

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS VERSUS MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DOS EFEITOS DE PERTURBAÇÃO DE  
BORDO EM CASCAS CILÍNDRICAS AXISSIMÉTRICAS

Ana Paula Gomes Vieira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.

---

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

---

Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.

---

Prof. Marco Aurélio Chaves Ferro, D.Sc.

---

Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2007

VIEIRA, ANA PAULA GOMES

Método das Diferenças Finitas Energéticas  
Versus Método dos Elementos Finitos na Análise dos Efeitos de Perturbação de Bordo em Cascas Cilíndricas Axissimétricas [Rio de Janeiro]  
2007

X, 76 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Civil, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio  
de Janeiro, COPPE

1. Método dos Elementos Finitos
2. Cascas Cilíndricas Axissimétricas

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

## AGRADECIMENTOS

Ao meu marido Julio e meus pais pela paciência e apoio recebido.

Aos Coronéis Galvani e Tavares pela oportunidade de desenvolvimento profissional.

Aos professores Taborda e Webe pelas orientações.

À Fernanda por todo o apoio e dicas.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS VERSUS MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DOS EFEITOS DE PERTURBAÇÃO DE  
BORDO EM CASCAS CILÍNDRICAS AXISSIMÉTRICAS

Ana Paula Gomes Vieira

Dezembro/2007

Orientadores: Luiz Fernando Taborda Garcia

Webe João Mansur.

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre os desempenhos do Método das Diferenças Finitas Energéticas e do Método dos Elementos Finitos quando utilizados na análise dos efeitos de perturbação de bordo em problemas axissimétricos de cascas cilíndricas, objetivando-se verificar a qualidade das respostas principalmente quanto ao cálculo de esforços. Para tanto foram examinados, por ambos os métodos numéricos, diversos exemplos de aplicação em que as referidas estruturas se acham submetidas a solicitações de caráter mecânico e/ou térmico.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ENERGETIC FINITE DIFFERENCE METHOD VERSUS FINITE ELEMENT  
METHOD IN ANALYSIS OF THE EDGE EFFECTS IN CYLINDRICAL  
AXISYMMETRICS SHELLS

Ana Paula Gomes Vieira

December/2007

Advisors: Luiz Fernando Taborda Garcia

Webe João Mansur.

Department: Civil Engineering

This work presents a comparative study between the performances of the Energetic Finite Difference Method and the Finite Element Method when used in the analysis of the edge effects in axisymmetric problems of cylindrical shells, aiming to verify the quality of responses mainly concerning effort evaluation. To that end, several examples of application where these structures are subjected to mechanical and/or thermal loads were examined by both numerical methods.

## ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO .....	1
2	FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA .....	4
2.1	Introdução.....	4
2.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).....	4
2.3	Formulação para o problema pelo PTV .....	5
2.3.1	Trabalho virtual interno.....	6
2.3.2	Trabalho virtual externo .....	9
2.3.3	Equações diferenciais e condições de contorno .....	10
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA .....	13
3.1	Introdução.....	13
3.2	Funções de interpolação .....	14
3.3	Relações deformação-deslocamento .....	14
3.4	Relações tensão-deslocamento .....	15
3.5	Trabalho virtual interno (TVI) .....	16
3.6	Trabalho virtual externo (TVE).....	17
3.7	Matriz de rigidez do elemento e vetor de ações equivalentes nodais.....	18
3.8	Matriz de rigidez global e vetor global de cargas .....	20
3.9	Sistema de equações.....	21
3.10	Programa computacional.....	22
3.11	Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) .....	23
4	EXEMPLOS.....	25
4.1	Introdução.....	25
4.2	Exemplo 1 – Casca apoiada submetida à pressão interna constante.....	26
4.2.1	Discretização uniforme .....	27
4.2.2	Discretização não uniforme.....	29
4.3	Exemplo 2 – Casca engastada submetida à pressão interna constante.....	35
4.3.1	Discretização uniforme .....	35
4.3.2	Discretização não uniforme.....	37
4.4	Exemplo 3 – Casca apoiada submetida à variação uniforme de temperatura ...	43

4.4.1	Discretização uniforme .....	43
4.4.2	Discretização não uniforme.....	45
4.5	Exemplo 4 – Casca apoiada submetida à variação linear de temperatura na espessura.....	50
4.5.1	Discretização uniforme .....	50
4.5.2	Discretização não uniforme.....	53
4.6	Exemplo 5 – Casca apoiada submetida à solicitação de bordo e com variação de temperatura uniforme no domínio.....	57
4.6.1	Discretização uniforme .....	58
4.6.2	Discretização não uniforme.....	60
4.7	Exemplo 6 – Casca apoiada submetida à pressão hidrostática e peso próprio..	64
4.7.1	Discretização uniforme .....	65
4.7.2	Discretização não uniforme.....	67
5	CONCLUSÕES.....	72
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	– Raio da casca
$\{a\}$	– vetor de deslocamentos nodais do elemento
$A$	– Área da superfície média
$B_i$	– Forças de volume
$C$	– Rigidez extensional da casca
$D$	– Rigidez flexional da casca
$[D]$	– Vetor de deslocamentos nodais da estrutura
$E$	– Módulo de elasticidade longitudinal
$[E]$	– Matriz de elasticidade
$\{f\}$	– Vetor de cargas aplicadas no interior do elemento
$\{F\}$	– Vetor global de cargas nodais
$\{F_e\}$	– Vetor de forças nodais do elemento
$\{F_e^c\}, \{F_e^t\}$	– Vetores de ações equivalentes nodais correspondentes ao carregamento e à variação de temperatura no interior do elemento
$h$	– Espessura da casca

$[K], [K_e]$	– Matrizes de rigidez global da casca e do elemento
$l$	– Comprimento do elemento
$L$	– Comprimento da casca
$M_0, M_x$	– Momentos fletores
$\bar{M}_x$	– Momento prescrito no contorno
$N_x, N_\theta$	– Esforços normais
$N_{xt}, N_{\theta t}, M_{xt}$	– Solicitações térmicas
$\bar{N}_x, \bar{Q}_x$	– Forças prescritas no contorno
$p_x, p_z$	– Carregamentos prescritos de domínio
$p_{z1}, p_{z2}$	– Carregamentos atuantes nos nós inicial e final do elemento
$T_i$	– Forças de superfície
$x, \theta, z$	– Direções coordenadas na casca
$u, w$	– Componentes de deslocamento segundo $x$ e $z$
$\bar{u}, \bar{w}$	– Deslocamentos prescritos
$\alpha$	– Coeficiente de dilatação térmica do material da casca

$\Delta t_i, \Delta t_e$	– Variações de temperatura nas superfícies interna e externa da casca
$\delta W_i, \delta W_e$	– Trabalho virtual das forças internas e externas
$\varepsilon_{ij}$	– Componentes de deformação
$\{\varepsilon\}$	– Vetor de deformações do elemento
$\gamma$	– Peso específico do material da casca
$\gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{x\theta}$	– Distorções
$\lambda$	– Espaçamento nodal
$\nu$	– Coeficiente de Poisson
$\sigma_{ij}$	– Componentes de tensão
$\{\sigma\}$	– Vetor de esforços solicitantes
$\{\sigma_t\}$	– Vetor de solicitações térmicas

## 1 INTRODUÇÃO

A análise e o projeto de estruturas laminares, onde se inserem as placas e cascas, quer aparecendo sob forma isolada (como é o caso das lajes de edifícios e das cúpulas) ou então associadas (como, por exemplo, nos reservatórios e vasos de pressão), são de interesse permanente no âmbito da engenharia estrutural e, conseqüentemente, constituem objeto de estudo continuado por parte dos pesquisadores. Neste sentido, o extraordinário avanço trazido aos métodos numéricos pelo advento dos computadores, que a cada dia ganham mais de capacidade de armazenamento e processamento de dados, certamente em muito vem facilitando o aperfeiçoamento de critérios de análise estrutural com vistas a torná-los mais abrangentes e seguros.

Em termos gerais, nota-se uma clara preferência pelo uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) como técnica de abordagem numérica dos problemas estruturais. Entretanto, para problemas específicos, algumas técnicas alternativas, como é o caso do Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE), vêm se mostrando bastantes competitivas e, assim, ganhando o seu espaço.

A utilização do MDFE em problemas estruturais diversos vem sendo objeto de uma linha de pesquisa em andamento no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, a qual já deu origem a um conjunto expressivo de artigos, dissertações e teses, citando-se por exemplo, mais recentemente, os trabalhos de MITTELBAACH [1], MITTELBAACH *et al.* [2], MITTELBAACH *et al.* [3], LIMA [4], LIMA *et al.* [5], GARCIA [6], DIAS [7] e GRAÇA [8]. Nos referidos trabalhos, pôde-se constatar a potencialidade dessa técnica numérica na abordagem de problemas tanto estáticos como

dinâmicos, assim como lineares e geometricamente não lineares, de barras, placas, cascas e hastes de paredes delgadas.

O presente trabalho representa, na verdade, um desdobramento da dissertação de mestrado de MITTELBAACH [1], a qual envolveu a análise, pelo Método das Diferenças Finitas Energéticas, dos efeitos de perturbação de bordo em problemas axissimétricos de cascas cilíndricas submetidas a solicitações de caráter mecânico e/ou térmico. A referida dissertação, além dos deslocamentos, enfatizou também o cálculo de esforços, procurando verificar, numa situação que em princípio não seria das mais favoráveis para fins de modelagem numérica, se o MDFE, pela sua característica de aproximar as derivadas dos deslocamentos (que se associam aos esforços) e não os deslocamentos apresentaria, tal como ocorrido no trabalho de GRAÇA [8], um bom desempenho nesse tipo de resposta. Foi concluído que, nos problemas estudados, a escolha da discretização, ao se admitir uma margem de erro única para deslocamentos e esforços, foi sempre comandada pelos esforços, contrariando de certa forma o comportamento observado no trabalho de GRAÇA [8].

Em vista do exposto, e tal como sugerido por MITTELBAACH [1], resolveu-se ampliar a pesquisa, através da presente dissertação, onde se procurou analisar, com base no MEF, os mesmos exemplos já examinados por aquela autora pelo MDFE, e comparar o desempenho dos dois métodos. Imaginou-se a princípio que, sendo no MEF aproximados os deslocamentos, mediante o uso de funções de interpolação, e não suas derivadas, isto poderia sugerir um desempenho pior do mesmo em relação ao MDFE no cálculo dos esforços.

Para obtenção dos resultados pelo MEF, optou-se inicialmente pela utilização do programa comercial ANSYS, tendo-se escolhido o elemento bidimensional SHELL 61 de sua biblioteca. Entretanto, já nos primeiros testes realizados, constatou-se que, apesar de os deslocamentos fornecidos pelo programa estarem dentro do padrão desejado, os esforços apresentavam discrepâncias acentuadas em relação aos resultados esperados. Como todas as tentativas de se chegar a um bom termo quanto aos esforços foram infrutíferas optou-se por desenvolver um programa de elementos finitos dirigido especificamente ao problema em estudo, utilizando um elemento com as mesmas características do SHELL 61.

A presente dissertação possui a seguinte estrutura: no capítulo 2 desenvolve-se, com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais, a formulação analítica para problema da casca cilíndrica sob solicitações mecânicas e térmicas, chegando-se às equações diferenciais que regem o problema e às correspondentes condições de contorno. No capítulo 3 desenvolve-se o tratamento numérico do problema pelo MEF, o qual serviu de base para a elaboração do programa computacional utilizado na obtenção de resultados (ao final desse capítulo, inclui-se também um tópico com uma breve descrição do MDFE). Tais resultados são mostrados e discutidos no capítulo 4 a partir da análise de seis exemplos de aplicação, previamente examinados por MITTELBAACH [1] e MITTELBAACH *et al.* [2] pelo MDFE. Apresentam-se, por fim, no capítulo 5, as conclusões gerais da pesquisa.

## 2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA

### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar, com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), a formulação analítica para o problema da casca cilíndrica axissimétrica, sob solicitações de caráter mecânico e térmico, sendo desenvolvida, no próximo capítulo, a correspondente formulação numérica pelo Método dos Elementos Finitos.

### 2.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

O trabalho virtual é definido como o trabalho hipotético realizado pelas forças externas e internas que atuam em um sólido em equilíbrio quando a este se impõe um campo de deslocamentos virtuais. O PTV estabelece que o trabalho virtual realizado pelas forças internas é igual ao realizado pelas forças externas. O campo de deslocamentos virtuais, além de ser consistente com a hipótese de pequenas mudanças de configuração do sólido, deve ser cinematicamente admissível, isto é, deve ser contínuo, derivável e atender às condições de deslocamento prescrito no contorno.

Tem-se então:

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (2.1)$$

com  $\delta W_i$  representando o trabalho virtual das forças internas e  $\delta W_e$  o trabalho virtual das forças externas, cujas expressões gerais são as seguintes:

$$\delta W_e = \iiint_V B_i \delta u_i dV + \iint_{S_F} T_i \delta u_i dS \quad (2.2)$$

$$\delta W_i = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (2.3)$$

onde:

$B_i$  – forças de volume, distribuídas ao longo do volume  $V$  do sólido;

$T_i$  – forças de superfície atuantes na região  $S_F$  do contorno, onde se prescrevem as forças;

$\delta u_i$  – variação das componentes de deslocamento  $u_i$ ;

$\sigma_{ij}$  – componentes de tensão;

$\delta \epsilon_{ij}$  – variação das componentes de deformação  $\epsilon_{ij}$ .

### 2.3 Formulação para o problema pelo PTV

No desenvolvimento da formulação analítica da casca cilíndrica, de acordo com a Teoria Clássica de Love, são admitidas as seguintes hipóteses: a casca é delgada, com pequenas mudanças de configuração (deslocamentos transversais pequenos em relação à espessura e rotações, expressas em radianos, pequenas em relação à unidade); a tensão na direção normal à superfície média ( $\sigma_z$ ) pode ser desprezada em relação às demais tensões normais; e as linhas retas normais à superfície média permanecem retas e normais a esta após a deformação e não sofrem alongamento (Hipótese de Kirchhoff-Love), sendo, com isto, consideradas nulas, nas relações deformação-deslocamento, a deformação específica na direção  $z$  ( $\epsilon_z$ ) e as distorções transversais  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{\theta z}$ , estando a casca definida em relação ao sistema de coordenadas  $x, \theta, z$  mostrado na Figura 2.1 (note-se que, pela axissimetria

do problema em estudo, a componente de deslocamento  $u_\theta$  e a distorção  $\gamma_{\theta z}$  são automaticamente nulas).

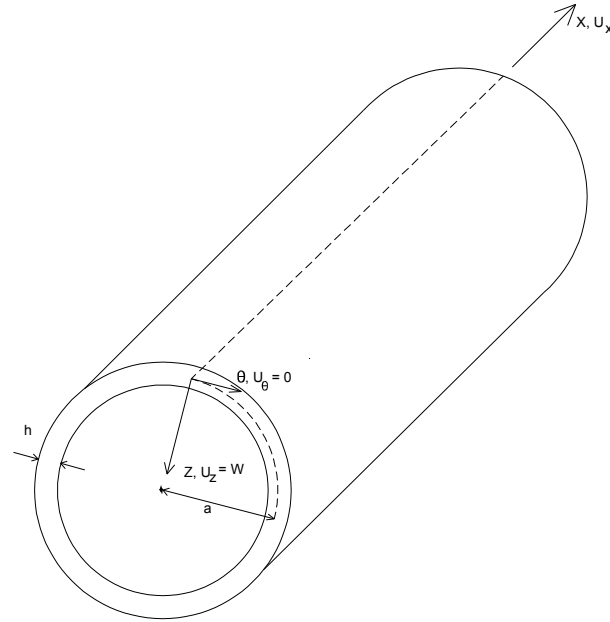


Figura 2.1: Sistema de coordenadas da casca

### 2.3.1 Trabalho virtual interno

Devido às hipóteses simplificadoras adotadas, a expressão do trabalho virtual interno fica assim apresentada:

$$\delta W_i = \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}) dV \quad (2.4)$$

anulando-se também, face à axissimetria, a contribuição representada pela parcela  $\tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}$ .

Portanto, no presente caso,

$$\delta W_i = \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dV \quad (2.5)$$

Admitindo-se como constitutiva a lei de Hooke generalizada para materiais homogêneos, isotrópicos e submetidos a uma variação de temperatura  $\Delta t = \Delta t(x,z)$ , tem-se para o problema em estudo:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) - \alpha\Delta t(1+\nu)] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) - \alpha\Delta t(1+\nu)]\end{aligned}\quad (2.6)$$

onde  $E$ ,  $\nu$  e  $\alpha$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o coeficiente de Poisson e o coeficiente de dilatação térmica do material da casca.

As seguintes relações deformação-deslocamento aplicam-se ao presente caso:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2}z; \quad \varepsilon_\theta = -\frac{w}{a}\quad (2.7)$$

escrevendo-se então as variações

$$\delta\varepsilon_x = \delta u' - z\delta w''; \quad \delta\varepsilon_\theta = -\frac{\delta w}{a}\quad (2.8)$$

onde  $u$  denota o deslocamento  $u_x$ , segundo o eixo  $x$ , dos pontos da superfície média ( $z = 0$ ),  $u_z = w$  representa o deslocamento transversal, independente de  $z$ , e  $a$  designa o raio do cilindro definido pela superfície média da casca (ver Figura 2.1).

Substituindo em (2.5) as relações deformação-deslocamento (2.8), obtém-se:

$$\delta W_i = \iiint_V [\sigma_x(\delta u' - z\delta w'') + \sigma_\theta(-\frac{\delta w}{a})]dV\quad (2.9)$$

A equação (2.9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta W_i = \iint_A \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x(\delta u' - z\delta w'') + \sigma_\theta(-\frac{\delta w}{a})]dz \right\} dA\quad (2.10)$$

ou, ainda,

$$\delta W_i = 2\pi a \int_0^L \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x (\delta u' - z \delta w'') + \sigma_\theta \left(-\frac{\delta w}{a}\right)] dz \right\} dx \quad (2.11)$$

sendo  $A$  a área da superfície média,  $h$  a espessura e  $L$  o comprimento da casca.

A seguir são definidos os esforços solicitantes, por unidade de comprimento:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz; \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (2.12)$$

e, com a substituição destes em (2.11), a expressão do trabalho virtual interno assume o aspecto:

$$\delta W_i = 2\pi a \int_0^L (N_x \delta u' - M_x \delta w'' - N_\theta \frac{\delta w}{a}) dx \quad (2.13)$$

Os esforços solicitantes, em termos dos deslocamentos  $u$  e  $w$  e da variação de temperatura  $\Delta t$ , são obtidos substituindo-se (2.6) e (2.7) em (2.12). Segue-se então que:

$$\begin{aligned} N_x &= C(u' - \nu \frac{w}{a}) - N_{xt} \\ N_\theta &= C(\nu u' - \frac{w}{a}) - N_{\theta t} \\ M_x &= -Dw'' - M_{xt} \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $N_{xt}$ ,  $N_{\theta t}$  e  $M_{xt}$  representam as denominadas sollicitações térmicas, expressas por

$$N_{xt} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\alpha\Delta t}{1-\nu} dz; \quad N_{\theta t} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\alpha\Delta t}{1-\nu} dz; \quad M_{xt} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\alpha\Delta t}{1-\nu} z dz \quad (2.15)$$

e

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.16)$$

traduzem as rigidezes extensional e flexional da casca.

Introduzindo (2.14) em (2.13) tem-se, por fim, a expressão do trabalho virtual interno sob a forma:

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_0^L \{ 2\pi a [ C(u' - v \frac{w}{a}) \delta u' + D w'' \delta w'' - C(v u' - \frac{w}{a}) \frac{\delta w}{a} ] + \\ + [ -N_{xt} \delta u' + M_{xt} \delta w'' + N_{\theta t} \frac{\delta w}{a} ] \} dx \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Trabalho virtual externo

O trabalho virtual externo, no presente problema, é relativo ao carregamento de domínio, definido por unidade de área, e ao carregamento de contorno, expresso por unidade de comprimento, sendo dado por:

$$\delta W_e = \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w) . 2\pi a dx + [ \bar{N}_x \delta u + \bar{Q}_x \delta w - \bar{M}_x \delta w' ]_0^L . 2\pi a \quad (2.18)$$

estando esses carregamentos representados na Figura 2.2.

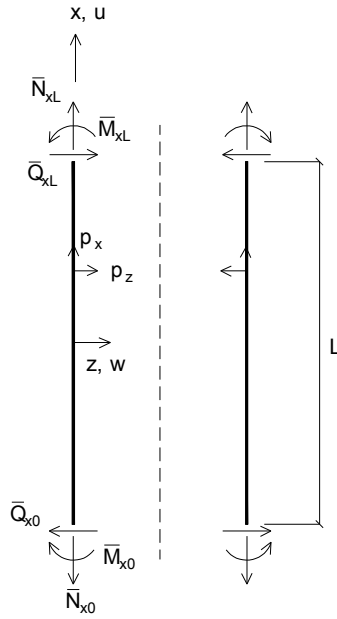


Figura 2.2: Carregamentos de domínio e contorno da casca

### 2.3.3 Equações diferenciais e condições de contorno

Para a obtenção das equações diferenciais de equilíbrio e das condições de contorno, inicialmente toma-se a expressão (2.13), sendo nela efetuadas as seguintes integrações por partes:

$$\int_0^L N_x \delta u' 2\pi a dx = [N_x \delta u 2\pi a]_0^L - \int_0^L N_x' \delta u 2\pi a dx \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^L M_x \delta w'' 2\pi a dx &= -[M_x \delta w' 2\pi a]_0^L + \int_0^L M_x' \delta w' 2\pi a dx = \\ &= -[M_x \delta w' 2\pi a]_0^L + [M_x' \delta w 2\pi a]_0^L - \int_0^L M_x'' \delta w 2\pi a dx \end{aligned}$$

Substituindo-se, então, (2.19) em (2.13), resulta a seguinte expressão para o trabalho virtual interno:

$$\delta W_i = 2\pi a \int_0^L (-N'_x \delta u - M''_x \delta w - N_0 \frac{\delta w}{a}) dx + 2\pi a [N_x \delta u - M_x \delta w' + M'_x \delta w]_0^L \quad (2.20)$$

Igualando esta última com a expressão (2.18) para  $\delta W_e$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L [(N'_x + p_x) \delta u + (M''_x + \frac{N_0}{a} + p_z) \delta w] dx + \\ & + [(-N_x + \bar{N}_x) \delta u + (-M'_x + \bar{Q}_x) \delta w + (M_x - \bar{M}_x) \delta w']_0^L = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como as variações  $\delta u$  e  $\delta w$  são arbitrárias no domínio e no contorno da casca, chega-se, então, às seguintes equações diferenciais de equilíbrio, em termos de esforços solicitantes:

$$\begin{aligned} N'_x &= -p_x \\ M''_x + \frac{N_0}{a} &= -p_z \end{aligned} \quad (2.22)$$

e, também, às seguintes condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$ :

$$\begin{aligned} N_x &= \bar{N}_x & \text{ou} & & u &= \bar{u} \text{ (prescrito)} \\ M'_x &= \bar{Q}_x & \text{ou} & & w &= \bar{w} \text{ (prescrito)} \\ M_x &= \bar{M}_x & \text{ou} & & w' &= \bar{w}' \text{ (prescrito)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ficando essas expressões assim apresentadas em função dos deslocamentos e das solicitações térmicas (2.15):

$$\begin{aligned}
C\left(u'' - \frac{v}{a} w'\right) - N'_{xt} &= -p_x \\
-Dw^{iv} + \frac{c}{a}\left(vu' - \frac{w}{a}\right) - M''_{xt} - \frac{N_{\theta t}}{a} &= -p_z
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

e

$$\begin{aligned}
C\left(u' - v\frac{w}{a}\right) - N_{xt} &= \bar{N}_x & \text{ou} & \quad u = \bar{u} \text{ (prescrito)} \\
-Dw''' - M'_{xt} &= \bar{Q}_x & \text{ou} & \quad w = \bar{w} \text{ (prescrito)} \\
-Dw'' - M_{xt} &= \bar{M}_x & \text{ou} & \quad w' = \bar{w}' \text{ (prescrito)}
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

### 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA

#### 3.1 Introdução

A formulação numérica para o problema em foco foi desenvolvida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), mediante o uso de um elemento com dois nós e três graus de liberdade por nó ( $u$ ,  $w$  e a rotação  $\theta=w'$ ), conforme se observa na Figura 3.1, com funções polinomiais de interpolação de  $1^0$  grau para o deslocamento longitudinal  $u$  e do  $3^0$  grau para o deslocamento transversal  $w$ .

O capítulo se encerra com uma breve apresentação do Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE), cuja descrição mais detalhada pode ser vista em MITTELBAACH [1].

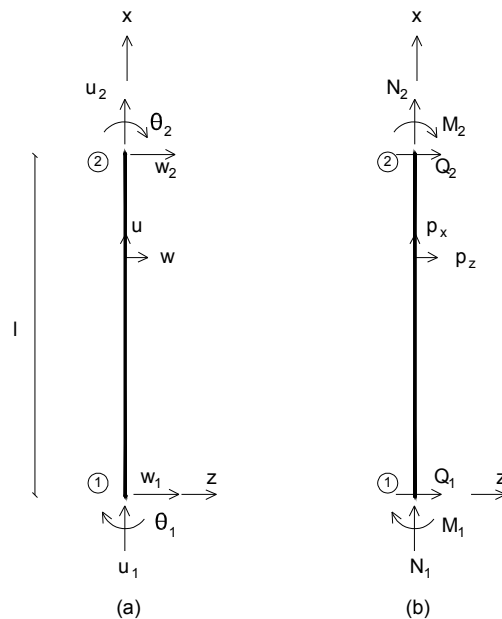


Figura 3.1: Elemento utilizado

### 3.2 Funções de interpolação

Em função do exposto no item 3.1, definem-se as seguintes funções de interpolação no elemento:

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1 \quad (3.1)$$

$$w(x) = \frac{2w_1 - 2w_2 + \theta_1 l + \theta_2 l}{l^3}x^3 + \frac{-3w_1 + 3w_2 - 2\theta_1 l - \theta_2 l}{l^2}x^2 + \theta_1 x + w_1$$

onde

$$\theta_1 = w_1' \quad (3.2)$$

$$\theta_2 = w_2'$$

Matricialmente, os deslocamentos nodais do elemento e as funções de interpolação para os deslocamentos são ligados por:

$$\{U\} = [N] \{a\} \quad (3.3)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1\right) & \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x\right) & 0 & \left(-\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2}\right) & \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.3 Relações deformação-deslocamento

O vetor de deformações  $\{\varepsilon\}$  do elemento pode ser relacionado ao vetor de deslocamentos nodais  $\{a\}$  – indicado na equação (3.4), como segue:

$$\{\varepsilon\}=[\mathbf{B}]\{a\} \quad (3.5)$$

onde

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} u' \\ -w'' \\ -\frac{w}{a} \end{bmatrix}; [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} (N_1)' \\ -(N_2)'' \\ -(N_2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

com  $N_1$  e  $N_2$  representando respectivamente as linhas 1 e 2 da matriz  $[\mathbf{N}]$ , explicitadas em (3.4).

### 3.4 Relações tensão-deslocamento

Substituindo (2.7) em (2.6) obtêm-se as relações tensão-deslocamento:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (u' - w''z - \nu \frac{w}{a}) - \alpha \Delta t (1 + \nu) \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left( -\frac{w}{a} + \nu u' - \nu w''z \right) - \alpha \Delta t (1 + \nu) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pode-se então, matricialmente, fazer:

$$\{\sigma^*\} = [\mathbf{E}^*]\{\varepsilon\} - \{\sigma_t^*\} \quad (3.8)$$

ou, sob forma explícita,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x z \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{\nu}{a} \\ z & z^2 & \frac{\nu z}{a} \\ \nu & \nu z & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ -w'' \\ -w \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{Bmatrix} \Delta t \\ \Delta t z \\ \Delta t \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Para o problema em estudo, é prevista uma variação de temperatura linear na espessura e constante em  $x$ , ou seja,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} + \frac{z}{h} (\Delta t_i - \Delta t_e) \quad (3.10)$$

onde  $\Delta t_i$  e  $\Delta t_e$  designam, respectivamente, as variações de temperatura nas superfícies interna e externa da casca.

Integrando (3.8) ao longo da espessura, chega-se à expressão

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} - \{\sigma_t\} \quad (3.11)$$

onde  $\{\sigma\}$  é o vetor de esforços solicitantes,  $[E]$  a matriz de elasticidade e  $\{\sigma_t\}$  o vetor de solicitações térmicas, estabelecido com base em (3.10). Explicitamente,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ N_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} h & 0 & \frac{vh}{a} \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ vh & 0 & \frac{h}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ -w'' \\ -w \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} h \\ \frac{\Delta t_i - \Delta t_e}{12} h^2 \\ \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} h \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.5 Trabalho virtual interno (TVI)

A expressão (2.5) para o TVI, sob forma matricial, escreve-se:

$$\delta W_i = \iiint_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} dV = \iint_A \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} dz \right] dA = \int_0^1 \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} dz \right] dx \cdot 2\pi a \quad (3.13)$$

Obtendo  $\delta\{\varepsilon\}^T$  de (3.5) e considerando (3.8), vem:

$$\delta W_i = \delta\{a\}^T \int_0^1 \left[ \int_{-h/2}^{h/2} [B]^T ([E^*]\{\varepsilon\} - \{\sigma_t^*\}) dz \right] dx \cdot 2\pi a \quad (3.14)$$

Após a integração ao longo da espessura, e com a utilização de (3.11) e (3.5), a expressão (3.14) pode ser assim representada:

$$\delta W_i = \delta \{a\}^T \int_0^1 [B]^T ([E] \{\varepsilon\} - \{\sigma_i\}) dx \cdot 2\pi a = \delta \{a\}^T \int_0^1 [B]^T ([E][B] \{a\} - \{\sigma_i\}) dx \cdot 2\pi a \quad (3.15)$$

### 3.6 Trabalho virtual externo (TVE)

Com base na Figura 3.1-b, a expressão (2.18) do TVE, matricialmente, escreve-se:

$$\delta W_e = 2\pi a [\delta \{a\}^T \{F_e\} + \int_0^1 \delta \{U\}^T \{f\} dx] \quad (3.16)$$

onde  $\{F_e\}$  é o vetor de forças nodais do elemento e  $\{f\}$  é o vetor de cargas aplicadas no interior do elemento, expressos respectivamente por:

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Admitindo, na Figura 3.1-b,  $p_x$  constante e  $p_z$  variando linearmente no elemento, e considerando (3.3), vem:

$$\delta W_e = 2\pi a \cdot \delta \{a\}^T [\{F_e\} + \{f\}] \int_0^1 [N]^T dx = 2\pi a \cdot \delta \{a\}^T [\{F_e\} + \{F_e^c\}] \quad (3.18)$$

com

$$\{F_e^c\} = p_x \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + p_{z1} \begin{Bmatrix} \frac{0}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{12}{0} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3}{20} \frac{p_{z2} - p_{z1}}{1} l^2 \\ \frac{1}{30} \frac{p_{z2} - p_{z1}}{1} l^3 \\ 0 \\ \frac{7}{20} \frac{p_{z2} - p_{z1}}{1} l^2 \\ -\frac{1}{20} \frac{p_{z2} - p_{z1}}{1} l^3 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

representando o vetor de ações equivalentes nodais correspondente ao carregamento atuante no interior do elemento e  $p_{z1}$  e  $p_{z2}$  são, respectivamente, os valores do carregamento  $p_z$  nos nós inicial e final do elemento.

### 3.7 Matriz de rigidez do elemento e vetor de ações equivalentes nodais

Igualando as expressões (3.15) do TVI e (3.18) do TVE, chega-se a:

$$\int_0^l [B]^T ([E][B]\{a\} - \{\sigma_t\}) dx = \{F_e\} + \{F_e^c\} \quad (3.20)$$

Fazendo

$$\int_0^l [B]^T \{\sigma_t\} dx = \{F_e^t\} \quad (3.21)$$

vem

$$\int_0^l [B]^T [E][B]\{a\} dx = \{F_e\} + \{F_e^c\} + \{F_e^t\} \quad (3.22)$$

onde  $\{F_e^t\}$  traduz o vetor de ações equivalentes nodais correspondente à variação de temperatura no interior do elemento, o qual, em função de (3.6) e (3.12), fica assim apresentado:

$$\{F_e^t\} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} h \\ -\frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{4} hl \\ \frac{\Delta t_i - \Delta t_e}{12} h^2 - \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{24} hl^2 \\ \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} h \\ -\frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{4} hl \\ -\frac{\Delta t_i - \Delta t_e}{12} h^2 + \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{24} hl^2 \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

A matriz de rigidez do elemento  $[K_e]$ , dada por

$$[K_e] = \int_0^l [B]^T [E] [B] dx \quad (3.24)$$

uma vez efetuada a integração, assume a forma:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{C}{l} & \frac{Cv}{2a} & \frac{Cvl}{12a} & -\frac{C}{l} & \frac{Cv}{2a} & -\frac{Cvl}{12a} \\ \frac{Cv}{2a} & \frac{12D}{l^3} + \frac{13Cl}{35a^2} & \frac{6D}{l^2} + \frac{11Cl^2}{210a^2} & -\frac{Cv}{2a} & -\frac{12D}{l^3} + \frac{9Cl}{70a^2} & \frac{6D}{l^2} - \frac{13Cl^2}{420a^2} \\ \frac{Cvl}{12a} & \frac{6D}{l^2} + \frac{11Cl^2}{210a^2} & \frac{4D}{l} + \frac{Cl^3}{105a^2} & -\frac{Cvl}{12a} & \frac{6D}{l^2} + \frac{13Cl^2}{420a^2} & \frac{2D}{l} - \frac{Cl^3}{140a^2} \\ -\frac{C}{l} & -\frac{Cv}{2a} & -\frac{Cvl}{12a} & \frac{C}{l} & -\frac{Cv}{2a} & \frac{Cvl}{12a} \\ \frac{Cv}{2a} & -\frac{12D}{l^3} + \frac{9Cl}{70a^2} & -\frac{6D}{l^2} + \frac{13Cl^2}{420a^2} & -\frac{Cv}{2a} & \frac{12D}{l^3} + \frac{13Cl}{35a^2} & -\frac{6D}{l^2} - \frac{11Cl^2}{210a^2} \\ \frac{Cvl}{12a} & \frac{6D}{l^2} - \frac{13Cl^2}{420a^2} & \frac{2D}{l} - \frac{Cl^3}{140a^2} & -\frac{Cvl}{12a} & \frac{6D}{l^2} - \frac{11Cl^2}{210a^2} & \frac{4D}{l} + \frac{Cl^3}{105a^2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ficando, pois, a equação (3.22) assim reescrita:

$$[K_e] \{a\} = \{F_e\} + \{F_e^c\} + \{F_e^t\} \quad (3.26)$$

### 3.8 Matriz de rigidez global e vetor global de cargas

A matriz de rigidez global da casca,  $[K]$ , é montada em seguida, coletando-se a contribuição de cada matriz de rigidez de elemento, dada por (3.25), de acordo com o esquema da Figura 3.2.

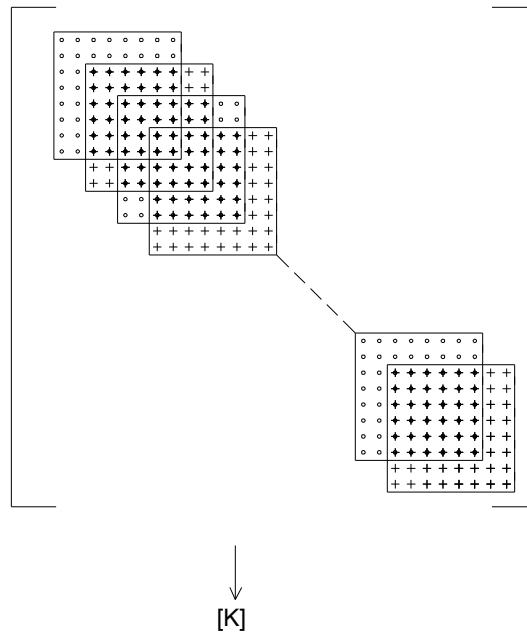


Figura 3.2: Montagem da matriz de rigidez global da casca

Procede-se também à montagem do vetor de cargas global,  $\{F\}$ , através da combinação do vetor de forças nodais prescritas na casca com o vetor global de ações equivalentes nodais (este último formado totalizando a contribuição dos carregamentos e dos efeitos de temperatura nos elementos), conforme ilustrado na Figura 3.3.

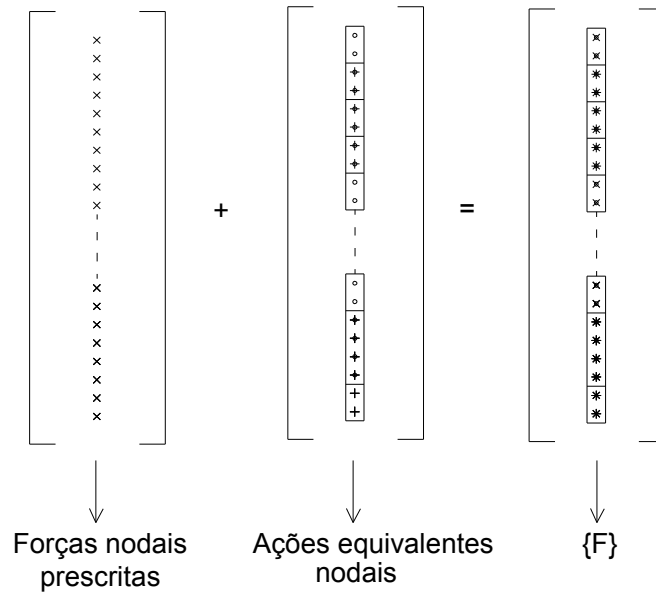


Figura 3.3: Montagem do vetor global de cargas nodais

### 3.9 Sistema de equações

Uma vez estabelecidos a matriz de rigidez global e o vetor de cargas global, chega-se a um sistema de equações lineares expresso por  $[K][D]=\{F\}$ , ilustrado na Figura 3.4. Antes da sua resolução, devem-se impor as condições de contorno cinemáticas, dependentes do tipo de vinculação externa existente na casca. Tais condições são introduzidas pela técnica dos “zeros e uns”. Feito isto, resolve-se o sistema através do Método de Gauss. De posse do vetor  $[D]$  de deslocamentos nodais da estrutura, constrói-se, para cada elemento, o respectivo vetor de deslocamentos nodais  $\{a\}$ , calculando-se então por

$$\{F_e\} = [K_e]\{a\} - \{F_e^c\} - \{F_e^t\} \quad (3.27)$$

os esforços nodais no elemento.



### 3.11 Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE)

O MDFE e o MEF apresentam etapas de cálculo semelhantes (MITTELBACH [1]), sendo, entretanto, aproximadas no MDFE as derivadas dos deslocamentos (por formas de diferenças finitas) e não os deslocamentos, como no MEF.

O MDFE difere do método convencional de diferenças finitas, onde as representações discretas em diferenças finitas são aplicadas sobre as equações diferenciais que governam o problema, por serem tais representações introduzidas diretamente na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (ou, alternativamente, na da energia potencial total do sistema). A formulação energética, em relação à convencional, utiliza derivadas de ordem mais baixa, necessita da prescrição apenas das condições de contorno geométricas e gera matrizes de coeficientes simétricas.

O MDFE, quando aplicado ao problema em estudo, baseia-se na avaliação das integrais relativas aos trabalhos virtuais interno e externo através da consideração de um somatório de contribuições dos trechos de integração estabelecidos ao longo do comprimento da casca, em cada um dos quais todas as grandezas envolvidas são supostas constantes. As derivadas dos deslocamentos, como já frisado, são substituídas por formas de diferenças finitas e igualam-se as expressões assim obtidas para os trabalhos virtuais interno e externo. Com isso chega-se a uma expressão do tipo:

$$f_1(D_1, D_2, \dots, D_N)\delta D_1 + f_2(D_1, D_2, \dots, D_N)\delta D_2 + \dots + f_N(D_1, D_2, \dots, D_N)\delta D_N = 0.$$

Impondo-se as condições de contorno cinemáticas (note-se que se o deslocamento  $D_i$  é prescrito,  $\delta D_i=0$ ), e considerando que as variações dos deslocamentos nodais incógnitos são arbitrárias, chega-se a um sistema de equações algébricas lineares do tipo

$$F_i(X_1, X_2, \dots, X_{NI}) = 0, i = 1 \text{ a } NI$$

onde  $X_1, X_2, \dots, X_{NI}$  passam a designar os NI deslocamentos nodais incógnitos do problema. De posse destes, os esforços na casca podem ser calculados com base nas expressões (2.14), onde as derivadas são substituídas por formas de diferenças finitas.

## 4 EXEMPLOS

### 4.1 Introdução

No presente capítulo são reexaminados os mesmos exemplos de cascas cilíndricas axissimétricas submetidas à pressão interna, à variação de temperatura e à solitação de bordo apresentados por MITTELBAACH [1] e MITTELBAACH *et al.* [2], com o objetivo de comparar os desempenhos dos métodos das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) e dos Elementos Finitos (MEF) na análise desse tipo de problema. Em tais exemplos, varia-se também o tipo de apoio e a discretização.

Para fins de comparação dos resultados, foram adotados dois critérios distintos, a saber: o uso de uma mesma discretização pelos dois métodos (Critério I) e a consideração de sistemas de equações aproximadamente de mesma ordem por ambos os métodos (estabelecida através de uma proporcionalidade no número de nós) (Critério II), pois no MDFE, com exceção dos nós do contorno (onde a rotação torna-se grau de liberdade adicional ao serem eliminados os nós virtuais), trabalha-se com dois graus de liberdade por nó ( $u$  e  $w$ ), ao passo que no MEF utilizam-se sempre três ( $u$ ,  $w$  e  $w'$ ). Foram também consideradas, como em MITTELBAACH [1], discretizações uniformes e não uniformes, estas últimas, subdivididas em tipo 1 e tipo 2, correspondendo a um maior refinamento na região próxima ao apoio (sendo, entretanto, mantido o mesmo número total de elementos da discretização uniforme), conforme ilustrado na Figura 4.1.

Cabe ainda acrescentar que MITTELBAACH [1], na comparação dos seus resultados com os analíticos, admitiu como aceitável uma margem de erro em torno de 2% tanto para os deslocamentos quanto para os momentos máximos.

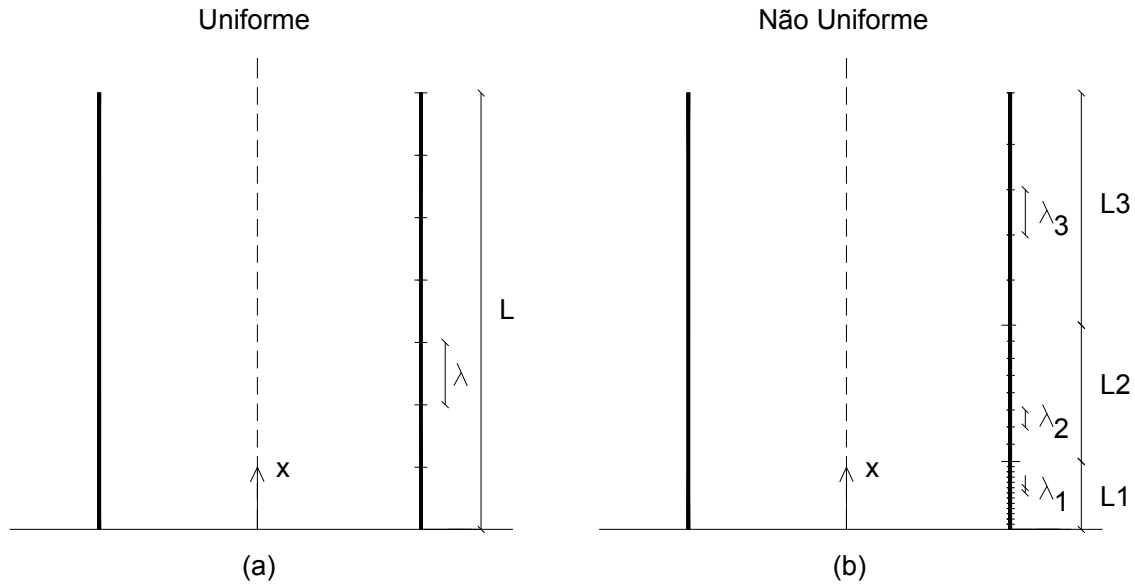


Figura 4.1: Discretizações adotadas

#### 4.2 Exemplo 1 – Casca apoiada submetida à pressão interna constante

Na Figura 4.2 acha-se representado o esquema desse exemplo, assim como explicitados os dados relativos à geometria, ao material e ao carregamento da casca.

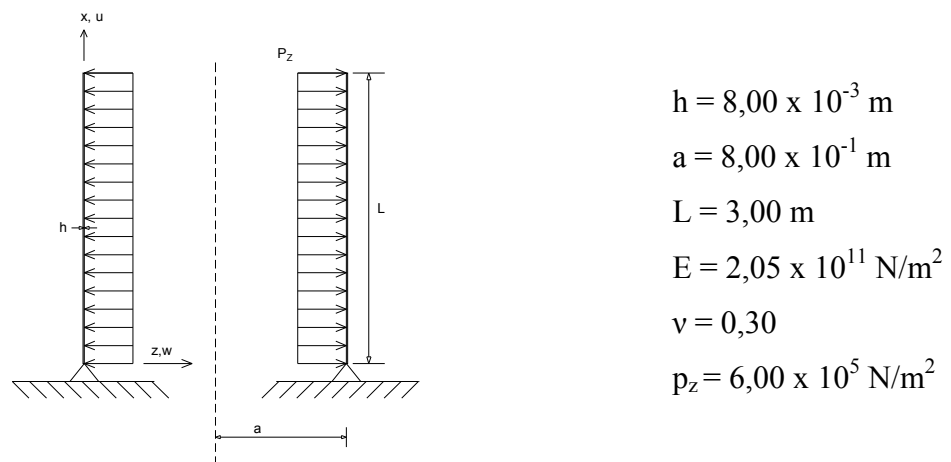


Figura 4.2: Casca cilíndrica apoiada submetida a pressão interna constante

#### 4.2.1 Discretização uniforme

No caso de discretização uniforme foram adotados, de acordo com cada um dos dois critérios estabelecidos no item 4.1:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,10$  m (MDFE e MEF).

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,15$  m (MEF).

sendo  $\lambda$  o espaçamento nodal representado na Figura 4.1-a.

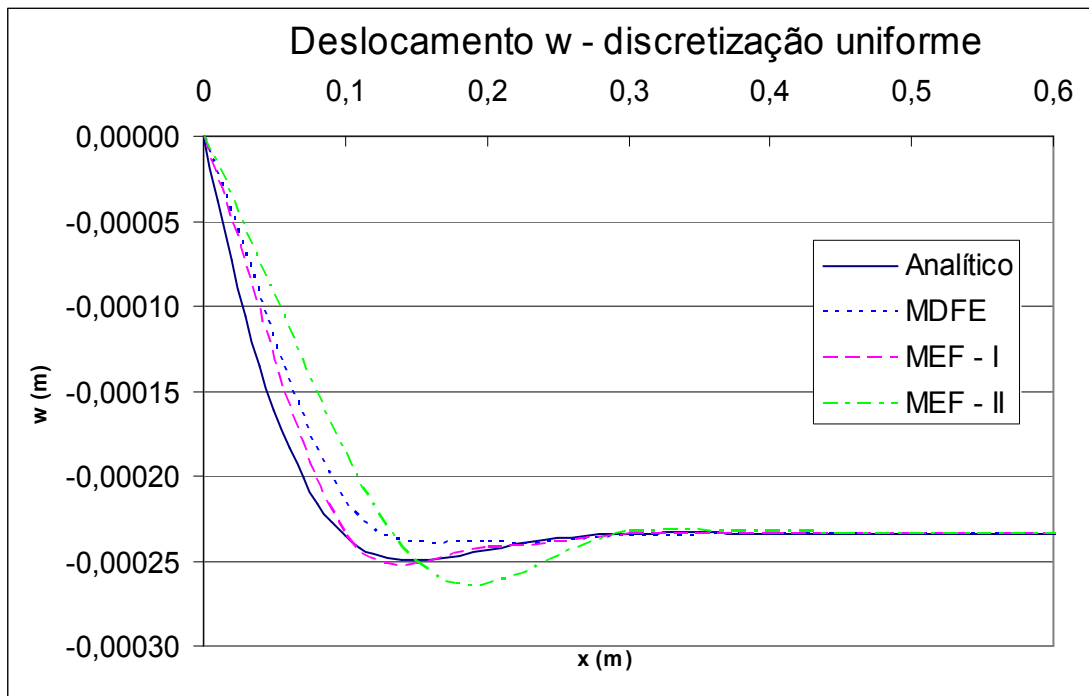
A seguir são apresentados, na Tabela 4.1 e na Tabela 4.2 os resultados para o máximo deslocamento transversal  $w$  e o máximo momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente (entendendo-se como MEF – I e MEF – II as análises efetuadas pelo Método dos Elementos Finitos segundo os critérios I e II), mostrando-se ainda, na Figura 4.3 e na Figura 4.4, os respectivos gráficos de  $w$  e  $M_x$  ao longo da casca. Nestes gráficos optou-se em mostrar o comportamento dos deslocamentos e dos momentos até a altura de 0,6 m na casca, uma vez que, a partir de  $x \approx 0,5$  m todos os valores numéricos obtidos já reproduzem, de forma precisa, a resposta (constante com  $x$ ) de membrana.

Tabela 4.1: Exemplo 1 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização uniforme

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,15	$-2,498 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,20	$-2,387 \times 10^{-4}$	-4,44 %
MEF – I	0,20	$-2,429 \times 10^{-4}$	-2,76 %
MEF – II	0,15	$-2,501 \times 10^{-4}$	0,12 %

Tabela 4.2: Exemplo 1 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização uniforme

	Abscissa x (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,05	$-3,745 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,10	$-1,856 \times 10^2$	-50,44 %
MEF - I	0,10	$-2,283 \times 10^2$	-39,04 %
MEF - II	0,15	$-5,826 \times 10$	-84,44 %

Figura 4.3: Exemplo 1 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

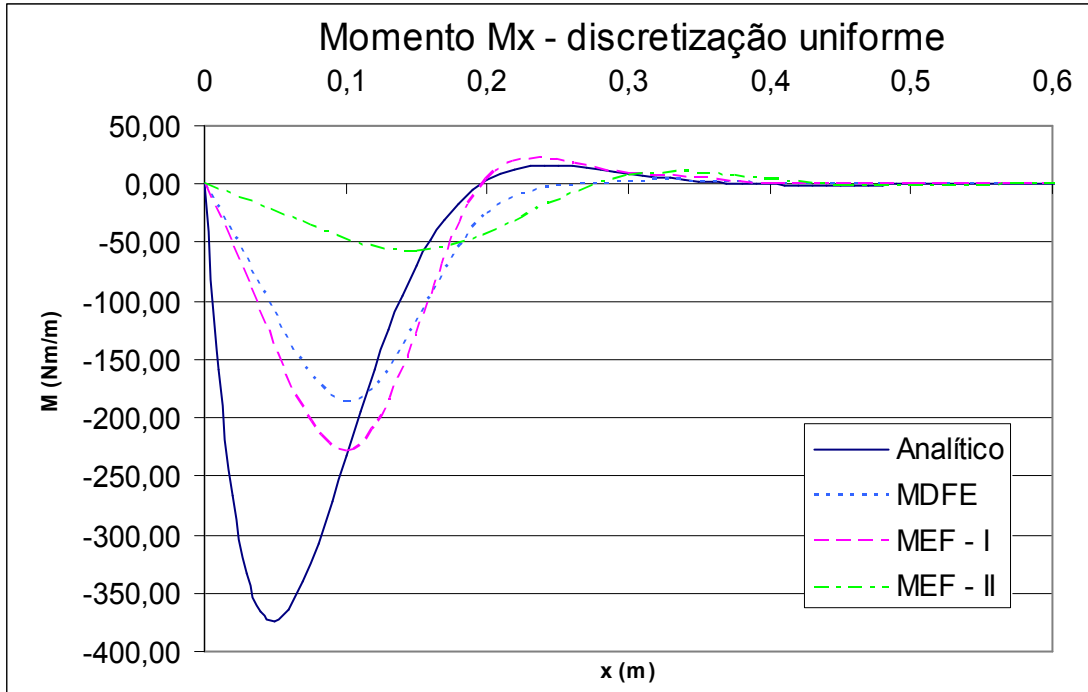


Figura 4.4: Exemplo 1 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

#### 4.2.2 Discretização não uniforme

##### a) Discretização tipo 1

Neste tipo de discretização, toma-se  $L_3 = 0$  na Figura 4.1-b e considera-se a casca dividida em duas partes, de comprimentos  $L_1 = 0,5$  m e  $L_2 = 2,5$  m, sendo adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,033$  m e 15 elementos com  $\lambda_2 = 0,167$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,05$  m e 10 elementos com  $\lambda_2 = 0,25$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.3 e na Tabela 4.4, assim como na Figura 4.5 e na Figura 4.6, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.3: Exemplo 1 – Deslocamento  $w$  máximo para discretização não uniforme tipo 1

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,15	$-2,498 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,17	$-2,470 \times 10^{-4}$	-1,12 %
MEF – I	0,17	$-2,484 \times 10^{-4}$	-0,56 %
MEF – II	0,15	$-2,495 \times 10^{-4}$	-0,12 %

Tabela 4.4: Exemplo 1 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abscissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,05	$-3,745 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,07	$-3,341 \times 10^2$	-10,79 %
MEF – I	0,07	$-3,488 \times 10^2$	-6,86 %
MEF – II	0,05	$-3,732 \times 10^2$	-0,35 %

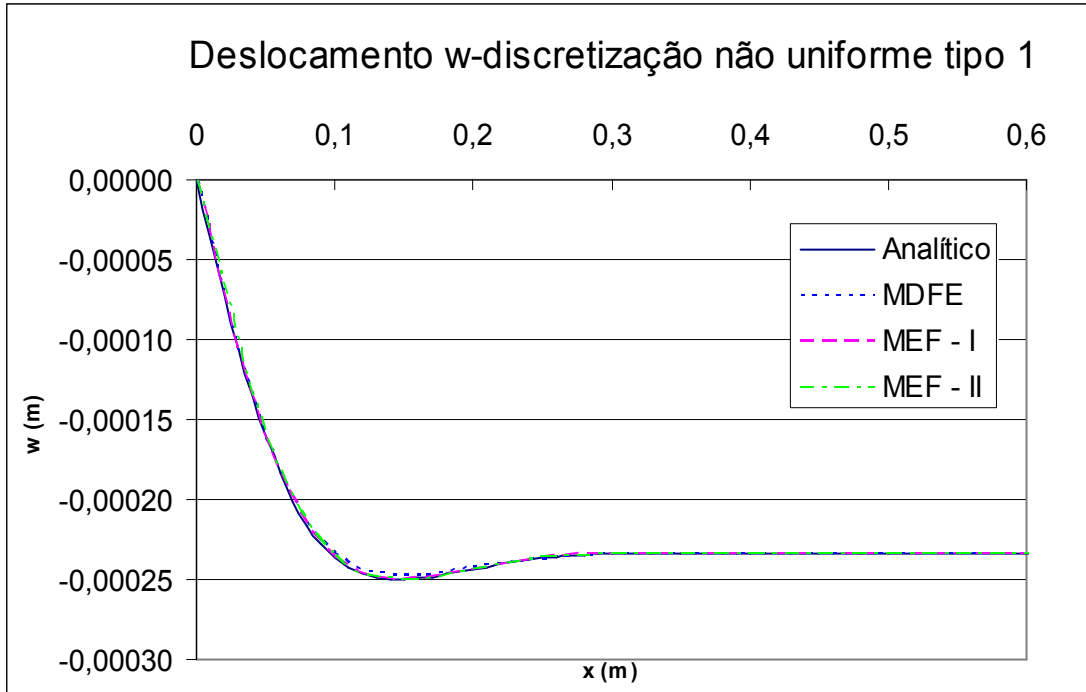


Figura 4.5: Exemplo 1 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

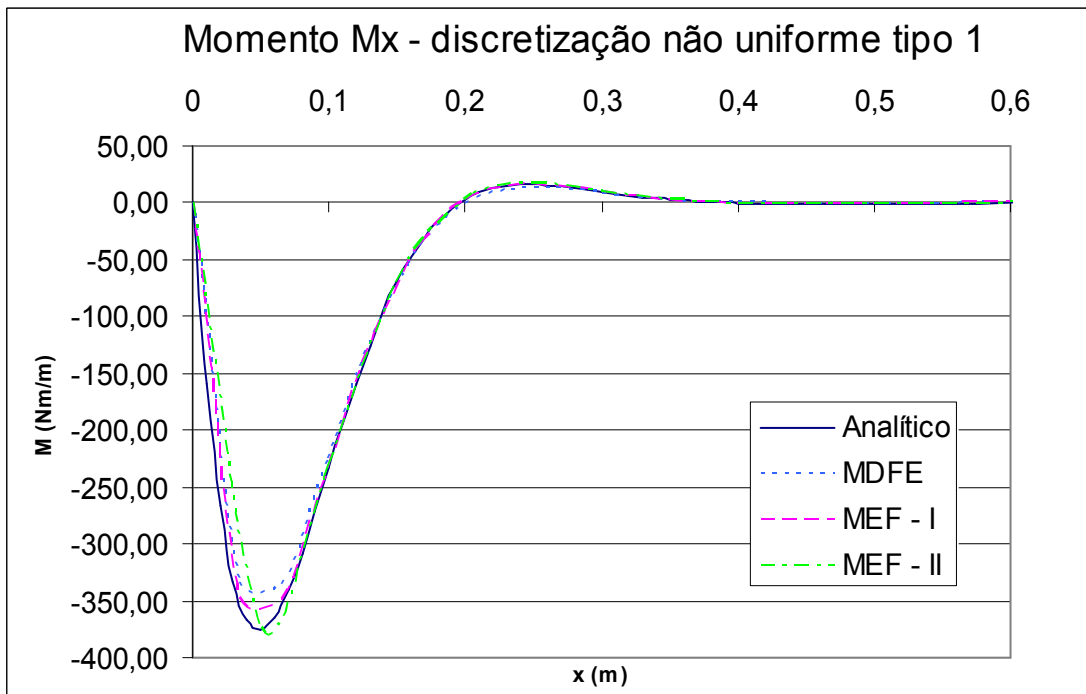


Figura 4.6: Exemplo 1 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

## b) Discretização tipo 2

Neste tipo de discretização, considera-se a casca dividida em três partes, com  $L_1 = 0,2$  m,  $L_2 = 0,3$  m e  $L_3 = 2,5$  m na Figura 4.1-b. Foram adotados, de acordo com os critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,013$  m, 9 elementos com  $\lambda_2 = 0,033$  m e 6 elementos com  $\lambda_3 = 0,417$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,02$  m, 6 elementos com  $\lambda_2 = 0,05$  m e 4 elementos com  $\lambda_3 = 0,625$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.5 e na Tabela 4.6, assim como na Figura 4.7 e na Figura 4.8, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.5: Exemplo 1 – Deslocamento  $w$  máximo para discretização não uniforme tipo 2

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,15	$-2,498 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,15	$-2,494 \times 10^{-4}$	-0,16 %
MEF – I	0,15	$-2,498 \times 10^{-4}$	0,00 %
MEF – II	0,15	$-2,496 \times 10^{-4}$	-0,08 %

Tabela 4.6: Exemplo 1 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abscissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,05	$-3,745 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,05	$-3,703 \times 10^2$	-1,12 %
MEF – I	0,05	$-3,727 \times 10^2$	-0,48 %
MEF – II	0,05	$-3,660 \times 10^2$	-2,27 %

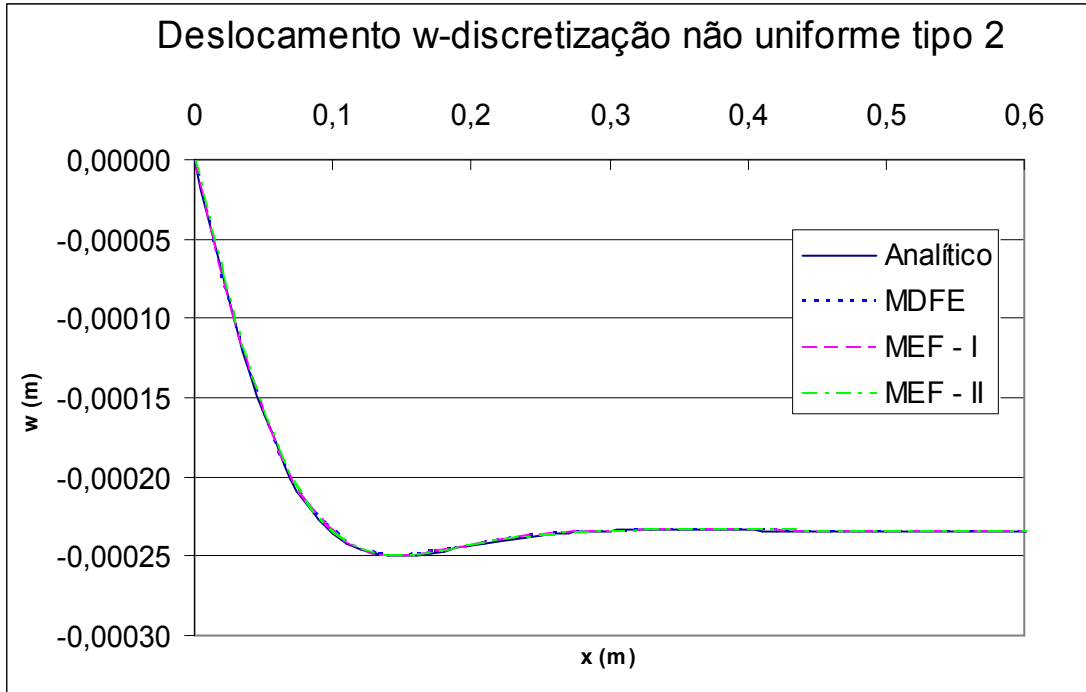


Figura 4.7: Exemplo 1 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

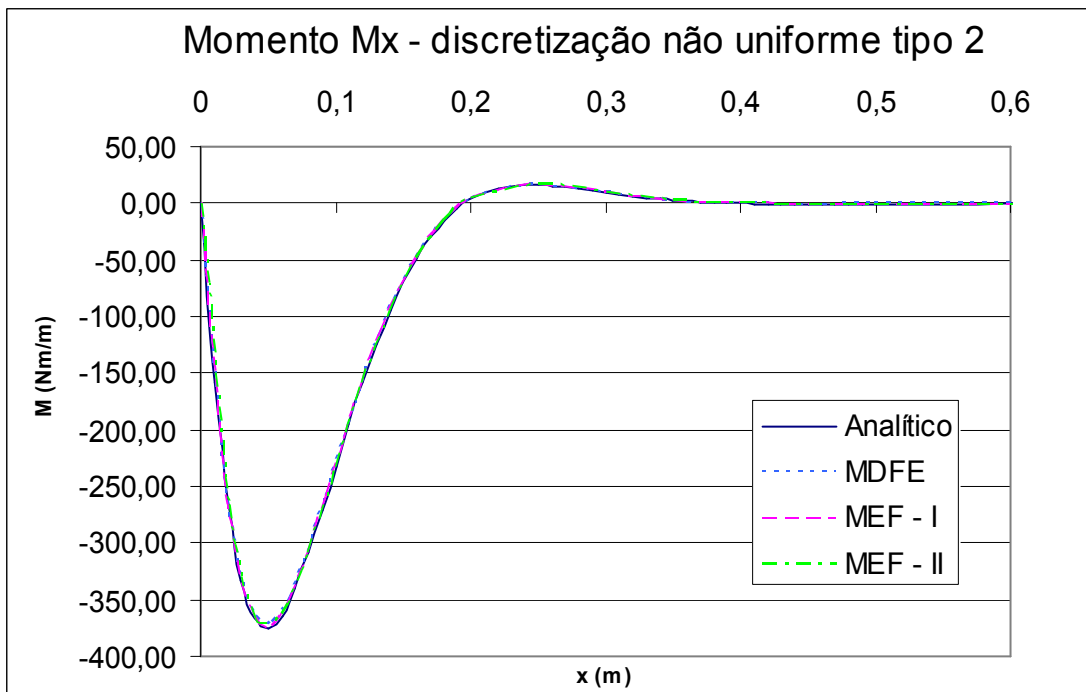


Figura 4.8: Exemplo 1 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

Cabe destacar que os valores de máximos numéricos para deslocamento e momento que aparecem nas tabelas não coincidem necessariamente com os dos respectivos gráficos, uma vez que aqueles foram obtidos nos pontos nodais (obedecendo ao mesmo critério de MITTELBAACH [1]). Obviamente, quanto mais refinada a discretização nas proximidades do máximo, mais representatividade terá o resultado obtido no ponto nodal.

Para o presente exemplo, podem ser estabelecidos os seguintes comentários gerais:

<b>Discretização</b>	<b>Comentários</b>
Uniforme	Para os deslocamentos, nota-se que o gráfico do MEF – I já apresenta um bom ajuste em relação à resposta analítica, particularmente quanto à detecção do máximo, tanto em termos do seu valor como da abscissa do ponto onde ocorre (lembre-se, conforme destacado acima, que os resultados numéricos expostos nas tabelas, onde o do MEF – II aparenta ser o melhor dos três, correspondem a valores nodais e não necessariamente ao máximo dos gráficos). Para os momentos, entretanto, todos os resultados numéricos apresentaram discrepâncias bastante acentuadas em relação aos analíticos, quer em termos dos valores máximos e suas abscissas, quer em termos dos próprios gráficos ao longo da região onde se localizam os efeitos da perturbação de bordo.
Não uniforme tipo 1	Para os deslocamentos, tanto os gráficos quanto os valores da tabela já apresentam uma boa concordância com os resultados analíticos. Todavia, algumas divergências ainda podem ser observadas para os momentos. Note-se, entretanto, que nas tabelas, face à discretização mais refinada junto ao apoio, as abscissas dos pontos nodais de máximo momento e as abscissas dos correspondentes máximos analíticos já se aproximam consideravelmente.

Não uniforme tipo 2	Tanto para os deslocamentos, quanto para os momentos, todos os resultados numéricos apresentados se mostram em perfeita sintonia com os analíticos.
---------------------	---

#### 4.3 Exemplo 2 – Casca engastada submetida à pressão interna constante

Este exemplo é semelhante ao anterior, variando apenas o tipo de apoio, que agora se considera como sendo um engaste (Figura 4.9).

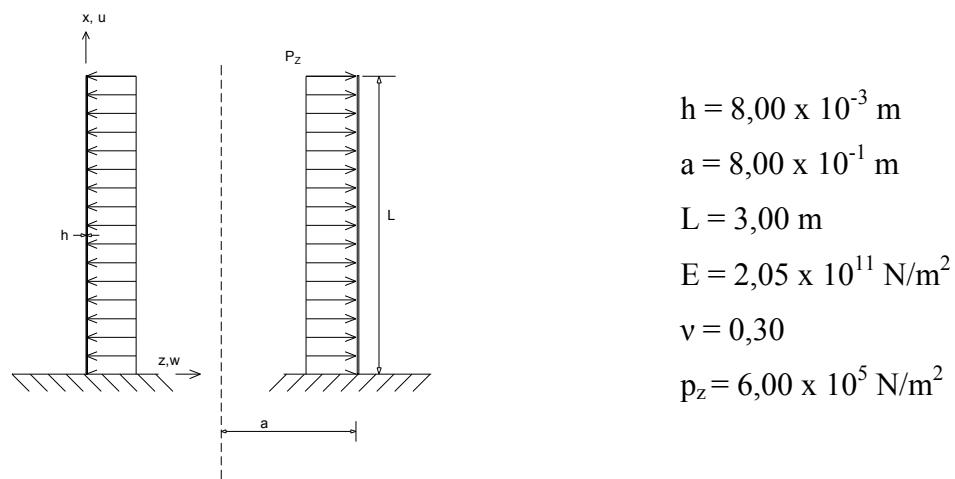


Figura 4.9: Casca cilíndrica engastada submetida a pressão interna constante

##### 4.3.1 Discretização uniforme

Neste caso foram adotados, de acordo com os critérios anteriormente estabelecidos:

Critério I: 40 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,075 \text{ m}$ .

Critério II: 26 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,115 \text{ m}$ .

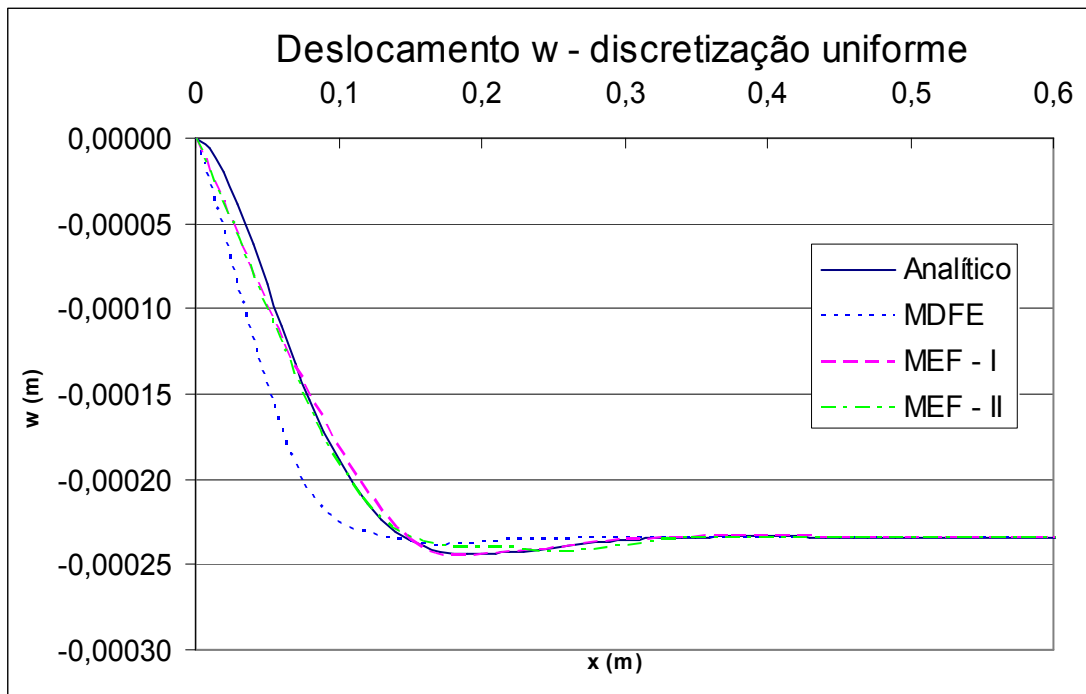
A seguir são apresentados, na Tabela 4.7 e na Tabela 4.8, assim como na Figura 4.10 e na Figura 4.11, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.7: Exemplo 2 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização uniforme

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,22	$-2,385 \times 10^{-4}$	-2,33 %
MEF – I	0,22	$-2,424 \times 10^{-4}$	-0,74 %
MEF – II	0,23	$-2,413 \times 10^{-4}$	-1,19 %

Tabela 4.8: Exemplo 2 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para a discretização uniforme

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	$1,162 \times 10^3$	-
MDFE [1]	$5,860 \times 10^2$	-49,57 %
MEF – I	$1,169 \times 10^3$	-0,60 %
MEF – II	$1,212 \times 10^3$	4,30 %

Figura 4.10: Exemplo 2 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

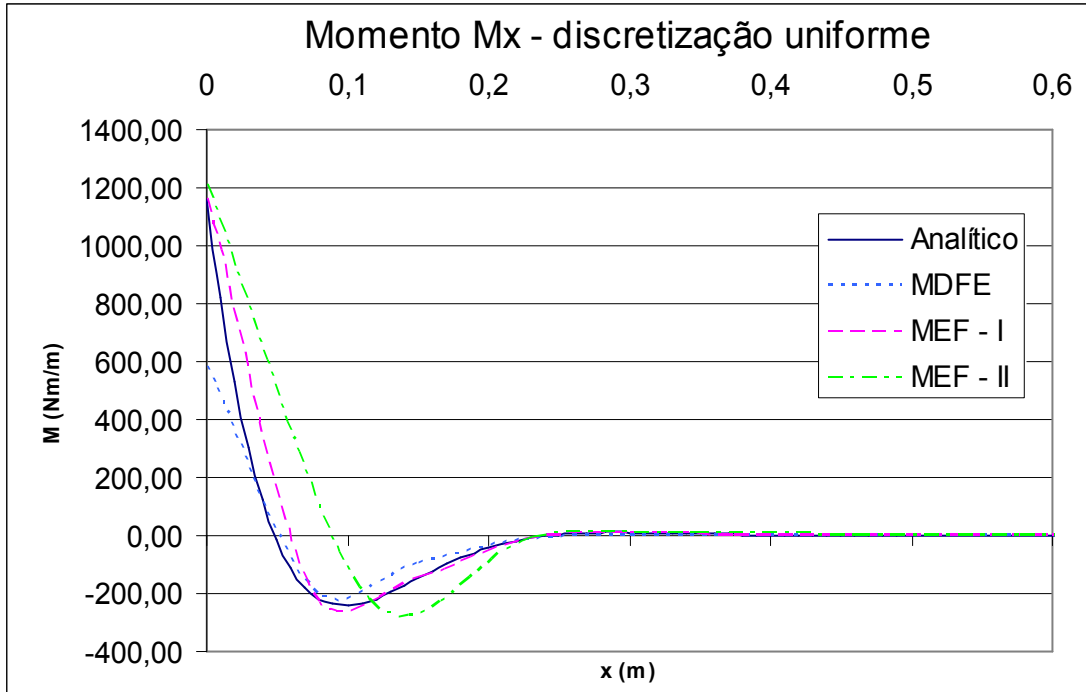


Figura 4.11: Exemplo 2 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

#### 4.3.2 Discretização não uniforme

##### a) Discretização tipo 1

Tomam-se, na Figura 4.1-b,  $L_1 = 0,5$  m,  $L_2 = 2,5$  m e  $L_3 = 0$ . Foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 40 elementos  $\rightarrow$  20 elementos com  $\lambda_1 = 0,025$  m e 20 elementos com  $\lambda_2 = 0,125$  m.

Critério II: 26 elementos  $\rightarrow$  13 elementos com  $\lambda_1 = 0,038$  m e 13 elementos com  $\lambda_2 = 0,192$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.9 e na Tabela 4.10, assim como na Figura 4.12 e na Figura 4.13, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.9: Exemplo 2 – Deslocamento  $w$  máximo para discretização não uniforme tipo 1

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,20	$-2,433 \times 10^{-4}$	-0,37 %
MEF – I	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	0,00 %
MEF – II	0,20	$-2,441 \times 10^{-4}$	-0,04 %

Tabela 4.10: Exemplo 2 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para a discretização não uniforme tipo 1

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	$1,162 \times 10^3$	-
MDFE [1]	$1,072 \times 10^3$	-7,74 %
MEF – I	$1,162 \times 10^3$	0,00 %
MEF – II	$1,162 \times 10^3$	0,00 %

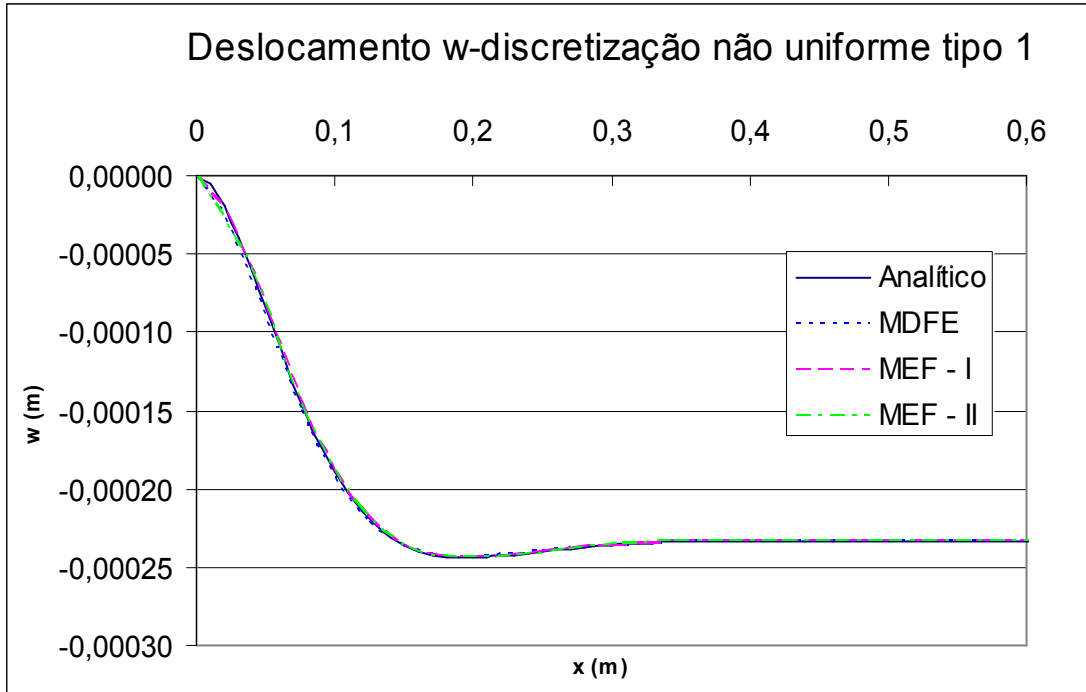


Figura 4.12: Exemplo 2 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

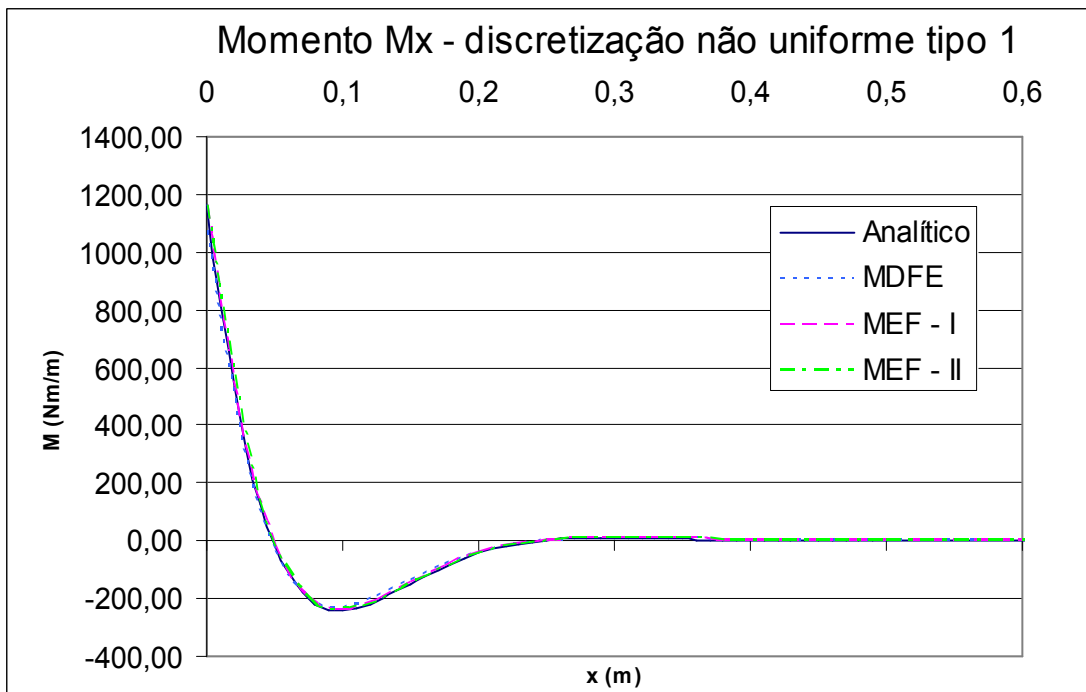


Figura 4.13: Exemplo 2 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

## b) Discretização tipo 2

A casca foi dividida em três partes:  $L_1 = 0,2$  m,  $L_2 = 0,3$  m e  $L_3 = 2,5$  m, sendo adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 40 elementos  $\rightarrow$  20 elementos com  $\lambda_1 = 0,010$  m, 12 elementos com  $\lambda_2 = 0,025$  m e 8 elementos com  $\lambda_3 = 0,3125$  m.

Critério II: 26 elementos  $\rightarrow$  13 elementos com  $\lambda_1 = 0,015$  m, 8 elementos com  $\lambda_2 = 0,0375$  m e 5 elementos com  $\lambda_3 = 0,50$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.11 e na Tabela 4.12, assim como na Figura 4.14 e na Figura 4.15, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.11: Exemplo 2 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	0,00 %
MEF – I	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	0,00 %
MEF – II	0,20	$-2,442 \times 10^{-4}$	0,00 %

Tabela 4.12: Exemplo 2 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para a discretização não uniforme tipo 2

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	$1,162 \times 10^3$	-
MDFE [1]	$1,147 \times 10^3$	-1,29 %
MEF – I	$1,162 \times 10^3$	0,00 %
MEF – II	$1,162 \times 10^3$	0,00 %

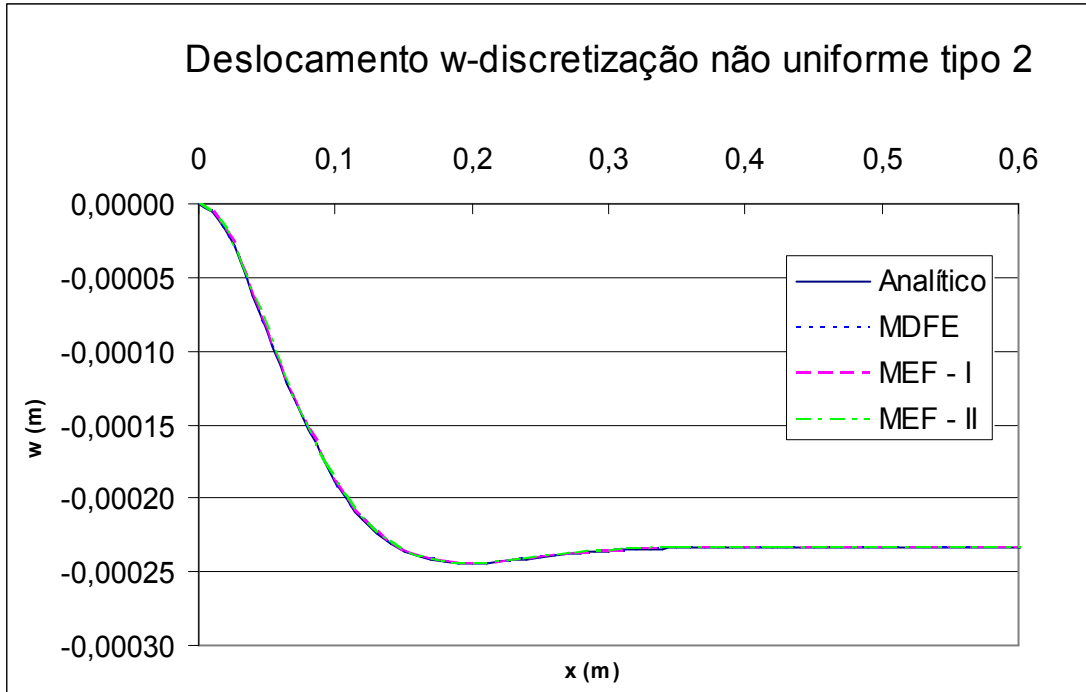


Figura 4.14: Exemplo 2 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

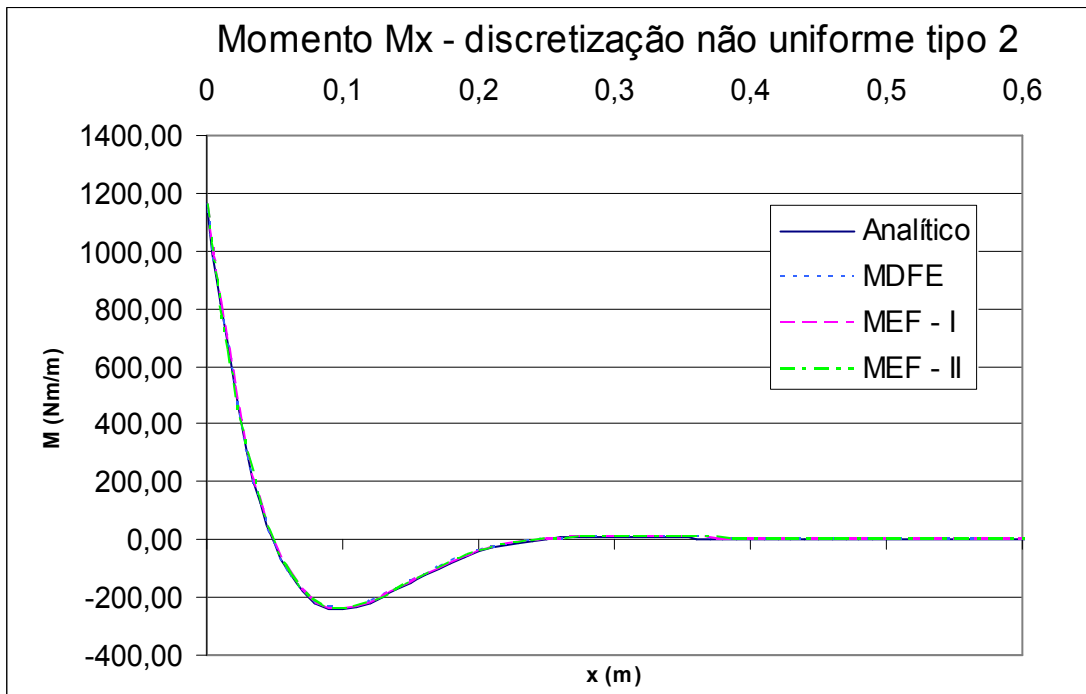


Figura 4.15: Exemplo 2 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

Para este exemplo, cabem os seguintes comentários:

<b>Discretização</b>	<b>Comentários</b>
Uniforme	Quanto aos gráficos do deslocamento $w$ , como um todo, nota-se que os do MEF – I e do MEF – II já apresentam boa concordância com a curva analítica. Observa-se, também, que todos os valores máximos já situam-se próximos dos analíticos. Para os momentos, onde há defasagens ainda significativas nos resultados, pode-se dizer que os gráficos relativos ao MDFE e ao MEF – I, globalmente, são os que melhor se aproximam da resposta analítica, porém o do MDFE, estranhamente, apresenta um erro de cerca de 50 % no valor do momento máximo (no engaste).
Não uniforme tipo 1	Os gráficos, tanto dos deslocamentos quanto dos momentos, já se aproximam bastante dos analíticos, evidenciando-se, entretanto, pelos resultados da tabela, que o valor máximo de $M_x$ pelo MDFE ainda apresenta uma defasagem da ordem de 8 % em relação ao resultado analítico.
Não uniforme tipo 2	Todos os resultados numéricos podem ser considerados como plenamente satisfatórios.

#### 4.4 Exemplo 3 – Casca apoiada submetida à variação uniforme de temperatura

Na Figura 4.16 vemos representado este exemplo e os dados numéricos utilizados.

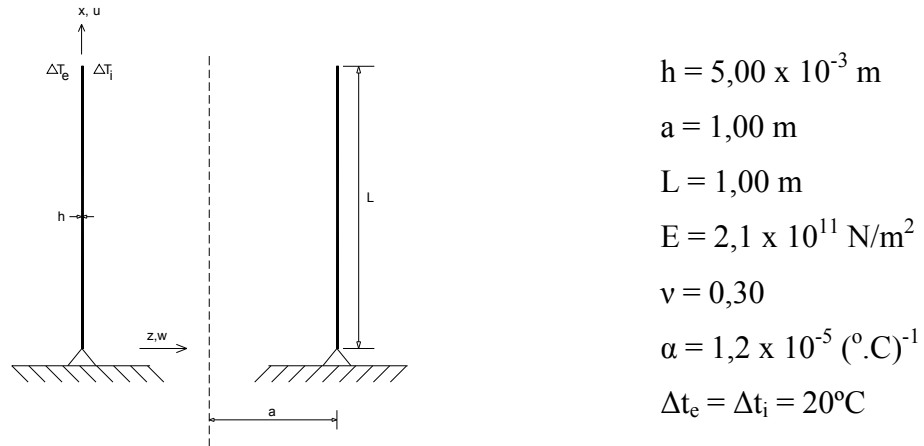


Figura 4.16: Casca cilíndrica apoiada submetida a variação uniforme de temperatura

##### 4.4.1 Discretização uniforme

Foram adotados, neste caso, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,033 \text{ m}$ .

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,05 \text{ m}$ .

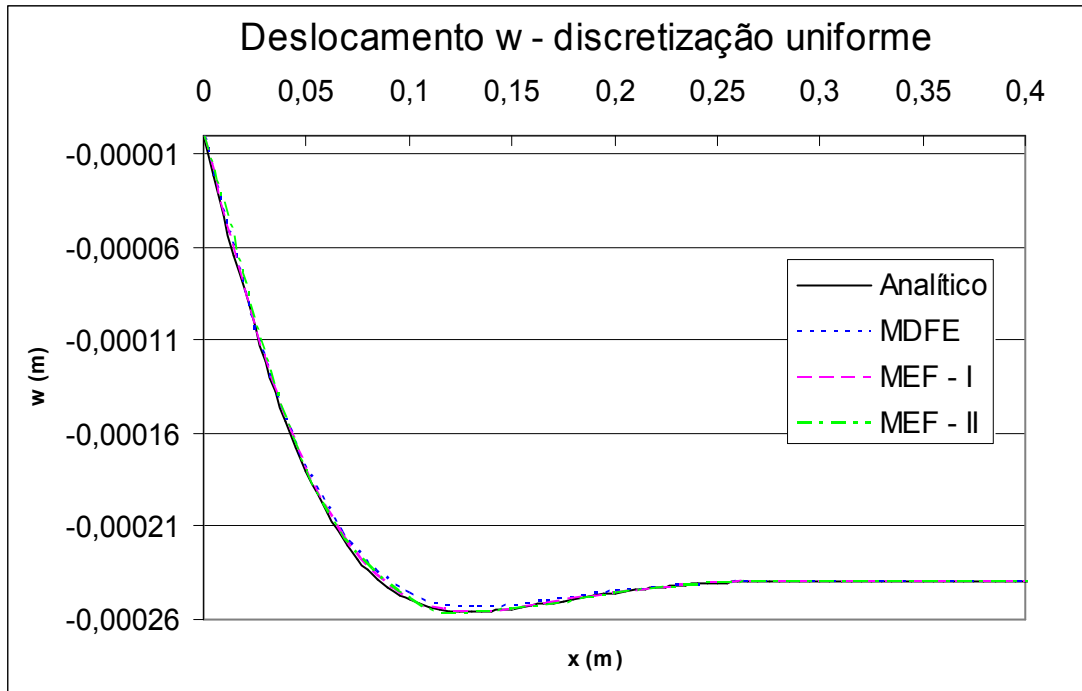
A seguir são apresentados, na Tabela 4.13 e na Tabela 4.14, assim como na Figura 4.17 e na Figura 4.18, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.13: Exemplo 3 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização uniforme

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,13	$-2,561 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,13	$-2,536 \times 10^{-4}$	-0,98 %
MEF – I	0,13	$-2,559 \times 10^{-4}$	-0,08 %
MEF – II	0,15	$-2,541 \times 10^{-4}$	0,78 %

Tabela 4.14: Exemplo 3 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização uniforme

	Abscissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,045	$-1,228 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,033	$-1,123 \times 10^2$	-8,55 %
MEF – I	0,033	$-1,182 \times 10^2$	-3,75 %
MEF – II	0,050	$-1,207 \times 10^2$	-1,71 %

Figura 4.17: Exemplo 3 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

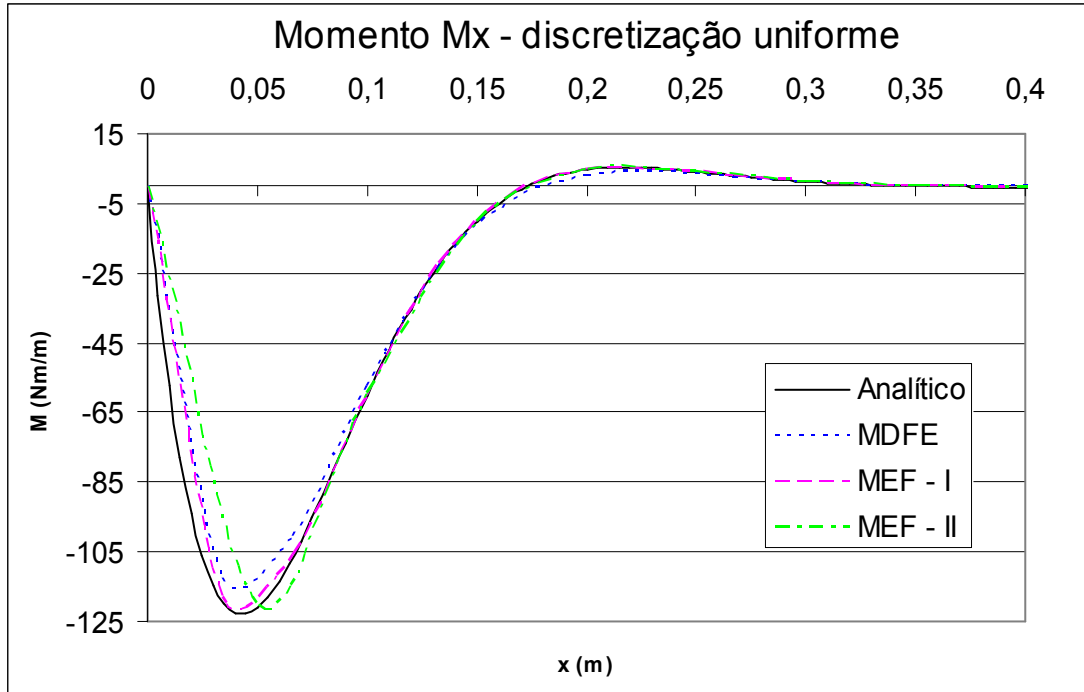


Figura 4.18: Exemplo 3 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

Nas figuras mostra-se o comportamento dos deslocamentos e dos momentos até a altura de 0,4 m na casca, uma vez que, a partir de  $x \approx 0,33$  m, todos os valores numéricos obtidos já reproduzem, de forma precisa, a resposta (constante com  $x$ ) de membrana.

#### 4.4.2 Discretização não uniforme

##### a) Discretização tipo 1

Neste caso, faz-se na Figura 4.1-b  $L_1 = 0,3$  m,  $L_2 = 0,7$  m e  $L_3 = 0$ . Foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,02$  m e 15 elementos com  $\lambda_2 = 0,467$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,03$  m e 10 elementos com  $\lambda_2 = 0,07$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.15 e na Tabela 4.16, assim como na Figura 4.19 e na Figura 4.20, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.15: Exemplo 3 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,13	$-2,561 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,14	$-2,547 \times 10^{-4}$	-0,55 %
MEF – I	0,14	$-2,555 \times 10^{-4}$	-0,23 %
MEF – II	0,12	$-2,554 \times 10^{-4}$	-0,27 %

Tabela 4.16: Exemplo 3 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abcissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,045	$-1,228 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,040	$-1,201 \times 10^2$	-2,20 %
MEF – I	0,040	$-1,224 \times 10^2$	-0,33 %
MEF – II	0,030	$-1,145 \times 10^2$	-6,76 %

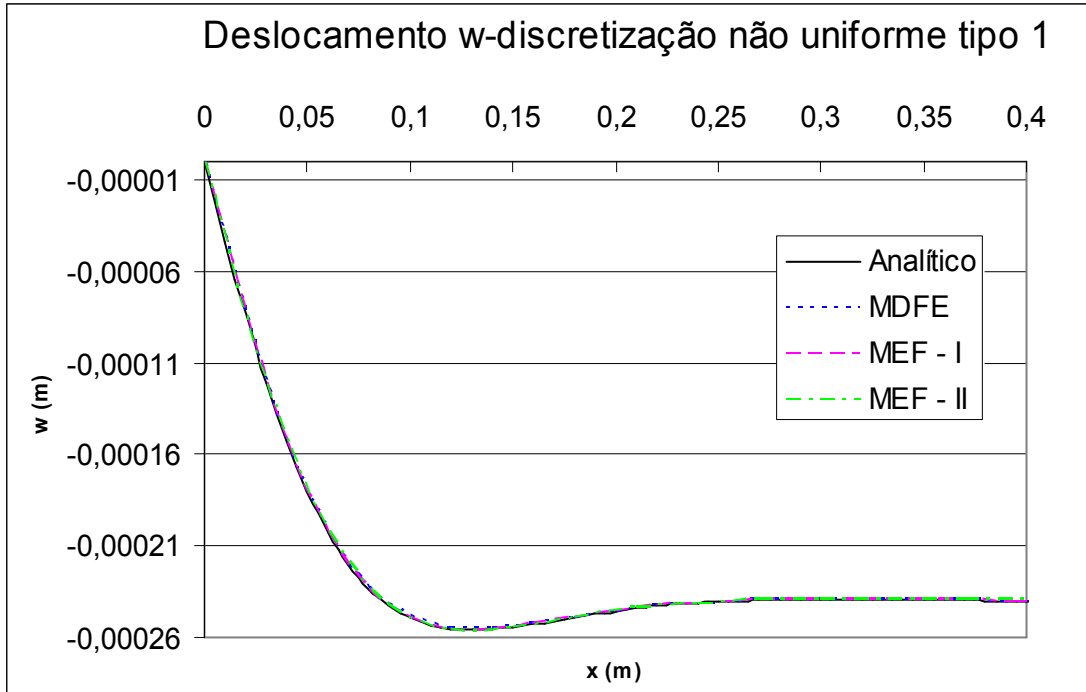


Figura 4.19: Exemplo 3 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

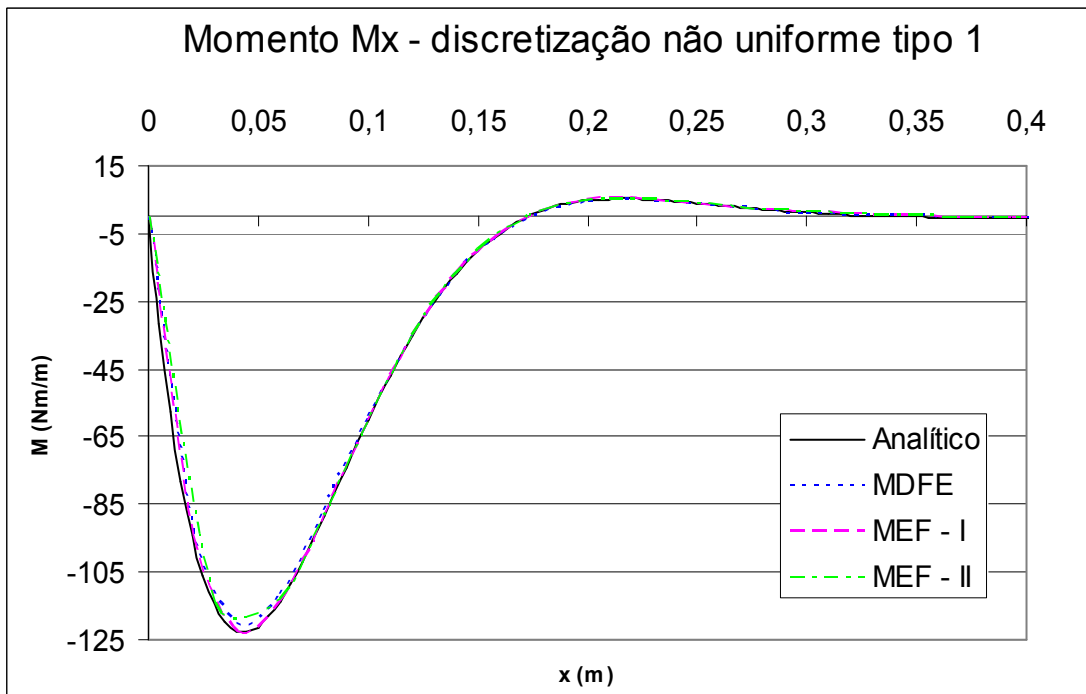


Figura 4.20: Exemplo 3 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

## b) Discretização tipo 2

Foram tomadas na casca, de acordo com a Figura 4.1-b,  $L_1 = 0,25$  m,  $L_2 = 0,25$  m e  $L_3 = 0,50$  m, sendo então adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  20 elementos com  $\lambda_1 = 0,0125$  m, 5 elementos com  $\lambda_2 = 0,05$  m e 5 elementos com  $\lambda_3 = 0,10$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  14 elementos com  $\lambda_1 = 0,0178$  m, 3 elementos com  $\lambda_2 = 0,083$  m e 3 elementos com  $\lambda_3 = 0,167$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.17 e na Tabela 4.18, assim como na Figura 4.21 e na Figura 4.22, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.17: Exemplo 3 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,13	$-2,561 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,125	$-2,556 \times 10^{-4}$	-0,20 %
MEF – I	0,125	$-2,559 \times 10^{-4}$	-0,08 %
MEF – II	0,125	$-2,559 \times 10^{-4}$	-0,08 %

Tabela 4.18: Exemplo 3 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abcissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,045	$-1,228 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,0375	$-1,206 \times 10^2$	-1,79 %
MEF – I	0,0375	$-1,215 \times 10^2$	-1,06 %
MEF – II	0,0357	$-1,204 \times 10^2$	-1,95 %

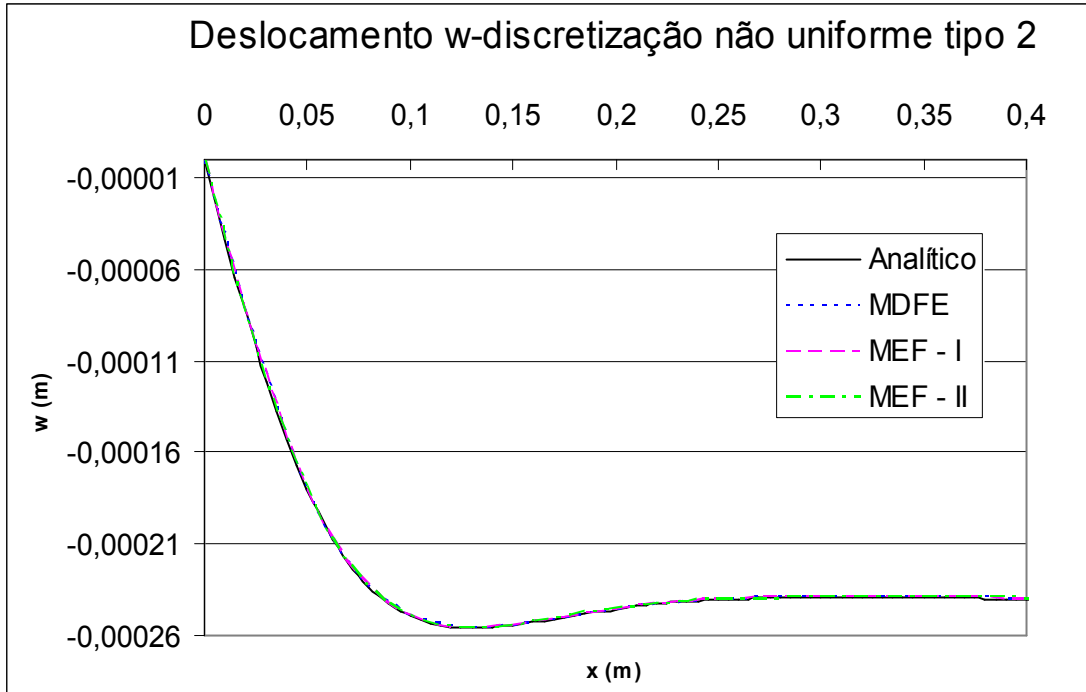


Figura 4.21: Exemplo 3 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

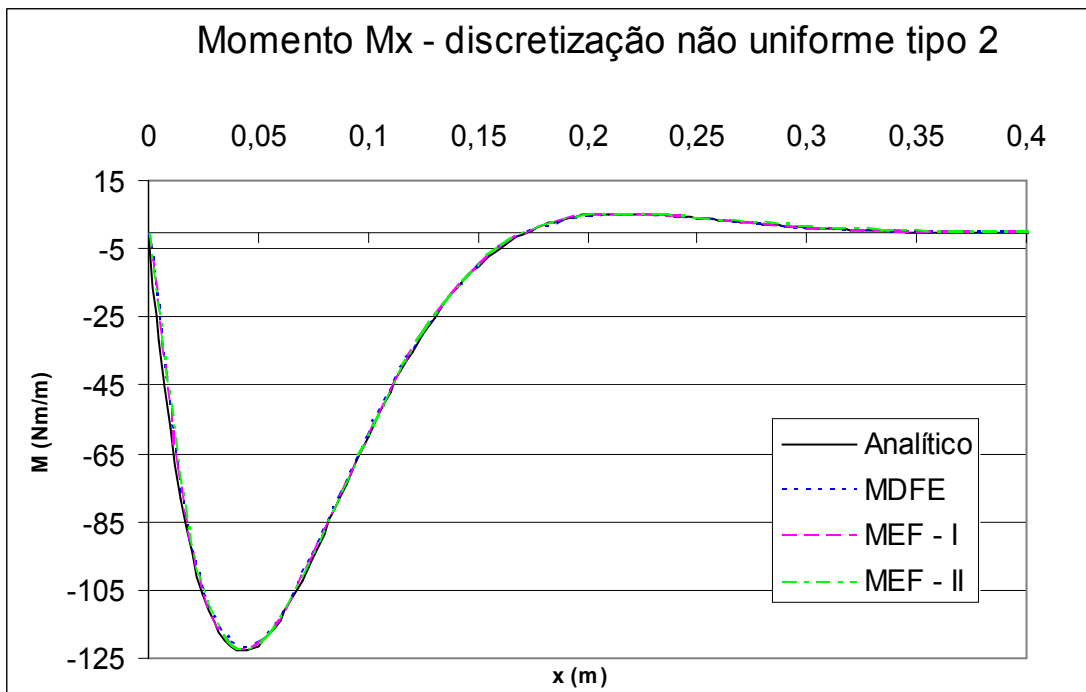


Figura 4.22: Exemplo 3 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

Os comentários para este exemplo podem ser assim estabelecidos:

Discretização	Comentários
Uniforme	Os deslocamentos, tanto em termos das curvas como de valores máximos, já mostram boa concordância com os resultados analíticos. O mesmo não se pode dizer, entretanto, dos gráficos dos momentos, ainda que apenas o do MDFE tenha apresentado uma defasagem mais acentuada no valor máximo do momento (cerca de 8,5 %).
Não uniforme tipo 1	Os momentos já apresentam, nesta circunstância, uma boa proximidade com os resultados analíticos, exceto quanto ao valor máximo dado pelo MEF – II, com erro de aproximadamente 7 % (note-se que, para a discretização uniforme, o erro correspondente não atingiu 2 %, porém os valores obtidos não se referem aos mesmos pontos nodais).
Não uniforme tipo 2	Todos os resultados já se revelam de ótima qualidade.

#### 4.5 Exemplo 4 – Casca apoiada submetida à variação linear de temperatura na espessura

Este exemplo é semelhante ao representado na Figura 4.16, porém atribuindo-se agora os seguintes valores para variação de temperatura nas superfícies externa e interna da casca:  $\Delta t_e = 20^\circ\text{C}$  e  $\Delta t_i = - 20^\circ\text{C}$ .

##### 4.5.1 Discretização uniforme

Neste caso de discretização foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 40 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,033$  m.

Critério II: 26 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,038$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.19 e na Tabela 4.20, assim como na Figura 4.23 e na Figura 4.24, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.19: Exemplo 4 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização uniforme

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	1,00	$1,888 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	1,00	$1,687 \times 10^{-4}$	-10,65 %
MEF – I	1,00	$1,882 \times 10^{-4}$	-0,32 %
MEF – II	1,00	$1,873 \times 10^{-4}$	-0,79 %

Tabela 4.20: Exemplo 4 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização uniforme

	Abcissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,130	$3,201 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,125	$3,182 \times 10^2$	-0,59 %
MEF – I	0,125	$3,199 \times 10^2$	-0,06 %
MEF – II	0,115	$3,184 \times 10^2$	-0,53 %

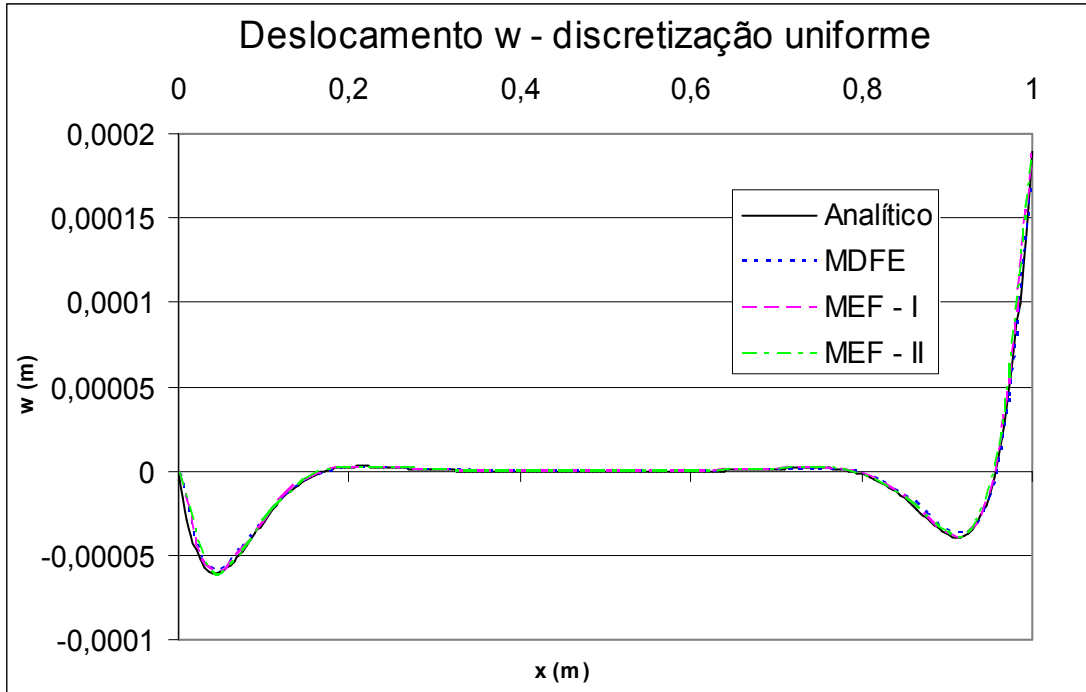


Figura 4.23: Exemplo 4 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

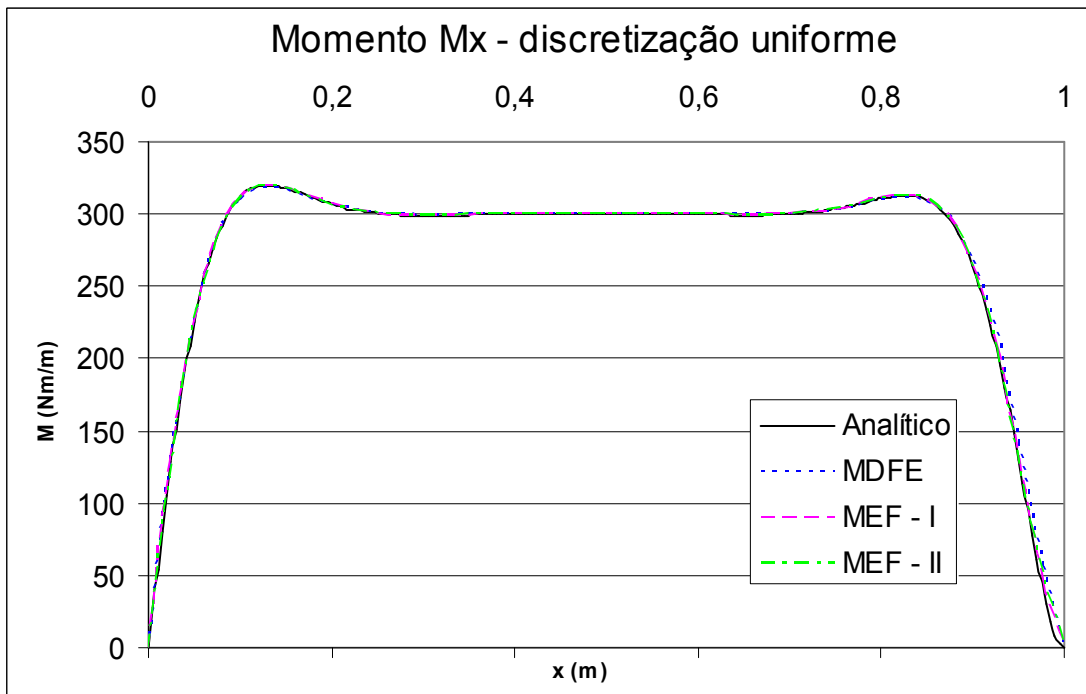


Figura 4.24: Exemplo 4 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

#### 4.5.2 Discretização não uniforme

##### a) Discretização tipo 1

Foram considerados na casca, de acordo com a Figura 4.1-b,  $L_1 = 0,25$  m,  $L_2 = 0,50$  m e  $L_3 = 0,25$  m, sendo adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 40 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,0167$  m, 10 elementos com  $\lambda_2 = 0,05$  m e 15 elementos com  $\lambda_3 = 0,0167$  m

Critério II: 26 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,025$  m, 6 elementos com  $\lambda_2 = 0,083$  m e 10 elementos com  $\lambda_3 = 0,025$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.21 e na Tabela 4.22, assim como na Figura 4.25 e na Figura 4.26, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.21: Exemplo 4 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	1,00	$1,888 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	1,00	$1,796 \times 10^{-4}$	-4,87 %
MEF – I	1,00	$1,885 \times 10^{-4}$	-0,16 %
MEF – II	1,00	$1,882 \times 10^{-4}$	-0,32 %

Tabela 4.22: Exemplo 4 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abcissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,130	$3,201 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,133	$3,193 \times 10^2$	-0,25 %
MEF – I	0,133	$3,200 \times 10^2$	-0,03 %
MEF – II	0,125	$3,199 \times 10^2$	-0,06 %

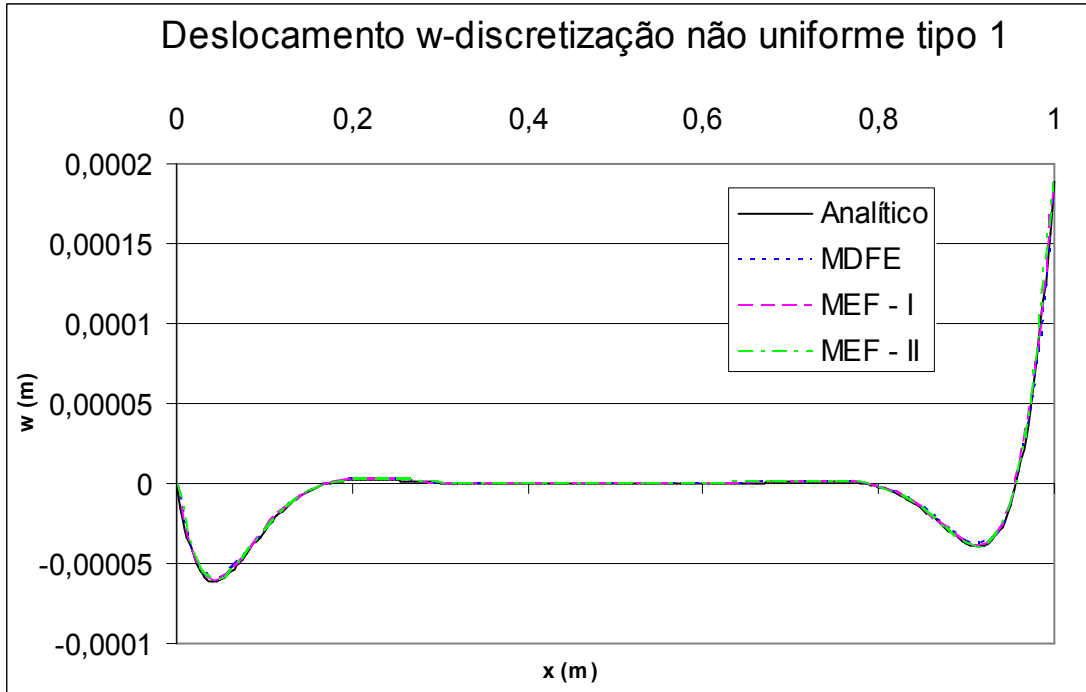


Figura 4.25: Exemplo 4 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

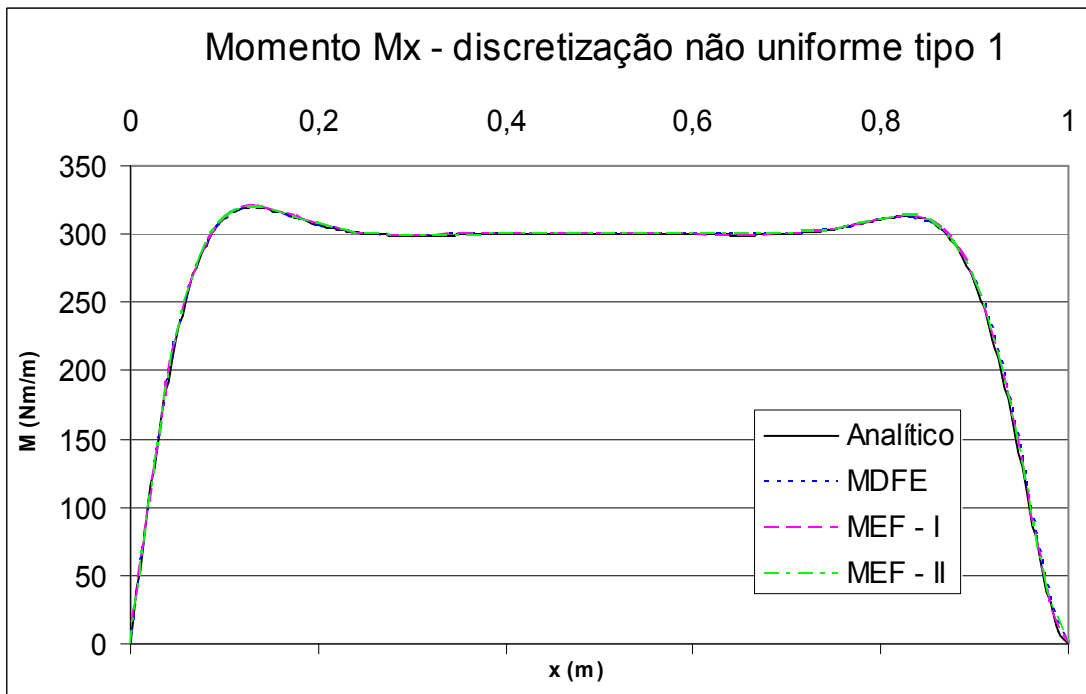


Figura 4.26: Exemplo 4 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

## b) Discretização tipo 2

Foram agora tomados, de acordo com a Figura 4.1-b,  $L_1 = 0,20$  m,  $L_2 = 0,60$  m e  $L_3 = 0,20$  m, considerando-se, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 40 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,013$  m, 10 elementos com  $\lambda_2 = 0,06$  m e 15 elementos com  $\lambda_3 = 0,013$  m.

Critério II: 26 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,02$  m, 6 elementos com  $\lambda_2 = 0,10$  m e 10 elementos com  $\lambda_3 = 0,02$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.23 e na Tabela 4.24, assim como na Figura 4.27 e na Figura 4.28, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.23: Exemplo 4 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	1,00	$1,888 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	1,00	$1,855 \times 10^{-4}$	-1,75 %
MEF – I	1,00	$1,886 \times 10^{-4}$	-0,11 %
MEF – II	1,00	$1,884 \times 10^{-4}$	-0,21 %

Tabela 4.24: Exemplo 4 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abscissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,130	$3,201 \times 10^2$	-
MDFE [1]	0,133	$3,190 \times 10^2$	-0,34 %
MEF – I	0,133	$3,200 \times 10^2$	-0,03 %
MEF – II	0,140	$3,195 \times 10^2$	-0,19 %

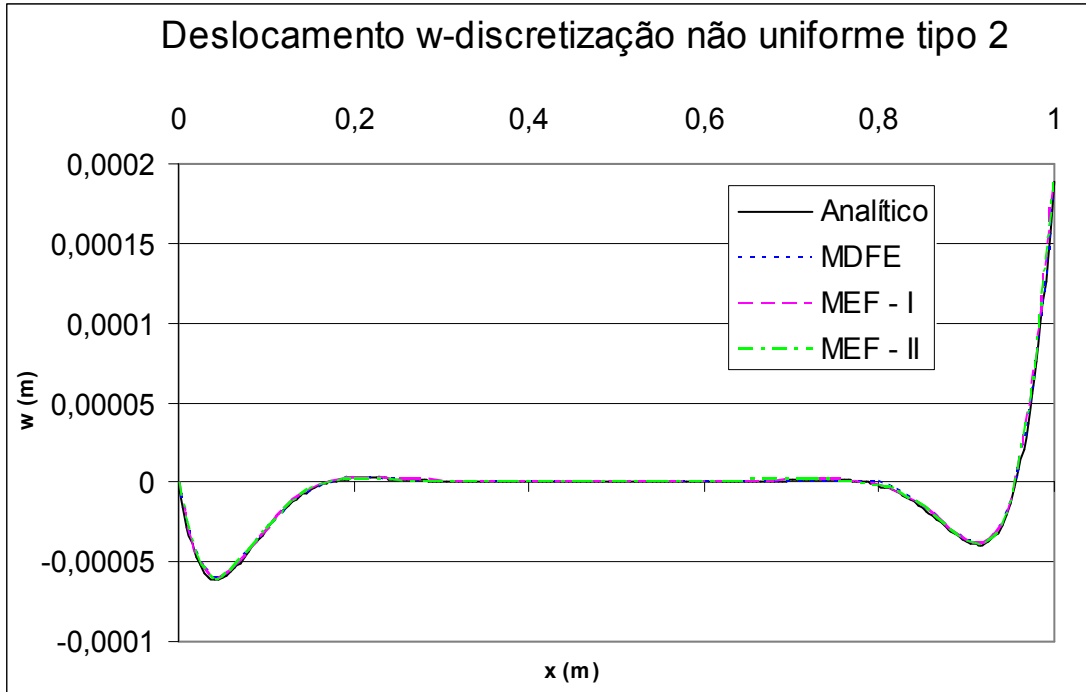


Figura 4.27: Exemplo 4 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

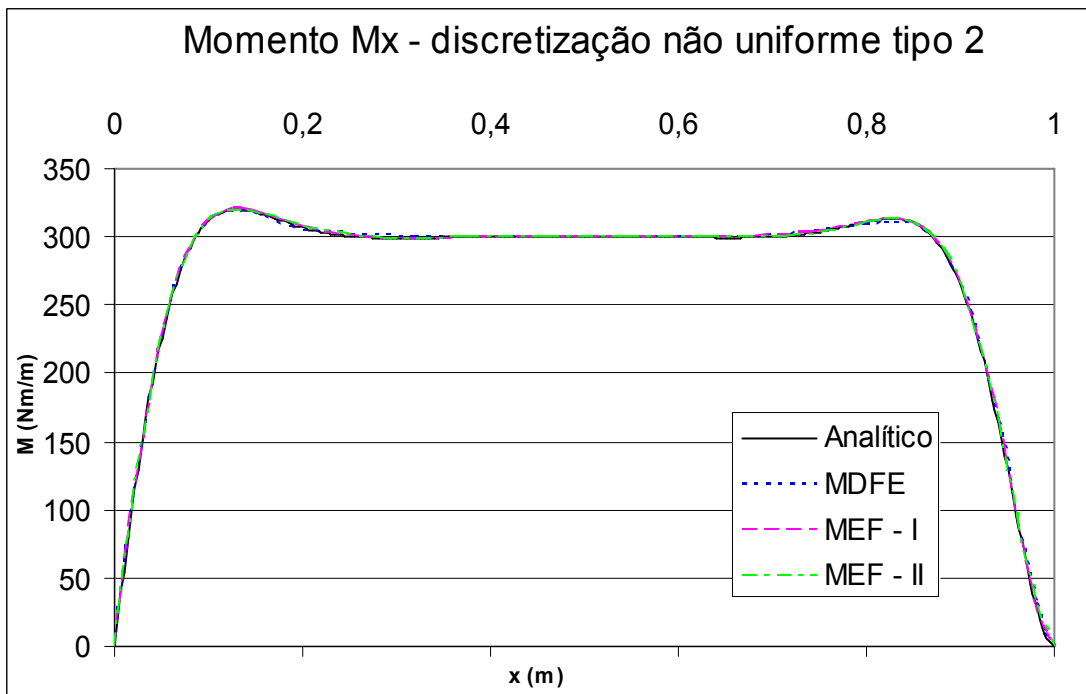


Figura 4.28: Exemplo 4 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

Discretização	Comentários
Uniforme	Os resultados numéricos para $w$ e $M_x$ , em termos gerais, já se situam bem próximo dos analíticos, notando-se apenas uma defasagem ainda acentuada (da ordem de 10,5 %) no valor de $w_{\max}$ pelo MDFE.
Não uniforme tipo 1	O resultado para $w_{\max}$ , pelo MDFE, ainda apresenta uma diferença expressiva (cerca de 5 %) em relação ao resultado analítico.
Não uniforme tipo 2	Todos os resultados numéricos já atendem às expectativas.

#### 4.6 Exemplo 5 – Casca apoiada submetida à solicitação de bordo e com variação de temperatura uniforme no domínio

Este exemplo, em relação ao representado na Figura 4.16, apresenta também um momento  $M_0$ , por unidade de comprimento, atuando no bordo inferior da casca.

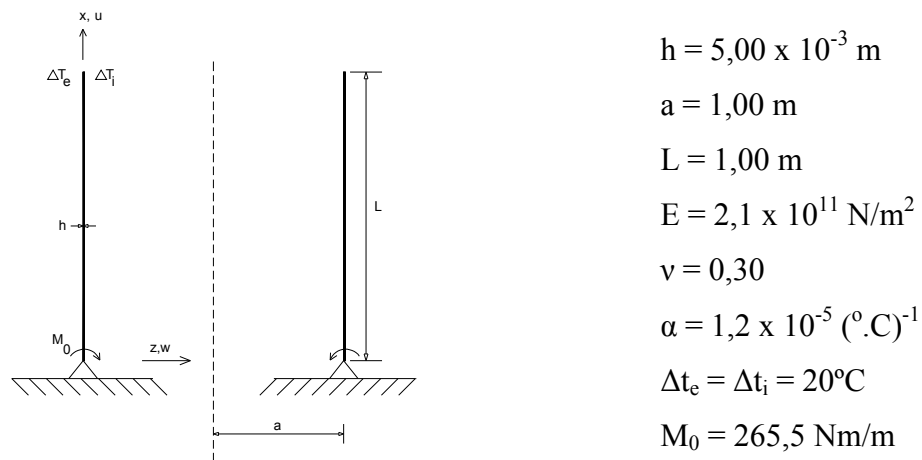


Figura 4.29: Casca apoiada submetida a solicitação de bordo e com variação de temperatura uniforme no domínio

#### 4.6.1 Discretização uniforme

Neste caso de discretização foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,033$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,05$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.25, assim como na Figura 4.30 e na Figura 4.31, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.25: Exemplo 5 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização uniforme

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,16	$-2,506 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,17	$-2,486 \times 10^{-4}$	-0,80 %
MEF – I	0,17	$-2,505 \times 10^{-4}$	-0,04 %
MEF – II	0,15	$-2,497 \times 10^{-4}$	-0,36 %

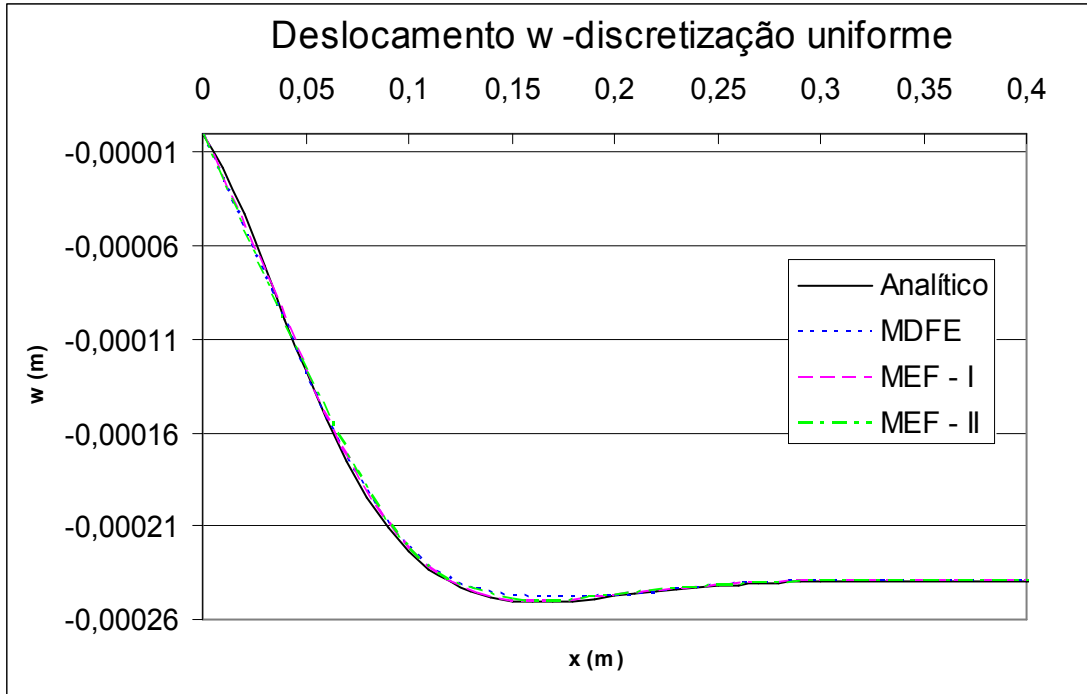


Figura 4.30: Exemplo 5 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

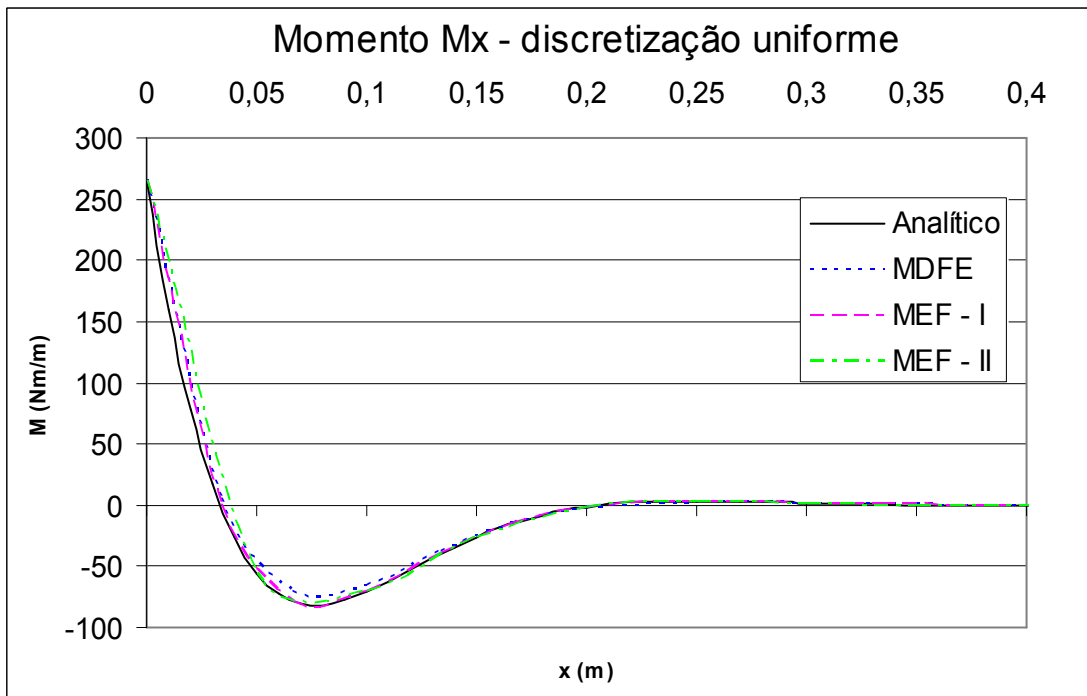


Figura 4.31: Exemplo 5 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

#### 4.6.2 Discretização não uniforme

##### a) Discretização tipo 1

A casca foi dividida em duas partes, a saber:  $L_1 = 0,17$  m e  $L_2 = 0,83$  m (Figura 4.1-b), sendo adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,011$  m e 15 elementos com  $\lambda_2 = 0,055$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,017$  m e 10 elementos com  $\lambda_2 = 0,083$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.26, assim como na Figura 4.32 e na Figura 4.33, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.26: Exemplo 5 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,16	$-2,506 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,16	$-2,505 \times 10^{-4}$	-0,04 %
MEF – I	0,16	$-2,505 \times 10^{-4}$	-0,04 %
MEF – II	0,17	$-2,503 \times 10^{-4}$	-0,12 %

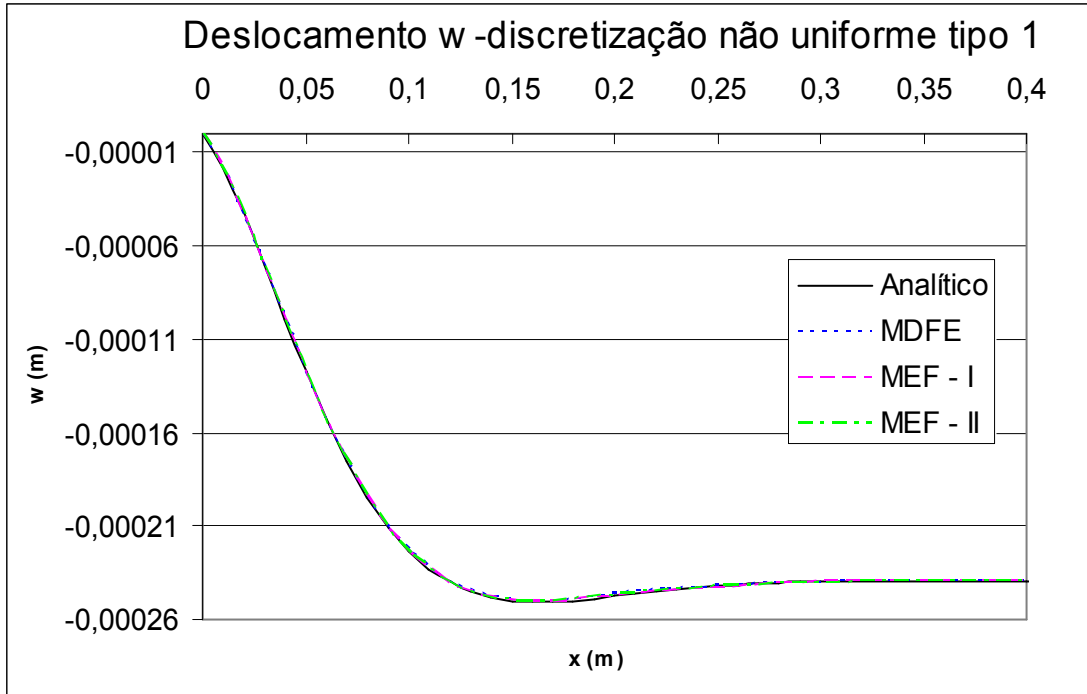


Figura 4.32: Exemplo 5 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

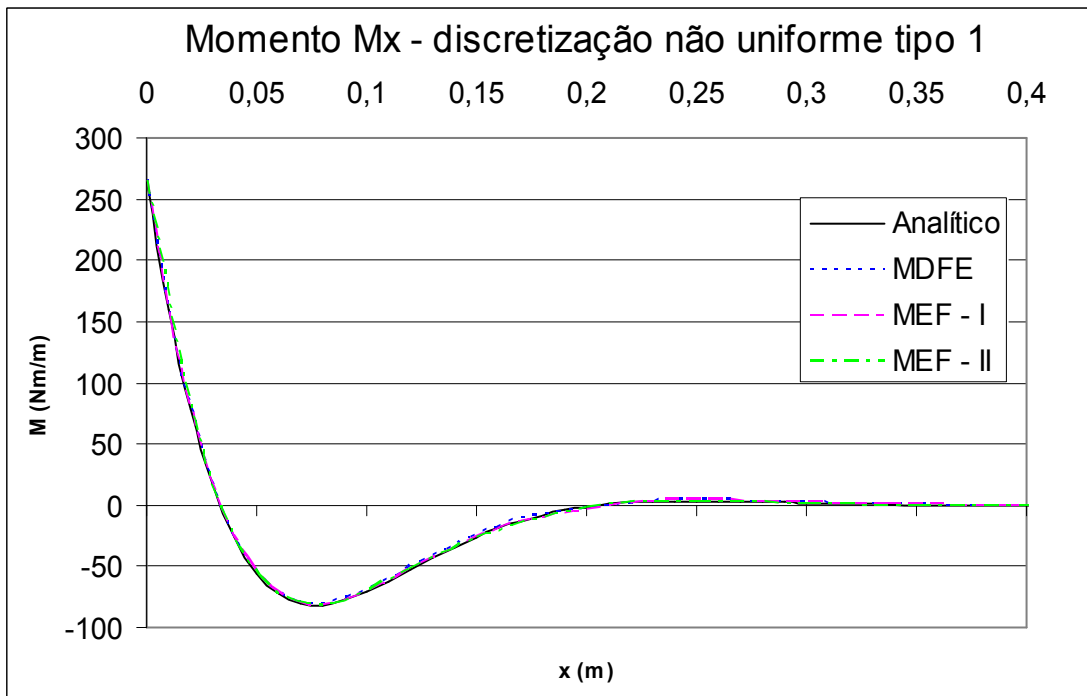


Figura 4.33: Exemplo 5 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

## b) Discretização tipo 2

A casca foi dividida em três partes, com  $L_1 = 0,10$  m,  $L_2 = 0,20$  m e  $L_3 = 0,70$  m na Figura 4.1-b. Foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  20 elementos com  $\lambda_1 = 0,005$  m, 5 elementos com  $\lambda_2 = 0,04$  m e 5 elementos com  $\lambda_3 = 0,14$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  14 elementos com  $\lambda_1 = 0,007$  m, 3 elementos com  $\lambda_2 = 0,067$  m e 3 elementos com  $\lambda_3 = 0,23$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.27, assim como na Figura 4.34 e na Figura 4.35, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.27: Exemplo 5 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,16	$-2,506 \times 10^{-4}$	-
MDFE [1]	0,18	$-2,491 \times 10^{-4}$	-0,60 %
MEF – I	0,18	$-2,498 \times 10^{-4}$	-0,32 %
MEF – II	0,17	$-2,504 \times 10^{-4}$	-0,08 %

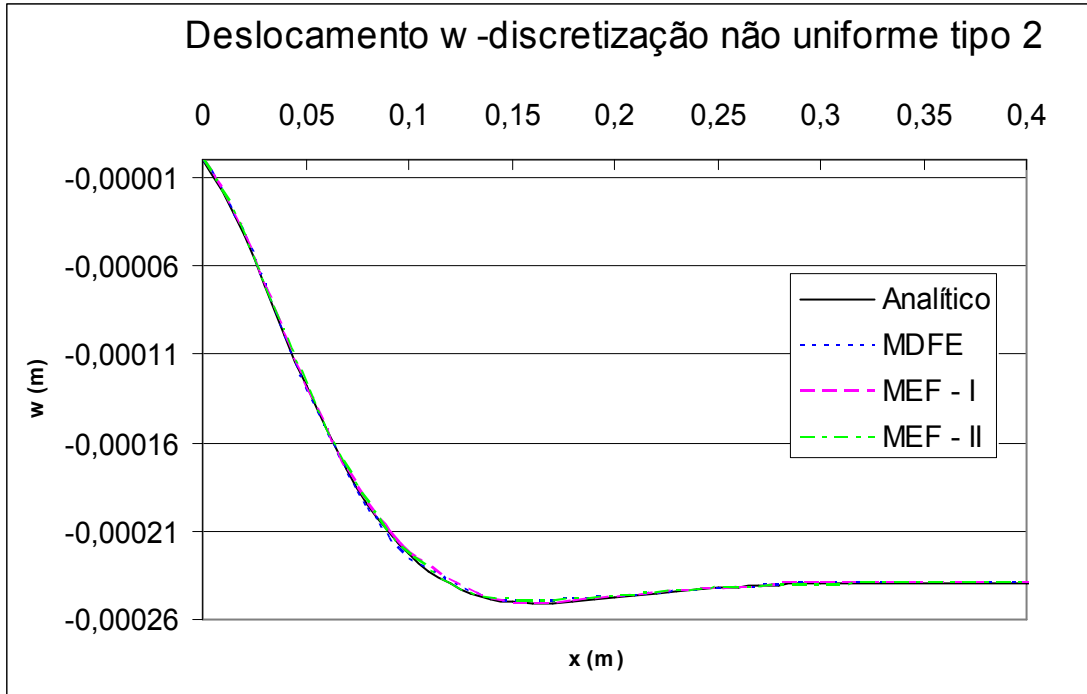


Figura 4.34: Exemplo 5 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

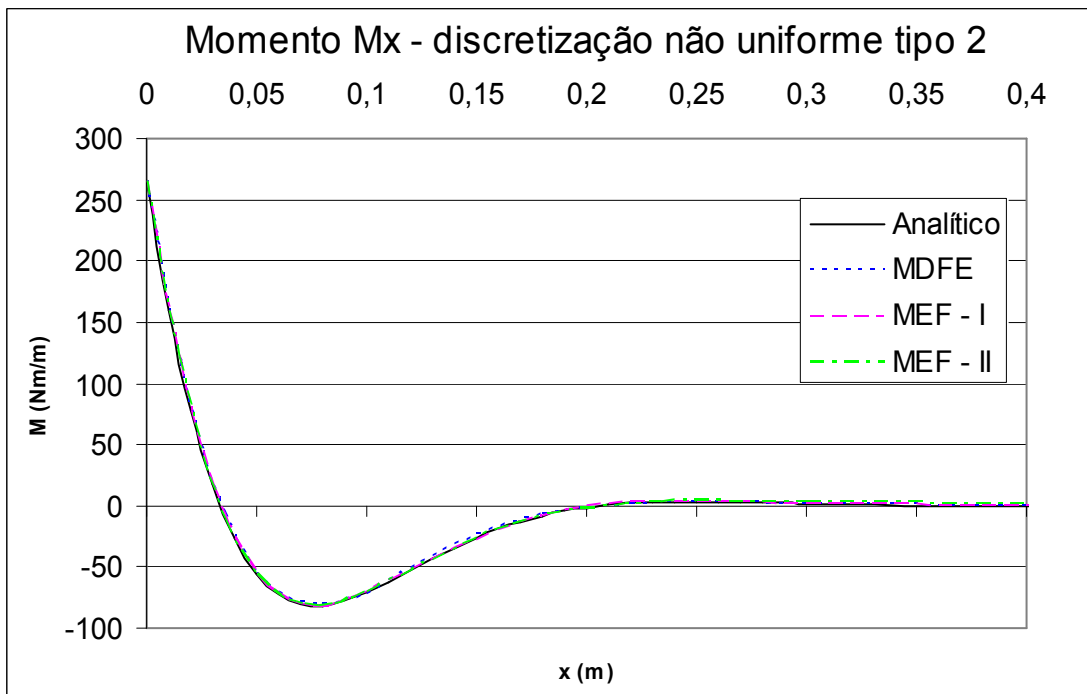
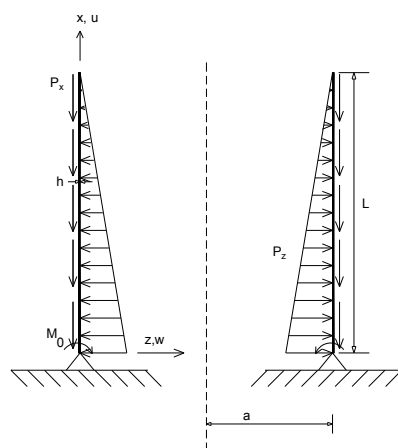


Figura 4.35: Exemplo 5 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

Discretização	Comentários
Uniforme	Os resultados numéricos para $w_{\max}$ já se situam bem próximos dos resultados analíticos. Para os momentos, especialmente em relação aos resultados do MDFE e do MEF – II, ainda se observam algumas divergências.
Não uniforme tipo 1	Todos os resultados já se acham suficientemente próximos dos analíticos.
Não uniforme tipo 2	Os resultados numéricos se mantêm suficientemente próximos dos analíticos. Observa-se, entretanto que, nessa discretização, os pontos nodais para $w_{\max}$ numérico na tabela, correspondentes ao MDFE e ao MEF – I, não mais coincidiram com o ponto de máximo deslocamento analítico, justificando-se, assim, os erros superiores obtidos em relação aos da discretização anterior (menos refinada).

#### 4.7 Exemplo 6 – Casca apoiada submetida à pressão hidrostática e peso próprio

Este exemplo, com os correspondentes dados numéricos utilizados (sendo  $\gamma$  o peso próprio do material da casca), encontra-se representado na Figura 4.36.



$$h = 5,00 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$a = 1,00 \text{ m}$$

$$L = 1,00 \text{ m}$$

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0,30$$

$$\gamma = 7,70 \times 10^4 \text{ N/m}^3$$

$$p_x = -\gamma h = -3,85 \times 10^2 \text{ N/m}^2$$

$$p_z = (x - L) \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$M_0 = 455,6 \text{ Nm/m}$$

Figura 4.36: Casca apoiada submetida à pressão variando linearmente e ao peso próprio

#### 4.7.1 Discretização uniforme

Neste caso de discretização foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,033$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow \lambda = 0,05$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.28, assim como na Figura 4.37 e na Figura 4.38, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.28: Exemplo 6 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização uniforme

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,04	$8,497 \times 10^{-5}$	-
MDFE [1]	0,03	$7,824 \times 10^{-5}$	-7,92 %
MEF – I	0,03	$8,391 \times 10^{-5}$	-1,25 %
MEF – II	0,05	$8,379 \times 10^{-5}$	-1,39 %

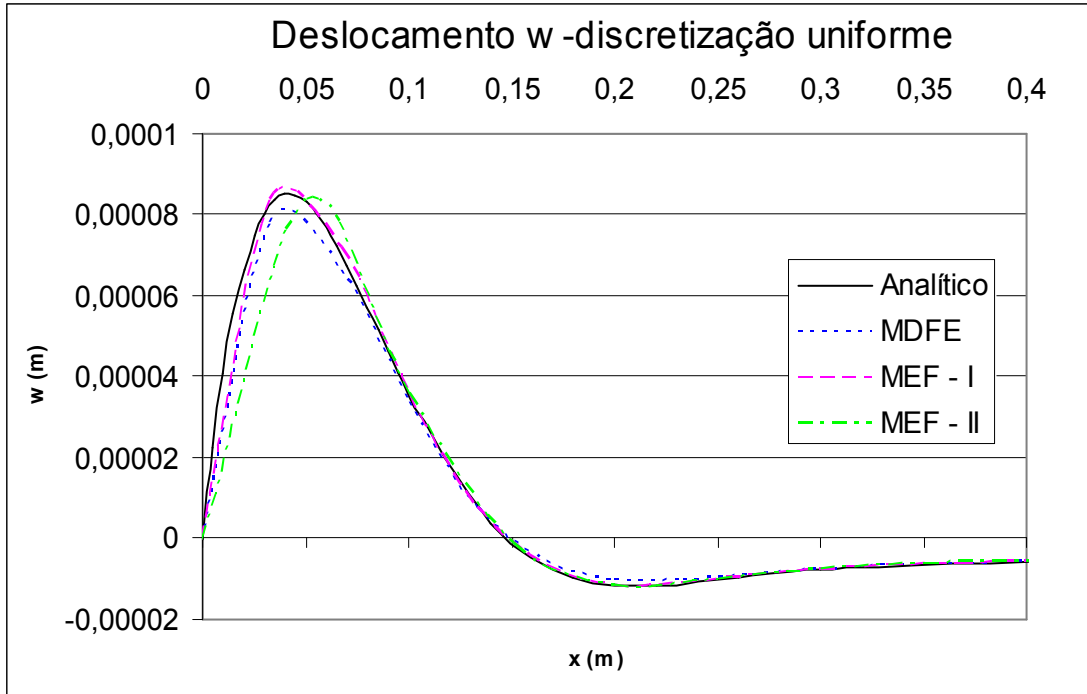


Figura 4.37: Exemplo 6 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

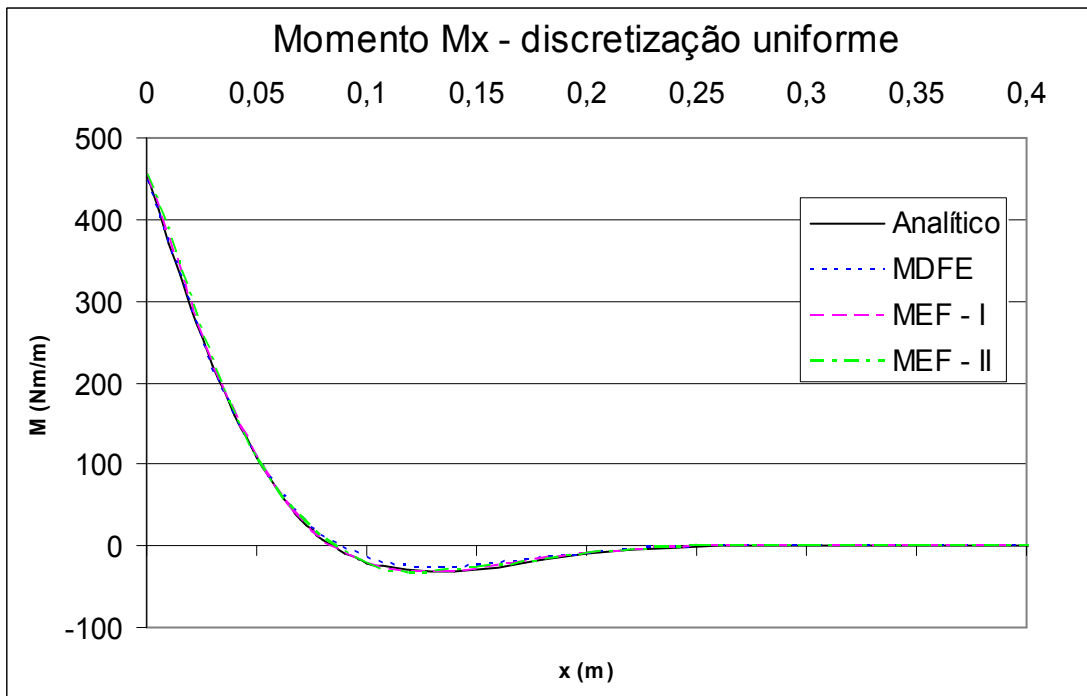


Figura 4.38: Exemplo 6 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização uniforme

#### 4.7.2 Discretização não uniforme

##### a) Discretização tipo 1

A casca foi dividida em duas partes, a saber:  $L_1 = 0,17$  m e  $L_2 = 0,83$  m (Figura 4.1-b), sendo adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  15 elementos com  $\lambda_1 = 0,011$  m e 15 elementos com  $\lambda_2 = 0,055$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  10 elementos com  $\lambda_1 = 0,017$  m e 10 elementos com  $\lambda_2 = 0,083$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.29, assim como na Figura 4.39 e na Figura 4.40, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.29: Exemplo 6 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 1

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,040	$8,497 \times 10^{-5}$	-
MDFE [1]	0,045	$8,411 \times 10^{-5}$	-1,01 %
MEF – I	0,045	$8,597 \times 10^{-5}$	1,18 %
MEF – II	0,034	$8,444 \times 10^{-5}$	-0,62 %

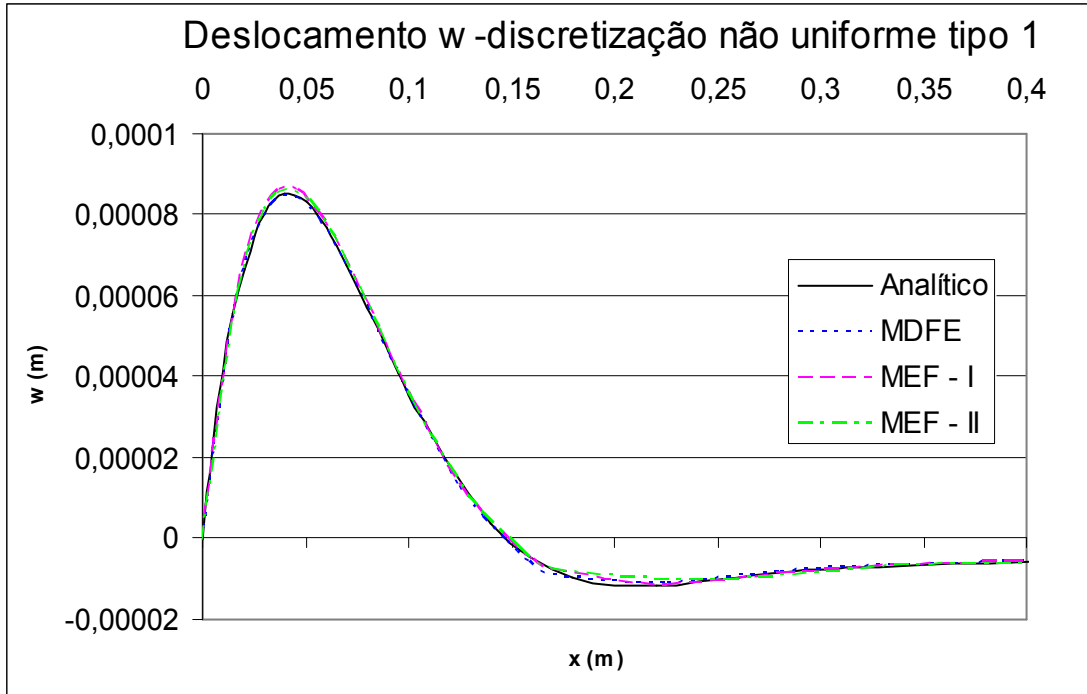


Figura 4.39: Exemplo 6 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

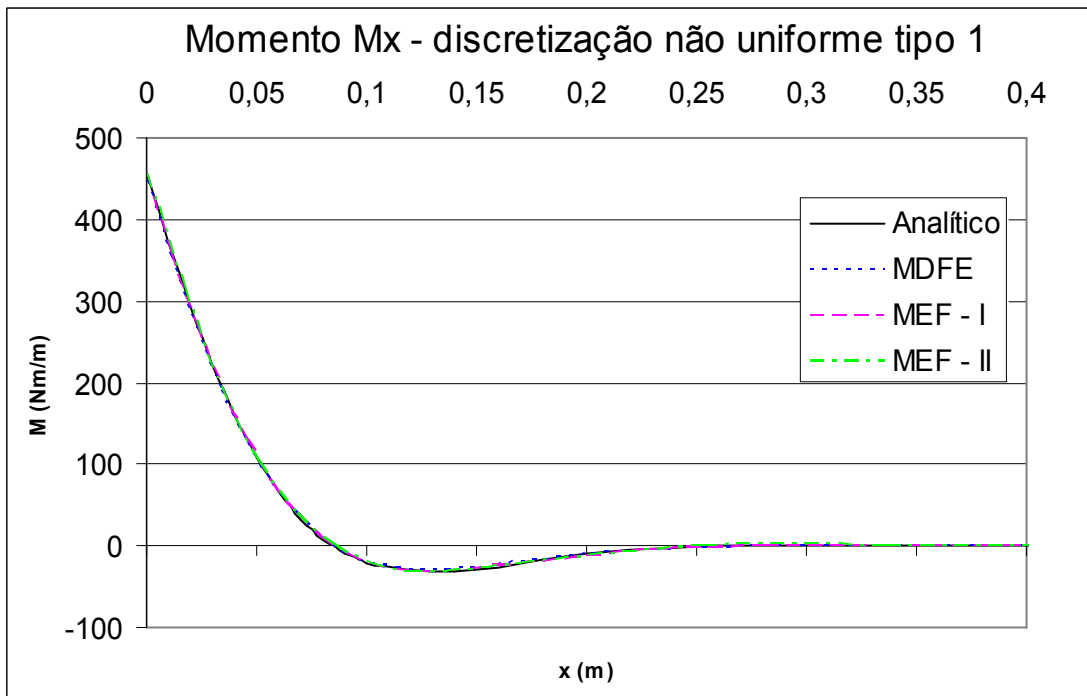


Figura 4.40: Exemplo 6 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 1

## b) Discretização tipo 2

A casca foi dividida em três partes, com  $L_1 = 0,10$  m,  $L_2 = 0,20$  m e  $L_3 = 0,70$  m na Figura 4.1-b. Foram adotados, de acordo com cada um dos critérios estabelecidos:

Critério I: 30 elementos  $\rightarrow$  20 elementos com  $\lambda_1 = 0,005$  m, 5 elementos com  $\lambda_2 = 0,04$  m e 5 elementos com  $\lambda_3 = 0,14$  m.

Critério II: 20 elementos  $\rightarrow$  14 elementos com  $\lambda_1 = 0,007$  m, 3 elementos com  $\lambda_2 = 0,067$  m e 3 elementos com  $\lambda_3 = 0,23$  m.

A seguir são apresentados, na Tabela 4.30, assim como na Figura 4.41 e na Figura 4.42, os resultados para o deslocamento transversal  $w$  e o momento  $M_x$ , obtidos tanto analítica como numericamente.

Tabela 4.30: Exemplo 6 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização não uniforme tipo 2

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença percentual
Analítico [2]	0,04	$8,497 \times 10^{-5}$	-
MDFE [1]	0,04	$8,599 \times 10^{-5}$	1,20 %
MEF – I	0,04	$8,631 \times 10^{-5}$	1,58 %
MEF – II	0,04	$8,623 \times 10^{-5}$	1,48 %

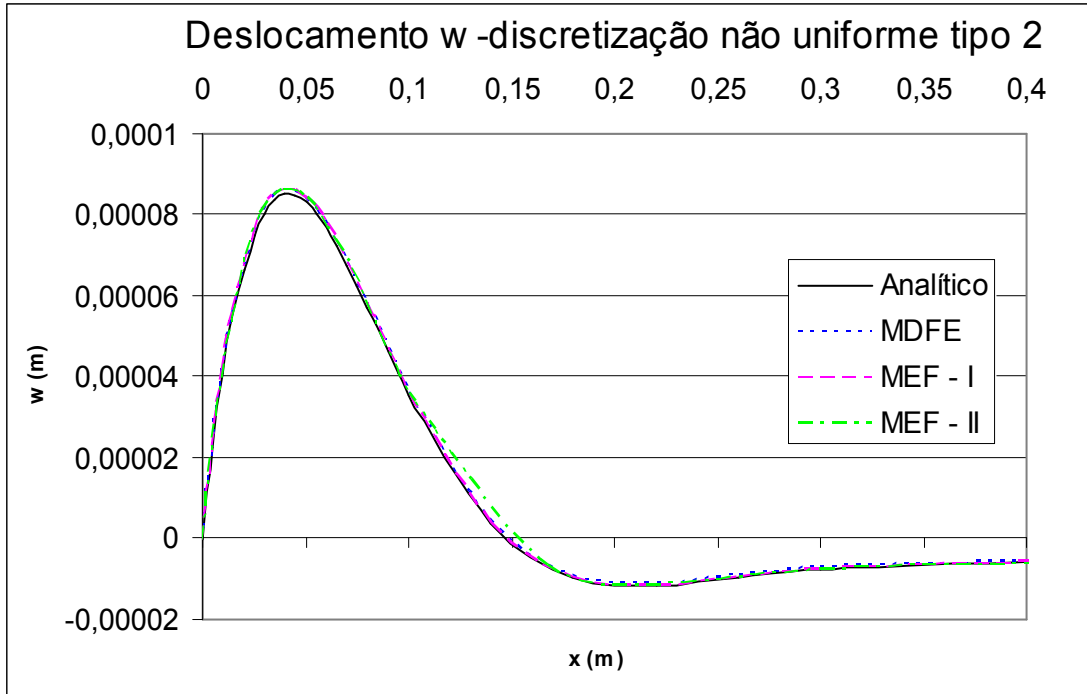


Figura 4.41: Exemplo 6 – Deslocamentos  $w(x)$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

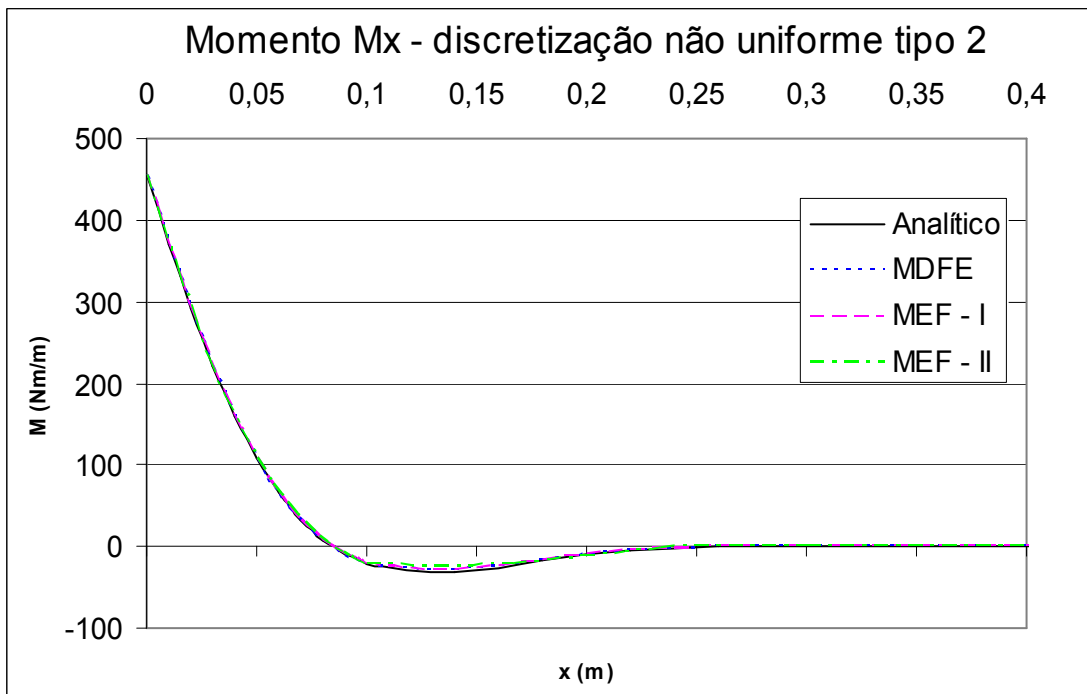


Figura 4.42: Exemplo 6 – Momentos  $M_x$  analítico e numéricos para a discretização não uniforme tipo 2

Discretização	Comentários
Uniforme	Os gráficos para os deslocamentos ainda não demonstram a concordância esperada, apesar de que, para $w_{\max}$ , apenas o resultado do MDFE apresenta-se acima do limite desejável. Os gráficos de momentos já se situam bem mais próximos da curva analítica.
Não uniforme tipo 1	Todos os resultados já se acham suficientemente próximos dos analíticos.
Não uniforme tipo 2	Todos os resultados mantêm a proximidade com os analíticos. Note-se que os pontos nodais para $w_{\max}$ numérico, no tipo anterior de discretização, coincidiram com os pontos de máximo deslocamento obtidos analiticamente, podendo-se assim justificar os erros inferiores verificados em relação aos da presente discretização (mais refinada).

## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho, que representa um prosseguimento à dissertação de MITTELBACH [1], teve por objetivo estabelecer uma comparação entre os desempenhos do Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) e do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise dos efeitos de perturbação de bordo em cascas cilíndricas axissimétricas submetidas a ações de natureza mecânica e/ou térmica. Foram assim reexaminados todos os exemplos da referida dissertação, somando-se ainda a estes um outro caso analisado posteriormente por MITTELBACH *et al.* [2]. Enfatizou-se, em especial, o cálculo dos esforços, procurando-se verificar se o MDFE, por aproximar as derivadas dos deslocamentos e não os deslocamentos, como no caso do MEF, tenderia a produzir, neste cálculo, resultados melhores do que o MEF, como previamente ocorrido no trabalho de GRAÇA [8], ao serem analisadas placas espessas pela Teoria de Mindlin. Note-se que o problema aqui estudado, pelo aspecto das funções representativas dos deslocamentos e esforços na região perturbada da casca, não se configura como dos mais favoráveis para fins de modelagem numérica.

Foram utilizados, nas comparações de resultados, dois critérios distintos, a saber: a mesma discretização da casca por ambos os métodos numéricos considerados e sistemas de equações algébricas aproximadamente da mesma ordem. Este último critério justifica-se em função de que no MEF tem-se, para cada nó, além dos deslocamentos  $u$  e  $w$ , também a rotação  $w'$  como grau de liberdade, ao passo que no MDFE a rotação só constitui grau de liberdade em nós de extremidade (face à eliminação dos nós virtuais). Embora no MEF isto acarrete uma redução do número de nós, procurou-se sempre,

mediante uma proporcionalidade, preservar as mesmas características da discretização do MDFE na distribuição desses nós. O estudo envolveu ainda, em cada exemplo, sempre discretizações uniformes e não uniformes, com estas últimas, que foram subdivididas em tipo 1 e tipo 2, correspondendo a um maior grau de refinamento na zona de perturbação próxima aos apoios da casca.

Pode-se considerar que os objetivos da pesquisa foram plenamente atingidos e dela resultaram as seguintes conclusões de caráter geral (as conclusões de caráter mais específico acham-se explicitadas no capítulo anterior):

1 – Ao se utilizar discretizações idênticas por ambos os métodos numéricos, foi nítida a melhor performance do MEF.

2 – Quando se utilizou como critério de comparação sistemas de equações algébricas de mesma ordem, não houve, em termos práticos, nenhum ganho representativo de um método em relação ao outro.

3 – Em todos os casos examinados, a discretização uniforme, como seria de se esperar, não se mostrou indicada em nenhum dos dois métodos, qualquer que fosse o critério de comparação escolhido.

Em resumo, se for admitida como “mais justa” a comparação pela ordem dos sistemas de equações (visando compensar o grau de liberdade adicional de rotação no MEF), pode-se afirmar que os dois métodos numéricos apresentaram desempenhos equivalentes.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MITTELBACH, F. R., *Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002.
- [2] MITTELBACH, F. R., GARCIA, L. F. T., "Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Cascas Cilíndricas Submetidas a Solicitações Térmicas". *XXV Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, Recife, Pernambuco, Brasil, Novembro 2004.
- [3] MITTELBACH, F. R., GARCIA, L. F. T., MANSUR, W. J., "Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Dinâmica de Problemas Axissimétricos de Placas Delgadas". *XXVIII Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, Porto, Portugal, Junho 2007.
- [4] LIMA, J. M. F., *Estudo Comparativo entre Formulações Geometricamente Não Lineares para Flexo-Torção de Hastes de Paredes Delgadas de Seção Aberta*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [5] LIMA, J. M. F., GARCIA, L. F. T., VILLAÇA, S. F., "Influência de Ordem de Grandeza do Ângulo de Torção em Modelos Geometricamente Não Lineares para Flexo-Torção de Hastes de Paredes Delgadas de Seção Aberta". *XXVII*

*Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, Belém, PA, Brasil, Setembro 2006.

[6] GARCIA, L. F. T., GRAÇA, M. S. B. A., "Aplicação do Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Placas Retangulares Espessas". *XXX Jornadas Sulamericanas de Ingeniería Estructural*, Brasília, DF, Brasil, Maio 2002.

[7] DIAS, C. A. C., *Comprovação Numérica da Teoria de Vlassov em Vigas e Pórticos de Paredes Delgadas com Seção Aberta*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.

[8] GRAÇA, M. S. B. A., *Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Estática e Dinâmica de Placas Delgadas e Espessas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

[9] BATHE, K. J., *Finite Element Procedures*. 1 ed. New Jersey, Prentice Hall, 1996.

[10] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3 ed. New York, John Wiley & Sons, 1989.

[11] GERE, J. M., WEAVER, W., *Matrix Algebra for Engineers*. 2 ed. California, Brooks/Cole Engineering Division, 1982.

- [12] BEER, F. P., JOHNSTON, R., *Vector Mechanics for Engineers: Statics*. 2 ed. New York, Mc Graw-Hill, 1972.
- [13] GERE, J. M., TIMOSHENKO, S. P., *Mechanics of Materials*. 3 ed. Boston, PWS – Kent Publishing Company, 1990.
- [14] TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*. 2 ed. New York, Mc Graw-Hill, 1959.
- [15] UGURAL, A. C., *Stresses in Plates and Shells*. New York, Mc Graw-Hill, 1981.
- [16] ROSSUM, G. V., *Python Reference Manual – Release 2.5*. Python Software Foundation, 2006.