

OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DE PONTES PROTENDIDAS PRÉ-MOLDADAS  
PELO MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS.

Bruno Perdigão Olivieri

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

---

Prof. Ibrahim Abd El Malik Shehata, Ph. D.

---

Prof. Nelson Francisco Favila Ebecken, D. Sc.

---

Prof. Lídia Conceição Domingues Shehata, Ph. D.

---

Prof. Giuseppe Barbosa Guimarães, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2004

OLIVIERI, BRUNO PERDIGÃO

Otimização do Projeto de Pontes

Protendidas Pré-Moldadas pelo Método dos  
Algoritmos Genéticos [Rio de Janeiro] 2004

XIV, 129 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.  
Sc., Engenharia Civil, 2004)

Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1 – Otimização de Vigas 2 – Algoritmos  
Genéticos

I. COPPE/UFRJ II. Título ( Série )

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho  
aos meus pais Gino e Rosa,  
a minha noiva Aline,  
a minha irmã Bianca,  
e a minha avó Francisca.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo,

Ao Professor Ibrahim Abd El Malik Shehata, pelo apoio e orientação em todos os momentos desta caminhada.

Ao Professor Nelson Ebecken, pela sua colaboração e participação neste trabalho.

Aos demais professores do Programa de Engenharia Civil, em especial às professoras Lídia Shehata e Eliane Maria L. Carvalho pelo apoio e incentivo à minha entrada no mestrado.

Aos colegas do Programa de Engenharia Civil, Bruno, Danilo, Jonilson, Roberta, Guilherme e Vivian pela companhia e incentivo durante todo esse período.

A agência de apoio à pesquisa, CAPES, por financiar este trabalho.

Aos amigos Sérgio, Jairo, Tales, Ana Cláudia e aos demais colegas da Empresa Ponti's Consultoria pela amizade e apoio durante meu ingresso nesta caminhada.

Ao pessoal da Empresa PREMAG pré-moldados, em especial aos amigos Stélio, Flávia e Ricardo pela colaboração no fornecimento das informações sobre seus projetos.

Aos meus pais Gino e Rosa, à minha noiva e companheira Aline, à minha irmã Bianca e à minha avó Francisca, pelo amor, apoio e incentivo constantes.

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste estudo.

Resumo da Tese apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

## OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DE PONTES PROTENDIDAS PRÉ-MOLDADAS PELO MÉTODO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS.

Bruno Perdigão Olivieri

Maio/2004

Orientador: Ibrahim Abd El Malik Shehata

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho trata do pré-dimensionamento ótimo da seção transversal de pontes rodoviárias com vigas em seção I, pré-moldadas e protendidas, utilizando o método dos algoritmos genéticos, o qual oferece como uma de suas grandes vantagens a facilidade de trabalhar com as variáveis de forma discreta. Tal formulação foi desenvolvida em linguagem visual basic.

O principal objetivo deste estudo é o de minimizar a função custo aqui proposta, onde as principais variáveis envolvidas são: o número de vigas na seção transversal, suas dimensões e o número de cabos de protensão em cada uma delas. O pré-dimensionamento da seção transversal é realizado com base nas longarinas já padronizadas pela empresa fabricante de elementos pré-moldados PREMAG.

Para averiguar a eficiência do algoritmo desenvolvido, foram feitas comparações entre os custos das soluções ótimas apresentadas pelo programa e os custos de três projetos de pontes e viadutos já realizados pela empresa fabricante de pré-moldados. Os resultados obtidos pelo programa mostraram uma economia de cerca de 13% no custo das vigas e da laje em uma das aplicações, tendo as demais apresentado resultados próximos aos do fabricante.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

OPTIMAL DESIGN OF BRIDGES WITH PRECASTED PRESTRESSED BEAMS  
USING GENETIC ALGORITHMS

Bruno Perdigão Olivieri

May/2004

Advisor: Ibrahim Abd El Malik Shehata

Department: Civil Engineering

The present work focuses on the optimal design of the transverse cross section of precast prestressed bridges with I-beam section main girders, using the genetic algorithms method. One of the most important advantages of this method is its facility in dealing with discrete variables. This formulation was developed in visual basic language.

This work aims to minimize the cost function, and the main variables involved were: the number of main girders in the transverse cross section of the bridge and their dimensions, as well as the number of prestressed cables in each one of them. The selection of the main girder dimension in the transverse cross section was based on standard dimensions of beams produced by the company PREMAG.

In order to verify the efficiency of the developed algorithm, a comparison was made between the costs of the optimum solutions obtained by the program and the costs of three bridges and viaducts already constructed by PREMAG. The obtained results indicated an economy of approximately 13% in the girders and slab costs in one of the applications, while in the other two cases the program gave similar results to the beams produced by the company.

# Sumário

---

	<b>Pág.</b>
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Otimização .....</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução .....	4
2.2 Formulação do Problema .....	4
2.3 Métodos de Otimização .....	5
2.3.1 Programação Linear .....	6
2.3.2 Programação Não-Linear .....	8
2.3.2.1 Métodos Determinísticos .....	8
2.3.2.2 Métodos Não-Determinísticos .....	18
2.3.2.2.1 Computação Evolutiva .....	19
2.3.2.2.2 Recozimento Simulado .....	22
2.4 Revisão Bibliográfica .....	22
2.5 Comentários Adicionais sobre os Métodos .....	42
<b>3. Fundamentos de Algoritmos Genéticos .....</b>	<b>45</b>
3.1 Introdução .....	45
3.2 Histórico dos AGs .....	45
3.3 Nomenclatura .....	48
3.4 Codificação da População .....	49
3.4.1 Variáveis Discretas .....	49
3.4.2 Variáveis Contínuas .....	50
3.5 Geração da População Inicial .....	51
3.6 Avaliação da População .....	52
3.7 Seleção .....	52
3.8 Reprodução .....	55
3.9 Operadores Genéticos .....	56
3.9.1 Operador Crossover .....	56
3.9.2 Operador Mutação .....	58

3.10 Critérios de Parada .....	59
3.11 Parâmetros que Influenciam os AGs .....	59
3.12 Tratamento das Restrições .....	60
3.13 Função de Penalização .....	61
<b>4. Descrição do Programa Desenvolvido .....</b>	<b>64</b>
4.1 Problema Estudado .....	64
4.1.1 Apresentação das Janelas do Programa .....	68
4.1.2 Variáveis do Problema .....	73
4.1.3 Função Objetivo .....	74
4.1.4 Restrições .....	75
4.1.5 Função de Aptidão .....	77
4.1.6 Codificação das Soluções .....	78
<b>5. Resultados das Aplicações .....</b>	<b>86</b>
5.1 Introdução .....	86
5.2 Aplicações .....	86
5.2.1 Aplicação N° 1 .....	86
5.2.1 Aplicação N° 2 .....	91
5.2.3 Aplicação N° 3 .....	95
<b>6. Conclusões .....</b>	<b>100</b>
<b>Apêndice A .....</b>	<b>107</b>

## Lista de Figuras

2.1	Ilustração do método das Penalidades .....	14
2.2	Ilustração do método das Barreiras .....	16
2.3	Ramificações da Computação Natural .....	19
2.4	Configuração do traçado do cabo de protensão [Goble e Lapay, 1971] .....	23
2.5	Comportamento da função custo para o caso de $C_1 = C_2$ , [Kirsch, 1972] .....	25
2.6	Comportamento da função custo para o caso de $C_2 \gg C_1$ , [Kirsch, 1972] .....	25
2.7	C. total dividido pelo C. ótimo como função da taxa de armadura [Friel, 1971] .....	27
2.8	Resultados para a torre de Transmissão [Rajeev e Krishnamoorthy, 1992] ...	30
2.9	Características das vigas protendidas [LEITE e TOPPING (1998)] .....	33
2.10	Diagrama: Custo x N° de Gerações para vigas T [HADI e SCHMIDT (2000)] .....	37
2.11	Seções transversais da vigota protendida e do painel alveolar com capa estrutural [Castilho (2003)] .....	39
3.1	Roleta de seleção proporcional à aptidão .....	55
3.2	Espaço solução hipotético [GEN e CHENG (1997)] .....	62
4.1	Seção transversal típica de uma ponte .....	64
4.2	Configuração dos padrões de viga disponíveis no programa .....	65
4.3	Fluxograma do programa .....	67
4.4	Janela principal do programa .....	68
4.5	Janela de manipulação das características do AG .....	69
4.6	Janela de manipulação dos dados de projeto .....	69
4.7	Janela de seleção das vigas .....	70
4.8	Ilustração do comprimento do balanço na seção transversal .....	71
4.9	Janela de opções .....	71
4.10	Janela com os resultados da seleção ótima .....	72
4.11	Representação do talão inferior padrão .....	82
5.1	Seção transversal da aplicação nº 1 .....	87
5.2	Armadura de flexão da aplicação nº 1 .....	87
5.3	Influência da variação do preço do concreto no custo da seção transversal	

da ponte para a aplicação nº 1 .....	90
5.4 Influência da variação do preço do aço de protensão no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 1 .....	91
5.5 Seção transversal da aplicação nº 2 .....	92
5.6 Armadura de flexão da aplicação nº 2 .....	92
5.7 Influência da variação do preço do concreto no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 2 .....	94
5.8 Influência da variação do preço do aço de protensão no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 2 .....	95
5.9 Seção transversal da aplicação nº 3 .....	96
5.10 Armadura de flexão da aplicação nº 3 .....	96
5.11 Influência da variação do preço do concreto no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 3 .....	98
5.12 Influência da variação do preço do aço de protensão no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 3 .....	98

## Lista de Tabelas

2.1	Resumo dos resultados para a minimização da <i>compliance</i> .....	36
2.2	Resumo das variáveis e dos resultados do painel alveolar com capa estrutural [Castilho (2003)] .....	40
2.3	Resumo dos trabalhos (métodos clássicos) .....	41
2.4	Resumo dos trabalhos (algoritmos genéticos) .....	42
2.5	Comparação entre os métodos clássicos e o método dos AGs .....	43
3.1	Codificação Binária $x$ Codificação Gray .....	51
3.2	Seleção proporcional à aptidão .....	54
4.1	Padrões das alturas de viga .....	79
5.1	Resumo dos resultados obtidos pelo programa para a 1ª aplicação .....	88
5.2	Resumo dos resultados obtidos pelo programa para a 2ª aplicação .....	93
5.3	Resumo dos resultados obtidos pelo programa para a 3ª aplicação .....	97

## Lista de Símbolos

$b$  – dimensão da base da viga

$b_{\text{sup}}$  – largura do talão superior da viga

$b'$  – largura fictícia da seção transversal da viga

$d$  – altura útil da seção da viga

$e_{\text{min}}$  – espaçamento mínimo entre vigas

$f_c$  – resistência do concreto à compressão

$f_y$  – resistência do aço à tração

$f_{yp}$  – tensão de escoamento do aço de protensão

$h$  – altura da seção da viga

$h_{\text{Laje}}$  – espessura da laje

$nb$  – número de bits da variável

$n_{\text{Camadas}}$  – número de camadas de aço de protensão

$n_{\text{Cordoalhas}}$  – número de cordoalhas de protensão por viga

$n_{\text{costela}}$  – número de barras de armadura de costela a mais que a viga de 500 mm

$n_{\text{estribo}}$  – número de estribos por viga

$n_{\text{máx}}$  – número máximo de vigas na seção transversal da ponte

$nv$  – número de possíveis valores assumidos pela variável

$n_{\text{Vigas}}$  – número de vigas na seção transversal da ponte

$p_c$  – probabilidade de cruzamento

$\text{pen}(x)$  – função de penalização

$p_i$  – probabilidade de seleção do  $i$ -ésimo cromossomo

$p_m$  – probabilidade de mutação

$q_i$  – probabilidade acumulada do  $i$ -ésimo cromossomo

$x^{\text{LI}}$  – limite inferior da variável

$x^{\text{LS}}$  – limite superior da variável

$z$  – braço de alavanca

$A$ ,  $B$  e  $C$  – coeficientes que determinam o número de vigas na seção transversal

$A_c$  – área de concreto da seção transversal

$A_j$  – área da seção transversal das barras da treliça

$A_{s_{\text{costela}}}$  – área de uma barra de costela

$A_{s_{\text{estribo}}}$  – área de uma barra de estribo

$A_{sp}$  – área de aço de protensão  
 $A_{st}$  – área de aço passivo  
 $A_{1sp}$  – área de uma cordoalha de protensão  
 $C_c$  – custo do concreto por metro cúbico  
 $C_{costela}$  – custo adicional da armadura de costela em relação à viga de 500 mm  
 $C_{estribo}$  – custo adicional da armadura de estribo em relação à viga de 500 mm  
 $C_f$  – custo das formas por metro quadrado  
 $C_{final}$  – custo final da função de aptidão implementada no programa  
 $CL$  – custo da laje  
 $C_m$  – custo da viga por metro  
 $C.M$  – coeficiente de majoração  
 $C_{mín}$  – custo mínimo para a seção transversal da viga  
 $C_{mm}$  – custo da estrutura por metro quadrado  
 $C_p$  – custo do aço de protensão por quilo  
 $C_{sp}$  – custo do aço de protensão por metro cúbico  
 $C_{st}$  – custo do aço passivo por metro cúbico  
 $C_t$  – custo do aço passivo por quilograma  
 $C_{tot}$  – custo total da estrutura  
 $C_1$  – custo do aço de protensão por unidade de força  
 $C_2$  – custo do concreto por unidade de área  
 $F_i$  – aptidão do  $i$ -ésimo cromossomo  
 $F_{prot}$  – força de protensão  
 $K$  – comprimento do cromossomo  
 $K_b$  – custos indiretos relativos ao aumento do número de andares da construção  
 $K_v$  – constante que representa a correção no volume de concreto  
 $K_1$  – constante relativa aos custos com formas e acabamentos  
 $L_j$  – comprimento das barras da treliça  
 $L_T$  – comprimento total da ponte  
 $L_{tab}$  – largura do tabuleiro da ponte  
 $M_i$  – comprimento de cada vão  
 $M_p$  – momento de projeto  
 $M_r$  – momento fletor resistente na seção da ponte  
 $M_u$  – momento fletor último

$N_{pop}$  – tamanho da população  
 $P$  – precisão requerida pela variável  
 $P_r$  – perímetro da seção transversal  
 $R_1$  – coeficiente de penalização  
 $V_c$  – volume de concreto  
 $V_{c\_laje}$  – volume de concreto da laje  
 $V_{s\_laje}$  – volume de aço da laje  
 $V_{sp}$  – volume de armadura de protensão  
 $V_{st}$  – volume de armadura passiva  
 $\gamma_s$  – massa específica do aço  
 $\rho$  – taxa de armadura da viga  
 $\sigma_{c,t}$  – tensão de tração admissível no concreto

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

De uma forma geral, o projeto e dimensionamento das estruturas de concreto armado e protendido são desenvolvidos a partir de uma configuração inicial baseada na experiência do projetista, o qual visa obter um projeto aceitável ou adequado que simplesmente satisfaça os requisitos funcionais (de norma) e atenda as especificações de projeto. Entretanto, na maioria dos problemas de engenharia, tem-se mais de uma configuração possível que atende a estas exigências.

Diante desta realidade, aliando-se à crescente velocidade de processamento dos computadores atuais e à enorme competitividade criada entre empresas que buscam redução nos custos de seus projetos, constata-se que os processos de otimização têm se tornado uma importante ferramenta à disposição da Engenharia Estrutural.

De maneira sucinta, pode-se definir otimização como sendo uma maneira inteligente de se alcançar a melhor solução dentre as inúmeras possíveis para um determinado problema. Há a necessidade de identificar as variáveis envolvidas e seus limites de variação, assim como as constantes relevantes do problema, de maneira a poder equacioná-las, objetivando representar o problema e suas restrições para então buscar a solução ótima. Na engenharia civil já vem sendo muito aplicada em todas as suas subáreas como: no projeto de redes de abastecimento de água, na dosagem de materiais, no gerenciamento de itinerários de linhas de transporte, bem como na otimização de projetos de estruturas, focalizando principalmente a minimização de custos.

O objetivo deste trabalho é obter o pré-dimensionamento ótimo de estruturas pré-moldadas, mais especificamente, da superestrutura de pontes rodoviárias com vigas biapoiadas de seção transversal tipo I em concreto protendido pré-tracionado com cabos retos. Para alcançar este objetivo, implementou-se uma rotina em algoritmo genético na linguagem Visual Basic. Esta rotina funciona como um pré-processador para outro programa de análise não linear de seções de concreto armado e protendido que considera a não-linearidade física dos materiais aço e concreto, tal como o desenvolvido por ARGOLLO (2000).

Como forma de comprovação da eficiência do programa desenvolvido e dos resultados obtidos, compara-se o custo da solução ótima com o custo de soluções de obras de pontes e viadutos já realizadas pela empresa PREMAG.

Os motivos pelos quais optou-se pela utilização de um método estocástico, como é o caso dos algoritmos genéticos, foram as vantagens que os mesmos apresentam em relação aos métodos clássicos (determinísticos). É um método de busca que utiliza formulações simples, sem cálculos matemáticos complexos, que são relativamente fáceis de serem implementadas e que vêm obtendo êxito em suas diferentes aplicações como ferramenta de otimização. Atualmente, há uma grande tendência em se utilizar métodos mais flexíveis, como é o dos algoritmos genéticos, na solução dos problemas de engenharia em geral.

Um outro ponto favorável à escolha do método dos algoritmos genéticos como ferramenta matemática foi a sua facilidade no tratamento das variáveis de um problema de forma discreta, o que possibilita a determinação de uma solução ótima que seja executável na prática.

Apesar de na literatura técnica serem encontrados vários trabalhos sobre a aplicação dos diferentes métodos existentes para a resolução de problemas de otimização, nenhum foi encontrado envolvendo o método dos algoritmos genéticos aplicado na otimização de vigas de ponte em concreto pré-moldado protendido. Essa foi também uma das razões pelas quais decidiu-se pela escolha desta técnica de otimização.

No Capítulo 2 é apresentada a formulação e algumas definições relacionadas à otimização, em seguida é feito um resumo dos principais métodos determinísticos e estocásticos. Faz-se uma revisão bibliográfica sobre otimização estrutural e também uma comparação entre o método dos algoritmos genéticos e os métodos determinísticos, apontando suas vantagens e desvantagens.

No Capítulo 3 é abordado o método dos algoritmos genéticos: definição, nomenclatura, codificação, avaliação da população, seleção, operadores genéticos, parâmetros e critérios de parada.

No Capítulo 4 é feita a descrição do algoritmo implementado neste trabalho, apresentando-se as janelas do programa, a forma de codificação das variáveis envolvidas, juntamente com a função-objetivo desenvolvida para solução do problema proposto.

Aplicações feitas com o programa e a comparação dos seus resultados com os de projetos já realizados pela empresa PREMAG encontram-se no Capítulo 5. As conclusões e proposições para trabalhos futuros estão presentes no Capítulo 6.

## CAPÍTULO 2 - OTIMIZAÇÃO

### 2.1 - Introdução

Neste Capítulo, aborda-se, de maneira resumida, a formulação matemática do problema de otimização e as principais técnicas de otimização, assim como alguns trabalhos sobre otimização estrutural onde se utilizaram diferentes técnicas de otimização. Finalmente, é feita comparação entre os métodos clássicos (determinísticos) e o método dos algoritmos genéticos.

### 2.2 – Formulação do Problema

A formulação matemática do problema de otimização fundamenta-se na extremização de uma ou mais funções representativas do problema, com um ou mais objetivos e sujeito ou não a restrições.

*Formulação Clássica de Otimização*

Maximizar ou Minimizar:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (função-objetivo)

Sujeita a:  $h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$   
 $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r$  } (Restrições de comportamento)

$x_k^{(L)} \leq x_k \leq x_k^{(U)} \quad k = 1, 2, \dots, n$  (Restrições laterais nas  $x_k$  variáveis

de projeto)

Alguns conceitos e definições importantes referentes aos problemas de otimização (SHEHATA e LEITE, 1999) são apresentados a seguir, de forma a facilitar a compreensão do presente trabalho.

- **Variável de Projeto** → São os parâmetros que se alteram durante o processo de otimização. Elas podem ser classificadas em dois tipos: variáveis de dimensionamento (contínuas ou discretas) e variáveis de decisão. Como exemplos de variáveis de dimensionamento podem ser citadas as dimensões de seções transversais ou a espessura de uma laje de concreto. Como variáveis de decisão tem-se por exemplo o número de apoios de uma estrutura, o tipo de material de cada elemento ou o número de camadas de aço numa viga.

- **Função-objetivo** → Função a qual se pretende minimizar ou maximizar, consistindo em um critério para julgar se uma configuração de projeto é melhor que a outra. Ela pode ser classificada como multidimensional, quando se pretende otimizar mais de uma variável, ou unidimensional.
- **Restrições de Projeto** → São as funções de igualdade e desigualdade que descrevem e caracterizam as situações limítrofes de projeto. Podem ser de dois tipos: *restrições laterais*, as quais limitam os valores das variáveis de projeto e *restrições de comportamento*, que definem as condições limites desejáveis de tensões ou deslocamentos, por exemplo.
- **Espaço de Busca** → É o conjunto, espaço ou região que compreende as possíveis ou viáveis soluções do problema a ser otimizado, sendo caracterizado pelas funções de restrição.
- **Ponto Ótimo** → É o ponto pertencente ao espaço de busca, que caracteriza-se pelo vetor das variáveis de projeto que extremizam a função-objetivo.
- **Valor Ótimo** → É o valor da função-objetivo no ponto ótimo.
- **Solução Ótima** → É o par formado pelo ponto ótimo e o valor ótimo, podendo ser de quatro diferentes tipos: *local* quando o valor ótimo é localizado, *global* quando o valor ótimo é global na região viável, *restringida* quando atende a todas as restrições impostas e *não-restringida* quando deixa de atender a pelo menos uma das restrições.

### 2.3 - Métodos de Otimização

A otimização pode ser definida como um conjunto de procedimentos através dos quais se busca encontrar uma direção que maximize ou minimize uma função-objetivo, almejando-se sempre o melhor aproveitamento dos recursos disponíveis. A estratégia adotada nessa busca é que caracteriza os diferentes métodos de otimização existentes.

De acordo com a natureza e/ou com as restrições do problema, pode-se dividir os métodos de otimização em dois grupos principais: a programação linear e a programação não-linear.

### 2.3.1 – Programação Linear

A programação linear (PL) tem como objetivo encontrar a solução ótima em problemas onde a função-objetivo e todas as restrições são representadas por funções (equações ou inequações) lineares das variáveis de projeto. Segundo LUENBERGER (1984), qualquer problema de programação linear pode ser representado por uma “formulação padrão”:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar/Maximizar:} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1) \\ \text{Sujeita a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ \text{e} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \end{array}$$

onde  $Z$  é a função-objetivo,  $x_i$  são as variáveis ou incógnitas e  $b_i$ ,  $c_i$  e  $a_{ij}$  são as constantes do problema.

#### Método Simplex

Desenvolvido na década de quarenta, é o principal método de otimização dentro da programação linear. Pode ser definido pelos seus três teoremas fundamentais:

*Teorema I* : O conjunto de todas as soluções factíveis (viáveis) do modelo de programação linear é um conjunto convexo.

Um conjunto de pontos é dito convexo se, para qualquer par de pontos  $A$ ,  $B$  desse conjunto, o segmento  $AB$  está inteiramente nele contido.

*Teorema II* : Toda solução factível básica do sistema  $Ax = b$  é um ponto extremo do conjunto das soluções factíveis, isto é, do conjunto convexo definido no Teorema I.

Solução básica é uma solução obtida para um sistema  $Ax = b$ , fazendo  $(n-m)$  variáveis iguais a zero (variáveis não básicas) e resolvendo o mesmo em relação às

demais (variáveis básicas). Sendo  $n$  o número de incógnitas e  $m$  o número de equações lineares.

*Teorema III :*

a) Se a função-objetivo possui um máximo ou mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo definido no Teorema I.

b) Se a função-objetivo assume o máximo ou mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.

De acordo com PUCCINI (1990), o método Simplex para problemas de maximização pode ser resumido em cinco etapas:

i) Achar uma forma canônica inicial para o sistema de equações, isto é, achar uma solução factível básica óbvia;

ii) Verificar se esta solução é ótima colocando a função-objetivo somente em termos das variáveis não-básicas; se todos os coeficientes dessas variáveis forem negativos (ou nulos), a solução é ótima. Se isto não ocorrer, passa-se para o passo iii.

iii) Determinar a variável não-básica que deve entrar na base, que é aquela que tiver o maior coeficiente na função-objetivo;

iv) Tirar da base a variável básica que se anular mais rapidamente quando a variável que entrar for aumentada de valor;

v) Achar uma outra forma canônica para o sistema de equações, levando em consideração os passos (iii) e (iv). Voltar ao passo (ii).

Os problemas de minimização podem ser transformados em problemas de maximização considerando-se que:

$$\text{Minimizar } f(x) = - \text{Maximizar } \{-f(x)\} \quad (2.2)$$

A principal limitação da programação linear é que a maior parte dos problemas de otimização em engenharia não podem ser representados por funções lineares das variáveis de projeto.

### 2.3.2 – Programação Não-Linear

A Programação Não-Linear (PNL) trata dos problemas onde a função-objetivo ou alguma(s) das restrições do problema são funções não-lineares das variáveis envolvidas. Pode-se dividi-la em duas grandes famílias: os métodos determinísticos e os não-determinísticos.

#### 2.3.2.1 – Métodos Determinísticos

Os métodos determinísticos, também denominados de métodos clássicos, em geral são baseados no cálculo de derivadas de primeira ordem ( $f \in C^1$ ) ou em aproximações destas, ou também no cálculo de derivadas parciais de segunda ordem ( $f \in C^2$ ). A procura do ponto ótimo usa as coordenadas do ponto corrente ( $x_k$ ) como ponto de partida para a próxima iteração ( $k+1$ ). Em geral, a resolução de problemas sem restrições consiste em se aplicar, de forma iterativa, a equação abaixo:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \quad (2.3)$$

onde  $\lambda_k$  é o passo de cálculo e  $d_k$  é a direção de busca do ponto ótimo.

O passo de cálculo controla a evolução da solução e o seu valor pode ser obtido por métodos do tipo Golden Section (Seção Áurea), Fibonacci, e outros. A descrição destes métodos pode ser encontrada em ADBY (1982) e BOX *et al.* (1969).

A diferença entre os diferentes métodos de PNL para solução de problemas de otimização consiste no modo de determinação do vetor  $d_k$ .

Existem também dentro da PNL métodos para minimização de funções que não usam derivadas, também conhecidos por métodos de pesquisa, dentre os quais destacam-se o de Hooke e Jeeves, o de Rosenbrock e o de Powell (BOX *et al.*, 1969 e MATEUS, 1986).

Abaixo são apresentados métodos de otimização sem restrições: o método do Gradiente, o de Newton, o do Gradiente Conjugado e os métodos Quase-Newton, e também métodos de minimização com restrição: o método das Penalidades, o das Barreiras e o método do Lagrangeano Aumentado.

## Método do Gradiente

Também conhecido como método de Cauchy ou máximo declive (steepest descent), é um dos mais antigos e conhecidos métodos de minimização de funções. É bastante simples em termos computacionais, mas tem convergência lenta chegando muitas vezes a não convergir em um tempo razoável. Tal convergência depende da forma da função ou do peso relativo de cada variável.

É um método que utiliza poucas informações, exigindo apenas as derivadas de primeira ordem para o cálculo do gradiente. Como o gradiente aponta na direção de maior crescimento da função no ponto, o método procura em cada ponto caminhar na direção oposta ao gradiente. Portanto, a direção de busca é a direção oposta ao gradiente.

O método do gradiente é definido pelo algoritmo iterativo

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \quad (2.4)$$

onde  $d_k = -\nabla f(x_k)$  e  $\lambda_k$  é um escalar não-negativo que minimiza  $f(x_k + \lambda_k d_k)$ .

Em outras palavras, a partir de  $x_k$ , procura-se ao longo da direção  $d_k$  um mínimo sobre esta reta, dado por  $x_{k+1}$ .

## Método de Newton

O princípio deste método é minimizar uma função  $f$  através de uma aproximação local por uma função quadrática, sendo, assim, uma extensão do método do gradiente. As aproximações quadráticas ganham importância à medida que se chega perto do ponto ótimo do problema, sendo melhores do que as lineares.

Próximo de  $x_k$ , tem-se uma aproximação para  $f(x)$  dada pela Série de Taylor truncada:

$$f(x) \cong f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + 0,5(x - x_k)^T F(x_k)(x - x_k) \quad (2.5)$$

onde  $F(x_k)$  é a matriz Hessiana no ponto  $x_k$ .

O método é executado em um processo iterativo tal que:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \cdot [F(\mathbf{x}_k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (2.6)$$

onde  $[F(\mathbf{x}_k)]^{-1}$  é a inversa da matriz Hessiana da função  $f(\mathbf{x})$ , e é interpretada como sendo uma correção na direção  $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$ , com o objetivo de acelerar o processo.

A direção de busca é dada por:  $\mathbf{d}_k = [F(\mathbf{x}_k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$ .

O parâmetro  $\lambda_k$  corresponde ao passo, e pode ser encontrado utilizando-se um método de busca unidirecional ou também através de passos adaptativos na direção de busca, ou seja, fixa-se um valor nas primeiras iterações e, à medida que a solução se aproxima do ponto ótimo, decresce-se o valor de  $\lambda_k$ . Sendo  $f$  uma função quadrática, o método de Newton determina o ponto de mínimo em um único passo.

De acordo com LUENBERGER (1984) e MATEUS (1986), duas condições devem ser atendidas para que esse método possa convergir. A primeira é que a matriz Hessiana seja não singular, uma vez que se supõe a existência de sua inversa, e que também seja definida positiva, para que se possa garantir que  $\mathbf{d}_k$  seja uma direção de descida.

Na prática, para garantir  $F(\mathbf{x}_k)$  sempre definida positiva, é adotada uma aproximação para a matriz Hessiana, que pode ser encontrada de forma detalhada em LUENBERGER (1984).

### **Método do Gradiente Conjugado**

Pode ser considerado como algo intermediário entre o método do Gradiente e o método de Newton. Por utilizar direções de busca simples, isto é, direções conjugadas baseadas apenas em derivadas de primeira ordem, apresentam convergência mais rápida que o Steepest Descent, ao mesmo tempo em que contornam as dificuldades apresentadas pelo cálculo da matriz Hessiana presente no método de Newton.

Um conceito importante no método do Gradiente Conjugado é o referente a direções conjugadas, que, segundo LUENBERGER (1984), é definido como:

“Dada uma matriz simétrica  $Q$ , dois vetores  $\mathbf{d}_0$  e  $\mathbf{d}_1$  são ditos  $Q$ -ortogonais ou conjugados em relação à  $Q$  se  $\mathbf{d}_0^T Q \mathbf{d}_1 = 0$ ”.

Generalizando o conceito acima, tem-se que um conjunto finito de vetores  $\{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n\}$  é dito  $Q$ -ortogonal se  $\mathbf{d}_i^T Q \mathbf{d}_j = 0$  para todo  $i \neq j$ , e, sendo a matriz  $Q$

definida positiva, estes vetores são linearmente independentes. A matriz Hessiana  $F(x_k)$  é um exemplo da matriz  $Q$  acima citada.

O método do gradiente conjugado gera a cada passo uma direção conjugada  $d_k$  que é uma combinação linear de  $-\nabla f(x_k)$  e da direção usada no passo anterior ( $d_{k-1}$ ). Sua implementação é mais complicada que a do método do Gradiente, mas a convergência é obtida em um número menor de passos. De acordo com MATEUS (1986), o algoritmo abaixo descreve os principais procedimentos deste método:

Início

Definir uma tolerância ( $\varepsilon$ ) e um ponto de partida  $x_0$

Fazer  $k \leftarrow 0$

Calcular  $\nabla f(x_0)$

Se  $\|\nabla f(x_0)\| \geq \varepsilon$  Então

$$d_0 \leftarrow -\nabla f(x_0)$$

$$\lambda_0 \leftarrow -\frac{\nabla^T f(x_0) \cdot d_0}{(d_0)^T \cdot F(x_0) \cdot d_0}$$

$$x_1 \leftarrow x_0 + \lambda_0 \cdot d_0$$

Calcular  $\nabla f(x_1)$

Enquanto  $\|\nabla f(x_{k+1})\| \geq \varepsilon$  Faça

$$d_{k+1} \leftarrow -\nabla f(x_{k+1}) + \frac{\nabla^T f(x_{k+1}) \cdot \nabla f(x_{k+1})}{\nabla^T f(x_k) \cdot \nabla f(x_k)} \cdot d_k$$

$$k \leftarrow k + 1$$

$$\lambda_k \leftarrow -\frac{\nabla^T f(x_k) \cdot d_k}{(d_k)^T \cdot F(x_k) \cdot d_k}$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + \lambda_k \cdot d_k$$

Calcular  $f(x_{k+1})$

Calcular  $\nabla f(x_{k+1})$

fim do Enquanto

fim do Se

Fim

## Métodos Quase-Newton

Assim como o do Gradiente Conjugado, os métodos Quase-Newton também são considerados como algo intermediário entre a simplicidade do Steepest Descent e a rapidez de convergência do de Newton. São também chamados de métodos de Métrica Variável (nome dado inicialmente ao método de *Davidon-Fletcher-Powell* – DFP).

A idéia fundamental do método é utilizar em um processo iterativo finito uma aproximação para a inversa da matriz Hessiana em vez de se fazer um cálculo exato como no método de Newton, utilizando para tanto apenas derivadas de primeira ordem. A aproximação é melhorada durante o processo iterativo.

No método de Newton utiliza-se a Equação 2.6, enquanto aqui se emprega a equação abaixo:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \cdot [D(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (2.7)$$

onde  $[D(x_k)]^{-1}$  é a matriz que aproxima a inversa da Hessiana.

A forma de aproximação varia de acordo com os diferentes métodos, desde a mais simples que se mantém fixa durante todo o processo iterativo até as mais avançadas que implementam aproximações melhoradas baseadas nas informações anteriores coletadas durante o processo. Os principais métodos (LUENBERGER, 1984 e MATEUS, 1986) são: o método de Broyden, o método DFP proposto por Davison (1959) e estendido por Fletcher e Powell (1963) e o método BFGS desenvolvido por Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno.

Os três próximos métodos tratam da resolução dos problemas sujeitos a restrições. Objetivam transformar tais problemas em outros equivalentes sem restrições, através do uso de funções de penalidade, isto é, adicionando-se a função a ser minimizada uma parcela que estabelece penalizações pela violação das restrições.

As penalizações são aplicadas através das funções de penalidade propriamente ditas e das funções de barreira. Uma terceira técnica também adotada consiste na utilização da função lagrangeana aumentada, que se apresenta como uma extensão do conceito dos multiplicadores de Lagrange, com a incorporação de funções de penalidade.

## Método de Penalidade

Considere-se o problema (1):

Minimizar:  $f(x)$

Sujeito a:  $x \in S$

onde  $f$  é uma função contínua em  $R^n$  e  $S$  é o espaço solução do problema.

A idéia do método é transformar o problema (1) em um da forma:

$$\text{Minimizar: } q(c_k, x) = f(x) + c_k \cdot P(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

onde  $c_k \geq 0$ ,  $c_{k+1} \geq c_k$ ;  $q(c_k, x)$  é a função auxiliar e  $P(x)$  é a função de penalização definida no  $R^n$  e que deve satisfazer as seguintes condições:

1ª -  $P(x)$  deve ser contínua em  $R^n$ ;

2ª -  $P(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n$ ;

3ª -  $P(x) = 0$ , se e somente se,  $x \in S$ ;

Para cada valor de  $k$  resolve-se a Equação 2.8 obtendo-se um valor para  $x_k$ . À medida que  $c_k$  cresce para o infinito, para que  $q(c_k, x)$  seja minimizada, é necessário que  $P(x)$  se aproxime de zero, isto é, para que o valor da Equação 2.8 convirja para a solução do problema (1).

A função de penalização mais usada neste método é:

$$P(x) = 0,5 \cdot \sum (\text{máx } [0, g_i(x)])^2, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.9)$$

onde  $g_i(x) \leq 0$  (funções restritivas)

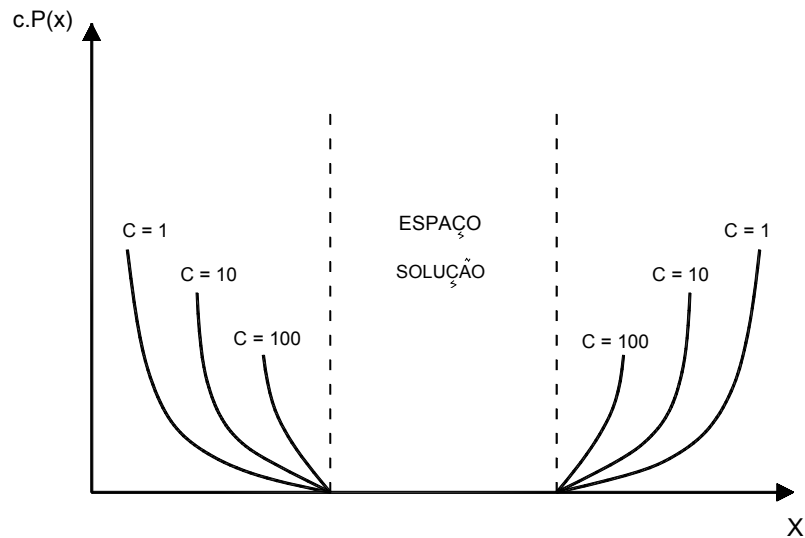


Figura 2.1 – Ilustração do método das Penalidades

Em geral, os pontos gerados são não viáveis, ou seja, localizam-se no exterior da região viável, e à medida que o valor do parâmetro  $c_k$  aumenta, as soluções intermediárias se aproximam da solução ótima do problema original. Por esta razão, esta técnica é também conhecida como método da função de penalidade exterior, (AVRIEL, 1976, MATEUS, 1986, VANDERPLAATS, 1984).

Como o método aproxima-se do ponto ótimo pelo exterior do espaço solução, torna-se viável apenas quando  $c_k \rightarrow \infty$ . Isto representa o ponto fraco deste método, uma vez que, no caso do processo de otimização parar prematuramente, a solução do problema será não viável. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em (AVRIEL, 1976, MATEUS, 1986, LUENBERGER, 1984).

### **Método das Barreiras**

Diferentemente do método anterior, aqui se trabalha dentro da região viável, isto é, parte-se de um ponto inicial viável e geram-se novos pontos também viáveis cada vez mais próximos da fronteira de restrição. As penalidades impostas criam barreiras que impedem a saída dessa região factível, e, por esse motivo, é também conhecido na literatura como método de penalidade interior (MATEUS, 1986).

O método das Barreiras é análogo ao método anterior. Considere-se novamente o problema (1), só que aqui a região S deve ter interior não vazio uma vez que as buscas são realizadas no interior dessa região.

A função-objetivo e suas restrições se transformam na função auxiliar dada pela Equação 2.10.

$$\text{Minimizar: } r(c_k, x) = f(x) + (c_k)^{-1} \cdot B(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

onde  $c_k \geq 0$ ,  $c_{k+1} \geq c_k$ ;  $r(c_k, x)$  é a função auxiliar e  $B(x)$  é a função barreira definida em S e que deve satisfazer as seguintes condições:

1ª -  $B(x)$  deve ser contínua em S;

2ª -  $B(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$ ;

3ª -  $B(x) \rightarrow \infty$ , quando x se aproxima dos limites de S;

Uma função típica e que atende a essas condições é dada por:

$$B(x) = - \sum (g_i(x))^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.23)$$

onde  $g_i(x) \leq 0$  (funções restritivas)

A principal dificuldade do método das Barreiras é a determinação do ponto de partida para o início do processo de otimização, uma vez que deve ser um ponto dentro da região viável, o que nem sempre é uma tarefa fácil.

A Figura 2.2 apresenta graficamente o mecanismo de busca da solução ótima pelo método das Barreiras.

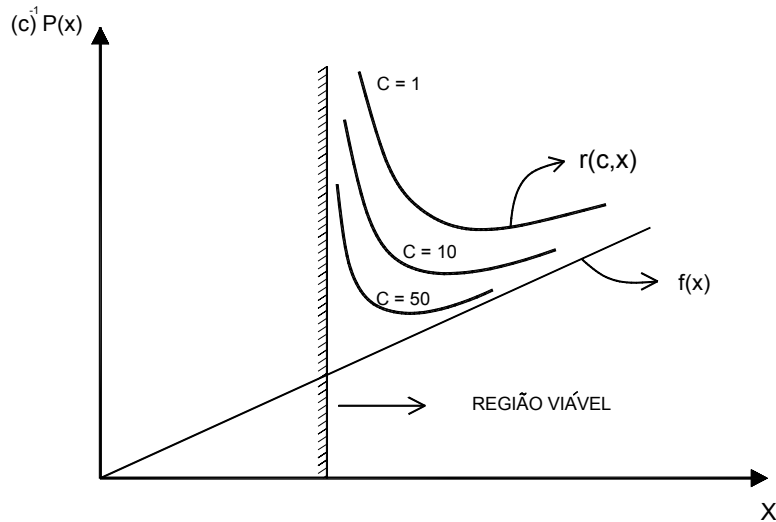


Figura 2.2 – Ilustração do método das Barreiras.

### Método do Lagrangeano Aumentado

O método do Lagrangeano Aumentado é baseado no método dos Multiplicadores de Lagrange, com a incorporação de funções de penalidade. É um dos métodos para resolução de problemas de otimização com restrições mistas que também são baseados na idéia de transformar o mesmo em um problema sem restrições. De acordo com WAH *et al.* (2000), a utilização de funções Lagrangeanas Aumentadas tem por objetivo promover uma melhor estabilidade numérica à solução do problema.

Para problemas de otimização do tipo (2), ou seja, aqueles sujeitos apenas a restrições de igualdade, têm-se:

Minimizar:  $f(x)$

Sujeito a:  $h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m_1$

Defini-se como a função Lagrangeana do problema (2) a Equação 2.11 abaixo:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i \cdot h_i(x), i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (2.11)$$

onde  $\lambda_i$  são denominados os Multiplicadores de Lagrange.

O processo consiste em determinar valores, para  $x$  e  $\lambda$ , que satisfaçam as condições necessárias de otimalidade sobre  $L(x, \lambda)$ , ou seja,  $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$  e  $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$ .

Para problemas de otimização do tipo (3), ou seja, aqueles sujeitos a restrições de igualdade e desigualdade, têm-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar: } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m_1 \\ &\quad g_j(x) \leq 0, j = m_1+1, \dots, m_2 ; m_2 > m_1 \end{aligned}$$

As restrições de desigualdade devem ser transformadas em restrições de igualdade a partir da introdução de uma variável de folga  $z_j^2$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar: } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m_1 \\ &\quad g_j(x) + z_j^2 = 0, j = m_1+1, \dots, m_2 ; m_2 > m_1 \end{aligned}$$

Neste caso, a função Lagrangeana do problema (3) fica definida como:

$$L(x,\lambda,z) = f(x) + \sum \lambda_i \cdot h_i(x) + \sum \lambda_j \cdot (g_j(x) + z_j^2) \quad (2.12)$$

onde  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  são os Multiplicadores de Lagrange.

Uma das condições necessárias de otimalidade sobre a função Lagrangeana 2.12 é que seu gradiente seja igual a zero.

Adicionando-se à função Lagrangeana do problema (2) um termo correspondente à penalidade tem-se a equação abaixo:

$$L_a(x,\lambda,c) = f(x) + \underbrace{\sum \lambda_i \cdot h_i(x)}_{\text{RI}} + c \sum h_i^2(x), i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (2.13)$$

onde  $L_a(x,\lambda,c)$  é a função Lagrangeana Aumentada e  $c$  é o fator penalidade.

Para os problemas do tipo (3), a função Lagrangeana Aumentada é dada por:

$$L_a(x,\lambda,c,\mu) = f(x) + \text{RI} + \underbrace{\sum [\lambda_j \cdot (g_j(x) + z_j^2) + c \cdot (g_j(x) + z_j^2)^2]}_{\text{Parcela referente à restrição de desigualdade}}, \quad (2.14)$$

$\downarrow$  Parcela referente à restrição de igualdade
  $\rightarrow$  Parcela referente à restrição de desigualdade

onde  $i = 1, 2, \dots, m_1$  e  $j = m_1 + 1, \dots, m_2$ .

Segundo VANDERPLAATS (1984), o método apresenta aspectos atrativos como a pouca sensibilidade ao valor do parâmetro de penalidade  $c$  que pode ser ajustado durante o processo, e que, diferentemente dos métodos anteriores, não precisa tender ao infinito, permanecendo de fato com valores relativamente modestos. Uma outra vantagem deste método em relação aos métodos das penalidades e das barreiras é que o ponto de partida pode ser viável ou não-viável.

### **2.3.2.2 – Métodos Não-Determinísticos**

Durante as últimas décadas, tem crescido de forma considerável a implementação de métodos de otimização não-determinísticos. São técnicas que imitam, de forma simplificada, fenômenos ou processos encontrados na natureza e, por esse motivo, denominadas de Computação Natural.

Dentro desta classe de métodos existe um imenso leque de técnicas, cada uma com sua aplicabilidade e utilidade. Dentre elas destaca-se a Inteligência Computacional e suas sub-áreas. As principais ramificações da Inteligência Computacional são: a computação evolutiva, a lógica fuzzy e as redes neurais artificiais.

Embora reconhecendo a importância dos sistemas neurais artificiais ou os baseados em lógica fuzzy, abordam-se neste trabalho somente as técnicas da computação evolutiva, pois é onde se encontra o método dos algoritmos genéticos.

Conforme MICHALEWICZ (1997), os mais conhecidos algoritmos dentro da classe Computação Evolutiva incluem: os Algoritmos Genéticos, as Estratégias Evolutivas, a Programação Evolutiva e a Programação Genética, e ainda formas híbridas desses algoritmos.

Um outro algoritmo bastante conhecido dentro da Computação Natural é o método do Recozimento Simulado, que, apesar de não apresentar exatamente características da Inteligência Computacional, também se baseia em um mecanismo encontrado na natureza, o processo de recozimento dos metais.

Para um melhor entendimento da estruturação dos métodos acima mencionados, ilustram-se na figura 2.3 as ramificações da Computação Natural:

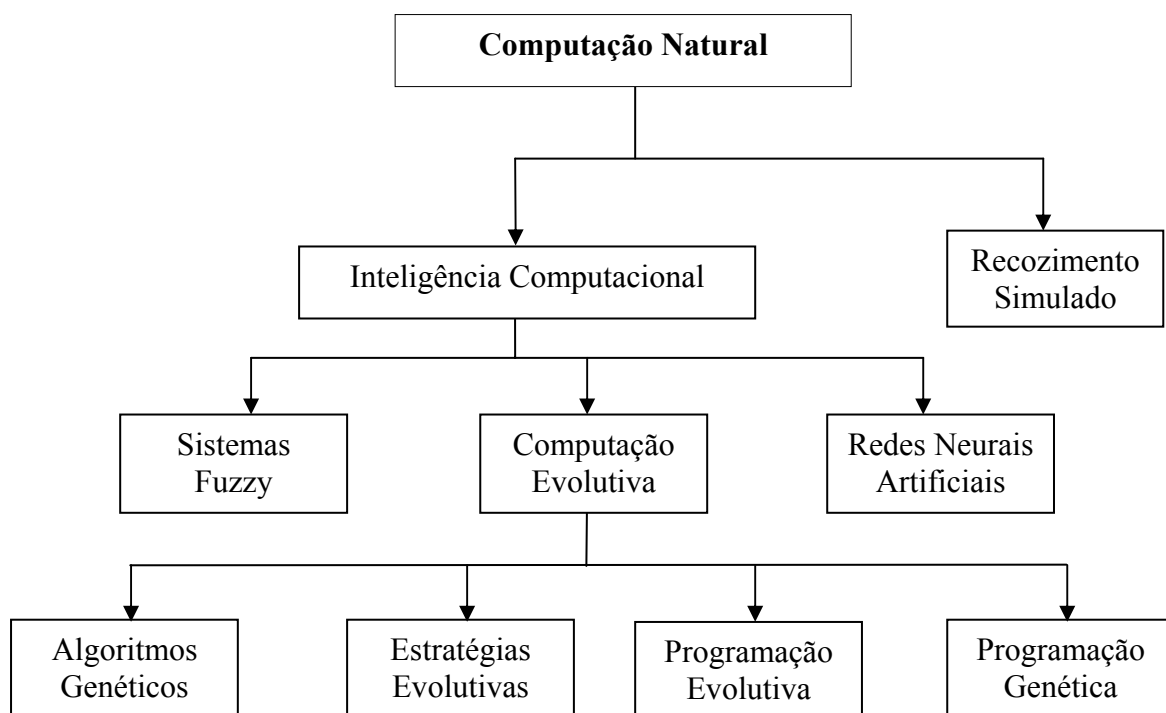


Figura 2.3 – Ramificações da Computação Natural

### 2.3.2.2.1 - Computação Evolutiva

Apesar de ter surgido no final da década de 70, devido ao alto esforço computacional exigido, a utilização prática de sistemas com técnicas de Computação Evolutiva tornou-se viável somente na última década com o surgimento de computadores de alto desempenho (para a época) e baixo custo.

São técnicas estocásticas de busca e aprendizagem, inspiradas nos mecanismos da evolução natural das espécies. Compartilham de um conceito em comum baseado na evolução de cada indivíduo via processos de seleção, mutação e reprodução ([www.kneehighs.com/related.html](http://www.kneehighs.com/related.html)).

A estrutura básica dos algoritmos pertencentes ao grupo da Computação Evolutiva é apresentada abaixo (MICHALEWICZ, 1997):

## Algoritmo Evolucionário

### **Início**

$t \leftarrow 0$

Inicializar a população

Avaliar a população

**Enquanto** (critério de parada não for satisfeito) **Faça**

$t \leftarrow t + 1$

Selecionar indivíduos

Alterar indivíduos

Avaliar indivíduos

**Fim do enquanto**

### **Fim**

A seguir apresentam-se características dos principais métodos da Computação Evolutiva.

## **Algoritmos Genéticos**

Os Algoritmos Genéticos (AGs) são técnicas não-determinísticas de busca pelo ponto ótimo que manipulam um espaço de soluções potenciais utilizando mecanismos inspirados nas teorias de seleção natural. São eficientes e robustos em espaços de procura irregulares, multidimensionais e complexos (GOLDBERG, 1989). O procedimento básico de otimização por AGs utiliza três operadores básicos: seleção, recombinação e mutação (DAVIS, 1996, HOLLAND, 1975, MICHALEWICZ, 1996). Outras informações sobre AGs são apresentadas no Capítulo 3.

## **Estratégias Evolutivas**

As Estratégias Evolutivas (EEs) foram desenvolvidas inicialmente para a resolução de problemas técnicos de otimização em engenharia, mais precisamente em experimentos realizados com túneis de vento (BÄCK, 1997), sendo atualmente utilizado como algoritmo computacional em problemas de otimização de parâmetros.

Operam com cromossomos na forma de vetores de números reais e foram originalmente desenvolvidos na proporção (1+1), isto é, cada pai gera um filho por geração. A EE-(1+1) vem sendo progressivamente generalizada por variantes do

número de ancestrais (pais),  $\mu > 1$ , e número de descendentes (filhos),  $\lambda > 1$ , por geração. As EEs com multimembros são divididas em dois grupos de acordo com o mecanismo de seleção (COELHO e COELHO, 1998) em:

- (i) *plus strategy* ou EE- $(\mu+\lambda)$ , onde os  $\mu$  ancestrais produzem  $\lambda$  filhos e em seguida todos competem pela sobrevivência;
- (ii) *comma strategy* ou EE- $(\mu,\lambda)$ , onde os  $\lambda$  descendentes competem para sobreviver e os ancestrais são completamente substituídos a cada geração.

### **Programação Evolutiva**

A Programação Evolutiva (PE) foi desenvolvida por Lawrence J. Fogel em 1962, e teve seu objetivo inicial voltado para a evolução de máquinas de estado finito, sendo posteriormente estendida a problemas de otimização de parâmetros.

Diferentemente dos AGs, são técnicas que simulam a evolução enfatizando a ligação comportamental entre as populações geradas (ancestrais e descendentes) ao invés de tentar imitar os operadores genéticos específicos observados na natureza ([www.kneehighs.com/related.html](http://www.kneehighs.com/related.html)). Trabalham com populações de indivíduos que sofrem diferentes níveis de mutação ao longo do processo, normalmente reduzindo-se à medida que a solução se aproxima do ponto ótimo. O procedimento de otimização usual da Programação Evolutiva pode ser encontrado em FOGEL (1994, 1995).

### **Programação Genética**

A resolução de um problema através da Programação Genética (PG) é uma busca através de possíveis combinações de expressões simbólicas definidas pelo projetista, onde cada expressão é codificada em uma estrutura em árvore com comprimento variável e subdividida em nós.

Os elementos da PG são divididos em dois alfabetos: um funcional constituído por operações aritméticas, funções matemáticas, operações lógicas e condicionais; e um terminal composto por variáveis de entrada apropriadas para o domínio do problema, valores constantes e números. O espaço de busca fica então definido pelo conjunto de todas as possíveis composições de funções que podem ser recursivamente compostas pelo alfabeto funcional e terminal. Maiores informações sobre o método

podem ser encontradas em (HOWARD e D'ANGELO, 1995, [www.kneehighs.com/related.html](http://www.kneehighs.com/related.html)).

#### **2.3.2.2.2 – Recozimento Simulado**

O primeiro trabalho sobre o método do Recozimento Simulado deve-se a KIRKPATRICK *et al.* (1983), que propôs um algoritmo inspirado no processo físico do recozimento dos metais aplicado à otimização de problemas como o da minimização do trajeto do caixeiro viajante. Esse estudo baseou-se no processo proposto por METROPOLIS *et al.* (1953) para o cálculo da distribuição de equilíbrio de um conjunto de átomos em diferentes temperaturas.

A analogia deste método com o processo físico do recozimento dos metais consiste em elevar a temperatura de um sólido acima de sua temperatura de fusão e, em seguida, baixá-la gradativamente de forma que a estrutura molecular atinja o máximo de organização estrutural. Neste momento, as moléculas irão adquirir uma estrutura cristalina estável e, por sua vez, um nível de energia mais fraco possível.

Na prática, pode ser encarado como um algoritmo que “esfria” vagarosamente a solução para garantir que a mesma possua a menor função-objetivo possível, ou seja, a solução ótima. Entretanto, se o resfriamento não for lento, poderá ocorrer à formação de mínimos locais.

### **2.4– Revisão Bibliográfica**

Neste tópico são resumidos trabalhos realizados por diferentes autores sobre a análise e o dimensionamento de estruturas em geral, tendo como objetivo a minimização de seus custos. Incluem-se não só trabalhos relacionados ao método dos algoritmos genéticos como também alguns estudos em que se utilizou como ferramenta de cálculo os chamados “métodos clássicos” de otimização. São abordados aspectos como: natureza do problema, formulação a ser minimizada, variáveis envolvidas na formulação, resultados e conclusões.

GOBLE e LAPAY (1971) realizaram um estudo pioneiro na área de otimização de vigas. Neste trabalho, os autores optaram por estudar o problema de transpor uma área retangular usando apenas vigas com seção I simplesmente apoiadas, pré-

moldadas, protendidas e dispostas lado a lado. A largura da mesa superior de cada viga é que definiu o espaçamento entre as mesmas, assim como seus respectivos carregamentos.

Como forma de simplificação, foi considerado apenas o caso de carregamento uniformemente distribuído. O propósito deste trabalho foi o de minimizar o custo da estrutura por unidade de área. Utilizou-se como ferramenta de otimização uma técnica de programação não-linear baseada em um algoritmo seqüencial, buscando-se minimizar a seguinte função custo:

$$C_{mm} = b_{sup}^{-1} \cdot (C_c \cdot A_c + C_{sp} \cdot A_{sp} + C_{st} \cdot A_{st} + K_1 \cdot P_r) \quad (2.15)$$

onde  $C_{mm}$  é o custo da estrutura por metro quadrado,  $C_c$  é o custo do concreto por metro cúbico,  $C_{sp}$  o custo do aço de protensão por metro cúbico,  $C_{st}$  o custo da armadura passiva por metro cúbico,  $K_1$  é uma constante referente aos custos com formas e acabamentos,  $P_r$  o perímetro da seção transversal e  $b_{sup}$  representa a largura do talão superior da viga. As variáveis  $A_c$ ,  $A_{sp}$  e  $A_{st}$  são, respectivamente, a área de concreto da seção, a área aço de protensão e a área de armadura passiva presente no talão superior da viga.

A formulação foi submetida a restrições de resistência à flexão, flechas máximas e mínimas e ainda limitações das tensões de tração e compressão, de acordo com a norma ACI 318-63. Quanto ao traçado da cablagem de protensão, adotaram apenas o apresentado na Figura 2.4, um dos mais freqüentes traçados utilizados em vigas pré-moldadas, onde a excentricidade do cabo é máxima no meio do vão.

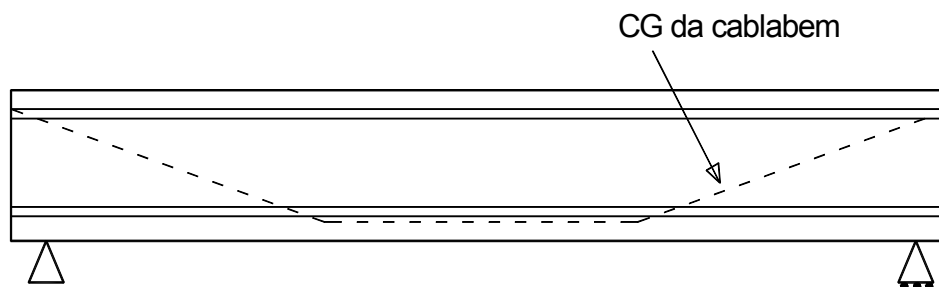


Figura 2.4 – Configuração do traçado do cabo de protensão [Goble e Lapay, 1971].

Em seus exemplos de aplicação, os autores diversificaram suas análises, variando parâmetros como: o comprimento do vão, o valor dos carregamentos e o custo dos materiais.

Os resultados mostraram que grandes variações na intensidade dos carregamentos afetaram muito pouco o custo por metro quadrado da estrutura. Observou-se também que alterações no custo do concreto ocasionaram mudanças proporcionais no custo final, e que aumentos na tensão admissível à tração do concreto não interferiram nos resultados finais.

Como ponto crítico do trabalho, os autores ressaltaram a possibilidade de redução do número de variáveis do problema.

KIRSCH (1972) também realizou um dos primeiros estudos sobre a otimização de vigas em concreto protendido com seção uniforme. Em seu trabalho, o autor objetivou minimizar a área de concreto da seção transversal, assim como o valor da força de protensão e da configuração dos cabos. Diferentemente de GOBLE e LAPAY (1971), realizou uma transformação de variáveis que lhe permitiu reduzir a otimização da solução a um problema de Programação Linear.

A função custo proposta neste estudo foi sujeita a algumas restrições: limitação das excentricidades e da força de protensão dos cabos; limites máximos e mínimos para as dimensões da seção de concreto e ainda limitação das tensões (máxima e mínima) no concreto. A Equação 2.16 representa tal formulação:

$$C_{\min} = C_1 \cdot F_{\text{prot}} + C_2 \cdot A_c \quad (2.16)$$

onde  $C_{\min}$  representa o custo mínimo para seção transversal da viga,  $C_1$  representa o custo do aço de protensão por unidade de força e  $C_2$  o custo do concreto por unidade de área. A variável  $F_{\text{prot}}$  representa o valor da força de protensão e  $A_c$  é a área de concreto da seção transversal.

Nas suas aplicações, utilizou uma viga contínua de concreto protendido e seção I, composta por dois vãos ( $L_1 = 10,0\text{m}$  e  $L_2 = 12,0\text{m}$ ), submetida a carregamento uniformemente distribuído e apresentando uma configuração parabólica para o cabo de protensão. KIRSCH (1972) variou os valores de  $C_1$  e  $C_2$ , assim como o limite superior

tanto da altura da seção de concreto como das excentricidades do cabo nas seções críticas.

Constatou-se que, para  $C_1 = C_2$ , diminuindo-se o valor do limite superior para a altura da seção ( $h_{sup}$ ) juntamente com um aumento da força de protensão ( $F_{prot}$ ), observa-se um aumento do valor da função custo, como ilustrado na Figura 2.5.

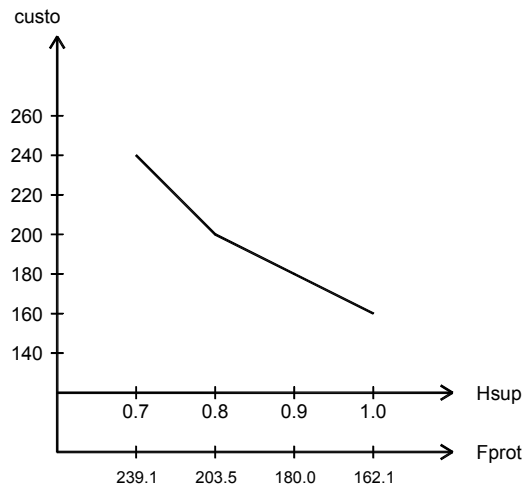


Figura 2.5 - Comportamento da função custo para o caso de  $C_1 = C_2$ , [Kirsch, 1972].

Para o caso de  $C_2 \gg C_1$  ( $C_2 = 2000 \times C_1$ ), uma diminuição no valor de  $h_{sup}$  associada ao aumento de  $F_{prot}$ , provoca uma diminuição no custo final até determinado ponto (ponto de mínimo), a partir do qual tais variações acarretam o crescimento do valor da função custo, como mostra a Figura 2.6.

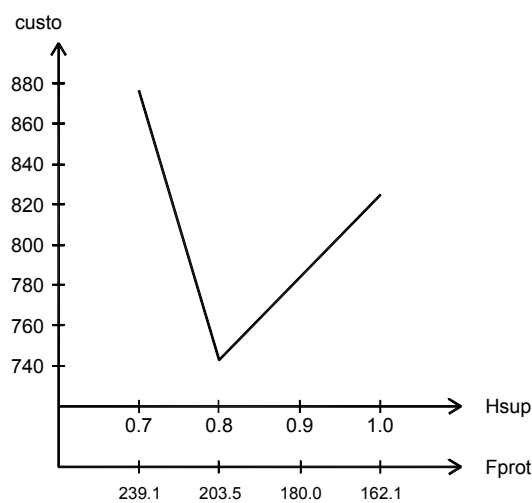


Figura 2.6 – Comportamento da função custo para o caso de  $C_2 \gg C_1$ , [Kirsch, 1972].

É importante observar a diferença comportamental da função-objetivo para diferentes relações de custo entre o aço de protensão e o concreto, (Figuras 2.5 e 2.6). Nesse trabalho, caso fosse considerada uma relação realmente prática entre  $C_1$  e  $C_2$ , poderia ter se chegado a valores realistas para o comportamento da função custo.

FRIEL (1974) realizou um estudo sobre a otimização de vigas retangulares de concreto armado com o objetivo de otimizar a taxa de armadura longitudinal e a altura útil para uma viga com armadura simples. Para a formulação do problema foi elaborada uma função custo por metro de viga composta por parcelas referentes aos custos do concreto, do aço, das formas e uma quarta parcela relativa aos custos indiretos do acréscimo no custo de uma edificação devido ao aumento de sua altura.

Foi utilizado o Método dos Multiplicadores de Lagrange para a minimização da função-objetivo, e estabeleceu-se apenas uma restrição quanto à capacidade resistente à flexão com base no ACI 318-71. A formulação a ser minimizada era:

$$C_m = A_{st} \cdot \gamma_s \cdot C_t + b \cdot d \cdot K_v \cdot C_c + (2 \cdot d + b) \cdot C_f + d \cdot K_b \quad (2.17)$$

onde  $C_m$  é o custo da viga por unidade de comprimento,  $C_t$  o custo da armadura passiva por quilograma,  $C_f$  o custo por metro quadrado das formas,  $\gamma_s$  é a massa específica do aço. As variáveis  $b$  e  $d$  representam as dimensões da base e da altura útil da seção, respectivamente.  $K_b$  representa os custos indiretos relativos ao aumento do número de andares da construção e a constante de volume  $K_v$  foi introduzida para representar uma correção no volume de concreto por metro de viga visando descontar o volume de aço.

Friel realizou uma série de aplicações com a formulação desenvolvida, desprezando as parcelas relativas ao custo das formas (terceira parcela da Equação 2.17) e ao custo indireto devido ao aumento da altura da edificação (quarta parcela da Equação 2.17), com a justificativa de que tais parâmetros pouco influíam na variação do custo total.

O autor ressaltou a possibilidade de se obter em alguns casos uma taxa de armadura ótima fora dos limites estabelecidos pela norma ACI 318-71, devendo-se neste caso utilizar o valor extremo mais próximo.

Analisando a curva referente ao comportamento da função custo em relação à taxa de armadura longitudinal, Figura 2.7, verifica-se que, sendo ela quase horizontal nas proximidades da taxa de armadura ótima, pode-se trabalhar com valores próximos ao ótimo sem que se tenha um acréscimo substancial no custo mínimo.

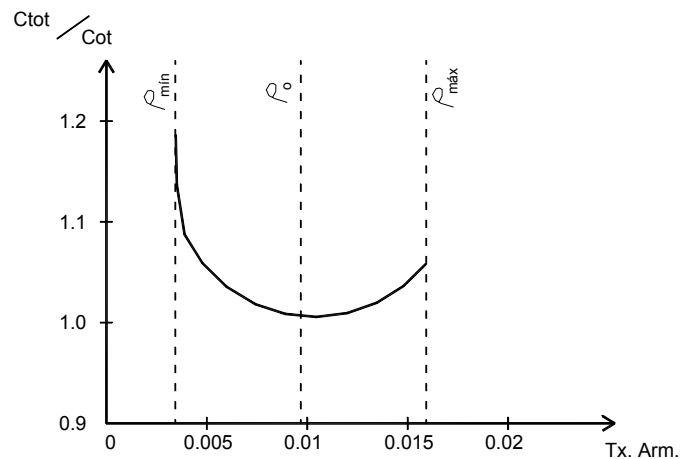


Figura 2.7 – Custo total dividido pelo custo ótimo como função da taxa de armadura [Friel, 1971].

Em continuação aos trabalhos de FRIEL (1974), CHOU (1977) buscou a obtenção da taxa de armadura longitudinal e altura efetiva ótimas para vigas de concreto armado com seção T, tratando como casos particulares as lajes e vigas de seção retangular.

Assim como FRIEL (1974), o autor usou o método dos multiplicadores de Lagrange para minimização da função custo por unidade de comprimento, a qual leva em consideração apenas os custos unitários do concreto e do aço:

$$C_m = C_{st} \cdot A_{st} + C_c \cdot A_c \quad (2.18)$$

Foram adotadas como restrições para o problema o limite superior para  $M_u$  (momento fletor último) e o intervalo de variação para a taxa geométrica de armadura longitudinal especificados pelo ACI 318-71. Estudou-se o caso de viga simplesmente armada e linha neutra interceptando tanto a alma quanto a mesa da seção.

Resultados das diferentes combinações de relação de custo aço/concreto, resistência do aço à tração ( $f_y$ ) e resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ) mostraram que a taxa de armadura ótima é sempre menor que a taxa máxima de armadura e consideravelmente maior que a taxa mínima de armadura estabelecidas pelo ACI 318-71. Tais resultados mostraram ainda que as reduções de custo em vigas de seção T foram de até 53% para  $f_c = 24$  MPa e  $f_y = 280$  MPa, e que para as vigas de seção retangular obteve-se redução de até 34% para  $f_c = 31$  MPa e  $f_y = 280$  MPa.

O autor ressaltou os pontos críticos da formulação por ele proposta: a altura efetiva e a área de aço longitudinal raramente permanecem constantes ao longo da viga; não se considerou armadura construtiva longitudinal (de pele) e transversal (estribos).

Do mesmo modo que FRIEL (1974), CHAKRABARTY (1992) estudou a otimização no dimensionamento de seções retangulares de vigas em concreto armado. Seu principal objetivo foi o de minimizar a função custo por unidade de comprimento da viga, utilizando para isso funções-peso que representassem a influência dos custos de cada material (concreto, aço, forma lateral e forma de fundo) no custo total da estrutura. Neste trabalho, a técnica utilizada para a obtenção da solução ótima foi a Programação Geométrica.

Algumas restrições foram impostas a esta função custo: restrições de equilíbrio interno e externo da seção, uma restrição quanto ao momento de flexão e restrições geométricas. A função-objetivo adotada pelo autor foi:

$$C_m = C_{st} \cdot A_{st} + C_c \cdot b \cdot d + C_f \cdot (b + d) \quad (2.19)$$

Nesse estudo, o autor adotou um diagrama retangular para a tensão de compressão no concreto e restringiu-se apenas à análise da seção com armadura simples. Avaliou o comportamento da função custo para diferentes valores da largura da seção mantendo constante o valor da altura útil das mesmas.

Chakrabarty verificou que reduções de custos são diretamente proporcionais às reduções na largura da seção e que, quanto menor o preço do aço, maior é a taxa geométrica de armadura da seção ótima e que a taxa de armadura ótima é significativamente afetada pelos preços do concreto e das formas. Verificou também

que os custos relativos à seção balanceada foram sensivelmente maiores que os da seção ótima, à exceção dos casos em que o preço do aço é muito pequeno ou o preço do concreto é muito grande. Isto é contrário à noção usual de que a seção balanceada é sempre a mais econômica.

RAJEEV e KRISHNAMOORTHY (1992) desenvolveram um programa baseado no método dos Algoritmos Genéticos visando à otimização de estruturas de aço planas e espaciais compostas por barras ligadas por nós. As variáveis envolvidas no problema foram tratadas como variáveis discretas, diferentemente dos trabalhos até aqui abordados.

Assim como na maioria dos problemas de otimização estrutural, neste também foram impostas algumas restrições de projeto: limitação da tensão nas barras e limitação dos deslocamentos vertical e horizontal dos nós.

Como o método dos Algoritmos Genéticos é mais apropriado a problemas de otimização sem restrições, através do método das penalizações, os autores transformaram o problema com restrições em um problema sem restrições.

A função custo objetivou a otimização do peso total da estrutura de aço, sendo definida pela seguinte expressão:

$$F(x) = \sum_{J=1}^n \gamma_s A_j L_j \quad (2.20)$$

onde  $n$  é o número de barras da estrutura,  $A$  é a área da seção transversal,  $L$  o comprimento de cada barra.

Entre outros exemplos, com objetivo de comprovar a robustez e a versatilidade do método também para estruturas de grande porte, os autores otimizaram o peso de uma torre de transmissão com 160 barras e 16 metros de altura. Para este problema, utilizaram populações de 40, 50 e 60 indivíduos. Na Figura 2.8 apresentam-se os resultados obtidos para a torre de transmissão.

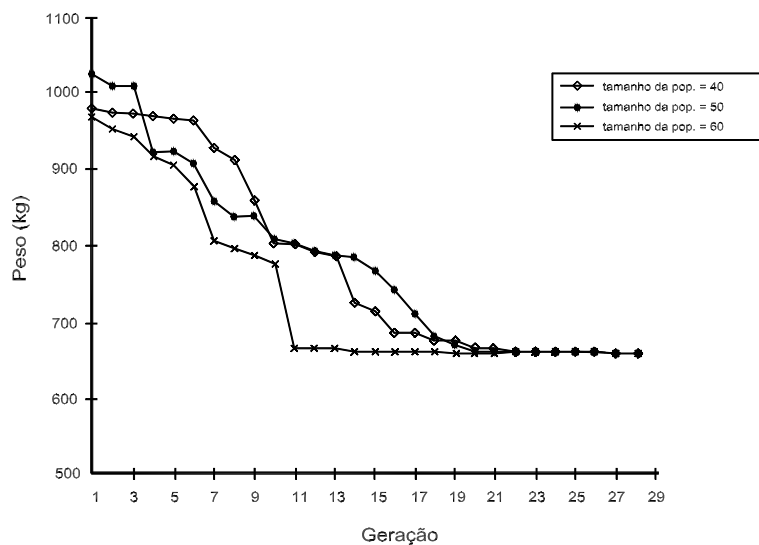


Figura 2.8 – Resultados para a torre de transmissão [Rajeev e Krishnamoorthy, 1992].

Analisando-se os resultados apresentados na Figura 2.8, observa-se uma evolução da população a cada geração em direção à solução mais econômica.

É importante ressaltar que o método dos AGs, por trabalhar com variáveis discretas, permite uma análise apenas das soluções viáveis na prática da engenharia, ao passo que os resultados de métodos de otimização que trabalham com variáveis contínuas, na maioria das vezes, não correspondem a soluções práticas.

Segundo os autores, um extenso estudo de valores para o tamanho da população deve ser realizado, pois, dependendo da quantidade de indivíduos, é necessário um número maior ou menor de gerações para atingir a convergência.

KANG *et al.* (1993) desenvolveram um estudo semelhante ao de CHOU (1977), onde também estudaram o dimensionamento ótimo de vigas de concreto armado com seções retangulares e seções T. Optaram pela utilização da programação não-linear, com a altura útil e a taxa de armadura longitudinal definidas como variáveis de projeto.

A função custo proposta foi submetida a restrições quanto aos limites de momento fletor e cortante e ainda limitações (superior e inferior) de dimensões da seção e da taxa de armadura, segundo as prescrições do ACI 318-89. Diferentemente de CHOU (1977), o autor levou em consideração o custo das formas, além dos custos do concreto e do aço.

Os autores concluíram que aumentos nos valores da resistência à compressão no concreto e da resistência ao escoamento do aço contribuem para reduções no custo das seções. Constataram também que essa economia é maior em seções T do que em seções retangulares. É importante registrar que em alguns casos não foram considerados os custos das formas, o que segundo os autores pode ter interferido nos resultados.

COHN e LOUNIS (1993) desenvolveram um estudo para otimização de vigas contínuas com protensão total e parcial. A solução ótima objetivou satisfazer simultaneamente ao estado limite último (correspondente ao colapso da estrutura) e ao estado limite de serviço. Os autores optaram neste caso por uma formulação não-linear e utilizaram o programa GAMS/MINOS que é baseado no Algoritmo Lagrangeano para a minimização da função-objetivo.

A formulação proposta foi submetida a restrições no estado limite de serviço de acordo com o ACI 318-89, limitando as tensões nas fibras extremas da seção, a fissuração e as flechas. Outras restrições quanto ao equilíbrio e à ductilidade no estado limite último também fizeram parte do trabalho.

Conhecendo-se a geometria e os carregamentos atuantes na viga, assim como as características e custos dos materiais (concreto e aço), a solução do problema se resumiu a minimizar o custo da armadura de flexão. As variáveis consideradas foram: a força de protensão (após perdas), as áreas e excentricidades dos cabos de protensão nas seções críticas e os fatores de redistribuição de momentos. Assim, a função custo ficou definida da seguinte maneira:

$$C_{\text{tot}} = C_c \cdot A_c \cdot \sum M_i + C_p \cdot \gamma_s \cdot V_{\text{sp}} + C_t \cdot \gamma_s \cdot V_{\text{st}} \quad (2.21)$$

onde  $C_{\text{tot}}$  é o custo total da viga,  $M_i$  o comprimento de cada vão da viga,  $C_p$  o custo por quilograma da armadura de protensão,  $V_{\text{sp}}$  representa o volume de aço de protensão e  $V_{\text{st}}$  é o volume de armadura passiva.

Os autores apresentaram dois exemplos de aplicação em vigas contínuas. A primeira delas, composta por três vãos e seção I, foi otimizada apenas para o estado limite último. A segunda, com dois vãos e seção retangular, foi otimizada tanto no

estado limite último quanto no estado limite de serviço. Em ambos os casos, avaliou-se a função custo para diferentes valores da tensão de tração admissível no concreto ( $\sigma_{c,t}$ ).

A partir dos resultados obtidos, Cohn e Lounis concluíram que o valor da função custo e da força de protensão diminuíram à medida que cresceu o valor de  $\sigma_{c,t}$ . Para valores altos de  $\sigma_{c,t}$ , a otimização no estado limite último é mais econômica que a otimização no estado limite de serviço, já para valores pequenos de  $\sigma_{c,t}$  esta diferença quase não existe.

AL-SALLOUM e SIDDIQI (1994) realizaram um estudo para otimização de vigas de seção retangular de concreto armado simplesmente armadas. Assim como no trabalho apresentado por CHAKRABARTY (1992), os autores trabalharam com uma função custo por unidade de comprimento constituída de parcelas relativas aos custos do concreto, aço e formas:

$$C_m = C_c \cdot (b \cdot h - A_{st}) + C_{st} \cdot A_{st} + C_f \cdot (2 \cdot h + b) \quad (2.22)$$

onde a variável  $h$  representa a altura da seção da viga. Baseados no ACI 318-89, Al-Salloum e Siddiqi estabeleceram algumas restrições à função custo como: resistência à flexão, valores máximos e mínimos para as taxas geométricas de armadura longitudinal e altura útil máxima da seção.

Assim como outros autores, utilizaram como ferramenta matemática a técnica dos Multiplicadores de Lagrange para a minimização da função custo.

Para comprovar a eficiência do programa, os autores apresentaram cinco diferentes situações, cada qual violando uma ou mais das restrições impostas. Como resultado, obtiveram para a altura útil ótima da seção valores até 58% abaixo da altura máxima permitida e para a taxa de armadura longitudinal ótima valores até 30% abaixo do limite máximo prescrito pela norma.

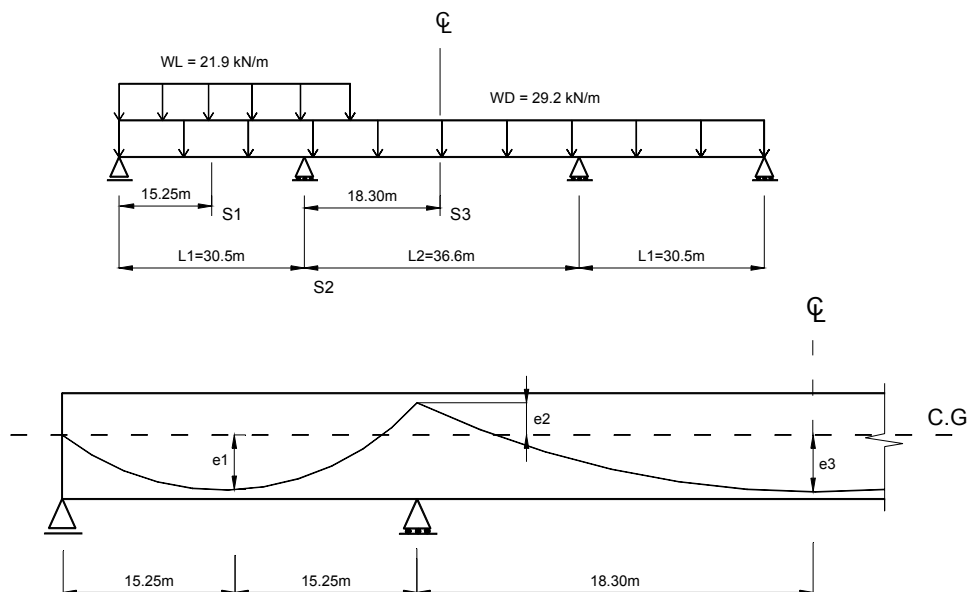
Foi apresentada ainda uma série de curvas mostrando o comportamento da função custo em relação às variáveis  $A_s$  e  $d$ .

Segundo Al-Salloum e Siddiqi, o modelo proposto apresenta como vantagens: a obtenção da solução ótima de forma direta e sem a necessidade de processos iterativos, não exigindo, portanto, o conhecimento prévio sobre otimização por parte do usuário; e o baixo esforço computacional exigido pelo método.

Na opinião dos autores, implementações visando à obtenção de um projeto ótimo com considerações de ordem prática poderiam ser incorporadas ao algoritmo, como, por exemplo: valores de altura útil da seção compatíveis com as dimensões das formas disponíveis no mercado; valores de diâmetros de barras de aço produzidas pelos fabricantes e a possibilidade da disposição das barras em mais de uma camada e com diferentes espaçamentos entre si.

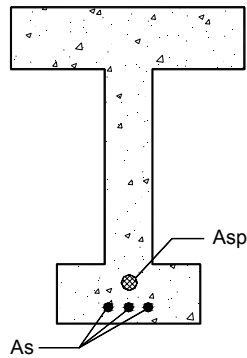
Fundamentados no trabalho de COHN e LOUNIS (1993), LEITE e TOPPING (1998) também investigaram o problema de otimização do custo de material de vigas I com protensão total e parcial. Utilizaram o método dos AGs, implementados com o sistema GEBENOPT (Genetic Based Engineering Optimization Tool).

Três diferentes casos foram estudados pelos autores. No primeiro caso, considerou-se como definida *a priori* a seção transversal da viga, no segundo caso variaram-se apenas as larguras das abas da mesa e da alma e no último caso, como extensão do trabalho de COHN e LOUNIS (1993), permitiram a variação de todas as dimensões da viga. A Figura 2.9 ilustra as características principais destas vigas.



a) Carregamento da viga e configuração da cablagem de protensão

Figura 2.9 – Características das vigas protendidas [LEITE e TOPPING (1998)].



b) Seção transversal da viga

Figura 2.9 – Características das vigas protendidas [LEITE e TOPPING (1998)] (continuação).

Com relação ao primeiro caso estudado pelos autores, ou seja, seção transversal definida *a priori*, os resultados do GAMS/MINOS ficaram menos que 1,0% mais econômicos quando comparados com os obtidos pelo programa GEBENOPT. No segundo caso, onde as larguras das abas da mesa e da alma foram reduzidas, uma economia de 11% foi obtida pelo programa GAMS/MINOS, já o GEBENOPT obteve uma solução 19% mais econômica. No último caso estudado por Leite e Topping (1998), onde todas as dimensões puderam variar, obteve-se uma redução no custo total de 21% com relação ao primeiro caso estudado.

Os autores comentam em suas conclusões que os valores obtidos pelos métodos de otimização determinísticos, como é o caso do GAMS/MINOS, são na prática difíceis de serem adotados, uma vez que certos materiais como o aço não se encontram disponíveis em séries contínuas.

LEMONGE (1999) utilizou os AGs na otimização de diferentes estruturas. Foram abordados problemas como: a minimização do peso de estruturas treliçadas, a otimização de parâmetros e a topologia em estruturas reticuladas planas e espaciais, e seus resultados foram comparados com os anteriormente obtidos por outros autores. Um dos objetivos de seu trabalho foi o de demonstrar a robustez e a facilidade de implementação do método dos AGs em diferentes problemas de engenharia.

O autor analisou ainda a estrutura de uma ponte rodoviária em concreto protendido, com três vãos, viga em seção caixão com duas células e pilares de seção

circular, considerando como variáveis a altura da longarina, o comprimento dos vãos e a seção transversal dos pilares. Neste problema, buscou-se obter uma locação ótima para os pilares bem como o melhor valor para a altura da viga, de forma que as funções objetivo propostas pelas Equações 2.23 e 2.24 fossem minimizadas.

$$F(x) = \int_{L_T} w \cdot u \cdot dL_T \quad (\text{compliance}) \quad (2.23)$$

onde  $w$  representa as forças externas aplicadas à estrutura ao longo de seu comprimento,  $u$  o deslocamento correspondente e  $L_T$  o comprimento total da ponte.

$$F_1(x) = \text{máx}(r_1, r_2, r_3, r_4) \quad (2.24)$$

sendo  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  as reações de compressão em cada um dos apoios.

Para a definição do diâmetro da seção transversal dos pilares, foram adotados quatro critérios diferentes:

*1º critério*  $\Rightarrow$  escolha do diâmetro dos pilares é feito de forma subjetiva pelo projetista.

*2º critério*  $\Rightarrow$  são introduzidas quatro novas variáveis correspondendo aos coeficientes de esbeltez dos pilares.

*3º critério*  $\Rightarrow$  após a aplicação do critério anterior, um único valor de diâmetro é adotado, o maior deles.

*4º critério*  $\Rightarrow$  o coeficiente de esbeltez não é explicitamente utilizado, pois é introduzida uma variável que representa um único valor de diâmetro para todos os pilares.

Com a idéia de penalizar projetos onde são encontrados pequenos valores para a função *compliance*, em benefício da utilização de pilares com grandes diâmetros, o autor optou por multiplicar as Equações 2.23 e 2.24 pelo volume de concreto dos pilares (VP), exceto para o 1º critério.

A Tabela 2.1 apresenta os resultados obtidos na minimização da Equação 2.23, onde se observa que o critério 3b acarreta o mínimo valor para a função *compliance*, contudo seu volume total de concreto (VC) é o maior de todos. Já o 1º critério

proporciona o maior valor de *compliance* com o menor valor de VC. As variáveis  $D_1$  a  $D_4$  da Tabela 2.1 representam os diâmetros dos pilares da ponte.

Tabela 2.1 – Resumo dos resultados para a minimização da *compliance*

Critério	$D_1$ (m)	$D_2$ (m)	$D_3$ (m)	$D_4$ (m)	VP ( $m^3$ )	VC ( $m^3$ )	Comp.	Comp. x VP
1	1.788	4.708	3.6	2.201	1611.5	3140.0	15.36	
2a(x)	3.577	2.510	2.429	4.277	984.4	2518.0		21379
2a	7.155	11.718	9.0	8.823	11248.6	12780.0	10.86	
2b(x)	1.236	2.299	1.8	1.18	398.6	1941.8		11875
2b	7.155	23.411	18.0	8.814	38707.4	40239.4	10.4	
3a	4.169	4.169	4.169	4.169	1930.5	3471.0		291717
3a(x)	11.718	11.718	11.718	11.718	15477.4	17008.7	10.68	
3b(x)	2.304	2.304	2.304	2.304	593.9	2135.8		14237
3b	23.415	23.415	23.415	23.415	61773.0	63305.0	10.29	
<b>4(x)</b>	<b>2.4</b>	<b>2.4</b>	<b>2.4</b>	<b>2.4</b>	<b>648.9</b>	<b>2180.7</b>		<b>14651</b>
4	20.0	20.0	20.0	20.0	45065.7	46697.8	10.34	

Obs: a notação “a” indica que o primeiro e o último pilar devem ser curtos, e a notação “b” significa que qualquer comprimento de flambagem é permitido.

A melhor solução é aquela que minimiza o produto da *compliance* por VP e que neste caso é o critério 4(x) pois possui um baixo volume total de concreto para pilares com um único diâmetro.

Quando se multiplicou o valor da reação máxima por VP, o mínimo valor alcançado passou a ser o do critério 2b (x), mas com pilares de diferentes diâmetros.

Os resultados obtidos quando da minimização da Equação 2.24, para as reações máximas nos apoios, foram bastante semelhantes para todos os critérios e os volumes de concreto similares, com exceção do critério 2b.

HADI e SCHMIDT (2000) desenvolveram um algoritmo com o auxílio do programa MATLAB para otimização de vigas contínuas com seção T de concreto armado. A função custo é semelhante à de trabalhos anteriores onde são considerados apenas os custos do concreto e do aço. Quanto às variáveis do problema, os autores consideraram como sendo a base e a altura da seção transversal da seção, e a área de

aço longitudinal. A espessura da mesa colaborante é definida antes das dimensões da viga serem otimizadas. A função custo empregada pelos autores foi:

$$C_{\text{tot}} = V_c \cdot C_c + V_{\text{st}} \cdot \gamma_s \cdot C_t \quad (2.25)$$

É importante ressaltar que, diferentemente dos estudos anteriores, aqui os autores consideraram diferentes disposições para cada grupo de barras de aço, sendo cada grupo composto por barras de mesmo diâmetro e comprimento. Para cada uma destas soluções foram incluídas mais duas variáveis, o diâmetro e o número de barras.

Neste trabalho, para a minimização da função-objetivo foi utilizado o método dos Algoritmos Genéticos, com a representação dos dados na forma binária e com cromossomos de 10 bits.

Algumas limitações impostas pelo AS 3600-94 (Australian design Standard) foram adotadas como restrições para a solução do problema: limitações de resistência à flexão, da taxa de armadura mínima, da dimensão mínima para a base da seção e uma quarta restrição quanto à resistência ao cisalhamento.

O programa é composto por dois módulos, um para a análise estrutural e projeto das vigas e um segundo para o cálculo da solução ótima usando o método dos Algoritmos Genéticos. Os autores avaliaram um grande número de exemplos buscando a validação do programa. Entretanto, neste trabalho apresentaram apenas um dos exemplos, o de uma viga contínua com quatro vãos de cinco metros cada. Apresentaram também um gráfico representativo da evolução dos resultados obtidos em relação ao número máximo de gerações, como ilustra a Figura 2.10.

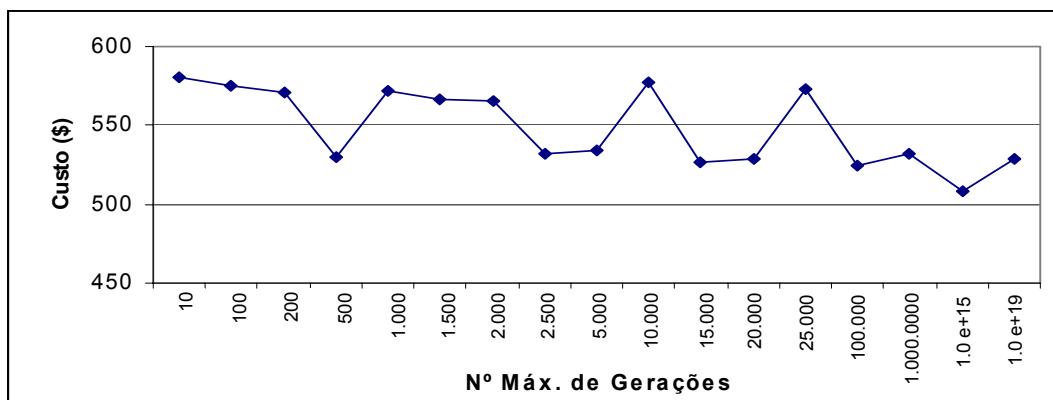


Figura 2.10 – Diagrama de Custo x Nº de Gerações para vigas T [HADI e SCHMIDT (2000)].

Como conclusão destes resultados pode-se perceber que quando o número máximo de gerações cresceu, a solução com menor custo tendeu para um valor ótimo. Entretanto, o custo mínimo ocorreu para um número muito elevado de gerações, talvez pelo fato dos autores terem trabalhado com populações muito pequenas (apenas 20 indivíduos).

ARGOLO (2000) tratou do dimensionamento ótimo de seções retangulares de concreto armado sujeitas à flexão composta reta, utilizando também como ferramenta de cálculo o método dos Algoritmos Genéticos. Assim como na maior parte dos trabalhos apresentados nesta revisão bibliográfica, a intenção do autor foi minimizar os custos do concreto, do aço e das formas. A função-objetivo adotada foi:

$$C_m = C_t \cdot \gamma_s \cdot A_{st} + C_c \cdot A_c + C_f \cdot (b' + 2 \cdot h) \quad (2.26)$$

A primeira parcela representa o custo das armaduras, a segunda o custo do concreto e a última parcela o custo das formas, onde  $b'$  exprime uma largura fictícia para a seção, que é assumida igual a  $b$  em seções de vigas e igual a  $2b$  em seções de pilares.

O dimensionamento ótimo da seção também leva em consideração o detalhamento da armadura, ou seja, o diâmetro, o número e a disposição das barras no interior da seção. A representação adotada foi a binária e o tamanho da população foi de 100 indivíduos, tendo como critério de parada 80 gerações.

Foram impostas restrições referentes ao critério de resistência, relacionadas aos esforços resistentes e os esforços solicitantes e ainda restrições quanto às taxas mínima e máxima para a taxa de armadura da seção de acordo com as prescrições da NBR-6118.

A validação do programa desenvolvido pelo autor foi feita com a comparação entre o dimensionamento ótimo realizado pelo programa e o dimensionamento convencional com ábacos de iteração, assim como na comparação de seus resultados com os obtidos por outras técnicas de otimização através de alguns exemplos encontrados na literatura.

Comparando-se os resultados obtidos pelo programa e os resultantes dos ábacos, o autor constatou uma redução de até 23,8% no consumo de concreto, 56,5% no consumo de aço e uma economia no custo total de até 30%.

Na comparação dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido neste trabalho e os extraídos da literatura técnica, Argolo obteve uma economia de até 14% no custo total.

Com relação às outras técnicas de otimização, o algoritmo genético apresentou um maior esforço computacional no que tange ao número de avaliações, entretanto, diante dos resultados obtidos, observou-se uma maior robustez e eficácia na busca de soluções ótimas.

CASTILHO (2003) objetivou em seu estudo a minimização do custo de projeto de elementos e estruturas de concreto pré-moldados, utilizando como ferramenta de otimização o método dos Algoritmos Genéticos. A autora focalizou em sua análise dois tipos de elementos pré-moldados: painel alveolar e vigota protendida. A Figura 2.11 ilustra as seções transversais desses elementos.

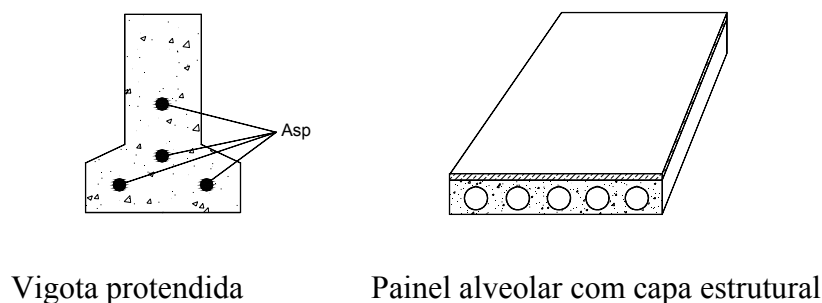


Figura 2.11 – Seções transversais da vigota protendida e do painel alveolar com capa estrutural [Castilho (2003)].

Um outro objetivo deste trabalho foi o de abordar os problemas acima listados via um método convencional de otimização (Método do Lagrangeano Aumentado). Buscou-se com isso obter resultados comparativos entre AGs e um método clássico de otimização.

O custo do elemento pré-moldado painel alveolar foi otimizado para duas situações: com e sem capa estrutural. As variáveis consideradas para o problema sem capa estrutural foram: a altura do painel, a área de armadura e a resistência do concreto

do elemento pré-moldado. Já para o painel com capa estrutural, foram consideradas as variáveis do painel sem capa estrutural e ainda a altura e a resistência do concreto da capa de concreto.

Para a otimização do painel alveolar sem capa estrutural, Castilho utilizou uma população de 100 indivíduos. Três diferentes estratégias de seleção foram adotadas, a seleção por roleta, por torneio e a estratégia de seleção MGA que é uma variação da seleção por *rank*. Dentre os resultados obtidos pelas estratégias de seleção estudadas, a que apresentou os resultados mais próximos dos alcançados com o método do Lagrangeano Aumentado foi a seleção por torneio, tendo diferenças de custo menores que 1%, para painéis com vãos de 6,0 m.

Já para o problema do painel alveolar com capa estrutural, a autora empregou diferentes tamanhos de população (20, 100 e 500 indivíduos). Neste caso, os resultados obtidos pelo método dos AGs foram em média 7% melhores que os obtidos pelo método do Lagrangeano Aumentado como mostra a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Resumo das variáveis e dos resultados do painel alveolar com capa estrutural [Castilho (2003)].

			<b>Variáveis</b>				
<b>Estratégia</b>	<b>Tipo de Cruzamento</b>	<b>Custo (R\$/m<sup>2</sup>)</b>	<b>h<sub>panel</sub> (cm)</b>	<b>A<sub>p</sub> (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>f<sub>ck</sub> (MPa)</b>	<b>h<sub>capa</sub> (cm)</b>	<b>f<sub>ck</sub> (MPa)</b>
<b>MGA</b>	Uniforme	74,78	20,86	2,72	30,2	4,02	15,1
<b>Roleta</b>	Simples	74,38	20,61	2,72	30,0	4,00	15,0
<b>Torneio</b>	Simples	74,86	21,36	2,63	30,0	4,00	15,0
<b>L. Aumentado</b>	–	80,23	27,41	2,36	31,0	4,00	15,0

Para a otimização da vigota protendida, a autora estudou três diferentes casos: otimização da vigota para uma determinada aplicação, otimização da aplicação para uma determinada seção transversal de vigota e, no último caso, otimização tanto da vigota como da aplicação para uma determinada seção transversal. No primeiro caso, as variáveis foram as áreas e as posições das armaduras, no segundo caso foram a

altura da capa de concreto, a resistência da capa de concreto e a distância entre das vigotas, e no ultimo caso considerou todas as variáveis das duas situações anteriores.

Os resultados obtidos na otimização da vigota protendida refletiram um melhor desempenho para o método do Lagrangeano Aumentado. Entretanto, a autora relata em suas conclusões a dificuldade de definição das restrições, uma vez que é expressa por funções de razoável tamanho. Ainda com relação à utilização do método convencional, uma outra dificuldade apresentada foi a definição do ponto inicial, pois caso esse ponto não apresente boas informações da solução ótima, o processo pode estacionar em um mínimo local. Uma alternativa proposta pela autora para contornar o problema da convergência, é obter o ponto inicial a partir de um AG. A Tabela 2.3 apresenta um resumo de cada um dos trabalhos presentes na revisão bibliográfica onde foram utilizados os métodos clássicos de otimização. Já na Tabela 2.4 estão resumidos os trabalhos otimizados pelo método dos algoritmos genéticos.

Tabela 2.3 – Resumo dos trabalhos (métodos clássicos)

<b>Autor</b>	<b>Seção transversal</b>	<b>Principais variáveis</b>
Goble e Lapay (1971)	I – CP	$A_c, e_{cabos}, F_{prot}$
Kirsch (1972)		
Friel (1974)	□ – CA	$A_s, d$
Chou (1977)	T, □ – CA	
Chakrabarty (1992)	□ – CA	$A_c, A_s$
Kang et al (1993)	T, □ – CA	$A_s, d$
Cohn e Lounis (1993)	I, □ – Mista	$A_s, e_{cabos}, A_{sp}, f_{sp}$
Al-Salloum e Siddiqi (1994)	□ – CA	$A_s, d$

Tabela 2.4 – Resumo dos trabalhos (algoritmos genéticos)

<b>Autor</b>	<b>Seção transversal</b>	<b>Principais variáveis</b>
Rajeev e Krishnamoorthy (1992)	Barra	$A_{barra}, L_{barra}$
Leite e Topping (1998)	I – Mista	$A_s, e_{cabos}, A_{sp}, f_{sp}$
Lemonge (1999)	Caixão – CP	$H_{viga}, L_{vão}, \phi_{pilar}$
Hadi e Schmidt (2000)	T – CA	$A_s, b_w, h$
Argolo (2000)	□ – CA	$A_c, A_s$
Castilho (2003)	Painel alveolar (CP)	$A_{sp}, h$
	Vigota I (CP)	$A_c, A_{sp}$

## 2.5 – Comentários Adicionais sobre os Métodos

Antes da comparação entre os diferentes métodos, é importante lembrar que os algoritmos usados em problemas de otimização subdividem-se em determinísticos e estocásticos. Os métodos baseados em algoritmos determinísticos, como é o caso da maioria dos métodos clássicos, geram de forma iterativa uma seqüência de possíveis soluções, requerendo pelo menos a derivada primeira da função-objetivo. Já os AGs encontram-se dentro dos métodos estocásticos de otimização, os quais necessitam somente da avaliação da função-objetivo e introduzem no processo dados e parâmetros randômicos, resolvendo o problema de forma probabilística e orientada.

A Tabela 2.5 apresenta as principais características, segundo GOLDBERG (1989), LEMONGE (1999) e CASTILHO (2003), tanto dos métodos clássicos como dos algoritmos genéticos.

Tabela 2.5 – Comparação entre os métodos clássicos e o método dos AGs

<b>Métodos Clássicos de Otimização</b>	<b>Método dos Algoritmos Genéticos</b>
Têm dificuldades em identificar soluções ótimas globais, uma vez que dependem do ponto de partida.	Não apresentam nenhuma restrição quanto ao ponto de partida.
Têm dificuldades em tratar de problemas com variáveis discretas (problemas comuns em engenharia).	Trabalham tanto com codificação contínua como discreta das variáveis do problema, ou ainda com uma combinação de ambas.
Requerem funções diferenciáveis, o que pode ser oneroso, complexo e nem sempre possível.	Não necessitam que a função-objetivo seja diferenciável e contínua.
Cada um dos métodos clássicos, de uma forma geral, tem domínio de aplicação restrito.	São razoavelmente eficientes para a maioria dos problemas existentes.
Em geral, não são eficazes quando o problema tem multi-objetivos.	São flexíveis para trabalhar com restrições e otimizar múltiplas funções com objetivos conflitantes.
Trabalham com uma única solução em cada etapa do processo iterativo.	Realizam buscas simultâneas em várias regiões do espaço de busca através de uma população de indivíduos.
Não são tão fáceis de serem implementados, quando comparados com os AGs.	São relativamente fáceis de serem implementados, assim como proporcionam grande flexibilidade na modificação da função-objetivo, sem a necessidade de recodificações extensas.

Apesar dos métodos clássicos apresentarem algumas desvantagens em relação ao método dos AGs, como aquelas citadas na Tabela 2.5, quando se estiver diante de problemas cuja função-objetivo seja contínua e diferenciável, onde sejam conhecidos

seus pontos de máximo e mínimo, será mais conveniente a utilização de um dos métodos clássicos baseados em técnicas de gradiente, por exemplo.

Segundo as informações contidas na Tabela 2.5, os AGs são mais eficientes na identificação das regiões que apresentam as soluções ótimas globais, já que os métodos clássicos dependem fundamentalmente do ponto de partida da solução. Entretanto, após a descoberta dessa região, o método dos AGs pode não ser tão eficiente na localização da solução ótima global. Neste momento, os métodos clássicos podem mostrar-se mais eficientes, sendo interessante, segundo LEMONGE (1999), uma associação de ambos os métodos na busca por um algoritmo híbrido que reúna de forma inteligente o que cada método tem de melhor.

## **CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTOS DE ALGORITMOS GENÉTICOS**

### **3.1 – Introdução**

Neste capítulo são abordadas as principais características dos AGs: codificação, geração da população inicial, avaliação da população, esquemas de seleção e reprodução, operadores genéticos e parâmetros de influência. Em seguida é apresentada a formulação do problema, com a codificação das variáveis envolvidas no projeto e a função-objetivo com suas restrições.

### **3.2 – Histórico dos AGs**

Durante as décadas de 50 e 60, biólogos e matemáticos de importantes centros de pesquisa começaram a desenvolver simulações computacionais de sistemas genéticos. Entretanto, foi o professor John Holland, da Universidade de Michigan, quem se dedicou a estudar mais detalhadamente o assunto, até que em meados da década de 60 propôs a construção de um algoritmo matemático para otimização de sistemas complexos, sendo denominado de Algoritmo Genético. Durante as décadas de 60 e 70, Holland, em conjunto com seus alunos e colegas, se dedicou ao desenvolvimento destes algoritmos. Suas principais metas foram resumir e explicar com rigor os processos adaptativos dos sistemas naturais e desenvolver programas que retratassem o importante mecanismo destes sistemas naturais (GOLDBERG, 1989).

Como consequência de suas pesquisas, Holland publicou em 1975 seu primeiro livro sobre o assunto, “Adaptation in Natural and Artificial Systems”, hoje considerado uma referência sobre o assunto.

Os Algoritmos Genéticos podem ser definidos como procedimentos de otimização e busca global, fundamentados nos mecanismos de seleção e evolução natural das espécies (Teoria de Darwin). Assim como na natureza, os AGs também trabalham com uma população de cromossomos, codificados tradicionalmente em alfabeto binário compostos de 0's e 1's representando um “código genético”. Cada cromossomo representa uma possível solução do problema.

Estes algoritmos são capazes de resolver diferentes e complexos problemas de otimização, explorando a idéia da seleção dos indivíduos mais adaptados e do

cruzamento de populações visando obter novos e melhores indivíduos. Utilizam uma estratégia de busca paralela, estruturada e aleatória, voltada em direção à busca de pontos nos quais a função a ser minimizada (ou maximizada) tenha valores relativamente baixos (ou altos). Apesar de realizarem uma pesquisa aleatória, para que possam direcionar sua busca, os AGs utilizam o conhecimento adquirido de gerações anteriores para construir uma nova geração que irá se aproximar da solução ótima.

A partir da década de 80, o algoritmo genético recebeu um grande impulso em diversas áreas de aplicação científica, devido principalmente à versatilidade e excelentes resultados apresentados. A popularização dos computadores e o aparecimento de sistemas cada vez mais rápidos e potentes também auxiliaram muito o seu desenvolvimento.

De forma resumida, DAVIS (1996) descreve as etapas básicas de um AG da seguinte forma:

1. Inicializar uma população de cromossomos;
2. Avaliar cada cromossomo da população;
3. Criar novos cromossomos através da troca de material genético entre cromossomos (crossover e mutação);
4. Remover membros da população para dar lugar a novos cromossomos;
5. Avaliar os novos cromossomos e inseri-los na população;
6. Se o procedimento convergir, terminar, se não, voltar ao passo 3.

A manipulação estruturada de todo este conhecimento tornou viável a codificação e implementação de algoritmos genéticos de uma forma bastante robusta, ou seja, capaz de ser aplicado de maneira eficiente a uma gama variada de problemas.

Um pseudocódigo que representa um algoritmo genético simples é apresentado abaixo:

### **Algoritmo Simples**

Inicialize a população

Avalie indivíduos da população

### **Repita**

    Selecione indivíduos para reprodução

    Aplique operadores de recombinação e mutação

Avalie indivíduos da população  
Selecione indivíduos mais adaptados  
**Até** critério de parada satisfeito

**Fim**

Os algoritmos genéticos podem ser estruturados diferentemente da forma acima exposta, com variações de procedimentos e operadores empregados. Podem ser usados o algoritmo “geracional” e o “em regime”, os quais se diferenciam pela maneira como os indivíduos são inseridos na população. A seguir um pseudocódigo de cada um destes esquemas de reprodução é apresentado (DAVIS, 1996).

### **Algoritmo Geracional**

Inicialize a população P de cromossomos  
Avalie indivíduos da população P

**Repita**

**Repita**

Selecione 2 indivíduos em P para reprodução  
Aplique operadores de recombinação e de mutação  
Insira novo indivíduo em P'

**Até** população P' completa

Avalie indivíduos na população P'

$P \leftarrow P'$

**Até** critério de parada satisfeito

**Fim**

No Algoritmo Genético Geracional, a cada geração toda a população é substituída, o que muitas vezes ocasiona a perda de bons indivíduos durante o processo. Uma maneira de evitar que isso ocorra é a adoção de um processo de seleção “elitista”, onde os  $N$  melhores indivíduos de cada geração são automaticamente colocados na geração seguinte, evitando assim que sofram qualquer tipo de modificação.

### **Algoritmo em Regime**

Inicialize a população  $P$  de cromossomos

Avalie indivíduos da população  $P$

#### **Repita**

Selecione operador genético

Selecione indivíduo(s) para reprodução

Aplique operador genético selecionado

Avalie indivíduo(s) gerado(s)

Selecione indivíduo  $I$  para sobreviver

**Se  $I$  é melhor que o pior elemento de  $P$  Então**

Insira  $I$  em  $P$  de acordo com seu “ranking”

**Fim do Se**

**Até** critério de parada satisfeito

#### **Fim**

No Algoritmo Genético em Regime, são criados  $n$  indivíduos de cada vez que, depois de serem avaliados, serão ou não inseridos na população em substituição aos  $n$  piores cromossomos desta gama de soluções. Caso sejam piores que todos os já existentes, então estes serão descartados e procede-se à geração de novos indivíduos.

### **3.3 - Nomenclatura**

Um AG pode ser entendido como uma tentativa de imitação da evolução dos seres vivos, que incorpora alguns conceitos da genética. Então, para facilitar o entendimento do presente trabalho, encontra-se a seguir uma lista com a descrição dos principais termos oriundos da genética que serão usados ao longo deste trabalho.

- *Cromossomo* – Cadeia de caracteres representando alguma informação relativa às variáveis do problema. Cada cromossomo representa uma possível solução do problema.
- *População* – Na biologia é um conjunto de indivíduos da mesma espécie ou grupos inteiros de organismos de um tipo. Nos AGs representam um conjunto de possíveis soluções.

- *Indivíduo* – Na biologia representa um exemplar de uma espécie que interage com o meio ambiente. Nos algoritmos genéticos é o mesmo que cromossomo.
- *Gen ou Gene* – Na genética é a unidade básica do cromossomo e quem descreve e controla as características de cada indivíduo. Nos AGs descrevem cada uma das variáveis do problema.
- *Genótipo* – Na biologia representa a composição genética contida no Genoma e nos AGs representa a informação contida no cromossomo.
- *Geração* - O número da iteração que o algoritmo genético executa.

### **3.4 - Codificação da População**

Diferentemente dos métodos tradicionais, os AGs trabalham, como já se sabe, com uma representação codificada das variáveis envolvidas no projeto a ser otimizado e não com as próprias variáveis. Esta codificação é a forma utilizada pelos AGs para representação das possíveis soluções do problema.

Existem diferentes formas de representação das variáveis, tais como: binária, inteira e real. Entretanto, a abordagem deste trabalho será apenas na forma de codificação binária, a qual será utilizada na implementação do programa.

A codificação binária é a forma de representação mais comum nos trabalhos já desenvolvidos (Holland, 1975), onde cada cromossomo é um vetor composto por uma cadeia de caracteres binários (0's e 1's). O comprimento total desse cromossomo é a soma das “substrings” que representam as  $n$  variáveis do problema. Segundo DAVIS (1996) e MICHALEWICZ (1996), este tipo de representação é mais apropriada em aplicações que requeiram o tratamento de valores discretos, embora a forma de codificação binária também permita que se trabalhe com variáveis contínuas.

#### **3.4.1 – Variáveis discretas**

No caso de tratamento de variáveis discretas, o número de bits necessários para codificá-la depende exclusivamente da quantidade de possíveis valores que esta variável pode assumir. A partir da Equação 3.1 é possível se determinar o número de

bits necessários para esta variável em função do número de possíveis valores assumidos (ARGOLO, 2000, CASTILHO, 2003).

$$2^{nb} = nv \quad (3.1)$$

onde nb é o número de bits e nv o número de possíveis valores assumidos.

Supondo-se que uma das  $n$  variáveis de um determinado problema possa assumir os seguintes valores discretos (0,40; 0,50; 0,70; 0,85; 1,00; 1,20; 1,4; 1,6) em metros. Substituindo  $nv = 8$  na Equação 3.1, obtém-se um número de bits igual a 3. Considere-se então que, para uma determinada solução gerada aleatoriamente, esta mesma variável seja representada pela cadeia de bits 101. Assim sendo, sua decodificação indicará o índice  $IND = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$ , que apontará para o quinto valor discreto do espaço de busca dessa variável, ou seja, 1,00 metro.

### 3.4.2 – Variáveis contínuas

Para variáveis contínuas, a decodificação do valor binário para o correspondente valor decimal é dada pela Equação 3.2.

$$x = x^{LI} + \frac{(x^{LS} - x^{LI}) \times IND}{2^{nb} - 1} \quad (3.2)$$

onde  $x \in [x^{LI}, x^{LS}]$ , sendo  $x^{LI}$  o limite inferior e  $x^{LS}$  o limite superior para a variável  $x$  e nb o número de bits da cadeia.

A determinação do número de bits na Equação 3.2 é função do intervalo de variação de  $x$ , assim como da precisão requerida pela variável em questão, e para tanto CASTILHO (2003) sugere a Equação 3.3.

$$2^{(nb-1)} \leq (x^{LS} - x^{LI}) \times 10^P \leq 2^{nb} - 1 \quad (3.3)$$

onde P representa a precisão requerida pela variável

Supondo que num determinado problema uma das variáveis tenha intervalo de variação [4,0; 15,0] e que a precisão requerida seja 1, substituindo  $P = 1$ ,  $x^{LS} = 15,0$  e  $x^{LI} = 4,0$  na Equação 3.3, o valor encontrado para o número de bits desta variável é 7.

### **Codificação Binária x Codificação Gray**

Apesar da codificação binária ser a mais usada nas pesquisas com AGs, talvez pela facilidade que o programador encontre em criar e manipular os vetores binários, é conveniente registrar que dois pontos adjacentes na representação decimal podem não o ser na forma binária.

Tabela 3.1 – Codificação Binária x Codificação Gray.

<b>Forma Decimal</b>	<b>Forma Binária</b>	<b>Forma de Gray</b>
8	0111	0100
9	1000	1100

É interessante observar na Tabela 3.1 que a codificação do número 8, apesar de ser contíguo ao número 9 na forma decimal, na forma binária possui bits diferentes em todas as posições. Esse tipo de problema já não ocorre na codificação Gray, uma vez que quaisquer números contíguos na forma decimal diferem somente pela permuta de um bit, fazendo com que a mudança de uma unidade na variável do problema corresponda à troca de apenas um bit na codificação. Maiores informações sobre codificação Gray podem ser encontradas, por exemplo, em MICHALEWICZ (1996) e GOLDBERG (1989).

### **3.5 - Geração da População Inicial**

A população inicial de cromossomos é na maioria das vezes realizada de forma aleatória utilizando-se funções randômicas nas rotinas de códigos computacionais. Entretanto, existem ocasiões onde é apropriado introduzir logo no início um ou mais indivíduos “interessantes”, como, por exemplo, soluções aproximadas contendo algum

tipo de informação prévia. Segundo GOLDBERG (1989), diversos trabalhos realizados comprovaram que a geração da população inicial não é um ponto crítico, desde que haja cromossomos suficientemente variados.

### 3.6 - Avaliação da População

A idéia de sobrevivência dos indivíduos mais adaptados é um dos fundamentos mais importantes para os AGs, em analogia ao processo de evolução natural. Mas de que forma os AGs selecionam os melhores indivíduos?

A avaliação da população é realizada pela *função de aptidão*, que avalia a capacidade de sobrevivência de cada indivíduo durante o processo evolutivo. É através da decodificação das variáveis representadas pelo cromossomo que a função aptidão avalia cada indivíduo da população. Assim, cada possível solução (indivíduo) terá um valor para sua aptidão, que servirá como elemento de classificação indicando desta forma suas chances de seleção e conseqüente reprodução.

Para problemas de otimização estrutural, a função de aptidão pode ser definida como:

$$F(x) = \text{função-objetivo} + \text{função de penalização} \quad (3.4)$$

A função de aptidão deve ser elaborada tendo em vista o tipo de problema a ser resolvido, ou seja, para cada caso tem-se uma função específica. A função-objetivo está, em geral, direta ou indiretamente ligada a um critério econômico e a função de penalização vinculada às restrições inerentes ao problema.

Quando o problema tratado não viola nenhuma restrição, o valor da função de aptidão é o próprio valor da função-objetivo, uma vez que o valor da função de penalização será igual a zero. Mais detalhes sobre as funções de penalidade serão encontrados na seção 3.12.

### 3.7 - Seleção

Após terem sido avaliados por meio da função de aptidão, passa-se à etapa de seleção dos indivíduos que servirão como genitores no processo de reprodução. Aqui, os cromossomos com grande aptidão recebem uma maior probabilidade de serem

copiados para uma população intermediária, de onde serão aleatoriamente escolhidos para reprodução. Por outro lado, os piores indivíduos serão provavelmente descartados em função de suas baixas aptidões. Existem diferentes métodos para seleção dos melhores indivíduos como por exemplo: a seleção por classificação (*rank selection*), seleção proporcional à aptidão (*roulette wheel*), seleção por torneio, seleção elitista dentre outros.

### **Seleção por classificação**

Neste tipo de seleção, primeiramente classifica-se a população em ordem crescente de aptidão, em seguida cada cromossomo recebe um valor de acordo com esta classificação. O pior terá valor 1, o segundo pior valor 2 e assim sucessivamente. O melhor cromossomo terá valor  $N_{pop}$  igual ao número de indivíduos da população. A probabilidade de um indivíduo ser selecionado para etapa de cruzamento cresce em função de sua classificação. Este método pode apresentar convergência muito lenta, uma vez que os melhores indivíduos estão sempre próximos de seus concorrentes com menor aptidão.

### **Seleção proporcional à aptidão**

Este é o método original de seleção proposto por John Holland em 1975, e ainda hoje é um dos mais comuns nas implementações. Pode-se compará-lo a um esquema de escolha por sorteio através de uma roleta onde cada indivíduo da população é representado de forma proporcional ao seu grau de aptidão, ou seja, os indivíduos com alta aptidão recebem uma parcela maior da roleta, enquanto que os menos aptos terão uma menor representatividade. Portanto, a probabilidade de seleção  $p_i$  de um cromossomo com aptidão  $F_i$ , em uma população de tamanho  $N_{pop}$  é dada pela Equação 3.5.

$$p_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{N_{pop}} F_i} \quad (3.5)$$

A partir de  $p_i$ , calcula-se a probabilidade acumulada  $q_i$  de cada cromossomo, de acordo com a Equação 3.6.

$$q_i = \sum_{j=1}^i p_j \quad (3.6)$$

Durante o processo de seleção, a roleta é girada  $N_{pop}$  vezes, elegendo cromossomos que irão participar da nova população. Girar a roleta significa gerar aleatoriamente um número  $n \in [0,1]$ . Se  $n \leq q_i$ , significa que o primeiro indivíduo foi selecionado, caso contrário é selecionado o  $i$ -ésimo indivíduo, tal que  $q_{i-1} < n \leq q_i$ . A Tabela 3.2 e a Figura 3.1 apresentam um exemplo de utilização desse método de seleção.

Tabela 3.2 – Seleção proporcional à aptidão

<b>População</b>	<b>F<sub>i</sub></b>	<b>p<sub>i</sub></b>	<b>q<sub>i</sub></b>	<b>n</b>	<b>Nova população</b>
1	102	0,17	0,17	0,35	3
2	20	0,03	0,20	0,59	4
3	98	0,16	0,36	0,05	1
4	255	0,42	0,78	0,82	6
5	12	0,02	0,80	0,64	4
6	120	0,20	1,00	0,16	1
	$\sum F_i = 607$				

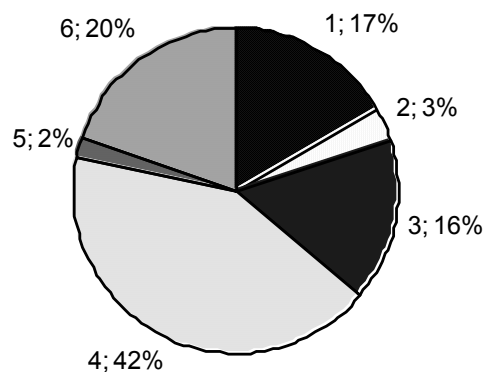


Figura 3.1 – Roleta de seleção proporcional à aptidão

O método de seleção proporcional à aptidão pode apresentar problemas de convergência prematura, uma vez que pode haver um grande número de cópias dos cromossomos com alta aptidão e assim diminuir a diversidade da população.

### Seleção por torneio

A idéia deste método de seleção é promover um torneio entre um grupo de  $N$  indivíduos da população (geralmente 2), escolhidos de forma aleatória (com probabilidades iguais). Dentre os  $N$  indivíduos, o de maior aptidão é selecionado para compor a população intermediária, enquanto que os demais são descartados. O processo é repetido até que se complete a população intermediária. Este tipo de seleção apresenta algumas vantagens como: não acarreta convergência prematura; não exige esforço computacional extra tal como ordenamentos e ainda evita a estagnação do algoritmo.

### 3.8- Reprodução

Na etapa de reprodução, o algoritmo tenta, a cada nova geração, criar novas e melhores soluções (indivíduos mais aptos) através de um conjunto de operadores como: o crossover e a mutação. Eles são utilizados para assegurar que a nova geração seja totalmente nova, mas possua, de alguma forma, características de seus pais. Uma forma bastante comum de prevenir que os melhores indivíduos não desapareçam da população pela manipulação dos operadores genéticos seria através da reprodução

elitista, onde as melhores soluções seriam automaticamente colocadas na geração seguinte.

### **3.9 - Operadores Genéticos**

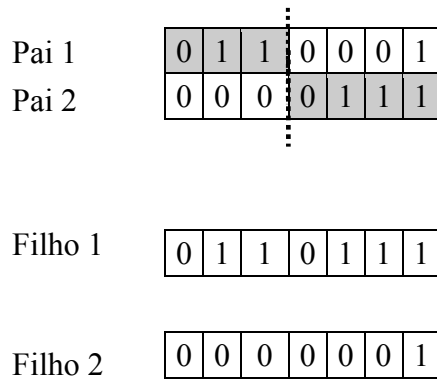
A principal função dos operadores genéticos é transformar a população ao longo de suas gerações, mantendo as características de adaptação adquiridas nas gerações anteriores, ou seja, produzir novos indivíduos que possuam propriedades genéticas superiores às encontradas nos pais. Desta forma, são extremamente importantes à medida que diversificam o espaço de busca e assim possibilitam a exploração de diferentes regiões do domínio do problema.

#### **3.9.1 - Operador Crossover**

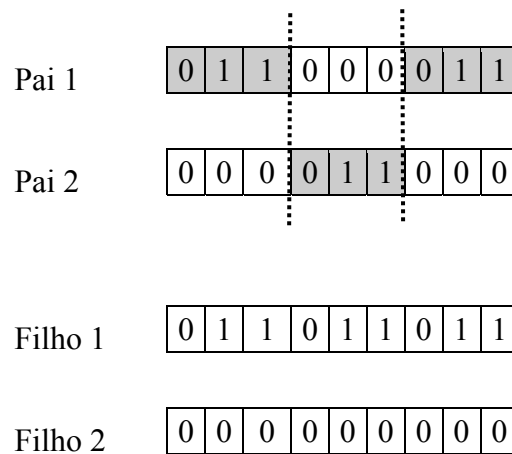
A palavra crossover em biologia significa misturar os cromossomos dos indivíduos progenitores e assim gerar um novo cromossomo com as características de ambos os pais. Aqui se aplica o mesmo procedimento, ou seja, o AG seleciona dois indivíduos aleatoriamente do grupo de progenitores potenciais para o cruzamento e troca de material genético. Dependendo da probabilidade (taxa) de crossover  $P_c$ , que pode variar entre 0 e 1, ocorrerá ou não o cruzamento entre os cromossomos. O processo ocorre da seguinte forma: gera-se um número aleatório entre 0 e 1, caso este seja menor que o valor de  $P_c$ , o cruzamento é efetuado, caso contrário, os progenitores são simplesmente copiados para a nova população. Existem diferentes tipos de crossover dependendo do número de pontos de corte que serão feitos nos genitores.

##### **Crossover de um ponto**

Um ponto de cruzamento localizado no intervalo  $[1, K - 1]$ , sendo  $K$  o tamanho do cromossomo, é selecionado aleatoriamente e a partir deste ponto as informações genéticas dos pais são trocadas. As informações anteriores a este ponto em um dos pais são ligadas às informações posteriores à este ponto no outro pai. O exemplo a seguir esclarece esta operação onde foi sorteada a 3ª posição para o corte.



Analogamente, tem-se o crossover de dois pontos, onde dois pontos de corte são escolhidos aleatoriamente no intervalo  $[1, K - 1]$  e então se efetua a troca do material genético entre eles.



Neste exemplo foram sorteadas as posições 3 e 6 para corte.

### **Crossover de $n$ pontos**

É uma generalização desta idéia de troca de material genético, onde mais de dois pontos de cruzamento podem ser utilizados. Aqui, escolhem-se aleatoriamente  $n$  pontos pertencentes ao intervalo definido anteriormente e, em seguida, efetua-se a troca de material genético entre os pais.

### Crossover uniforme

Não se utilizam pontos de cruzamento neste caso. Para cada par de genitores é gerado um terceiro cromossomo de forma aleatória, denominado “máscara”, que determinará se haverá a troca do material genético. Para a geração do primeiro filho, tem-se: se o primeiro bit da máscara for 1, o primeiro bit do filho 1 será o mesmo do primeiro bit do pai 1; caso contrário, o primeiro bit do pai 2 é que será copiado para o primeiro bit do filho 1, e o processo se repete até que se complete todo cromossomo. Já para a geração do segundo filho, o papel dos pais é invertido, ou seja, se o bit da máscara for 1, será copiado o bit do pai 2, caso contrário, será copiado o bit do pai 1. A seguir ilustra-se um exemplo deste tipo de cruzamento.

Pai 1	1	1	0	1	0	1	1
Pai 2	1	0	0	1	1	0	0
“máscara”	1	1	0	1	0	0	1
Filho 1	1	1	0	1	1	0	1
Filho 2	1	0	0	1	0	1	0

### 3.9.2 - Operador Mutação

O operador de mutação é necessário para introduzir e manter a diversidade genética da população, garantindo uma maior varredura do domínio e evitando assim que o AG convirja prematuramente para mínimos locais. É utilizado após a aplicação da operação de cruzamento, e se resume em alterar de forma aleatória e ocasional o valor de uma posição qualquer do cromossomo. Esta alteração ocorre de acordo com uma dada probabilidade denominada taxa de mutação ( $p_m$ ), e, no caso de um cromossomo binário, significa a mudança de “1” para “0” ou de “0” para “1”.

Cromossomo antes da mutação

1	1	1	1	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

### Cromossomo depois da mutação

1	1	1	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

O valor da taxa de mutação deve ser pequeno (entre 0,1% e 10%), como na genética natural, uma vez que destrói a informação contida no cromossomo.

### 3.10 – Critérios de Parada

O algoritmo genético interrompe o processo quando seu critério de parada é satisfeito. Os principais critérios de parada utilizados em AGs são:

- número de gerações ou tempo limite para processamento;
- quando a priori já se conhece o valor ótimo da função-objetivo, o critério de parada é a obtenção deste valor;
- convergência, isto é, quando não ocorrer melhoramento significativo no cromossomo de maior aptidão;
- quando um alto percentual de população possuir o mesmo valor de função aptidão.

### 3.11 - Parâmetros que Influenciam os AGs

Os resultados e o funcionamento do programa estão diretamente ligados aos valores atribuídos aos parâmetros de controle do AG, sendo os mais comuns: o tamanho da população, a taxa ou probabilidade de cruzamento e a taxa ou probabilidade de mutação.

O tamanho da população tem uma influência grande na eficiência e no tempo de processamento do programa. Quanto maior for seu valor, maior é a diversidade de soluções a cada geração, assim como mais demorada se torna a otimização do problema. Por outro lado, uma população pequena pode afetar o desempenho do algoritmo, uma vez que o domínio de busca se torna mais restrito.

Populações com tamanhos entre 20 e 100 cromossomos podem ser adotadas, sendo interessante também relacionar seu valor com o tamanho do cromossomo que se esteja trabalhando, ou seja, quanto maior for o cromossomo maior deve ser o tamanho da população.

A taxa ou probabilidade de cruzamento ( $p_c$ ) é o parâmetro que indica se irá ou não ocorrer o cruzamento entre dois indivíduos selecionados da população. Quanto maior for seu valor, mais rápida será a introdução de novos cromossomos na população, entretanto, se esta for muito elevada, indivíduos com boa aptidão poderão ser perdidos de forma prematura. Em contrapartida, valores baixos podem tornar muito lenta a convergência do programa. Os valores usualmente utilizados para a taxa de cruzamento variam entre 0,50 e 0,95.

O valor da taxa de mutação ( $p_m$ ) indica qual a probabilidade de haver mutação nos cromossomos de cada geração durante a evolução. Sua função é a de promover um aumento da diversidade populacional, possibilitando uma maior varredura do espaço de busca. Se  $p_m$  for muito baixa, pode acontecer um comprometimento da diversidade na população. Se  $p_m$  for muito alta, acontecerão buscas essencialmente aleatórias, o que poderá afetar a convergência do programa. Valores normalmente adotados para  $p_m$  variam entre 0,001 e 0,10.

Entretanto, alguns pesquisadores aconselham que a escolha da taxa de mutação se relacione com o tamanho dos cromossomos e das populações através de fórmulas empíricas. Segundo DE JONG (1975), seu valor deve ser inversamente proporcional ao tamanho da população. Já SHAFFER (1994) sugere a expressão abaixo para a determinação da taxa ótima de mutação:

$$p_m = (N_{pop} \cdot K^{1/2})^{-1} \quad (3.7)$$

onde  $N_{pop}$  é o tamanho da população e  $K$  é o comprimento do cromossomo.

### **3.12 – Tratamento das Restrições**

Um dos principais pontos a serem observados quando da aplicação de algoritmos genéticos a problemas de otimização com restrições, segundo GEN e CHENG (1997), é o tratamento das restrições, uma vez que durante o processo de geração e manipulação dos cromossomos é comum que sejam produzidas soluções inaceitáveis. As principais estratégias abordadas pelos autores para o tratamento de problemas de otimização com restrições podem ser classificadas em:

### *Estratégia de rejeição*

Caracteriza-se por descartar as soluções inactíveis geradas ao longo do processo de otimização, ou seja, aquelas que não satisfazem alguma restrição. Este tipo de estratégia pode trabalhar de forma razoável uma vez que o espaço solução seja convexo, caso contrário, pode apresentar dificuldades em muitos problemas de otimização.

### *Estratégia de reparação*

Reparar um cromossomo consiste basicamente em transformá-lo numa solução factível através de alguma estratégia de reparação que é fortemente dependente do problema em questão. A estratégia depende da existência de processos determinísticos de reparação que possam converter soluções inactíveis em factíveis. É importante registrar que, para muitos problemas de otimização, a estratégia de reparação de cromossomos inactíveis pode ser tão complexa quanto a solução do problema original, o que de certa forma inviabiliza o uso desta técnica.

### *Estratégia de penalidade*

A estratégia de penalidade é uma estratégia bastante interessante para solução de problemas que possuem um número razoavelmente alto de restrições, isso porque, nestes casos, um grande número de soluções inactíveis compõe a população de cromossomos. Em tais casos, soluções factíveis são difíceis de serem geradas caso a pesquisa genética fique confinada dentro das regiões factíveis. Assim, a estratégia de penalidade é um tipo de técnica que trabalha com soluções inactíveis durante o processo de otimização.

## **3.13 – Função de Penalização**

Neste trabalho foi adotada a *estratégia de penalidade* que é, provavelmente, a mais utilizada em implementações de AGs. Consiste em transformar um problema com restrições em uma nova função sem restrições, associando coeficientes de custo ou penalização a cada restrição violada. Entretanto, o ponto crítico ao se lidar com estas

restrições é justamente a definição destes coeficientes, que devem variar para cada nível de violação e para cada restrição.

O espaço solução em regra contém duas regiões: uma factível e outra infactível, conforme ilustrado na Figura 3.2, que apresenta uma situação interessante em que a solução infactível  $x_1$  está muito mais próxima do ponto ótimo  $x_2$  que a solução factível  $x_3$  e que a solução infactível  $x_4$ .

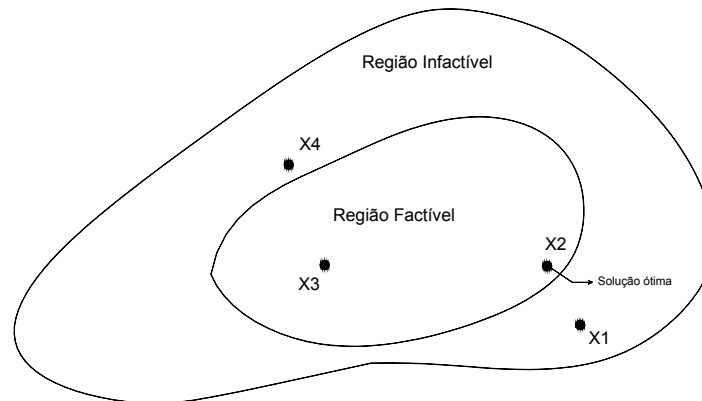


Figura 3.2 – Espaço solução hipotético [GEN e CHENG (1997)].

É conveniente que se penalize com menos rigor a solução  $x_1$  que  $x_4$ , embora  $x_1$  esteja um pouco mais distante da fronteira da região factível. Isto porque é bem provável que  $x_1$ , mesmo infactível, contenha muito mais informação sobre o ponto ótimo  $x_2$  que  $x_4$ . O principal objetivo no momento de se formular uma função de penalização é de que ela efetivamente conduza a busca em direção a sub-regiões promissoras do espaço solução. Entretanto, não existe uma “receita de bolo” para a construção da função penalidade em problemas de otimização. Segundo GEN e CHENG (1997), em geral, existem duas maneiras de se construir a função de aptidão com uma parcela relativa à penalização. As Equações 3.8 e 3.9 indicam estas duas formas.

$$F(x) = f(x) + \text{pen}(x) \quad (3.8)$$

onde  $f(x)$  é a função-objetivo do problema e  $\text{pen}(x)$  é a função de penalização.

Nesta situação, se  $x$  for factível,  $\text{pen}(x) = 0$ , caso contrário,  $\text{pen}(x) > 0$ .

$$F(x) = f(x) \cdot \text{pen}(x) \tag{3.9}$$

Neste caso, se  $x$  for factível,  $\text{pen}(x) = 1$ , caso contrário,  $\text{pen}(x) > 1$ .

## CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO

### 4.1 – Problema Estudado

O problema de otimização tratado nesta tese é o da minimização da função custo para a seção transversal de uma ponte rodoviária, com vigas I bi-apoiadas em concreto protendido. A minimização do custo implica em otimizar o número de vigas, suas dimensões e também o número de cabos de protensão em cada uma delas. O pré-dimensionamento no estado limite último da ponte é realizado com base nas longarinas já padronizadas pela empresa fabricante de elementos pré-moldados PREMAG, assim como em mais um tipo de viga aqui criado com o interesse de diversificar as soluções, permitindo assim sua comparação com as vigas padronizadas do fabricante. Em cada uma dessas vigas são considerados no máximo dois níveis de armadura de protensão, com número mínimo e máximo de cabos em cada uma das camadas para as diferentes longarinas. A Figura 4.1 exibe a seção transversal típica de uma ponte com vigas tipo I e na Figura 4.2 estão presentes as configurações das vigas disponíveis no programa.

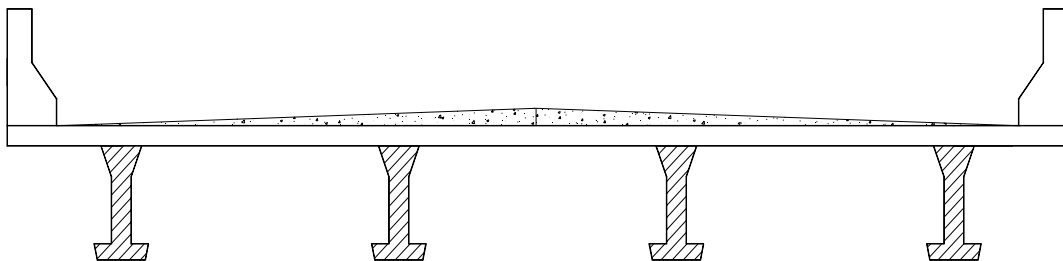


Figura 4.1 – Seção transversal típica de uma ponte

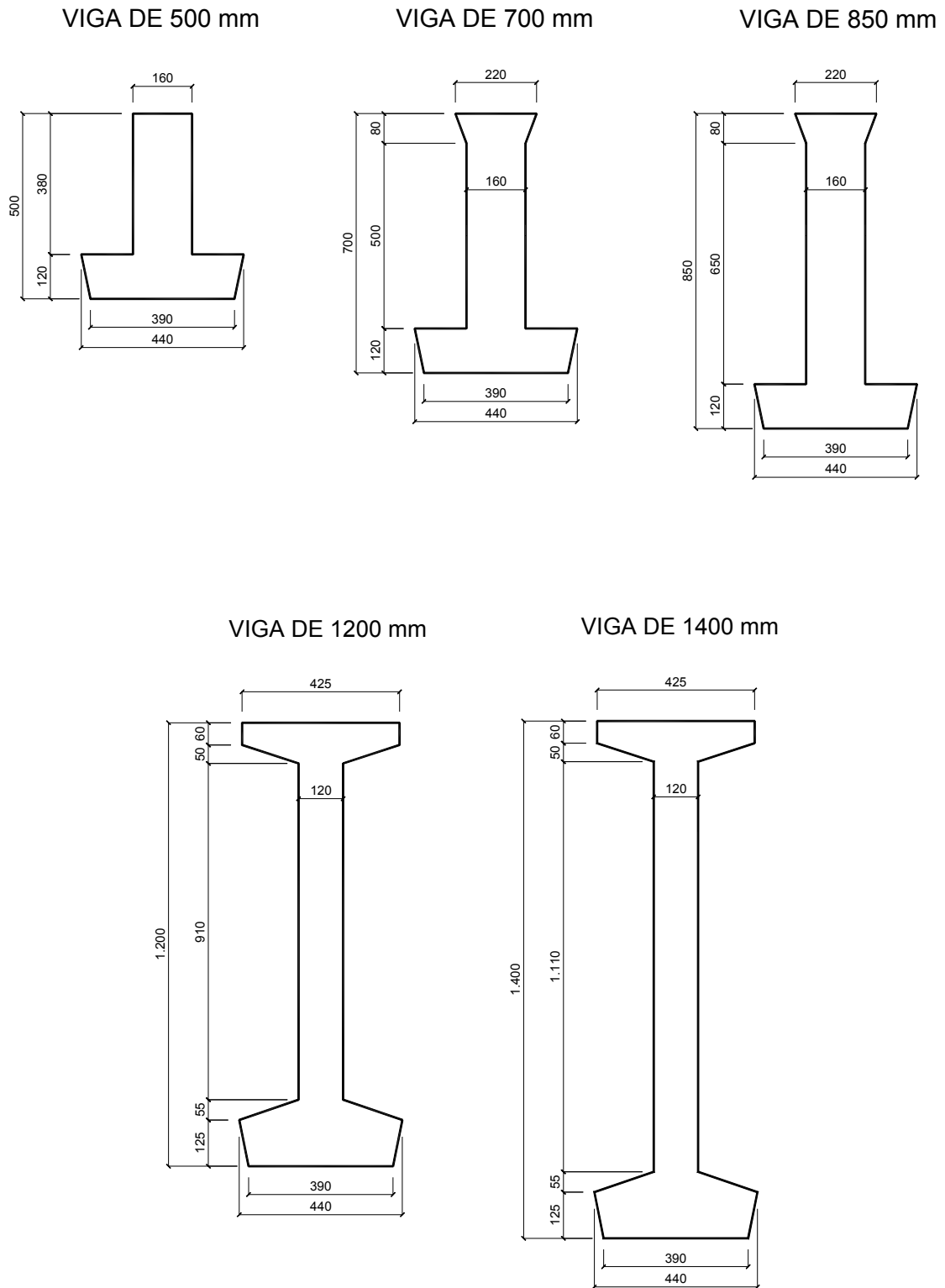


Figura 4.2 – Configuração dos padrões de viga disponíveis no programa.

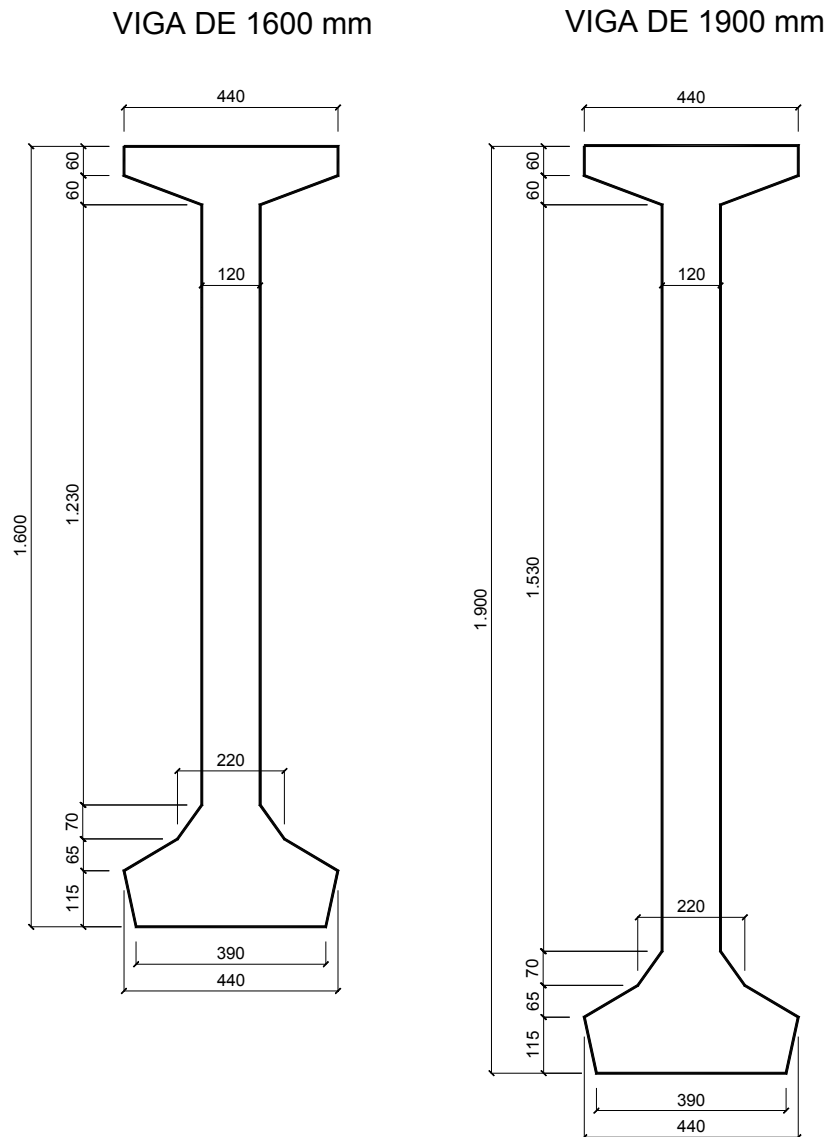


Figura 4.1 – Configuração dos padrões de viga disponíveis no programa (continuação).

Das vigas apresentadas na Figura 4.2, aquela com altura de 1200 mm foi criada neste trabalho sendo as demais já fabricadas pela empresa de pré-moldados. A razão para a incorporação desse novo tipo de seção objetivou não só ampliar o número de alternativas disponíveis mas também preencher um vazio existente entre os padrões de 850 mm e 1400 mm.

A Figura 4.3 ilustra o fluxograma do programa desenvolvido nesta tese, que mostra suas principais etapas.

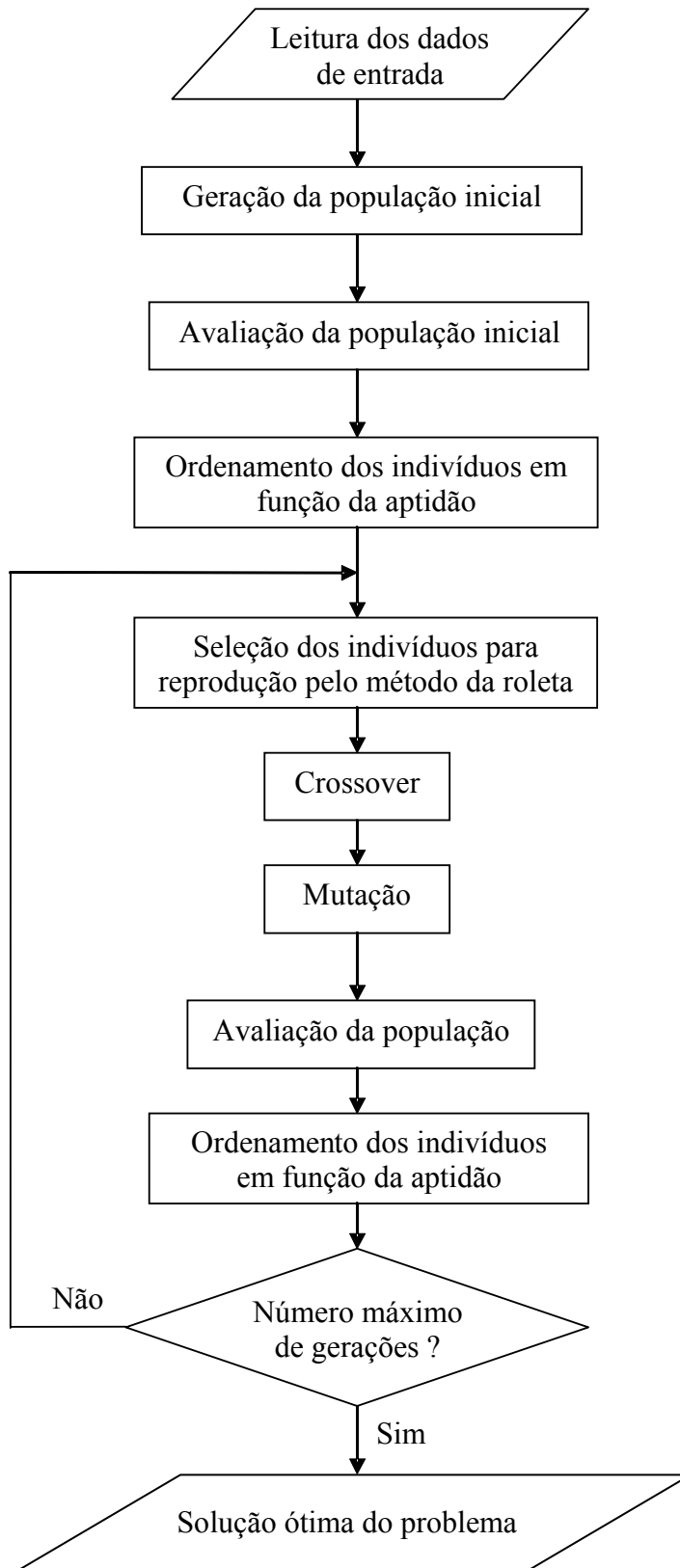


Figura 4.3 – Fluxograma do programa

#### 4.1.1 – Apresentação das janelas do programa

A janela principal do programa aqui desenvolvido é apresentada na Figura 4.4. Esta janela permite que o usuário acesse e manipule os principais dados de entrada do programa como: as características básicas do AG, os dados de projeto, as opções de viga, assim como outras opções referentes ao projeto. Nesta janela também estão presentes os botões relativos à execução do programa e ao salvamento dos resultados referentes à última geração de população.

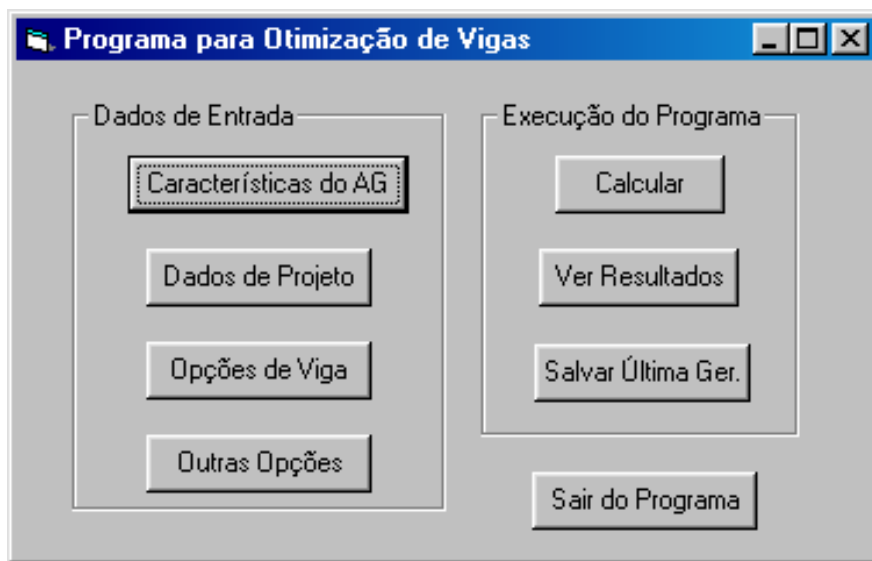


Figura 4.4 - Janela principal do programa

Clicando no botão “Características do AG” da janela principal, o usuário terá acesso à janela apresentada na Figura 4.5, onde poderá configurar e ajustar, de acordo com o tipo de problema, as características básicas relativas ao método dos AGs, como, por exemplo: o tamanho da população, o número de gerações, a taxa de crossover e a taxa de mutação. Para este nosso problema tais parâmetros já foram calibrados de forma cuidadosa.

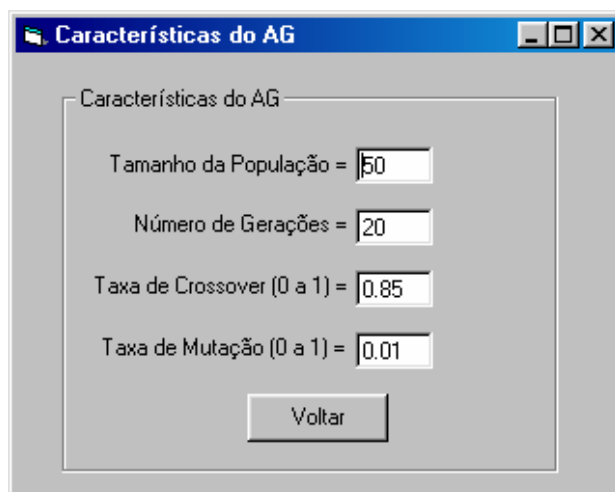


Figura 4.5 - Janela de manipulação das características do AG

O segundo botão da primeira coluna da janela principal permite o acesso à janela “Dados de Projeto”, ilustrada na Figura 4.6. Neste momento, o projetista deverá preencher os diferentes campos com os dados referentes ao projeto, podendo, ainda nesta ocasião, alterar de acordo com as peculiaridades locais e circunstanciais da obra, os preços do concreto e do aço. A variável  $f_{yp}$  representa a tensão máxima que pode ser aplicada ao aço de protensão, sendo na prática considerada como 80% da tensão de ruptura do mesmo.

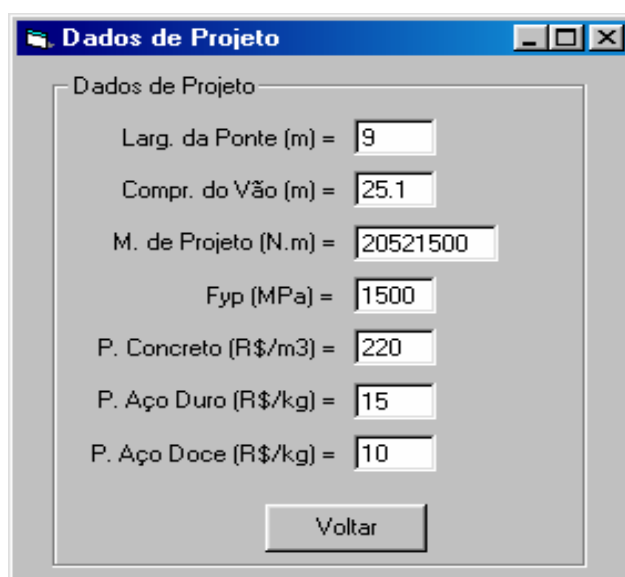


Figura 4.6 - Janela de manipulação dos dados de projeto

Clicando no botão “Opções de Viga”, o projetista poderá selecionar os padrões de vigas que farão parte do processo de otimização, podendo ele descartar uma ou mais vigas, o que de certa forma flexibiliza a determinação da solução mais econômica.



Figura 4.7 - Janela de seleção das vigas

A janela de opções apresentada na Figura 4.9 torna possível a definição dos valores das armaduras de costela e de estribo que serão utilizados de forma única durante o processo, assim como das taxas de armadura da laje.

No penúltimo campo dessa figura, o usuário deve definir o valor da relação entre o espaçamento entre vigas e a espessura de laje, ou seja, para cada solução gerada durante o processo de otimização e em função do seu número de vigas, o programa determina automaticamente a espessura de laje. Com isto, mantém-se sempre uma mesma relação entre o espaçamento entre vigas e a espessura de laje.

No campo referente a  $L_{bal}$ , pode-se definir o comprimento do balanço da seção transversal da obra. Caso este campo fique em branco, o programa admitirá de forma automática que  $L_{bal}$  será a metade do espaçamento entre eixos de vigas. Na Figura 4.8 é ilustrado o comprimento do balanço em uma seção transversal típica de ponte.

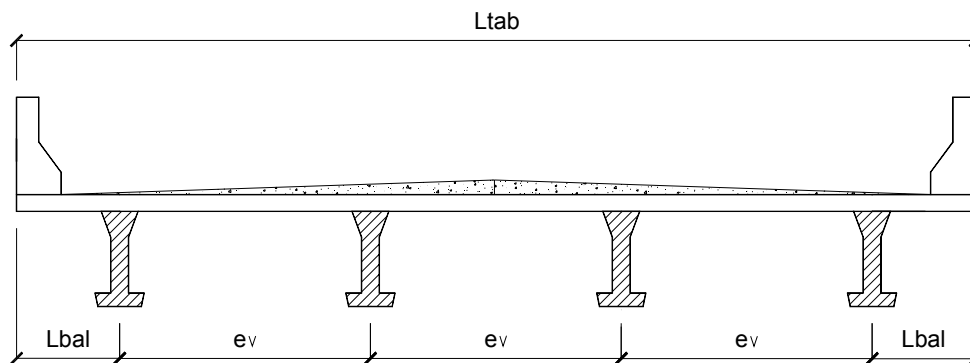


Figura 4.8 – Ilustração do comprimento do balanço na seção transversal

**Opções**

Opções:

As Costela (mm<sup>2</sup>) =  (Área de uma barra de costela)

As Estribo (mm<sup>2</sup>) =  (Área de uma barra de estribo)

$\rho_1$  (%) =  (Tx. de armadura transv. da laje)

$\rho_2$  (%) =  (Tx. de armadura long. da laje)

Esp / h laje =  (Relação entre o espaçamento das vigas e a espessura de laje)

Lbal (m) \* =

\* caso queira definir o comprimento do balanço na seção transversal, preencha este campo, caso contrário deixe-o em branco e então seu valor será considerado como sendo metade do espaçamento entre vigas.

Figura 4.9 - Janela de opções

O botão “Calcular” existente na janela principal (Figura 4.4) procede à execução do programa, solicitando ao usuário que indique o nome do arquivo de saída de dados assim como seu local de salvamento. Neste arquivo serão salvos os dados referentes à melhor solução encontrada para cada geração, evitando assim que tais informações sejam perdidas ao longo do processo iterativo.

Através do botão “Resultados” existente na janela principal, tem-se acesso à janela ilustrada na Figura 4.10, na qual são apresentadas as características relativas à solução ótima encontrada durante o processo de otimização. Tais resultados referem-se à solução mais econômica presente na última geração do algoritmo genético.

O custo da melhor alternativa engloba tanto as despesas com as vigas, como também as referentes à laje, ao transporte das vigas até o local de execução da estrutura e à montagem da mesma.

The image shows a software window titled "Resultados" with a blue header bar. Inside the window, the text "Resultados" is displayed at the top. Below it, a section titled "Solução Ótima" contains several data fields, each with a label and a text input box containing a value:

- Hviga (mm) = 1600
- Nº de Vigas = 4
- Hlaje (m) = 0,15
- Nº de Cabos/Viga = 12
- Melhor Cromossomo = 01101110000
- Custo da Laje (R\$) = 21155
- Custo Total da Sol. Ótima (R\$) = 46240
- M. Resistente (N.m) = 11938080
- $\rho$  (%) = 0,43
- Contador = 1300

At the bottom of the window, there is a note: "OBS: No custo total já estão inclusos o custo da laje, do transporte e da montagem da estrutura." Below the note are two buttons: "Voltar" and "Limpar".

Figura 4.10 - Janela com os resultados da solução ótima

Os dados relativos aos indivíduos pertencentes à última geração podem ser salvos através do botão “Salvar Última Ger.” existente na janela principal do programa.

#### 4.1.2 – Variáveis do problema

O método dos algoritmos genéticos oferece como principal vantagem, em comparação com os métodos clássicos, a possibilidade de tratamento das variáveis de projeto de forma contínua, discreta ou como uma combinação de ambas. Já os processos de otimização que utilizam a programação matemática, apresentam dificuldades quanto ao tratamento das variáveis e parâmetros de forma discreta.

Neste trabalho todas as variáveis envolvidas no problema foram tratadas de forma discreta, e, por isso, cada uma delas contém apenas valores práticos, não havendo a necessidade de aproximações nas soluções ótimas obtidas pelo programa.

As variáveis mais importantes utilizadas neste trabalho são:

1. Altura da seção transversal da viga ( $h$ );
2. Número de vigas na seção transversal da ponte ( $nVigas$ );
3. Número de camadas de aço de protensão ( $nCamadas$ );
4. Número de cordoalhas de aço de protensão por viga ( $nCordoalhas$ );
5. Espessura da laje ( $h\_Laje$ );

A determinação da altura da seção implica na definição completa das dimensões da seção transversal da longarina, uma vez que para determinada altura tem-se somente uma configuração para a seção transversal da viga (ver Figura 4.2).

Das variáveis acima descritas, aquela que pode ser considerada como variável dependente é a espessura da laje, pois está condicionada ao número de vigas da seção transversal.

Assim, as variáveis 1, 2 e 5 determinam a área total de concreto da seção transversal da ponte. Já as variáveis 2 e 4 definem a área total de aço de protensão nesta mesma seção. Entretanto, o custo total da seção transversal da obra leva em consideração não somente as despesas com concreto e armadura ativa, mas também aquelas referentes à armadura passiva tanto das vigas como da laje e ainda os custos do transporte e montagem da estrutura. No próximo tópico será apresentado de forma mais detalhada o cálculo de todas estas variáveis presentes no processo de otimização.

### 4.1.3 – Função-objetivo

A otimização da seção transversal da ponte requer que a soma dos custos referentes à área total de concreto, a área total de aço de protensão e a área total da armadura passiva das vigas e da laje sejam as menores possíveis, desde de que sejam atendidos os critérios de restrição.

A função-objetivo adotada neste trabalho é definida pela Equação 4.1:

$$C_{\text{tot}} = C_c \cdot V_c + C_p \cdot V_{\text{sp}} \cdot \gamma_s + C_{\text{estribo}} + C_{\text{costela}} + CL \quad (4.1)$$

A primeira parcela representa o custo do concreto das vigas para toda ponte, uma vez que leva em conta o comprimento total da obra, sendo  $C_c$  o custo do concreto por metro cúbico e  $V_c$  o volume total de concreto das vigas. A segunda parcela descreve o custo das armaduras de protensão, sendo  $C_p$  o custo do aço de protensão por unidade de massa e  $V_{\text{sp}}$  seu respectivo volume. A terceira e a quarta parcelas representam, respectivamente, o custo adicional da armadura de estribo e o custo adicional da armadura de costela em função do aumento na altura das vigas, ambos em relação à viga de 500 mm. Os valores destas parcelas são obtidos por intermédio das Equações 4.2 e 4.3.

$$C_{\text{estribo}} = nVigas \cdot 2 \cdot (h - 0,5) \cdot n_{\text{estribo}} \cdot A_{s\_estribo} \cdot C_t \cdot \gamma_s \quad (4.2)$$

onde  $h$  é a altura da viga em metros,  $n_{\text{estribo}}$  é o número de estribos em toda extensão da obra,  $A_{s\_estribo}$  é a área em metros quadrados de uma barra de estribo e  $C_t$  o custo da armadura passiva por quilograma.

$$C_{\text{costela}} = nVigas \cdot 2 \cdot n_{\text{costela}} \cdot L_{\text{vão}} \cdot A_{s\_costela} \cdot C_t \cdot \gamma_s \quad (4.3)$$

onde  $n_{\text{costela}}$  é o número de costelas a mais desta solução em relação à solução com viga de 500 mm,  $L_{\text{vão}}$  representa o comprimento do vão em metros e  $A_{s\_costela}$  é a área em metros quadrados de uma barra de costela.

A última parcela da Equação 4.1 diz respeito ao custo da laje, custo este que varia em função tanto da largura do tabuleiro e do comprimento da obra, como também

da espessura da laje e das taxas de armadura longitudinal e transversal. Vale lembrar que a espessura da laje é alterada de acordo com o número de vigas de cada solução gerada, mas as taxas de armadura são dados de entrada do programa. A Equação 4.4 constitui a formulação proposta para o cálculo do custo da laje.

$$CL = V_{c\_laje} \cdot C_c + V_{s\_laje} \cdot C_t \cdot \gamma_s \quad (4.4)$$

onde  $V_{c\_laje}$  representa o volume de concreto da laje,  $V_{s\_laje}$  é o volume de aço da laje.

A parcela referente ao custo das formas não entrou no cálculo da função-objetivo, visto que se trata de vigas pré-moldadas concretadas na própria fábrica com uso de formas de concreto já existentes e padronizadas para os diferentes tipos de vigas, e que podem ser utilizadas indefinidas vezes.

#### 4.1.4 -Restrições

A formulação acima apresentada foi submetida a dois tipos de restrições: uma relativa ao critério de resistência e outra referente ao espaçamento mínimo entre eixos de longarinas.

Na solução de problemas de otimização de estruturas em geral, o mais importante critério restritivo refere-se à resistência da estrutura, relacionando de forma direta os esforços de projeto (solicitantes) e os esforços resistentes numa mesma seção. A seção de dimensionamento considerada neste trabalho foi a do meio do vão, uma vez que nesta seção encontram-se os maiores esforços de flexão nas vigas em estudo.

Apresenta-se a seguir a equação referente à restrição de momento implementada ao programa.

$$\frac{M_r}{M_p} - 1 \geq 0 \quad (4.5)$$

onde  $M_p$  é o momento de projeto fornecido como dado de entrada do programa (ver Figura 4.6) e  $M_r$  é o momento resistente da seção transversal da ponte, cujo cálculo é obtido através da Equação 4.6.

$$M_r = z \cdot nCabos \cdot A_{1sp} \cdot f_{yp} \quad (4.6)$$

onde  $z$  é a distância entre o centróide da armadura de flexão e o centróide da área de concreto comprimida,  $A_{1sp}$  é a área de uma cordoalha de protensão e  $f_{yp}$  a tensão máxima que pode ser aplicada a esta cordoalha.

Para contornar o problema do número de vigas na seção transversal do tabuleiro, optou-se por determinar *a priori* um espaçamento mínimo entre vigas ( $e_{\min}$ ) definido por nós como sendo de 1,65m. Tal restrição objetivou limitar o número máximo de vigas ( $n_{\max}$ ) na seção transversal da ponte, permitindo, então, que o programa gere apenas soluções com  $nVigas \leq n_{\max}$ . Caso o usuário não defina como dado de entrada o valor de  $L_{bal}$  presente no último campo da janela da Figura 4.9,  $n_{\max}$  será calculado através da Equação 4.7.

$$n_{\max} = \text{Inteiro} (L_{tab} / e_{\min}) \quad (4.7)$$

onde  $L_{tab}$  é a largura do tabuleiro da ponte.

Entretanto, caso seja definido *a priori* o valor de  $L_{bal}$ ,  $n_{\max}$  será determinado pela Equação 4.8.

$$n_{\max} = 1 + \text{Inteiro} [(L_{tab} - 2 * L_{bal})/e_{\min}] \quad (4.8)$$

### **Tratamento da restrição de resistência**

Para o tratamento das restrições do problema abordado, pensou-se em utilizar a *estratégia de rejeição* descrita no item 3.12 do capítulo anterior para as soluções infactíveis geradas durante o processo de otimização. Entretanto, uma reflexão em cima da situação ilustrada pela Figura 3.2, fez com que se optasse pela *estratégia de penalidade* para as soluções não factíveis. Considerou-se interessante não descartar as soluções infactíveis próximas da fronteira do espaço de busca factível, já que um possível cruzamento com outro indivíduo ou uma pequena mutação poderia tornar tal solução factível.

Como visto na seção 3.13 do capítulo anterior, a função de penalidade transforma um problema com restrições em um problema sem restrições por meio da penalização das soluções infactíveis. Sabe-se também que não existe uma orientação geral para a definição da função de penalização em problemas de otimização com restrições. Desta forma, neste trabalho foi adotada uma função de penalidade similar à formulação original proposta por HOMAIFAR (1994) para a restrição referente ao esforço de flexão. Assim como na forma original, aqui também se empregou uma função que estabelece diferentes níveis de penalização dependendo da magnitude da violação que cada uma das restrições sofre.

Em sua formulação original, o autor estabelece para cada nível de violação e para cada restrição coeficientes  $R_{ij}$  que crescem à medida que os níveis de violação aumentam, associados aos termos  $H_j^2(x)$  que representam cada uma das restrições do problema. Entretanto, na função de penalização implementada neste trabalho, para cada restrição é empregado apenas um coeficiente  $R_j$  que com o respectivo termo  $H_j^2(x)$  compõem a parcela referente à penalização da solução. Quanto mais próximas dos limites da região factível estiverem as soluções infactíveis, menores serão os valores da função de penalização.

A Equação 4.9 apresenta a formulação matemática da função de penalidade proposta neste trabalho.

$$\text{pen}(x) = \begin{cases} 0 & x \in S \\ \sum_{j=1}^k R_j H_j^2(x) & x \notin S \end{cases} \quad (4.9)$$

onde o índice  $k$  corresponde ao número de restrições existentes no problema,  $S$  é o espaço das soluções factíveis, o termo  $H_j(x)$  representa as diferentes restrições do problema e  $R_j$  são os coeficientes para cada uma destas restrições.

#### 4.1.5 – Função de aptidão

A função de aptidão surge como uma formulação final para a resolução do problema de otimização, onde a função-objetivo, definida na Equação 4.1 e submetida à restrição de resistência apresentada no item 4.1.4, é transformada em uma nova

função sem restrição. Desta forma, a função de aptidão implementada no programa fica definida pela Equação 4.10:

$$C_{\text{final}} = C_{\text{tot}} \times C.M + R_1 \times \left( \frac{M_r}{M_p} - 1 \right)^2 \quad (4.10)$$

onde C.M é um coeficiente de majoração fixo para qualquer tipo de solução, e que representa os custos referentes ao transporte e à montagem da estrutura no canteiro de obras. O valor do C.M foi obtido junto à empresa PREMAG pré-moldados.

$R_1$  é o coeficiente de penalização referente à restrição à flexão, e que durante o processo de otimização assumirá um único valor diferente de zero quando  $M_r < M_p$ , sendo igual a zero se esta restrição não for violada. O termo  $(M_r / M_p - 1)^2$  será responsável pelos diferentes níveis de penalização a que as soluções estarão sujeitas, uma vez que assumirá diferentes valores em função da diferença entre  $M_r$  e  $M_p$ . Quanto mais próximo  $M_r$  estiver de  $M_p$ , menor será a penalização aplicada à solução.

#### 4.1.6 - Codificação das soluções

##### *Altura da seção*

Na codificação das possíveis alturas de seção foram utilizadas as alturas de vigas já padronizadas pela empresa fabricante de vigas pré-moldadas PREMAG. A altura das vigas pode assumir qualquer valor discreto presente na Tabela 4.1. Para cada uma das alturas de viga desta tabela, tem-se apenas uma configuração para as demais dimensões da seção, ou seja, a simples definição da altura determina a área de concreto da seção transversal da longarina. A Figura 4.2 ilustra as dimensões de cada uma destas vigas.

A determinação da altura de viga de cada solução é feita através da Equação 4.11, a qual poderá assumir um valor inteiro entre 1 e 7 de acordo com os três primeiros bits do cromossomo e que apontará para um dos valores presentes na primeira coluna da Tabela 4.1.

$$\text{Tab1} = 1 + \text{bit}(1) + 2 \cdot \text{bit}(2) + 3 \cdot \text{bit}(3) \quad (4.11)$$

Tabela 4.1 – Padrões das alturas de viga

Nº	Altura (mm)
1	500
2	700
3	850
4	1200
5	1400
6	1600
7	1900

Assim, se a substring com os três primeiros bits, correspondente à altura da viga, assumir o valor 110, tem-se:  $Tab1 = 1 + 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$ , que aponta para a quarta posição da primeira coluna da Tabela 4.1, e assim  $h = 1200$  mm.

Existe ainda a possibilidade do usuário optar em não utilizar alguma ou algumas das vigas da Tabela 4.1, já que o programa permite que sejam selecionadas as alturas de viga que irão fazer parte do processo de otimização. Na Figura 4.7 apresenta-se a janela do programa referente a este tipo de escolha, onde, a princípio, todas as vigas disponíveis apresentam-se selecionadas.

#### *Número de vigas na seção transversal da ponte*

Para a codificação do número de longarinas na seção foram utilizados 3 bits e seu valor é calculado de acordo com a Equação 4.12:

$$nVigas = 2 + A \cdot \text{bit}(4) + B \cdot \text{bit}(5) + C \cdot \text{bit}(6) \quad (4.12)$$

onde o bit(i) representa o valor 0 ou 1 do i-ésimo bit do cromossomo e  $nVigas$  o número de vigas na seção transversal da ponte.

Os coeficientes A, B e C são valores inteiros calculados em função da largura do tabuleiro da ponte (dado de entrada), do espaçamento mínimo entre longarinas e também do comprimento do balanço da seção transversal, que pode ser definido como

dados de entrada pelo usuário. Tais fatores limitam assim o número máximo de vigas na seção transversal. Abaixo é apresentada a seqüência de procedimentos efetuados pelo programa para o cálculo dos coeficientes A, B e C.

1º Passo – Ler o valor da largura do tabuleiro ( $L_{tab}$ ) fornecido como dado de entrada, o valor do espaçamento mínimo entre vigas ( $e_{min}$ ), que é um valor definido internamente no programa, e também o valor de  $L_{bal}$ , caso seja preenchido o último campo existente na Figura 4.9.

2º Passo – Calcular o número máximo de vigas na seção ( $n_{máx}$ ) através da Equação 4.7 ou 4.8, conforme o caso.

3º Passo – Efetuar o cálculo dos coeficientes A, B e C:

$$A = \text{Int} ((n_{máx} - 2) / 8)$$

$$B = \text{Int} ((n_{máx} - 2) / 4)$$

$$C = \text{Int} (((n_{máx} - 2) * 5) / 8)$$

Se  $(A + B + C) < n_{máx} - 2$  Então

$$\text{Dif} = (n_{máx} - 2) - (A + B + C)$$

Fim do Se

Se  $A = 0$  Então

$$A = A + 1$$

$$\text{Dif} = \text{Dif} - 1$$

Fim do Se

Se  $\text{Dif} > 0$  Então

$$B = B + 1$$

$$\text{Dif} = \text{Dif} - 1$$

Fim do Se

Se  $\text{Dif} > 0$  Então

$$C = C + 1$$

Fim do Se

Quando os bits 4, 5 e 6 forem iguais a 1, ter-se-á uma solução com o número máximo de vigas permitido na seção transversal.

### *Espessura da laje*

O valor da espessura da laje é obtido de forma simples através da Equação 4.13.

$$h_{Laje} = \text{Espaçamento} / \text{Relação} \quad (4.13)$$

onde o valor do espaçamento é obtido a partir do número de vigas da seção e o valor da relação entre o espaçamento das vigas e a espessura da laje é uma informação fornecida como dado de entrada (ver Figura 4.9).

De forma a atender tanto as prescrições da NBR-6118/2003 como aos padrões do fabricante, o valor mínimo desta variável ficou limitado a 15 cm.

### *Número de camadas de aço de protensão*

De acordo com dados fornecidos pelo fabricante das vigas utilizadas neste trabalho, o número de camadas de aço de protensão é de no máximo duas, podendo cada camada ter um número máximo de 11 cordoalhas com diâmetro nominal de 12,7 mm. As duas primeiras vigas da Tabela 4.1 só permitem uma camada de armadura.

O procedimento para a determinação do número de camadas de aço das vigas que trabalham com mais de uma camada é muito simples. O valor do bit (7) é quem determina esse número, sendo igual a 0 quando a solução apresenta apenas uma camada de armadura e igual a 1 quando há uma segunda camada de armadura. Como as vigas de 500 mm e 750 mm não comportam duas camadas de aço, o valor do bit (7) nestes dois casos é desprezado.

### *Número de cordoalhas de aço de protensão por viga*

Para cada padrão de viga existente no banco de dados, tem-se um número máximo de cordoalhas de protensão de acordo com os dados do fabricante. Essas restrições ocorrem tanto por limitações construtivas, como é o caso do número máximo de cordoalhas por camada, quanto pelos esforços de tração provocados nas fibras superiores da viga quando esta ainda apresenta-se descarregada.

No caso dos esforços de tração no talão superior excederem a resistência do concreto à tração, é comum por parte do fabricante a utilização de armadura dupla, evitando assim a fissuração desse trecho da estrutura.

A representação da armadura do talão inferior padrão para todas as vigas, com a disposição da cablagem de protensão é ilustrada na Figura 4.11.

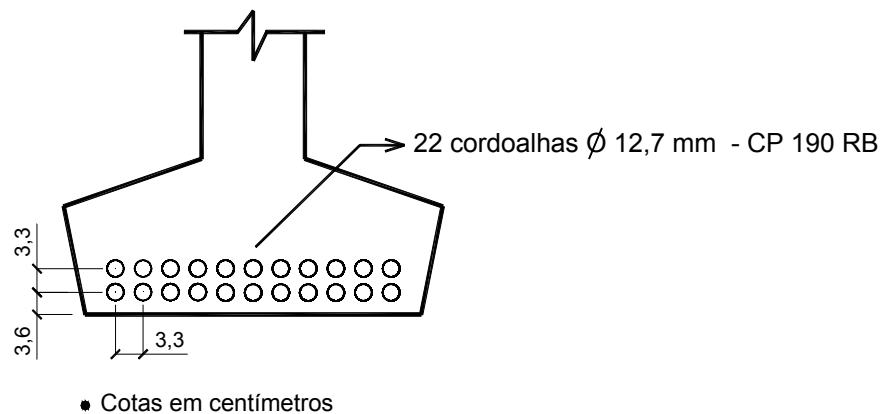


Figura 4.11 – Representação do talão inferior padrão

A codificação desta variável é feita por uma substring com 4 bits, número determinado pela Equação 3.3. Utilizando a Equação 3.2, obtém-se o número de cordoalhas de protensão para a camada mais interna à viga, com  $n_b = 4$ , e com o limite inferior e superior para o número de cordoalhas variando em função da camada (primeira ou segunda) em questão e de acordo com a altura de viga da solução.

#### *Custo do transporte e da montagem da superestrutura da obra*

Os custos do transporte das vigas pré-moldadas, assim como de sua montagem na obra, aqui definidos como C.M, também foram levados em consideração no processo de escolha da solução mais econômica. De acordo com as informações obtidas junto ao fabricante, normalmente tal despesa é cobrada em função dos custos decorrentes da fabricação da própria estrutura, devido ao fato de ser um custo indireto e portanto de difícil quantificação. Seu valor normalmente adotado é de 20% do custo dos materiais (concreto + aço).

Assim, a subdivisão completa do cromossomo pode ser resumida:

bits 1 a 3 – determinam a altura da seção;

bits 4 a 6 – determinam o número de longarinas;

bit 7 – determina se a segunda camada existe;

bits 8 a 11 – determinam o número de cordoalhas da camada mais interna à viga;

Para melhor se entender o procedimento de codificação acima apresentado, considere o exemplo do cromossomo representado abaixo, gerado randomicamente pelo programa:

1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Esta seqüência de bits representa uma possível solução para o problema proposto, e a partir dela decodifica-se o valor de suas variáveis.

1ª variável: Altura da seção

Segundo a Equação 4.11 tem-se:

$Tab1 = 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$ , o que corresponde à altura de viga de 1200 mm da Tabela 4.1.

2ª variável: Número de longarinas

Segundo a Equação 4.12 tem-se:

$$nVigas = 2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0$$

Como se sabe, os valores dos coeficientes A, B e C dependem da largura do tabuleiro da ponte ( $L_{tab}$ ), que é um dos dados fornecidos pelo usuário, do espaçamento mínimo entre vigas ( $e_{min}$ ) definido internamente no programa e também do comprimento do balanço da seção transversal ( $L_{bal}$ ) que pode ser definido como dado de entrada.

Supondo que sejam fornecidos como dados de entrada  $L_{tab} = 15,0$  m e  $L_{bal} = 1,1$  m; e que  $e_{min} = 1,65$  m esteja definido internamente no programa, obtêm-se os valores de A, B e C a partir da seguinte seqüência lógica.

O número máximo de longarinas na seção é dado por:

$$n_{\text{máx}} = 1 + \text{Int} [(L_{\text{tab}} - 2 \cdot L_{\text{bal}}) / e_{\text{mín}}] = 1 + \text{Int} (12,8 / 1,65) = 8 \text{ vigas.}$$

$$A = \text{Int} ((8 - 2) / 8) = 0$$

$$B = \text{Int} ((8 - 2) / 4) = 1$$

$$C = \text{Int} (((8 - 2) * 5) / 8) = 3$$

Como  $A + B + C = 4 < (8 - 2) = 6$  então

$$\text{Dif} = (8 - 2) - 4 = 2$$

Como  $A = 0$  então

$$A = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Dif} = 2 - 1 = 1$$

Como  $\text{Dif} > 0$  então

$$B = 1 + 1$$

$$\text{Dif} = 1 - 1 = 0$$

Como  $\text{Dif} = 0$  então

$$C = 3$$

E assim tem-se:  $A = 1$ ,  $B = 2$  e  $C = 3$ , logo:

$$n_{\text{Vigas}} = 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5.$$

3ª variável: Espessura da laje

Inicialmente deve-se calcular o espaçamento efetivo entre as vigas, que, neste caso, é obtido através da equação abaixo:

$$\text{Espaçamento} = (L_{\text{tab}} - 2 \cdot L_{\text{bal}}) / (n_{\text{Vigas}} - 1) \quad (3.23)$$

$$\text{Espaçamento} = 3,2 \text{ m}$$

Supondo que a relação entre o espaçamento entre vigas e a espessura da laje seja igual a 15, então  $h = 0,21$ .

4ª variável: Número de camadas de aço de protensão

Como o bit 7 é igual a zero, esta solução só apresenta uma camada de aço de protensão.

5ª variável: Número de cordoalhas na camada mais interna

Para a determinação do número de cordoalhas da camada mais interna utiliza-se a Equação 3.2, onde:

$$nCordoalhas = 2 + \text{IND} \cdot \frac{(11 - 2)}{2^4 - 1} = 2 + 0,6 \cdot \text{IND}$$

$$\text{IND} = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 10$$

onde  $x^{\text{LI}} = 2$  cordoalhas,  $x^{\text{LS}} = 11$  cordoalhas e  $nb = 4$  bits

Assim:  $nCordoalhas = \text{Int}(2 + 0,6 \cdot 10) = 8$ .

## **CAPÍTULO 5 – RESULTADOS DAS APLICAÇÕES**

### **5.1 - Introdução**

Objetivando mostrar a eficiência do programa implementado neste trabalho, são apresentados neste capítulo os resultados obtidos pelo mesmo, comparando-os com os obtidos de projetos de pontes já executadas pela empresa PREMAG. Além disso, é feita uma análise de sensibilidade da função custo quando ocorrem variações nos preços do aço de protensão e do concreto de forma isolada.

### **5.2 - Aplicações**

As aplicações realizadas com o auxílio do programa desenvolvido basearam-se em três diferentes projetos executados pela empresa fabricante de elementos pré-moldados. Buscou-se com isto a verificação da otimização realizada em problemas de ordem prática.

De posse das características geométricas destas obras, buscou-se, com subsídio do programa desenvolvido, a otimização de suas seções transversais, ou seja, a escolha da solução mais econômica dentre as inúmeras disponíveis.

Para estas três aplicações, executou-se um algoritmo genético do tipo simples, com 50 indivíduos em 25 gerações, onde o critério de parada foi o número de gerações, com a estratégia de seleção proporcional à aptidão. Foi utilizado crossover de um ponto com probabilidade de 70% e taxa de mutação de 0,5%.

#### **5.2.1 – Aplicação N° 1**

A primeira aplicação feita refere-se a uma ponte com 17,7 m de comprimento, largura do tabuleiro com 8,60 m e trem-tipo classe 45. A Figura 5.1 exhibe a seção transversal desta obra com os seus valores em centímetros.

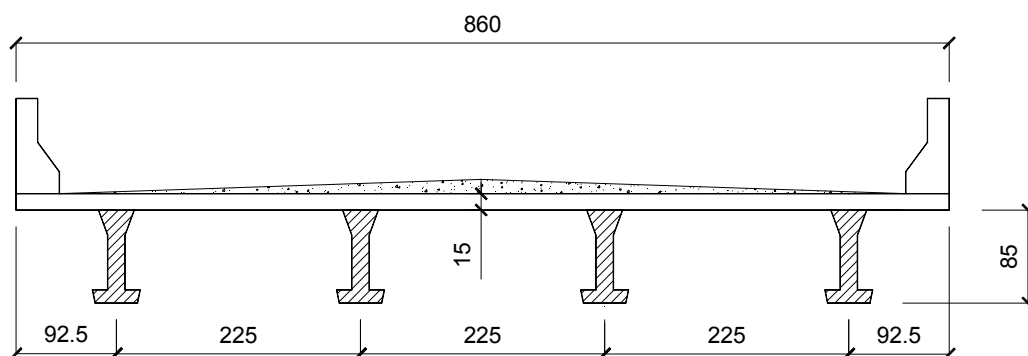


Figura 5.1 – Seção transversal da aplicação nº 1

Nesta obra, a empresa PREMAG adotou uma solução com 4 vigas de 0,85 m de altura e uma laje com 0,15 m de espessura, onde a armadura de flexão utilizada para as vigas de bordo foi diferente da empregada para as vigas internas. A Figura 5.2 apresenta as configurações das armaduras de flexão adotadas em cada uma destas vigas.

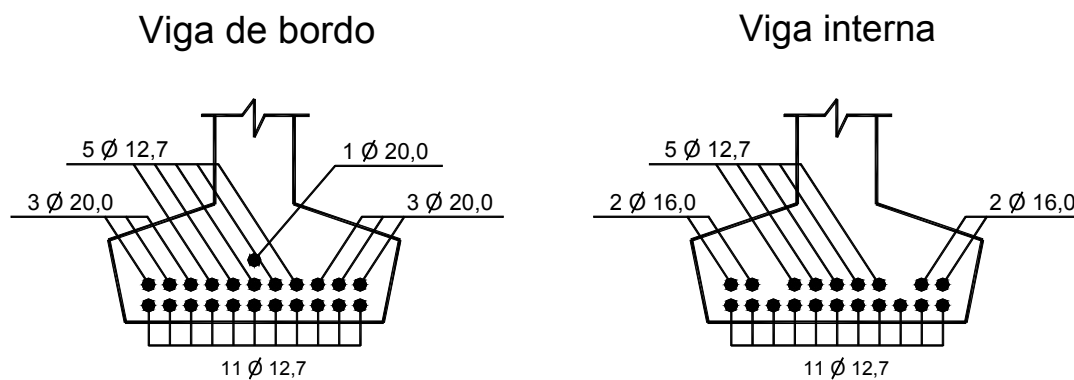


Figura 5.2 – Armadura de flexão da aplicação nº 1.

A armadura de flexão das vigas compõem-se de cordoalhas CP-190 RB  $\phi$  12,7 mm, sendo o restante da armadura formada por aço CA-50 ( $\phi$  16,0 mm e  $\phi$  20,0 mm). A partir destas informações referentes à disposição, quantidade e bitola da armadura de

flexão, obteve-se o valor do momento resistente da seção transversal, o qual foi utilizado como dado de entrada do programa.

Para que fosse possível a comparação dos custos da solução adotada no projeto com os da solução mais econômica encontrada pelo programa, procedeu-se primeiramente ao cálculo dos custos referentes à alternativa adotada pelo fabricante. Em seguida, com o auxílio do programa implementado, obteve-se a solução ótima para o problema em questão.

De forma a evidenciar a flexibilidade proporcionada pelo programa, obtiveram-se também outras soluções com diferentes alturas, todas mais econômicas que aquela proposta pelo fabricante.

A Tabela 5.1 resume os resultados obtidos pelo programa para esta primeira aplicação. Nesta análise, consideraram-se os seguintes custos para os materiais:  $P_c$  (R\$/m<sup>3</sup>) = 220,0 (fck 35 MPa),  $P_{ativo}$  (R\$/kg) = 15,0 (aço de protensão),  $P_{passivo}$  (R\$/kg) = 6,0 (aço CA-50).

Tabela 5.1 – Resumo dos resultados obtidos pelo programa para a 1ª aplicação

Tipo de solução	N <sub>vigas</sub>	Armadura		H <sub>viga</sub> (m)	M <sub>r</sub> (kN.m)	C. Final (R\$)	Economia (%)	ρ* (%)
		Ativa (N <sub>cord</sub> )	Passiva (N <sub>ferros</sub> )					
Fabricante	4	16	7φ20 / 4φ16	0,85	10.774	52.076	-	0,86
Mais econômica	4	11	-	1,60	10.962	45.239	13,13	0,40
Demais soluções obtidas pelo programa	4	10	-	1,90	11.789	45.758	12,13	0,32
	4	13	-	1,40	11.334	45.907	11,85	0,54
	4	15	-	1,20	11.219	46.812	10,11	0,70
	5	17	-	0,85	11.335	52.487	-0,79	0,91

\* taxa de armadura de protensão (vigas centrais e vigas de bordo)

OBS: a tx. de armadura de aço CA-50 nas vigas de bordo do fabricante foi de 1,18% e das vigas centrais de 0,43%

Antes de analisar os resultados da Tabela 5.1, é importante ressaltar que apenas a solução proposta pelo fabricante possui armadura de flexão constituída por aço de protensão e aço CA-50, sendo as demais compostas apenas por aço de protensão. A coluna referente ao custo final de cada solução inclui tanto os custos das vigas e da laje como o acréscimo no preço referente aos gastos com transporte e montagem da estrutura.

A espessura de laje para todas as soluções propostas pelo programa para esta aplicação foi a mesma da solução adotada pelo fabricante, ou seja, o valor de 15,0 cm. A prescrição da NBR 6118/2003 recomenda o valor mínimo de 12,0 cm.

É interessante lembrar que no custo de cada alternativa também se consideraram os custos com armadura de estribo e de costela em função do acréscimo na altura da viga.

Como pode ser observado na Tabela 5.1, a variável correspondente ao número de vigas na seção transversal manteve-se inalterada para todas as alternativas sugeridas, exceto para a solução com  $h_{\text{viga}} = 0,85$  m, entretanto as variáveis relativas à quantidade de cordoalhas por longarina e à altura das mesmas foram as responsáveis pelas variações no custo final das soluções propostas pelo programa.

A solução mais econômica para este problema correspondeu àquela com altura de viga de 1,6 m, onde se obteve uma economia no custo das vigas e da laje de 13,13% em relação à solução adotada pelo fabricante, cuja altura de viga foi de 0,85 m. Essa diferença percentual representa em termos absolutos uma economia de R\$ 6.837,00.

Entretanto, apesar de haver uma diferença de altura entre ambas soluções, o acréscimo de peso da estrutura como um todo foi de apenas 0,82%, o que de certa forma não inviabiliza a alternativa encontrada pelo programa. Caso a solução com altura de viga de 1,6 m não garanta o gabarito mínimo exigido no projeto, deve-se recorrer às demais soluções da Tabela 5.1 com menores alturas de viga. Todos os resultados que se encontram resumidos na tabela anterior estão no Apêndice A de forma mais detalhada.

A última linha da Tabela 5.1 apresenta a solução mais econômica, obtida pelo programa, com a mesma altura de viga da solução proposta pelo fabricante. Entretanto, seu custo foi 0,79% mais elevado que o da solução adotada pelo fabricante. Essa diferença de custo pode ser explicada pelo fato do fabricante ter utilizado uma alternativa mais flexível, uma vez que empregou uma armadura de flexão parcialmente protendida. Neste tipo de solução, a armadura de aço passiva complementar à armadura de protensão, apesar de ser menos eficiente, não contribui para o efeito da fissuração da parte superior da viga, permitindo assim que se aumente a capacidade resistente da viga.

Como as soluções geradas pelo programa não permitiram a utilização de armadura de aço doce em suas configurações, estas ficaram limitadas para o caso de

$h_{\text{viga}} = 0,85\text{m}$  a um número máximo de 17 cordoalhas, sendo então necessária a presença de uma quinta viga na seção transversal da ponte, o que pode ter levado ao acréscimo observado no custo total quando da comparação dos resultados. Entretanto, tal diferença pode ser considerada inexpressiva dentro do custo global da obra.

Analisando as informações contidas na Tabela 5.1, pode-se observar que as soluções mais econômicas contemplam as menores taxas de armadura, ou seja,  $\rho = 0,40\%$  e  $\rho = 0,32\%$ , e que as taxas de armadura adotadas para as vigas de bordo e internas propostas pelo fabricante foram bastante elevadas quando comparadas com as obtidas pelo programa.

Nas Figuras 5.3 e 5.4 são apresentados os gráficos que avaliam a sensibilidade da função custo às variações nos preços do concreto e do aço de protensão de forma isolada.

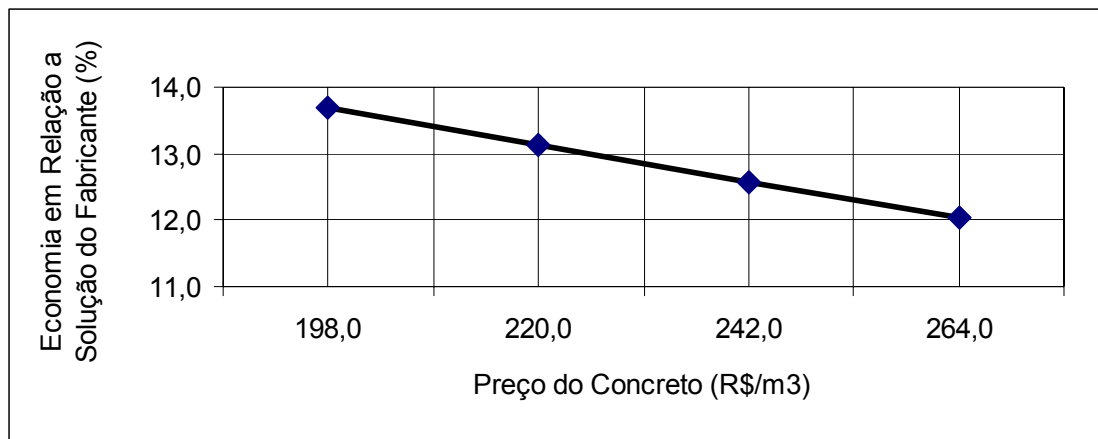


Figura 5.3 – Influência da variação do preço do concreto no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 1

Para o gráfico da Figura 5.3, variou-se apenas o preço do concreto, mantendo-se constantes os demais custos, objetivando assim observar sua influência na economia da solução ótima. É possível concluir por este gráfico que um aumento de 20% no preço do concreto reflete numa diminuição de apenas 1,1% na economia da solução ótima em relação à solução do fabricante.

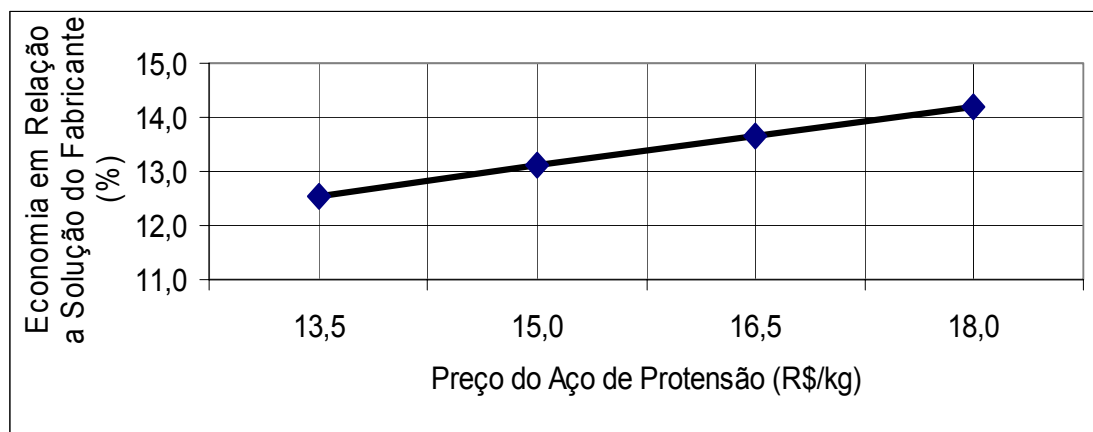


Figura 5.4 – Influência da variação do preço do aço de protensão no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 1

Na Figura 5.4 é mostrada a curva de variação do percentual de economia da solução ótima em função do acréscimo no preço do aço de protensão. Sua influência na economia da solução ótima se deu de forma inversa à da Figura 5.3, ou seja, quanto maior o preço do aço de protensão maior foi a economia em relação à solução do fabricante.

Pode-se concluir do gráfico que um aumento de 20% no preço do aço de protensão conduz a um ganho econômico na solução ótima de cerca de 1,1%.

### 5.2.2 – Aplicação N° 2

Na segunda aplicação, objetivou-se otimizar uma ponte com 16,0 m de comprimento, largura do tabuleiro com 9,0 m e trem-tipo classe 36.

Nesta obra, a empresa fabricante também adotou uma solução com 4 vigas de 0,85 m de altura e uma laje com 0,15 m de espessura. Na Figura 5.5 ilustra-se sua seção transversal com suas medidas em centímetros.

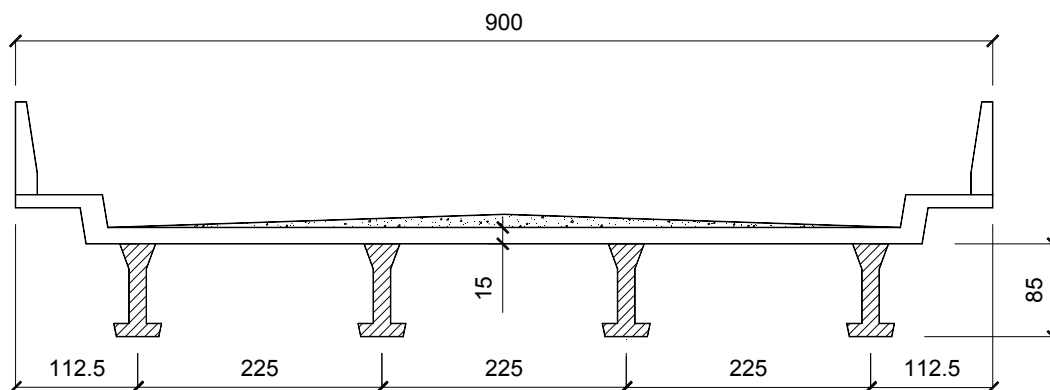


Figura 5.5 – Seção transversal da aplicação nº 2

Entretanto, diferentemente da primeira aplicação, neste caso a armadura de flexão utilizada para as vigas de bordo foi igual à das vigas internas. A Figura 5.6 apresenta a configuração da armadura de flexão destas vigas.

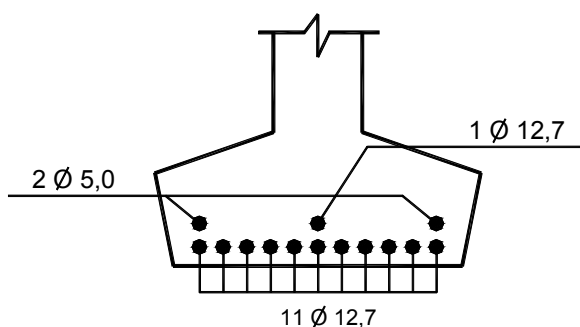


Figura 5.6 – Armadura de flexão da aplicação nº 2.

Na Figura 5.6, apenas as barras de 5,0 mm são de aço CA-50, sendo o restante da armadura composta por aço de protensão.

A Tabela 5.2 resume os resultados obtidos pelo programa para a segunda aplicação deste trabalho, sendo os preços do concreto e do aço os mesmos da primeira aplicação. Os resultados desta aplicação também estão disponíveis de forma mais detalhada no Apêndice A.

Tabela 5.2 – Resumo dos resultados obtidos pelo programa para a 2ª aplicação

Tipo de solução	N <sub>vigas</sub>	Armadura		H <sub>viga</sub> (m)	M <sub>r</sub> (kN.m)	C. Final (R\$)	Economia (%)	ρ * (%)
		Ativa (N <sub>cord</sub> )	Passiva (N <sub>ferros</sub> )					
Fabricante	4	12	2 φ 5	0,85	6.525	39.072	-	0,67
Mais econômica	4	9	-	1,20	6.780	37.632	3,69	0,42
Demais soluções obtidas pelo programa	4	8	-	1,40	6.999	37.638	3,67	0,33
	4	7	-	1,60	6.976	37.858	3,11	0,25
	4	6	-	1,90	7.073	38.248	2,11	0,19
	4	13	-	0,85	6.987	39.834	-1,95	0,70

\* taxa de armadura de protensão (vigas centrais e vigas de bordo)

De forma semelhante à primeira aplicação estudada, observa-se na Tabela 5.2 que a variável correspondente ao número de vigas na seção transversal manteve-se inalterada para todas as alternativas propostas, e que as variáveis relativas à quantidade de cordoalhas por longarina e a altura das mesmas foram as responsáveis pelas variações no momento resistente da seção, no custo final das soluções e na taxa de armadura da longarina.

Assim como na primeira aplicação, a espessura de laje para todas as soluções propostas pelo programa foi a mesma do projeto, ou seja, 0,15 m.

Dentre as alternativas presentes no banco de dados do programa, a que levou ao menor custo total para esta aplicação foi aquela com altura de viga de 1,2 m, onde se alcançou uma economia de cerca de 3,7% em relação à solução do fabricante. Essa diferença percentual representa em termos absolutos uma economia de R\$ 1.440,00. Vale lembrar que a solução com altura de viga de 1,2 m não faz parte da padronização utilizada pelo fabricante, sendo criada neste trabalho com o intuito de aumentar o leque de opções do programa e também preencher um vazio existente entre as vigas de 850 mm e 1400 mm de altura.

Neste segundo exemplo de aplicação, o acréscimo de peso da estrutura como um todo foi inferior a 0,5%, o que em termos estruturais não inviabiliza tal alternativa. Entretanto, assim como já fora alertado na primeira aplicação, deve-se observar o gabarito mínimo exigido para esta obra uma vez que a altura de viga da solução ótima do problema é superior à da opção adotada no projeto.

A Tabela 5.2 resume em sua última linha os resultados encontrados pelo programa para uma solução com mesma altura de viga da solução de projeto, a qual leva a um acréscimo de aproximadamente 2% no seu custo final. Tal diferença se

explica pelo fato do fabricante ter utilizado uma parte da armadura de flexão composta por aço CA-50 (ver Figura 5.6).

Analisando as informações contidas na última coluna da Tabela 5.2, observa-se que a solução mais econômica apresenta uma taxa de armadura de 0,42%, valor muito semelhante àquele encontrado na primeira aplicação. Entretanto, nesta obra, a taxa de armadura adotada pelo fabricante esteve muito mais próxima da taxa de armadura da solução ótima que no primeiro exemplo de aplicação. Tal proximidade justifica a menor economia da solução ótima obtida nesta segunda aplicação comparativamente à primeira.

Nas Figuras 5.7 e 5.8 constam os gráficos que avaliam a variação da economia da solução ótima em relação à solução adotada pelo fabricante quando ocorrem aumentos nos preços do concreto e do aço de protensão de forma isolada.

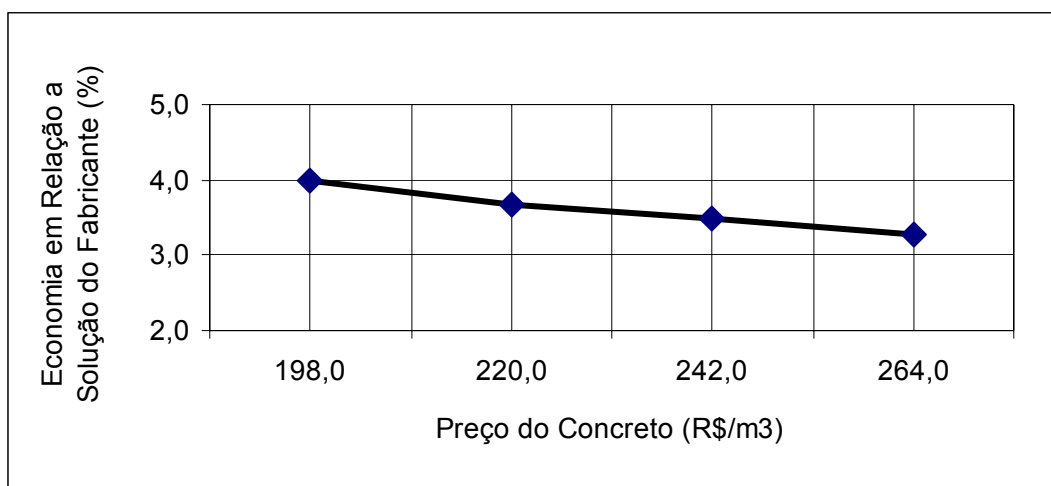


Figura 5.7 – Influência da variação do preço do concreto no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 2

Na Figura 5.7, observa-se que um aumento de 20% no preço do concreto representa uma diminuição de apenas 0,4% na economia da solução ótima em relação à solução proposta pelo fabricante.

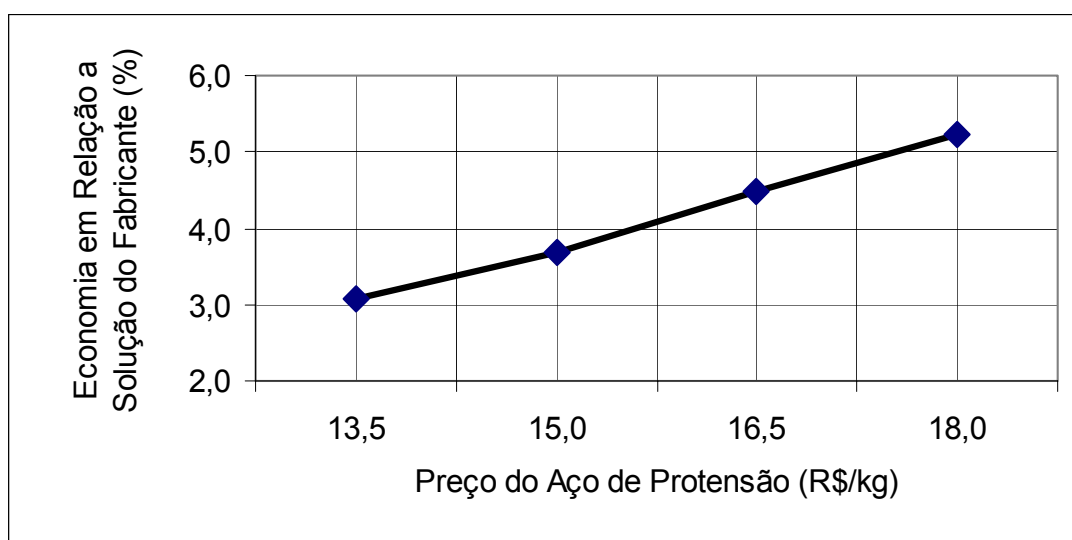


Figura 5.8 – Influência da variação do preço do aço de protensão no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 2

Pelo gráfico da Figura 5.8, pode-se concluir que um aumento de 20% no preço do aço de protensão produz um ganho econômico na solução ótima de 1,5%. Apesar de na primeira aplicação os percentuais de economia serem bem mais elevados que neste exemplo, para a mesma variação ocorrida no preço do aço de protensão em ambos os casos, aqui neste problema o ganho econômico foi superior ao da primeira aplicação.

### 5.2.3 – Aplicação Nº 3

No terceiro exemplo de aplicação, estudou-se uma ponte com 25,1 m de comprimento, 9,0 m de largura do tabuleiro e um trem-tipo da classe 45.

Neste projeto, a empresa fabricante adotou uma solução com 5 vigas de 1,40 m de altura e uma laje com 0,18 m de espessura. Assim como na segunda aplicação, aqui também se utilizou uma única armadura de flexão para todas as vigas. As Figuras 5.9 e 5.10 mostram a seção transversal da ponte e o detalhamento da armadura de flexão destas vigas, respectivamente.

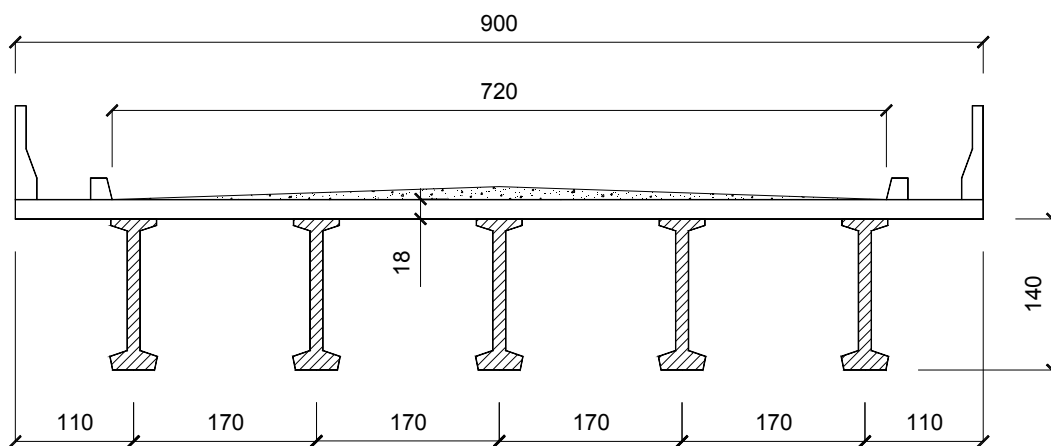


Figura 5.9 – Seção transversal da aplicação nº 3.

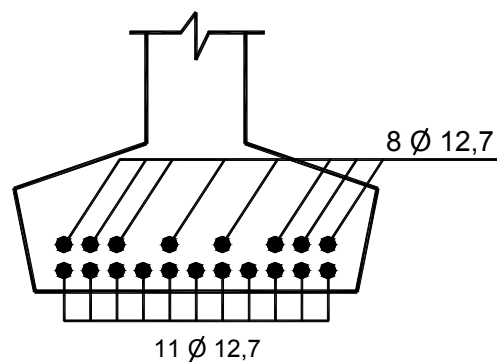


Figura 5.10 – Armadura de flexão da aplicação nº 3.

Dos três exemplos de aplicação apresentados neste trabalho, este foi o único em que o fabricante utilizou apenas aço de protensão na armadura de flexão.

A Tabela 5.3 resume os resultados obtidos pelo programa para esta aplicação, sendo os preços do concreto e do aço os mesmos das duas aplicações anteriores. Os resultados desta aplicação encontram-se de forma mais detalhada no Apêndice A.

Tabela 5.3 – Resumo dos resultados obtidos pelo programa para a 3ª aplicação

Tipo de solução	N <sub>vigas</sub>	Armadura	H <sub>viga</sub> (m)	M <sub>r</sub> (kN.m)	C. Final (R\$)	Economia (%)	ρ (%)
		Ativa (N <sub>cord</sub> )					
Fabricante	5	19	1,40	20.795	91.428	-	0,79
Mais econômica	5	15	1,90	22.175	89.077	2,57	0,48
Demais soluções obtidas pelo programa	5	17	1,60	21.219	90.087	1,47	0,62
	5	19	1,40	20.795	91.428	-	0,79

Assim como nas aplicações anteriores, apenas a variável referente ao número de vigas do tabuleiro manteve-se constante em todas as alternativas sugeridas. A espessura de laje também foi sempre a mesma que a do projeto em todas as soluções encontradas pelo algoritmo.

De acordo com os resultados da Tabela 5.3, tem-se que a melhor solução para este projeto correspondeu àquela com 1,90 m de altura de viga, onde se obteve uma economia de cerca de 2,6% no custo das vigas e da laje em relação à solução indicada no projeto. Isto corresponde a um ganho de R\$ 2.361,00 por vão de ponte.

O acréscimo de peso da estrutura como um todo foi inferior a 0,7%, valor inexpressivo face ao carregamento total da obra. Deve ser observado o valor do gabarito mínimo exigido para esta obra, já que houve um aumento de 0,5 m na altura da viga em relação à solução adotada no projeto.

Na última linha da Tabela 5.3, propõem-se uma solução com mesma altura de viga da solução de projeto. Diferentemente das aplicações anteriores, nesta o custo final de ambas as soluções foi idêntico, já que nesta obra o fabricante adotou uma alternativa onde a armadura de flexão foi composta somente por aço de protensão.

Analisando os valores presentes na última coluna da Tabela 5.3, observa-se que a solução mais econômica apresenta uma taxa de armadura de 0,48%, vindo mais uma vez a se aproximar dos valores encontrados nas aplicações anteriores. Assim como na segunda aplicação, a taxa de armadura adotada pelo fabricante esteve muito mais próxima da taxa de armadura da solução mais econômica comparativamente ao primeiro exemplo de aplicação. Tal proximidade justifica a menor economia da solução ótima obtida nesta obra comparativamente ao primeiro caso estudado.

Nas Figuras 5.11 e 5.12 mostram-se os gráficos que avaliam a variação da economia da solução ótima em relação à solução prática adotada pelo fabricante

quando ocorrem aumentos nos preços do concreto e do aço de protensão de forma isolada.

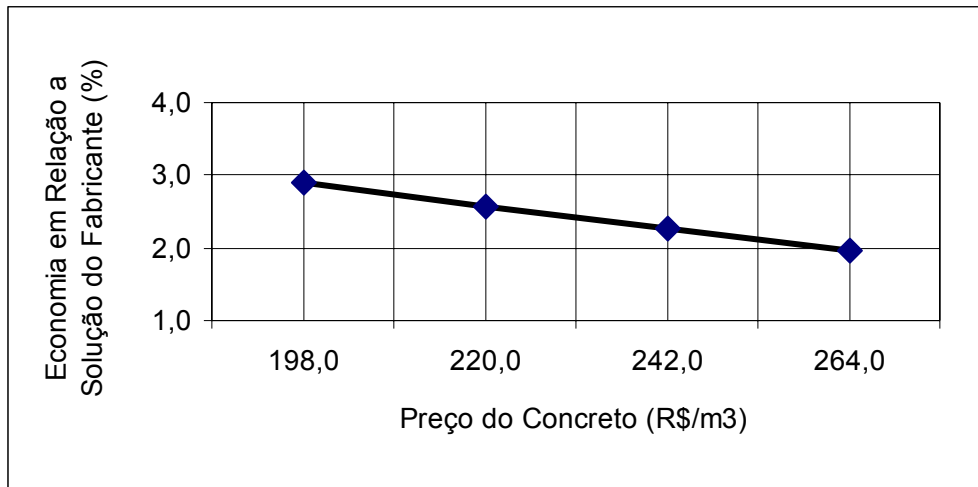


Figura 5.11 – Influência da variação do preço do concreto no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 3

No gráfico da Figura 5.11, observa-se que um aumento de 20% no preço do concreto provoca uma redução de pouco mais de 0,6% na economia da solução ótima.

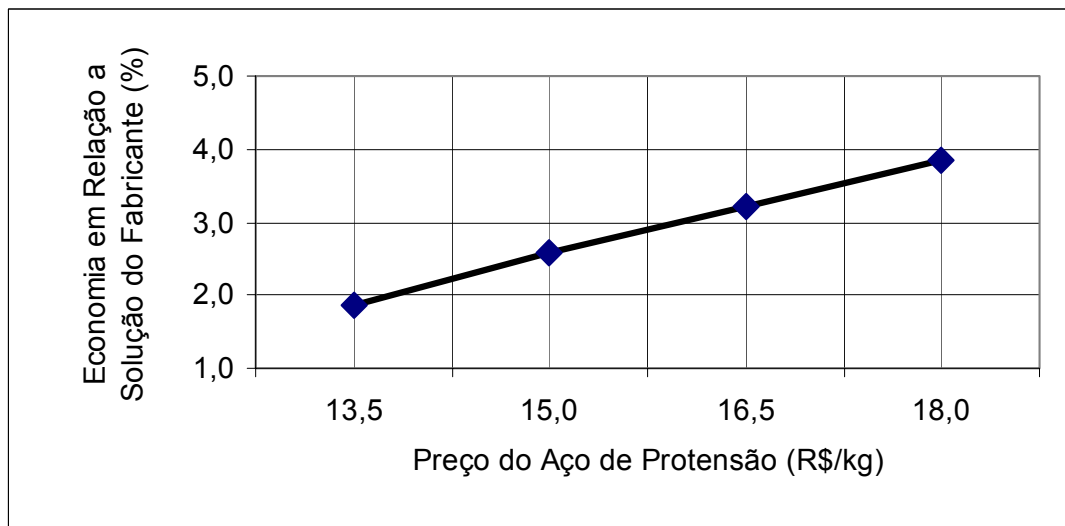


Figura 5.12 – Influência da variação do preço do aço de protensão no custo da seção transversal da ponte para a aplicação nº 3

Da Figura 5.12 pode-se concluir que um aumento de 20% no preço do aço de protensão produz um ganho econômico na solução ótima em torno de 1,3%, valor muito próximo ao da aplicação anterior onde a diferença na taxa de armadura entre a solução ótima e a do projeto também foi semelhante à deste exemplo.

Assim como no exemplo anterior, o percentual de economia quando da variação no preço do aço de protensão também foi superior ao da primeira aplicação.

## CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES

Este trabalho de pesquisa tratou da otimização do custo de projetos de pontes com vigas pré-moldadas protendidas com a utilização do método dos algoritmos genéticos. Obteve-se um pré-dimensionamento ótimo para a seção transversal de pontes rodoviárias compostas por longarinas biapoiadas em seção tipo I. As principais variáveis consideradas neste estudo foram: o número de vigas, suas dimensões e o número de cordoalhas de protensão em cada uma delas.

De forma a comprovar a utilidade do algoritmo desenvolvido foram comparados os seus resultados com os obtidos pela empresa fabricante de pré-moldados para três projetos de pontes por ela executada. Por fim, foi feita uma análise de sensibilidade no custo ótimo em relação a uma variação nos preços do concreto e do aço de protensão de forma isolada. De uma forma geral, as soluções encontradas pelo algoritmo genético para estas aplicações foram melhores do que as empregadas pela empresa fabricante de pré-moldados.

Diante da formulação proposta e dos resultados obtidos nas aplicações pode-se concluir:

- ⇒ o pré-dimensionamento ótimo elimina o processo de tentativa e erro na obtenção da melhor solução;
- ⇒ a solução ótima para problemas práticos de engenharia pode ser obtida sem que o projetista possua muita experiência;
- ⇒ todas as alternativas sugeridas pelo algoritmo genético são soluções práticas, sendo na maioria das vezes mais econômicas que as obtidas pelo método tradicional, já que este último só obterá a solução ótima eventualmente;
- ⇒ a primeira aplicação apresentou os melhores resultados com a solução ótima obtida pelo programa cerca de 13% mais econômica que aquela adotada no projeto. As outras duas aplicações apresentaram resultados menos expressivos, embora ainda mais econômicos que os do fabricante;
- ⇒ as taxas de armadura para as soluções ótimas globais nas três aplicações foram bastante similares, ficando entre 0,40% e 0,48%;

⇒ na análise de sensibilidade aos preços dos materiais feita no Capítulo 5, ficou evidente que a elevação no preço do concreto provocou uma diminuição no percentual de economia entre a solução ótima obtida pelo programa e a solução adotada no projeto. Já para o caso do acréscimo no preço do aço de protensão observou-se um aumento nesse percentual de economia. Entretanto, tais variações nos preços dos materiais não afetaram os valores das variáveis da solução ótima.

Baseando-se nos resultados obtidos nas aplicações deste trabalho, o método dos AGs apresentou-se como uma técnica perfeitamente viável em problemas práticos de engenharia estrutural. Sua eficácia na busca de soluções ótimas, assim como sua flexibilidade e facilidade de implementação foram alguns dos pontos positivos quando comparado com os métodos clássicos de otimização.

Quando comparado com outros métodos de otimização, o AG apresentou um maior custo computacional uma vez que para cada rodada do programa foram realizadas 1250 avaliações (50 indivíduos x 25 gerações). Entretanto, tal esforço não se refletiu em grandes aumentos no tempo de processamento tendo em vista a velocidade dos computadores atuais.

A flexibilidade apresentada pelo programa possibilitou a escolha de quais vigas fariam parte do processo de otimização, permitindo assim, que fosse adotada, se necessário, uma solução diferente da ótima global, de acordo com as imposições de projeto. Por este motivo, são apresentadas no Capítulo 5 soluções ótimas para diferentes seções transversais de viga.

Este trabalho servirá de referência àqueles que quiserem usar o método dos AGs para problemas semelhantes. Desta forma, propõem-se como possíveis linhas de pesquisa para a continuidade deste trabalho:

- ⇒ a otimização de vigas parcialmente protendidas (aço de protensão + aço passivo);
- ⇒ a implementação de uma codificação e de um processo de análise que também considere o dimensionamento da laje;
- ⇒ a incorporação de outras restrições ao problema como: a limitação das tensões nas fibras extremas e das deformações no meio do vão;

- ⇒ um estudo mais completo para uma otimização também da armadura de cisalhamento;
- ⇒ a implementação de outras formas de seção transversal.

## Referências Bibliográficas

- [1] ADBY, P. R. and DEMPSTER, M. A. H., *Introduction to Optimization Methods*, Chapman and Hall Mathematics Series, Cambridge, Great Britain, 1974.
- [2] ALMEIDA, S. M. F. , *Projeto e Análise de Pontes*, Apostila, UFF, Niterói, RJ, Brasil, 2002.
- [3] AL-SALLOUM, Y. A. and SIDDIQI, G. H., “Cost-Optimum Design of Reinforced Concrete Beams”, *ACI Structural Journal*, v.91, n. 6, pp. 647-655, 1994.
- [4] ARGOLO, W. P., *Otimização de Seções de Concreto Armado Submetida a Flexo-Compressão Reta Utilizando Algoritmos Genéticos*, Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
- [5] AVRIEL, M., *Nonlinear Programming – Analysis and Methods*, Prentice-Hall – Englewood Clifs, New Jersey, 1976.
- [6] BÄCK, T., HAMMEL, U. And SCHWEFEL, H. P., “Evolutionary Computation: Comments on the History and Current State”, *IEEE Transactions On Evolutionary Computation*, vol. 1, nº 1, pp. 3-17, 1997.
- [7] BORGES, F. P. S., *Otimização Via AG do Processo Construtivo de Estruturas de Concreto Submetidos à Retração Restringida Tendo em Vista a Fissuração nas Primeiras Idades*, Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002.
- [8] BOX, M. J., DAVIES, D. and SWANN, W. H., *Non-Linear Optimization Techniques*, Monograph nº 5, Imperial Chemical Industries Limited, Great Britain, 1969.
- [9] CASTILHO, V. C., *Otimização de Componentes de Concreto Pré-Moldado Protendidos Mediante Algoritmos Genéticos*, Tese de D.Sc., Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, SP, Brasil, 2003.
- [10] CASTRO, R. E., *Otimização de Estruturas com Multi-Objetivos Via Algoritmos Genéticos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [11] CHAKRABARTY, B. K., “Models for Optimal Design of Reinforced Concrete Beams”, *Computer & Structures*, v. 42, n. 3, pp. 447-451, 1992.
- [12] CHOU, T., “Optimum Reinforced Concrete T-Beam Sections”, *Journal of The Structural Division*, ASCE, v.103, n. ST8, pp. 1605-1616, 1977.
- [13] COELHO, L. S. and COELHO, A. A. R., “Genetic Algorithms and Evolution Strategies Applied in Identification and Control: Case Study”, *Soft Computing in*

- Engineering Design and Manufacturing*, Chawdhry, P. K., R. Roy & R. K. Pant (eds), Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 430-438, 1998.
- [14] COHN, M. Z. and LOUNIS, Z., “Optimum Limit Design of Continuous Prestressed Concrete Beams”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 119, n. 12, pp. 3551-3568, 1993.
- [15] DAVIS, L., *Handbook of Genetic Algorithms*, International Thomson Computer Press, 1996.
- [16] DE JONG, K. A., *An Analysis of the Behavior of a class of Genetic Adaptive System*, Ph. D. Thesis, University of Michigan, ANN Arbor, MI., 1975.
- [17] FOGEL, D. B., “An Introduction to Simulated Evolutionary Optimization”, *IEEE Transactions On Neural Networks*, vol. 5, n° 1, pp. 3-14, 1994.
- [18] FOGEL, D. B., “Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence”, *IEEE Press*, Piscataway, USA, 1995.
- [19] FRIEL, L. L., “Optimum Singly Reinforced Concrete Sections”, *ACI Journal*, v. 71, n. 11, pp. 556-558, 1974.
- [20] GEN, M. and CHENG, R., *Genetic Algorithms and Engineering Design*, New York, John Wiley, 1997.
- [21] GOBLE, G. G. and LAPAY, W.S., “Optimum Design of Prestressed Beams”. *ACI Journal*, v. 68, n. 9, pp. 712-718, 1971.
- [22] GOLDBERG, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Learning*, Adison-Wesley, USA, 1989.
- [23] GROSSI, B. F., *Otimização de Vigas de Concreto Armado*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998.
- [24] HADI, M. N. S. and SCHMIDT, L. C., “Using Genetic Algorithms to Find the Optimum Design of Reinforced Concrete Beams”, Faculty of Engineering, University of Wollongong, Wollongong, Austrália, 2000.
- [25] HECKSHER, M. J., *Concreto Protendido – Teoria Elementar*, Apostila Vol. 1, UFF, Niterói, RJ, Brasil, 1981.
- [26] HOLLAND, J. H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems* University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [27] HOMAIFAR, A., Qi, C., LAI, S., “Constrained Optimization Via Genetic Algorithms”, *Simulation*, v. 62, n° 4, pp. 242-254, 1994.

- [28] HOWARD, L. M. and D'ANGELO, D. J., "The GA-P: A Genetic Algorithm and Genetic Programming Hybrid", *IEEE Expert*, vol. 10, nº 3, pp. 11-15, 1995.
- [29] [HTTP://black.rc.unesp.br/ccomp/algorithmo/biblio.html](http://black.rc.unesp.br/ccomp/algorithmo/biblio.html), 2002.
- [30] KIRKPATRICK, S., GELATT, Jr. C. D., VECCHI, M. P., "Optimization by Simulated Annealing", *Science*, v. 220, nº 4598, pp. 671-680, 1983.
- [31] KIRSCH, U., "Optimum Design of Prestressed Beams", *Computers & Structures*, v.2, pp. 573-583, 1972.
- [32] KANG, M. M., KIM, L. S., PULMANO, V. A., "Optimum Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Beam Sections", *Computational Mechanics*, v.2, pp.943-948, Aug. 1993.
- [33] LEITE, J. P. B. e TOPPING, B. H. V., "Improved Genetic Operators for Structural Engineering Optimization", *Advances in Engineering Software*, v.29, nº 7-9, pp.529-562, 1998.
- [34] LEMONGE, A. C. C., *Aplicação de Algoritmos Genéticos em Otimização Estrutural*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [35] LUENBERGER, D. G., *Linear and Nonlinear Programming*, 2ª ed, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1984.
- [36] MATEUS, G. R. e LUNA, H. P. L., *Programação Não-Linear*, V Escola de Computação, Belo Horizonte, 1986.
- [37] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, A. H., TELLER, E., "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines", *The Journal of Chemical Physics*, v.21, pp. 1087-1092, 1953.
- [38] MICHALEWICZ, Z., "Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs", *Springer-Verlag*, Berlin, Germany, 1996.
- [39] MICHALEWICZ, Z., HINTERDING, R. and MICHALEWICZ, M., "Evolutionary Algorithms", *Chapter 2 in Fuzzy Evolutionary Computation*, W. Pedrycz (editor), Kluwer Academic, 1997. In: <http://www.coe.uncc.edu/~zbyszek/papers.html>. Acesso em 22/07/03.
- [40] MORALES, A. F. K. e GARCÍA, J. G., "Penalty Function Methods for Constrained Optimization with Genetic Algorithms: a Statistical Analysis". In: <http://www.cs.cinvestav.mx/~constraint/papers/kuri.pdf>. Acesso 13/05/03.
- [41] NBR 6118 / 2003 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos – Associação Brasileira de Normas Técnicas, RJ, Brasil, 2003.

- [42] PUCCINI, A. L., *Introdução à Programação Linear*, 2ª ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1990.
- [43] RAJEEV, S. and KRISHNAMOORTHY, C. S., “Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 118, n. 5, pp. 1233-1249, 1992.
- [44] SHAFFER, R., *Practical Guide to Genetic Algorithms*, Naval Research Laboratory, Chemistry Division, 1994.
- [45] SHEHATA, I. A. M. e LEITE, J. P. B., *Otimização de Projetos*, Notas de Aula do Curso de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [46] VANDERPLAATS, G. N., *Numerical Optimization Technique for Engineering Design with Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- [47] WAH, B. W., WANG, T., SHANG, Y. e WU, Z., “Improving the Performance of Weighted Lagrange-Multiplier Methods for Nonlinear Constrained Optimization”, *Information Sciences*, v. 124, pp.241-272, 2000.
- [48] [www. Kneehighs.com/related.html](http://www.Kneehighs.com/related.html). Acesso 07/04/03.

# Apêndice A

## Resultados dos exemplos de aplicação

### Aplicação N° 1

#### 1.a) Características da obra

Lvão (m)	17,70	
Larg. do tab. (m)	8,60	
N° de vigas	4	
As $\phi$ 20,0 (mm <sup>2</sup> )	314,2	} Armadura passiva
As $\phi$ 16,0 (mm <sup>2</sup> )	201,1	
f <sub>yd</sub> (MPa)	434,8	} Armadura de protensão
Asp $\phi$ 12,7 (mm <sup>2</sup> )	100,0	
f <sub>yp</sub> (MPa)	1520,0	
h <sub>viga</sub> (mm)	850,0	
hlaje (mm)	150,0	
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	186150	
Peso da viga / m (kN)	4,65	
Esp. entre vigas (mm)	2250,0	
Relação *	15,0	

\* Relação = Esp. Entre vigas / hlaje

#### 1.b) Armadura complementar adotada no projeto

As de estribo (mm<sup>2</sup>) = 78,54 ( barra de 10,0 mm)  
As de costela (mm<sup>2</sup>) = 31,17 ( barra de 6,3 mm)

#### 1.c) Armadura de flexão das vigas de bordo

	diâmetro	n° cordoalhas	braço alavanca
1ª camada	12,7	11,0	0,889
2ª camada	12,7	5,0	0,856
	20,0	6,0	0,856
3ª camada	20,0	1,0	0,821

$\rho$  (%) = 2,04

(taxa de armadura das vigas de bordo)

MR (N.m) = 2.950.640

N° de vigas de bordo = 2,0

#### 1.d) Armadura de flexão das vigas internas

	diâmetro	nº cordoalhas	braço alavanca
1ª camada	12,7	11,0	0,889
2ª camada	12,7	5,0	0,856
	16,0	4,0	0,856

$\rho$  (%) = 1,29 (taxa de armadura das vigas internas)

MR (N.m) = 2.436.288

Nº de vigas internas = 2,0

**MR da seção (N.m) = 10.773.857** (momento resistente da seção transversal)

**q (kN) = 275,12** (carregamento aproximado atuante sobre o tabuleiro)

#### 1.e) Comparação dos custos com Pconcr.; Pprot. e Ppass. praticados no mercado

##### 1.e.1) Custo da solução de projeto

###### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho$ 1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho$ 2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

##### Custo da laje

$V_{concr.} = L_{vão} \cdot Larg. \text{ do tab} \cdot h_{laje}$

$V_{concr} \text{ (m}^3\text{)} = 22,833$

$V_{aço} = V_{concr.} \cdot [(\rho_1 + \rho_2) / 100]$

$V_{aço} \text{ (m}^3\text{)} = 0,34250$

$C_{laje} = V_{concr.} \cdot P_{concr.} + V_{aço} \cdot P_{aço \text{ pass.}} \cdot \gamma_{aço}$

**$C_{laje} \text{ (R\$)} = 21.154,8$**

##### Custo da armadura complementar

$C_{estribo} = n^{\circ} \text{ vigas} \cdot 2 \cdot (h_{viga}/1000 - 0,5) \cdot n^{\circ} \text{ estribos} \cdot (A_{s\_estribo}/10^6) \cdot P_{pass.} \cdot \gamma_{aço}$

$n^{\circ} \text{ estribos} = L_{vão} / 0,3125$

$n^{\circ} \text{ estribos} = 56$

**$C_{estribo} \text{ (R\$)} = 580,0$**  (custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm)

$C_{costela} = n^{\circ} \text{ vigas} \cdot 2 \cdot n^{\circ} \text{ costelas} \cdot L_{vão} \cdot (A_{s\_costela}/10^6) \cdot P_{pass.} \cdot \gamma_{aço}$

$n^{\circ} \text{ de costelas} = 2,0$

**$C_{costela} \text{ (R\$)} = 415,8$**  (custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm)

##### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$C_{viga} = C_{concr.} + C_{aço \text{ prot.}} + C_{aço \text{ pass.}}$

$C_{concr.} = n^{\circ} \text{ vigas} \cdot L_{vão} \cdot A_{concr.} \cdot P_{concr.}$

$C_{concr.} \text{ (R\$)} = 2.899,5$

$C_{aço \text{ prot.}} = n^{\circ} \text{ cordoalhas} \cdot L_{vão} \cdot (A_{s \text{ prot.}}/10^6) \cdot n^{\circ} \text{ vigas} \cdot P_{aço \text{ prot.}} \cdot \gamma_{aço}$

$C_{aço \text{ prot.}} \text{ (R\$)} = 13.338,7$

$C_{\text{aço pass.}} = n^{\circ} \text{ cordoalhas} * L_{\text{vão}} * (\text{As pass.}/10^6) * n^{\circ} \text{ vigas} * \text{Paço pass.} * \gamma_{\text{aço}}$

$C_{\text{aço pass}} (\text{R}\$) = 5.007,6$

**$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 21.245,8$**

**Custo Total (laje + estribo + costela + viga)**

$C_{\text{total}} = C_{\text{laje}} + C_{\text{estribo}} + C_{\text{costela}} + C_{\text{viga}}$

**$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 43.396,4$**

**Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)**

$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2$  ( considerando um acréscimo de 20% para os custos com o transp. e montagem da estrutura)

**$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 52.075,7$**  (custo final da solução adotada no projeto)

### 1.e.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 0,85 m	viga de 1,4 m	viga de 1,2 m	viga de 1,9 m
n° longarinas	4,0	5,0	4,0	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	11,0	17,0	13,0	15,0	10,0
Hlaje (m)	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850	1,40	1,20	1,90
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150	239.600	215.600	312.325
Custo_laje (R\$)	21.155	21.155	21.155	21.155	21.155
Custo_final (R\$)	45.239	52.487	45.907	46.812	45.758
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.335.400	11.333.728	11.219.424	11.789.120
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65	5,99	5,39	7,81
$\rho$ (%)	0,40	0,91	0,54	0,70	0,32
% de economia	13,13	-0,79	11,85	10,11	12,13
% de acréscimo de peso	0,82	0,00	0,49	0,27	1,15
Diferença absoluta (R\$)	6.837	-411	6.169	5.264	6.318

Obs1: cada cordoalha é composta por 7 cabos  $\phi$  12,7 mm

Obs2: no custo final já estão inclusas os custos com transp. e montagem da estrutura.

## 1.f) Comparação dos custos com Pconcr. acrescido em 10%

### 1.f.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	242,0	(F <sub>ck</sub> = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} \text{ (m}^3\text{)} = 22,833$$

$$V_{\text{aço}} \text{ (m}^3\text{)} = 0,34250$$

$$C_{\text{laje}} \text{ (R\$)} = 21.657,1$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} \text{ (R\$)} = 580,0 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 415,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 3.189,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 13.338,7$$

$$C_{\text{aço pass.}} \text{ (R\$)} = 5.007,6$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 21.535,8$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 44.188,7$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 53.026,4 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 1.f.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	5,00
n° cordoalhas/long.	11,0	17,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150
Custo_laje (R\$)	21.657	21.657
Custo_final (R\$)	46.359	53.525
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.335.400
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65
ρ (%)	0,40	0,91
% de economia	12,57	-0,94
% de acréscimo de peso	0,82	0,00
Diferença absoluta (R\$)	6.667	-499

### 1.g) Comparação dos custos com Pconcr. decrescido em 10%

#### 1.g.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	198,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 22,833$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,34250$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 20.652,4$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 580,0 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 415,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.609,5$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 13.338,7$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 5.007,6$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 20.955,9$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 42.604,2$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 51.125,0 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 1.g.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
nº longarinas	4,0	5,00
nº cordoalhas/long.	11,0	17,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150
Custo_laje (R\$)	20.652	20.652
Custo_final (R\$)	44.120	51.450
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.335.400
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65
ρ (%)	0,40	0,91
% de economia	13,70	-0,64
% de acréscimo de peso	0,82	0,00
Diferença absoluta (R\$)	7.005	-325

## 1.h) Comparação dos custos com Pconcr. acrescido em 20%

### 1.h.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	264,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho$ 1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho$ 2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 22,833$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,34250$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 22.159,4$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 580,0 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 415,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 3.479,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 13.338,7$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 5.007,6$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 21.825,7$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 44.981,0$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 53.977,2 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 1.h.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
nº longarinas	4,0	5,00
nº cordoalhas/long.	11,0	17,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150
Custo_laje (R\$)	22.159	22.159
Custo_final (R\$)	47.478	54.563
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.186.250
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65
$\rho$ (%)	0,40	0,91
% de economia	12,04	-1,09
% de acréscimo de peso	0,82	0,00
Diferença absoluta (R\$)	6.499	-586

**1.i) Comparação dos custos com Pprot. acrescido em 10%**

**1.i.1) Custo da solução de projeto**

**Preço dos materiais**

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	16,5	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

**Custo da laje**

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 22,833$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,34250$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 21.154,8$$

**Custo da armadura complementar**

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 580,0 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 415,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

**Custo da viga (concreto + armadura de flexão)**

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.899,5$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 14.672,6$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 5.007,6$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 22.579,7$$

**Custo Total (laje + estribo + costela + viga)**

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 44.730,3$$

**Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)**

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 53.676,4 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

**1.i.2) Resultados do programa**

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
nº longarinas	4,0	5,00
nº cordoalhas/long.	11,0	17,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150
Custo_laje (R\$)	21.155	21.155
Custo_final (R\$)	46.340	54.613
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.335.400
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65
ρ (%)	0,40	0,91
% de economia	13,67	-1,74
% de acréscimo de peso	0,82	0,00
Diferença absoluta (R\$)	7.336	-937

## 1.j) Comparação dos custos com Pprot. decrescido em 10%

### 1.j.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	13,5	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 22,833$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,34250$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 21.154,8$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 580,0 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 415,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.899,5$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 12.004,8$$

$$C_{\text{aço pass}} (\text{R}\$) = 5.007,6$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 19.911,9$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 42.062,6$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 50.475,1 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 1.j.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
nº longarinas	4,0	5,00
nº cordoalhas/long.	11,0	17,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150
Custo_laje (R\$)	21.155	21.155
Custo_final (R\$)	44.139	50.361
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.335.400
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65
ρ (%)	0,40	0,91
% de economia	12,55	0,23
% de acréscimo de peso	0,82	0,00
Diferença absoluta (R\$)	6.336	114

### 1.k) Comparação dos custos com Pprot. acrescido em 20%

#### 1.k.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	18,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 22,833$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,34250$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 21.154,8$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 580,0 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 415,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.899,5$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 16.006,5$$

$$C_{\text{aço pass}} (\text{R}\$) = 5.007,6$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 23.913,6$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 46.064,2$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 55.277,0 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 1.k.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	5,00
n° cordoalhas/long.	11,0	17,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,60	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	276.325	186.150
Custo_laje (R\$)	21.155	21.155
Custo_final (R\$)	47.440	56.739,0
Mresistente (N.m)	10.961.632	11.335.400
Peso da viga / m (kN)	6,91	4,65
ρ (%)	0,40	0,91
% de economia	14,18	-2,64
% de acréscimo de peso	0,82	0,00
Diferença absoluta (R\$)	7.837	-1.462

## Aplicação N° 2

### 2.a) Características da obra

Lvão (m)	16,00	
Larg. do tab. (m)	9,00	
N° de vigas	4	
As $\phi$ 5,0 (mm <sup>2</sup> )	19,63	} Armadura passiva
f <sub>yd</sub> (MPa)	434,8	
Asp $\phi$ 12,7 (mm <sup>2</sup> )	100,00	} Armadura de protensão
f <sub>yp</sub> (MPa)	1520,0	
h <sub>viga</sub> (mm)	850,0	
h <sub>laje</sub> (mm)	150,0	
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	186150	
Peso da viga / m (kN)	4,65	
Esp. entre vigas (mm)	2250,0	
Relação	15,0	

\* Relação = Esp. Entre vigas / h<sub>laje</sub>

### 2.b) Armadura complementar adotada no projeto

As de estribo (mm<sup>2</sup>) = 78,54 ( barra de 10,0 mm)

As de costela (mm<sup>2</sup>) = 19,63 ( barra de 5,0 mm)

### 2.c) Armadura de flexão das vigas de bordo e vigas Internas

	diâmetro	n° cordoalhas	braço alavanca
1ª camada	12,7	11,0	0,889
2ª camada	12,7	1,0	0,856
	5,0	2,0	0,856

$\rho$  (%) = 0,67 (taxa de armadura das vigas)

MR (N.m) = 1.631.135

N° de vigas na seção = 4,0

**MR da seção (N.m) = 6.524.541** (momento resistente da seção transversal)

**q (kN) = 203,9** (carregamento aproximado atuante sobre a viga)

### 2.d) Comparação dos custos com Pconcr.; Pprot. e Ppass. praticados no mercado

#### 2.d.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(F <sub>ck</sub> = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho$ 1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho$ 2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

V<sub>concr.</sub> = Lvão \* Larg. do tab \* h<sub>laje</sub>

V<sub>concr</sub> (m<sup>3</sup>) = 21,60

V<sub>aço</sub> = V<sub>concr.</sub> \* [( $\rho$ 1 +  $\rho$ 2) / 100]

V<sub>aço</sub> (m<sup>3</sup>) = 0,324

C<sub>laje</sub> = V<sub>concr.</sub> \* P<sub>concr.</sub> + V<sub>aço</sub> \* P<sub>aço pass.</sub> \*  $\gamma$ aço

**C<sub>laje</sub> (R\$) = 20.012,40**

#### Custo da armadura complementar

C<sub>estribo</sub> = n° vigas \* 2 \* (h<sub>viga</sub>/1000 - 0,5) \* n° estribos \* (As<sub>estribo</sub>/10<sup>6</sup>) \* P<sub>pass.</sub> \*  $\gamma$ aço

n° estribos = Lvão / 0,3125

n° estribos = 51

**C<sub>estribo</sub> (R\$) = 528,2** (custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm)

$$C_{\text{costela}} = n^{\circ} \text{vigas} * 2 * n^{\circ} \text{costelas} * L_{\text{vão}} * (A_{\text{s}_{\text{costela}}}/10^6) * P_{\text{pass.}} * \gamma_{\text{aço}}$$

$$n^{\circ} \text{ de costelas} = 2,0$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{viga}} = C_{\text{concr.}} + C_{\text{aço prot.}} + C_{\text{aço pass.}}$$

$$C_{\text{concr.}} = n^{\circ} \text{vigas} * L_{\text{vão}} * A_{\text{concr.}} * P_{\text{concr.}}$$

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 2.621,0$$

$$C_{\text{aço prot.}} = n^{\circ} \text{cordoalhas} * L_{\text{vão}} * (A_{\text{s}_{\text{prot.}}}/10^6) * n^{\circ} \text{vigas} * P_{\text{aço prot.}} * \gamma_{\text{aço}}$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 9.043,2$$

$$C_{\text{aço pass.}} = n^{\circ} \text{cordoalhas} * L_{\text{vão}} * (A_{\text{s}_{\text{pass.}}}/10^6) * n^{\circ} \text{vigas} * P_{\text{aço pass.}} * \gamma_{\text{aço}}$$

$$C_{\text{aço pass.}} \text{ (R\$)} = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 11.782,6$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} = C_{\text{laje}} + C_{\text{estribo}} + C_{\text{costela}} + C_{\text{viga}}$$

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 32.560,0$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 39.072,0 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 2.d.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 0,85 m	viga de 1,4 m	viga de 1,6 m	viga de 1,9 m
n° longarinas	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	9,0	13,0	8,0	7,0	6,0
Hlaje (m)	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
Hviga (m)	1,20	0,850	1,40	1,60	1,90
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	215.600	186.150	239.600	276.325	312.325
Custo_laje (R\$)	20.012	20.012	20.012	20.012	20.012
Custo_final (R\$)	37.632	39.834	37.638	37.858	38.248
Mresistente (N.m)	6.779.808	6.986.528	6.999.296	6.975.584	7.073.472
Peso da viga / m (kN)	5,39	4,65	5,99	6,91	7,81
ρ (%)	0,42	0,70	0,33	0,25	0,19
% de economia	3,69	-1,95	3,67	3,11	2,11
% de acréscimo de peso	0,36	0,00	0,66	1,11	1,55
Diferença absoluta (R\$)	1.440	-762	1.434	1.214	824

Obs1: cada cordoalha é composta por 7 cabos  $\phi$  12,7 mm

Obs2: no custo final já estão inclusas os custos com transp. e montagem da estrutura.

## 2.e) Comparação dos custos com Pconcr. acrescido em 10%

### 2.e.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	242,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 21,60$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,324$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 20.487,6$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 528,2 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.883,1$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 9.043,2$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 12.044,7$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 33.297,3$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 39.956,7 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 2.e.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	9,0	13,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,20	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	215.600	186.150
Custo_laje (R\$)	20.488	20.488
Custo_final (R\$)	38.567	40.719
Mresistente (N.m)	6.779.808	6.986.528
Peso da viga / m (kN)	5,39	4,65
ρ (%)	0,42	0,70
% de economia	3,48	-1,91
% de acréscimo de peso	0,36	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.390	-762

## 2.f) Comparação dos custos com Pconcr. decrescido em 10%

### 2.f.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	198,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 21,60$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,324$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 19.537,2$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 528,2 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.358,9$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 9.043,2$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 11.520,5$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 31.822,7$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 38.187,2 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 2.f.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	8,0	13,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,40	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	239.600	186.150
Custo laje (R\$)	19.537	19.537
Custo final (R\$)	36.663	38.949
Mresistente (N.m)	6.999.296	6.986.528
Peso da viga / m (kN)	5,99	4,65
ρ (%)	0,33	0,70
% de economia	3,99	-1,99
% de acréscimo de peso	0,66	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.524	-762

## 2.g) Comparação dos custos com Pconcr. acrescido em 20%

### 2.g.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	264,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho_1$ (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho_2$ (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} \text{ (m}^3\text{)} = 21,60$$

$$V_{\text{aço}} \text{ (m}^3\text{)} = 0,324$$

$$C_{\text{laje}} \text{ (R\$)} = 20.962,8$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} \text{ (R\$)} = 528,2 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 3.145,2$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 9.043,2$$

$$C_{\text{aço pass.}} \text{ (R\$)} = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 12.306,8$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 34.034,6$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 40.841,5 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 2.g.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	9,0	13,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,20	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	215.600	186.150
Custo laje (R\$)	20.963	20.963
Custo final (R\$)	39.501	41.604
Mresistente (N.m)	6.779.808	6.986.528
Peso da viga / m (kN)	5,39	4,65
$\rho$ (%)	0,42	0,70
% de economia	3,28	-1,87
% de acréscimo de peso	0,36	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.340	-763

## 2.h) Comparação dos custos com Pprot. acrescido em 10%

### 2.h.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	16,5	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho_1$ (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho_2$ (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 21,60$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,324$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 20.012,4$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 528,2 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.621,0$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 9.947,5$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 12.686,9$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 33.464,3$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 40.157,1 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 2.h.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	8,0	13,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,40	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	239.600	186.150
Custo laje (R\$)	20.012	20.012
Custo final (R\$)	38.361	41.010
Mresistente (N.m)	6.999.296	6.986.528
Peso da viga / m (kN)	5,99	4,65
$\rho$ (%)	0,33	0,70
% de economia	4,47	-2,12
% de acréscimo de peso	0,66	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.796	-853

## 2.i) Comparação dos custos com Pprot. decrescido em 10%

### 2.i.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	13,5	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho$ 1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho$ 2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 21,60$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,324$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 20.012,4$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 528,2 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.621,0$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 8.138,9$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 10.878,2$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 31.655,6$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 37.986,8 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 2.i.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	9,0	13,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,20	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	215.600	186.150
Custo laje (R\$)	20.012	20.012
Custo final (R\$)	36.819	38.659
Mresistente (N.m)	6.779.808	6.986.528
Peso da viga / m (kN)	5,39	4,65
$\rho$ (%)	0,42	0,70
% de economia	3,07	-1,77
% de acréscimo de peso	0,36	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.168	-672

## 2.j) Comparação dos custos com Pprot. acrescido em 20%

### 2.j.1) Custo da solução de projeto

#### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	18,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho$ 1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho$ 2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 21,60$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,324$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 20.012,4$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 528,2 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 236,8 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 2.621,0$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 10.851,8$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 118,4$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 13.591,2$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 34.368,6$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 41.242,3$$

### 2.j.2) Resultados do programa

	Sol. ótima	Viga de 0,85 m
n° longarinas	4,0	4,0
n° cordoalhas/long.	8,0	13,0
Hlaje (m)	0,15	0,15
Hviga (m)	1,40	0,850
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	239.600	186.150
Custo laje (R\$)	20.012	20.012
Custo final (R\$)	39.085	42.185
Mresistente (N.m)	6.999.296	6.986.528
Peso da viga / m (kN)	5,99	4,65
$\rho$ (%)	0,33	0,70
% de economia	5,23	-2,29
% de acréscimo de peso	0,66	0,00
Diferença absoluta (R\$)	2.157	-943

## Aplicação N° 3

### 3.a) Características da obra

Lvão (m)	25,10	} Armadura de protensão
Larg. do tab. (m)	9,00	
N° de vigas	5	
Asp $\phi$ 12,7 (mm <sup>2</sup> )	100,0	
fyp (MPa)	1520,0	
h viga (mm)	1400,0	
hlaje (mm)	180,0	
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	239600	
Peso da viga / m (kN)	5,99	
Esp. entre vigas (mm)	1700,0	
Relação	9,44	

\* Relação = Esp. Entre vigas / hlaje

### 3.b) Armadura construtiva adotada no projeto

As de estribo (mm<sup>2</sup>) = 78,54                    ( barra de 10,0 mm)  
 As de costela (mm<sup>2</sup>) = 19,63                ( barra de 5,0 mm)

### 3.c) Armadura de flexão das vigas de bordo e internas

	diâmetro	n° cordoalhas	braço alavanca
1ª camada	12,7	11,0	1,454
2ª camada	12,7	8,0	1,421

$\rho$  (%) = 0,79                                    (taxa de armadura das vigas)

MR (N.m) = 4.159.024

N° de vigas = 5,0

**Mrseção (N.m) = 20.795.120**                (momento resistente da seção transversal)

**q (kN) = 264,1**                                (carregamento atuante sobre a viga)

### 3.d) Comparação dos custos com Pconcr.; Pprot. e Ppass. praticados no mercado

#### 3.d.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
$\gamma$ aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
$\rho_1$ (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
$\rho_2$ (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

Vconcr. = Lvão \* Larg. do tab \* hlaje

Vconcr (m<sup>3</sup>) = 40,662

Vaço = Vconcr. \*  $[(\rho_1 + \rho_2) / 100]$

V aço (m<sup>3</sup>) = 0,6099

C\_laje = Vconcr. \* Pconcr. + Vaço \* Paço pass. \*  $\gamma$ aço

**C \_ laje (R\$) = 37.673,3**

### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} = n^{\circ} \text{vigas} * 2 * (h_{\text{viga}}/1000 - 0,5) * n^{\circ} \text{estribos} * (A_{\text{s}_{\text{estribo}}}/10^6) * P_{\text{pass.}} * \gamma_{\text{aço}}$$
$$n^{\circ} \text{estribos} = L_{\text{vão}} / 0,3125 \qquad n^{\circ} \text{estribos} = 80$$

$$C_{\text{estribo}} \text{ (R\$)} = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} = n^{\circ} \text{vigas} * 2 * n^{\circ} \text{costelas} * L_{\text{vão}} * (A_{\text{s}_{\text{costela}}}/10^6) * P_{\text{pass.}} * \gamma_{\text{aço}}$$
$$n^{\circ} \text{costelas} = 5,0$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{viga}} = C_{\text{concr.}} + C_{\text{aço prot.}} + C_{\text{aço pass.}}$$

$$C_{\text{concr.}} = n^{\circ} \text{vigas} * L_{\text{vão}} * A_{\text{concr.}} * P_{\text{concr.}}$$

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 6.615,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} = n^{\circ} \text{cabos} * L_{\text{vão}} * (A_{\text{s}_{\text{prot.}}}/10^6) * n^{\circ} \text{vigas} * P_{\text{aço prot.}} * \gamma_{\text{aço}}$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 28.077,5$$

$$C_{\text{aço pass.}} = n^{\circ} \text{cabos} * L_{\text{vão}} * (A_{\text{s}_{\text{pass.}}}/10^6) * n^{\circ} \text{vigas} * P_{\text{aço pass.}} * \gamma_{\text{aço}}$$

$$C_{\text{aço pass.}} \text{ (R\$)} = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 34.692,8$$

### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} = C_{\text{laje}} + C_{\text{estribo}} + C_{\text{costela}} + C_{\text{viga}}$$

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 76.190,3$$

### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 91.428,3 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

### 3.d.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m	viga de 1,6 m
n° longarinas	5,0	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0	17,0
Hlaje (m)	0,18	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40	1,60
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600	276.325
Custo_laje (R\$)	37.673	37.673	37.673
Custo_final (R\$)	89.077	91.428	90.087
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120	21.219.200
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99	6,91
ρ (%)	0,48	0,79	0,62
% de economia	2,57	0,00	1,47
% de acréscimo de peso	0,69	0,00	0,35
Diferença absoluta (R\$)	2.351	0	1.341

Obs1: cada cordoalha é composta por 7 cabos  $\phi$  12,7 mm

Obs2: no custo final já estão inclusas os custos com transp. e montagem da estrutura.

### 3.e) Comparação dos custos com Pconcr. acrescido em 10%

#### 3.e.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	242,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} \text{ (m}^3\text{)} = 40,662$$

$$V_{\text{aço}} \text{ (m}^3\text{)} = 0,6099$$

$$C_{\text{laje}} \text{ (R\$)} = 38.567,9$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} \text{ (R\$)} = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 7.276,9$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 28.077,5$$

$$C_{\text{aço pass.}} \text{ (R\$)} = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 35.354,4$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 77.746,4$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 93.295,6 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 3.e.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m
n° longarinas	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0
Hlaje (m)	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600
Custo_laje (R\$)	38.568	38.568
Custo_final (R\$)	91.185	93.295
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99
ρ (%)	0,48	0,79
% de economia	2,26	0,00
% de acréscimo de peso	0,69	0,00
Diferença absoluta (R\$)	2.111	1

### 3.f) Comparação dos custos com Pconcr. decrescido em 10%

#### 3.f.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	198,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 40,662$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,6099$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 36.778,8$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 5.953,8$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 28.077,5$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 34.031,3$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 74.634,2$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 89.561,0 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 3.f.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m
n° longarinas	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0
Hlaje (m)	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600
Custo_laje (R\$)	36.779	36.779
Custo_final (R\$)	86.969	89.561
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99
ρ (%)	0,48	0,79
% de economia	2,89	0,00
% de acréscimo de peso	0,69	0,00
Diferença absoluta (R\$)	2.592	0

### 3.g) Comparação dos custos com Pconcr. acrescido em 20%

#### 3.g.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	264,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	15,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} \text{ (m}^3\text{)} = 40,662$$

$$V_{\text{aço}} \text{ (m}^3\text{)} = 0,6099$$

$$C_{\text{laje}} \text{ (R\$)} = 39.462,5$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} \text{ (R\$)} = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 7.938,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 28.077,5$$

$$C_{\text{aço pass.}} \text{ (R\$)} = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 36.015,9$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 79.302,5$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 95.163,0 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 3.g.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m
n° longarinas	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0
Hlaje (m)	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600
Custo laje (R\$)	39.462	39.462
Custo final (R\$)	93.293	95.163
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99
ρ (%)	0,48	0,79
% de economia	1,96	0,00
% de acréscimo de peso	0,69	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.870	0

### 3.h) Comparação dos custos com Pprot. acrescido em 10%

#### 3.h.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	16,5	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 40,662$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,6099$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 37.673,3$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 6.615,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 30.885,2$$

$$C_{\text{aço pass}} (\text{R}\$) = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 37.500,6$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 78.998,0$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 94.797,6 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 3.h.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m
n° longarinas	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0
Hlaje (m)	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600
Custo laje (R\$)	37.673	37.673
Custo final (R\$)	91.737	94.797
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99
ρ (%)	0,48	0,79
% de economia	3,23	0,00
% de acréscimo de peso	0,69	0,00
Diferença absoluta (R\$)	3.061	1

### 3.i) Comparação dos custos com Pprot. decrescido em 10%

#### 3.i.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	13,5	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} \text{ (m}^3\text{)} = 40,662$$

$$V_{\text{aço}} \text{ (m}^3\text{)} = 0,6099$$

$$C_{\text{laje}} \text{ (R\$)} = 37.673,3$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} \text{ (R\$)} = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} \text{ (R\$)} = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} \text{ (R\$)} = 6.615,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} \text{ (R\$)} = 25.269,7$$

$$C_{\text{aço pass}} \text{ (R\$)} = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} \text{ (R\$)} = 31.885,1$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} \text{ (R\$)} = 73.382,5$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} \text{ (R\$)} = 88.059,0 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 3.i.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m
n° longarinas	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0
Hlaje (m)	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600
Custo laje (R\$)	37.673	37.673
Custo final (R\$)	86.417	88.059
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99
ρ (%)	0,48	0,79
% de economia	1,86	0,00
% de acréscimo de peso	0,69	0,00
Diferença absoluta (R\$)	1.642	0

### 3.j) Comparação dos custos com Pprot. acrescido em 20%

#### 3.j.1) Custo da solução de projeto

##### Preço dos materiais

P. concreto (R\$/m <sup>3</sup> )	220,0	(Fck = 35 MPa)
P. aço prot. (R\$/kg)	18,0	
P. aço pass. (R\$/kg)	6,0	
γaço (kg/m <sup>3</sup> )	7850,0	
ρ1 (%)	1,0	(Tx. de armadura transversal da laje)
ρ2 (%)	0,5	(Tx. de armadura longitudinal da laje)

#### Custo da laje

$$V_{\text{concr}} (\text{m}^3) = 40,662$$

$$V_{\text{aço}} (\text{m}^3) = 0,6099$$

$$C_{\text{laje}} (\text{R}\$) = 37.673,3$$

#### Custo da armadura complementar

$$C_{\text{estribo}} (\text{R}\$) = 2.663,4 \quad (\text{custo adicional de estribo em relação à viga de 500 mm})$$

$$C_{\text{costela}} (\text{R}\$) = 1.160,6 \quad (\text{custo adicional de costela em relação à viga de 500 mm})$$

#### Custo da viga (concreto + armadura de flexão)

$$C_{\text{concr.}} (\text{R}\$) = 6.615,4$$

$$C_{\text{aço prot.}} (\text{R}\$) = 33.693,0$$

$$C_{\text{aço pass.}} (\text{R}\$) = 0,0$$

$$C_{\text{viga}} (\text{R}\$) = 40.308,3$$

#### Custo Total (laje + estribo + costela + viga)

$$C_{\text{total}} (\text{R}\$) = 81.805,8$$

#### Custo final ( já inclusos o transporte e a montagem da estrutura)

$$C_{\text{final}} = C_{\text{total}} * 1,2 \quad (\text{considerando um acréscimo de 20\% para os custos com o transp. e montagem da estrutura})$$

$$C_{\text{final}} (\text{R}\$) = 98.166,9 \quad (\text{custo final da solução adotada no projeto})$$

#### 3.j.2) Resultados do programa

	sol. ótima	viga de 1,4 m
n° longarinas	5,0	5,0
n° cordoalhas/long.	15,0	19,0
Hlaje (m)	0,18	0,18
Hviga (m)	1,90	1,40
Aconcr. (mm <sup>2</sup> )	312.325	239.600
Custo laje (R\$)	37.673	37.673
Custo final (R\$)	94.397	98.167
Mresistente (N.m)	22.175.280	20.795.120
Peso da viga / m (kN)	7,81	5,99
ρ (%)	0,48	0,79
% de economia	3,84	0,00
% de acréscimo de peso	0,69	0,00
Diferença absoluta (R\$)	3.770	0