USO DE FUNÇÕES DE GREEN PARA DETERMINAÇÃO DA EVOLUÇÃO NO TEMPO DAS TEMPERATURAS NA FACE INTERNA DE TUBULAÇÕES A PARTIR DO MONITORAMENTO DA TEMPERATURA NA SUA SUPERFÍCIE EXTERNA

Viviane Suzey Gomes de Melo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovado por:

_____

Prof. José Paulo Soares de Azevedo, Ph.D.

_____

Prof. Rodolfo Luiz Martins Suanno, Ph.D.

_____

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

_____

Prof. Antônio Carlos Marques Alvim, Ph.D.

_____

Eng. Miguel Angel Castro Cisternas, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2004

MELO, VIVIANE SUZEY GOMES DE

Uso das Funções de Green para Determinação da Evolução no Tempo das Temperaturas em Componentes a partir do Monitoramento da Temperatura na Superfície Externa [Rio de Janeiro] 2004

IX, 91 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Funções de Green 2. Difusão Transiente 3. Problema Inverso

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos que amam a vida

Agradecimentos

A Deus, por me ter dado, além de serenidade e paciência nos momentos mais difíceis de minha vida, uma família maravilhosa.

Aos meus queridos pais, por terem acreditado em seus filhos e por todo amor que, mesmo à distância, deles recebo.

A minha tia e amiga, Janine, pelo apoio em todos os momentos da minha formação.

Ao meu amado companheiro, Roberto, pelo valioso apoio a esse trabalho, estímulo da minha persistência.

À Eletronuclear, pela bolsa de pesquisa concedida.

À CAPES, pela criação do Programa Especial de Treinamento (PET) na graduação, do qual fiz parte.

Ao professor da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Leonardo S. Bittencourt, pelos anos em que me tutoriou, confiou e apostou na minha capacidade de trabalho, durante o período em que participei da família PET.

Ao professor José Paulo Soares de Azevedo, pela orientação, paciência, boa vontade e confiança no meu trabalho.

Ao professor e engenheiro da Eletronuclear, Rodolfo Luiz Martins Suanno, pela co-orientação e disponibilidade. Além, dos artigos e relatórios, que foram valiosos materiais de consulta.

Ao professor Antônio Carlos Marques Alvim, pela amizade, incentivo e dedicação, colaborando com preciosas sugestões.

Ao professor José Antônio Fontes Santiago e ao engenheiro da Eletronuclear Miguel Angel Castro Cisternas, pelo apoio e participação na minha banca de defesa de tese de mestrado.

Aos funcionários do Laboratório de Hidráulica Computacional (LHC), Franklin e Raul, pela agradável convivência diária e por todas as vezes em que gentilmente atenderam as minhas solicitações.

Ao estagiário do LHC, Eduardo Ferreira, pela colaboração na confecção de rotinas para saída de dados do programa de simulação que utilizei neste trabalho.

A meus grandes amigos Eduardo Perroni e Henri Sidney, pelo companheirismo e dedicação que demonstraram.

A meus filhos, Isabela e Miguel, pelo tempo de convívio que lhes foi subtraído e pelo amor incondicional que manifestam e que me sustenta.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

USO DE FUNÇÕES DE GREEN PARA DETERMINAÇÃO DA EVOLUÇÃO NO TEMPO DAS TEMPERATURAS NA FACE INTERNA DE TUBULAÇÕES A PARTIR DO MONITORAMENTO DA TEMPERATURA NA SUA SUPERFÍCIE EXTERNA

Viviane Suzey Gomes de Melo

Março/2004

Orientadores: José Paulo Soares de Azevedo
Rodolfo Luiz Martins Suanno

Programa: Engenharia Civil

O problema da difusão térmica transiente em geometria cilíndrica com condições de contorno cíclicas é estudado. A motivação provém das flutuações de temperatura observadas na parede externa da tubulação da linha de sucção do sistema de remoção de calor residual da usina nuclear de Angra I. A abordagem utilizada consiste no uso de funções de Green para transformar a equação diferencial do calor em uma equação integral em sua fronteira, resolvida numericamente utilizando o método dos elementos de contorno. Primeiramente resolve-se o problema unidimensional para saltos isolados de temperatura, obtendo-se informações importantes relativas ao atraso entre entrada e saída do simulador. Em seguida, resolve-se o problema bidimensional, resultante da estratificação térmica presente no fluido interior. A identificação dos perfis de temperatura no fluido é feita por um processo iterativo de tentativa e erro, até que os perfis de temperatura na face externa do duto estejam bastante próximos dos valores medidos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

USE OF GREEN FUNCTIONS TO ESTABLISH TEMPERATURES EVOLUTION IN THE INTERNAL SURFACE OF PIPES FROM THE EXTERNAL SURFACE TEMPERATURE MONITORING

Viviane Suzey Gomes de Melo

March/2004

Advisors: José Paulo Soares de Azevedo
Rodolfo Luiz Martins Suanno

Department: Civil Engineering

The transient thermal diffusion problem in cylindrical coordinates with cyclic boundary conditions is addressed. The motivation comes from the temperature fluctuations observed on the external surface in the residual heat removal auxiliary line of Angra I nuclear power plant. The approach involves the use of Green functions to transform the differential equation into an integral equation and integrate it using the boundary element method. The one-dimensional case is solved for temperature steps and input-output delay informations are extracted. Next, the two-dimensional problem is addressed. The fluid profiles identification is obtained by a oriented trial-and-error approach which is finished when one reaches a small difference between simulated and measured values.

Índice

Capítulo 1 Introdução 1

1.1 Histórico 2

1.2 Motivação 2

1.3 Monitoração térmica 4

1.4 Etapas do trabalho desenvolvido 6

Capítulo 2 Fundamentos teóricos 8

2.1 A equação diferencial da condução de calor 8

2.2 Condições de contorno e iniciais 10

2.3 O problema da condução de calor unidimensional 11

2.4 O problema da condução de calor bidimensional 13

2.5 Funções de Green para o problema térmico 14

2.6 Abordagem numérica 16

2.6.1 Solução fundamental 18

2.6.2 Equação integral de contorno para o regime permanente 19

2.6.3 Discretização espacial 21

2.6.4 Equação integral de contorno para o regime transiente 24

2.7 Problemas inversos 27

Capítulo 3 Análise térmica inversa unidimensional 30

3.1 Análise térmica direta 30

3.1.1 Dados gerais 30

3.1.2 Discretização da seção transversal 32

3.1.3 Verificação de linearidade 33

3.1.4 Resultados da análise direta para 16 elementos 35

3.1.5 Resultados da análise direta para 32 elementos 37

3.2 Análise térmica inversa 40

Capítulo 4 Análise térmica inversa bidimensional 42

4.1 Metodologia para a solução do problema inverso 42

4.2 Influência do coeficiente de convecção 43

4.3 Simulação térmica bidimensional 45

Capítulo 5 Conclusões e sugestões para futuros trabalhos 54

Referências bibliográficas 58

Apêndice 61

Capítulo 1

Introdução

Problemas térmicos em regime transiente encontram inumeráveis aplicações em toda a indústria. Como é fartamente conhecido, o calor pode se transmitir por condução, por convecção ou por radiação, sendo a forma de transmissão por condução aquela que apresenta o maior número de aplicações. Transferência de calor por convecção é sempre acompanhada do fenômeno da condução, uma vez que o contato entre elementos de diferentes temperaturas é inevitável em fluidos em movimento. Já a condução pura é encontrada na transferência de calor em sólidos.

O assunto abordado neste trabalho é o problema de condução de calor em regime transiente em uma seção de geometria circular. Mais especificamente, trata-se do estudo da condução de calor em uma seção de um duto circular de parede não fina. O problema será tratado inicialmente como unidimensional, significando que assumiremos a temperatura no interior da parede do duto dependendo exclusivamente da variável radial r, e do tempo t. Em seguida, o problema será tratado como bidimensional, ou seja, com a temperatura na parede do duto dependendo das variáveis espaciais radial r, e circunferencial θ, além, é claro, do tempo t. O problema não será tratado como tridimensional uma vez que não há variações importantes na temperatura ao longo do eixo da tubulação (coordenada z) e que todas as tomadas de temperatura foram efetuadas em uma seção reta do duto.

Os problemas térmicos transientes serão resolvidos numericamente utilizando-se o método dos elementos de contorno (MEC). A principal vantagem desse método numérico reside no fato de a discretização se realizar no *contorno* da região de interesse, ao contrário do método dos elementos finitos (MEF), onde a discretização se faz em todo o *domínio* em análise. Isso envolve uma economia de recursos computacionais. Programas comerciais robustos (e caros), tais como o ANSYS, tratam os problemas utilizando o MEF. A solução via MEC é, digamos, uma alternativa computacionalmente mais leve e econômica.

1.1 Histórico

Desde os anos 80 a estratificação térmica em tubulações tem recebido uma atenção crescente por parte da indústria nuclear. Várias usinas já apresentaram problemas de fadiga em tubulações em conseqüência da variação cíclica da carga térmica. A estratificação térmica depende da configuração da tubulação e do nível de carga da usina. Uma das possíveis conseqüências desse fenômeno é o aparecimento de fissuras nos trechos horizontais da tubulação [18,19]. Visando evitar possíveis vazamentos em tubulações, cujas conseqüências são indesejáveis, ações corretivas e preventivas foram consideradas em muitas usinas [11].

Para se tratar adequadamente problemas que envolvem tensões térmicas e, no caso de flutuações cíclicas, fadiga dos materiais envolvidos, a atenção primeira deve ser voltada para a questão térmica.

Diversos sistemas de tubulação são submetidos a transientes de estratificação térmica onde a temperatura é não uniforme em uma seção transversal. Na maioria das vezes esses transientes afetam não somente a tubulação em si mas também outros componentes adjacentes tais como bocais, válvulas etc. [11]. Esses transientes usualmente apresentam diversos ciclos, o que, em última análise, pode ocasionar fadiga do material, constituindo fator de risco de rompimento da tubulação.

As condições termo-hidráulicas durante esses transientes são usualmente pouco compreendidas, o que leva a uma dificuldade de modelar o problema. Na maioria dos casos, a distribuição de temperatura no fluido não pode ser avaliada mas deve ser medida experimentalmente. Como na época do projeto das usinas esse problema não era conhecido, não se previu a instalação de sensores no interior das tubulações, obrigando a efetuar essa medição na superfície externa do duto ou do componente.

1.2 Motivação

A motivação deste trabalho é a necessidade de conhecer o problema térmico transiente bidimensional em coordenadas cilíndricas, ou seja, o da determinação do campo de temperaturas $T(r, \theta, t)$ no interior da parede do duto e, mais especifica-

mente, das relações entre a temperatura do fluido escoando internamente, $T_f(\theta, t)$ e a temperatura na face externa, $T_e(\theta, t)$. A partir dessa solução, será feita uma análise inversa do problema térmico, qual seja, a determinação dos transientes de temperatura e sua estratificação no fluido a partir das informações dos termopares acoplados à face externa da tubulação. O conhecimento do campo de temperaturas no interior do duto é o ponto de partida para a análise termo-elástica e o correspondente estudo de fadiga do material.

Os principais obstáculos em um estudo dessa natureza são: o cálculo da distribuição das temperaturas no fluido a partir da medição da temperatura na parede externa do duto; a complexidade espacial do campo de temperaturas, que depende das coordenadas radial e circunferencial (problema bidimensional); e a complexidade dos transientes temporais, geralmente cíclicos, porém de aspecto aleatório, conforme ilustra a Fig. 1.1, indicando cinco leituras de $TP_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, 5$, correspondendo às temperaturas na face externa do duto em cinco termopares distribuídos ao redor da tubulação.

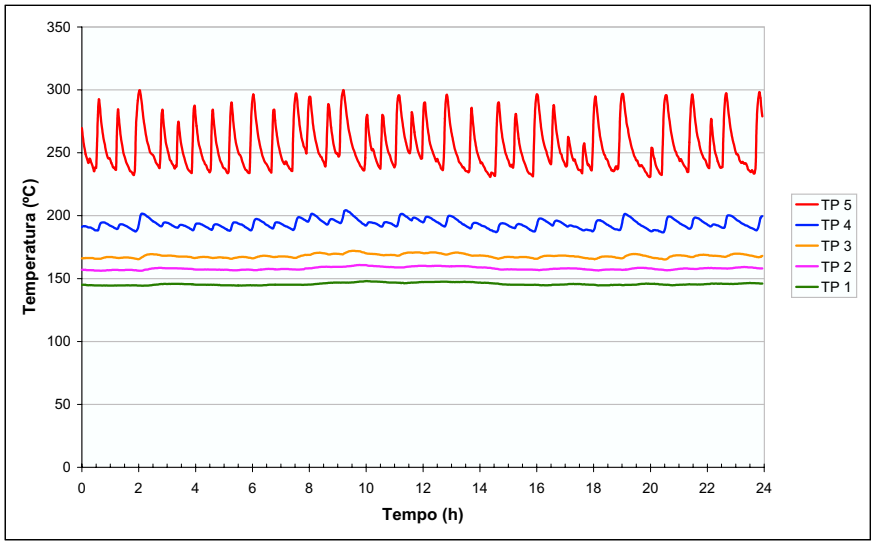

Figura 1.1 – Transiente de temperatura na superfície de um duto horizontal observando-se a flutuação maior medida pelo termopar superior (linha de cima)

Em uma tubulação, a dimensão axial é geralmente muito maior do que o diâmetro e variações de espessura da parede são usualmente desprezíveis, de tal

modo que a geometria pode ser assumida como cilíndrica [11]. Em tal geometria, geralmente é possível utilizar-se ferramentas analíticas para o estudo do campo de temperaturas, enquanto que para componentes mecânicos uma abordagem de elementos finitos é mandatória [27]. Neste trabalho, utilizaremos o método dos elementos de contorno, discutido no Capítulo 2, para o estudo dos gradientes de temperatura que surgem em determinados trechos de tubulação da usina nuclear de Angra I, em regime transiente.

1.2 Monitoração térmica

A fim de evitar problemas futuros, resultantes da estratificação térmica com características cíclicas e conseqüente possibilidade de fadiga, foi proposta a realização de um programa de monitoramento de temperatura na usina nuclear de Angra I. Realizou-se então um estudo para identificar quais sistemas da usina poderiam ser suscetíveis de estratificação térmica [18].

O estudo indicou a linha de sucção do sistema de remoção de calor residual (SRCR), localizada entre o sistema de resfriamento do reator e a válvula de isolamento, como um possível local de risco. Para avaliar qual a real gravidade do fenômeno, um sistema de monitoramento da temperatura foi instalado nesse local. A Fig. 1.2 ilustra a configuração do trecho considerado e o posicionamento dos sensores (termopares) sobre uma seção reta do duto.

O trecho em questão, parte do sistema SRCR, é construído em aço inoxidável, possui diâmetro externo de 219,07 mm e espessura de 23 mm. A temperatura foi registrada a cada 2 minutos através de um conjunto de cinco termopares instalados na superfície externa do duto, numa seção reta de um trecho horizontal localizada a 0,20 m a montante de uma válvula. Para a análise serão considerados os resultados do monitoramento com a usina em operação plena, ou seja, a 100% de carga.

O resultado das medições se manteve praticamente o mesmo desde seu início, em dezembro de 1998. Usaremos, nas simulações do Capítulo 4, a informação desse carregamento cíclico com o intuito de desenvolver procedimentos de análise inversa.

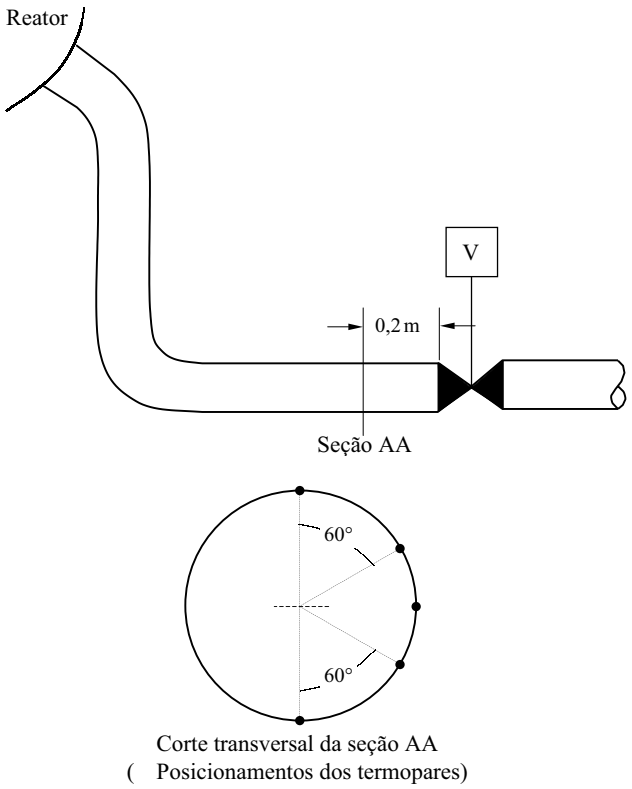

Figura 1.2 – Layout da tubulação do SRCR e posicionamento dos termopares. V indica uma vávula

A Fig. 1.3 mostra, com detalhe, um dos pseudo-ciclos presentes na Fig. 1.1.

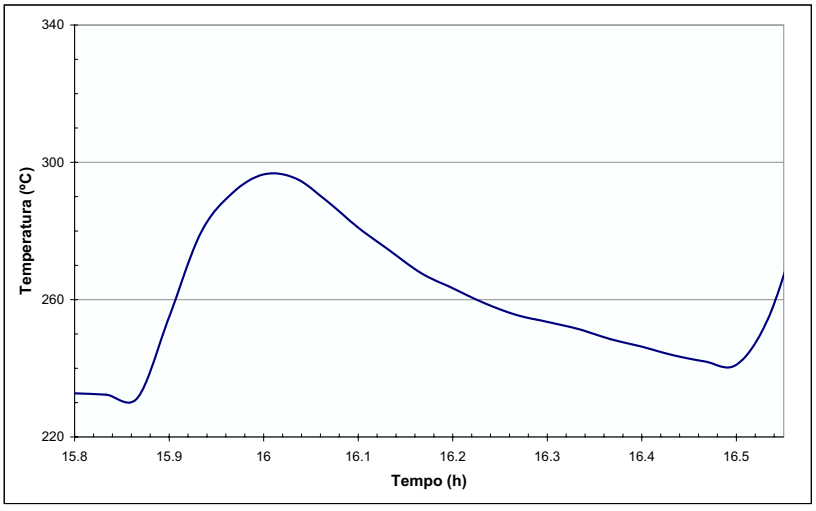

Figura 1.3 – Detalhe da variação da temperatura no termopar 5

Observando atentamente as Figs. 1.1 e 1.3 podemos caracterizar melhor o comportamento da temperatura na face externa do duto ao longo do tempo. Na

parte superior do duto, o perfil de temperaturas é tipicamente cíclico (termopar 5), assumindo em alguns trechos uma variação em torno de 75 ^{0}C num período de aproximadamente 40 minutos, atingindo picos de até 300 ^{0}C. Nos demais termopares, observa-se um crescente amortecimento das flutuações, verificando-se que o perfil é praticamente constante nos termopares 1, 2 e 3, com valores médios próximos a 167 ^{0}C, 157 ^{0}C e 145 ^{0}C, como indicado na Fig. 1.4.

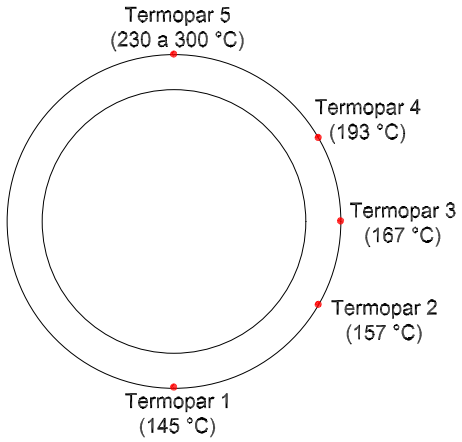

Figura 1.4 – Resultado das temperaturas (médias) medidas pelos termopares na tubulação do SRCR

Com base nesses resultados, que indicam uma forte flutuação térmica no fluido que escoa pela parte superior do duto horizontal, conclui-se da necessidade da determinação da distribuição de temperaturas no fluido, objeto deste estudo. O objetivo final deste trabalho, portanto, consiste na solução do problema térmico inverso, ou seja, o da determinação do campo de temperaturas no fluido a partir dos dados de temperatura, levantados na monitoração por termopares na superfície externa do duto.

1.3 Etapas do trabalho desenvolvido

No Capítulo 2 os fundamentos teóricos utilizados no trabalho são apresentados. Inicia-se deduzindo, de modo sucinto, a equação diferencial da condução de calor em regime transiente e formulando as condições de contorno e inicial para o problema que se deseja estudar. Em seguida, apresenta-se o problema da condução

de calor unidimensional, cuja simulação será tratada no Capítulo 3, e o problema da condução de calor bidimensional, cuja simulação será discutida no Capítulo 4.

Ainda no Capítulo 2, é discutido o método das funções de Green, que visa transformar a equação diferencial do calor em uma equação integral, propiciando a solução numérica pelo método dos elementos de contorno. Em seguida, apresenta-se a abordagem numérica, levando-se a formulação do problema térmico à sua forma algébrica. Não é discutida a implementação computacional propriamente dita. Ao final do capítulo, discute-se a abordagem para a solução de problemas inversos em engenharia e o método adotado neste trabalho.

No Capítulo 3 é realizada a análise térmica transiente unidimensional pelo método dos elementos de contorno. A atenção principal é dada à discussão do problema direto, pois é a partir de seus resultados que o problema inverso poderá ser atacado. Nesse capítulo discute-se o que sucede com a temperatura na parede externa da tubulação quando um choque térmico, ou degrau de temperatura, é imposto à temperatura do fluido no interior da tubulação. Verifica-se a linearidade da solução numérica e caracterizam-se alguns pontos-chave na curva de resposta simulada. Avalia-se também a influência do coeficiente de convecção na resposta obtida. O problema inverso, então é resolvido com a identificação da amplitude do choque térmico e do instante de tempo em que o mesmo ocorre.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados de simulação da análise térmica transiente bidimensional pelo método dos elementos de contorno. Também aqui, a atenção é centrada na solução do problema direto pelas razões já citadas. Nesse capítulo, assume-se um sinal cíclico na temperatura interna do fluido, à semelhança do que sucede com o sinal de saída no termopar 5. Após a solução do problema direto para alguns sinais escolhidos, busca-se, por tentativa e erro, aproximar a solução para o problema inverso (obtenção da temperatura do fluido em contato com a superfície interna da tubulação).

Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se as principais conclusões da pesquisa, bem como algumas sugestões quanto ao seu aprimoramento em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Este capítulo apresenta, resumidamente, os fundamentos teóricos da formulação matemática da condução térmica, com especial atenção para os regimes transientes uni e bidimensional. As funções de Green para o problema térmico são apresentadas e são utilizadas na abordagem numérica para a solução desses problemas para contorno de geometria arbitrária. Apresenta-se também uma discussão sucinta sobre problemas inversos.

2.1 A equação diferencial da condução de calor

A equação diferencial parcial que rege a condução de calor pode ser obtida a partir do balanço de energia térmica para um volume de controle V, cuja origem é a primeira lei da termodinâmica [23]. Esse balanço diz que a taxa de variação da energia térmica em V é igual à taxa de geração de energia dentro de V mais a taxa líquida (o que entra menos o que sai) de energia cruzando as fronteiras do volume de controle V [13,14,24].

O calor $d\Phi$ entrando em um volume V através de uma área infinitesimal $d\Gamma$ do seu contorno é dado por

$$d\Phi = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal exterior unitário e $\mathbf{q}$ é o vetor densidade de fluxo de calor no ponto, função do vetor posição $\mathbf{x}$ e do tempo t. O fluxo resultante de calor, portanto, atravessando a fronteira para dentro do volume de controle V será

$$\Phi = \int_{\Gamma} -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma, \tag{2.2}$$

onde Γ é a superfície do contorno de V, como indicado na Fig. 2.1. O calor gerado no volume V pode ser expresso por

$$\mathbf{Q} = \int_{V} q(\mathbf{x}, t)\, dV, \tag{2.3}$$

onde $q(\mathbf{x}, t)$ é a taxa de geração de calor por unidade de volume, dependente também da posição $\mathbf{x}$ e do tempo t.

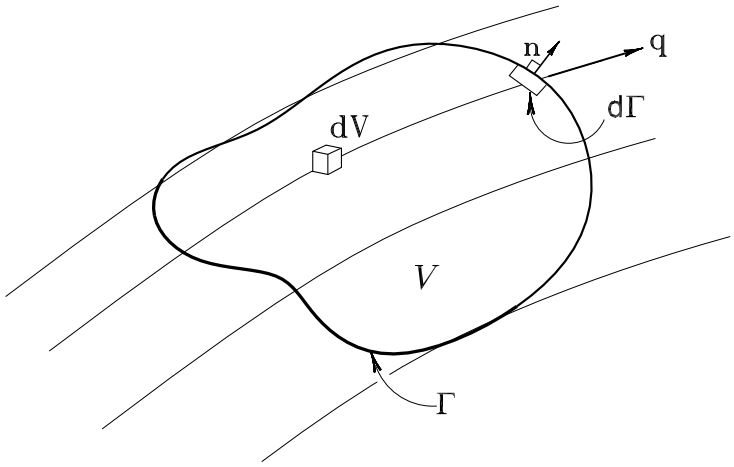

Figura 2.1 – Volume de controle imerso em um escoamento

A taxa de variação da energia térmica em V é dada por

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_V \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\, dV, \tag{2.4}$$

onde U é a energia térmica total no interior de V, ρ é a massa específica do material, c_p é seu calor específico a pressão constante e $T(\mathbf{x}, t)$ é o campo de temperaturas no interior do volume de controle.

Substituindo as Eqs. (2.2), (2.3) e (2.4) no balanço térmico descrito anteriormente, teremos

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\, dV = \int_\Gamma -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma + \int_V q(\mathbf{x}, t)\, dV. \tag{2.5}$$

Convertendo a integração na superfície em uma integração no volume, usando o teorema da divergência [25], o balanço de energia térmica fica da forma

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\, dV = \int_V -\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\, dV + \int_V q(\mathbf{x}, t)\, dV. \tag{2.6}$$

Como o volume de controle é arbitrário, os integrandos devem ser iguais, portanto,

$$\rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t). \tag{2.7}$$

Finalmente, expressando a densidade de fluxo de calor $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ em função do gradiente de temperatura, dada pela lei de Fourier [3,10],

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t), \tag{2.8}$$

onde k é o coeficiente de condutividade térmica, admitido como uniforme, obtém-se a equação diferencial da condução de calor, com geração interna

$$\rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} = k\nabla^2 T(\mathbf{x},t) + q(\mathbf{x},t). \tag{2.9}$$

Introduzindo a *difusividade térmica*

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \tag{2.10}$$

e não havendo fontes de calor no interior do sólido, a Eq. (2.9) reduz-se a

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 T(\mathbf{x},t), \tag{2.11}$$

conhecida como *equação de Fourier* ou equação da condução ou ainda equação da difusão. Essa equação é do tipo parabólico, porque envolve uma derivada parcial de primeira ordem da variável (temperatura, no caso) com respeito ao tempo e derivadas parciais de segunda ordem com respeito às coordenadas de posição [1].

2.2 Condições de contorno e iniciais

Usualmente, condições de contorno são estabelecidas para a equação do calor de modo a que não haja, do ponto de vista matemático, uma infinidade de soluções e que, do ponto de vista físico, correspondam à situação que, de fato, estamos estudando. As condições de contorno são comumente de três tipos [21,22]. As de primeiro tipo (ou de Dirichlet) são aquelas em que a temperatura é prescrita ao longo da superfície de contorno. Na sua forma mais geral é expressa por

$$T = f(\mathbf{x}_\Gamma, t), \tag{2.12}$$

onde f é uma função da posição no contorno $\mathbf{x}_\Gamma$, e do tempo t. Essa condição de contorno é também denominada de temperatura prescrita. Em casos especiais, f poderá ser uma função exclusivamente da posição ou do tempo ou mesmo uma constante. Nesse último caso, a condição é dada por $T = T_0$ ou, simplesmente, $T = 0$ para temperaturas medidas com referência a T_0, quando a condição de contorno do primeiro tipo é denominada *homogênea*.

Nas de segundo tipo (ou de Neumann), o que é prescrito na superfície de contorno é a derivada normal da temperatura, na forma

$$\frac{\partial T}{\partial n} = f(\mathbf{x}_\Gamma, t), \tag{2.13}$$

onde $\partial/\partial n$ indica diferenciação ao longo da direção normal exterior à superfície Γ. Essa condição de contorno corresponde à prescrição de um fluxo de calor na superfície segundo a lei de Fourier, sendo por isso denominada como condição de fluxo prescrito. No caso em que $f = 0$, quando temos uma condição de contorno do segundo tipo homogênea,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \tag{2.14}$$

correspondendo, fisicamente, à imposição de um isolamento térmico na superfície.

As condições de contorno de terceiro tipo (ou de Robin) consistem em uma combinação linear da temperatura e da sua derivada normal prescritas na superfície, da forma

$$k\frac{\partial T}{\partial n} + hT = f(\mathbf{x}_\Gamma, t), \tag{2.15}$$

onde k e h são constantes dimensionais. É usualmente denominada condição de convecção no contorno.

A condição inicial para a Eq. (2.11) é da forma

$$T(\mathbf{x}, \tau) = T_0(\mathbf{x}), \tag{2.16}$$

correspondendo a ter-se o campo de temperaturas para um instante $t = \tau$ (geralmente, assume-se $\tau = 0$), a partir da qual a equação do calor é integrada (analítica ou numericamente).

2.3 O problema da condução de calor unidimensional

O problema mais simples na condução de calor é o assim chamado problema unidimensional, ou seja, aquele em que o campo de temperaturas depende apenas de uma única coordenada de posição. Abordaremos aqui o problema unidimensional em geometria cilíndrica, já que é o interesse deste trabalho.

Considere um cilindro vazado (um duto) homogêneo e suficientemente longo de tal modo que os efeitos de extremidade possam ser desprezados (veja Fig. 2.2).

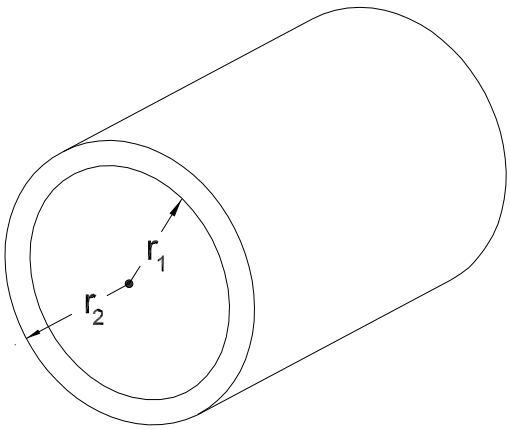

Figura 2.2 – Geometria cilíndrica

A equação de Fourier para este caso é, então, da forma

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right), \tag{2.17}$$

onde r é a coordenada radial, variando entre r_1 e r_2.

As condições de contorno deverão ser dadas nas superfícies interna ($r = r_1$) e externa ($r = r_2$). Se forem condições de contorno do primeiro tipo, serão expressas por:

$$T(r_1,t) = T_1(t); \quad T(r_2,t) = T_2(t), \tag{2.18}$$

para o problema transiente.

A condição inicial será do tipo

$$T(r,0) = T_0(r), \qquad r_1 < r < r_2. \tag{2.19}$$

Sendo imposta uma condição de convecção no contorno (terceiro tipo), esta será expressa por:

$$\frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = f_1(t); \qquad \frac{\partial T(r_2,t)}{\partial r} = f_2(t), \tag{2.20}$$

onde

$$f_1(t) = h_1\big(T(r_1,t) - T_i(t)\big), \tag{2.21}$$

e

$$f_2(t) = h_2\big(T(r_2,t) - T_e(t)\big), \tag{2.22}$$

sendo $T_i(t)$ a temperatura volumétrica do fluido interno e $T_e(t)$ a temperatura volumétrica do fluido externo. Os coeficientes de convecção interno e externo são h_1 e h_2 respectivamente.

O problema de condução descrito acima é denominado unidimensional porque a temperatura no interior do cilindro só depende do raio r, sendo o problema portanto axissimétrico. Do ponto de vista deste trabalho, a questão resume-se a, dado $T_f(t)$, e supondo-se que o cilindro está isolado termicamente na face externa, determinar $T_e(t) = T(r_2,t)$ (problema direto) ou, o contrário, dado $T_e(t)$, e também supondo-se que o cilindro está isolado termicamente na face externa, determinar $T_f(t)$ (problema inverso). A filosofia geral dos problemas inversos será abordada na Seção 2.7.

2.4 O problema da condução de calor bidimensional

Para um duto longo, onde as extremidades têm contribuição negligenciável e havendo um gradiente de temperatura, na direção circunferencial, no fluido interior (ou exterior), tem-se um problema de condução de calor bidimensional, ou seja, o campo de temperaturas dependerá de duas coordenadas espaciais (r,θ) e, naturalmente, do tempo.

A equação de Fourier, nesse caso, terá a forma [1]

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial \theta^2}, \tag{2.23}$$

onde, agora, r varia entre r_1 e r_2 e θ varia no intervalo $(0, 2\pi)$. Observe-se que o laplaciano agora envolve a derivada segunda da temperatura com respeito à coordenada angular θ, termo este ausente da Eq. (2.17).

As condições de contorno nas superfícies interna e externa, se do primeiro tipo, serão da forma:

$$T(r_1,\theta,t) = T_1(\theta,t); \quad T(r_2,\theta,t) = T_2(\theta,t). \tag{2.24}$$

Se do segundo tipo são expressas por:

$$\frac{\partial T(r_1,\theta,t)}{\partial r} = f_1(\theta,t); \qquad \frac{\partial T(r_2,\theta,t)}{\partial r} = f_2(\theta,t). \tag{2.25}$$

Se do terceiro tipo ou se de convecção:

$$\frac{\partial T(r_1,\theta,t)}{\partial r} = h_1\big(T(r_1,\theta,t) - T_i(\theta,t)\big), \tag{2.26}$$

e

$$\frac{\partial T(r_2,\theta,t)}{\partial r} = h_2\big(T(r_2,\theta,t) - T_e(\theta,t)\big), \tag{2.27}$$

sendo $T_i(\theta,t)$ a temperatura volumétrica do fluido interno em contato com a parede do duto, $T_e(\theta,t)$ a temperatura volumétrica do fluido externo em contato com o duto e h_1 e h_2 os coeficientes de convecção interno e externo, respectivamente.

A condição inicial para esse problema será do tipo

$$T(r,\theta,0) = f(r,\theta), \qquad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \theta < 2\pi. \tag{2.28}$$

O problema de condução, descrito acima, não mais é axissimétrico devido à dependência da temperatura com a coordenada θ. A solução do problema direto, sempre do ponto de vista deste trabalho, consiste em se determinar $T_e(\theta,t) = T(r_2,\theta,t)$ dado $T_i(\theta,t)$. A solução do problema inverso, que consiste no objetivo final deste trabalho, compreende a determinação do campo de temperaturas do fluido interior, $T_i(\theta,t)$, a partir do conhecimento da temperatura na face externa da tubulação, $T_e(\theta,t)$.

A análise de fadiga do material, objeto de outro trabalho de mestrado, baseia-se no campo de tensões de deformações térmicas no material da tubulação que, por sua vez, depende da distribuição de temperatura no interior da parede do duto, $T(r,\theta,t)$, cuja determinação não será tratada aqui.

2.5 Funções de Green para o problema térmico

A solução para um problema de valor de contorno de condução de calor com fontes distribuídas, condições de contorno não homogêneas e uma condição inicial

dada, podem ser representados na forma integral por meio de uma *Função de Green*, que nada mais é do que a solução de um problema de condução similar para condição inicial nula, condições de contorno homogêneas e uma fonte de calor instantânea e unitária situada em um único ponto da região. O método das funções de Green é extremamente útil sempre que essa função, para o problema em estudo, é conhecida.

O uso da função de Green na solução de equações diferenciais parciais é descrito por diversos autores [4,8], sendo particularmente interessante na solução de problemas de condução de calor. Em seguida, apresentamos um problema de condução de calor tridimensional com geração interna, no intuito de ilustrar o uso da função de Green.

Consideremos um problema de condução de calor para uma região Ω, com contorno Γ que está inicialmente à temperatura $F(\mathbf{x})$ em $t = 0$. Suas fronteiras estão sujeitas a condições de contorno do terceiro tipo. Para dar ao problema maior generalidade, assumiremos que a geração de calor e as condições de contorno dependem ambas da posição $\mathbf{x}$ e do tempo t. Tem-se, então,

$$\begin{aligned} \nabla^2 T + \frac{1}{k} q(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \text{em } \Omega, \quad t > 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial n} + hT &= f(\mathbf{x}, t), \qquad \text{em } \Gamma, \quad t > 0 \\ T &= F(\mathbf{x}), \qquad \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Consideremos, em seguida, o seguinte problema de valor de contorno auxiliar

$$\begin{aligned} \nabla^2 G + \frac{1}{k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - \tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \text{em } \Omega, \quad t > 0 \\ k \frac{\partial G}{\partial n} + hG &= 0, \qquad \text{em } \Gamma, \quad t > 0 \\ G &= 0, \qquad \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nesse último problema a função de geração térmica $q(\mathbf{x}, t)$ foi substituída por uma distribuição de Dirac na posição $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e no tempo $t = \tau$. As condições de contorno e inicial são homogêneas, portanto, a função $G(\mathbf{x}, t)$ é a função de Green para o problema de valor de contorno, Eq. (2.29).

O significado físico do problema expresso na Eq. (2.30) é traduzido pelo fato de que $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, \tau)$ é a temperatura na posição $\mathbf{x}$ e no tempo t devido a uma fonte pontual instantânea de valor integral unitário no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e tempo $t = \tau$.

A função de Green para o problema térmico satisfaz necessariamente uma condição de reciprocidade [8], ou seja,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, \tau) = G(\mathbf{x}', \mathbf{x}; \tau, t). \tag{2.31}$$

A solução para o campo de temperaturas $T(\mathbf{x}, t)$ pode então ser determinada a partir do conhecimento da função de Green e, naturalmente, das condições iniciais e de contorno, segundo [8,15], na forma

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} G|_{\tau=0}\, F(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^{t} d\tau \int_{\Omega} q(\mathbf{x}', \tau)\, G\, d\mathbf{x}' \\ + \alpha \int_{\tau=0}^{t} d\tau \int_{\Gamma} \frac{G}{k}\, f(\mathbf{x}, t)\, d\Gamma, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, \tau)$ é a função de Green para o problema, $F(\mathbf{x})$ é a condição inicial, $f(\mathbf{x}, t)$ é a condição de contorno e $q(\mathbf{x}, t)$ é a função de geração de calor no domínio. A Eq. (2.32) fornece, portanto, a solução do problema de valor de contorno, Eq. (2.29), em termos da função de Green que, por sua vez, satisfaz a Eq. (2.30).

Em resumo, para determinar a solução geral do campo de temperaturas $T(\mathbf{x}, t)$ utilizando funções de Green, basta conhecer o campo de temperaturas para o problema auxiliar. A solução via funções de Green é obtida de forma integral, como expresso pela Eq. (2.32), o que é vantajoso do ponto de vista numérico.

2.6 Abordagem numérica

Problemas descritos por equações diferenciais têm, muitas vezes, soluções analíticas de difícil obtenção. Alguns desses problemas não têm sequer solução analítica conhecida e a integração numérica é a única alternativa disponível. Os métodos numéricos utilizados para a integração das equações podem, geralmente, ser verificados para problemas mais simples, onde uma solução analítica pode ser encontrada.

Uma vez satisfeito esse requisito, usualmente estende-se o método numérico para o problema que se deseja tratar. Existem diversos métodos numéricos capazes de conduzir a uma solução aproximada que, dependendo da discretização no espaço ou no tempo, podem fornecer resultados bastante satisfatórios quando comparados com soluções analíticas disponíveis.

Métodos numéricos envolvem a discretização do problema real. Um problema matemático tem, a rigor, um número infinito de incógnitas, já que todo problema físico-matemático trabalha sobre um contínuo no espaço e — se for transiente — no tempo. Ao fazermos a discretização para aplicar um método numérico, reduzimos o problema à solução de um sistema de equações algébricas, que são implementadas com relativa facilidade em um computador digital.

Dentre os métodos mais utilizados para a determinação das soluções dos problemas em engenharia, destacam-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. No Método das Diferenças Finitas (MDF) as derivadas parciais que constituem o problema físico são transformadas em simples equações discretas de diferenças entre dois pontos distintos no meio. O Método dos Elementos Finitos (MEF) divide o domínio em subdomínios com as mais diferentes formas geométricas, usando, para cada subdomínio ou elemento, polinômios lineares, quadráticos ou de ordem superior, como ferramenta de interpolação local. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste na transformação da equação diferencial governante do fenômeno físico em uma equação integral no contorno a partir da qual a solução numérica é obtida sobre a discretização realizada no contorno.

O Método das Diferenças Finitas apesar de ser considerado o mais simples dentre os métodos numéricos, quando aplicado sobre singularidades do contorno não fornece resultados satisfatórios, sendo necessário um refinamento na discretização ou a utilização de uma discretização mista, o que complica sua implementação computacional.

Uma das vantagens observadas no Método dos Elementos de Contorno sobre o Método dos Elementos Finitos é a não obrigatoriedade da discretização do domínio

[5,6]. Uma vez resolvido o problema no contorno, o MEC é capaz de fornecer a solução em qualquer ponto do domínio. Neste trabalho, o MEC foi escolhido para obter a solução aproximada para equação do calor, entre outros motivos, devido à sua praticidade, por requerer a discretização apenas no contorno, onde são prescritos ou onde se deseje determinar valores.

2.6.1 Solução fundamental

Para desenvolver uma formulação do Método dos Elementos de Contorno é necessário um conhecimento prévio da chamada solução fundamental, que é escolhida de acordo com o problema a ser solucionado. Para desenvolver a equação integral de contorno é necessário a introdução dos conceitos de distribuição ou função generalizada delta de Dirac $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ e *solução fundamental*.

$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ traduz a aplicação de uma distribuição unitária concentrada em um ponto $\mathbf{s}$, chamado de ponto de colocação ou *ponto fonte*. Já $\mathbf{x}$ representa um ponto do domínio, chamado de *ponto campo*.

A distribuição de Dirac pode ser definida como aquela que, dada uma função arbitrária $\psi(\mathbf{x})$, não singular, definida no domínio Ω, extrai o valor de $\psi(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x} = \mathbf{s}$, ou seja

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\Omega = \psi(\mathbf{s}). \tag{2.33}$$

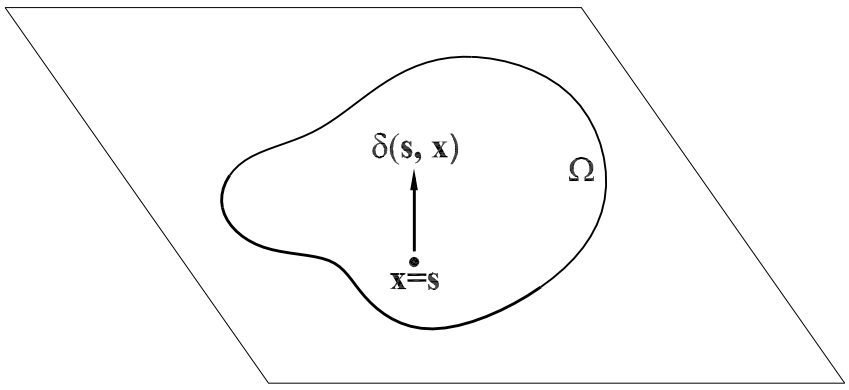

Figura 2.3 – Aplicação de uma distribuição $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ em um domínio bidimensional

Uma propriedade fundamental da distribuição de Dirac é dada por

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})\, d\Omega = 1, \tag{2.34}$$

ou seja, integrando-se a função $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ em todo o domínio obtém-se o valor 1.

A solução fundamental de uma equação diferencial está intrinsecamente associada à distribuição $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$. Em outras palavras, a solução fundamental será aquela resultante da aplicação de uma fonte representada pela da distribuição $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$, veja Fig. 2.3. Usaremos T^* para representar a solução fundamental para uma equação diferencial na variável T.

2.6.2 Equação integral de contorno para o regime permanente

A equação diferencial para a condução bidimensional, sem fontes de calor e em regime permanente, em coordenadas cilíndricas, reduz-se a

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} = 0. \tag{2.35}$$

Essa é uma equação de Laplace, válida em todo o domínio em questão, devendo obedecer às condições de contorno descritas na Seção 2.4.

A segunda identidade de Green [2,8,25],

$$\int_{\Omega} \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) d\Gamma, \tag{2.36}$$

onde $\partial\psi/\partial n$ indica a derivada normal da função ψ no contorno e $\partial\phi/\partial n$ é a derivada normal de ϕ no contorno, relaciona uma integral no domínio Ω de um funcional de ϕ e ψ com outra integral no contorno Γ desse mesmo domínio — à semelhança do teorema da divergência. Esta identidade será utilizada agora para converter a equação diferencial em uma equação integral.

Admitindo então que $\psi = T(\mathbf{x})$ é o campo de temperatura que desejamos determinar e que $\phi = T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ é a solução fundamental resultante da aplicação de $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$, tem-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \nabla^2 T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) \nabla^2 T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x})\right) d\Omega \\ &\qquad = \int_{\Gamma} \left(T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} - T(\mathbf{x}) \frac{\partial T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x})}{\partial n}\right) d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Definindo-se agora $P(\mathbf{x}) = \partial T(\mathbf{x})/\partial n$ e $P^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) = \partial T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})/\partial n$ tem-se, de forma simplificada, a expressão

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})\nabla^2 T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\nabla^2 T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})\right) d\Omega \\ = \int_\Gamma \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})P(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})P^*(\mathbf{s},\mathbf{x})\right) d\Gamma.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Lembrando agora que $\nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0$ e $\nabla^2 T^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{s},\mathbf{x})$, o termo da esquerda da Eq. (2.38) fica da forma

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})\nabla^2 T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\nabla^2 T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})\right) d\Omega &= \int_\Omega T(\mathbf{x})\delta(\mathbf{s},\mathbf{x})\, d\Omega \\ &= T(\mathbf{s}).\end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo a Eq. (2.39) na Eq. (2.38), obtém-se

$$T(\mathbf{s}) = \int_\Gamma \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})P(\mathbf{x}) - P^*(\mathbf{s},\mathbf{x})T(\mathbf{x})\right) d\Gamma. \tag{2.40}$$

A Eq. (2.40) expressa agora o problema térmico em forma de equação integral, cuja solução fornece a função $T(\mathbf{x})$ para pontos no domínio Ω. Para pontos pertencentes ao contorno Γ a solução é obtida tomando-se o limite quando $\mathbf{s} \to \Gamma$ [2,15,20], levando a

$$cT(\mathbf{s}) = \int_\Gamma \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x})P(\mathbf{x}) - P^*(\mathbf{s},\mathbf{x})T(\mathbf{x})\right) d\Gamma, \tag{2.41}$$

onde

$$c = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \mathbf{s} \notin \Gamma \cup \Omega, \\ \theta/2\pi, & \text{se} \quad \mathbf{s} \in \Gamma, \\ 1, & \text{se} \quad \mathbf{s} \in \Omega \end{cases} \tag{2.42}$$

e θ mede o ângulo interno. No presente caso, como o nó funcional dos elementos constantes pertence a um trecho suave do contorno, $\theta = \pi$, logo, $c = 0,5$.

Para o problema bidimensional permanente, a solução fundamental é dada por [7,9,20,26]

$$T^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}, \tag{2.43}$$

onde $|\mathbf{x}-\mathbf{s}|$ corresponde à distância entre o ponto fonte $\mathbf{s}$ e o ponto campo $\mathbf{x}$. Este, de fato, é o padrão de decaimento $(1/|\mathbf{x}-\mathbf{s}|)$ em um espaço bidimensional.

Naturalmente, a derivada normal da solução fundamental será dada por

$$P^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}\frac{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}{\partial n}. \tag{2.44}$$

2.6.3 Discretização espacial

As equações integrais de contorno servem de base ao MEC, mas para utilizá-las no método, torna-se necessária a discretização do contorno em elementos, com diversas formas possíveis, transformando as equações integrais em equações algébricas a fim de que possam ser resolvidas numericamente.

Os chamados elementos de contorno definem a forma do domínio; o sentido em que é feita a integração define se o domínio é finito (sentido anti-horário) ou infinito (sentido horário). Os elementos de contorno, no caso bidimensional, podem ser segmentos de retas ou de curvas, de dimensões finitas, conectados entre si. As funções de interpolação usualmente utilizadas são funções polinominais, podendo ser constantes, lineares, quadráticas ou de ordem superior [2,26]. A Fig. 2.4 ilustra a discretização espacial necessária à aplicação do MEC para polinômios de ordem zero.

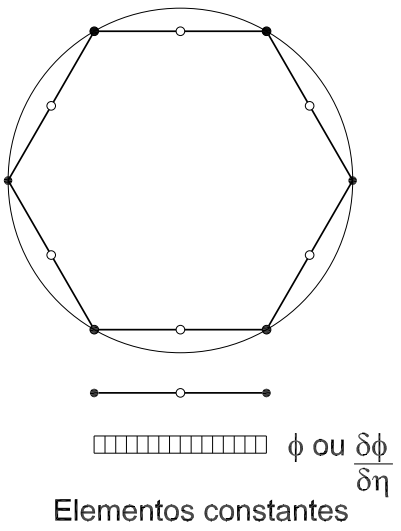

Figura 2.4 – Discretização espacial por elementos constantes

Elementos constantes são aqueles onde tanto as condições de contorno quanto os valores a serem determinados neste trecho do contorno são aproximados pelo valor no nó intermediário do elemento (nó funcional), sendo considerados constantes ao longo do mesmo. O conjunto de elementos retos busca reproduzir a geometria do contorno original Γ. As características dos elementos constantes são praticamente as mesmas dos elementos lineares, exceto por este último apresentar uma variação linear dos valores atribuídos à função ou sua derivada normal ao longo de cada elemento. Elementos quadráticos, por sua vez, aproximam a geometria do contorno original Γ e as condições de contorno ao longo de cada elemento usando uma variação quadrática, onde são determinados os valores nos nós geométricos e no nó funcional. Os elementos constantes ou lineares terão uma melhor aproximação da geometria original do contorno, aumentando-se a discretização nos trechos em que a geometria está mal representada por segmentos de reta. Neste trabalho somente elementos de contorno constantes serão utilizados.

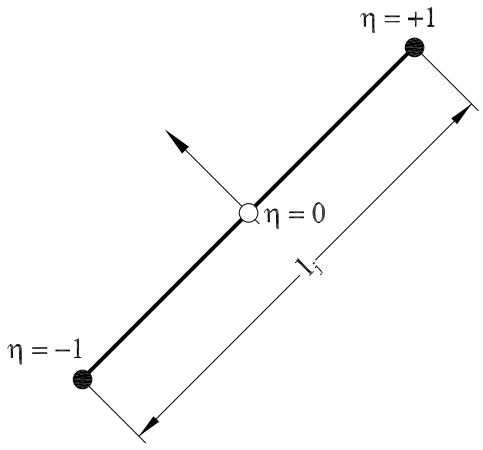

Figura 2.5 – Elemento de contorno constante.

• – nó geométrico; ∘ – nó funcional

A Fig. 2.5 ilustra um elemento de contorno constante, indicando os nós geométricos ($\eta = \pm 1$) e funcional ($\eta = 0$). A coordenada $\eta \in (-1, 1)$, adimensional, mapeia a variável espacial dentro do elemento.

Introduzindo-se a discretização espacial na Eq. (2.41) tem-se

$$cT(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) - P^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j, \tag{2.45}$$

onde, agora, as integrações são feitas em cada elemento Γ_j e o resultado somado para todos os N elementos. As funções T e P são aproximadas pelas funções de interpolação em cada elemento.

Do ponto de vista algébrico, é conveniente o desdobramento dos somatórios e integrais na forma

$$\frac{1}{2} T(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \left(P^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j, \tag{2.46}$$

onde assumiu-se que $\mathbf{s} \in \Gamma$, ou seja o nó funcional será situado no meio de elemento, portanto $c = 0,5$.

Como usaremos elementos constantes, T e P serão uniformes em cada elemento e, portanto, podem ser extraídos das respectivas integrais, resultando em

$$\frac{1}{2} T(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N} P_j \int_{\Gamma_j} \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{N} T_j \int_{\Gamma_j} \left(P^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j, \tag{2.47}$$

Tem-se portanto um sistema de N equações algébricas que pode ser expresso como

$$\frac{1}{2} T_i = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} P_j - \sum_{j=1}^{N} \hat{H}_{ij} T_j, \tag{2.48}$$

onde $T_j = T(\mathbf{s}_j)$, $P_j = P(\mathbf{s}_j)$,

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j \tag{2.49}$$

e

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left(P^*(\mathbf{s},\mathbf{x}) \right) d\Gamma_j. \tag{2.50}$$

Definindo agora H_{ij} como

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{se} \quad i = j, \\ \hat{H}_{ij} & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{2.51}$$

tem-se, então, a equação matricial que traduz o sistema de equações algébricas

$$\mathcal{H}T = \mathcal{G}P, \tag{2.52}$$

onde:

$$\mathcal{H} = [H_{ij}]; \qquad \mathcal{G} = [G_{ij}]. \tag{2.53}$$

A equação Eq. (2.52), após a inclusão das condições de contorno, assume a forma clássica da álgebra linear [2,7,20,26]

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{2.54}$$

onde $\mathcal{A}$ é uma combinação das colunas das matrizes $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, $\mathbf{x}$ é o vetor de incógnitas nos nós funcionais e $\mathbf{f}$ é o vetor de termos independentes, contendo somente valores conhecidos das variáveis no contorno.

2.6.4 Equação integral de contorno para o regime transiente

Para o caso transiente, o comportamento da temperatura é descrito pela equação da difusão, Eq. (2.11), reproduzida a seguir:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \nabla^2 T(\mathbf{x},t), \tag{2.55}$$

onde α, possuindo dimensão $[\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}]$, é a difusividade, admitida como invariante no tempo e no espaço.

As condições de contorno diferem das correspondentes ao regime permanente apenas pelo fato de serem prescritas ao longo do tempo, ou seja, são funções conhecidas do tempo, tal como descritas pelas Eqs. (2.12–13). Neste trabalho, as condições iniciais foram admitidas como nulas, isto é,

$$T(\mathbf{x},0) = T_0(\mathbf{x}) = 0, \qquad \text{para todo o domínio } \Omega. \tag{2.56}$$

Para solução da equação de difusão transiente, emprega-se uma abordagem similar à que foi utilizada para o regime permanente, de modo a transformar a equação diferencial em uma equação integral no contorno, ou seja, fazendo uso de

soluções fundamentais, nesse caso dependentes do tempo. Com efeito, a Eq. (2.39) não mais é válida, uma vez que, agora, $\nabla^2 T$ não mais é nulo e

$$\nabla^2 T^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t) = \delta(\mathbf{s},\mathbf{x})\delta(\tau,t), \tag{2.57}$$

onde $t=\tau$ corresponde ao instante onde é aplicada a distribuição no domínio temporal. Contudo, o procedimento apresentado na sub-seção 2.6.2 pode ser seguido, incluindo-se uma integração por partes [26]. A equação integral obtida é

$$\begin{aligned} c\,T(\mathbf{s},t) = \alpha \int_\tau^t \int_\Gamma P(\mathbf{x},t)\, T^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t)\, d\Gamma\, dt \\ - \alpha \int_\tau^t \int_\Gamma T(\mathbf{x},t)\, P^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t)\, d\Gamma\, dt, \end{aligned} \tag{2.58}$$

onde c é tal como definido na Eq. (2.42) e α admitido como constante e uniforme.

Em duas dimensões, a solução fundamental, agora dependente do tempo, T^*, e sua derivada normal, P^*, são dadas por [6,9,26]

$$T^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t) = \frac{1}{4\pi\alpha(t-\tau)}\, \exp\left[\frac{-|\mathbf{s}-\mathbf{x}|^2}{4\alpha(t-\tau)}\right], \tag{2.59}$$

e

$$P^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t) = \frac{-|\mathbf{s}-\mathbf{x}|}{8\pi\alpha(t-\tau)^2}\, \exp\left[\frac{-|\mathbf{s}-\mathbf{x}|^2}{4\alpha(t-\tau)}\right] \frac{\partial|\mathbf{s}-\mathbf{x}|}{\partial n}. \tag{2.60}$$

Fazendo-se, então, a discretização espacial, nos mesmos moldes do problema térmico em regime permanente, tem-se

$$\begin{aligned} c\,T(\mathbf{s},t) = \alpha \sum_{j=1}^{N} \int_\tau^t \int_{\Gamma_j} \big(T^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t) P(\mathbf{x},t)\big)\, d\Gamma_j\, dt \\ - \alpha \sum_{j=1}^{N} \int_\tau^t \int_{\Gamma_j} \big(P^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t) T(\mathbf{x},t)\big)\, d\Gamma_j\, dt, \end{aligned} \tag{2.61}$$

Agora, é necessário discretizar o domínio do tempo, o que será feito tomando-se intervalos iguais, Δt. Considerando-se que T e P são constantes dentro de cada intervalo Δt e dentro de cada elemento Γ_j, tem-se a discretização espacial e temporal, que pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, T_i^M = \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} P_j^k \int_{\Gamma_j} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \alpha T^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t)\, dt\, d\Gamma_j \\ - \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} T_j^k \int_{\Gamma_j} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \alpha P^*(\mathbf{s},\mathbf{x},\tau,t)\big)\, dt\, d\Gamma_j, \end{aligned} \tag{2.62}$$

onde M é o número de intervalos de tempo a considerar, k é o contador de intervalos de tempo e $T_i^M = T(\mathbf{s}_i, M\Delta t)$ é o valor de T no instante $M\Delta t$, no ponto $\mathbf{s}_i$. Por conveniência, o coeficiente de difusividade térmica foi transferido para dentro das integrais e as integrações no contorno e no tempo tiveram sua ordem trocada. Como antes, $c = 1/2$.

As integrais no domínio do tempo, constantes da Eq. (2.62), podem ser calculadas analiticamente, uma vez que as funções $T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \tau, t)$ e $P^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \tau, t)$ são funções analíticas conhecidas e integráveis

Definindo então os coeficientes de influência

$$G_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \alpha T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \tau, t)\, dt\, d\Gamma_j \tag{2.63}$$

e

$$\hat{H}_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \alpha P^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \tau, t)\, dt\, d\Gamma_j, \tag{2.64}$$

obtém-se a forma algébrica [9]

$$\frac{1}{2}\, T_i^M = \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} G_{ij}^k P_j^k - \sum_{j=1}^{N} \hat{H}_{ij}^k T_j^k \right), \tag{2.65}$$

onde T_j^k e P_j^k são os valores da temperatura e sua derivada normal no intervalo $t \in (k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ para o elemento j. Definindo-se ainda, tal como no problema permanente,

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad k = 1, \\ \hat{H}_{ij} & \text{nos demais casos,} \end{cases} \tag{2.66}$$

obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas

$$\sum_{k=1}^{M} [H]^k\, T^{M-k+1} = \sum_{k=1}^{M} [G]^k\, P^{M-k+1}. \tag{2.67}$$

O sistema (2.67) deverá ser resolvido em etapas sucessivas, avançando em passos de um intervalo de tempo. Assim, para $M = 1$ a Eq. (2.67) fica da forma

$$[H]^1 \{T\}^1 = [G]^1 \{P\}^1. \tag{2.68}$$

Aplicando-se as condições de contorno, obtém-se um sistema de equações da forma

$$[A]^1\mathbf{x}^1 = \mathbf{f}^1, \tag{2.69}$$

onde $\mathbf{f}^1$ é um vetor conhecido.

Tem-se então a solução para T_j^1 e P_j^1 em todo o contorno, no primeiro intervalo de tempo. Esses resultados são então utilizados na Eq. (2.67) para $M = 2$ e, seguindo o mesmo procedimento, obtém-se o sistema

$$[A]^1\mathbf{x}^2 = \mathbf{f}^2 + \mathbf{h}^2, \tag{2.70}$$

onde $\mathbf{f}^2$ e $\mathbf{h}^2$ são vetores conhecidos e cuja solução fornece T_j^2 e P_j^2. O procedimento continua recursivamente até $k = M$.

2.7 Problemas inversos

Problemas inversos estão presentes nas mais diversas áreas da matemática, da física aplicada e das engenharias [16]. Há sempre uma diferença fundamental entre um problema direto e seu correspondente inverso. Hadamard [12] estabeleceu que o modelo matemático para um problema físico (como um problema de valor de contorno para equação diferencial) é apropriadamente colocado ou *bem posto* se satisfizer as três propriedades seguintes:

1. Existir uma solução para o problema (existência);

2. Existir somente uma solução para o problema (unicidade);

3. A solução depender continuamente dos dados (estabilidade).

Em outras palavras, o problema que satisfaz as três condições acima é dito *bem posto*, caso contrário o problema é dito *mal posto*. Em geral, em um par de problemas direto–inverso, o último é mal posto, por mais simples que a modelagem para o fenômeno envolvido possa ser.

Vejamos um exemplo elementar de problema inverso mal posto. Dado o ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, sua distância a outro ponto $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ é, segundo a norma

em $\mathcal{R}^3$, dada por (veja Fig. 2.6)

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}. \tag{2.71}$$

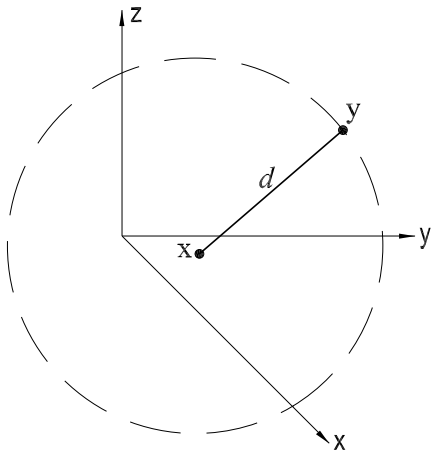

Figura 2.6 – Ilustração de um problema inverso simples

O problema inverso correspondente seria determinar o ponto **y** que dista d do ponto **x**. Esse é um problema mal posto, uma vez que não satisfaz à condição de unicidade, pois todo ponto **y** sobre a superfície esférica de raio d e centro **x** é candidato à solução. Observe que a condição de estabilidade é verificada, pois se movermos ambos os pontos de um pequeno deslocamento a nova distância diferirá de um valor também pequeno. A condição de existência é obviamente satisfeita. Como pode-se observar, o problema inverso associado a um problema tão elementar quanto medir a distância entre dois pontos é um problema mal posto.

Restrições impostas reduzem, freqüentemente, o leque de soluções possíveis. No exemplo acima, uma restrição estabelecendo que o ponto procurado está sobre um determinado plano, reduz significativamente o conjunto de soluções não tornando, contudo, o problema bem posto (exceto se o plano dado for tangente à esfera).

Usualmente para sistemas lineares como o da Fig. 2.7, conhecendo-se a excitação, $x(t)$ e o comportamento do sistema — sua equação ou seu operador diferencial

— o problema direto, também dito de *análise*, consiste na determinação de sua resposta, $y(t)$.

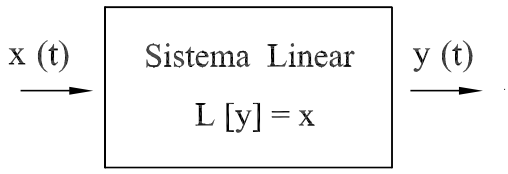

Figura 2.7 – Representação esquemática de um sistema linear

Um problema inverso, também dito de *síntese*, consiste em, dados $x(t)$ e $y(t)$, determinar seu operador diferencial. Outro problema inverso, também conhecido como de *medição*, consiste em, conhecidos o operador diferencial e a resposta do sistema, determinar sua entrada. Este último gênero de problema inverso será abordado no decorrer deste trabalho.

A solução geral de um problema inverso de medição requer a adoção de técnicas de otimização e programação linear. Muito resumidamente, o procedimento consiste em arbitrar (estimativa inicial) um $x_1(t)$ que, dado como entrada no sistema, fornece como saída um sinal $y_1(t)$, normalmente distinto da resposta $y^*(t)$ à excitação $x^*(t)$ que deseja-se determinar. A partir daí, busca-se minimizar a distância, medida por alguma norma, $d_j = |y_j(t) - y^*(t)|$, por um procedimento que envolve sucessivos sinais de entrada $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n$, até o momento que, para algum j, obtém-se $d_j < \epsilon$ pré-estabelecido.

Esse procedimento pode ser numericamente não trivial se o funcional d não for convexo — o que é bastante comum. Os procedimentos para a solução de problemas inversos em condução térmica adotados neste trabalho não envolverão a minimização de funcionais mas tão somente o uso de critérios *ad-hoc* para estimativas iniciais próximas da solução.

Capítulo 3

Análise térmica inversa unidimensional

A análise térmica unidimensional descrita neste capítulo compreende o estudo de choques de temperatura no fluido em um trecho horizontal de tubulação do SRCR. Na análise direta, um salto de temperatura de valor prescrito é imposto à temperatura do fluido em $t = 0$ e os históricos das temperaturas na face interna do duto, $T_i(t)$, e na face externa do mesmo, $T_e(t)$, são simulados a partir de um programa de análise térmica transiente com elementos de contorno contantes, em linguagem Fortran, desenvolvido anteriormente [9] e adaptado para as necessidades deste trabalho, incluindo-se o fenômeno da convecção. Em seguida, especificamente para $T_e(t)$, são determinadas suas primeira e segunda derivadas.

A análise inversa consistirá em, dada uma curva de variação da temperatura na face externa, resultante de um choque, determinar sua amplitude e o instante em que ocorreu a mudança brusca de temperatura no fluido. Esses dois parâmetros serão identificados a partir dos resultados obtidos na análise direta.

3.1 Análise térmica direta

A seguir são apresentados os dados necessários à análise como geometria, condições de contorno, discretização etc., bem como outras informações de projeto.

3.1.1 Dados gerais

Em todos os ensaios numéricos, as seguintes condições de projeto foram consideradas:

1. Material da tubulação: aço AS 376 TP 304 (high alloy steel 18 Ci - 8 Ni e 18 Ci - 11 Ni).
2. Dados geométricos da tubulação (8", Schedule 160):

   Diâmetro externo = 219,07 mm;

   Espessura = 23 mm.

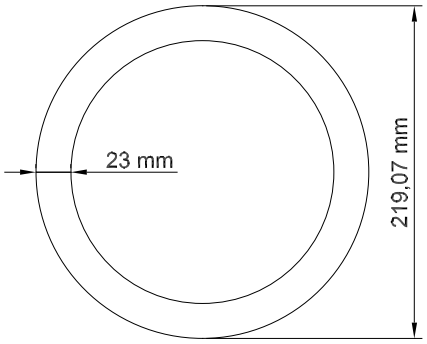

Figura 3.1 – Seção transversal da tubulação em estudo

3. Propriedades térmicas do material da tubulação:

   Condutividade térmica k = 19,5 W/m ^{0}C;

   Difusividade térmica α = 4,4 x 10^{-6} m^2/s;

   Coeficiente de convecção h_c = 1,6 kW/m^2 ^{0}C.

4. Hipóteses básicas para modelagem de condução de calor unidimensional:

   Não há estratificação térmica;

   Isolamento externo considerado perfeito;

   Perfil de temperaturas invariante ao longo do eixo da tubulação.

5. Condições de contorno: no interior da tubulação foi imposta a condição de contorno de convecção, enquanto que na face externa a condição é de fluxo de calor nulo. As condições de contorno estão ilustradas na Fig. 3.2.

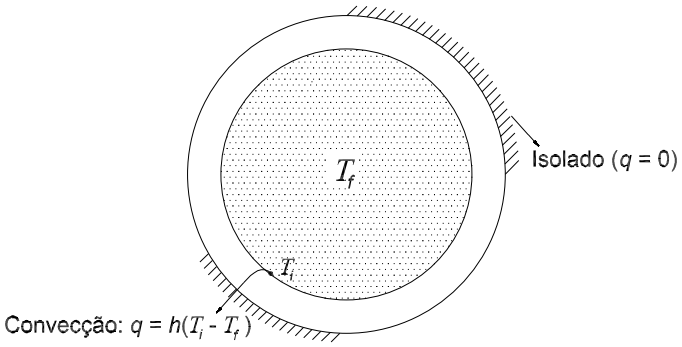

Figura 3.2 – Seção transversal com isolamento externo perfeito na face externa e convecção na face interna

3.1.2 Discretização da seção transversal

Para a geometria proposta, duas discretizações foram utilizadas. A primeira, com 16 elementos de contorno, é mostrada na Fig. 3.3.

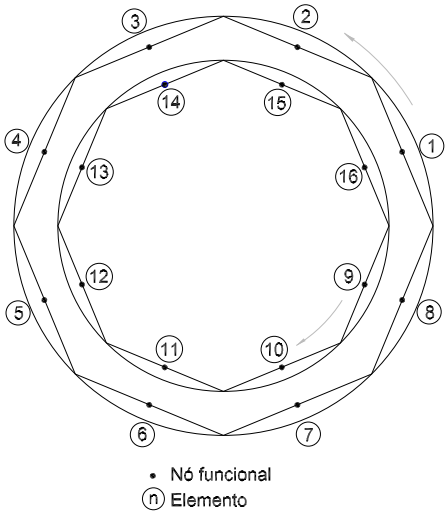

Figura 3.3 – Discretização da seção transversal da tubulação em 16 elementos

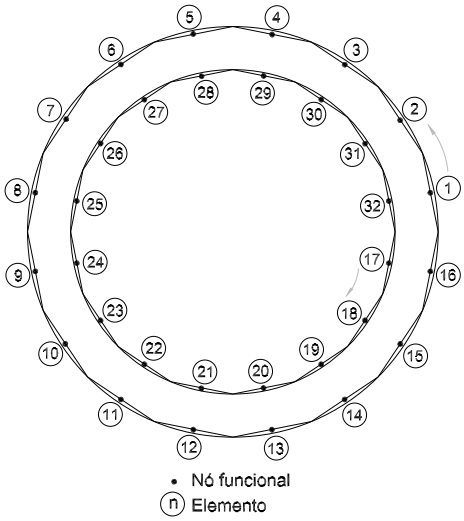

Figura 3.4 – Discretização da seção transversal da tubulação em 32 elementos

A segunda, com 32 elementos de contorno, é mostrada na Fig. 3.4. O objetivo de se utilizar duas discretizações é, basicamente, verificar a influência do refinamento da malha adotada nos resultados obtidos.

3.1.3 Verificação de linearidade

Para a análise térmica direta simula-se um salto ou choque térmico de $1\,^0$C. Em seguida, a mesma simulação é feita para um choque de $100\,^0$C, comprovando a linearidade do sistema. Aplicando-se um choque térmico unitário no fluido, tem-se duas curvas de temperatura versus tempo, a saber: a temperatura na parede interna ($r = r_i$) e a temperatura na parede externa ($r = r_e$) do duto. Podemos interpretar o problema térmico, portanto, como um sistema linear com uma entrada (no caso, o choque térmico T_f) e duas saídas, respectivamente a temperatura interna, T_i, e externa, T_e, como indica a Fig. 3.5.

Figura 3.5 – Sistema linear representativo do problema térmico

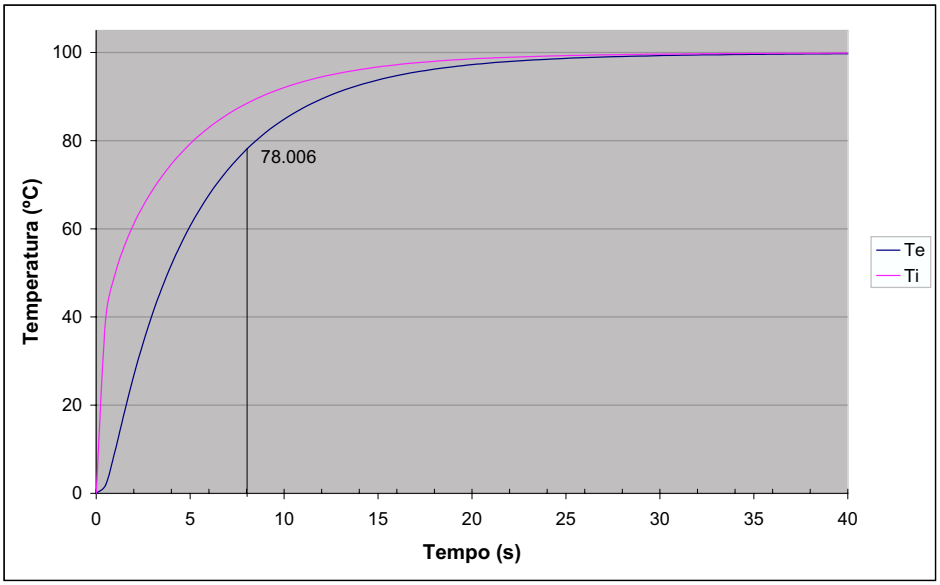

Figura 3.6 – Caráter geral dos resultados das simulações para um salto de 100 ^0C com identificação da temperatura na parede externa após 8 s

A Fig. 3.6 ilustra o caráter geral dos resultados das simulações obtidas a partir da análise numérica por elementos de contorno, para um choque térmico de $100\,^0$C. Observa-se que a temperatura interna varia de forma mais próxima a um degrau enquanto a temperatura externa, embora tendendo assintoticamente ao valor do salto de entrada, tem um comportamento mais suave e apresenta um retardo em relação ao instante de aplicação do choque.

Como o problema é linear, para a solução da análise direta basta obtermos $T_i(t)$ e $T_e(t)$ para um choque unitário, ou seja, conhecidas as temperaturas interna e externa para o choque unitário estarão implicitamente determinadas as mesmas para um choque de amplitude T_f genérica, dependentes de um fator de escala.

É interessante observar que, devido à linearidade, o retardo que a temperatura externa apresenta em relação ao instante de aplicação do choque térmico não depende do valor deste. A Fig. 3.7 ilustra o resultado obtido pelo mesmo programa para um salto de temperatura de $300\,^0$C no fluido.

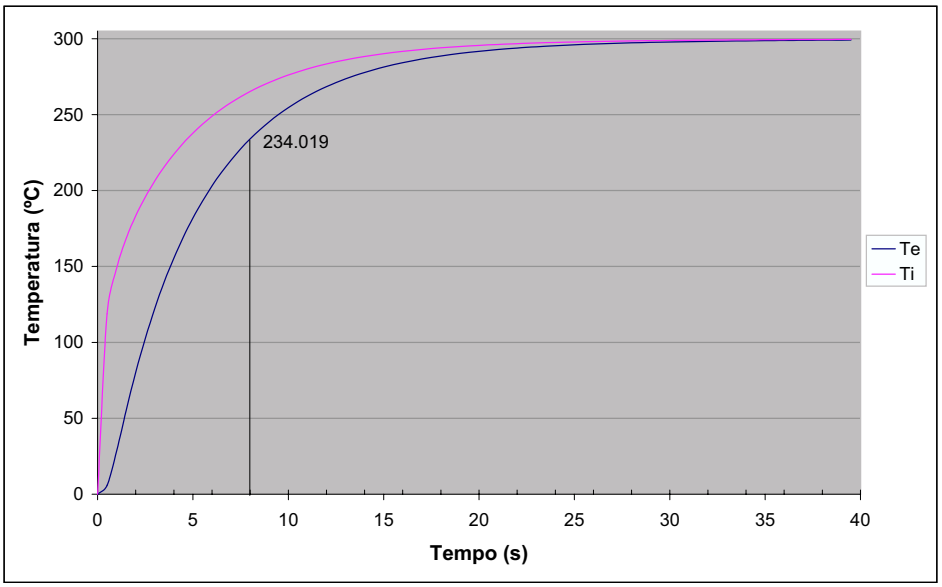

Figura 3.7 – Caráter geral dos resultados das simulações para um salto de 300 ^0C com identificação da temperatura na parede externa após 8 s

Enquanto no caso anterior tinhamos, por exemplo, para o tempo de 8 s um valor de 78,006% do salto na temperatura da parede externa, para o segundo

obtivemos valor de 234,019 ^{0}C, que corresponde aos mesmos 78,006% do salto, o que comprova a linearidade da simulação.

Observando-se com mais atenção ainda as figuras resultantes da simulação numérica do problema direto, algumas características do comportamento de $T_e(t)$ merecem ser comentadas. Em primeiro lugar, devido ao fato de a superfície externa do duto ser considerada como perfeitamente isolada termicamente, é natural que a curva de temperatura cresça assintoticamente para o valor do salto térmico, como ilustram os exemplos. Em seguida, cumpre observar a presença de um ponto de inflexão na curva, que será analisado na seção seguinte.

3.1.4 Resultados da análise direta para 16 elementos

A Fig. 3.8 mostra o resultado da simulação, indicando as funções $T_i(t)$ e $T_e(t)$ ao longo dos primeiros 40 segundos após a aplicação do choque de 100 ^{0}C na temperatura do fluido, para a discretização em 16 elementos no contorno e um refinamento de 80 intervalos de tempo. A saída de dados consta do Apêndice.

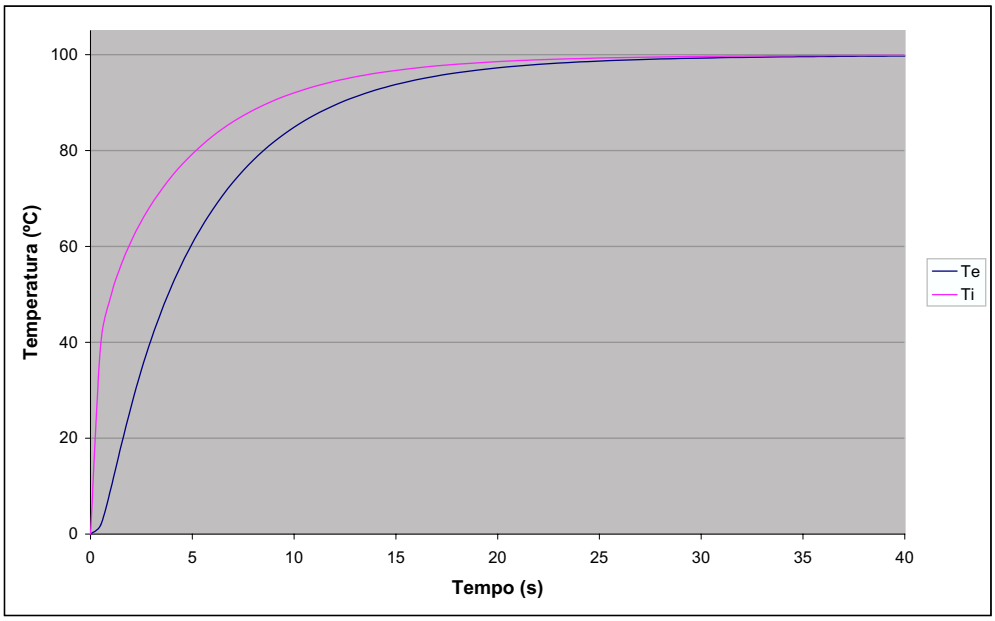

Figura 3.8 – Variação de temperatura nas faces interna e externa da tubulação após um choque térmico de 100 ^{0}C, para a discretização em 16 elementos

Verifica-se na Fig. 3.8 que na face interna do duto ocorre um crescimento mais acentuado da temperatura se comparado com o da face externa. Com efeito, na

face interna, a temperatura de $99\,^0$C é atingida no instante $t = 23$ s, aproximadamente, ver Apêndice. Em outras palavras, 99% do choque térmico transfere-se para a face interna da tubulação nesse intervalo de tempo. Esse retardo corresponde ao fenômeno físico da transferência de calor por convecção entre o fluido e a parede interna do duto.

A temperatura externa, como era de se esperar, apresenta um retardo maior, devido ao processo de condução de calor na direção radial. Com efeito, a temperatura externa só alcança o valor de $99{,}5\,^0$C no instante $t = 33.5$ s, contado a partir do choque térmico no fluido.

A Fig. 3.9 apresenta a derivada temporal da função $T_e(t)$. O ponto de inflexão da temperatura externa é representado, agora pelo ponto de máximo de $\dfrac{dT_e}{dt}(t)$.

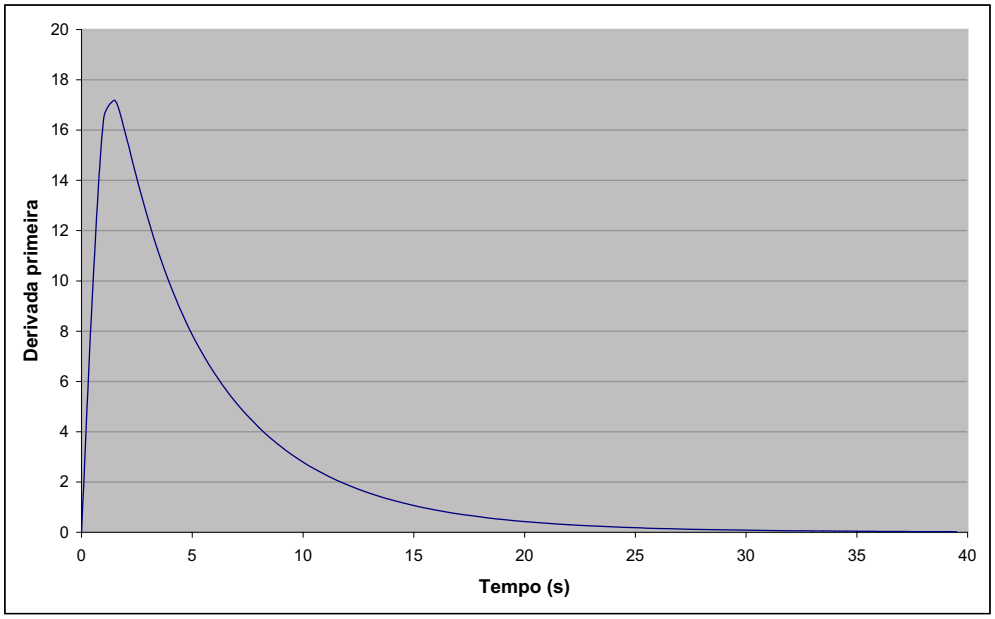

Figura 3.9 – Derivada da temperatura na face externa da tubulação após um choque térmico de 100 ^0C, para a discretização em 16 elementos

Por outro lado, o ponto onde a temperatura externa "alcança" o valor do choque pode ser determinado estabelecendo-se um valor ϵ de tal modo que quando $dT_e(t)/dt < \epsilon$ assume-se a derivada como sendo nula. Admitiremos como um valor satisfatório, $\epsilon = 0,05$ K/s. Para termos então $dT_e(t)/dt < \epsilon$, necessariamente

$t > 33$ s, quando, efetivamente, a temperatura externa alcança 99,5% do degrau, veja Apêndice.

Em seguida, temos, na Fig. 3.10, o gráfico da segunda derivada temporal da mesma função. Aqui pode ser identificado com mais precisão o ponto de inflexão, correspondendo à raiz da função plotada. A interseção da função com o eixo dos tempos situa-se no intervalo $(1,\ 1,5)$. Uma interpolação linear nesse intervalo revela que o ponto de inflexão deve situar-se mais precisamente em $t = 1,458$ s.

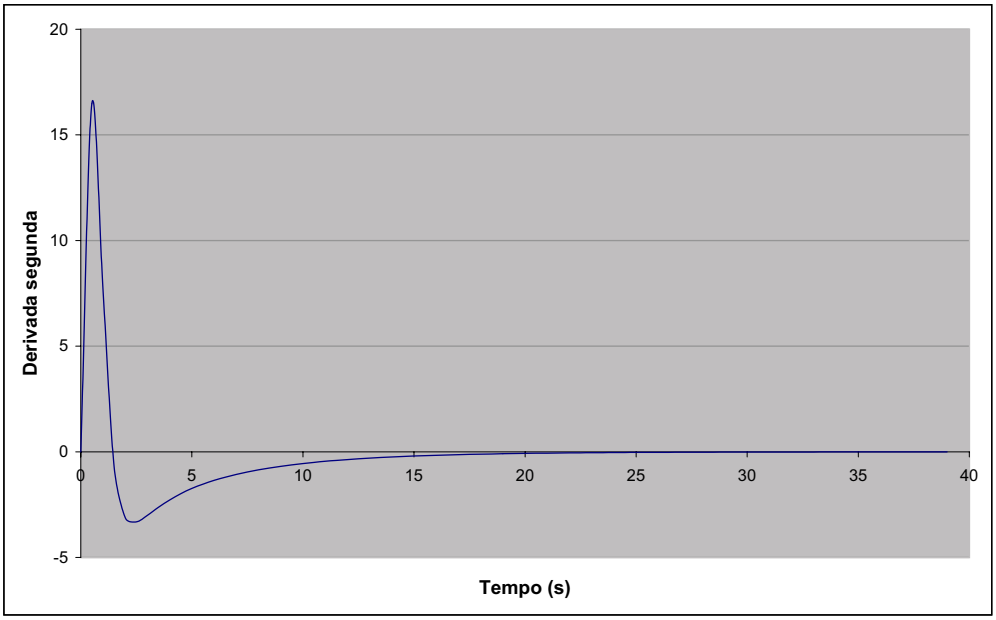

Figura 3.10 – Derivada segunda da temperatura na face externa da tubulação após um choque térmico de 100 ^0C, para a discretização em 16 elementos

3.1.5 Resultados da análise direta para 32 elementos

Vejamos agora os resultados obtidos com uma discretização de 32 elementos no contorno da tubulação. Todos os demais parâmetros da análise permanecem inalterados. A saída de dados consta do Apêndice.

A Fig. 3.11 mostra o resultado para as funções $T_i(t)$ e $T_e(t)$ ao longo dos primeiros 40 segundos após a ocorrência do choque de $100\,^0$C na temperatura do fluido. A discretização no tempo permanece com 80 intervalos.

Utilizando um maior número de elementos no contorno — aproximando-se mais, portanto, da geometria original —, é natural verificar-se maior precisão

no domínio do tempo. Primeiramente, observa-se que a curva $T_e(t)$ apresenta um atraso ligeiramente maior, relativo ao instante $t = 0$, onde ocorre o choque térmico. Por exemplo, no instante $t = 5$ s, verifica-se que $T_e = 55,893\ ^0$C, quando, na simulação anterior verificava-se $T_e = 60,644\ ^0$C, veja Apêndice. Entretanto, o instante no tempo em que a temperatura alcança 99,5% do salto ocorre em $t = 33$ s, enquanto na simulação anterior isso se dava no instante $t = 33,5$ s, uma diferença de pequena monta.

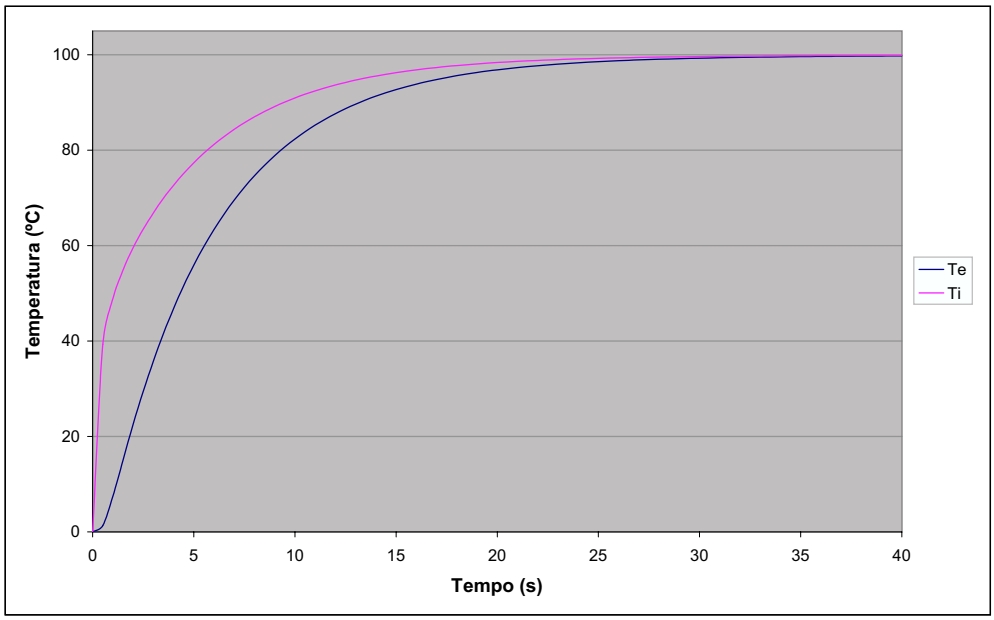

Figura 3.11 – Variação de temperatura nas faces interna e externa da tubulação após um choque térmico de 100 ^0C, para a discretização em 32 elementos

A Fig. 3.12 mostra a derivada temporal de $T_e(t)$ para a simulação com 32 elementos de contorno. Observa-se que o valor da derivada no ponto onde a temperatura alcança 99,5% do choque é maior ($dT_e/dt = 0,0586$ K/s) do que o valor obtido na simulação com 16 elementos ($dT_e/dt = 0,0493$ K/s), veja Apêndice.

A Fig. 3.13 apresenta a curva da segunda derivada temporal da temperatura na parede externa da tubulação. Verifica-se, nesse caso, que o ponto em que a curva cruza o eixo dos tempos situa-se entre 1,5 s e 2 s. Uma interpolação linear leva o ponto de inflexão para $t = 1,646$ s, quando, na simulação anterior tinhamos $t = 1,458$ s.

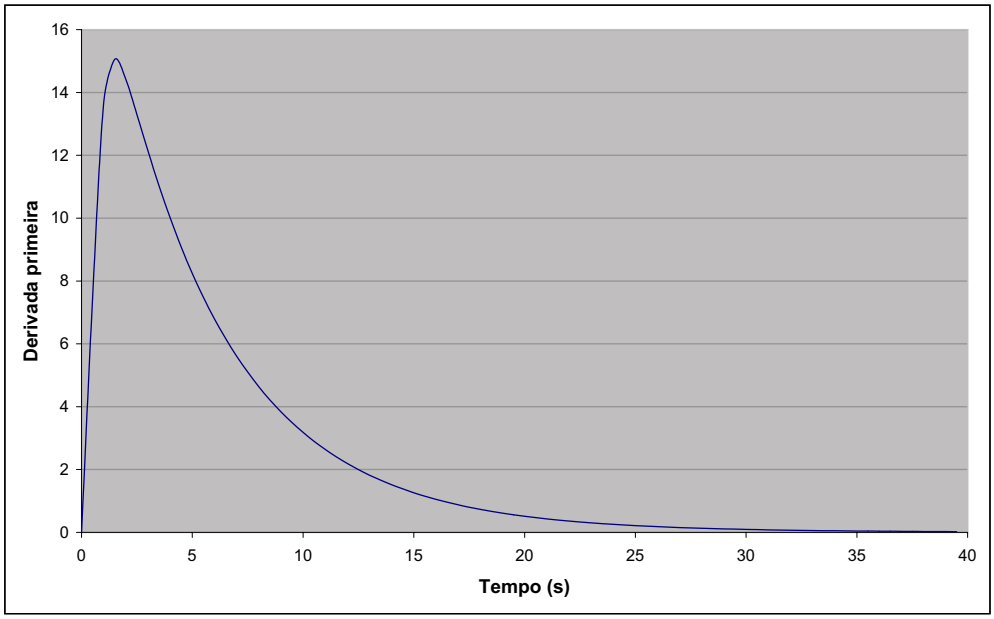

Figura 3.12 – Derivada da temperatura na face externa da tubulação após um choque térmico de 100 ^0C, para a discretização em 32 elementos

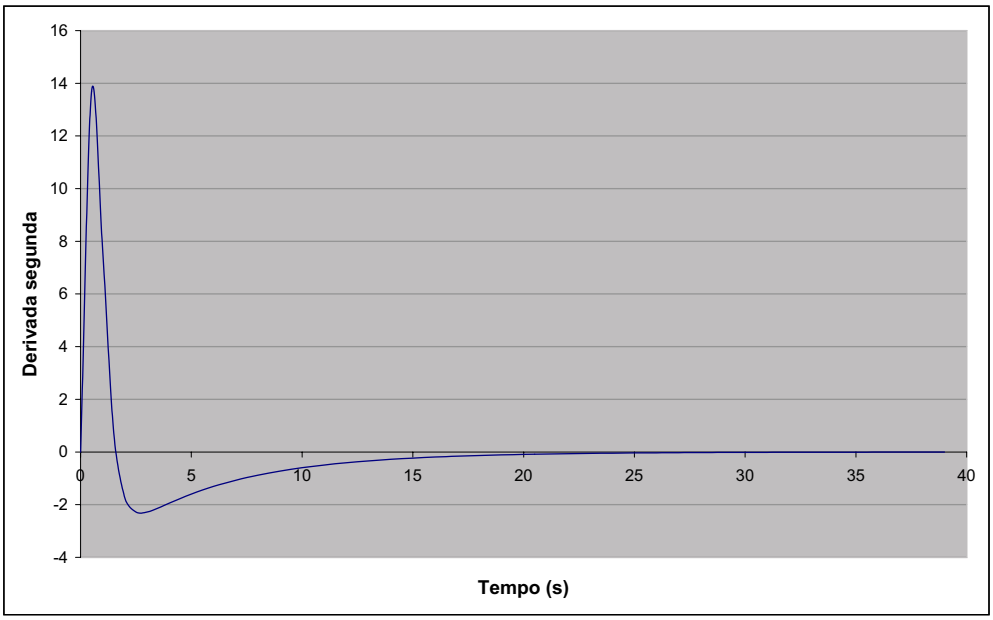

Figura 3.13 – Derivada segunda da temperatura na face externa da tubulação após um choque térmico de 100 ^0C, para a discretização em 32 elementos

Uma análise com 64 elementos mostrou que não houve nenhuma alteração significativa nesses números, não se justificando o custo computacional adicional. Portanto, assumiremos como fixos dois intervalos de tempo. O primeiro, dado por $\Delta_1 = 1,646 - 0 = 1,646$ s, corresponde ao tempo decorrido entre o instante do

choque e o momento em que há um ponto de inflexão na curva de temperatura. O segundo, dado por $\Delta_2 = 33 - 1,646 = 31,354$ s, caracteriza o tempo decorrido entre o ponto de inflexão e o instante onde a temperatura alcança 99,5% do salto. Esses dois intervalos de tempo serão utilizados na análise inversa tendo-se, naturalmente, o cuidado de ajustar a precisão ao número de algarismos significativos obtidos na medição da temperatura.

3.2 Análise térmica inversa

Do ponto de vista do problema térmico inverso unidimensional, a questão se resume a: dada uma curva de temperatura medida na parede externa da tubulação, tal como a apresentada na Fig. 3.14, determinar a amplitude do choque térmico que a gerou e os tempos característicos, ou seja, o instante do choque, $t = t_0$, o instante onde ocorre a inflexão da curva, $t = t_1$, e o instante onde a temperatura se estabiliza, $t = t_2$, assumindo-se que essa condição ocorra quando a temperatura externa é igual a 99,5% do salto de temperatura no fluido.

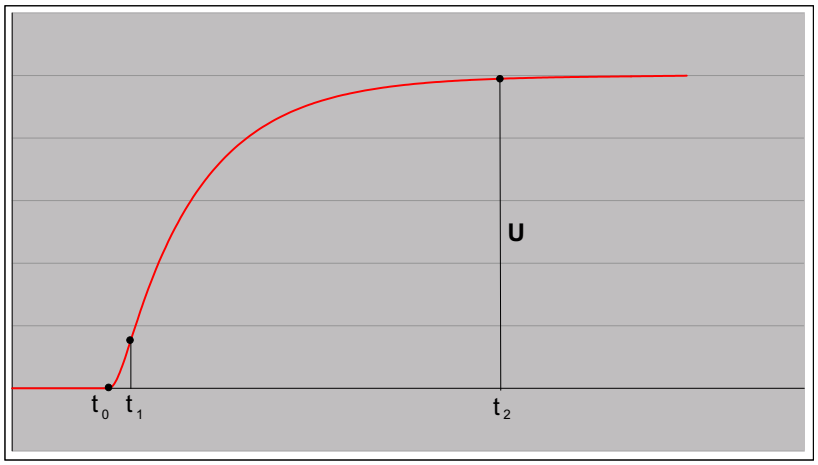

Figura 3.14 – Curva de temperatura medida na face externa após um salto
Instantes característicos: t_0, t_1 e t_2

O primeiro passo para a solução do problema inverso, pois, é diferenciar numericamente duas vezes a curva de temperatura medida e determinar o ponto de inflexão fazendo uma interpolação linear entre o último ponto com $d^2T_e(t)/dt^2$ positivo e o primeiro instante com $d^2T_e(t)/dt^2$ negativo, de modo a estimar o instante

onde

$$\frac{d^2T_e}{dt^2} = 0. \tag{3.6}$$

De posse desse instante, assumido como t_1, e partindo dos valores tomados como representativos na Seção 3.1, determina-se o instante do choque,

$$t_0 = t_1 - \Delta_1 \tag{3.7}$$

e o instante em que a temperatura alcança o valor de 99,5% do choque,

$$t_2 = t_1 + \Delta_2. \tag{3.8}$$

Finalmente, a amplitude do choque será estimada pela relação

$$T_{\text{choque}} = \frac{1000}{995}\,U, \tag{3.9}$$

onde T_{choque} é o valor do choque que se deseja determinar e U é a diferença entre as temperaturas medidas no instante t_0 e no instante t_2, ou seja,

$$U = T_e(t_2) - T_e(t_0), \tag{3.10}$$

como indica a Fig. 3.14.

Os dados geralmente disponíveis de temperatura externa da tubulação, não apresentam mais de uma casa decimal e mesmo estas nunca são obtidas em intervalos menores do que um segundo. Isso significa que a precisão encontrada na prática é usualmente muito menor do que as três ou quatro casas decimais apresentadas neste estudo. Como os ensaios numéricos com maior número de pontos na discretização espacial do contorno não apresentaram diferenças senão para além da terceira casa decimal, os valores

$$\Delta_1 = 1,65 \text{ s} \tag{3.11}$$

e

$$\Delta_2 = 31,35 \text{ s} \tag{3.12}$$

serão os adotados nas Eqs. (3.7) e (3.8) para a caracterização do instante de ocorrência do choque e sua amplitude.

Capítulo 4

Análise térmica inversa bidimensional

Neste capítulo abordaremos a análise térmica bidimensional em geometria cilíndrica. Aqui, ao contrário do que foi considerado no capítulo anterior, o fluido no interior da tubulação apresenta estratificação térmica, admitida esta exclusivamente no sentido vertical, que terá como conseqüência a existência de um fluxo de calor na direção circunferencial (variável θ).

As análises partiram de condições iniciais nulas, pois o período característico das flutuações de temperatura é bem superior ao tempo necessário que se atinge o regime permanente.

Todas as simulações foram realizadas para a geometria anteriormente descrita e os resultados simulados serão comparados com os resultados medidos.

4.1 Metodologia para a solução do problema inverso

Conforme já apontado anteriormente, não se pretende, neste trabalho, resolver o problema inverso de condução transiente no sentido estrito do termo. Para tal, seria necessário uma análise visando verificar sua unicidade, ou seja, se o problema é ou não bem posto, bem como sua convexidade. Muito provavelmente, o problema que estamos abordando é mal posto, ou seja, mais de uma estratificação térmica transiente no fluido produz os resultados observados nos cinco termopares distribuídos sobre a superfície externa da tubulação. Contudo, algumas restrições se impõem. Por exemplo, a hipótese de que a estratificação térmica no fluido se dá no sentido vertical, garantindo-se a existência de um plano de simetria vertical, como mostra a Fig. 4.1. Ou a hipótese, fundamentada, de que o gradiente de temperatura no fluido ocorre de baixo para cima.

Sendo assim, a metodologia adotada neste trabalho para a "solução" do problema inverso será a descrita a seguir. Primeiramente verificamos a influência dos parâmetros difusividade térmica, α, e coeficiente de filme, h_c, sobre os atrasos

simulados na temperatura interna e na temperatura externa em relação à temperatura do fluido. Para tal, utilizaremos a simulação unidimensional. Em seguida, com base nas conclusões obtidas, será feita a simulação bidimensional e, por um processo de tentativa e erro, serão testadas diferentes configurações de estratificação transiente até obtermos como saída nas posições correspondentes aos cinco termopares valores transientes suficientemente próximos daqueles medidos.

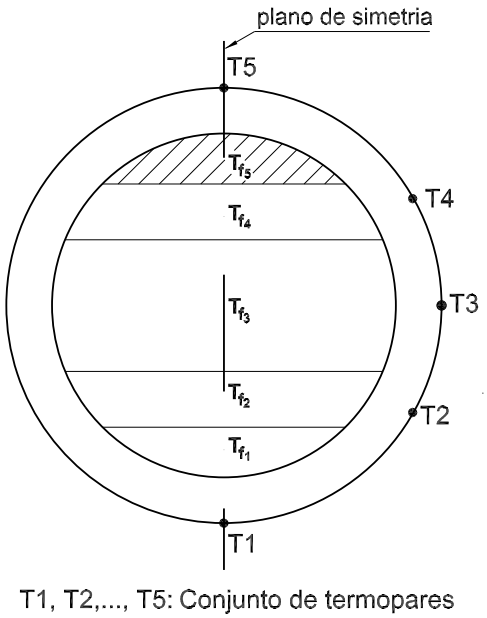

Figura 4.1 – Estratificação térmica no fluido ($T_{f1}, T_{f2}, \ldots, T_{f5}$).
A linha vertical indica o plano de simetria

4.2 Influência do coeficiente de convecção

Para avaliarmos a influência do coeficiente de convecção sobre os resultados da simulação foram rodados dois exemplos numéricos. Em ambos suprimiu-se a estratificação térmica — significando que o problema foi reduzido a uma única dimensão — e considerando-se uma discretização em 32 elementos, 80 intervalos de tempo ($\Delta t = 1$ s), compreendendo um período total, portanto, de 80 s. No primeiro, admitiu-se um coeficiente de convecção na parede interna ($h_c = 1,6$ kW/m^{2}K), enquanto que no segundo a simulação foi realizada admitindo-se temperatura prescrita na parede interna do duto.

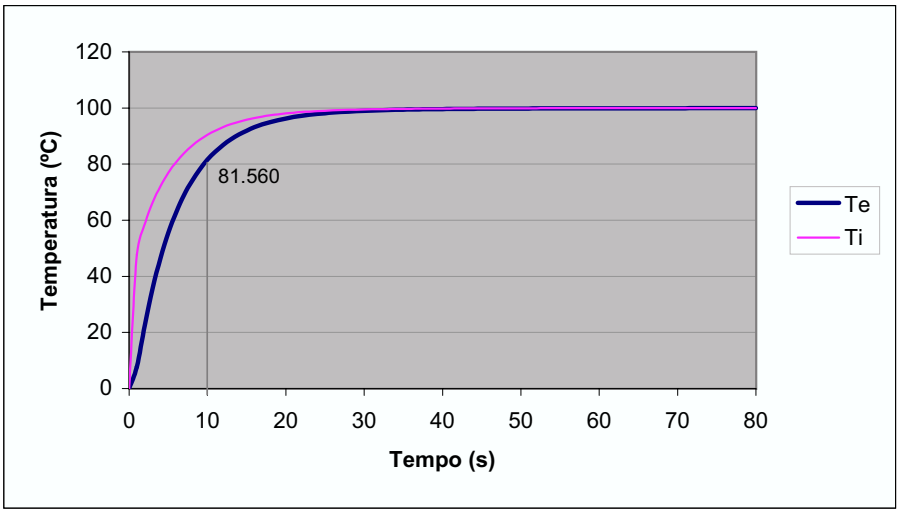

Figura 4.2 – Simulação unidimensional para um choque de $100\,^0C$ com convecção

As Figs. 4.2, 4.3 e 4.4 indicam os resultados obtidos para um salto de temperatura de $100\,^0$C na entrada do simulador. Na Fig. 4.2 apresentam-se os resultados da simulação, indicando os perfis de temperaturas interna e externa na presença de convecção.

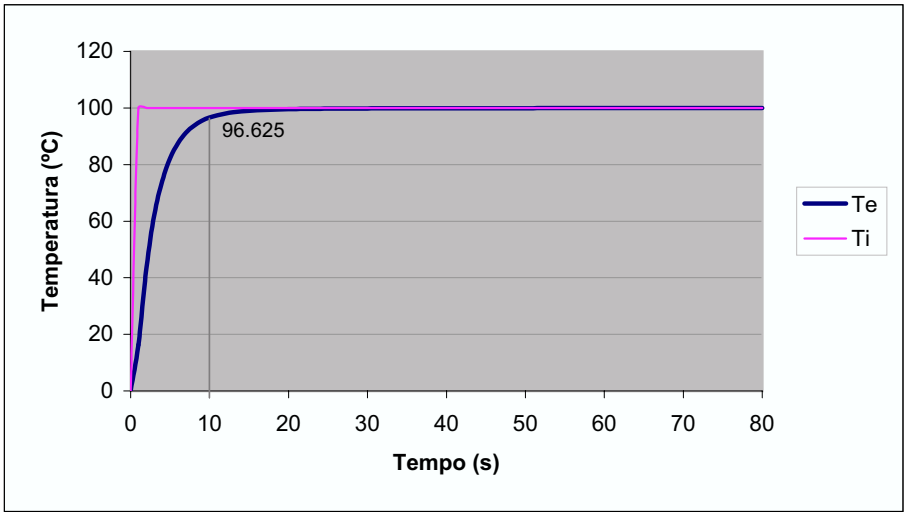

Figura 4.3 – Simulação unidimensional para um choque de $100\,^0C$ sem convecção

Na Fig. 4.3 são mostradas as curvas simuladas das temperaturas interna e externa na ausência de convecção.

Constata-se que, como era de se esperar, a presença da convecção retarda a

subida da curva da temperatura externa. Como se pode observar, os valores de T_e no instante $t = 10$ s, indicado nas Figs. 4.2 e 4.3, diferem de aproximadamente 15 ^{0}C. Como é natural, a temperatura interna apresenta significativa diferença de comportamento, com e sem o fenômeno da convecção.

A Fig. 4.4 indica o resultado comparativo entre as temperaturas na face externa nas duas simulações anteriores, apresentando a diferença entre os resultados das temperaturas externas nas duas simulações.

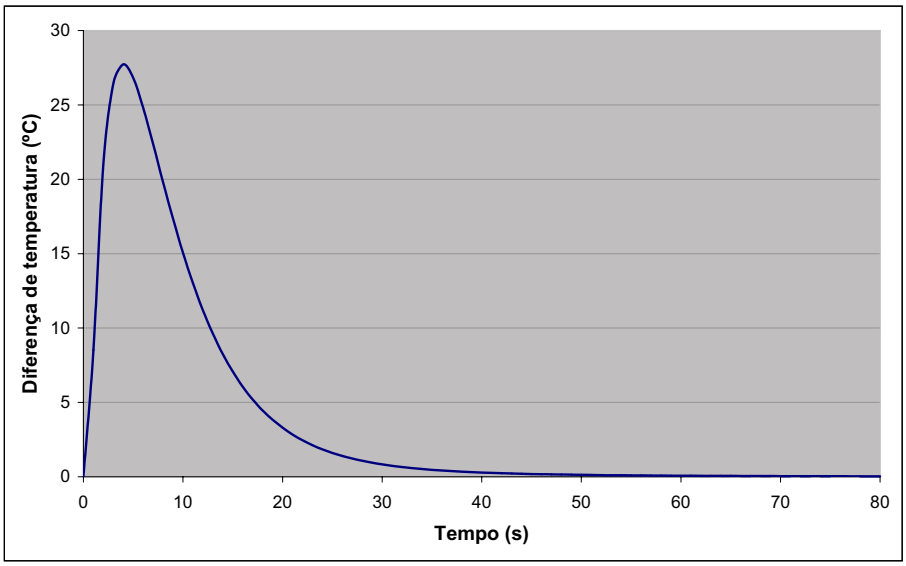

Figura 4.4 – Gráfico da diferença entre temperaturas externas nas duas simulações

A conclusão, portanto, é que o efeito da convecção não pode ser desconsiderado e as simulações a seguir serão realizadas *com* coeficiente de convecção.

4.3 Simulação térmica bidimensional

Em todas as simulações descritas a seguir, salvo indicação em contrário, foram adotados os seguintes parâmetros:

- Número de intervalos de tempo: Nint= 80.
- Discretização temporal: $\Delta t = 120$ s.
- Tempo total de simulação: $t_{\mathrm{Max}} = 9600$ s.
- Número de elementos de contorno: Nel= 32.

– Coeficiente de difusividade térmica: $\alpha = 4,4 \times 10^{-6}$ m^2/s.

– Coeficiente de convecção: $h_c = 1,6$ kW/m^2K.

A escolha de um intervalo de tempo dessa ordem de grandeza (120 s) deve-se ao fato de que os dados disponíveis das medições de temperatura nos termopares serem fornecidas com esse intervalo de amostragem. A Fig. 4.5 mostra a estratificação térmica do fluido adotada. Foram assumidas cinco faixas de temperatura distribuídas horizontalmente, com uma correspondência aproximada às posições dos cinco termopares. Em todas as faixas considera-se uma temperatura uniforme.

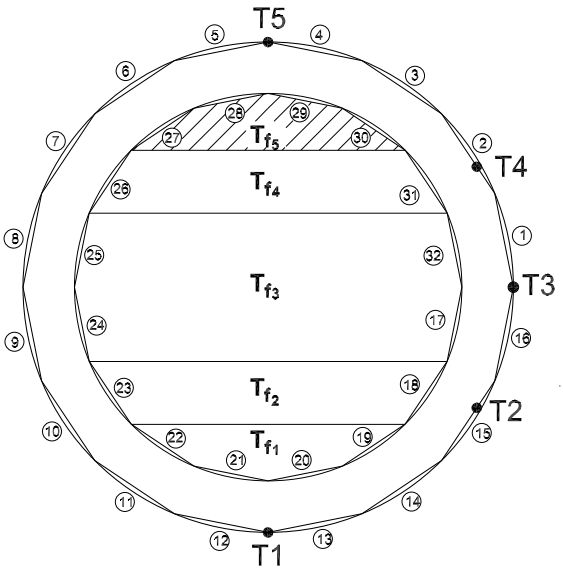

Figura 4.5 – Estratificação térmica do fluido no interior do duto e respectivos elementos de contorno

Assim, a faixa inferior, associada aos elementos de contorno 19, 20, 21, e 22, tem toda ela temperatura $T_{f1}(t)$. A faixa seguinte, associada aos elementos 18 e 23, tem temperatura $T_{f2}(t)$. A faixa central, associada aos elementos 17, 24, 25 e 32, tem temperatura $T_{f3}(t)$. A faixa seguinte, associada aos elementos 26 e 31 tem temperatura $T_{f4}(t)$. Finalmente, a faixa superior, associada aos elementos 27, 28, 29 e 30 tem temperatura $T_{f5}(t)$. Em todas as simulações bidimensionais transientes, serão dados de entrada os perfis de temperatura versus tempo do fluido

nessas cinco faixas.

Os dados de saída das simulações corresponderão às temperaturas nos cinco termopares fixados no exterior do duto, nas posições indicadas na Fig. 4.5. Ao primeiro termopar, atribuiremos o valor da temperatura simulada no elemento 13 (não esquecendo que a simetria em relação ao plano mediano vertical garante valores iguais nos elementos 12 e 13). Ao segundo termopar atribuiremos o valor da saída no elemento 15. Ao terceiro termopar será atribuído o valor da média aritimética entre as temperaturas simuladas nos elementos 1 e 16. Ao quarto termopar será atribuído o valor correspondente à temperatura no elemento 2. Finalmente, o valor obtido no elemento 4 será atribuído ao quinto termopar. Por questão de simplicidade, designaremos as saídas das simulações como T_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$. As temperaturas medidas são designadas como T_kM, $k = 1, 2, \ldots, 5$.

Primeiramente, realizou-se um ensaio numérico em regime permanente, visando testar o programa de simulação. Para tal, a entrada de dados do programa considerou valores constantes no tempo para as temperaturas nas cinco faixas, a saber: $T_{f1} = 145\ ^0$C, $T_{f2} = 157\ ^0$C, $T_{f3} = 167\ ^0$C, $T_{f4} = 193\ ^0$C e $T_{f5} = 253\ ^0$C. Essas temperaturas foram escolhidas por serem, aproximadamente, as médias das temperaturas medidas. A Fig. 4.6 indica os resultados obtidos. As cinco curvas apresentadas indicam as temperaturas nos cinco termopares.

Com exceção de um pequeno trecho inicial — onde a simulação efetivamente "interpreta" como se houvesse um transiente —, o comportamento da simulação confirma a presença de um regime permanente. É interessante observar que T_5 decresceu cerca de 3,5 ^{0}C em relação ao valor de temperatura de entrada na faixa superior, enquanto T_4 e T_3 tiveram suas temperaturas incrementadas de, aproximadamente, 8 ^{0}C e 3,6 ^{0}C em relação às faixas correspondentes. As temperaturas T_2 e T_1, permaneceram praticamente inalteradas. Isso se deve, naturalmente, à condução de calor na direção circunferencial entre a parte quente (superior) da tubulação e a parte fria (inferior). Esses diferenciais nos dão, também uma indicação das relações de amplitude a serem consideradas na entrada dos sinais transientes, tendo em vista a solução do problema inverso.

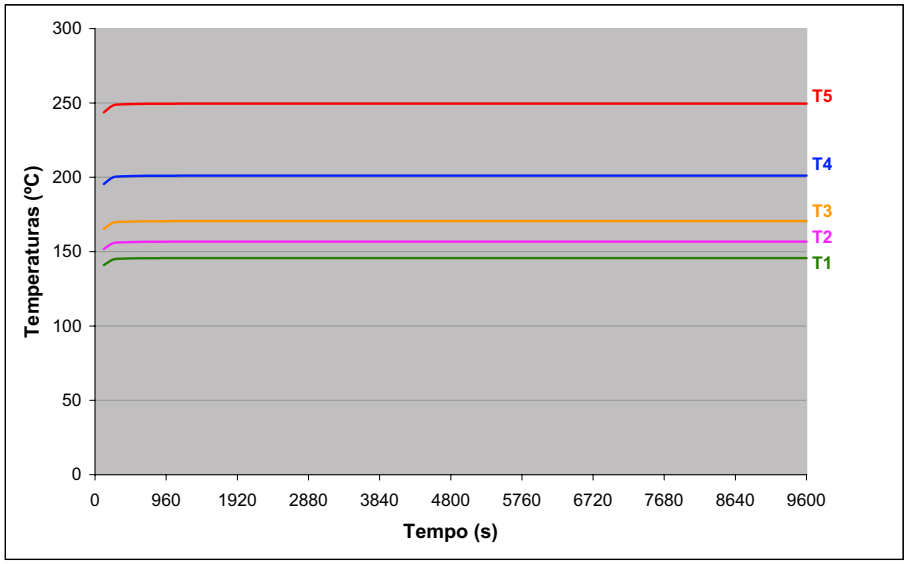

Figura 4.6 – Resultados da simulação bidimensional em regime permanente

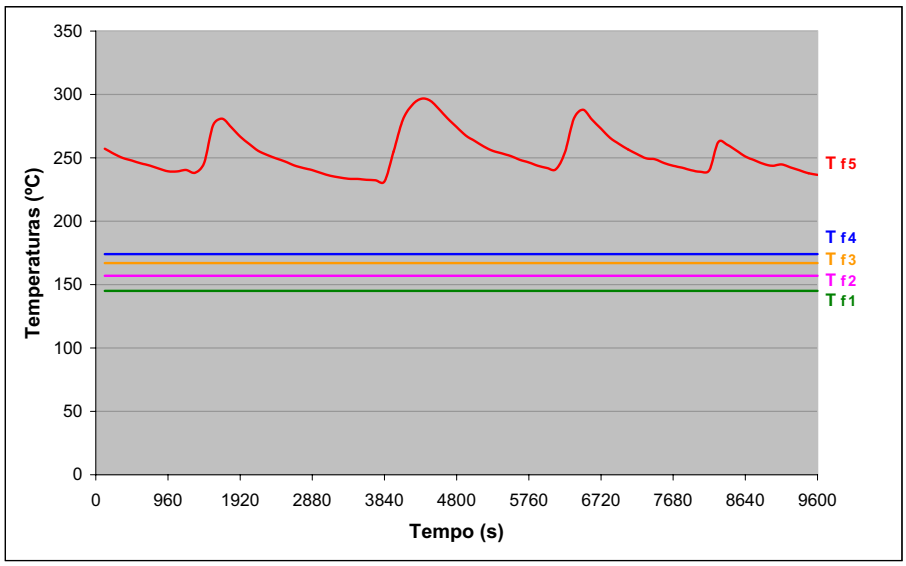

Figura 4.7 – Sinais de entrada para o simulador bidimensional em regime transiente

O ensaio numérico seguinte é uma simulação térmica bidimensional em regime transiente. A Fig. 4.7 apresenta os perfis de temperaturas no fluido, $T_{fk}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, 5$, dados como entrada no simulador.

Os valores de T_f escolhidos foram os mesmos do exemplo anterior à exceção de $T_{f5}(t)$, cujos valores foram extraídos da própria resposta medida, ou seja, $T_{f5}(t) = T_5M(t)$.

Os resultados da simulação estão apresentados na Fig. 4.8.

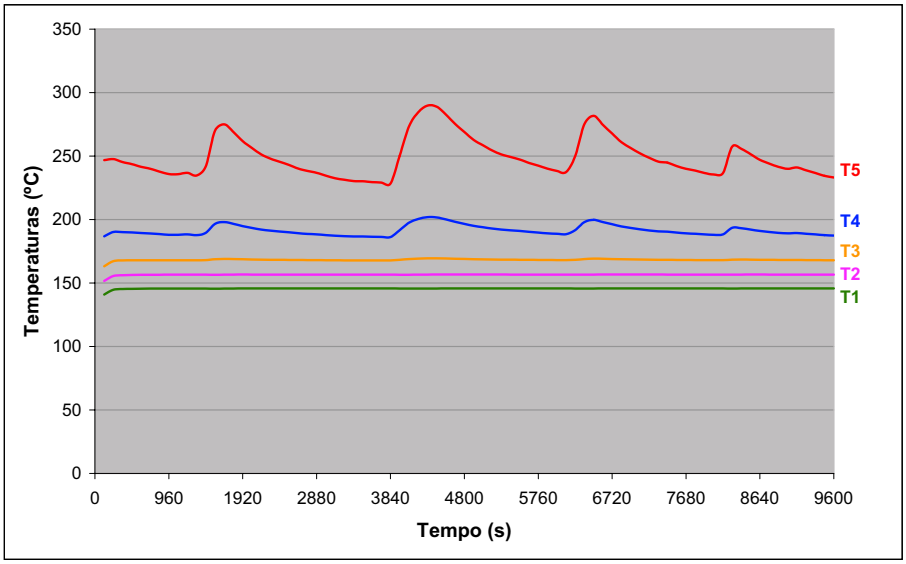

Figura 4.8 – Resultados da simulação bidimensional em regime transiente para a entrada indicada na Fig. 4.7

Pode-se observar que o transiente térmico (cíclico) na entrada, exclusivamente na faixa superior do fluido, além de gerar um transiente correspondente em $T_5(t)$, também produz flutuações térmicas em $T_4(t)$.

As três temperaturas inferiores, contudo, não indicam influência significativa das flutuações de entrada, sendo aparentemente determinadas pelo regime permanente nas três faixas inferiores de fluido. Verifica-se, como é natural, discrepâncias de amplitude e de fase entre o sinal $T_5(t)$ obtido na simulação e o sinal $T_5M(t)$ medido, como indica a Fig. 4.9. A diferença média observada é de cerca de 4,38 ^{0}C e o atraso médio de cerca de 120 s.

Após uma seqüência de ensaios numéricos não muito extensa, num processo de tentativa e erro objetivando gerar sinais de saída do simulador o mais próximos possível dos sinais medidos, chegou-se às temperaturas no fluido, veja Fig. 4.10.

Observe-se que os sinais de entrada (temperaturas do fluido nas faixas anteriormente descritas) modificaram-se ligeiramente em relação ao ensaio numérico anterior. O sinal T_{f_5} permaneceu essencialmente o mesmo, com uma pequena alteração de amplitude, visando compensar a atenuação na temperatura da parede

externa verificada nos ensaios anteriores. A diferença mais importante ocorre com o sinal T_{f_4}, agora com pequenos picos negativos em relação a seu valor médio, conforme visto na Fig. 4.10. Não há alterações significativas nos primeiros três sinais.

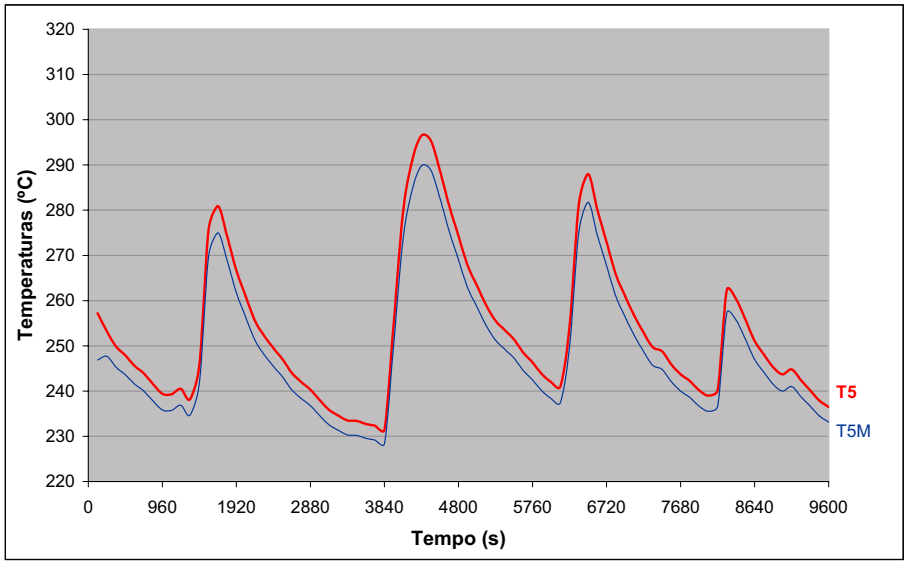

Figura 4.9 – Comparação entre o sinal $T_5(t)$, simulado, e o sinal $T_5M(t)$, medido

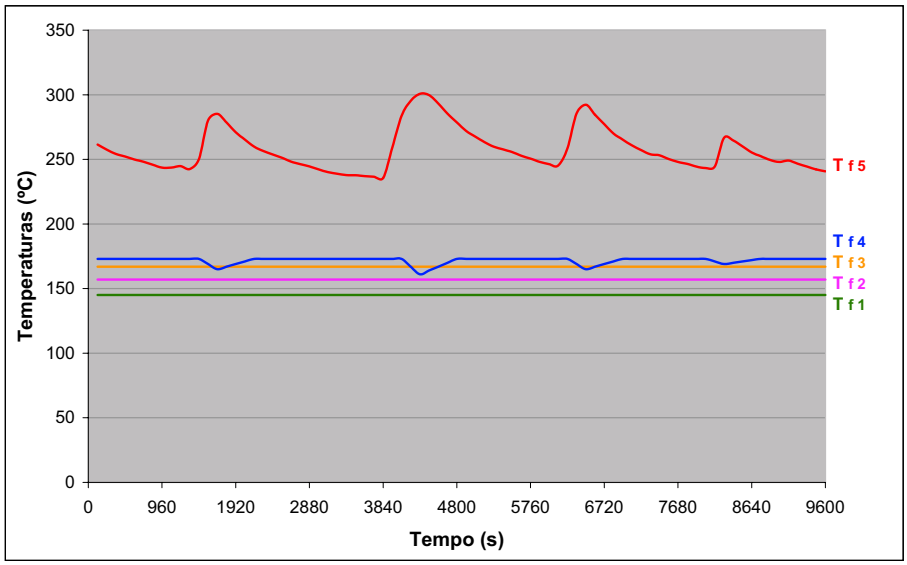

Figura 4.10 – Sinais de entrada para o simulador bidimensional em regime transiente: resultado de diversas interações

Os resultados obtidos na simulação são mostrados na Fig. 4.11. A Fig. 4.12

reproduz os sinais medidos nos cinco termopares, cujo comportamento buscamos reproduzir.

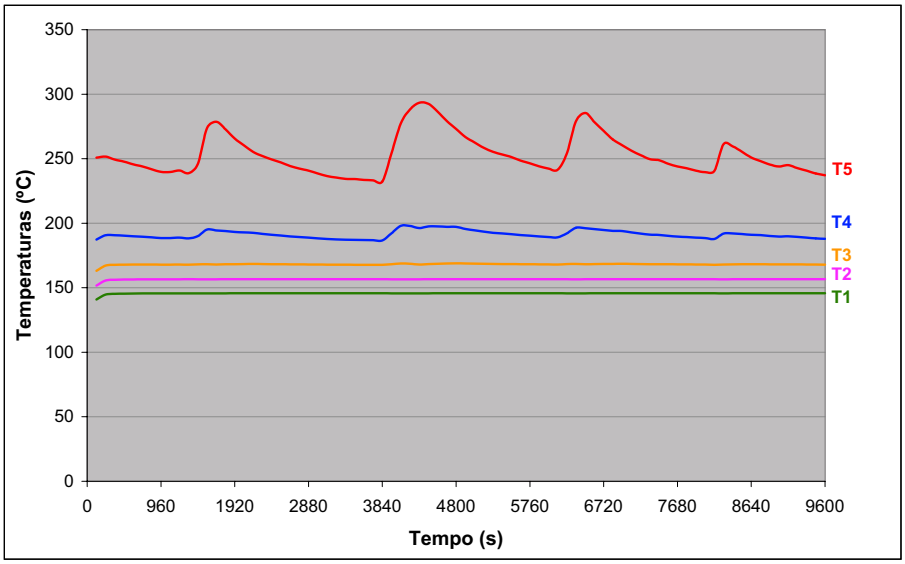

Figura 4.11 – Resultados da simulação bidimensional em regime transiente para a entrada indicada na Fig. 4.10

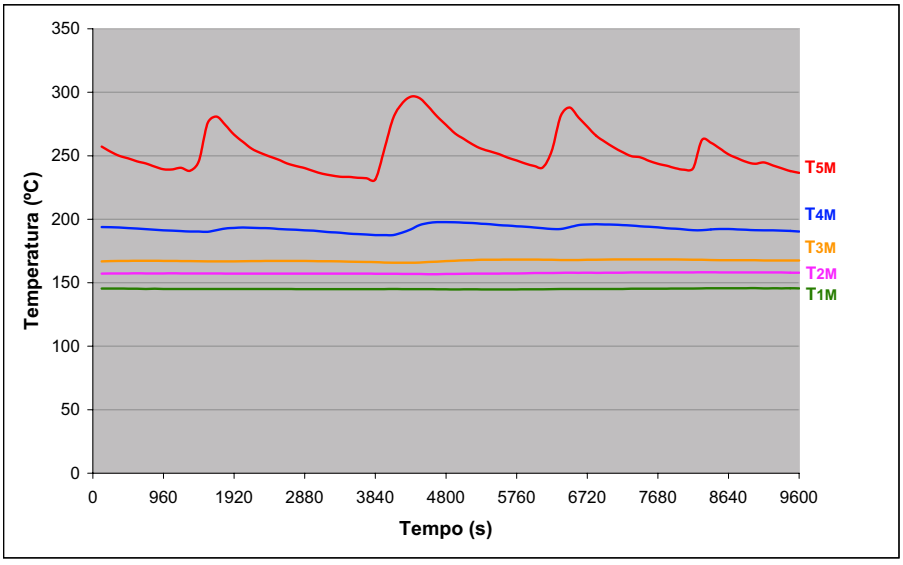

Figura 4.12 – Sinais medidos nos cinco termopares em um período de 9600 s

Observa-se que o comportamento das temperaturas simuladas nos termopares está bem próximo dos valores medidos. Como o ponto de partida da identificação

foi a partir de T_5, o casamento entre temperatura simulada e temperatura medida para o termopar 5 é quase perfeito, como atesta a Fig. 4.13.

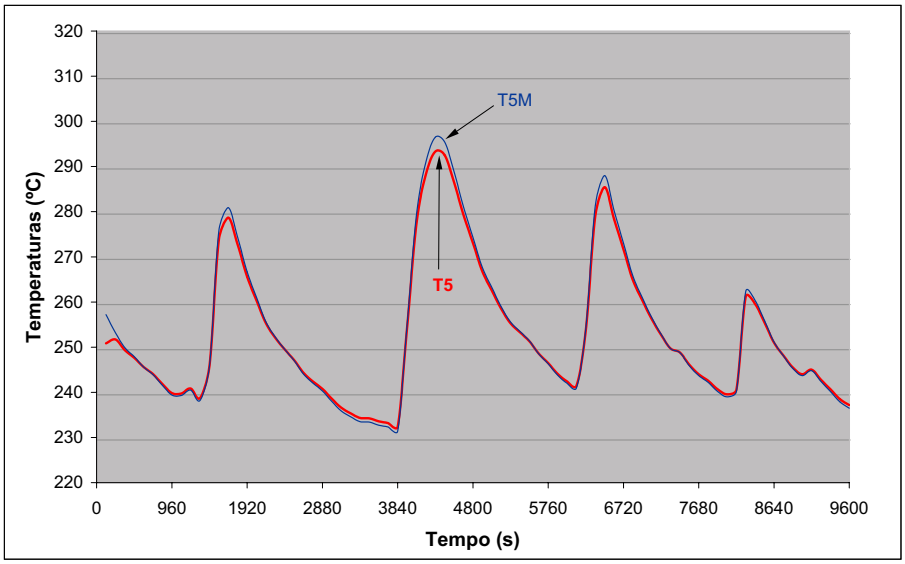

Figura 4.13 – Comparação entre a temperatura simulada e medida no termopar 5

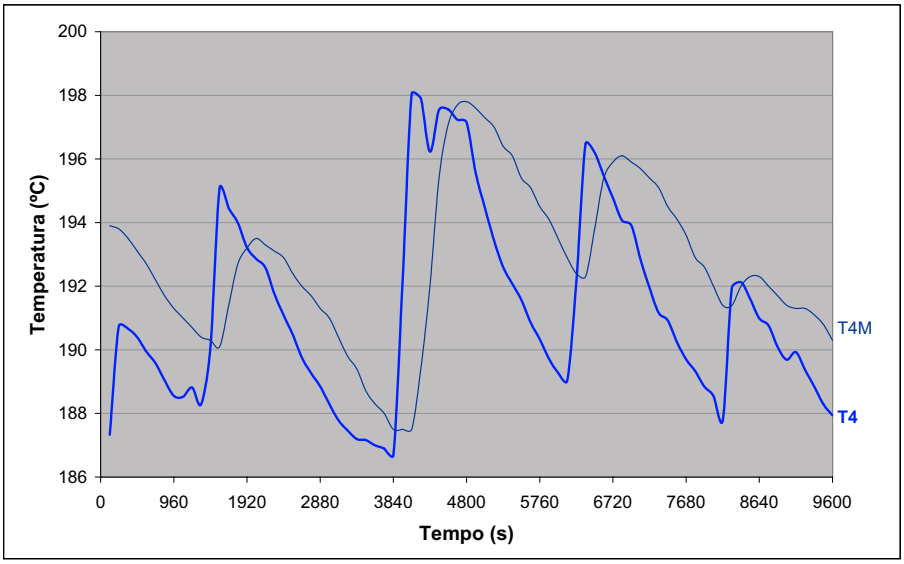

Figura 4.14 – Comparação entre a temperatura simulada e medida no termopar 4

Contudo, permanece um pequeno erro no perfil $T_4(t)$. Essa discrepância está plotada na Fig. 4.14. As amplitudes apresentam-se bastante próximas mas há ainda um erro perceptível de fase, resultando em um atraso médio de cerca de 3

intervalos de tempo (360 s). É possível (mas não garantido) que esse resultado possa ser melhorado prosseguindo-se nas iterações. Todavia, como se verifica um atraso entre os ciclos de $T_5(t)$ e os de $T_4(t)$ — provavelmente devido à condução na direção circunferencial — não deve ser descartada a possibilidade de um erro nos dados de entrada (nas constantes) do simulador.

A Fig. 4.15 apresenta os resultados gerais dos erros percentuais, $\epsilon_k(t)$, obtidos na última simulação. Os gráficos indicam

$$\epsilon_k(t) = \frac{T_k(t) - T_kM(t)}{T_kM(t)} \times 100, \qquad k = 1, 2, \ldots, 5, \tag{4.1}$$

mostrando que os resultados obtidos são bastante consistentes e razoáveis.

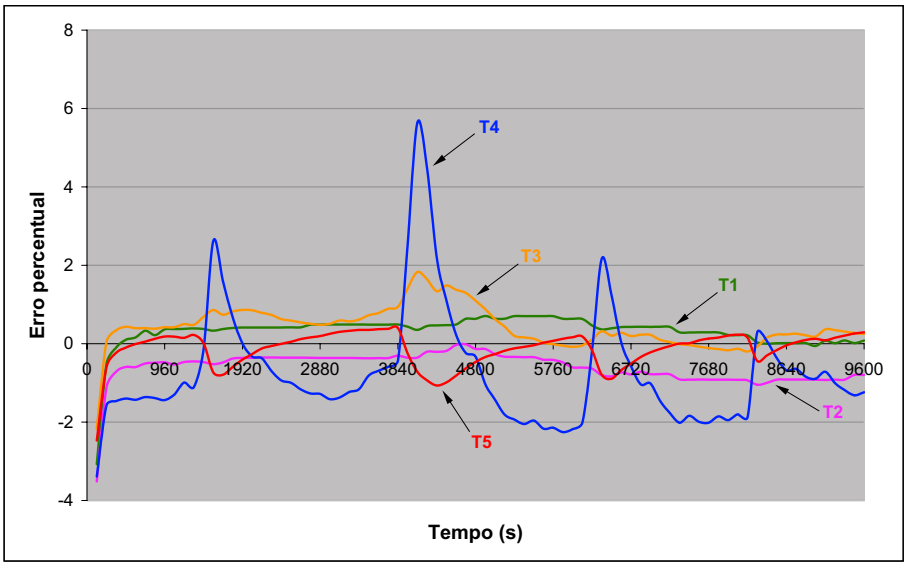

Figura 4.15 – Erros entre os resultados simulados e os valores medidos

Como se pode notar, com exceção de T_4, os erros percentuais ficaram na faixa de $\pm 2\%$, o que pode ser considerado como uma boa identificação.

Capítulo 5

Conclusões e sugestões para futuros trabalhos

A transmissão de calor em um cilindro oco (duto) em regime transiente bidimensional foi estudada. O problema em foco, consiste em se ter um fluido escoando, no interior de uma tubulação horizontal, com estratificação térmica na direção vertical. Além disso, as temperaturas no fluido — ou em parte deste — apresentam flutuações, aparentemente cíclicas, o que caracteriza o problema como transiente e bidimensional.

Os dados de que dispúnhamos para validar o estudo consistem em perfis de temperatura versus tempo levantados por meio de termopares fixados na periferia de uma seção do duto em questão. Portanto, o objetivo geral foi encontrar os perfis de temperatura no fluido que, dados como entrada na simulação da difusão térmica, fornecessem como saída padrões de sinal nos termopares o mais próximos possível dos valores medidos.

As simulações do problema direto (dada a temperatura do fluido T_f no interior da tubulação, determinar a temperatura na face externa T_e) foram obtidas a partir do método dos elementos de contorno, de modo a transformar a equação diferencial da difusão em uma equação integral no contorno da região. O contorno foi então discretizado e a equação integral resolvida numericamente pelo método dos elementos de contorno.

A partir de uma hipótese preliminar de ausência de estratificação térmica no fluido interior e de perfil de temperatura com a forma de salto ou choque térmico, foi construído um modelo simplificado unidimensional. Uma vez que as condições de temperatura do fluido no instante do transiente não são conhecidas, o que torna o problema físico, em princípio, difícil de resolver, optou-se por construir o modelo simplificado unidimensional, para posteriormente — na resolução do problema bidimensional transiente — ajustar-se diversos parâmetros.

A primeira conclusão obtida é que o método dos elementos de contorno demonstrou ser inteiramente adequado para a solução do problema térmico transiente aqui abordado. E a discretização no contorno em 32 elementos mostrou-se plenamente satisfatória, uma vez que uma discretização superior (64 elementos, por exemplo) produz diferenças negligenciáveis nos resultados. Para o modelo unidimensional, observou-se que a temperatura na face interna no duto é sensível, como era de se esperar, ao valor do coeficiente de convecção. Por outro lado, a temperatura na face externa, além de sofrer a influência do coeficiente de filme tem também sua taxa de subida mais ou menos retardada dependendo do valor do coeficiente de difusividade térmica.

Com respeito aos atrasos verificados na temperatura externa em relação ao instante do choque, a conclusão geral é de que esses retardos ocorrem em tempos relativamente reduzidos, como se viu no Capítulo 3. O que se observou ali é que, tipicamente, retardos da ordem de $20 \sim 30$ s são usuais. Levando-se em consideração que o intervalo de tempo entre as tomadas de temperatura nos termopares é de 120 s, flutuações rápidas de temperatura no fluido, se existirem, não serão devidamente captadas pelos sensores, uma vez que não haverá registro de choques ou flutuações para transientes de duração menor do que 2 minutos. Essa conclusão parece indicar que uma tomada de temperatura a intervalos menores seria desejável.

Ainda no modelo unidimensional simplificado, ficou demonstrado que qualquer salto brusco de temperatura no fluido pode ser identificado quanto à sua amplitude e instante de ocorrência desde que se disponha de dados mais refinados no domínio do tempo.

Quanto ao modelo bidimensional, considerou-se a existência de cinco faixas ou regiões horizontais de estratificação térmica. Esta foi uma escolha natural, uma vez que dispomos de cinco registros independentes de temperatura. As faixas foram selecionadas de modo a cobrir todos os elementos de contorno utilizados na face interna da tubulação e a escolha utilizou um critério de razoabilidade. De fato, um exemplo numérico testado com a faixa superior de temperatura reduzida a dois

elementos de contorno, mostrou-se inadequado para simular os perfis de temperatura observados na medição, uma vez que não apresentou influência suficiente dessa faixa sobre os perfis de temperaturas obtidas no conjunto de termopares inferiores.

Na solução do problema direto transiente bidimensional utilizou-se um programa de simulação com elementos de contorno constantes e considerando-se os mesmos valores para os coeficientes utilizados no modelo simplificado. Os resultados da simulação demonstraram que, muito provavelmente, as temperaturas nas três faixas inferiores permanecem constantes ao longo do tempo, havendo flutuações de pequena monta na quarta faixa e flutuações pseudo-cíclicas de maior amplitude na faixa superior.

Para a solução do problema inverso, e tendo em mente os resultados anteriores quanto aos atrasos no modelo simplificado, optou-se por sugerir, como dado de entrada no programa de simulação numérica, perfis extremamente similares àqueles medidos pelo termopar 5, alterando-se ligeiramente sua amplitude e fase. Como resultado, observou-se que as saídas obtidas apresentam formas muito similares. O sentimento que se tem é que as flutuações no termopar 4 são resultantes das flutuações na temperatura do fluido na faixa superior, com um pequeno atraso, como indica o gráfico das temperaturas medidas. Esse atraso, provavelmente, se deve ao processo de condução na direção circunferencial. O simulador, contudo, não previu devidamente o retardo, o que indicaria uma imprecisão a ser pesquisada.

Como as escalas de tempo são amplas, a solução do problema inverso ficou de certo modo facilitada. Com efeito, com um número relativamente pequeno de iterações, alcançou-se uma identificação satisfatória, com um erro percentual relativo aos valores medidos da ordem de $\pm 2\%$, exceto para a temperatura do quarto termopar, onde o erro percentual chegou a $\pm 5,5\%$. Assim, a solução parece ser completamente satisfatória para o que se deseja. Isso não garante que a solução do problema inverso seja única, já que se trata de um problema mal posto.

A medição com um número maior de termopares, principalmente na região superior da tubulação, poderia fornecer maiores informações sobre a região do

fluido onde ocorre os ciclos térmicos.

Como os atrasos verificados nas simulações são de ordem inferior ($\sim$ 40 s) aos intervalos de amostragem das medições ($\sim$ 120 s) seria conveniente dispor de informações a intervalos menores.

Uma investigação quanto aos coeficientes envolvidos, em particular o coeficiente de filme, poderia esclarecer os atrasos verificados nos sinais do termopar 4. Desejando-se maior precisão, particularmente quanto ao termopar 4, sugere-se prosseguir nas iterações.

Referências bibliográficas

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover.

[2] AZEVEDO, J. P. S., 1985, *Análise de Problemas não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

[3] BEJAN, A., 1993, *Heat Transfer*. New York, John Wiley.

[4] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C., 1999, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Sexta edição, Rio de Janeiro, Guanabara Dois.

[5] BREBBIA, C. A., 1978, *The Boundary Element Method for Engineers*. London, Pentech Press.

[6] BREBBIA, C. A. and DOMINGUEZ, J., 1989, *Boundary Elements an Introductory Course*. Southampton, Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill.

[7] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. and WROBEL, L. C., 1984, *Boundary Element Techiniques: Theory and Applications in Engineering*. New York, Springer.

[8] DETTMAN, J. W., 1962, *Mathematical Methods in Physics and Engineering*, McGraw-Hill.

[9] EFFREN, T. C., 1997, *Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno para Solução de Problemas de Difusão*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

[10] FOURIER, J. B., 1822, *Theorie analytique de la chaleur*. Paris. (English translation by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, 1955.)

[11] GUYETTE, M. and DE SMET, M., 1998, *Thermo-mechanical Analysis Methods for the Conception and the Follow up of Components Subjected to Thermal Stratification Transients.* OECD/DSIN Meeting, 7-12, Paris.

[12] HADAMARD, J., 1923, *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*, New Haven, Yale University Press.

[13] HOLMAN, J., P. 1983, *Transferência de Calor*, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil.

[14] ISACHENKO, V., OSIPOVA, V. and SUKOMEL, A., 1969, *Heat Transfer*, Mir Publishers.

[15] JESUS, J. C., 2001, *Implementação Computacional pelo Método dos Elementos de Contorno para Solução da Equação da Difusão Transiente 2D Utilizando Solução Fundamental Independente do Tempo.* Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

[16] KIRSCH, A., 1996, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, New York, Springer.

[17] KREITH, F., 1977, *Princípios de Transmissão de Calor.* São Paulo, Edgard Blucher.

[18] MANESCHY, E. and SUANNO, R., 2000, *Cyclic Thermal Stratification at the ANGRA I RHR Piping.* ASME Pressure Vessel and Piping PVP 2000, 23-27, Seattle, Washington.

[19] MANESCHY, E. and SUANNO, R., 2000, *Fatigue Evaluation in Piping Caused by Thernal Stratification.* International Conference on Fatigue of Reactor Components, Napa, Califórnia.

[20] MANSUR, W. J., PRODANOFF, J. H. A. e AZEVEDO, J. P. S., 1995, *Método dos Elementos de Contorno*, Em: Silva, R. V., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos II.* 1 ed., Capítulo 1, Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

[21] ÖZIŞIK, M. N., 1968, *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Scranton, International Texbook Company.

[22] SCHMIDT et al., 1993, *Introducion to Thermal Science*. Second edition, New York, Wiley.

[23] VAN WYLEN, G. J., 1959, *Termodynamics*. John Wiley International Edition.

[24] WELTY, J. R., WICKS, C. E. and WILSON, R. E., 1976, *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*. Second edition, New York, John Wiley & Sons.

[25] WILLIAMSON, R. E., CROWELL, R. H., and TROTTER, H. F., 1972, *Calculus of Vector Functions*, Third Edition, Prentice Hall.

[26] WROBEL, L. C., 1981, *Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method*. Ph.D. Thesis, Southampton University.

[27] ZIENKIEWICZ, O. C. and MORGAN, K., 1983, *Finite Element and Approximation*, John Wiley.

Apêndice

1. Entrada de dados unidimensional do programa de simulação

```
EQUACAO DA DIFUSÃO
0.16
0.195
   1   Coeficiente      K
 0.5    Intervalo      de        tempo
  16       No.         de         nós
   1     10.953              0     Nó          Coordenadas          X       e       Y
   2      7.745          7.745
   3          0         10.953
   4     -7.745          7.745
   5    -10.953              0
   6     -7.745         -7.745
   7          0        -10.953
   8      7.745         -7.745
   9      8.653              0
  10      6.119         -6.119
  11          0         -8.653
  12     -6.119         -6.119
  13     -8.653              0
  14     -6.119          6.119
  15          0          8.653
  16      6.119          6.119
  16   No.          de          elementos
   1      1        2        1   Elemento     Nó1    Nó2
   2      2        3        1
   3      3        4        1
   4      4        5        1
   5      5        6        1
   6      6        7        1
   7      7        8        1
   8      8        1        1
   9      9       10        2
  10     10       11        2
  11     11       12        2
  12     12       13        2
  13     13       14        2
  14     14       15        2
  15     15       16        2
  16     16        9        2
  80   No.       de       intervalos
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0      0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100

100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
0 No. pontos internos

2. Saída de dados unidimensional do programa de simulação

2.1 Com 16 elementos no contorno

Para um choque térmico de $100\,^0$C ; $\Delta t = 0,5$ s; $t_{\text{MAX}} = 40$ s; 80 intervalos de tempo; $h_c = 0,16\text{W}/cm^2\text{K}$ e $k = 0,195\text{W/cmK}$.

Tempo (s)	Te (ºC)	Ti (ºC)	Derivada primeira	Derivada segunda
0	0	0	0	0
0.5	1.92921	39.60045	9.545914161	16.47603773
1	9.54591	49.68117	16.47603773	7.64038856
1.5	18.40525	56.15272	17.18630272	-0.690681084
2	26.73222	61.12522	15.78535665	-3.117761804
2.5	34.19061	65.25389	14.06854092	-3.317803514
3	40.80076	68.80493	12.46755313	-3.007164213
3.5	46.65816	71.91349	11.0613767	-2.626001799
4	51.86213	74.66156	9.841551333	-2.279399445
4.5	56.49971	77.10569	8.78197726	-1.984657736
5	60.64411	79.28825	7.856893597	-1.737275546
5.5	64.35661	81.24284	7.044701713	-1.528871195
6	67.68881	82.99703	6.328022402	-1.351766253
6.5	70.68463	84.57402	5.69293546	-1.199831303
7	73.38175	85.99365	5.128191099	-1.068366247
7.5	75.81282	87.27309	4.624569213	-0.953772395
8	78.00632	88.42732	4.174418704	-0.85327042
8.5	79.98724	89.4695	3.771298793	-0.764701343
9	81.77762	90.41127	3.409717361	-0.686339517
9.5	83.39696	91.2629	3.084959276	-0.616773441
10	84.86258	92.03354	2.79294392	-0.554851071
10.5	86.1899	92.73134	2.530108205	-0.499617888
11	87.39268	93.36355	2.293326032	-0.450260048
11.5	88.48323	93.93668	2.079848157	-0.406080519
12	89.47253	94.45653	1.887245513	-0.366483033
12.5	90.37047	94.92833	1.713365124	-0.330951254
13	91.1859	95.35673	1.556294259	-0.299038971
13.5	91.92677	95.74594	1.414326153	-0.270356654
14	92.60022	96.09973	1.285937605	-0.244546715
14.5	93.2127	96.42148	1.169779438	-0.221300994
15	93.77	96.71426	1.064636611	-0.200363055
15.5	94.27734	96.98082	0.969416383	-0.181491915
16	94.73942	97.22362	0.883144696	-0.164468099
16.5	95.16048	97.4449	0.804948284	-0.149100652
17	95.54437	97.64669	0.734044044	-0.135227186
17.5	95.89453	97.83079	0.669721098	-0.122699117
18	96.2140	97.99885	0.611344928	-0.111372371
18.5	96.50587	98.15234	0.558348727	-0.101130722
19	96.77244	98.29262	0.510214206	-0.091868798
19.5	97.01609	98.4209	0.466479929	-0.083489164
20	97.23892	98.53826	0.426725041	-0.075908954

Tempo (s)	Te (ºC)	Ti (ºC)	Derivada primeira	Derivada segunda
20.5	97.44281	98.6457	0.390570975	-0.069041142
21	97.62949	98.74412	0.3576839	-0.062814916
21.5	97.8005	98.83433	0.327756059	-0.057177458
22	97.95724	98.91706	0.300506442	-0.052069101
22.5	98.101	98.99299	0.275686958	-0.047433264
23	98.23293	99.06272	0.253073178	-0.043228515
23.5	98.35408	99.1268	0.232458443	-0.039419498
24	98.46539	99.18572	0.21365368	-0.0359575
24.5	98.56773	99.23994	0.196500943	-0.032809472
25	98.66189	99.28986	0.180844208	-0.029958202
25.5	98.74857	99.33586	0.166542741	-0.027361829
26	98.82843	99.37827	0.153482379	-0.025001817
26.5	98.90206	99.41741	0.141540924	-0.022859744
27	98.96997	99.45356	0.130622635	-0.020905861
27.5	99.03268	99.48695	0.120635063	-0.019133592
28	99.09061	99.51784	0.111489043	-0.0175188
28.5	99.14417	99.54643	0.103116263	-0.016045397
29	99.19373	99.5729	0.095443646	-0.014710903
29.5	99.23961	99.59745	0.088405361	-0.013489649
30	99.28213	99.62021	0.081953997	-0.012371185
30.5	99.32157	99.64135	0.076034176	-0.011356762
31	99.35817	99.66099	0.070597235	-0.010434143
31.5	99.39216	99.67925	0.065600032	-0.009589901
32	99.42377	99.69624	0.061007334	-0.00881785
32.5	99.45317	99.71207	0.056782183	-0.008112391
33	99.48055	99.72682	0.052894944	-0.007466859
33.5	99.50607	99.74058	0.049315324	-0.006881333
34	99.52986	99.75343	0.046013611	-0.006342915
34.5	99.55208	99.76544	0.042972409	-0.005850593
35	99.57284	99.77667	0.040163018	-0.005399644
35.5	99.59224	99.78718	0.037572765	-0.004982415
36	99.61041	99.79702	0.035180603	-0.004604897
36.5	99.62742	99.80625	0.032967869	-0.004263422
37	99.64338	99.81491	0.03091718	-0.00394574
37.5	99.65834	99.82304	0.029022129	-0.003648921
38	99.6724	99.83068	0.027268259	-0.00338513
38.5	99.68561	99.83787	0.025636999	-0.00314296
39	99.69804	99.84463	0.0241253	-0.002910866
39.5	99.70973	99.851	0.022726133	
40	99.72076	99.85701		

2.2 Com 32 elementos no contorno

Para um choque térmico de $100\,^0$C ; $\Delta t = 0,5$ s; $t_{\text{MAX}} = 40$ s; 80 intervalos de tempo; $h_c = 0,16\text{W}/cm^2\text{K}$ e $k = 0,195\text{W}/\text{cmK}$.

Tempo (s)	Te (ºC)	Ti (ºC)	Derivada primeira	Derivada segunda
0	0	0	0	0
0.5	1.331929	39.31798	7.436219829	13.69092089
1	7.436219	48.85449	13.69092089	7.61706556
1.5	15.02285	54.87621	15.05328539	0.722224429
2	22.48950	59.52221	14.41314532	-1.753312867
2.5	29.43599	63.43635	13.29997252	-2.281258425
3	35.78947	66.86257	12.13188689	-2.275828398
3.5	41.56788	69.91360	11.02414412	-2.126132306
4	46.81362	72.65303	10.00575459	-1.944554647
4.5	51.57363	75.12335	9.079589476	-1.765233548
5	55.89321	77.35661	8.240521038	-1.598324501
5.5	59.81415	79.37879	7.481264976	-1.446193604
6	63.37447	81.21189	6.794327434	-1.308613246
6.5	66.60848	82.87497	6.17265173	-1.18453062
7	69.54712	84.38478	5.609796814	-1.072693617
7.5	72.21828	85.75621	5.099958114	-0.971873585
8	74.64708	87.00252	4.637923229	-0.880937646
8.5	76.85620	88.13558	4.219020467	-0.798856895
9	78.86610	89.16608	3.839066334	-0.724717431
9.5	80.69527	90.10362	3.494303036	-0.657710902
10	82.36040	90.95685	3.181355432	-0.597111743
10.5	83.87662	91.73360	2.897191293	-0.542271027
11	85.25760	92.44094	2.639084406	-0.492620493
11.5	86.51571	93.08523	2.404570799	-0.44764903
12	87.66217	93.67227	2.191435376	-0.406891076
12.5	88.70714	94.20729	1.997679723	-0.369941171
13	89.65985	94.69502	1.821494205	-0.336430819
13.5	90.52864	95.13976	1.661248904	-0.306027722
14	91.32110	95.54541	1.515466483	-0.278437451
14.5	92.04410	95.91550	1.382811453	-0.253389459
15	92.70391	96.25325	1.262077024	-0.230643755
15.5	93.30618	96.56155	1.152167698	-0.209985317
16	93.85607	96.84305	1.052091707	-0.191217043
16.5	94.35827	97.10015	0.960950655	-0.17415945
17	94.81703	97.33504	0.877932257	-0.158655003
17.5	95.23620	97.54969	0.802295652	-0.144560829
18	95.61932	97.74590	0.733371428	-0.131743521
18.5	95.96958	97.92531	0.670552131	-0.120090861
19	96.28987	98.08942	0.613280567	-0.109486908
19.5	96.58286	98.23956	0.561065222	-0.099833139
20	96.85094	98.37697	0.513447428	-0.091056462

Tempo (s)	Te (ºC)	Ti (ºC)	Derivada primeira	Derivada segunda
20.5	97.09630	98.50277	0.47000876	-0.083066104
21	97.32095	98.61799	0.430381324	-0.075789592
21.5	97.52668	98.72355	0.394219168	-0.069168715
22	97.71517	98.82029	0.361212609	-0.063135931
22.5	97.88790	98.90897	0.331083237	-0.057640152
23	98.04625	98.99031	0.303572457	-0.052639424
23.5	98.19147	99.06494	0.278443813	-0.04808261
24	98.32469	99.13344	0.255489847	-0.043924243
24.5	98.44696	99.19634	0.23451957	-0.040135919
25	98.55921	99.25412	0.215353929	-0.036685431
25.5	98.66231	99.30722	0.197834139	-0.033539129
26	98.75705	99.35604	0.1818148	-0.030670496
26.5	98.84413	99.40094	0.167163643	-0.028053309
27	98.92421	99.44226	0.153761491	-0.025665173
27.5	98.99789	99.48031	0.141498471	-0.023488242
28	99.06571	99.51536	0.130273249	-0.021501681
28.5	99.12816	99.54766	0.11999679	-0.019686016
29	99.18571	99.57744	0.110587233	-0.018028919
29.5	99.23875	99.60492	0.101967871	-0.016518323
30	99.28767	99.63028	0.094068911	-0.015142015
30.5	99.33282	99.65371	0.086825855	-0.01388252
31	99.37450	99.67536	0.080186391	-0.012726876
31.5	99.41301	99.69538	0.07409898	-0.011671784
32	99.44860	99.71390	0.068514607	-0.010710567
32.5	99.48152	99.73105	0.063388413	-0.009836477
33	99.51199	99.74694	0.05867813	-0.009032923
33.5	99.54020	99.76166	0.05435549	-0.008294689
34	99.56634	99.77532	0.050383441	-0.007624116
34.5	99.59058	99.78801	0.046731374	-0.007007843
35	99.61307	99.79978	0.043375598	-0.006444747
35.5	99.63396	99.81073	0.040286627	-0.005931295
36	99.65336	99.82091	0.037444302	-0.005456935
36.5	99.67140	99.83039	0.034829692	-0.005027876
37	99.68819	99.83922	0.032416426	-0.004636466
37.5	99.70382	99.84745	0.030193226	-0.004267466
38	99.71838	99.85513	0.02814896	-0.003933192
38.5	99.73197	99.86229	0.026260034	-0.003632345
39	99.74464	99.86899	0.024516615	-0.003351285
39.5	99.75648	99.87525	0.02290875	
40	99.76755	99.88111		

3. Entrada de dados bidimensional do programa de simulação

```
EQUACAO DA DIFUSAO
0.16  Coeficiente HC
0.195 Coeficiente COND
1     Coeficiente K
120   Intervalo de tempo
32   Numero de nós
1      10.953         0 No. Coordenadas X e Y
2       10.12     4.192
3       7.745     7.745
4       4.192     10.12
5           0    10.953
6      -4.192     10.12
7      -7.745     7.745
8      -10.12     4.192
9     -10.953         0
10     -10.12    -4.192
11     -7.745    -7.745
12     -4.192    -10.12
13          0   -10.953
14      4.192    -10.12
15      7.745    -7.745
16      10.12    -4.192
17      8.653         0
18      7.995    -3.311
19      6.119    -6.119
20      3.311    -7.995
21          0    -8.653
22     -3.311    -7.995
23     -6.119    -6.119
24     -7.995    -3.311
25     -8.653         0
26     -7.995     3.311
27     -6.119     6.119
28     -3.311     7.995
29          0     8.653
30      3.311     7.995
31      6.119     6.119
32      7.995     3.311
32    No. De elementos
1    1    2    1    Elemento  Nó1     Nó2    Tipo CC
2    2    3    1
3    3    4    1
4    4    5    1
5    5    6    1
6    6    7    1
7    7    8    1
8    8    9    1
9    9    10   1
10   10   11   1
11   11   12   1
12   12   13   1
13   13   14   1
14   14   15   1
15   15   16   1
16   16   1    1
```

```
17   17   18   2
18   18   19   2
19   19   20   2
20   20   21   2
21   21   22   2
22   22   23   2
23   23   24   2
24   24   25   2
25   25   26   2
26   26   27   2
27   27   28   2
28   28   29   2
29   29   30   2
30   30   31   2
31   31   32   2
32   32   17   2
80   No. intervalos
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0     0     0     0     0     0
```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0

```
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145
```

145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145 145
145 145 145 145 145 145 145 145
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157 157
157 157 157 157 157 157 157 157
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167 167
167 167 167 167 167 167 167 167
174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174
174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174
174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174
174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174
174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174
174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174 174
174 174 174 174 174 174 174 174

```
261.5  257.5  254.2  252.2  249.9  248.2  245.8  243.7  243.6  244.8  242.5
250.1  280.1  285.2  278.6  271.0  265.3  259.9  256.5  253.8  251.3  248.3
246.3  244.6  242.3  240.2  238.9  237.8  237.7  237.0  236.6  235.7  259.2
283.7  295.3  300.8  299.7  293.1  285.3  278.6  272.0  267.6  263.3  259.9
257.8  255.7  252.8  250.6  248.1  246.3  245.3  258.6  285.6  292.3  284.5
277.3  270.1  265.3  260.9  257.2  254.0  253.1  250.2  248.0  246.5  244.5
243.3  244.5  266.7  264.6  260.1  255.4  252.4  249.6  248.0  249.1  246.7
244.5  242.2   240.8
261.5  257.5  254.2  252.2  249.9  248.2  245.8  243.7  243.6  244.8  242.5
250.1  280.1  285.2  278.6  271.0  265.3  259.9  256.5  253.8  251.3  248.3
246.3  244.6  242.3  240.2  238.9  237.8  237.7  237.0  236.6  235.7  259.2
283.7  295.3  300.8  299.7  293.1  285.3  278.6  272.0  267.6  263.3  259.9
257.8  255.7  252.8  250.6  248.1  246.3  245.3  258.6  285.6  292.3  284.5
277.3  270.1  265.3  260.9  257.2  254.0  253.1  250.2  248.0  246.5  244.5
243.3  244.5  266.7  264.6  260.1  255.4  252.4  249.6  248.0  249.1  246.7
244.5  242.2   240.8
261.5  257.5  254.2  252.2  249.9  248.2  245.8  243.7  243.6  244.8  242.5
250.1  280.1  285.2  278.6  271.0  265.3  259.9  256.5  253.8  251.3  248.3
246.3  244.6  242.3  240.2  238.9  237.8  237.7  237.0  236.6  235.7  259.2
283.7  295.3  300.8  299.7  293.1  285.3  278.6  272.0  267.6  263.3  259.9
257.8  255.7  252.8  250.6  248.1  246.3  245.3  258.6  285.6  292.3  284.5
277.3  270.1  265.3  260.9  257.2  254.0  253.1  250.2  248.0  246.5  244.5
243.3  244.5  266.7  264.6  260.1  255.4  252.4  249.6  248.0  249.1  246.7
244.5  242.2   240.8
261.5  257.5  254.2  252.2  249.9  248.2  245.8  243.7  243.6  244.8  242.5
250.1  280.1  285.2  278.6  271.0  265.3  259.9  256.5  253.8  251.3  248.3
246.3  244.6  242.3  240.2  238.9  237.8  237.7  237.0  236.6  235.7  259.2
283.7  295.3  300.8  299.7  293.1  285.3  278.6  272.0  267.6  263.3  259.9
257.8  255.7  252.8  250.6  248.1  246.3  245.3  258.6  285.6  292.3  284.5
277.3  270.1  265.3  260.9  257.2  254.0  253.1  250.2  248.0  246.5  244.5
243.3  244.5  266.7  264.6  260.1  255.4  252.4  249.6  248.0  249.1  246.7
244.5  242.2   240.8
174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174
174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174
174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174
174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174
174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174
174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174   174
174   174   174   174   174   174   174   174
167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167
167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167
167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167
167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167
167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167
167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167   167
167   167   167   167   167   167   167   167
0      No. pontos internos
```

4. Saída de dados bidimensional do programa de simulação

Tempo	T1	T2	T31	T32	T4	T5
1	140.930	151.679	159.842	166.735	187.840	250.884
2	144.651	155.553	163.839	170.762	191.264	251.740
3	145.258	156.182	164.471	171.298	191.177	249.365
4	145.447	156.376	164.658	171.417	190.908	247.696
5	145.535	156.466	164.737	171.413	190.455	245.629
6	145.582	156.513	164.774	171.387	190.094	244.073
7	145.615	156.545	164.792	171.318	189.553	241.845
8	145.635	156.563	164.797	171.244	189.066	239.880
9	145.644	156.570	164.801	171.241	189.039	239.778
10	145.649	156.575	164.812	171.295	189.327	240.907
11	145.667	156.594	164.821	171.223	188.807	238.777
12	145.645	156.569	164.832	171.504	190.571	245.867
13	145.574	156.500	164.926	172.686	197.629	273.983
14	145.636	156.593	165.079	173.066	199.055	279.054
15	145.684	156.653	165.117	172.882	197.597	272.988
16	145.701	156.668	165.088	172.575	195.797	265.849
17	145.703	156.663	165.047	172.318	194.414	260.451
18	145.706	156.661	165.009	172.077	193.107	255.342
19	145.703	156.652	164.975	171.912	192.268	252.104
20	145.703	156.647	164.951	171.785	191.605	249.538
21	145.704	156.645	164.932	171.670	190.997	247.168
22	145.707	156.645	164.913	171.539	190.274	244.333
23	145.705	156.640	164.894	171.443	189.781	242.430
24	145.705	156.637	164.880	171.363	189.365	240.815
25	145.708	156.638	164.866	171.264	188.812	238.644
26	145.709	156.636	164.850	171.169	188.302	236.655
27	145.707	156.632	164.836	171.104	187.979	235.415
28	145.707	156.630	164.827	171.052	187.709	234.370
29	145.705	156.626	164.820	171.040	187.675	234.262
30	145.706	156.627	164.817	171.011	187.509	233.604
31	145.706	156.626	164.813	170.992	187.410	233.222
32	145.708	156.628	164.809	170.955	187.196	232.375
33	145.633	156.547	164.849	171.836	192.670	254.331
34	145.612	156.545	164.999	172.899	198.558	277.455
35	145.643	156.603	165.147	173.504	201.475	288.569
36	145.665	156.642	165.233	173.811	202.883	293.871
37	145.690	156.677	165.273	173.825	202.696	292.931
38	145.714	156.704	165.267	173.583	201.166	286.774
39	145.724	156.710	165.227	173.256	199.305	279.429
40	145.726	156.705	165.178	172.954	197.680	273.087
41	145.728	156.700	165.130	172.658	196.082	266.842
42	145.723	156.687	165.086	172.445	194.996	262.653
43	145.723	156.682	165.052	172.248	193.949	258.577
44	145.721	156.675	165.021	172.087	193.115	255.346
45	145.717	156.666	164.997	171.981	192.591	253.340
46	145.717	156.663	164.979	171.883	192.078	251.347
47	145.719	156.663	164.961	171.757	191.381	248.610
48	145.718	156.658	164.941	171.653	190.841	246.519
49	145.719	156.657	164.924	171.542	190.236	244.154
50	145.718	156.652	164.906	171.455	189.793	242.442

Tempo	T1	T2	T31	T32	T4	T5
51	145.715	156.647	164.893	171.403	189.541	241.483
52	145.670	156.598	164.911	171.896	192.632	253.899
53	145.617	156.553	165.019	172.991	199.026	279.260
54	145.664	156.629	165.161	173.415	200.805	285.801
55	145.716	156.694	165.199	173.190	199.073	278.622
56	145.726	156.701	165.164	172.889	197.356	271.844
57	145.731	156.700	165.118	172.574	195.622	265.044
58	145.727	156.688	165.072	172.344	194.441	260.479
59	145.726	156.682	165.036	172.142	193.369	256.307
60	145.725	156.675	165.005	171.969	192.464	252.795
61	145.723	156.670	164.977	171.820	191.682	249.757
62	145.717	156.658	164.956	171.761	191.440	248.876
63	145.721	156.662	164.943	171.640	190.750	246.148
64	145.720	156.658	164.924	171.537	190.212	244.059
65	145.718	156.653	164.908	171.463	189.840	242.629
66	145.720	156.652	164.894	171.375	189.358	240.739
67	145.718	156.648	164.881	171.315	189.059	239.593
68	145.710	156.638	164.875	171.350	189.326	240.698
69	145.643	156.568	164.920	172.193	194.510	261.455
70	145.702	156.649	165.015	172.244	194.186	259.706
71	145.719	156.669	165.014	172.083	193.147	255.514
72	145.725	156.672	164.989	171.884	192.023	251.085
73	145.722	156.665	164.961	171.741	191.286	248.233
74	145.722	156.662	164.939	171.613	190.605	245.579
75	145.719	156.655	164.920	171.532	190.205	244.050
76	145.710	156.644	164.912	171.560	190.445	245.056
77	145.719	156.654	164.910	171.473	189.889	242.819
78	145.720	156.653	164.895	171.376	189.358	240.739
79	145.721	156.651	164.879	171.273	188.802	238.564
80	145.719	156.647	164.864	171.204	188.454	237.228

5. Listagem do programa de simulação

```
!(* ************************************************************** *)
!(*                                                                *)
!(*            COPPE/UFRJ – PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL           *)
!(*                                                                *)
!(*  Programa de Análise Térmica Transiente com elementos de contorno constantes  *)
!(*                                                                *)
!(* ************************************************************** *)

!   ==================
    PROGRAM  CONVEC
!   ==================
!
    INTEGER NDELTM          ! No. Max. de Intervalos de Tempo
    INTEGER NELMX           ! No. Max. de elementos
    INTEGER NGAMX           ! No. Max. de pontos de Gauss
    INTEGER NNGM            ! No. Max. de nós geométricos
    INTEGER NPINTM          ! No. Max. de pontos internos
!
    REAL*8  DeltaT          ! Intervalo de tempo em horas
!
    CHARACTER*15 FILEIN     ! Nome do arquivo de entrada
    CHARACTER*15 FILEOUT    ! Nome do arquivo de saída
!
    INTEGER Inic            ! Arquivo de inicialização
    INTEGER Inp             ! Arquivo de entrada
    INTEGER It              ! Intervalo de tempo atual
    INTEGER Ipr             ! Arquivo de saída
!
    REAL*8  K, HC, COND     ! Coeficientes
!
    INTEGER NDMX            ! No. máx. de intervalos de tempo
    INTEGER Ne              ! No. de elementos
    INTEGER NEMX            ! No. máx. de elementos
    INTEGER NG              ! No. de pontos de Gauss
    INTEGER NGMX            ! No. máx. de nós geométricos
    INTEGER Ninter          ! No. de intervalos tempo do arq.
    INTEGER Nn              ! No. de nos geométricos
    INTEGER Npi             ! No. de pontos internos
    INTEGER NPIMX           ! No. máx de pontos internos
!
    REAL*8 Pi               ! Valor de Pi
!
    PARAMETER (NDELTM =160)
    PARAMETER (NELMX  = 64)
```

```
      PARAMETER (NGAMX  = 14)
      PARAMETER (NNGM   = 65)
      PARAMETER (NPINTM  = 10)
      PARAMETER (Pi          = 3.141592654 )
!
      REAL*8  Ae(2)                        ! Argumento da exponencial integral
      REAL*8  Cg(NGAMX)                    ! Coordenadas de Gauss
      REAL*8  F(NELMX)                     ! Vetor de termos indep. no tempo atual
      INTEGER Kode(NELMX)                  ! Código do valor prescrito
      REAL*8  Len(NELMX)                   ! Comprimento de elemento
      REAL*8  Ome(NGAMX)                   ! Pesos de Gauss
      REAL*8  Tf(NDELTM)                   ! Tempo de contagem da resposta
      REAL*8  Valor(NDELTM)                ! Leitura de valores prescritos
      REAL*8  Vpr(NELMX)                   ! Val. prescritos no tempo atual
!
      REAL*8  Xg(NNGM), Yg(NNGM)           ! Coordenadas dos nos geométricos
      REAL*8  Xi(NPINTM), Yi(NPINTM)       ! Coordenadas dos pontos internos
      REAL*8  Xk(NGAMX), Yk(NGAMX)         ! Coord. dos pontos de Gauss no elem.
      REAL*8  Xm(NELMX), Ym(NELMX)         ! Coord. do ponto médio do elem.
!
      REAL*8  A(NELMX,NELMX)               ! Matriz do sist. que entra no solver
      REAL*8  B(NELMX,NELMX)               ! Multiplica os valores prescritos
      REAL*8  C(NELMX,NELMX)               ! Back-up da matriz [A]
      REAL*8  Dfi(NELMX,NDELTM)            ! Valores da der. normal(P)
      REAL*8  Fi(NELMX,NDELTM)             ! Valores de potencial(U)
      REAL*8  UC(NELMX,NDELTM)             ! Temperatura do fluido em contato
                                           ! com cada elemento
      REAL*8  Gpi(NELMX,NDELTM)            ! Coef. influência G no ponto int.
      REAL*8  Hpi(NELMX,NDELTM)            ! Coef. influência H no ponto int.
!
      REAL*8  G(NELMX,NELMX,NDELTM)        ! Matriz de coeficientes Gijt
      REAL*8  H(NELMX,NELMX,NDELTM)        ! Matriz de coeficientes Hijt
      INTEGER Inc(NELMX,2)                 ! Matriz de conectividades
      REAL*8  Upi(NPINTM,NDELTM)           ! Potencial dos pontos internos
!
      NDMX = NDELTM
      NEMX  = NELMX
      NPIMX = NPINTM
      NG       = NGAMX
      NGMX  = NNGM
!
!     Leitura dos arquivos
!
      Inic= 4
      Inp = 5
      Ipr = 6
!
      OPEN(Inic, FILE = 'INICIO.DAT', STATUS = 'OLD')
```

```
      READ(Inic, '(A)') FILEIN
      READ(Inic, '(A)') FILEOUT
      OPEN(Inp, FILE = FILEIN, STATUS = 'OLD')
      CLOSE (Inic)
!
!     LÊ OS DADOS DE ENTRADA
!
!     ------------------------------------------------------------------------------------------------
      CALL LER (NDMX,NEMX,NGMX,NPIMX,DeltaT,Inp,Ipr,K,Ne,Ninter,Nn,Npi,
                  UC,COND,HC,Kode,Len,Valor,Xg,Xm,Xi,Yg,Ym,Yi,Dfi,Fi,Inc)
!     ------------------------------------------------------------------------------------------------
!
!     VALORES DE COORDENADAS E PONTOS DE GAUSS
!
!     ------------------------------------------------------------------------------------------------
      CALL GAUSS (NG,Cg, Ome)
!     ------------------------------------------------------------------------------------------------
!
      DO 5 It=1,NInter
       Tf(It)= It*DeltaT
!
!      CÁLCULO DOS TERMOS DAS MATRIZES H E G EM CADA INTERVALO
!
!      ------------------------------------------------------------------------------------------------
       CALL MATGH (NDMX,NEMX,NG,NGMX,DeltaT,It,K,Ne,Pi,Ae,Cg,Len,Ome,
                        Tf,Xg,Xk,Xm,Yg,Yk,Ym,G,H,Inc)
!      ------------------------------------------------------------------------------------------------
!
    5 CONTINUE
!
!     Preenchimento das matrizes C e B que multiplicam as incógnitas e os valores
!     prescritos
!
          DO 20 j=1,Ne
        IF (Kode(j).EQ.0) THEN
        DO 10 i=1,Ne
        C(i,j)= -G(i,j,1)
        B(i,j)= -H(i,j,1)
   10   CONTINUE
                    ELSE IF(Kode(j).EQ.1)THEN
                    DO 15 i=1,Ne
                    C(i,j)= H(i,j,1)
          B(i,j)= G(i,j,1)
   15     CONTINUE
                                ELSE !cód.=2
                                DO 16 i=1,Ne
                                C(i,j)= H(i,j,1)+(HC/COND)*G(i,j,1)
                                B(i,j)= (HC/COND)*G(i,j,1)
```

```
 16                          CONTINUE
      END IF
 20 CONTINUE
!
   DO 900 It=1,Ninter
!
!   Preenchimento da matriz que multiplica as incógnitas e do vetor de condições de
!   contorno prescritas(vpr)
!
     DO 200 I= 1,Ne
      DO 100 J= 1,Ne
      A(I,J)=C(I,J)
100    CONTINUE

       IF (Kode(I).EQ.0)THEN
   Vpr(I)=Fi(I,It)
                    ELSE IF (Kode(I).EQ.1)THEN
                    Vpr(I)=Dfi(I,It)
                          ELSE IF(Kode(I).EQ.2)THEN
                          Vpr(I)=UC(I,It)

   END IF

200   CONTINUE
!
!   Cálculo do 1o. termo do vetor de termos independentes B * VPR
!
   DO 400 I= 1,Ne
   F(i)= 0.0
      DO 300 J= 1,Ne
      F(i)=F(i) + B(i,j)*Vpr(j)
300    CONTINUE
400 CONTINUE
!
!   Calculo da contribuição do passado no vetor de termos independentes
!
     IF (It.GT.1)THEN
      DO 700 I= 1,Ne
       DO 600 J= 1,Ne
         It1=It + 1
         DO 500 L= 2,It
        F(I) = F(I) - H(I,J,L)*Fi(J,It1-L) + G(I,J,L)*Dfi(J,It1-L)
500        CONTINUE
600     CONTINUE
700    CONTINUE
     END IF
```

```
!
!    SOLVER PARA RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
!
!    USE MSIMSL CALL SVD (NEMX,NE,A,F)
!
!    ------------------------------------------------------------------------------------------
      CALL SLNPD ( NEMX,Ne, A,F )
!    ------------------------------------------------------------------------------------------
!
!    Preenchimento das matrizes de potencial (Fi) e fluxo (Dfi)
!
       DO 800 I=1,Ne
        IF (Kode(I).EQ.0)THEN
        Dfi(I,It)=F(I)
                        ELSE IF         (Kode(I).EQ.1)THEN
                        Fi(I,It)=F(I)
                                ELSE IF(Kode(I).EQ.2)THEN
                                Fi(I,It)=F(I)
                                Dfi(I,It)=-(hc/COND)*(F(I)-UC(I,It))
        END IF
 800 CONTINUE
 900 CONTINUE
    IF (Npi.GT.0)THEN
!
!     CALCULA O POTENCIAL DOS PONTOS INTERNOS
!
!    ------------------------------------------------------------------------------------------
    CALL PTINT (NDMX,NEMX,NG,NGMX,NPIMX,DeltaT,K,Ne,Ninter,Npi,Pi,
                      Ae,Cg, Len, Ome,Tf,Xg,Xi,Xk,Yg,Yi,Yk,Dfi,Fi,Gpi,Hpi,Inc,Upi)
!    ------------------------------------------------------------------------------------------
!
    END IF
!
    OPEN(Ipr, FILE = FILEOUT, STATUS = 'NEW')
!
!    CRIAÇÃO DE UM ARQUIVO COM OS RESULTADOS
!
!    ------------------------------------------------------------------------------------------
    CALL RESULT (NDMX,NEMX,NPIMX,Ipr,Ne,Ninter,Npi,Xi,Xm,Yi,Ym,Dfi,Fi,
                        Upi)
!    ------------------------------------------------------------------------------------------
!
    CLOSE (Ipr)
    STOP
    END
```

```
!
!    ******************************************************************
     SUBROUTINE GAUSS (NG,Cg,Ome)
!    ******************************************************************
!
     INTEGER NG                    ! Número de pontos de Gauss
     REAL*8  Cg(NG)                ! Coordenadas de Gauss
     REAL*8  Ome(NG)               ! Pesos de Gauss
!

!    14 PONTOS DE GAUSS
!
     Cg(1) = 0.108054948707344
     Cg(2) = 0.319112368927890
     Cg(3) = 0.515248636358154
     Cg(4) = 0.687292904811685
     Cg(5) = 0.827201315069765
     Cg(6) = 0.928434883663574
     Cg(7) = 0.986283808696812
     ome(1)   = 0.215263853463158
     ome(2)   = 0.205198463721296
     ome(3)   = 0.185538397477938
     ome(4)   = 0.157203167158194
     ome(5)   = 0.121518570687903
     ome(6)   = 0.0801580871597602
     ome(7)   = 0.0351194603317519
     DO 150  I = 1,7
       J = I + 7
       Cg(J) = -Cg(I)
       ome(J)   =  ome(I)
  150 CONTINUE
     RETURN
     END
!
!    ******************************************************************
     FUNCTION EXPI  ( Af )
!    ******************************************************************
!
!    CALCULA A FUNÇÃO EXPONENCIAL-INTEGRAL
!
     REAL*8 Af
     REAL*8 C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8
     REAL*8 C9,C10,C11,C12,C13,C14
!
     PARAMETER (C1 =  0.57721566, C2 =  0.99999193)
     PARAMETER (C3 =  0.24991055, C4 =  0.05519968)
     PARAMETER (C5 =  0.00976004, C6 =  0.00107857)
```

```
!
      PARAMETER (C7   =   8.5733287401, C8   = 18.0590169730)
      PARAMETER (C9   =   8.6347608925, C10 =   0.2677737343)
      PARAMETER (C11 =   9.5733223454, C12 = 25.6329561486)
      PARAMETER (C13 = 21.0996530827, C14 =   3.9584969228)
!
      IF (Af.GT.199) THEN
           ExpI=0.0
         ELSE
                IF(Af.LE.1) THEN
                ExpI=-C1+C2*Af-C3*Af**2+C4*Af**3-C5*Af**4+C6*Af**5-
                       DLOG(Af)
                       ELSE

         ExpI=(Af**4+C7*Af**3+C8*Af**2+C9*Af+C10)/((Af**4+C11*Af**3
                +C12*Af**2+C13*Af+C14)*Af*EXP(Af))

                END IF
      END IF
      RETURN
      END
!
!     ******************************************************************
      FUNCTION E1S( Af )
!     ******************************************************************
!
!     Calcula a função exponencial integral somada ao LN (intervalo 1)
!
      REAL*8 Af
      REAL*8 C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8
      REAL*8 C9,C10,C11,C12,C13,C14
!
      PARAMETER (C1 =  0.57721566, C2 =  0.99999193)
      PARAMETER (C3 =  0.24991055, C4 =  0.05519968)
      PARAMETER (C5 =  0.00976004, C6 =  0.00107857)
!
      PARAMETER (C7   =   8.5733287401, C8   = 18.0590169730)
      PARAMETER (C9   =   8.6347608925, C10 =   0.2677737343)
      PARAMETER (C11 =   9.5733223454, C12 = 25.6329561486)
      PARAMETER (C13 = 21.0996530827, C14 =   3.9584969228)
!
      IF (Af.GT.199) THEN
       E1S=0.0
      ELSE
       IF(Af.LE.1) THEN
         E1S=-C1+C2*Af-C3*Af**2+C4*Af**3-C5*Af**4+C6*Af**5
```

```
      ELSE
        E1S=(Af**4+C7*Af**3+C8*Af**2+C9*Af+C10)/((Af**4+C11*Af**3+C12*
             Af**2+C13*Af+C14)*Af*EXP(Af)) + DLOG(Af)
      END IF
    END IF
!
    RETURN
    END
!
!   ****************************************************************
    SUBROUTINE LER (NDMX,NEMX,NGMX,NPIMX,DeltaT,Inp,Ipr,K,Ne,Ninter,
                    Nn,Npi,UC,COND,HC,Kode,Len,Valor,Xg,Xm,Xi,Yg,Ym,
                    Yi,Dfi,Fi,Inc )
!   ****************************************************************
!
!   ROTINA PARA LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA
!
    INTEGER NDMX, NEMX, NPIMX, NGMX
    CHARACTER*80 TITLE
    REAL*8  DeltaT,K,HC,COND
    REAL*8  UC(NEMX,NDMX)
    INTEGER Ke, Kn, Inp,Ipr,It
    INTEGER Ne,Ninter,Nn,No1,No2,Npi
    REAL*8  Xg1,Xg2,Yg1,Yg2
!
    INTEGER Kode(NEMX)
    REAL*8  Len(NEMX)
    REAL*8  Valor(NDMX)
    REAL*8  Xg(NGMX),Yg(NGMX)
    REAL*8  Xi(NPIMX), Yi(NPIMX)
    REAL*8  Xm(NEMX),Ym(NEMX)
    REAL*8  Dfi(NEMX,NDMX),Fi(NEMX,NDMX)
    INTEGER Inc(NEMX,2)
!
!   Lê e imprime título
!
    READ(Inp,'(A)') TITLE
    WRITE(Ipr,'(A)') TITLE
!
    READ(Inp,*) HC
    READ(Inp,*) COND
    READ(Inp,*) K
    READ(Inp,*) DeltaT
    READ(Inp,*) Nn
!
    DO 100 I = 1,Nn
        READ(Inp,*) Kn, Xg(Kn), Yg(Kn)
100 CONTINUE
```

```
!
    READ(Inp,*) Ne
    DO 200 I= 1,Ne
      READ(Inp,*) Ke, Inc(Ke,1),Inc(Ke,2),Kode(Ke)
      No1 = Inc(Ke,1)
      No2 = Inc(Ke,2)
      Xg1 = Xg(No1)
      Xg2 = Xg(No2)
      Yg1 = Yg(No1)
      Yg2 = Yg(no2)
      Xm(Ke) = (Xg1 + Xg2) / 2.
      Ym(Ke) = (Yg1 + Yg2) / 2.
      Len(Ke) = SQRT((Xg2-Xg1)**2 + (Yg2-Yg1)**2)
 200 CONTINUE
!
    READ(Inp,*) Ninter
    DO 500 I = 1,Ne
     READ(Inp,*) (Valor(It), It=1,NInter)

         IF (Kode(I).EQ.0)THEN
               DO 300 It = 1, Ninter
               Fi(I,It)= Valor(It)
 300           CONTINUE
                     ELSE IF (Kode(I).EQ.1)THEN
                     DO 400 It = 1,Ninter
                     Dfi(I,It)= Valor(It)
 400                 CONTINUE
                  ELSE IF (Kode(I).EQ.2) THEN
                           DO 450 It=1,NInter
                              UC(I,It)=Valor(It)
 450                       CONTINUE
          END IF
 500 CONTINUE
!
    READ(INP,*) Npi
               DO 600 I = 1,Npi
               READ(INP,*) Kn, Xi(Kn), Yi(Kn)
 600           CONTINUE
!
    CLOSE(Inp)
    RETURN
    END
!
```

```
!     ****************************************************************
      SUBROUTINE MATGH (NDMX,NEMX,NG,NGMX,DeltaT,It,K,Ne,Pi,Ae,Cg,
                        Len,Ome,Tf,Xg,Xk,Xm,Yg,Yk,Ym,G,H,Inc)
!     ****************************************************************
!
!     Rotina para cálculo dos elementos das matrizes H e G
!
      INTEGER NDMX, NEMX, NG, NGMX
      INTEGER I,I1,It,J,Km,Ne, No1, No2
      REAL*8  Dn,DeltaT,G1R,G1,H1,IU,IQ,K,Pi,Ra,Tal
      LOGICAL Singular
!
      REAL*8  Ae(2)                    ! Argumento de entrada em ExpI e E1S
      REAL*8  Cg(NG),Ome(NG)           ! Valor e peso dos pontos de Gauss
      REAL*8  Len(NEMX)                ! Comprimento do elemento
      REAL*8  Ta(2)                    ! Tempo de injeção
      REAL*8  Tf(NDMX)                 ! Tempo de contagem da resposta
      REAL*8  Xg(NGMX),Yg(NGMX)        ! Coord. dos nos geometricos
      REAL*8  Xk(NG),  Yk(NG)          ! Coord. dos pontos de Gauss no elem.
      REAL*8  Xm(NEMX),Ym(NEMX)        ! Coord. do ponto medio do elem.
!
      REAL*8  G(NEMX,NEMX,NDMX),H(NEMX,NEMX,NDMX)
      INTEGER Inc(NEMX,2)
!
!     Início do cálculo das matrizes
!
      DO 200 I= 1,Ne
       DO 100 J= 1,Ne
       Singular= (I.EQ.J).AND.(It.EQ.1)
!
!     Integração pela quadratura de Gauss
!
         No1= Inc(J,1)
         No2= Inc(J,2)
         G1 = 0.0
         H1 = 0.0
!
         DO 50 I1=1,NG
           Xk(I1)= Xg(No1)*(1-Cg(I1))/2.0 + Xg(No2)*(1+Cg(I1))/2.0
           Yk(I1)= Yg(No1)*(1-Cg(I1))/2.0 + Yg(No2)*(1+Cg(I1))/2.0
           Ra= SQRT((Xk(I1)-Xm(I))**2+(Yk(I1)-Ym(I))**2)
           Dn= ((Xm(I)-Xk(I1))*(Yg(No2)-Yg(No1)) - (Ym(I)-Yk(I1))*(Xg
                (No2)-Xg(No1)))/Len(J)
```

```
!
!    Calcula as integrais de u* e q* no tempo
!
          Ta(1)= 0.0
          Ta(2)= DeltaT
          DO 25 Km = 1,2
            Tal= Tf(It) - Ta(Km)
!
!    Caso Tal < 0.0 , ainda não houve efeito no ponto em análise
!
            IF ((K*Tal).LT.(0.000001)) THEN
              Ae(Km)= 200
            ELSE
              Ae(Km)= Ra**2/(4.0*K*Tal)
            END IF
  25      CONTINUE
!
!    Calcula as integrais da solução e do fluxo fundamental
!
          IF (Singular) THEN
            IU= E1S(Ae(1))/(4.0*K*Pi)
            IQ= 0.0
                                ELSE
                                IU= (EXPI(Ae(1))-EXPI(Ae(2)))/(4.0*K*Pi)
                                IQ= Dn * (EXP(-Ae(1))-EXP(-Ae(2)))/(2.0*Pi*K*Ra**2)
          END IF
!
          G1= G1 + IU *Ome(I1)*Len(J)/2.0
          H1= H1 + IQ *Ome(I1)*Len(J)/2.0
  50    CONTINUE
!
         IF (Singular) THEN
        G1r=Len(J)*(DLOG(Len(J)/2.0)-1-DLOG(4.*K*DeltaT)/2.)/(2*Pi*K)
          G1=G1-G1r
          H1=0.5
         END IF
         G(i,j,it)= G1
         H(i,j,it)= H1

  100   CONTINUE
  200 CONTINUE
!
     RETURN
     END
```

```
!   ****************************************************************
    SUBROUTINE PTINT ( NDMX,NEMX,NG,NGMX,NPIMX,DeltaT,K,Ne,Ninter,
                       Npi,Pi,Ae,Cg, Len, Ome,Tf,Xg,Xi,Xk,Yg,Yi,Yk,Dfi,Fi,
                       Gpi,Hpi, Inc,Upi)
!   ****************************************************************
!
!   Rotina para cálculo do potencial dos pontos internos

    INTEGER NDMX, NEMX, NG, NGMX, NPIMX
    INTEGER I1,It,It1,J,Km,Kn,L
    INTEGER Ne,Ninter,No1,No2,Npi
    REAL*8  Dn,DeltaT,G1,H1,IU,IQ
    REAL*8  K,Pi,Ra,Tal
!
    REAL*8  Ae(2)                   ! Argumento de entrada em ExpI e E1S
    REAL*8  Cg(NG),Ome(NG)          ! Valor e peso dos pontos de Gauss
    REAL*8  Len(NEMX)               ! Comprimento do elemento
    REAL*8  Ta(2)                   ! Tempo de injeção
    REAL*8  Tf(NDMX)                ! Tempo de contagem da resposta
    REAL*8  Xg(NGMX),Yg(NGMX)       ! Coord. dos nos geométricos
    REAL*8  Xi(NPIMX),Yi(NPIMX)     ! Coord. dos pontos internos
    REAL*8  Xk(NG),  Yk(NG)         ! Coord. dos pontos de Gauss no elem.
!
    REAL*8  Dfi(NEMX,NDMX),Fi(NEMX,NDMX)
    REAL*8  Gpi(NEMX,NDMX), Hpi(NEMX,NDMX)
    INTEGER Inc(NEMX,2)
    REAL*8  Upi(NPIMX,NDMX)         ! Potencial dos pontos internos
!
!   Início do cálculo do potencial dos pontos internos
!
    DO 400 Kn=1,Npi
     DO 300 It=1,Ninter
       Upi(Kn,It)= 0.0
       DO 200 J= 1,Ne
!
!   Integração pela quadratura de Gauss
!
        No1= Inc(J,1)
        No2= Inc(J,2)
        G1 = 0.0
        H1 = 0.0

        DO 50 I1=1,NG
          Xk(I1)= Xg(No1)*(1-Cg(I1))/2.0 + Xg(No2)*(1+Cg(I1))/2.0
          Yk(I1)= Yg(No1)*(1-Cg(I1))/2.0 + Yg(No2)*(1+Cg(I1))/2.0
          Ra= SQRT((Xk(I1)-Xi(Kn))**2+(Yk(I1)-Yi(Kn))**2)
          Dn= ((Xi(Kn)-Xk(I1))*(Yg(No2)-Yg(No1)) - (Yi(Kn)-Yk(I1))*
                (Xg(No2)-Xg(No1)))/Len(J)
```

```
!
!    Calcula as integrais de u* e q* no tempo
!
          Ta(1)= 0.0
          Ta(2)= DeltaT
          DO 25 Km = 1,2
            Tal= Tf(It) - Ta(Km)
!
!    Caso Tal < 0.0 , ainda não houve efeito no ponto em análise
!
            IF ((K*Tal).LT.(0.000001)) THEN
              Ae(Km)= 200
            ELSE
              Ae(Km)= Ra**2/(4*K*Tal)
            END IF
  25       CONTINUE
!
!    Calcula as integrais da solução e do fluxo fundamental
!
          IU= (EXPI(Ae(1))-EXPI(Ae(2)))/(4.0*K*Pi)
          IQ= Dn * (EXP(-Ae(1))-EXP(-Ae(2)))/(2.0*Pi*K*Ra**2)
!
          G1= G1 + IU *Ome(I1)*Len(J)/2.0
          H1= H1 + IQ *Ome(I1)*Len(J)/2.0
  50     CONTINUE
!
        Gpi(j,it)= G1
        Hpi(j,it)= H1
        It1= It + 1
        DO 100 L= 1,It
         Upi(Kn,It)= Upi(Kn,It) - Hpi(J,L)*Fi(J,It1-L) + Gpi(J,L)*Dfi(J,It1-L)
 100     CONTINUE
 200    CONTINUE
 300   CONTINUE
 400 CONTINUE
!
    RETURN
    END
!
!    Subrotina SLNPD. Esta subrotina é uma rotina padrão para resolver matrizes não
!    positivas. Definidas usando eliminação de Gauss. Se a matriz tiver um zero na
!    diagonal, a rotina trocará as linhas. Somente resolverá que o sistema da matriz é
!    singular quando nenhuma troca de linha produza um coeficiente diferente de zero.
!    O resultado será um vetor com os potenciais e derivadas no contorno e será escrito
!    em Dfi.
!
```

```
      SUBROUTINE SLNPD (MX,NN,A,B)

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
!
!     A = Matriz do sistema.
!     B = Originalmente contém os independentes. Depois da solução conterá os valores
!         desconhecidos do sistema.
! NN = Número real de desconhecidos.
! MX = Dimensão das colunas e linhas de A.
!
      DIMENSION A(MX,MX),B(MX)
!
      N1 = NN - 1
      DO 100 K = 1,N1
      K1 = K+1
      C = A(K,K)
      IF(ABS(C) - 0.000001)1,1,3
    1 DO 7 J = K1,NN
!
!     Mudança de linhas até achar um coeficiente na diagonal diferente de zero.
!
      IF(ABS(A(J,K))-0.000001)7,7,5
    5  DO 6 L = K,NN
      C = A(K,L)
      A(K,L) = A(J,L)
    6  A(J,L) = C
      C = B(K)
      B(K) = B(J)
      B(J) = C
      C = A(K,K)
      GO TO 3
    7  CONTINUE
      GO TO 8
!
!     Divisão da linha pelo coeficiente da diagonal.
!
    3 C = A(K,K)
      DO 4 J = K1,NN
    4 A(K,J) = A(K,J)/C
      B(K) = B(K)/C
!
```

```
!  Eliminação da incógnita da linha I
!
      DO 10 I = K1,NN
      C = A(I,K)
      DO 9 J = K1,NN
    9 A(I,J) =A(I,J) - C*A(K,J)
   10 B(I) = B(I) - C*B(K)
  100 CONTINUE
!
!  Cálculo da última incógnita
!
      IF(ABS(A(NN,NN))- 0.000001)8,8,101
  101 B(NN) = B(NN)/A(NN,NN)
!
!  Cálculo das demais incógnitas pelo processo de retrosubstituição
!
      DO 200 L = 1,N1
      K = NN - L
      K1 = K + 1
      DO 200 J = K1,NN
  200 B(K) = B(K) - A(K,J)*B(J)
      GO TO 300
    8 WRITE (*,2) K
      WRITE (5,2) K
    2 FORMAT ('***** SINGULARIDADE NA COLUNA',I5)
  300 RETURN
      END
!
!   ************************************************************
    SUBROUTINE RESULT (NDMX,NEMX,NPIMX,Ipr,Ne,Ninter,Npi,Xi,Xm,
                       Yi,Ym, Dfi,Fi,Upi)
!   ************************************************************
!
!   Rotina para criação de um arquivo de resultados
!
    INTEGER NDMX,NEMX,NPIMX
    INTEGER I,Ipr,It,Ne,Ninter,Npi
!
    REAL*8  Xi(NPIMX),Yi(NPIMX)
    REAL*8  Xm(NEMX),Ym(NEMX)
    REAL*8  Dfi(NEMX,NDMX),Fi(NEMX,NDMX)
    REAL*8  Upi(NPIMX,NDMX)
!
       WRITE(Ipr,*) 'Tempo   T1    T2    T31   T32   T4    T5'
       DO 300 I= 1,Ninter
    WRITE(Ipr,50) I,Fi(13,I),Fi(15,I),Fi(16,I),Fi(1,I),Fi(2,I),Fi(4,I)
   50    FORMAT(1x,I4,6(2x,f10.3))
  100  CONTINUE
```

```
        IF (Npi.GT.0) THEN
        WRITE(Ipr,*) 'PInter.        Xi          Yi           U'
       DO 200 Kn= 1,Npi
       WRITE(Ipr,150) Kn,Xi(Kn),Yi(Kn),Upi(Kn,It)
150    FORMAT(1x,I4,3(2x,f19.15))
200    CONTINUE
     END IF
300 CONTINUE
    RETURN
    END
```