

ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS E MISTO DE
ELEMENTOS FINITOS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DARCY

Stevenson Marinho Hall

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

Prof. Luiz Landau, D.Sc.

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2006

HALL, STEVENSON MARINHO

Estudo Comparativo de Métodos dos
Volumes Finitos e Misto de Elementos Finitos
na Solução de Problemas de Darcy. [Rio de
Janeiro] 2006

IX, 89p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 2006)

Dissertação - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1. Método dos elementos finitos;
2. Modelagem numérica;
3. Método misto
4. MatLab

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

Dedico este trabalho a Deus e à minha esposa
por todo o estímulo para que alcançasse o sucesso.

À minha família, pelo acolhimento e
compreensão e a todos os amigos e colegas
que influenciaram o meu trabalho.

“O sinal mais seguro da sabedoria é a
constante serenidade”.

Michel de Montaigne

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Alvaro Coutinho por toda a paciência e atenção.

Agradeço ao Prof. Luiz Landau pelo incentivo e pela disponibilidade.

Agradeço ao Prof. Knut-Andreas Lie pela gentileza no auxílio da implementação computacional.

Aos meus amigos, Bruno Mendes, Denis Araújo e Wilson Ney por toda a ajuda nos estudos e logísticas envolvidas na confecção deste trabalho.

Aos meus pais, William e Lúcia Helena, pelo apoio incondicional nas horas mais difíceis.

À minha família, meus tios e tias, primos e primas, meus sogros e meus cunhados por todo o incentivo e apoio.

À minha esposa, Luciana por toda provocação intelectual que permitiu a conclusão do presente trabalho.

Agradeço à ANP pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS E MISTO DE
ELEMENTOS FINITOS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DARCY

Stevenson Marinho Hall

Dezembro/2006

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Programa: Engenharia Civil

Ao longo dos anos foram desenvolvidas várias ferramentas e alguns métodos para estudos em reservatórios. Dentre estes, são abordados no presente trabalho, o Método dos Volumes Finitos, ou Método do Volume de Controle e um Método Misto de Elementos Finitos, utilizando o MatLab, que comprovou toda a sua praticidade ao envolvermos cálculos matriciais. Além destes, também comparamos nossos resultados com um método de Elementos Finitos de Pós-processamento para recuperação da Velocidade de Darcy. São apresentadas as equações governantes para o fluxo de fluidos e para a aplicação em meios porosos, que são as equações de conservação da massa e a Lei de Darcy. A avaliação provinda da comparação entre os métodos citados busca identificar e, quiçá, confirmar tendências, como a de que uma melhor aproximação da solução acarreta um desempenho computacional reduzido, além de propor a utilização adequada das ferramentas disponíveis e indicar caminhos ou procurar soluções para questões com maior precisão.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

COMPARATIVE OF METHODS OF THE FINITE VOLUMES AND MIXED FINITE
ELEMENTS IN THE SOLUTION OF DARCY'S PROBLEMS

Stevenson Marinho Hall

December/2006

Advisor: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Department: Civil Engineering

Through the years some tools and some methods for numerical reservoir simulation had been developed. Amongst these, are compared in this work, the Finite Volume method, or Control Volume method and the Mixed Finite Element method, using the MatLab. Beyond these, we also compare our results with a Finite Element Post-processing method to recover Darcy's velocity. The governing equations for the fluid flow and the application in porous media are presented, that the equations mass conservation and the Darcy's law. The evaluation come from the comparison between the cited methods intend to identify and, maybe, to confirm trends, as of that one better approach of the solution causes a reduced computational performance, besides considering the adequate use of the available tools and indicating ways or to search, more precisely, solutions for questions.

SUMÁRIO

1	Introdução	01
	1.1 Organização do Trabalho	01
	1.2 Aspectos Gerais	01
	1.3 Aspectos da Produção de Petróleo	04
	1.3.1 Mecanismos de Produção	05
	1.3.2 Estimulação de Poços	06
	1.3.3 Recuperação Secundária	07
	1.3.4 Recuperação Terciária	08
2	Propriedades Físicas e Matemáticas	11
	2.1 Sistema Petrolífero e Características dos Reservatórios	11
	2.2 Meios Porosos	14
	2.3 Heterogeneidade e Anisotropia	16
	2.4 Porosidade	17
	2.5 Propriedades dos Fluidos	21
	2.6 Permeabilidades Absoluta e Relativa	23
3	Modelo e Métodos Numéricos	28
	3.1 Modelo do Escoamento de Fluidos Incompressíveis Monofásicos	28
	3.2 Método dos Volumes Finitos	31
	3.3 Método Misto de Elementos Finitos	35

4	Exemplos Abordados	39
4.1	Exemplo com Barreiras	39
4.1.1	Resultado das Comparações	41
4.2	Exemplo dos Cinco Poços	44
4.2.1	Resultado das Comparações	45
4.3	Exemplo do poço SPE10	52
4.3.1	Resultado das Comparações	52
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	64
6	Referências Bibliográficas	66
7	Apêndice	73
7.1	Princípios Básicos do Método dos Elementos Finitos	73
7.1.1	Interpretação Inicial e Formulação Matemática	73
7.1.2	Formulação de Fenômenos Térmicos	75
7.1.3	Aplicações em 1D	77
7.2	Códigos utilizados	81

1 INTRODUÇÃO

1.1 Organização do Trabalho

Neste trabalho começamos, no capítulo 1, abordando os aspectos gerais da modelagem computacional e dos métodos numéricos envolvidos, além de características da produção de petróleo, que é o principal motivo econômico para a modelagem e simulação computacionais. No capítulo 2, apresentamos a física e a matemática por trás da simulação de reservatórios, detalhando seus elementos constituintes como os conceitos de meios porosos, heterogeneidade, permeabilidades absoluta e relativa, porosidade, etc. No capítulo 3, explicamos o modelo utilizado, que é o modelo monofásico de fluxo de fluidos incompressíveis e as equações governantes no fluxo de fluidos e os métodos numéricos abordados. No capítulo 4, são apresentados os exemplos e métodos utilizados e resultados obtidos nas simulações. Os capítulos 5 e 6 tratam das conclusões, propostas de trabalhos futuros e bibliografia. No apêndice, encontra-se uma introdução ao formalismo do método dos elementos finitos, além dos códigos para o MatLab utilizados nas modelagens.

1.2 Aspectos Gerais

A modelagem computacional é amplamente utilizada na Indústria Petrolífera, pois permite a simulação de eventos, fenômenos físicos, sem a necessidade de maiores gastos,

além do envolvido na estrutura computacional utilizada e podendo, com isto, viabilizar respostas, ou mesmo, confirmar hipóteses. A estrutura básica da modelagem numérica consiste na troca de equações diferenciais – que geralmente são muito complexas e de difícil solução analítica – por milhares ou milhões de equações simples, mas que são aproximações, com precisão definida pelo método numérico utilizado e pelo grau de refinamento da malha de elementos que é utilizada para particionar as estruturas envolvidas no fenômeno estudado. Na maioria dos casos os sistemas de equação são lineares ou não, podendo ser resolvidos milhares de vezes, em problemas dependentes do tempo.

Uma das principais utilizações da modelagem computacional, no setor petrolífero, ocorre na simulação de reservatórios de petróleo. Nos primórdios da computação, modelos para simulação de reservatórios foram construídos em duas dimensões com, no máximo, alguns poucos milhares de pontos representando todo o reservatório. Ao passo que hoje, caracterizações de reservatórios modelam as formações de rochas porosas na escala de metro. Isto nos dá modelos tridimensionais consistindo em vários milhões de células. Apesar de um aumento fantástico no poder dos computadores, e das pesquisas acerca de técnicas computacionais, os simuladores comerciais de reservatório, raramente, podem simular diretamente em malhas de modelos geológicos mais reais. Hoje, simulações são utilizadas para estimar características da produção, calibrar parâmetros do reservatório, identificar padrões de fluxo, etc. O grande objetivo é possibilitar um melhor direcionamento e controle dos poços, de maneira que haja uma maximização na recuperação do petróleo. Porém, a aproximação utilizada nos métodos não nos traz uma precisão adequada, já que as variáveis envolvidas na modelagem de fluxo de fluidos em reservatórios são muito difíceis de ser preditas e para muitas destas variáveis não existem relações matemáticas bem definidas. Além disso, computacionalmente falando, não

conseguiríamos rodar simulações abordando todas as informações de todas as variáveis disponíveis, mesmo nos mais modernos computadores. Entretanto, para o gerenciamento do reservatório, geralmente, é suficiente descrever as tendências gerais a partir dos dados dos padrões de fluxo do reservatório.

Um dos métodos numéricos mais utilizados em modelagem computacional é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que tem sido amplamente aplicado em uma grande variedade de problemas envolvendo escoamento de fluidos, inclusive em meios porosos.

O sucesso do MEF se deve, na maior parte, aos procedimentos matemáticos básicos: a formulação variacional do problema, a discretização dessa formulação através de elementos finitos e a solução das equações lineares resultantes. Estas são as etapas básicas para qualquer problema.

Porém, no processo de discretização da formulação variacional, a primeira etapa a se cumprir é a construção das malhas de elementos. A maioria dos simuladores de reservatórios comercial geralmente usa malhas estruturadas ou semi-estruturadas, como as malhas ortogonais de diferenças finitas [18]. Em geologias e geometrias mais complexas existem grandes dificuldades para se modelar com tais malhas, e uma alternativa é usar o método dos elementos finitos que manipula malhas estruturadas e não-estruturadas [4]. Para garantir uma melhor aproximação a malha deve ser refinada em regiões onde há uma maior, e mais rápida mudança nos valores das variáveis, sem causar um custo computacional maior, refinando, desnecessariamente, regiões onde a solução é bem comportada. Em problemas transientes, a aplicação de malhas dinâmicas adaptativas oferece um alto nível de flexibilidade na representação da malha, produzindo um aumento na exatidão da solução, com menores custos computacionais [18].

Para a discretização da formulação fraca ou variacional em si, existem diversos métodos que são utilizadas, entre eles os métodos que são abordados neste trabalho: Método dos Volumes Finitos, Método Misto de Elementos Finitos e Método de Pós-processamento da Velocidade.

1.3 Aspectos da Produção do Petróleo

Neste item 1.3 abordamos os aspectos da produção de petróleo descritos na referência [36].

O propósito dos poços de petróleo e de gás é o de produzir hidrocarbonetos de formações subterrâneas. O poço seria o condutor para o escoamento dos fluidos das formações para a superfície. Certos equipamentos devem ser instalados no poço e vários outros itens e procedimentos devem ser utilizados para manter e controlar este escoamento. Este equipamento e qualquer procedimento ou itens necessários para instalá-los, são denominados de "completação do poço".

Antigamente, os poços eram completados usando-se apenas uma coluna de tubos enrascados, denominados "revestimento", normalmente, de sete polegadas que se destinavam a evitar o desmoronamento das suas paredes e conduzir os fluidos da formação, para a superfície. A coluna de revestimento de produção de um poço vai da superfície até certa profundidade.

Na década de 1930, com a evolução da tecnologia de cimentação, alguns poços foram completados usando-se cimento. A cimentação de um poço é uma operação essencial em todas as completações, pois é necessária uma boa aderência do cimento no espaço entre o revestimento e o reservatório.

O fluxo dos fluidos para o poço é estabelecido fazendo-se furos laterais, ou perfurações, através da utilização de um equipamento especial, contendo cargas explosivas dirigidas, chamado vulgarmente de "canhão". Os tiros originados por este equipamento, perfuram o revestimento, o cimento e penetram pela formação adentro, abrindo canais para a produção dos fluidos. Após este "canhoneio", perfis a cabo são descidos para verificar se as perfurações tiveram êxito.

Com o decorrer do tempo, a produção dos fluidos, através destas perfurações tende a cair e, dependendo do tipo de formação produtora, pode-se utilizar ou ácido ou efetuar um fraturamento hidráulico para aumentar as fraturas e permitir que a produção volte ao normal. Hoje em dia, utilizam-se vários tipos de estimulação, inclusive com explosões subterrâneas controladas. Com o declínio da pressão do reservatório e do volume produzido, a produção através de tubulação de menor diâmetro, ou *tubing*, se torna necessária, pois a velocidade do escoamento através do revestimento se torna insuficiente para manter a produção.

1.3.1 Mecanismos de Produção

Existem vários mecanismos de produção do petróleo, que levam estes fluidos, do fundo do poço até a superfície. De maneira genérica, os classificamos em: surgência e elevação artificial. Um poço é considerado surgente quando a pressão do reservatório é suficiente para expulsar os fluidos da formação para a superfície, através da tubulação do poço. Esta pressão deve ser maior do que a soma da pressão na cabeça do poço mais a pressão do peso da coluna dos fluidos, da superfície até a profundidade da zona produtora, acrescida da pressão por fricção, no interior da tubulação e nas restrições encontradas pelos fluidos, no seu caminho para a superfície.

Se os fluidos, para surgirem até a superfície, não necessitam de mais energia além da energia natural do reservatório, temos a surgência natural. Se for necessário fornecer alguma energia auxiliar, no interior do poço, para que os fluidos atinjam a superfície, temos uma surgência artificial.

Vários sistemas de elevação artificial têm sido desenvolvidos e testados, continuamente. Entre estes sistemas, temos os seguintes: bombeio mecânico por hastes (“sucker rod pumping”), elevação por gás (“gás lift”), bombeio elétrico submerso convencional (“electrical submersible pumping”), bombeio elétrico a pistão (“hydraulic piston pumping”), bombeio hidráulico a jato (“hydraulic jet pumping”), elevação a êmbolo (“plunger lift”) e outros. A finalidade de qualquer sistema de elevação artificial é criar uma determinada pressão na entrada do “tubing”, de maneira que o reservatório possa responder e produzir à vazão esperada.

1.3.2 Estimulação de Poços

As técnicas de estimulação de poços, introduzidas no início do século XX, têm sido desenvolvidas através da melhor compreensão dos processos envolvidos na produção do petróleo. Modelos de acidificação foram desenvolvidos ao serem utilizados vários tipos de ácidos, com relação à sua reação com as formações, no sentido de melhorarem as suas permeabilidades e porosidades.

Fraturamentos hidráulicos das formações foram experimentados, como os processos mais energéticos, até a introdução dos fluidos de polímeros saturados e outras técnicas analíticas. Estas técnicas permitiram um substancial aumento de escoamento em reservatórios com baixa ou alta permeabilidade. Outro notável avanço nas completações

dos poços foi a evolução do “coiled tubing” (tubulação flexível contínua), para a completção dos poços. O “coiled tubing” envolve o deslocamento de uma coluna contínua de “tubing” de pequeno diâmetro para dentro do poço. Ela é descida, concêntrica, na tubulação existente no poço, usado no serviço e então removido, sem qualquer dano a completção existente. São utilizados nos poços horizontais e poços direcionais com inclinações maiores do que 50°.

1.3.3 Recuperação Secundária

Chama-se recuperação secundária de um campo de petróleo, às técnicas empregadas, nos reservatórios, para recuperar o óleo que não se conseguiu retirar pelos processos naturais e artificiais (recuperação primária), através de injeção de água ou gás. Juntamente com a recuperação primária, formam o EOR (“Enhanced Oil Recovery”).

- **Injeção de água ou gás**

É um dos processos mais difundidos na recuperação secundária. É feito através da injeção de água salgada ou gás, utilizando-se poços já perfurados ou poços feitos especialmente para esta finalidade (poços de injeção). Por estes poços é injetada a água, a qual irá, além de manter a pressão do reservatório, deslocar o petróleo para os poços produtores (Fig. 1.3.3.a). É a técnica mais antiga em recuperação secundária, mas atualmente muito mais aperfeiçoada do que em seus primórdios.

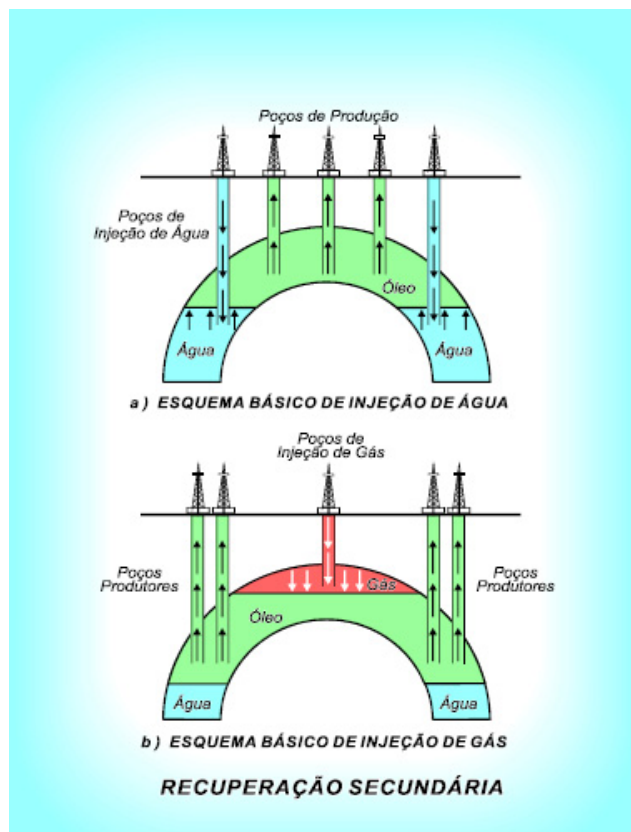


Fig. 1.3.3.a. Esquema da recuperação secundária por injeção de água e gás [58].

1.3.4 Recuperação Terciária

São diversos processos ou injeção de outros fluidos que não água e gás com o objetivo de recuperar óleo adicional. São exemplos: métodos químicos com injeção de polímeros, surfactantes ou alcalinos, métodos térmicos com injeções de vapor e combustão *in situ*, métodos miscíveis com injeção de gás carbônico, nitrogênio ou hidrocarbonetos e métodos microbiológicos. Estes métodos compõem o que chamamos de IOR (“Improved Oil Recovery”).

- **Injeção de polímeros**

O objetivo da injeção de polímeros é prover uma melhor eficiência de deslocamento e varredura volumétrica durante uma injeção d'água. A injeção d'água aumentada por polímeros, consiste em adicionar estes produtos, solúveis na água, antes de injetá-la no reservatório. O polímero melhora a recuperação do petróleo, pelo aumento da viscosidade da água, decrescendo a sua mobilidade e contatando um maior volume do reservatório.

- **Injeção de surfactante/polímero**

Este tipo de injeção também é chamado de “micellar/polymer”, ou microemulsão. Consiste em injetar um tampão que contem água, surfactante, eletrólito (sal), usualmente um co-solvente (álcool) e, possivelmente, um hidrocarboneto (óleo). O tampão de surfactante é seguido por água adensada por polímeros. O mecanismo da injeção surfactante/polímero, para recuperar óleo, consiste em: baixar a tensão interfacial entre o óleo e a água, na solubilização do óleo, na emulsificação do óleo e da água e melhoramentos da molhabilidade.

- **Injeção alcalina**

A injeção alcalina ou cáustica envolve a injeção de produtos químicos, tais como hidróxido, silicato ou carbonato de sódio. Estes produtos reagem com os ácidos orgânicos do óleo, em certos tipos de petróleo, criando surfactantes *in situ*. Polímeros podem ser adicionados à mistura alcalina, para melhorar o seu rendimento. Água adensada com polímeros pode ser usada, seguida por um tampão cáustico. O mecanismo de injeção alcalina recupera o óleo devido a uma redução da tensão interfacial resultante dos surfactantes produzidos, pela mudança na molhabilidade de óleo para água, e pela emulsificação do óleo.

- **Injeção de vapor e combustão *in situ***

A injeção de vapor é indicada para reservatórios de óleos viscosos e tem por objetivo diminuir essa viscosidade através do fornecimento de energia térmica ao reservatório. A combustão *in situ* também é indicada para reservatórios com óleos viscosos e também busca a redução da viscosidade. Gases de combustão e fração leve do óleo vaporizada vão à frente deslocando o óleo.

- **Injeção de solventes**

O fluido injetado é miscível com o óleo, que se encontra em estado residual, retido por forças capilares. A saturação do novo fluido (óleo mais fluido injetado) é maior e o fluido pode escoar. O gás carbônico, mesmo quando injetado acima da pressão mínima de miscibilidade (CO_2 miscível) causa um inchamento de até 20% no óleo e reduz sua viscosidade. Estas injeções são indicadas para reservatórios de óleos leves.

Ainda existem os métodos de aquecimento eletromagnético, de vibração mecânica e de injeção de microorganismos, que são frentes de estudo recentes e em pleno desenvolvimento.

2 PROPRIEDADES FÍSICAS E MATEMÁTICAS

2.1 Sistema Petrolífero e Características dos Reservatórios

O petróleo é uma substância oleosa, inflamável, com cheiro característico e, em geral, menos densa que a água e com cor variando entre o negro e o castanho escuro. De origem orgânica, é uma combinação de moléculas de carbono e hidrogênio, além dos contaminantes – substâncias presentes na composição química do petróleo diferentes do carbono e do hidrogênio, como por exemplo, o enxofre. Admite-se que esta origem esteja ligada à decomposição dos seres que compõem o plâncton - organismos em suspensão nas águas doces ou salgadas tais como protozoários, celenterados e outros - causada pela pouca oxigenação e pela ação de bactérias. Estes seres decompostos foram, ao longo de milhões de anos, se acumulando no fundo dos mares e dos lagos, nas chamadas rochas geradoras, sendo pressionados pela sedimentação, e sob a ação de altas temperaturas e, assim, transformando-se em petróleo.

A gravidade armazena a água e os hidrocarbonetos separados, nos reservatórios – meios porosos - que são rochas muito porosas e permeáveis, ou seja, os poros são bem interconectados. Os hidrocarbonetos mais claros (metano, etano, etc) escapam, geralmente, rapidamente, enquanto que os óleos mais pesados se movem lentamente para a superfície. Entretanto, quando o óleo encontra uma rocha reservatório, capeada por uma rocha de granulação fina e impermeável, chamada rocha selante, e, além disso, camadas dobradas de

rocha de baixa permeabilidade (ou impermeáveis) chamadas de armadilhas ou trapas, de modo que a migração dos hidrocarbonetos seja bloqueada, encontramos uma acumulação possível de ser produzida. A ocorrência de todo este processo sincronizadamente caracteriza o Sistema Petrolífero com seus elementos: rocha geradora, rocha reservatório, rocha selante, trapa e sincronismo, conforme ilustrado na Fig. 2.1.a [46].

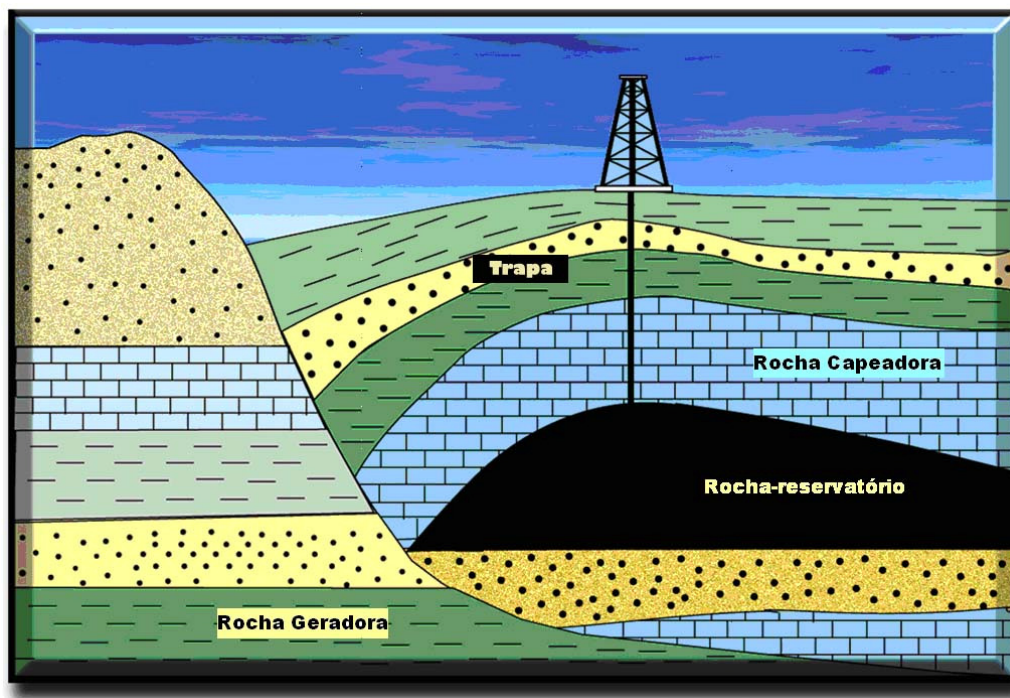


Fig. 2.1.a. O Sistema Petrolífero exemplificado, e seus elementos [46].

Quase toda rocha naturalmente formada, contém poros, e a fração da distribuição e do volume de tais poros determina as propriedades da rocha, que são por sua vez os parâmetros que governam o escoamento dos hidrocarbonetos no reservatório.

A princípio, um reservatório de hidrocarbonetos está em equilíbrio hidrostático, e contém água, óleo e gás separados pela gravidade. Este equilíbrio foi estabelecido durante milhões de anos através da separação por efeito da gravidade e de processos geológicos e geotérmicos. Quando um poço é perfurado através da rocha selante e penetra a capa

superior de hidrocarboneto, este equilíbrio é perturbado imediatamente. O reservatório é conectado geralmente ao poço e à superfície de produção por um conjunto das válvulas. Se não houvesse nenhuma válvula de produção para interromper o escoamento, sabendo que o reservatório, geralmente, está sob alta pressão, poderia ocorrer uma explosão (blow out), onde certamente haveria acidentes tanto em direção à plataforma, quanto para o meio ambiente próximo, através de derramamentos. Assim que o poço está pronto para produzir, as válvulas são abertas ligeiramente, e os hidrocarbonetos fluem para fora do reservatório devido à sobre-pressão. Isto, por sua vez, ajusta o escoamento dentro do reservatório e os hidrocarbonetos fluem para o poço, que por sua vez pode induzir instabilidades gravitacionais, além de perturbações locais causadas pelas pressões capilares.

Cerca de 20% dos hidrocarbonetos presentes são produzidos até que um novo equilíbrio se estabeleça. À medida que a pressão cai, menos óleo e gás estão escoando, levando a uma situação onde a produção passa a não ser mais economicamente viável. Então a companhia operadora pode começar a recuperação secundária, por meios artificiais, ou até mesmo a recuperação terciária.

Atualmente, técnicas de recuperação terciária são consideradas demasiado caras, para o uso comercial em larga escala, mas diversos estudos foram conduzidos e os fundamentos matemáticos estão sendo investigados com cuidado, e em escalas menores a recuperação terciária está sendo executada. Devemos notar que os termos: primário, secundário, e terciário são ambíguos. As técnicas de recuperação terciária podem ser aplicadas durante a produção primária, e a produção secundária pode ser executada no primeiro dia da produção.

Nas próximas seções alguns conceitos peculiares à modelagem do escoamento de fluidos em meios porosos serão apresentados.

2.2 Meios Porosos

Um meio poroso é um corpo composto de uma parte sólida, chamada matriz sólida, e o espaço vazio restante (ou espaço de poro) que pode ser preenchido com um ou mais fluidos (por exemplo, água, óleo e gás). Alguns exemplos de meios porosos são: solo, areia, arenitos, espuma, etc.

Uma fase é definida por Bear e Bachmat [7] como sendo uma parcela quimicamente homogênea de um sistema, considerando-se a separação das outras parcelas por um limite físico bem definido. No exemplo de um sistema monofásico, o espaço vazio do meio poroso é preenchido por um único fluido ou por diversos líquidos completamente miscíveis entre si (por exemplo, água fresca e água salgada). Em um sistema multifásico, o espaço vazio é preenchido por dois ou mais fluidos imiscíveis entre si, isto é, mantêm um limite distinto entre eles (por exemplo, água e óleo). Pode somente haver uma fase gasosa desde que os gases sejam, sempre, completamente miscíveis. Formalmente a matriz sólida do meio poroso pode também ser considerada uma fase chamada de fase sólida. A Fig. 2.2.a mostra uma seção transversal bidimensional de um meio poroso preenchido com água (sistema monofásico, à esquerda) ou preenchido com água e o óleo (sistema bifásico, à direita).

Bear e Bachmat [7] definem componente como sendo parte de uma fase que seja composta por uma espécie química homogênea identificável ou por um conjunto das espécies (íons, moléculas). O número dos componentes necessários para descrever uma fase é dado pelo modelo conceitual, isto é, depende dos processos físicos a serem modelados. O exemplo da água fresca e da salgada, dado acima, é descrito por um sistema monofásico com dois componentes.

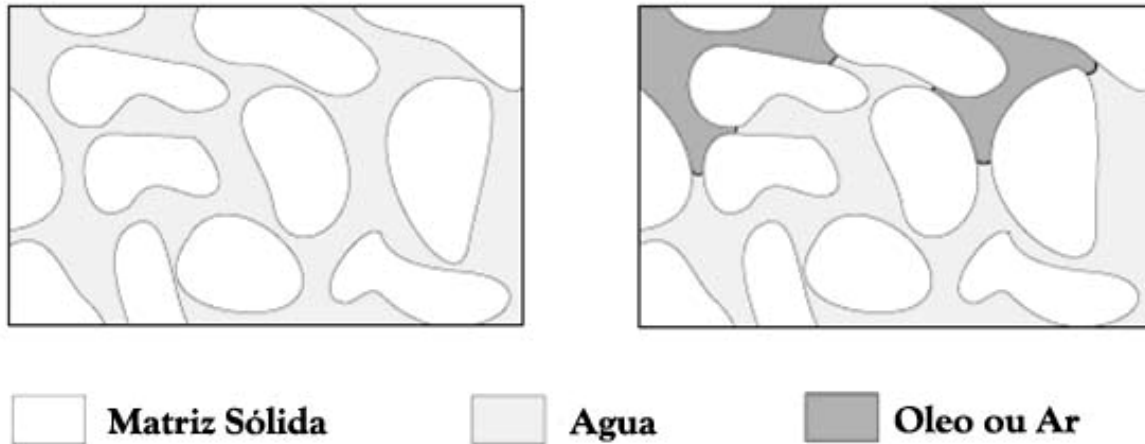


Fig. 2.2.a. Secção Transversal de um meio poroso com preenchimentos diferentes. Modificada de [5].

A fim de modelar matematicamente o fluxo de fluidos em meios porosos algumas restrições são feitas à geometria do meio poroso, como Corey [12]:

1. O espaço vazio do meio poroso é interconectado.
2. As dimensões do espaço vazio devem ser grandes comparadas ao tamanho médio do trajeto livre das moléculas dos fluidos.
3. As dimensões do espaço vazio devem ser pequenas o bastante de modo que o fluxo do fluido seja controlado por forças adesivas nas interfaces fluido-sólido e por forças coesivas nas interfaces fluido-fluido (sistemas multifásicos).

A primeira suposição é óbvia já que nenhum fluxo pode ocorrer em um espaço vazio desconectado. A segunda propriedade nos permitirá substituir as moléculas fluidas no espaço vazio por um meio contínuo hipotético. Finalmente, a terceira propriedade exclui casos como o de uma rede de tubulações da definição de um meio poroso.

2.3 Heterogeneidade e Anisotropia

Um meio poroso é dito ser homogêneo com respeito a uma quantidade (tomada a média) macroscópica se esse parâmetro tiver o mesmo valor ao longo de todo o domínio. Se não, é chamado heterogêneo. Por exemplo, o meio poroso mostrado na Fig. 2.3.a tem uma porosidade diferente nas partes com grãos grandes e pequenos de areia e é conseqüentemente heterogêneo com respeito à porosidade.

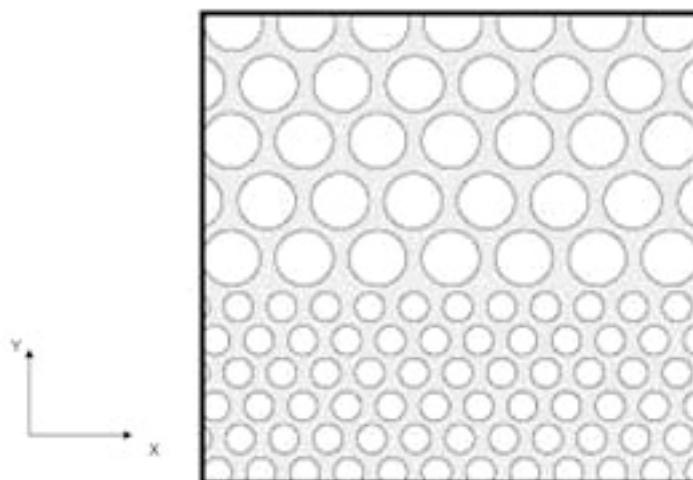


Fig. 2.3.a. Heterogeneidade do meio poroso. Modificada de [5].

As quantidades tensoriais macroscópicas podem também variar com o sentido, neste caso o meio poroso é chamado anisotrópico com respeito a essa quantidade. Se não, é chamado isotrópico. Como um exemplo, consideramos a Fig. 2.3.b. É óbvio que o meio poroso é mais resistivo ao fluxo do fluido no sentido do eixo-y do que no sentido do eixo-x. A quantidade macroscópica correspondente chamada permeabilidade será anisotrópica. Note que um efeito similar como na Fig. 2.3.b pode também ser conseguido com a distribuição de grão mostrada na Fig. 2.3.c.

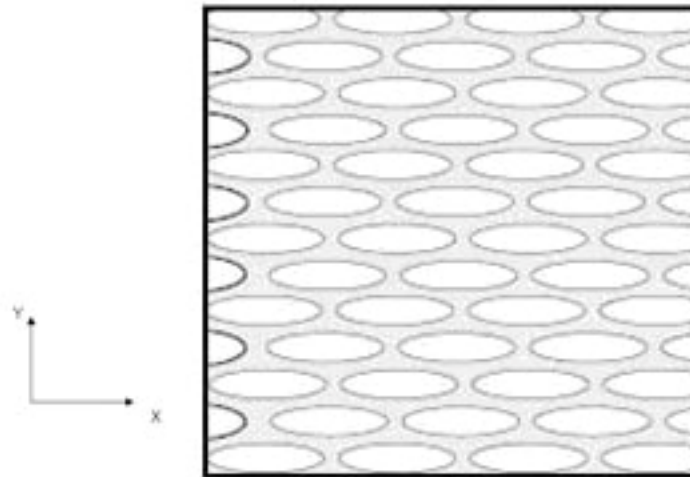


Fig. 2.3.b. Anisotropia do meio poroso com grãos de mesma grandeza. Modificada de [5]

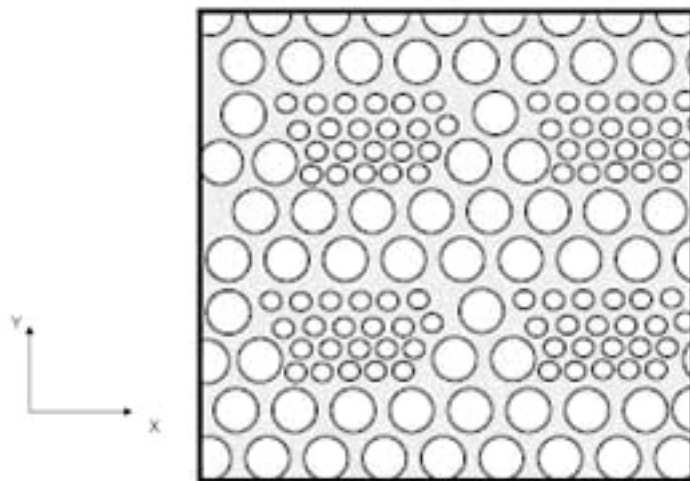


Fig. 2.3.c. Anisotropia do meio poroso com grãos de diferentes grandezas. Modificada de [5]

2.4 Porosidade

A porosidade da rocha, denotada geralmente por ϕ , é a fração vazia do volume do meio, e varia de 0 à 1 ($0 \leq \phi < 1$). A porosidade depende, geralmente, da pressão; a rocha é compressível, e a compressibilidade da rocha é definida por:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp} \quad (2.4.1)$$

onde p é a pressão total do reservatório. Para modelos simplificados, é habitual negligenciar a compressibilidade da rocha e supor que ϕ depende somente da coordenada espacial. Se a compressibilidade não puder ser negligenciada, é comum usar uma linearização de modo que:

$$\phi = \phi_0 [1 + c_r (p - p_0)] \quad (2.4.2)$$

Desde que a dimensão dos poros seja muito pequena comparada a alguma escala de interesse para a simulação do reservatório, se supõe normalmente que a porosidade é uma função espacial contínua por partes. Entretanto, pesquisas atuais tentam compreender melhor a relação entre modelos do fluxo na escala do poro e na escala do reservatório [1].

As equações para o cálculo da porosidade são baseadas em observações empíricas. Rubey e Hubbert [25] propuseram uma relação onde a porosidade decresce mais gradualmente quando em profundidades maiores

$$\phi = \phi_0 e^{-\lambda_{RH} Z} \quad (2.4.3)$$

onde ϕ_0 é a porosidade deposicional, λ_{RH} é uma constante e Z é a profundidade alcançada pela rocha.

Falvey e Middleton [24] observaram que relações exponenciais de porosidade-profundidade não fornecem bons valores para altas porosidades. Então, propuseram uma relação harmônica:

$$\phi = \frac{\phi_0}{1 - \phi_0 \lambda_{FM} Z} \quad (2.4.4)$$

onde λ_{FM} é uma constante.

Existem tensões diferentes, como a vertical, a isotrópica, a pressão de poros, entre outras. Isto levou à formulação da chamada tensão efetiva, descrita na Lei de Terzaghi [51].

$$\sigma_{eff} = \sigma - P_f \quad (2.4.5)$$

onde σ representa as pressões por carga e P_f é a pressão do fluido (Fig. 2.4.a).

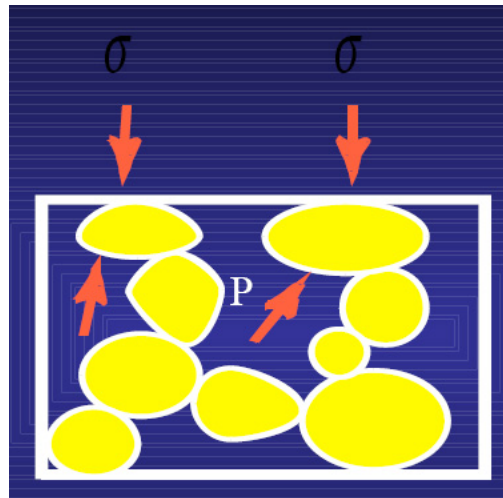


Fig. 2.4.a. Esquema da pressão efetiva.

A carga sedimentar é parcialmente suportada pelo fluido, e não completamente pela rocha. Com isto, Sclater e Christie [47] propuseram uma relação, substituindo a relação porosidade-profundidade por uma relação porosidade-tensão efetiva:

$$\phi = \phi_0 e^{-\sigma_{eff}/c} \quad (2.4.6)$$

com $c = \lambda_{SC}(\overline{\rho_{bw}} - \rho_w)g$, onde λ_{SC} é uma constante, $\overline{\rho_{bw}}$ é o valor médio da massa específica da saturação de água do pacote de sedimentos sobrepostos e ρ_w é a massa específica da água.

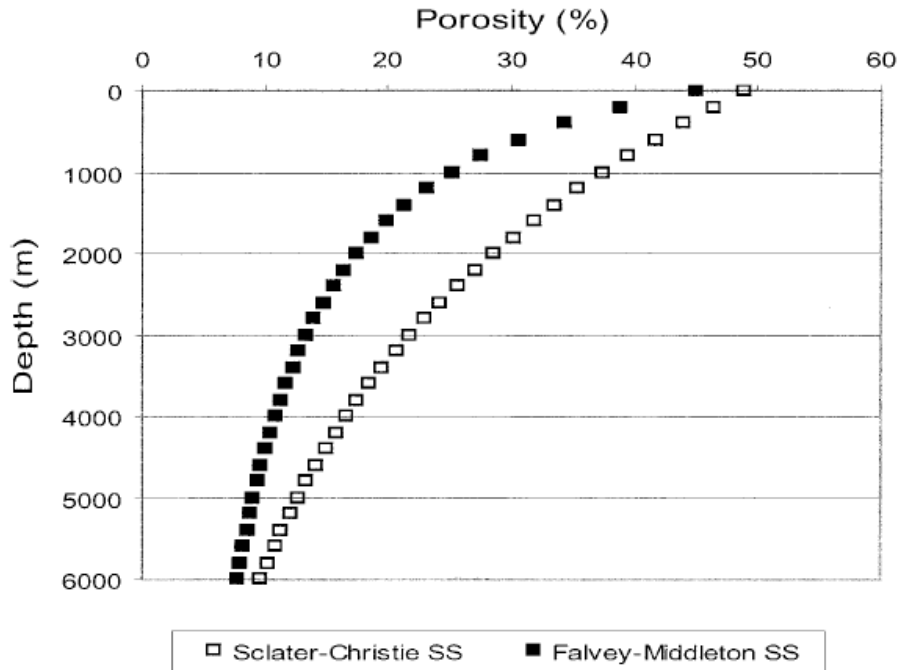


Fig. 2.4.b. Relação exponencial versus relação harmônica, com ϕ_0 indicado para arenitos pelos autores [52].

A Figura 2.4.b mostra as diferenças entre as equações exponenciais e harmônicas usando os valores de ϕ_0 para arenitos recomendados por Sclater e Christie [47], em 1980 e Falvey e Middleton [24], em 1981, respectivamente. Sclater e Christie usaram $\phi_0 = 45\%$, visto que Falvey e Middleton sugeriram 49%. Mesmo se as mesmas porosidades iniciais fossem utilizadas, é evidente que algumas diferenças apareceriam entre as duas funções. A equação harmônica prediz perda inicial rápida da porosidade, mas redução lenta da porosidade em grandes profundidades. Conseqüentemente, é difícil obter porosidades baixas usando uma equação harmônica. A equação exponencial, ao contrário, prediz uma redução inicial mais lenta da porosidade, mas a perda da porosidade em grandes profundidades é mais rápida do que aquela predita pela equação harmônica, e as porosidades baixas são mais fáceis de se obter.

Por isso é muito importante a escolha do modelo de porosidade, pois poderá gerar um erro muito grande no cálculo da permeabilidade, que será abordada na seção 2.6.

2.5 Propriedades dos Fluidos

O vácuo no meio poroso é preenchido com as diferentes fases. A fração do volume ocupada por cada fase é a saturação (s) dessa fase. Assim,

$$\sum_{\text{TODAS AS FASES}} s_i = 1 \quad (2.5.1)$$

Para finalidades práticas do reservatório, geralmente somente três fases são consideradas; (w) água, (o) óleo, e (g) gás. Cada fase contém um ou mais componentes. Um componente do hidrocarboneto é uma espécie química única (metano, etano, propano, etc.), como exposto e referenciado por Bear e Bachmat [7] na seção 2.2. Já que o número de componentes do hidrocarboneto pode ser muito grande, é comum agrupar os componentes em pseudocomponentes. Aqui não faremos nenhuma distinção entre componentes e pseudocomponentes.

Devido à variedade e às condições extremas em um reservatório, a composição do hidrocarboneto das diferentes fases pode mudar durante uma simulação (e pode às vezes ser difícil de determinar unicamente). A fração de massa do componente i na fase j é denotada por c_{ij} . Em cada uma das fases, as frações de massa devem somar 1, de modo que para N componentes diferentes, nós temos:

$$\sum_{i=1}^N c_{ig} = \sum_{i=1}^N c_{io} = \sum_{i=1}^N c_{iw} = 1 \quad (2.5.2)$$

Em seguida nós atribuímos uma massa específica ρ e uma viscosidade μ a cada fase. Em geral, estas são funções da pressão da fase $p_i (i = g, o, w)$ e da composição de cada fase. Isto é, para o gás:

$$\rho_g = \rho_g(p_g, c_{1g}, \dots, c_{Ng}), \text{ e } \mu_g = \mu_g(p_g, c_{1g}, \dots, c_{Ng}) \quad (2.5.3)$$

e similarmente para as outras fases. Estas dependências são as mais importantes para a fase gás, e, geralmente, são ignoradas para a fase água.

A compressibilidade da fase é definida da mesma forma que a compressibilidade da rocha:

$$c_i = \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dp_i}, \quad i = g, o, w \quad (2.5.4)$$

Os efeitos da compressibilidade são mais importantes para o gás do que para o óleo e a água [1]. Em modelos simplificados, a compressibilidade da água, conseqüentemente, é negligenciada.

Devido às tensões interfaciais, as pressões das fases são diferentes, definindo a pressão capilar,

$$P_{c_{ij}} = P_i - P_j, \quad (2.5.5)$$

para $i, j = g, o, w$. Embora outras dependências sejam relatadas, supõe-se geralmente que a pressão capilar é uma função somente das saturações.

Outros parâmetros de importância são as pressões de ponto de bolha para os vários componentes. Na temperatura dada, as pressões de ponto de bolha significam as pressões onde as fases respectivas entram em ebulição. Abaixo das pressões de ponto de bolha, o gás é liberado e temos transições dos componentes entre as fases. Para a maioria dos modelos realísticos, mesmo se não distinguirmos entre todos os componentes, um permite que o gás

seja dissolvido no óleo. Para tais modelos, um importante parâmetro dependente da pressão é a solução da razão gás-óleo R_s para o gás dissolvido no óleo em condições de reservatório. O comportamento termodinâmico é, entretanto, um tópico muito complexo que geralmente é simplificado significativamente ou mesmo ignorado na simulação do reservatório [1].

2.6 Permeabilidades Absoluta e Relativa

A permeabilidade absoluta, denotada por K , é uma medida da capacidade da rocha de transmitir um único fluido em determinadas circunstâncias. Já que a orientação e a interconexão dos poros são essenciais para o fluxo, a permeabilidade não é necessariamente proporcional à porosidade, mas, normalmente, está relacionada a ϕ . Kozeny e Carman [9, 27] formularam uma relação matemática diferenciada de acordo com a porosidade:

$$K = \frac{0,2 \cdot \phi^3}{s_0^2 (1 - \phi)^2}, \text{ se } \phi > 0,1 \text{ (areias)} \quad (2.6.1)$$

$$K = \frac{20 \cdot \phi^5}{s_0^2 (1 - \phi)^2}, \text{ se } \phi \leq 0,1 \text{ (folhelhos)} \quad (2.6.2)$$

As formações de rocha como os arenitos tendem a ter muitos poros grandes ou bem-conectados e conseqüentemente a transmitir prontamente os fluidos. São descritos conseqüentemente como permeáveis. Outras formações, como folhelhos, têm menor, poucos ou menos poros interconectados e, então, são descritas como impermeáveis. Embora a unidade no Sistema Internacional para a permeabilidade seja m^2 , ela é representada, geralmente, em Darcy (D), ou, no seu submúltiplo, mili-Darcy (mD). A

definição precisa de $1D$ ($\approx 0,987.10^{-12} m^2$) envolve a transmissão de um líquido de $1cp$ (centipoise) de viscosidade através de uma rocha homogênea em uma velocidade de $1cm/s$ devido a um gradiente de pressão de $1atm/cm$. Traduzido às condições do reservatório, $1D$ é uma permeabilidade relativamente elevada.

Em geral, \mathbf{K} é um tensor, o que significa que a permeabilidade nos diferentes sentidos depende da permeabilidade nos outros sentidos. Entretanto, por uma mudança de base, \mathbf{K} pode, às vezes, ser diagonalizada, e devido à estrutura do reservatório, a permeabilidade horizontal e a vertical bastam para diversos modelos. Dizemos que o meio é isotrópico se \mathbf{K} puder ser representado como uma função escalar, por exemplo, se a permeabilidade horizontal for igual à permeabilidade vertical. Além disso, devido às transições entre formações de rocha diferentes, a permeabilidade pode variar rapidamente sobre diversas ordens de valor. Variações locais da escala de $1mD$ a $10mD$ não são incomuns em um campo típico.

A produção pode também mudar a permeabilidade. Quando a temperatura e a pressão são mudadas, micro-fraturas podem abrir e significativamente mudar a permeabilidade. Além disso, já que a definição de permeabilidade envolve um determinado fluido, diferentes fluidos experimentarão permeabilidades diferentes na mesma amostra de rocha.

Mesmo que as fases não se misturem realmente, para a modelagem macro-escala, supomos que todas as fases podem estar presentes na mesma posição. Assim, temos que a habilidade de uma fase se mover depende do ambiente na posição real. Isto é, a permeabilidade experimentada por uma fase depende da saturação das outras fases nessa posição específica, assim como da interação das fases com as paredes porosas. Assim,

introduzimos uma propriedade chamada permeabilidade relativa, denotada por k_{ri} ($i = g, o, w$), que descreve como uma fase escoar na presença das duas outras. Assim, no geral, e pela relação (2.5.1), podemos supor que:

$$k_{ri} = k_{ri}(s_g, s_o) \quad (2.6.3)$$

onde o índice r significa *relativo* e i denota uma das fases g, o ou w . Assim, a permeabilidade (efetiva) experimentada pela fase i é $K_i = Kk_{ri}$. É importante notar que as permeabilidades relativas são funções não-lineares das saturações, de modo que a soma das permeabilidades relativas em uma posição específica (com uma composição específica) não seja necessariamente igual a um. Em geral, permeabilidades relativas podem depender da distribuição do tamanho dos poros, da viscosidade do fluido, e das forças interfaciais entre os fluidos. Estas características, que são revistas cuidadosamente por Demond e Roberts [19], em 1987, são, geralmente, ignoradas. De maior importância para a recuperação do óleo é provavelmente a dependência da temperatura [1].

Um outro efeito é aquele devido à adsorção nas paredes porosas e a criação de gotas isoladas, capturadas. As curvas de permeabilidade relativa não se estendem sobre todo o intervalo $[0,1]$. A menor saturação onde uma fase é móvel é chamada saturação residual. Os efeitos da adsorção podem variar, e pode haver efeitos importantes. Particularmente para a simulação de injeção de polímero, a adsorção ocorrerá e terá um impacto significativo nos resultados. A adsorção de um componente é geralmente uma função não-linear, dependente da matriz da rocha, e da concentração do componente real. As interações microscópicas rocha-fluido implicam também que a permeabilidade absoluta da rocha não é uma propriedade bem definida. Os líquidos obedecem a condições de contorno de “no-

slip” (sem deslizamento), enquanto que os gases podem não experimentar os mesmos efeitos, conhecidos, na literatura, como efeitos de Klinkenberg.

Obter medidas das quantidades discutidas acima é muito difícil. Particularmente as medidas da permeabilidade relativa são caras e problemáticas [1]. Recentemente, técnicas de laboratório obtiveram um grande progresso usando tomografia computadorizada e ressonância magnética nuclear para fazer uma varredura nas amostras de testemunhos onde as fases reais estão sendo deslocadas. Embora os procedimentos experimentais padrão existam para medir as permeabilidades relativas bifásicas, há ainda geralmente uma incerteza significativa a respeito da relevância dos valores experimentais encontrados e é difícil adotar dados confiáveis para serem usados em um simulador. Isto é devido, principalmente, aos efeitos dos contornos. Particularmente para sistemas trifásicos, nenhuma técnica experimental de confiança existe. Assim, as permeabilidades relativas trifásicas são modeladas geralmente usando as medidas bifásicas, onde diversos modelos teóricos foram propostos. A maioria deles é baseado no modelo de Stone [49], onde conjuntos de permeabilidades relativas bifásicas são combinados nos dando os dados trifásicos. Recentemente, um modelo matematicamente mais plausível foi proposto [37,38] para o caso com nenhuma gravidade (ou com gravidade e nenhum fluxo contra-corrente).

A incerteza a respeito da permeabilidade relativa é, entretanto, modesta comparada à incerteza imposta pela esparsidade de dados da permeabilidade absoluta. Para medir K , amostras do núcleo da rocha são usadas. Estes podem ter aproximadamente 10cm de diâmetro, medidos nos poços verticais de teste a cada 25cm de profundidade. Claramente estas amostras têm o volume insignificante comparado ao reservatório de óleo inteiro que se estende sobre diversos quilômetros. Das camadas externas de rocha e das minas sabe-se que a permeabilidade da rocha pode variar extensamente, indicando que a modelagem da

permeabilidade para um reservatório baseado em amostras de núcleo é um problema tremendamente difícil. Alguma informação adicional pode ser obtida das medidas na sísmica, mas com a tecnologia disponível hoje, somente as estruturas em grande escala podem ser encontradas por esta técnica. Conseqüentemente, nós temos informações muito limitadas sobre os dados dos reservatórios sub-superficiais. Além disso, ao comparar e ajustar parâmetros assim que a produção real começar, modelos da permeabilidade podem ser ajustados para caber os dados reais da produção, e desse modo esperançosamente melhorar os modelos originais e predizer melhor a produção futura. Tais aproximações são chamadas “history matching” (acerto histórico) [1].

No próximo capítulo detalharemos o modelo adotado nas simulações, bem como uma abordagem acerca dos métodos utilizados.

3 MODELO E MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 Modelo do escoamento de fluidos incompressíveis monofásicos

O meio mais simples de descrever os deslocamentos de fluidos em um reservatório é por um modelo monofásico. Este modelo dá uma equação para a distribuição da pressão no reservatório e é usado em estudos, iniciais e simplificados, de escoamento de fluidos. Apesar das discussões feitas serem para um sistema monofásico, as observações podem ser aplicadas para um sistema de fluxo multifásico.

Suponha que queremos modelar a filtração de um líquido em um meio poroso de algum tipo. A equação básica que descreve este processo é a equação da continuidade que indica que a massa é conservada

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = q \quad (3.1.1)$$

Aqui, o termo q modela as fontes e os sumidouros, por volume, em posições designadas nos poços. Para baixas velocidades de escoamento v , a filtração nos meios porosos são modelados com uma relação empírica chamada lei de Darcy proposta pelo engenheiro francês Henri Darcy [8, 30].

Darcy descobriu em 1856, através de uma série de experiências, que a velocidade de filtração é proporcional a uma combinação do gradiente da pressão do fluido e dos efeitos devidos à gravidade. Mais precisamente, a densidade volumétrica do escoamento v (que

nos referiremos como velocidade do escoamento) é relacionada à pressão p e à forças da gravidade com a seguinte lei:

$$v = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (3.1.2)$$

Aqui \mathbf{K} é a permeabilidade, μ é a viscosidade, g é a constante gravitacional e z é a coordenada espacial no sentido vertical ascendente. Escreveremos $G = -g \nabla z$ para a força gravitacional.

Na maioria dos modelos geológicos de reservatório de campo reais, \mathbf{K} é um tensor diagonal anisotrópico. Infelizmente, os simuladores comerciais de reservatório, raramente, conseguem realizar simulações diretamente nestes modelos. Efeitos de estruturas heterogêneas em pequena escala são incorporados conseqüentemente em modelos de simulação designando os tensores da permeabilidade efetiva que representam o impacto de estruturas heterogêneas em pequena escala em uma malha mais grosseira. Estes tensores de permeabilidade efetiva, ou “upscaled”, tentam modelar os sentidos de escoamento principais, que não podem ser alinhados com as direções das coordenadas espaciais, e podem conseqüentemente ser tensores cheios. Aqui nós supomos somente que \mathbf{K} é um tensor simétrico e positivo definido, cujos autovalores são limitados uniformemente abaixo e acima por constantes positivas.

Notamos que a lei de Darcy é análoga à lei de Fourier para condução do calor (em que \mathbf{K} é substituído pelo tensor de condutividade do calor) e à lei de Ohm da condução elétrica (em que \mathbf{K} é a condutância elétrica). Entretanto, considerando que há somente uma força responsável pela condução térmica e elétrica, existem duas forças responsáveis pelo escoamento em meios porosos: a gravidade e o gradiente da pressão. Desde que as forças da gravidade são aproximadamente constantes dentro de um domínio do reservatório Ω ,

necessitamos somente usar a pressão de campo do reservatório como nossa incógnita preliminar. Para resolver para a pressão, nós combinamos a lei de Darcy (3.1.2) com a equação da continuidade (3.1.1).

Para ilustrar, derivamos uma equação que modela o escoamento de um fluido, água (w), por exemplo, com um meio poroso caracterizado por um campo \mathbf{K} de permeabilidade e por uma distribuição correspondente da porosidade. Por simplicidade, nós supomos que a porosidade ϕ é constante no tempo e que o escoamento pode adequadamente ser modelado supondo a incompressibilidade, isto é, massa específica

constante no tempo. Então o termo da derivada temporal em (9) desaparece e obtemos a seguinte equação elíptica para a pressão da água:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_w = \nabla \cdot \left[-\frac{\mathbf{K}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w G) \right] = \frac{q_w}{\rho_w} \quad (3.1.3)$$

Para completar o modelo, nós devemos especificar as condições de contorno. A menos que indicado de outra maneira, seguimos a prática comum e usamos condições de contorno de fluxo nulo. Por isso, no limite do reservatório $\partial\Omega$ impomos $\mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} = 0$, onde \mathbf{n} indica o vetor normal ao contorno $\partial\Omega$. Isto nos dá um sistema isolado onde nenhuma água possa entrar ou sair do reservatório.

Note que ao reduzirmos o sistema de equações (3.1.1) e (3.1.2) a sua forma simplificada (3.1.3), iremos obter as velocidades de Darcy *à posteriori*. Muitos métodos, como veremos adiante, trabalham diretamente com (3.1.1) e (3.1.2).

3.2 Método dos Volumes Finitos

Os métodos de Volumes Finitos têm uma motivação física e são derivados da conservação de quantidades (físicas) sobre as células de um volume. Assim, em um método de volumes finitos as funções desconhecidas são representadas em termo dos valores médios sobre um conjunto de volumes finitos, onde o modelo de Equações Diferenciais Parciais, integrado, é requerido para definir um sentido médio [29].

Embora os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos tenham, fundamentalmente, a interpretação e a derivação diferentes, os dois nomes são usados permutavelmente na literatura científica, quando se consideram malhas estruturadas. De fato, existem diversos esquemas de volumes finitos e diferenças finitas de ordem baixa, cujos valores obtidos no centro das células com os esquemas de diferenças finitas coincidem com as médias das células obtidas com os esquemas de volumes finitos correspondentes. As duas representações das funções desconhecidas, conseqüentemente, serão usadas também permutavelmente doravante.

Para derivar um conjunto de equações de balanço de massa de volumes finitos para (3.1.3), denota-se Ω_i uma célula da malha em Ω e considere a seguinte integral sobre Ω_i

$$\int_{\Omega_i} \left(\frac{q_w}{\rho_w} - \nabla \cdot \nu_w \right) dx = 0 \quad (3.3.1)$$

Invocando o teorema da divergência, supondo que ν_w é suficientemente suave, a equação (3.3.1) se transforma na seguinte equação de balanço de massa:

$$\int_{\partial\Omega_i} \nu_w \cdot n dV = \int_{\Omega_i} \frac{q_w}{\rho_w} dx \quad (3.3.2)$$

Aqui n denota a normal unitária sobre $\partial\Omega_i$, apontando para fora. Os métodos correspondentes de volumes finitos são obtidos agora aproximando a pressão p_w com uma função constante da célula $P_w = \{p_{w,i}\}$ e estimando $v_w \cdot n$ através das interfaces da célula $\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ através de um conjunto de pressões vizinhas da célula. Para formular o esquema de volumes finitos para a aproximação padrão TPFA (“two-point flux approximation”) que é usado freqüentemente na simulação de reservatórios [1], é conveniente reformular ligeiramente a equação (3.3.1), de modo que obtemos uma equação na forma:

$$-\nabla \cdot \lambda \nabla u = f \quad (3.3.3)$$

onde $\lambda = \mathbf{K} / \mu_w$. Até aqui, temos duas opções: podemos, de um modo ou de outro, introduzir um potencial do fluxo $u_w = p_w + \rho_w g z$ e expressar nosso modelo como uma equação para u_w

$$-\nabla \cdot \lambda \nabla u_w = \frac{q_w}{\rho_w} \quad (3.3.4)$$

ou podemos mover o termo da gravidade $\nabla \cdot (\lambda \rho_w G)$ para a direita. Por isso, podemos também supor que queremos resolver a equação (3.3.3) para u .

Assim como o nome sugere, o esquema de TPFA usa dois pontos, as médias das células u_i e u_j , para aproximar o fluxo $v_{ij} = - \int_{\gamma_{ij}} (\lambda \nabla u) \cdot n dv$. Para ser mais específico, consideremos uma malha hexaédrica regular com as linhas da malha alinhadas com os eixos coordenados principais. Além disso, suponha que γ_{ij} é uma interface entre células

adjacentes no sentido da coordenada x de modo que $n_{ij} = (1, 0, 0)^T$. O gradiente ∇u sobre γ_{ij} no método TPFA é substituído agora por

$$\delta u_{ij} = \frac{2(u_j - u_i)}{\Delta x_i + \Delta x_j} \quad (3.3.5)$$

onde Δx_i e Δx_j denotam as dimensões respectivas da célula na direção da coordenada x .

Assim, nós obtemos a seguinte expressão para v_{ij} :

$$v_{ij} = \delta u_{ij} \int_{\gamma_{ij}} \lambda d\nu = \frac{2(u_j - u_i)}{\Delta x_i + \Delta x_j} \int_{\gamma_{ij}} \lambda d\nu \quad (3.3.6)$$

Entretanto, na maioria dos modelos de simulação de reservatório, a permeabilidade \mathbf{K} é constante na célula, e por isso não é bem definida nas interfaces. Isto significa que também temos que aproximar λ sobre γ_{ij} . No método TPFA isto é feito tomando-se uma média harmônica da distância da largura das permeabilidades direcionais respectivas da célula, $\lambda_{i,ij} = n_{ij} \cdot \lambda_i n_{ij}$ e $\lambda_{j,ij} = n_{ij} \cdot \lambda_j n_{ij}$. Para ser mais preciso, a permeabilidade λ_{ij} na direção n_{ij} sobre γ_{ij} é computada como segue:

$$\lambda_{ij} = (\Delta x_i + \Delta x_j) \left(\frac{\Delta x_i}{\lambda_{i,ij}} + \frac{\Delta x_j}{\lambda_{j,ij}} \right)^{-1} \quad (3.3.7)$$

Por isso, para malhas ortogonais com as linhas da malha alinhados com os eixos coordenados, aproximamos o fluxo v_{ij} no método TPFA da seguinte maneira:

$$v_{ij} = -|\gamma_{ij}| \lambda_{ij} \delta u_{ij} = 2|\gamma_{ij}| \left(\frac{\Delta x_i}{\lambda_{i,ij}} + \frac{\Delta x_j}{\lambda_{j,ij}} \right)^{-1} (u_i - u_j) \quad (3.3.8)$$

Finalmente, somando sobre todas as interfaces das células adjacentes, temos uma aproximação para $\int_{\partial\Omega_i} v_w \cdot n d\nu$, e o método associado TPFA é obtido requerendo que a

equação de balanço de massa (3.3.2) seja satisfeita para cada célula da malha $\Omega_i \in \Omega$. Na literatura, em métodos de volumes finitos é comum expressar o fluxo ν_{ij} em uma forma mais compacta do que fizemos em (3.3.5). Os termos que não envolvem os potenciais da célula u_i são recolhidos geralmente em uma interface de transmissibilidade t_{ij} . Para o método TPFA corrente as transmissibilidades são definidas por:

$$t_{ij} = 2 \left| \gamma_{ij} \right| \left(\frac{\Delta x_i}{\lambda_{i,ij}} + \frac{\Delta x_j}{\lambda_{j,ij}} \right)^{-1} \quad (3.3.9)$$

Assim introduzindo a expressão para t_{ij} em (3.3.5), vemos que o esquema TPFA para a equação (3.3.3), na forma compacta, procura uma função constante na célula $\mathbf{u} = \{u_i\}$ que satisfaça ao seguinte sistema de equações:

$$\sum_j t_{ij} (u_i - u_j) = \int_{\Omega_i} f dx, \quad \forall \Omega_i \subset \Omega \quad (3.3.10)$$

O sistema é simétrico e como a solução da velocidade depende apenas de ∇p , temos muitas respostas. Por isso, precisamos impor uma condição de contorno, por exemplo $u_1 = 0$, para particularizar a solução. Isto é, adicionando uma constante positiva à primeira diagonal da matriz $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, onde:

$$a_{ik} = \begin{cases} \sum_j t_{ij}, & k = i \\ -t_{ik}, & k \neq i \end{cases} \quad (3.3.11)$$

A matriz \mathbf{A} é esparsa, consistindo de uma parte tridiagonal que corresponde a derivada em x , e em duas bandas, fora da diagonal, que correspondem as derivadas em y .

3.4 Método Misto de Elementos Finitos

Em métodos mistos de elementos finitos, os fluxos sobre os contornos da célula são considerados como desconhecidos além das pressões, e não são computadas usando uma diferenciação (numérica) assim como nos métodos de volumes finitos. Para os MEF's mistos há pouco a ganhar por reformular (3.1.3) em uma equação da forma de (3.3.3). Retornaremos a formulação original e descrevemos como discretizar o seguinte sistema de equações diferenciais com métodos mistos de elementos finitos:

$$\nu = -\lambda(\nabla p - \rho G) \quad (3.4.1.a)$$

$$\nabla \cdot \nu = q \quad (3.4.1.b)$$

Como antes, impomos condições de contorno de fluxo nulo sobre $\partial\Omega$. Para derivar a formulação mista, definimos primeiramente o seguinte espaço de Sobolev:

$$H_0^{1,div}(\Omega) = \{ \nu \in (L^2(\Omega))^d \mid \nabla \cdot \nu \in L^2(\Omega) \text{ e } \nu \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \} \quad (3.4.2)$$

onde ν é uma função localmente integrável.

A formulação mista de (3.4.1) (com condições de contorno de fluxo nulo) será: Encontrar $(p, \nu) \in L^2(\Omega) \times H_0^{1,div}(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} \nu \cdot \lambda^{-1} u \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot u \, dx = \int_{\Omega} \rho G \cdot u \, dx, \quad (3.4.3)$$

$$\int_{\Omega} l \nabla \cdot u \, dx = \int_{\Omega} q l \, dx$$

para todo $u \in H_0^{1,div}(\Omega)$ e $l \in L^2(\Omega)$. Observamos outra vez que, desde que condições de contorno de fluxo nulo estão impostas, uma restrição extra deve ser adicionada para fazer

(3.4.2) e (3.4.3) bem definida. Uma escolha comum é usar $\int_{\Omega} p dx = 0$. Em métodos mistos de elementos finitos, (3.4.2) e (3.4.3) são discretizadas substituindo $L^2(\Omega)$ e $H_0^{1,div}(\Omega)$ por subespaços de dimensões finitas U e V , respectivamente. Por exemplo, no Método Misto de Elementos Finitos de Raviart-Thomas [41] de mais baixa ordem (para malhas triangulares, tetraédricas ou de paralelepípedos regulares. Figs. 3.4.a, 3.4.b e 3.4.c), $L^2(\Omega)$ é substituído por

$$U = \{p \in L^2(\Omega) : p|_{\Omega_i} = c^{TE}, \forall \Omega_i \in \Omega\} \quad (3.4.4)$$

e $H_0^{1,div}(\Omega)$ é substituído por

$$V = \left\{ v \in H_0^{1,div}(\Omega) : v|_{\Omega_i} \text{ possui componentes lineares } \forall \Omega_i \in \Omega, \right. \\ \left. (v \cdot n_{ij})|_{\gamma_{ij}} \text{ é constante } \forall \gamma_{ij} \in \Omega, \text{ e } v \cdot n_{ij} \text{ é contínua sobre } \gamma_{ij} \right\} \quad (3.4.5)$$

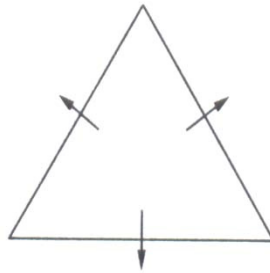


Fig. 3.4.a. Elemento triângulo [11].

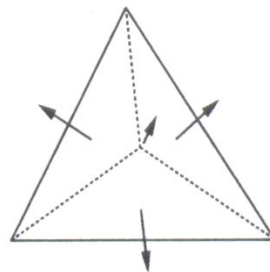


Fig. 3.4.b. Elemento tetraedro [11].

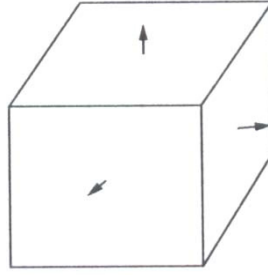


Fig. 3.4.c. Elemento paralelepípedo [11].

onde n_{ij} é o versor normal à γ_{ij} apontando de Ω_i para Ω_j . O Método Misto de Elementos Finitos de Raviart-Thomas correspondente deseja achar

$$(p, v) \in U \times V, \text{ tal que} \quad (3.4.6)$$

$$(3.4.2) \text{ e } (3.4.3) \text{ sejam verdade para todo } u \in V \text{ e } q \in U$$

Para expressar (3.4.6) como um sistema linear, observe primeiramente que as funções em V são, para malhas admissíveis, medidas por funções de base $\{\psi_{ij}\}$ que são definidas por

$$\psi_{ij} \in P(\Omega_i)^d \cup P(\Omega_j)^d \text{ e,} \quad (3.4.7)$$

$$(\psi_{ij} \cdot n_{kl})|_{\gamma_{kl}} = \begin{cases} 1, & \gamma_{kl} = \gamma_{ij} \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$$

onde $P(K)$ é o conjunto de funções lineares em K . Similarmente,

$$U = \{\chi_m\}, \text{ onde } \chi_m = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_m \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Assim, escrever $p = \sum_{\Omega_m} p_m \chi_m$ e $v = \sum_{\gamma_{ij}} v_{ij} \psi_{ij}$, permite que rearranjemos (3.4.6) como um sistema linear em $\mathbf{p} = \{p_m\}$ e em $\mathbf{v} = \{v_{ij}\}$. Este sistema tem a forma

$$\begin{pmatrix} B & -C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

Aqui $\mathbf{f}=[f_m]$, $\mathbf{g}=[g_{kl}]$, $\mathbf{B}=[b_{ij,kl}]$ e $\mathbf{C}=[c_{m,kl}]$, onde:

$$\begin{aligned} g_{kl} &= \left[\int_{\Omega} \rho G \cdot \psi_{kl} dx \right], & f_m &= \left[\int_{\Omega_m} f dx \right], \\ b_{ij,kl} &= \left[\int_{\Omega} \psi_{ij} \cdot \lambda^{-1} \psi_{kl} dx \right], & c_{m,kl} &= \left[\int_{\Omega_m} \nabla \cdot \psi_{kl} dx \right] \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Note que para o Método Misto de Elementos Finitos de Raviart-Thomas abordado, nós temos que

$$c_{m,kl} = \begin{cases} 1, & m = k \\ -1, & m = l \\ 0, & cc. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

As entradas da matriz $b_{ij,kl}$, por outro lado, dependem da geometria das células da malha e da forma de λ . Ou seja, as entradas dependem se λ é isotrópico ou anisotrópico, se λ é constante na célula ou exibe variações na sub-malha no campo de permeabilidades.

4 EXEMPLOS ABORDADOS

Nas próximas subseções, abordaremos exemplos para simulação de escoamentos de fluidos monofásicos incompressíveis em regime permanente e apresentaremos comparações entre os métodos numéricos estudados para a resolução. O computador utilizado possui um processador AMD Athlon® 64 bits 3000+, 1,5 GB de memória RAM, com o sistema operacional Windows XP Professional®. Os códigos para os exemplos foram construídos em MatLab [6, 55] e são dados no apêndice. As imagens dos modelos foram, também, construídas utilizando o MatLab e estão apresentadas nas seções seguintes.

4.1 Exemplo com barreiras

Vamos utilizar um problema proposto por Mosé et al. [34], para analisar o escoamento de fluido e os campos de pressão e velocidade gerados a partir de um gradiente de pressão imposto por condições de contorno entre as fronteiras superior e inferior do domínio. O domínio é caracterizado por um campo de permeabilidades $K = 1m/dia$ em presença de duas barreiras paralelas de permeabilidade mais baixa, igual a $K = 10^{-5}m/dia$ (Fig. 4.1.a). Verificaremos a razão entre a massa que entra no trecho \overline{ab} e a que passa pelo trecho \overline{cd} , conseguindo, com isso, avaliar a de conservação de massa. Considerando-se ρ_f constante e desprezando-se a variação temporal, a conservação de massa é descrita pela seguinte equação:

$$m^t = \int \rho_f \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \vec{n} ds = \int_{x_1}^{x_2} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} u_x dy - u_y dx \quad (4.1.1)$$

onde ϕ é a porosidade do meio, ρ_f a densidade do fluido, c_f a compressibilidade do fluido, $\vec{u}_f = (u_x, u_y)$ é a velocidade de fluido e m^t é a quantidade de massa que atravessa o trecho analisado.

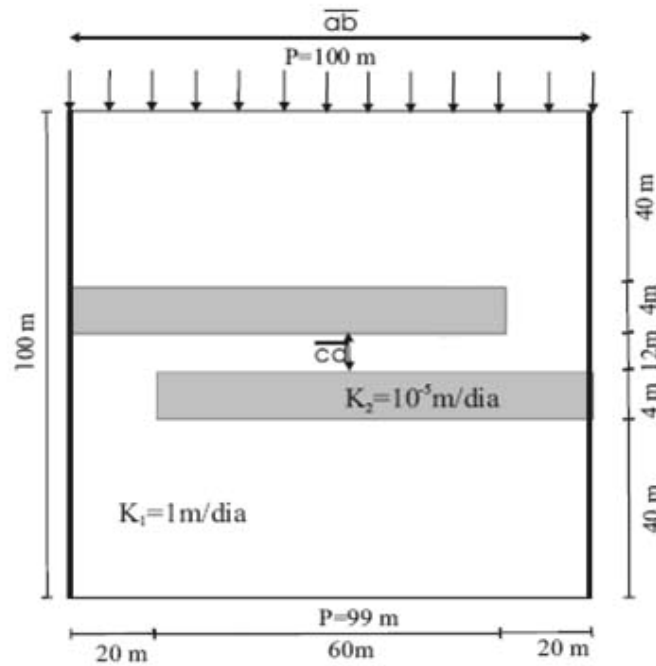


Fig. 4.1.a. Exemplo com barreiras e trechos analisados.

Calculamos, também a conservação de massa em trechos diferentes (Fig. 4.1.b): imediatamente antes das barreiras e imediatamente após as mesmas.

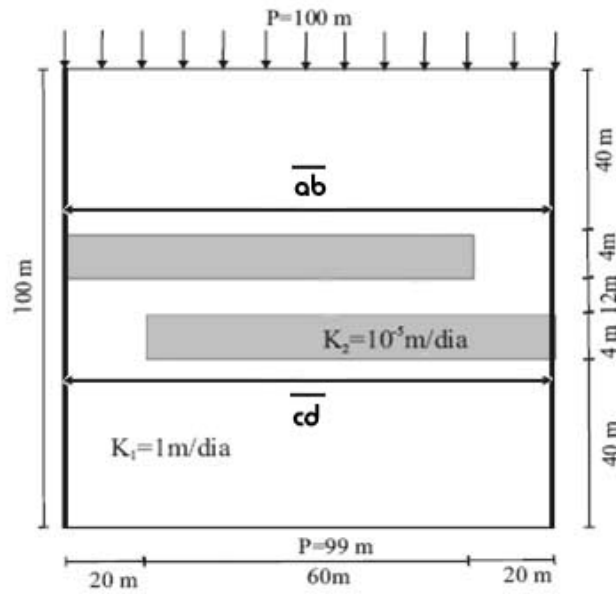


Fig. 4.1.b. Exemplo com barreiras e trechos analisados.

4.1.1 Resultados das comparações

Abaixo está o gráfico do campo de permeabilidades utilizado para o referido exemplo:

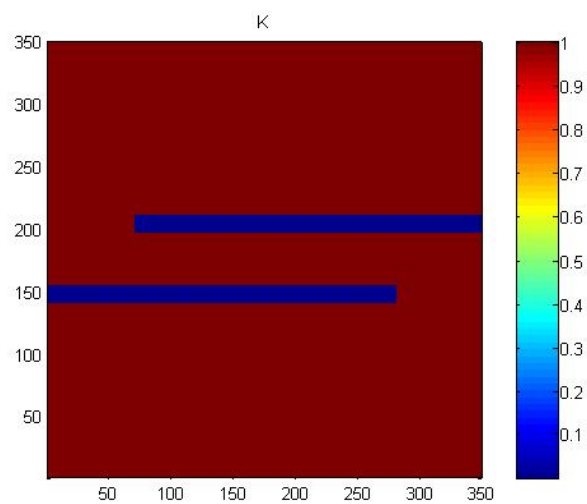


Fig. 4.1.1.a. Campo de permeabilidades (m/dia), com malha de 350x350.

Foram calculadas para o método dos volumes finitos as razões entre a massa que passa pelo segmento \overline{ab} e a que passa pelo segmento \overline{cd} , nos dando a porcentagem de conservação da massa. Foram, também, cronometrados os tempos para processamento em diferentes malhas e os resultados estão descritos nas tabelas abaixo (Tab. 4.1.1.a e Tab. 4.1.1.b).

Malhas	Conservação da massa	Tempo de processamento
50x50	87,74%	0,923s
100x100	87,88%	1,301s
150x150	87,92%	1,670s
200x200	87,94%	2,723s
250x250	87,95%	3,895s
300x300	87,96%	5,796s
350x350	87,97%	8,695s
400x400	87,97%	13,346s
450x450	87,97%	15,872s
500x500	87,97%	25,698s
550x550	87,98%	27,780s

Tab.4.1.1.a. Conservação de massa versus tempo de processamento para o exemplo da Fig. 4.1.a.

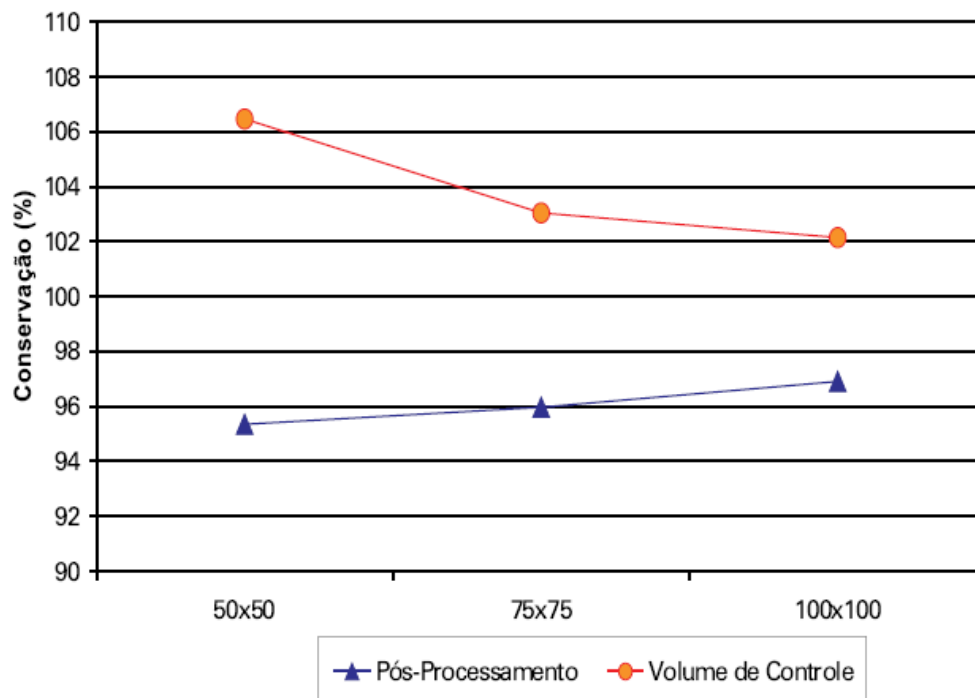


Fig. 4.1.1.a. Comparação da conservação de massa entre métodos [35].

Pudemos observar pelos resultados obtidos, que não existe uma conservação de massa muito precisa, comparada aos resultados obtidos por Ney [35] utilizando o método de pós-processamento da velocidade e de volume de controle (Fig. 4.1.1.a), que possuem uma taxa de 103% de conservação de massa, em média, para o método do volume de controle e 96%, em média, para o método do pós-processamento da velocidade.

Observamos, ainda, que não temos um ganho significativo no resultado, mesmo com malhas muito maiores. A partir da malha de 200x200 temos uma melhora de 0,01% na conservação da massa. A malha de 600x600 alcançou o limite de memória da máquina com o MatLab, o que impossibilitou os cálculos. Todas as malhas superiores a de 600x600 tiveram o mesmo efeito.

Malhas	Conservação da massa	Tempo de processamento
50x50	100,04%	0,849s
100x100	100,01%	1,098s
150x150	100%	1,232s
200x200	100%	1,993s
250x250	100%	3,152s
300x300	100%	4,809s

Tab. 4.1.1.b. Conservação de massa versus tempo de processamento para o exemplo da Fig. 4.1.b.

No caso da Fig. 4.1.b, podemos observar que a conservação de massa é precisa, nos trechos analisados, que indicam que toda massa que entra pelo conjunto de barreiras, também sai. Vemos também que com malhas pouco refinadas (150x150) já alcançamos a precisão total na conservação da massa.

4.2 Exemplo dos cinco poços

Abordamos o exemplo clássico dos cinco poços (Fig. 4.2.a), ou um quarto ($\frac{1}{4}$) dele (“quarter-five spot”), já que, devido à simetria, podemos simplificar o problema e os resultados encontrados valem para as outras direções.

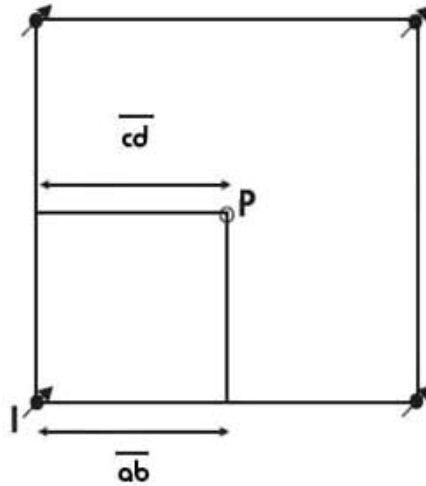


Fig. 4.2.a. Ilustração do problema dos cinco poços, onde **I** é o poço injetor e **P** o poço produtor.

4.2.1 Resultados das comparações

Primeiramente, tratamos um exemplo com permeabilidade constante $K = 1m/dia$ (Fig. 4.2.1.a), $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ e $q = \pm 1$, onde simulamos um poço injetor na origem e um poço produtor no extremo oposto, localizado pelo ponto P. Utilizamos, para isso, o método dos Volumes Finitos.

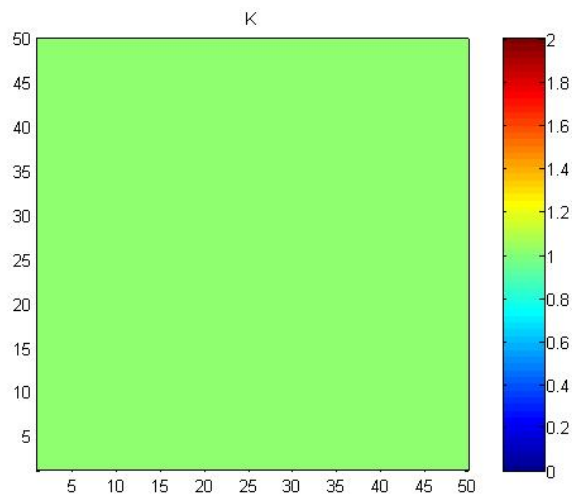


Fig. 4.2.1.a. Campo de permeabilidades constantes, com malha de 50x50.

Utilizamos malhas com 30 curvas de nível e calculamos, novamente, as razões entre a massa que passa pelo segmento \overline{ab} e a que passa pelo segmento \overline{cd} , nos dando a porcentagem de conservação da massa, além da cronometragem dos tempos para processamento. Os resultados estão descritos abaixo (Tab. 4.2.a).

Malhas	Conservação da massa	Tempo de processamento
50x50	77,28%	0,789s
100x100	88,04%	0,983s
150x150	91,88%	1,430s
200x200	93,86%	2,316s
250x250	95,06%	3,581s
300x300	95,87%	5,427s
350x350	96,45%	8,280s
400x400	96,89%	12,872s
450x450	97,23%	15,475s
500x500	97,50%	25,513s
550x550	97,73%	34,167s

Tab. 4.2.a. Conservação de massa versus tempo de processamento.

Neste exemplo, alcançamos uma precisão muito boa com um tempo de processamento baixo. Com a malha de 250x250 já temos um ótimo resultado, comparando-se os outros resultados e seus respectivos tempos de processamento. Nas figuras a seguir são mostrados os campos de pressão para algumas malhas utilizadas. Note que devido a

singularidade das soluções ocorrem variações muito grandes nos pontos que representam os poços injetor e produtor.

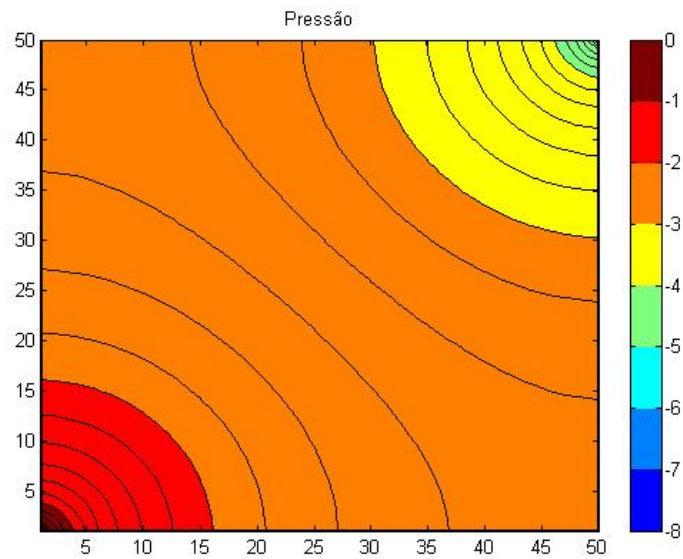


Fig. 4.2.1.b. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e malha de 50x50.

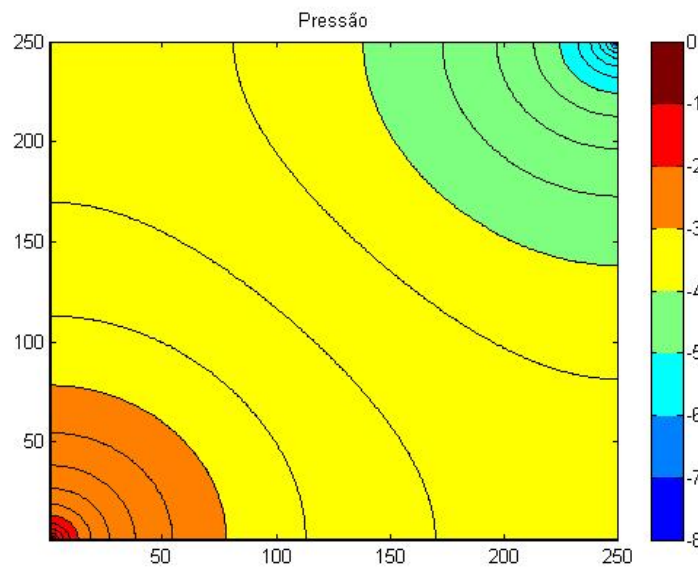


Fig. 4.2.1.c. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e malha de 250x250.

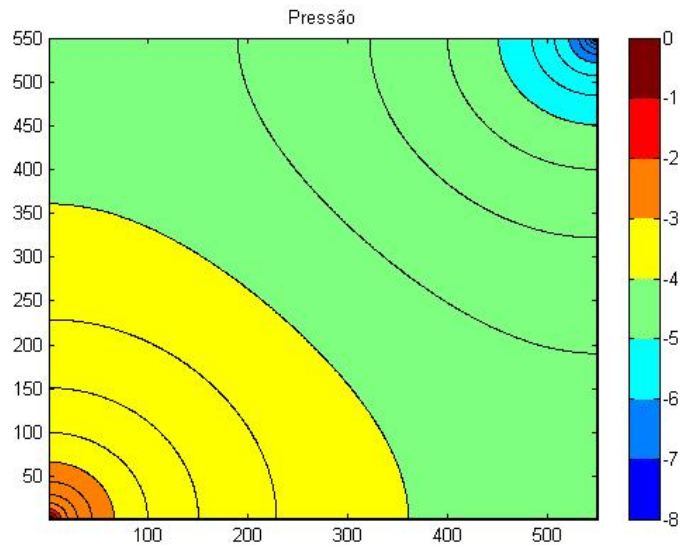


Fig. 4.2.1.d. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e malha de 550x550.

Agora trataremos de um exemplo com permeabilidade aleatória (Fig. 4.2.1.e e Fig. 4.2.1.f), que nos mostra como a configuração das permeabilidades influencia a conservação de massa.

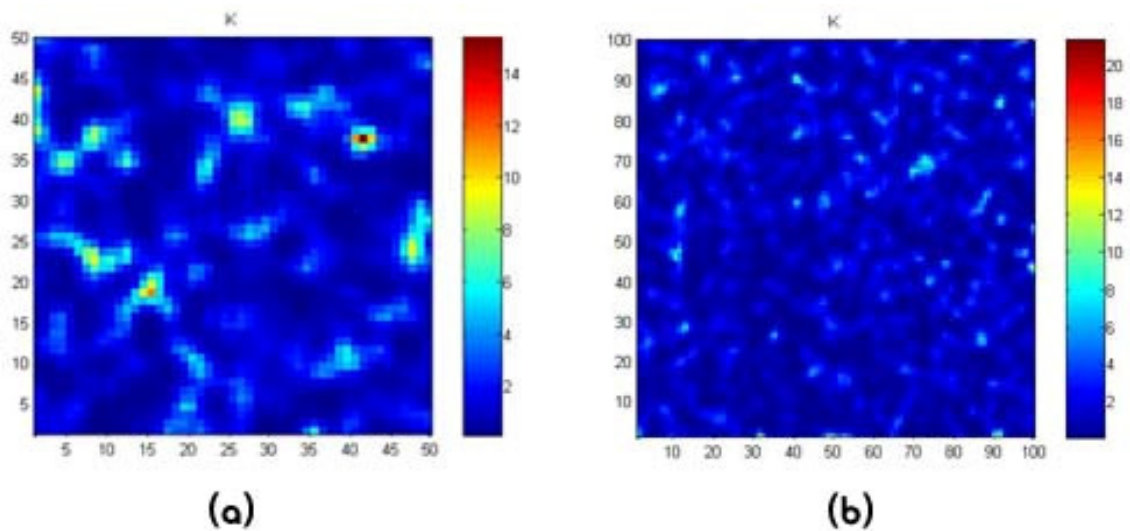


Fig. 4.2.1.e. Campo de permeabilidades aleatórias, com malhas de 50x50 (a) e 100x100 (b).

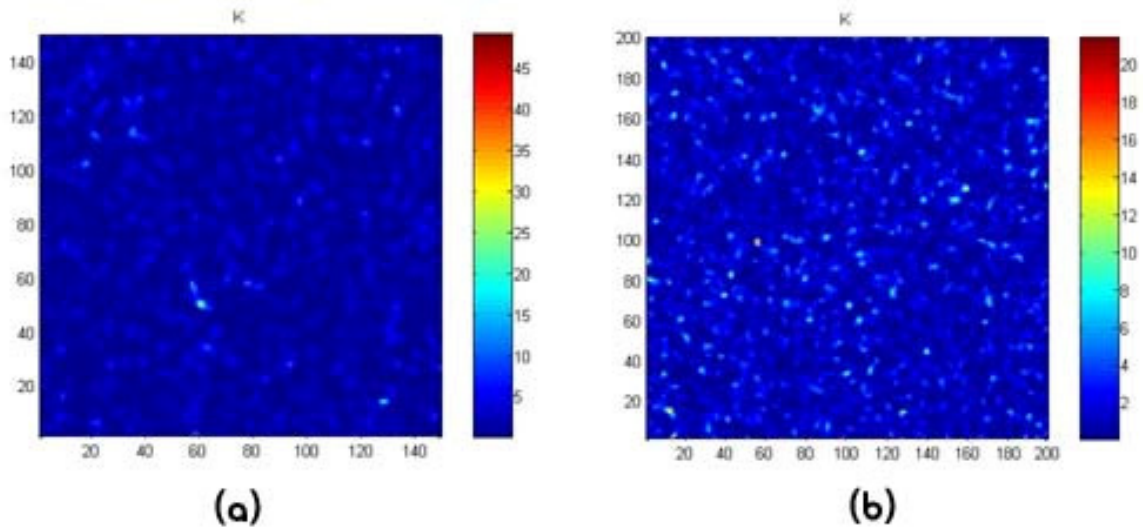


Fig. 4.2.1.f. Campo de permeabilidades aleatórias, com malhas de 150x150 (a) e 200x200 (b).

Novamente, utilizamos malhas com 30 curvas de nível e cronometramos os tempos de processamento e as porcentagens de conservação de massa. Os resultados estão na Tab. 4.2.1.b.

Malhas	Conservação da massa	Tempo de processamento
50x50	72,89%	1,001s
100x100	61,39%	1,296s
150x150	96,08%	1,929s
200x200	112,85%	2,972s

Tab. 4.2.1.b. Conservação de massa versus tempo de processamento.

Observamos que a aleatoriedade dos campos de permeabilidade é transferida para os resultados de conservação de massa, que nos mostra a influência da permeabilidade no modelo. Nas figuras a seguir são mostrados os campos de pressão para as malhas utilizadas.

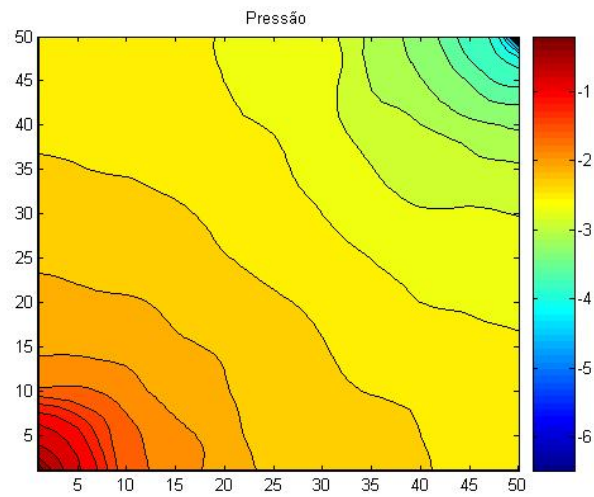


Fig. 4.2.1.g. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e malha de 50x50.

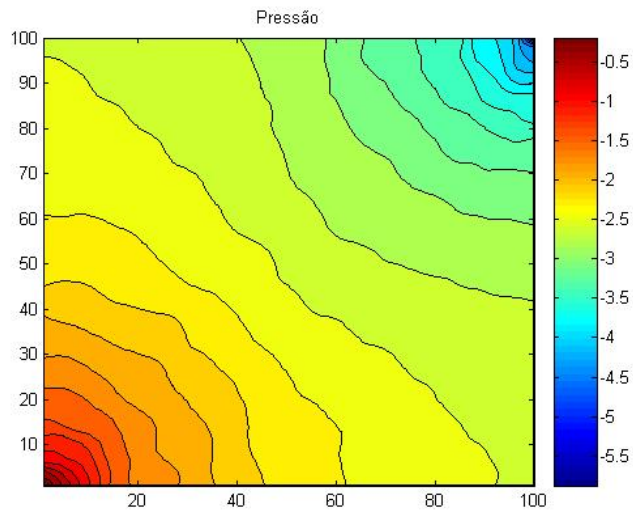


Fig. 4.2.1.h. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e

malha de 100x100.

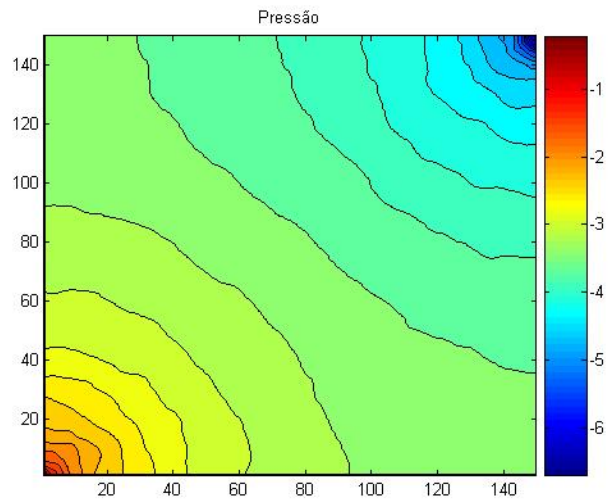


Fig. 4.2.1.i. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e malha de 150x150.

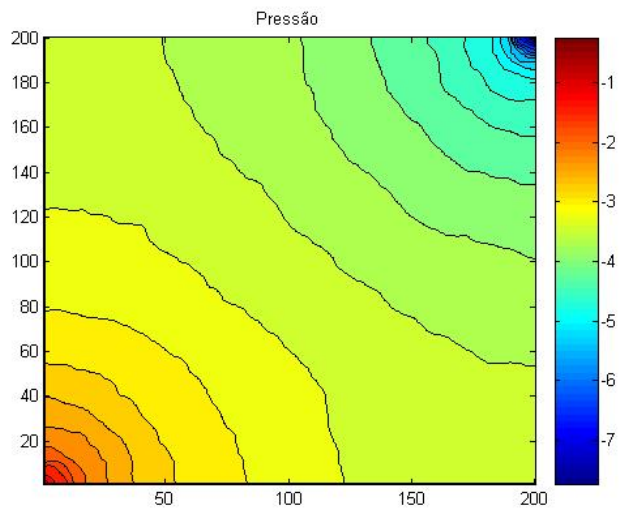


Fig. 4.2.1.j. Campo de pressões, com 30 curvas de nível e malha de 200x200.

4.3 Exemplo do poço SPE10

Abordamos, agora, um modelo de reservatório mais realista. Simularemos dois cortes horizontais de um modelo do “10th SPE Comparative Solution Project”, que está disponível na internet [56] (Fig. 4.3.a). Descrevemos o reservatório por uma malha cartesiana regular de 60x220x85 blocos. O arquivo contendo o campo de permeabilidades também está disponível na internet [57].

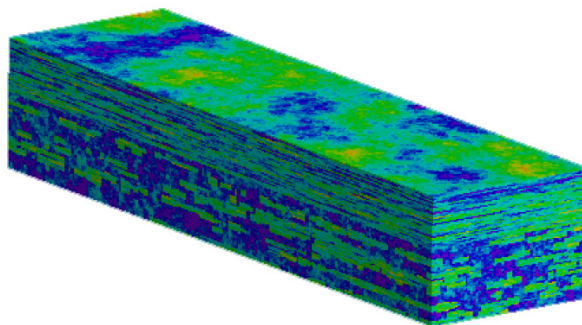


Fig. 4.3.a. Modelo do reservatório SPE10 [56].

4.3.1 Resultados das comparações

O caso abordado possui um campo de permeabilidade descrito de acordo com a camada estudada. Trataremos da primeira (Fig. 4.3.1.a e Fig. 4.3.1.b) e da última camada (Fig. 4.3.1.c e Fig. 4.3.1.d).

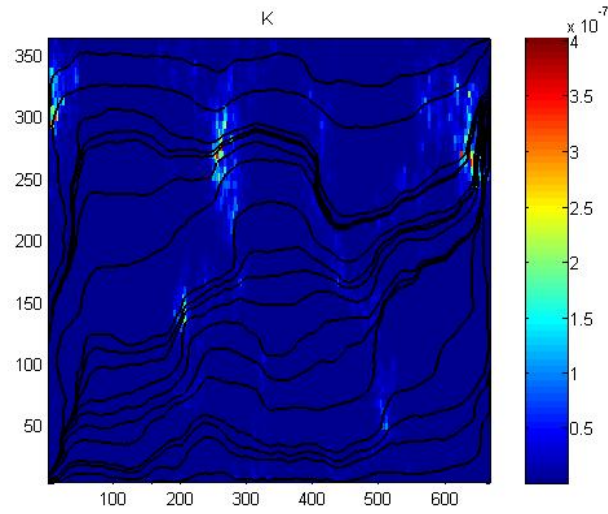


Fig. 4.3.1.a. Campo de permeabilidades da camada 1.

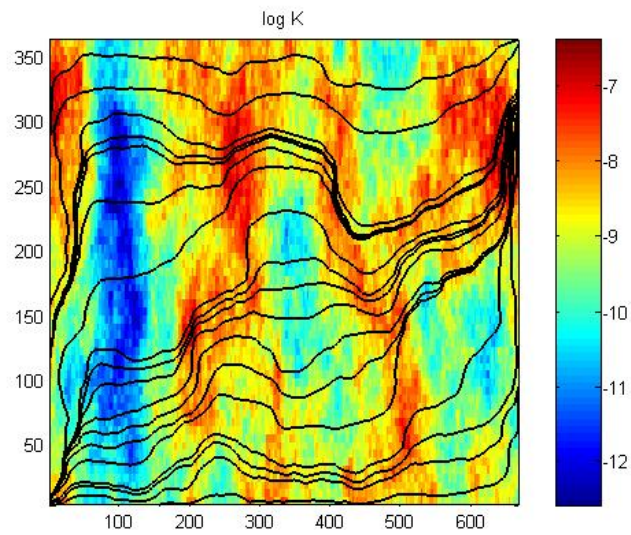


Fig. 4.3.1.b. Campo das permeabilidades (logaritmo) da camada 1.

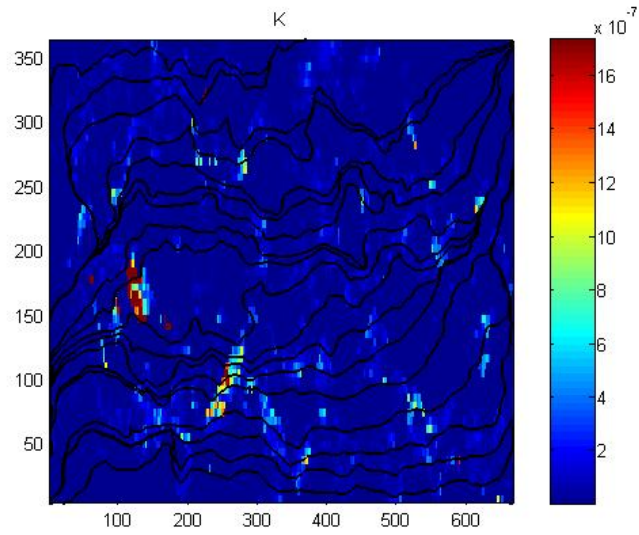


Fig. 4.3.1.c. Campo das permeabilidades da camada 85.

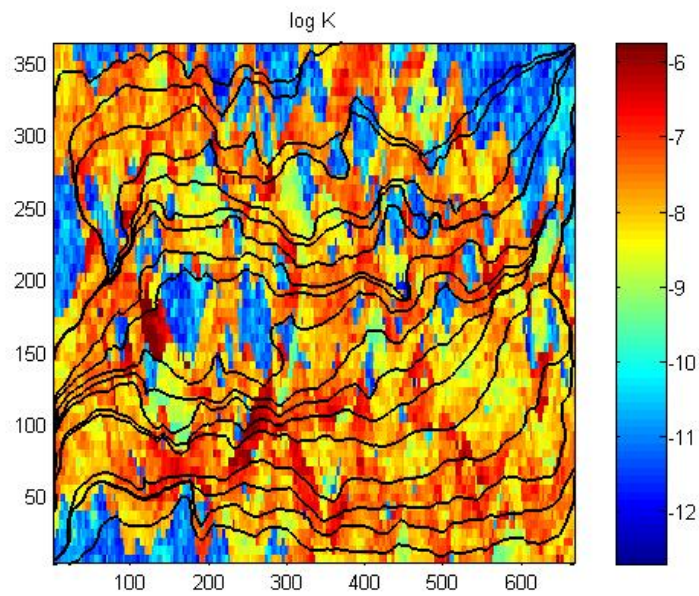


Fig. 4.3.1.d. Campo das permeabilidades (logaritmo) da camada 85.

Os resultados obtidos para os campos de pressão, estão demonstrados nas figuras abaixo:

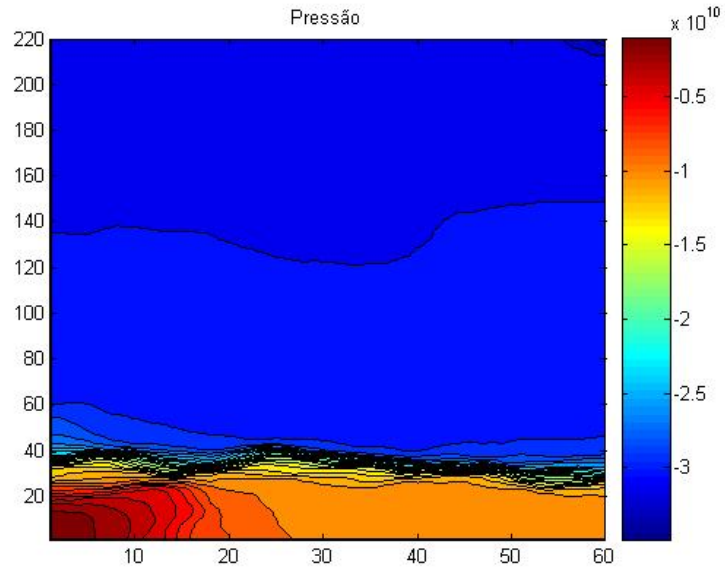


Fig. 4.3.1.e. Campo de pressões, no método TPFA para a camada 1.

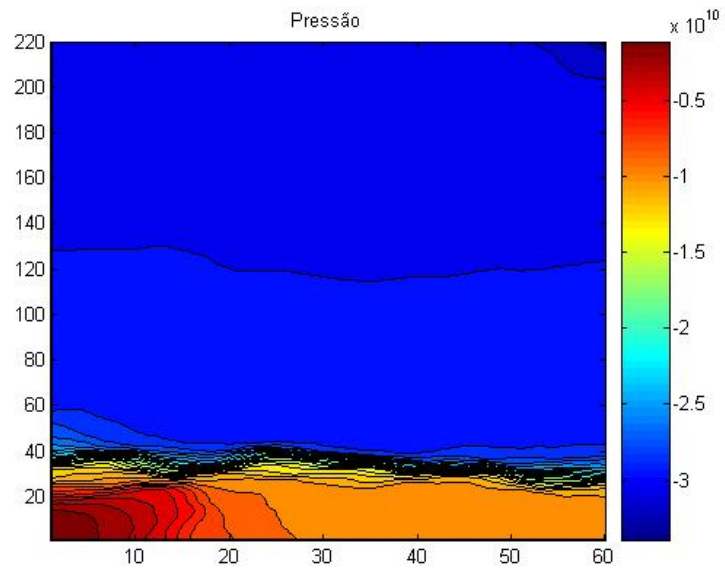


Fig. 4.3.1.f. Campo de pressões, no método MFEM para a camada 1.

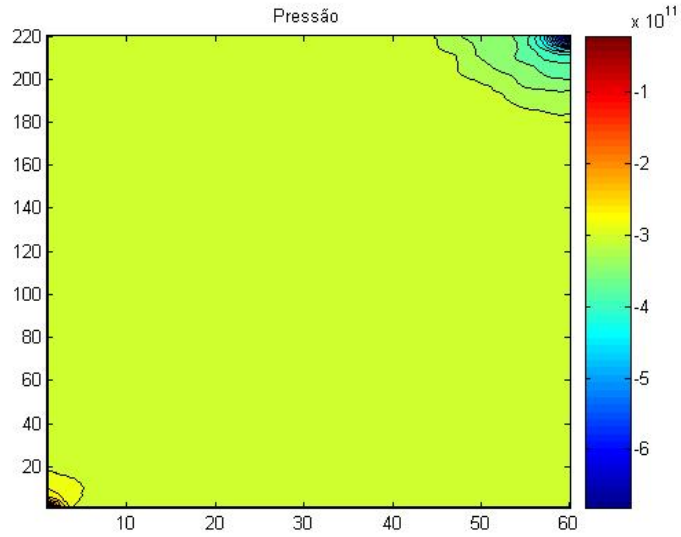


Fig. 4.3.1.f. Campo de pressões, no método TPFA para a camada 85.

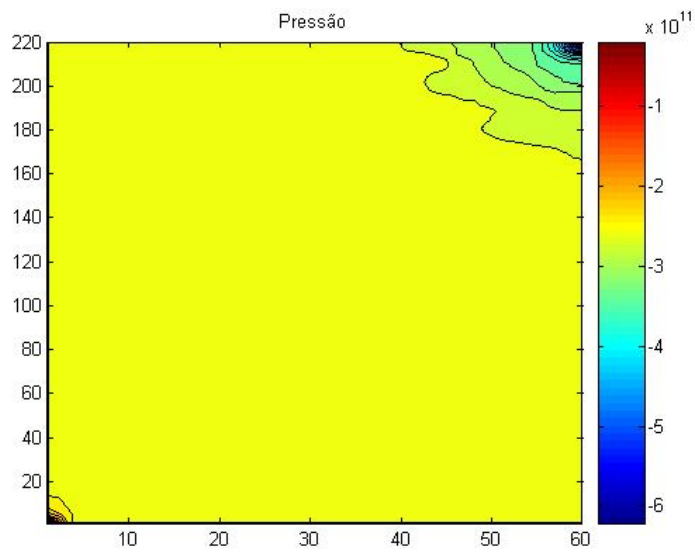


Fig. 4.3.1.f. Campo de pressões, no método MFEM para a camada 85.

Abaixo estão os resultados obtidos para o campo de velocidades nos métodos analisados:

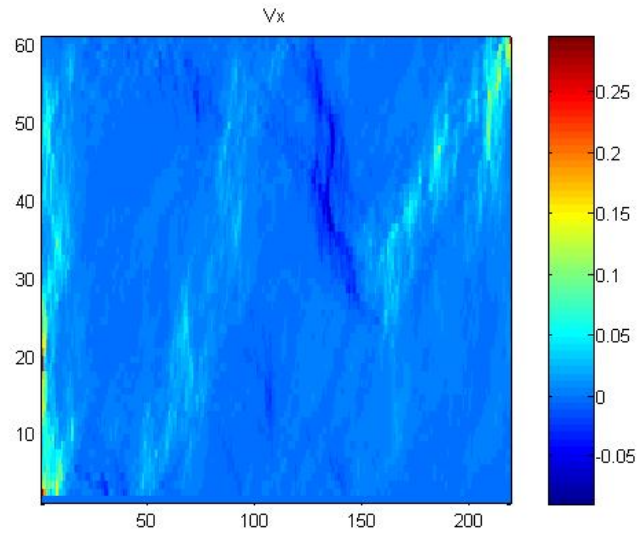


Fig. 4.3.1.g. Campo de velocidades na direção x, no método TPF para a camada 1.

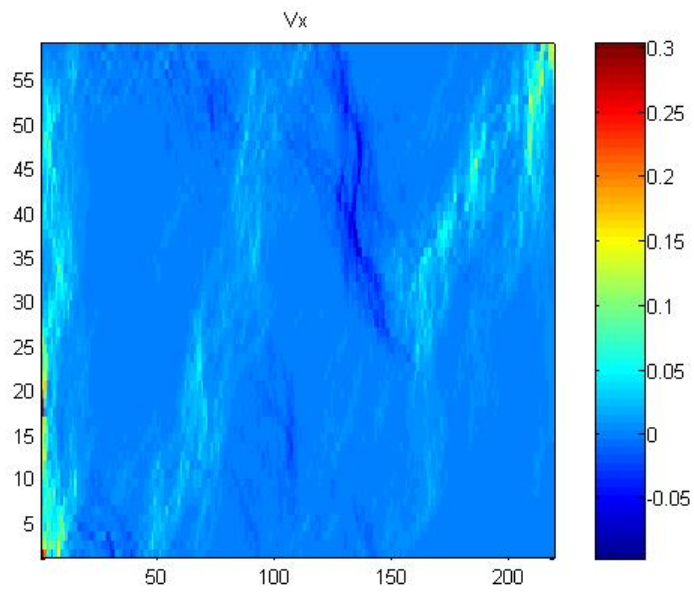


Fig. 4.3.1.h. Campo de velocidades na direção x, no método MFEM para a camada 1.

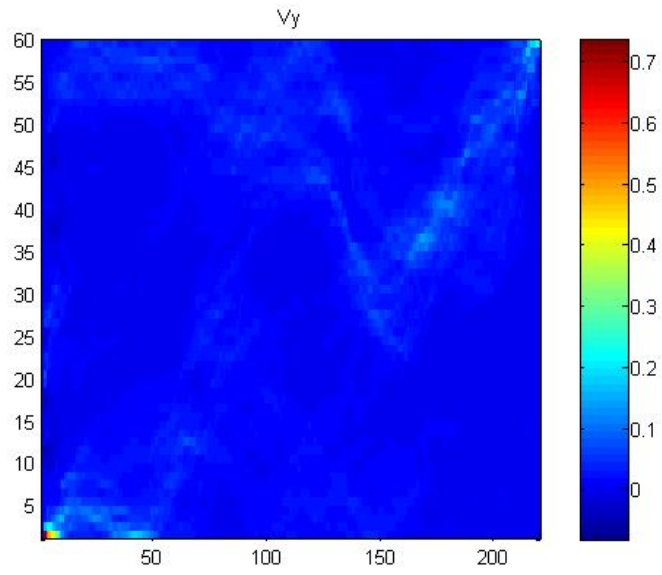


Fig. 4.3.1.i. Campo de velocidades na direção y, no método TPFA para a camada 1.

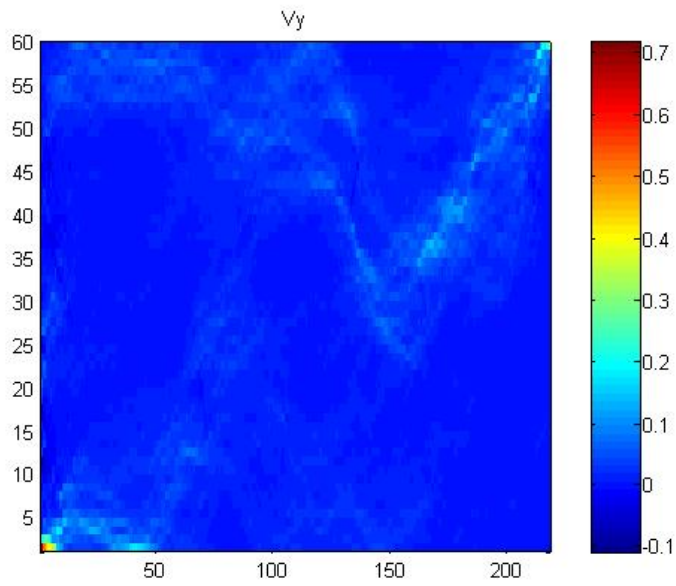


Fig. 4.3.1.j. Campo de velocidades na direção y, no método MFEM para a camada 1.

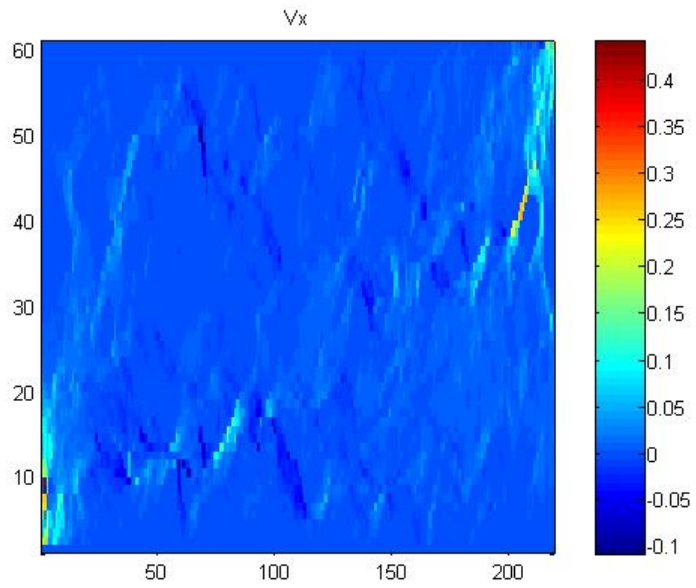
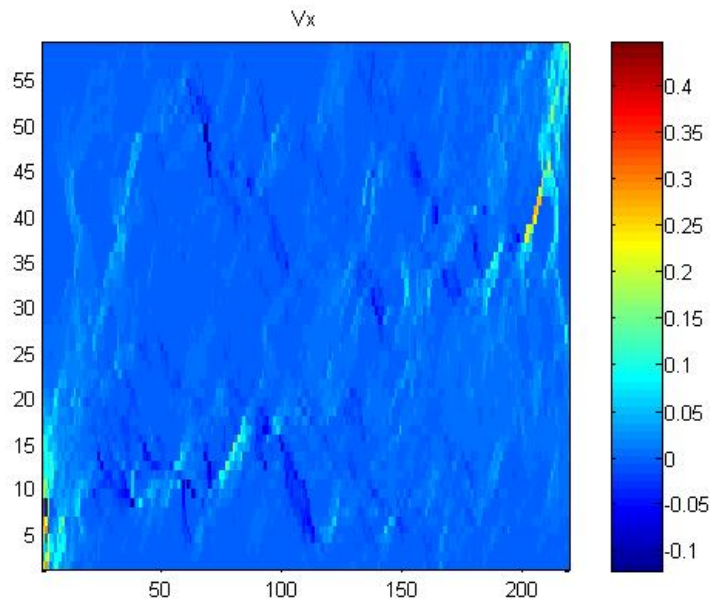


Fig. 4.3.1.l. Campo de velocidades na direção x, no método TPFA para a camada 85.



. 4.3.1.m. Campo de velocidades na direção x, no método MFEM para a camada 85.

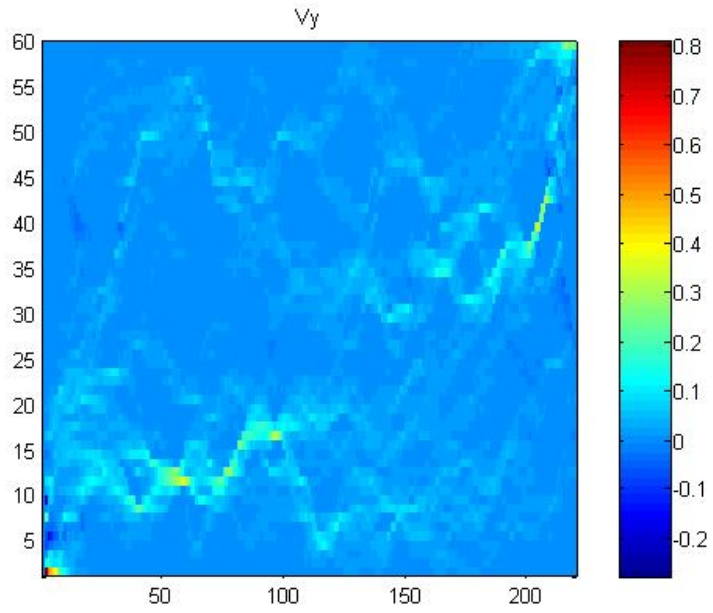


Fig. 4.3.1.n. Campo de velocidades na direção y, no método TPFA para a camada 85.

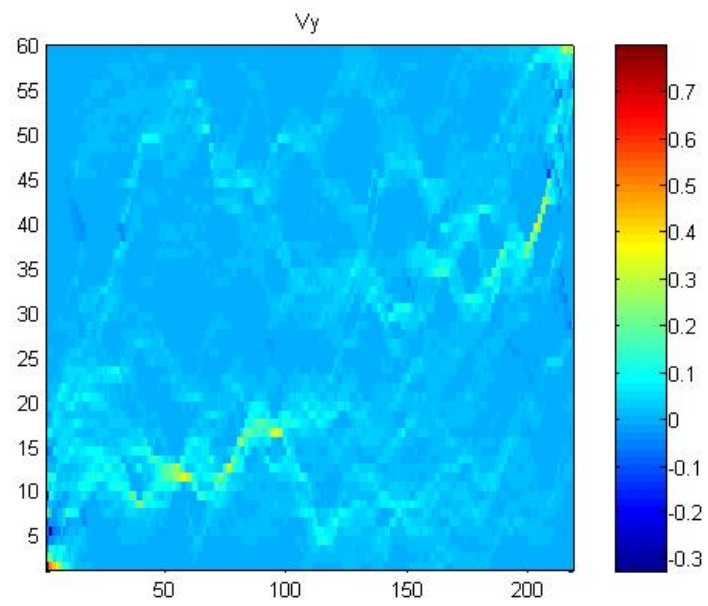


Fig. 4.3.1.o. Campo de velocidades na direção y, no método MFEM para a camada 85.

Cronometramos o tempo de processamento para os métodos dos volumes finitos, e misto de elementos finitos. O resultado encontra-se na tabela abaixo (Tab. 4.3.1.a):

Método	Camada	Tempo de processamento
TPFA	1	1,324s
MFEM	1	4,080s
TPFA	85	1,281s
MFEM	85	2,778s

Tab. 4.3.1.a. Tempo de processamento dos métodos.

Analisamos o desvio no cálculo das velocidades devido aos métodos, e expomos abaixo os gráficos obtidos:

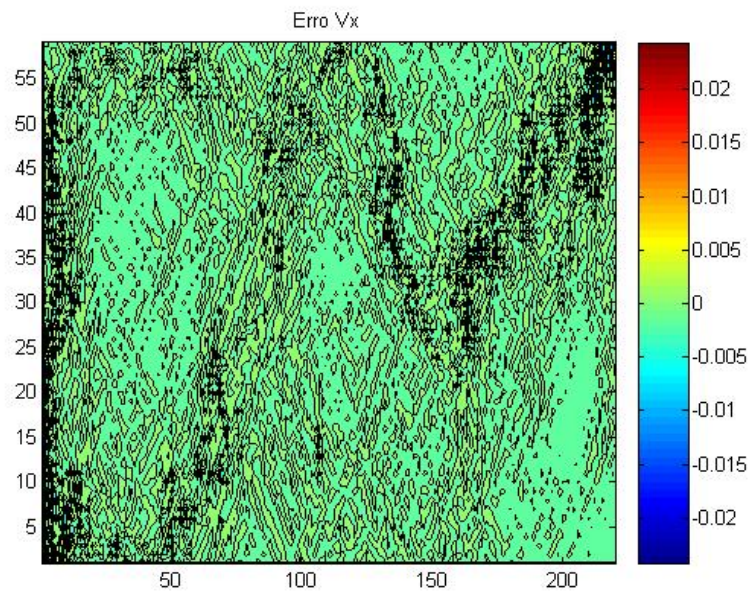


Fig. 4.3.1.p. Gráfico da diferença (%) devido ao cálculo das velocidades na direção x, na camada 1, nos métodos TPFA e MFEM.

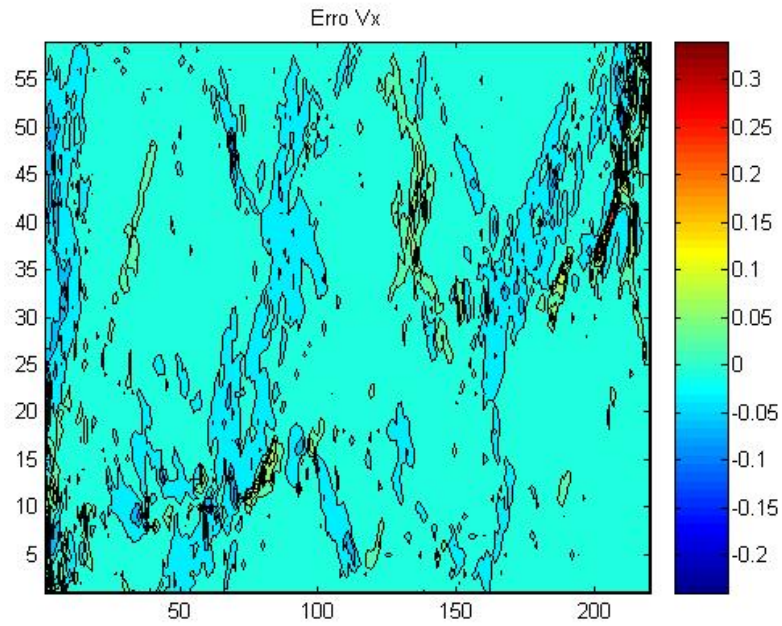


Fig. 4.3.1.q. Gráfico da diferença (%) devido ao cálculo das velocidades na direção x, na camada 85, nos métodos TPFA e MFEM.

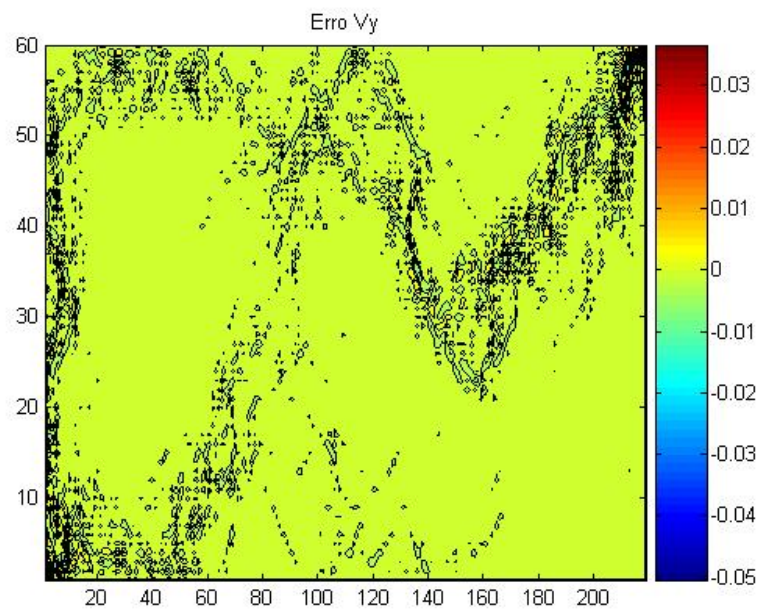


Fig. 4.3.1.r. Gráfico da diferença (%) devido ao cálculo das velocidades na direção y, na camada 1, nos métodos TPFA e MFEM.

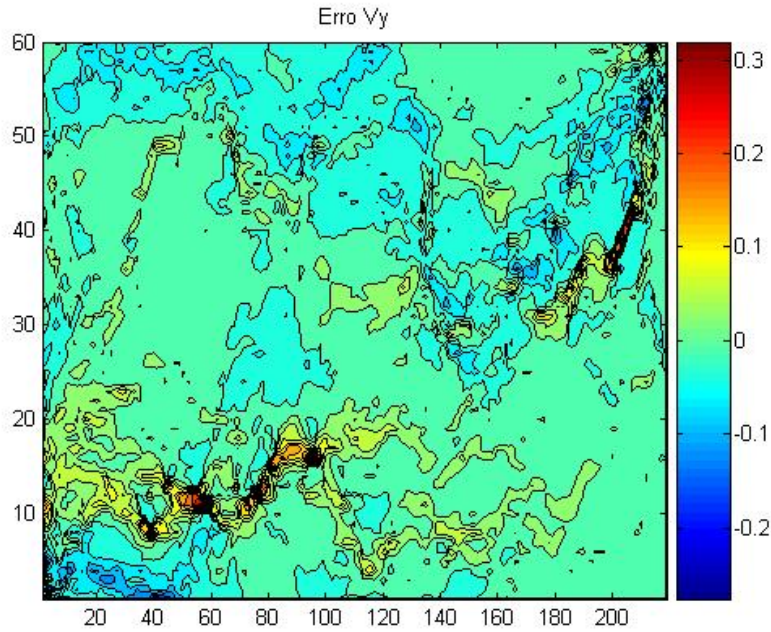


Fig. 4.3.1.s. Gráfico da diferença (%) devido ao cálculo das velocidades na direção y, na camada 85, nos métodos TPFA e MFEM.

Dos resultados obtidos temos que a $\|d\|_{\infty} = 5\%$, para a camada 1, e $\|d\|_{\infty} = 30\%$ para a camada 85. Isto indica que o alto contraste do campo de permeabilidades influi diretamente na precisão do método, já que a camada 85 possui uma configuração bem mais contrastante do que a camada 1.

Concluimos, observando que, apesar do método dos Volumes Finitos ser mais rápido em termos de processamento, quando tratamos de campos de permeabilidade altamente contrastantes, ou inserimos outros elementos no modelo, como barreiras, ele não apresenta uma boa precisão, comparativamente ao método Misto de Elementos Finitos.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo deste trabalho foi comparar a aplicação e o comportamento dos métodos de volumes finitos e misto de elementos finitos em modelos de reservatórios de petróleo, simulados através do cálculo do escoamento de fluidos em meios porosos, em diferentes situações. Foram exemplos simples, e a formulação computacional também, já que o software abordado, vislumbra um ambiente completo para a modelagem, porém sem muitas possibilidades para maiores complexidades no modelo.

No que diz respeito aos resultados das comparações, na conservação da massa, os métodos se mostraram muito satisfatórios pela precisão da solução e desempenho computacional. Porém, com complexidades inseridas no modelo, como anisotropia e heterogeneidade, o método dos Volumes Finitos se mostrou pouco preciso, apesar do excelente desempenho computacional. A comparação entre o método Misto de Elementos Finitos e o método dos Volumes Finitos, mostrou que a precisão alcançada pelo primeiro tem como contrapartida o custo computacional maior cerca de 2,5 a 3,5 vezes em relação ao segundo, que demonstrou pouca precisão quando tratamos de campos de permeabilidades mais complexos. Dependendo da situação se estudará a possibilidade da utilização de um ou de outro.

Temos que ressaltar que a utilização do MatLab como ambiente para a modelagem funciona muito bem como ferramenta de prototipagem rápida, de exemplos simples.

Em trabalhos futuros, seria interessante a utilização destes métodos em outros diferentes modelos de reservatório, mais complexos em anisotropia, heterogeneidades e barreiras, para um maior esforço em processamento e assim podermos detectar outros fatores que influenciem a precisão dos métodos.

Além disso, poderíamos utilizar malhas mais realistas, produzidas por geradores de malhas profissionais e adequarmos o código do MatLab para uma linguagem onde possamos, além de reconhecer tais malhas, proporcionar uma visualização em um software, também profissional, para visualização.

6 REFERÊNCIAS

- [1] AARNES, J. E., GIMSE, T., LIE, K. A. "An introduction to the numerics of flow in porous media using matlab". *SINTEF ICT*, Dept. of Applied Mathematics, Oslo.
- [2] AZEVEDO, A. F. M. "Método dos elementos finitos". *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*, Portugal, 2003.
- [3] AZIZ, K., SETTARI, A. "Petroleum reservoir simulation". *Elsevier Applied Science Publishers Ltd*, 1979.
- [4] AZIZ, K. "Reservoir simulation grids: opportunities and problems". *Society of Petroleum Engineers*, SPE 25233, 1993.
- [5] BASTIAN, P. "Numerical computation of multiphase flows in porous media". *Informatik, Wissenschaftliches Rechnen*, 1999.
- [6] BASTOS, L. P. "Manual do matlab". *Projeto REENGE-DEL*, UFES/LCEE, 1997.
- [7] BEAR, J., BACHMAT, Y. "Introduction to modeling of transport phenomena in porous media". *Kluwer Academic Publishers*, 1991.
- [8] BEAR, J., VERRUIJT, A. Modeling groundwater flow and pollution. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [9] CARMAN, P.C. "Fluid flow through granular beds". *Trans. Inst. Chem. Engng.* 15, pp. 150-166, 1937.
- [10] CHEN, C. Y., MEIBURG, E. "Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration". *Journal Fluid Mechanics*, vol.371:233-268, 1998.

- [11] CHEN, Z. et al. Computational methods for multiphase flows in porous media. Philadelphia: Siam, 2006.
- [12] COREY, A. "Mechanics of immiscible fluids in porous media". *Water Resources Publications*, 3.ed, 1994.
- [13] CORRÊA, A. C., PANDE, K. K., RAMEY, H. J., BRIGHAM, W. E. "Computation and interpretation of miscible displacement performance in heterogeneous porous media". *Society of Petroleum Engineers*, SPE, 1990.
- [14] COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., GARCIA, E. L. M., LOULA, A. F. D. "Solution of miscible and immiscible flows employing element by element iterative strategies". *Society of Petroleum Engineers*, SPE 27050, 1994.
- [15] COUTINHO, A. L. G. A., SILVA, A. S., DEVLOO, P. R. B. "Uma comparação de esquemas de estabilização para simulação por elementos finitos de escoamentos imiscíveis bifásicos em meios porosos". *Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería. Espanha*, v.19, n.3, p.279 - 294, 2003.
- [16] COUTINHO, A.L.G.A., ALVES, J.L.D., LANDAU, L., et al. "Stabilized methods and post-processing techniques for darcy flow and related problems". *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Viena, Áustria, 2002.
- [17] CRICHLLOW, H. B. Modern reservoir engineering - a simulation approach. New Jersey: Englewood Cliffs, 1977.
- [18] DEB, M. K., REDDY, M. P., THUREN, J. B., ADAMS, W. T. "A new generation solution adaptive reservoir simulator". *Society of Petroleum Engineers*, SPE 30720, 1995.

- [19] DEMOND, A. H., ROBERTS, P. V. "An examination of relative permeability relations for two-phase flow in porous media". *Water Research. Bull.*, 23:617–628, 1987.
- [20] DEVLOO, P. "The implementation of directional boundary conditions for finite element computations with iterative solvers". *Communications in Applied Numerical Methods*, vol.3:259-264, 1987.
- [21] DONEA, J., HUERTA, A. Finite element methods for flow problems. New York: John Wiley and Sons, 2003.
- [22] DURLOFSKY, L. J. "Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities". *Water Resources Research*, vol.30, n.4:965-973, 1994.
- [23] DURLOFSKY, L. J. "A triangle based mixed finite element-finite volume technique for modeling two-phase flow through porous media". *Journal of Computational Physics* 105, pp. 252–266, 1993.
- [24] FALVEY, D. A., MIDDLETON, M. F. "Passive continental margins: evidence for a prebreakup deep crustal metamorphic subsidence mechanism". *Oceanologica Acta SP*, pp. 103–114, 1981.
- [25] HUBBERT, M. K., RUBEY, W. W. "Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting". *Bull. of Geological Society. Am.* 70, pp. 115–166, 1959.
- [26] HUGHES, T. J. R. The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Englewood Cliffs, 1987.
- [27] KOZENY, J. "Über kapillare leitung des wassers im boden". *Sitzungsbericht. Akad Wiss Math-Naturw Klasse*, 136, 271—306, 1927.

- [28] LOULA, A. F. D., GARCIA E. L. M., MURAD, M. A., MALTA, S. M. C, SILVA, R. S. "Métodos dos elementos finitos aplicados a simulação de reservatórios de petróleo". *Relatório Técnico, Projeto CENPES/LNCC*, 1992.
- [29] MALISKA, C. R. Transferência de calor e mecânica dos fluidos. Rio de Janeiro: Ltc, 2. ed, 2004.
- [30] MASSARANI, G. Fluidodinâmica em sistemas particulados. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.
- [31] MASUD, A., HUGHES, T. J. R. "A stabilized mixed finite element method for Darcy flow". *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, vol. 191:4341-4370, 2002.
- [32] MATTAX, C. C., DALTON, R. L. "Reservoir Simulation". *Society of Petroleum Engineers*, Richardson, TX, 1990.
- [33] MOAVENI, Saeed. Finite element analysis. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [34] MOSÉ, R., SIEGEL, R, ACKERER, P. "Application of the mixed hybrid finite element approximation in a ground water flow model: luxury or necessity ?". *Water Resources Research*, vol.30:3001-3012, 1994.
- [35] NEY, W. G. Um estudo comparativo sobre formulações estabilizadas e adaptatividade na simulação de deslocamentos miscíveis em meios porosos pelo método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002.
- [36] OTON, L. S. C. Petróleo – noções sobre exploração, perfuração, produção e microbiologia. Rio de Janeiro: Interciência, 2003.

- [37] PATZEK, T. W., JUANES, R. "Relative permeabilities for strictly hyperbolic models of three-phase flow in porous media". *Tranp. Porous Media*, 57(2):125-152, 2004.
- [38] PATZEK, T. W., JUANES, R. "Three-phase displacement theory: an improved description of relative permeabilities". *SPE Journal*, 2004.
- [39] PEACEMAN, D. W. "Fundamentals of numerical reservoir simulation". *Elsevier Scientific Publishing Company*, Amsterdam, 1977.
- [40] PENTEADO, H. L. B. Notas de aula da disciplina "modelagem de processos do sistema petrolífero 2". *Mestrado em Sistemas Petrolíferos*, UFRJ/COPPE, 2006.
- [41] RAVIART, P. A., THOMAS, J. M. "A mixed finite element method for second order elliptic equations". In: GALLIGANI, I., MAGENES, E., (eds), *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, pp. 292–315, New York: Springer–Verlag, 1977.
- [42] REIS, V. G. N. Solução viscosa de um modelo de difusão não linear para processamento de imagens. Dissertação de Mestrado, UNESP, São Paulo, SP, Brasil, 2003.
- [43] RIBEIRO, R. F., ROMEU, R. K. "Computing the effective permeability by finite differences, finite elements and mixed-hybrid finite elements". *Society of Petroleum Engineers*, SPE 39068, 1997.
- [44] ROZON, B. J. "A generalized finite volume discretization method for reservoir simulation". *Society of Petroleum Engineers*, SPE 18414, 1989.

- [45] RUSSEL, T. F., WHEELER, M. F. "Finite element and finite difference methods for continuous flow in porous media". *Mathematics of Reservoir Simulation*, 1.ed., cap.2, Philadelphia, USA, SIAM, 1983.
- [46] SCHIFFER, R. Notas de aula da disciplina "rochas-reservatório". *Mestrado em Sistemas Petrolíferos*, UFRJ/COPPE, 2004.
- [47] SCLATER, J. G., CHRISTIE, P. A. F. "Continental stretching: an explanation of the post-mid cretaceous subsidence of the central north sea basin". *Journal of Geophysical Research*, 85, B7, pp. 3711-3739, 1980.
- [48] SEGERLIND, Larry J. Applied finite element analysis. New York: John Wiley and Sons, 1984.
- [49] STONE, H. L. "Estimation of three-phase relative permeability and residual oil". *J. Can. Petr. Tech*, vol.12, pp.53–61, 1973.
- [50] TAIOLI, F. "Recursos energéticos" In: TEIXEIRA, W., TOLEDO, M. C. M., et al. (orgs), Decifrando a Terra. São Paulo: Oficina de Textos, 2.ed, 2003.
- [51] TERZAGHI, K. Theoretical soil mechanics. New York: John Wiley and Sons, 1942.
- [52] WAPLES, D. W. "Evolution of sandstone porosity through time. The modified Scherer model: a calculation method applicable to 1-d maturity modeling and perhaps to reservoir prediction". *Natural Resources Research*, vol. 11, n.4, 2002.
- [53] YOUNG, L. C. "A finite element method for reservoir simulation". *Society of Petroleum Engineers*, SPE 7413, 1981.
- [54] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. The finite element method – fluid dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 5.ed, 2000.

- [55] ZERI, L. M. M. “Apostila de matlab”. *Projeto Apostila*. INPE, 2001.
- [56] <http://www.spe.org/csp/datasets/set02.htm> em 19/12/2006.
- [57] <http://folk.uio.no/kalie/matlab-ressim/data/spe10.mat> em 19/12/2006.
- [58] <http://www.nupeg.ufn.br/downloads/DEQ0376/IEP.01E.RECUPERAÇÃO.SUPLE MENTAR.pdf> em 19/12/2006.

7 APÊNDICE

7.1 Princípios Básicos do Método dos Elementos Finitos

Nesta seção abordamos exemplos simples para a explicação e fundamentação do método dos elementos finitos, do qual derivam os outros métodos utilizados no trabalho.

Passaremos por todas as fases da modelagem: a interpretação inicial na passagem do problema real para um modelo condizente, a formulação matemática do problema, a utilização de métodos para a resolução das equações e a interpretação final dos resultados obtidos da preditividade do modelo.

Utilizamos modelos simples em 1D e escrevemos os códigos no Visual Fortran 6.5.

7.1.1 Interpretação Inicial e Formulação Matemática

Partiremos do problema já conhecido da mola (Fig. 7.1.1.a) e de sua discretização em elementos finitos. Quando impomos uma força F_2 na extremidade 2 provocamos um deslocamento U em relação a extremidade 1 igual a $U_2 - U_1$.

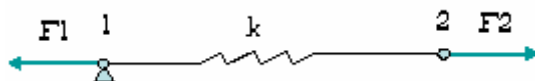


Fig. 7.1.1.a. Representação da mola como elemento finito.

Matematicamente teríamos, representando uma única mola de constante elástica k , ou elemento finito, um sistema de duas equações. Uma para cada extremidade, ou uma para cada nó.

$$\begin{cases} F_2 = k(U_2 - U_1) \\ F_1 = k(U_1 - U_2) \end{cases} \quad (7.1.1.1)$$

Podemos colocar este sistema na forma matricial tornando-o:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (7.1.1.2)$$

Para uma série de molas a formulação é exatamente a mesma. Tomemos como exemplo um conjunto com cinco molas (Fig. 7.1.1.b).

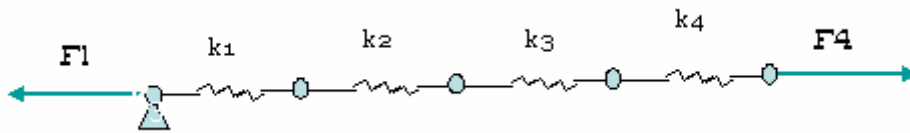


Fig. 7.1.1.b. Série de molas.

Nós sabemos que na verdade se há uma extremidade fixa e, portanto apenas F_1 e F_4 são diferentes de zero, mas mesmo assim fazemos a mesma formulação para todos os elementos, logo:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (7.1.1.3)$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = k_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

O próximo passo é montar a chamada matriz de rigidez global, que será gerada a partir da alocação de cada matriz 2x2 referente a cada elemento finito. Este procedimento é conhecido como montagem da matriz global, o que conduz ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (7.1.1.4)$$

Porém, esta não é a configuração que traduz matematicamente o sistema. Resta-nos impor as condições de contorno do problema. Sabemos que as tensões externas nos elementos 2 e 3 são nulas e que F_1 e F_2 são conhecidos portanto:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (7.1.1.5)$$

Feito isso nosso sistema está pronto para ser resolvido. Lembrando que nossas incógnitas são os deslocamentos.

7.1.2 Formulação de Fenômenos Térmicos

Uma formulação muito parecida é usada quando lidamos com fenômenos térmicos ao invés de mecânicos. Suponhamos o mesmo elemento único do início da formulação matemática, mas ao invés de uma mola este elemento esta representando uma barra de metal de condutividade k (Fig. 7.1.2.a).

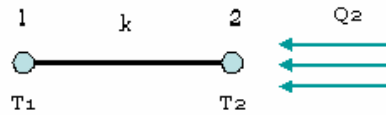


Figura 7.1.2.a. Nova representação da mola, sujeita a um fluxo Q_2 .

Mas a equação que, nos fenômenos térmicos, faz o papel da lei de Hooke é a lei de Fourier:

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T \quad (7.1.2.1)$$

ou

$$Q = \frac{-kA(T_1 - T_2)}{l} \quad (7.1.2.2)$$

De maneira análoga que a que fizemos no caso mecânico montemos o sistema:

$$\begin{cases} Q_2 = k(T_2 - T_1) \\ Q_1 = k(T_1 - T_2) \end{cases} \quad (7.1.2.3)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (7.1.2.4)$$

Observamos que sua formulação por elementos finitos também resulta em uma matriz 2x2 chamada agora de matriz de condutividade.

No caso de vários elementos, o procedimento a seguir será da mesma maneira feita na seção 3.2.1 deste trabalho: montar os sistemas para cada elemento, obtendo para cada um uma matriz de condutividade, e depois montar a matriz global de condutividade.

Posteriormente, como no caso mecânico, é necessário entrar com as condições de contorno que nesse caso são temperaturas externas e valores de fluxo de calor.

7.1.3 Aplicações em 1D

- **Problema de uma barra com elementos finitos iguais não sujeita à convecção**



Fig. 7.1.3.a. Barra com elementos finitos iguais.

Depois de montar as matrizes de condutividade, referentes a cada elemento, e aplicar as condições de contorno o sistema que descreve a barra é descrito por:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} \quad (7.1.3.1)$$

Para $k = 1$, $A = 1$, $l = 8$, $T_1 = 20$ e $T_2 = 70$, temos uma configuração de temperaturas dada por: 20.00000, 32.50000, 45.00000, 57.50000, 70.00000, respectivamente, em cada nó.

O resultado coincide com o que esperávamos: a temperatura aumentando gradativamente da esquerda para direita, já que o nó com maior temperatura estava na extremidade da direita.

- **Problema de uma barra com elementos finitos de tamanhos variados não sujeita à convecção**



Fig. 7.1.3.b. Barra com elementos finitos de tamanhos variados.

A posição dos nós é dada por um arquivo externo, e fazendo a conta entre a posição do nó subsequente com a dele obtém-se o tamanho l do elemento : 0.0000000, 1.000000, 2.000000, 4.000000, 6.000000, 8.000000, 10.00000, 15.00000, 20.00000, 25.00000, 30.00000.

Após os cálculos, obtivemos os seguintes valores para as temperaturas em cada nó: 20.00000, 21.66667, 25.00000, 28.33333, 31.66667, 35.00000, 38.33333, 46.66667, 55.00000, 63.33333, 70.00000.

Novamente, o resultado coincidiu com a expectativa, porém, desta vez, obtivemos um maior detalhamento dos valores de temperatura procurados, devido ao maior número de elementos envolvidos no problema.

- **Problema de uma parede com várias camadas de materiais diferentes sujeita à convecção**

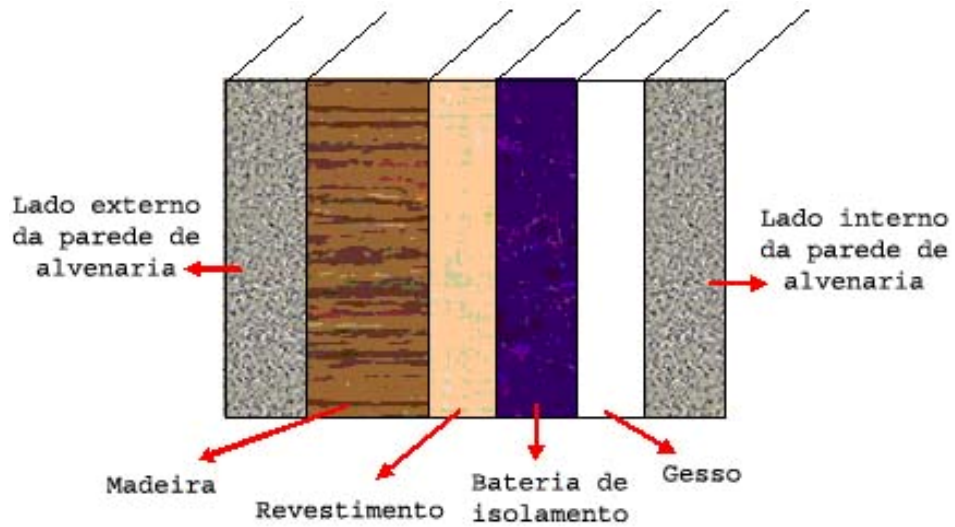


Fig. 7.1.3.c. Esquema das camadas da parede. Modificado de [33].

Este é um problema proposto por Moaveni [33] onde consideramos a homogeneidade na vertical em todas as camadas, o que nos possibilita resolver um problema em 1D.

O problema simula o isolamento térmico de uma residência exposta a frio intenso onde várias camadas de revestimento são necessárias para fazer com que o calor retirado pela convecção do ar frio de fora da casa não baixe demais a temperatura no interior da dela.

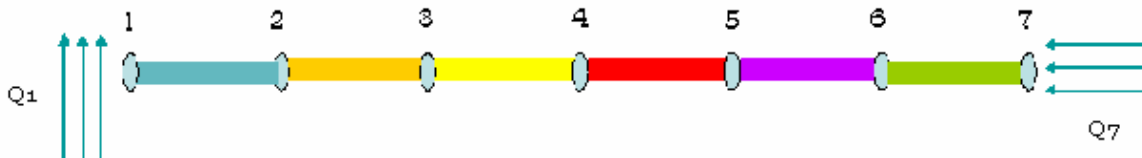


Fig. 7.1.3.d. Representação das camadas por elementos finitos.

A formulação do elemento no caso de haver convecção, que é regida pela Lei de Resfriamento de Newton, assemelha-se muito com o caso de condução substituindo-se $\frac{k}{l}$ por h .

Entretanto Moaveni utiliza a conservação de energia para formular o problema chegando ao mesmo resultado do método já descrito. A lógica da utilização da conservação é, para o elemento 1, por exemplo:

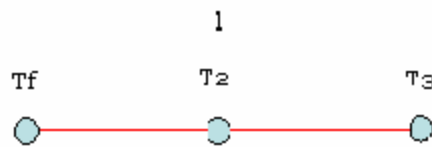


Fig. 7.1.3.e. Representação do elemento 1.

$$hA(T_2 - T_f) = Ka(T_3 - T_2) \quad (7.1.3.2)$$

Fazendo isso para todos os elementos, montando o sistema e aplicando as condições de contorno, com 6 elementos finitos, $T_f = 20$ e $T_6 = 70$, obtivemos uma matriz de condutividade com as seguintes temperaturas associadas, respectivamente, aos nós: 20.00000000000000, 20.5897522536560, 23.4090557101580, 27.9718757779179, 66.0789444756923, 67.6409909853759, 70.00000000000000, conforme esperado.

7.2 Códigos Utilizados

Abaixo estão os códigos utilizados nas comparações:

Code lines to ex_01_TPFA:

% Grid size.

```
Grid.Nx=100; Grid.hx=1/Grid.Nx;  
Grid.Ny=100; Grid.hy=1/Grid.Ny;  
Grid.Nz=1; Grid.hz=1/Grid.Nz;
```

% Permeabilities matrix.

```
Grid.K=ones(3,Grid.Nx,Grid.Ny);  
K = Grid.K;  
K(1,((0.4*Grid.Nx)+1):(0.44*Grid.Nx),1:(0.8*Grid.Ny))=10.^(-5);  
K(1,((0.56*Grid.Nx)+1):(0.6*Grid.Nx),((0.2*Grid.Ny)+1):Grid.Ny)=10.^(-5);  
N=Grid.Nx*Grid.Ny*Grid.Nz;
```

% Source or prescribed pressures.

```
q=zeros(N,1); q(1:Grid.Nx,1)=99*10^6;  
q((N-Grid.Nx):N,1)=100*10^6;
```

```
P=TPFA_(Grid,Grid.K,q);
```

% Compute transmissibilities by harmonic averaging.

```
Nx=Grid.Nx; Ny=Grid.Ny; Nz=Grid.Nz; N=Nx*Ny*Nz;  
hx=Grid.hx; hy=Grid.hy; hz=Grid.hz;  
L = K.^(-1);  
tx = 2*hy*hz/hx; TX = zeros(Nx+1,Ny,Nz);  
ty = 2*hx*hz/hy; TY = zeros(Nx,Ny+1,Nz);  
tz = 2*hx*hy/hz; TZ = zeros(Nx,Ny,Nz+1);  
TX(2:Nx,,:) = tx./(L(1,1:Nx-1,,:)+L(1,2:Nx,,:));  
TY(:,2:Ny, :) = ty./(L(1, :, 1:Ny-1, :)+L(1, :, 2:Ny, :));  
TZ(:, :, 2:Nz) = tz./(L(1, :, :, 1:Nz-1)+L(1, :, :, 2:Nz));
```

% Velocities.

```
V.x = zeros(Nx+1,Ny,Nz);  
V.y = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
```

```

V.z = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
V.x(2:Nx ,:,) = ( P(1:Nx-1, :,)-P(2:Nx, :,) ).*TX(2:Nx, :,);
V.y (:,2: Ny, :) = (P(:,1:Ny-1, :)-P(:,2:Ny, :)).*TY(:,2:Ny, :);
V.z (:, :,2: Nz) = (P (:, :,1: Nz-1)-P(:, :,2:Nz)).*TZ(:, :,2:Nz);

% Plot of pressures.

figure(1);
contourf(P',30); colorbar; title('Pressão');

% Plot of permeabilities.

figure(2);
pcolor((squeeze(K(1, :, :)))); shading flat; axis square;
colorbar; title('K');

% Mass conservation in ab.

mab = 0;
for i=1:1:Grid.Ny;
mab = mab + ((V.x((0.4*Grid.Nx),i,1)*hy)-(V.y((0.4*Grid.Nx),i,1)*hx));
end

% Mass conservation in cd.

mcd = 0;
for j=1:1:Grid.Nx;
mcd = mcd + ((V.x(((0.6*Grid.Nx)+1),j,1)*hy)-(V.y(((0.6*Grid.Nx)+1),j,1)*hx));
end

% Ratio of mass conservation.

(1 - ((mab-mcd)/mab))

Code lines to ex_02_TPFA:

% Grid size.

Grid.Nx=250; Grid.hx=1/Grid.Nx;
Grid.Ny=250; Grid.hy=1/Grid.Ny;
Grid.Nz=1; Grid.hz=1/Grid.Nz;

% Permeabilities matrix.

Grid.K=ones(3,Grid.Nx,Grid.Ny);
K = Grid.K;

```

```

N=Grid.Nx*Grid.Ny*Grid.Nz;

% Source or prescribed pressures.

q=zeros(N,1); q([1 N])=[1 -1];

P=TPFA(Grid,Grid.K,q);

% Compute transmissibilities by harmonic averaging.

Nx=Grid.Nx; Ny=Grid.Ny; Nz=Grid.Nz; N=Nx*Ny*Nz;
hx=Grid.hx; hy=Grid.hy; hz=Grid.hz;
L = K.^(-1);
tx = 2*hy*hz/hx; TX = zeros(Nx+1,Ny,Nz);
ty = 2*hx*hz/hy; TY = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
tz = 2*hx*hy/hz; TZ = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
TX(2:Nx, :, :) = tx./(L(1,1:Nx-1, :, :)+L(1,2:Nx, :, :));
TY(:, 2:Ny, :) = ty./(L(1, :, 1:Ny-1, :)+L(1, :, 2:Ny, :));
TZ(:, :, 2:Nz) = tz./(L(1, :, :, 1:Nz-1)+L(1, :, :, 2:Nz));

% Velocities.

V.x = zeros(Nx+1,Ny,Nz);
V.y = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
V.z = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
V.x(2:Nx, :, :) = (P(1:Nx-1, :, :)-P(2:Nx, :, :)).*TX(2:Nx, :, :);
V.y(:, 2:Ny, :) = (P(:, 1:Ny-1, :)-P(:, 2:Ny, :)).*TY(:, 2:Ny, :);
V.z(:, :, 2:Nz) = (P(:, :, 1:Nz-1)-P(:, :, 2:Nz)).*TZ(:, :, 2:Nz);

% Plot of pressures.

figure(1);
contourf(P',30); colorbar; title('Pressão');

% Plot of permeabilities.

figure(2);
pcolor((squeeze(K(1, :, :)))); shading flat; axis square;
colorbar; title('K');

% Mass conservation in ab.

mab = 0;
for i=1:1:(Grid.Nx/2);
mab = mab + ((V.x(Grid.Nx,i,1)*hy)-(V.y(Grid.Nx,i,1)*hx));
end

```

% Mass conservation in cd.

```
mcd = 0;
for j=(Grid.Nx/2):1:Grid.Nx;
mcd = mcd + ((V.x(1,j,1)*hy)-(V.y(1,j,1)*hx));
end
```

% Ratio of mass conservation.

(1 - ((mcd-mab)/mcd))

Code lines to ex_03_TPFA:

% Grid size.

```
Grid.Nx=100; Grid.hx=1/Grid.Nx;
Grid.Ny=100; Grid.hy=1/Grid.Ny;
Grid.Nz=1; Grid.hz=1/Grid.Nz;
```

% Permeabilities matrix.

```
Grid.K=exp(5*smooth3(smooth3(randn(3,Grid.Nx,Grid.Ny))));
K = Grid.K;
N=Grid.Nx*Grid.Ny*Grid.Nz;
```

% Source or prescribed pressures.

```
q=zeros(N,1); q([1 N])=[1 -1];
```

```
P=TPFA(Grid,Grid.K,q);
```

% Compute transmissibilities by harmonic averaging.

```
Nx=Grid.Nx; Ny=Grid.Ny; Nz=Grid.Nz; N=Nx*Ny*Nz;
hx=Grid.hx; hy=Grid.hy; hz=Grid.hz;
L = K.^(-1);
tx = 2*hy*hz/hx; TX = zeros(Nx+1,Ny,Nz);
ty = 2*hx*hz/hy; TY = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
tz = 2*hx*hy/hz; TZ = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
TX(2:Nx, :, :) = tx./(L(1,1:Nx-1, :, :)+L(1,2:Nx, :, :));
TY(:, 2:Ny, :) = ty./(L(1, :, 1:Ny-1, :)+L(1, :, 2:Ny, :));
TZ(:, :, 2:Nz) = tz./(L(1, :, :, 1:Nz-1)+L(1, :, :, 2:Nz));
```

% Velocities.

```

V.x = zeros(Nx+1,Ny,Nz);
V.y = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
V.z = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
V.x(2:Nx, :, :) = ( P(1:Nx-1, :, :)-P(2:Nx, :, :)).*TX(2:Nx, :, :);
V.y(:, 2: Ny, :) = (P(:, 1:Ny-1, :)-P(:, 2:Ny, :)).*TY(:, 2:Ny, :);
V.z(:, :, 2: Nz) = (P(:, :, 1: Nz-1)-P(:, :, 2:Nz)).*TZ(:, :, 2:Nz);

% Plot of permeabilities.

figure(1);
pcolor((squeeze(K(1, :, :))))); shading flat; axis square;
colorbar; title('K');

% Plot of pressures.

figure(2);
contourf(P', 30); colorbar; title('Pressão');

% Mass conservation in ab.

mab = 0;
for i=1:1:(Grid.Nx/2);
mab = mab + ((V.x(Grid.Nx, i, 1)*hy)-(V.y(Grid.Nx, i, 1)*hx));
end

% Mass conservation in cd.

mcd = 0;
for j=(Grid.Nx/2):1:Grid.Nx;
mcd = mcd + ((V.x(1, j, 1)*hy)-(V.y(1, j, 1)*hx));
end

% Ratio of mass conservation.

(1 - ((mcd-mab)/mcd))

Code lines to ex_04_TPFA:

% Grid size.

Grid.Nx=60; Grid.hx=20*.3048;           % Dimension in x-direction
Grid.Ny=220; Grid.hy=10*.3048;        % Dimension in y-direction
Grid.Nz=1; Grid.hz= 2*.3048;          % Dimension in z-direction
Nx=Grid.Nx; Ny=Grid.Ny; Nz=Grid.Nz;   % Local variables
N=Nx*Ny*Nz;                            % Total number of grid points

```

```

% Permeabilities matrix.

load spe10;                % Read permeability from SPE10
Layer = 1;                 % which layer to extract
Grid.K=KU(:,1:Nx,1:Ny,Layer); % extract horizontal layer
K=Grid.K;

% Source or prescribed pressures.

q=zeros(N,1); q([1 N])=[1 -1];

P=TPFA(Grid,Grid.K,q);

% Compute transmissibilities by harmonic averaging.

Nx=Grid.Nx; Ny=Grid.Ny; Nz=Grid.Nz; N=Nx*Ny*Nz;
hx=Grid.hx; hy=Grid.hy; hz=Grid.hz;
L = K.^(-1);
tx = 2*hy*hz/hx; TX = zeros(Nx+1,Ny,Nz);
ty = 2*hx*hz/hy; TY = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
tz = 2*hx*hy/hz; TZ = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
TX(2:Nx,,:) = tx./(L(1,1:Nx-1,,:)+L(1,2:Nx,,:));
TY(:,2:Ny, :) = ty./(L(1,1:Ny-1, :)+L(1,2:Ny, :));
TZ(:, :, 2:Nz) = tz./(L(1, :, 1:Nz-1)+L(1, :, 2:Nz));

% Velocities.

V.x = zeros(Nx+1,Ny,Nz);
V.y = zeros(Nx,Ny+1,Nz);
V.z = zeros(Nx,Ny,Nz+1);
V.x(2:Nx, :, :) = (P(1:Nx-1, :, :)-P(2:Nx, :, :)).*TX(2:Nx, :, :);
V.y(:, 2: Ny, :) = (P(:, 1:Ny-1, :)-P(:, 2:Ny, :)).*TY(:, 2:Ny, :);
V.z(:, :, 2: Nz) = (P(:, :, 1: Nz-1)-P(:, :, 2:Nz)).*TZ(:, :, 2:Nz);

% Plot of pressures.

figure(1);
contourf(P',30); colorbar; title('Pressão');

% Plot of permeabilities.

figure(2);
pcolor(log10(squeeze(K(1, :, :)))); shading flat; axis square;
colorbar; title('log K');

figure(3);

```

```
pcolor((squeeze(K(1,:,:)))); shading flat; axis square;
colorbar; title('K');
```

```
% Plot of V.x.
```

```
figure(4);
pcolor((squeeze(V.x(:,:,:)))); shading flat; axis square;
colorbar; title('Vx');
```

```
% Plot of V.y.
```

```
figure(5);
pcolor((squeeze(V.y(:,:,:)))); shading flat; axis square;
colorbar; title('Vy');
```

Code lines to ex_04_MFEM:

```
% Grid size.
```

```
Grid.Nx=60; Grid.hx=20*.3048;          % Dimension in x-direction
Grid.Ny=220; Grid.hy=10*.3048;        % Dimension in y-direction
Grid.Nz=1; Grid.hz= 2*.3048;          % Dimension in z-direction
Nx=Grid.Nx; Ny=Grid.Ny; Nz=Grid.Nz;   % Local variables
hx=Grid.hx; hy=Grid.hy; hz=Grid.hz;
N=Nx*Ny*Nz;                            % Total number of grid points
```

```
% NUmber of edges.
```

```
Ex=(Nx-1)*Ny*Nz;                      % Number of edges in x-direction
Ey=Nx*(Ny-1)*Nz;                      % Number of edges in y-direction
Ez=Nx*Ny*(Nz-1);                      % Number of edges in z-direction
E=Ex+Ey+Ez;                           % Total number of edges in grid
```

```
% Permeabilities matrix.
```

```
load spe10;                            % Read permeability from SPE10
Layer = 1;                              % which layer to extract
Grid.K=KU(:,1:Nx,1:Ny,Layer);          % extract horizontal layer
K=Grid.K;
```

```
% Source or prescribed pressures.
```

```
q=zeros(E+N,1);                        % Right-hand side
q(E+1)=1;                              % Injection in block (1,1,1)
q(E+N)=-1;                             % Production in block (Nx,Ny,Nz)
```

```

% Computing and assembling.

B=GenB(Grid,Grid.K);           % Compute B-block of matrix
C=GenC(Grid);                 % Compute C-block of matrix
A=[B,C';-C,sparse(N,N)];      % Assemble matrix
A(E+1,E+1)=A(E+1,E+1)+1;

% Linear system.

warning off;
x=A\q;                         % Solve linear system
warning on;

% Velocities.

v=x(1:E);                     % Extract velocities
vx=reshape(v(1:Ex),Nx-1,Ny,Nz); % x-component
vy=reshape(v(Ex+1:E-Ez),Nx,Ny-1,Nz); % y-component
vz=reshape(v(E-Ez+1:E),Nx,Ny,Nz-1); % z-component
p=reshape(x(E+1:E+N),Nx,Ny,Nz); % Extract pressure

% Plot of pressures.

figure(1);
contourf(p',30); colorbar; title('Pressão');

% Plot of permeabilities.

figure(2);
pcolor((squeeze(K(1,:,:))); shading flat; axis square;
colorbar; title('K');

figure(3);
U = [zeros(1,Ny); vx; zeros(1,Ny)]; U=0.5*(U(1:end-1,:)+U(2:end,:));
V = [zeros(Nx,1); vy; zeros(Nx,1)]; V=0.5*(V(:,1:end-1)+V(:,2:end));
[Y,X]=meshgrid([1:Ny]*hy-0.5*hy,[1:Nx]*hx-0.5*hx);
sy = linspace(0.5*hy, (Ny-0.5)*hy, 20);
sx = (Nx-0.5)*hx/((Ny-0.5)*hy)*( (Ny-0.5)*hy - sy );
pcolor(Y,X,log10(squeeze(Grid.K(1,:,:))); shading flat;colorbar; title('log K');
hp=streamline(Y,X,V,U,sy,sx);
hn=streamline(Y,X,-V,-U,sy,sx);
set([hp, hn],'Color','k','LineWidth',1.5);
axis equal; axis tight; axis square;

% Plot of vx.

figure(4);

```

```
pcolor((squeeze(vx (:,:)))); shading flat; axis square;  
colorbar; title('Vx');
```

```
% Plot of vy.
```

```
figure(5);  
pcolor((squeeze(vy (:,:)))); shading flat; axis square;  
colorbar; title('Vy');
```