

AVALIAÇÃO DO EFEITO DO ACAMAMENTO NA DEFORMAÇÃO DO SINAL:  
MODELAGEM NUMÉRICA E CALIBRAÇÃO COM EXPERIMENTO FÍSICO

José Eduardo Mendonça Lira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Webe João Mansur, Ph.D

---

Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

---

Prof. Djalma Manoel Soares Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2004

LIRA, JOSÉ EDUARDO MENDONÇA

Avaliação do Efeito do Acamamento na De-  
formação do Sinal: Modelagem numérica e Cali-  
bração com Experimento Físico [Rio de Janeiro]  
2004

X, 94 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., En-  
genharia Civil, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
COPPE

1. Modelagem Numérica
2. Propagação de Ondas
3. Malha Intercalada

I. COPPE/UFRJ    II. Título (série)

Aos meus avós *Alarico* e *Amélia* por todo amor,  
apoio e exemplo que me deram, à eles toda a  
minha gratidão e saudade.

## Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para a realização deste trabalho, correndo o risco de acabar esquecendo de alguém, gostaria de expressar aqui meus agradecimentos:

Ao geofísico André Romanelli, idealizador deste trabalho, pelas idéias e questionamentos desafiadores colocados ao longo do percurso, os quais sempre me fizeram ir adiante. André, obrigado pela paciência e ajuda durante todo esse período! Ao geofísico Djalma Soares por me apresentar à modelagem numérica e pelas diversas discussões a respeito dos mais variados tópicos em propagação de ondas, estando sempre pronto a ajudar e propor alternativas, tornando o caminho menos árido e mais instigante. Ao professor Webe Mansur pelo ensinamento, encorajamento e ajuda à este geofísico/geólogo na terra dos engenheiros e por me mostrar que o suicídio não era a solução, naqueles momentos em que nada dava certo! Queria agradecer, também, ao geofísico Carlos Cunha, pelas explicações sobre modelagem numérica, principalmente, a respeito de malha intercalada. Ao professor Carrer pelas discussões sobre a formulação integral e elementos de contorno.

Aos técnicos Freitas e a Marcos de Leão pelos ensaios e pelas discussões a respeito de todo o funcionamento do equipamento no Laboratório de Física de Rochas, onde se mostraram sempre disponíveis para ajudar e discutir, além de tornarem o ambiente de trabalho mais descontraído e produtivo. Um agradecimento especial ao amigo Antônio Freitas, pelo auxílio e colaboração nos serviços surgidos paralelamente ao trabalho desta dissertação. Aos geofísicos Guilherme Vasquez e Lúcia Dillon pela colaboração e apoio durante o período em que estive junto ao Grupo de Física de Rochas do CENPES.

À minha mãe Alda, a quem tudo devo, pelo carinho, amor e presença ao longo de toda a minha vida e, principalmente, por nunca ter deixado de acreditar. Aldinha eu te amo! Ao meu pai pelo incentivo e motivação ao longo de todos esses anos e para quem a educação dos filhos sempre foi a prioridade máxima.

Aos meus filhos João Pedro, Gabriela e Gustavo (que chegou há tão pouco tempo!), que apesar de nem sempre terem conseguido entender a minha ausência, estiveram sempre me aguardando com um sorriso, me ensinando mais do que aprendendo. Obrigado por vocês existirem. À minha esposa Janaína, pelo esforço desempenhado durante todo o tempo em que temos estado juntos, de modo a que eu pudesse trabalhar e estudar mais tranquilamente e por todos os seus planos e sonhos deixados para mais tarde, para que nós 4 pudéssemos realizar os nossos. À você, Jana, todo o meu amor, minha gratidão e profunda admiração. Gostaria de agradecer ao geólogo João Cláudio pelo apoio ao longo do trabalho no TRO e à Viviane, Ferrer e Carlos Manoel por tornarem o nosso ambiente de trabalho menos tenso e mais divertido.

Finalmente, eu gostaria de agradecer à Petróleo Brasileiro S.A., PETROBRAS, o apoio e suporte para a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

AVALIAÇÃO DO EFEITO DO ACAMAMENTO NA DEFORMAÇÃO DO SINAL:  
MODELAGEM NUMÉRICA E CALIBRAÇÃO COM EXPERIMENTO FÍSICO

José Eduardo Mendonça Lira

Março/2004

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do efeito do acamamento na deformação do pulso emitido. Foi realizada uma modelagem elástica utilizando o Método das Diferenças Finitas com um esquema de malha intercalada para solução da equação da onda. A modelagem foi calibrada através de um experimento físico, realizado no Laboratório de Física de Rochas do CENPES, com 4 amostras independentes compostas por intercalações de discos de vidro e alumínio. Após a calibração, foi analisado um modelo numérico com 32 camadas e o resultado comparado com os modelos 2 e 4 camadas, além do modelo homogêneo composto por um cilindro de alumínio. As curvas geradas indicam que o acamamento pode funcionar como um filtro de altas frequências, também conhecido como *filtro estratigráfico*, produzindo um efeito muito similar ao da absorção causada pelas rochas em subsuperfície, verificado em registros sísmicos. Futuros estudos pretendem quantificar o papel de cada um destes fatores na deformação do traço sísmico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THE ROLE OF FINE LAYERING ON PULSE SHAPE CHANGE: A NUMERICAL  
MODELING CALIBRATION BASED ON A PHYSICAL EXPERIMENT

José Eduardo Mendonça Lira

Março/2004

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

The purpose of this work is evaluate the role that fine layering plays on pulse shape change. An elastic modelling was carried out using Finite-differences method with a staggered-grid approach to solve the wave equation. The numerical model was calibrated with a physical experiment, conducted at RockPhysics lab in CENPES. Four samples built with aluminum and glass inter-bedded disks were used on experiment. After calibration, a comparison among the 2, 4 and 32-disks models and a homogeneous model (an aluminium cylinder) was conducted. The results shows that the fine-layering may act as a high-cut filter (acting as a stratigraphic filter) and very much like the absorption seen in real rocks below the earth surface. The next step in this research will be quantify the absorption and stratigraphic effects on seismic pulse shape change during the wave propagation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Teóricos</b>	<b>4</b>
2.1	Equação do Movimento . . . . .	4
2.2	Tensão vs. Deformação - Lei de Hooke generalizada . . . . .	6
2.2.1	Tensor de elasticidade $C_{ijkl}$ . . . . .	7
2.2.2	Definição das constantes elásticas $\nu, \kappa, E$ , e $G$ . . . . .	9
2.2.3	Equação da Onda . . . . .	12
2.3	Considerações Finais . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Discretização da Equação da Onda</b>	<b>15</b>
3.1	Método das Diferenças Finitas . . . . .	15
3.2	Malha Intercalada . . . . .	20
3.3	Discretização . . . . .	24
3.3.1	Operadores . . . . .	25
3.3.2	Condições de contorno . . . . .	26
3.4	Considerações finais . . . . .	28
<b>4</b>	<b>O Experimento Físico</b>	<b>29</b>
4.1	O Equipamento . . . . .	29
4.1.1	Geração e registro . . . . .	30
4.1.2	Câmara . . . . .	31
4.1.3	Vasos de Pressão . . . . .	35
4.2	Preparação das Amostras . . . . .	35
4.3	A Modelagem Numérica . . . . .	38

4.3.1	Premissas básicas utilizadas na modelagem . . . . .	39
4.4	Considerações finais . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Apresentação dos Resultados</b>	<b>46</b>
5.1	Registro das formas de onda . . . . .	46
5.2	Modelo homogêneo . . . . .	47
5.3	Modelo 2 camadas . . . . .	48
5.4	Modelo 4 camadas . . . . .	49
5.5	Modelo 8 camadas . . . . .	52
5.6	Análise de um modelo mais complexo . . . . .	54
5.7	Considerações finais . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusões e Desdobramentos</b>	<b>59</b>
6.1	Conclusões . . . . .	59
6.2	Desdobramentos . . . . .	61
<b>A</b>	<b>Conceitos de Elasticidade</b>	<b>65</b>
A.1	Tensão . . . . .	65
A.2	Tensores . . . . .	69
A.2.1	Componentes de um Tensor . . . . .	69
A.2.2	Algumas propriedades dos tensores . . . . .	72
A.3	Tensor de Tensões . . . . .	72
A.4	Tensor de Deformação . . . . .	75
A.4.1	Elementos do Tensor de Deformação $e_{ij}$ . . . . .	77
<b>B</b>	<b>Notação Indicial</b>	<b>81</b>
B.1	Manipulações com a notação indicial . . . . .	82
B.1.1	Substituição . . . . .	82
B.1.2	Multiplicação . . . . .	83
B.1.3	Contração . . . . .	83
<b>C</b>	<b>Funções Especiais e Teoremas</b>	<b>84</b>
C.1	Função Sinc . . . . .	84
C.2	Delta de Kroenecker . . . . .	85

C.3	Regras de L'Hospital . . . . .	85
<b>D</b>	<b>Tabela de Relação entre Constantes Elásticas</b>	<b>87</b>
<b>E</b>	<b>Meio Efetivo</b>	<b>88</b>
E.1	Introdução . . . . .	88
E.2	Limites de Hashin-Shtrikman . . . . .	88
E.3	Média de Voigt-Reuss-Hill . . . . .	90
<b>F</b>	<b>Fatores de Propagação</b>	<b>92</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O fenômeno da propagação de ondas é bastante comum no nosso dia-a-dia. Sejam estas ondas, ondas de rádio, micro-ondas, ondas marítimas ou mesmo ondas causadas por terremotos, elas estão sempre presentes. As ondas mais comuns na exploração de petróleo são as ondas sísmicas artificialmente criadas para investigação do interior da Terra. Ao contrário das ondas de rádio, que se propagam num meio que pode ser considerado, dentro de certos limites, como homogêneo, as ondas que se propagam no interior da Terra percebem um meio bastante complexo. Esta complexidade se verifica tanto na parte estrutural (domos, falhas, etc.), quanto do ponto de vista composicional, englobando aí a parte geoquímica e detalhes como saturação, idade, ambiente deposicional, etc. A descoberta de campos de petróleo requer um conhecimento bastante profundo do fenômeno ondulatório, o qual fornecerá importantes informações sobre o complexo modelo que é o interior da Terra. A ferramenta mais utilizada, nessa busca de dados do subsolo, é, sem dúvida alguma, a prospecção sísmica. Este método consiste na geração de ondas sísmicas e no registro das reflexões (ecos) nas interfaces. A compreensão do efeito dos mais diferentes fatores (composição, estruturas, etc.) no fenômeno ondulatório é de suma importância na interpretação dos dados provenientes do levantamento sísmico. Quando uma onda se propaga através de um corpo, vários fatores contribuem para que esta onda se deforme, ou seja, que sua forma vá mudando ao longo do percurso. Dentre estes fatores, podem-se destacar, o *espalhamento geométrico*, a *absorção*, *reflexões na interfaces* e as *múltiplas*. No caso dos levantamentos sísmicos, problemas com acoplamento de fonte e receptor podem também estar presentes. A contínua transformação da energia da onda em calor, devido, principalmente, ao fato das rochas não serem materiais perfeitamente elásticos, faz com que a amplitude do sinal vá sendo reduzida. As velocidades das diversas frequências

que compõe o sinal são diferentes, o que faz com que a onda tenha sua forma modificada à medida que se propaga, fenômeno conhecido como *dispersão*. Estes efeitos, diminuição da amplitude e dispersão, em conjunto são comumente chamadas de absorção. As rochas em subsuperfície nas bacias sedimentares são compostas, como pode ser visto nos perfis sônicos, por camadas cuja espessura pode variar dentro de um intervalo de milímetros até alguns metros, sendo que camadas ainda mais delgadas podem ser observadas. Supondo-se um pacote sedimentar de 3-5 km, pode-se pensar que o pulso sísmico deve se refletir e refratar por centenas e até milhares de camadas. Essas camadas, que estão abaixo da resolução sísmica, não são percebidas claramente no levantamento. Porém, devido ao seu grande número, gerando múltiplas com um atraso muito pequeno, elas acabam por deformar o sinal de maneira bastante efetiva. O sinal percebido seria o resultado do somatório do sinal principal com uma série de reflexões com amplitude levemente menor, devido ao baixo contraste de impedância verificado entre as camadas delgadas, defasadas de um  $\Delta t$  muito pequeno. O efeito causado por esse trem de ondas se assemelharia bastante ao efeito da absorção descrito em parágrafos anteriores. Tal efeito recebe comumente o nome de *filtragem estratigráfica*. O objetivo do presente trabalho é a modelagem numérica de um experimento físico de propagação de ondas em plugues de rocha de modo a avaliar o efeito do multi-acamamento na deformação do pulso emitido. Na prospecção sísmica o sucesso é buscado através de uma gama variada de informações provenientes das mais diferentes fontes. No passado mapeavam-se grandes estruturas e este mapeamento forneceu bons resultados, porém como as grandes estruturas parecem já ter sido todas, ou quase todas, descobertas, a busca vai em direção à estruturas cada vez menores. O aumento da resolução do método sísmico e uma maior compreensão do processo como um todo, têm permitido ao exploracionista obter informações cada vez mais ricas a respeito tanto de estruturas delgadas como também, e principalmente, do fluido intraporos. A absorção do sinal sísmico advinda tanto das rochas quanto do fluido do reservatório é uma área com um grande potencial a ser explorado. Porém o efeito causado pela absorção se assemelha em muito, como foi dito anteriormente, ao causado por um extrato rochoso derivado de um ambiente com sedimentação cíclica. Ambos envolvem perda de amplitude e filtragem de altas frequências. Algumas questões surgem no momento se depara com este fato:

- A deformação do traço sísmico registrado seria a mesma caso a absorção do conjunto *rocha+fluido* não fosse considerada, ou seja, extratos formados por camadas muito

finas com baixo contraste de impedância entre elas, seriam os responsáveis pela absorção do sinal? Ou pelo menos por uma parte dele?

- Até onde vai a absorção e onde começa o efeito da *filtragem estratigráfica*?

Neste ponto os métodos de simulação (modelagem) de dados sísmicos possuem papel fundamental. Todos os métodos de modelagem sísmica utilizam, de uma forma ou de outra, a equação da onda. Alguns adotam a equação diretamente, outros utilizam soluções integrais, possuindo cada um deles suas vantagens e limitações. Neste trabalho será apresentada a equação da onda e a sua solução pelo método das Diferenças Finitas, enfocando aplicações da modelagem com base nesta equação. O resultado da modelagem numérica será calibrado com um experimento físico de propagação de ondas em plugues de rocha, experimento este realizado no Laboratório de Física de Rochas do CENPES. Foram utilizados 4 tipos de amostras para a calibração e gerado um modelo sintético para o caso de uma amostra com 32 camadas e dimensões semelhantes às aquelas utilizadas na calibração.

## Capítulo 2

# Conceitos Teóricos

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos teóricos importantes para uma melhor compreensão da formulação utilizada neste trabalho. Alguns conceitos básicos como *tensão* e *deformação* são apresentados no apêndice (A), assim como um breve resumo de *tensores*. Tais conceitos, que se encontram bastante esclarecidos e fazem parte do dia-a-dia do engenheiro, são por vezes um pouco áridos para o geofísico, ainda mais se a formação anterior deste geofísico for geologia. Portanto, optou-se por apresentar tais conceitos em caráter informativo para o leitor geólogo/geofísico, categoria na qual também se enquadra o autor do presente trabalho.

### 2.1 Equação do Movimento

Utilizando os conceitos de vetor e tensor de *tensão*, apresentados no apêndice (A), será apresentada a dedução da equação do movimento num meio contínuo. Dedução que será útil como uma introdução à formulação mais complexa utilizada mais à frente neste trabalho. Na figura (2.1) observa-se um elemento cúbico em torno de um ponto qualquer  $x_i$  com volume igual a  $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ . Aplicando a 2ª Lei de Newton<sup>1</sup> ao elemento cúbico, seja então  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i}$ , o vetor de *tensão* na face de vetor normal igual a  $\mathbf{e}_i$  e coordenadas espaciais iguais a  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{W} = W_i \mathbf{e}_i$ , a força de corpo (tal como o peso do elemento, por exemplo) por unidade de massa,  $\rho$  a densidade de massa em  $x_i$  e  $\mathbf{a}$  a sua aceleração no ponto  $x_i$ . A força na face  $x_1$ , por exemplo, é dada por:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (2.1.1)$$

---

<sup>1</sup> $F = ma$ , onde  $F$  é o somatório de forças atuantes no corpo,  $m$  é a massa do corpo e  $a$  a sua aceleração.

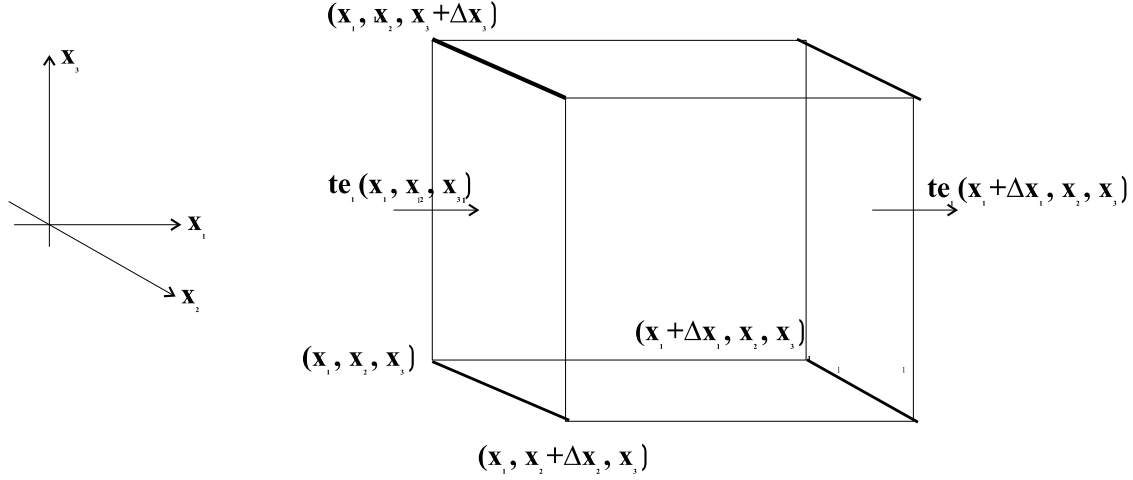


Figura 2.1.1: Cubo indicando o posicionamento dos eixos e suas respectivas componentes

que é a *tensão* multiplicada pela área da face. Analogamente teremos para as outras faces:

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_1 \Delta x_3$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_1 \Delta x_2.$$

Aplicando então a 2ª Lei de Newton em torno do ponto  $x_i$ , temos que:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)) \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & (\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)) \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ & (\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)) \Delta x_1 \Delta x_2 + \rho W \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \\ = & (\rho \mathbf{a} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Dividindo os dois lados da equação (2.1.2) por  $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$  teremos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right) + \\ & \left( \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} \right) + \\ & \left( \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \right) + \rho W \\ = & (\rho \mathbf{a}). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Fazendo  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , temos que:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}}{\partial x_3} \right) + \rho W = (\rho \mathbf{a}). \tag{2.1.4}$$

Seja  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} = \mathbf{T}\mathbf{e}_i$  e da equação (A.2.3)  $\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j$ , temos então que a equação (2.1.4) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i + \rho W_i\mathbf{e}_i = \rho a_i\mathbf{e}_i \quad (2.1.5)$$

ou

$$\text{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{W} = \rho\mathbf{a}. \quad (2.1.6)$$

Na forma mais comumente utilizada em propagação de ondas tem-se então:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho W_i = \rho a_i, \quad (2.1.7)$$

onde fazendo  $\rho W_i = f_i$  e  $a_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$  escreve-se:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.1.8)$$

onde  $t$  é o tempo e  $u_i$ , a componente do deslocamento na direção  $i$ . A equação (2.1.8) é conhecida como a equação elastodinâmica, ou equação de Cauchy. Supondo um meio 2D, ela pode ser expandida e escrita da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Substituindo 1 e 3, por  $x$  e  $z$ , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

## 2.2 Tensão vs. Deformação - Lei de Hooke generalizada

Na equação (A.2.16), seção (A.2.1), foi mostrada a equação da Lei de Hooke generalizada como exemplo para análise dos componentes dos tensores. Após a breve discussão sobre tensores nos itens anteriores deste capítulo pôde-se compreender melhor a Lei de Hooke generalizada, a qual é apresentada novamente na equação (2.2.1):

$$T_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (2.2.1)$$

Observa-se na equação (2.2.1), que do lado esquerdo há um tensor de segunda ordem,  $T_{ij}$ , conhecido como tensor de tensões, representando o estado de tensões. Do lado direito temos

um tensor de quarta ordem,  $C_{ijkl}$ , representando as propriedades mecânicas do corpo, sendo conhecido como tensor de elasticidade. O outro tensor de segunda ordem,  $e_{kl}$ , representa a estado de deformações do corpo e é conhecido como tensor de deformação. Esta lei pode ser, então, entendida de maneira mais simples na forma:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}, \quad (2.2.2)$$

onde o sinal negativo está presente apenas para indicar que  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{x}$  têm sentidos contrários. É importante lembrar que foram admitidas as seguintes premissas neste estudo, em relação ao meio no qual será realizada a modelagem:

1. A relação entre tensão e deformação é linear.
2. Após cessarem os esforços, as deformações desaparecem.
3. As deformações são muito pequenas.

Muitas das simplificações utilizadas serão feitas com base nestas premissas.

### 2.2.1 Tensor de elasticidade $C_{ijkl}$

Este tensor possui 81 elementos; porém, algumas simplificações podem ser feitas:

1. Como  $e_{ij} = e_{ji}$  temos que  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$
2. Como  $T_{ij} = T_{ji}$  temos que  $C_{ijkl} = C_{jikl}$
3. Existe um função chamada *função de energia de deformação* (Lai *et al.*, 1996) tal que,

$$T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}. \quad (2.2.3)$$

Então, da equação (2.2.1) tem-se que:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial e_{kl}} = C_{ijkl}. \quad (2.2.4)$$

Substituindo a equação (2.2.3) em (2.2.4):

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}}. \quad (2.2.5)$$

Analogamente para  $C_{klij}$ :

$$C_{klij} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}. \quad (2.2.6)$$

Como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}},$$

concluimos que:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.2.7)$$

Estas considerações reduzem de 81 para 21 o número de termos. Pode-se ainda escrever esta matriz utilizando uma notação simplificada (Pçensîk (1994)), ou seja, separando os pares  $m = i, j$  e  $n = k, l$  e atribuindo os seguintes valores:

- 1 para 1,1
- 2 para 2,2
- 3 para 3,3
- 4 para 2,3
- 5 para 1,3
- 6 para 1,2 .

Portanto a matriz do tensor pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Como a matriz é simétrica e  $C_{mn} = C_{nm}$  costuma-se não representar os termos abaixo da diagonal principal. Simplificações ainda maiores podem ser feitas dependendo do sistema do meio em questão. Por exemplo, o sistema mais complexo, onde todos os 21 parâmetros elásticos são independentes é o sistema monoclínico. No caso onde o meio é isotrópico, tem-se que as constantes elásticas se reduzem a apenas duas,  $\lambda$  e  $\mu$ , conhecidas como constantes de

Lamé. Então a matriz (2.2.8) pode ser escrita como se segue:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Após algumas manipulações algébricas utilizando propriedades de tensores, deduções estas que estão fora do escopo deste capítulo<sup>2</sup>, chega-se à seguinte equação para um sólido isotrópico:

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu e_{ij}, \quad (2.2.10)$$

onde  $\theta = e_{kk} =$  dilatação.

## 2.2.2 Definição das constantes elásticas $\nu, \kappa, E$ , e $G$

Apesar das constantes de Lamé serem suficientes para descrever um meio elástico e isotrópico, outras constantes são bastante utilizadas em sismica, como razão de Poisson( $\nu$ ), módulo bulk ou incompressibilidade( $\kappa$ ), rigidez ou módulo de cisalhamento, que pode ser representado por  $G$  ou  $\mu$  e o módulo de Young( $E$ ). De modo a facilitar o entendimento do papel destas constantes, que ocorrem freqüentemente na propagação de ondas, as mesmas serão descritas sucintamente nesta seção.

### Módulo de Young

Fazendo  $i = j$  na equação (2.2.10):

$$T_{kk} = (2\mu + 3\lambda)\theta \quad (2.2.11)$$

Explicitando  $e_{ij}$  na equação (2.2.10) obtemos:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk} \sigma^{ij} \right]. \quad (2.2.12)$$

---

<sup>2</sup>Chou e Pagano (1992),cap. 10, apresentam parte da dedução da equação (2.2.10)

Imagine-se, agora, uma barra cilíndrica, que pode ser representada por um estado de tensões uniaxial onde, por exemplo, apenas  $T_{11} \neq 0$ . Da equação (2.2.12), escrevemos:

$$e_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[ T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{11} \right] \quad (2.2.13)$$

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11}. \quad (2.2.14)$$

Devido à premissa inicial, temos  $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$ . O módulo de Young é definido como  $T_{11}/e_{11}$  e pode ser escrito como:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (2.2.15)$$

que é a razão entre a tensão uniaxial e a correspondente deformação ao longo do eixo da tensão.

### Módulo de cisalhamento $G$

Fazendo  $i \neq j$  na equação (2.2.10) podemos escrever:

$$T_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad (2.2.16)$$

explicitando  $\mu$ :

$$\mu = \frac{T_{ij}}{2e_{ij}}. \quad (2.2.17)$$

A constante  $\mu$  é definida então como a metade da razão entre a tensão e a deformação cisalhante.

### Razão de Poisson $\nu$

Seja a mesma barra cilíndrica e o mesmo estado de tensões utilizados na definição do módulo de Young. A razão de Poisson é definida como  $-e_{22}/e_{11}$  e  $-e_{33}/e_{11}$ , ou seja, a razão entre a deformação ao longo dos eixos perpendiculares e a deformação ao longo do eixo de ação da tensão. O sinal negativo indica que se ocorre um alongamento paralelo ao eixo  $x$ , por exemplo, haverá uma contração ao longo de  $y$  e  $z$ . Com base nas equações (2.2.13) e (2.2.14) a razão de Poisson pode ser escrita como:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.2.18)$$

### Módulo *bulk* ou incompressibilidade ( $\kappa$ )

Seja o caso de um estado de tensões hidrostático, ou seja,  $\mathbf{T} = \sigma\mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  o tensor identidade. Neste tensor os termos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a zero, ou seja,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

Uma outra forma de representar a pressão hidrostática é por  $\tau_{ij} = \sigma\delta_{ij}$ , ou seja,  $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \sigma$ . Da equação (2.2.11):

$$\theta = \frac{3\sigma}{2\mu + 3\lambda} \quad (2.2.20)$$

O módulo de incompressibilidade é definido como a razão entre a tensão normal hidrostática pela variação do volume e pode ser escrito como:

$$\kappa = \frac{\sigma}{\theta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (2.2.21)$$

onde  $\theta$  foi definido nas equações (A.4.20) e (A.4.21). Utilizando a 2ª Lei de Newton, pode-se relacionar  $\kappa$  com a velocidade de propagação ( $v_p$ ) de ondas P em um fluido (Rosa (1999)), ou seja:

$$F = ma = \sigma S,$$

onde  $m$  é a massa,  $S$  a área de um elemento cúbico com dimensões  $(\Delta_x\Delta_y\Delta_z)$ ,  $F$  é o módulo da força e  $a$  é a aceleração, que pode ser escrita como  $a = -\Delta v_p/\Delta t$ . Tem-se que:

$$m \frac{\Delta v_p}{\Delta t} = \sigma S. \quad (2.2.22)$$

Como  $v_p = \Delta x/\Delta t$ , então  $V = Sv_p\Delta t$ , sendo  $V$  o volume. Logo, multiplicando a equação (2.2.22) por  $v_p$  e fazendo  $m = \rho Sv_p\Delta t$ , onde  $\rho$  é a densidade, obtém-se:

$$(\rho v_p^2 S \Delta t) \left( \frac{\Delta v_p}{\Delta t} \right) = \sigma S v_p. \quad (2.2.23)$$

Como  $V = Sv_p\Delta t$ , então  $\Delta V = S\Delta v_p\Delta t$ , logo:

$$\frac{\Delta v_p}{v_p} = \frac{\Delta V}{V} \quad (2.2.24)$$

Reescrevendo a equação (2.2.23):

$$\frac{1}{\rho v_p^2} = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\sigma}. \quad (2.2.25)$$

Finalmente, como da equação (2.2.21)  $\kappa = \sigma/\theta$ , onde  $\theta = \Delta V/V$ :

$$v_p = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \quad (2.2.26)$$

Como a propagação de ondas compressionais em um meio elástico é afetada também pela rigidez do material, então:

$$v_p = \sqrt{\frac{\kappa + (4/3)\mu}{\rho}} \quad (2.2.27)$$

e a velocidade das ondas cisalhantes pode ser definida como:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.2.28)$$

Todas as constantes elásticas descritas aqui estão relacionadas entre si, ou seja, apenas duas delas são independentes para o caso de sólido linear e isotrópico (Lai *et al.*, 1996). No anexo D é apresentada uma tabela que expressa as constantes em função de pares das mesmas.

### 2.2.3 Equação da Onda

A equação (2.1.8), conhecida como equação elastodinâmica, e a equação (2.2.1), que é a Lei de Hooke generalizada, serão utilizadas para se chegar à equação da onda. Substituindo a equação (2.1.8) na equação (2.2.1) temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.2.29)$$

Esta equação é a mais geral possível, sendo aplicável a um meio anisotrópico e heterogêneo. Ela representa um sistema de 3 equações diferenciais, cada uma com 29 termos. Esta equação torna-se mais simples, ou menos complexa, à medida que se caminha em direção a um meio isotrópico e homogêneo. Substituindo a equação (2.2.10) na equação (2.2.29), como as constantes não variam ao longo do meio:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.2.30)$$

Para representação de um meio isotrópico heterogêneo, que é o tipo de meio a ser modelado neste trabalho, é necessário manter os termos com as derivadas das constantes. Substituindo, novamente, a equação (2.2.10) na equação (2.2.29):

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.2.31)$$

O caso acústico pode ser obtido fazendo-se, na formulação para um meio isotrópico,  $\mu = 0$ . Substituindo a equação (2.2.10) na equação (2.1.8):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\theta) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.2.32)$$

É mais comum, no caso acústico, se trabalhar com velocidades e pressões: então, fazendo  $p = -\lambda\theta$  (ver equação (2.2.20))<sup>3</sup> e  $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$  na equação (2.2.32), escrevemos:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (2.2.33)$$

como o sistema tem 4 incógnitas, os três termos do tipo  $v_i$  e  $p$ , portanto da equação (2.2.21)<sup>4</sup>,

$$\sigma = p = -\kappa\theta = -\kappa \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (2.2.34)$$

sendo  $\kappa$ , o módulo *bulk*. Derivando a equação (2.2.34), então:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (2.2.35)$$

O conjunto de equações a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= f_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

descreve completamente o caso acústico (Psencik,1994). O conjunto de equações a ser utilizado neste trabalho e que servirá para a reprodução do modelo físico será mostrado a seguir. A razão pela opção por trabalhar com coordenadas cilíndrica, ao invés de coordenadas cartesianas, ficará clara mais à frente. As equações elastodinâmicas em coordenadas cilíndricas que descrevem a propagação de ondas são as seguintes:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr}}{r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

<sup>3</sup>Omitiu-se o sinal das eqs.(2.2.20) e (2.2.21) por uma questão de convenção. O sinal aqui presente indica que a pressão ( $\sigma$  ou  $p$ ) e a dilatação ( $\theta$ ) possuem sinais contrários.

<sup>4</sup>Observar que da equação (2.2.21) tem-se, no caso acústico, que  $\lambda = \kappa$ .

As relações constitutivas que relacionam tensão e deslocamento, em coordenadas cilíndricas, são mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \lambda \\
\tau_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} u_r + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \lambda \\
\tau_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\tau_{r\theta} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \mu \frac{u_\theta}{r} \\
\tau_{rz} &= \mu \frac{\partial u_r}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
\tau_{z\theta} &= \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

## 2.3 Considerações Finais

Foram apresentadas neste capítulo algumas propriedades e conceitos básicos de elasticidade. Conceitos como *tensão*, *tensor de tensões*, *tensor de deformação*, além das relações *tensão X deformação*, fornecidas pela Lei de Hooke generalizada, servem como base para uma melhor compreensão da formulação da equação da onda utilizada neste trabalho. A seguir será apresentado o método utilizado para solucionar o conjunto de equações, o conhecido método das Diferenças Finitas, analisando limitações e vantagens deste procedimento, além das condições de contorno utilizadas. Será discutido também, ainda que brevemente, o conceito de *malha intercalada* proposto por Virieux (1986).

## Capítulo 3

# Discretização da Equação da Onda

A discretização de uma equação tem o objetivo de reduzir o problema físico contínuo e com infinitas soluções a um problema discreto com um número finito de incógnitas. Após essa discretização o problema pode ser resolvido através do auxílio de computadores. Existem vários métodos numéricos disponíveis, tais como o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno, Diferenças Finitas, etc. Cada um deles apresenta diferentes tipos de aproximação. Um dos mais simples e computacionalmente mais rápidos e muito utilizado em modelagem sísmica, o qual será utilizado neste trabalho, é o Método das Diferenças Finitas.

### 3.1 Método das Diferenças Finitas

A teoria por trás deste método é bastante simples e consiste em aproximar as derivadas por diferenças. Seja um problema unidimensional e  $dF/dx$ , a derivada de  $F$  em relação a  $x$ , onde  $F$  é uma função qualquer dependente de uma variável independente  $x$  e  $P$  um ponto de coordenada  $x$ . A definição formal da derivada é dada a seguir:

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad (3.1.1)$$

A derivada corresponde à tangente à curva no ponto  $P$ . O método das Diferenças Finitas (MDF) consiste em substituir a derivada contínua pela secante, onde  $\Delta x \neq 0$ , ou seja,

$$\left( \frac{dF}{dx} \right)_{x=x_i} \approx \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x}. \quad (3.1.2)$$

Neste caso seria utilizada a chamada *diferença progressiva*, no caso de *diferença regressiva* a fórmula seria escrita da seguinte maneira

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{F(x_i) - F(x_i - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (3.1.3)$$

A diferença entre elas será tão menor quanto menor for  $\Delta x$ . No presente trabalho será utilizado um esquema de diferenças centrais, segundo a fórmula

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (3.1.4)$$

A razão da utilização de um esquema de diferenças centrais será explicada mais adiante. Os termos *regressiva*, *progressiva* e *centrais* estão sempre relacionados ao ponto de aplicação das diferenças, de maneira similar à derivada.

Uma outra forma de serem obtidas as fórmulas aproximadas é utilizando séries de Taylor truncadas. As utilização das séries de Taylor permite a obtenção das equações de diferenças de uma maneira elegante, sendo que se obtém também a ordem do erro cometido na aproximação. Expandindo o valor de  $F$  em  $x = x_i + \Delta x$  em torno do valor de  $F$  em  $x = x_i$ , tem-se que:

$$F(x_i + \Delta x) = F(x_i) + \Delta x \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x=x_i} + \dots \quad (3.1.5)$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma, de modo a ser obtida a derivada desejada,

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=x_i} - \frac{\Delta x^2}{3!} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x=x_i}. \quad (3.1.6)$$

Tomando-se a derivada como,

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \quad (3.1.7)$$

observa-se que o maior termo desprezado na equação (3.1.5) é igual a uma constante multiplicada por  $\Delta x$ , que é um número muito pequeno, ou seja, o erro cometido é da ordem de  $\Delta x$ , ou seja  $[O(\Delta x)]$ . Esta equação corresponde a uma aproximação de diferença regressiva. Um processo análogo seria feito para diferenças progressivas. No caso de diferenças centrais, subtraindo da equação 3.1.5 a equação para  $F(x_i - \Delta x)$  tem-se que:

$$F(x_i + \Delta x) - F(x_i - \Delta x) = 2\Delta x \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} + 2\frac{\Delta x^3}{3} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x=x_i} + \dots \quad (3.1.8)$$

Então finalmente:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.1.9)$$

Observa-se que o erro cometido é da ordem de  $\Delta x^2$ . Portanto, esse esquema é mais preciso do que os anteriores, sendo este o motivo pela sua escolha. Para o caso de um operador de quarta ordem, sejam  $x \pm \Delta x$  e  $x \pm 2\Delta x$ , quatro pontos em torno de um ponto qualquer  $x$ . Reescrevendo a equação (3.1.5) para estes pontos obtém-se:

$$F(x_i + \Delta x) = F(x_i) + \Delta x \left( \frac{dF}{dx} \right) + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right) + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{d^3 F}{dx^3} \right) + \dots \quad (3.1.10)$$

$$F(x_i - \Delta x) = F(x_i) - \Delta x \left( \frac{dF}{dx} \right) + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right) - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{d^3 F}{dx^3} \right) + \dots \quad (3.1.11)$$

$$F(x_i + 2\Delta x) = F(x_i) + 2\Delta x \left( \frac{dF}{dx} \right) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right) + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{d^3 F}{dx^3} \right) + \dots \quad (3.1.12)$$

$$F(x_i - 2\Delta x) = F(x_i) - 2\Delta x \left( \frac{dF}{dx} \right) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right) - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{d^3 F}{dx^3} \right) + \dots \quad (3.1.13)$$

Somando-se as equações (3.1.10) e (3.1.11) e as equações (3.1.12) e (3.1.13), tem-se:

$$F(x_i + \Delta x) + F(x_i - \Delta x) = 2F(x_i) + \Delta x^2 \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right) + \frac{\Delta x^4}{12} \left( \frac{d^4 F}{dx^4} \right) + O[(\Delta x)^6] \quad (3.1.14)$$

$$F(x_i + 2\Delta x) + F(x_i - 2\Delta x) = 2F(x_i) + 4\Delta x^2 \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right) + \frac{16\Delta x^4}{12} \left( \frac{d^4 F}{dx^4} \right) + O[(\Delta x)^6] \quad (3.1.15)$$

Multiplicando-se a equação 3.1.14 por 16 e subtraindo-se a equação 3.1.15 tem-se:

$$16[F(x_i + \Delta x) + F(x_i - \Delta x)] - [F(x_i + 2\Delta x) + F(x_i - 2\Delta x)] = 30F(x_i) + 12(\Delta x)^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + O[(\Delta x)^6]. \quad (3.1.16)$$

Reescrevendo-se a equação 3.1.16, chega-se finalmente à equação 3.1.17, que representa uma aproximação de quarta ordem para  $\frac{d^2 F}{dx^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2} &\approx \frac{1}{12(\Delta x)^2} [-F(x_i - 2\Delta x) + 16F(x_i - \Delta x) \\ &- 30F(x_i) + 16F(x_i + \Delta x) - F(x_i + 2\Delta x)] + O[(\Delta x)^4] \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Essa distância  $\Delta x$  entre os pontos no modelo deve ser calculada de acordo com o tipo de modelo que se quer amostrar e deve respeitar os critérios de consistência, convergência e estabilidade. Cada esquema numérico possui os seus critérios, o esquema utilizado neste trabalho é um esquema explícito com diferenças centrais. Para entender melhor as aproximações por diferenças centrais, diferenças progressivas e regressivas devemos observar a figura (3.1) na

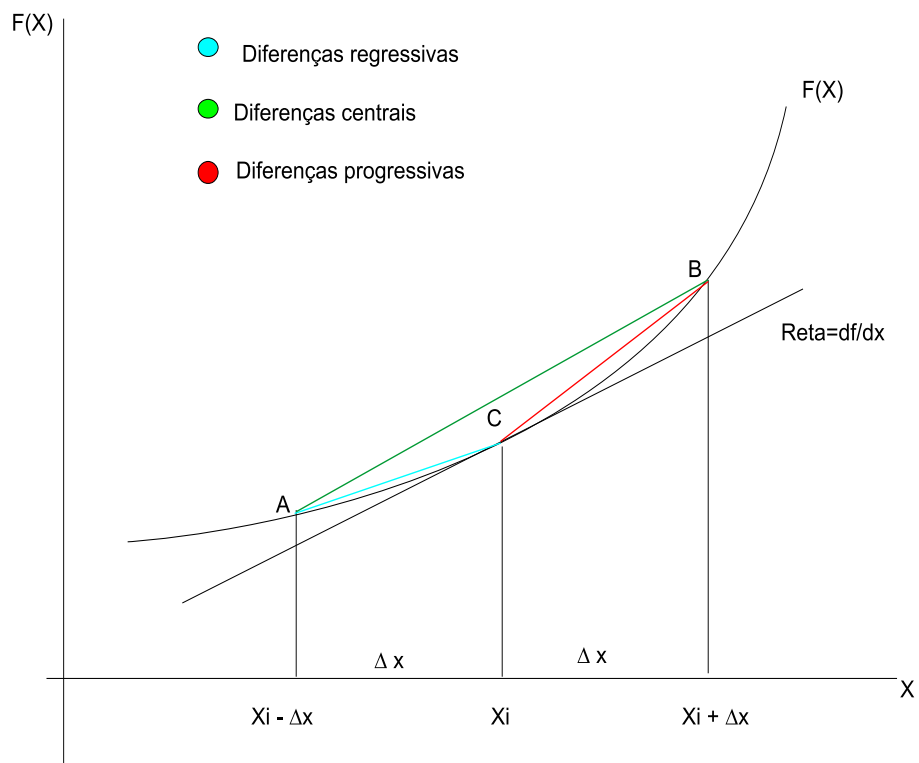


Figura 3.1.1: Representação gráfica dos tipos de diferenças

página 18. Nos problemas denominados transientes, onde as equações diferenciais apresentam derivadas temporais, como é o caso da equação da onda, deve-se escrever a aproximação para tais derivadas no mesmo ponto  $P$ . Nas equações de (3.1.2) a (3.1.4) estava implícito que as derivadas foram tomadas num mesmo passo de tempo. A equação (3.1.4), por exemplo poderia ter sido escrita como:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{F(x_i + \Delta x, t_i) - F(x_i - \Delta x, t_i)}{2\Delta x}. \quad (3.1.18)$$

No caso da equação de difusão,

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.1.19)$$

a representação da derivada temporal poderia ser feita da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x_i, t_i} = \frac{u(x_i, t_i + \Delta t) - u(x_i, t_i)}{\Delta t}, \quad (3.1.20)$$

onde  $\Delta t$  é o passo no tempo. Se forem aplicadas as equações (3.1.18), substituindo  $F$  por  $u$  e (3.1.20) na equação (3.1.19), obtém-se a expressão:

$$\frac{u(x_i, t_i + \Delta t) - u(x_i, t_i)}{\Delta t} = c \left( \frac{u(x_i + \Delta x, t_i) - 2u(x_i, t_i) + u(x_i - \Delta x, t_i)}{\Delta x^2} \right), \quad (3.1.21)$$

onde:

$$u(x_i, t_i + \Delta t) = u(x_i, t_i) + \frac{c\Delta t}{\Delta x^2} (u(x_i + \Delta x, t_i) - 2u(x_i, t_i) + u(x_i - \Delta x, t_i)) \quad (3.1.22)$$

e que pode ser escrita da seguinte forma:

$$u(x_i, t_i + \Delta t) = mu(x_i + \Delta x, t_i) + (1 - 2m)u(x_i, t_i) + mu(x_i - \Delta x, t_i), \quad (3.1.23)$$

onde  $m = c\Delta t/\Delta x^2$ . Este tipo de formulação é denominada esquema de aproximação *explícita*, pois pode-se calcular o valor de  $u$  num instante de tempo  $t_i + \Delta t$  utilizando apenas o valor de  $u$  num instante anterior,  $t_i$ . Neste trabalho será adotado o esquema *explícito*: apesar de estarem sujeitos a restrições de estabilidade<sup>1</sup>, os esquemas *explícitos* são bem mais rápidos que os esquemas *implícitos*. Para análise de propriedades de esquemas implícitos e explícitos ver Smith (1985). No caso de um termo com derivada temporal de segunda ordem, podemos escrever:

$$\left(\frac{d^2 F}{dt^2}\right)_{x=x_i} = \frac{F(x_i, t_i + \Delta t) - 2F(x_i, t_i) + F(x_i, t_i - \Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (3.1.24)$$

---

<sup>1</sup>Para análise detalhada sobre estabilidade e consistência de esquemas de diferenças finitas ver Ritchmyer e Morton (1967)

Esta aproximação de *segunda ordem* para a derivada segunda permite a obtenção da solução para o tempo  $t_i + \Delta t$  utilizando apenas a solução nos tempos  $t_i$  e  $t_i - \Delta t$ . Caso se deseje utilizar aproximações mais precisas, devem-se utilizar mais termos.

## 3.2 Malha Intercalada

Observa-se da equação (3.1.4) que o operador de derivada está centrado exatamente no ponto  $x_i$ , enquanto os operadores das equações (3.1.2) e (3.1.3) estão centrados em  $x_i + \Delta x/2$  e  $x_i - \Delta x/2$ , respectivamente. Seja a representação de Fourier<sup>2</sup> para a derivada utilizando o operador da equação (3.1.2):

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{e^{iK_x \Delta x} F(K_x) - F(K_x)}{\Delta x} = \\
 &= \frac{e^{iK_x \Delta x} - 1}{\Delta x} F(K_x) \\
 &= 2i \frac{e^{iK_x \Delta x/2} e^{iK_x \Delta x/2} - e^{-iK_x \Delta x/2}}{\Delta x} F(K_x) \quad (3.2.1) \\
 &= 2i \frac{e^{iK_x \Delta x/2}}{\Delta x} \operatorname{sen} \left( K_x \frac{\Delta x}{2} \right) F(K_x) \\
 &= iK_x \operatorname{sinc} \left( K_x \frac{\Delta x}{2} \right) e^{iK_x \Delta x/2} F(K_x),
 \end{aligned}$$

Vê-se que o termo  $\operatorname{sinc} \left( K_x \frac{\Delta x}{2} \right)$  representa uma função *caixa* suavizando o processo e que  $e^{iK_x \Delta x/2}$  corresponde a um deslocamento de fase. Para o operador de derivada central, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{e^{iK_x \Delta x} - e^{-iK_x \Delta x}}{2\Delta x} F(K_x) = \\
 &= \frac{i}{\Delta x} \operatorname{sen} (K_x \Delta x) F(K_x) \quad (3.2.2) \\
 &= iK_x \operatorname{sinc} (K_x \Delta x) F(K_x).
 \end{aligned}$$

Pode-se observar que neste caso não há o termo referente ao deslocamento de fase, porém a frequência da função “sinc” na equação (3.2.1) é menor do que em (3.2.2). Portanto, na equação (3.2.2) tem-se uma função caixa mais larga no espaço, o que causa um maior grau de suavização. Os operadores com um número ímpar de termos possuem uma implementação mais fácil, porém, independente do número de pontos utilizados, tais operadores sempre apresentarão um *zero* na frequência de *Nyquist* (Cunha *et al.* (1995)). Logo, os mesmos produzirão algoritmos mais dispersivos e menos estáveis. Virieux (1984) introduziu o conceito

<sup>2</sup>Um rápido e completo guia sobre a Transformada de Fourier pode ser encontrado em Brigham (1988).

de malha intercalada, de modo a possibilitar a utilização de operadores com um número par de pontos em modelagem elástica. O método consiste na superposição de duas malhas de pontos deslocadas de  $(1/2)$  uma em relação a outra. Seja o conjunto de equações **(2.1.10)** modificado em Virieux (1986) para o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= b \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= b \left( \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

onde

$$b = 1/\rho$$

e

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right).$$

O mesmo é válido para as derivadas de  $z$ . A diferença principal para as modelagens com malha regular consiste em que no caso de malha intercalada, as velocidades e constantes elásticas não são definidas nos mesmos pontos e que as velocidades e tensões também não são calculadas no mesmo instante de tempo. Outro fator importante diz respeito à dispersão. No esquema proposto por Virieux (1986), a condição de estabilidade e curva de dispersão da velocidade de fase da onda P não dependem da razão de Poisson. O mesmo acontece para o caso da velocidade de fase da onda S. Então o mesmo código utilizado para modelagem elástica pode ser aplicado em fluidos, ou em modelos com interface fluido-sólido (Virieux (1986)). Veja na figura **(3.2)**, em cuja legenda  $v_x = U$ ,  $v_z = V$ ,  $T_{xx} = \Sigma$ ,  $T_{zz} = T$ ,  $T_{xz} = \Xi$  e

$B = b = 1/\rho$ , então a discretização é escrita da seguinte maneira<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+1/2} &= U_{i,j}^{k-1/2} + B_{i,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ \Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k \right] \\
&+ B_{i,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \left[ \Xi_{i,j+1/2}^k - \Xi_{i,j-1/2}^k \right] \\
V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} &= V_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2} + B_{i+1/2,j+1/2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ \Xi_{i+1,j+1/2}^k - \Xi_{i,j+1/2}^k \right] \\
&+ B_{i+1/2,j+1/2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \left[ T_{i+1/2,j+1}^k - T_{i+1/2,j}^k \right] \\
\Sigma_{i+1/2,j}^{k+1} &= \Sigma_{i+1/2,j}^k + (L + 2M)_{i+1/2,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2} \right] \\
&+ L_{i+1/2,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \left[ V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} \right] \\
T_{i+1/2,j}^{k+1} &= T_{i+1/2,j}^k + (L + 2M)_{i+1/2,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \left[ V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} \right] \\
&+ L_{i+1/2,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2} \right] \\
\Xi_{i,j+1/2}^{k+1} &= \Xi_{i,j+1/2}^k + M_{i,j+1/2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \left[ U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2} \right] \\
&+ M_{i,j+1/2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2} \right]
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Neste esquema as variáveis são definidas de modo a que se tenha sempre a derivada de ordem

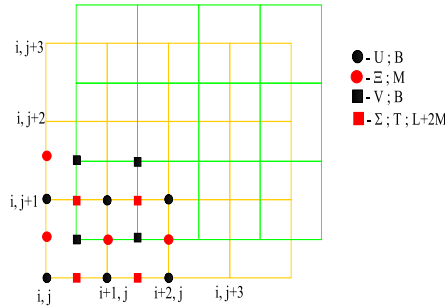


Figura 3.2.1: Distribuição dos pontos num esquema de malha intercalada

ímpar, e número par de termos, centrada num ponto de uma das malhas. Deve-se observar que as derivadas estão sempre centradas nos pontos onde os termos à esquerda do sinal de igual estão definidos (ver equações (3.2.5)). O esquema utilizado no presente trabalho foi

<sup>3</sup>É importante destacar que no trabalho original de Virieux, houve um erro no termo relativo a  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  na discretização de  $\Sigma$ ,  $T$  e  $\Xi$ .

proposto por Levander (1988) e utiliza, diferentemente do proposto por Virieux (1986), um operador de 4<sup>a</sup> ordem no espaço e 2<sup>a</sup> ordem no tempo.

Observando as equações (3.2.5) vê-se que a utilização de índices *não inteiros* não é possível em termos de geração de códigos para programação em computadores, pois os mesmos trabalham sempre com índices inteiros. Isto pode ser facilmente resolvido imaginando os termos inteiro e *não inteiros* como fazendo parte de uma célula especial. Na figura (3.2) pode-se definir os quadrados azuis como as novas células, e nomeá-las com o índice referente ao ponto, por exemplo, esquerdo inferior. Deste modo, obtém-se de uma maneira muito simples os novos índices *inteiros* dos operadores das derivadas. Seja a primeira equação de (3.2.5)

$$U_{i,j}^{k+1/2} = U_{i,j}^{k-1/2} + B_{i,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[ \Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k \right] \quad (3.2.6)$$

$$+ B_{i,j} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \left[ \Xi_{i,j+1/2}^k - \Xi_{i,j-1/2}^k \right]$$

Na implementação computacional devemos apenas observar a posição dos pontos dos ope-

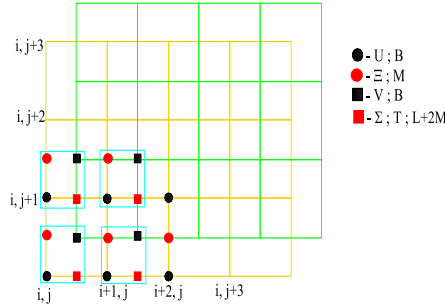


Figura 3.2.2: Esquema de malha intercalada com indicação das células com os índices inteiros

radores em relação à célula azul na figura (3.2). Na linha de código, com os índices inteiros, as seguintes modificações deveriam ser feitas:

$$U_{i,j} = U(I, J)$$

$$B_{i,j} = B(I, J)$$

$$\Sigma_{i+1/2,j} = \Sigma(I, J) \quad (3.2.7)$$

$$\Sigma_{i-1/2,j} = \Sigma(I - 1, J)$$

$$\Xi_{i,j+1/2} = \Xi(I, J)$$

$$\Xi_{i,j-1/2} = \Xi(I, J - 1).$$

Algo que não fica muito claro no artigo de Virieux (1986) é que a atualização do campo de velocidades deve ser feita antes e não em conjunto com as tensões, ou seja, devem ser geradas as matrizes nas duas primeiras equações de **(3.2.5)**, para depois se atualizar os campos de tensões. A primeira equação de **(3.2.5)** pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} U_3(I, J) &= U_1(I, J) + B(I, J) \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) [\Sigma_2(I, J) - \Sigma_2(I - 1, J)] \\ &+ B(I, J) \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) [\Xi_2(I, J) - \Xi_2(I, J - 1)], \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

lembrando que os subscritos se referem ao passo de tempo e que 1 se refere ao instante passado, 2 ao presente e 3 ao futuro. A equação de  $V$ , com base nas colocações anteriores, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} V_3(I, J) &= V_1(I, J) + B(I, J) \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) [\Xi_2(I + 1, J) - \Xi_2(I, J)] \\ &+ B(I, J) \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) [T_2(I, J + 1) - T_2(I, J)] \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Outro ponto a ser enfatizado é que os valores calculados de  $U_3$  e  $V_3$  nas equações **(3.2.8)** e **(3.2.9)**, entrarão nas equações das tensões de **(3.2.5)** para o cálculo das mesmas num instante posterior.

Há outras maneiras de serem obtidos os índices inteiros de um esquema de malha intercalada, a abordagem exposta aqui é uma adaptação da apresentada por Cunha (1992).

### 3.3 Discretização

No próximo capítulo explicaremos mais detalhadamente o problema físico a ser tratado. No momento apenas informaremos que o modelo possui simetria cilíndrica e que, portanto, optamos por utilizar a formulação apresentada no sistema **(2.2.38)**, apenas baixando a ordem das derivadas temporais para utilizarmos o esquema proposto por Virieux (1986). O sistema

em coordenadas cilíndricas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr}}{r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \\
\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \\
\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} \\
\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} v_r + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \lambda \\
\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} v_r + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \lambda \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} v_r + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \mu \frac{v_\theta}{r} \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} + \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \\
\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

### 3.3.1 Operadores

Os operadores utilizados foram de 2ª ordem no tempo e 4ª no espaço. As derivadas são definidas pela seguinte formulação (Graves (1996)):

$$\frac{\partial}{\partial r} v_r \approx D_r v_r|_P, \tag{3.3.2}$$

onde  $D_r$  representa a forma discreta do operador  $\frac{\partial}{\partial r}$  aplicado na variável  $v_r$  no ponto P, de coordenadas ( $r = i\Delta r$ ,  $z = j\Delta z$ ). Então a derivada espacial utilizando um operador de quarta ordem pode ser escrita como:

$$D_r v_r|_P = \frac{1}{h} \{c_0[v_{r(i+1/2,z)} - v_{r(i-1/2,z)}] - c_1[v_{r(i+3/2,z)} - v_{r(i-3/2,z)}]\}, \tag{3.3.3}$$

onde  $c_0 = 9/8$  e  $c_1 = 1/24$  (Levander (1988)). O operador da equação (3.3.3) aplicado à equação de  $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t}$  se apresentaria da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
K2(I, J) &= K1(I, J) + \\
&\frac{\Delta t}{24\Delta z} \mu(I, J) (-V_r 2(I, J + 2) + 27V_r 2(I, J + 1) - 27V_r 2(I, J) + V_r 2(I, J - 1)) + \\
&\frac{\Delta t}{24\Delta r} \mu(I, J) (-V_z 2(I + 1, J) + 27V_z 2(I, J) - 27V_z(I - 1, J) + V_z 2(I - 2, J)),
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

onde:  $K = \tau_{rz}$  e  $\Delta r = \Delta z$ . O critério de estabilidade é obtido pela seguinte relação (Graves (1996)):

$$\Delta t < 0.495 \frac{h}{v_{max}}. \tag{3.3.5}$$

O esquema de 4ª ordem conforme apresentado por Levander (1988) requer um número mínimo de amostras por comprimento de onda igual a 5. No caso do presente estudo foram utilizados 10 amostras por comprimento de onda. Os pontos de definição dos parâmetros da modelagem são mostrados na figura (3.3.1).

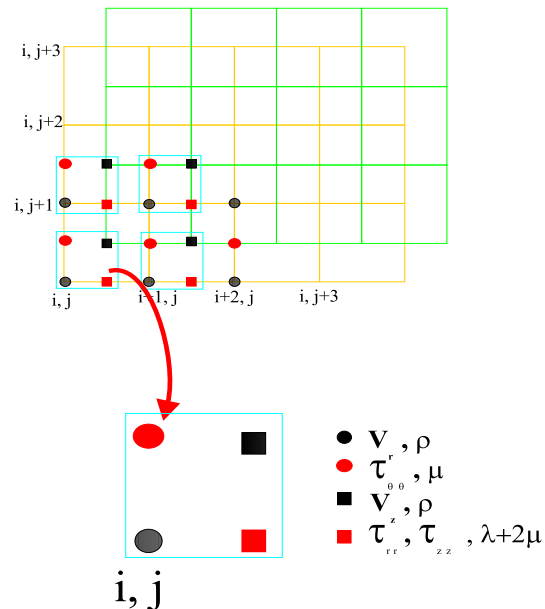


Figura 3.3.1: Detalhe da posição onde são definidas as constantes e os componentes da tensão.

### 3.3.2 Condições de contorno

Devido à simetria cilíndrica simplifica-se o sistema (3.3.1), reduzindo-se o número de equações.

O modelo com simetria cilíndrica é chamado de um modelo axi-simétrico. A vantagem em se adotar um sistema de coordenadas cilíndricas é que se pode trabalhar num modelo 2D, obtendo-se os resultados do modelo 3D. A figura (3.3.2) mostra o cilindro referente ao modelo 3D e o plano em destaque que compõe o conjunto de pontos modelados. Constata-se assim a economia em termos computacionais ao se utilizar as coordenadas cilíndricas em um modelo axi-simétrico. Serão apresentadas a seguir algumas considerações a respeito das condições de contorno(CC) nas extremidades do modelo, a saber:

- Eixo de simetria (Extremidade esquerda)
- Topo do modelo

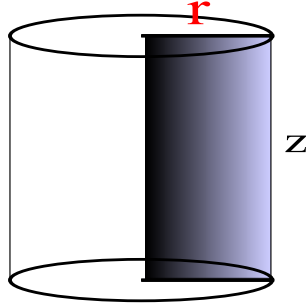


Figura 3.3.2: Área hachurada indica região modelada que é representativa do restante do cilindro para um modelo com simetria axial

- Base
- Extremidade direita

### CC no eixo de simetria

São apresentadas, a seguir, as considerações sobre o eixo de simetria:

- $v_r = 0$

De modo a manter a simetria não pode haver deslocamento na direção  $r$

- $\tau_{rz} = 0$

A tensão cisalhante presume um movimento diferenciado em ambos os lados do eixo, o que contraria a hipótese inicial de axi-simetria do modelo.

- $\frac{v_r}{r}$

Como  $\lim_{r \rightarrow 0} v_r = 0$ , temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v_r}{r} = \frac{0}{0},$$

então, usando a regra de l'Hospital<sup>4</sup>, tem-se que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v_r}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial v_r}{\partial r}}{\frac{\partial r}{\partial r}} = \frac{\partial v_r}{\partial r}.$$

No eixo de simetria:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v_r}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial r}. \quad (3.3.6)$$

---

<sup>4</sup>Ver apêndice C, ítem C.3

- $\frac{\tau_{rz}}{r}$

Como  $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{rz} = 0$ , logo,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tau_{rz}}{r} = \frac{0}{0},$$

então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tau_{rz}}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\tau_{rz}}{r}}{\frac{\partial r}{\partial r}} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}.$$

No eixo de simetria:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tau_{rz}}{r} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}. \quad (3.3.7)$$

### CC no topo

Na superfície do modelo devemos fazer as seguintes considerações:

$$\tau_{zz} = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\tau_{rz} = 0$$

### CC na base

As condições de contorno adotadas na base do modelo, considerando o fluido, nas condições de pressão (5000 psi) do experimento, como incompressível, foram as seguintes:

$$v_r = 0 \quad (3.3.9)$$

$$v_z = 0$$

## 3.4 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados o método de discretização utilizado para solução da equação da onda, conhecido como Método das Diferenças Finitas, o conceito de malha intercalada, o qual foi utilizado na modelagem, assim como as condições de contorno da modelagem. Todo esse aparato numérico será utilizado para reproduzir numericamente o experimento físico de propagação de ondas pertencente ao Laboratório de Física de Rochas do Centro de Pesquisas da PETROBRAS (CENPES). No próximo capítulo, além do modelo físico propriamente dito, serão também discutidas as premissas básicas admitidas durante o processo de geração do modelo.

## Capítulo 4

# O Experimento Físico

Neste capítulo será apresentado o experimento físico utilizado para calibração da modelagem numérica. Será analisado em maior detalhe o equipamento e a forma como se realiza a geração e gravação do sinal. A parte referente à formulação teórica e equações foi descrita no capítulo anterior.

### 4.1 O Equipamento

Nesta seção serão apresentados os dispositivos de geração e registro dos sinais utilizados no ensaio. O Laboratório de Física de Rochas do CENPES possui uma gama variada de atividades, sendo que os dados básicos utilizados são as velocidades e os módulos elásticos dinâmicos de rochas. Para a determinação de tais parâmetros, o laboratório dispõe de um equipamento de fabricação própria, confeccionado especialmente para o este tipo de trabalho e, principalmente, para as características das amostras comumente ensaiadas. O dispositivo pode ser dividido em 3 partes:

- Geração e registro do sinal
- Câmara
- Vasos de pressão

A figura (4.1.1)<sup>1</sup> apresenta um esquema mostrando todos esses componentes e a forma como estão interligados. Nos próximos itens serão apresentados os componentes do dispositivo do ensaio.

---

<sup>1</sup>Desenho gentilmente cedido por Guilherme Vasquez

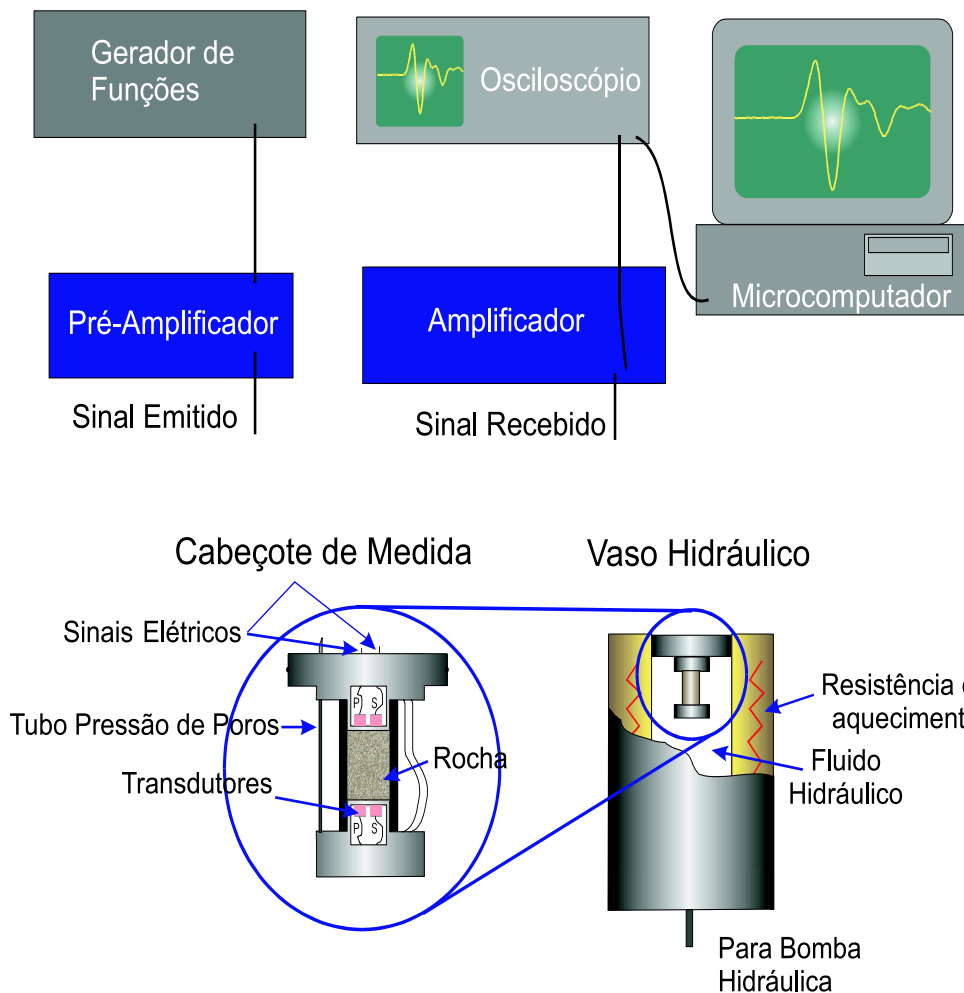


Figura 4.1.1: Esquema do Experimento

#### 4.1.1 Geração e registro

Esta parte do dispositivo é composta por um gerador de função, um amplificador e um osciloscópio. No caso do experimento em questão foi utilizado o gerador de função, devido ao sinal emitido ser mais facilmente modelado. O *gerador de função*, como o próprio nome já diz, é o responsável pela geração do sinal senoidal de frequência controlada. O gerador é o equipamento no alto à esquerda da figura (4.1.2). Nos ensaios no Laboratório de Física de Rochas as frequências utilizadas normalmente são 250 kHz e 500kHz, dependendo do tipo de amostra e da resposta obtida. O equipamento permite outros valores de frequência, porém estes valores são os padrões. Após a geração, o sinal eletrônico passa pelo amplificador (no alto à direita da figura (4.1.2)) e vai diretamente para os cristais na câmara (ver figura (4.1.5))

no item 4.1.2, página 33). O sinal, após ter percorrido toda a amostra presente na câmara, passa pelo transdutor (cristal) receptor e volta ao amplificador e daí para o osciloscópio, onde a sua forma pode ser registrada e o tempo de trânsito determinado.

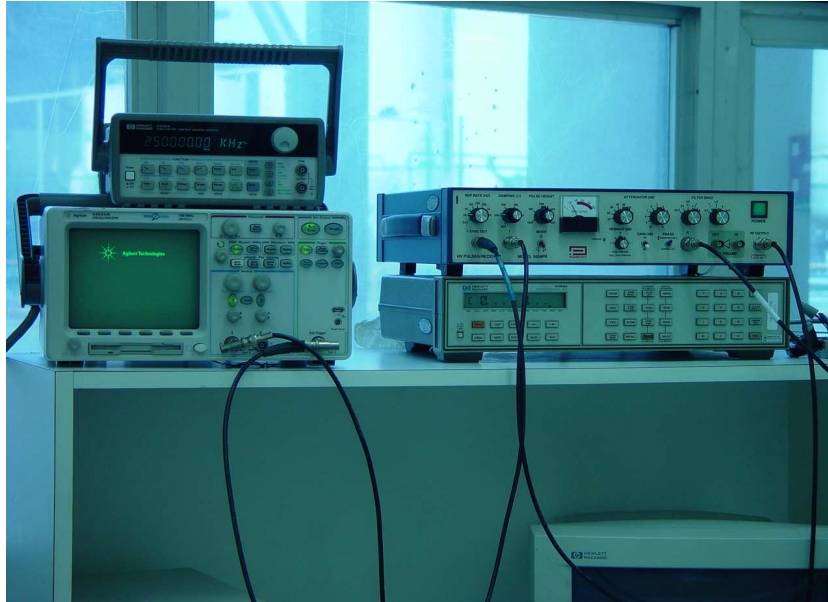


Figura 4.1.2: Equipamentos para geração e aquisição do sinal

#### 4.1.2 Câmara

A câmara propriamente dita é composta por duas estruturas de aço contendo os cristais emissores e os receptores e as respectivas ligações elétricas. As figuras (4.1.3) e (4.1.4) mostram as duas partes de aço, montadas e desmontadas, respectivamente. Os cristais piezolétricos (emissores) são transdutores que transformam o sinal elétrico em uma onda mecânica que atravessa a amostra e que, ao atingir os cristais receptores, é transformada em um sinal elétrico que é encaminhado para o amplificador e depois para o osciloscópio. O cristal anelar transforma o sinal elétrico em uma onda mecânica do tipo P (ver figura (4.1.5), página 33). O outro cristal de forma retangular no interior do anel é o gerador de ondas S.

A câmara montada com uma amostra é apresentada na figura (4.1.6), faltando apenas a colocação da camisa de borracha para que o sistema fique acoplado, o que pode ser visto na figura (4.1.7). No trabalho rotineiro do Laboratório de Física de Rochas, a utilização da camisa de borracha visa também impedir que o óleo hidráulico presente no vaso de pressão contamine a amostra.

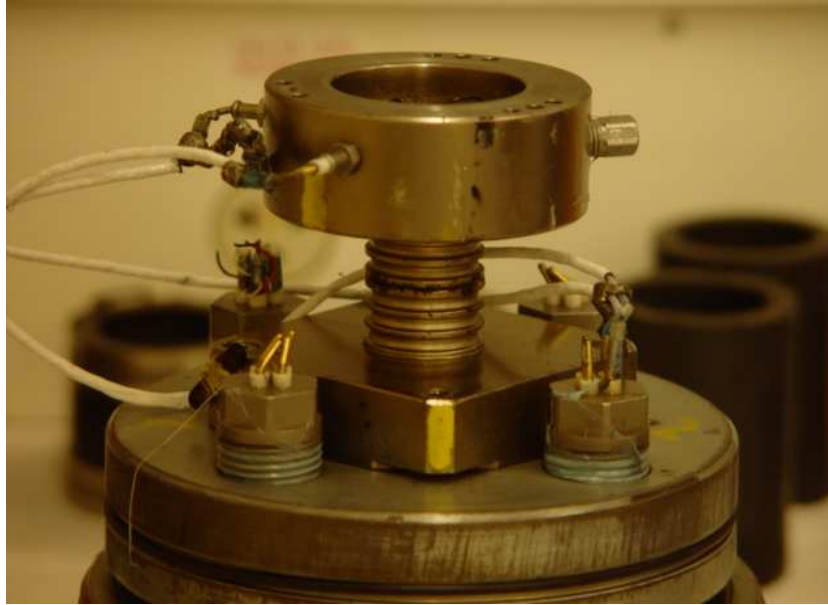


Figura 4.1.3: Câmara com partes montadas

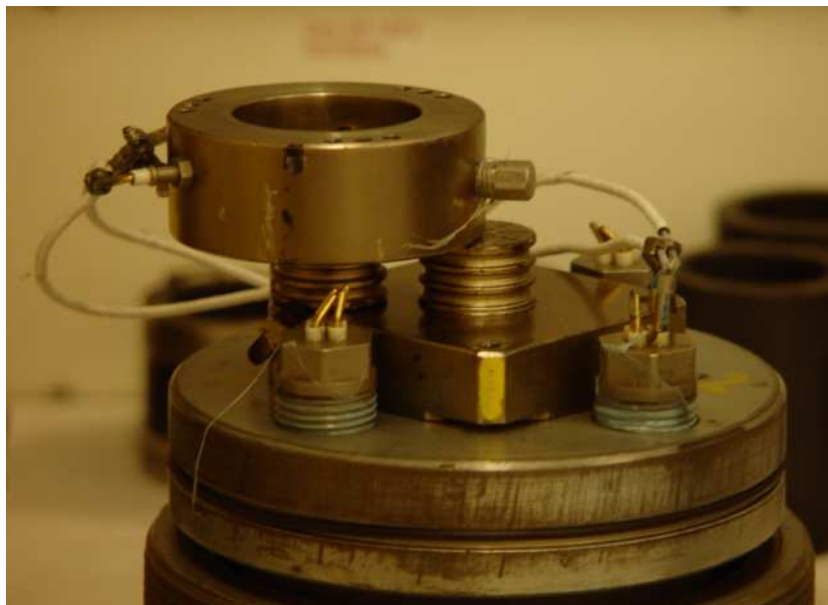


Figura 4.1.4: Câmara com partes desmontadas

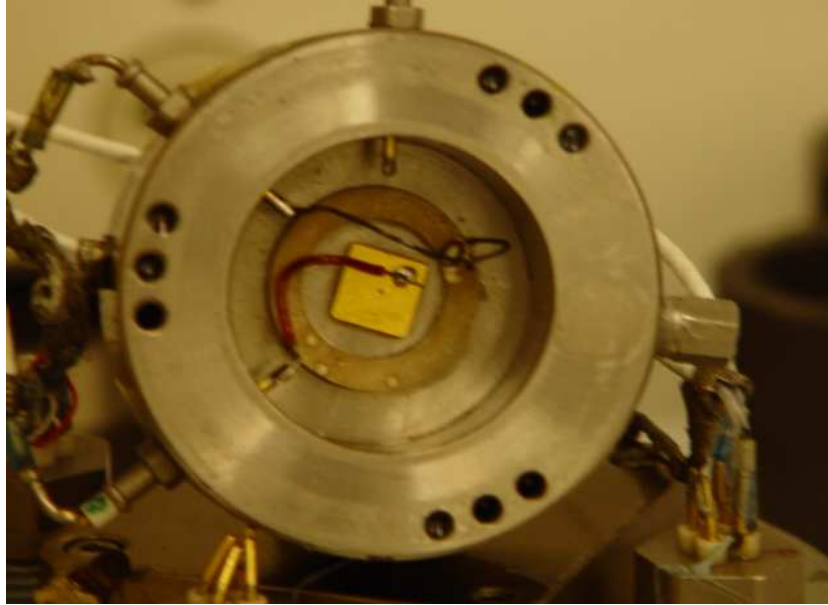


Figura 4.1.5: Cristais piezoelétricos montados no interior da câmara

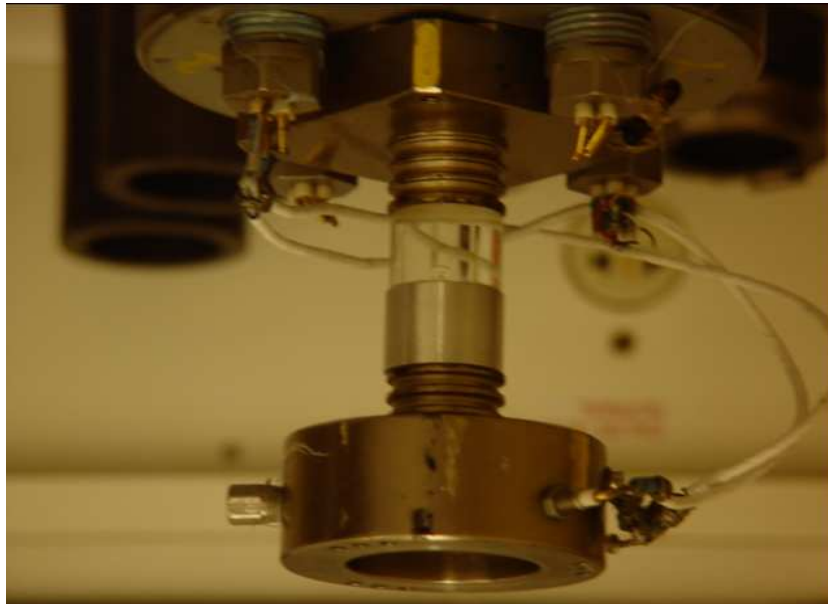


Figura 4.1.6: Câmara montada sem a camisa de borracha

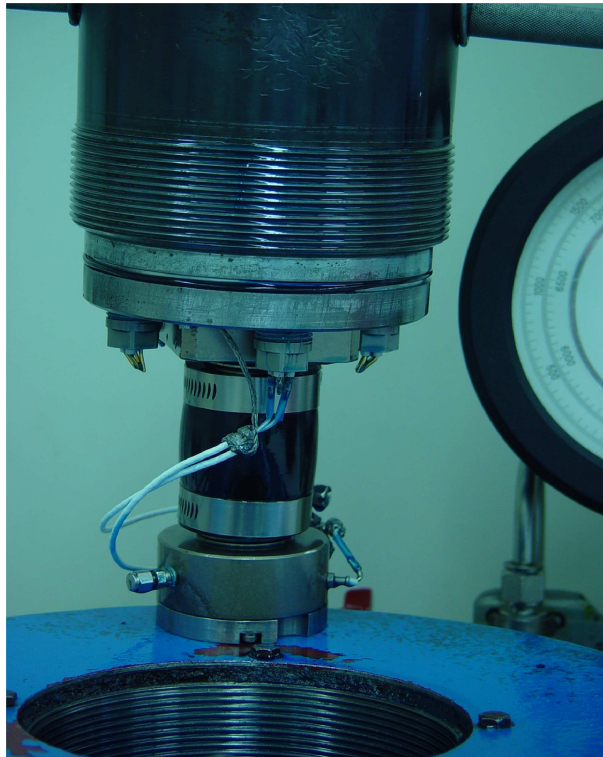


Figura 4.1.7: Câmara montada

### 4.1.3 Vasos de Pressão

O sistema descrito nos itens anteriores deve ser, então, colocado nos vasos de pressão, que correspondem aos cilindros azuis, mostrados na figura (4.1.8). Os vasos são preenchidos com

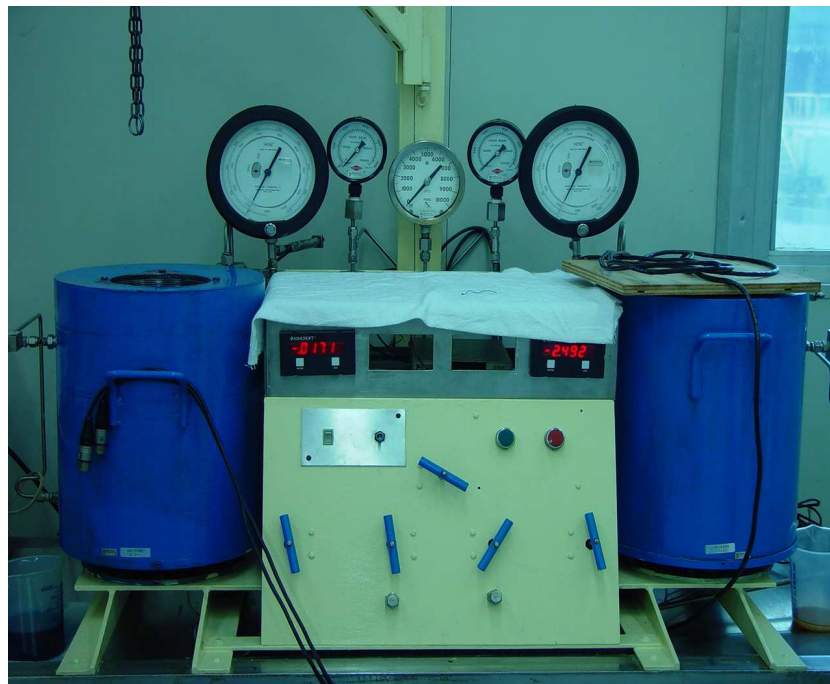


Figura 4.1.8: Vasos de Pressão

óleo hidráulico e uma bomba automática incrementa a pressão deles. A aplicação da pressão tem por objetivo reproduzir as condições reais de pressão a que está submetida a rocha em sub-superfície. Muitas das amostras utilizadas nos ensaios rotineiros do laboratório são compostas por arenito friável, portanto, a pressão efetiva utilizada é de grande importância, não só na compactação da amostra, como na melhoria do acoplamento câmara-amostra. No caso do experimento em questão, utilizou-se a pressão apenas para garantir um bom acoplamento. A pressão utilizada foi de 5000 psi.

## 4.2 Preparação das Amostras

Para a calibração do modelo numérico foram confeccionadas quatro amostras cilíndricas de 1,5 polegadas de diâmetro de comprimento aproximadamente igual, sendo compostas por intercalações de discos de vidro e alumínio, como pode ser visto nas figuras (4.2.1) a (4.2.4).



Figura 4.2.1: Modelo de alumínio

Para melhorar o acoplamento dos discos foi utilizada uma pasta própria para este tipo de ensaio.



Figura 4.2.2: Modelo de duas camadas

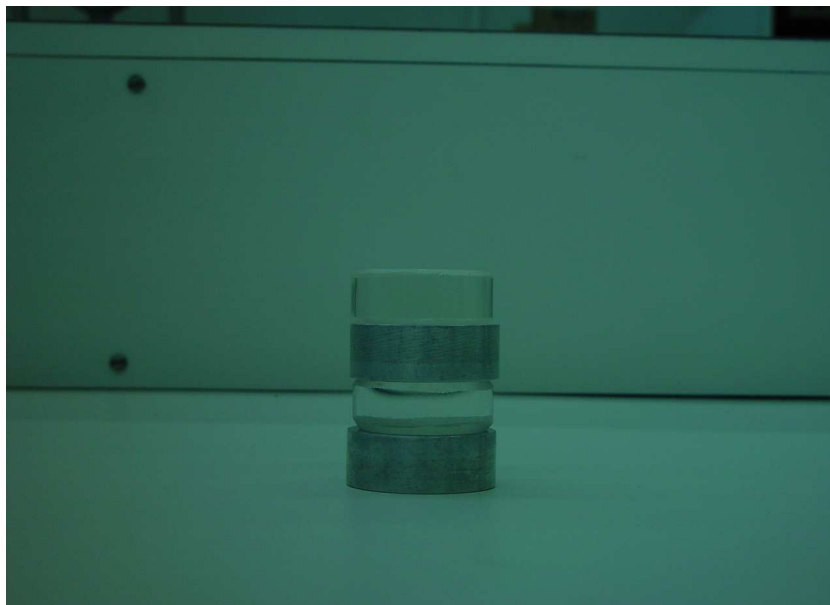


Figura 4.2.3: Modelo de quatro camadas



Figura 4.2.4: Modelo de oito camadas

### 4.3 A Modelagem Numérica

Partindo-se das curvas obtidas no experimento físico e registradas no osciloscópio, foram gerados modelos numéricos representativos para cada amostra apresentada nas figuras (4.2.2) até (4.2.4). Devido à complexidade do modelo físico, optou-se por restringir o modelo numérico da seguinte forma:

- A parte referente ao fluido não foi modelada, pois, além de demandar mais memória, observa-se que a velocidade da borracha (600 m/s) é muito pequena em relação ao vidro (5841 m/s) e ao alumínio (6063 m/s), logo, o tempo de propagação na borracha é grande o suficiente para que qualquer onda que se propague neste material e daí para o fluido, ao voltar para o corpo da amostra chegue no receptor em um tempo muito maior do que o da onda direta.
- Limitou-se o modelo ao espaço físico entre os dois cristais. A modelagem do material piezoelétrico, envolvendo equações de Maxwell, estaria fora do escopo do presente trabalho.
- A utilização de coordenadas cilíndricas em um modelo com simetria axial (axi-simétrico) permitiu uma economia considerável de memória e tempo, pois o modelo se restrin-

giu à area retangular limitada pelo raio, pelo eixo e pela extremidade direita (ver figura (3.3.2) na página 27), considerando  $\theta = cte$ .

A seguir é fornecida uma tabela com alguns parâmetros utilizados na modelagem numérica. Onde  $Nr$  e  $Nz$  representam o número de pontos do grid na direção  $r$  e  $z$

	2 cam.	4 cam.	8 cam.	Alumínio
Nr	86	86	83	87
Nz	339	350	355	333
		$\Delta t = 3,958^{-9}s$	Passos em t= 37894	$\Delta r = \Delta z = 2,410^{-4}m$

Figura 4.3.1: Parâmetros da modelagem

#### 4.3.1 Premissas básicas utilizadas na modelagem

Serão descritas a seguir algumas premissas e simplificações utilizadas na modelagem numérica. Estas premissas se referem à fonte, receptor e interfaces do modelo. Como a modelagem do experimento de propagação de ondas em amostras de rocha, utilizando frequências ultrassônicas, do Laboratório de Física de Rochas, ainda não havia sido realizada, surgiram vários problemas que tornaram necessárias algumas considerações. Cada uma delas será discutida nos itens seguintes.

##### Fonte

A aplicação da fonte se divide em duas partes, a primeira referente à forma como a fonte é aplicada, ou seja, se a fonte é pontual ou não. A outra parte se refere à curva utilizada como fonte, se senóide, gaussiana ou outra curva qualquer.

- Forma de aplicação

Como pode ser visto na figura 4.1.5 na página 33 e nas figuras das páginas 36 e 38, o cristal, assim como todas as amostras utilizadas no experimento, possui simetria cilíndrica. Observando-se, ainda, a figura (4.1.5) ver-se-á que apesar do cristal ser um anel, a excitação do mesmo não possui simetria cilíndrica. Na figura (4.3.2) é mostrado um esquema reproduzindo a figura (4.1.5). Como a polarização do cristal ocorre a uma velocidade muito maior do que a das ondas mecânicas, considerou-se que, para os objetivos do presente trabalho, o cristal é excitado de maneira uniforme ao

longo de todo o anel, ou seja, a amostra percebe a excitação ao longo de todo o cristal ao mesmo tempo. Devido a esta premissa, a fonte foi aplicada em toda a extensão do cristal, ou seja, na modelagem a fonte foi aplicada na forma de uma onda plana *restrita*. Na figura (4.3.1) vê-se no detalhe a forma de aplicação da fonte.

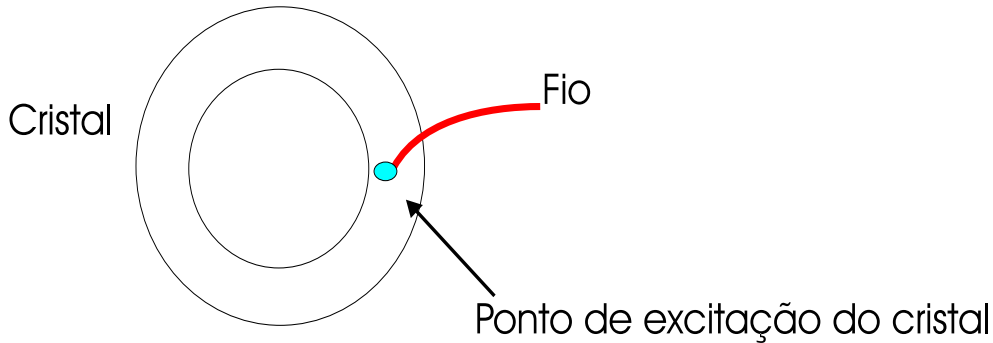


Figura 4.3.2: Esquema de excitação do cristal

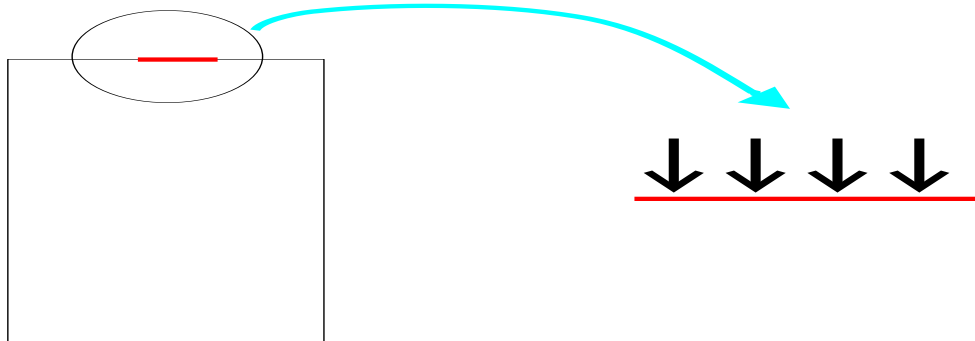


Figura 4.3.3: Forma de aplicação da fonte no semi-plano utilizado na modelagem

- A Forma de onda

Um dos grandes problemas enfrentados durante o decorrer deste trabalho foi, sem dúvida alguma, a escolha da forma de onda a ser utilizada como fonte. Como se desejava reproduzir o experimento, ou seja, obter resultados em termos de forma de onda, o mais próximo possível do original, era fundamental que cada detalhe fosse também o mais próximo do real possível. Quando da escolha da forma de onda a ser utilizada como fonte, a primeira curva que vem à mente é uma fonte largamente utilizada em modelagem sísmica, que é a segunda derivada da gaussiana, ver (Cunha (1997)). Esta curva,

porém, não produziu resultados satisfatórios. Optou-se então por tentar determinar a forma da onda que seria emitida pelo cristal piezoelétrico para o interior da amostra. O gerador de função emite um sinal elétrico na forma de um pulso senoidal, este pulso excita o cristal emissor que se contrai e dilata, gerando uma onda mecânica. Tentou-se colocar os cristais (receptor e emissor) em contato, afim de que se pudesse registrar o sinal emitido o mais próximo possível do real. Porém, as tentativas foram infrutíferas, devido principalmente à dificuldade de se conseguir um acoplamento satisfatório entre os cristais. A pressão necessária só seria possível dentro dos vasos de pressão. Como não se conhecia a resposta impulsiva do cristal e devido a limitações físicas para tal determinação, tentou-se utilizar o próprio pulso senoidal como fonte, porém o resultado novamente não foi satisfatório. Tentou-se um trem de ondas senoidal, também com resultados ruins. A última tentativa que se fez, e que forneceu melhores resultados, foi a utilização da curva do *tempo do sistema*<sup>2</sup> como fonte. Esta curva é obtida montando-se o sistema original sem amostra (ver figura (4.1.3) na página 32). O uso do termo *tempo do sistema* é devido à utilização desta curva para determinação do tempo gasto pela onda para percorrer todo o sistema físico e elétrico nos ensaios rotineiros do Laboratório de Física de Rochas do CENPES, na ausência da amostra. O valor de tempo lido na primeira quebra dessa curva é subtraído do tempo gasto pela onda para percorrer o sistema quando da presença de uma amostra de rocha. A velocidade da onda na rocha é calculada então da seguinte maneira:

$$V_{rocha} = \frac{\Delta z_{rocha}}{T_{total} - T_{sist}}$$

O termo  $T_{total} - T_{sist}$  é o tempo gasto pela onda apenas na amostra e  $\Delta z$  é o comprimento da amostra ao longo do eixo  $z$ . O sinal emitido pelo cristal atravessa o aço da câmara chegando no receptor tendo se propagado apenas no aço. Considerando que o aço é um material muito pouco atenuativo, a curva mais próxima da curva emitida pelo cristal seria a curva do *tempo do sistema*, ou resposta *impulsiva* do sistema. Como o registro desta curva é truncado no equipamento, algo que não ocorre no experimento real, a utilização de um pulso truncado bruscamente não seria a mais correta. Aplicou-se uma

---

<sup>2</sup>A forma de onda utilizada poderia ser chamada, caso o sinal emitido pelo *gerador de função* fosse um *spike*, de resposta impulsiva do sistema. Adotar-se-á esta nomenclatura de modo a tornar mais fácil a compreensão do tipo de curva utilizado, sabendo-se, contudo, que no caso da utilização de um *spike* a curva pudesse ser diferente da adotada na modelagem.

função de atenuação exponencial no sinal a partir do 4<sup>o</sup> pico positivo, onde então a amplitude da onda foi sendo atenuada até chegar a um valor próximo de zero. A curva original registrada no equipamento e a utilizada como fonte são apresentadas nas figuras (4.3.4) e (4.3.5).

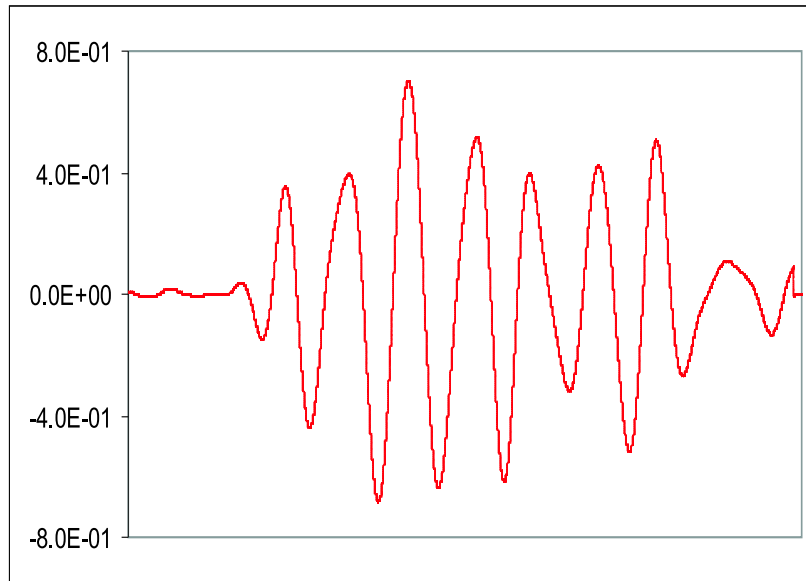


Figura 4.3.4: Resposta "impulsiva" do sistema, registrada no equipamento

## Receptor

Após a emissão e propagação da onda mecânica na amostra, essa onda atinge novamente um cristal piezoelétrico, igual ao emissor. O cristal é então excitado pela onda e gera uma corrente elétrica que é recebida pelo fio condutor e levada ao amplificador e mostrada no osciloscópio. Novamente, apesar do cristal receptor ser simétrico em relação ao eixo, a captação do sinal para sua transmissão não possui simetria. O esquema de recepção é idêntico ao da figura (4.1.5). Portanto, outro problema surge, pois em se mantendo a premissa de que a velocidade de polarização do cristal é muito alta e que o cristal se polariza de maneira uniforme, como deve ser interpretada a recepção? Inicialmente se pensou em se registrar o traço central do cristal, ou seja, o sinal captado seria referente ao círculo de raio médio (ver figura (4.3.6)). Analisaram-se também os sinais recebidos nos círculos próximos ao círculo central. Quanto mais para a extremidade do anel do cristal mais diferentes eram os traços registrados sendo que nenhum deles se parecia com o traço real registrado no equipamento.

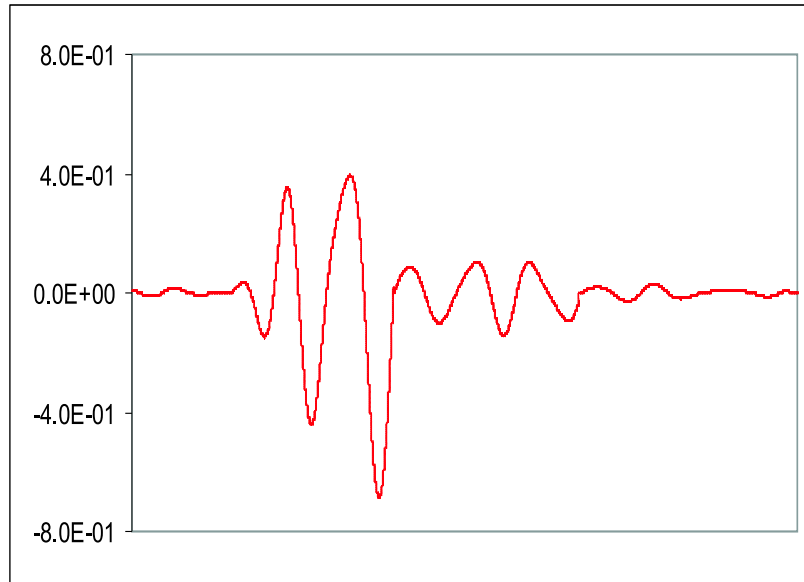


Figura 4.3.5: Curva fonte da modelagem

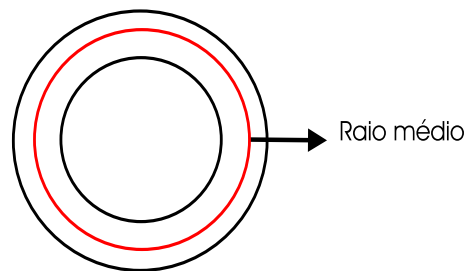


Figura 4.3.6: Esquema mostrando o raio médio do anel do cristal

Buscando um paralelo com o processamento sísmico, optou-se por somar os traços de cada círculo, ou seja o traço final seria então o traço empilhado. Esta opção mostrou-se positiva devido aos resultados que foram obtidos.

### Interfaces

O modelo, como já foi mostrado anteriormente, consiste em uma superposição de discos de vidro e alumínio. De modo a melhorar o acoplamento entre esses discos, foi utilizada uma pasta industrial entre eles. Inicialmente estas interfaces não foram modeladas. Com o objetivo de gerar um sinal sintético mais próximo do original, optou-se por modelar de alguma forma estas interfaces. Como os fluidos têm o módulo de cisalhamento ( $G$ ) nulo

e a espessura da interface é muito próxima de zero, decidiu-se utilizar o espaço entre uma célula e outra ( $2,410^{-4}\text{m}$ ) como esta interface. Optou-se por utilizar um valor de  $G$  para estes pontos de aproximadamente  $10^{-6}G_s$ , onde  $G_s$  corresponde ao módulo de cisalhamento da camada superior à interface(ver figura (4.3.7)). Isto quer dizer que nas interfaces onde o disco superior era de alumínio, onde  $G_s = G_A$ , a interface possuía um  $G$  de aproximadamente  $10^{-6}G_A$ , ou seja:

$$G_i = 10^{-6}G_A.$$

Este valor de  $G$  foi aplicado em duas linhas de nós paralelas ao plano  $z$ .

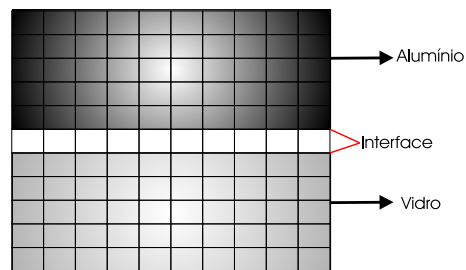


Figura 4.3.7: Interface com  $G_i = 10^{-6}G_A$

## 4.4 Considerações finais

Foram apresentados neste capítulo o modelo físico a ser reproduzido através da geração de um modelo numérico utilizando o Método das Diferenças Finitas para a solução da equação da onda. Foram apresentadas também as considerações admitidas e as simplificações realizadas de maneira a possibilitar a modelagem numérica. Detalhes a respeito de fonte e receptores, assim como o tratamento nas interfaces e bordas foram abordados. No próximo capítulo, serão apresentadas as curvas geradas no modelo numérico em comparação com aquelas do experimento e também uma análise dos resultados obtidos e os próximos passos no desenvolvimento deste estudo.

## Capítulo 5

# Apresentação dos Resultados

Os parâmetros da modelagem e a formulação utilizada, assim como a análise das premissas admitidas para a confecção do modelo numérico foram descritos nos capítulos 3 e 4. Serão apresentados neste capítulo os resultados obtidos na modelagem numérica utilizando o Método das Diferenças Finitas para solução da equação da onda e os mesmos serão comparados com os originais provenientes do experimento físico.

### 5.1 Registro das formas de onda

O objetivo da modelagem numérica foi produzir um código que pudesse reproduzir as formas de onda do experimento físico, ou seja, um programa que gerasse como resultado curvas semelhantes àquelas obtidas no modelo real. A ênfase foi dada na forma da onda, já que a amplitude dos sinais variou devido ao ganho aplicado ter sido diferente. A dificuldade, no experimento físico, de se garantir que o acoplamento se mantenha o mesmo e os cristais estejam exatamente na mesma posição para todos os ensaios, fez com que variações ocorressem no registro das curvas. Durante o ensaio as câmaras apresentam variações na forma do sinal dependendo da posição em que os *caps* de aço (ver figura (4.1.4)) são colocados. Interferências são comuns e apresentam um caráter quase aleatório, sendo que a obtenção de um sinal limpo nem sempre é simples. Devido a essas interferências, optou-se por registrar os sinais somente quando o ruído eletrônico atingisse níveis satisfatórios. Essa análise foi feita visualmente no osciloscópio. O registro do sinal com menor índice de ruído foi uma tentativa de facilitar a modelagem, pois o modelo numérico não englobou a parte elétrica. A inclusão da parte elétrica na modelagem tornaria o problema muito mais complexo, devido ao acoplamento das

equações de eletromagnetismo com a equação da onda. A análise das condições de contorno seria também por demais complicada e envolveria análises que extrapolariam o objetivo deste trabalho.

## 5.2 Modelo homogêneo

O primeiro experimento a ser analisado foi realizado com o cilindro de alumínio (figura (4.2.1), página 36). As dimensões da amostra e do modelo numérico representativo deste experimento são mostradas na tabela (5.2). Na figura (5.2) são apresentadas as curvas

Comp.(cm)	Al	Diferença perc.(%)
Real	3,44	1,2
Mod.	3,48	

Tabela 5.2.1: Dimensões do modelo real e numérico para a amostra de alumínio

do experimento e a gerada pela modelagem numérica. As curvas são semelhantes, sendo que uma interferência no segundo pico não é percebida na curva modelada, já a interferência no terceiro e quarto picos é semelhante àquela do experimento.

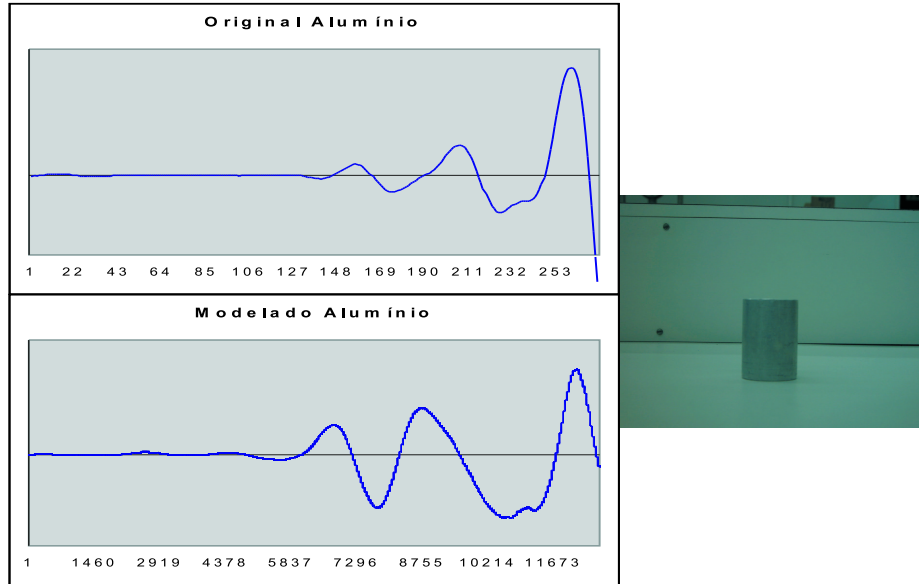


Figura 5.2.1: Curvas modelada e original para a amostra de alumínio

O tempo relativo às primeiras quebras são diferentes pois na modelagem algumas simplificações foram efetuadas, como por exemplo a não colocação da parte elétrica. Tais simplificações foram discutidas no capítulo (4). Na comparação entre os valores de velocidade obtidos no experimento e na modelagem no caso da amostra de alumínio, a onda foi propagada apenas na amostra, não sendo utilizados os *caps* de aço, como foi feito na geração dos gráficos da figura (5.2).

### 5.3 Modelo 2 camadas

Este modelo foi composto por dois discos, sendo o superior de vidro e o inferior de alumínio. Nas interfaces foi aplicada uma pasta especial para melhorar o acoplamento do modelo. As dimensões do modelo são fornecidas na tabela (5.3) a seguir<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>V1=Disco de Vidro #1, Al1=Disco de Alumínio #1

Comp.(cm)	V1	Al1	Total	Diferença perc.(%)
Real	1,750	1,815	3,565	0,31
Mod.	1,752	1,824	3,576	

Tabela 5.3.1: Dimensões do modelo real e numérico para a amostra com duas camadas

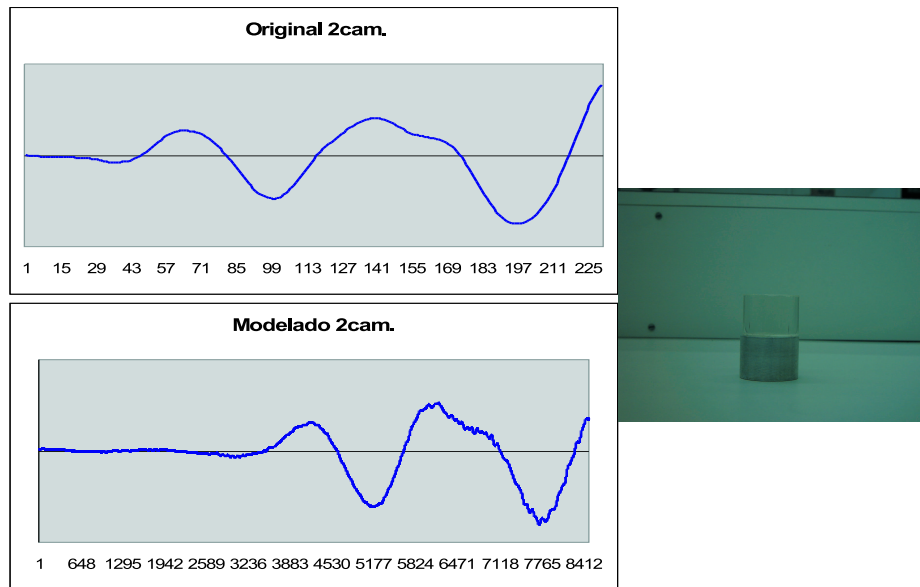


Figura 5.3.1: Curvas modelada e original para o modelo de 2 camadas

Nas figuras (5.3.1) e (5.3.2) são apresentadas as curvas original e modelada com uma foto do modelo real e o modelo numérico construído.

Pode-se observar que a curva modelada tem um comportamento similar à original. O modelo numérico apresentou um resultado bastante satisfatório para a amostra com dois discos. A interferência entre o segundo e terceiro pico positivo que se apresenta na curva original também pode ser identificada na curva modelada.

## 5.4 Modelo 4 camadas

Este modelo foi composto por 4 discos, sendo dois discos de vidro e dois discos de alumínio intercalados, iniciando-se com o disco de vidro e finalizando com o disco de alumínio. Nas

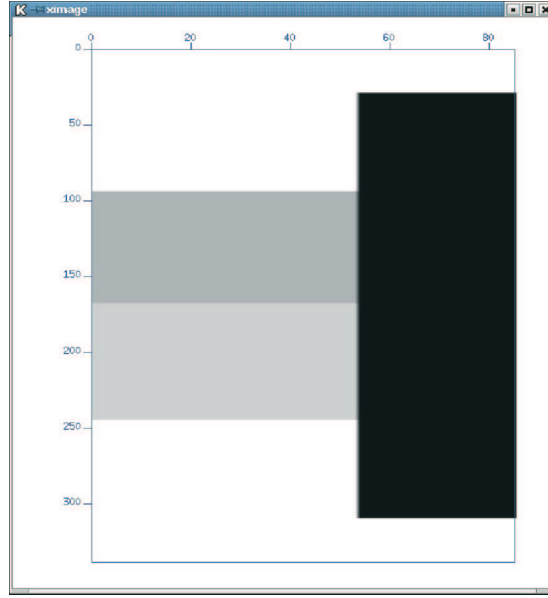


Figura 5.3.2: Modelo representando amostra de 2 camadas

interfaces foi aplicada, também, uma pasta especial para melhorar o acoplamento do modelo. As dimensões do modelo são fornecidas na tabela (5.4.1)<sup>2</sup> a seguir:

Comp.(cm)	V1	V2	Al1	Al2	Total	Diferença perc(%)
Real	0,921	0,886	0,966	0,968	3,741	1,4
Mod.	0,936	0,888	0,984	0,984	3,890	

Tabela 5.4.1: Dimensões do modelo real e numérico para a amostra com quatro camadas.

Na figura (5.4.1) são apresentadas as curvas original e modelada, assim como uma foto do modelo real. Na figura (5.4.2) é mostrado o modelo numérico. Novamente pode-se observar a semelhança entre ambas as curvas. A curva modelada parece reproduzir a curva original de forma bastante consistente nos três primeiros picos positivos, onde foi iniciada a atenuação na curva fonte. De maneira similar ao item anterior, uma interferência, desta vez entre o segundo e terceiro picos positivos, é reproduzida na curva modelada.

<sup>2</sup>V1 = disco de vidro #1, V2 = disco de vidro #2, analogamente para o alumínio.

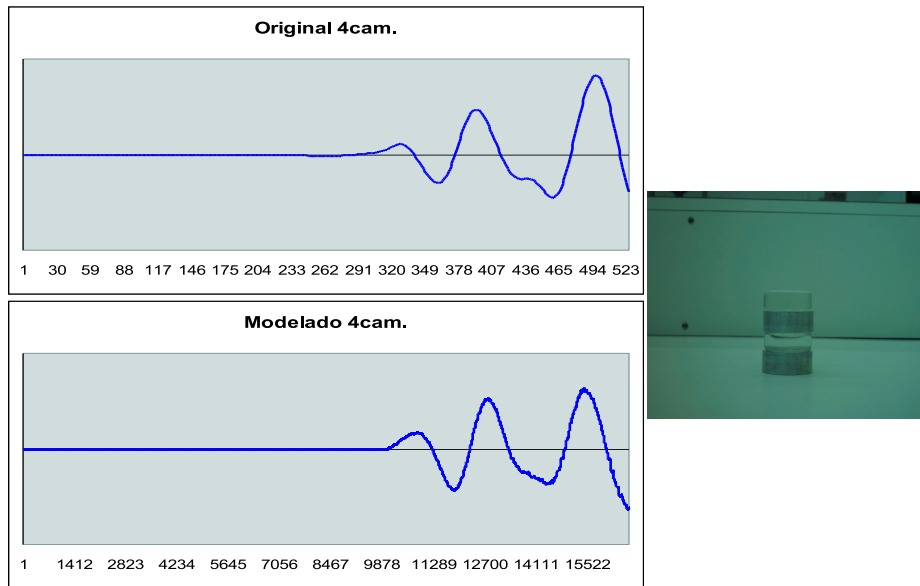


Figura 5.4.1: Curvas modelada e original para o modelo de 4 camadas

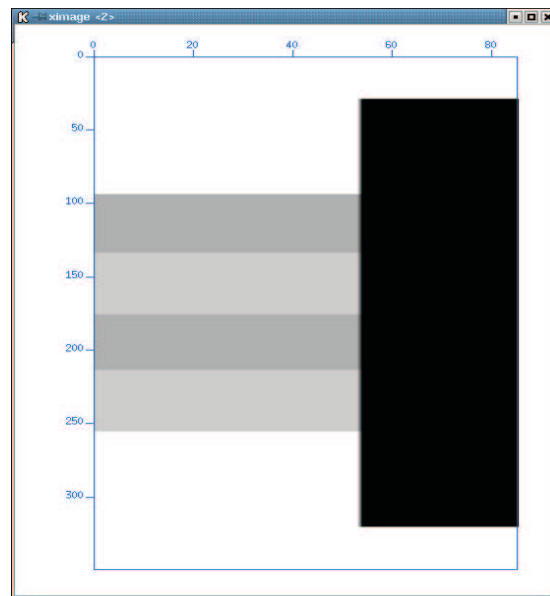


Figura 5.4.2: Modelo numérico para amostra de 4 camadas

## 5.5 Modelo 8 camadas

Este modelo foi composto por 8 discos, sendo quatro discos de vidro e quatro discos de alumínio intercalados, iniciando-se com o disco de vidro e finalizando com o disco de alumínio. Nas interfaces foi aplicada, também, de maneira similar aos dois itens anteriores, uma pasta especial para melhorar o acoplamento entre os discos. As dimensões do modelo são fornecidas na tabela (5.5.1), a seguir<sup>3</sup>:

Comp.(cm)	V1	V2	V3	V4	A11	A12	A13	A14	Total	Dif. perc.(%)
Real	0,456	0,452	0,455	0,455	0,488	0,494	0,504	0,480	3,784	0,85
Mod	0,456	0,456	0,456	0,456	0,504	0,504	0,504	0,480	3,816	

Tabela 5.5.1: Dimensões do modelo real e numérico para a amostra com 8 camadas.

---

<sup>3</sup>V1 = disco de vidro #1, a nomenclatura segue o mesmo padrão das outras amostras

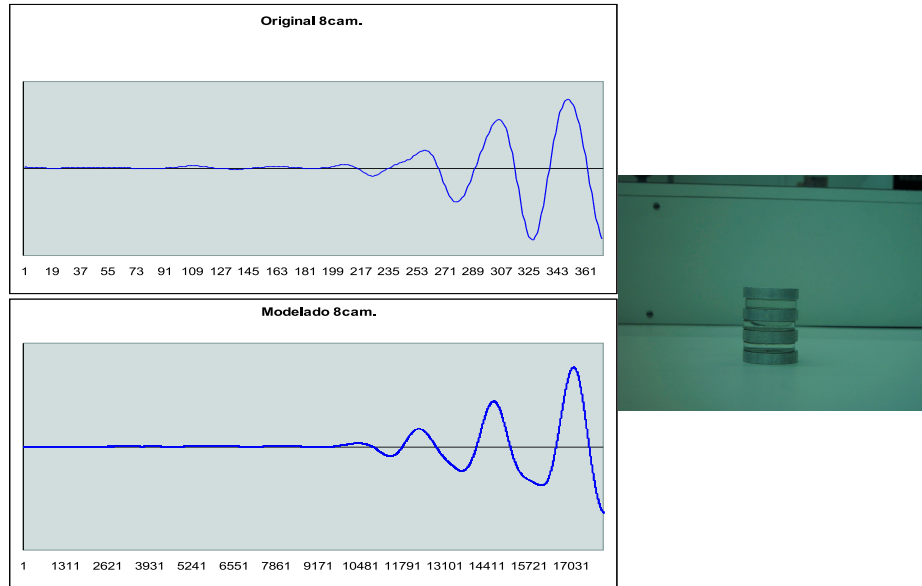


Figura 5.5.1: Curvas modelada e original para o modelo de 8 camadas

Nas figuras (5.5.1) e (5.5.2) são apresentadas as curvas original e modelada com uma foto do modelo real e o modelo numérico construído. A semelhança entre as curvas também é bastante grande, repetindo o desempenho obtido para os dois modelos anteriores. Pode-se observar que a diferença entre as dimensões do experimento e do modelo numérico permaneceu por volta de 1%. O diâmetro dos discos foi considerado constante e igual a 1 polegada, ou 2,54 cm.

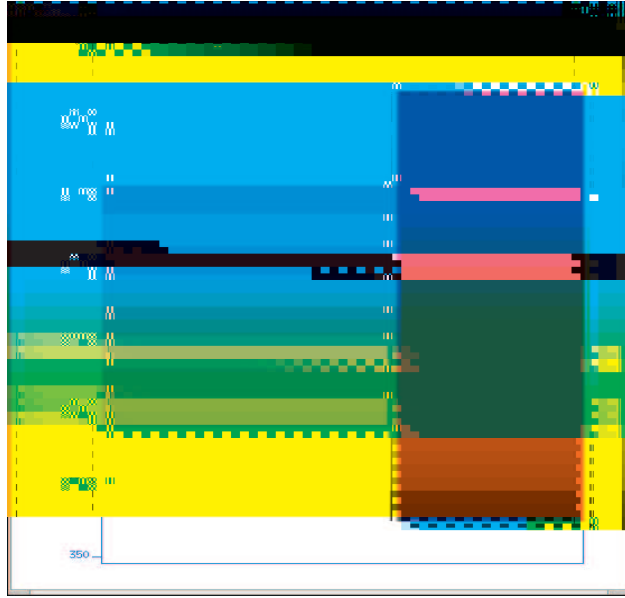


Figura 5.5.2: Modelo numérico para amostra de 8 camadas

## 5.6 Análise de um modelo mais complexo

No gráfico da figura (5.6.1) estão plotadas as curvas geradas na modelagem numérica para o caso homogêneo (alumínio) e para os casos de 4 e um modelo de 32 camadas. Pretende-se com esta comparação analisar o comportamento das curvas com o incremento do número de camadas. Foram colocadas apenas estas curvas de modo a que o gráfico não ficasse sobrecarregado. Pode-se observar que:

- O tempo de chegada das ondas é diretamente proporcional ao número de camadas, ou seja, quanto maior o número de camadas maior atraso é observado no pulso
- A amplitude do primeiro pico parece decair com o aumento do número de camadas

Uma das tentativas de se tentar reproduzir matematicamente o efeito representado na figura (5.6.1) pode ser feita utilizando o conceito de *meio efetivo*, conceito discutido no apêndice E. Ao se tentar determinar, teoricamente, os módulos elásticos efetivos de uma mistura de grãos e poros, geralmente é necessário definir a fração volumétrica das várias fases, os respectivos módulos elásticos e ainda detalhes geométricos que representem o caso real. Se apenas as frações volumétricas são informadas, o melhor que se pode fazer é definir limites máximos

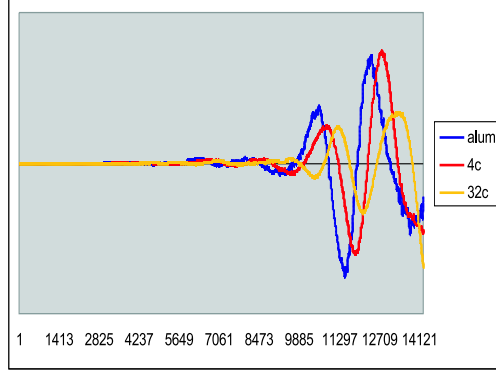


Figura 5.6.1: Curvas modeladas

e mínimos para tal mistura (Mavko *et al.* (1996)). Os limites de Hashin-Shtrikman (Hashin e Shtrikman (1963)), Voigt-Reuss-Hill (Vasquez *et al.* (1996)) são bastante conhecidos na literatura. No caso do experimento analisado, um modelo apropriado para estimativas seria a conhecida Média de Backus (Mavko *et al.* (1996)). Esta formulação tenta estimar os valores de velocidade e módulos elásticos de um meio estratificado, onde as camadas possuem uma espessura pequena em relação ao comprimento de onda do pulso. No caso dos modelos analisados, utilizando a Média de Backus, o tempo de percurso seria definido da seguinte maneira:

$$T_{bak} = \frac{L}{VP_{bak}}, \quad (5.6.1)$$

onde,

$$VP_{bak} = \sqrt{\frac{C}{\rho}} \quad (5.6.2)$$

e

$$C = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}. \quad (5.6.3)$$

Sendo que  $VP_{bak}$  é a *velocidade* da onda P vertical,  $L$ , o *comprimento* da amostra percorrida pela onda,  $\lambda$  e  $\mu$  as *constantes da Lamé* e  $\rho$ , a *densidade*. Onde o símbolo “ $\langle \rangle$ ” significa a média dos elementos ponderada pela sua fração volumétrica. Imaginando-se um modelo com dois constituintes  $a$  e  $b$ , a equação (5.6.3) poderia ser escrita da seguinte maneira:

$$C = f_a \left( \frac{1}{\lambda_a + 2\mu_a} \right)^{-1} + f_b \left( \frac{1}{\lambda_b + 2\mu_b} \right)^{-1}, \quad (5.6.4)$$

onde  $f_a$  e  $f_b$  são as frações volumétricas de cada constituinte do modelo.

Devido à dificuldade de se determinar precisamente a espessura  $e$ , por conseguinte, a fração volumétrica das interfaces no volume total da amostra do experimento, serão feitas algumas aproximações e considerações de modo a se poder realizar uma análise mais qualitativa do experimento. Então, utilizando-se as equações de (5.6.1) a (5.6.3) para modelar o experimento da figura (5.3.1), na página 49, são feitas as seguintes suposições:

- A espessura das interfaces entre os discos como sendo muito próxima da espessura de uma folha de papel
- Seguindo-se na mesma linha do item anterior, estima-se a espessura aproximada de todo o modelo como sendo o equivalente a aproximadamente 1500 folhas de papel
- Sejam as espessuras dos cilindros de alumínio e vidro iguais<sup>4</sup>
- Seja a espessura modelada de cada um dos *caps* de aço como sendo aproximadamente iguais aos cilindros de alumínio e vidro

Baseado nas considerações anteriores, pode-se descrever o volume do modelo como:

$$V_{total} = V_{al} + V_{vid} + 2V_{aco} + V_{interf}, \quad (5.6.5)$$

como  $V_{al} = V_{vid} = 0.5 * V_{aco} = V$ , pode-se escrever:

$$V_{total} = 3V + V_{interf}, \quad (5.6.6)$$

sendo então que  $V_{interf} \approx \frac{3}{1500}V_{total}$ , finalmente,

$$3V = \text{Volume dos cilindros e caps} = 0.998V_{total}, \quad (5.6.7)$$

restando para as interfaces o valor de  $0,002V_{total}$ . Para o caso de um modelo com  $n$  camadas pode-se escrever:

$$V_{total} = (3 + (n/1500))V. \quad (5.6.8)$$

Então escrevendo a equação (5.6.3) para o caso de um modelo de duas camadas tem-se:

$$C = f_{al} \left( \frac{1}{\lambda_{al} + 2\mu_{al}} \right)^{-1} + f_{vid} \left( \frac{1}{\lambda_{vid} + 2\mu_{vid}} \right)^{-1} + f_{interf} \left( \frac{1}{\lambda_{interf} + 2\mu_{interf}} \right)^{-1}, \quad (5.6.9)$$

onde se observa que além dos valores de  $f_{interf}$  serem muito pequenos, os valores dos módulos elásticos também são, logo o terceiro termo do lado direito da equação é muito pequeno em

---

<sup>4</sup>Considerando-se o modelo de duas camadas pressupõe-se a existência de 3 interfaces

relação aos outros dois termos. Logo é necessário um número muito grande camadas de modo a que o papel das interfaces nas velocidades seja importante, o que não é o caso de nenhum dos modelos aqui analisados. É importante observar que a influência, na Média de Backus, das interfaces na determinação dos módulos elásticos é muito pequena, mesmo para uma quantidade de camadas da ordem de, por exemplo, 32, como foi o caso modelado. Representando neste caso menos de 1% do volume total. No caso de se considerar apenas os discos, desprezando-se as interfaces, a Média de Backus apresenta valores bastante bons para estimativas desta natureza. Voltando à figura (5.6.1) e em face das observações feitas a respeito das curvas da figura, vê-se que a Média de Backus não conseguiria justificar o aumento no tempo, para o caso de 32 camadas. Neste caso talvez uma média simples obtivesse um resultado melhor. Uma tentativa de se explicar tal fenômeno, ou seja, a atenuação e a absorção das altas frequências devido ao multi-acamamento foi apresentada por O'Doherty e Anstey (1971). Segundo este conceito, intercalações de camadas muito finas, com baixo contraste de impedância, agiriam como um filtro corta-altas, devido à interferência de múltiplas de curto período. Estas intercalações estariam numa escala sub-sísmica, porém o seu efeito se faria presente devido ao grande número de intercalações. O efeito desta *filtragem estratigráfica* seria similar ao efeito causado pela absorção intrínseca das rochas durante a passagem da onda. O trabalho de O'Doherty e Anstey (1971), apesar de não utilizar o termo *filtragem estratigráfica*, discute de maneira bastante palatável o assunto. Uma discussão mais matemática sobre o tema pode ser obtida em Shapiro e Hubral (1999) e Banik *et al.* (1985). De modo a compreender melhor o conceito e sua importância na deformação do sinal, serão apresentados no apêndice (F) alguns fatores que contribuem para a formação do pulso sísmico registrado.

## 5.7 Considerações finais

Os curvas apresentadas na figura (5.6.1) mostram o efeito do acamamento na forma do pulso. Observa-se efeito similar ao verificado na propagação de ondas num meio real. É importante destacar que modelos para simular o efeito da absorção já foram propostos na literatura, ver Trorey (1962), porém o código gerado neste trabalho não utilizou, propositalmente, qualquer formulação para gerar tal efeito. Portanto o resultado obtido, gerado através de um código calibrado com experimento real, indica um possível efeito do conhecido *filtro estratigráfico*. Tais resultados deverão ser confirmados por trabalhos futuros em modelos

mais complexos com um número de camadas maior. No próximo capítulo serão apresentadas as análises finais do trabalho e os desdobramentos para os futuros estudos.

## Capítulo 6

# Conclusões e Desdobramentos

A modelagem numérica se inicia na escolha do conjunto de equações que melhor parecem representar o fenômeno físico. Após isso, definem-se as premissas básicas iniciais, as quais podem ser modificadas ao longo do trabalho. A partir daí, o desenvolvimento e depuração do modelo vai determinando o curso da pesquisa. A modelagem não é apenas uma operação matemática pura e simples, mas sim um processo de aprendizado muito valioso sobre o modelo físico. Elementos que à primeira vista parecem ser relativamente simples, se revelam por vezes bastante complicados. É exatamente neste ponto em que o problema se revela mais desafiador. A tarefa de analisar as diversas combinações de hipóteses, variáveis e condições de contorno passíveis de produzir o resultado esperado é algo que demanda bastante tempo, principalmente estando-se diante de um problema ainda não modelado. Selecionar de cada conjunto o grupo que possa fornecer o melhor resultado é uma tarefa árdua, porém extremamente valiosa. O resultado final da modelagem vai além da confecção do modelo, pois esta é mais uma das conseqüências de todo o processo. O que se objetiva é entender melhor o processo físico e de que maneira as variáveis interagem, de modo a se poder analisar modelos mais complexos, impossíveis de serem confeccionados em laboratório, porém mais próximos dos modelos encontrados na natureza.

### 6.1 Conclusões

No presente trabalho as hipóteses aventadas produziram um resultado bastante bom em relação ao objetivo, que era o de reproduzir numericamente a forma de onda do ensaio físico para um grupo de amostras compostas por intercalações de discos de vidro e alumínio. Base-

ado nas premissas apresentadas no capítulo (4) juntamente com os resultados do capítulo (5), pode-se afirmar quanto ao conjunto de hipóteses, variáveis e condições de contorno adotado, que:

- A adoção de um código utilizando a formulação axi-simétrica, permitiu uma modelagem 3-D de fato, utilizando metade dos pontos necessários para uma modelagem 2-D em coordenadas cartesianas;
- O método das Diferenças Finitas utilizando malha intercalada se mostrou bastante rápido e preciso em um modelo onde as diferenças entre as propriedades mecânicas dos componentes do modelo (por ex.: borracha X aço) eram bastante significativas;
- A velocidade de polarização do cristal é muito maior do que a velocidade de propagação da onda na amostra e, portanto, pode-se considerar que a onda emitida pelo cristal possui simetria cilíndrica;
- A atenuação sofrida pela onda emitida pelo cristal ao passar por todo o o corpo do equipamento, na ausência da amostra, é desprezível. Portanto pode-se aplicar a curva de *resposta impulsiva* do sistema como forma de onda da fonte para a modelagem;
- A aplicação da fonte como uma onda plana restrita (ver figura (4.3.1)) corresponde ao que de fato ocorre no experimento;
- A atenuação aplicada na curva de *tempo do sistema*, ou como foi dito anteriormente, curva de *resposta impulsiva* do sistema, não causou maiores danos à modelagem;
- A hipótese, segundo a qual o traço de saída é igual ao empilhamento horizontal de todos os pontos do cristal disposto num mesmo segmento de raio, aliada à premissa do primeiro item, se mostrou correta;
- A representação do fluido na interface como uma lâmina cujo módulo cisalhante é muito menor do que os módulos dos discos de alumínio e vidro foi bastante efetiva, visto que a representação de uma camada tão delgada com contrastes tão fortes, certamente poderia causar problemas de instabilidade na modelagem;
- A reprodução do sinal adquirido no osciloscópio pela modelagem, onde interferências elétricas, *cross-feed* e problemas de acoplamento não foram modelados, indica que o

equipamento presente no laboratório de Física de Rochas do CENPES é capaz de produzir um sinal limpo e claro, o que é uma garantia da qualidade, tanto do conjunto, quanto dos dados lá gerados;

- Apesar do código utilizado na modelagem não contemplar o efeito de absorção, o resultado do aumento do número de camadas nas amostras apresentou resultado similar. Isto confirma que o efeito do *multi-acamamento* se assemelha bastante ao causado pela absorção. Tais resultados poderão se confirmar quando da utilização de modelos mais complexos, onde se pretende tentar avaliar, ou quantificar, a participação de cada um dos fenômenos na deformação do pulso.

## 6.2 Desdobramentos

O próximo passo neste trabalho será a modelagem de ensaios mais complexos que, por limitações físicas, não podem ser realizados no laboratório. Pretende-se, também, incluir formulações matemáticas simulando o efeito da absorção de modo a compará-los com o efeito causado pelo incremento do número de camadas no modelo, o chamado *filtro estratigráfico*. O objetivo mais audacioso será quantificar o papel de cada um desses elementos na deformação percebida no sinal sísmico e tentar responder à segunda pergunta formulada na introdução.

# Referências Bibliográficas

- Anstey, N.A., 1960. Attacking the problems of the synthetic seismogram. *Geophysical Prospecting*, **8**, p. 242–259.
- Banik, N. C., Lerche, I., e Shuey, R. T., 1985. Stratigraphic filtering, Part I: Derivation of O’Doherty-Anstey formula. *Geophysics*, **50**, p. 2768–2774.
- Brigham, E. O., 1988. *The Fast Fourier Transform and Its Application*. Prentice-Hall International Inc, Englewood Cliffs, NJ 07632, EUA.
- Chou, P. C. e Pagano, N. J., 1992. *Elasticity, Tensor, Dyadic and Engineering Approaches*. Dover Publications, Inc., Nova York, EUA.
- Cunha, C. A., 1992. *Elastic Modeling and Migration in Earth Models*. Tese de Doutorado, Universidade de Stanford, Stanford, CA, EUA.
- Cunha, C. A., Faria, E. L., e Gomes, A. L. O., 1995. *Curso de Modelagem Sísmica*. Apostila de curso interno - PETROBRAS/SEREC.
- Cunha, P. E. M., 1997. *Estratégias Eficientes para Migração Reversa no tempo Pre-Empilhamento 3-D em profundidade pelo Método das Diferenças Finitas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Salvador, Salvador, Bahia, Brasil.
- Graves, R. W., 1996. Simulating seismic wave propagation in 3d elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **86**(4), p. 1091–1106.
- Guidorizzi, H. L., 2001. *Um Curso de Cálculo*, volume 1, 5ª Edição. LTC Editora, Rio de Janeiro, Brasil.
- Hashin, Z. e Shtrikman, S., 1963. A variational approach to the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, p. 127–140.

- Hildebrand, F. B., 1965. *Methods of Applied Mathematics*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., EUA.
- Lai, W. M., Rubin, D., e Krempf, E., 1996. *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth-Heinemann Ltd, Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP.
- Levander, A. R., 1988. Fourth-order Finite-Difference P-SV seismograms. *Geophysics*, **53**, p. 1425–1436.
- Mavko, G., Mukerji, R., e Dvorkin, J., 1996. *Rock Physics Handbook*. Rock Physics Laboratory, Stanford University.
- O'Doherty, R. F. e Anstey, N. A., 1971. Reflections on amplitudes. *Geophysical Prospecting*, **19**, p. 430–458.
- Pênsnik, I., 1994. *Introduction to Seismic Methods - Notas de aula*. PPPG / UFBA., Salvador, Bahia - Brasil.
- Ritchmyer, R. D. e Morton, K. W., 1967. *Difference Methods for Initial-Valued Problems*. Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, Nova York, EUA.
- Rosa, A. L. R., 1999. *Análise do Sinal Sísmico*. Apostila de curso interno - PETROBRAS/SEREC.
- Shapiro, S. A. e Hubral, P., editores, 1999. *Elastic Waves in Random Media*. No. 80 em Lectures Notes in Earth Sciences. Springer-Verlag, Berlim - Alemanha.
- Smith, G. D., 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite difference Methods*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Clarendon Press - Oxford.
- Trorey, A. W., 1962. Theoretical seismogram with frequency and depth dependent absorption. *Geophysics*, **27**, p. 766–785.
- Vasquez, G. F., Dillon, L.D., Rosa, A.L.R., Pereira, S.C., Alves, E.S.L., Soares, J.A., e Bastos, A. da C., 1996. Sistema de modelagem petrofísica: Conceitos e utilização- relatório final de projeto 01.05.39. Relatório Técnico, Petrobrás/Cenpes.
- Villaça, S. F. e Garcia, L. F. T., 2000. *Introdução à Teoria da Elasticidade*. COPPE/UFRJ.

Virieux, J., 1984. SH wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-stress Finite-difference method. *Geophysics*, **49**, p. 1933–1937.

Virieux, J., 1986. P-SV wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-stress Finite-difference method. *Geophysics*, **51**, p. 889–901.

## Apêndice A

# Conceitos de Elasticidade

Um corpo, sob ação de uma força externa, pode sofrer deformação, rotação ou translação. Devido ao fato de estarmos analisando o fenômeno de propagação de ondas nos ateremos ao primeiro efeito, a deformação. Entende-se por deformação o processo no qual as distâncias entre pontos individuais do corpo se modificam. Estas deformações podem ser definitivas, ou seja, ao cessar o esforço o corpo não retorna ao seu estado original, parciais ou temporárias. No caso onde as deformações são reversíveis (temporárias), a ação de uma força externa causa uma deformação, a qual se desfaz após a força ter cessado. Esta deformação, inicialmente numa vizinhança do local de aplicação, pode se deslocar para pontos mais afastados. Entendemos então como propagação de ondas o fenômeno de deslocamento de tais deformações. A velocidade com que esta deformação, ou onda, se propaga através dos corpos depende diretamente do tipo de material que compõe o corpo, ou seja, das suas constantes elásticas. Serão considerados neste trabalho apenas os corpos perfeitamente elásticos, que são aqueles se deformam e após a força ter cessado, retornam ao seu estado original. O meio utilizado na modelagem elástica será considerado isotrópico e heterogêneo. Neste capítulo discutiremos alguns conceitos utilizados em elasticidade que facilitarão o entendimento do fenômeno de propagação de ondas, assim como o modelo matemático que o representa.

### A.1 Tensão

Seja o volume  $V$ , em equilíbrio, mostrado na figura (A.1.1), limitado pela superfície  $S$ . O plano  $P$  secciona o volume passando pelo ponto  $M$ , sendo  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal ao plano  $P$ . Quando uma ou mais forças, são *aplicadas* em um corpo, forças internas são induzidas. O

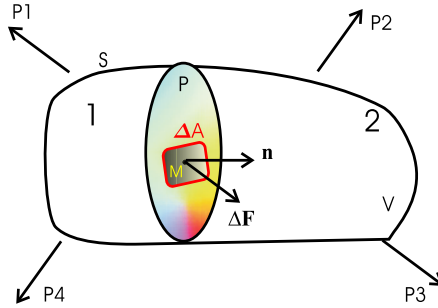


Figura A.1.1: Volume com plano secante mostrando ação de forças

comportamento de tal corpo, ou seja, a mudança nas suas dimensões, ou até mesmo, a sua ruptura, é principalmente o resultado da distribuição interna de forças (Lai *et al.*, 1996). As forças atuantes em um corpo podem ser:

#### *Forças de corpo*

São associadas à massa do corpo e estão distribuídas por todo o volume, não resultando de contato direto. São forças que agem à distância, como por exemplo: força gravitacional, magnética, etc. São especificadas em termos de força por unidade de volume.

#### *Forças de Superfície*

Resultam do contacto físico entre dois corpos, podendo ser representadas através da força exercida por uma, ou mais partículas, agindo de um lado de uma superfície imaginária em um corpo, sobre as partículas presentes no outro lado. Observemos o plano P seccionando o volume  $V$  da figura (A.1.1). Se o corpo está em equilíbrio, a resultante das forças é nula, logo podemos deduzir que no plano P a força exercida pela parte 1 na parte 2 é igual em módulo, porém com sentido contrário, à força que a parte 2 exerce na parte 1. Estas forças de *contato* são um exemplo de forças superficiais. São especificadas em termos de força por unidade de área.

Sendo  $\Delta F$  a resultante das forças atuando num elemento de área  $\Delta A$  na figura (A.1.1), então a força média por unidade de área pode ser escrita como

$$\mathbf{t}_m = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (\text{A.1.1})$$

A tensão num ponto qualquer em  $\Delta A$  é definida como a força por unidade de área quando  $\Delta A$  tende a zero, ou seja:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} t_m = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (\text{A.1.2})$$

Como  $\mathbf{t}$  depende de  $\mathbf{n}$  e do tempo  $t$ , podemos escrever  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, t)$ . É importante observar que a *tensão* num elemento de área  $dA$  é um vetor agindo na direção do vetor de força  $d\mathbf{F}$ , ou seja, a *tensão* num plano qualquer é um vetor e é conhecido como vetor de *tensão* (Chou e Pagano, 1992). A ação de várias *tensões* num determinado plano tem como resultante a soma vetorial das mesmas. Como a *tensão* está sempre relacionada a um plano específico, não seria correto se definir ou se falar em *tensão* em um ponto, mas sim em *estado de tensões* em um ponto. O conhecimento do *estado de tensões* nas vizinhanças de um ponto permite determinar a tensão em qualquer plano arbitrário passando pelo ponto. Veja, por exemplo, o corpo da figura (A.1.2) e dois planos secantes,  $A$  e  $B$ , cortando o corpo. Verifica-se, baseado na definição de *tensão*, que apesar da força  $F$  aplicada nos planos  $A$  e  $B$  ser a mesma, a *tensão* é diferente, pois as áreas nas quais elas atuam são diferentes. Quando se pretende

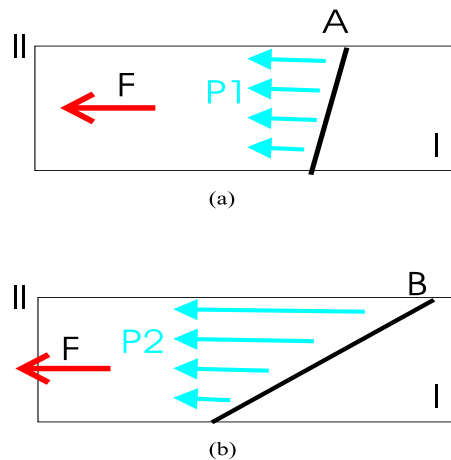


Figura A.1.2: Planos secantes

determinar a *tensão* em qualquer plano arbitrário passando por um ponto  $P$ , observa-se, como foi dito anteriormente, que existe um vetor de tensão associado a cada plano passando por aquele ponto. Como a tensão está sempre associada a um plano e que por um determinado ponto podem passar infinitos planos, constata-se então que podem existir infinitas tensões em um ponto. A conclusão a que se chega é que "a utilização de apenas um vetor para se definir a tensão num ponto não é suficiente. Neste caso, como será mostrado mais à frente,

é necessário conhecer os vetores de tensão em três planos ortogonais passando pelo ponto, para que se possa determinar a tensão em qualquer plano que contenha o referido ponto. Estes três vetores de tensão, que definem o estado de tensões num ponto, compõem o que se costuma chamar de *tensor de tensões*. Portanto apenas no caso de estar-se tratando de um determinado plano, a *tensão* será tratada como vetor, nos outros casos, a *tensão* é descrita por um *tensor* de segunda ordem. No próximo item será discutido resumidamente o conceito de tensor e alguma de suas propriedades.

É comum representar os componentes do vetor de *tensão* por seus componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  ou pelos componentes tangenciais e normais. Na figura (A.1) estão representados os componentes tangenciais e normais. O primeiro subscrito se refere ao plano de ação da *tensão* e o segundo se refere à sua direção, por exemplo o elemento  $\tau_{xy}$  se refere a uma força agindo no plano perpendicular ao eixo  $x$  na direção do eixo  $y$ , esse tipo de *tensão* é conhecido como *tensão* cisalhante. No caso dos termos do tipo  $\tau_{xx}$  é comum utilizar a representação  $\sigma_x$ , representando a *tensão* normal. Portanto a *tensão* cisalhante será sempre representado por  $\tau$  e a normal por  $\sigma$ .

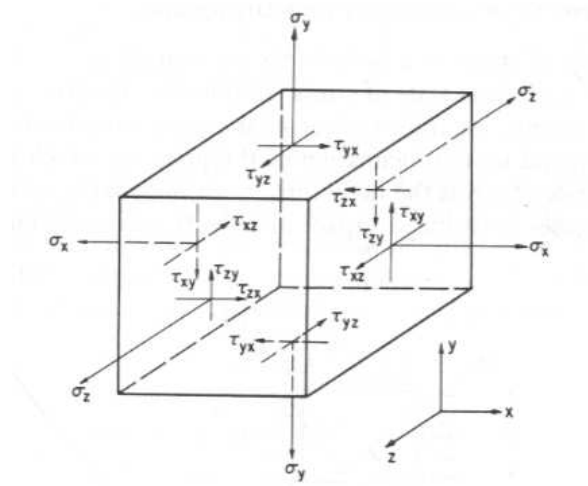


Figura A.1.3: Cubo apresentando componentes tangenciais e normais da tensão.

## A.2 Tensores

Como foi visto anteriormente, um conceito muito útil em elasticidade é o conceito de tensor. Serão apresentadas brevemente neste item algumas propriedades dos tensores que serão úteis no entendimento da formulação correspondente à equação da onda utilizada neste trabalho. É importante frisar que o assunto não se resume ao exposto neste item e que a teoria de tensores é muito mais extensa do que aqui se apresenta.

Sendo  $\mathbf{T}$  um operador que transforma  $\mathbf{a}$  em  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{b}$  em  $\mathbf{d}$ , então podemos escrever que  $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{c}$  e  $\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{d}$ . Se  $\mathbf{T}$  possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d} \\ \mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) &= \alpha\mathbf{T}\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c},\end{aligned}\tag{A.2.1}$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores arbitrários e  $\alpha$  é um escalar qualquer, então dizemos que  $\mathbf{T}$  é uma transformação linear, também conhecida como um *tensor de segunda ordem*, ou apenas um tensor (Lai *et al.*, 1996).

### A.2.1 Componentes de um Tensor

Sejam  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  os vetores unitários nas direções dos eixos coordenados,  $x$ ,  $y$  e  $z$  e  $\mathbf{T}$  um tensor.  $\mathbf{T}$  transforma esses vetores em  $\mathbf{T}\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{T}\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{T}\mathbf{e}_3$ , respectivamente. Cada um destes termos, que podem ser resumidamente representados por  $\mathbf{T}\mathbf{e}_i$ , é um vetor e portanto  $\mathbf{T}\mathbf{e}_i$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\mathbf{e}_1 &= T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_2 &= T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_3 &= T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{A.2.2}$$

ou ainda, em notação indicial<sup>1</sup>:

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j\tag{A.2.3}$$

---

<sup>1</sup>Também conhecida como notação de Einstein. No apêndice encontra-se um resumo dos princípios de utilização deste tipo de notação.

Fazendo o produto escalar de  $\mathbf{e}_1$  por  $\mathbf{T}\mathbf{e}_1$  obtém-se  $T_{11}$ , pois os produtos escalares  $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3$  são iguais a zero. Então tem-se que:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_1 \\ T_{12} &= \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_2 \\ T_{13} &= \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

e assim por diante. Logo pode-se escrever:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_j \tag{A.2.5}$$

Os termos  $T_{ij}$  são definidos como componentes do tensor  $\mathbf{T}$  (Lai *et al.* (1996)). Seja por exemplo o tensor  $\mathbf{T}$  e os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ , tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}$ . O vetor  $\mathbf{u}$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \tag{A.2.6}$$

Supondo que se deseja determinar os componentes de  $\mathbf{v}$ , pode-se escrever:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = u_1\mathbf{T}\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{T}\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{T}\mathbf{e}_3 \tag{A.2.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_1 = \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{v} &= u_1(\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_1) + u_2(\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_2) + u_3(\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_3) \\ v_2 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{v} &= u_1(\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_1) + u_2(\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_2) + u_3(\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_3) \\ v_3 = \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{v} &= u_1(\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_1) + u_2(\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_2) + u_3(\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{T}\mathbf{e}_3) \end{aligned} \tag{A.2.8}$$

e da equação (A.2.5), tem-se que:

$$\begin{aligned} v_1 &= T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3 \\ v_2 &= T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3 \\ v_3 &= T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3, \end{aligned} \tag{A.2.9}$$

ou seja, o vetor  $\mathbf{v}$  será escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = &(T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3, \\ &T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3, \\ &T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3) \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.11})$$

De uma maneira mais compacta, finalmente pode-se escrever:

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{T}][\mathbf{u}]. \quad (\text{A.2.12})$$

Da equação (A.2.6), temos que  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ . Como  $\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}u_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{T}\mathbf{e}_i$  e ainda,  $\mathbf{T}\mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}_j$  temos que

$$v_k = \mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_k = \mathbf{T}\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}_k = u_i T_{ji} \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_k,$$

logo,

$$v_k = u_i T_{ji} \delta_{jk} = T_{ki} u_i, \quad (\text{A.2.13})$$

ou

$$v_k = u_i T_{ki}, \quad (\text{A.2.14})$$

que é a formulação indicial do sistema da equação (A.2.9).

Observando a forma matricial na equação (A.2.11) pode-se entender a função do tensor na equação. Esquecendo que se trata apenas de um produto entre matrizes, vê-se que o tensor de segunda ordem perfaz uma combinação dos três termos do vetor  $\mathbf{u}$ , que são  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , e atribui essas combinações, que vão depender de cada tensor específico, aos termos do novo vetor,  $\mathbf{v}$ . Então como pode ser visto na equação (A.2.9):

$$\begin{aligned} v_1 &= T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3, \\ v_2 &= T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3, \\ v_3 &= T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3 \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

Percebe-se também, que para se operar tal transformação em um vetor, que pode ser chamado de um tensor de ordem 1, é necessário um tensor de ordem 2. No caso da Lei de Hooke, que será discutida no item 2.2, será utilizado um tensor de ordem 4, para atuar em tensores de ordem 2. O número de termos do tensor, que no caso do exemplo da equação (A.2.10), foi de  $3 \times 3 = 9$ , uma combinação de 3 termos para cada um dos 3 elementos, na equação (A.2.16) será de  $9 \times 9 = 81$ , ou seja, cada um dos 9 termos do tensor de deformação ( $\varepsilon_{kl}$ ) será substituído por uma combinação destes 9 termos. Esta combinação será determinada pelos elementos do

tensor de ordem 4, que é denominado *matriz de constantes elásticas* do sólido ( $C_{ijkl}$ ), que por sua vez deverá ter 81 elementos.

$$T_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (\text{A.2.16})$$

### A.2.2 Algumas propriedades dos tensores

Apresentaremos aqui algumas propriedades dos tensores que julgamos úteis para o desenvolvimento do trabalho:

- Soma

Sejam  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{Q}$  tensores e  $\mathbf{u}$  um vetor arbitrário, então:

$$(\mathbf{T} + \mathbf{Q}) \mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{Q}\mathbf{u}. \quad (\text{A.2.17})$$

Sendo que  $\mathbf{W} = (\mathbf{T} + \mathbf{Q})$  é também um tensor.

- Produto

$$(\mathbf{T}\mathbf{Q}) \mathbf{u} = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \quad (\text{A.2.18})$$

$$(\mathbf{Q}\mathbf{T}) \mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{T}\mathbf{u}).$$

Destacando-se que em geral  $\mathbf{Q}\mathbf{T} \neq \mathbf{T}\mathbf{Q}$ .

- Tensor Transposto

Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dois vetores quaisquer, então o tensor transposto  $\mathbf{Q}^T$  de um tensor  $\mathbf{Q}$  é definido como o tensor que obedece à seguinte relação:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{u} \quad (\text{A.2.19})$$

## A.3 Tensor de Tensões

Será demonstrado neste item que o conhecimento do tensor de tensões nos permite descrever completamente o estado de tensões nas vizinhanças de um ponto qualquer P. Seja o tetraedro da figura (A.3) de dimensões infinitesimais, onde:



Por exemplo, o termo  $-\tau_{1i}$  representa os componentes do vetor de tensão aplicado na face  $x$  no sentido negativo. O termo  $i$  definirá a direção do vetor na face, ou seja, para  $i = 1$ , o vetor na direção paralela ao eixo  $x$ , para  $i = 2$ , um vetor paralelo ao eixo  $y$ . Para as forças de corpo,  $f_i \Delta V \rightarrow 0$ , pois  $\Delta V$  decresce de maneira muito mais rápida do que  $\Delta S$ , quando as dimensões do tetraedro  $OABC$  tendem a zero. Portanto a equação (A.3.2) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{T}_i \Delta S_n + (-\tau_{1i} \Delta S_1) + (-\tau_{2i} \Delta S_2) + (-\tau_{3i} \Delta S_3) = 0 \quad (\text{A.3.4})$$

Seja  $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ , então,  $\Delta S_3 = (1/2) (\overline{AB})(\overline{OD})$ . Analogamente para o  $\Delta ABC$ ,  $\Delta S_n = (1/2) (\overline{AB})(\overline{CD})$ . Seja  $\alpha_3 = \angle ODC$ , o ângulo entre  $\overline{OD}$  e  $\overline{DC}$ , que é o ângulo entre as planos  $n$  e  $z$ , então fazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S_3}{\Delta S_n} &= \frac{(1/2) (\overline{AB})(\overline{OD})}{(1/2) (\overline{AB})(\overline{CD})} \\ \frac{\Delta S_3}{\Delta S_n} &= \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} \end{aligned}$$

obtém-se

$$\Delta S_3 = \Delta S_n \cos \alpha_3. \quad (\text{A.3.5})$$

Analogamente para as outras faces:

$$\Delta S_2 = \Delta S_n \cos \alpha_2 \quad (\text{A.3.6})$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_n \cos \alpha_1.$$

Pode-se entender as faces  $\Delta S_1, \Delta S_2$  e  $\Delta S_3$  como projeções da face  $\Delta S_n$ . Como ângulo entre as faces é igual ao ângulo entre as suas normais, o vetor  $\mathbf{n}$  normal à face  $n$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3) \quad (\text{A.3.7})$$

ou

$$\mathbf{n} = \cos \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cos \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cos \alpha_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.3.8})$$

Substituindo as equações (A.3.5) e (A.3.6) na equação (A.3.4) temos que:

$$\mathbf{T}_i \Delta S_n - \tau_{1i} \Delta S_n \cos \alpha_1 - \tau_{2i} \Delta S_n \cos \alpha_2 - \tau_{3i} \Delta S_n \cos \alpha_3 = 0 \quad (\text{A.3.9})$$

logo,

$$\mathbf{T}_i - \tau_{1i} \cos \alpha_1 - \tau_{2i} \cos \alpha_2 - \tau_{3i} \cos \alpha_3 = 0. \quad (\text{A.3.10})$$

Então,

$$\mathbf{T}_i = \tau_{1i} \cos \alpha_1 + \tau_{2i} \cos \alpha_2 + \tau_{3i} \cos \alpha_3 = 0. \quad (\text{A.3.11})$$

que nada mais é do que:

$$\mathbf{T}_i = \tau_{ji} n_j, \quad (\text{A.3.12})$$

ou seja, o termo  $\tau_{ji}$  representa os componentes do tensor de tensões. Conhecido este tensor e por conseguinte o estado de tensões na vizinhança de um ponto definido estamos aptos a determinar a tensão em qualquer plano passando por este ponto.

## A.4 Tensor de Deformação

Entendemos por *deformação* a variação relativa nas distâncias entre dois pontos num volume definido, como por exemplo, o volume da figura (A.1.1), em equilíbrio estático. Consideraremos as deformações como infinitesimais e os corpos, como já foi dito anteriormente, elásticos. Sejam os pontos P e T no instante  $t_0$  em determinada região do referido volume e sejam P' e T' as respectivas posições de P e T em um instante posterior  $t$ . A figura (A.4) indica a posição dos pontos. Sejam  $x_i$  e  $X_i$  as coordenadas de P e P', então  $X_i = x_i + u_i$ ,

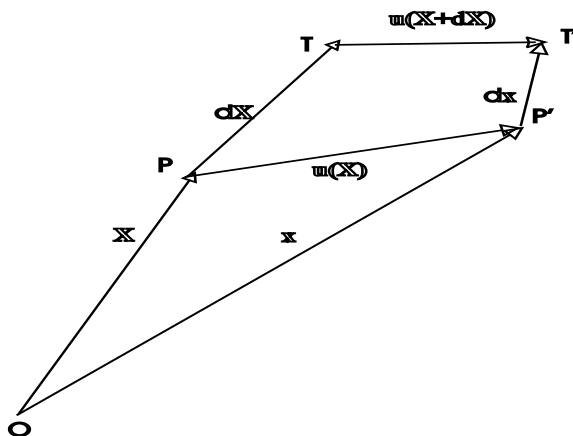


Figura A.4.1: Esquema para determinação do tensor de deformação

sendo  $u_i$  conhecido como vetor deslocamento,  $u_i = u(x_i, t)$ . As coordenadas de T e T' são, respectivamente,  $x_i + dx_i$  e  $X_i + dX_i$ . Observando a figura (A.4) vê-se que a seguinte soma vetorial se apresenta:

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{X} + d\mathbf{X} \quad (\text{A.4.1})$$

e que

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.4.2})$$

Somando as equações (A.4.2) e (A.4.1) temos que:

$$d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + d\mathbf{X}. \quad (\text{A.4.3})$$

Logo,

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.4.4})$$

que pode ser escrita da forma:

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{x} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)_P d\mathbf{x} \quad (\text{A.4.5})$$

que em notação indicial se transforma em

$$dX_j = dx_j + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_P dx_i. \quad (\text{A.4.6})$$

Colocando  $dx_i$  em evidência e omitindo a partir de agora o subscrito  $P$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$dX_j = \left[ \delta_{ij} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_i, \quad (\text{A.4.7})$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função Delta de Kroenecker.

Quando se trata de deformações deve-se tratar com distâncias entre dois pontos. De modo a evitar distâncias negativas, trabalha-se com o quadrado das distâncias. Seja  $\overline{PT}^2 = dx_k dx_k$ , então:

$$\overline{P'T'^2} = dX_j dX_j, \quad (\text{A.4.8})$$

logo, substituindo a equação (A.4.7) na equação (A.4.8) tem-se<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \overline{P'T'^2} &= \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k \\ &= \left( \delta_{ij} \delta_{kj} + \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \delta_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k \\ &= \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k, \end{aligned} \quad (\text{A.4.9})$$

então escrevemos  $\overline{P'T'^2}$  como

$$\overline{P'T'^2} = dx_k dx_k + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k \quad (\text{A.4.10})$$

---

<sup>2</sup>A expansão dos somatórios por parte do leitor pode ajudar a entender a razão para troca dos índices  $i$  por  $k$  no segundo termo do lado direito da equação (A.4.9).

Como  $\overline{PT}^2 = dx_k dx_k$  temos que

$$\overline{P'T'}^2 - \overline{PT}^2 = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k \quad (\text{A.4.11})$$

Como se está tratando de deformações muito pequenas no caso de propagação de ondas,  $(\partial u_i / \partial x_j) \ll 1$ , logo o termo  $\left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$  pode ser desconsiderado, então pode-se definir  $e_{ij}$ , o tensor de deformação infinitesimal (Ceverny, XXX), como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.4.12})$$

A equação (A.4.12) representa uma matrix de  $3 \times 3$  elementos, ou seja:

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4.13})$$

ou em coordenadas cilíndricas, formulação esta que será utilizada mais à frente neste trabalho:

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4.14})$$

#### A.4.1 Elementos do Tensor de Deformação $e_{ij}$

Neste item serão analisados os elementos  $e_{ij}$  da matriz do tensor de deformação da equação (A.4.12). Na análise da *deformação* serão abordados dois aspectos diferentes, a deformação longitudinal ou normal e a cisalhante ou angular (Villaça e Garcia (2000)). Nas seções a seguir serão detalhados esses dois tipos de deformação.

##### Elementos da diagonal principal ( $e_{ii}$ )

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{A.4.15})$$

Da equação (A.4.7) temos que:

$$dX_j = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_j}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_j}{\partial x_3} dx_3, \quad (\text{A.4.16})$$

Resolvendo para o caso de  $x_1$ , onde  $d\mathbf{x}$  é paralelo ao eixo  $x_1$ , ou seja,  $dx_1 \neq 0$  e  $dx_2 = dx_3 = 0$ , tem-se que,

$$dX_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} dx_1. \quad (\text{A.4.17})$$

Fazendo  $j = 1$  e substituindo  $e_{11} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2$  na equação (A.4.17) então

$$dX_1 = dx_1 + e_{11} dx_1,$$

logo,

$$e_{11} = \frac{dX_1 - dx_1}{dx_1}. \quad (\text{A.4.18})$$

De maneira análoga se chega à expressões semelhantes para os outros componentes. Portanto, observa-se que quando  $i = j$ , tem-se uma extensão ao longo de cada um dos eixos.

Seguindo a mesma nomenclatura dos itens anteriores, tem-se que o volume de um elemento infinitesimal é  $dV$  e que o mesmo corpo após a deformação possui um volume de  $dV'$ , sendo que:

$$\begin{aligned} dV &= dx_1 dx_2 dx_3 \\ dV' &= dX_1 dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

É importante notar que a variação é apenas volumétrica, não envolvendo mudança na forma. Pode-se escrever então que:

$$\begin{aligned} dV' &= dX_1 dX_2 dX_3 \\ &= (1 + e_{11}) dx_1 (1 + e_{22}) dx_2 (1 + e_{33}) dx_3, \end{aligned} \quad (\text{A.4.19})$$

desprezando os termos da ordem de  $e_{ii}^2$  e os de ordem superior:

$$dV' \approx (1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}) \overbrace{dx_1 dx_2 dx_3}^{dV} = dV + (e_{11} + e_{22} + e_{33}) dV$$

logo,

$$(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{\text{Variação do volume}}{\text{Volume inicial}}. \quad (\text{A.4.20})$$

O termo  $(e_{11} + e_{22} + e_{33})$  é denominado *dilatação* e é representado por  $\theta$ , indicando a mudança relativa de volume do corpo. O termo  $\theta$  pode ser escrito de várias maneira, tais como:

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = e_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (\text{A.4.21})$$

---

<sup>3</sup>É comum também utilizar a letra grega  $\epsilon$ , para se referir a deformações longitudinais, ou seja:  $\epsilon_x = \epsilon_1 = e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  e assim por diante.

**Elementos fora da diagonal principal (  $e_{ij}$ , para  $i \neq j$  )**

Seja, por exemplo<sup>4</sup>  $e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$ . Supondo-se que no instante  $t_0$  são descritos dois vetores perpendiculares  $d\mathbf{x}\mathbf{a}$  e  $d\mathbf{x}\mathbf{b}$  ao longo dos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , sendo que:

$$d\mathbf{x}\mathbf{a} = (dx_1, 0, 0) \quad (\text{A.4.22})$$

$$d\mathbf{x}\mathbf{b} = (0, dx_2, 0)$$

No instante  $t$ :

$$dXa_i = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx a_j \quad (\text{A.4.23})$$

$$dXb_i = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx b_j$$

Portanto, substituindo a equação (A.4.22) nas equações (A.4.23) obtém-se:

$$dXa_i = \left( \delta_{i1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_1 \quad (\text{A.4.24})$$

$$dXb_i = \left( \delta_{i2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) dx_2$$

Sendo  $dXa_i \bullet dXb_i$  o produto escalar destes dois vetores, então:

$$dXa_i \bullet dXb_i = \left( \delta_{i1} \delta_{i2} + \delta_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \delta_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{u_i}{x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (\text{A.4.25})$$

como  $\delta_{i1} \delta_{i2} = 0$  e  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)$  é muito pequeno, obtém-se:

$$dXa_i \bullet dXb_i = \left( \delta_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \delta_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = 2e_{12} dx_1 dx_2$$

ou seja:

$$dXa_i \bullet dXb_i = 2e_{12} dx_1 dx_2 \quad (\text{A.4.26})$$

Pode-se escrever também que  $dXa_i \bullet dXb_i = |d\mathbf{X}\mathbf{a}| |d\mathbf{X}\mathbf{b}| \cos \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre os vetores  $d\mathbf{X}\mathbf{a}$  e  $d\mathbf{X}\mathbf{b}$ . Conforme a figura a seguir: Então tem-se que

$$\cos \phi = \frac{dXa_i dXb_i}{|d\mathbf{X}\mathbf{a}| |d\mathbf{X}\mathbf{b}|} = \frac{2e_{12} dx_1 dx_2}{|d\vec{X}^{(1)}| |d\vec{X}^{(2)}|} \approx 2e_{12}$$

logo,

$$\cos \phi \approx 2e_{12} . \quad (\text{A.4.27})$$

---

<sup>4</sup>Uma análise similar pode ser feita para  $e_{13}$  e  $e_{23}$ .

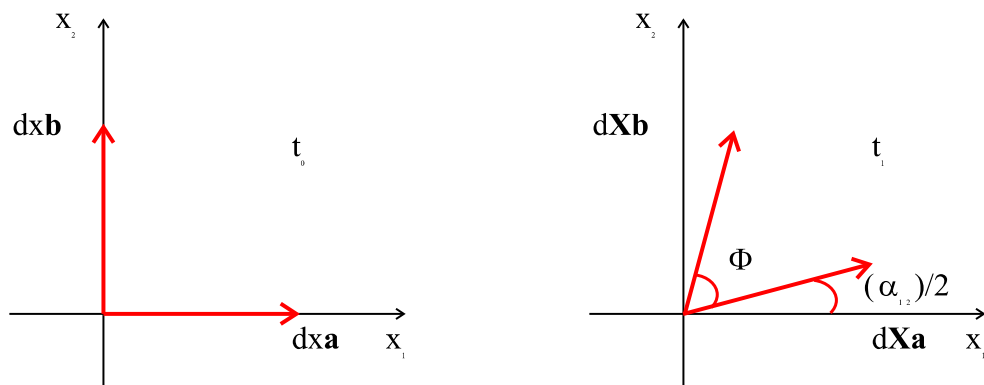


Figura A.4.2: Posicionamento dos pontos *antes* e *depois* da de-  
formação

Seja  $\alpha_{12}$  um ângulo tal que(ver figura (A.4.1)) anterior:

$$\alpha_{12} = 90^\circ - \phi$$

Então,  $\text{sen } \alpha_{12} = 2e_{12}$ , como  $\alpha_{12}$  é muito pequeno, pode-se escrever que  $\alpha_{12} = 2e_{12}$ , ou seja,

$$e_{12} = \frac{1}{2} \alpha_{12} .$$

Portanto, o significado físico dos componentes do tensor de deformação, quando  $i \neq j$ , é que  $e_{ij}$  representa a metade do decréscimo do ângulo entre dois vetores originalmente perpendiculares,  $d\mathbf{Xa}$  e  $d\mathbf{Xb}$ . Estes componentes do tensor de deformação são chamados de componentes de deformação *cisalhante*.

## Apêndice B

# Notação Indicial

Sejam as equações mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \sum_{i=1}^3 a_{i1}x_i \\x'_2 &= \sum_{i=1}^3 a_{i2}x_i \\x'_3 &= \sum_{i=1}^3 a_{i3}x_i.\end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas de uma forma mais resumida como:

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}x_i, \tag{B.0.1}$$

onde  $j = 1, 2, 3$ . Se adotarmos a seguinte convenção: *Sempre que um dos subscritos se repetir em um termo da equação na notação de Einstein, está implícito que se realiza um somatório neste índice*, veremos que o símbolo de somatório se torna redundante e a equação **B.0.1** pode ser escrita da forma:

$$x'_j = a_{ij}x_i. \tag{B.0.2}$$

O subscrito repetido é chamado de *índice mudo*<sup>1</sup> e o subscrito que não se repete é referido como *índice livre*<sup>2</sup> Nesta convenção expressões do tipo  $a_i b_i x_i$  não são definidas (Lai *et al.* (1996)). Nenhum subscrito deverá se repetir mais de uma vez se o somatório sobre ele tiver que ser efetuado. Expressões como

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i x_i$$

---

<sup>1</sup>Denominado como *dummy index* nos textos em inglês.

<sup>2</sup>Denominado *free index* nos textos em inglês.

devem permanecer utilizando o símbolo original de somatório. É importante notar que  $a_i x_i = a_m x_m = a_j x_j = \dots$ . A notação indicial pode ser utilizada para representar somatórios duplos do tipo:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j, \quad (\text{B.0.3})$$

da seguinte forma:

$$a_{ij} x_i x_j. \quad (\text{B.0.4})$$

De maneira similar pode-se representar somatórios triplos:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ijk} x_i x_j x_k, \quad (\text{B.0.5})$$

simplesmente escrevendo:

$$a_{ijk} x_i x_j x_k. \quad (\text{B.0.6})$$

Na verificação da correta representação de um somatório em notação indicial, deve-se ter em mente que: *Um subscrito não deve aparecer mais de duas vezes em um termo da equação; se um subscrito aparece somente uma vez em um termo da equação ele deve aparecer apenas uma vez nos demais termos.*

## B.1 Manipulações com a notação indicial

Serão apresentadas aqui algumas manipulações úteis utilizando a notação indicial.

### B.1.1 Substituição

Sejam

$$a_i = U_{im} b_m \quad (\text{B.1.1})$$

e

$$b_i = V_{im} c_m. \quad (\text{B.1.2})$$

De modo a substituir a equação **B.1.2** em **B.1.1** deve-se primeiramente trocar o índice livre de  $i$  para  $m$  em  $b_i$  e o índice  $m$  para qualquer outro, por exemplo  $n$ . Então a **B.1.2** se torna

$$b_m = V_{mn} c_n \quad (\text{B.1.3})$$

logo,

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n. \quad (\text{B.1.4})$$

### B.1.2 Multiplicação

Sejam

$$p = a_i b_i \tag{B.1.5}$$

e

$$q = c_i d_i, \tag{B.1.6}$$

logo,

$$pq = a_i b_i c_j d_j. \tag{B.1.7}$$

A mudança dos índices de  $q$ , se deveu ao fato de que  $pq \neq a_m b_m c_m d_m$  e além do que o lado direito desta equação não é definido na convenção de somatório da notação indicial. É fácil observar que:

$$pq \neq \sum_{m=1}^3 a_m b_m c_m d_m. \tag{B.1.8}$$

### B.1.3 Contração

Seja

$$T_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}, \tag{B.1.9}$$

então tem-se que:

$$T_{ii} = \lambda \theta \delta_{ii} + 2\mu E_{ii}. \tag{B.1.10}$$

Como  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$ , então:

$$T_{ii} = 3\lambda \theta + 2\mu E_{ii}. \tag{B.1.11}$$

## Apêndice C

# Funções Especiais e Teoremas

### C.1 Função Sinc

função função Seja  $A(t)$  a função representada na figura (C.1.1): A transformada de

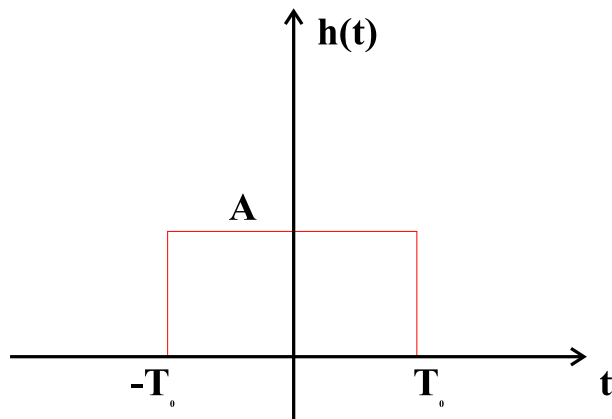


Figura C.1.1: Representação da função *caixa*

Fourier da função  $A(t)$  pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-T_0}^{T_0} A e^{-i2\pi ft} dt \\ &= A \int_{-T_0}^{T_0} \cos(2\pi ft) dt - iA \int_{-T_0}^{T_0} \sin(2\pi ft) dt \end{aligned} \quad (\text{C.1.1})$$

$$= \frac{A}{2\pi ft} \operatorname{sen}(2\pi ft) \Big|_{-T_0}^{T_0}, \quad (\text{C.1.2})$$

então,

$$H(f) = 2AT_0 \frac{\text{sen}(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}. \quad (\text{C.1.3})$$

A figura (C.1.2) apresenta a curva resultante  $H(f)$  da transformada de Fourier aplicada à função  $h(t)$ . A função  $H(f)$  é conhecida como função *sinc*. Observa-se das figuras C.1.1 e

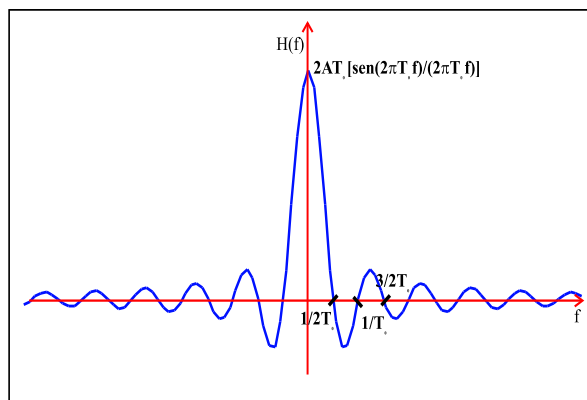


Figura C.1.2: Representação da função *sinc*

C.1.2 que quanto maior a largura da *caixa*, mais restrito será o conteúdo de frequências da função *sinc*.

## C.2 Delta de Kroenecker

Esta função representada por  $\delta_{pq}$  é definida como:

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{para } p = q \\ 0, & \text{para } p \neq q \end{cases}$$

Esta notação é bastante útil, podendo representar a matriz identidade (Hildebrand (1965)),

$$\mathbf{I} = [\delta_{pq}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.1})$$

## C.3 Regras de L'Hospital

As regras de *L'Hospital* aplicam-se para os casos de cálculos de limites que apresentam indeterminações do tipo:  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$  (Guidorizzi (2001)).

- 1ª Regra de L'Hospital

Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis em um intervalo aberto  $(p - r, p)$  e em  $(p, p + r)$ , para  $r < 0$ , sendo  $g'(x) \neq 0$  para  $0 < |x - p| < r$ . Se:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow p} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow p} g(x) &= 0\end{aligned}\tag{C.3.1}$$

e se  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existir (finito ou infinito), então,  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe e pode-se escrever que:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}\tag{C.3.2}$$

- 2ª Regra de L'Hospital

Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis num intervalo aberto  $(m, p)$ , com  $g'(x) \neq 0$  em  $(m, p)$ . Assim, se

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow p^-} g(x) = +\infty$$

e se  $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existir (finito ou infinito), então  $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)}$  existirá e

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\tag{C.3.3}$$

Observação: As duas regras continuam válidas substituindo-se  $(x \rightarrow p^-)$  por  $(x \rightarrow p^+)$  ou por  $(x \rightarrow p)$ , ou ainda por  $(x \rightarrow \pm\infty)$ .

## Apêndice D

# Tabela de Relação entre Constantes Elásticas

	$E$	$\nu$	$\kappa$	$\mu$	$\lambda$
$E, \nu$	$E$	$\nu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
$E, \kappa$	$E$	$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$	$\kappa$	$\frac{3\kappa E}{9\kappa-E}$	$\frac{3\kappa(3\kappa-E)}{9\kappa-E}$
$E, \mu$	$E$	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	$\mu$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$
$E, \lambda$	$E$	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+R}$	$\frac{E+3\lambda+R}{6}$	$\frac{E-3\lambda+R}{4}$	$\lambda$
$\nu, \kappa$	$3\kappa(1-2\nu)$	$\nu$	$\kappa$	$\frac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa\nu}{1+\nu}$
$\nu, \mu$	$2\mu(1+\nu)$	$\nu$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\mu$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
$\nu, \lambda$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$\nu$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\lambda$
$\kappa, \mu$	$\frac{9\kappa\mu}{6\kappa+\mu}$	$\frac{3\kappa-2\mu}{6\kappa+2\mu}$	$\kappa$	$\mu$	$\kappa - \frac{2\mu}{3}$
$\kappa, \lambda$	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$	$\kappa$	$\frac{3(\kappa-\lambda)}{2}$	$\lambda$
$\mu, \lambda$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$	$\mu$	$\lambda$
$R = \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}$ .					

# Apêndice E

## Meio Efetivo

### E.1 Introdução

O conceito de *meio efetivo* foi criado visando estimativas de uma determinada propriedade, ou variável, equivalente de uma mistura de elementos ou substâncias. O princípio é similar à determinação da resistência equivalente de um circuito elétrico composto por vários resistores diferentes. No caso das rochas utiliza-se esse conceito para se determinar os módulos elásticos, densidade, ou quaisquer outros parâmetros desejados. Afim de atingir tal objetivo, várias formulações foram definidas, cada uma contendo suas vantagens e limitações. Tais formulações podem ser calculadas de diversas maneiras, podendo assumir valores bastante diferentes, dependendo das premissas assumidas. Essas *médias* devem ser utilizadas com bastante critério, devendo o usuário estar ciente das limitações e das situações em que cada média pode ou deve ser aplicada. Mavko *et al.* (1996) apresenta várias formulações de *meio efetivo*, indicando ao final de cada tópico o tipo de rocha onde cada uma delas se aplica melhor. Além da *Média de Backus*, outras formulações são comumente utilizadas na literatura, tais como, os limites de Hashin-Shtrikman, a média de Voigt-Reuss-Hill, a formulação de Kuster-Toköz, entre outras. Serão apresentadas aqui as duas primeiras, pois ambas possuem uma inter-relação, sendo que a segunda é utilizada nos programas internos da PETROBRAS.

### E.2 Limites de Hashin-Shtrikman

Os limites de Hashin-Shtrikman são conhecidos por fornecerem o intervalo mais estreito possível para a determinação dos módulos elásticos de uma mistura, quando não se possui

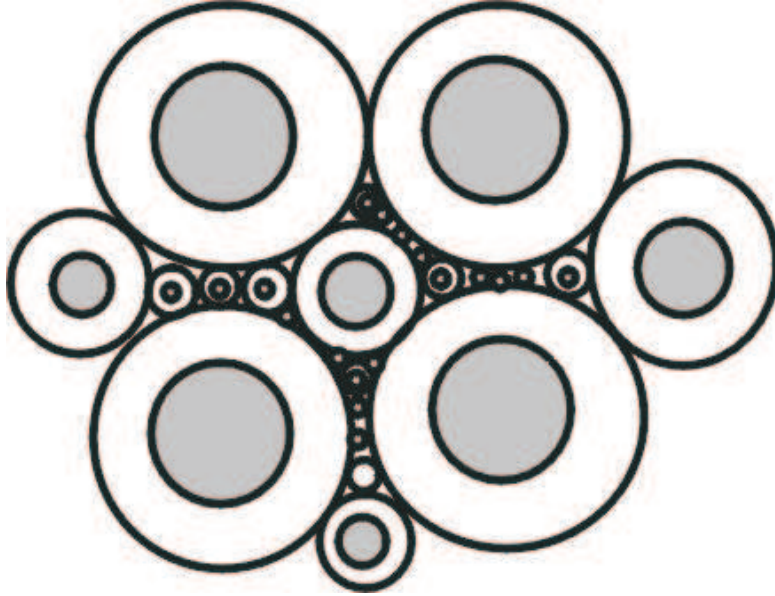


Figura **E.2.1**: Interpretação física dos limites de Hashin-Shtrickman

detalhe algum sobre a geometria dos constituintes. Tais limites são definidos como se segue:

$$K^{HS\pm} = K_1 + \frac{f_2}{(K_2 - K_1)^{-1} + f_1 (K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)^{-1}} \quad (\text{E.2.1})$$

$$\mu^{HS\pm} = \mu_1 + \frac{f_2}{(\mu_2 - \mu_1)^{-1} + \frac{2f_1(K_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(k_1 + \frac{4}{3}\mu_1)}}, \quad (\text{E.2.2})$$

onde

$K_1, K_2$  = Módulos de incompressibilidade de cada uma das fases

$\mu_1, \mu_2$  = Módulos de cisalhamento de cada uma das fases

$f_1, f_2$  = Fração volumétrica da cada uma das fases.

Os limites são obtidos trocando-se os constituintes 1 e 2. O limite superior é obtido quando o material mais rígido é definido com o índice 1 e o limite inferior quando o menos rígido é definido com o índice 1. Na figura<sup>1</sup>(**E.2.1**) é apresentada, de forma esquemática, a interpretação física dos limites de Hashin-Shtrickman. Pressupõe-se que os constituintes sejam isotrópicos, lineares e elásticos.

---

<sup>1</sup>Segundo Mavko *et al.* (1996)

### E.3 Média de Voigt-Reuss-Hill

A média de Voigt, também conhecida como média de *isostrain*, se apresenta na forma de uma média ponderada, equivalendo a assumir que as deformações são uniformemente distribuídas e se apresenta da seguinte forma:

$$M_v = \sum_{i=1}^N f_i * M_i, \quad (\mathbf{E.3.1})$$

onde

$M_v$  = Valor do módulo elástico estimado da mistura de sólidos

$f_i$  = Fração de volume do componente  $i$

$M_i$  = Módulo elástico do componente  $i$ .

A média de reuss, também conhecida como média de *isostress*, se apresenta como uma média harmônica e equivale a assumir que as tensões são distribuídas de maneira uniforme e é descrita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{M_r} = \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{M_i}, \quad (\mathbf{E.3.2})$$

onde

$M_r$  = Valor do módulo elástico estimado da mistura de sólidos

$f_i$  = Fração de volume do componente  $i$

$M_i$  = Módulo elástico do componente  $i$ .

Quando um dos componentes é um líquido, ou um gás, os módulos de compressibilidade e cisalhamento para a mistura são exatamente os fornecidos pelo limite inferior de Hashin-Shtrickman. Esta média representa exatamente os módulos efetivos de uma suspensão de sólidos em um fluido (Mavko *et al.* (1996)). Excetuando-se o caso de uma mistura monofásica, nenhuma mistura real pode ser tão rígida como a média de Voigt. Os limites de Voigt e Reuss são representados esquematicamente na figura (E.3.1). No caso de uma mistura de sólidos, a média de Voigt-Reuss-Hill, que nada mais é do que uma média aritmética das médias de Voigt e Reuss, fornece uma boa aproximação Vasquez *et al.* (1996). A média de Voigt-Reuss-Hill pode ser escrita da seguinte forma:

$$M_{vrh} = \frac{M_v + M_r}{2}, \quad (\mathbf{E.3.3})$$

onde

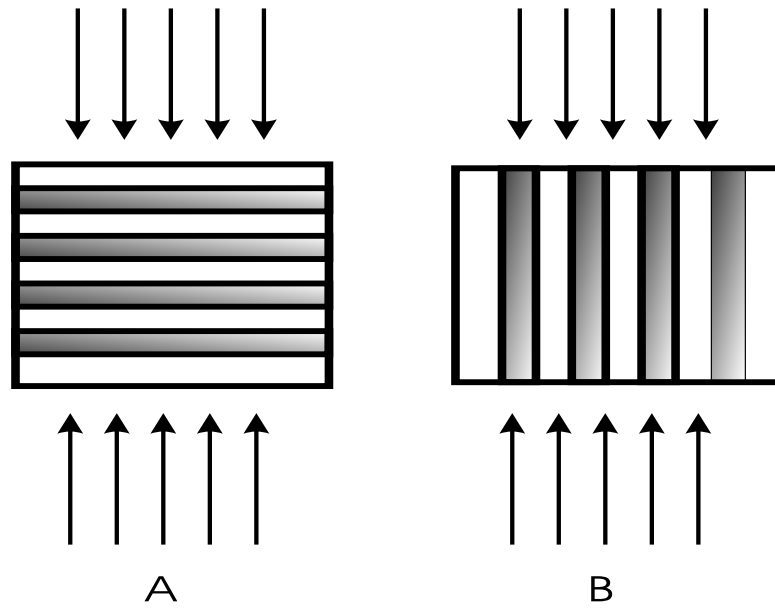


Figura **E.3.1**: Esquema de uma mistura de sólidos, A) Reuss e B) Voigt (segundo Vasquez *et al.* (1996)).

$M_v$  = Média de Voigt

$M_r$  = Média de Reuss.

## Apêndice F

# Fatores de Propagação

Quando uma onda é gerada vários fatores contribuem para a sua modificação, ou deformação, durante a propagação. Alguns desses fatores são específicos do meio no qual a onda está se propagando, ou seja, de alguma maneira carregam informações do meio. Outros são independentes do meio, ou seja, estarão presentes em quaisquer meios que a onda por ventura venha a cruzar.

- Espalhamento Geométrico

O espalhamento geométrico se refere à variação na densidade de energia por unidade de área, quando a gerada por uma fonte sísmica, por exemplo, se afasta do ponto fonte. A amplitude do sinal é inversamente proporcional ao quadrado da distância percorrida pela frente de onda. No caso de um meio homogêneo a onda gerada é uma esfera cujo raio aumenta com o tempo, porém no mundo real isto não acontece. A variação das velocidades no interior da Terra faz com que as frentes de ondas não sejam esféricas. Deve-se levar em conta também o efeito da refração na atenuação das amplitudes. O espalhamento geométrico não carrega no seu bojo nenhuma informação geológica, sendo apenas uma função da distância percorrida. Além disto, ela não envolve nenhuma perda de energia, posto que a energia se mantém, variando-se apenas a área onde esta energia está distribuída, ou seja, somente ocorrendo um espalhamento da energia à medida em que a frente de onda se expande.

- Absorção

Ao contrário dos efeitos de divergência esférica e reflexão e transmissão nas interfaces, que apenas rearranjam a energia sem dissipá-la, a absorção atenua as amplitudes do

sinal sísmico, transformando irreversivelmente a energia em calor. Esta atenuação é tanto maior quanto maior for a distância percorrida. Esta atenuação é dependente da frequência, relaciona-se como uma potência (próxima de 1) desta última. Esta dependência faz com que diferentes frequências sejam atenuadas de maneira diferente, fazendo com que o conteúdo de frequências do sinal seja modificado. A absorção é uma característica da rocha em si, podendo ser explicitada como *decaimento, ou atenuação, por comprimento de onda* ( $\lambda$ ). Portanto, para uma mesma distância percorrida, o maior número de comprimentos de onda de uma frequência  $F_1$ , fará com que esta frequência seja mais atenuada do que uma frequência  $F_2$ , onde  $F_2 < F_1$ . Por exemplo: Seja uma rocha com fator de absorção de  $0.1dB/(\lambda)$  e velocidade de  $1000m/s$  percorrendo uma distância de  $100 m$ . Uma onda com frequência de  $100 Hz$  possui um comprimento de onda de  $10 m$ , ou seja, tem-se  $10 \lambda$  no trecho em questão. Logo a atenuação de cada  $\lambda$  será 99% do anterior, ou seja, a perda de energia seria de  $1 dB$  para frequência de  $100 Hz$ ,  $0.5 dB$  para frequência de  $50 Hz$  e  $0.1 dB$  para  $10 Hz$ .

A análise da absorção é bastante diferente quando se analisa uma onda senoidal do que quando se analisa um pulso, onde várias frequências estão presentes. Pouco se pode dizer a respeito do comportamento das amplitudes em um pulso, sem se conhecer as características do sinal de entrada, ou seja do pulso original emitido (O'Doherty e Anstey (1971)). Imaginando-se o pulso emitido como um *spike*, pode-se afirmar que: i) A amplitude decai à medida que as altas frequências são absorvidas e ii) a amplitude decai à medida que o pulso é modificado pela dispersão<sup>1</sup>.

- Coeficiente de reflexão na interface

As reflexões sísmicas são geradas nas interfaces litológicas onde se verifica um contraste de impedâncias. A impedância acústica é definida como o produto da velocidade ( $v$ ) pela densidade ( $\rho$ ). Se for considerada uma incidência normal à interface, o coeficiente de reflexão é definido por  $\frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1}$  ou ainda como  $\frac{\Delta \rho v}{2 \rho v}$ . A coluna geológica pode ser representada por uma série de coeficientes de reflexão. A determinação de tal série é o objetivo da prospecção sísmica. Como o coeficiente de reflexão mede a diferença impedâncias, pode-se verificar que ele não carrega nenhuma informação geológica.

---

<sup>1</sup>O alargamento do pulso se dá pois as diversas componentes de frequências possuem velocidades ligeiramente diferentes, daí algumas componentes se adiantarem em relação às outras.

- Perda cumulativa por transmissão nas interfaces superiores

Quando se imagina um coeficiente de reflexão alto para os padrões normais, pode-se pensar em valores por volta de 0,2, coeficientes muito maiores podem existir, porém não são comuns. Apesar do alto valor relativo desse coeficiente, a perda por transmissão associada a apenas um refletor, mesmo um refletor forte, é praticamente insignificante(O'Doherty e Anstey (1971)).

- Múltiplas

As múltiplas são ondas de mesma polaridade do que a onda incidente porém vindo após a mesma como resultado da reflexão geralmente na superfície ou fundo do mar, ver figura **F.0.1**. São representadas nos sismogramas por eventos similares à reflexão original de ocorrência periódica. As múltiplas do tipo da figura (**F.0.1**)**b** são conhecidas como múltiplas de curto período, ou *peg-legs*. Caso estas interfaces ocorram muito próximas umas das outras, como no caso de uma sedimentação cíclica, é possível que a múltipla reforce a amplitude da onda incidente. O maior problema é se determinar o grau deste reforço, Anstey (1960) e Trorey (1962) discutem este problema.

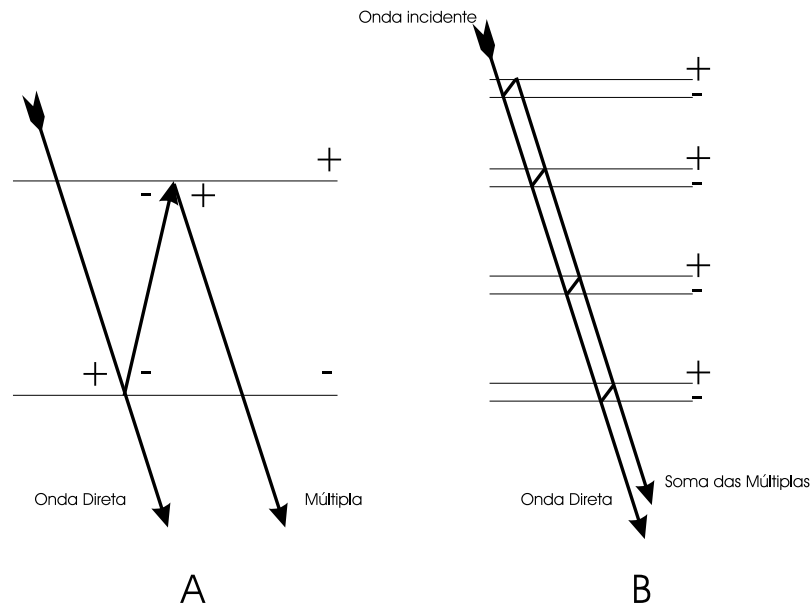


Figura **F.0.1**: Múltiplas