* do MEF, conforme será visto na seção seguinte, e permite resolver o problema de prescrever somente condição natural em domínios infinitos ou semi-infinitos. Outro aspecto a ser considerado é a escolha do parâmetro de relaxação ω, com o objetivo de garantir e acelerar a convergência [31,35].

4.2. Descrição das técnicas de acoplamento iterativo MEC/MEF

As técnicas de acoplamento iterativo MEC/MEF foram inicialmente usadas na resolução de problemas estáticos [31-35]. Os índices *F*, *B* e *I* se referem, respectivamente, a região discretizada por elementos finitos, a região discretizada por elementos de contorno e a interface *I* (ver figuras 4.1 e 4.2).

O sistema de equações do MEC pode ser expresso a partir das matrizes e sub-matrizes na equação mostrada a seguir,

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & H_{BI} \\ H_{IB} & H_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_B^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} & G_{BI} \\ G_{IB} & G_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_B^B \\ p_B^I \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

onde, de acordo com a figura 4.1, u_B^I e p_B^I correspondem, respectivamente, aos valores do potencial e do fluxo na interface *I*, a serem usados na região que é tratada usando o MEC. Entretanto, u_B^B e p_B^B correspondem, respectivamente, aos valores do potencial e do fluxo no contorno nessa região, com a exceção da interface *I*.

Após resolver (4.1) para os valores de *p* na interface, o vetor potencial em pontos internos pode ser obtido resolvendo a seguinte equação,

$$\{u\} = \begin{bmatrix} H_{BB}^* & H_{BI}^* \\ H_{IB}^* & H_{II}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_B^I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{BB}^* & G_{BI}^* \\ G_{IB}^* & G_{II}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_B^B \\ p_B^I \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Por sua parte, o sistema de equações resultante do MEF pode ser expresso matricialmente conforme a seguir,

$$\begin{bmatrix} M_{FF} & M_{FI} \\ M_{IF} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_F^F \\ \ddot{u}_F^I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FI} \\ K_{IF} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F^F \\ u_F^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_F^F \\ f_F^I \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

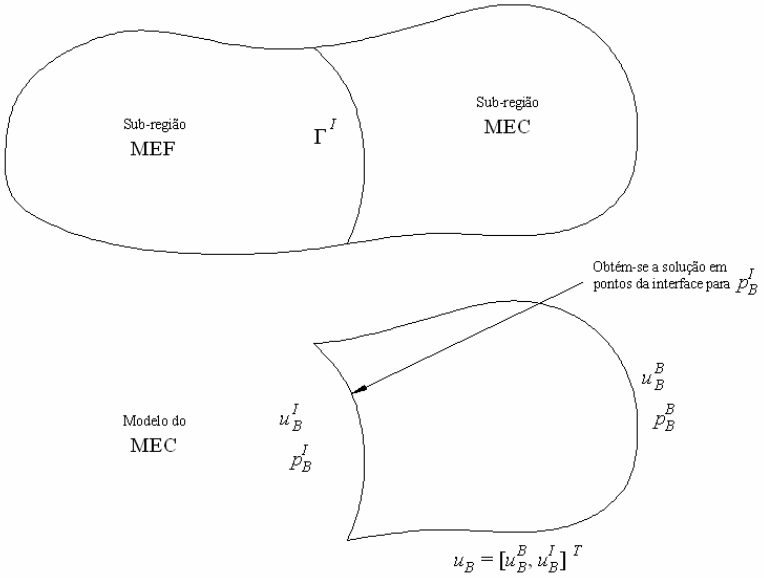

Figura 4.1: Região discretizada pelo MEC, para o método baseado em uma interface entre as duas regiões.

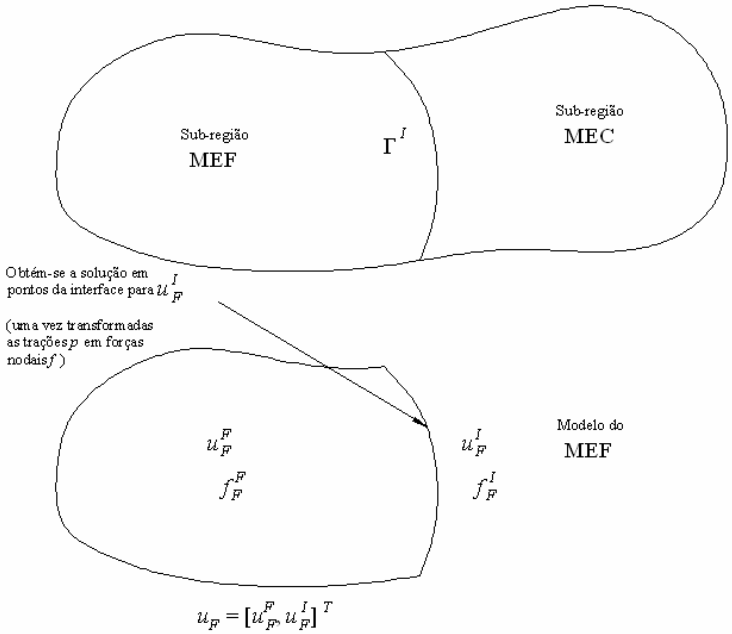

Figura 4.2: Região discretizada pelo MEF, para o método baseado em uma interface entre as duas regiões.

na qual, de acordo com a figura 4.2, u_F^I e f_F^I correspondem, respectivamente, aos valores do potencial e dos *fluxos equivalentes nodais* na interface *I*, a serem usados na região que é discretizada usando o MEF. Portanto, u_F^F e f_F^F correspondem, respectivamente, aos valores do potencial e dos *fluxos equivalentes nodais* em dita região, com a exceção da interface *I*.

As condições de equilíbrio e compatibilidade na interface são

$$\left\{u_B^I\right\} = \left\{u_F^I\right\} \quad \in \Gamma^I \tag{4.4}$$

$$\left\{f_F^I\right\} + \left[\mathrm{T}\right]\left\{p_B^I\right\} = \left\{0\right\} \quad \in \Gamma^I \tag{4.5}$$

onde a matriz $\left[\mathrm{T}\right]$ é a *matriz de conversão* que relaciona as *forças nodais* do MEF com as *forças de superfície* do MEC, mediante as funções de interpolação avaliadas na interface, tendo em vista que as incógnitas não são as mesmas nas formulações do MEC e do MEF. Esta *matriz de conversão* pode ser deduzida a partir do princípio dos trabalhos virtuais [31], e da relação seguinte:

$$\left\{\delta u^e\right\}^T \left\{f^e\right\} = \left\{\delta u^e\right\}^T \left(\int \left[N\right]^T \left[N\right] \cdot ds\right) \left\{t^e\right\} \tag{4.6}$$

Algumas das técnicas de acoplamento iterativo MEC/MEF existentes na literatura são detalhadas a seguir.

4.2.1 Método em paralelo Schwarz Neumann-Neumann (análise estática)

Neste método o valor do fluxo (condição do tipo *Neumann*) é assumido simultaneamente na interface *I* para ambas as regiões. Assim, os cálculos para o MEC e para o MEF são feitos em paralelo, conforme é mostrado no algoritmo seguinte:

- Fornecem-se os valores iniciais para $\left\{p_B^I\right\}$ e $\left\{f_F^I\right\}$,

$$\begin{aligned}\left\{p_{B,0}^I\right\} &= \left\{\overline{p}\right\} \\ \left\{f_{F,0}^I\right\} &= -\left[\mathrm{T}\right]\left\{p_{B,0}^I\right\}\end{aligned} \tag{4.7}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$:

  → Resolve-se

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & H_{BI} \\ H_{IB} & H_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_{B,k}^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} & G_{BI} \\ G_{IB} & G_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_B^B \\ p_{B,k-1}^I \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

  para obter $\left\{u_{B,k}^I\right\}$;

  → Resolve-se

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FI} \\ K_{IF} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F^F \\ u_{F,k}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_F^F \\ f_{F,k-1}^I \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

  para obter $\left\{u_{F,k}^I\right\}$;

  → Com a finalidade de acelerar o processo de convergência, adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação κ. Calculando-se um novo valor para $\left\{p_B^I\right\}$ na iteração k, tem-se

$$\left\{p_{B,k}^I\right\} = \left\{p_{B,k-1}^I\right\} + \kappa\left(\left\{u_{F,k}^I\right\} - \left\{u_{B,k}^I\right\}\right) \tag{4.10}$$

  → Efetua-se o teste de convergência, para o qual se deve cumprir

$$\frac{\left\|\left\{u_{B,k}^I\right\} - \left\{u_{B,k-1}^I\right\}\right\|_2}{u_{B,k}^I} < \varepsilon \tag{4.11}$$

  → No caso de não se cumprir o teste dado por (4.11), continua-se o *loop* fazendo

$$\left\{f_{F,k}^I\right\} = -\left[\mathrm{T}\right]\left\{p_{B,k}^I\right\} \tag{4.12}$$

O método antes descrito tem o inconveniente de não poder ser aplicado em problemas onde somente a condição do tipo *Neumann* seja prescrita no contorno, do MEC ou do MEF, além de ter que escolher um valor apropriado para o parâmetro de relaxação κ.

4.2.2 Método em paralelo Schwarz Dirichlet-Neumann (análise estática)

Este método consiste em fornecer o potencial (condição do tipo *Dirichlet*) na interface *I* para a região discretizada pelo MEC, e o *fluxo equivalente nodal* (condição do tipo *Neumann*) na interface *I* para a região discretizada pelo MEF. Os cálculos efetuam-se em paralelo nas duas regiões. O algoritmo apresenta-se a seguir:

- Adotam-se os valores iniciais para $\left\{u_B^I\right\}$ e $\left\{f_F^I\right\}$,

$$\begin{aligned}\left\{u_{B,0}^I\right\} &= \left\{\overline{u}\right\} \\ \left\{f_{F,0}^I\right\} &= \left\{\overline{f}\right\}\end{aligned} \tag{4.13}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$:

  → Resolve-se

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & H_{BI} \\ H_{IB} & H_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_{B,k-1}^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} & G_{BI} \\ G_{IB} & G_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_B^B \\ p_{B,k}^I \end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

  para obter $\left\{p_{B,k}^I\right\}$;

  → Resolve-se (4.9) com a finalidade de obter $\left\{u_{F,k}^I\right\}$;

  → Adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação ω, no cálculo de um novo valor para $\left\{u_B^I\right\}$ na iteração k,

$$\left\{u_{B,k}^I\right\} = (1-\omega)\left\{u_{B,k-1}^I\right\} + \omega\left\{u_{F,k}^I\right\} \tag{4.15}$$

  → Efetua-se o teste de convergência

$$\frac{\left\|\left\{u_{B,k}^I\right\} - \left\{u_{B,k-1}^I\right\}\right\|_2}{u_{B,k}^I} < \varepsilon \tag{4.16}$$

  → No caso de não se cumprir o teste dado por (4.16), continua-se o *loop*. Calcula-se $\left\{f_{F,k}^I\right\}$ usando (4.12).

O inconveniente deste método apresenta-se quando são prescritas somente as condições de *Neumann* no contorno da região que é discretizada pelo MEF.

4.2.3 Método seqüencial Schwarz Dirichlet-Neumann (análise estática)

Neste método, resolvem-se as regiões MEC e MEF em forma alternada (ver figuras 4.3 e 4.4). O algoritmo apresenta-se a seguir:

- Adota-se um valor inicial para $\left\{u_B^I\right\}$,

$$\left\{u_{B,0}^I\right\} = \left\{\overline{u}\right\} \tag{4.17}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$:

  → Resolve-se (4.14) para obter $\left\{p_{B,k}^I\right\}$;

  → Resolve-se

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FI} \\ K_{IF} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F^F \\ u_{F,k}^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_F^F \\ -[\mathrm{T}]\left\{p_{B,k}^I\right\} \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

  para obter $\left\{u_{F,k}^I\right\}$;

  → Adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação ω, e calcula-se um novo valor para $\left\{u_B^I\right\}$ na iteração k, usando (4.15);

  → Efetua-se o teste de convergência (4.16);

  → No caso de não se cumprir o teste de convergência, continua-se o *loop*.

Este método apresenta os mesmos inconvenientes do método apresentado na seção anterior.

4.2.4 Método seqüencial baseado na existência de uma região discretizada pelos dois métodos (análise estática)

Este método foi proposto com a finalidade de superar as desvantagens dos métodos recém apresentados, principalmente de resolver problemas em domínios infinitos ou semi-infinitos, em cujo contorno se prescrevem somente condições do tipo *Neumann*.

No método a ser apresentado, o domínio é dividido em duas regiões, sendo uma delas discretizada pelo MEC e a outra pelo MEF e, além disso, existe uma zona que é discretizada usando os dois métodos (ver figuras 4.3 e 4.4),

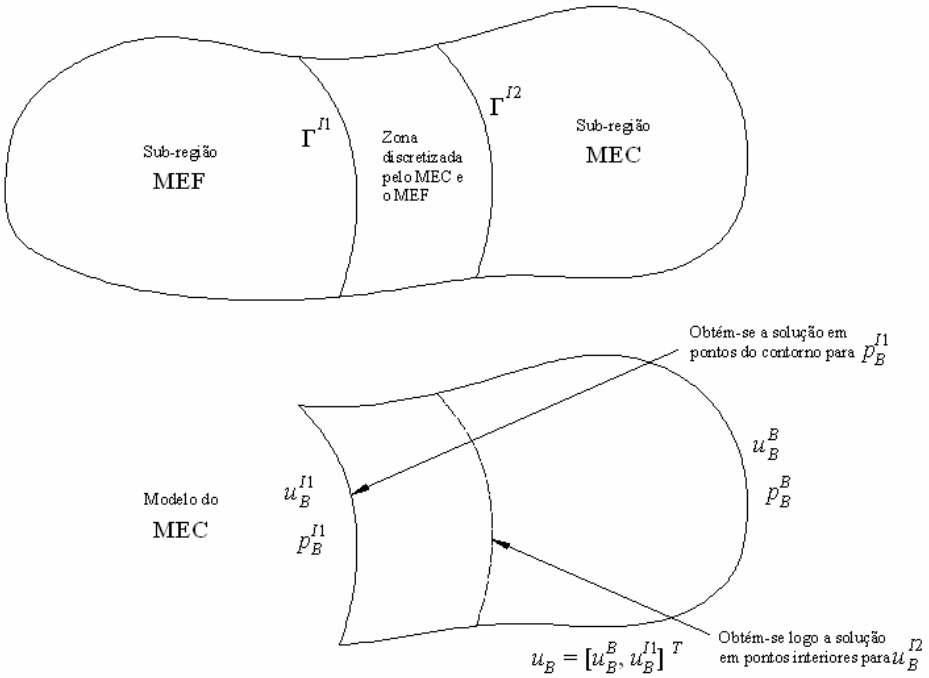

Figura 4.3: Discretização da região pelo MEC, considerando a existência de uma zona discretizada pelos dois métodos.

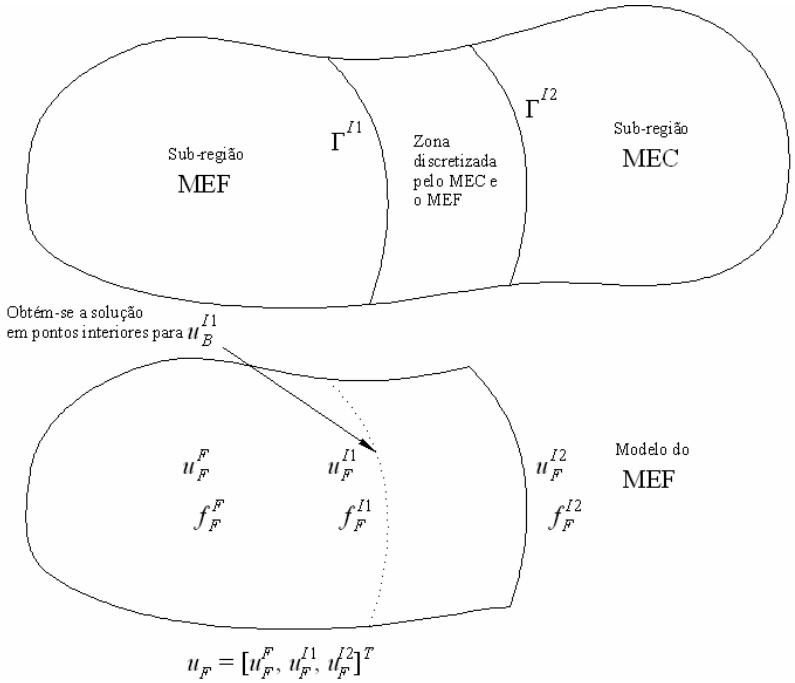

Figura 4.4: Discretização da região pelo MEF, considerando a existência de uma zona discretizada pelos dois métodos.

Neste método, assume-se um valor inicial arbitrário para o potencial na interface $I1$, considerando a região do domínio que é discretizada pelo MEC. Portanto, podem ser calculadas as *forças de superfície* nesta interface. Uma vez feito isso, são obtidos os valores do potencial na interface $I2$, que são considerados como pontos internos da região discretizada usando o MEC (ver figura 4.3). Com estes resultados, calculam-se novos valores de potencial nos pontos da interface $I1$, considerando a parte do domínio que é discretizada pelo MEF (ver figura 4.4). A interface $I2$ é, na análise do MEF, um contorno de *Dirichlet*, já que nesta superfície são prescritos os valores nodais do potencial, obtidos da análise pelo MEC. Finalmente avalia-se quão perto resultou ser o valor calculado do potencial na interface $I1$, com respeito aquele inicialmente assumido.

Usando esta técnica, não é necessário transformar *forças de superfície* do MEC em *forças nodais* do MEF. O esquema do método é detalhado a seguir;

- Adota-se um valor inicial para $\left\{u_B^{I1}\right\}$,

$$\left\{u_{B,0}^{I1}\right\} = \left\{\overline{u}\right\} \tag{4.19}$$

- *Loop* para cada iteração, $k = 1, 2, \ldots, K$:

  → Resolve-se

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & H_{BI1} \\ H_{I1B} & H_{I1I1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_{B,k-1}^{I1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} & G_{BI1} \\ G_{I1B} & G_{I1I1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_B^B \\ p_{B,k}^{I1} \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

  para obter $\left\{p_{B,k}^{I1}\right\}$;

  → Calcula-se

$$\left\{u_{B,k}^{I2}\right\} = \begin{bmatrix} H_{BB}^* & H_{BI1}^* \\ H_{I1B}^* & H_{I1I1}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_{B,k-1}^{I1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{BB}^* & G_{BI1}^* \\ G_{I1B}^* & G_{I1I1}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_B^B \\ p_{B,k}^{I1} \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

  → Resolve-se

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FI1} & K_{FI2} \\ K_{FF} & K_{FI1} & K_{FI2} \\ K_{FF} & K_{FI1} & K_{FI2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F^F \\ u_{F,k}^{I1} \\ u_{B,k}^{I2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_F^F \\ f_F^{I1} \\ f_F^{I2} \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

  para obter $\left\{u_{F,k}^{I1}\right\}$;

→ Adota-se um valor adequado para o parâmetro de relaxação ω, calculando-se um novo valor para $\left\{u_{B,k}^{I1}\right\}$ na iteração k, mediante o uso da equação (4.15);
Efetua-se o teste de convergência (4.16);

→ No caso de não cumprir-se o teste de convergência, continua-se o *loop*.

O procedimento anteriormente descrito evita a prescrição das condições naturais (de *Neumann*) nas interfaces *I*1 e *I*2, não tendo, portanto, os inconvenientes dos outros métodos descritos [34]. As condições necessárias para a convergência do método, em relação à equação (4.15), são apresentadas a seguir [34].

Aplicando as condições de contorno e reagrupando termos na equação (4.21), substituindo $u_{B,k-1}^{I1}$ por $u_{B,k}^{I1}$, chega-se a

$$\left\{u_{B,k}^{I2}\right\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_B \\ u_{B,k}^{I1} \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

Procedendo da mesma forma sobre a equação (4.22), para a região tratada pelo MEF, resulta

$$\begin{Bmatrix} u_F^F \\ u_{F,k}^{I1} \\ u_{F,k}^{I2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_F^F \\ C_F^{I1} \\ u_{B,k}^{I2} \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

Nas equações (4.23) e (4.24), C_B, C_F^F e C_F^{I1} correspondem a vetores de valores constantes. Substituindo a segunda linha de (4.24) em (4.23), chega-se a

$$\left\{u_{F,k}^{I1}\right\} = \left[C\right]\left\{u_{B,k}^{I1}\right\} + \left\{b\right\} \tag{4.25}$$

na qual

$$[C] = [F_{23}][A_{12}] \tag{4.26}$$

$$\{b\} = [F_{21}]\{C_F^F\} + [F_{22}]\{C_F^{I1}\} + [F_{23}][A_{11}]\{C_B\} \tag{4.27}$$

Substituindo agora a equação (4.25) na expressão das iterações, ou seja, em

$$\{u_{B,k+1}^{I1}\} = (1-\omega)\{u_{B,k}^{I1}\} + \omega\{u_{F,k}^{I1}\} \tag{4.28}$$

obtém-se o seguinte:

$$\{u_{B,k+1}^{I1}\} = \left((1-\alpha)[I] + \omega[C]\right)u_{B,k}^{I1} + \omega\{b\} \tag{4.29}$$

O sistema mostrado acima representa um processo iterativo, no qual $[I]$ é a matriz identidade, e a matriz de amplificação $[A]$ é

$$[A] = (1-\omega)[I] + \alpha[C] \tag{4.30}$$

Pode-se demonstrar [35] que o sistema (4.29) converge se, e somente se, cumpre-se a seguinte relação:

$$\left|\psi - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\right| < \frac{1}{\omega} \tag{4.31}$$

onde $\psi = x + i \cdot y$ é um autovalor qualquer da matriz *C*.

Elevando ao quadrado a expressão anterior, desenvolvendo e supondo que $\psi_1 = x_1 + i \cdot y_1, \ldots, \psi_i = x_i + i \cdot y_i, \ldots, \ \psi_N = x_N + i \cdot y_N$ são os *N* autovalores da matriz *C*, deve cumprir-se o seguinte [36]:

$$\omega < \min_{1 \le i \le N} \left(\frac{2(1-x_i)}{(1-x_i)^2 + y_i^2} \right) \tag{4.32}$$

$$x_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{4.33}$$

Pode-se demonstrar também [35] que o parâmetro ω também pode ser calculado minimizando o raio espectral da matriz A, descrita na equação (4.30). Definindo os vetores

$$\{\psi\}^T = \{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \psi_N\} \tag{4.34}$$

$$\{1\}^T = \{1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\} \tag{4.35}$$

o valor de $\bar{\omega}$, cumprindo-se aquela condição, resulta

$$\bar{\omega} = -\frac{\mathrm{Re}\left(\{1\}^T \left(\{\psi\} - \{1\} \right) \right)}{\left\| \{\psi\} - \{1\} \right\|^2} \tag{4.36}$$

Tabela 4.1: Valor ótimo e intervalo para ser aplicado o parâmetro de relaxação ω.

K_2/K_1		Valor do parâmetro de relaxação	
		ω (método seqüencial *Dirichlet-Neumann*)	ω (método de superposição dos subdomínios)
0.1	Intervalo	0.02 – 1.8	0.02 – 3.62
	Ótimo	0.9	1.81
0.5	Intervalo	0.02 – 1.32	0.02 – 8.0
	Ótimo	0.66	4.0
1.0	Intervalo	0.02 – 0.98	0.02 – 11
	Ótimo	0.5	5.5
2.0	Intervalo	0.02 – 0.64	0.02 – 14
	Ótimo	0.34	7.0
8.0	Intervalo	0.02 – 0.20	0.02 – 18
	Ótimo	0.12	9.0

Na equação (4.36), $\|\cdot\|$ corresponde à norma $\mathbb{R}^2$. Na tabela 4.1 [34] mostram-se os valores aplicáveis e o valor ótimo para diferentes relações entre os valores de compressibilidade K_1 e K_2 ($K = \rho \cdot c^2$, onde ρ é a densidade e c a velocidade de propagação da onda no meio) nas regiões discretizadas pelo MEF e pelo MEC, respectivamente, considerando o método seqüencial *Dirichlet-Neumann* e o método de superposição das regiões com interface única.

4.2.5 Método seqüencial baseado na existência de uma região discretizada pelos dois métodos (análise dinâmica)

Uma das principais diferenças entre o método anteriormente descrito, e o mesmo aplicado a problemas dinâmicos, consiste na implementação de diferentes variantes na escolha dos passos de tempo, Δt_B usado no MEC e Δt_F usado no MEF.

Por exemplo, se for $\Delta t_B > \Delta t_F$, poderia acontecer o que se mostra na figura 4.5: neste caso teria que ser considerado, por cada iteração *k*, o avanço de um instante de tempo pelo MEC e de múltiplos instantes pelo MEF antes de testar a convergência. O processo consiste em assumir inicialmente um valor para u_B^{I1} no tempo $t_B + \Delta t_B$, tal que para a região discretizada pelo MEC obter-se-iam os valores de t_B^{I1} e u_B^{I2} referentes ao tempo $t_B + \Delta t_B$. Logo, uma interpolação seria feita a partir dos valores de u_B^{I2} considerando os tempos t_B e $t_B + \Delta t_B$, com a finalidade de aproximar o valor de u_F^{I2} referente aos tempos $t_F + \Delta t_F$, $t_F + 2\Delta t_F, \ldots$, $t_F + l\Delta t_F$. Assim, o valor de u_F^{I1} para cada um destes instantes pode ser calculado considerando a região discretizada pelo MEF. Finalmente seria feita uma nova interpolação, a partir dos valores de u_F^{I1} nos tempos $t_F + (l-1)\Delta t_F$ e $t_F + l\Delta t_F$, para calcular um novo valor de u_B^{I1} referente ao tempo $t_B + \Delta t_B$. Este valor deve ser comparado com aquele que foi assumido no começo, estabelecendo algum critério de convergência. Se não for atingida a precisão desejada, os valores de u_B^{I1} a ser usados na iteração seguinte são corrigidos usando alguma técnica para acelerar a convergência, por exemplo, mediante a consideração de um parâmetro de relaxação, continuando com o processo iterativo.

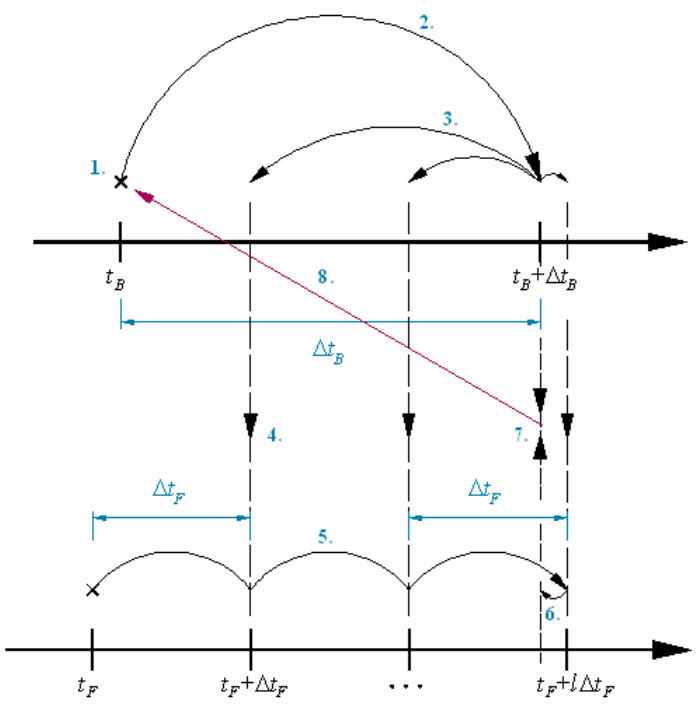

Figura 4.5: Esquema para efetuar o acoplamento iterativo no caso $\Delta t_B > \Delta t_F$.

O esquema numerado da figura 4.5 pode ser apresentado da seguinte forma:

1. Na primeira iteração, $k=1$: assume-se um valor para $u_{B,k-1}^{I1}$ no tempo $t_B+\Delta t_B$;
2. A *força de superfície* $t_{B,k}^{I1}$ e o potencial $u_{B,k}^{I2}$, referentes ao tempo $t_B+\Delta t_B$, são determinados pelo MEC;
3. Interpolação – extrapolação, a partir do valor de $u_{B,k}^{I2}$ nos tempos t_B e $t_B+\Delta t_B$: é feita com o objetivo de aproximar o valor de $u_{F,k}^{I2}$ referente aos tempos $t_F+\Delta t_F$, $t_F+2\Delta t_F$, … , $t_F+l\Delta t_F$;
4. Os valores calculados de $u_{F,k}^{I2}$ são substituídos como condições de contorno essenciais, prescritas para a região que é resolvida pelo MEF;
5. O valor de $u_{F,k}^{I1}$ para os tempos $t_F+\Delta t_F$, $t_F+2\Delta t_F$, … , $t_F+l\Delta t_F$ é calculado considerando a região que é discretizada usando o MEF;
6. Interpolação a partir do valor de $u_{F,k}^{I1}$ nos tempos $t_F+(l-1)\Delta t_F$ e $t_F+l\Delta t_F$, com o objetivo de determinar um novo valor de $u_{B,k}^{I1}$ referente ao tempo $t_B+\Delta t_B$;

7. O valor calculado $u_{B,k}^{I1}$ é comparado com o valor $u_{B,k-1}^{I1}$, inicialmente assumido ou calculado, segundo for o número de iteração em questão;
8. Se não for atingida a precisão desejada, o valor de $u_{B,k}^{I1}$ deve ser corrigido mediante alguma técnica para acelerar a convergência, tal como, por exemplo, usando a equação (4.15). Assim, seria iniciada uma nova iteração aumentando em "1" o valor de *k*, repetindo o processo a partir do passo 2. Se a convergência for atingida, devem ser armazenados os valores corrigidos de u_B^{I1} e u_B^{I2} no tempo $t_B + \Delta t_B$ junto com os últimos valores de $u_{F,k}^{I1}$ e $u_{F,k}^{I2}$ para cada um dos tempos $t_F + \Delta t_F$, $t_F + 2\Delta t_F$, … , $t_F + (l-1)\Delta t_F$, enquanto que os tempos t_B e t_F devem ser atualizados conforme a seguir,

$$t_B + \Delta t_B \rightarrow t_B \tag{4.37}$$

$$t_F + (l-1)\Delta t_F \rightarrow t_F \tag{4.38}$$

No outro caso, ou seja, se for $\Delta t_B < \Delta t_F$, poderia acontecer o que se mostra na figura 16: neste caso, por cada iteração *k*, teria que efetuar-se somente o avanço de um instante de tempo pelo MEC. O método, neste caso, consiste em assumir um valor inicial para u_B^{I1} no tempo $t_B + \Delta t_B$, obter os valores de t_B^{I1} e u_B^{I2} referentes ao tempo $t_B + \Delta t_B$ considerando a região que é discretizada pelo MEC, e extrapolar, a partir do valor de u_B^{I2} nos tempos t_B e $t_B + \Delta t_B$, aproximando o valor de u_F^{I2} referente ao tempo $t_F + \Delta t_F$. Considerando a região que é discretizada pelo MEF, calcula-se u_F^{I1} no tempo $t_F + \Delta t_F$, e faz-se uma interpolação considerando o valor de u_F^{I1} nos tempos t_F e $t_F + \Delta t_F$, com o objetivo de calcular um novo valor de u_B^{I1} referente ao tempo $t_B + \Delta t_B$. Os valores inicial e calculado de u_B^{I1} são comparados, estabelecendo algum critério de convergência. No caso de não atingir a precisão desejada, atualiza-se o valor de u_B^{I1} e continua o processo iterativo.

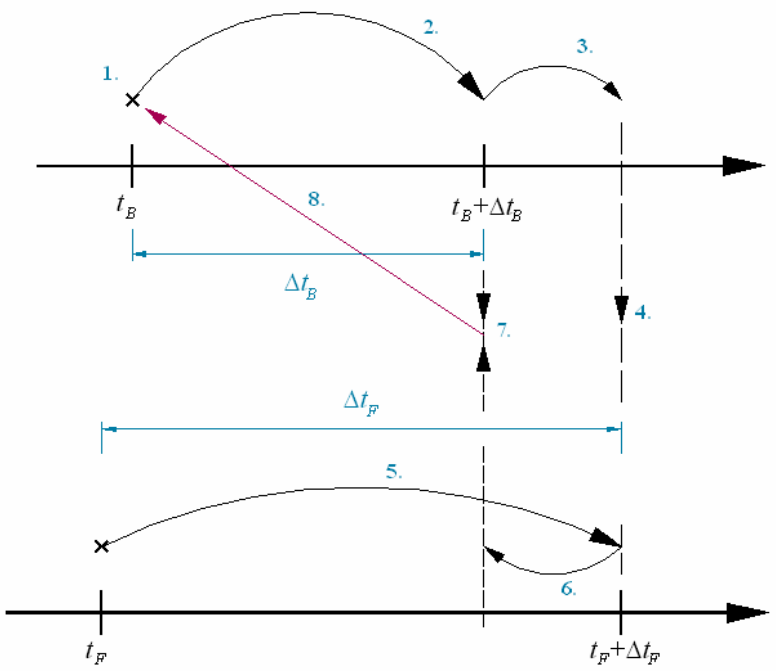

Figura 4.6: Esquema para efetuar o acoplamento iterativo no caso $\Delta t_B < \Delta t_F$.

O esquema da figura 4.6 pode ser apresentado da seguinte forma:

1. Na primeira iteração, $k=1$: assume-se um valor para $u_{B,k-1}^{I1}$ no tempo $t_B + \Delta t_B$;
2. A *força de superfície* $t_{B,k}^{I1}$ e o potencial $u_{B,k}^{I2}$, referentes ao tempo $t_B + \Delta t_B$, são determinados pelo MEC;
3. Extrapolação a partir do valor de $u_{B,k}^{I2}$ nos tempos t_B e $t_B + \Delta t_B$: é feita com o objetivo de aproximar o valor de $u_{F,k}^{I2}$ referente ao tempo $t_F + \Delta t_F$;
4. O valor calculado de $u_{F,k}^{I2}$ é substituído como condição de contorno essencial, prescrita para a região que é discretizada pelo MEF;
5. O valor de $u_{F,k}^{I1}$ para o tempo $t_F + \Delta t_F$ é calculado pelo MEF;
6. Interpolação a partir do valor de $u_{F,k}^{I1}$ nos tempos t_F e $t_F + \Delta t_F$: com o objetivo de determinar um novo valor de $u_{B,k}^{I1}$ referente ao tempo $t_B + \Delta t_B$;
7. O valor calculado $u_{B,k}^{I1}$ é comparado com o valor $u_{B,k-1}^{I1}$, inicialmente assumido ou calculado, segundo for o número de iteração em questão;
8. Se não for atingida a precisão desejada, o valor de $u_{B,k}^{I1}$ deve ser corrigido mediante alguma técnica para acelerar a convergência, tal como, por exemplo,

usando a equação (4.15). Assim, seria iniciada uma nova iteração aumentando em “1” o valor de *k*, repetindo o processo a partir do passo 2. Se a convergência for atingida, devem ser armazenados os valores de u_B^{I1} e u_B^{I2} no tempo $t_B + \Delta t_B$. Cabe mencionar que neste caso não corresponde ainda armazenar os valores de u_F^{I1} e u_F^{I2} no tempo $t_F + \Delta t_F$. Antes de continuar com a seguinte iteração, o valor do t_B deve ser atualizado conforme a seguir,

$$t_B + \Delta t_B \rightarrow t_B \tag{4.39}$$

5

Exemplos numéricos, análise de resultados

5.1. Considerações preliminares

O presente capítulo tem como objetivo mostrar os resultados obtidos, após analisar alguns exemplos numéricos, usando o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, neste último incorporando os métodos *ExGA Runge-Kutta* e *ExGAH diferenças centrais* para calcular a *função de Green* explicitamente. Os três exemplos a serem apresentados são: barra fixa em um extremo sob um fluxo aplicado na extremidade livre, uma barra com o fluxo aplicado na extremidade livre e condições iniciais impostas em uma região perto dessa extremidade, e uma membrana sob condição inicial de velocidade em uma região central.

5.2. Barra fixa em um extremo, com fluxo aplicado na extremidade livre

A seguir, apresentam-se os resultados do exemplo de uma barra bidimensional homogênea, de comprimento *a* e altura *b*, que possui uma extremidade fixa e a outra livre, tal como é mostrado na figura 5.1. Como condição de contorno, $u = 0$ em $x = 0$, e $p = 0$ em $y = -b/2$ e $y = +b/2$. A velocidade de propagação da onda no meio é *c*, e na extremidade livre é aplicado um fluxo dado pela função *Heaviside* mostrada na figura 5.2, de distribuição uniforme ao longo do contorno e de magnitude $\bar{p}$.

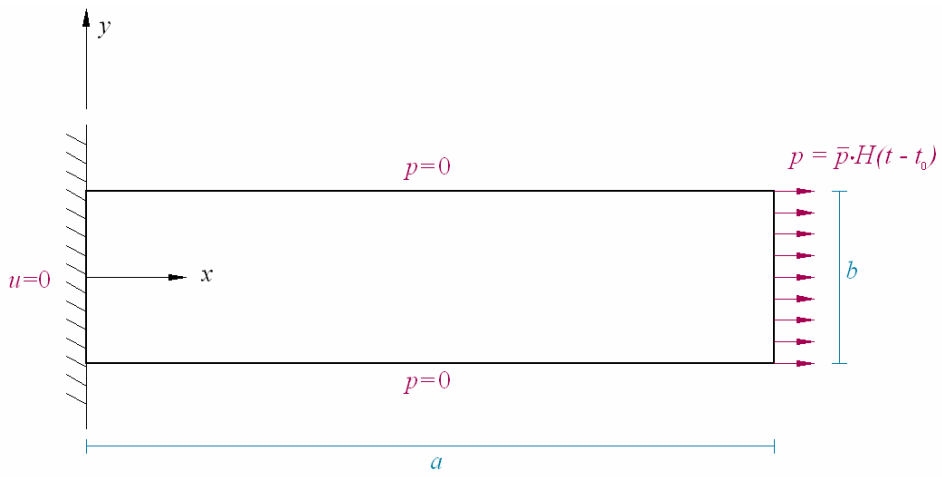

Figura 5.1: Esquema geométrico e condições iniciais para o exemplo da barra com fluxo aplicado na extremidade livre.

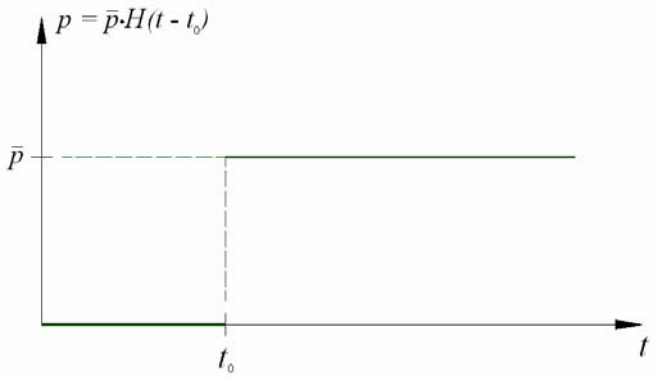

Figura 5.2: Função *Heaviside* para o fluxo prescrito.

As propriedades geométricas e físicas da barra que foram adotadas são $a = 2.0$, $b = 0.5$ e $c = 10.0$, enquanto para o carregamento têm-se $\overline{p} = 1.0$ e $t_0 = 0.0$. Em relação à discretização para o MEC, um primeiro caso é analisado dividindo a barra em 28 nós e 24 elementos de contorno, e um segundo caso considerando 52 nós e 48 elementos de contorno, correspondendo, respectivamente, aos modelos 1 e 2 mostrados na figura 5.3 com seus nós duplos. O sentido da numeração é anti-horário.

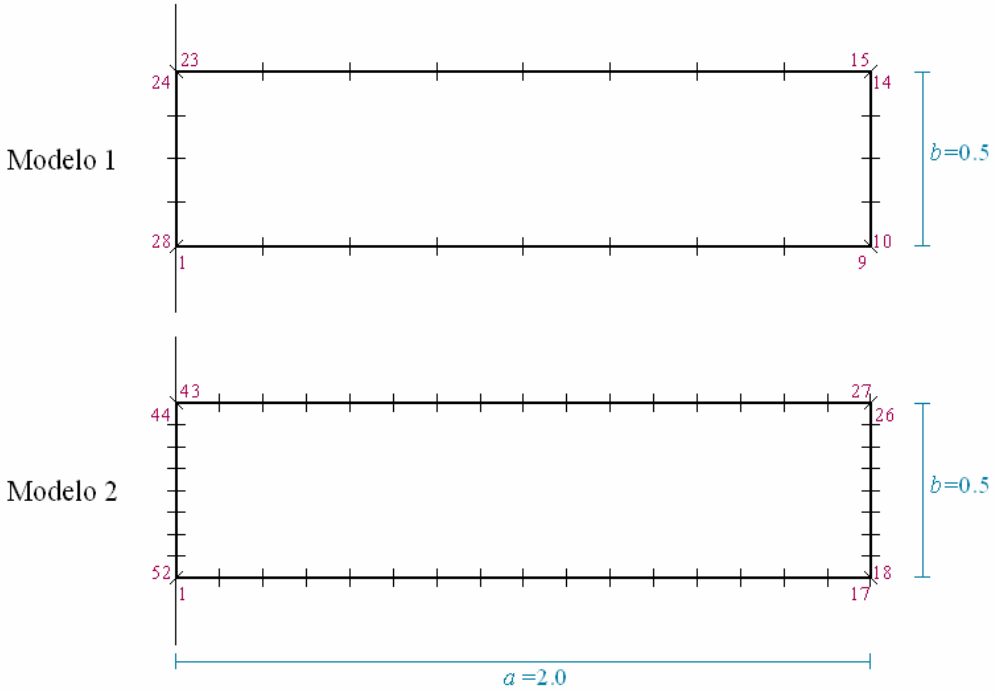

Figura 5.3: Discretização espacial da barra pelo MEC.

No que diz respeito ao avanço no tempo pelo MEC, vale destacar que devido às condições prescritas (potencial $\overline{u}$ ou fluxo $\overline{p}$) serem sempre as mesmas, e devido à

propriedade de translação dos coeficientes G e H (especificamente das funções de interpolação temporal), é necessário inverter somente uma vez a matriz do sistema de equações resultante [1]. As funções de interpolação temporal que foram consideradas são: função ϕ^m linear para u, e funções θ^m constante e linear para p nas equações (2.19) à (2.21).

Um dos parâmetros a serem considerados nas análises é a relação β existente entre a distância que a onda percorre, durante um tempo igual ao intervalo de tempo Δt escolhido, e o tamanho do elemento l, ou seja,

$$\beta = \frac{c \cdot \Delta t}{l} \tag{5.1}$$

Na figura 5.4 são exibidos os pontos A, B e C nos quais os resultados foram calculados.

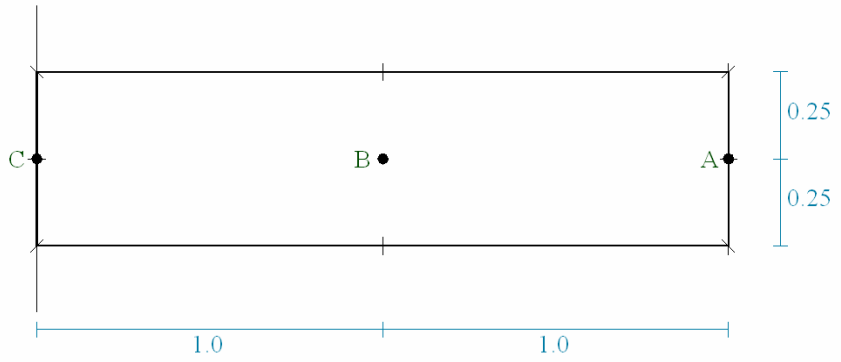

Figura 5.4: Esquema dos pontos a serem considerados no problema da barra.

No caso de considerar função de interpolação temporal linear para o fluxo p, os valores usados para o parâmetro θ foram 1.0 e 1.4.

Nas figuras 5.5-5.10 mostram-se os resultados do MEC para o modelo 1 da figura 5.3, junto com a solução analítica, considerando funções de interpolação temporal constante e linear para o fluxo p, e incorporando o método θ linear no último caso. O passo de tempo Δt em ambos os casos foi escolhido de tal forma a se obter $\beta = 0.6$ na equação (5.1).

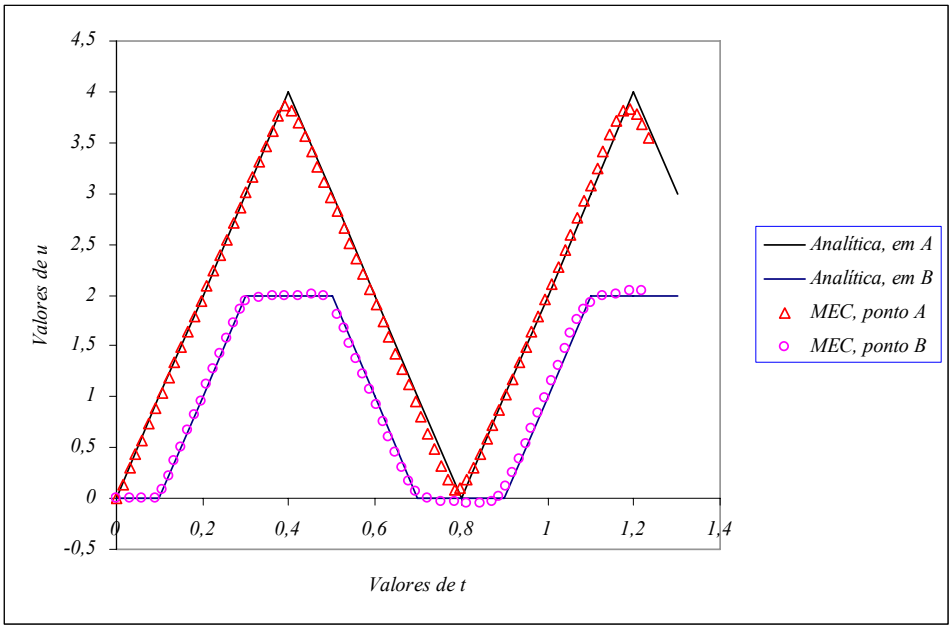

Figura 5.5: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 1).

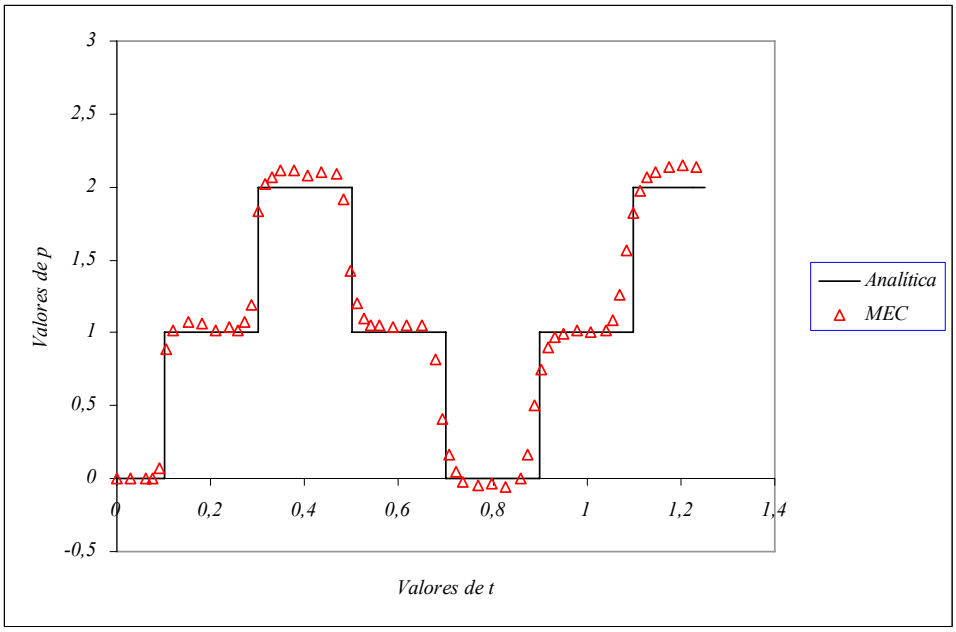

Figura 5.6: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 1).

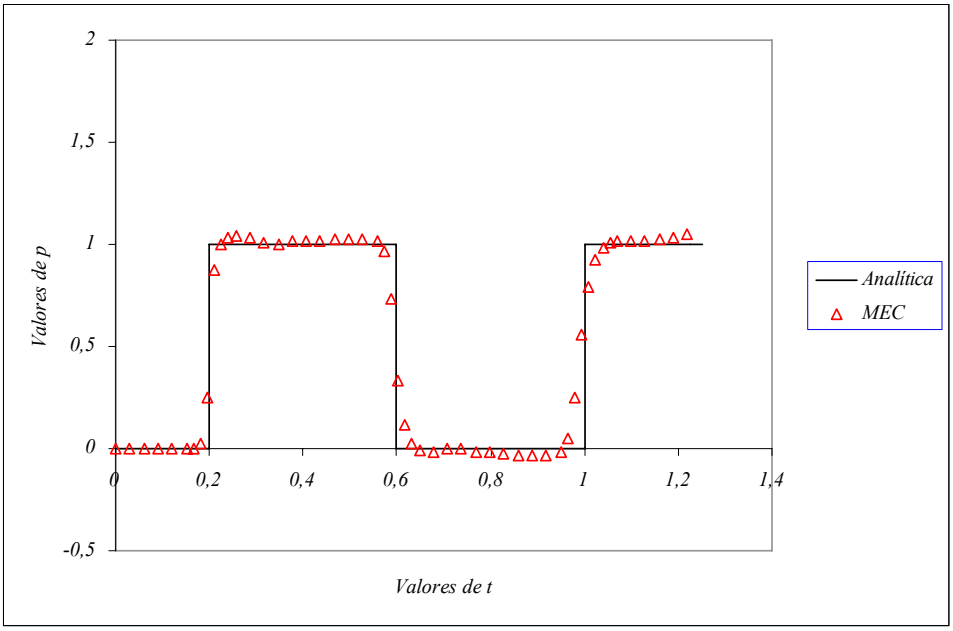

Figura 5.7: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 1).

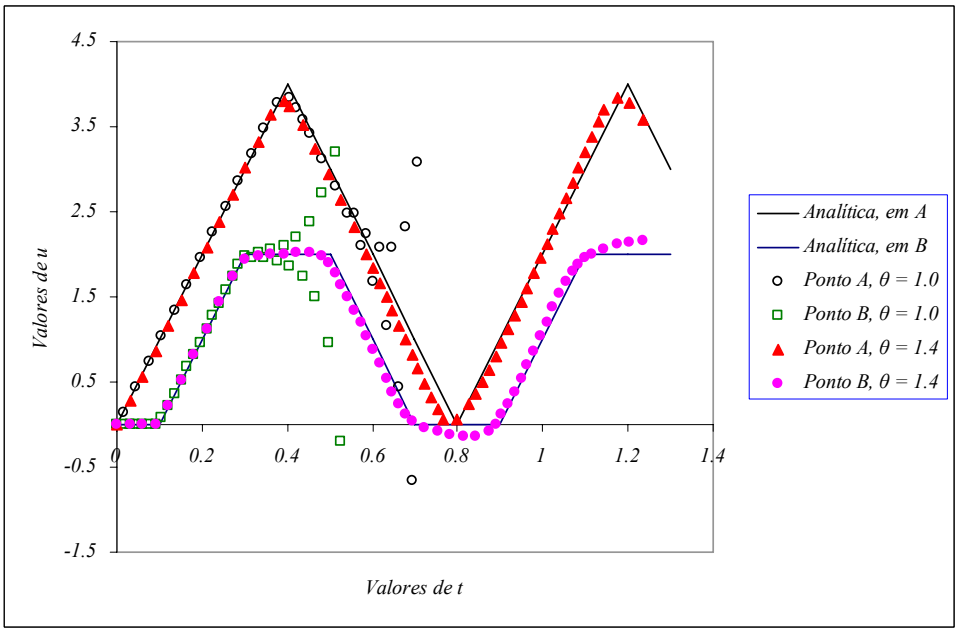

Figura 5.8: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 1).

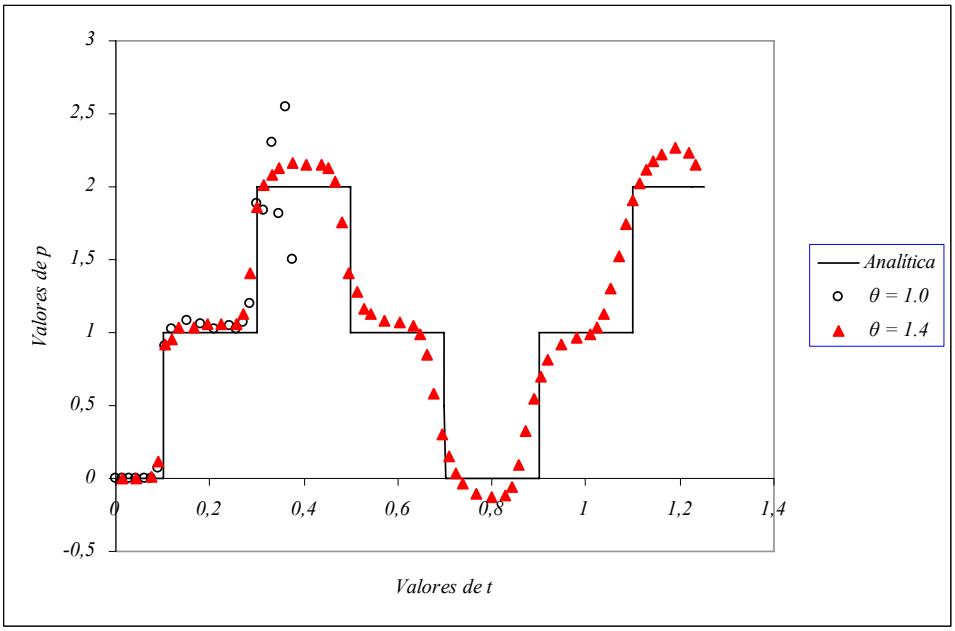

Figura 5.9: Valor do fluxo p no ponto B da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 1).

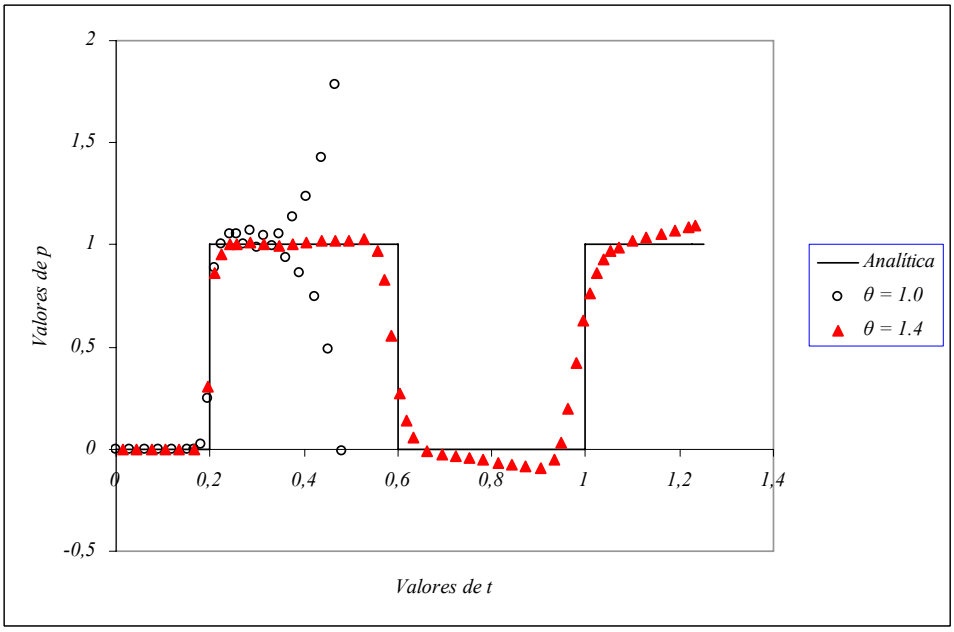

Figura 5.10: Valor do fluxo p no ponto C da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 1).

Pode-se visualizar que os resultados para $\theta = 1.0$ se espalham, em relação à solução exata, no caso de assumir função de interpolação temporal linear para o fluxo. Os resultados correspondentes ao modelo 2, com as mesmas considerações referentes aos parâmetros β e θ, são mostrados a seguir nas figuras 5.11-5.16.

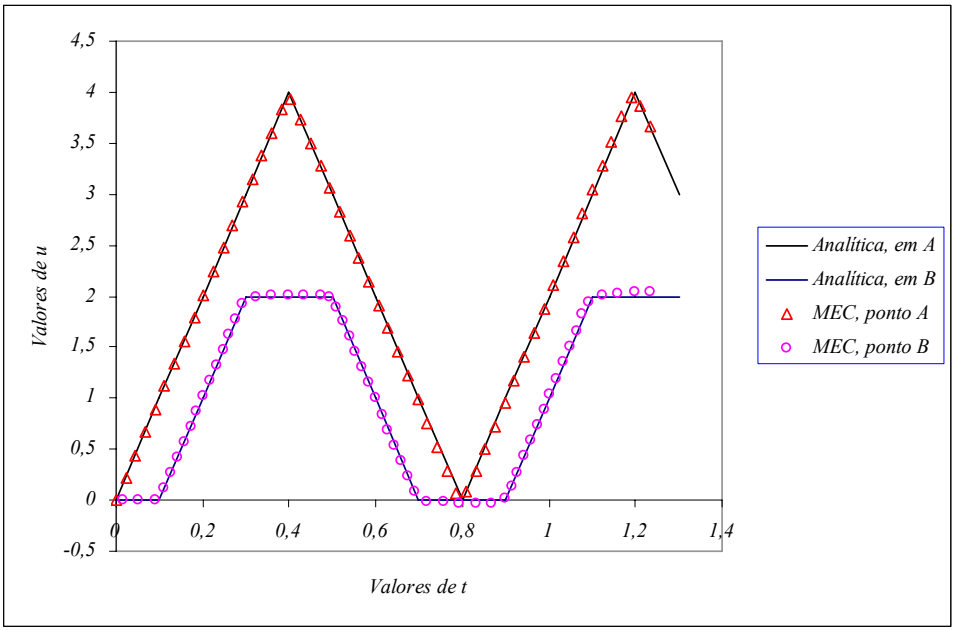

Figura 5.11: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 2).

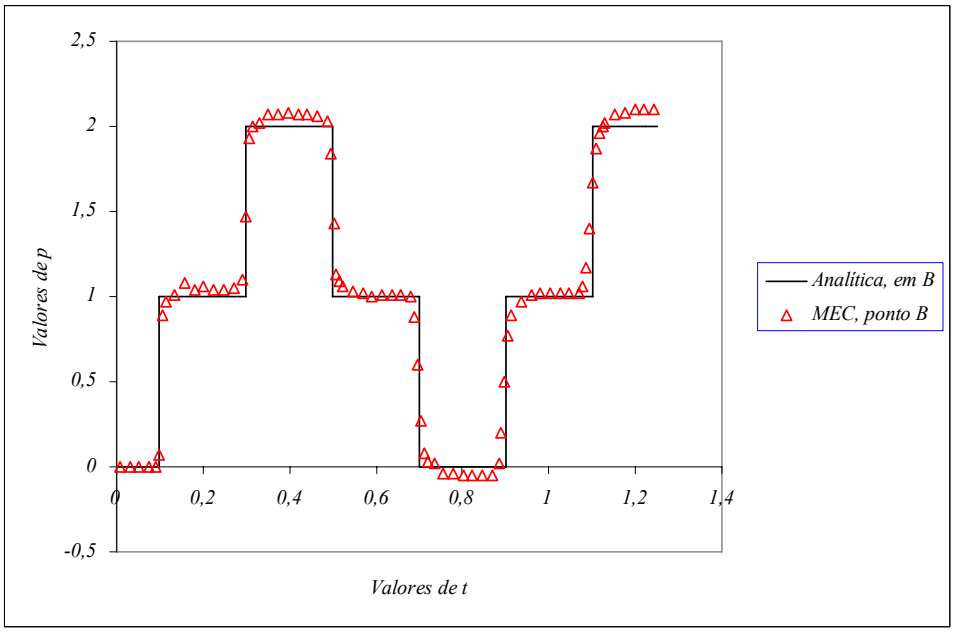

Figura 5.12: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 2).

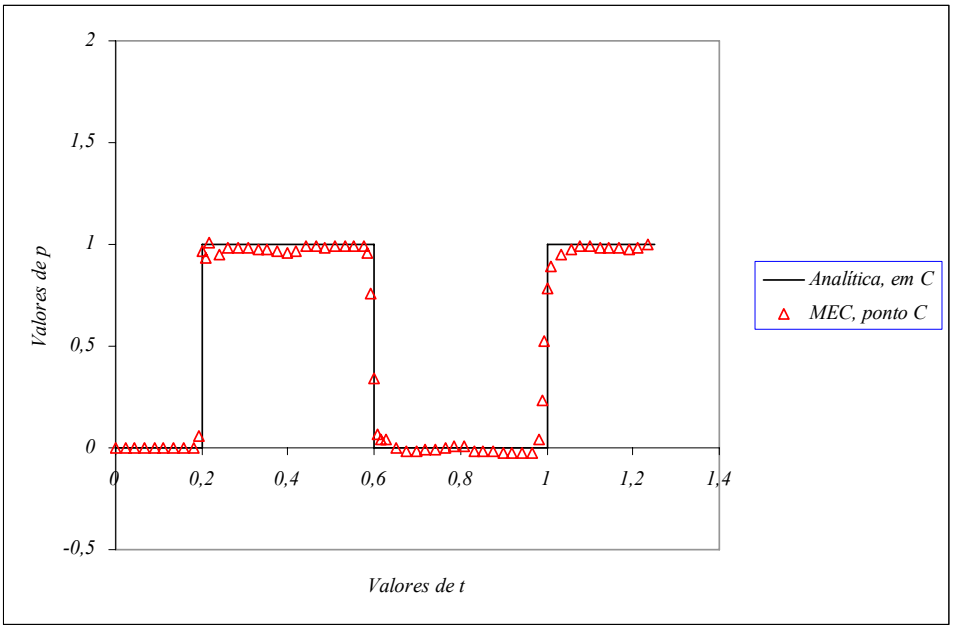

Figura 5.13: Valor do fluxo p no ponto C da barra, no caso de função θ^m constante (modelo 2).

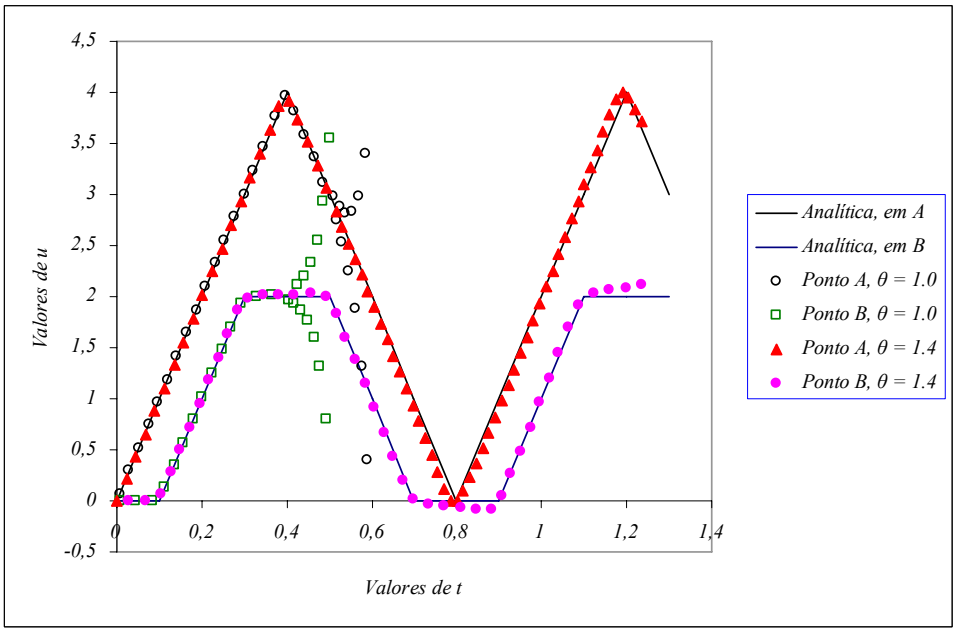

Figura 5.14: Valores do potencial u para o exemplo da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 2).

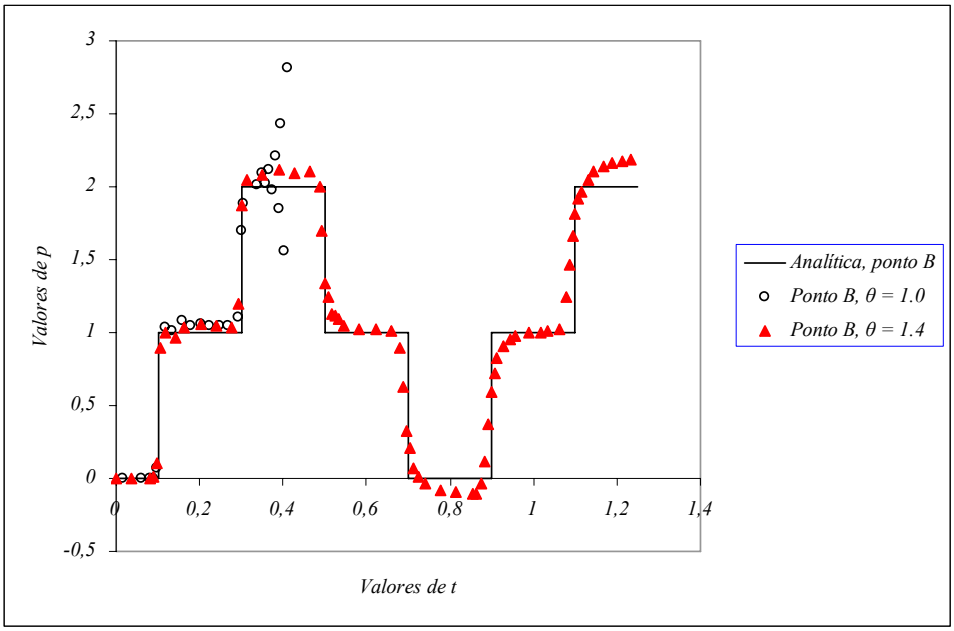

Figura 5.15: Valor do fluxo p no ponto B da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 2).

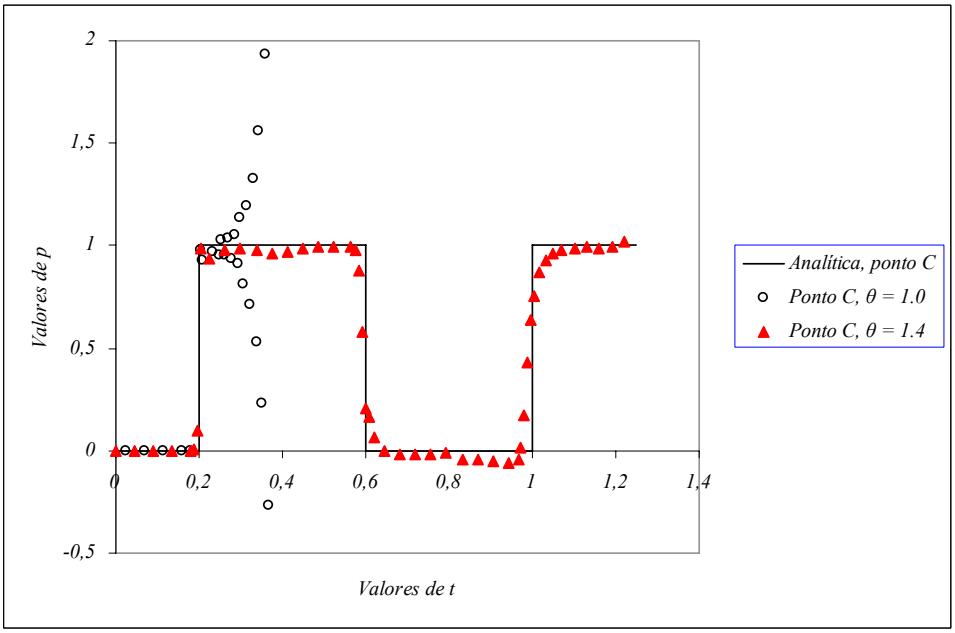

Figura 5.16: Valor do fluxo p no ponto C da barra, no caso de função θ^m linear (modelo 2).

Em ambos os modelos, 1 e 2, melhores resultados foram obtidos escolhendo o parâmetro θ de modo tal que $\theta = 1.4$, como se mostra nas figuras 5.8-5.10 e 5.14-5.16, corroborando a obtenção de resultados instáveis quando se assume função de interpolação temporal linear para o fluxo *p*. Os resultados para o potencial *u* nos modelos 1 e 2 são similares, porém os resultados para o fluxo *p* no modelo 2 são mais precisos, logicamente devido a uma discretização espacial mais refinada.

Por sua parte, a figura 5.17 mostra o esquema de discretização e pontos escolhidos para impressão dos resultados, usados para resolver o problema antes descrito, desta vez usando o MEF *ExGA*. O esquema consta de 165 nós e 128 elementos finitos, e das mesmas propriedades físicas e geométricas anteriormente usadas.

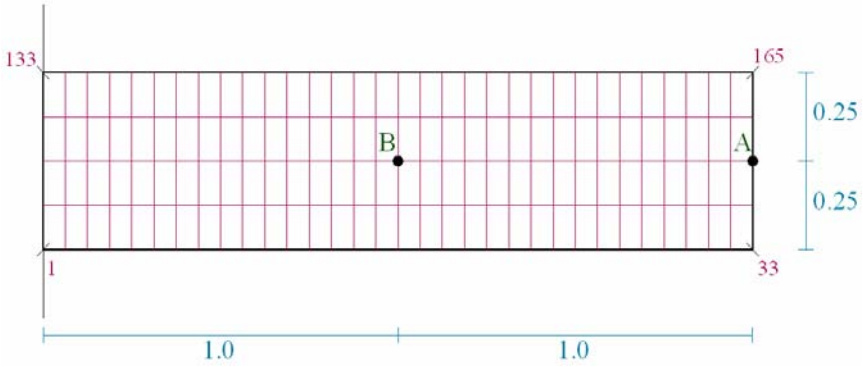

Figura 5.17: Discretização da barra por elementos finitos,
esquema de pontos para impressão dos resultados.

Em relação ao avanço no tempo, foi selecionado o passo Δt de tal forma a se obter $\beta = 0.6$ na equação (5.1). Para o comprimento *l* na equação, foi considerada a dimensão do elemento finito na direção *x*. Os resultados do potencial *u* para os pontos A e B, assinalados na figura 5.17, mostram-se a seguir nas figuras 5.18 e 5.19 considerando os métodos *ExGA Runge-Kutta* e *ExGAH diferenças centrais*, respectivamente, em relação à solução analítica e em relação ao método de *Newmark* usando *regra do trapézio*. Em ambos os casos um total de $n_s = 4$ subintervalos foi usado no cálculo das *matrizes de Green*, e os resultados mostram ser satisfatórios.

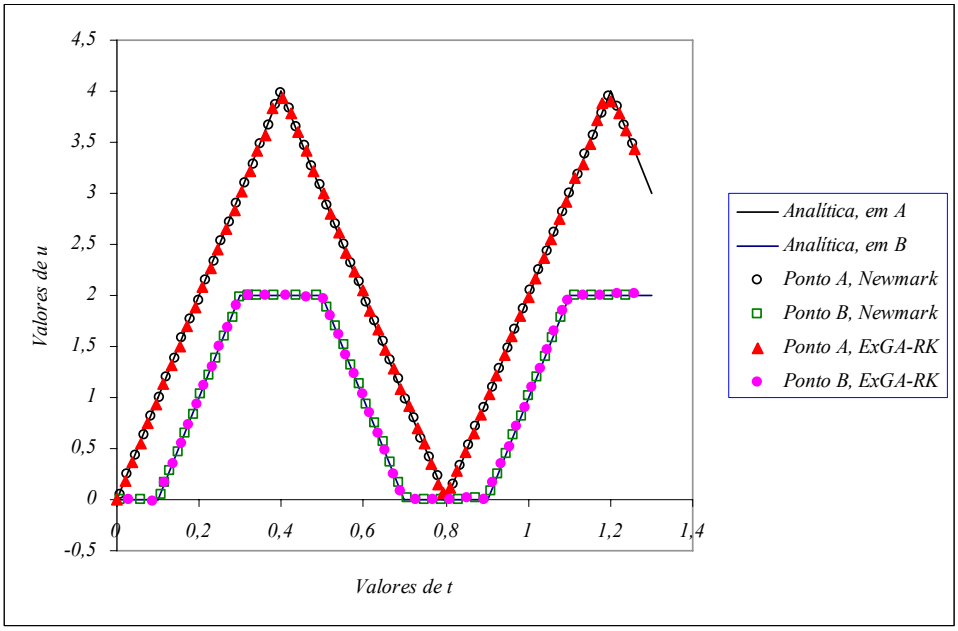

Figura 5.18: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, considerando o MEF *ExGA Runge-Kutta*.

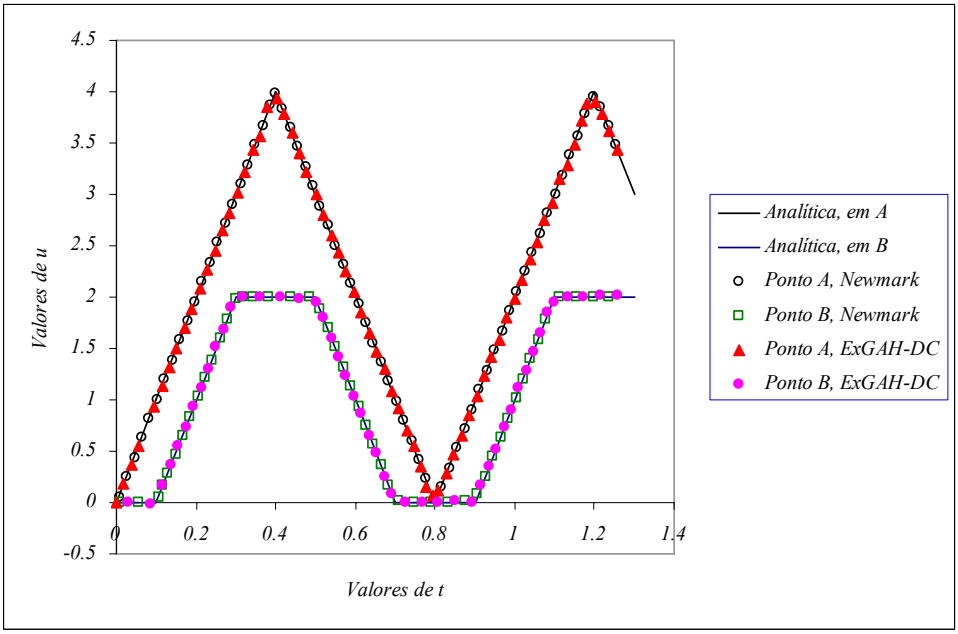

Figura 5.19: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, considerando o MEF *ExGAH diferenças centrais*.

Escolhendo agora o passo Δt perto do valor crítico Δt_{cr}, para ambos os métodos de *Green*, são mostrados nas figuras 5.20 e 5.21 os resultados para um valor de Δt maior e outro menor ao correspondente valor crítico Δt_{cr} para os métodos *ExGA Runge-Kutta* e *ExGAH diferenças centrais*, respectivamente.

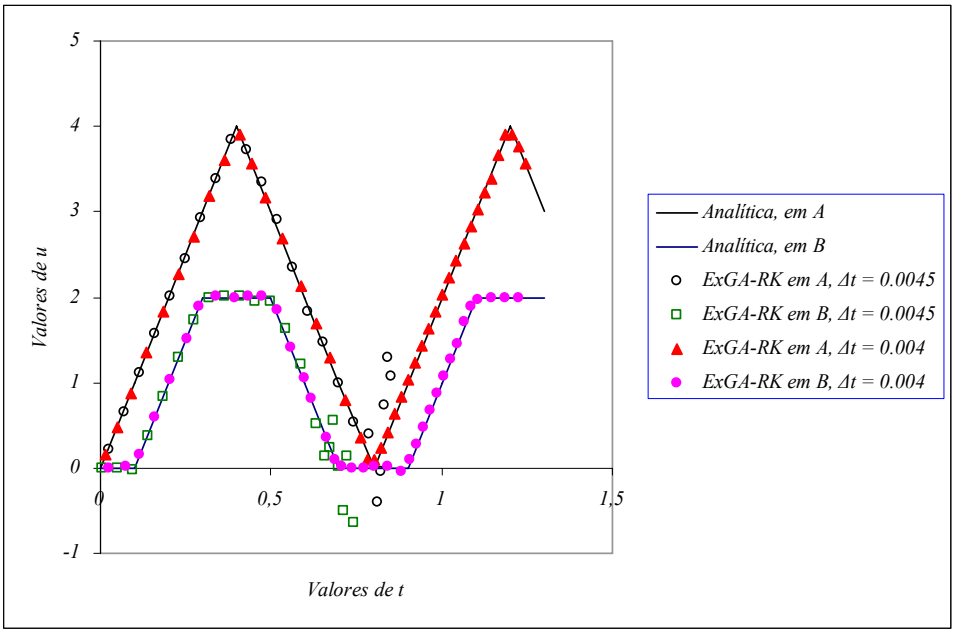

Figura 5.20: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, para o MEF *ExGA Runge-Kutta* na vizinhança do Δt_{cr} .

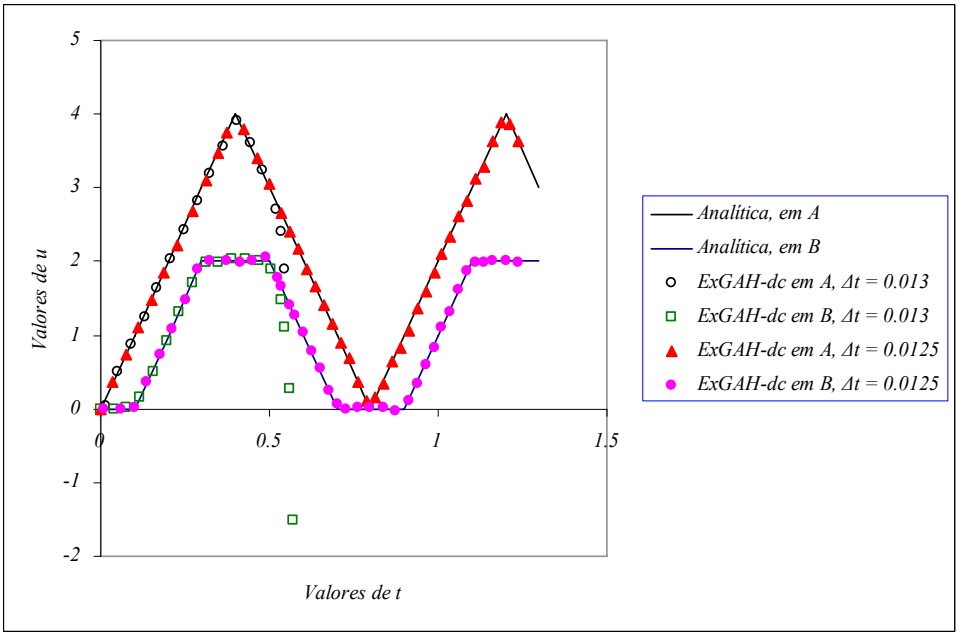

Figura 5.21: Valores do potencial *u* no exemplo da barra, para o MEF *ExGAH diferenças centrais* na vizinhança do Δt_{cr} .

Resulta evidente que para uma escolha de Δt maior que o valor crítico Δt_{cr}, os resultados são instáveis (a partir de um determinado valor de *t*).

5.3. Barra fixa em um extremo, com fluxo aplicado na extremidade livre e condições iniciais

O exemplo da barra, citado no item anterior, é considerado com os mesmos valores na geometria e em relação ao carregamento, incluindo condições iniciais de potencial *u* e velocidade *v* em uma região Ω_0 (figura 5.22).

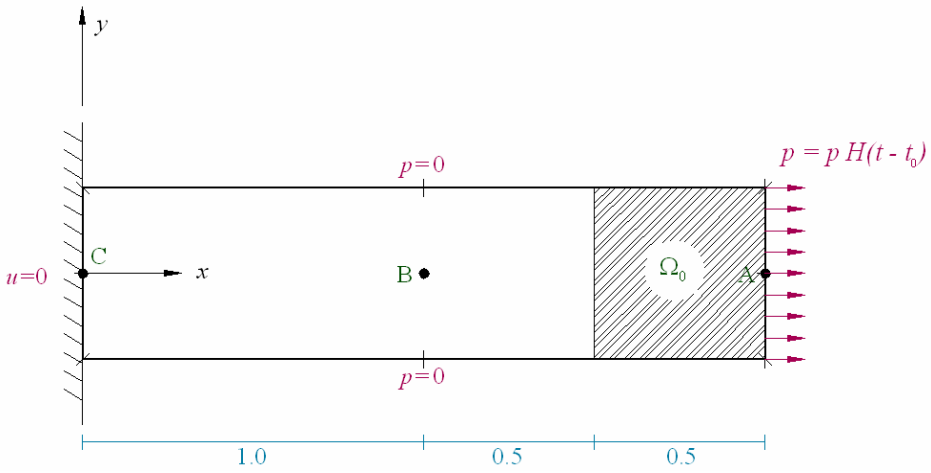

Figura 5.22: Esquema do problema da barra com fluxo aplicado na extremidade livre e condições iniciais em Ω_0.

As condições iniciais impostas para *u* e *v*, considerando o sistema coordenado e a geometria da figura 5.22, são

$$u_0(x,y) = \begin{cases} (x-1.5) & x > 1.5 \\ 0.0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.2}$$

$$v_0(x,y) = \begin{cases} 10.0 & x > 1.5 \\ 0.0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.3}$$

Considerando o modelo de discretização 2, representado na figura 5.3, mostram-se a seguir os resultados para *u* e *p* nas figuras 5.23-5.25 e 5.26-5.28 usando funções de interpolação temporal constante e linear para o fluxo *p*, respectivamente, junto com a solução analítica que é a mesma do exemplo anterior, mas defasada em 0.5 unidades no eixo do tempo.

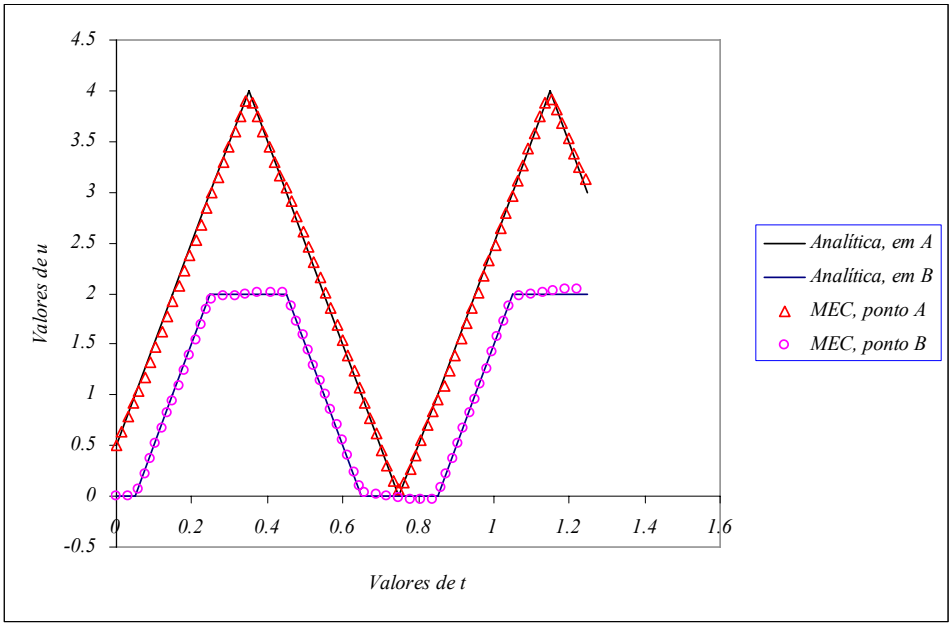

Figura 5.23: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m constante (modelo 2).

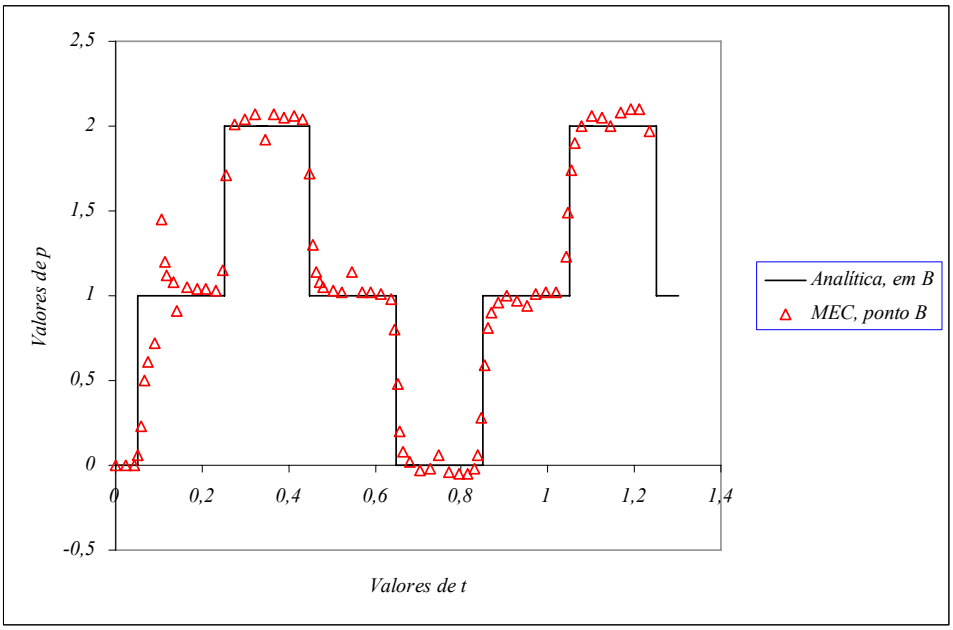

Figura 5.24: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m constante (modelo 2).

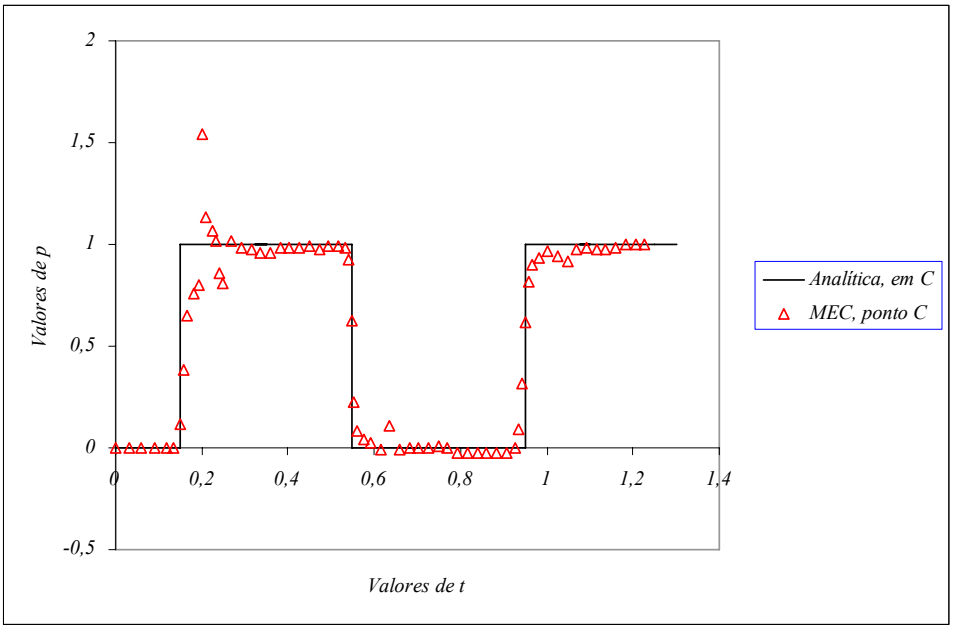

Figura 5.25: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m constante (modelo 2).

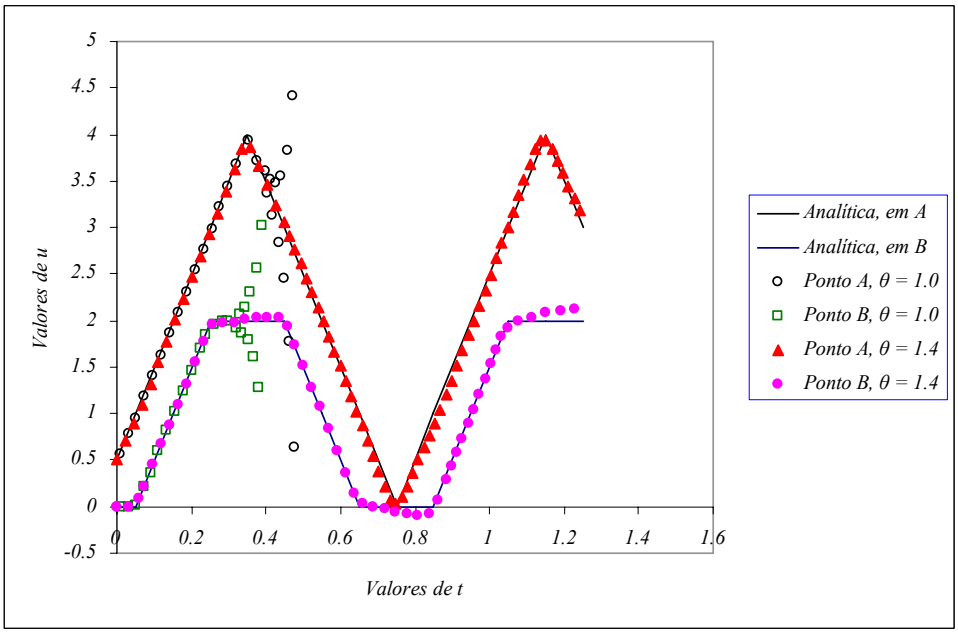

Figura 5.26: Valores do potencial *u* para o exemplo da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m linear (modelo 2).

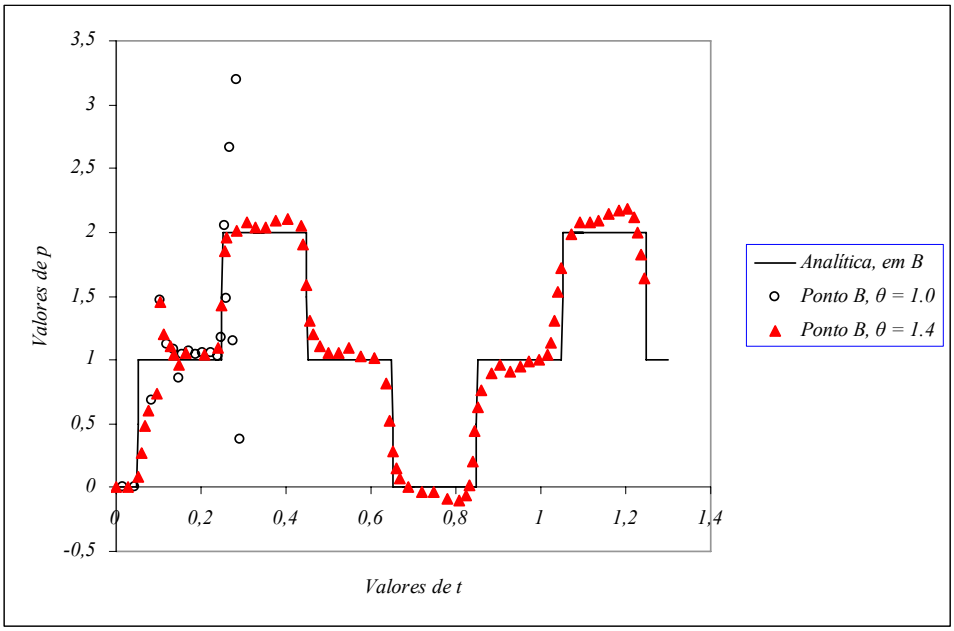

Figura 5.27: Valor do fluxo *p* no ponto B da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m linear (modelo 2).

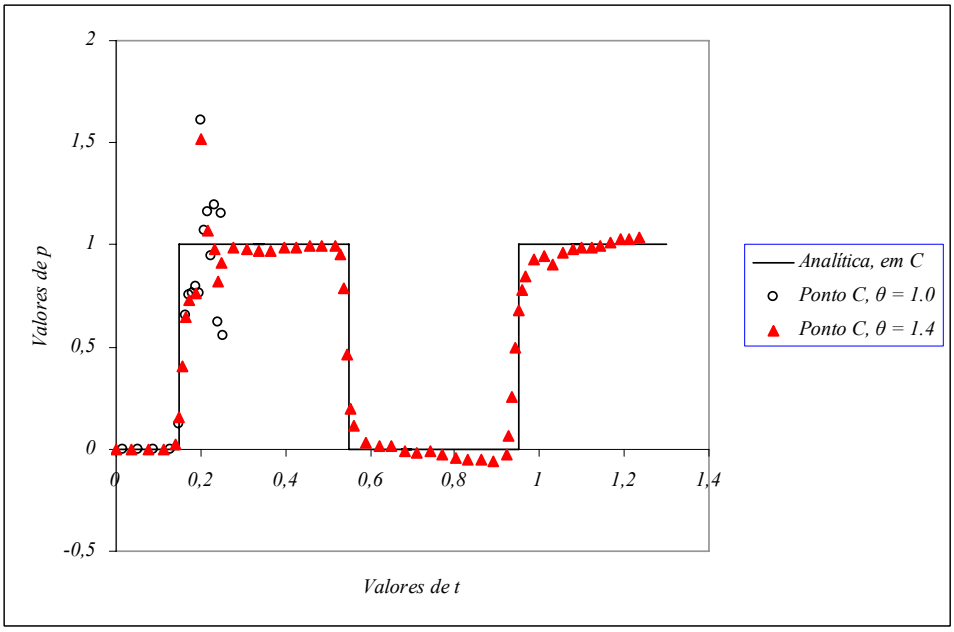

Figura 5.28: Valor do fluxo *p* no ponto C da barra com condições iniciais, no caso de função θ^m linear (modelo 2).

O uso do método θ linear traz consigo um melhoramento na estabilidade dos resultados obtidos, no caso em que a função de interpolação temporal θ^m para o fluxo seja linear. No entanto, os resultados para o fluxo *p* não resultam ser tão bons quanto os obtidos no primeiro exemplo. De acordo com o esquema da figura 5.22, considerando

para o MEF $\beta = 0.6$ na equação (5.1), mostram-se a seguir os resultados para o carregamento definido pela figura 5.3, com as condições iniciais dadas por (5.2) e (5.3), para o método *ExGA Runge-Kutta* e o método *ExGAH diferenças centrais*, respectivamente, usando 4 subintervalos para o cálculo das *matrizes de Green*.

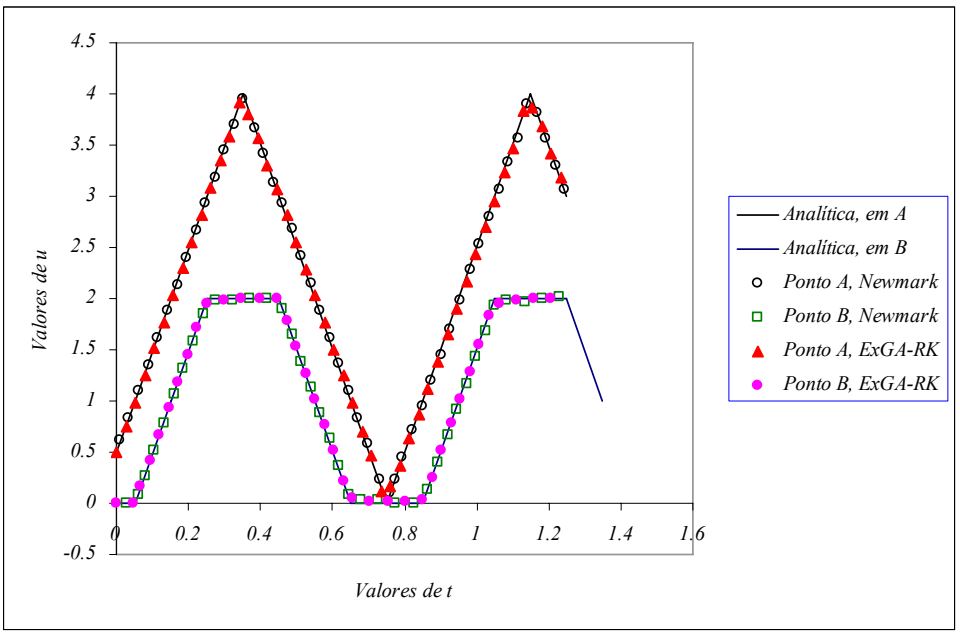

Figura 5.29: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, considerando o MEF *ExGA Runge-Kutta*.

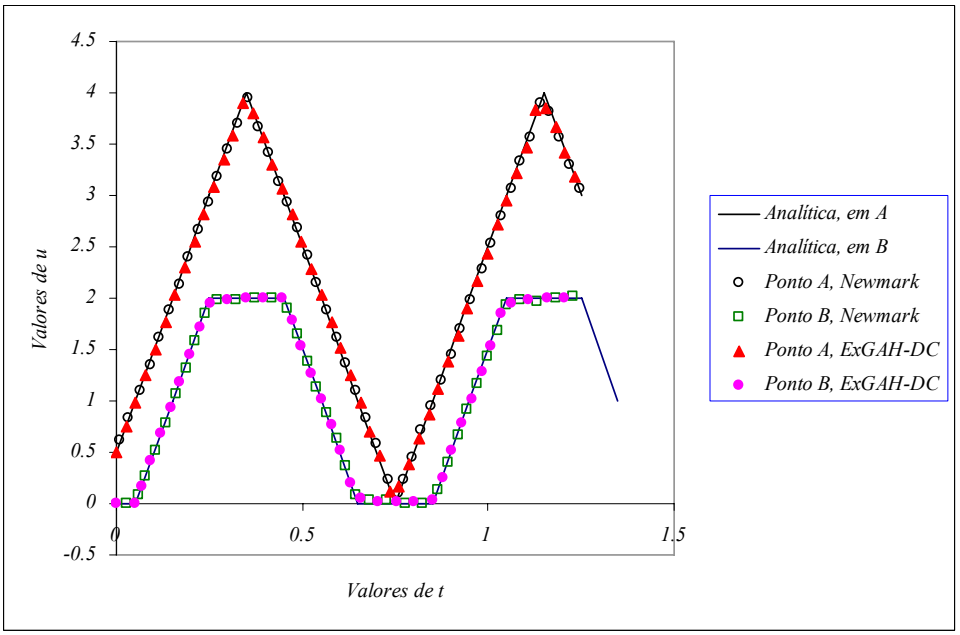

Figura 5.30: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, considerando o MEF *ExGAH diferenças centrais*.

As respostas obtidas pelos métodos *ExGA* atingem boa precisão. Calculando agora para Δt na vizinhança do valor crítico Δt_{cr}, os resultados são apresentados nas figuras 5.31 e 5.32.

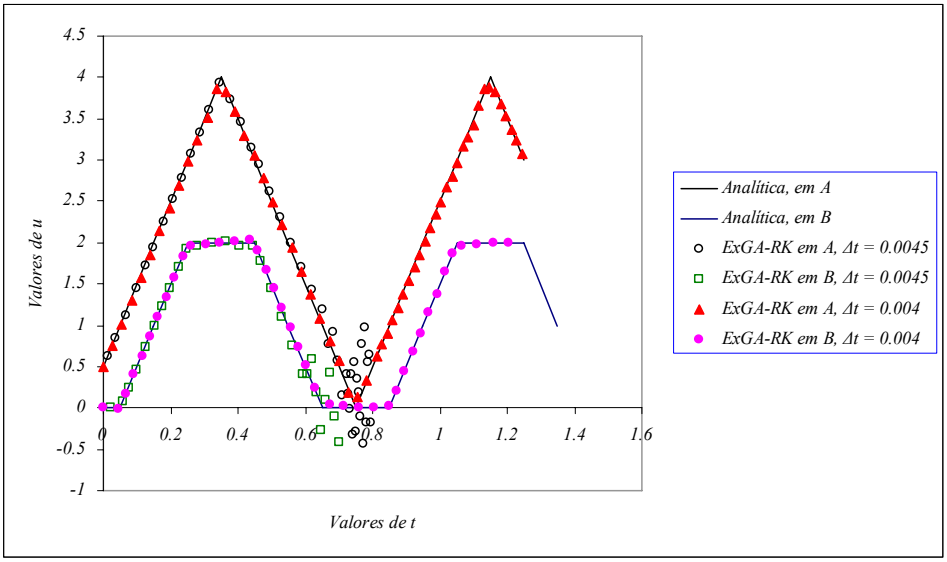

Figura 5.31: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, para o MEF *ExGA Runge-Kutta* na vizinhança do Δt_{cr}.

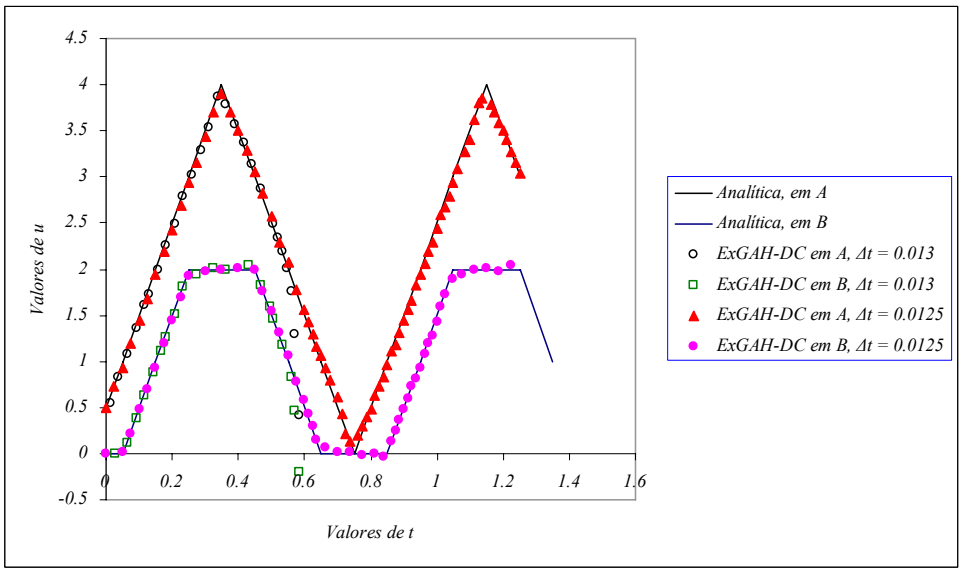

Figura 5.32: Valores do potencial *u* no exemplo da barra com condições iniciais, para o MEF *ExGAH diferenças centrais* na vizinhança do Δt_{cr}.

5.4. Membrana sob condição inicial de velocidade

O terceiro exemplo consiste em uma membrana homogênea, retangular, restringida no contorno de modo que $\overline{u} = 0$. As condições iniciais na região Ω_0 são

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= 0.0 \\ v_0(x,y) &= \overline{v}_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

O esquema da membrana se mostra na figura 5.33.

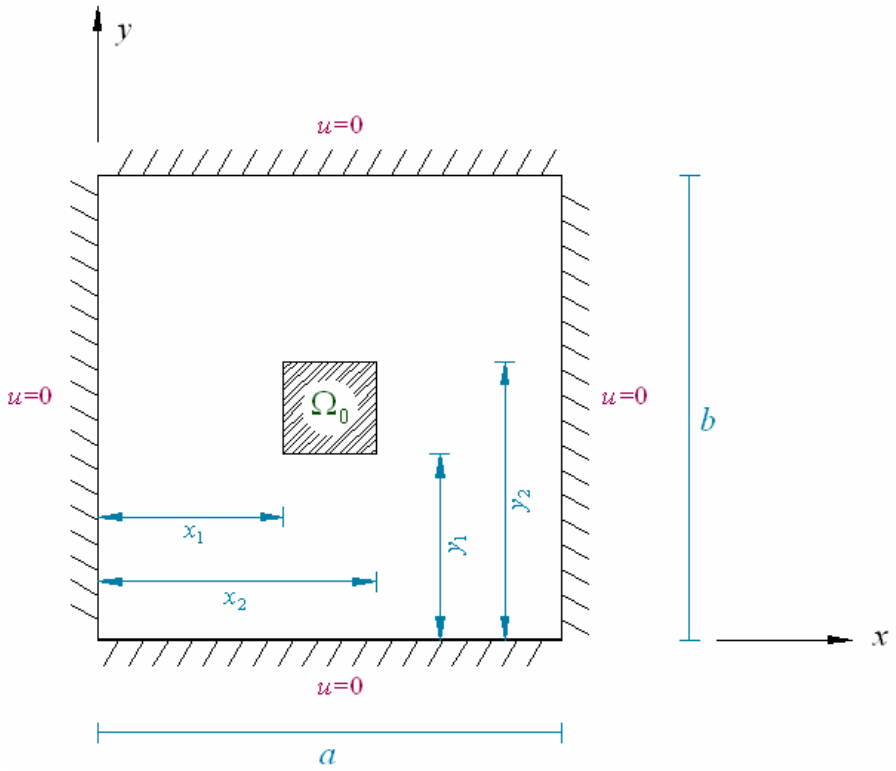

Figura 5.33: Esquema da geometria e condições de contorno da membrana homogênea.

Os valores adotados para os parâmetros geométricos da figura 5.33 e de condição inicial são

$$x_1 = 2.0 \qquad x_2 = 3.0 \qquad y_1 = 2.0 \qquad y_2 = 3.0$$

$$a = 5.0 \qquad b = 5.0 \qquad \overline{v}_0 = c = 10.0$$

Com respeito ao MEC, a membrana foi discretizada considerando 44 nós e 40 elementos de contorno, tal como se exibe na figura 5.34. O passo de tempo Δt foi escolhido de tal forma a se obter $\beta = 0.6$ e $\beta = 0.2$ na equação (5.1). Os resultados para o potencial *u* no ponto A e o fluxo *p* no ponto B são apresentados nas figuras 5.35-5.36 e 5.37-5.38, respectivamente, para funções de interpolação temporal constante e linear (com $\theta = 1.4$) para *p*.

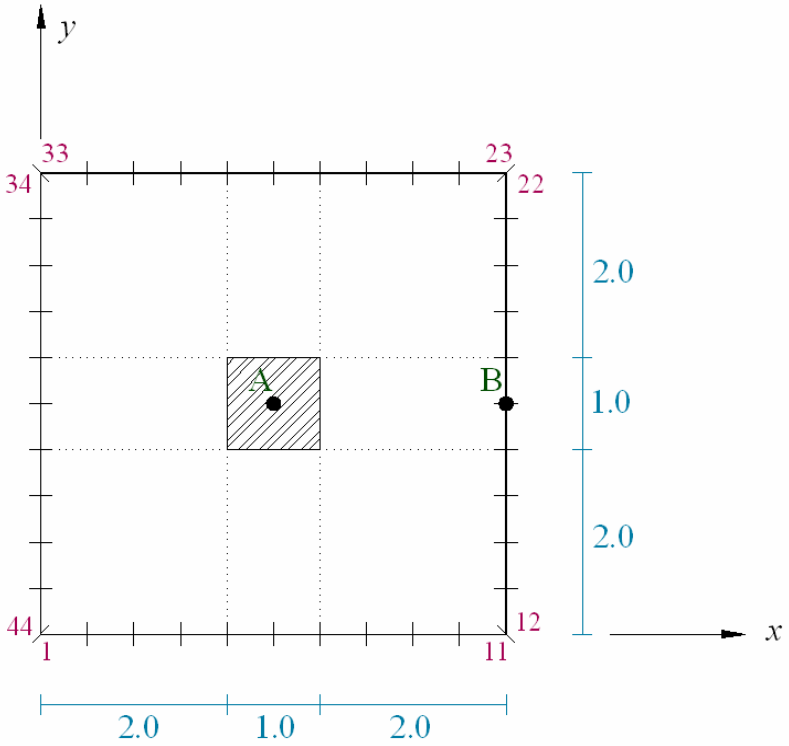

Figura 5.34: Esquema de pontos para impressão de resultados e discretização da membrana em elementos de contorno.

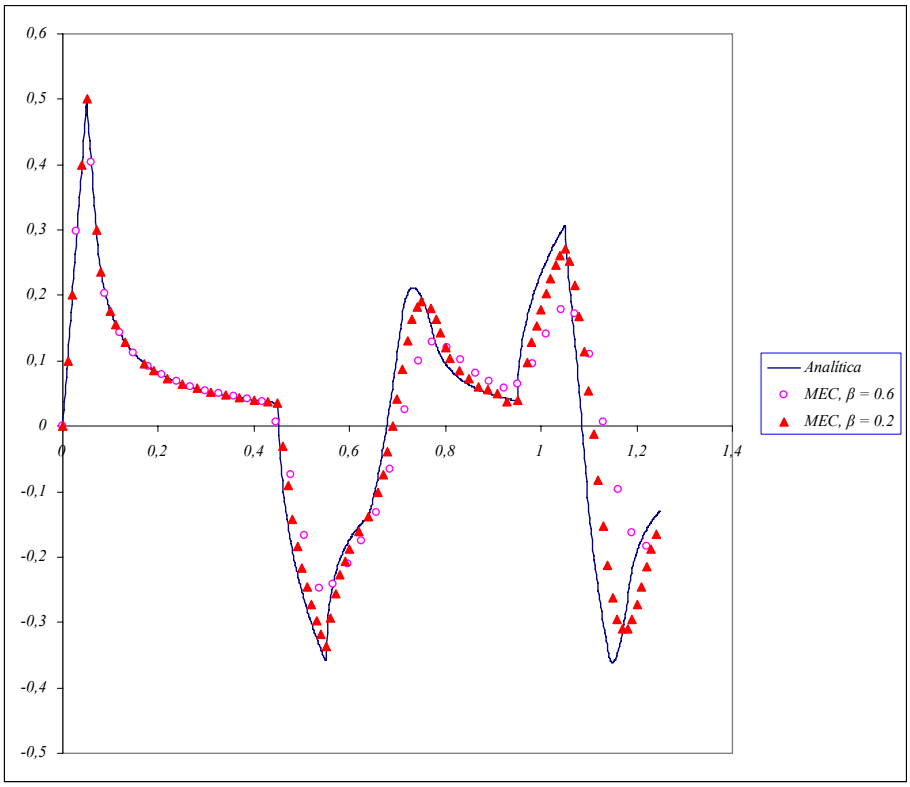

Figura 5.35: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana, considerando função θ^m constante.

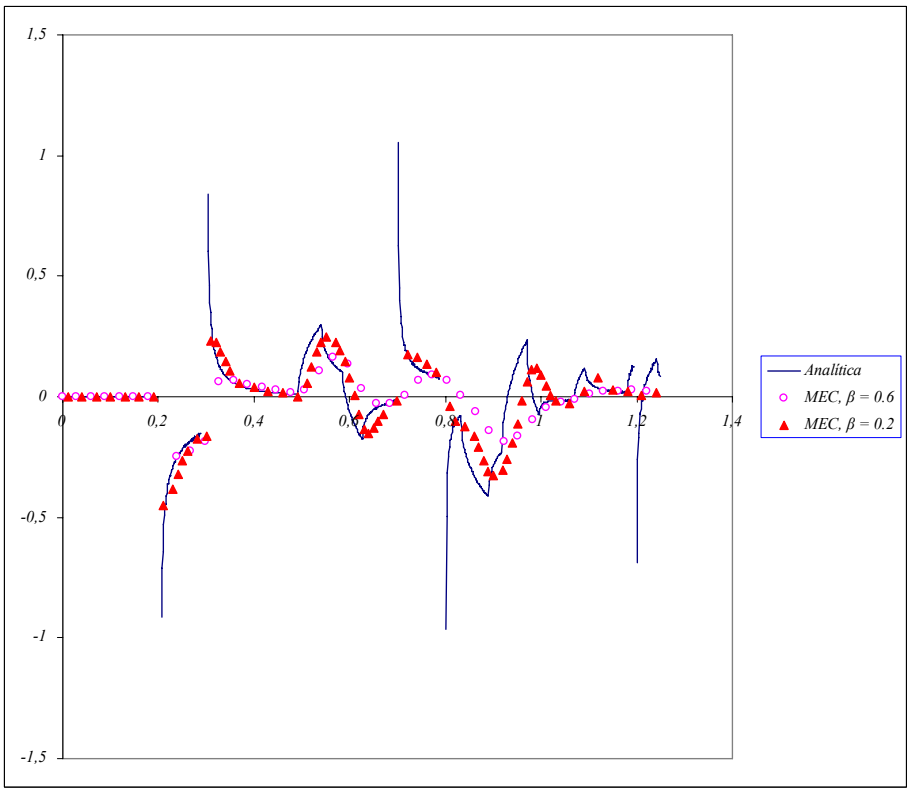

Figura 5.36: Valor do fluxo *p* para o ponto B da membrana, considerando função θ^m constante.

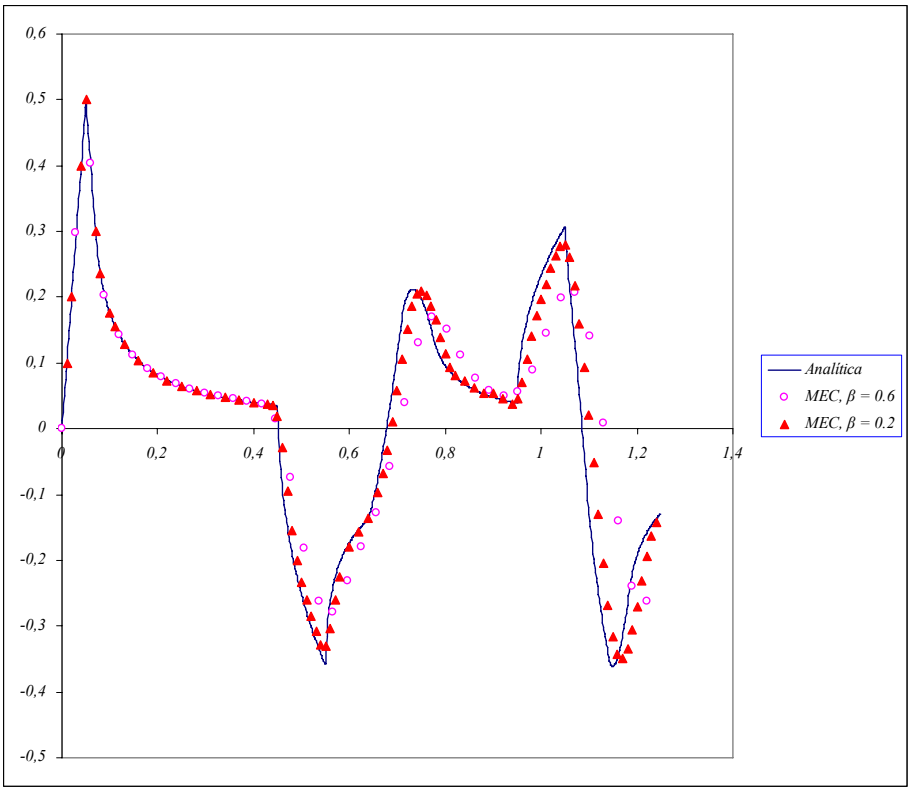

Figura 5.37: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana,

considerando função θ^m linear.

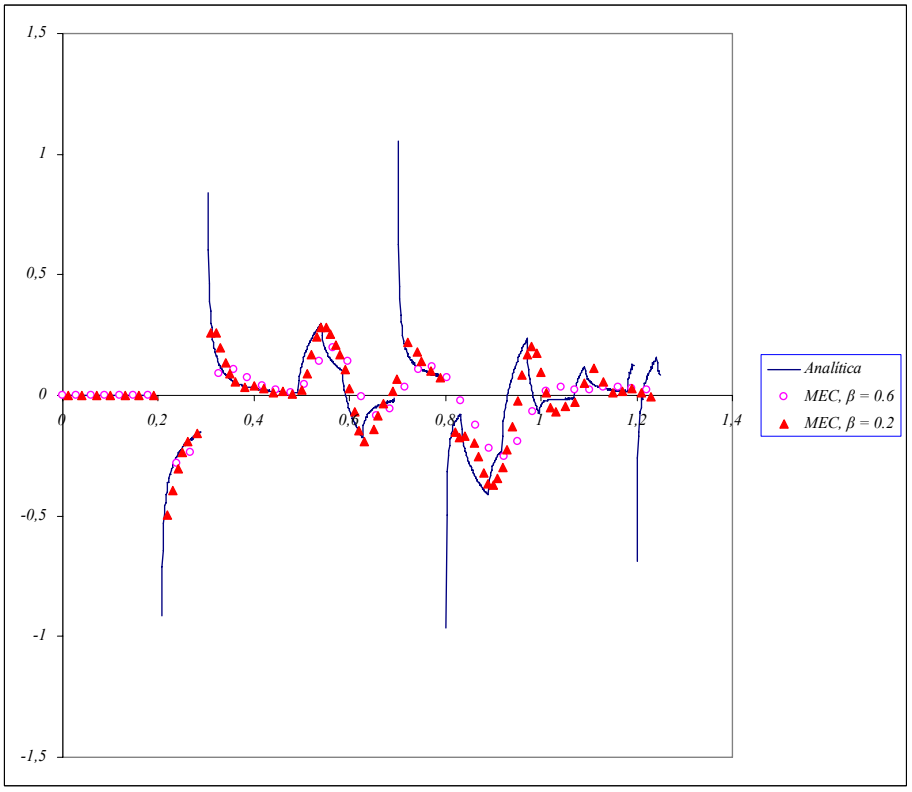

Figura 5.38: Valor do fluxo *p* para o ponto B da membrana,

considerando função θ^m linear.

Nas soluções obtidas pelo MEC, os resultados para $\beta = 0.2$ atingem melhor acurácia do que aqueles considerando $\beta = 0.6$.

Com o objetivo de resolver o exemplo da membrana mediante o MEF, considerando os métodos *ExGA*, foi usado o esquema de discretização que é exposto na figura 5.39. As condições iniciais de velocidade são prescritas na zona central.

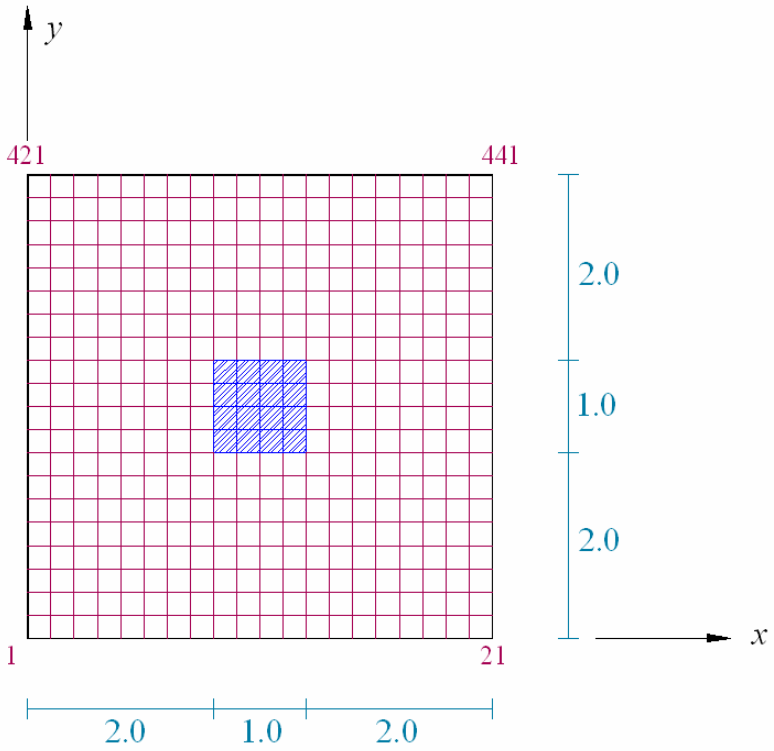

Figura 5.39: Esquema de discretização da membrana
para a resolução pelo MEF usando *ExGA*.

Os resultados para o potencial *u* no ponto A, seguindo o esquema da figura 5.34, são apresentados para o MEF *ExGA Runge-Kutta* e o MEF *ExGAH diferenças centrais*, respectivamente, nas figuras 5.40 e 5.41, considerando $\beta = 0.2$ e a utilização de 4 subintervalos para o cálculo das *matrizes de Green*, em relação à solução analítica e em relação ao método de *Newmark* considerando a *regra do trapézio*.

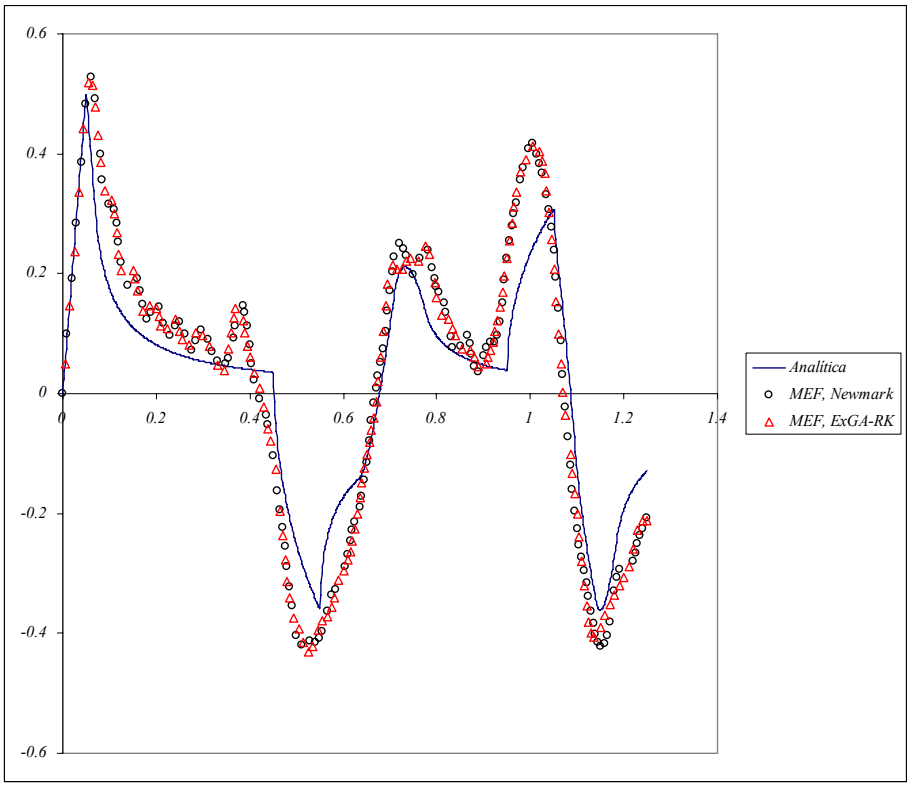

Figura 5.40: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana, considerando o MEF *ExGA Runge-Kutta*.

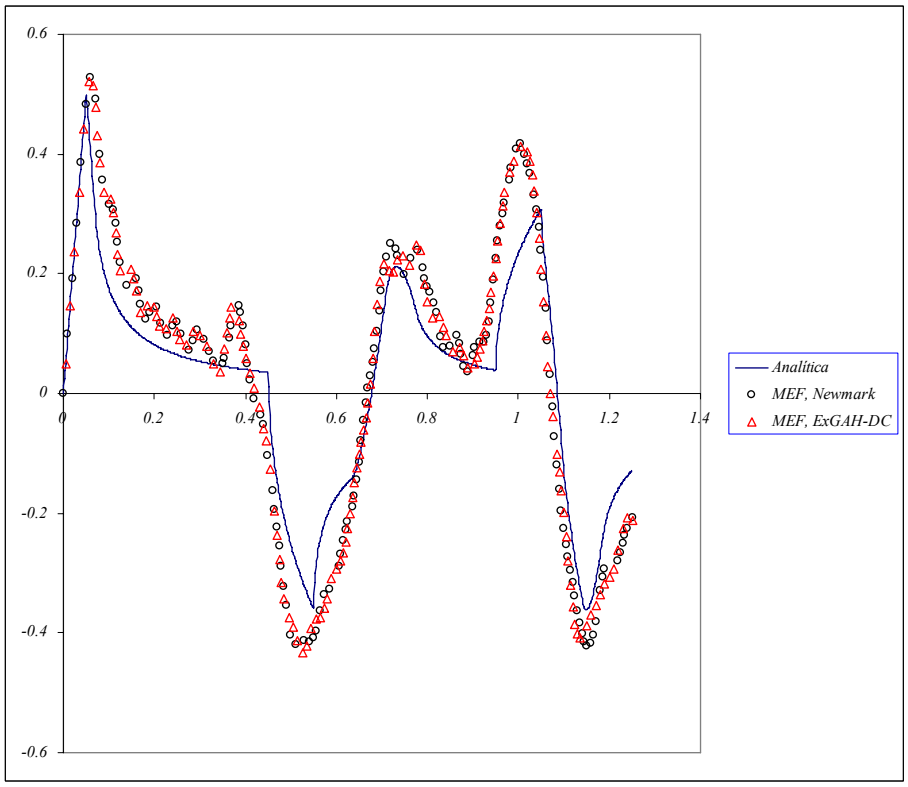

Figura 5.41: Valor do potencial *u* para o ponto A da membrana, considerando o MEF *ExGAH diferenças centrais*.

Como se observa, os resultados não atingem boa acurácia, mas a correlação entre os resultados para *ExGA* e o método de *Newmark*, em ambos os casos, sugere efetuar uma discretização espacial mais refinada.

6

Conclusões

6.1. Considerações e conclusões a partir do trabalho

No presente trabalho foi desenvolvida a formulação matemática dos métodos dos elementos de contorno e dos elementos finitos, aplicando os métodos *ExGA* com a finalidade de calcular a *função de Green* a ser usada no avanço do tempo, aplicada à equação escalar da onda.

No MEC foi incluído o método θ linear, o cálculo para as contribuições aos termos das matrizes *G* e *H*, além das fontes, as condições iniciais, e as correspondentes derivadas com o objetivo de calcular as derivadas do potencial em pontos internos. A inclusão do método θ, na formulação do método dos elementos de contorno, permitiu obter resultados estáveis no caso de escolher função de interpolação linear para representar a variação no tempo para o potencial *u* e para o fluxo *p*.

Em relação ao MEF, as funções de *Green* e *degrau* foram obtidas explicitamente, para ser posteriormente usadas na marcha no tempo. Os métodos de *Green* usados foram o *ExGA Runge-Kutta* e o *ExGAH diferenças centrais*. As matrizes $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$ que incluem as funções de *Green* e *degrau*, respectivamente, devem ser calculadas somente uma vez, devido a uma relação recursiva entre os valores $u(t)$ e $u(t+\Delta t)$, estabelecida por intermédio de $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$, avaliadas no instante Δt. Em relação ao valor crítico do passo de tempo Δt_{cr} para ambos os métodos, o *ExGAH diferenças centrais* permite escolher valores maiores para o Δt, comparado com o método *ExGA Runge-Kutta*. No entanto, a comparação com os métodos implícitos, os métodos explícitos se caracterizam por não acumular erros numéricos excessivos ao longo da marcha no tempo por ter escolhido um Δt grande.

Um parâmetro importante na escolha do passo de tempo, em relação ao tamanho de elemento na discretização, é a relação adimensional β. A escolha deste parâmetro depende do exemplo a ser resolvido, e no caso da barra o valor $\beta = 0.6$ deu bons resultados. No entanto, no exemplo da membrana resolvida pelo MEC não se obteve bons resultados após adotar $\beta = 0.6$, principalmente para o cálculo do fluxo *p* no ponto B do contorno. O valor $\beta = 0.2$ deu melhores resultados. O anterior reafirma a idéia de

desenvolver sempre várias análises para obter a melhor solução numérica de um determinado problema, devido a que cada exemplo apresenta diferentes particularidades que fazem que as considerações válidas para um não sejam para outros casos.

Nos MEF *ExGA* que foram desenvolvidos nas análises, o parâmetro que mostra ter maior influência na estabilidade dos resultados é o passo de tempo Δt, tendo que ser menor que o valor crítico de acordo com o método a utilizar. Assim, escolhendo um Δt pequeno o suficiente, as funções de *Green* e *degrau* podem ser calculadas em forma mais acurada e os resultados na marcha do tempo também o serão. Porém, no MEC a instabilidade se produz no caso de escolher função de interpolação temporal linear para representar a variação do fluxo *p*, principalmente nos casos onde se prescrevem forças de superfície no contorno (fluxo p) com descontinuidade no tempo. Para tais fins foi apresentado o método θ linear, no qual se poderia obter um valor ótimo de θ que garanta a devida estabilidade dos resultados sem perder precisão. O valor usado no presente trabalho foi $\theta = 1.4$ para tais casos.

Outro fato importante, para garantir a acurácia e estabilidade dos resultados mediante os MEF *ExGA*, consiste na utilização de subintervalos para o cálculo das matrizes que contêm as funções de *Green*. A escolha de um maior número de subintervalos gera funções de *Green* mais acuradas e, em conseqüência, melhores resultados na marcha no tempo. No trabalho foi utilizado um total de $n = 4$ subintervalos nas análises, o qual resultou ser suficiente para obter bons resultados nos exemplos apresentados.

O esquema de acoplamento iterativo proposto no capítulo 4 considera, além das regiões tratadas pelo MEF e pelo MEF, uma zona discretizada pelos dois métodos, o MEC e o MEF *ExGA*, não existindo a necessidade de prescrever condições essenciais (de *Dirichlet*) em algum lugar do contorno externo. Um exemplo de tais problemas seria analisar uma estrutura sobre um meio infinito, onde a estrutura pode ser discretizada por algum dos MEF *ExGA* e o meio infinito pelo MEC. As condições prescritas no contorno do meio infinito são geralmente condições de tipo *Neumann*, enquanto que na estrutura normalmente também são prescritas tais condições. Nesse caso o método que poderia ser usado é o esquema de acoplamento proposto, o qual supõe um valor inicial para as

condições de *Dirichlet* na interface e os mesmos são analisados no teste de convergência, sem necessidade de prescrever em algum instante do processo os valores de condição de *Dirichlet* no contorno externo.

6.2. Sugestões para futuras pesquisas

A utilização de sub-malhas para calcular as funções de *Green* e *degrau* localmente [17] teria, sem dúvida, contribuído a uma maior economia no tempo de execução dos programas, levando à utilização de uma sub-malha menor para Δt menores.

A implementação do esquema de acoplamento na parte dos exemplos teria dado ao trabalho uma especial conotação, ampliando a gama de problemas a serem expostos.

A formulação do MEC e dos MEF *ExGA* aplicada a problemas de elasto-dinâmica, bem como o método de acoplamento iterativo MEC-MEF *ExGA* aplicado aos mencionados problemas, constituem um importante campo de pesquisa, incluindo não linearidade física ou geométrica.

7

Referências bibliográficas

[1] MANSUR, W.J., *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*, Ph.D. dissertation, University of Southampton, Southampton, England, 1983.

[2] DOMINGUEZ, Z., *Boundary elements in dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston, 1993.

[3] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., *Boundary element techniques – Theory and applications in engineering*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983.

[4] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., *The finite element method set*, 6 ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.

[5] BATHE, K.J., *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[6] HUGHES, T.J.R., *The finite element method*, Dover Publications INC, New York, 1987.

[7] YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., GONG, L., "A linear θ method applied to 2D time-domain BEM", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 14, n. 12, pp. 1171-1179, Dec. 1998.

[8] MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., SIQUEIRA, E.F.N., "Time discontinuous linear traction approximation in time-domain BEM scalar wave propagation analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 42, n. 4, pp. 667-683, Jun. 1998.

[9] CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., "Time discontinuous linear traction approximation in time-domain BEM: 2D elastodynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 49, n. 6, pp. 833-848, Oct. 2000.

[10] NEWMARK, N.M., "A method of computation for structural dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 85 EM3, pp. 67-94, 1959.

[11] ZIENKIEWICZ, O.C., "A new look at the Newmark, Houbolt, and other time stepping formulas. A weighted residual approach", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, n. 4, pp. 413-418, Dec. 1977.

[12] WROBEL, L.C., *Potential and viscous flow problems using the boundary element method*, Ph.D. dissertation, University of Southampton, Southampton, England, 1981.

[13] CARRER, J.A.M., *Técnicas implícitas para análise elastoplástica estática e dinâmica com o método dos elementos de contorno*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.

[14] ZHONG, W.X., WILLIAMS, F.W., "A precise time step integration method", *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 208, pp. 427-430, 1994.

[15] FUNG, T.C., "A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamics problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, n. 24, pp. 4501-4527, Dec. 1997.

[16] SOARES, D., MANSUR, W.J., "A time domain FEM approach based on implicit Green's functions for non-linear dynamic analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 5, pp. 664-681, Feb. 2005.

[17] DORS, C., *Propagação de ondas elásticas utilizando funções de Green numéricas locais em modelos discretizados por elementos finitos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

[18] LOUREIRO, F.S., *Um Procedimento de Marcha no Tempo Baseado em Função de Green Calculada pelo Método dos Elementos Finitos*, projeto final, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.

[19] LOUREIRO, F.S., *Métodos de integração temporal baseados no cálculo numérico de funções de Green através do método dos elementos finitos*, Tese de M.Sc, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

[20] MANSUR, W.J., LOUREIRO, F.S., SOARES, D., DORS, C., "Explicit time-domain approaches based on numerical Green's functions computed by finite differences - The ExGA family", *Journal of Computational Physics*, v. 227, pp. 851-870, Nov. 2007.

[21] GRAFF, K.F., *Wave motion in elastic solids*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.

[22] SOARES, D., MANSUR, W.J., "An efficient time/frequency domain algorithm for modal analysis of non-linear models discretized by the FEM", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 33-34, pp. 3731-3745, Aug. 2003.

[23] BREBBIA, C.A., GEORGIOU, P., "Combination of boundary and finite elements in elastostatics", *Applied Mathematical Modeling*, v. 3, pp. 212-220, 1979.

[24] LI HONG-BAO, HAN GUO-MING, MANG, H.A., TORZICKY, P., "A new method for the coupling of finite element and boundary element discretized sub-domains of elastic bodies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 54, n. 2, pp. 161-185, Feb. 1986.

[25] LEUNG, K.L., ZAVAREH, P.B., BESKOS, D.E., "2D elastostatic analysis by a symmetric BEM/FEM scheme", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 15, n. 1, pp. 67-78, 1995.

[26] VON ESTORFF, O., PRABUCKI, M.J., "Dynamic response in the time domain by coupled boundary and finite elements", *Computational Mechanics*, v. 6, n. 1, pp. 35-46, Jan. 1990.

[27] VON ESTORFF, O., ANTES, H., "On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analysis in the time domain", *International Journal of Numerical Methods*, v. 31, pp. 1151-1168, 1991.

[28] PAVLATOS, G.D., BESKOS, D.E., "Dynamic elastoplastic analysis by BEM/FEM", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 14, n. 1, pp. 51-63, 1994.

[29] YAZDCHI, M., KHALILI, N., VALLIAPPAN, S., "Non-linear seismic behavior of concrete gravity dams using coupled finite element-boundary element technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 44, n. 1, pp. 101-130, Jan. 1999.

[30] GUOYOU, Y., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., LIE, S.T., "A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to two-dimensional elastodynamics", *Computers and Structures*, v. 79, n. 8, pp. 811-823, Mar. 2001.

[31] LIN, C.C., LAWTON, E.C., CALIENDO, J.A., ANDERSON, L.R., "An iterative finite element-boundary element algorithm", *Computers and Structures*, v. 59, n. 5, pp. 899-909, Jun. 1996.

[32] ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., TANAKA, M., "Iterative coupling of BEM and FEM for the solution of elasto-plastic fracture mechanics problems", *Transactions of JASCOME*, Paper No.01101913, 2001.

[33] KAMIYA, N., IWASE, H., "BEM and FEM combination parallel analysis using conjugate gradient and condensation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 20, n. 4, pp. 319-326, Oct. 1997.

[34] ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., "An Overlapping domain decomposition approach for coupling the finite and boundary element methods", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, n. 5, pp. 391-398, Mar. 2000.

[35] ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., EL-GEBEILY, M., "Iterative coupling of BE and FE methods in elastostatics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 25, n. 8, pp. 685-695, Apr. 2001.

[36] SOARES, D., VON ESTORFF, O., MANSUR, W.J., "Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses", *Computational Mechanics*, v. 34, n. 1, pp. 67-73, Jun. 2004.

[37] SOARES, D., *Análise Dinâmica de Sistemas não Lineares com Acoplamento do Tipo Solo-Fluido-Estrutura por Intermédio do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Elementos de Contorno*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.

Apêndices

Apêndice A

Integrais dos coeficientes das matrizes *G* e *H* do MEC

A.1. Contribuições aos coeficientes das matrizes *G* e *H* (função de interpolação linear)

- Se $t_m < t_r = t_n - r/c$,

$$\left(D_{ij}^{nm}\right)_I = \frac{1}{r}\left\{\frac{\left[c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)\left(t_n - t_m\right) - r^2\right]}{\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}\right\}$$

$$- \frac{c\left(t_m - t_{m-1}\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} \tag{A.1}$$

$$\left(D_{ij}^{nm}\right)_F = \frac{1}{r}\left\{\frac{\left[c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)\left(t_n - t_m\right) - r^2\right]}{\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2}\right\}$$

$$+ \frac{c\left(t_{m+1} - t_m\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} \tag{A.2}$$

$$\left(E_{ij}^{nm}\right)_I = -c\left(t_n - t_{m-1}\right)\ ln\left(\frac{c\left(t_n - t_m\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}}{c\left(t_n - t_{m-1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}\right)$$

$$+\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2} - \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2} \tag{A.3}$$

$$\left(E_{ij}^{nm}\right)_F = c\left(t_n - t_{m+1}\right)\ ln\left(\frac{c\left(t_n - t_{m+1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2}}{c\left(t_n - t_m\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}}\right)$$

$$-\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2} + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2} \tag{A.4}$$

- Se $t_{m-1} < t_r < t_m$,

$$\left(D_{ij}^{nm}\right)_I = -\frac{1}{r}\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2} \tag{A.5}$$

$$\left(D_{ij}^{nm}\right)_F = \frac{\left[c\left(t_n - t_{m+1}\right) + r\right]}{r}\frac{\sqrt{c\left(t_n - t_m\right) - r}}{\sqrt{c\left(t_n - t_m\right) + r}} \tag{A.6}$$

$$\left(E_{ij}^{nm}\right)_I = -c\left(t_n - t_{m-1}\right)\ ln\left(\frac{r}{c\left(t_n - t_{m-1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}\right) - \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2} \tag{A.7}$$

$$\left(E_{ij}^{nm}\right)_F = c\left(t_n - t_{m+1}\right)\ ln\left(\frac{r}{c\left(t_n - t_m\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2} \tag{A.8}$$

A.2. Contribuições aos coeficientes das matrizes *G* (função de interpolação constante)

- Se $t_m < t_r = t_n - r/c$,

$$\left(L_{ij}^{nm}\right) = -c\left(t_m - t_{m-1}\right)\ ln\left(\frac{c\left(t_n - t_m\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}}{c\left(t_n - t_{m-1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}\right) \tag{A.9}$$

- Se $t_{m-1} < t_r < t_m$,

$$\left(L_{ij}^{nm}\right) = -c\left(t_m - t_{m-1}\right)\ ln\left(\frac{r}{c\left(t_n - t_{m-1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}\right) \tag{A.10}$$

A.3. Derivadas das contribuições aos coeficientes das matrizes *G* e *H* (função de interpolação linear)

- Se $t_m < t_r = t_n - r/c$,

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial r} = \frac{\left[c\left(t_n - t_{m-1}\right) + r\right]}{\left[c\left(t_n - t_m\right) + r\right]\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \frac{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)\left(t_n - t_m\right) + r^2}{r^2\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} + \frac{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2}{r^2\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}} \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial r} = \frac{\left[c\left(t_n - t_{m+1}\right) + r\right]}{\left[c\left(t_n - t_m\right) + r\right]\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} + \frac{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2}{r^2\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2}} - \frac{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)\left(t_n - t_m\right) + r^2}{r^2\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial r} = \frac{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)\left(t_n - t_m\right) - r^2}{r\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \frac{\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}{r} \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial r} = \frac{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)\left(t_n - t_m\right) - r^2}{r\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \frac{\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2}}{r} \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial t_n} = \frac{c^2\left[r\left(t_n - t_{m-1}\right) + c\left(t_n - t_m\right)^2\right]}{r\left[c\left(t_n - t_m\right) + r\right]\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \frac{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)}{r\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}} \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial t_n} = \frac{c^2\left[r\left(t_n - t_{m+1}\right) + c\left(t_n - t_m\right)^2\right]}{r\left[c\left(t_n - t_m\right) + r\right]\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - \frac{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)}{r\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2}} \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial t_n} = -\frac{c^2\left(t_m - t_{m-1}\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} - c\ ln\left(\frac{c\left(t_n - t_m\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}}{c\left(t_n - t_{m-1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}\right) \quad \text{(A.17)}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial t_n} = \frac{c^2\left(t_{m+1} - t_m\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} + c\ ln\left(\frac{c\left(t_n - t_{m+1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)^2 - r^2}}{c\left(t_n - t_m\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}}\right) \quad \text{(A.18)}$$

- Se $t_{m-1} < t_r < t_m$,

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial r} = \frac{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2}{r^2\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}} \quad \text{(A.19)}$$

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial r} = -\frac{c^2\left(t_n - t_m\right)\left(t_n - t_{m+1}\right)\left[c\left(t_n - t_m\right) + r\right] + cr^2\left(t_{m+1} - t_m\right)}{r^2\left[c\left(t_n - t_m\right) - r\right]^{-1}\sqrt{\left[c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2\right]^3}} \quad \text{(A.20)}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial r} = -\frac{\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}{r} \quad \text{(A.21)}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial r} = \frac{c^2\left(t_n - t_{m+1}\right)\left(t_n - t_m\right) - r^2}{r\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} \quad \text{(A.22)}$$

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial t_n} = -\frac{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)}{r\sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}} \quad \text{(A.23)}$$

$$\frac{\partial\left(D_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial t_n} = \frac{c^2\left[c\left(t_n - t_m\right)^2 + r\left(t_n - t_{m+1}\right)\right]}{r\left[c\left(t_n - t_m\right) + r\right]\sqrt{c^2\left(t_n - t_m\right)^2 - r^2}} \quad \text{(A.24)}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_I}{\partial t_n} = -c\ ln\left(\frac{r}{c\left(t_n - t_{m-1}\right) + \sqrt{c^2\left(t_n - t_{m-1}\right)^2 - r^2}}\right) \quad \text{(A.25)}$$

$$\frac{\partial\left(E_{ij}^{nm}\right)_F}{\partial t_n}=\frac{c^2\left(2\cdot t_n-t_{m+1}-t_m\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n-t_m\right)^2-r^2}}+c\ \ln\left(\frac{r}{c\left(t_n-t_m\right)+\sqrt{c^2\left(t_n-t_m\right)^2-r^2}}\right) \tag{A.26}$$

A.4. Derivadas das contribuições aos coeficientes das matrizes *G* (função de interpolação constante)

- Se $t_m < t_r = t_n - r/c$,

$$\frac{\partial\left(L_{ij}^{nm}\right)}{\partial r}=\frac{c\left(t_m-t_{m-1}\right)}{r}\left\{\frac{c\left(t_n-t_m\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n-t_m\right)^2-r^2}}-\frac{c\left(t_n-t_{m-1}\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n-t_{m-1}\right)^2-r^2}}\right\} \tag{A.27}$$

$$\frac{\partial\left(L_{ij}^{nm}\right)}{\partial t_n}=-c^2\left(t_m-t_{m-1}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{c^2\left(t_n-t_m\right)^2-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{c^2\left(t_n-t_{m-1}\right)^2-r^2}}\right\} \tag{A.28}$$

- Se $t_{m-1} < t_r < t_m$,

$$\frac{\partial\left(L_{ij}^{nm}\right)}{\partial r}=-\frac{c^2\left(t_m-t_{m-1}\right)\left(t_n-t_{m-1}\right)}{r\sqrt{c^2\left(t_n-t_{m-1}\right)^2-r^2}} \tag{A.29}$$

$$\frac{\partial\left(L_{ij}^{nm}\right)}{\partial t_n}=\frac{c^2\left(t_m-t_{m-1}\right)}{\sqrt{c^2\left(t_n-t_{m-1}\right)^2-r^2}} \tag{A.30}$$

Apêndice B

Integrais das contribuições dos termos das condições iniciais no MEC

B.1. Expressões para $R_{li}^{\alpha n}$ e $T_{li}^{\alpha n}$

Definindo inicialmente as variáveis seguintes:

$$V_1 = \sqrt{c\left(t_n - t_0\right) - g_t^i\left(\theta\right)} \tag{B.1}$$

$$V_2 = \sqrt{c\left(t_n - t_0\right) + g_t^i\left(\theta\right)} \tag{B.2}$$

$$V_3 = arcsen\left(\frac{g_t^i\left(\theta\right)}{c\left(t_n - t_0\right)}\right) \tag{B.3}$$

Tem-se,

$$R_{li}^{\alpha n} = \frac{1}{c}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{2\ C_\alpha\left(c\left(t_n - t_0\right) - V_1\ V_2\right)\right\}\ d\theta$$

$$+\frac{1}{c}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v} D_\alpha\left(\theta\right)\left[-g_t^i\left(\theta\right)\ V_1\ V_2 + c^2\left(t_n - t_0\right)^2 V_3\right]\ d\theta \tag{B.4}$$

$$T_{li}^{\alpha n} = \sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{2\ C_\alpha\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)\right\}\ d\theta$$

$$+\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{2\ D_\alpha\left(\theta\right)\left(c\left(t_n - t_0\right)\left[V_3 + \frac{V_1}{V_2}\right] - V_1\ V_2\right)\right\}\ d\theta \tag{B.5}$$

B.2. Expressões para as derivadas do $R_{li}^{\alpha n}$ e do $T_{li}^{\alpha n}$

Tendo em consideração (2.50) e (2.51), tem-se

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{y-y_i}{x-x_i}\right)\right\}=\left(\frac{1}{1+\left[\left(y-y_i\right)/\left(x-x_i\right)\right]^2}\right)\left(\frac{+\left(y-y_i\right)}{\left(x-x_i\right)^2}\right)$$

$$=\frac{y-y_i}{\left(x-x_i\right)^2+\left(y-y_i\right)^2}=\frac{sen\left(\theta\right)}{r_t^i\left(\theta\right)} \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{y-y_i}{x-x_i}\right)\right\}=\left(\frac{1}{1+\left[\left(y-y_i\right)/\left(x-x_i\right)\right]^2}\right)\left(\frac{-1}{\left(x-x_i\right)}\right)$$

$$=\frac{-\left(x-x_i\right)}{\left(x-x_i\right)^2+\left(y-y_i\right)^2}=-\frac{\cos\left(\theta\right)}{r_t^i\left(\theta\right)} \tag{B.7}$$

Logo, as expressões (2.61), (2.62), (2.63) e (2.64) resultam

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial x_i}=\sum_{t=1}^{3}\left\{\int_{\theta_u}^{\theta_v}\frac{\partial\left\{I_R\left(\theta,x_i,y_i\right)\right\}}{\partial x_i}\,d\theta-I_R\left(\theta_u,x_i,y_i\right)\frac{sen\left(\theta_u\right)}{r_t^i\left(\theta_u\right)}\right.$$

$$\left.+I_R\left(\theta_v,x_i,y_i\right)\frac{sen\left(\theta_v\right)}{r_t^i\left(\theta_v\right)}\right\} \tag{B.8}$$

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial y_i}=\sum_{t=1}^{3}\left\{\int_{\theta_u}^{\theta_v}\frac{\partial\left\{I_R\left(\theta,x_i,y_i\right)\right\}}{\partial y_i}\,d\theta+I_R\left(\theta_u,x_i,y_i\right)\frac{\cos\left(\theta_u\right)}{r_t^i\left(\theta_u\right)}\right.$$

$$\left.-I_R\left(\theta_v,x_i,y_i\right)\frac{\cos\left(\theta_v\right)}{r_t^i\left(\theta_v\right)}\right\} \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial x_i}=\sum_{t=1}^{3}\left\{\int_{\theta_u}^{\theta_v}\frac{\partial\left\{I_T\left(\theta,x_i,y_i\right)\right\}}{\partial x_i}\,d\theta-I_T\left(\theta_u,x_i,y_i\right)\frac{sen\left(\theta_u\right)}{r_t^i\left(\theta_u\right)}\right.$$

$$\left.+I_T\left(\theta_v,x_i,y_i\right)\frac{sen\left(\theta_v\right)}{r_t^i\left(\theta_v\right)}\right\} \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial y_i} = \sum_{t=1}^{3} \left\{ \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial y_i} \, d\theta + I_T\left(\theta_u, x_i, y_i\right) \frac{\cos\left(\theta_u\right)}{r_t^i\left(\theta_u\right)} \right.$$

$$\left. - I_T\left(\theta_v, x_i, y_i\right) \frac{\cos\left(\theta_v\right)}{r_t^i\left(\theta_v\right)} \right\} \tag{B.11}$$

Enquanto isso, fazendo

$$\left(R_{li}^{\alpha n}\right)_{\int x} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial x_i} \, d\theta = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial\left(I_R\right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \, d\theta \tag{B.12}$$

$$\left(R_{li}^{\alpha n}\right)_{\int y} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_R\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial y_i} \, d\theta = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial\left(I_R\right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \, d\theta \tag{B.13}$$

$$\left(T_{li}^{\alpha n}\right)_{\int x} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial x_i} \, d\theta = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial\left(I_T\right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \, d\theta \tag{B.14}$$

$$\left(T_{li}^{\alpha n}\right)_{\int y} = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial \left\{ I_T\left(\theta, x_i, y_i\right) \right\}}{\partial y_i} \, d\theta = \sum_{t=1}^{3} \int_{\theta_u}^{\theta_v} \frac{\partial\left(I_T\right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \, d\theta \tag{B.15}$$

Tem-se,

$$\frac{\partial\left(I_R\right)}{\partial \theta} = + \frac{2}{c} \frac{\partial g_t^i\left(\theta\right)}{\partial \theta} \frac{g_t^i\left(\theta\right)}{V_1 \cdot V_2} \left\{ C_\alpha + D_\alpha\left(\theta\right) \, g_t^i\left(\theta\right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{c} \, \frac{1}{2A} \left\{ -b_\alpha \, sen\left(\theta\right) + a_\alpha \cos\left(\theta\right) \right\}$$

$$\left\{ -g_t^i\left(\theta\right) \, V_1 \, V_2 + c^2 \left(t_n - t_i\right)^2 V_3 \right\} \tag{B.16}$$

$$\frac{\partial\left(I_T\right)}{\partial \theta} = 2 \frac{\partial g_t^i\left(\theta\right)}{\partial \theta} \left\{ \frac{c\left(t_n - t_i\right)\left(C_\alpha + D_\alpha\left(\theta\right)\left[g_t^i\left(\theta\right) \right] \right)}{V_1 \, \left(V_2\right)^3} + \frac{D_\alpha\left(\theta\right)\left[g_t^i\left(\theta\right) \right]}{V_1 \, V_2} \right\}$$

$$+ \left[\frac{1}{A} \left\{ -b_\alpha \, sen\left(\theta\right) + a_\alpha \cos\left(\theta\right) \right\} \right] \left(c\left(t_n - t_i\right) \left[V_3 + \frac{V_1}{V_2} \right] - V_1 \, V_2 \right) \tag{B.17}$$

Desenvolvendo os termos (2.67) e (2.68);

$$\frac{\partial R_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = \frac{2}{c}\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{\frac{\partial g_t^i(\theta)}{\partial t_n}\left[g_t^i(\theta)\left(\frac{C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]}{V_1\ V_2}\right)\right]\right\} d\theta$$

$$+2\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{C_\alpha\left[1-\frac{c(t_n-t_i)}{V_1\ V_2}\right]+c(t_n-t_i)\ D_\alpha(\theta)\left[V_3-\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ V_2}\right]\right\} \quad \text{(B.18)}$$

$$\frac{\partial T_{li}^{\alpha n}}{\partial t_n} = 2\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\frac{\partial g_t^i(\theta)}{\partial t_n}\left\{\frac{c(t_n-t_i)}{V_1\ (V_2)^3}\left(C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]\right)\right.$$

$$\left.+D_\alpha(\theta)\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ V_2}\right\} d\theta$$

$$+2c\sum_{t=1}^{3}\int_{\theta_u}^{\theta_v}\left\{D_\alpha(\theta)\ V_3-\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ (V_2)^3}\left(C_\alpha + D_\alpha(\theta)\left[g_t^i(\theta)\right]\right)\right.$$

$$\left.-D_\alpha(\theta)\frac{g_t^i(\theta)}{V_1\ V_2}\right\} d\theta \quad \text{(B.19)}$$

A integração numérica dos termos assinalados nas seções B.1. e B.2., pode facilmente ser feita usando quadratura de *Gauss* mediante a variável implícita ξ;

$$\frac{\theta_v-\theta_u}{2} = \frac{\theta-\theta_u}{1+\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\theta_v+\theta_u}{2} + \xi\frac{\theta_v-\theta_u}{2} \quad \text{(B.20)}$$

Apêndice C

Detalhes da obtenção de algumas equações do MEF

C.1. *Formulação fraca* de resíduos ponderados

A *forma original* de resíduos ponderados, equação (3.1), é

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\gamma\right)w\,d\Omega = \int_{\Gamma_2}\left(p-\overline{p}\right)w\,d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left(u-\overline{u}\right)\frac{\partial w}{\partial n}\,d\Gamma \qquad \text{(C.1)}$$

a qual ao ser integrada por partes uma vez em relação à variável *u*, obtém-se a seguinte *forma fraca* de resíduos ponderados,

$$\int_{\Omega}\left(\nabla u\bullet\nabla w\right)\,d\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\gamma\right)w\,d\Omega = \int_{\Gamma_2}\left(\overline{p}\;w\right)\,d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\left(p\;w\right)\,d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\left(u-\overline{u}\right)\frac{\partial w}{\partial n}\,d\Gamma \qquad \text{(C.2)}$$

Os valores $\overline{u}$ e $\overline{p}$ na equação mostrada acima correspondem, respectivamente, aos valores de condição prescrita, de *u* em Γ_1 e de *p* em Γ_2.

Apesar de tratar-se de um método de discretização do domínio, o método dos elementos finitos procura preestabelecer que alguns resíduos no contorno sejam identicamente nulos. Fazendo na equação (C.2), por exemplo, o seguinte:

$$u=\overline{u} \qquad \text{em } \Gamma_1 \qquad \text{(C.3)}$$

$$w=0 \qquad \text{em } \Gamma_1 \qquad \text{(C.4)}$$

Com tais modificações, a equação (C.2) transforma-se em

$$\int_{\Omega} \left(\nabla u \bullet \nabla w\right)\, d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w\right) d\Omega = \int_{\Gamma_2} \left(\overline{p}\; w\right)\, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\gamma\; w\right)\, d\Omega \qquad \text{(C.5)}$$

C.2. Discretização espacial

Na solução numérica de (C.5), usualmente adotam-se aproximações para a variável *u* e para a função de peso *w* dividindo, por exemplo, o domínio em K nós e o tempo de análise em *n* instantes,

$$u\left(Q,t\right) = \sum_{j=1}^{\mathrm{K}} \left\{ \sum_{m=1}^{n} \varphi_j\left(Q\right)\; \phi^m\left(t\right)\; u_j^m \right\} \qquad \text{(C.6)}$$

$$w\left(Q\right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \beta_k\left(Q\right)\; w_k \qquad \text{(C.7)}$$

Logo, adotam-se as mesmas funções de interpolação para a variável *u* e a função de peso *w* (método de *Galerkin*), ou seja,

$$\beta_j\left(Q\right) = \varphi_j\left(Q\right) \qquad \text{(C.8)}$$

Substituindo (C.6) e (C.7) na equação (C.5), e tendo em conta a igualdade anterior entre as funções de interpolação, a expressão resultante é

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{K}} \left(w_k \left\{ \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \left(u_k \int_{\Omega} \left(\nabla \varphi_k \bullet \nabla \varphi_j\right)\, d\Omega + \ddot{u}_k \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2}\;\varphi_k\;\varphi_j\right) d\Omega \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. = \int_{\Gamma_2} \left(\overline{p}\;\varphi_j\right)\, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\gamma\;\varphi_j\right)\, d\Omega \right\} \right) \qquad \text{(C.9)}$$

Expressando (C.9) para cada $j = 1, 2, \ldots \mathrm{K}$, gera-se o seguinte sistema de equações escrito em notação indicial,

$$\sum_{k=1}^{K} K_{jk}\ u_k + \sum_{k=1}^{K} M_{jk}\ \ddot{u}_k = F_j \tag{C.10}$$

no qual

$$K_{jk} = \int_{\Omega} \left(\nabla \varphi_k \bullet \nabla \varphi_j \right)\ d\Omega \tag{C.11}$$

$$M_{jk} = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \left(\varphi_k\ \varphi_j \right)\ d\Omega \tag{C.12}$$

$$F_j = \int_{\Gamma_2} \left(\overline{p}\ \varphi_j \right)\ d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\gamma\ \varphi_j \right)\ d\Omega \tag{C.13}$$

Escrevendo o sistema (C.10) e os termos (C.11), (C.12) e (C.13) em forma matricial, e estes últimos a nível de elemento, resulta

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \tag{C.14}$$

$$\left[K^e\right] = \int_{\Omega^e} \left([\nabla][N] \right)^T \left([\nabla][N] \right)\ d\Omega \tag{C.15}$$

$$\left[M^e\right] = \int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} [N]^T [N]\ d\Omega \tag{C.16}$$

$$\left\{F^e\right\} = \int_{\Gamma_2^e} [N]^T \{\overline{p}\}\ d\Gamma + \int_{\Omega^e} [N]^T \{\gamma\}\ d\Omega \tag{C.17}$$

Definindo u^e como a variável *u* restrita ao elemento *e*, e $\left\{U^e\right\}$ como o vetor dos valores da variável *u* referente aos *nen* nós do elemento *e* (*valores nodais* de *u*), tem-se

$$u^e = [N]\left\{U^e\right\} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{nen} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ \vdots \\ U_{nen}^e \end{Bmatrix} \tag{C.18}$$

A matriz do operador gradiente na equação (C.15), é definida por

$$\left[\nabla\right] = \left[\partial/\partial x \quad \partial/\partial y\right]^T \tag{C.19}$$

enquanto a *matriz de rigidez* pode ser apresentada conforme a seguir,

$$\left[K^e\right] = \int_\Omega \left[B\right]^T \left[B\right] \, d\Omega \tag{C.20}$$

onde

$$\left[B\right] = \left[\nabla\right]\left[N\right] = \begin{bmatrix} \partial\varphi_1/\partial x & \partial\varphi_2/\partial x & \ldots & \partial\varphi_{nen}/\partial x \\ \partial\varphi_1/\partial y & \partial\varphi_2/\partial y & \ldots & \partial\varphi_{nen}/\partial y \end{bmatrix} \tag{C.21}$$

C.3. Elemento quadrilátero isoparamétrico

No cálculo das matrizes do MEF, é usual adotar a conformação de *elementos isoparamétricos*. Isto quer dizer que no mapeamento do elemento finito, a sua geometria é definida pela interpolação de suas coordenadas nodais, usando o mesmo esquema de interpolação que foi adotado para definir o campo da incógnita *u*. Então, a nível de elemento,

$$\begin{aligned} x &= \left[N\right]\left\{x^e\right\} \\ y &= \left[N\right]\left\{y^e\right\} \end{aligned} \tag{C.22}$$

Também se pode escrever $\left[N\right]$ em termos de coordenadas naturais (ξ,η) usando, por exemplo, o sistema de referência para elemento quadrilátero mostrado na fig. C.1, cujas funções de interpolação φ_i, com $1 \le i \le 4$, são [4-6]

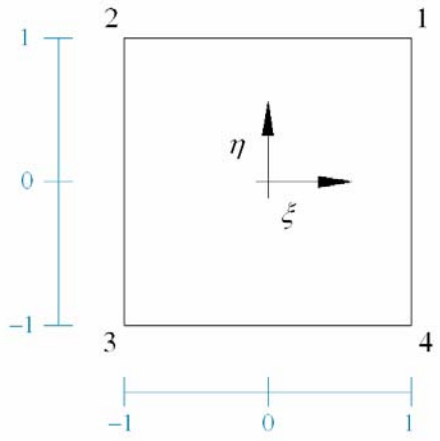

Figura C.1: Elemento quadrilátero isoparamétrico.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
\varphi_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
\varphi_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
\varphi_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{C.23}$$

A equação (C.21) requer a obtenção das derivadas de (C.23) em relação às coordenadas absolutas x e y, porém percebe-se claramente que aquelas quatro expressões são funções das coordenadas naturais. No entanto, podem ser obtidas aquelas derivadas usando a regra da cadeia, matricialmente, da seguinte maneira,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{C.24}$$

onde a matriz $[J]$ é conhecida como *matriz Jacobiana* da transformação, a qual após aplicar as expressões (C.22) resulta

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial[N]}{\partial\xi}\{x^e\} & \dfrac{\partial[N]}{\partial\xi}\{y^e\} \\ \dfrac{\partial[N]}{\partial\eta}\{x^e\} & \dfrac{\partial[N]}{\partial\eta}\{y^e\} \end{bmatrix} \tag{C.25}$$

Multiplicando pela esquerda a inversa desta matriz, na equação (C.24), podem-se calcular as expressões das derivadas de $[N]$ em relação às coordenadas absolutas *x* e *y*.

Os cálculos recém apresentados permitem obter os coeficientes das matrizes de rigidez de elemento, substituindo os resultados das derivadas das funções de interpolação em (C.21) ou (C.20).