

ESTUDO COMPARATIVO DE ESQUEMAS PARA O CÁLCULO DE
TRAJETÓRIAS NO MÉTODO SEMI-LAGRANGEANO

Luiz Claudio Monteiro da Fonseca

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Luís Drummond Alves, D.Sc.

Prof. Edilson Marton, D.Sc.

Prof. Luiz Claudio Gomes Pimentel, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2005

FONSECA, LUIZ CLAUDIO MONTEIRO
DA

Estudo Comparativo de Esquemas para o
Cálculo de Trajetórias no Método Semi-
Lagrangeano [Rio de Janeiro] 2005

XXIII, 124 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Civil, 2005)

Dissertação - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, COPPE

1. Método Semi-lagrangeano.
2. Esquemas de Diferenças Finitas.
3. Esquemas de três níveis de tempo.
4. Cálculo de trajetória da partícula.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*Para Marcella e Luiz Claudio.
O verdadeiro Tesouro da minha Vida.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa o término de um importante e difícil período da minha vida, o qual sem a ajuda das pessoas aqui mencionadas, não seria possível concluir.

Agradeço inicialmente a minha família, em especial a minha esposa Marcella, por ter me apoiado em todos os momentos desta singradura. Sei que foram momentos muitas vezes difíceis em que a minha ausência por estar estudando foi muito sentida, mas sempre compreendida. Sem o seu apoio, compreensão e paciência, nunca teria concluído este trabalho. Nestes momentos, nos quais até eu mesmo tinha dúvidas do meu sucesso, você foi meu porto seguro, minhas águas calmas e ventos suaves. Por tudo isso a você eu dedico este trabalho. Ao meu filho Luiz Claudio, peço desculpas por muitas vezes não ter participado de atividades com você, em detrimento da necessidade de estudar. Você também faz parte deste sucesso.

Aos meus pais, responsáveis pela minha formação moral e participantes em todos os momentos da minha formação educacional, agradeço por terem me ensinado os valores importantes da vida, e que o sucesso sem esforço de nada vale. Sei que, sem nunca me perguntarem diretamente, vocês ansiavam pela conclusão deste trabalho.

Agradeço ao Sr CF(RM1) Ricardo Carvalho de Almeida pela proposta do tema e confiança em mim depositada na solução deste importante problema. Obrigado pelos seus ensinamentos e orientações. Espero, sinceramente, não o ter decepcionado.

Ao meu orientador, Prof. José Luís Drummond Alves agradeço pelo apoio constante, mostrando-se sempre acessível e disposto a atender qualquer solicitação minha.

Aos CF Alberto Pedrassani Costa Neves e CC Rodrigo de Souza Obino, meus chefes direto no Centro de Hidrografia da Marinha, obrigado por compreenderem a

importância da conclusão deste estudo para mim, oferecendo-me, sempre que possível, tempo para que eu pudesse realizá-lo.

E finalmente, agradeço a Marinha do Brasil por ter me dado a oportunidade de realizar este Mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

ESTUDO COMPARATIVO DE ESQUEMAS PARA O CÁLCULO DE
TRAJETÓRIAS NO MÉTODO SEMI-LAGRANGEANO

Luiz Claudio Monteiro da Fonseca

Julho/2005

Orientador: José Luis Drummond Alves

Programa: Engenharia Civil.

Neste trabalho, um estudo comparativo dos métodos de determinação da posição de partida das partículas no tratamento semi-lagrangeano de um problema de advecção não linear é apresentado.

A partir de um campo inicial definido em termos de uma função de corrente, a equação de conservação da vorticidade é integrada nos referenciais euleriano e lagrangeano. São obtidas quatro diferentes soluções: A euleriana, considerada solução padrão; semi-lagrangeana, com esquemas de três e dois níveis de tempo; e a solução semi-lagrangeana, com um esquema de três níveis de tempo modificado. São apresentados vários exemplos com campos de diferentes curvaturas e soluções com diferentes números de Courant, demonstrando a alta estabilidade do esquema modificado, bem como sua maior acurácia e menor atenuação, principalmente em campos de maior curvatura e com maiores números de Courant.

O esquema de três níveis de tempo modificado se mostra perfeitamente aplicável, apesar do pequeno incremento no custo computacional, na solução de problemas meteorológicos, principalmente os que apresentam escoamentos com curvatura acentuada.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

COMPARATIVE STUDY OF SCHEMES FOR THE CALCULATION OF
PARTICLE TRAJECTORIES IN SEMI-LAGRANGIAN METHODS

Luiz Claudio Monteiro da Fonseca

July/2005

Advisor: José Luis Drummond Alves

Department: Civil Engineering.

In this work, a comparative study of different schemes for the calculation of particles trajectory in semi-lagrangian method, applied to the solution of a non-linear advection problem, is presented

Starting from a streamfunction field, the vorticity equation is integrated both in the eulerian and the lagrangian frames of reference. Four different solutions are obtained: the eulerian, which is assumed to be the reference solution; the semi-lagrangian schemes of two and three time-levels, and the modified three-time level semi-lagrangian scheme. Several examples with different curvatures and Courant numbers demonstrate not just the high capacity of stability, but also the good accuracy and low attenuation properties of the modified method, especially in the strongly curved field with high Courant number.

Despite of the small increase of the computational cost, it is shown that the modified scheme is suitable for application in semi-lagrangian methods, especially to solve meteorological problems with the presence of flows with significant curvature.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	01
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	01
1.2 RECURSOS COMPUTACIONAIS.....	03
1.3 BIBLIOGRAFIAS.....	03
CAPÍTULO 2: O PROBLEMA	05
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	05
2.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	07
2.3 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO.....	08
2.4 CASOS DE ESTUDO.....	09
2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	10
2.6 FILTRO ASSELIN.....	10
2.7 INTERPOLAÇÃO.....	11
2.8 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ELÍPTICA.....	13
CAPÍTULO 3: SOLUÇÃO EULERIANA	17
3.1 O JACOBIANO DE ARAKAWA.....	17
3.2 ALGORITMO EULERIANO.....	20
3.3 CONDIÇÃO DE COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (CFL).....	21
3.4 SOLUÇÃO PADRÃO.....	22

CAPÍTULO 4: SOLUÇÃO SEMI-LAGRANGEANA.....	23
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	23
4.2 ESQUEMA LAGRANGEANO.....	24
4.3 O MÉTODO SEMI-LAGRANGEANO.....	26
4.4 FONTES DE ERRO.....	27
4.5 VANTAGENS E DESVANTAGENS DO SEMI-LAGRANGEANO.....	28
4.6 SEMI-LAGRANGEANO DE 3 NÍVEIS DE TEMPO (SL3T).....	30
4.7 SEMI-LAGRANGEANO 2 NIVEIS DE TEMPO (SL2TMB).....	33
4.8 SEMI-LAGRANGEANO DE 3 NÍVEIS DE TEMPO MODIFICADO (SL3TM).....	37
CAPÍTULO 5: RESULTADOS ALCANÇADOS.....	42
5.1 OS CASOS.....	42
5.2 OS EXPERIMENTOS.....	48
CAPÍTULO 6: DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	83
6.1 GRANDEZAS CONSERVATIVAS.....	83
6.2 ACURÁCIA.....	85
6.3 GRAU DE ATENUAÇÃO.....	91
6.4 CUSTO COMPUTACIONAL.....	95
CAPÍTULO 7: CONCLUSÃO.....	97
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	99

APÊNDICES	103
APÊNDICE A - Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima.....	103
APÊNDICE B - Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma, Razão da Soma dos Quadrados, Erro Médio Quadrático e Razão dos Desvios Padrões.....	115

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Exemplo de campo inicial de função de corrente (CASO 1).....	08
Figura 2.2	Representação das diferentes regiões de interpolação do domínio.....	11
Figura 2.3	Esquema de interpolação cúbica em x e cúbica em y.....	12
Figura 2.4	Esquema de varredura do domínio.....	15
Figura 4.1	Comparação da distribuição dos pontos de grade dos esquemas lagrangeano e euleriano nos tempos t e $t + \Delta t$. A área hachurada representa os pontos da grade e os “x” representam os pontos observados.....	25
Figura 4.2	Representação da distribuição de partículas no esquema semi-lagrangeano.....	26
Figura 4.3	Esquema da trajetória “backward” do SL3T.....	30
Figura 4.4	Esquema da trajetória “backward” do SL2TMB.....	34
Figura 4.5	Esquema da quebra da trajetória da partícula do esquema SL3TM.....	37

Figura 5.1	Representação da função de corrente inicial para o CASO 1. Gráfico de superfície.....	43
Figura 5.2	Representação do campo inicial de função de corrente para o CASO 1. Gráfico de curvas de nível.....	44
Figura 5.3	Função de corrente inicial para o CASO 2. Gráfico de superfície.....	45
Figura 5.4	Campo inicial de função de corrente para o CASO 2. Curvas de nível..	46
Figura 5.5	Campo inicial de função de corrente para o CASO 3.....	47
Figura 5.6	Campo inicial de função de corrente do CASO 3. Curvas de nível.....	47
Figura 5.7	Solução euleriana para o CASO 1, com NCFL=0.8.....	52
Figura 5.8	Solução SL3T para o CASO 1, com NCFL=0.8.....	53
Figura 5.9	Solução SL2TMB para o CASO 1, com NCFL=0.8.....	53
Figura 5.10	Solução SL3TM para o CASO 1, com NCFL=0.8.....	54
Figura 5.11	Diferença entre as soluções SL3T e euleriana nos experimentos EXP12 e EXP14	55

Figura 5.12	Diferença entre as soluções SL3T e euleriana nos experimentos EXP16.....	56
Figura 5.13	Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana nos experimentos EXP12 e EXP14	57
Figura 5.14	Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana nos experimentos EXP16.....	58
Figura 5.15	Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos EXP12 e EXP14	59
Figura 5.16	Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos EXP16.....	60
Figura 5.17	Crescimento do RMS com o aumento do NCFL para 5 dias e 30 dias de integração.....	61
Figura 5.18	Comparação entre os tempos de processamento dos métodos euleriano (somente para NCFL=0.8), SL3T, SL2TMB e SL3TM no CASO 1.....	61
Figura 5.19	Diferença entre a função de corrente inicial e final para o esquema euleriano, para o CASO2, com NCFL=0.8 (EXP21)	62

Figura 5.20	Diferença entre a função de corrente inicial e final para os esquemas SL3T e SL2TMB, para o CASO2, com NCFL=0.8 (EXP21)	63
Figura 5.21	Diferença entre a função de corrente inicial e final para o esquema SL3TM, para o CASO2, com NCFL=0.8 (EXP21)	64
Figura 5.22	Evolução da vorticidade média e energia cinética média ao longo da integração (com NCFL=0.8) para os 4 esquemas (EXP21).....	65
Figura 5.23	Evolução da enstrofia média e velocidade máxima ao longo da integração (com NCFL=0.8) para os 4 esquemas (EXP21).....	66
Figura 5.24	Diferença entre as soluções SL3T e euleriana nos experimentos EXP24 e EXP25.....	67
Figura 5.25	Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP26...68	
Figura 5.26	Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana no experimento EXP24.....	68
Figura 5.27	Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana nos experimentos EXP25 e EXP26	69
Figura 5.28	Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana no experimento EXP24.....	70

Figura 5.29	Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos EXP25 e EXP26	71
Figura 5.30	Evolução da enstrofia $\bar{\xi}$ e da energia cinética \overline{Ec} médias ao longo da integração, com NCFL= 4	72
Figura 5.31	Evolução da enstrofia $\bar{\xi}$ e da energia cinética \overline{Ec} médias ao longo da integração, com NCFL= 6	73
Figura 5.32	Evolução da enstrofia $\bar{\xi}$ e da energia cinética \overline{Ec} médias ao longo da integração, com NCFL= 8	73
Figura 5.33	Evolução do $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$ e do erro RMS com o aumento do NCFL para 30 dias de integração.....	74
Figura 5.34	Comparação entre os tempos de processamento dos métodos euleriano (somente para NCFL=0.8), SL3T, SL2TMB e SL3TM no CASO 2.....	75
Figura 5.35	Solução euleriana, SL3T, SL2TMB e SL3TM para o CASO3 com o menor passo de tempo (NCFL=0.8).....	76
Figura 5.36	Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP31...77	

Figura 5.37	Diferença entre os campos finais de função de corrente das soluções SL2TM e SL3TM, e euleriana no experimento EXP31 (NCFL=0.8).....	78
Figura 5.38	Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP34...79	
Figura 5.39	Diferença entre os campos finais de função de corrente entre as soluções SL2TM e euleriana no experimento EXP36 (NCFL=8).....	80
Figura 5.40	Diferença entre os campos finais de função de corrente entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos EXP34 (NCFL=8) e EXP36 (NCFL=8).....	81
Figura 5.41	Variação Percentual da enstrofia, energia cinética e vorticidade médias e da velocidade máxima, com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, para 30 dias de Integração.....	82
Figura 5.42	Comparação entre os tempos de processamento dos Métodos euleriano (somente para NCFL=0.8), SL3T, SL2TMB e SL3TM no CASO 3.....	82
Figura 6.1	Variações Percentuais da enstrofia, energia cinética e vorticidade médias e da velocidade máxima, com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, para 5, 10, 20 e 30 dias de Integração, para os CASOS 1 (acima) e 2 (abaixo).....	84
Figura 6.2	Variações Percentuais da enstrofia, energia cinética e vorticidade médias e da velocidade máxima, com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, para 5, 10, 20 e 30 dias de Integração, para o CASO 3.....	85

Figura 6.3	Evoluções dos erros RMS das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL para o CASO 1.....	86
Figura 6.4	Evoluções dos erros RMS das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL para o CASO 2.....	87
Figura 6.5	Evoluções dos erros RMS das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL para o CASO 3.....	88
Figura 6.6	Razões $\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$ das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, referente ao CASO 1	89
Figura 6.7	Razões $\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$ das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, para os CASOS 2 e 3.....	90
Figura 6.8	Distribuição por casos dos resultados das 84 comparações entre os esquemas semi-lagrangeanos de $\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$ e de $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	91
Figura 6.9	Distribuição por Horas de Integração (esquerda) e NCFL (direita) dos resultados das 28 comparações entre os esquemas semi-lagrangeanos de $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$, no CASO 3.....	92

Figura 6.10 Razões $\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$ (contínua) e de $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$ (tracejado) referente às soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, do CASO 1.....93

Figura 6.11 Razões $\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$ (contínua) e de $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$ (tracejado) referente às soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, dos CASOS 2 e 394

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1	Experimentos do CASO 1.....	51
Tabela 5.2	Experimentos do CASO 2.....	51
Tabela 5.3	Experimentos do CASO 3.....	51
Tabela A.1	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima, da solução euleriana do CASO 1.....	103
Tabela A.2	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3T do CASO 1.....	104
Tabela A.3	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL2TMB do CASO 1.....	105
Tabela A.4	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3TM do CASO 1.....	106

Tabela A.5	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima, da solução euleriana do CASO 2.....	107
Tabela A.6	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3T do CASO 2.....	108
Tabela A.7	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL2TMB do CASO 2.....	109
Tabela A.8	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3TM do CASO 2.....	110
Tabela A.9	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima, da solução euleriana do CASO 3.....	111
Tabela A.10	Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3T do CASO 3.....	112

Tabela A.11 Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL2TMB do CASO 3.....113

Tabela A.12 Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \overline{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3TM do CASO 3.....114

Tabela B.1 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3T do CASO 1.....115

Tabela B.2 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL2TMB do CASO 1.....117

Tabela B.3 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3TM do CASO 1.....118

Tabela B.4 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3T do CASO 2.....119

Tabela B.5 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL2TMB do CASO 2.....120

Tabela B.6 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3TM do CASO 2.....121

Tabela B.7 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3T do CASO 3.....122

Tabela B.8 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL2TMB do CASO 3.....123

Tabela B.9 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (*RMS*) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3TM do CASO 3.....124

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Meteorologia Dinâmica nos dá a base teórica necessária aos atuais métodos de previsão do tempo, que têm como objetivo prever o estado futuro da circulação atmosférica, a partir da situação presente do tempo, utilizando aproximações numéricas das equações da dinâmica dos fluidos. Para alcançar este objetivo, fazem-se necessárias as observações do estado inicial das variáveis de campo (temperatura do ar, pressão, velocidade do vento, etc.), um conjunto de equações relacionando estas variáveis, e um método de integração dessas equações no tempo, para obter-se a distribuição futura dessas variáveis de campo (HOLTON, 1992).

Neste último item encontra-se a Previsão Numérica de Tempo, que consiste numa seqüência de operações computacionais intensivas, começando com a coleta dos dados por todo mundo, culminando na elaboração das cartas de tempo e mensagens/alertas geradas automaticamente pelo computador. A principal parte deste sistema são os modelos numéricos utilizados para, a partir de condições iniciais, preverem o estado futuro das variáveis atmosféricas. No coração dos modelos numéricos encontram-se os métodos de discretização e integração no tempo.

A necessidade cada vez maior de modelos numéricos de maior resolução aliada à falta de recursos computacionais, motivou o desenvolvimento de esquemas de integração no tempo mais eficientes (KUO, WILLIAMS, 1990). Por muito tempo, um problema existente na integração de modelos numéricos de previsão de tempo foi o de

que o maior passo de tempo permitido era definido em função de considerações de estabilidade ao invés de acurácia, sendo necessária a utilização de passos de tempo muito pequenos aumentando-se assim o custo computacional, para que as integrações permanecessem estáveis (STANIFORTH, COTÉ, 1991).

A partir de trabalhos pioneiros de FJØRTOFT (1952, 1955), WIIN-NIELSEN (1959), KRISHNAMURTI (1962), SAWYER (1963), LEITH (1965), ROBERT, *et al.* (1972) e PURNELL (1976), ROBERT (1981) propôs a combinação do esquema de integração semi-implícito com o tratamento semi-lagrangeano dos termos advectivos das equações do modelo barotrópico, provando que o passo de tempo poderia ser aumentado em até seis vezes em relação aos utilizados nos demais esquemas da época. A partir deste trabalho, a utilização do método semi-lagrangeano para solução de escoamentos eminentemente advectivos foi amplamente estudada e aplicada em diferentes tipos de modelos numéricos (STANIFORTH, COTÉ, 1991), tendo sido estabelecidas novas técnicas de determinação da posição de partida da partícula (MCDONALD, BATES, 1987), utilizando-se diferentes métodos de interpolação da grandeza advectada na posição de partida (RIDDAWAY, 2001). COSTA (2003) introduziu uma nova técnica para determinação da posição de partida da trajetória das partículas, num problema de advecção linear da colina de Gauss, e mostrou que o esquema proposto, o semi-lagrangeano de três níveis de tempo modificado (SL3TM), apesar de ter um custo computacional um pouco maior, tem melhor acurácia, atenua menos e apresenta menor dispersão numérica na simulação numérica de fenômenos de acentuada curvatura, com maiores passos de tempo, e em longos períodos de integração.

O presente estudo implementa o esquema SL3TM em um problema de advecção não linear e, comparando seus resultados com dois esquemas semi-lagrangeanos de dois e três níveis de tempo, demonstra a vantagem de utilização deste novo esquema na

determinação da posição de partida da partícula, principalmente em escoamentos com alto número de Courant e grandes curvaturas.

No capítulo 2 será apresentado o problema e serão discutidos os procedimentos matemáticos comuns aos métodos deste estudo. O capítulo 3 tratará da solução euleriana para o problema proposto; as soluções semi-lagrangeanas serão vistas no capítulo 4. No capítulo 5 os resultados serão apresentados e discutidos no capítulo 6. Finalmente a conclusão será apresentada no capítulo 7.

1.2 – RECURSOS COMPUTACIONAIS

Todo o trabalho foi desenvolvido em um microcomputador Athlon XP 2.2, com 256Mb RAM, utilizando o sistema operacional Windows[®] 2000. Os códigos dos modelos foram escritos em FORTRAN[®] e compilados com o programa Compaq[®] Visual Fortran Professional Edition 6.1.0. Todos os gráficos apresentados foram construídos com MATLAB[®] 6.5 Release 13. Os recursos utilizados na construção dos códigos em FORTRAN[®] e em MATLAB[®] podem ser consultados em CHAPMAN (1998) e CHAPMAN (2003), respectivamente.

1.3 – BIBLIOGRAFIAS

As principais referências bibliográficas necessárias para a confecção deste trabalho, podem ser obtidas junto às bibliotecas da UFRJ. Foram consultados livros e ou periódicos das bibliotecas do Centro de Tecnologia (CT), Centro de Ciências da

Matemática e da Natureza (CCMN), Instituto de Química (IQ), Instituto de Física (IF) e Instituto de Matemática (IM), bem como o Posto de Serviço de Informação do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia (LAMCE). Outra fonte preciosa de informação utilizada para muitas consultas e buscas é o Portal Brasileiro de Informação Científica, localizado no sítio <http://www.periodicos.capes.gov.br/>, disponibilizado para todos os alunos da UFRJ para consulta.

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA

Neste capítulo será apresentada a equação de conservação da vorticidade que governa o problema a ser solucionado, bem como os diferentes métodos de integração utilizados. No item 2.4 serão apresentados de forma sucinta diferentes casos que foram estudados. Nos itens 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 serão abordadas questões comuns a todos os métodos, a saber: condições de contorno, aplicação do filtro Asselin (somente nos esquemas de três níveis de tempo), interpolação (somente nos esquemas semi-lagrangianos) e o método de sobre relaxação seqüencial aplicado na solução da equação elíptica em questão.

2.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Considere um escoamento horizontal e não divergente, governado pela equação da conservação da vorticidade,

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0 \quad (2.1)$$

onde $\frac{D}{Dt}$ é a Derivada Material ou Derivada de Acompanhamento do Movimento de um Fluido, definida em BATCHELOR (1967) como sendo,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \quad (2.2)$$

no referencial euleriano, onde \vec{U} é o vetor velocidade e ∇ é o vetor gradiente definidos pelas expressões:

$$\vec{U} = (\vec{u}, \vec{v}) = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d\vec{y}}{dt} \right) \quad (2.3)$$

e

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (2.4)$$

Assim, no referencial euleriano, que é um ponto fixo no espaço (inercial), onde uma determinada grandeza do escoamento é função do vetor posição \vec{X} e do tempo t (BATCHELOR, 1967), a equação de conservação da vorticidade (2.1) pode ser reescrita na forma,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \zeta = 0 \quad (2.5)$$

que também é conhecida como equação de advecção de vorticidade sem fontes nem sumidouros.

No referencial lagrangeano, que é definido como sendo um ponto acompanhando o movimento de uma parcela individual de fluido (não-inercial), onde uma determinada grandeza do escoamento é função do tempo t e do elemento de fluido escolhido (BATCHELOR, 1967), a equação de conservação (2.5) é representada e trabalhada na forma de derivada total (2.1) (DURRAN, 1998), evitando-se assim a explicitação do termo não-linear.

Deste modo pode-se afirmar que (2.5) e (2.1) descrevem o mesmo escoamento sob diferentes referenciais, euleriano e lagrangeano respectivamente.

2.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Usando como referência ARAKAWA e LAMB (1977), o problema consiste na simulação numérica de um escoamento horizontal, não divergente, governado pela equação de conservação da vorticidade, que a partir de um campo inicial definido em termos de função de corrente ψ , onde

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2.7)$$

e sendo ∇^2 o operador laplaciano, integra-se as equações (2.5) ou (2.1), conforme o caso, ao longo de trinta (30) dias.

A partir de um domínio definido por NX e NY pontos de grade ao longo dos eixos x e y respectivamente, define-se um campo de função de corrente inicial, pela equação

$$\psi_{i,j} = \Psi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{nx}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot j}{2 \cdot ny}\right) + 0.1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot j}{ny}\right) \right] \quad (2.8)$$

onde

$\Psi \rightarrow$ amplitude constante

$$nx = NX - 1, \quad ny = \frac{(NY - 1)}{2}$$

$$i = 0 : nx \text{ e } j = -ny : ny$$

que, por sua vez, aplicado às equações (2.6) e (2.7), definirá os campos de vorticidade e velocidade iniciais, iniciando-se então a integração.

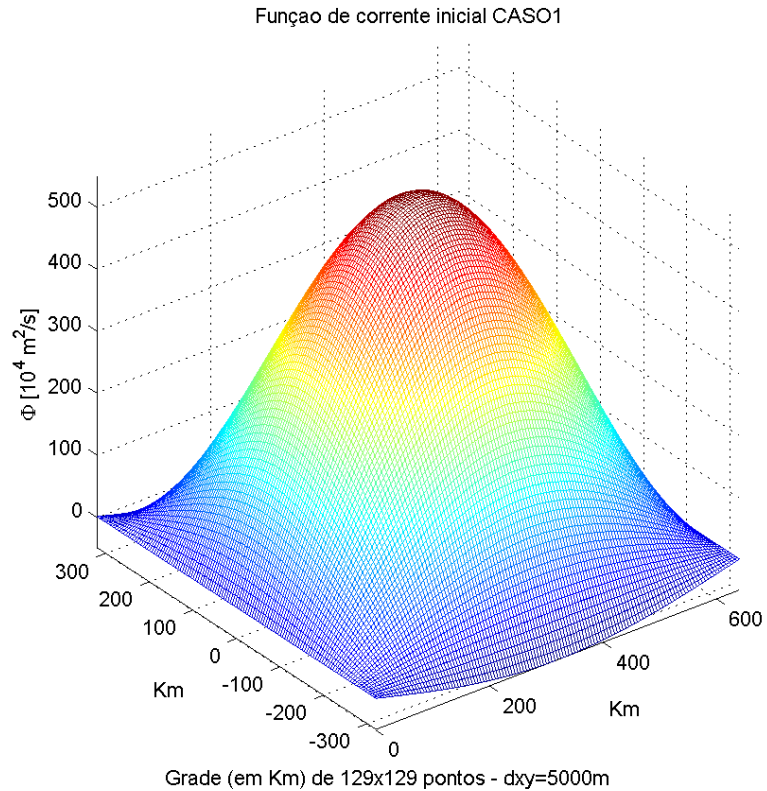


Fig. 2.1- Exemplo de campo inicial de função de corrente (CASO 1)

2.3 – MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Utilizam-se quatro diferentes métodos de integração: euleriano (ARAKAWA, LAMB, 1977), semi-lagrangeano de dois níveis de tempo (MCDONALD, BATES, 1987), semi-lagrangeano de três níveis de tempo (ROBERT, 1982) e o método semi-lagrangeano de três níveis de tempo modificado (COSTA, 2003).

As particularidades e diferenças de cada um destes métodos serão abordadas nos capítulos 3 e 4.

2.4 – CASOS DE ESTUDO

Foram definidos três casos de estudo, que diferem entre si basicamente pelo tamanho do domínio. Cada domínio foi definido como sendo uma grade regular com espaçamento de grade $\Delta x = \Delta y = 5000$, com NX pontos de grade ao longo do eixo x e NY pontos de grade ao longo do eixo y .

CASO 1:

$$\begin{aligned}NX &= 129; \\NY &= 129; \text{ e} \\ \Psi &= 5.0 \cdot 10^6 \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

CASO 2:

$$\begin{aligned}NX &= 129; \\NY &= 65; \text{ e} \\ \Psi &= 2.0 \cdot 10^6 \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

CASO 3:

$$\begin{aligned}NX &= 129; \\NY &= 49; \text{ e} \\ \Psi &= 1.5 \cdot 10^6 \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

O objetivo de se modificar as dimensões do domínio foi o de determinar o desempenho dos métodos semi-lagrangeanos à medida que se aumentava a curvatura do escoamento do campo inicial.

Para cada um dos casos foram realizados sete experimentos nos quais o número de Courant (NCFL) assumiu os valores aproximados de 0.8, 1, 2, 4, 6, 8 e 10.

A integração utilizando o método euleriano com NCFL=0.8 foi considerada como o padrão de cada caso e utilizada para avaliação dos três métodos semi-lagrangeanos.

2.5 – CONDIÇÕES DE CONTORNO

Foram utilizadas as seguintes condições de contorno para todos os experimentos:

$$\begin{aligned}\zeta &= 0; \text{ e} \\ \psi &= \text{constante}\end{aligned}\tag{2.9}$$

No caso dos métodos semi-lagrangeanos, onde se faz necessário o cálculo do vetor velocidade $\vec{U}(u, v)$ utilizou-se, ainda, da condição de contorno, impondo que os fluxos para dentro e para fora do domínio fossem zero, ou seja, nas fronteiras:

$$\begin{array}{ll}\text{Norte e Sul} & \text{Leste e Oeste} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & u = 0 \\ v = 0 & \frac{\partial v}{\partial x} = 0\end{array}\tag{2.10}$$

Essas equações visavam garantir que o campo conservasse a energia cinética média e vorticidade média ao longo da integração.

2.6 – FILTRO ASSELIN

Com o objetivo de controlar os efeitos dos modos computacionais presentes nos esquemas de três níveis de tempo, utilizou-se do filtro de frequência definido em ASSELIN (1972) descrito pela expressão

$$\bar{\zeta}_t = \zeta_t + \gamma \cdot (\zeta_{t+\Delta t} - 2\zeta_t + \zeta_{t-\Delta t})\tag{2.11}$$

onde γ é o parâmetro do filtro e os termos com uma barra ($\bar{\zeta}$) representam os valores já filtrados. No presente trabalho foi utilizado $\gamma = 0.1$, definido empiricamente procurando-se sempre utilizar o menor parâmetro que atenda às necessidades do problema.

2.7 – INTERPOLAÇÃO

Na aplicação do método semi-lagrangeano, faz-se necessário o uso de interpolação para o cálculo do valor de uma grandeza (velocidade, vorticidade, etc.) na posição de partida. As interpolações utilizadas nestes casos obedecem aos seguintes critérios:

Considere o desenho abaixo uma representação do domínio.

4	2	4
3	1	3
4	2	4

Fig. 2.2 – Representação das diferentes regiões de interpolação do domínio.

Região 1: Interpolação cúbica em x e cúbica em y

Região 2: Interpolação cúbica em x e linear em y

Região 3: Interpolação linear em x e cúbica em y

Região 4: Interpolação linear em x e linear em y

onde as interpolações cúbicas são efetuadas utilizando-se dos quatro pontos mais próximos da posição de partida, dois antes e dois depois ao longo de cada eixo e interpolando segundo a fórmula de Lagrange (SPIEGEL, 1992),

$$\begin{aligned}
 f(\tilde{x}_n) = & \frac{(\tilde{x}_n - x_2)(\tilde{x}_n - x_3)(\tilde{x}_n - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \cdot f(x_1) + \frac{(\tilde{x}_n - x_1)(\tilde{x}_n - x_3)(\tilde{x}_n - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \cdot f(x_2) + \\
 & + \frac{(\tilde{x}_n - x_1)(\tilde{x}_n - x_2)(\tilde{x}_n - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \cdot f(x_3) + \frac{(\tilde{x}_n - x_1)(\tilde{x}_n - x_2)(\tilde{x}_n - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \cdot f(x_4)
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

primeiro na direção do eixo x depois na direção do eixo y , conforme o esquema abaixo, em que $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ é a posição de partida da partícula.

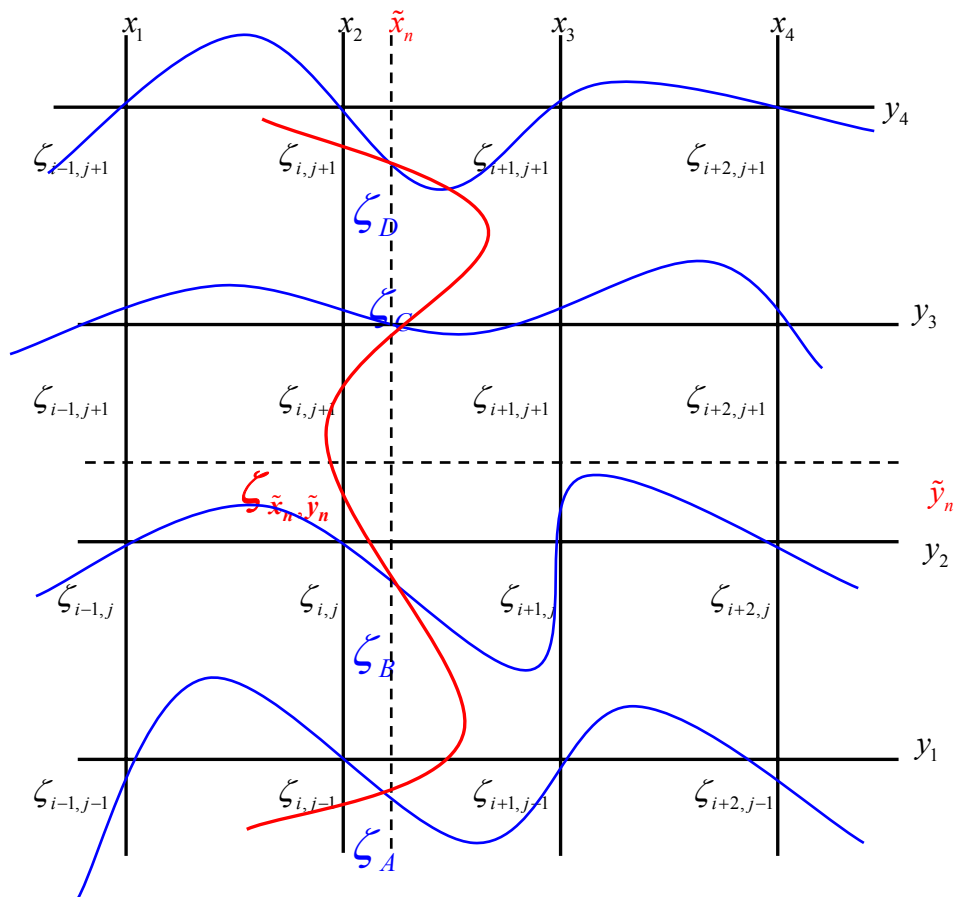


Fig. 2.3 – Esquema de interpolação cúbica em x e cúbica em y .

As interpolações lineares seguem a equação

$$f(\tilde{x}_n) = f(x_2) - \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) (x_2 - \tilde{x}_n) \quad (2.13)$$

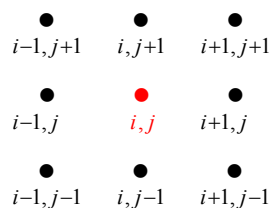
2.8 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ELÍPTICA

Durante a solução da equação (2.1), em todos os casos (tanto euleriano com semi-lagrangeano), o valor da função de corrente (ψ) é obtido a partir da vorticidade (ζ) resolvendo-se a equação (2.7) que é elíptica, também conhecida como equação de POISSON (HALTINER, WILLIAMS, 1980).

A solução da equação é obtida aplicando-se o método sobre relaxação seqüencial (SOR) e utilizando-se das condições de contorno de Dirichlet (2.9). Este método consiste em uma aproximação inicial que é progressivamente melhorada até que certo nível de acurácia é atingido.

2.8.1 – DESCRIÇÃO DO MÉTODO SOR

No interior do domínio considere um ponto $p(i, j)$ qualquer e seus oito pontos vizinhos:



Aplicando-se a equação (2.7) em $p(i, j)$ teremos

$$\nabla^2 \psi_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \zeta_{i,i}$$

onde Δx e Δy são os espaçamentos de grade em x e y . Como $\Delta x = \Delta y = d$, então

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_{i,j} &= \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j}}{d^2} = \\ &= \frac{\nabla_F^2 \psi_{i,j}}{d^2} = \zeta_{i,i} \end{aligned}$$

assim

$$\nabla_F^2 \psi_{i,j} = d^2 \zeta_{i,i} \quad (2.14)$$

Considerando $\psi_{i,j}^m$ a m -ésima aproximação $\psi_{i,j}$, o resíduo $R_{i,j}$ definido por

$$R_{i,j} = \nabla_F^2 \psi_{i,j} - d^2 \zeta_{i,i} \quad (2.15)$$

será descrito pela fórmula

$$\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^m + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^m - 4\psi_{i,j}^m - d^2 \zeta_{i,i} = R_{i,j}^m \quad (2.16)$$

onde $R_{i,j}^m$ é o resíduo após a m -ésima aproximação.

O objetivo das subseqüentes iterações é diminuir o resíduo até um valor aceitável, uma vez que o $R_{i,j} = 0$ em todos os pontos não será atingido. A partir do m -ésimo valor de $\psi_{i,j}^m$ o valor calculado de $\psi_{i,j}^{m+1}$ irá reduzir o resíduo para zero. Assim

$$\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^m + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^m - 4\psi_{i,j}^m - d^2 \zeta_{i,i} = 0 \quad (2.17)$$

Subtraindo-se (2.17) de (2.16) obtém-se

$$\psi_{i,j}^{m+1} = \psi_{i,j}^m + \frac{R_{i,j}^m}{4} \quad (2.18)$$

Na Relaxação Seqüencial, o cálculo dos resíduos e correções é realizado ponto a ponto da esquerda para direita de baixo para cima, sendo que para aumentar-se a

convergência insere-se em (2.16) os valores da iteração (m+1)-ésima, já calculados anteriormente, ficando

$$\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^{m+1} + \psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^{m+1} - 4\psi_{i,j}^m - d^2\zeta_{i,j} = R_{i,j}^m \quad (2.19)$$

Na Sobre Relaxação Seqüencial, utiliza-se um coeficiente $1 \leq \alpha \leq 2$ em (2.18) para aumentar-se a velocidade de convergência, ficando

$$\psi_{i,j}^{m+1} = \psi_{i,j}^m + \alpha \cdot \frac{R_{i,j}^m}{4} \quad (2.20)$$

O presente trabalho, após uma avaliação empírica, adotou $\alpha = 1$. Conseqüentemente, foi efetivamente adotada a relaxação seqüencial na solução da equação elíptica (2.7).

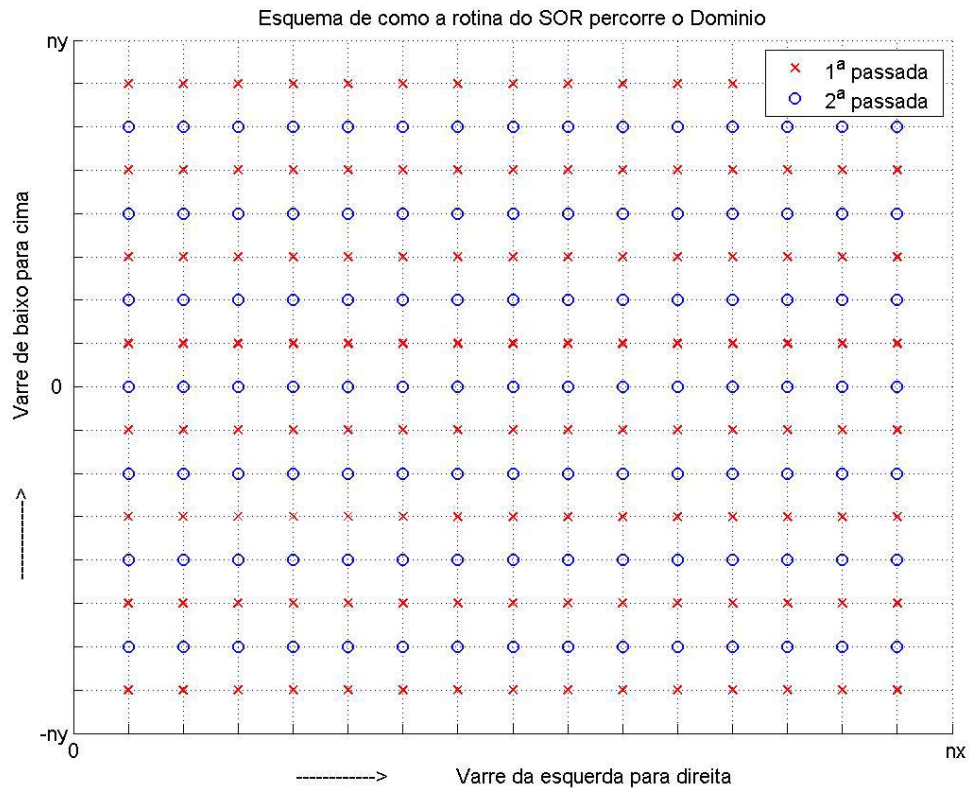
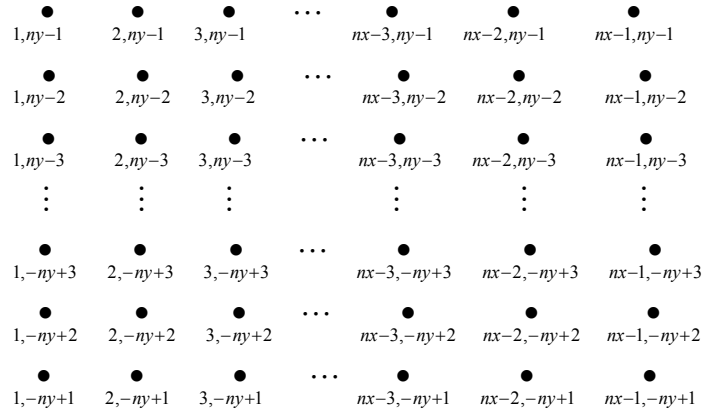


Fig. 2.4 – Esquema de varredura do domínio.

Ainda para aumentar a velocidade de convergência foi empregada uma varredura intercalando-se as linhas de varredura de modo que ao se iniciar a segunda, existirão mais pontos na vizinhança do ponto $p(i, j)$ com os valores mais atualizados, conforme representado na figura 2.4.

Neste trabalho utilizou-se como critério de parada das interações quando a norma da diferença não variasse mais do que 1% entre uma duas iterações sucessivas. Assim, considere um domínio $(0 : nx, -ny : ny)$, onde o interior é representado pelos pontos



Teremos que

$$e_{i,j} = (\psi_{i,j}^{m+1} - \psi_{i,j}^m)^2$$

$$N_{dif}^{m+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{ny-1} \sum_{j=-ny+1}^{nx-1} e_{i,j}}$$

onde N_{dif}^{m+1} é a norma da diferença na $(m+1)$ -ésima iteração.

Quando

$$\frac{N_{dif}^{m+1} - N_{dif}^m}{N_{dif}^m} \leq 1\% \quad (2.21)$$

admite-se que o método convergiu para a acurácia desejada.

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO EULERIANA

Será descrita a seguir a solução do problema apresentado no Capítulo 2, pelo método euleriano. Inicialmente será abordada a solução de Arakawa para o termo não linear da equação de advecção. Em seguida, será apresentado o algoritmo deste método e, finalmente, discutidas as restrições impostas pelo critério de CFL.

3.1 – O JACOBIANO DE ARAKAWA

A partir de (2.5), se aplicarmos (2.6) e substituirmos na equação teremos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

que é a equação de conservação de vorticidade em termos de função de corrente e vorticidade.

Definindo-se o operador Jacobiano (ARAKAWA, LAMB, 1977) como sendo

$$J(\zeta, \psi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.2)$$

pode-se reescrever (3.1) na forma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \psi) \quad (3.3)$$

Considerando um domínio fechado com as condições de fronteiras (2.9) e (2.10), demonstra-se que a vorticidade (ζ), enstrofia (ξ) e energia cinética por unidade de massa (Ec) médias, se conservam. Onde ξ e Ec são definidas pelas fórmulas

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\zeta^2}{2} \\ Ec &= \frac{u^2 + v^2}{2}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Neste estudo o termo energia cinética, refere-se à energia cinética por unidade de massa. A expressão por “unidade de massa” será muitas vezes omitida por questão de simplificação.

A conservação destas grandezas impõe importantes restrições às propriedades do escoamento incompressível, em particular a de que o número de onda médio definido pela fórmula

$$\kappa^2 = \frac{\overline{(\nabla^2 \psi)^2}}{\overline{(\nabla \psi)^2}}\tag{3.5}$$

se conserva, sendo desejável que o esquema de discretização conserve estas propriedades.

A partir da definição (3.2) podemos reescrever $J(\zeta, \psi)$

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ J_2 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right); \text{ ou} \\ J_3 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{3.6}$$

Considere os pontos do interior do domínio

$$\begin{array}{ccc}
j+1 & - & \bullet & \bullet & \bullet \\
& & 6 & 2 & 5 \\
j & - & \bullet & \bullet & \bullet \\
& & 3 & 0 & 1 \\
j-1 & - & \bullet & \bullet & \bullet \\
& & 7 & 4 & 8 \\
& & | & | & | \\
& & i-1 & i & i+1
\end{array}$$

J_1, J_2 e J_3 podem ser representados nas seguintes formas discretas

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{(\psi_2 - \psi_4)(\zeta_1 - \zeta_3) - (\psi_1 - \psi_3)(\zeta_2 - \zeta_4)}{4d^2} \\
J_2 &= \frac{[\psi_2(\zeta_5 - \zeta_6) - \psi_4(\zeta_8 - \zeta_7)] - [\psi_1(\zeta_5 - \zeta_8) - \psi_3(\zeta_6 - \zeta_7)]}{4d^2} \\
J_3 &= \frac{[\zeta_1(\psi_5 - \psi_8) - \zeta_3(\psi_6 - \psi_7)] - [\zeta_2(\psi_5 - \psi_6) - \zeta_4(\psi_8 - \psi_7)]}{4d^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\Delta x = \Delta y = d$.

ARAKAWA (1966) demonstrou que um Jacobiano derivado da fórmula

$$J = \alpha J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3, \text{ onde } \alpha + \beta + \gamma = 1 \tag{3.8}$$

conservaria a enstrofia (ξ) se e somente se $\alpha = \beta$, e conservaria a energia cinética (Ec) se e somente se $\alpha = \gamma$. Assim podem-se definir outros Jacobianos conforme for a grandeza que se deseja conservar. Neste estudo, na solução da equação (3.3), foi empregado o operador Jacobiano definido pela fórmula

$$J(\zeta, \psi) = \frac{J_1 + J_2 + J_3}{3} \tag{3.9}$$

pois, ARAKAWA e LAMB (1977) demonstraram que este Jacobiano, conhecido a partir de então como Jacobiano de Arakawa, era a melhor opção a ser utilizada para representar este tipo de campo, pois nele a enstrofia e energia cinética médias se conservariam ($\alpha = \beta = \gamma$).

Em essência, o método de Arakawa é uma maneira de se reescrever a equação (2.5) na forma discreta, anulando-se os termos não lineares, conservando-se as grandezas mencionadas e, principalmente, controlando a cascata de energia computacional (*aliasing*), mantendo constante o número de onda médio (κ) dentro do termo advectivo, devido à parte não divergente do escoamento (MESINGER, ARAKAWA, 1976).

3.2 – ALGORITMO EULERIANO

O algoritmo da solução euleriana pode ser descrito nos seguintes passos:

- 1) Inicializar o campo de função de corrente a partir das condições iniciais descritas em (2.8), aplicada em todo o domínio;
- 2) Calcular a vorticidade inicial, a partir da função de corrente inicial, aplicando-se (2.7) para o interior do domínio, e as condições de contorno (2.9) nas fronteiras;
- 3) Calcular o campo de velocidade (u, v) e as médias das grandezas conservativas, utilizando-se das fórmulas (2.6) e (3.4) para o interior do domínio, aplicando as condições de contorno (2.9) e (2.10);
- 4) Integrar adiante no tempo, determinando o valor da vorticidade em $t + \Delta t$ por meio das equações (3.7), (3.9) e (3.3), para os pontos no interior do domínio e as condições de contorno (2.9) nas fronteiras. Na maior parte das vezes esta integração é efetuada pelo esquema leapfrog (centrado no tempo e no espaço) onde a equação (3.3) é discretizada e resolvida na forma;

$$\zeta_{i,j}^{t+\Delta t} = \zeta_{i,j}^{t-\Delta t} + 2 \cdot \Delta t \cdot J(\zeta, \psi) \quad (3.10)$$

- 5) A partir da vorticidade calculada, determinar o valor da função de corrente no interior do domínio, resolvendo-se a equação elíptica (2.7) pelo método SOR descrito no subitem 2.8, e
- 6) Repetir os passos 3, 4 e 5 até o término do período de integração.

É importante observar que neste esquema de três níveis de tempo existe um desacoplamento das soluções dos passos de tempo pares e ímpares, podendo aparecer variações significativas ao longo do tempo, o que gera instabilidade. Para evitar este problema efetua-se um passo de tempo no esquema euleriano (centrado no espaço e adiante no tempo) a cada 240 passos de tempo leapfrog (ARAKAWA, LAMB, 1977). Assim no primeiro e a cada 240 passos, a equação (3.3) é discretizada e resolvida segundo a fórmula

$$\zeta_{i,j}^{t+\Delta t} = \zeta_{i,j}^t + \Delta t \cdot J(\zeta, \psi) \quad (3.11)$$

3.3 – CONDIÇÃO DE COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (CFL)

O crescimento exponencial da solução de uma equação de diferenças finitas é chamado de instabilidade computacional (HALTINER, WILLIAMS, 1980) e deve ser claramente evitado.

A condição de estabilidade para o esquema leapfrog no referencial euleriano, em questão, é a de que

$$\frac{U \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.12)$$

que é comumente chamada de condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), onde a razão $U \cdot \Delta t / \Delta x$ é chamada de número de Courant (NCFL).

DURRAN (1998) ainda explica que a idéia básica da condição de CFL é a de que a solução do esquema de diferenças finitas não pode ser independente dos dados que determinam a solução da equação diferencial parcial associada.

3.4 – SOLUÇÃO PADRÃO

Uma vez que o problema apresentado não tem solução analítica, adotou-se para todos os casos estudados, após algumas simulações com diferentes passos de tempo, a solução euleriana com $NCFL \approx 0.8$ como solução padrão com a qual se compararão as diferentes soluções obtidas pelos métodos semi-lagrangeanos.

CAPÍTULO 4

SOLUÇÃO SEMI-LAGRANGEANA

Três diferentes soluções para o problema apresentado no Capítulo 2, utilizando o método semi-lagrangiano serão abordadas neste capítulo. Primeiramente será apresentado o método semi-lagrangiano, suas peculiaridades, vantagens e desvantagens. Posteriormente, serão apresentadas os esquemas já consagrados de três e de dois níveis de tempo, para então finalmente ser apresentada a solução de três níveis de tempo modificada. Para cada método será descrito o esquema de cálculo da posição de partida da partícula bem como o algoritmo de integração da equação do modelo.

4.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

WIIN-NIELSEN (1959), KRISHNAMURTI (1962) e SAWYER (1963) foram os pioneiros a empregarem o método semi-lagrangiano no final dos anos 50 e início dos anos 60, contudo foi após os trabalhos de ROBERT (1981 e 1982) associando ao método o esquema semi-implícito (ROBERT, HENDERSON, TURNBULL, 1972) que o método semi-lagrangiano passou a ser largamente utilizado em problemas eminentemente advectivos (STANFORTH, CÔTÉ, 1991). Hoje o método semi-lagrangiano semi-implícito se tornou um dos esquemas mais populares na arquitetura dos modelos globais de previsão de tempo (DURRAN, 1998).

4.2 – ESQUEMA LAGRANGEANO

A diferença básica entre os esquemas euleriano e lagrangeano está no posicionamento do observador do escoamento (referencial).

No euleriano o referencial é inercial, ou seja, é um ponto fixo no espaço onde uma determinada grandeza do escoamento é função do vetor posição \vec{X} e do tempo t . Neste caso a cada instante de tempo t tem-se uma “fotografia” da distribuição espacial de uma determinada grandeza (velocidade, temperatura, pressão, etc).

Já no esquema lagrangeano, utiliza-se um referencial não inercial que descreve a evolução do escoamento observado, acompanhando o movimento de uma parcela individual de fluido. Neste caso, uma determinada grandeza do escoamento é função do tempo t e do elemento de fluido escolhido.

Na solução euleriana para a equação de advecção (2.5), observa-se a evolução do fluido que passa em pontos fixos no espaço, ou seja, trabalha-se com uma malha fixa de pontos. Uma importante restrição deste esquema advém do fato da escolha do passo de tempo máximo permitido ser governada por questões de estabilidade ao invés de acurácia, conforme foi discutido na seção 3.3, devido ao critério de CFL (3.12).

Na solução lagrangeana, a equação (2.5) passa a ser representada na forma (2.1) não explicitando-se assim o termo não linear (MESINGER, ARAKAWA, 1976 e DURRAN, 1998), de forma que o observador acompanha a partícula de fluido ao longo de sua trajetória no escoamento. O esquema lagrangeano oferece a possibilidade de utilizar-se passos de tempo consideravelmente maiores que os permitidos no esquema euleriano mantendo-se a estabilidade, tendo contudo, como grande desvantagem, o fato de que um conjunto inicial de partículas regularmente distribuídas geralmente irá evoluir para uma distribuição espacial muito irregular (WELANDER, 1955), podendo,

conseqüentemente, deixar de representar importantes características do escoamento, onde a distribuição destas partículas for mais esparsa (STANIFORTH, CÔTÉ, 1991). Já o esquema euleriano mantém uma distribuição regular dos seus pontos de grade, como pode ser visto na figura 4.1.

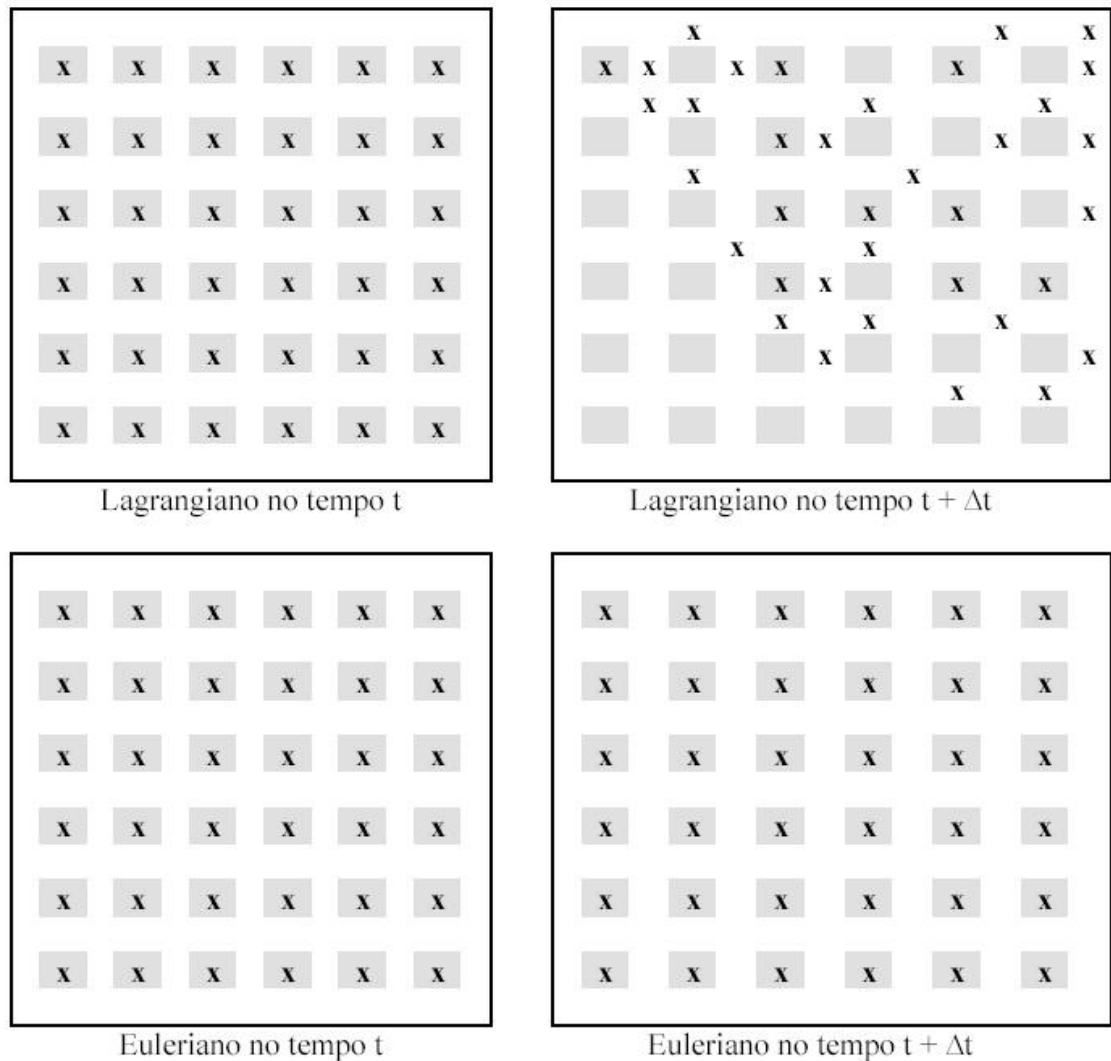


Fig. 4.1 – Comparação da distribuição dos pontos de grade dos esquemas lagrangeano e euleriano nos tempos t e $t + \Delta t$. A área hachurada representa os pontos da grade e os “x” representam os pontos observados.

4.3 – O MÉTODO SEMI-LAGRANGEANO

Uma solução melhor para o controle da distribuição dos pontos observados (parcelas de fluidos) é a escolha, a cada passo de tempo, de um novo conjunto de partículas que coincidam com os pontos de grade do domínio. Este novo conjunto de partículas escolhidas são as que chegam em cada ponto da grade do domínio a cada novo passo de tempo $t + \Delta t$ (DURRAN, 1998). A partir daí calculam-se as coordenadas do ponto de partida de cada uma destas parcelas, realizando-se a chamada trajetória *backward* (para trás).

A figura 4.2 representa a distribuição de partículas nos tempos $t + \Delta t$ e t para o esquema semi-lagrangiano.

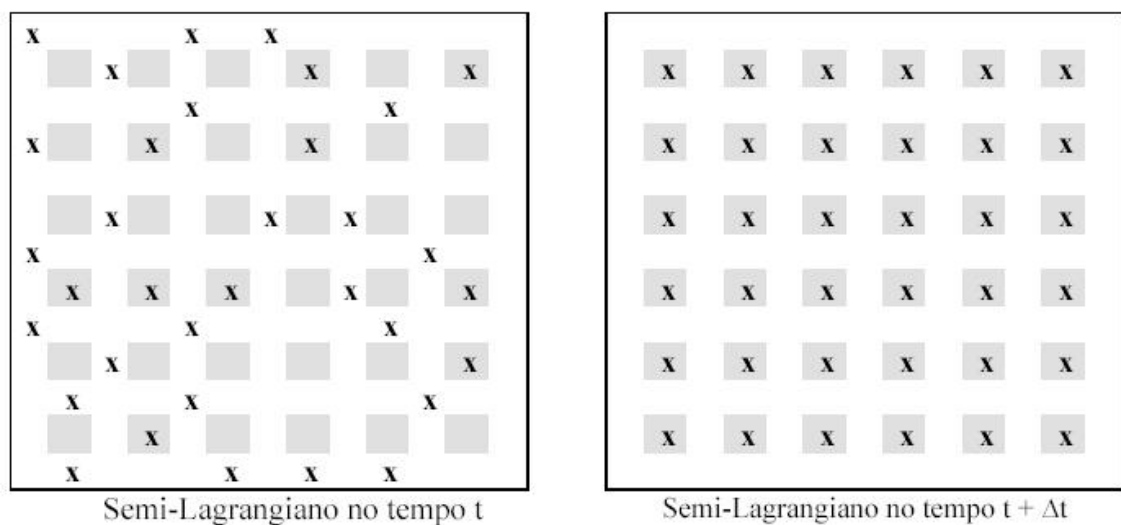


Fig. 4.2 – Representação da distribuição de partículas no esquema semi-lagrangiano.

A idéia principal do esquema semi-lagrangiano é conciliar as vantagens dos métodos euleriano e lagrangeano, isto é, a distribuição regular das partículas no tempo $t + \Delta t$ é mantida, conforme mostra a figura 4.2, e o cálculo de (2.1) por diferenças finitas fica facilitado eliminando-se o termo não linear de (2.5) e possibilitando a utilização de

maiores passos de tempo (STANIFORTH, CÔTÉ, 1991), uma vez que matematicamente o esquema é incondicionalmente estável, pois o domínio de dependência da solução numérica incluirá sempre o domínio de dependência da solução exata (DURRAN, 1998).

Escrevendo-se a equação (2.1) na forma discreta de um esquema de três níveis de tempo, teremos

$$\frac{\zeta_{i,j}^{t+\Delta t} - \zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = 0 \Rightarrow \zeta_{i,j}^{t+\Delta t} = \zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t} \quad (4.1)$$

onde (i, j) é a coordenada do ponto de grade no tempo $t + \Delta t$ e (\tilde{x}, \tilde{y}) é a coordenada do ponto de partida no tempo $t - \Delta t$. Normalmente (\tilde{x}, \tilde{y}) não coincide com um ponto de grade, como visto anteriormente.

Portanto o método consiste em realizar a trajetória *backward*, determinando-se a posição de partida $(\tilde{x}, \tilde{y})^{t-\Delta t}$ da partícula que chega no ponto de grade $(i, j)^{t+\Delta t}$, e nesta posição, realizar a interpolação dos valores de ζ , determinando-se o valor de $\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t}$.

4.4 – FONTES DE ERRO

São duas as principais fontes de erro do método semi-lagrangeano. A primeira advém da interpolação dos valores vizinhos à posição de partida $(\tilde{x}, \tilde{y})^{t-\Delta t}$ a fim de se determinar o valor de $\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t}$. A segunda está relacionada com as imprecisões e aproximações na determinação da posição de partida da partícula. Como já explicado na seção 2.7, para minimizar-se a primeira fonte de erro, sempre que possível, foram utilizadas interpolações cúbicas de Lagrange em x e y , empregando a expressão (2.12)

conforme está representado na figura 2.3. Nas regiões do domínio próximo às fronteiras, utilizaram-se interpolações lineares, definidas por (2.13) conforme está esquematizado na figura 2.2.

Os diferentes métodos empregados na determinação da posição de partida é, essencialmente, o que difere os três esquemas semi-lagrangeanos apresentados neste trabalho, para a solução do problema proposto. A explicação de cada um destes métodos será abordada posteriormente, por ocasião da descrição dos respectivos esquemas.

4.5 – VANTAGENS E DESVANTAGENS DO MÉTODO SEMI-LAGRANGEANO

A seguir serão listadas algumas vantagens e desvantagens do método semi-lagrangeano.

- 1) A implementação de um esquema semi-lagrangeano implica num maior custo computacional por passo de tempo, devido à necessidade de calcular-se a posição de partida da partícula e das interpolações necessárias ao método. Logo, para que o esquema seja eficiente, faz-se necessária a utilização de maiores passos de tempo, o que é permitido tendo em vista a estabilidade numérica do método (DURRAN, 1998);
- 2) A utilização do método semi-lagrangeano em problemas de transporte de um traçador em uma grade de alta resolução é recomendada, uma vez que neste caso o fator limitante do passo de tempo seria o cálculo da posição de partida com maior acurácia, permitindo assim a utilização de maiores passos de tempo mantendo uma elevada resolução espacial (DURRAN, 1998);

- 3) Num domínio esférico, utilizando-se de uma grade de referência em latitude e longitude, a aplicação do método semi-lagrangeano apresenta a vantagem de não sofrer influência da convergência dos meridianos, que devido à diminuição das distâncias na direção leste-oeste afeta o passo de tempo dos esquemas sujeitos à condição de estabilidade de CFL (3.12), apesar de ter-se que tomar alguns cuidados especiais no cálculo das trajetórias das partículas (MCDONALD, BATES, 1989);
- 4) Em geral, se é requisito do problema ter uma resolução temporal alta, não é recomendável a utilização do método semi-lagrangeano, uma vez que ao utilizar-se de passos de tempo pequenos o método torna-se ineficiente (DURRAN, 1998);
- 5) A utilização do método semi-implícito (ROBERT, HENDERSON, TURNBULL, 1972) associado ao semi-lagrangeano (SLSI) mostra-se muito eficiente, pois ambos permitem a utilização de grandes passos de tempo. Realizando-se um teste num modelo de previsão de tempo de alta resolução no *European Centre for Medium Range Weather Forecast* (ECMWF) mostrou-se que a utilização do SLSI permitiu um passo de tempo de 15 minutos, que em comparação com o de 3 minutos do modelo euleriano semi-implícito, promoveu um ganho de eficiência global de cerca de 20% (RITCHIE *et al.*, 1995);
- 6) O método semi-lagrangeano apresenta bons resultados em problemas cuja escala do fenômeno é pequena em relação ao espaçamento da grade (p. ex. áreas de frontogênese), apresentando a vantagem de não propagar ruído (KUO, WILLIAMS, 1990);

- 7) O método semi-lagrangiano pode ser implementado em grades de resolução variável de forma relativamente simples (DURRAN, 1998), e
- 8) A aplicação do método semi-lagrangiano em problemas advectivos é recomendável por não apresentar a instabilidade não-linear, devido à eliminação do termo $u \cdot \nabla$, não apresentando *aliasing*. (MESINGER, ARAKAWA, 1976 e STANIFORTH, CÔTÉ, 1991)

4.6 – ESQUEMA SEMI-LAGRANGEANO DE TRÊS NÍVEIS DE TEMPO (SL3T)

Este esquema, baseado em ROBERT (1981), é o de três níveis de tempo “tradicional”, onde a posição de partida é calculada com base numa trajetória linear da partícula a partir do ponto de grade $(i, j)^{t+\Delta t}$ até ponto $(\tilde{x}, \tilde{y})^{t-\Delta t}$, utilizando uma velocidade constante calculada para o tempo t .

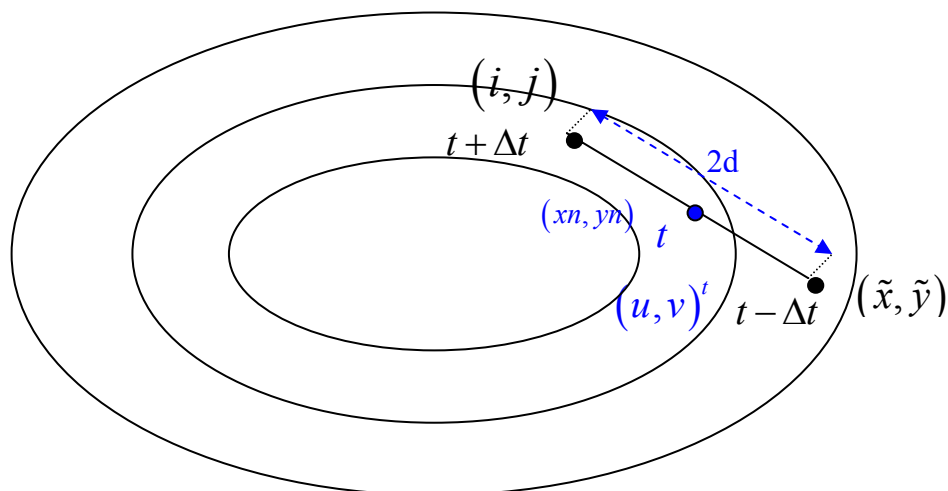


Fig. 4.3 – Esquema da trajetória “backward” do SL3T

4.6.1 – CÁLCULO DA VELOCIDADE \vec{U}^t

Na figura 4.3 vê-se a representação da trajetória da partícula a partir do ponto de grade $(i, j)^{t+\Delta t}$ até o ponto de partida $(\tilde{x}, \tilde{y})^{t-\Delta t}$. A distância $2d$ é dada pela fórmula

$$2d = \vec{U}_{xn,yn}^t \cdot 2\Delta t \quad (4.2)$$

onde $\vec{U}_{xn,yn}^t = (u, v)_{xn,yn}^t$ é o vetor velocidade calculado para o tempo t .

A determinação de $\vec{U}_{xn,yn}^t$ é realizada por meio de um método iterativo conforme os seguintes passos:

a) Toma-se como aproximação inicial a velocidade $\vec{U}_{i,j}^t$ no ponto de grade

$$(i, j) \text{ no tempo } t, \vec{U}_*^t = \vec{U}_{i,j}^t;$$

b) Calcula-se o deslocamento $d1 = \vec{U}_*^t \cdot \Delta t$;

c) Determina-se a posição da partícula no tempo t , dada por

$$\vec{X}_*^t = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_*^t \cdot \Delta t;$$

d) Na nova posição \vec{X}_*^t calcula-se um novo vetor velocidade \vec{U}_*^t interpolando-se os valores vizinhos ao ponto, conforme descrito no item 2.7;

e) Calcula-se o novo deslocamento $d2 = \vec{U}_*^t \cdot \Delta t$;

f) Se $\left| \frac{d2-d1}{d1} \right| \leq 1\%$ então considera-se que $\vec{U}_{xn,yn}^t = \vec{U}_*^t$. Caso contrário

retorna-se ao item b.

4.6.2 – ALGORITMO SL3T

O Algoritmo da solução SL3T pode ser descrito nos seguintes passos:

1. Inicializar o campo de função de corrente a partir das condições iniciais descritas em (2.8), aplicadas em todo o domínio;
2. Calcular a vorticidade inicial, a partir da função de corrente inicial, aplicando-se (2.7) para o interior do domínio, e as condições de contorno (2.9) nas fronteiras;
3. Calcular o campo de velocidade (u, v) e as médias das grandezas conservativas, utilizando-se das fórmulas (2.6) e (3.4) para o interior do domínio, aplicando as condições de contorno (2.9) e (2.10);
4. Determina-se a velocidade de deslocamento da partícula $\vec{U}_{xn,yn}^t = (u, v)_{xn,yn}^t$, conforme descrito no subitem 4.6.1;
5. Determina-se a posição de partida da partícula pela fórmula

$$\vec{X}_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t} = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_{xn,yn}^t \cdot 2 \cdot \Delta t \quad (4.3)$$

6. A partir da posição de partida (\tilde{x}, \tilde{y}) determina-se por interpolação dos valores vizinhos a esta posição, conforme descrito no item 2.7, a vorticidade $\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t}$;
7. De acordo com (4.1) determina-se $\zeta_{i,j}^{t+\Delta t}$;
8. A partir da vorticidade $\zeta_{i,j}^{t+\Delta t}$ calculada para todos os pontos, determina-se o valor da função de corrente no interior do domínio resolvendo-se a equação elíptica (2.7) pelo método SOR descrito no subitem 2.8, e
9. Repetir os passos 3, 4, 5, 6, 7 e 8 até o término do período de integração.

Na integração do primeiro passo de tempo adota-se que

$$\vec{U}_{xn,yn}^t = \vec{U}_{i,j}^t \quad (4.4)$$

Como o esquema é de três níveis de tempo, aplica-se o filtro Asselin descrito em (2.11) para evitar o aparecimento dos modos computacionais.

4.7 – ESQUEMA SEMI-LAGRANGEANO DE DOIS NIVEIS DE TEMPO (SL2TMB)

Baseado em MCDONALD e BATES (1987), este esquema de dois níveis de tempo foi proposto com o intuito de, mantendo-se a acurácia de um esquema de três níveis de tempo, eliminar o aparecimento dos modos computacionais presentes nos esquemas de três níveis de tempo, que torna necessária a aplicação de filtros; reduzir a necessidade de armazenamento, e em certos casos, diminuir o custo computacional.

Para isso o esquema utiliza como velocidade de deslocamento da partícula a velocidade calculada em $t + \frac{\Delta t}{2}$, através de uma extrapolação linear das velocidades em t e $t - \Delta t$.

$$\vec{U}^{t+\Delta t/2} = \frac{3}{2}\vec{U}^t - \frac{1}{2}\vec{U}^{t-\Delta t} \quad (4.5)$$

Na forma discreta um esquema de dois níveis de tempo a equação (2.1) ficará

$$\frac{\zeta_{i,j}^{t+\Delta t} - \zeta_{\bar{x},\bar{y}}^t}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \zeta_{i,j}^{t+\Delta t} = \zeta_{\bar{x},\bar{y}}^t \quad (4.6)$$

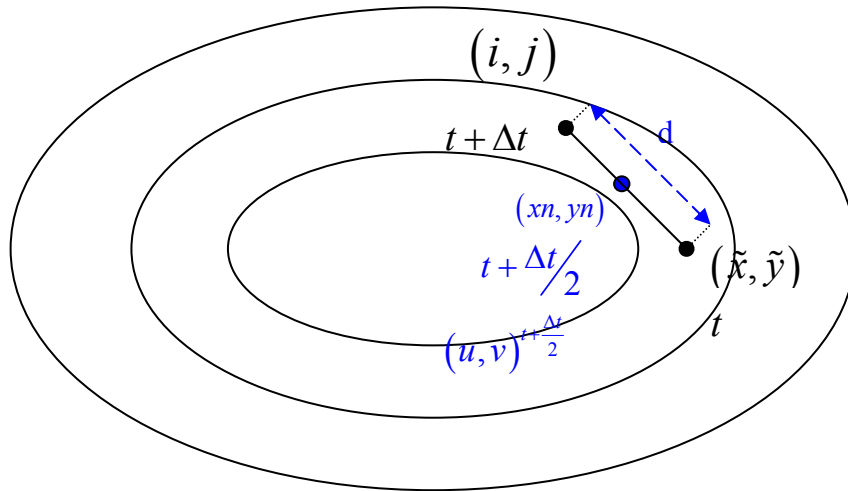


Fig. 4.4 – Esquema da trajetória “backward” do SL2TMB

4.7.1 – DETERMINAÇÃO DE $\vec{U}_{xn,yn}^{t+\Delta t/2}$

Observando a figura 4.4, verifica-se que o esquema SL2TMB consiste em, a partir do ponto de grade $(i, j)^{t+\Delta t}$, andar um passo de tempo para trás utilizando-se como velocidade $\vec{U}_{xn,yn}^{t+\Delta t/2}$.

A determinação desta velocidade é realizada conforme o seguinte roteiro:

- a) Toma-se como aproximação inicial a velocidade $\vec{U}_{i,j}^t$ no ponto de grade (i, j)

no tempo t , $\vec{U}_* = \vec{U}_{i,j}^t$;

- b) Calcula-se o novo deslocamento $d1 = \vec{U}_* \cdot \frac{\Delta t}{2}$;

- c) Determina-se a posição da partícula no tempo $t + \frac{\Delta t}{2}$, dada por

$$\vec{X}_*^{t+\Delta t/2} = \vec{X}_{(i,j)}^t - \vec{U}_* \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (4.7)$$

d) Na nova posição $\bar{X}_*^{t+\Delta t/2}$ calcula-se as velocidades \vec{U}_*^t e $\vec{U}_*^{t-\Delta t}$ interpolando-se os valores vizinhos ao ponto, conforme descrito no item 2.7 para os campos de velocidade nos tempos t e $t - \Delta t$;

e) Com os valores de \vec{U}_*^t e $\vec{U}_*^{t-\Delta t}$ a velocidade de deslocamento da partícula é determinada pela extrapolação linear definida pela expressão

$$\vec{U}_*^{t+\Delta t/2} = \frac{3}{2}\vec{U}_*^t - \frac{1}{2}\vec{U}_*^{t-\Delta t} \quad (4.8)$$

f) Calcula-se o novo deslocamento $d2 = \vec{U}_*^{t+\Delta t/2} \cdot \frac{\Delta t}{2}$;

g) Se $\left| \frac{d2-d1}{d1} \right| \leq 1\%$ encerram-se as interações considerando que $\vec{U}_{x_n, y_n}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \vec{U}_*^{t+\Delta t/2}$.

Caso contrário, assume-se que $\vec{U}_* = \vec{U}_*^{t+\Delta t/2}$ e retorna-se ao item b.

4.7.2 – ALGORITMO SL2TMB

O Algoritmo da solução SL2TMB pode ser descrito nos seguintes passos:

1. Inicializar o campo de função de corrente a partir das condições iniciais descritas em (2.8), aplicadas em todo o domínio;
2. Calcular a vorticidade inicial, a partir da função de corrente inicial, aplicando-se (2.7) para o interior do domínio, e as condições de contorno (2.9) nas fronteiras;
3. Calcular o campo de velocidade (u, v) e as médias das grandezas conservativas, utilizando-se as fórmulas (2.6) e (3.4) para o interior do domínio, aplicando as condições de contorno (2.9) e (2.10);

4. Determinar a velocidade de deslocamento da partícula $\vec{U}_{xn,yn}^{t+\Delta t/2} = (u, v)_{xn,yn}^{t+\Delta t/2}$, conforme descrito no item 4.7.1;

5. Determinar a posição de partida da partícula pela fórmula

$$\vec{X}_{\tilde{x},\tilde{y}}^t = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_{xn,yn}^{t+\Delta t/2} \cdot \Delta t \quad (4.9)$$

6. A partir da posição de partida (\tilde{x}, \tilde{y}) determina-se por interpolação dos valores vizinhos a esta posição, conforme descrito no item 2.7, a vorticidade

$$\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^t;$$

7. De acordo com (4.6) determina-se $\zeta_{i,j}^{t+\Delta t}$;

8. A partir da vorticidade $\zeta_{i,j}^{t+\Delta t}$ calculada para todos os pontos, determinar o valor da função de corrente no interior do domínio resolvendo-se a equação elíptica (2.7) pelo método SOR descrito no subitem 2.8, e

9. Repetir os passos 3, 4, 5, 6, 7 e 8 até o término do período de integração.

Apesar do esquema ser de dois níveis de tempo, faz-se necessário armazenar o campo de velocidade em $t - \Delta t$ para efetuar-se o cálculo da velocidade de deslocamento da partícula. Por isso, no primeiro passo de tempo, adota-se

$$\vec{U}_{xn,yn}^{t+\Delta t/2} = \vec{U}_{i,j}^t \quad (4.10)$$

Por ser um esquema de dois níveis de tempo, o SL2TMB não está sujeito ao aparecimento dos modos computacionais e por isso não necessita da aplicação de filtros.

4.8 – ESQUEMA SEMI-LAGRANGEANO DE TRÊS NÍVEIS DE TEMPO MODIFICADO (SL3TM)

Proposto inicialmente por COSTA (2003) para a solução de um problema de advecção linear, o SL3TM baseia-se no princípio da quebra da trajetória da partícula, onde se espera que em situações de grandes curvaturas o método represente melhor o deslocamento, mesmo com NCFL alto.

Neste esquema a trajetória é quebrada em dois passos. No primeiro passo a partir do ponto de grade (i, j) caminha-se um passo de tempo para trás com uma velocidade calculada para um ponto intermediário $(xn1, yn1)$ interpolado no tempo t . No segundo, a partir da posição de chegada do primeiro lance, caminha-se mais um passo de tempo com uma velocidade definida para um outro ponto intermediário $(xn2, yn2)$, interpolado também no tempo t .

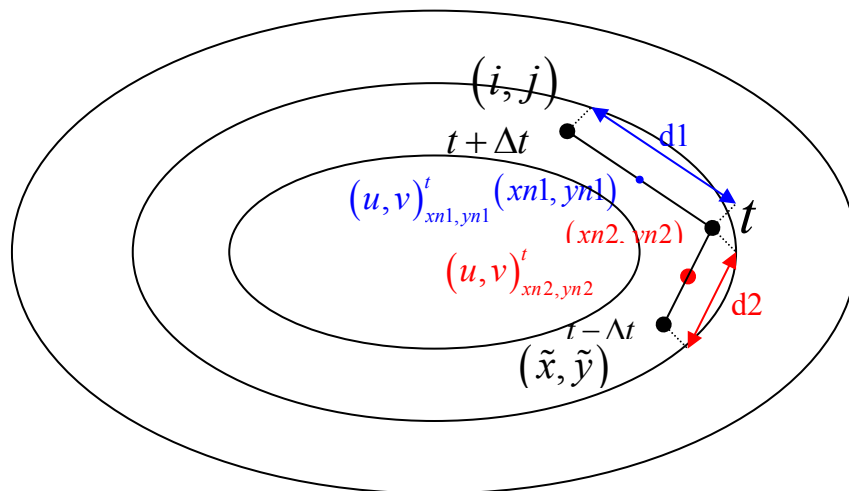


Fig. 4.5 – Esquema da quebra da trajetória da partícula do esquema SL3TM

4.8.1 – CÁLCULO DAS VELOCIDADES $\vec{U}_{xn1,yn1}^t$ E $\vec{U}_{xn2,yn2}^t$

Na figura 4.5 observa-se a representação da trajetória em dois passos a partir do ponto de grade $(i, j)^{t+\Delta t}$ até o ponto de partida $(\tilde{x}, \tilde{y})^{t-\Delta t}$. As distâncias $d1$ e $d2$ são determinadas pelas fórmulas

$$\begin{aligned} d1 &= \vec{U}_{xn1,yn1}^t \cdot \Delta t; \text{ e} \\ d2 &= \vec{U}_{xn2,yn2}^t \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\vec{U}_{xn1,yn1}^t$ e $\vec{U}_{xn2,yn2}^t$ são os vetores velocidades calculados para as posições intermediárias $(xn1, yn1)$ e $(xn2, yn2)$ no tempo t .

A determinação destes vetores velocidades é realizada por meio do método iterativo descrito a seguir:

a) Toma-se como valor inicial a velocidade $\vec{U}_{i,j}^t$ no ponto de grade (i, j) no tempo t , $\vec{U}_*^t = \vec{U}_{i,j}^t$;

b) Calcula-se o deslocamento $d11 = \vec{U}_*^t \cdot \frac{\Delta t}{2}$;

c) Determina-se a posição da partícula no tempo $t + \frac{\Delta t}{2}$, dada por

$$\vec{X}_*^{t+\Delta t/2} = X_{i,j}^{t+\Delta t} - d11;$$

d) Na nova posição $\vec{X}_*^{t+\Delta t/2}$ calcula-se um novo vetor velocidade \vec{U}_*^t interpolando-se os valores vizinhos ao ponto, conforme descrito no item 2.7;

e) Calcula-se o novo deslocamento $d12 = \vec{U}_*^t \cdot \frac{\Delta t}{2}$;

f) Se $\left| \frac{d12-d11}{d11} \right| \leq 1\%$ então considera-se que $\vec{U}_{xn1,yn1}^t = \vec{U}_*^t$. Caso contrário

retorna-se ao item b.

g) Calcula-se a posição intermediária \vec{X}_*^t dada por

$$\vec{X}_*^t = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_{xn1,yn1}^t \cdot \Delta t$$

h) Na nova posição \vec{X}_*^t calcula-se um novo vetor velocidade \vec{U}_*^t interpolando-se os valores vizinhos ao ponto, conforme descrito no item 2.7;

i) Calcula-se o deslocamento $d21 = \vec{U}_*^t \cdot \frac{\Delta t}{2}$;

j) Determina-se a posição da partícula no tempo $t - \frac{\Delta t}{2}$, dada por

$$\vec{X}_*^{t-\Delta t/2} = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_{xn1,yn1}^t \cdot \Delta t - d21;$$

k) Na nova posição $\vec{X}_*^{t-\Delta t/2}$ calcula-se um novo vetor velocidade \vec{U}_*^t interpolando-se os valores vizinhos ao ponto, conforme descrito no item 2.7;

l) Calcula-se o novo deslocamento $d22 = \vec{U}_*^t \cdot \frac{\Delta t}{2}$;

m) Se $\left| \frac{d22-d21}{d21} \right| \leq 1\%$ então considera-se que $\vec{U}_{xn2,yn2}^t = \vec{U}_*^t$. Caso contrário

retorna-se ao item i.

4.8.2 – ALGORITMO SL3TM

O Algoritmo da solução SL3TM pode ser descrito nos seguintes passos:

1. Inicializar o campo de função de corrente a partir das condições iniciais descritas em (2.8), aplicadas em todo o domínio;

2. Calcular a vorticidade inicial, a partir da função de corrente inicial, aplicando-se (2.7) para o interior do domínio, e as condições de contorno (2.9) nas fronteiras;
3. Calcular o campo de velocidade (u, v) e as médias das grandezas conservativas, utilizando-se das fórmulas (2.6) e (3.4) para o interior do domínio, aplicando as condições de contorno (2.9) e (2.10) nas fronteiras;
4. Determinar as velocidades $\vec{U}_{xn1,yn1}^t = (u, v)_{xn1,yn1}^t$ e $\vec{U}_{xn2,yn2}^t = (u, v)_{xn2,yn2}^t$ de deslocamento da partícula, conforme descrito no subitem 4.8.1;
5. Determina-se a posição de partida da partícula pela fórmula;

$$\vec{X}_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t} = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_{xn1,yn1}^t \cdot \Delta t - \vec{U}_{xn2,yn2}^t \cdot \Delta t \quad (4.12)$$

6. A partir da posição de partida (\tilde{x}, \tilde{y}) determina-se por interpolação dos valores vizinhos a esta posição, conforme descrito no item 2.7, a vorticidade $\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t}$;
7. De acordo com (4.1) determina-se $\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t+\Delta t}$;
8. A partir da vorticidade $\zeta_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t+\Delta t}$ calculada para todos os pontos, determina-se o valor da função de corrente no interior do domínio resolvendo-se a equação elíptica (2.7) pelo método SOR descrito no subitem 2.8, e
9. Repetir os passos 3, 4, 5, 6, 7 e 8 até o término do período de integração.

Na integração do primeiro passo de tempo adota-se uma trajetória retilínea de

$\vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t}$ até $\vec{X}_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t}$, tal que

$$\vec{X}_{\tilde{x},\tilde{y}}^{t-\Delta t} = \vec{X}_{i,j}^{t+\Delta t} - \vec{U}_{xn,yn}^t \cdot 2 \cdot \Delta t \quad (4.13)$$

onde

$$\vec{U}_{xn,yn}^t = \vec{U}_{i,j}^t$$

Como o SL3TM é um esquema de três níveis de tempo, aplica-se o filtro Asselin descrito em (2.11) para controlar os ruídos associados ao modo computacional.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS ALCANÇADOS

Neste capítulo serão apresentados todos os casos que compõem o presente estudo bem como discutidos os principais resultados dos experimentos. Dentro de cada caso, serão mostrados os diferentes resultados obtidos pelos quatro métodos de integração abordados nos capítulos 3 e 4. A análise dos resultados alcançados será fornecida no decorrer da apresentação dos experimentos que compõem cada caso.

5.1 – OS CASOS

Com o objetivo de verificar a sensibilidade da solução semi-lagrangeana em relação ao aumento da curvatura e do número de Courant (NCFL), o trabalho foi dividido em três casos que diferem entre si pelas dimensões do domínio, sendo que cada um destes casos está dividido em sete experimentos onde o passo de tempo é gradativamente aumentado, fazendo com que o NCFL assumira aproximadamente os valores 0.8, 1, 2, 4, 6, 8 e 10.

Para que sejam mantidos valores significativos de velocidade, variou-se a amplitude inicial (Ψ) do campo função de corrente à medida que se foi aumentando a curvatura.

Ressalta-se que para todos os experimentos o espaçamento da grade (resolução do modelo) é de 5000m em x e em y isto é,

$$\Delta x = \Delta y = 5000 \text{ m} \tag{5.1}$$

5.1.1 – CASO 1

É o caso que apresenta a menor curvatura do escoamento onde o número de pontos de grade em x é igual ao em y , ou seja,

$$\begin{aligned}NX &= NY = 129; \\nx &= 128; \\ny &= 64; \text{ e} \\ \Psi &= 5.0 \cdot 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}\end{aligned}\tag{5.2}$$

Baseado em (2.8) define-se o campo inicial de função de corrente como

$$\psi_{i,j} = 5.0 \cdot 10^6 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{nx}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot j}{2 \cdot ny}\right) + 0.1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot j}{ny}\right) \right], \text{ com}\tag{5.3}$$
$$i = 0:128 \text{ e } j = -64:64$$

sendo representado pelo gráfico abaixo

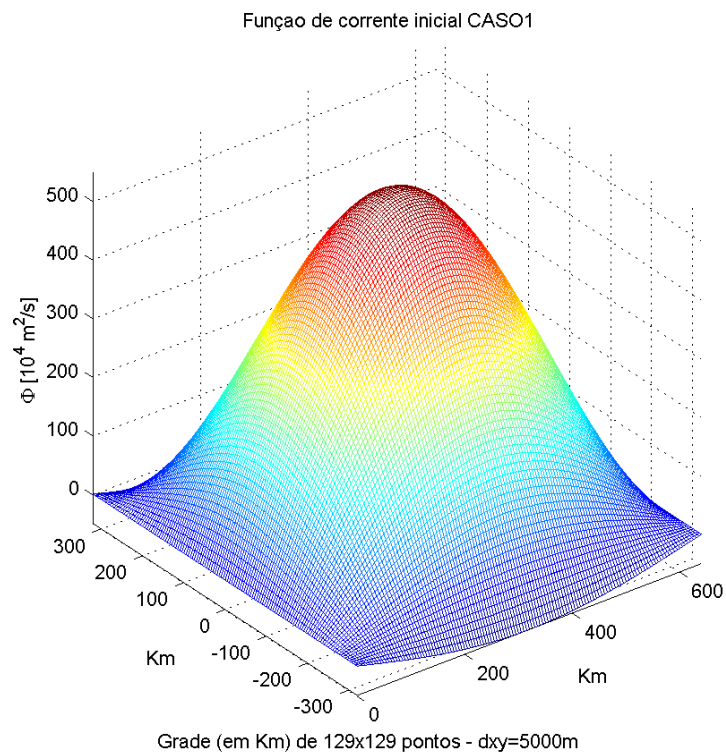


Fig. 5.1 – Representação da função de corrente inicial para o CASO 1. Gráfico de Superfície.

ou na forma de curvas de nível

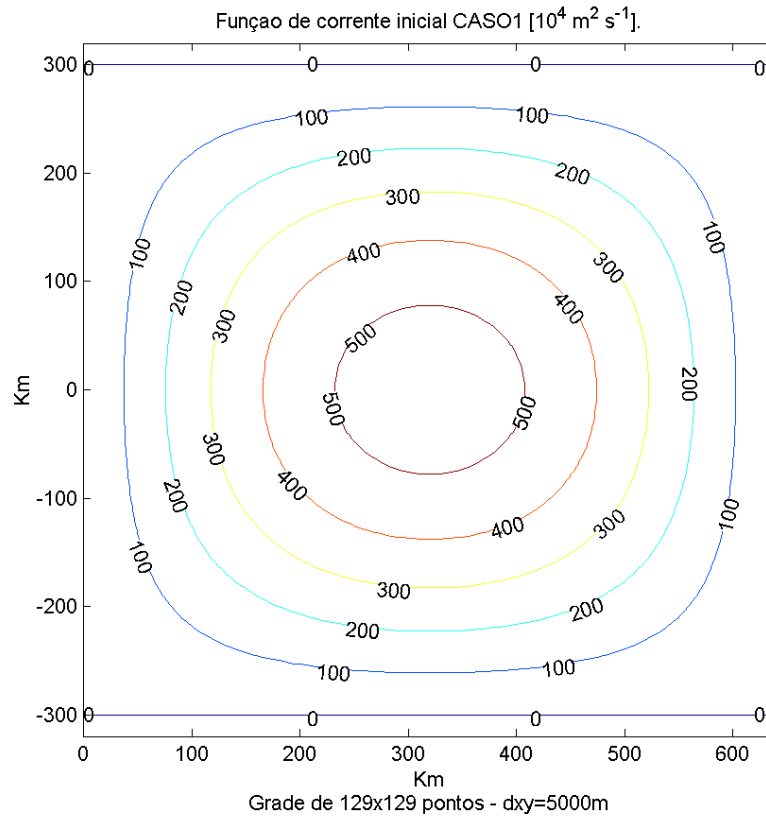


Fig. 5.2 – Representação do campo inicial de função de corrente para o CASO 1. Gráfico de curvas de nível.

5.1.2 – CASO 2

Caracterizado pela redução do número de pontos de grade em y pela metade,

ficando o domínio com as seguintes características:

$$\begin{aligned} NX &= 129; \\ NY &= 65; \\ nx &= 128; \\ ny &= 32; \text{ e} \\ \Psi &= 2.0 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \tag{5.4}$$

De modo que a função de corrente inicial (2.8) será dada por

$$\psi_{i,j} = 2.0 \cdot 10^6 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{n_x}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot j}{2 \cdot n_y}\right) + 0.1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot j}{n_y}\right) \right], \text{ com} \quad (5.5)$$

$$i = 0:128 \text{ e } j = -32:32$$

representando graficamente como

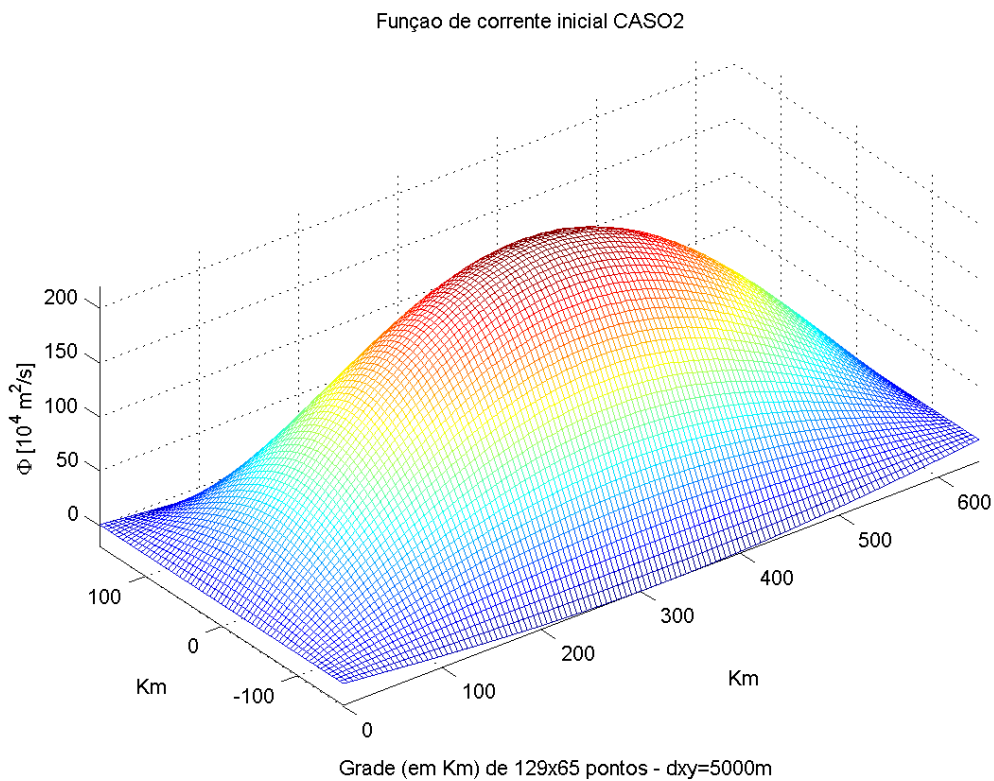


Fig 5.3 – Função de corrente inicial para o CASO 2. Gráfico de Superfície

É importante observar que apesar de ser semelhante ao gráfico do campo inicial do CASO 1, neste domínio as dimensões em x e y são diferentes, aumentando-se assim a curvatura do escoamento. Pode-se verificar melhor esta diferença na análise do gráfico de curvas de nível da figura 5.4, a seguir.

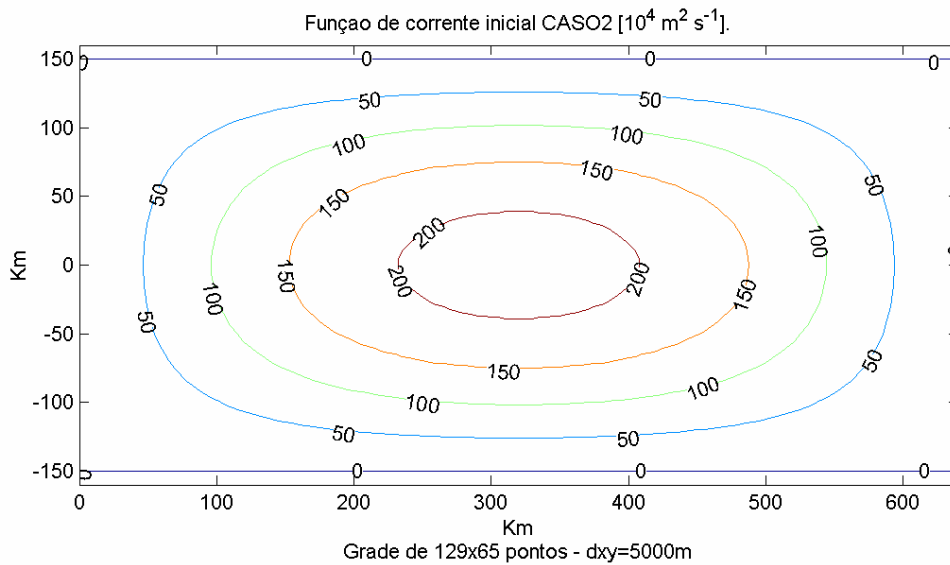


Fig. 5.4 – Campo inicial de função de corrente para o CASO 2. Curvas de nível.

5.1.3 – CASO 3

Neste caso reduziu-se ainda mais o número de pontos em y aumentando-se assim a curvatura. Este é o caso de maior curvatura e foi simulado com os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned}
 NX &= 129; \\
 NY &= 49; \\
 nx &= 128; \\
 ny &= 24; \text{ e} \\
 \Psi &= 1.5 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

aplicados na equação da condição inicial do campo de função de corrente dada pela fórmula

$$\psi_{i,j} = 1.5 \cdot 10^6 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{128}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot j}{48}\right) + 0.1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot j}{24}\right) \right], \text{ com}$$

$$i = 0:128 \text{ e } j = -24:24$$
(5.7)

sendo representada pelas figuras 5.5 e 5.6.

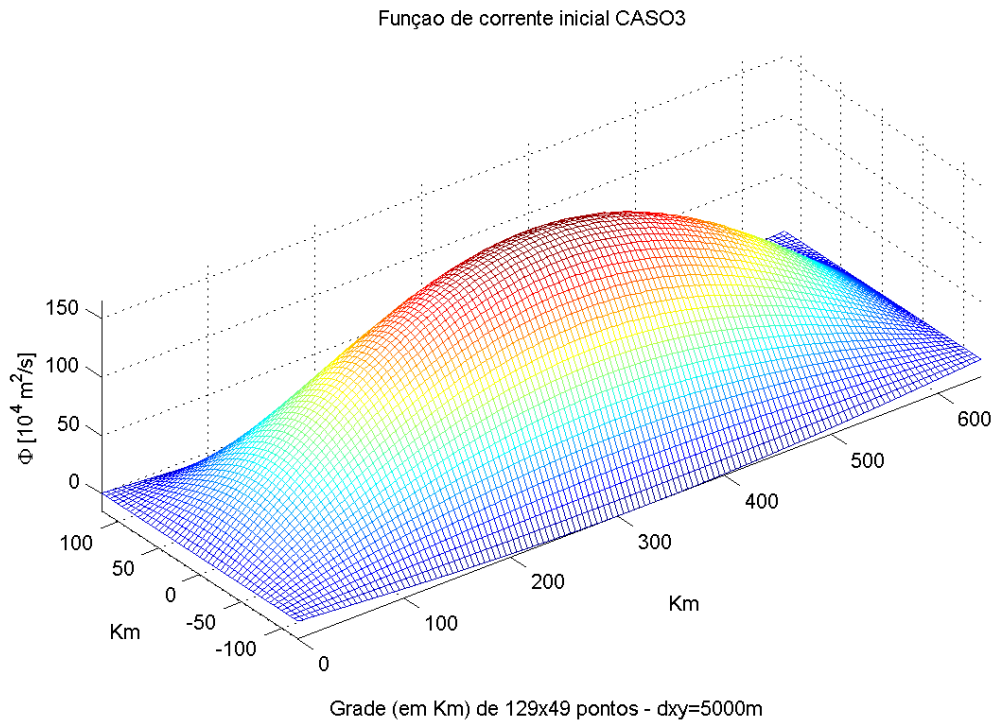


Fig 5.5 – Campo inicial de função de corrente para o CASO 3.

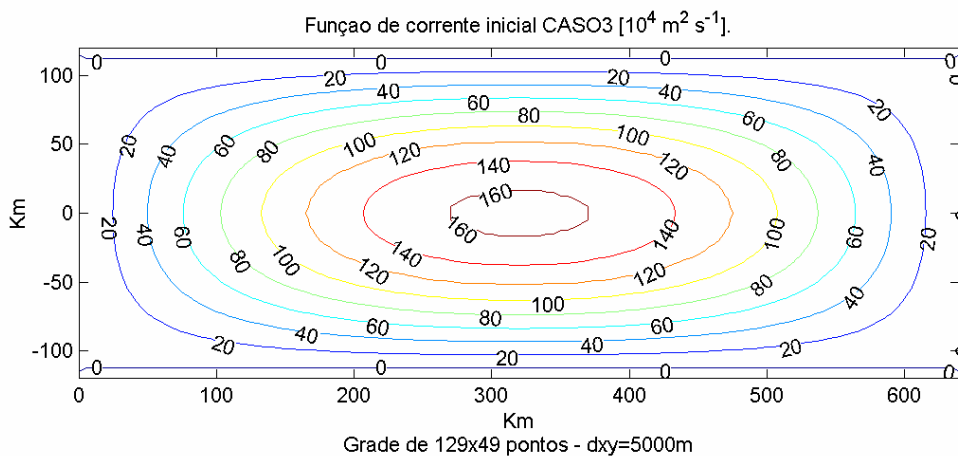


Fig 5.6 – Campo inicial de função de corrente do CASO 3. Curvas de Nível.

5.2 – OS EXPERIMENTOS

Como mencionado anteriormente, para cada caso foram realizados sete experimentos, nos quais o passo de tempo foi gradativamente sendo aumentado. Os primeiros experimentos dos casos representam a simulação em que se utilizou o menor passo de tempo, mantendo-se o NCFL em torno de 0.8.

As soluções eulerianas estão apresentadas somente para estes experimentos, uma vez que ao assumirmos maiores passos de tempo obtemos um $NCFL > 1$, impossibilitando a aplicação desta solução devido às restrições de estabilidade deste método (3.12).

Dentro de cada caso, a solução euleriana para o primeiro experimento é considerada como referência para comparação do desempenho das demais soluções semi-lagrangeanas.

Para a avaliação da solução produzida pelos métodos nos diferentes experimentos, foram gerados gráficos com a representação do campo de função de corrente ao término do período de integração, bem como um gráfico com a diferença entre o campo final euleriano e o campo final de cada um dos esquemas semi-lagrangeanos.

Além destes, foram construídos mais dois conjuntos de gráficos com o intuito de avaliar-se o desempenho de cada esquema semi-lagrangeano. O primeiro conjunto, conforme ARAKAWA e LAMB (1977), consiste no acompanhamento da evolução das grandezas conservativas vorticidade média ($\bar{\zeta}$), enstrofia média ($\bar{\xi}$) e energia cinética média (\bar{Ec}), definidas por (3.4), e também da magnitude máxima do vetor velocidade ($|\vec{U}|_{MAX}$) onde

$$|\vec{U}| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5.8)$$

O segundo conjunto, seguindo os trabalhos de PUDYKIEWICZ e STANIFORTH (1984) e KUO e WILLIAMS (1990), com o intuito de se verificar a acurácia de cada método semi-lagrangeano, acompanha a evolução dos seguintes parâmetros estatísticos:

1. A razão entre os somatórios do valor da função de corrente em cada ponto de grade do esquema semi-lagrangeano e do euleriano;

$$\frac{\sum \psi_{SL}}{\sum \psi_{EUL}} \quad (5.9)$$

2. A razão entre os somatórios do quadrado da função de corrente em cada ponto de grade do esquema semi-lagrangeano e do euleriano;

$$\frac{\sum \psi_{SL}^2}{\sum \psi_{EUL}^2} \quad (5.10)$$

3. A razão entre os desvios padrões (σ) dos valores da função de corrente do esquema semi-lagrangeano e do euleriano;

$$\frac{\sigma(\psi_{SL})}{\sigma(\psi_{EUL})}; \text{ onde} \quad (5.11)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{i=0:nx \\ j=-ny:ny}} (\psi_{i,j} - \bar{\psi})^2}{N-1}};$$

$$\bar{\psi} = \frac{\sum_{\substack{i=0:nx \\ j=-ny:ny}} \psi_{i,j}}{N}; \text{ e}$$

$$N = NX \cdot NY$$

4. O erro médio quadrático, definido pela raiz quadrada da média dos quadrados (RMS) da diferença entre os campos de função de corrente semi-lagrangeano e euleriano.

$$RMS(\psi_{SL} - \psi_{EUL}); \text{ onde} \quad (5.12)$$

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{i=0:nx \\ j=-ny:ny}} \psi_{i,j}^2}{NX \cdot NY}}$$

O período de integração para todos os casos foi de 30 dias. Os gráficos de evolução das grandezas conservativas foram construídos com saídas do programa a cada 1 hora de integração.

Já os gráficos de evolução das grandezas estatísticas foram construídos com saídas do programa a cada 8 horas e 20 min de integração.

Os passos de tempo (Δt) foram escolhidos de forma que a cada 8 horas e 20 minutos de integração um número inteiro de passos tenha sido executado, evitando-se assim a comparação de campos em diferentes instantes da integração.

O valor do NCFL atribuído a cada experimento foi calculado no instante inicial da integração podendo apresentar variações ao longo do período de integração.

Nas tabelas 5.1 a 5.3 é apresentado um resumo com os parâmetros utilizados nas rodadas de todos os experimentos dos três casos de estudo.

Nas tabelas dos apêndices A e B estão apresentados os resultados encontrados no cálculo das grandezas conservativas e estatísticas para todas as simulações; para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, no caso das grandezas conservativas (apêndice A), e para 125, 250, 500 e 716 horas de integração, no caso das grandezas estatísticas (apêndice B).

Tab. 5.1 – Experimentos do CASO 1.

CASO 1	$NX = NY = 129$	$\Psi = 5 \cdot 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
EXP11	$\Delta t = 1,5 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 0.81
EXP12	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 1.08
EXP13	$\Delta t = 4.0 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 2.16
EXP14	$\Delta t = 7.89437 \cdot 10^2 \text{ s}^{(1)}$	NCFL = 4.26
EXP15	$\Delta t = 1.2 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 6.48
EXP16	$\Delta t = 1.5789 \cdot 10^3 \text{ s}^{(2)}$	NCFL = 8.52
EXP17	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 10.79

(1) $\Delta t = (30 \cdot 10^3) / 38$

(2) $\Delta t = (30 \cdot 10^3) / 19$

Tab. 5.2 – Experimentos do CASO 2.

CASO 2	$NX = 129 \text{ e } NY = 65$	$\Psi = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
EXP21	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 0.84
EXP22	$\Delta t = 2.5 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 1.05
EXP23	$\Delta t = 5.0 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 2.09
EXP24	$\Delta t = 10^3 \text{ s}$	NCFL = 4.19
EXP25	$\Delta t = 1.5 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 6.29
EXP26	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 8.38
EXP27	$\Delta t = 2.5 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 10.48

Tab. 5.3 – Experimentos do CASO 3.

CASO 3	$NX = 129 \text{ e } NY = 49$	$\Psi = 1.5 \cdot 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
EXP31	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 0.84
EXP32	$\Delta t = 2.5 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 1.05
EXP33	$\Delta t = 5.0 \cdot 10^2 \text{ s}$	NCFL = 2.09
EXP34	$\Delta t = 10^3 \text{ s}$	NCFL = 4.19
EXP35	$\Delta t = 1.5 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 6.28
EXP36	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 8.38
EXP37	$\Delta t = 2.5 \cdot 10^3 \text{ s}$	NCFL = 10.48

5.2.1 – EXPERIMENTOS DO CASO 1 (EXP11, EXP12, EXP14 e EXP16)

Os resultados destes experimentos estão listados nas tabelas A.1 a A.4 e B.1 a B.3 dos apêndices A e B respectivamente.

Nas figuras 5.7 a 5.10 encontra-se a representação do campo final de função de corrente das soluções euleriana, SL3T, SL2TMB e SL3TM, após 30 dias de integração com $NCFL=0.8$. Observa-se que os quatro esquemas convergiram para soluções muito próximas o que corrobora a idéia de utilizar este resultado (o euleriano) como padrão.

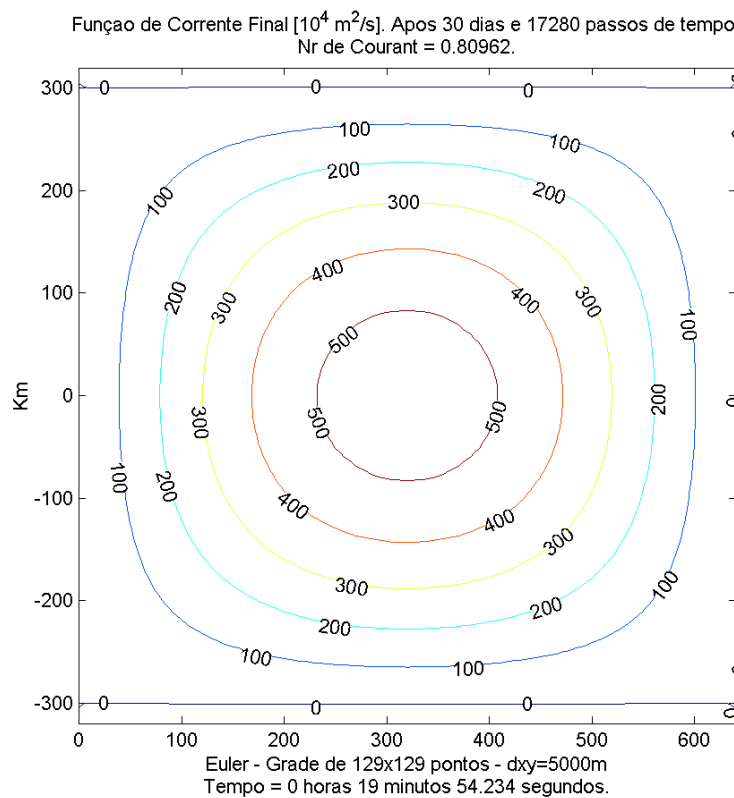


Fig. 5.7 – Solução euleriana para o CASO 1, com $NCFL=0.8$.

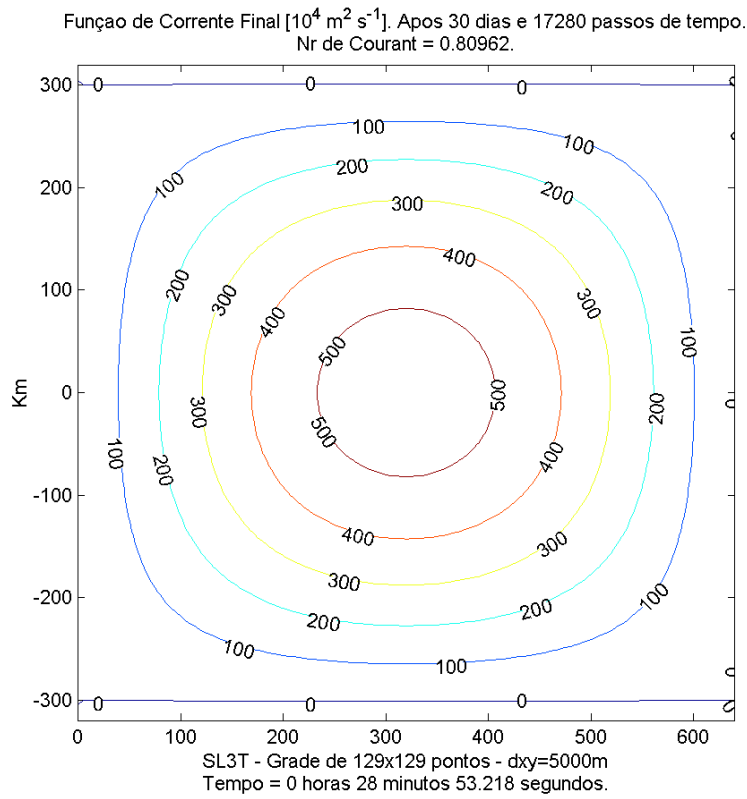


Fig. 5.8 – Solução SL3T para o CASO 1, com NCFL=0.8.

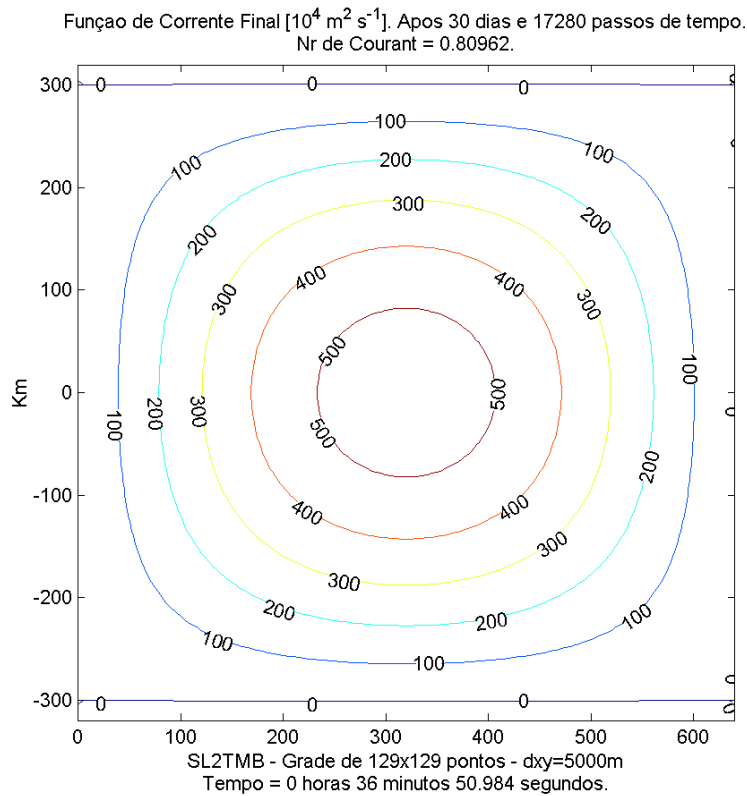


Fig. 5.9 – Solução SL2TMB para o CASO 1, com NCFL=0.8.

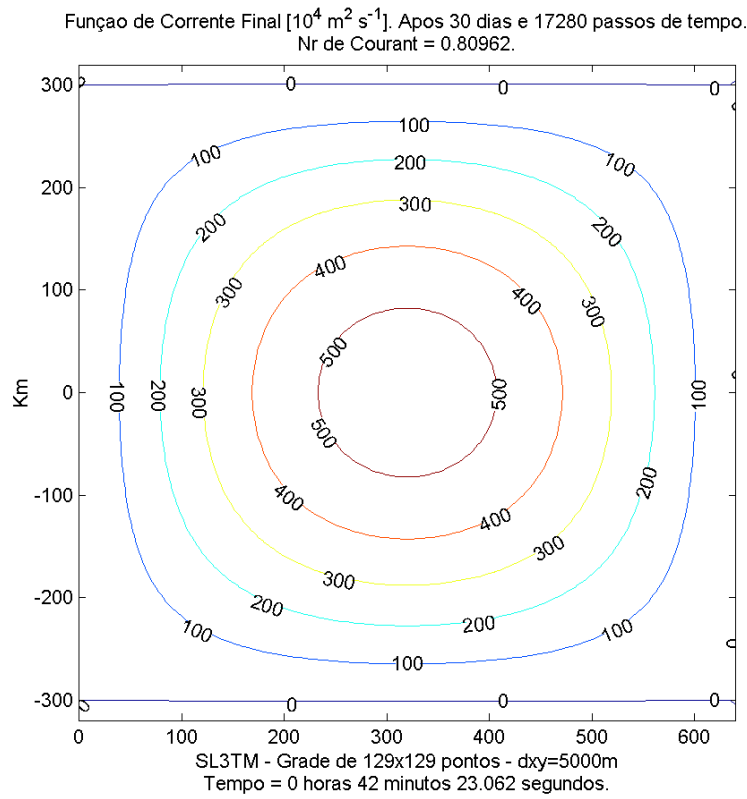
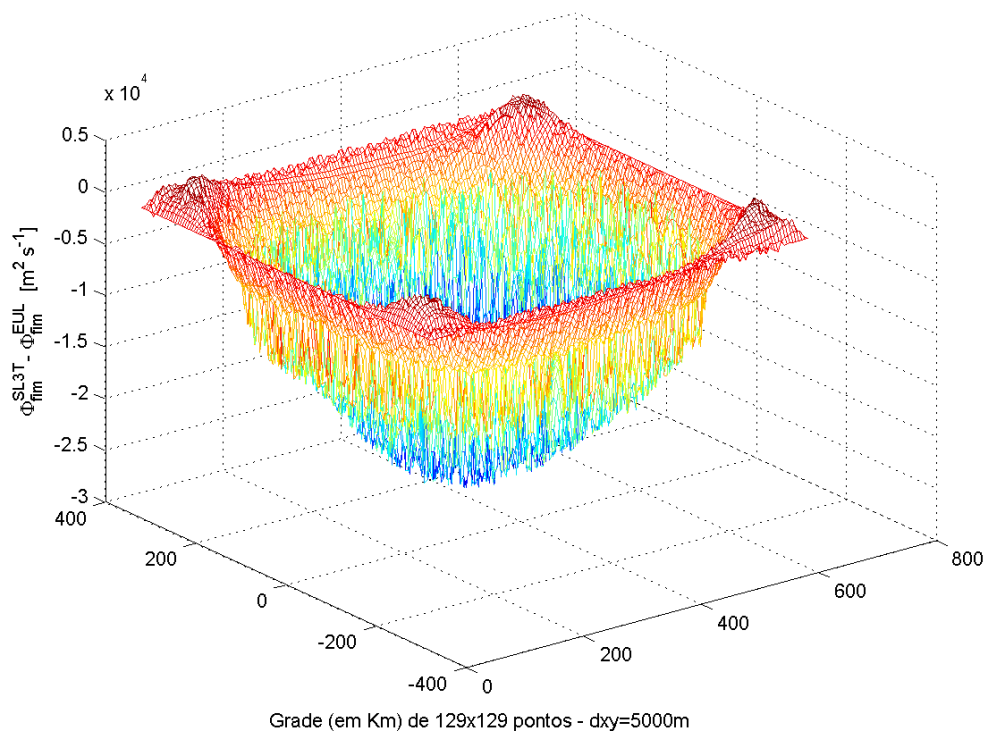


Fig. 5.10 – Solução SL3TM para o CASO 1, com NCFL=0.8.

As figuras 5.11 e 5.12 representam a diferença entre o campo final de função de corrente da solução SL3T e euleriana ($\psi_{SL3T} - \psi_{EUL}$) para os NCFL 1, 4 e 8, respectivamente, após 30 dias de integração.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3T e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3T} = 1.0795$ - $NCFL_{EULER} = 0.80962$.



Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3T e EULER.
 Após 30.0073 dias. $NCFL_{SL3T} = 4.2611$ - $NCFL_{EULER} = 0.80962$.

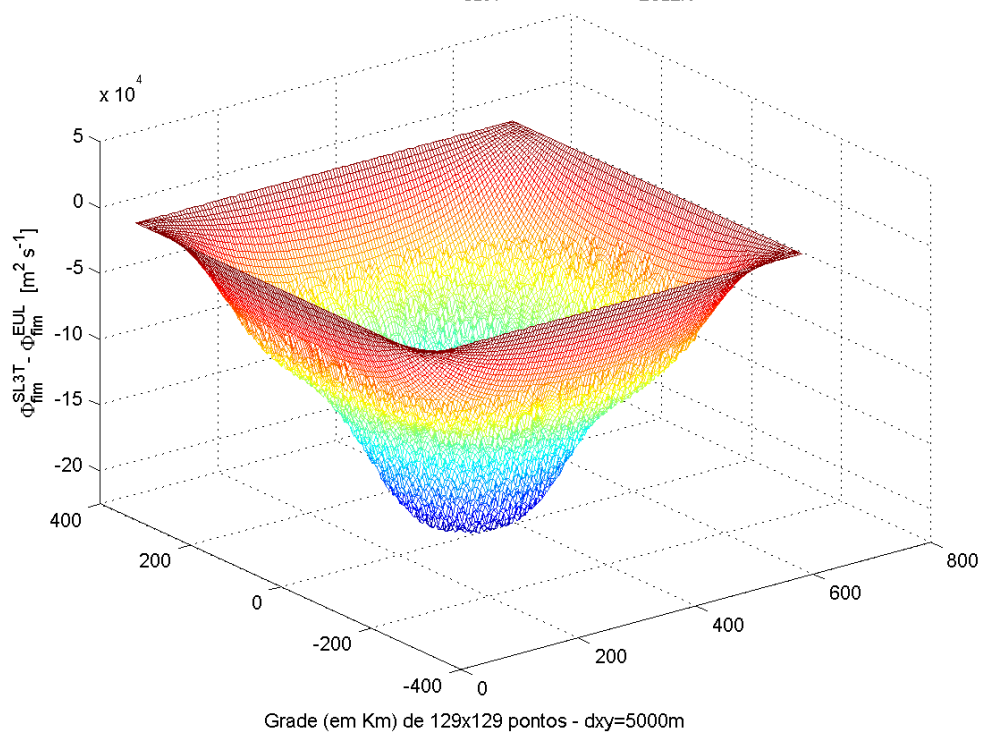


Fig. 5.11 – Diferença entre as soluções SL3T e euleriana nos experimentos
 EXP12 e EXP14.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3T e EULER.
Apos 30.0073 dias. $NCFL_{SL3T}=8.5223$ - $NCFL_{EULER}=0.80962$.

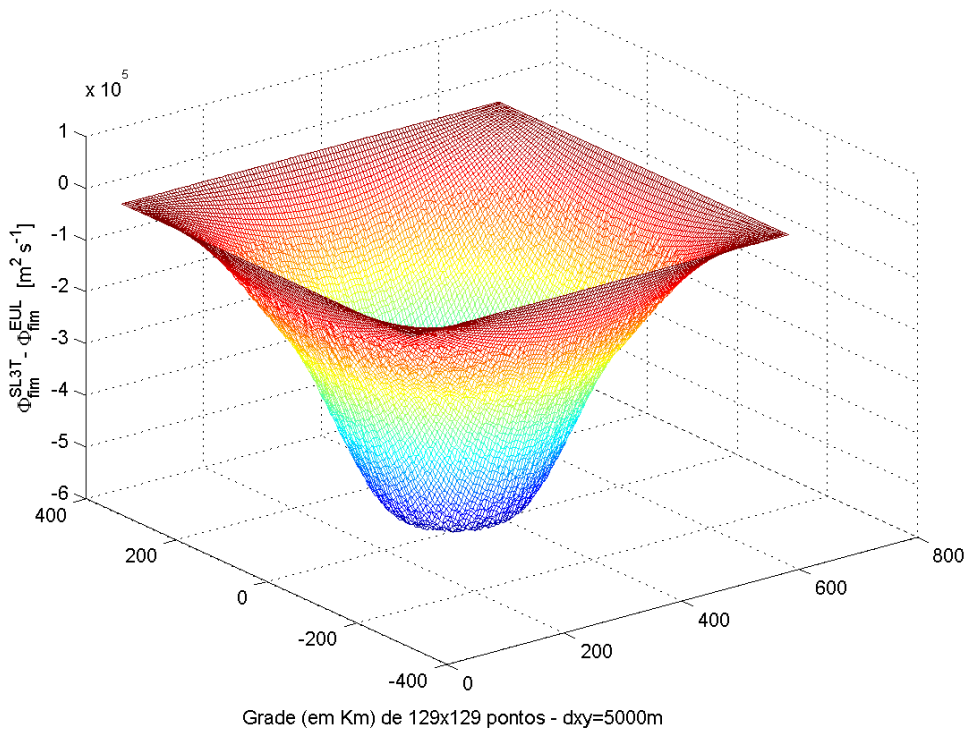
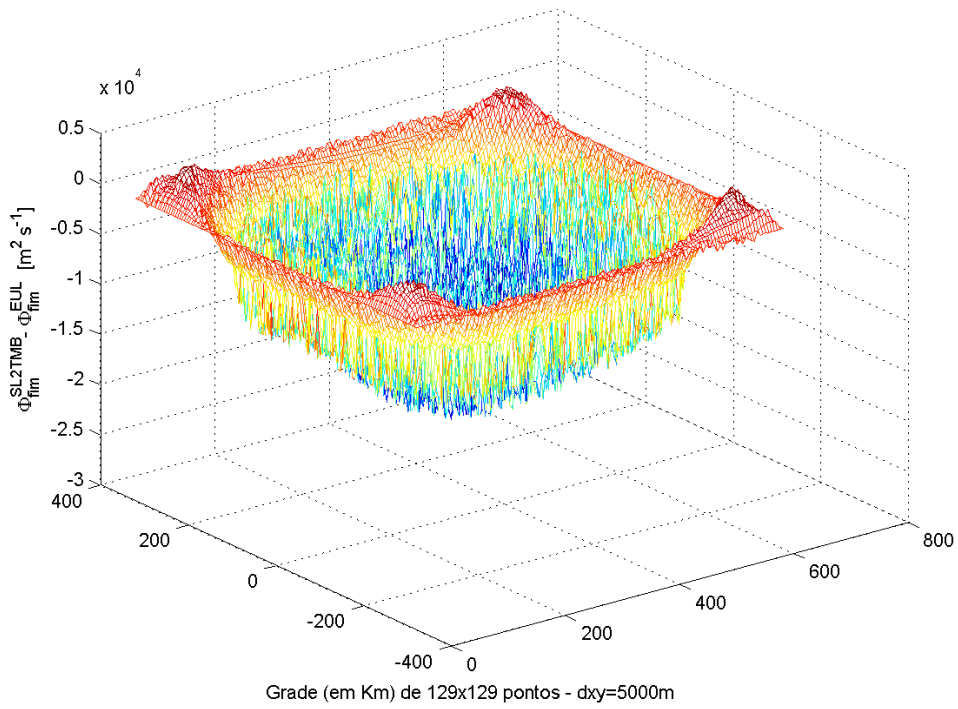


Fig. 5.12 – Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP16

Já nas figuras 5.13 e 5.14, estão representados os mesmos campos, porém em relação ao SL2TMB ($\psi_{SL2TMB} - \psi_{EUL}$) também para os NCFL 1, 4 e 8 após 30 dias de integração.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL2TMB e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL2TMB} = 1.0795$ - $NCFL_{EULER} = 0.80962$.



Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL2TMB e EULER.
 Após 30.0073 dias. $NCFL_{SL2TMB} = 8.5223$ - $NCFL_{EULER} = 0.80962$.

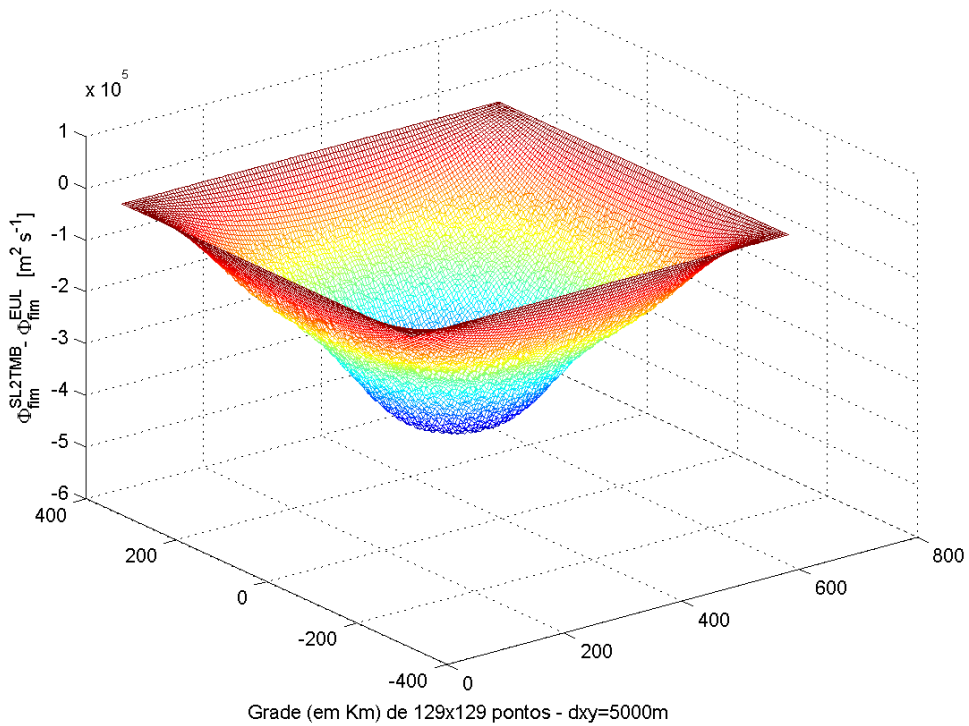


Fig. 5.13 – Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana nos experimentos
 EXP12 e EXP14.

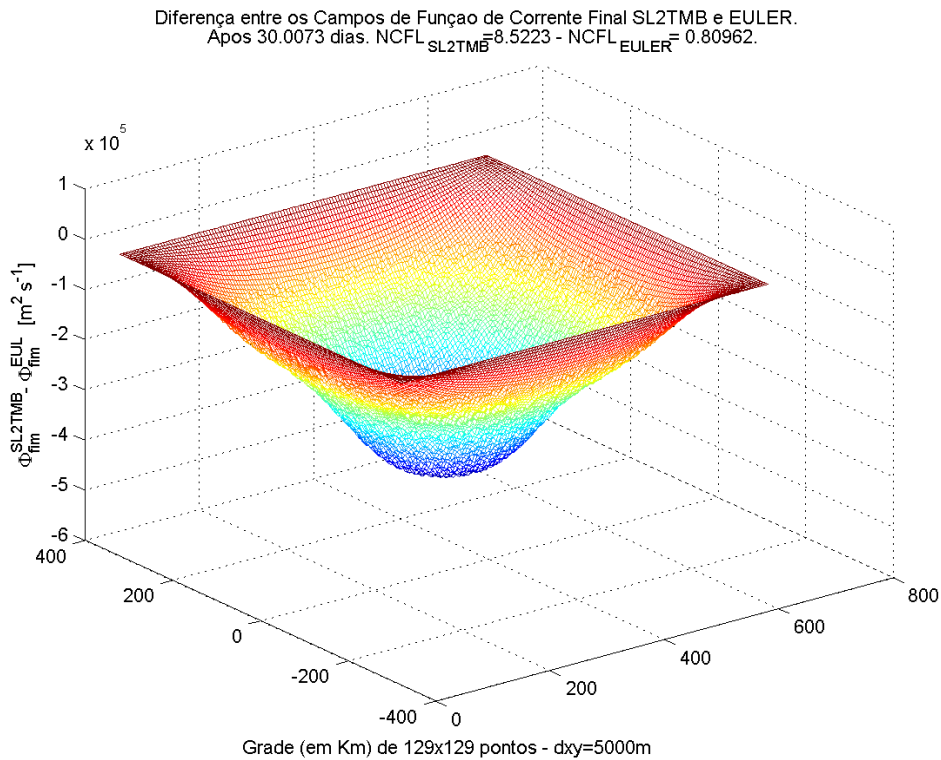
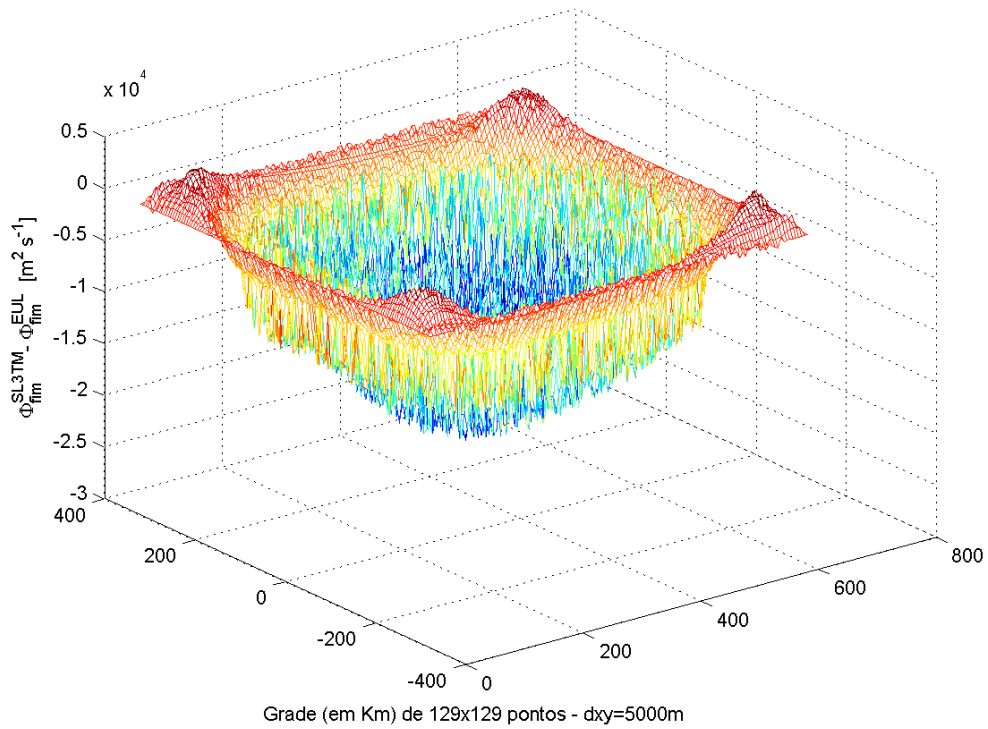


Fig. 5.14 – Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana no experimento EXP16.

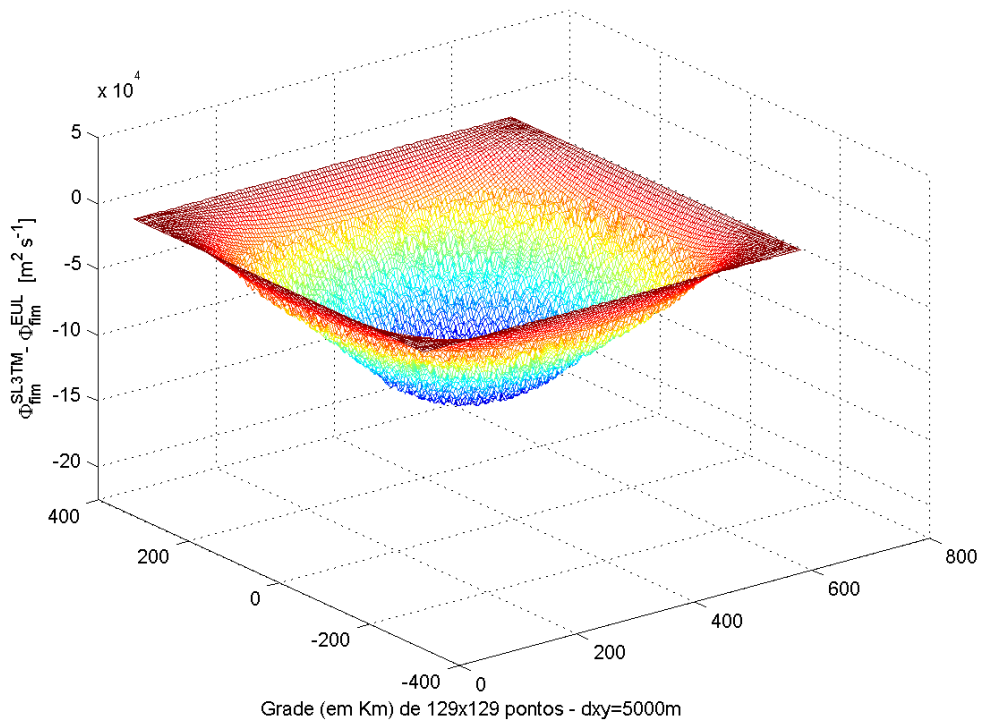
Nas figuras 5.15 e 5.16 encontram-se representadas a diferença entre o campo final de função de corrente da solução SL3TM e euleriana ($\psi_{SL3TM} - \psi_{EUL}$) para os NCFL 1, 4 e 8, respectivamente, após 30 dias de integração.

Comparando-se as figuras 5.11 a 5.16, pode-se verificar que nos esquemas SL2TMB e SL3T também ocorre um afastamento da solução padrão com o aumento do NCFL, contudo este afastamento na amplitude da diferença entre a solução semi-lagrangiana e a padrão é menor no caso do SL3TM.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3TM} = 1.0795$ - $NCFL_{EULER} = 0.80962$.



Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30.0073 dias. $NCFL_{SL3TM} = 4.2611$ - $NCFL_{EULER} = 0.80962$.



*Fig. 5.15 – Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos
 EXP12 e EXP14.*

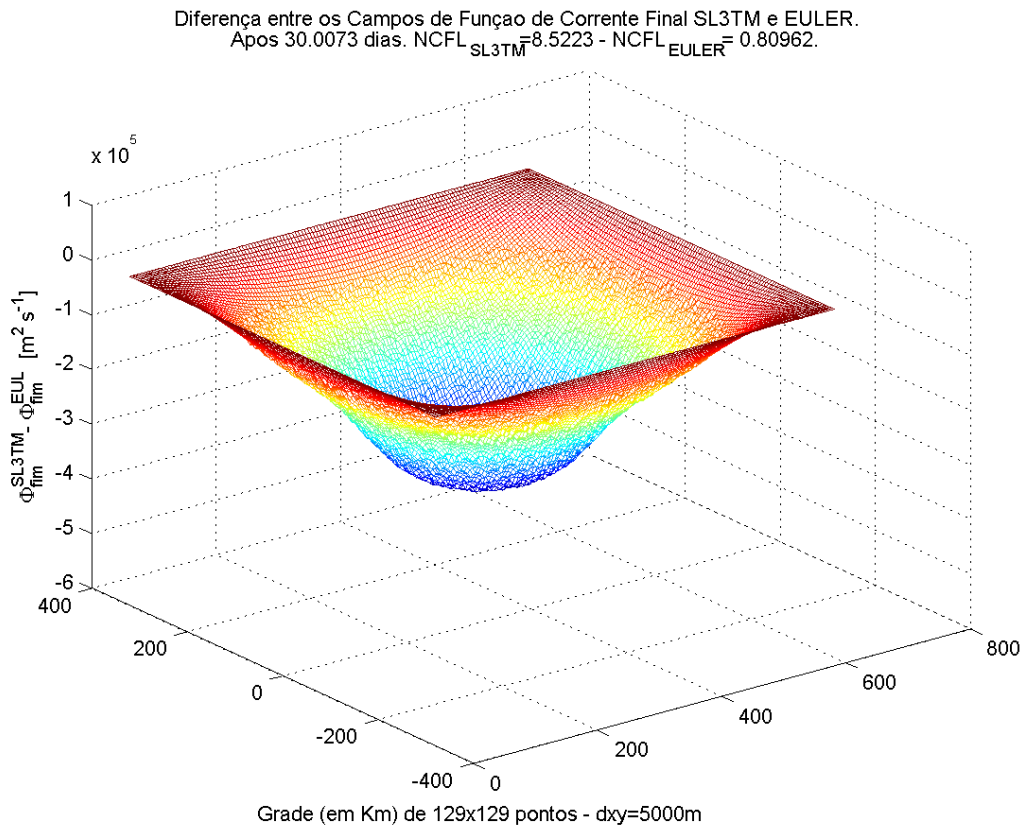


Fig. 5.16 – Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana no experimento EXP16.

O crescimento do erro RMS, definido pelas equações em (5.12), com o aumento do NCFL, pode ser constatado na figura 5.17, que apresenta esse crescimento para 5 e 30 dias de integração. Contudo, é evidente que o esquema SL3TM obtém o melhor desempenho dos três esquemas semi-lagrangeanos.

Os tempos de processamento de todos os experimentos deste caso estão representados no gráfico da figura 5.18, onde verifica-se o maior custo computacional do esquema SL3TM e a desvantagem de utilização do método semi-lagrangeano em escoamentos com baixos NCFL, tendo em vista o maior custo computacional deste método se comparado com o euleriano. Apesar de ser importante destacar a vantagem da aplicação do esquema semi-lagrangeano no que se refere à não ocorrência da instabilidade não-linear.

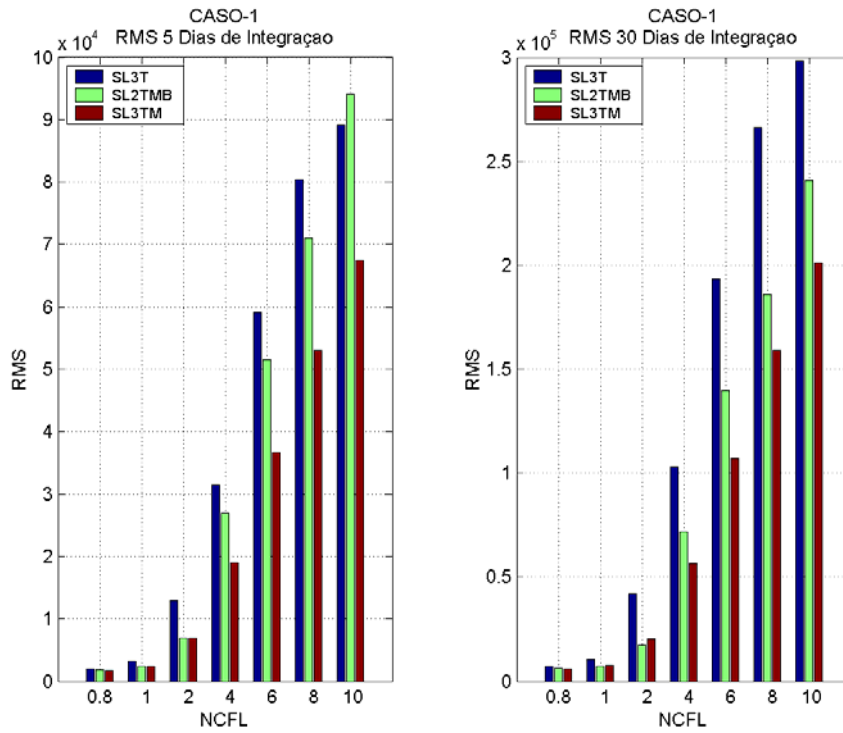


Fig. 5.17 – Crescimento do RMS com o aumento do NCFL para 5 dias e 30 dias de integração.

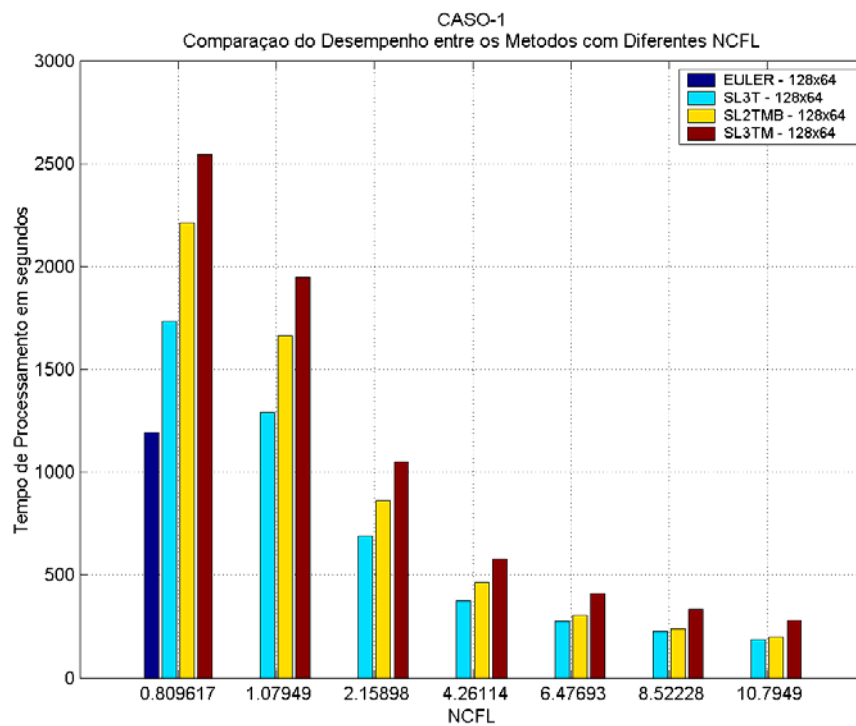


Fig. 5.18 – Comparação entre os tempos de processamento dos Métodos euleriano (somente para NCFL=0.8), SL3T, SL2TMB e SL3TM no CASO 1.

5.2.2 – EXPERIMENTOS DO CASO 2 (EXP21, EXP24, EXP25 e EXP26)

Utilizando-se os parâmetros da tabela 5.2, foram realizados os experimentos do CASO 2 cujos resultados encontram-se transcritos nas tabelas A.5 a A.8 e B.4 a B.6 dos apêndices A e B respectivamente.

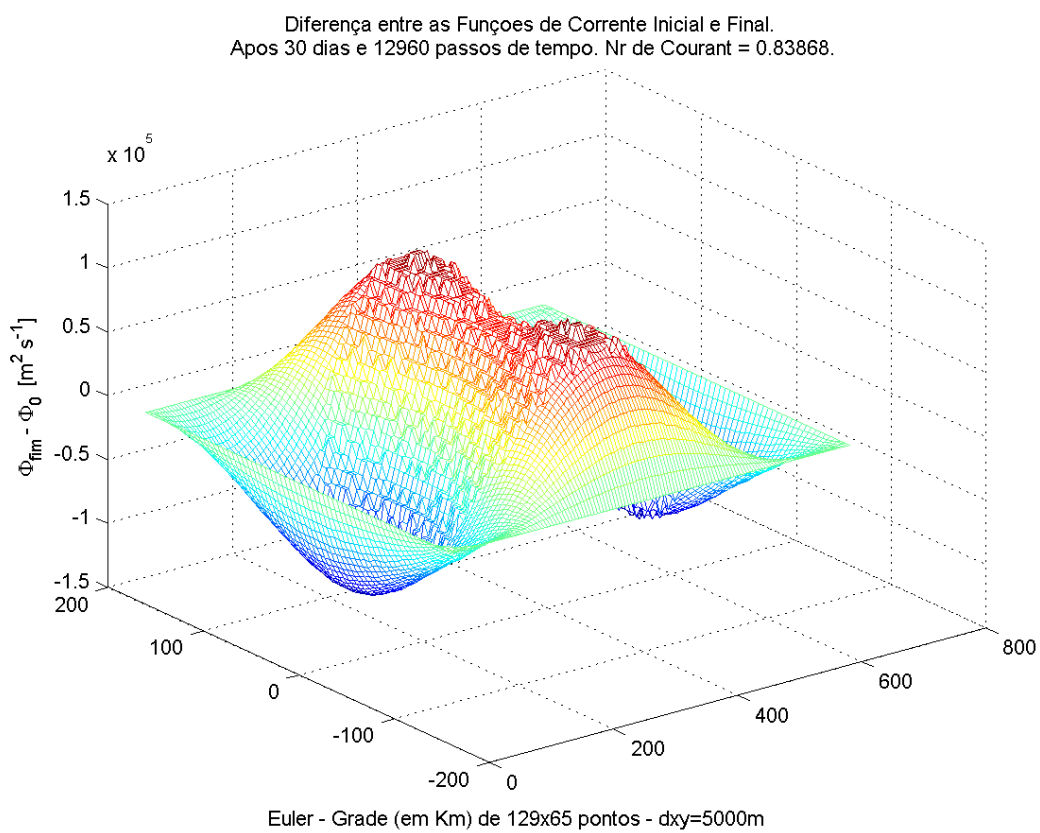
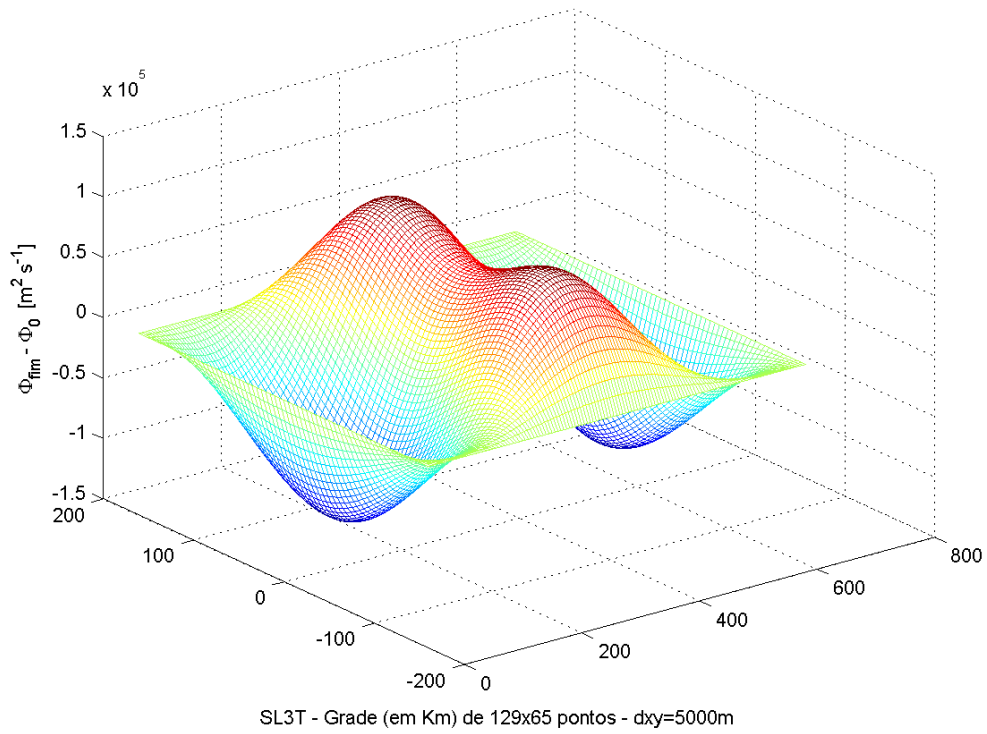


Fig. 5.19 – Diferença entre a função de corrente inicial e final do esquema euleriano, para o CASO 2, com NCFL=0.8 (EXP21).

Diferença entre as Funções de Corrente Inicial e Final.
Apos 30 dias e 12960 passos de tempo. Nr de Courant = 0.83868.



Diferença entre as Funções de Corrente Inicial e Final.
Apos 30 dias e 12960 passos de tempo. Nr de Courant = 0.83868.

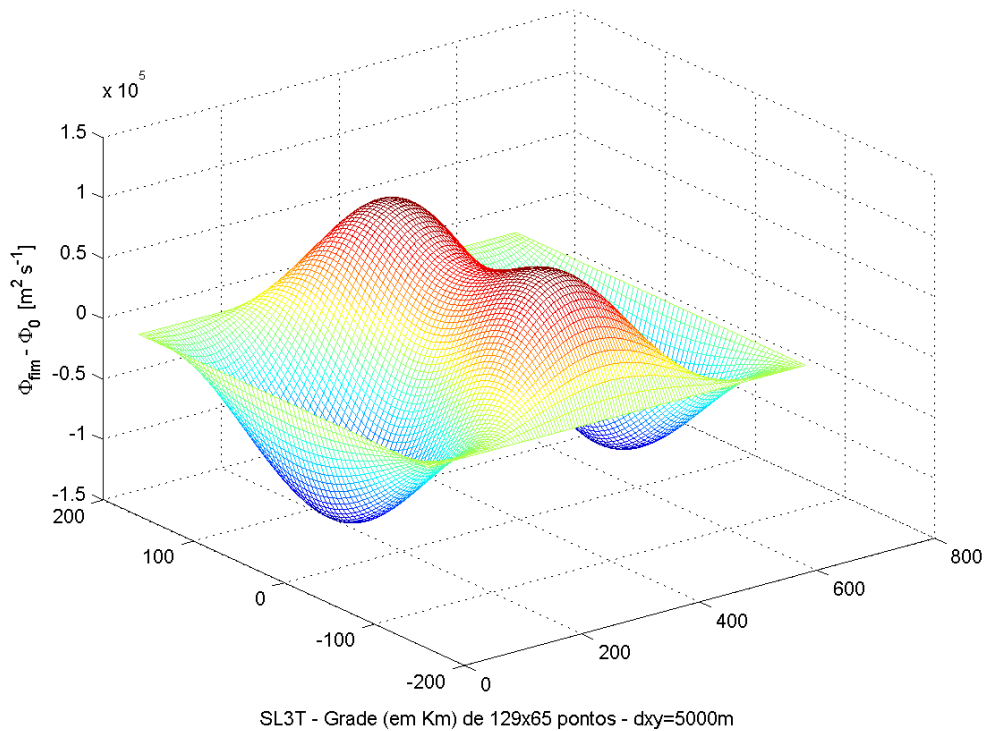


Fig. 5.20 – Diferença entre a função de corrente inicial e final dos esquemas SL3T e SL2TMB, para o CASO 2, com NCFL=0.8 (EXP21).

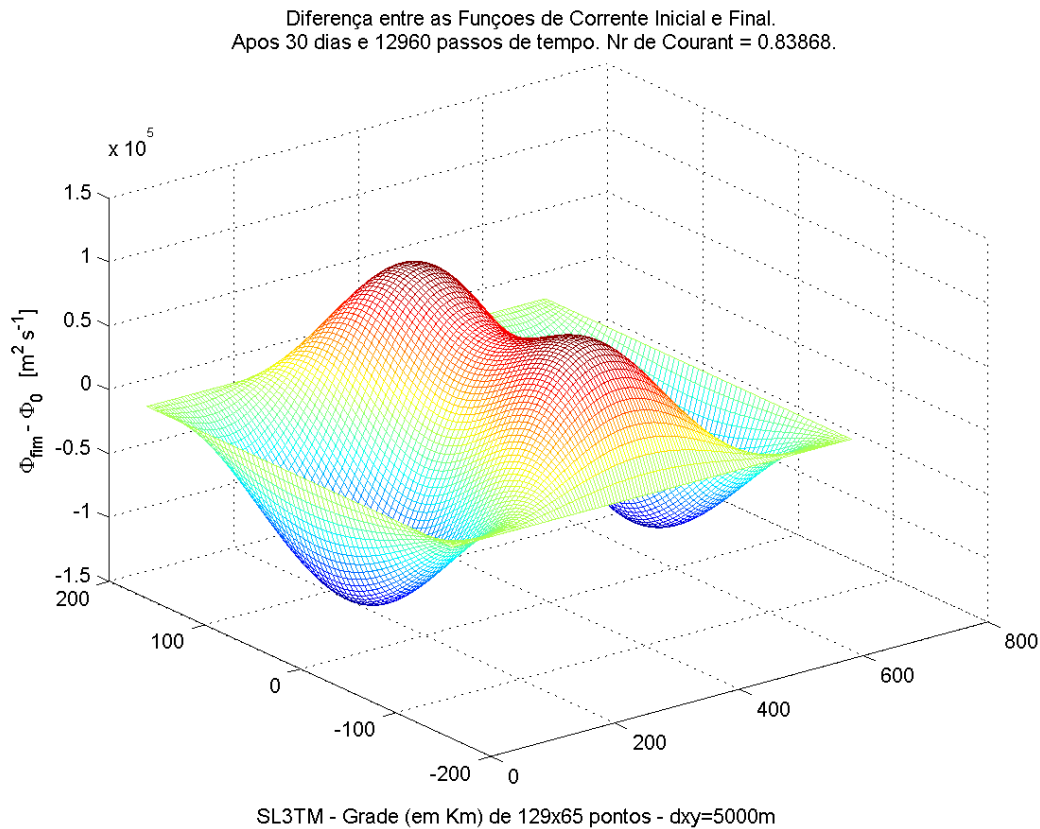


Fig. 5.21 – Diferença entre a função de corrente inicial e final do esquema SL3TM, para o CASO 2, com NCFL=0.8 (EXP21).

Novamente foi constatado que os quatro esquemas convergiram para soluções muito próximas quando utilizado um passo de tempo pequeno, NCFL=0.8. As figuras 5.19 a 5.21 ilustram as diferenças entre o campo final (após 30 dias de integração) e o inicial da função de corrente ($\psi_{fim} - \psi_0$) para cada um dos esquemas na solução com menor número de Courant, e pode ser verificado quão próximas foram as soluções dos diferentes esquemas, uma vez que os gráficos são visivelmente semelhantes, o que ampara a idéia de utilização deste experimento como padrão de comparação.

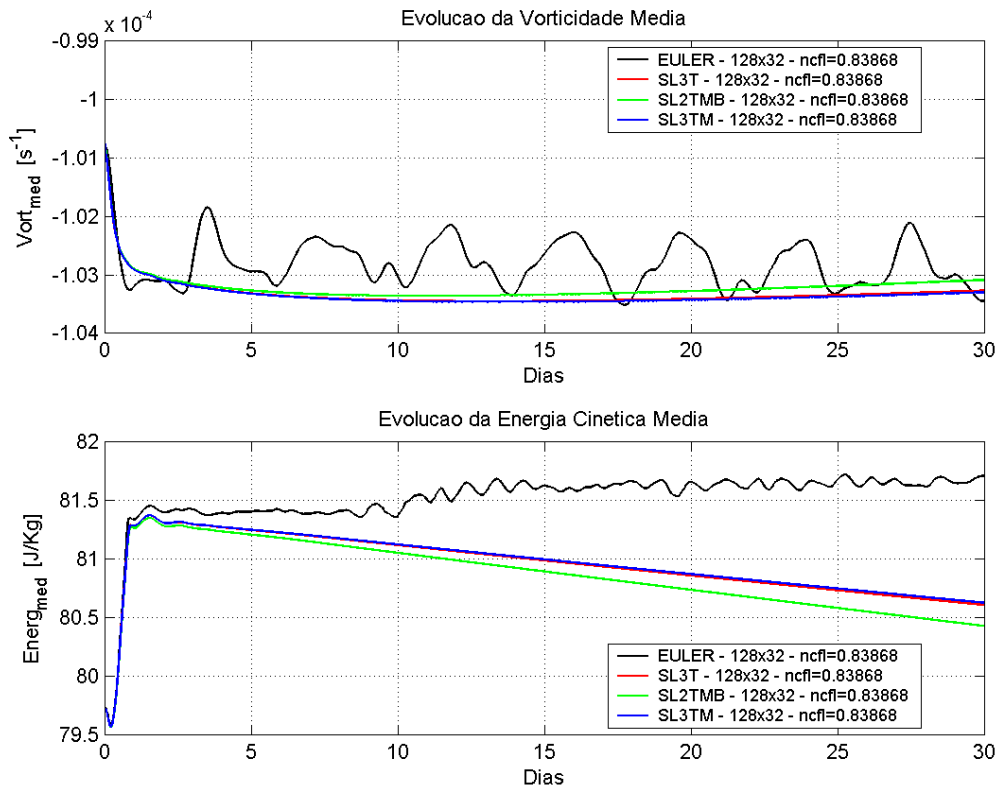


Fig. 5.22 – Evolução da vorticidade média e energia cinética média ao longo da integração (com $NCFL=0.8$) para os 4 esquemas (EXP21).

Os gráficos das figuras 5.22 e 5.23 representam a evolução das grandezas conservativas vorticidade, enstrofia e energia cinética médias e da velocidade máxima definidas em (3.4) e (5.8), para o experimento com o menor número de Courant, confirmando a idéia de que os esquemas convergiram para a mesma solução, ao utilizar-se deste passo de tempo pequeno. Uma vez que após 30 dias de integração verifica-se que o máximo de variação entre as grandezas conservativas, foi em torno de 1% (energia cinética média) e de 2% (enstrofia média).

Vale salientar que observando as figuras 5.19 a 5.23 verifica-se que as soluções semi-lagrangeanas apresentam menos ruído do que a euleriana.

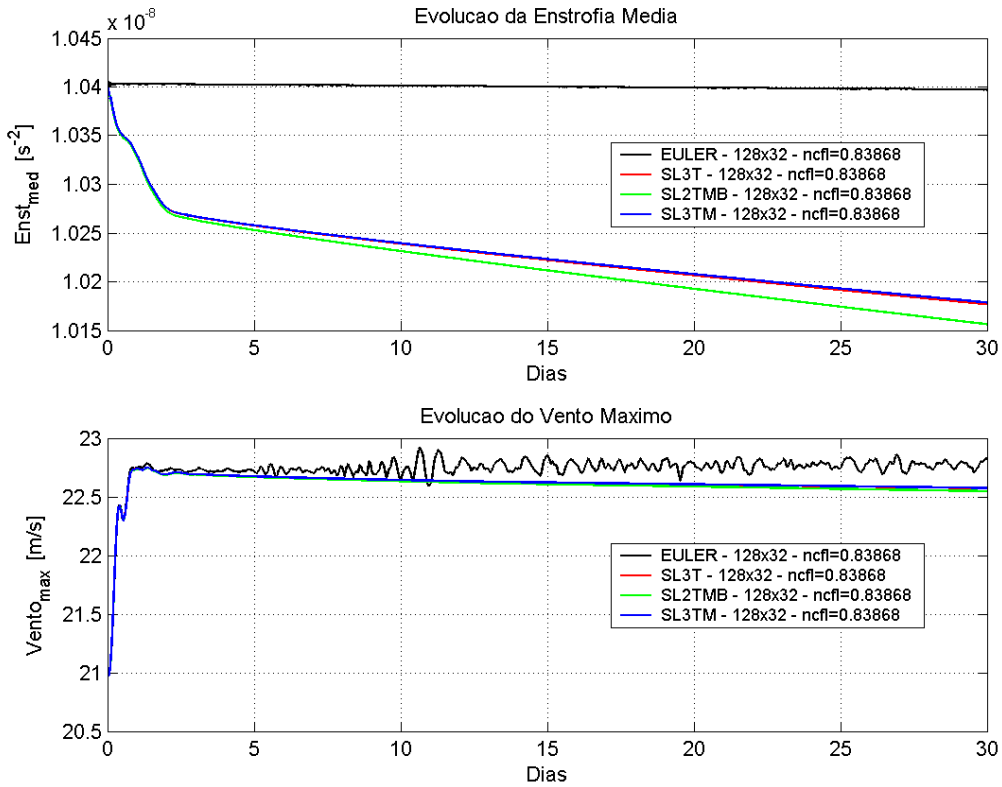


Fig. 5.23 – Evolução da enstrofia média e velocidade máxima ao longo da integração (com $NCFL=0.8$) para os 4 esquemas (EXP21).

As figuras 5.24 e 5.25 representam a diferença entre o campo final de função de corrente da solução SL3T e euleriana ($\psi_{SL3T} - \psi_{EUL}$) para os NCFL 4, 6 e 8, após 30 dias de integração. Nos gráficos das figuras 5.26 e 5.27 estão representados estes mesmos campos para o esquema SL2TMB ($\psi_{SL2TMB} - \psi_{EUL}$), também para os NCFL 4, 6 e 8.

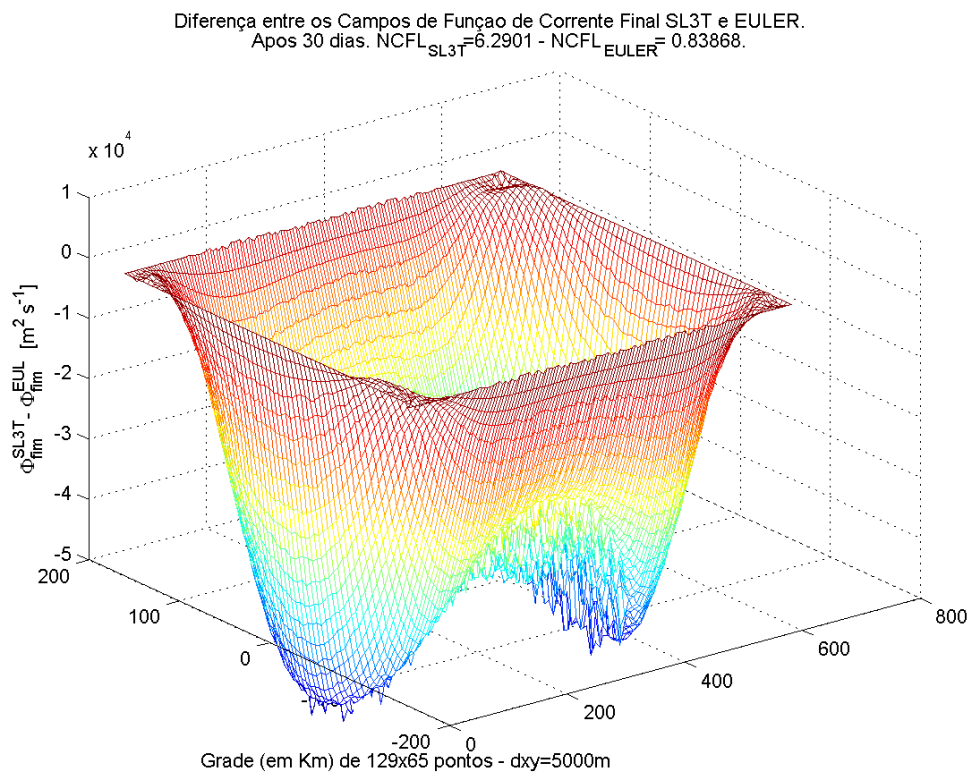
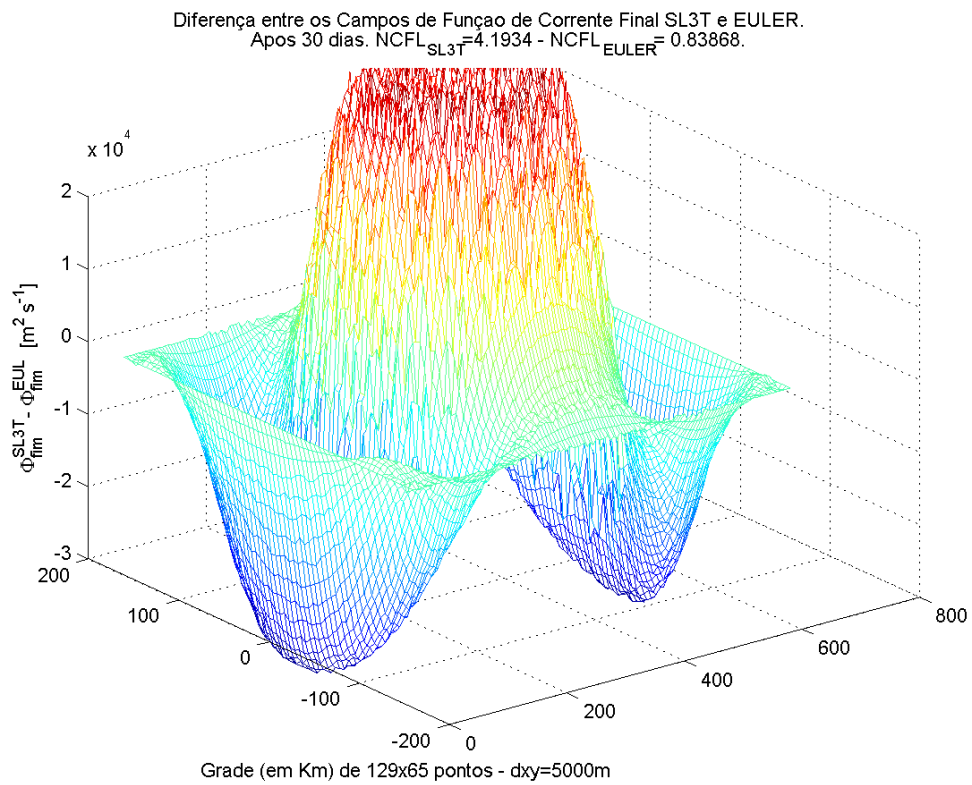


Fig. 5.24 – Diferença entre as soluções SL3T e euleriana nos experimentos
 EXP24 e EXP25.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3T e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3T} = 8.3868$ - $NCFL_{EULER} = 0.83868$.

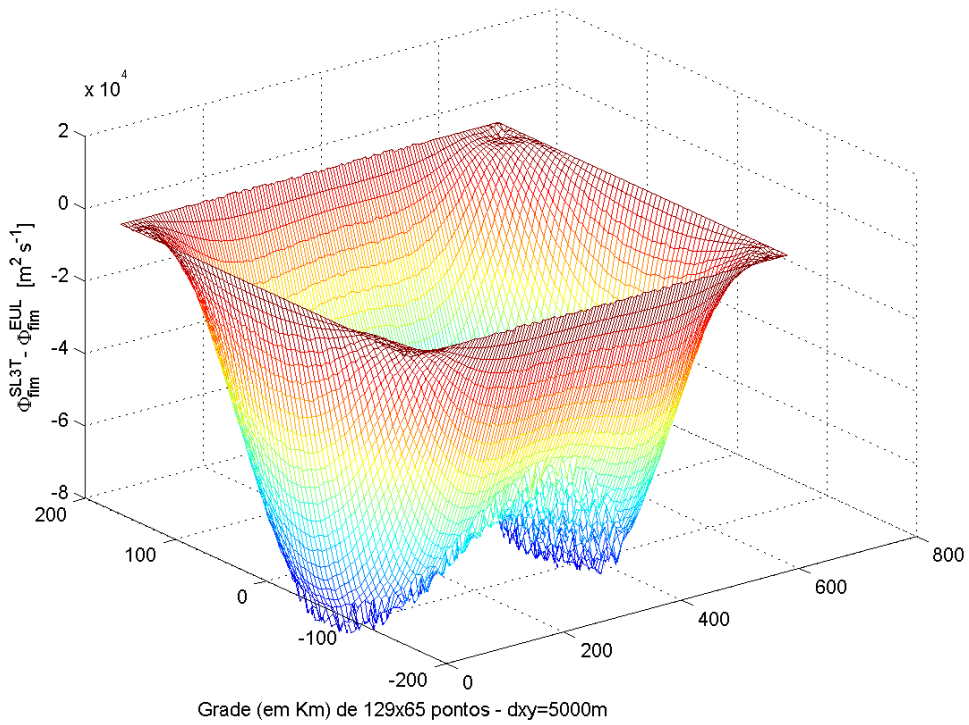


Fig. 5.25 – Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP26.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL2TMB e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL2TMB} = 4.1934$ - $NCFL_{EULER} = 0.83868$.

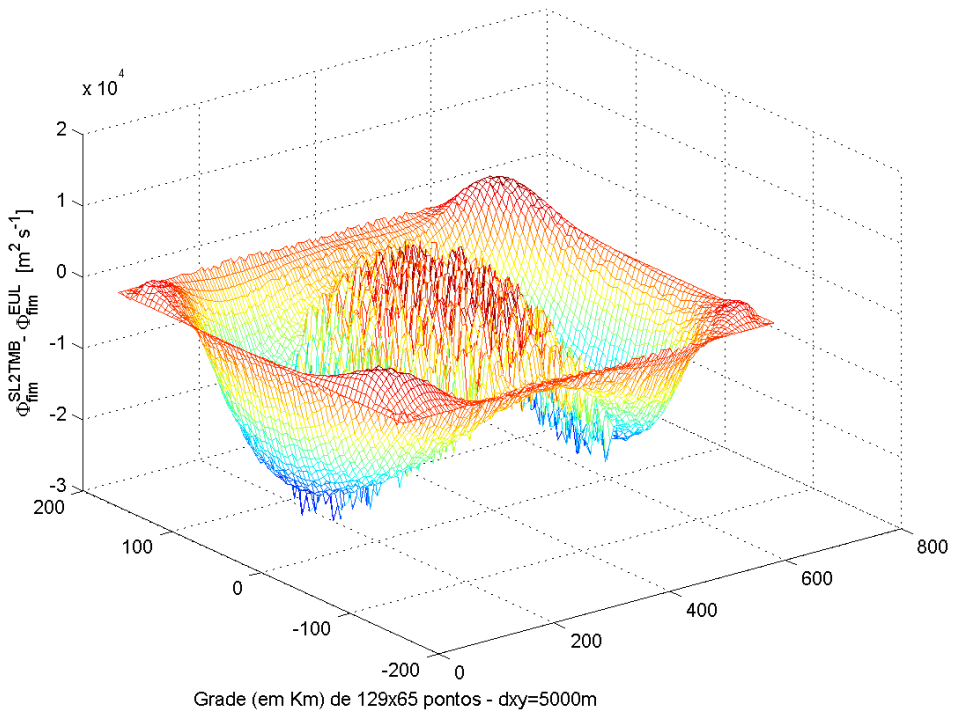


Fig. 5.26 – Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana no experimento EXP24.

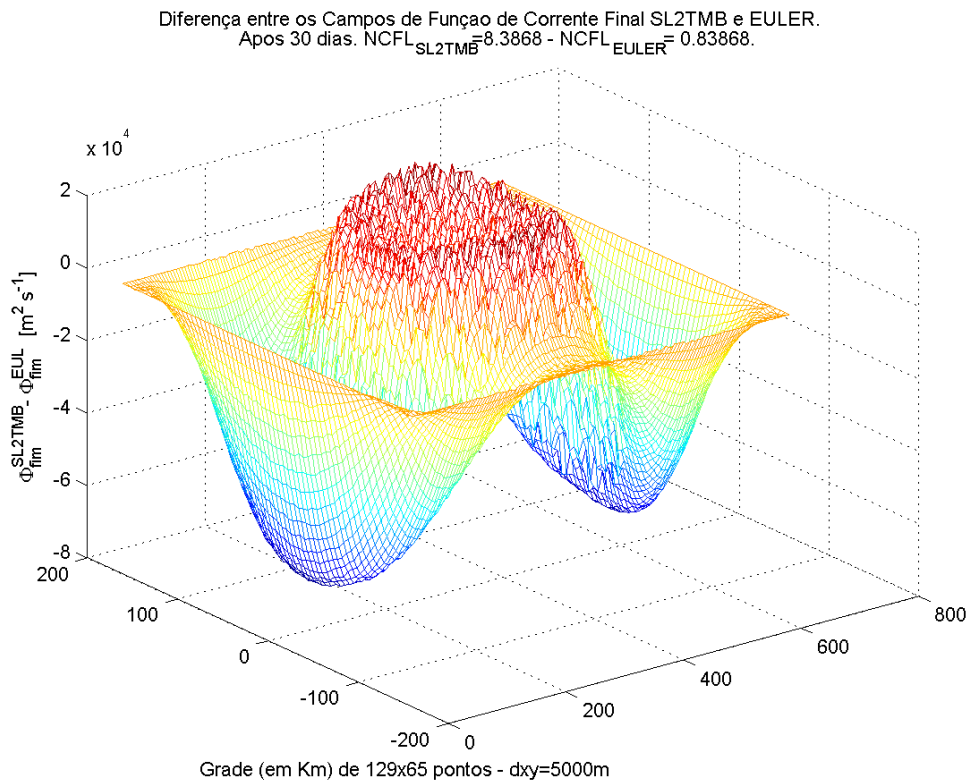
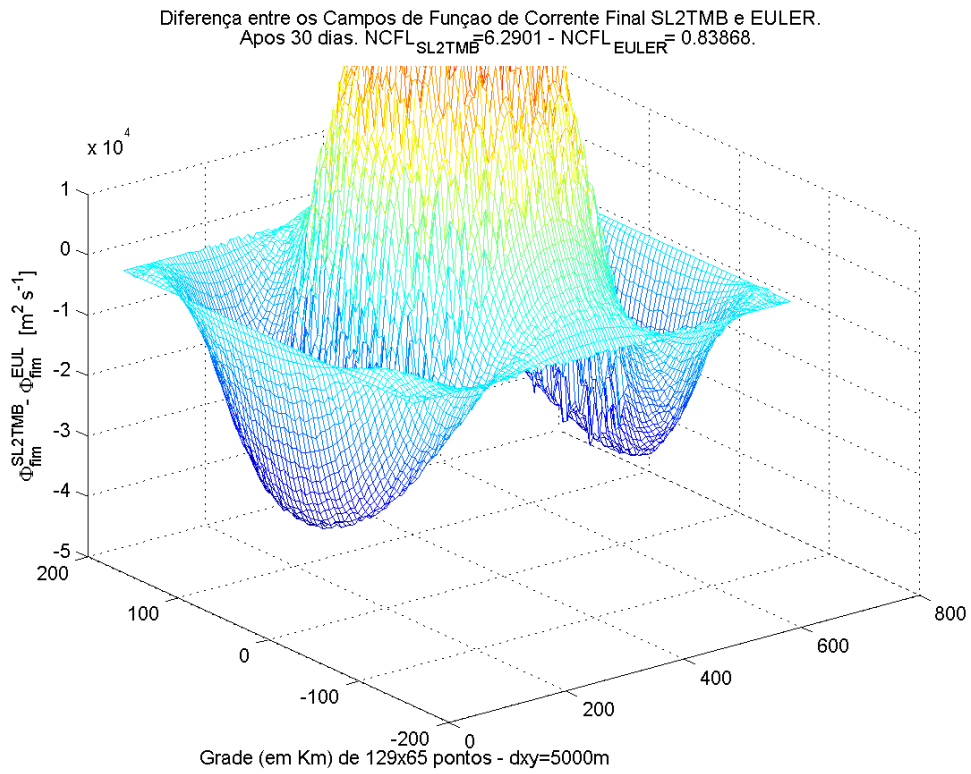


Fig. 5.27 – Diferença entre as soluções SL2TMB e euleriana nos experimentos
 EXP25 e EXP26.

Nos gráficos das figuras 5.27 e 5.28 estão representados a diferença entre os campos finais de função de corrente das soluções SL3TM e euleriana ($\psi_{SL3TM} - \psi_{EUL}$), novamente para os NCFL 4, 6 e 8, após 30 dias de integração.

Analisando as figuras 5.24 a 5.29, verifica-se que o esquema SL3TM obteve melhores valores que os outros dois esquemas semi-lagrangiano, mostrando-se menos sensível à variação do NCFL pois a diferença ($\psi_{EUL} - \psi_{SL3TM}$) é minimizada, ao passo que enquanto o esquema SL3T amplificou os valores próximos à fronteira com o aumento do NCFL, o esquema SL2TMB amplificou próximo ao centro do domínio.

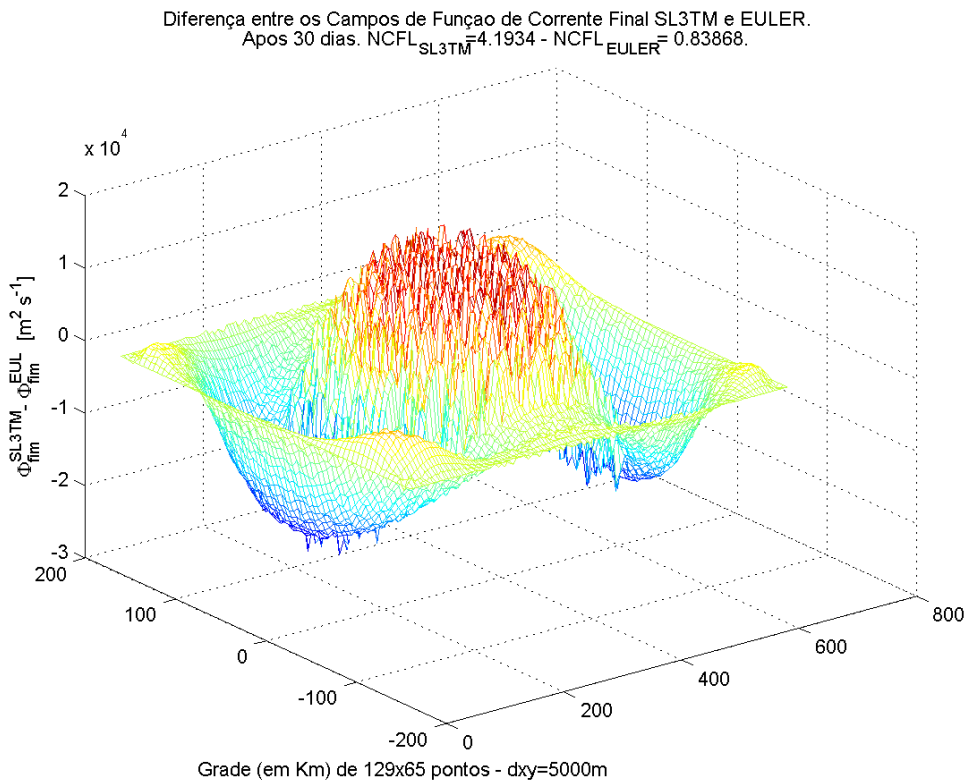
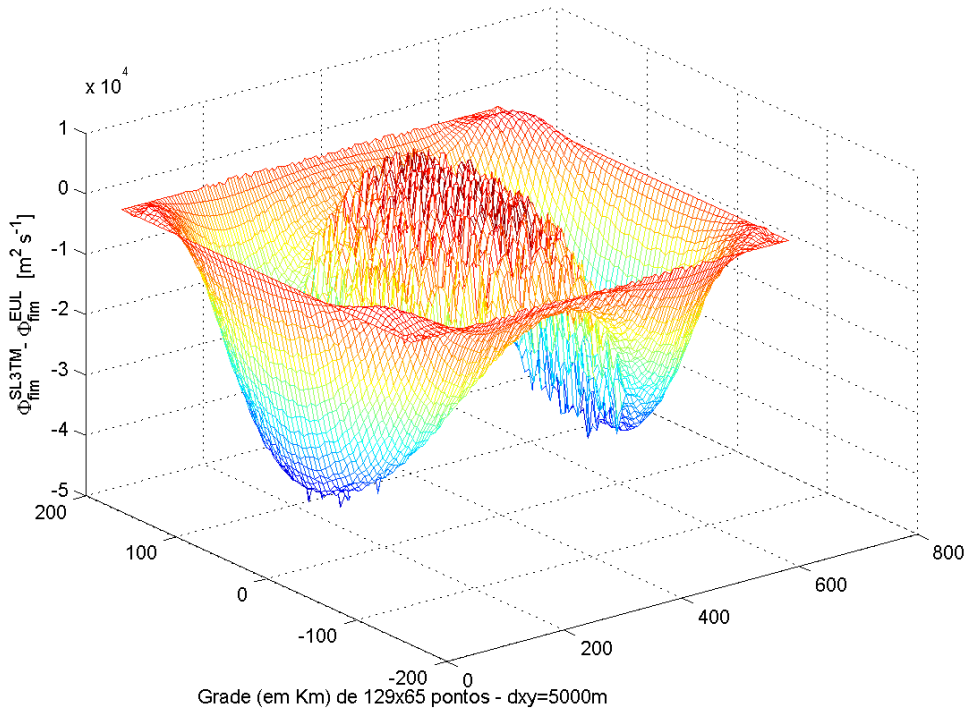


Fig. 5.28 – Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana no experimento EXP24.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3TM} = 6.2901$ - $NCFL_{EULER} = 0.83868$.



Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3TM} = 8.3868$ - $NCFL_{EULER} = 0.83868$.

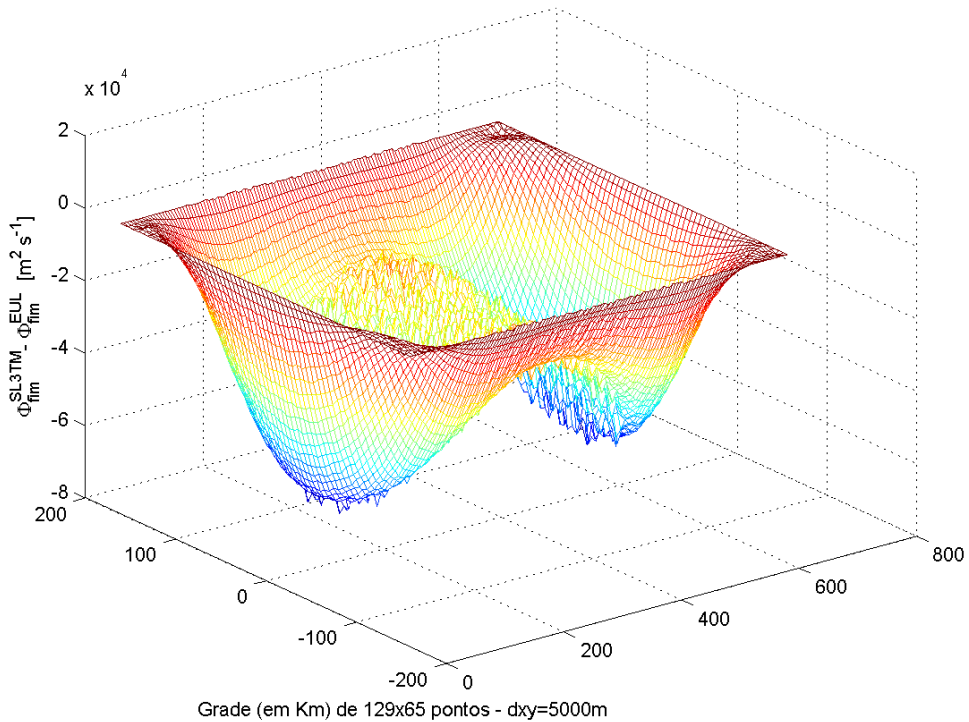


Fig. 5.29 – Diferença entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos EXP25 e EXP26.

Os gráficos das figuras 5.30 a 5.32 que descrevem a evolução da enstrofia e energia cinética médias para os NCFL 4, 6 e 8 para os três esquemas semi-lagrangianos, demonstram que inicialmente, com NCFL 4, a solução do esquema SL3T apresenta um aumento das grandezas \overline{Ec} e $\overline{\xi}$, passando a atenuar estas grandezas com o aumento do NCFL para 6 e 8. Paralelamente, verifica-se que o esquema SL2TMB apresentou um crescimento destas grandezas médias com o aumento do NCFL (6 e 8).

A solução do esquema SL3TM mostrou-se mais conservativa e menos sensível em relação ao aumento do NCFL, apresentando assim, o melhor resultado.

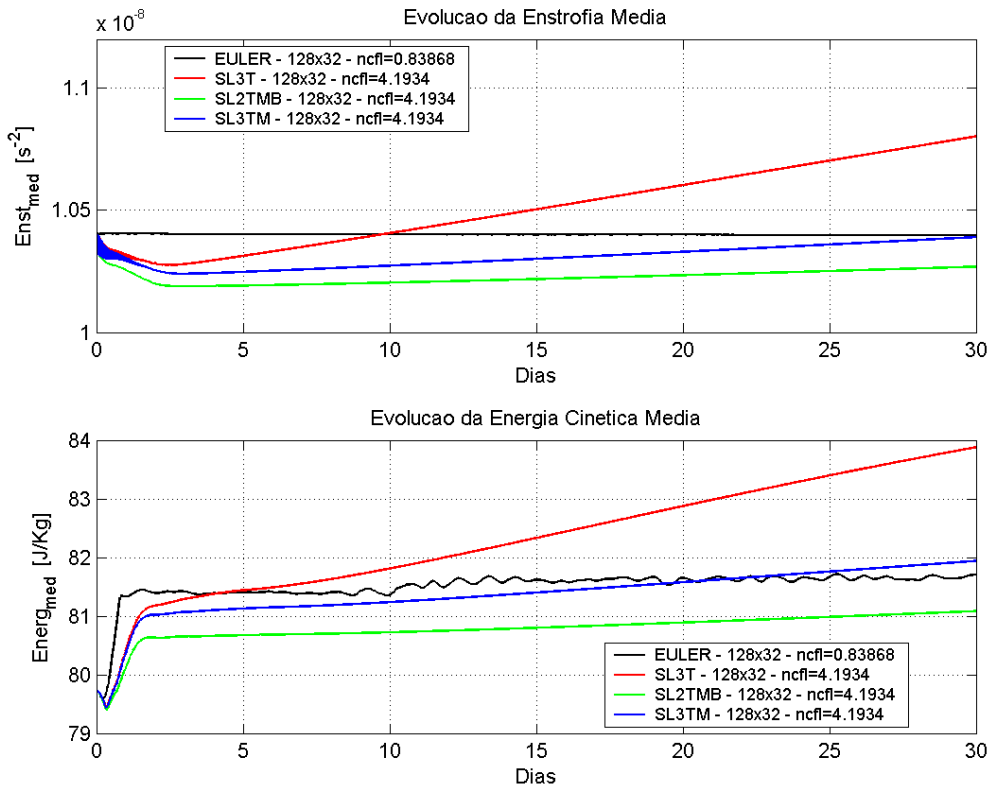


Fig. 5.30 – Evolução da enstrofia $\overline{\xi}$ (acima) e da energia cinética \overline{Ec} (abaixo) ao longo da integração, com NCFL= 4.

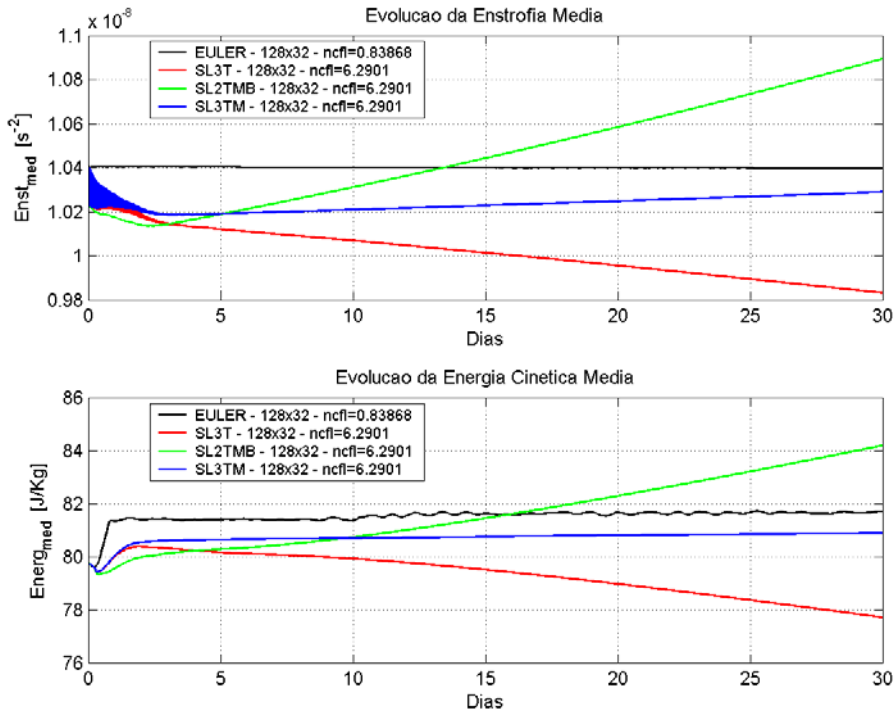


Fig. 5.31 – Evolução da enstrofia $\bar{\xi}$ (acima) e da energia cinética \bar{Ec} (abaixo) ao longo da integração, com $NCFL=6$.

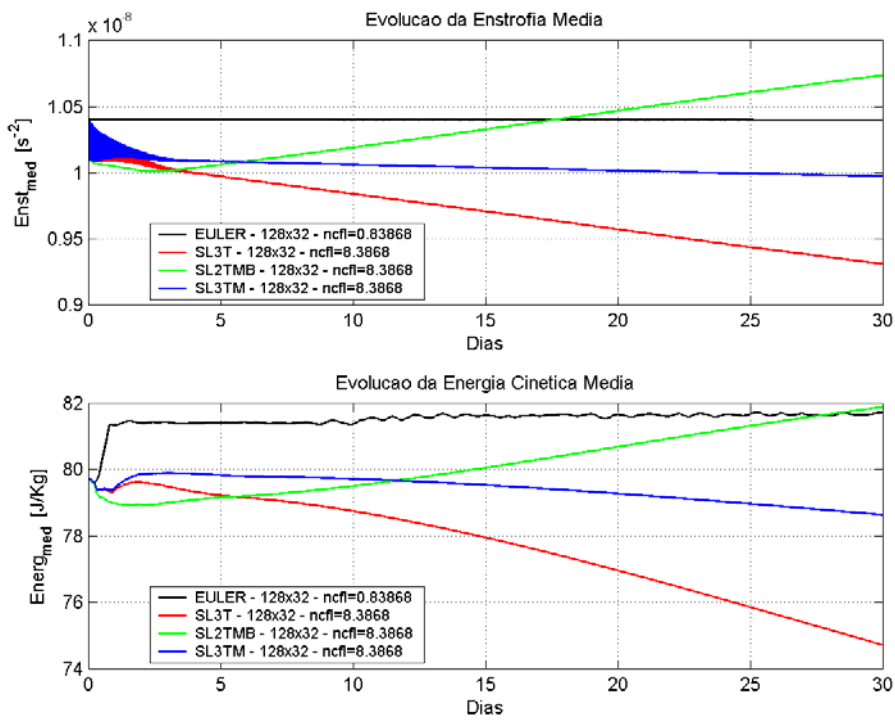


Fig. 5.32 – Evolução da enstrofia $\bar{\xi}$ (acima) e da energia cinética \bar{Ec} (abaixo) ao longo da integração, com $NCFL=8$.

A figura 5.33 descreve o crescimento com o aumento do NCFL, da razão da soma dos quadrados (5.10) e do erro RMS (5.12) do campo de função de corrente após 30 dias de integração. Apesar de o primeiro parâmetro apresentar certa constância, o segundo mostra que, a partir do NCFL 4, o erro RMS do SL3T cresceu demasiadamente, tendo o do SL2TMB crescido mais acentuadamente a partir do NCFL 6 e o erro RMS do SL3TM a partir do NCFL 8.

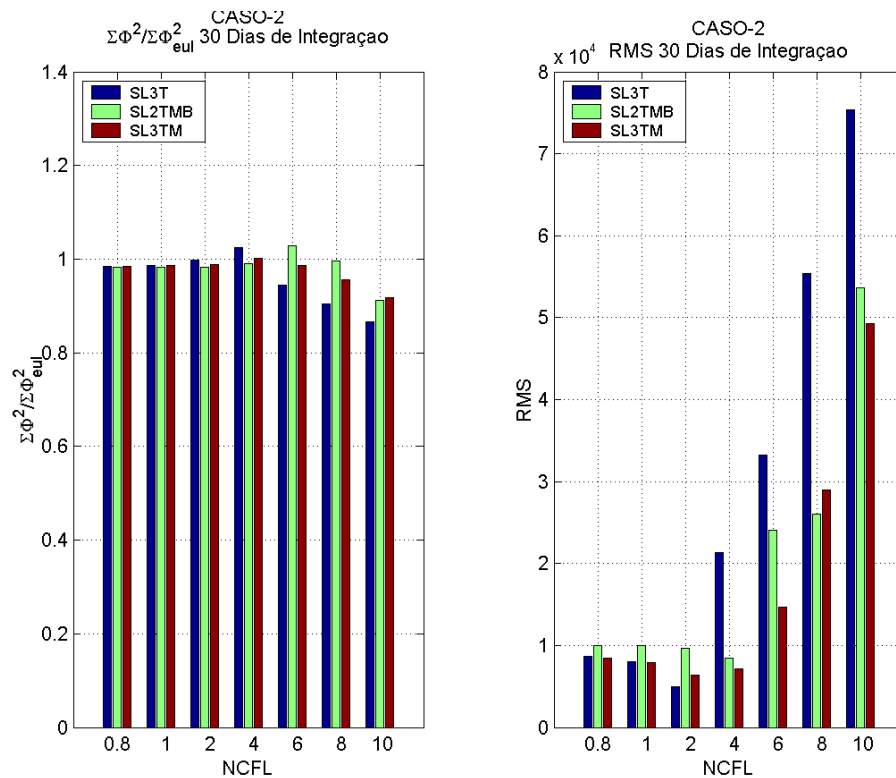


Fig. 5.33 - Evolução do $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$ e do erro RMS com o aumento do NCFL para 30 dias de integração

O gráfico da figura 5.34, que discrimina os tempos de processamento de cada um dos experimentos deste caso, mostra mais uma vez que o esquema SL3TM tem custo computacional pouco maior que os demais semi-lagrangeanos o que era de se esperar tendo em vista que a quebra da trajetória neste esquema aumenta o número de

interpolações efetuadas. Entretanto já para o $NCFL=1$ o SL3TM apresenta um tempo de processamento menor do que o euleriano.

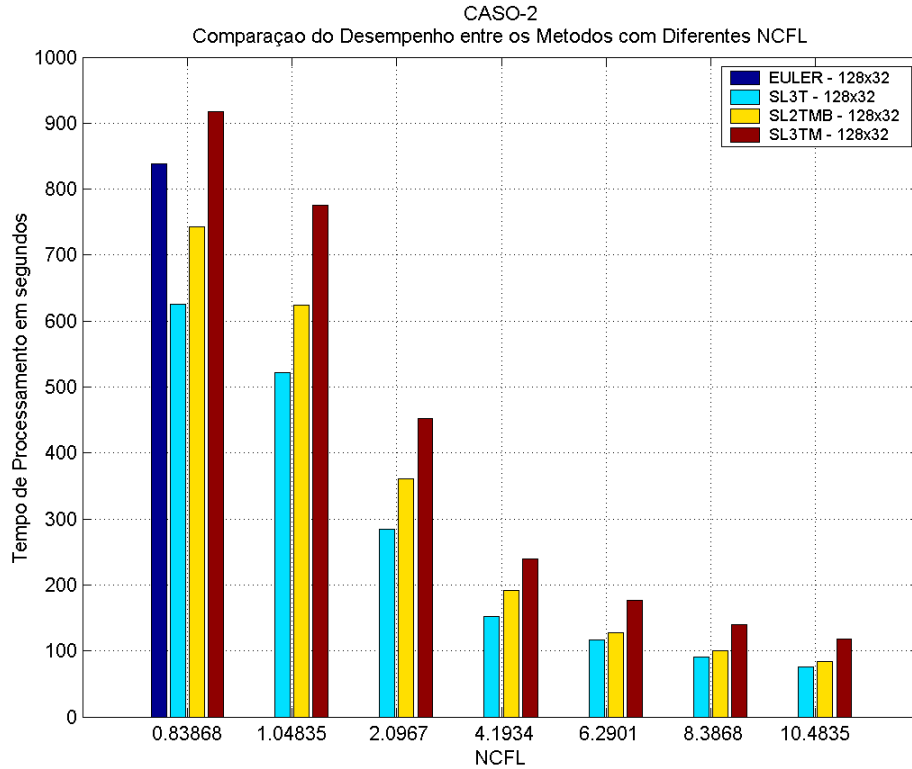


Fig. 5.34 – Comparação entre os tempos de processamento dos métodos euleriano (somente para $NCFL=0.8$), SL3T, SL2TMB e SL3TM no CASO 2

5.2.3 – EXPERIMENTOS DO CASO 3 (EXP31, EXP34 E EXP36)

Aumentando-se ainda mais a curvatura do campo inicial, foram realizados, a partir dos parâmetros da tabela 5.3, os experimentos pertinentes ao CASO 3; este é o caso mais crítico, pois é o de maior curvatura. Nos apêndices A e B tabelas A.9 a A.12 e B.7 a B.9 estão transcritos os resultados destes experimentos.

Na figura 5.35 encontra-se a representação em curvas de nível do campo final de função de corrente para os esquemas euleriano e semi-lagrangeanos.

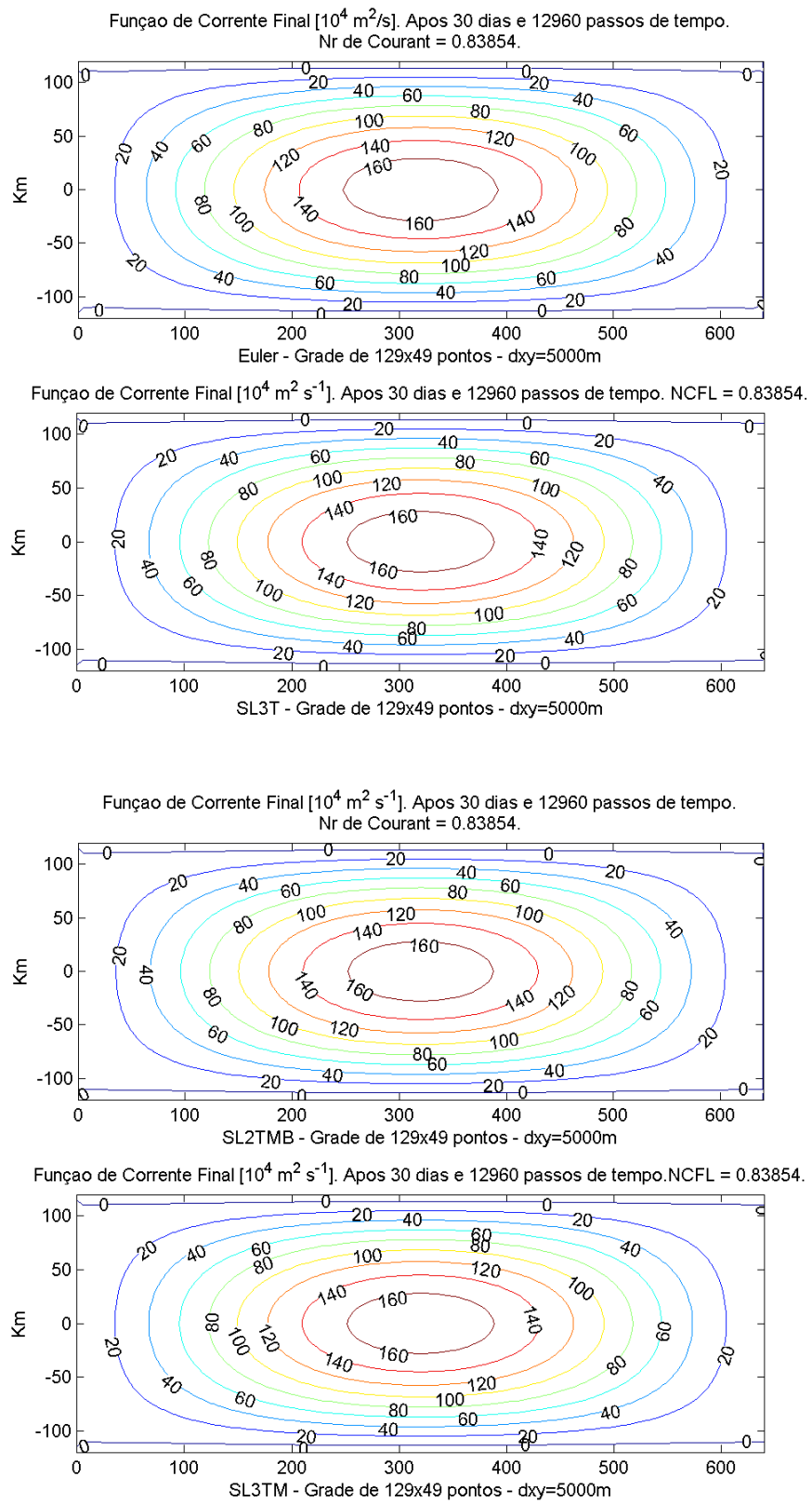


Fig 5.35 – Solução euleriana, SL3T, SL2TMB e SL3TM para o CASO3 com o menor passo de tempo (NCFL=0.8).

Nas figuras 5.36 e 5.37 estão representados as diferenças entre o campo final de função de corrente das soluções semi-lagrangeanas e euleriana para este caso com o menor passo de tempo $NCFL=0.8$.

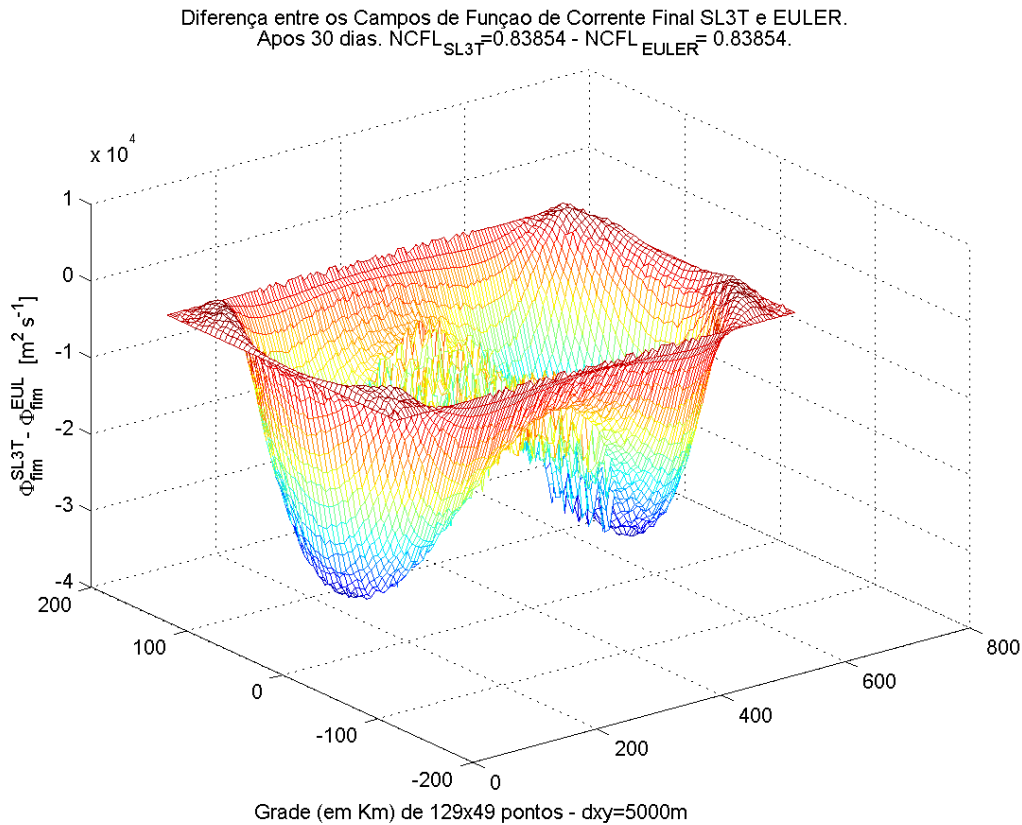
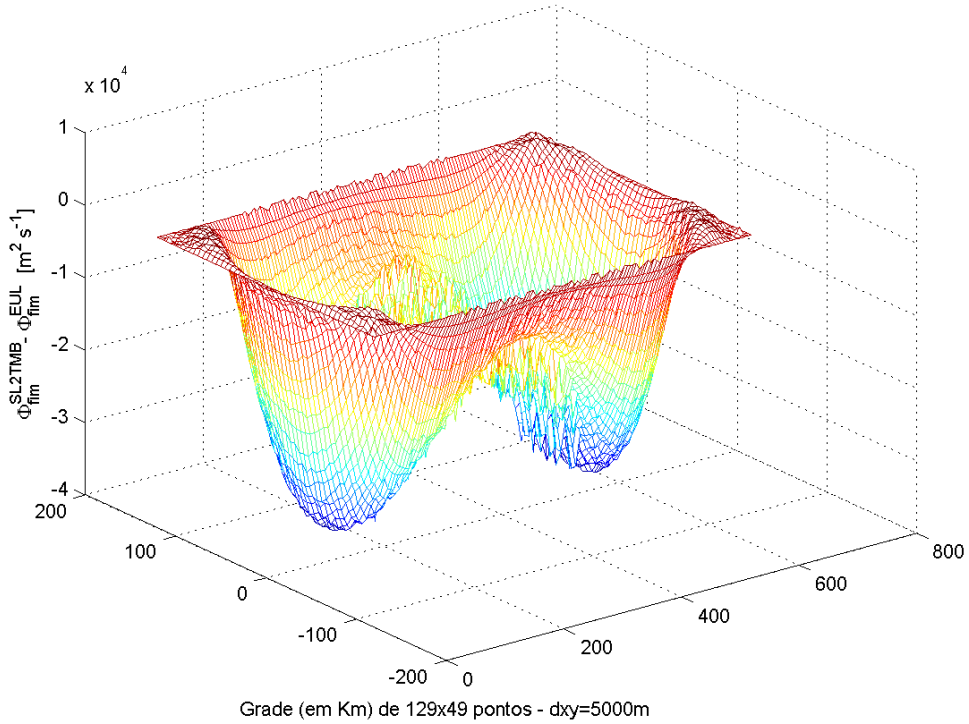


Fig. 5.36 – Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP31.

Analisando as figuras 5.36 a 5.37, vê-se que os esquemas semi-lagrangeanos convergem para a mesma solução uma vez que as representações dos campos diferença entre cada solução semi-lagrangeana e a solução euleriana são semelhantes. Na figura 5.35, a fim de endossar a afirmação anterior, representou-se o campo final de função de corrente de cada uma das soluções semi-lagrangeanas e da solução euleriana, sendo possível certificar que os três esquemas obtiveram campos finais bem semelhantes à solução euleriana. Portanto, tal como nos casos anteriores, a solução euleriana com $NCFL=0.8$ é adotada como referência de comparação.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL2TMB e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL2TMB} = 0.83854$ - $NCFL_{EULER} = 0.83854$.



Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3TM} = 0.83854$ - $NCFL_{EULER} = 0.83854$.

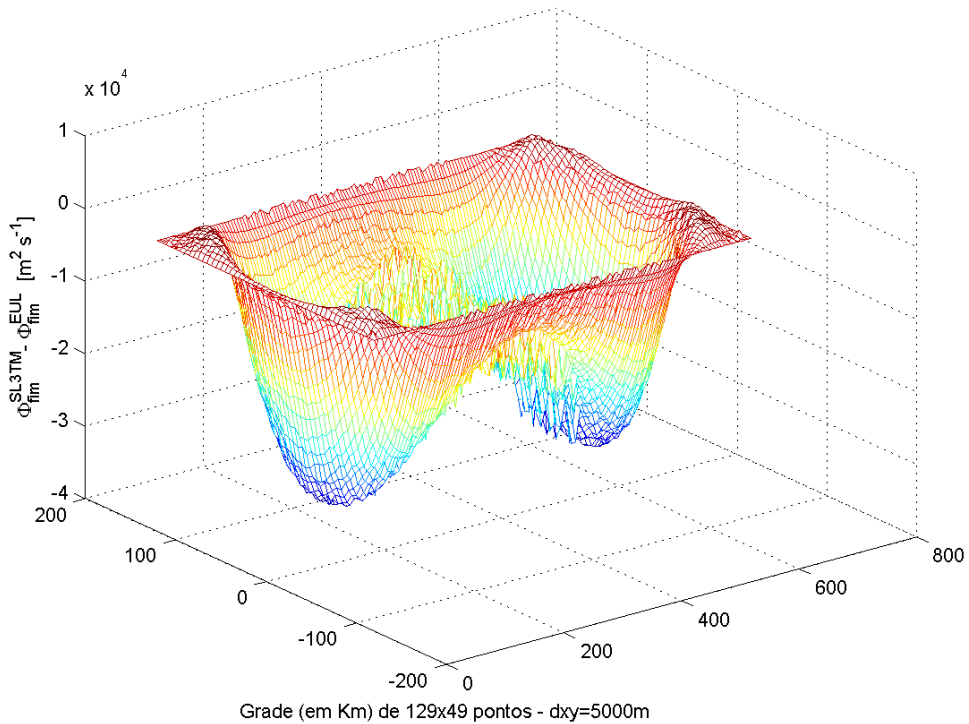


Fig. 5.37 – Diferença entre os campos finais de função de corrente das soluções SL2TM e SL3TM, e euleriana no experimento EXP31 ($NCFL=0.8$).

A figura 5.38 descreve o campo formado pela diferença entre a função de corrente final da solução semi-lagrangeana pelo esquema SL3T e a função de corrente final da solução euleriana ($\psi_{SL3T} - \psi_{EUL}$) para o NCFL 4. A figura 5.39 descreve, o mesmo campo diferença entre funções de corrente para a solução pelo esquema SL2TMB ($\psi_{SL2TMB} - \psi_{EUL}$) com NCFL 6.

Pela comparação das figuras 5.38 e 5.39, com a figura 5.40, que representa o campo diferença entre a função de corrente final do esquema SL3TM e a função de corrente final do esquema euleriano ($\psi_{SL3TM} - \psi_{EUL}$), nos experimentos EXP34 e EXP36 (NCFL 4 e 8), pode-se constatar o crescimento da solução SL3T já no NCFL=4 e o crescimento da solução SL2TMB a partir do NCFL=8, enquanto a solução pelo esquema SL3TM mantém-se estável.

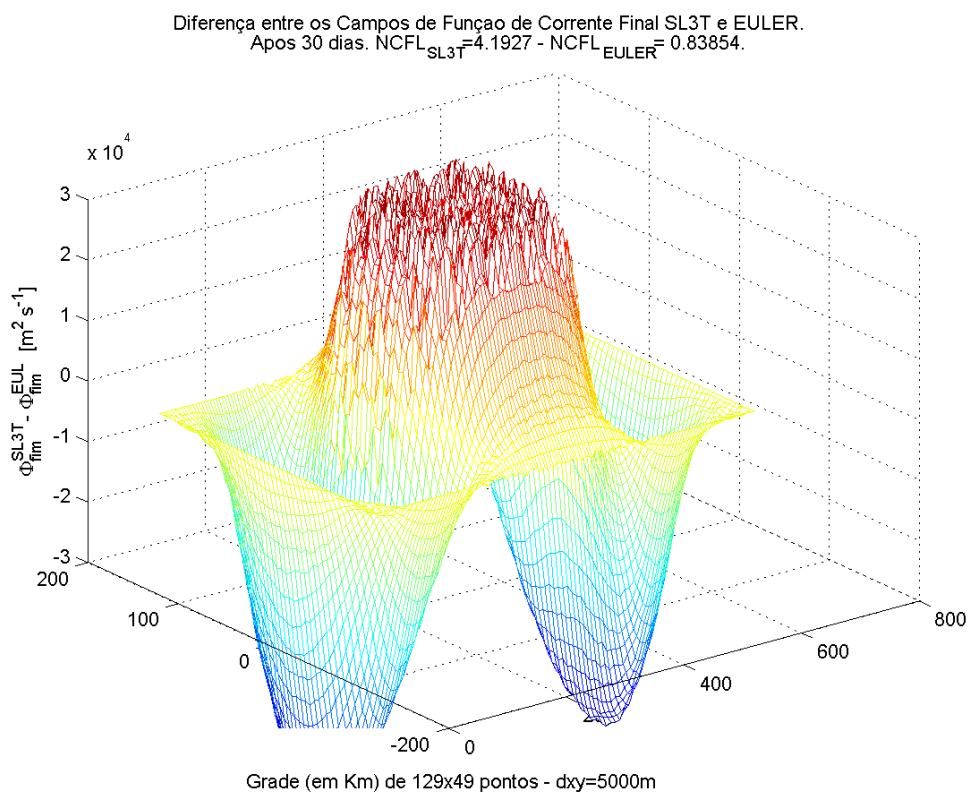


Fig. 5.38 – Diferença entre as soluções SL3T e euleriana no experimento EXP34.

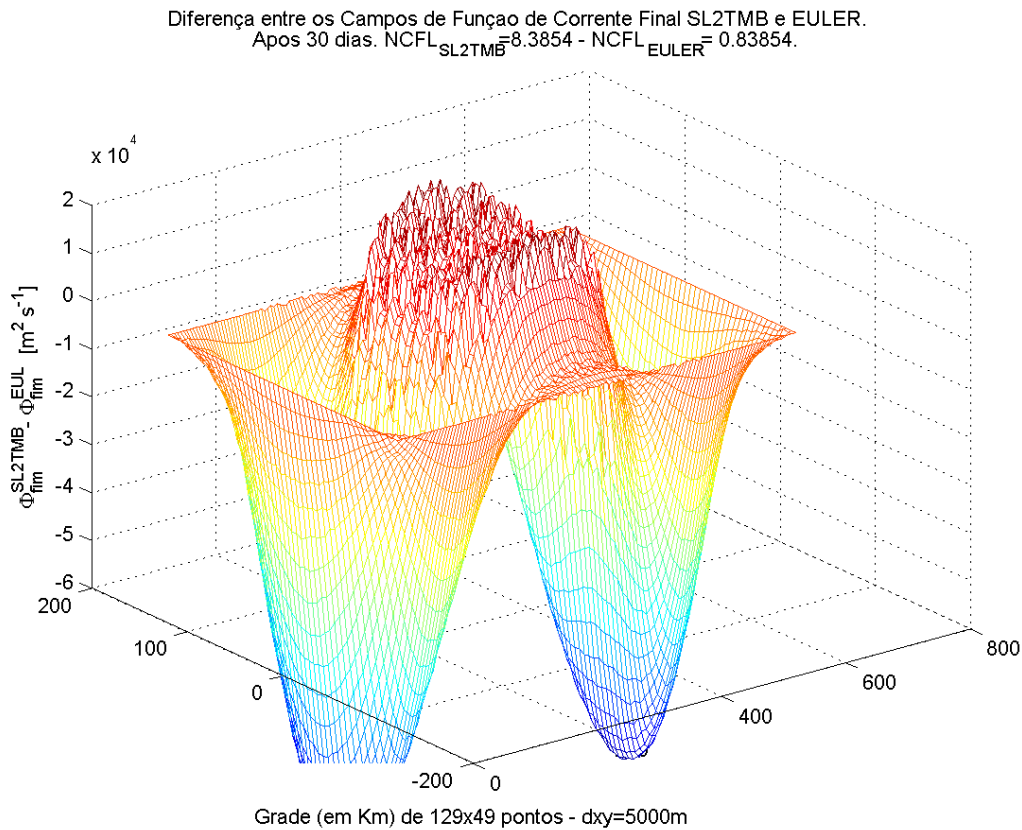
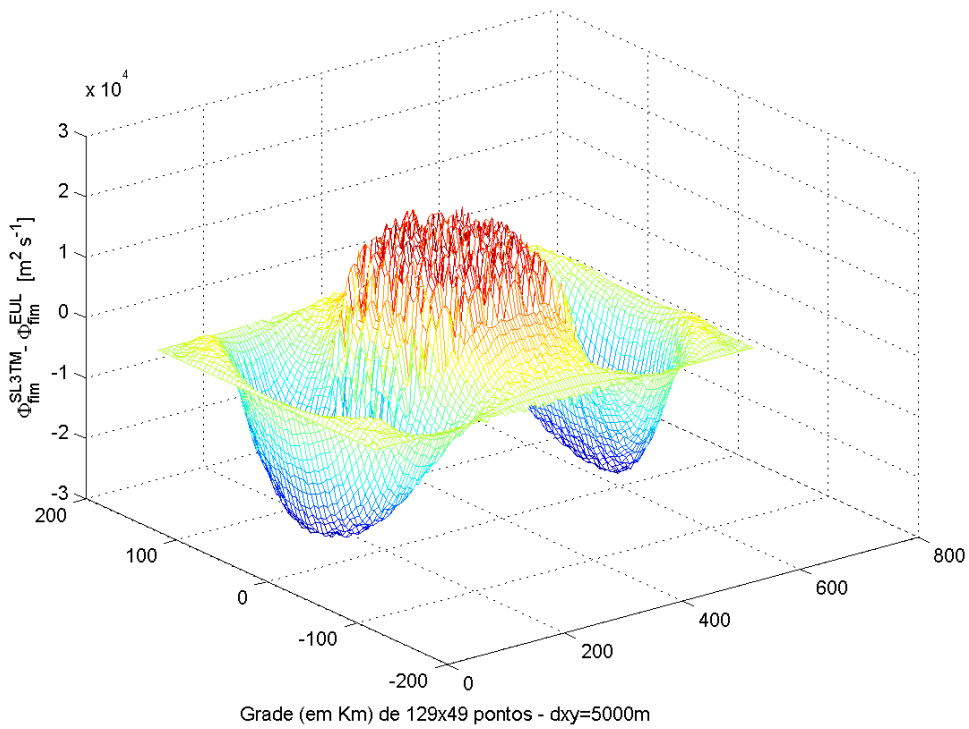


Fig. 5.39 – Diferença entre os campos finais de função de corrente entre as soluções SL2TMB e euleriana no experimento EXP36 (NCFL=8).

A representação da variação percentual da $\bar{\xi}$, \overline{Ec} , $\bar{\zeta}$ e $|\bar{U}|_{MAX}$, definidas em (3.4) e (5.8), com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, ao longo de 30 dias de integração, encontra-se no gráfico da figura 5.41, onde o SL3TM aparece como o esquema de menor variação.

Na figura 5.42 observa-se que os tempos de processamento dos esquemas semi-lagrangeanos são menores do que o do euleriano, mesmo na situação de menor passo de tempo (NCFL=0.8), isto acontece porque devido ao aumento da curvatura do domínio, o campo de função de corrente calculado pelo esquema euleriano apresenta mais ruído, demorando a convergir na solução da equação de elíptica (método SOR) do que o mesmo campo proveniente da solução semi-lagrangeana.

Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3TM} = 4.1927$ - $NCFL_{EULER} = 0.83854$.



Diferença entre os Campos de Função de Corrente Final SL3TM e EULER.
 Após 30 dias. $NCFL_{SL3TM} = 8.3854$ - $NCFL_{EULER} = 0.83854$.

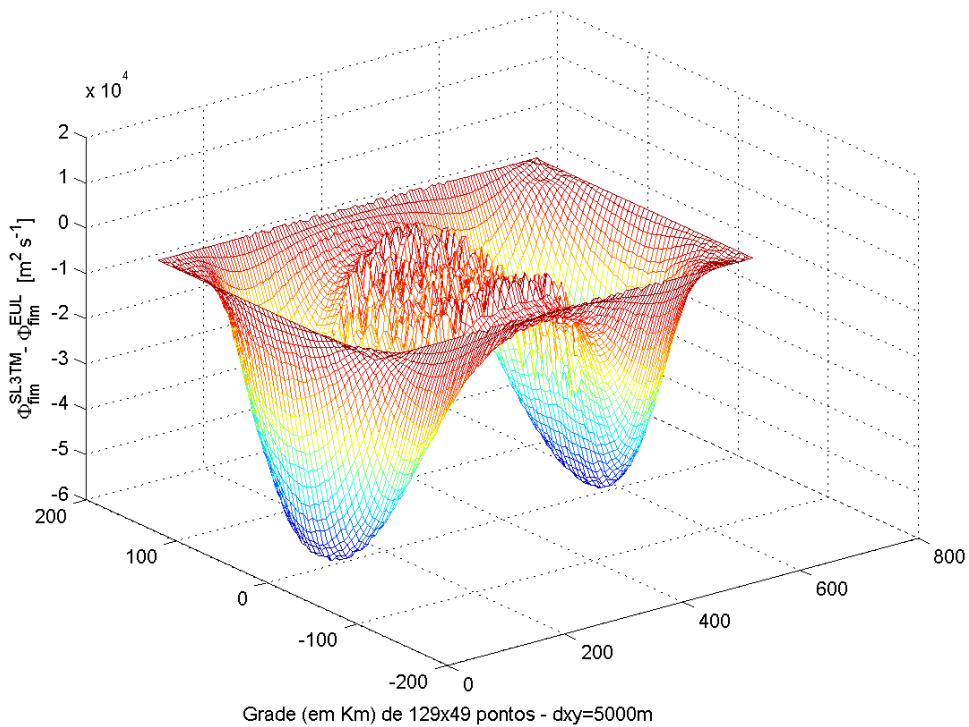


Fig. 5.40 – Diferença entre os campos finais de função de corrente entre as soluções SL3TM e euleriana nos experimentos EXP34 ($NCFL=8$) e EXP36 ($NCFL=8$).

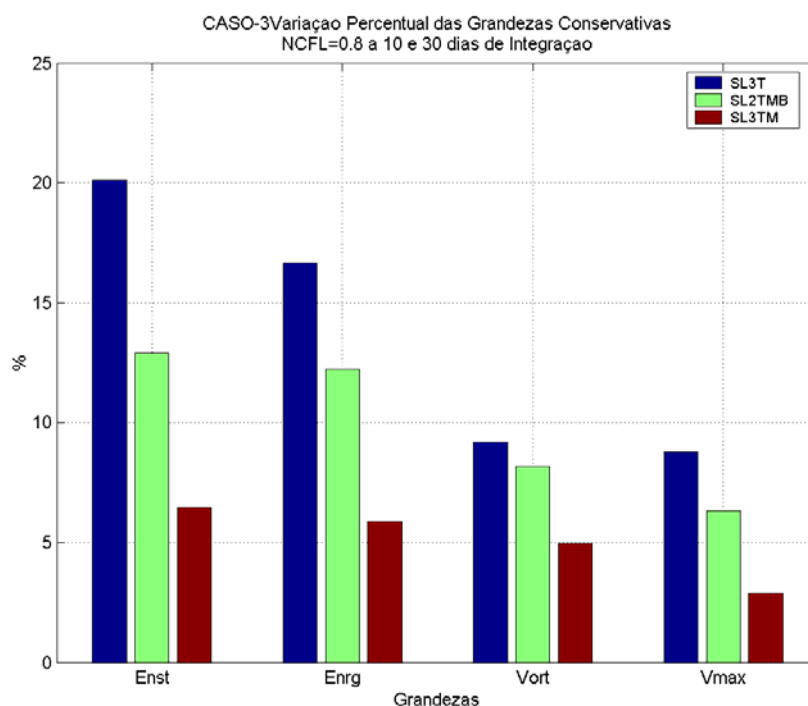


Fig. 5.41 - Variação Percentual da enstrofia, energia cinética e vorticidade médias e da velocidade máxima, com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, para 30 dias de Integração.

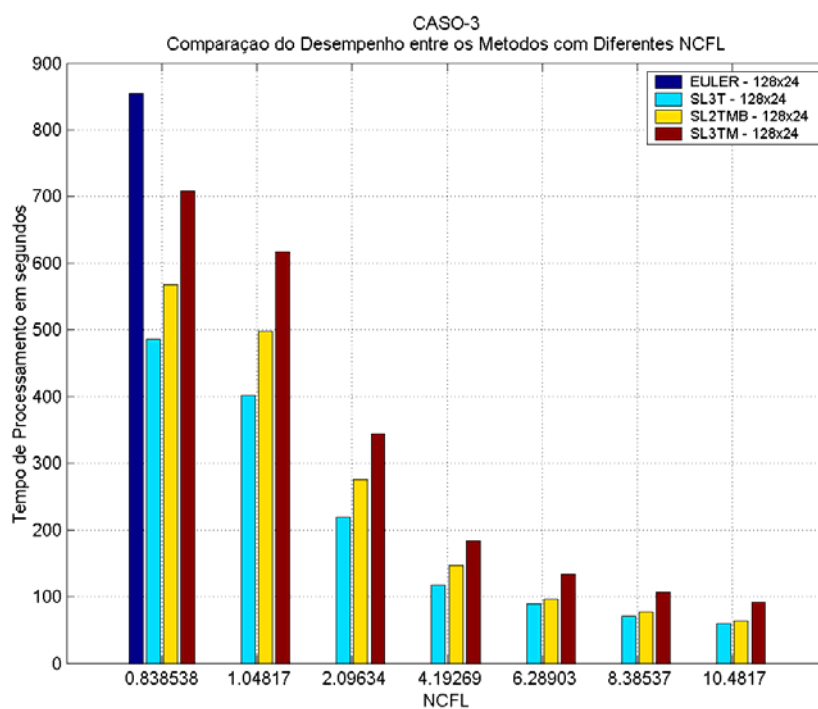


Fig. 5.42 – Comparação entre os tempos de processamento dos Métodos euleriano (somente para NCFL=0.8), SL3T, SL2TMB e SL3TM no CASO 3

CAPÍTULO 6

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, os resultados alcançados pelos esquemas semi-lagrangeanos, apresentados no capítulo anterior e descritos nos apêndices A e B, serão confrontados e avaliados quanto à variação das grandezas conservativas, acurácia, grau de atenuação e custo computacional.

6.1 – GRANDEZAS CONSERVATIVAS

Esta avaliação considera a variação percentual das grandezas conservativas (ARAKAWA, LAMB, 1977) vorticidade média ($\bar{\zeta}$), enstrofia média ($\bar{\xi}$) e energia cinética média (\bar{Ec}), definidas por (3.4), e também da magnitude máxima do vetor velocidade ($|\vec{U}|_{MAX}$) definida por (5.8), para os esquemas semi-lagrangeanos com diferentes números de Courant e em períodos de integração distintos.

A partir dos resultados constantes das tabelas do apêndice A, podem-se confeccionar os gráficos das figuras 6.1 e 6.2 que apresentam a variação percentual das grandezas mencionadas neste item para cada caso deste estudo, separadas em períodos de integração de 5, 10, 20 e 30 dias.

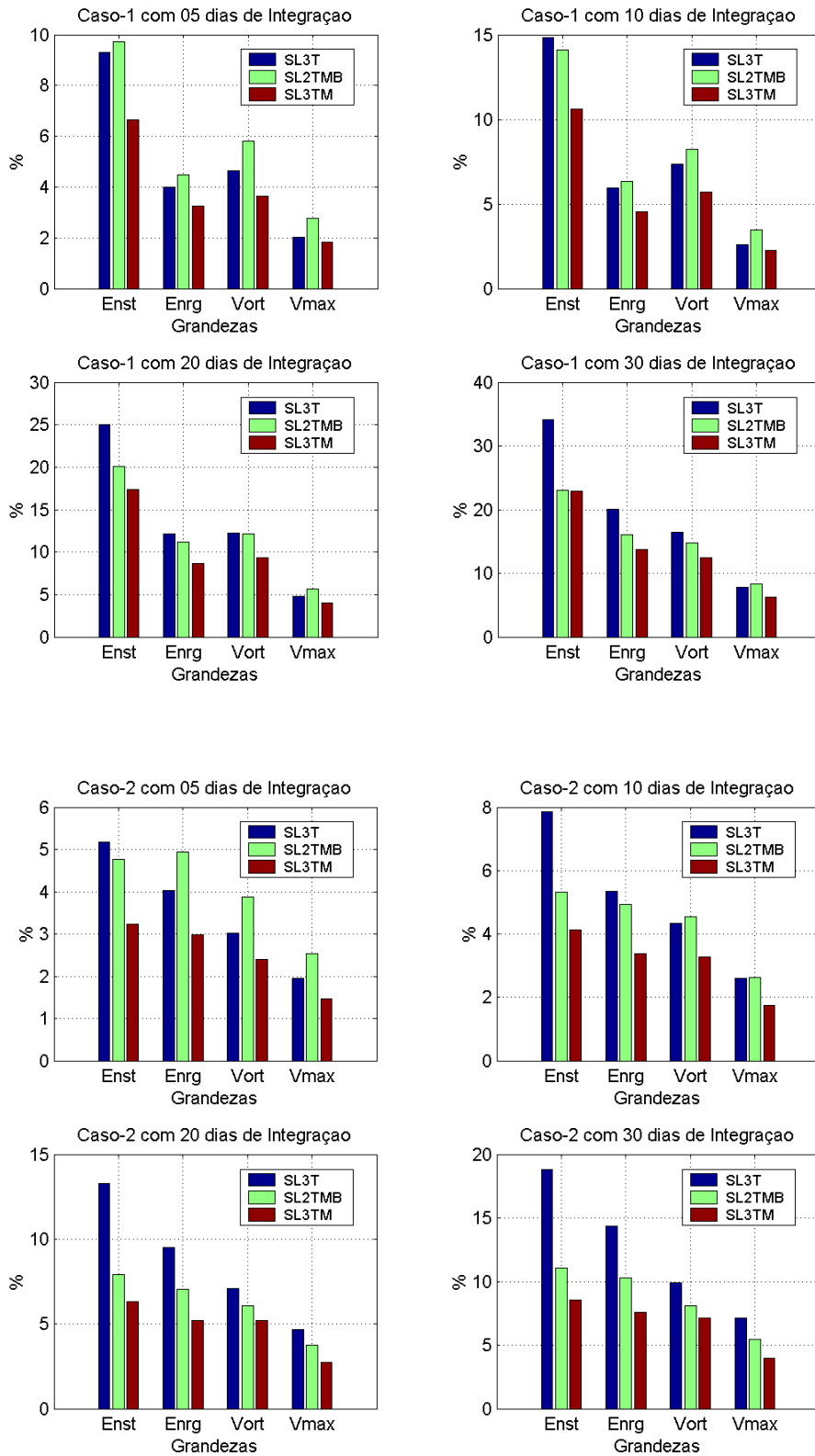


Fig. 6.1 – Variações Percentuais da enstrofia, energia cinética e vorticidade médias e da velocidade máxima, com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, para 5, 10, 20 e 30 dias de Integração, para os CASOS 1 (acima) e 2 (abaixo).

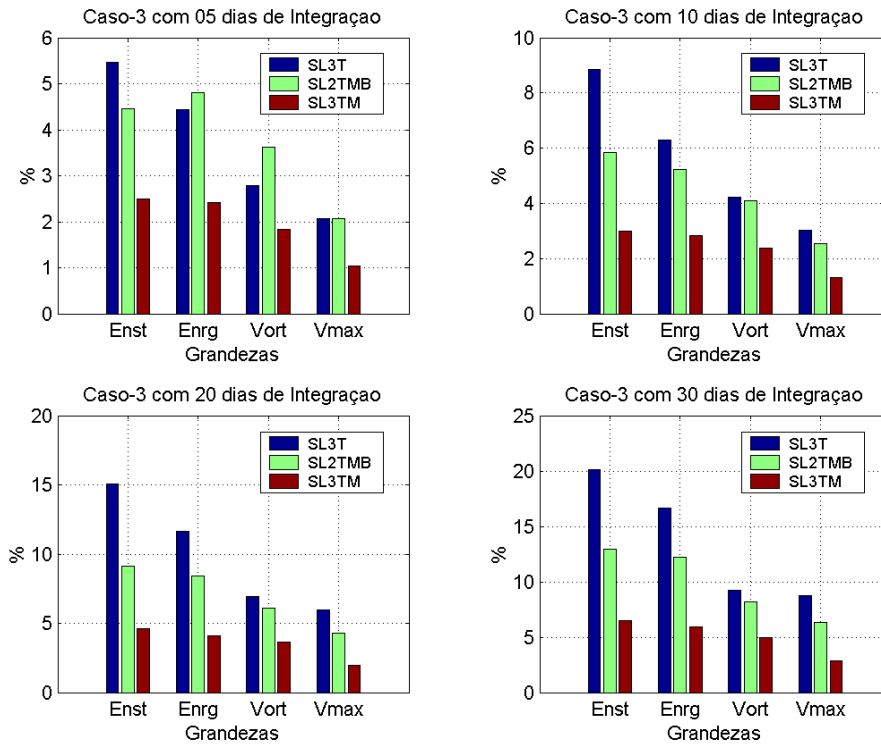


Fig. 6.2 – Variações Percentuais da enstrofia, energia cinética e vorticidade médias e da velocidade máxima, com o aumento do NCFL de 0.8 a 10, para 5, 10, 20 e 30 dias de Integração, para o CASO 3.

A análise destes gráficos mostra que dentre os três esquemas semi-lagrangeanos o SL3TM é o que mais conserva as grandezas mencionadas em todas as situações, o que é altamente desejável neste tipo de problema.

6.2 – ACURÁCIA

Serão utilizados dois critérios para avaliar-se a acurácia das soluções. O primeiro é a comparação do erro médio quadrático (RMS) da diferença entre os campos de função de corrente obtidos pelos métodos semi-lagrangeanos e destes campos obtidos pelo

método euleriano (KUO, WILLIAMS, 1990), conforme definido em (5.12), para todos os casos, observando-se o crescimento ao longo do aumento do período de integração.

O segundo critério a ser utilizado para avaliar-se a acurácia será o da comparação entre o desvio padrão de cada solução semi-lagrangeana normalizado pelo desvio padrão da solução de referência (PUDYKIEWICZ, STANIFORTH, 1984), conforme definido em (5.11).

A partir das tabelas do apêndice B constroem-se os gráficos das figuras 6.3, 6.4 e 6.5 que representam o crescimento do RMS com o aumento do NCFL para diferentes curvaturas do campo (casos), distribuídos em períodos de integração distintos.

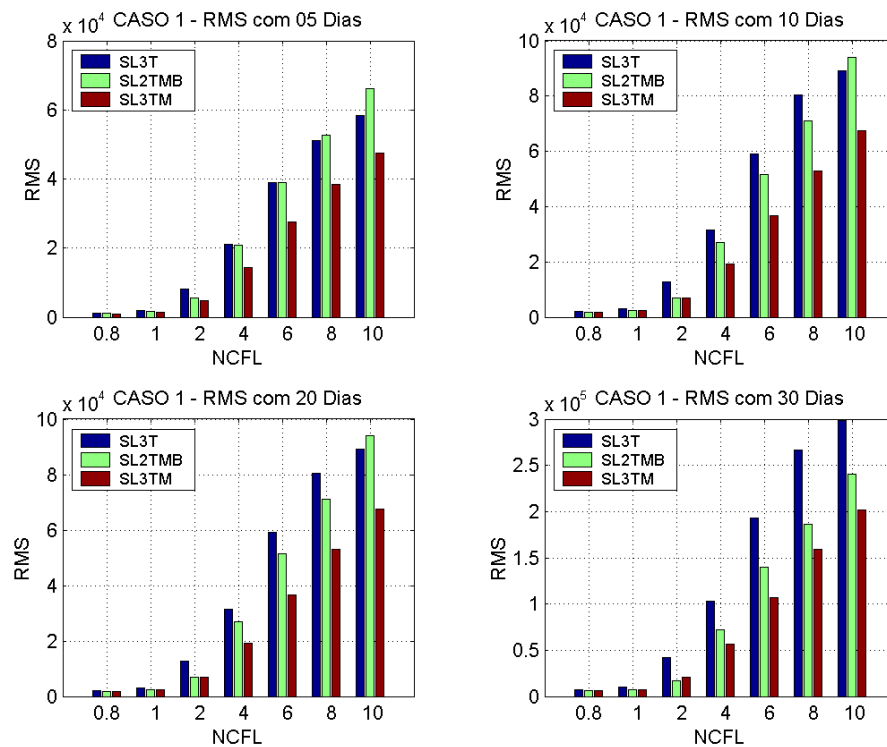


Fig. 6.3 – Evoluções dos erros RMS das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL para o CASO 1.

Estes gráficos (das figuras 6.3 a 6.5) mostram que, apesar do erro RMS crescer com o aumento do NCFL para os três esquemas em todos os casos, as soluções obtidas pelo esquema SL3TM apresentam um crescimento sempre menor do erro RMS, o que demonstra ter esta solução um grau de acurácia maior do que as demais.

É importante ainda salientar que no CASO 3, onde o campo apresenta a maior curvatura, o esquema SL3TM apresentou um crescimento do RMS bem menor do que os demais, chegando a 50% menor em determinados NCFL (4 e 6).

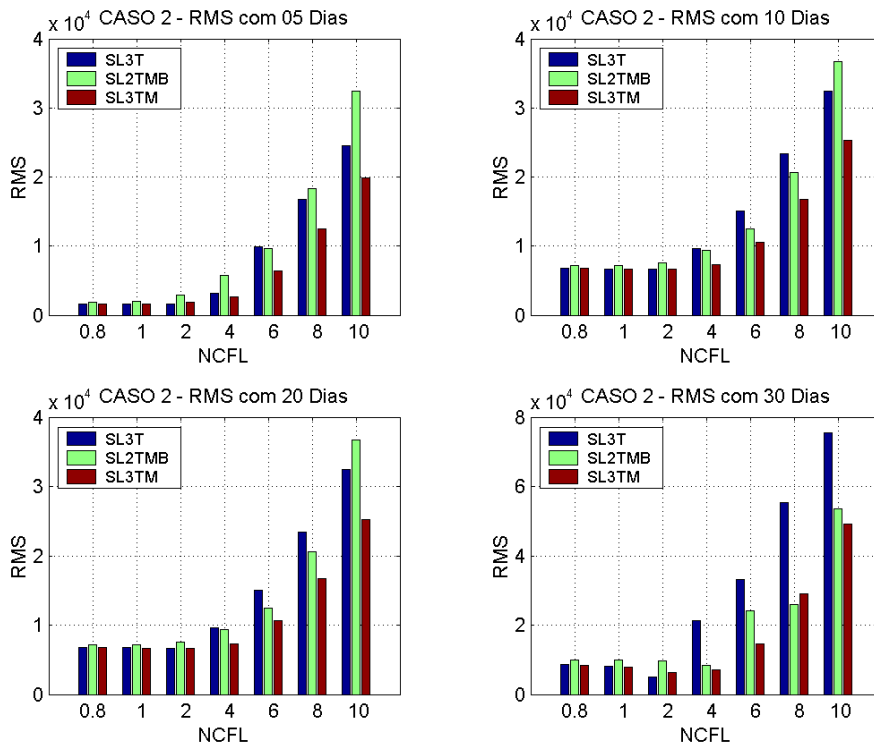


Fig. 6.4 – Evoluções dos erros RMS das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL para o CASO 2.

Finalmente, ressalta-se que os valores dos erros RMS para o caso 3 foram em geral menor do que para os outros dois casos. Isto ocorre porque em um domínio de

maior curvatura o esquema euleriano, mesmo com um passo de tempo pequeno (NCFL=0.8), amplificou sua solução na direção das soluções semi-lagrangianas o que levou a um menor erro RMS destas soluções quando comparadas com a solução euleriana.

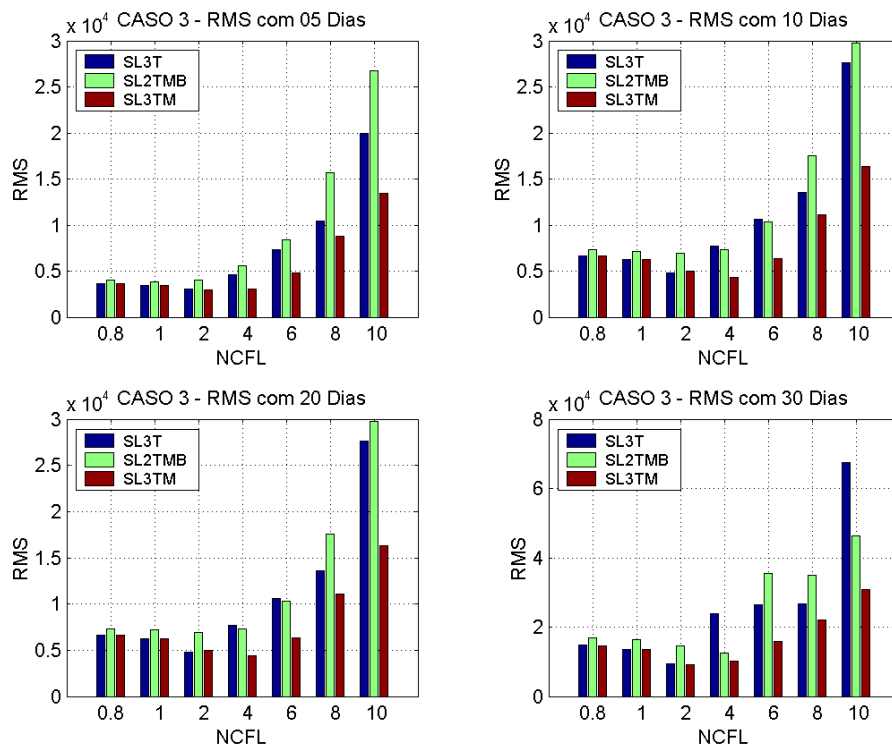


Fig. 6.5 – Evoluções dos erros RMS das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL para o CASO 3.

Utilizando-se dos dados constantes das tabelas do apêndice B, os gráficos das figuras 6.6 e 6.7 que representam as razões entre os desvios padrões dos esquemas semi-lagrangeanos e o euleriano, são confeccionados. Da análise destes gráficos, verifica-se, inicialmente, que o valor da razão dos desvios padrões varia muito pouco ao longo da integração. Isto acontece devido às características do problema, que utiliza um

campo relativamente estável e simétrico. Apesar disto, uma análise mais detalhada mostra que o SL3TM descreve uma curva semelhante em todos os casos mantendo a coerência de suas soluções em qualquer situação de domínio e NCFL. Ressalta-se que nesta comparação o melhor desempenho está na curva que se mantém mais próxima de 1, uma vez que o que queremos é que $\sigma \approx \sigma_{EUL}$, sendo este o comportamento da curva SL3TM.

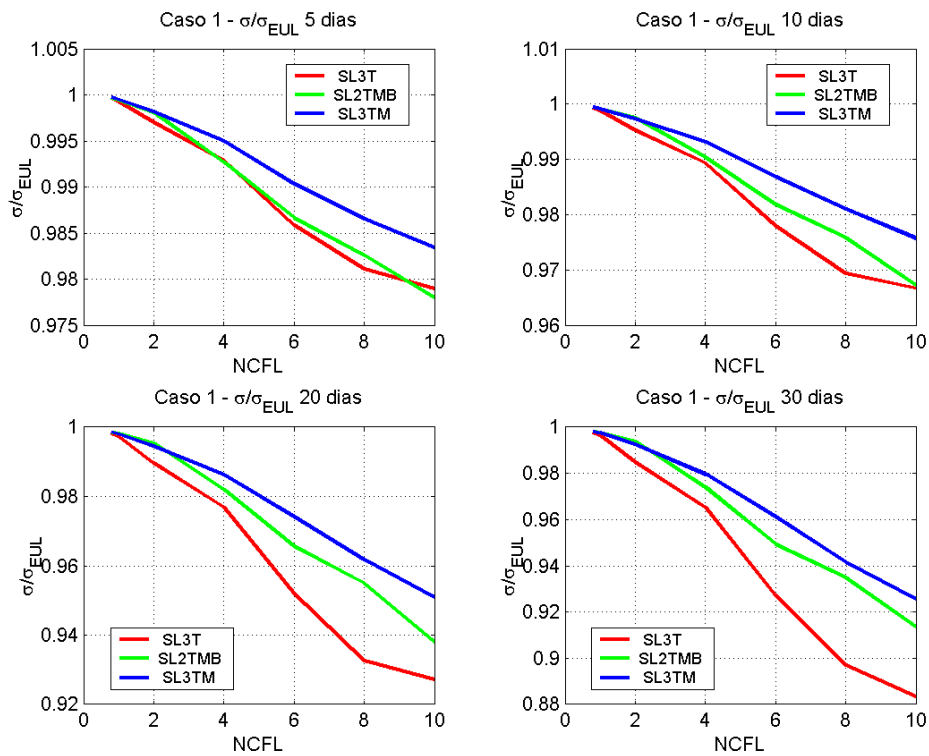


Fig. 6.6 – Razões σ/σ_{EUL} das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, referente ao CASO 1.

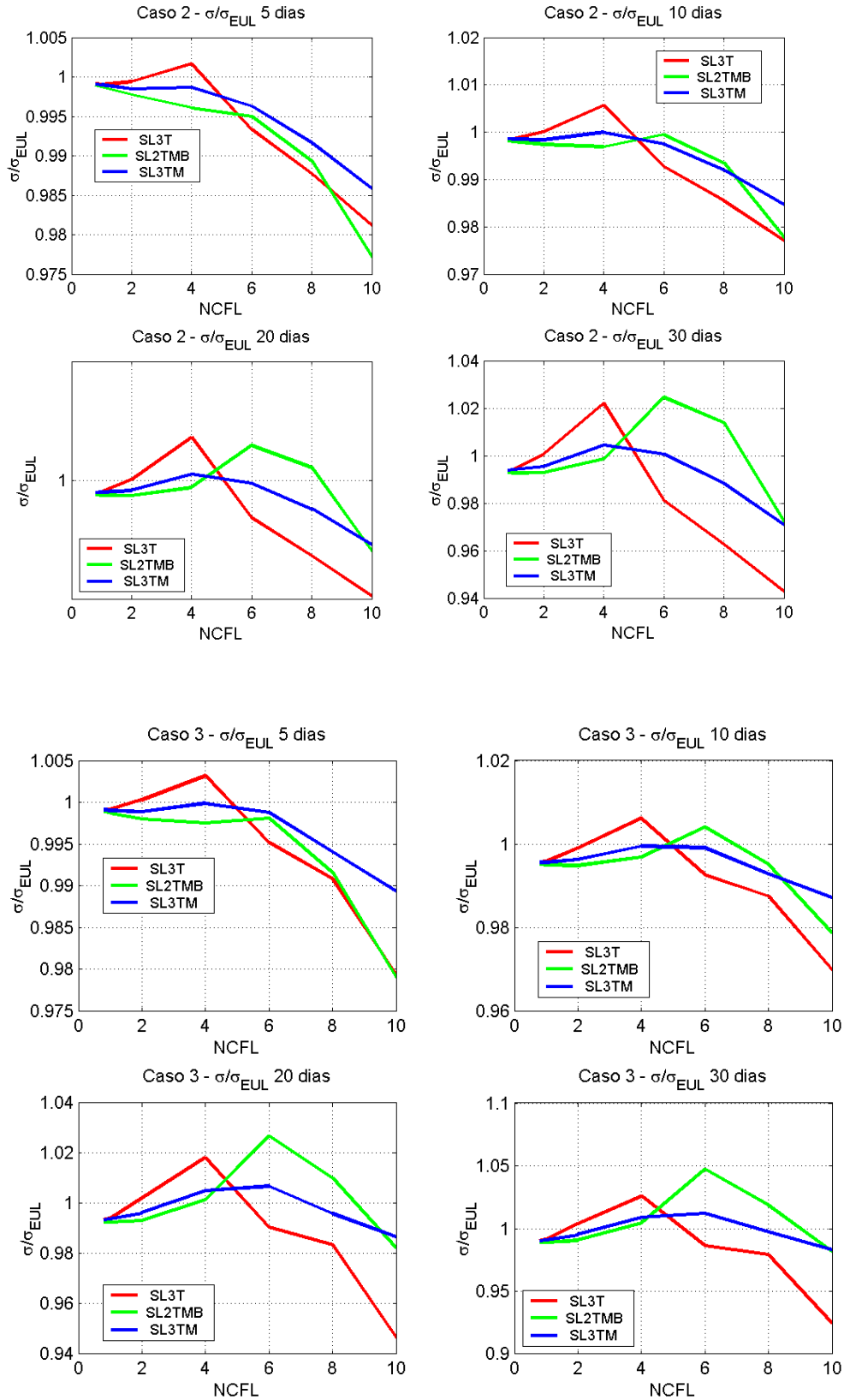


Fig. 6.7 – Razões σ/σ_{EUL} das soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, para os CASOS 2 e 3.

6.3 – GRAU DE ATENUAÇÃO

O grau de atenuação de cada solução será medido pela comparação das razões entre os somatórios dos campos de função de corrente da solução semi-lagrangeana pelo da solução padrão, e entre o somatório dos quadrados das funções de corrente semi-lagrangeanas pela da euleriana (PUDYKIEWICZ, STANIFORTH, 1984), definidas por (5.9) e (5.10) respectivamente.

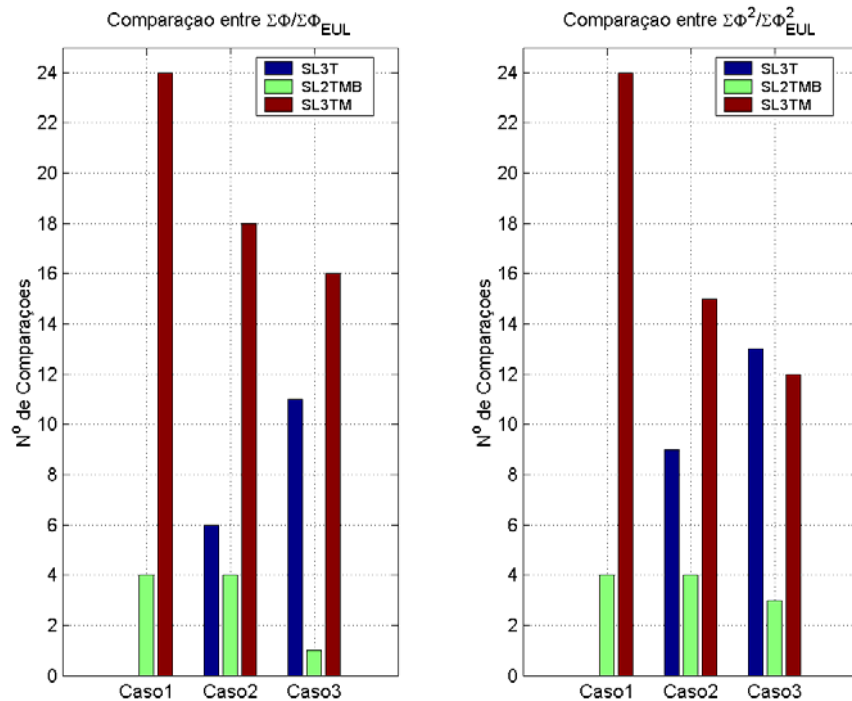


Fig. 6.8 – Distribuição por casos dos resultados das 84 comparações entre os esquemas semi-lagrangeanos de $\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_{EUL}}$ e de $\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_{EUL}^2}$.

Analisando os resultados lançados nas tabelas do apêndice B, verifica-se o lançamento destes parâmetros após 125, 250, 500 e 716,67 horas de integração, para cada um dos sete NCFL, para os três casos, levando a um total de 84 comparações entre os esquemas semi-lagrangeanos. Com relação à razão entre os somatórios (5.9), das 84

comparações, o SL3TM foi melhor em 58 (69%). Com relação à razão entre o somatório dos quadrados (5.10), o SL3TM foi melhor em 51 (60%) das 84 comparações. Estes valores estão distribuídos nos casos conforme o gráfico da figura 6.8, onde as barras indicam os números de casos que cada método foi superior.

Ao expandir as informações da razão entre os somatórios dos quadrados no CASO 3, onde o SL3T teve uma maior “pontuação” do que o SL3TM, constroem-se os gráficos da figura 6.9, onde as 28 comparações referente ao CASO 3 estão distribuídas por horas de integração (à esquerda) e número de Courant (à direita). Pode-se verificar que com o aumento do período de integração e NCFL o desempenho do SL3TM é superior ou igual aos demais esquemas.

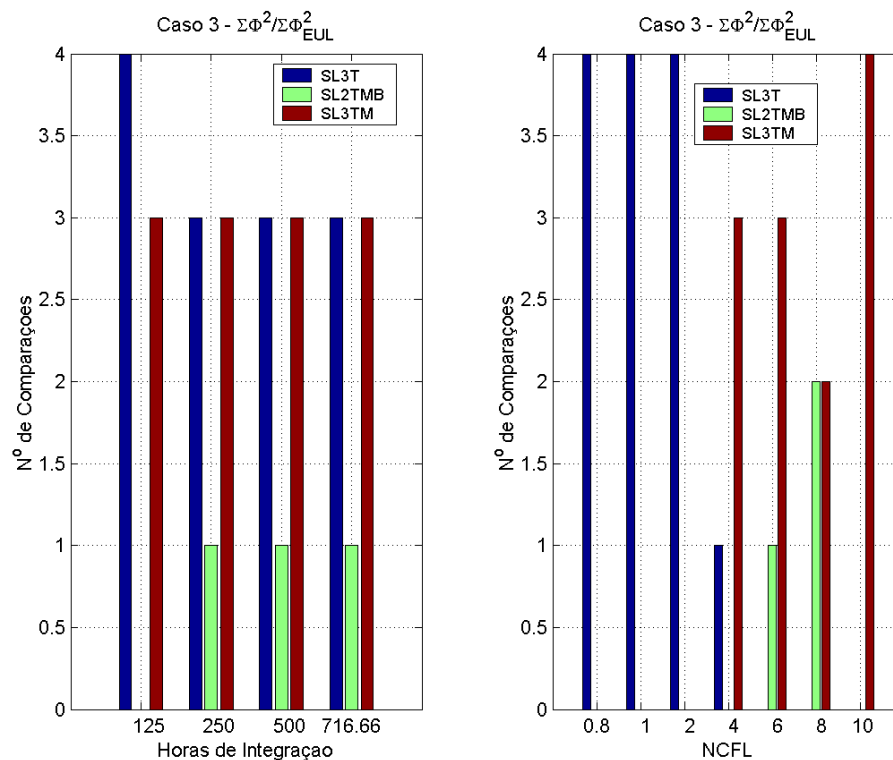


Fig. 6.9 – Distribuição por Horas de Integração (esquerda) e NCFL (direita) dos resultados das 28 comparações entre os esquemas semi-lagrangianos de

$$\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_{EUL}^2}, \text{ no CASO 3.}$$

Os gráficos das figuras 6.10 e 6.11, também confeccionados a partir dos dados das tabelas do apêndice B, representam a evolução com o aumento do número de Courant das razões entre os somatórios dos campos de função de corrente das soluções semi-lagrangianas e euleriana (5.9), e entre os somatórios dos quadrados dos campos de função de corrente das soluções semi-lagrangianas e euleriana (5.10). Em ambas razões, a indicação do melhor desempenho está na curva que mais se aproxima de 1. Pela análise destes gráficos, percebe-se que mesmo onde o SL3TM não foi o melhor, nos baixos NCFL, o esquema esteve próximo do melhor.

Deste modo, pode-se concluir o menor grau de atenuação do esquema SL3TM em relação aos outros dois esquemas semi-lagrangianos deste estudo.

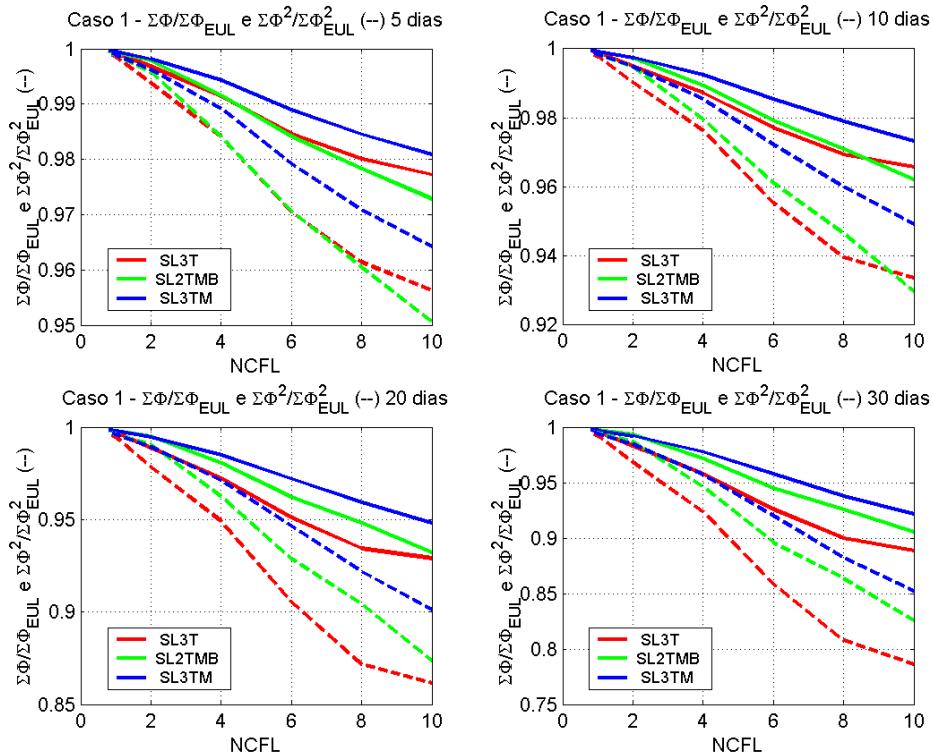


Fig. 6.10 – Razões $\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$ (contínua) e $\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$ (tracejado) referente às soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, do CASO 1.

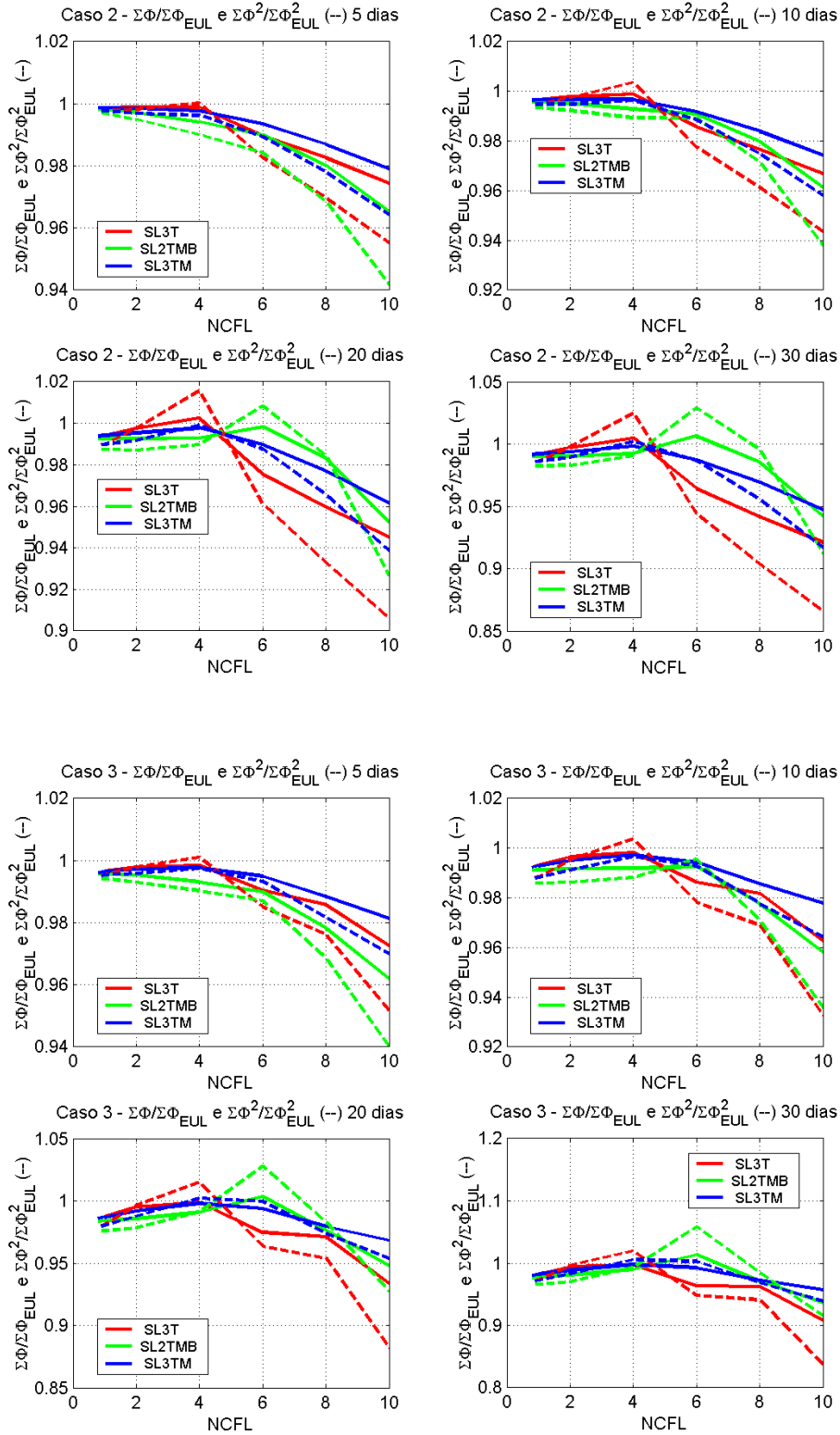


Fig. 6.11 – Razões $\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_{EUL}}$ (contínua) e $\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_{EUL}^2}$ (tracejado) referente às soluções SL3T, SL2TMB e SL3TM, com o aumento do NCFL, para 5, 10, 20 e 30 dias de integração, dos CASOS 2 e 3.

6.4 – CUSTO COMPUTACIONAL

A implementação da quebra da trajetória em dois passos para determinação da posição de partida da partícula no esquema SL3TM, promove um aumento no custo computacional do esquema, mais especificamente na rotina de determinação das velocidades da trajetória descrita no item 4.8.1, dobrando-se o número de interpolações necessárias, em comparação com a mesma rotina do esquema SL3T, descrito no item 4.6.1. Este aumento reflete o maior tempo de processamento do SL3TM em comparação com o SL3T e SL2TMB registrados nos gráficos das figuras 5.13, 5.20 e 5.24

Em função dos valores obtidos e representados nos mencionados gráficos, a quebra da trajetória da partícula resulta num aumento em média de 34% no tempo de processamento, em relação aos outros métodos semi-lagrangeanos.

O *High resolution Regional Model* (HRM) é um modelo atmosférico desenvolvido pelo serviço meteorológico alemão *Deutscher Wetterdienst* (DWD) e utilizado operacionalmente por mais de 30 instituições em diversos países, inclusive no Instituto Nacional de Meteorologia (INMet) e no Centro de Hidrografia da Marinha. Tomando como base o HRM, a previsão dinâmica explícita (parte advectiva do modelo), resolvida pelo método semi-implícito euleriano, representa 14% a 34% do custo total computacional, conforme a configuração da grade do modelo (número de pontos e espaçamento), da máquina utilizada (IBM, SGI, Cluster de Linux) e do método de paralelismo utilizado (OpenMP e MPI) (MAJEWSKI, *et al.*, 2005).

Coma base nestes valores, pode-se afirmar que a implementação do SL3TM promoveria um aumento aproximadamente de 4% a 11% no custo computacional de um modelo numérico semi-lagrangeano, caso fosse mantido o mesmo passo de tempo.

Entretanto, a implementação do SL3TM permitiria o uso de maiores do passos de tempo sem perda significativa de acurácia, o que compensaria este aumento podendo até mesmo promover uma diminuição do custo computacional total.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a comparação de três esquemas de determinação da posição de partida das partículas no método semi-lagrangeano aplicado a um problema de advecção não-linear.

A motivação deste estudo fundamenta-se na possibilidade de diminuição de uma das principais fontes de erro do método semi-lagrangeano (DURRAN, 1998), empregando-se um método de três níveis de tempo modificado para a determinação da posição de partida da partícula.

O problema consistiu na simulação numérica de um escoamento horizontal, não divergente, governado pela equação de conservação da vorticidade, a qual, a partir de um campo inicial definido em termos de uma função de corrente, foi integrada, utilizando-se quatro diferentes métodos: euleriano que foi considerada a solução de referência, semi-lagrangeano de três níveis de tempo, semi-lagrangeano de dois níveis de tempo e semi-lagrangeano de três níveis de tempo modificado (SL3TM) proposto pela primeira vez por COSTA (2003) para a solução de um problema de advecção linear.

Foram efetuadas várias integrações utilizando diferentes passos de tempo variando-se a curvatura do campo inicial.

As soluções semi-lagrangeanas foram comparadas e concluiu-se que:

- a) O método, como os demais semi-lagrangeanos, é incondicionalmente estável;

- b) O SL3TM mostrou um melhor desempenho na conservação das grandezas vorticidade média, enstrofia média e energia cinética média;
- c) O SL3TM apresentou maior acurácia nas suas soluções;
- d) O SL3TM atenua menos que os demais métodos semi-lagrangeanos, principalmente em situações de maior curvatura, maior número de Courant e períodos de integração mais longos, e
- e) O SL3TM tem um custo computacional 34%, em média, maior que os demais semi-lagrangeanos, o que representaria um aumento de cerca de 5% a 11% em um modelo numérico atmosférico caso fosse mantido o mesmo passo de tempo, mostrando-se, mesmo assim, vantajosa sua aplicação em vista dos demais ganhos obtidos.

Enfim, o método se mostrou perfeitamente aplicável, principalmente em escoamentos de curvatura acentuada, onde a utilização de maiores passos de tempos (que é a vantagem do semi-lagrangeano) teria um menor efeito na acurácia da solução, em relação aos outros dois esquemas semi-lagrangeanos.

Todas as simulações foram efetuadas em um domínio plano, utilizando-se somente a equação de advecção sem fontes nem sumidouros. Com a finalidade de testar este método em situações mais realísticas, sugere-se, para trabalhos futuros, a implementação do SL3TM em um modelo de águas rasas aplicado à esfera.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAKAWA, A., 1966, Computational Design for Long-Term Numerical Integrations of the Equations of the Atmospheric Motion. *Journal of Computational Physics*, vol. 1, pp. 119-143.

ARAKAWA, A., LAMB, V., R., 1977: Computational Design of the Basic Dynamical Process of the UCLA General Circulation Model. *Methods in Computational Physics*, vol. 17, 173-265.

ASSELIN, R., A., 1972, Frequency Filter for Time Integrations, *Monthly Weather Review*, vol. 100, pp. 487-489.

BATCHELOR, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.

CHAPMAN, S., J., 1998, *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*, 1 ed., New York, McGraw-Hill.

CHAPMAN, S., J., 2003, *Programação em MATLAB para Engenheiros*, 1 ed., São Paulo, Pioneira Thomson Learning.

COSTA, G., A., S., 2003, *Aprimoramento na Determinação do Ponto de Partida da Trajetória de Partículas no Método Semi-Lagrangeano de Três Níveis de Tempo*. Dissertação M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

DURRAN, D.R., 1998, *Numerical Methods for Waves Equations in Geophysical Fluid Dynamics* . 1 ed. New York, Springer-Verlag.

FJØRTOFT, R., 1952, On a Numerical Method of Integrating the Barotropic Vorticity Equation, *Tellus*, vol. 4, pp. 179-194.

HALTNER, G.J., WILLIAMS, R.T., 1980, *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. 2 ed. New York, John Wiley & Sons.

HOLTON, J. R., 1992, *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 3^a ed. Academic Press.

KRISHNAMURTI, T.N., 1962, Numerical Integration of Primitive Equations by a quasi-Lagrangian Advective Scheme, *Journal of Applied Meteorology*, vol 1, pp 508-521.

KUO, H. C., WILLIAMS, R.T., 1990, Semi-Lagrangian Solutions to the Inviscid Burgers Equation, *Monthly Weather Review*, vol. 118, pp. 1278-1288.

MAJEWSKI, D, *et al.*, 2005, *HRM User's Guide*, Deutscher Wetterdienst, Offenbach.

MCDONALD, A., BATES, J. R., 1987, Improving the Estimate of the Departure Point position in a Two-Time-Level Semi-Lagrangian and Semi-Implicit Model. *Monthly Weather Review*, vol. 115, pp. 737-739.

MCDONALD, A., BATES, J. R., 1989, Semi-Lagrangian Integration of a Gridpoint Shallow Water Model on the Sphere. *Monthly Weather Review*, vol. 117, pp. 130-137

MESINGER, F., ARAKAWA, A., 1976, *Numerical methods used in atmospheric models, volume I*, In: Garp Publication Series No. 17, WMO/ICSU Joint Organizing Committee.

PUDYKIEWICZ, J., STANFORTH, A., 1984, *Some properties and comparative performance of the semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection diffusion equation*. *Atmosphere-Ocean*, vol. 22, pp. 283-308.

RIDDAWAY, R., W., 2001, *Numerical Methods*. In: ECMWF Meteorological Training Course Lecture Series.

RITCHIE, H., *et al.*, 1995, Implementation of the semi-Lagrangian Method in a High-Resolution Version of the ECMWF Forecast Model, *Monthly Weather Review*, vol. 123, pp. 489-514.

ROBERT, A., HENDERSON, J., TURNBULL, C., 1972, An Implicit Time Integration Scheme for Baroclinic Models of the Atmosphere, *Monthly Weather Review*, vol. 100, pp. 329-335.

ROBERT, A., 1981, A Stable Numerical Integration Scheme for the Primitive Meteorological Equations, *Atmosphere-Ocean*, vol. 19, pp. 35-46.

SAWYER, J. S., 1963, A Semi-Lagrangian method of Solving the Vorticity Advection Equation, *Tellus*, vol. 15, pp. 336-342.

SPIEGEL, M., R., 1992, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática 2^a* Ed., São Paulo, Ed. Makron Books do Brasil e MacGraw-Hill Ltda.

STANFORTH, A., CÔTÉ, J., 1991, Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models – A review, *Monthly Weather Review*, vol. 119, pp. 2206-2223.

WELANDER, P., 1955, Studies on the General Development of Motion in a Twodimensional, Ideal Fluid. *Tellus*, vol. 7, pp. 141-156.

WIIN-NIELSEN, A., 1959, On the Application of Trajectory Methods in Numerical Forecasting. *Tellus*, vol. 11, pp. 180-196.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima.

Tabela A.1 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima, da solução euleriana do Caso 1.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\overline{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	-----------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de integração

0.81	9.388770e-009	188.683	-1.014890e-004	27.3157
------	---------------	---------	----------------	---------

Após 10 dias de integração

0.81	9.388230e-009	188.678	-1.011710e-004	27.2883
------	---------------	---------	----------------	---------

Após 20 dias de integração

0.81	9.387420e-009	188.907	-1.013060e-004	27.3552
------	---------------	---------	----------------	---------

Após 30 dias de integração

0.81	9.386840e-009	189.011	-1.012470e-004	27.3399
------	---------------	---------	----------------	---------

Tabela A.2 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3T do Caso 1.

NCFL	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.81	9.318280e-009	188.569	-1.013750e-004	27.2838
	1.08	9.311580e-009	188.449	-1.013590e-004	27.2759
	2.16	9.260520e-009	187.622	-1.011040e-004	27.2169
	4.26	9.143760e-009	185.94	-1.001560e-004	27.0714
	6.48	8.901460e-009	183.519	-9.904560e-004	26.922
	8.52	8.631880e-009	181.918	-9.775420e-004	26.8252
	10.79	8.450750e-009	181.053	-9.665910e-004	26.7288

Após 10 dias de Integração	0.81	9.312630e-009	188.472	-1.014110e-004	27.2675
	1.08	9.302030e-009	188.305	-1.013770e-004	27.2563
	2.16	9.211170e-009	187.024	-1.009000e-004	27.1668
	4.26	9.007700e-009	184.664	-9.918630e-005	26.9653
	6.48	8.590810e-009	181.029	-9.734930e-005	26.7625
	8.52	8.149250e-009	178.301	-9.533170e-005	26.6349
	10.79	7.931190e-009	177.249	-9.397600e-005	26.5584

Após 20 dias de Integração	0.81	9.302020e-009	188.26	-1.014170e-004	27.2362
	1.08	9.283780e-009	187.952	-1.013430e-004	27.2159
	2.16	9.114820e-009	185.204	-1.004180e-004	27.0279
	4.26	8.756730e-009	180.298	-9.727180e-005	26.6213
	6.48	8.069530e-009	172.773	-9.430570e-005	26.2249
	8.52	7.375520e-009	166.969	-9.122730e-005	25.9952
	10.79	6.971210e-009	165.309	-8.901700e-005	25.9396

Após 30 dias de Integração	0.81	9.292050e-009	188.057	-1.013920e-004	27.2104
	1.08	9.266080e-009	187.594	-1.012770e-004	27.18
	2.16	9.020930e-009	183.294	-9.990940e-005	26.8852
	4.26	8.535150e-009	175.41	-9.547950e-005	26.2408
	6.48	7.672300e-009	163.525	-9.179730e-005	25.6028
	8.52	6.793070e-009	154.261	-8.801840e-005	25.189
	10.79	6.125840e-009	150.293	-8.472980e-005	25.0755

Tabela A.3 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL2TMB do Caso 1.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.81	9.318400e-009	188.564	-1.013650e-004	27.2828
	1.08	9.314290e-009	188.491	-1.013620e-004	27.2777
	2.16	9.286480e-009	187.971	-1.012310e-004	27.2385
	4.26	9.160870e-009	185.918	-1.004700e-004	27.0835
	6.48	8.964740e-009	183.549	-9.914020e-005	26.8916
	8.52	8.755030e-009	181.817	-9.750710e-005	26.7193
	10.79	8.412770e-009	180.103	-9.548140e-005	26.5291

Após 10 dias de Integração	0.81	9.314140e-009	188.49	-1.014020e-004	27.2673
	1.08	9.309510e-009	188.413	-1.014000e-004	27.2622
	2.16	9.271040e-009	187.792	-1.012190e-004	27.2164
	4.26	9.073570e-009	185.162	-1.000680e-004	27.0272
	6.48	8.768460e-009	181.975	-9.806790e-005	26.7869
	8.52	8.475980e-009	179.523	-9.573080e-005	26.5633
	10.79	8.001260e-009	176.592	-9.303510e-005	26.3267

Após 20 dias de Integração	0.81	9.306390e-009	188.332	-1.014110e-004	27.2377
	1.08	9.300760e-009	188.236	-1.014100e-004	27.2325
	2.16	9.241230e-009	187.247	-1.011240e-004	27.1644
	4.26	8.904300e-009	182.48	-9.920820e-005	26.8365
	6.48	8.401540e-009	176.706	-9.595980e-005	26.4252
	8.52	7.998240e-009	172.578	-9.247600e-005	26.0713
	10.79	7.440390e-009	167.204	-8.914180e-005	25.6916

Após 30 dias de Integração	0.81	9.299210e-009	188.177	-1.013900e-004	27.2137
	1.08	9.292540e-009	188.064	-1.013880e-004	27.2081
	2.16	9.212140e-009	186.662	-1.009990e-004	27.1138
	4.26	8.742310e-009	179.332	-9.834560e-005	26.6126
	6.48	8.071830e-009	170.394	-9.400020e-005	25.9788
	8.52	7.619440e-009	164.641	-8.968260e-005	25.486
	10.79	7.152840e-009	157.842	-8.638230e-005	24.9565

Tabela A.4 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3TM do Caso 1.

NCFL	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.81	9.319610e-009	188.593	-1.013820e-004	27.2854
	1.08	9.315120e-009	188.516	-1.013810e-004	27.2807
	2.16	9.288680e-009	188.053	-1.012820e-004	27.2485
	4.26	9.211610e-009	186.811	-1.007910e-004	27.1517
	6.48	9.077530e-009	185.049	-9.995000e-005	27.0163
	8.52	8.908900e-009	183.607	-9.890730e-005	26.9045
	10.79	8.698680e-009	182.44	-9.768620e-005	26.7906

Após 10 dias de Integração	0.81	9.315300e-009	188.522	-1.014260e-004	27.2708
	1.08	9.309070e-009	188.417	-1.014200e-004	27.2642
	2.16	9.266770e-009	187.8	-1.012500e-004	27.2225
	4.26	9.139340e-009	186.191	-1.004320e-004	27.1012
	6.48	8.917300e-009	183.898	-9.907410e-005	26.9331
	8.52	8.645060e-009	181.796	-9.743520e-005	26.7857
	10.79	8.325310e-009	179.937	-9.564280e-005	26.6499

Após 20 dias de Integração	0.81	9.307330e-009	188.365	-1.014450e-004	27.2431
	1.08	9.297830e-009	188.197	-1.014290e-004	27.2335
	2.16	9.224130e-009	187.036	-1.011070e-004	27.1597
	4.26	8.998380e-009	183.982	-9.963850e-005	26.9381
	6.48	8.619450e-009	179.758	-9.732760e-005	26.6413
	8.52	8.157060e-009	175.588	-9.458830e-005	26.3711
	10.79	7.687210e-009	172.025	-9.195980e-005	26.1523

Após 30 dias de Integração	0.81	9.300020e-009	188.213	-1.014320e-004	27.2206
	1.08	9.287080e-009	187.981	-1.014050e-004	27.2078
	2.16	9.182400e-009	186.204	-1.009270e-004	27.0956
	4.26	8.862160e-009	181.326	-9.882980e-005	26.7424
	6.48	8.355070e-009	174.654	-9.569430e-005	26.273
	8.52	7.742320e-009	167.865	-9.205630e-005	25.8302
	10.79	7.167450e-009	162.453	-8.878010e-005	25.5037

Tabela A.5 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima, da solução euleriana do Caso 2.

$NCFL$	$\bar{\xi}$	\overline{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
--------	-------------	-----------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de integração

0.84	1.040210e-008	81.3978	-1.029430e-004	22.7167
------	---------------	---------	----------------	---------

Após 10 dias de integração

0.84	1.040110e-008	81.3594	-1.030220e-004	22.6431
------	---------------	---------	----------------	---------

Após 20 dias de integração

0.84	1.039910e-008	81.6522	-1.023900e-004	22.7805
------	---------------	---------	----------------	---------

Após 30 dias de integração

0.84	1.039710e-008	81.7031	-1.034340e-004	22.8245
------	---------------	---------	----------------	---------

Tabela A.6 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução

SL3T do Caso 2.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.84	1.025750e-008	81.2409	-1.033170e-004	22.6737
	1.05	1.025580e-008	81.2352	-1.033520e-004	22.6729
	2.10	1.026170e-008	81.2728	-1.034160e-004	22.6792
	4.19	1.031290e-008	81.4393	-1.031990e-004	22.6939
	6.29	1.012070e-008	80.1505	-1.023260e-004	22.5202
	8.39	9.974520e-009	79.2148	-1.014720e-004	22.3986
	10.48	9.779550e-009	78.1502	-1.002930e-004	22.2496

Após 10 dias de Integração	0.84	1.023890e-008	81.113	-1.034380e-004	22.6422
	1.05	1.023940e-008	81.1281	-1.034840e-004	22.6444
	2.10	1.026870e-008	81.3157	-1.036130e-004	22.6715
	4.19	1.040620e-008	81.8098	-1.032980e-004	22.716
	6.29	1.006920e-008	79.9163	-1.018290e-004	22.4629
	8.39	9.841010e-009	78.7401	-1.005350e-004	22.3066
	10.48	9.589180e-009	77.4283	-9.910700e-005	22.1256

Após 20 dias de Integração	0.84	1.020650e-008	80.8538	-1.034110e-004	22.6045
	1.05	1.021140e-008	80.9045	-1.034790e-004	22.6123
	2.10	1.028870e-008	81.4374	-1.037250e-004	22.6876
	4.19	1.060290e-008	82.8746	-1.031490e-004	22.8386
	6.29	9.955700e-009	78.9656	-1.004790e-004	22.3166
	8.39	9.573280e-009	76.9513	-9.840530e-005	22.0527
	10.48	9.192280e-009	74.9991	-9.635410e-005	21.773

Após 30 dias de Integração	0.84	1.017670e-008	80.6022	-1.032690e-004	22.5724
	1.05	1.018600e-008	80.6885	-1.033600e-004	22.5851
	2.10	1.031230e-008	81.5721	-1.037170e-004	22.7087
	4.19	1.080210e-008	83.8791	-1.027830e-004	22.9581
	6.29	9.831810e-009	77.7042	-9.901120e-005	22.1369
	8.39	9.310840e-009	74.7063	-9.619490e-005	21.7414
	10.48	8.772340e-009	71.8298	-9.341760e-005	21.3214

Tabela A.7 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução

SL2TMB do Caso 2.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.84	1.025290e-008	81.2023	-1.032670e-004	22.668
	1.05	1.024840e-008	81.1756	-1.032830e-004	22.6642
	2.10	1.022910e-008	81.0317	-1.032460e-004	22.645
	4.19	1.019130e-008	80.6718	-1.029070e-004	22.5978
	6.29	1.018830e-008	80.2738	-1.023850e-004	22.5401
	8.39	1.006190e-008	79.152	-1.010820e-004	22.3781
	10.48	9.763210e-009	77.1935	-9.927550e-005	22.0948

Após 10 dias de Integração	0.84	1.023130e-008	81.0471	-1.033580e-004	22.6325
	1.05	1.022710e-008	81.0269	-1.033750e-004	22.6299
	2.10	1.021150e-008	80.9331	-1.033600e-004	22.6176
	4.19	1.020330e-008	80.7217	-1.030840e-004	22.5886
	6.29	1.031120e-008	80.7307	-1.027640e-004	22.5757
	8.39	1.019190e-008	79.496	-1.010960e-004	22.3811
	10.48	9.763470e-009	77.0487	-9.868390e-005	22.0374

Após 20 dias de Integração	0.84	1.019260e-008	80.7316	-1.032770e-004	22.5869
	1.05	1.018880e-008	80.7165	-1.032990e-004	22.5854
	2.10	1.018130e-008	80.6903	-1.033250e-004	22.5837
	4.19	1.023370e-008	80.8873	-1.031620e-004	22.61
	6.29	1.058410e-008	82.2824	-1.032670e-004	22.7793
	8.39	1.046910e-008	80.6764	-1.007640e-004	22.5042
	10.48	9.745740e-009	76.5064	-9.706410e-005	21.9234

Após 30 dias de Integração	0.84	1.015620e-008	80.4233	-1.030850e-004	22.5471
	1.05	1.015280e-008	80.4131	-1.031130e-004	22.5462
	2.10	1.015360e-008	80.452	-1.031810e-004	22.5533
	4.19	1.026860e-008	81.0825	-1.031240e-004	22.6397
	6.29	1.089430e-008	84.1848	-1.037020e-004	23.0373
	8.39	1.073710e-008	81.8747	-1.000410e-004	22.6445
	10.48	9.691680e-009	75.5425	-9.527930e-005	21.7756

Tabela A.8 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3TM do Caso 2.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.84	1.025780e-008	81.2434	-1.033220e-004	22.674
	1.05	1.025540e-008	81.234	-1.033570e-004	22.6726
	2.10	1.024570e-008	81.1716	-1.034070e-004	22.6651
	4.19	1.024730e-008	81.127	-1.033050e-004	22.6602
	6.29	1.019080e-008	80.6415	-1.028020e-004	22.5911
	8.39	1.008800e-008	79.8197	-1.020090e-004	22.48
	10.48	9.926610e-009	78.8289	-1.009340e-004	22.3422

Após 10 dias de Integração	0.84	1.023950e-008	81.1186	-1.034480e-004	22.6429
	1.05	1.023850e-008	81.1248	-1.034950e-004	22.6439
	2.10	1.023570e-008	81.1205	-1.035880e-004	22.6453
	4.19	1.027300e-008	81.2363	-1.035160e-004	22.6586
	6.29	1.020890e-008	80.6902	-1.027740e-004	22.5784
	8.39	1.006260e-008	79.7109	-1.015910e-004	22.4367
	10.48	9.849180e-009	78.4943	-1.001850e-004	22.2643

Após 20 dias de Integração	0.84	1.020770e-008	80.8665	-1.034310e-004	22.6061
	1.05	1.020970e-008	80.8981	-1.035010e-004	22.6114
	2.10	1.022110e-008	81.0155	-1.036650e-004	22.6305
	4.19	1.032960e-008	81.5764	-1.036170e-004	22.701
	6.29	1.024810e-008	80.7985	-1.023830e-004	22.5794
	8.39	1.001740e-008	79.2666	-1.004800e-004	22.3516
	10.48	9.677450e-009	77.3341	-9.829000e-005	22.0766

Após 30 dias de Integração	0.84	1.017850e-008	80.6216	-1.032990e-004	22.5749
	1.05	1.018340e-008	80.6798	-1.033930e-004	22.5836
	2.10	1.020900e-008	80.9066	-1.036160e-004	22.6178
	4.19	1.038980e-008	81.9389	-1.035810e-004	22.7511
	6.29	1.028970e-008	80.8774	-1.018500e-004	22.5891
	8.39	9.976030e-009	78.6288	-9.926560e-005	22.2571
	10.48	9.498380e-009	75.7416	-9.625730e-005	21.8516

Tabela A.9 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média, energia cinética média e vorticidade média) e da velocidade máxima, da solução euleriana do Caso 3.

$NCFL$	$\bar{\xi}$	\overline{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
--------	-------------	-----------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de integração

0.84	1.584750e-008	75.5909	-1.254800e-004	23.374
------	---------------	---------	----------------	--------

Após 10 dias de integração

0.84	1.584570e-008	75.7387	-1.260750e-004	23.332
------	---------------	---------	----------------	--------

Após 20 dias de integração

0.84	1.584150e-008	75.779	-1.268140e-004	23.3567
------	---------------	--------	----------------	---------

Após 30 dias de integração

0.84	1.583690e-008	75.7865	-1.267060e-004	23.3706
------	---------------	---------	----------------	---------

Tabela A.10 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3T do Caso 3.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.84	1.558110e-008	75.2393	-1.265430e-004	23.2833
	1.05	1.558270e-008	75.2592	-1.266260e-004	23.286
	2.10	1.561790e-008	75.4209	-1.268640e-004	23.3164
	4.19	1.570450e-008	75.6539	-1.267120e-004	23.3484
	6.29	1.543790e-008	74.5669	-1.258980e-004	23.2008
	8.39	1.530300e-008	73.95	-1.254410e-004	23.1128
	10.48	1.484530e-008	72.2901	-1.233220e-004	22.8673

Após 10 dias de Integração	0.84	1.551570e-008	74.9291	-1.265780e-004	23.2526
	1.05	1.552370e-008	74.985	-1.266920e-004	23.2597
	2.10	1.562090e-008	75.4275	-1.271300e-004	23.3309
	4.19	1.583570e-008	76.0468	-1.268550e-004	23.4093
	6.29	1.536520e-008	74.329	-1.254950e-004	23.1627
	8.39	1.519420e-008	73.6748	-1.250520e-004	23.0637
	10.48	1.443400e-008	71.2555	-1.217700e-004	22.7024

Após 20 dias de Integração	0.84	1.540060e-008	74.344	-1.261760e-004	23.195
	1.05	1.542190e-008	74.4648	-1.263510e-004	23.2109
	2.10	1.564880e-008	75.5037	-1.271760e-004	23.3773
	4.19	1.610430e-008	76.9109	-1.264220e-004	23.5714
	6.29	1.521170e-008	73.4382	-1.240240e-004	23.0629
	8.39	1.500510e-008	72.7188	-1.237910e-004	22.9274
	10.48	1.368130e-008	67.9392	-1.183470e-004	22.1686

Após 30 dias de Integração	0.84	1.529340e-008	73.7817	-1.255830e-004	23.1361
	1.05	1.532810e-008	73.9687	-1.258180e-004	23.1609
	2.10	1.568920e-008	75.6198	-1.270300e-004	23.4261
	4.19	1.634940e-008	77.5319	-1.255080e-004	23.6995
	6.29	1.506120e-008	72.4244	-1.223800e-004	22.9469
	8.39	1.488220e-008	71.8405	-1.226670e-004	22.8091
	10.48	1.306420e-008	64.6275	-1.153490e-004	21.6182

Tabela A.11 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL2TMB do Caso 3.

NCFL	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.84	1.557060e-008	75.1856	-1.264500e-004	23.2757
	1.05	1.556660e-008	75.1821	-1.264980e-004	23.2746
	2.10	1.554520e-008	75.0973	-1.265150e-004	23.2635
	4.19	1.552140e-008	74.9107	-1.262370e-004	23.2509
	6.29	1.556570e-008	74.7173	-1.257760e-004	23.2357
	8.39	1.531370e-008	73.5113	-1.240060e-004	23.0659
	10.48	1.487550e-008	71.5734	-1.219450e-004	22.7957

Após 10 dias de Integração	0.84	1.549630e-008	74.8258	-1.264200e-004	23.2391
	1.05	1.549440e-008	74.8351	-1.264770e-004	23.2392
	2.10	1.548620e-008	74.8403	-1.265580e-004	23.2384
	4.19	1.554200e-008	74.9674	-1.265020e-004	23.2703
	6.29	1.581540e-008	75.4735	-1.264610e-004	23.3634
	8.39	1.549550e-008	73.8973	-1.239500e-004	23.1058
	10.48	1.489250e-008	71.5181	-1.213780e-004	22.7716

Após 20 dias de Integração	0.84	1.536190e-008	74.1399	-1.258970e-004	23.169
	1.05	1.536420e-008	74.1693	-1.259720e-004	23.1715
	2.10	1.538370e-008	74.3103	-1.261830e-004	23.189
	4.19	1.560750e-008	75.1818	-1.265540e-004	23.3441
	6.29	1.639540e-008	77.7031	-1.273530e-004	23.7717
	8.39	1.585530e-008	74.8913	-1.229440e-004	23.2877
	10.48	1.490310e-008	71.1668	-1.195690e-004	22.7498

Após 30 dias de Integração	0.84	1.523430e-008	73.4736	-1.251850e-004	23.0969
	1.05	1.524090e-008	73.524	-1.252800e-004	23.1018
	2.10	1.528890e-008	73.8045	-1.256220e-004	23.1382
	4.19	1.568910e-008	75.4576	-1.264200e-004	23.4247
	6.29	1.706830e-008	80.2793	-1.280410e-004	24.2252
	8.39	1.612340e-008	75.3849	-1.211170e-004	23.4166
	0.84	1.523430e-008	73.4736	-1.251850e-004	23.0969

Tabela A.12 – Valores das Grandezas Conservativas (enstrofia média $\bar{\xi}$, energia cinética média \bar{Ec} e vorticidade média $\bar{\zeta}$) e da velocidade máxima \vec{U}_{MAX} , da solução SL3TM do Caso 3.

<i>NCFL</i>	$\bar{\xi}$	\bar{Ec}	$\bar{\zeta}$	\vec{U}_{MAX}
-------------	-------------	------------	---------------	-----------------

Após 05 dias de Integração	0.84	1.558070e-008	75.2379	-1.265480e-004	23.2828
	1.05	1.558060e-008	75.2517	-1.266300e-004	23.2842
	2.10	1.558250e-008	75.2776	-1.268300e-004	23.2897
	4.19	1.560960e-008	75.3765	-1.268940e-004	23.3113
	6.29	1.556410e-008	75.1085	-1.264990e-004	23.2814
	8.39	1.540100e-008	74.3428	-1.256050e-004	23.1723
	10.48	1.521870e-008	73.5581	-1.245570e-004	23.0689

Após 10 dias de Integração	0.84	1.551490e-008	74.9276	-1.265890e-004	23.2516
	1.05	1.551950e-008	74.9699	-1.267010e-004	23.256
	2.10	1.554820e-008	75.1482	-1.270580e-004	23.2797
	4.19	1.565080e-008	75.5088	-1.272750e-004	23.3364
	6.29	1.563130e-008	75.2747	-1.267440e-004	23.3049
	8.39	1.539150e-008	74.2779	-1.253980e-004	23.1556
	10.48	1.517990e-008	73.3719	-1.242600e-004	23.0321

Após 20 dias de Integração	0.84	1.539910e-008	74.3415	-1.261970e-004	23.1931
	1.05	1.541350e-008	74.4342	-1.263690e-004	23.2035
	2.10	1.549790e-008	74.8941	-1.270140e-004	23.265
	4.19	1.574990e-008	75.891	-1.274450e-004	23.4223
	6.29	1.577550e-008	75.7594	-1.265890e-004	23.4144
	8.39	1.539530e-008	74.0779	-1.243990e-004	23.1449
	10.48	1.505260e-008	72.7606	-1.228380e-004	22.957

Após 30 dias de Integração	0.84	1.529120e-008	73.778	-1.256130e-004	23.1333
	1.05	1.531550e-008	73.9227	-1.258440e-004	23.1497
	2.10	1.545580e-008	74.659	-1.267580e-004	23.2492
	4.19	1.585740e-008	76.2893	-1.273740e-004	23.5108
	6.29	1.591230e-008	76.1921	-1.261030e-004	23.5253
	8.39	1.541080e-008	73.8209	-1.231870e-004	23.1413
	10.48	1.488280e-008	71.7949	-1.210410e-004	22.8495

APÊNDICE B - Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma, Razão da Soma dos Quadrados, Erro Médio Quadrático e Razão dos Desvios Padrões.

Tabela B.1 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3T do Caso 1.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.81	0.999576	0.999206	1.132264e+003	0.999642
	1.08	0.999238	0.998526	1.982071e+003	0.999297
	2.16	0.996798	0.993802	8.145717e+003	0.997038
	4.26	0.991421	0.984105	2.099816e+004	0.992886
	6.48	0.98464	0.970467	3.898818e+004	0.985821
	8.52	0.980074	0.961365	5.116256e+004	0.981097
	10.79	0.977197	0.956305	5.826398e+004	0.978936

Após 250 horas de integração	0.81	0.999347	0.99867	1.976798e+003	0.999317
	1.08	0.998872	0.997712	3.144721e+003	0.998832
	2.16	0.995007	0.990223	1.286831e+004	0.995233
	4.26	0.987182	0.976282	3.142027e+004	0.989352
	6.48	0.977119	0.955431	5.913041e+004	0.977956
	8.52	0.969398	0.939669	8.039834e+004	0.969317
	10.79	0.965854	0.933525	8.917367e+004	0.966677

Após 500 horas de Integração	0.81	0.998114	0.996272	6.172238e+003	0.998163
	1.08	0.997206	0.994476	8.166506e+003	0.997275
	2.16	0.988823	0.978331	2.877429e+004	0.989515
	4.26	0.972276	0.948969	6.816422e+004	0.976853
	6.48	0.951228	0.905397	1.274201e+005	0.951951
	8.52	0.934403	0.871714	1.742185e+005	0.932577
	10.79	0.929006	0.861586	1.886730e+005	0.927075

Após 716 horas de Integração	0.81	0.997185	0.994737	7.070137e+003	0.997626
	1.08	0.995873	0.992161	1.039968e+004	0.996362
	2.16	0.983359	0.968162	4.207238e+004	0.98481
	4.26	0.958049	0.923505	1.027825e+005	0.965229
	6.48	0.925931	0.858227	1.935174e+005	0.927091
	8.52	0.899675	0.80746	2.663309e+005	0.897015
	10.79	0.888431	0.785719	2.983219e+005	0.883476

Tabela B.2 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL2TMB do CASO 1.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.81	0.999548	0.999182	1.174429e+003	0.999652
	1.08	0.999349	0.998768	1.680768e+003	0.999435
	2.16	0.997803	0.995814	5.527781e+003	0.998053
	4.26	0.991583	0.984139	2.092263e+004	0.992696
	6.48	0.984154	0.970589	3.896367e+004	0.986673
	8.52	0.978292	0.9605	5.262615e+004	0.982588
	10.79	0.972872	0.950554	6.608401e+004	0.977978

Após 250 horas de integração	0.81	0.99938	0.998781	1.859784e+003	0.999405
	1.08	0.999173	0.998343	2.373206e+003	0.999168
	2.16	0.997336	0.994796	6.908875e+003	0.997479
	4.26	0.989322	0.979585	2.692380e+004	0.990343
	6.48	0.979325	0.961088	5.153955e+004	0.981831
	8.52	0.971002	0.946662	7.107720e+004	0.975796
	10.79	0.962146	0.929669	9.404256e+004	0.967145

Após 500 horas de Integração	0.81	0.998281	0.996677	5.775830e+003	0.998418
	1.08	0.998036	0.996146	6.312994e+003	0.998121
	2.16	0.995086	0.990417	1.314641e+004	0.995356
	4.26	0.980477	0.962508	4.972770e+004	0.981937
	6.48	0.962315	0.92863	9.530132e+004	0.965588
	8.52	0.948115	0.904228	1.289719e+005	0.954931
	10.79	0.932096	0.873308	1.721891e+005	0.937986

Após 716 horas de Integração	0.81	0.997462	0.995385	6.286127e+003	0.998019
	1.08	0.997179	0.994763	7.055154e+003	0.997666
	2.16	0.993157	0.986945	1.723983e+004	0.993876
	4.26	0.971717	0.946064	7.166224e+004	0.974017
	6.48	0.944804	0.896202	1.397476e+005	0.949383
	8.52	0.925357	0.863509	1.858633e+005	0.934853
	10.79	0.904958	0.825377	2.407990e+005	0.913603

Tabela B.3 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3TM do Caso 1.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.81	0.99965	0.999351	9.610764e+002	0.999712
	1.08	0.999441	0.998909	1.493098e+003	0.999475
	2.16	0.998101	0.996267	4.914615e+003	0.998175
	4.26	0.994303	0.989168	1.425393e+004	0.994954
	6.48	0.988945	0.979137	2.751663e+004	0.990334
	8.52	0.984469	0.970839	3.856936e+004	0.986528
	10.79	0.980844	0.964135	4.760217e+004	0.983433

Após 250 horas de integração	0.81	0.999498	0.998965	1.648927e+003	0.99946
	1.08	0.999218	0.998372	2.334645e+003	0.999139
	2.16	0.997448	0.994837	6.836566e+003	0.997368
	4.26	0.992461	0.985491	1.909698e+004	0.993092
	6.48	0.985456	0.972232	3.665341e+004	0.986831
	8.52	0.978959	0.960003	5.296471e+004	0.981007
	10.79	0.97327	0.94921	6.749189e+004	0.975724

Após 500 horas de Integração	0.81	0.998428	0.996884	5.561754e+003	0.998459
	1.08	0.997971	0.995926	6.536291e+003	0.997946
	2.16	0.99457	0.989161	1.470667e+004	0.994559
	4.26	0.98497	0.971144	3.824835e+004	0.986183
	6.48	0.971952	0.946356	7.137224e+004	0.974043
	8.52	0.959004	0.921825	1.045789e+005	0.961723
	10.79	0.948102	0.901128	1.329679e+005	0.950973

Após 716 horas de Integração	0.81	0.997633	0.995612	5.958434e+003	0.99805
	1.08	0.997017	0.994329	7.579126e+003	0.997368
	2.16	0.992039	0.984472	2.043959e+004	0.992446
	4.26	0.977446	0.957148	5.678172e+004	0.979629
	6.48	0.957773	0.919953	1.071642e+005	0.961117
	8.52	0.937653	0.88228	1.591242e+005	0.941671
	10.79	0.921535	0.85227	2.013134e+005	0.925564

Tabela B.4 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3T do Caso 2.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.84	0.998665	0.997715	1.627624e+003	0.999112
	1.05	0.998696	0.997672	1.619158e+003	0.999021
	2.10	0.998923	0.998235	1.586510e+003	0.999376
	4.19	0.998884	1.00013	3.118535e+003	1.00163
	6.29	0.989673	0.982551	9.861830e+003	0.993314
	8.39	0.982517	0.969771	1.676523e+004	0.987757
	10.48	0.974436	0.955161	2.456431e+004	0.98115

Após 250 horas de integração	0.84	0.996319	0.994561	6.820224e+003	0.998552
	1.05	0.996514	0.99481	6.730791e+003	0.998584
	2.10	0.997717	0.997454	6.707630e+003	1.00007
	4.19	0.998935	1.00365	9.598544e+003	1.00567
	6.29	0.985701	0.977549	1.504736e+004	0.992711
	8.39	0.976572	0.961219	2.340333e+004	0.985524
	10.48	0.966836	0.943315	3.245257e+004	0.977091

Após 500 horas de Integração	0.84	0.993718	0.989234	6.787643e+003	0.995778
	1.05	0.994189	0.989984	6.410348e+003	0.996031
	2.10	0.997529	0.997316	4.785658e+003	1.00016
	4.19	1.00262	1.01548	1.477233e+004	1.01445
	6.29	0.975371	0.961287	2.334181e+004	0.987177
	8.39	0.959439	0.933004	3.861318e+004	0.974484
	10.48	0.945102	0.906148	5.257082e+004	0.960917

Após 716 horas de Integração	0.84	0.991265	0.985046	8.630328e+003	0.99413
	1.05	0.991971	0.986229	8.006063e+003	0.994579
	2.10	0.997151	0.997658	4.948277e+003	1.00106
	4.19	1.00494	1.02502	2.134986e+004	1.02232
	6.29	0.9643	0.94406	3.320880e+004	0.9813
	8.39	0.941312	0.903819	5.537780e+004	0.963044
	10.48	0.92109	0.866039	7.538836e+004	0.943143

Tabela B.5 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL2TMB do Caso 2.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.84	0.998326	0.99716	1.891075e+003	0.998915
	1.05	0.998203	0.996833	2.007155e+003	0.998697
	2.10	0.997242	0.994933	2.914450e+003	0.997758
	4.19	0.994158	0.989984	5.736188e+003	0.996071
	6.29	0.989922	0.984237	9.625440e+003	0.99496
	8.39	0.98021	0.968539	1.836948e+004	0.989351
	10.48	0.965349	0.94178	3.245322e+004	0.9772

Após 250 horas de integração	0.84	0.995733	0.993604	7.134112e+003	0.998214
	1.05	0.995671	0.99337	7.156620e+003	0.998023
	2.10	0.995117	0.992184	7.520123e+003	0.997374
	4.19	0.992932	0.989278	9.388809e+003	0.996877
	6.29	0.990829	0.989137	1.249827e+004	0.9995
	8.39	0.979786	0.971544	2.059726e+004	0.993462
	10.48	0.961392	0.93786	3.665675e+004	0.977743

Após 500 horas de Integração	0.84	0.992645	0.98747	7.706861e+003	0.995138
	1.05	0.992639	0.987306	7.731597e+003	0.994955
	2.10	0.992608	0.98707	7.824337e+003	0.994719
	4.19	0.992806	0.9897	8.172666e+003	0.997534
	6.29	0.998401	1.00828	1.470062e+004	1.01171
	8.39	0.983099	0.984491	2.094210e+004	1.00422
	10.48	0.952438	0.926615	4.413684e+004	0.975983

Após 716 horas de Integração	0.84	0.989772	0.982574	9.981263e+003	0.993212
	1.05	0.989816	0.982477	9.975173e+003	0.993039
	2.10	0.990219	0.983039	9.660628e+003	0.993164
	4.19	0.992559	0.990685	8.430105e+003	0.999011
	6.29	1.00633	1.02892	2.401813e+004	1.02495
	8.39	0.985287	0.99556	2.600823e+004	1.01417
	10.48	0.941935	0.912297	5.359736e+004	0.97245

Tabela B.6 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3TM do Caso 2.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.84	0.998697	0.997756	1.601554e+003	0.999118
	1.05	0.998712	0.997662	1.603532e+003	0.998987
	2.10	0.99841	0.996896	1.929435e+003	0.998495
	4.19	0.997699	0.996246	2.623033e+003	0.998683
	6.29	0.993517	0.989427	6.343773e+003	0.996269
	8.39	0.986872	0.978006	1.245855e+004	0.991688
	10.48	0.979088	0.964283	1.983663e+004	0.985811

Após 250 horas de integração	0.84	0.996384	0.994648	6.772099e+003	0.998568
	1.05	0.996544	0.994785	6.676756e+003	0.998515
	2.10	0.996726	0.994863	6.653503e+003	0.998364
	4.19	0.996849	0.996363	7.352602e+003	0.999952
	6.29	0.991814	0.988527	1.060227e+004	0.997482
	8.39	0.983822	0.974821	1.676880e+004	0.991991
	10.48	0.974249	0.957952	2.526780e+004	0.984722

Após 500 horas de Integração	0.84	0.993858	0.989424	6.664634e+003	0.995816
	1.05	0.994251	0.989936	6.350505e+003	0.995893
	2.10	0.995342	0.991702	5.535805e+003	0.996509
	4.19	0.997714	0.99911	5.947678e+003	1.002
	6.29	0.989796	0.987544	1.169915e+004	0.998996
	8.39	0.976924	0.965651	2.211484e+004	0.99028
	10.48	0.961479	0.938423	3.625111e+004	0.978283

Após 716 horas de Integração	0.84	0.991467	0.985324	8.453142e+003	0.994188
	1.05	0.992058	0.98616	7.952569e+003	0.994383
	2.10	0.993832	0.98925	6.410785e+003	0.995646
	4.19	0.998223	1.002	7.124247e+003	1.00468
	6.29	0.987392	0.986546	1.467532e+004	1.001
	8.39	0.969302	0.955722	2.898781e+004	0.988566
	10.48	0.947177	0.916841	4.925540e+004	0.971118

Tabela B.7 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3T do Caso 3.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.84	0.996191	0.995007	3.676330e+003	0.999125
	1.05	0.996551	0.995391	3.436342e+003	0.99911
	2.10	0.997908	0.997913	3.089438e+003	1.00026
	4.19	0.998375	1.00103	4.615521e+003	1.00317
	6.29	0.990369	0.985084	7.333849e+003	0.995173
	8.39	0.985751	0.976123	1.044001e+004	0.990764
	10.48	0.972453	0.951611	1.992363e+004	0.979286

Após 250 horas de integração	0.84	0.992172	0.987443	6.649956e+003	0.995597
	1.05	0.99285	0.988364	6.237141e+003	0.995794
	2.10	0.996392	0.995158	4.766920e+003	0.999042
	4.19	0.998277	1.00366	7.676120e+003	1.00622
	6.29	0.986233	0.978254	1.062934e+004	0.992572
	8.39	0.981897	0.968945	1.356802e+004	0.987385
	10.48	0.962581	0.932714	2.761093e+004	0.969714

Após 500 horas de Integração	0.84	0.985788	0.978628	1.120597e+004	0.993557
	1.05	0.987043	0.98055	1.039287e+004	0.994176
	2.10	0.994864	0.996246	7.734551e+003	1.00216
	4.19	0.998621	1.01492	1.717154e+004	1.0183
	6.29	0.974616	0.963649	1.896894e+004	0.990349
	8.39	0.971133	0.953877	2.085516e+004	0.98351
	10.48	0.933274	0.882101	4.864044e+004	0.94653

Após 716 horas de Integração	0.84	0.980293	0.969908	1.480612e+004	0.99047
	1.05	0.982048	0.972705	1.364109e+004	0.991475
	2.10	0.9936	0.996259	9.524928e+003	1.00374
	4.19	0.996744	1.01976	2.376532e+004	1.02589
	6.29	0.963629	0.948256	2.640627e+004	0.986281
	8.39	0.962359	0.940803	2.674172e+004	0.979318
	10.48	0.907764	0.837953	6.740372e+004	0.924814

Tabela B.8 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL2TMB do Caso 3.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.84	0.995619	0.994147	4.000437e+003	0.998869
	1.05	0.995763	0.994162	3.862156e+003	0.998706
	2.10	0.995354	0.993061	4.013566e+003	0.997977
	4.19	0.993188	0.990261	5.604763e+003	0.997513
	6.29	0.989861	0.987109	8.402215e+003	0.998079
	8.39	0.978261	0.968697	1.569759e+004	0.991584
	10.48	0.961885	0.940016	2.675114e+004	0.978979

Após 250 horas de integração	0.84	0.991089	0.985807	7.339428e+003	0.995093
	1.05	0.991348	0.986007	7.171300e+003	0.994998
	2.10	0.991761	0.986263	6.928344e+003	0.994777
	4.19	0.991921	0.988239	7.311408e+003	0.996801
	6.29	0.992648	0.995494	1.031254e+004	1.00403
	8.39	0.977532	0.971063	1.752593e+004	0.995131
	10.48	0.958098	0.935723	2.977579e+004	0.978657

Após 500 horas de Integração	0.84	0.983707	0.975403	1.258894e+004	0.99248
	1.05	0.984161	0.975919	1.226211e+004	0.992503
	2.10	0.985788	0.978274	1.117782e+004	0.993157
	4.19	0.990942	0.991269	1.029288e+004	1.00142
	6.29	1.00328	1.02788	2.251173e+004	1.02684
	8.39	0.976257	0.983023	2.587212e+004	1.0101
	10.48	0.947777	0.927986	3.793309e+004	0.982325

Após 716 horas de Integração	0.84	0.977354	0.965283	1.680809e+004	0.988843
	1.05	0.977981	0.966084	1.636379e+004	0.98898
	2.10	0.980661	0.970287	1.456301e+004	0.990446
	4.19	0.990254	0.99321	1.253257e+004	1.00444
	6.29	1.01349	1.05825	3.555333e+004	1.04736
	8.39	0.970785	0.984807	3.505794e+004	1.01861
	0.84	0.977354	0.965283	1.680809e+004	0.988843

Tabela B.9 – Valores das Grandezas Estatísticas: Razão da Soma $\left(\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}\right)$, Razão da Soma dos Quadrados $\left(\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}\right)$, Erro Médio Quadrático (RMS) e Razão dos Desvios Padrões. $\left(\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}\right)$, da solução SL3TM do Caso 3.

<i>NCFL</i>	$\frac{\sum \psi}{\sum \psi_{EUL}}$	$\frac{\sum \psi^2}{\sum \psi_{EUL}^2}$	<i>RMS</i>	$\frac{\sigma}{\sigma_{EUL}}$
-------------	-------------------------------------	---	------------	-------------------------------

Após 125 horas de Integração	0.84	0.99621	0.995	3.649582e+003	0.999093
	1.05	0.996542	0.995291	3.406121e+003	0.99901
	2.10	0.997194	0.995862	2.969796e+003	0.998842
	4.19	0.997736	0.997385	3.077776e+003	0.999877
	6.29	0.994912	0.993293	4.765723e+003	0.998785
	8.39	0.988246	0.981751	8.756076e+003	0.994039
	10.48	0.981246	0.969913	1.348555e+004	0.989292

Após 250 horas de integração	0.84	0.992214	0.987437	6.609033e+003	0.995537
	1.05	0.992833	0.988166	6.216567e+003	0.995592
	2.10	0.994992	0.991148	4.964246e+003	0.996274
	4.19	0.997293	0.996566	4.360672e+003	0.999507
	6.29	0.994216	0.992809	6.328683e+003	0.999098
	8.39	0.985564	0.977703	1.108279e+004	0.992775
	10.48	0.977697	0.964158	1.634901e+004	0.987124

Após 500 horas de Integração	0.84	0.985873	0.978621	1.111621e+004	0.993443
	1.05	0.987004	0.980147	1.033554e+004	0.99377
	2.10	0.991708	0.987469	7.371813e+003	0.996207
	4.19	0.997797	1.00216	7.665130e+003	1.00515
	6.29	0.993823	0.999359	1.141322e+004	1.00692
	8.39	0.979236	0.973591	1.665824e+004	0.995929
	10.48	0.968235	0.953619	2.314898e+004	0.986768

Após 716 horas de Integração	0.84	0.980415	0.969901	1.468952e+004	0.990312
	1.05	0.981988	0.972128	1.359669e+004	0.990895
	2.10	0.98879	0.983119	9.177749e+003	0.994917
	4.19	0.997968	1.00568	1.012578e+004	1.00887
	6.29	0.992559	1.00272	1.585601e+004	1.0122
	8.39	0.972857	0.967797	2.195578e+004	0.997182
	0.84	0.980415	0.969901	1.468952e+004	0.990312