

SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CANAIS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO.

Pedro Ivo Costa Trindade

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Paulo Soares de Azevedo, Ph.D.

Prof. Paulo de Tarso Themistocles Esperança, D.Sc.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.SC.

Prof^a.Ada Cristina Scudelari, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2003

TRINDADE, PEDRO IVO COSTA

Simulação da Propagação de Ondas em
Canais pelo Método dos Elementos de
Contorno [Rio de Janeiro] 2003.

VII, 84 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Civil, 2003)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Propagação de ondas em canais
 2. Batedor de ondas
 3. Método dos Elementos de Contorno
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Rony Trindade e Maria de Lourdes Costa Trindade, mesmo estando distantes, pelo apoio não só durante a realização deste trabalho como ao longo de toda minha vida.

Ao Prof. José Paulo Soares de Azevedo pelas orientações e ensinamentos.

Ao Prof. Paulo de Tarso Themistocles Esperança e ao Eng^o. Fábio Oliveira pela prontidão em esclarecer minhas dúvidas a respeito do funcionamento do batedor de ondas.

À Prof^a. Ada Cristina Scudelari pelo incentivo dado quando mencionei minha intenção de ingressar no curso de mestrado da COPPE.

Aos amigos, conterrâneos e contemporâneos, Adriano H. de Araújo, Carlos Henrique Perez, Frederico C. Vieira, Jonas, Karla Fabiana e Kátia Verônica, que assim como eu, vieram ao Rio de Janeiro com o objetivo de ampliar seus conhecimentos.

À minha Tia Marlene e ao amigo *Bola* pela assistência prestada em minha estada no Rio de Janeiro.

Aos colegas de laboratório, em especial Eduardo Ferreira, Ikaro Riva, Jorge Prodanoff e Lus Fleming pela colaboração na elaboração deste trabalho.

Por fim, mas não por último, à Anne Falcão Côrtes pelo carinho e atenção nos momentos em que eu não enxergava a luz no fim do túnel.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências(M.Sc.).

SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CANAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Pedro Ivo Costa Trindade

Outubro/2003

Orientador: José Paulo Soares de Azevedo

Programa: Engenharia Civil / Área de Recursos Hídricos

Este trabalho apresenta a simulação numérica da geração e propagação de ondas em canais de laboratório utilizando uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana que substitui o problema de valor inicial de contorno por uma série de problemas de valor de contorno.

A descrição Euleriana define o campo de velocidades a cada instante para a superfície livre: o Método dos Elementos de Contorno é usado para a determinação da velocidade normal dos nós pertencentes à superfície livre, enquanto a velocidade tangencial é determinada numericamente através da derivada do potencial na direção tangente. A descrição Lagrangeana atualiza a posição dos nós a cada passo de tempo. A velocidade normal em cada nó do batedor é dada como condição de contorno sendo atualizada por equações que regem o movimento do mesmo.

O esquema Runge-Kutta de quarta ordem é responsável pela atualização da geometria da superfície livre e do seu potencial a cada instante. Ao final deste trabalho são mostrados resultados que garantem a consistência da simulação proposta.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

SIMULATION OF THE PROPAGATION OF WAVES IN CHANNELS USING THE
BOUNDARY ELEMENT METHOD.

Pedro Ivo Costa Trindade

October/2003

Advisor: José Paulo Soares de Azevedo

Department: Civil Engineering

This work presents the numerical simulation of the generation and propagation of waves in flumes using a mixed Eulerian-Lagrangian formulation which replaces the original initial boundary value problem with a sequence of boundary value problems

The Eulerian description defines the velocity field at each instant for the free surface: the Boundary Element Method is used for determining the normal velocity at the free surface, while the tangential velocity is determined numerically using finite differences of the potential along the free surface. The Lagrangian description updates the position of the boundary element nodes for each time step. The normal velocity in every node of the wave maker is given as a boundary condition for each time step from the equations that govern the movement of the same.

A fourth order Runge-Kutta scheme updates the free surface's geometry and its potential at each instant. The proposed formulation is implemented numerically yielding results of free surface elevation, potential energy, kinetic energy, mean water level and flux over time.

ÍNDICE

Apresentação.....	1
1.1 – Introdução.....	1
1.2 – Organização do trabalho.....	3
Fundamentação Teórica	5
2.1 – Equações governantes	5
2.2 – Condições de contorno	6
2.2.1 - Condição de Contorno Cinemática	6
2.2.2 - Condição de Contorno Dinâmica	7
2.3 – Problema de Valor de Contorno Inicial.....	8
Método Numérico	10
3.1 – Introdução.....	10
3.2 – Revisão da Teoria do Potencial	11
3.2.1 – Introdução.....	11
3.2.2 – Potencial gerado por uma fonte pontual.....	11
3.2.3 – Potencial gerado por várias fontes pontuais	14
3.2.4 – Potencial gerado por fontes distribuídas.....	15
3.2.5 – Potencial Logarítmico	17
3.2.6 – Potencial de um dipolo	18
3.2.7 – Teorema de Gauss e Identidades de Green.....	20
3.3 – Método dos Elementos de Contorno aplicado à equação de Laplace.....	21
3.3.1 - Introdução	21
3.3.2 – Equação integral de contorno	22
3.3.3 – Elementos de Contorno	25
3.3.3.1 – Tipos de elementos	26
3.3.3.2 – Interpolações e Jacobiano.....	27
3.3.3.3 – Coeficiente de Influência.....	29
3.3.3.4 – Matrizes envolvidas na resolução do MEC para elementos isoparamétricos quadráticos.	31
3.3.3.5 – Determinação do potencial de velocidades e de velocidades em pontos internos	34
3.3.3.6 – Descontinuidades da velocidade normal	35

Implementação Computacional	37
4.1 – Introdução	37
4.2 – Geometria dos Elementos de Contorno	39
4.2.1 – Jacobiano, Comprimento de Arco e Vetores Unitários Normal e Tangencial.	42
4.3 – Medidas de Conservação	44
4.3.1 – Conservação do Fluxo	44
4.3.2 – Conservação do Nível Médio	45
4.3.3 – Conservação da Energia Total	46
4.4 – Campo de Velocidades	48
4.4.1 – Componente da Velocidade na Direção Normal ao Contorno	48
4.4.1.1 – Componente da Velocidade na Direção Normal à Superfície Livre ...	49
4.4.1.2 – Componente da Velocidade na direção Normal ao Batedor.....	50
4.4.1.3 – Componente da Velocidade na Direção Normal a Parede Final	54
4.4.2 – Sistema de Equações	54
4.4.3 – Componente da Velocidade na Direção Tangencial ao Contorno.....	57
4.5 – Avanço Temporal	58
Aplicações e Resultados	61
5.1 – Exemplo 1	61
5.2 – Exemplo 2.....	67
5.3 – Exemplo 3.....	70
5.4 – Exemplo 4.....	73
5.5 – Exemplo 5.....	76
Conclusões e Recomendações	80
6.1 – Conclusões.....	80
6.2 – Recomendações	81
Bibliografia.....	82

Capítulo 1

Apresentação

1.1 – Introdução

Há séculos que os fenômenos naturais vêm sendo estudados com afincamento pelo homem, que estando sujeito a erros, muitas vezes chegou a conclusões equivocadas que com o passar dos anos foram reformuladas ou até mesmo abandonadas.

Nos dias atuais, o conhecimento adquirido pelo homem ainda não o faz capaz de controlar totalmente os efeitos dos fenômenos naturais como as cheias dos rios, terremotos, maremotos, erupções vulcânicas e grandes períodos de estiagem. Entretanto, estudos foram capazes de identificar algumas de suas causas e conseqüências.

De posse de tais conhecimentos, o homem passou a poder modificar a natureza de uma maneira mais eficiente, não cometendo erros passados. Passou a mapear e delimitar as áreas mais sujeitas a inundações, projetou barragens a fim de regularizar as vazões dos rios, construiu quebra-mares para a proteção de seus portos, identificou aquíferos subterrâneos em regiões bastante áridas e chegou a embasar seus prédios em robustos feixes de molas a fim de evitar o desmoronamento das edificações causado pelos terremotos. Enfim, o homem de hoje não tenta evitar o fenômeno natural, mas tenta adaptar-se da melhor forma possível às conseqüências ocasionadas por ele.

Em 1991, AZEVEDO [3] utilizou o Método dos Elementos de Contorno para estudar a propagação de ondas de superfície fazendo também uma revisão nas equações que regem o problema adotando medidas de conservação. No modelo proposto foram utilizados elementos isoparamétricos quadráticos tendo por objetivo alcançar uma melhor discretização e caracterização da geometria da superfície livre, e também fez uso da formulação mista Euleriana-Lagrangeana originalmente proposta por LONGUET-HIGGINS e COKELET [17].

Há muito tempo, canais de laboratório e modelos numéricos vêm sendo utilizados em simulações de situações práticas em áreas de interesse de projetos de engenharia. O presente trabalho dá continuação ao trabalho de AZEVEDO [3] acrescentando um módulo de geração e propagação de ondas em canais experimentais. Para isso, foram consideradas novas condições de contorno, correspondentes a canais de ondas incluindo a geração por meio de batedores do tipo pistão ou flap.

Também merecem destaque os trabalhos, desenvolvidos nos últimos quinze anos, que seguiram a linha da simulação numérica de ondas utilizando equações integrais de contorno:

SUGINO e TOSAKA [24] publicaram um trabalho em 1990 onde utilizaram um modelo matemático que estudou a propagação bidimensional de uma onda solitária até sua arrebenção devido ao aclave no fundo. O modelo matemático faz uso da formulação mista Euleriana-Lagrangeana e resolve a equação de Laplace via Método dos Elementos de Contorno utilizando-se de técnicas de suavização para a supressão de ruídos no resultado final do modelo.

ZAMBROZUSKY [27] em 1992 partindo de AZEVEDO [3] testou esquemas alternativos de relocação nodal e interações com domínios contendo ângulos pequenos a fim de se simular run-ups.

JAIME [14] dando prosseguimento ao trabalho de AZEVEDO [3] continuou a pesquisa em 1995, implementando ao modelo já existente uma otimização da relocação dos nós centrais dos elementos para a situação mais crítica, a arrebenção.

Em 1997, AZEVEDO [2] publicou um artigo mostrando o desenvolvimento feito por AZEVEDO [3] e JAIME [14], acompanhando a propagação da onda de superfície via Método dos Elementos de Contorno, desde casos mais simples até situações mais críticas, como a arrebenção.

Ainda em 1997, CHACALTANA [7] aplicou o Método da Integral de Contorno a escoamentos com superfície livre, simulando numericamente a geração de uma onda solitária e comparou com resultados obtidos em um canal.

Já em 1999, McKEE [18] estudou a propagação de ondas num canal com largura variável através de um modelo matemático tridimensional que levava em consideração as irregularidades senoidais das paredes laterais do canal que por sua vez causavam reflexão.

1.2 – Organização do trabalho

Este trabalho trata da simulação numérica da propagação de uma onda de superfície num canal desde sua formação por um batedor de ondas até sua reflexão na parede final do canal.

Admitiu-se que a água é um fluido perfeito, sendo considerado incompressível e de viscosidade nula; além disto foi suposto que o seu fluxo era irrotacional. Partindo destas suposições, a equação diferencial que rege o movimento é a equação de Laplace, que é linear. A dificuldade encontrada para sua solução ocorre devido à não linearidade das condições de contorno cinemáticas e dinâmicas além do fato destas serem também não prescritas do tempo.

O Método dos Elementos de Contorno foi escolhido para obter a solução aproximada para equação de Laplace, entre outros motivos, devido à sua praticidade, pois este método requer apenas a discretização do contorno, aproximando-se a geometria inicial através de um conjunto de elementos onde se efetuam as integrações, pois a formulação integral de contorno transforma a equação diferencial governante em uma equação integral que relaciona somente os valores das variáveis no contorno.

A partir de uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana, o problema de valor de contorno inicial – P.V.C.I. – é desmembrado numa seqüência de problemas de valor de contorno, onde as condições de contorno são prescritas. Através da descrição Euleriana é possível determinar o campo de velocidades para todo o contorno em um dado

instante, e através da descrição Lagrangeana pode-se determinar a nova posição das partículas pertencentes a superfície livre após um certo intervalo de tempo. A posição do fundo e da parede final do canal não se altera com o tempo, enquanto a posição e a velocidade do batedor são atualizadas ao longo do tempo. Dessa forma estabelece-se um novo problema de valor de contorno que será resolvido da mesma forma que o anterior, caracterizando um ciclo que terá seu fim no instante em que se desejar obter a solução.

Foram adotados neste trabalho elementos isoparamétricos quadráticos a fim de representar a geometria curva do contorno, utilizando uma formulação integral baseada na terceira identidade de Green. A atualização da geometria devida ao avanço temporal é feita por um esquema Runge-Kutta de quarta ordem, que confere alta precisão na atualização da geometria e do potencial na superfície livre de um passo de tempo para o seguinte.

O capítulo 2 deste trabalho contém os fundamentos da teoria de onda, suas classificações, seus parâmetros, sua equação governante e suas condições de contorno cinemática e dinâmica.

O capítulo 3 apresenta uma breve revisão do método numérico utilizado na solução aproximada da equação governante – Laplace – passando pela teoria do potencial, teorema de Gauss, identidades de Green e finalmente as equações integrais de contorno.

O capítulo 4 descreve a implementação numérica necessária para o estudo da propagação de uma onda de superfície bidimensional usando a formulação mista Euleriana-Lagrangeana adotada para a obtenção do campo de velocidades bem como a nova posição das partículas após o avanço temporal, e também as novas adaptações feitas no programa NLWAVE desenvolvido por Azevedo [3] para se acompanhar a propagação de uma onda de superfície num tanque, desde sua geração até sua reflexão.

No capítulo 5 são apresentados resultados de análises feitas por diferentes excitações do tanque geradas pelo movimento de um batedor.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 – Equações governantes

O estudo da propagação de ondas na superfície d'água requer a consideração de algumas hipóteses a respeito das propriedades da água como fluido, bem como do movimento realizado pela mesma.

Neste trabalho a água foi considerada um fluido incompressível e não viscoso, resultando no movimento irrotacional do fluido.

Estas hipóteses não distam muito da realidade, pois a água além de ser um fluido com pouca viscosidade é também praticamente incompressível. Neste trabalho o fluxo pôde ser considerado irrotacional, pois os efeitos advindos da viscosidade, em canais de onda com paredes muito lisas, só ocorrem de fato em camadas limítrofes no fundo e na superfície livre do fluido.

Partindo de tais premissas, a equação diferencial em função do potencial velocidade – ϕ – que representa o movimento da onda é a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

Como neste trabalho o estudo da onda se dá em apenas duas dimensões, a equação (2.1) se reduz a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

2.2 – Condições de contorno

Uma vez determinada a equação de Laplace como sendo a equação governante, tem-se agora que se estabelecer as equações que definem as condições de contorno – cinemática e dinâmica –, delimitando assim, dentre as possíveis soluções matemáticas aquelas que satisfaçam a parte física do problema em questão.

O problema de ondas em superfície d'água faz parte do grupo de problemas de valor de contorno e inicial, ou seja, para se determinar a velocidade e a pressão de uma partícula qualquer, obrigatoriamente, tem-se que ter conhecimento prévio desses parâmetros no instante inicial e no contorno ao longo do tempo.

2.2.1 - Condição de Contorno Cinemática

As condições de contorno devem ser informadas para todo o contorno do domínio. No caso do estudo da propagação de ondas, tem-se que conhecer as condições de contorno que descrevem as superfícies que delimitam o problema, como a superfície livre e o fundo. A condição de contorno lateral é tratada no capítulo 4, onde são descritas também as condições de contorno do batador de ondas e da parede final do canal.

Uma das condições de contorno cinemáticas traduz o fato da velocidade normal ao fundo – v_n – ser nula, ou seja, a partícula fluida é impedida de penetrar na superfície que define o fundo do canal sendo possível apenas o movimento tangencial.

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.3)$$

As condições de contorno cinemática da superfície livre para uma onda bidimensional são dadas através das derivadas materiais das coordenadas x e z pelo tempo t :

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \quad (2.4)$$

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z \quad (2.5)$$

2.2.2 - Condição de Contorno Dinâmica

A condição de contorno dinâmica é descrita pela equação de Bernoulli, onde a pressão atmosférica age sobre a superfície livre em todo o percurso, e pode ser escrita para uma onda bidimensional como:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gZ + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.6)$$

ou ainda

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gZ + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 = 0 \quad (2.7)$$

onde p_{atm} é a pressão atmosférica, ρ é massa específica do fluido, Z é a coordenada vertical do ponto em questão, V é o módulo de velocidade da partícula sobre a superfície livre sendo considerada e g é a aceleração gravitacional, sendo a gravidade a única força restauradora responsável por colocar a superfície livre do fluido de volta ao estado de repouso – nível médio.

Em Azevedo [3] pode ser visto como as equações de Laplace e Bernoulli podem ser obtidas a partir dos princípios de conservação de massa e quantidade de movimento, respectivamente.

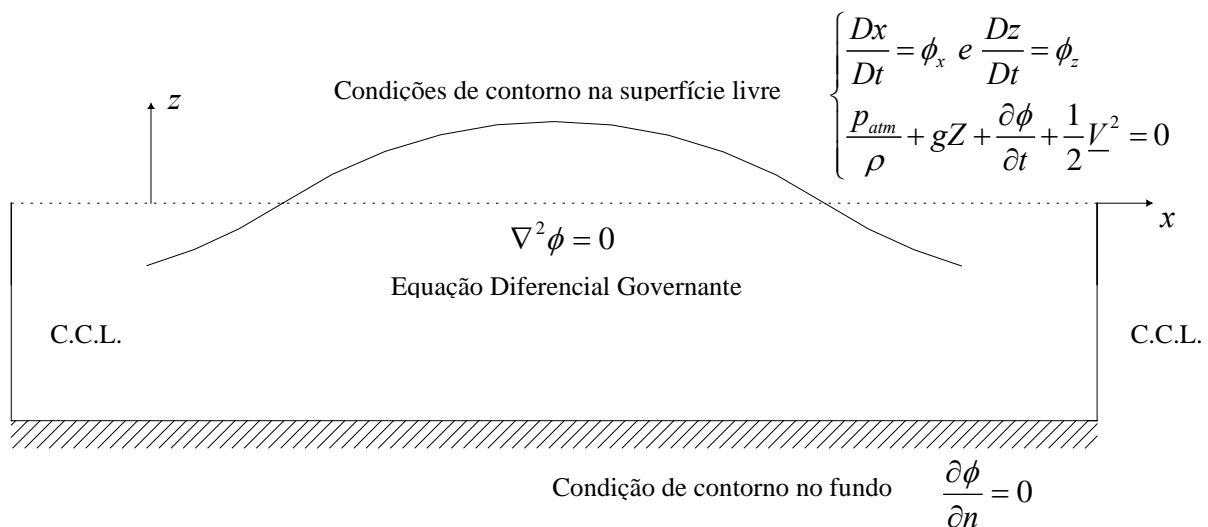


Figura 2. 1

Esquematização das condições de contorno do problema.

A **Figura 2.1** resume as equações que definem as condições de contorno e onde elas ocorrem, bem como a equação diferencial governante do movimento. As equações que estabelecem as condições de contorno laterais – C.C.L. – estão descritas no capítulo 4.

2.3 – Problema de Valor de Contorno Inicial

A equação de Laplace é uma equação diferencial parcial linear ao contrário das equações que determinam as condições de contorno na superfície livre do fluido, que são não lineares e ainda dependentes do tempo.

Este problema foi solucionado partindo-se o problema de valor de contorno inicial – PVCI – em uma seqüência de problemas de valor de contorno – PVC_s – em função do tempo, substituindo-se a variação contínua por um número suficiente de passos de tempo discretos envolvidos de forma a evitar o acúmulo de erros. Para isso, fez-se o uso de uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana, onde inicialmente, são conhecidos a geometria do contorno, o potencial na superfície livre em repouso e a velocidade normal nula tanto no batedor, também em repouso, quanto na parede final do canal de ondas.

A formulação Euleriana descreve as propriedades do meio fluido através do tempo quando o referencial se encontra fixo num ponto no espaço; dessa forma, coube à descrição Euleriana determinar a componente da velocidade na direção normal ao contorno em um dado instante de tempo discretizado e dessa forma, resolver um PVC a cada passo de tempo, como esquematizado na **Figura 2.2**. Por sua vez, a formulação Lagrangeana acompanha a partícula fluida ao longo do tempo, servindo para atualizar a geometria da superfície livre formada pelo conjunto de partículas a cada instante, como representado na **Figura 2.3**.

Uma vez atualizada a posição das partículas, obtém-se a nova geometria do contorno na superfície livre para o atual nível de tempo, estabelecendo um novo PVC, formando uma seqüência de problemas de valor de contorno.

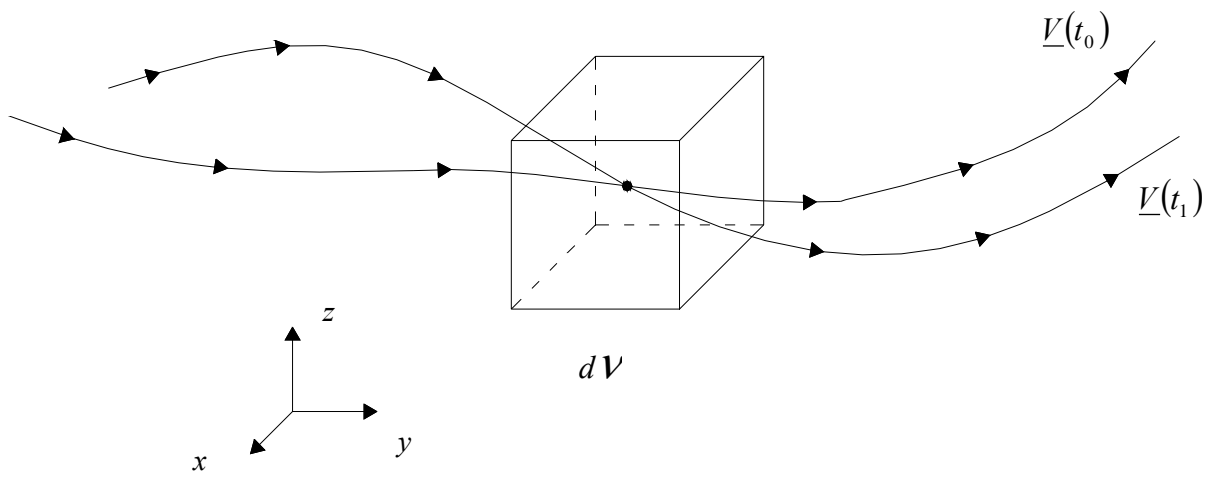


Figura 2. 2
 Descrição Euleriana.

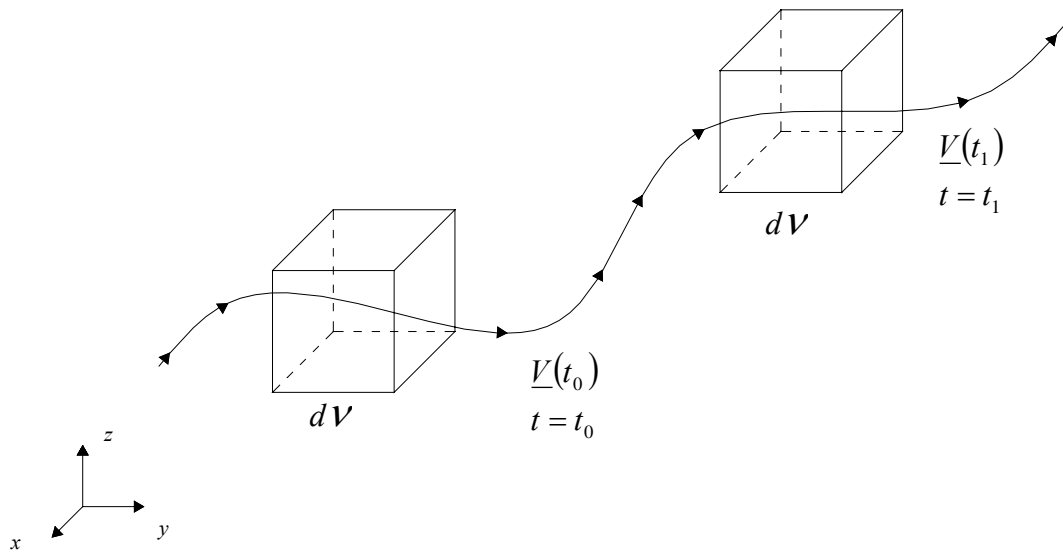


Figura 2. 3
 Descrição Lagrangeana.

Capítulo 3

Método Numérico

3.1 – Introdução

A solução analítica de equações diferenciais nem sempre é de fácil obtenção, entretanto, existem diversos métodos numéricos capazes de fornecer uma solução aproximada, que dependendo da discretização do espaço e/ou do tempo, permitem alcançar resultados muito próximos às soluções analíticas.

Os métodos numéricos reduzem o número infinito de incógnitas do modelo matemático a um problema discreto onde o número de incógnitas é finito, normalmente reduzindo-se à solução de um sistema de equações algébricas. Nessa forma, são facilmente implementados computacionalmente.

Dentre os métodos mais utilizados para a determinação de soluções de problemas que ocorrem na engenharia destacam-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos de Contorno consiste na transformação da equação diferencial governante do fenômeno físico em uma equação integral de contorno seguida por sua solução numérica.

Para se solucionar a equação de Laplace, que é uma equação diferencial parcial linear, sujeita a condições de contorno não lineares e dependentes do tempo, foi utilizado, neste trabalho, o Método dos Elementos de Contorno, pelas suas vantagens em problemas de contorno móvel.

3.2 – Revisão da Teoria do Potencial

3.2.1 – Introdução

A solução bidimensional do Problema de Valor de Contorno Inicial – PVCI – que rege o movimento da superfície livre das ondas, usando uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana, consiste no desdobramento do PVCI em PVC_s – Problemas de Valor de Contorno – resolvidos pelo Método dos Elementos de Contorno e PVI_s – Problemas de Valor Inicial – para cada nó do contorno da superfície livre permitindo atualizar sua geometria e seu potencial.

Seguindo a seqüência de trabalho de AZEVEDO [3], neste capítulo será descrita uma revisão da teoria do potencial, bem como a utilização do Método dos Elementos de Contorno para a equação de Laplace.

3.2.2 – Potencial gerado por uma fonte pontual

A solução fundamental corresponde à solução desta equação para uma fonte aplicada em um domínio infinito. O potencial de velocidade em um determinado ponto p – ponto campo – é influenciado por uma fonte localizada em um ponto s – ponto fonte – de onde surge um fluxo de massa unitário na região.

Dessa forma, a equação de Laplace para qualquer ponto $p \neq s$, é dada por:

$$\nabla^2 \phi(s; p) = 0 \quad (3.1)$$

Convertendo o Laplaciano em coordenadas esféricas, a equação (3.1) é reescrita como:

$$\nabla^2 \phi(s; p) = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left(r^2 \sin \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2r \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sin \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \cos \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.2)$$

onde φ e θ são ângulos representados na **Figura 3.1**.

Como ϕ independe de φ e θ , portanto $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0$, tem-se:

$$\nabla^2 \phi(s; p) = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \varphi} \left(r^2 \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2r \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (3.3)$$

Ou ainda:

$$\nabla^2 \phi^*(s; p) = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi^*}{dr} \right) = 0 \quad (3.4)$$

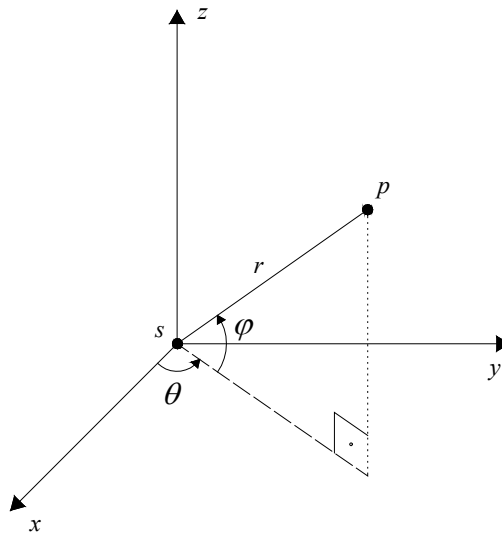


Figura 3. 1
Ângulos ω e ν .

Esta expressão pode ser integrada duas vezes fornecendo a solução fundamental – ϕ^* – para a equação diferencial ordinária em função da distância – r – entre os pontos s e p :

$$\phi^*(s; p) = c_0 + \frac{c_1}{r} \quad (3.5)$$

onde c_0 é uma constante arbitrária geralmente tomada como nula quando é calculada a velocidade como o gradiente do potencial ϕ^* , e c_1 é uma constante que pode ser determinada a partir do princípio da conservação de massa.

Partindo-se da formulação do fluxo de massa $\left(q = \rho \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)$, e substituindo-se a derivada normal por uma derivada na direção radial na fórmula da solução fundamental (3.5), tem-se:

$$q = -\rho c_1 \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (3.6)$$

A expressão acima é válida para qualquer ponto na superfície da esfera de raio ε , como esquematizado na **Figura 3.2**.

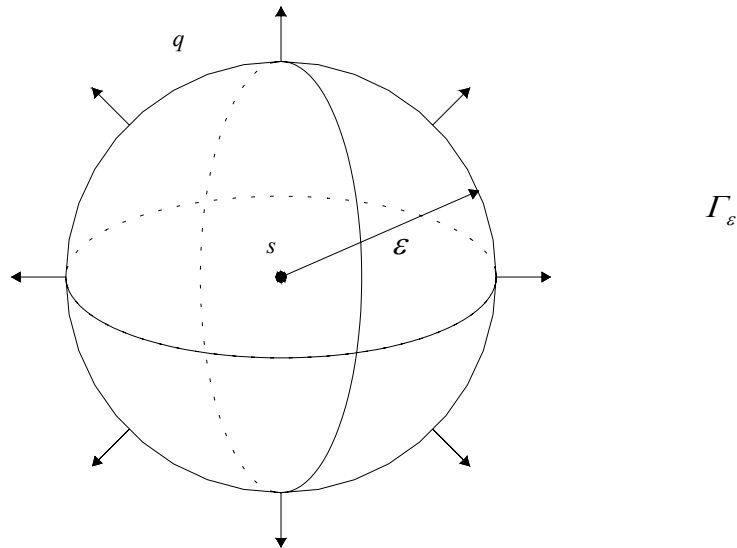


Figura 3.2

Esfera de raio ε ao redor do ponto fonte s .

Segundo o princípio da conservação de massa, todo o fluxo que transpõe os limites da superfície da esfera deverá, obrigatoriamente, ser idêntico ao fluxo advindo de uma fonte unitária localizada no ponto s . Sendo assim, tem-se:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} q d\Gamma = -\rho c_1 \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma = 1 \quad (3.7)$$

Com o objetivo final de se determinar a constante c_1 , substitui-se a área $4\pi\varepsilon^2$ da casca esférica em (3.7). Sendo c_1 totalmente independente do raio ε , tem-se:

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi\rho} \quad (3.8)$$

Como foi dito anteriormente, para a determinação da velocidade através do gradiente do potencial a derivada da constante c_0 se anula. Logo, substituindo-se (3.8) em (3.5) obtém-se:

$$\phi^*(s; p) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{4\pi r} \quad (3.9)$$

Para um fluido perfeito, ou seja, não viscoso e incompressível, a equação de Poisson será a equação da continuidade, em função da densidade volumétrica $-\mu$:

$$\nabla^2 \phi^* - \frac{\mu}{\rho} = 0 \quad (3.10)$$

Dessa forma, a solução fundamental é a solução da equação de Poisson para uma carga igual ao Delta de Dirac $-\delta(s; p)$, que representa matematicamente uma fonte unitária pontual:

$$\nabla^2 \phi^* - \frac{1}{\rho} \delta(s; p) = 0 \quad (3.11)$$

3.2.3 – Potencial gerado por várias fontes pontuais

O potencial total em um ponto campo é determinado pelo somatório de todas as contribuições das fontes localizadas em pontos fontes:

$$\phi(s_1, \dots, s_n; p) = -\frac{1}{4\pi\rho} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (3.12)$$

sendo r_i a distância entre o ponto p e os pontos s_i , onde estão localizadas as fontes de intensidade Q_i , como mostrado na **Figura 3.3**.

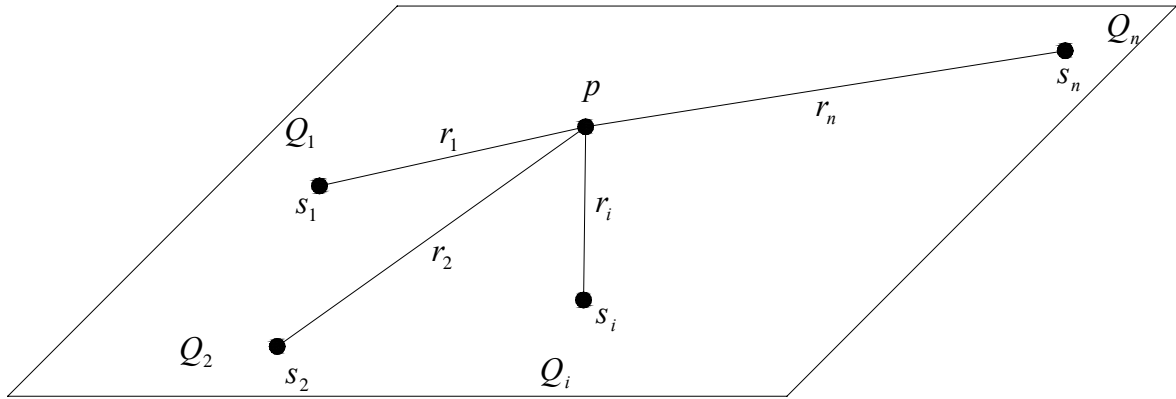


Figura 3.3

Potencial induzido por vários pontos fonte.

3.2.4 – Potencial gerado por fontes distribuídas

A fonte não necessariamente tem que estar concentrada apenas em um ponto no espaço, podendo também ser distribuída, em forma de linhas, superfícies e volumes com a sua intensidade variando com a sua localização. Portanto, para se determinar o potencial em um ponto campo p influenciado por fontes distribuídas tem-se que integrar suas contribuições elementares.

O potencial no ponto p a uma distância r de uma linha L – **Figura 3.4** –, onde há uma fonte distribuída com densidade linear $\lambda(s)$, é dado por:

$$\phi(s; p) = -\frac{1}{4\pi\rho_L} \int \frac{\lambda(s)}{r(s)} \cdot dL(s) \tag{3.13}$$

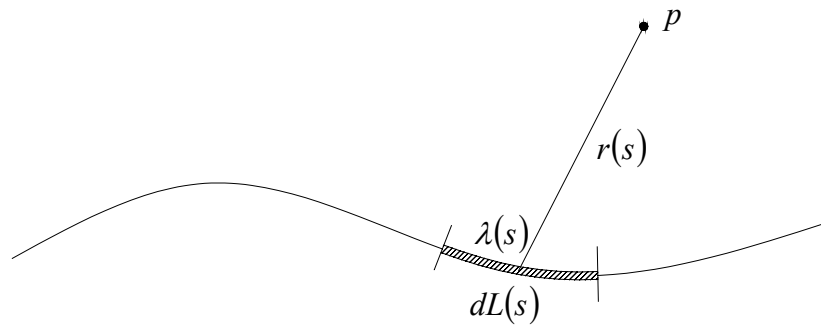


Figura 3. 4

Fontes distribuídas em linha.

Se a fonte se encontra distribuída numa superfície A – **Figura 3.5** – com densidade superficial $\sigma(s)$, o potencial do ponto p fora desta superfície, é determinado por:

$$\phi(s; p) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_A \frac{\sigma(s)}{r(s)} \cdot dA(s) \quad (3.14)$$

Por fim, quando a fonte se encontra distribuída em um elemento de volume infinitesimal $dVol$ – **Figura 3.6** – com densidade volumétrica $\mu(s)$, o potencial no ponto p é obtido por:

$$\phi(s; p) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_{Vol} \frac{\mu(s)}{r(s)} \cdot dVol(s) \quad (3.15)$$

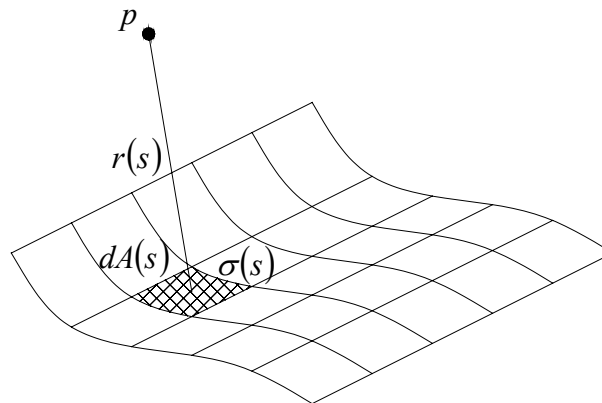


Figura 3. 5

Fontes distribuídas em uma superfície.

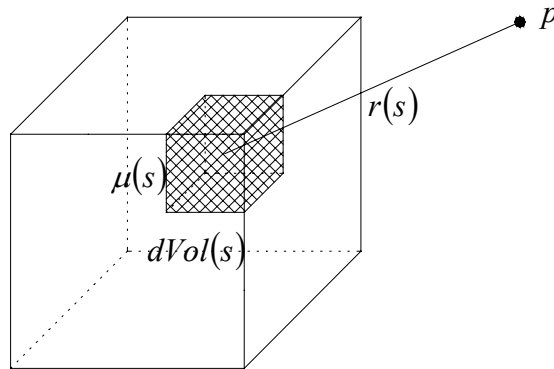


Figura 3. 6

Fontes distribuídas em um volume.

3.2.5 – Potencial Logarítmico

O potencial em duas dimensões – conforme **Figura 3.7** – pode ser obtido para uma linha de fontes perpendiculares ao plano horizontal xz onde se localiza o ponto campo p :

$$\phi(s; p) = -\frac{\lambda}{4\pi\rho} \int_{-l}^l \frac{dy}{\sqrt{r^2 + y^2}} + C_0(l) \quad (3.16)$$

onde $C_0(l)$ é um parâmetro arbitrário em função da distância l e λ uma fonte de densidade constante e unitária.

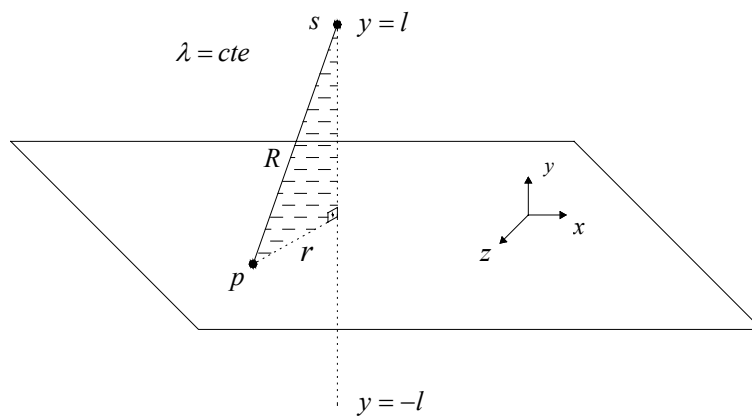


Figura 3. 7

Derivação do potencial em duas dimensões.

Integrando-se ao longo do eixo y entre $-l$ e l , o que equivale a duas vezes uma integração entre 0 e l por ser o integrando de uma função par, tem-se:

$$\phi(s; p) = -\frac{\lambda}{2\pi\rho} \left[\ln\left(l + \sqrt{l^2 + r^2}\right) - \ln(r) \right] + C_o(l) \quad (3.17)$$

onde l e r são comprimentos adimensionalizados em função de um comprimento característico.

Para a determinação do parâmetro $C_o(l)$, faz-se o limite da linha de fontes, $l \rightarrow \infty$, de modo que o argumento do logaritmo tende para $2l$. Partindo de tais premissas e igualando-se a equação acima a zero, tem-se:

$$C_o(l) = \frac{\lambda}{2\pi\rho} (\ln 2l) \quad (3.18)$$

Então, substituindo-se (3.18) em (3.17), obtém-se:

$$\phi(s; p) = -\frac{\lambda}{2\pi\rho} \left[\ln\left(\frac{l + \sqrt{l^2 + r^2}}{2l}\right) - \ln(r) \right] \quad (3.19)$$

Fazendo o limite, $l \rightarrow \infty$, chega-se ao potencial bidimensional, ou potencial logarítmico:

$$\phi(s; p) = -\frac{1}{2\pi\rho} \ln(r) \quad (3.20)$$

3.2.6 – Potencial de um dipolo

Na **Figura 3.8** os símbolos $+Q$, localizado no ponto s^+ , e $-Q$, situado no ponto s^- , representam uma fonte e um sumidouro respectivamente, estando ambos afastados de uma distância $h/2$ do ponto s .

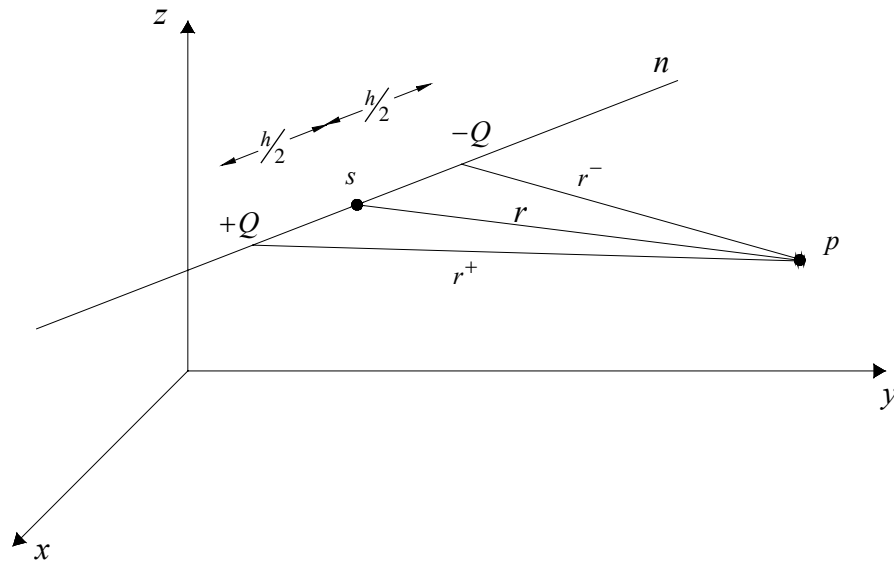


Figura 3. 8
Potencial de um dipolo.

Neste caso, o potencial no ponto p será determinado pela soma das contribuições da fonte $+Q$ e do sumidouro $-Q$.

$$\phi(s^+; s^-; p) = -\frac{Q}{4\pi\rho} \left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right) \quad (3.21)$$

Por sua vez, o potencial de um dipolo distribuído ao longo de uma linha L – potencial do dipolo em 2D – é definido pela integral:

$$\phi(s; p) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_L \beta(s) \frac{\partial}{\partial n} (\ln(r)) dL(s) \quad (3.22)$$

Fazendo a integração chega-se a:

$$\phi(s; p) = -\frac{1}{2\pi\rho} \frac{1}{r} \quad (3.23)$$

Onde $\beta(s)$ é o momento unitário por unidade longitudinal, r é a distância entre os pontos fonte s e campo p e $\frac{\partial}{\partial n}$ a derivada na direção de n – eixo do dipolo.

3.2.7 – Teorema de Gauss e Identidades de Green

Dentre as principais propriedades de uma função potencial, destacam-se aquelas oriundas do Teorema de Gauss, que afirma que a integral de volume do divergente de um vetor campo \underline{F} deve ser obrigatoriamente igual ao fluxo deste mesmo vetor através de qualquer superfície fechada Γ , conforme ilustrado na **Figura 3.9**.

$$\int_{\Gamma} \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{F} \, d\Omega \quad (3.24)$$

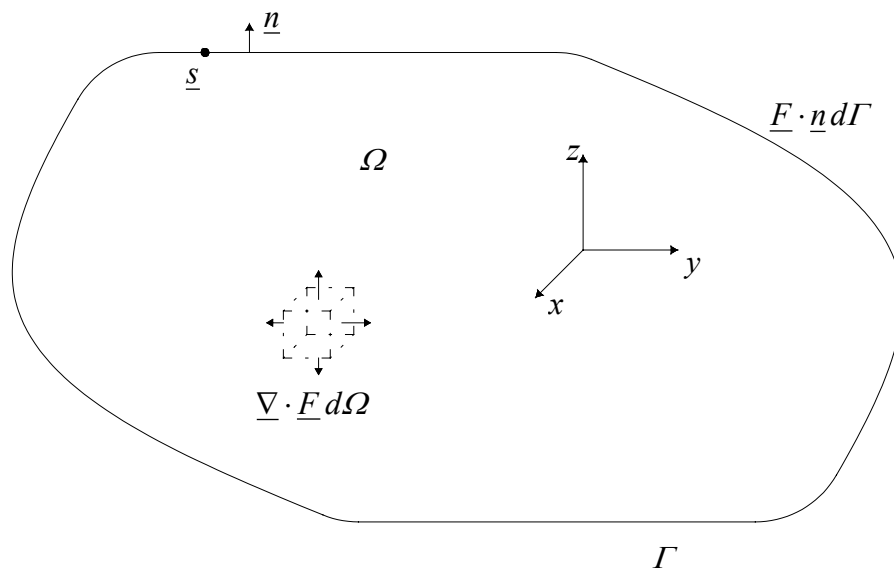


Figura 3. 9

Teorema de Gauss.

Para a obtenção da Primeira Identidade de Green, \underline{F} foi substituído por $\phi \underline{\nabla} \phi$ em (3.24), onde ϕ e ϕ foram consideradas funções escalares diferenciáveis, ao menos, um número de vezes igual ao número de integrações.

$$\int_{\Gamma} \phi \underline{\nabla} \phi \cdot \underline{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{\nabla} \phi) \, d\Omega \quad (3.25)$$

Atribuindo-se a expressão do gradiente do segundo membro da equação acima e utilizando a igualdade $\underline{\nabla} \phi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$, obtém-se a Primeira Identidade de Green:

$$\int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) d\Omega + \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \phi d\Omega \quad (3.26)$$

A Primeira Identidade de Green pode ser reescrita substituindo-se ϕ por φ :

$$\int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} (\nabla \varphi \cdot \nabla \phi) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \nabla^2 \phi d\Omega \quad (3.27)$$

A segunda Identidade de Green pode ser formulada pela diferença entre (3.27) e (3.26), sendo dada por:

$$\int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) d\Omega \quad (3.28)$$

3.3 – Método dos Elementos de Contorno aplicado à equação de Laplace

3.3.1 - Introdução

Como dito em outra oportunidade, o Método dos Elementos de Contorno pode ser usado para resolver a equação de Laplace, sujeita a condições de contorno, transformando a equação diferencial em uma equação integral, cujas variáveis são os potenciais de velocidade e sua derivada na direção normal para cada partícula.

Uma vez prescritas as condições de contorno relativas a cada partícula, o Método dos Elementos de Contorno determina o potencial de velocidades para os nós onde são conhecidas as velocidades normais ao contorno, e para os nós onde são conhecidos os potenciais de velocidade; através deste método, são definidas as velocidades normais ao contorno.

3.3.2 – Equação integral de contorno

Substituindo-se ϕ por ϕ^* em (3.28), e como a segunda identidade de Green exige que ϕ e ϕ^* sejam duas vezes diferenciáveis, o termo $\phi \nabla^2 \phi^*$ será anulado se escolhermos ϕ como a solução da equação de Laplace para um domínio Ω com contorno Γ . Assim:

$$\int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \phi^* d\Omega \quad (3.29)$$

O escoamento de um fluido perfeito é regido pela equação de Poisson – repetida aqui por conveniência –, em função do delta de Dirac, de onde se pode extrair o potencial de velocidade em qualquer ponto campo p devido a existência, no ponto s , de uma fonte unitária e pontual:

$$\nabla^2 \phi^*(s; p) - \frac{1}{\rho} \delta(s; p) = 0 \quad (3.30)$$

Substituindo-se o Laplaciano que aparece no segundo termo da equação (3.29) usando a equação (3.30) e sabendo-se que para pontos fonte interiores a um domínio ζ , a integração do delta de Dirac multiplicado por uma função suave fornece:

$$\int_{\Omega} \delta(s; p) \phi(p) d\Omega = \phi(s) \quad (3.31)$$

Nesta mesma equação ficou-se apenas com integrais de contorno da equação (3.29) e a sua solução fundamental ϕ^* e sua derivada normal para um problema bidimensional são dadas respectivamente por:

$$\phi^*(s; P) = \frac{1}{2\pi\rho} \ln(r) \quad (3.32)$$

$$v^*(s; P) = \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{\pi} \right) \quad (3.33)$$

onde P é o ponto campo no contorno, como esquematizado na **Figura 3.10**.

Substituindo-se (3.32) e (3.33) em (3.29) considerando-se a Equação de Poisson envolvendo o delta de Dirac – (3.30) – e sua integral de contorno – (3.31) –, obtém-se a Terceira Identidade de Green:

$$\phi(s) = -\int \phi(P)v^*(s;P)d\Gamma(P) + \int v(P)\phi^*(s;P)d\Gamma(P) \quad (3.34)$$

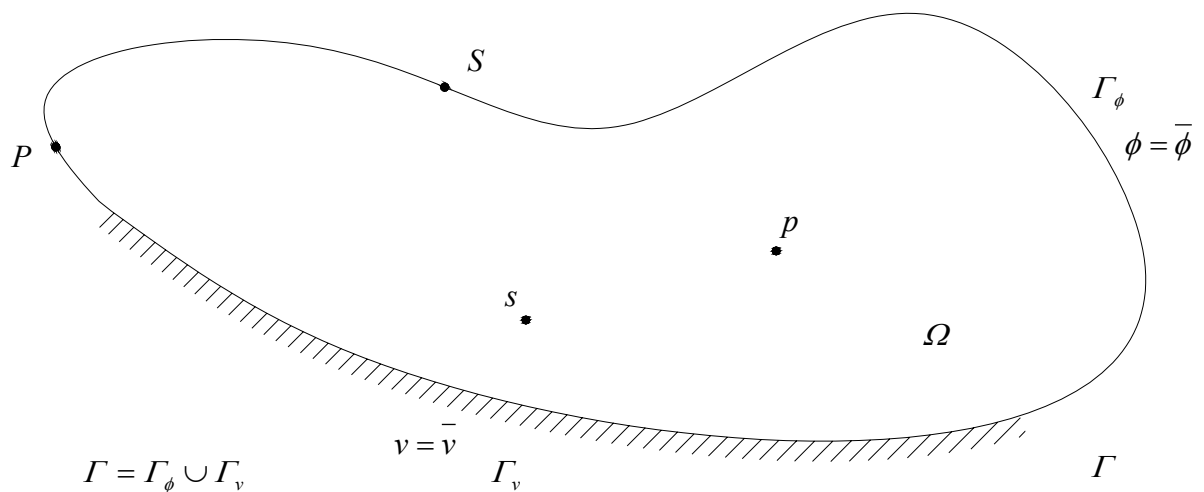


Figura 3.10

Domínio e contorno do problema.

Os pontos campo p e P estão localizados no domínio Ω e no contorno Γ respectivamente, da mesma forma que os pontos fonte s e S .

Para a solução da equação de Laplace pelo Método dos Elementos de Contorno, é necessário fornecer condições de contorno, sejam elas essenciais ou naturais, ao longo de todo o contorno Γ :

- Condições de contorno essenciais

$$\phi = \bar{\phi} \text{ em } \Gamma_\phi$$

- Condições de contorno naturais

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{v} \text{ em } \Gamma_v$$

A equação integral de contorno para pontos fontes pertencentes ao contorno é dada através da terceira identidade de Green – (3.34) – tomando-se o limite quando o ponto fonte s no interior do domínio Ω se aproxima do contorno Γ , tornando-se finalmente um ponto fonte S no contorno, como mostrado em BREBBIA, TELLES e WROBEL [5] e WEBE, PRODANOFF e AZEVEDO [25]:

$$c(S)\phi(S) + \int_{\Gamma} \phi(P)v^*(S;P)d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} v(P)\phi^*(S;P)d\Gamma(P) \quad (3.35)$$

sendo $c(S)$ é determinado em função do local onde está situado o ponto fonte:

$$c(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S \notin \Omega + \Gamma \\ \beta/2\pi & \text{se } S \in \Gamma \\ 1 & \text{se } S \in \Omega \end{cases}$$

sendo β o ângulo interno do ponto fonte, como esquematizado na **Figura 3.11**.

Nesta figura, o ponto fonte S_1 está localizado num trecho do contorno considerado suave, portanto, $\beta = \pi$ logo $c(S) = 1/2$; por sua vez, o ponto fonte S_2 se encontra em um canto, e para esta $\beta = \pi/2$ logo $c(S) = 1/4$.

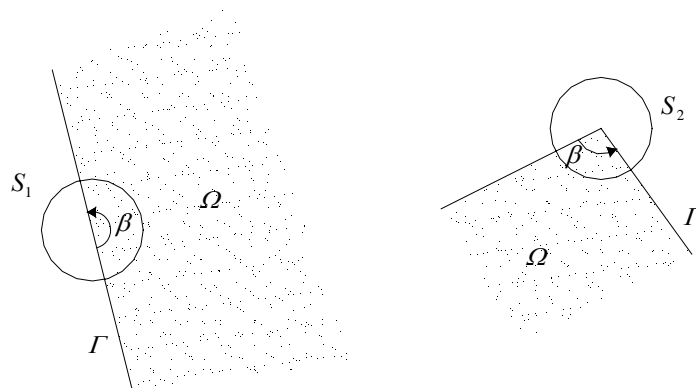


Figura 3. 11

Ângulo interno do ponto fonte.

Como visto anteriormente, uma das vantagens do Método dos Elementos de Contorno em relação a outros métodos aproximados, está na obtenção do potencial de um ponto interno do domínio Ω sem precisar discretizá-lo. O potencial em um ponto interno ao domínio Ω no Método dos Elementos de Contorno, uma vez determinado o potencial para todo o contorno Γ , é dado pela expressão:

$$\phi(s) = \int_{\Gamma} v(P) \phi^*(S;P) d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} \phi(P) v^*(S;P) d\Gamma(P) \quad (3.36)$$

Já as densidades dos fluxos internos, em uma direção qualquer l , são determinadas a partir da derivada da equação acima.

$$q_l(s) = \rho \left[\int_{\Gamma} v(P) \frac{\partial \phi^*(s;P)}{\partial l(s)} d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} \phi(P) \frac{\partial v^*(s;P)}{\partial l(s)} d\Gamma(P) \right] \quad (3.37)$$

onde o fluxo que transpõe uma superfície normal infinitesimal é dado por $q_l = \rho v_l$ e v_l é a velocidade na direção l , normal a essa superfície.

3.3.3 – Elementos de Contorno

A solução analítica da equação diferencial que rege um dado fenômeno, muitas vezes, é de difícil obtenção. Dessa forma, elaboraram-se métodos numéricos para obtenção de resultados aproximados. O Método dos Elementos de Contorno leva este nome devido ao fracionamento do contorno original Γ em um número finito de elementos de contorno, nos quais se aproximam as incógnitas e condições de contorno prescritas naquele trecho do contorno.

A geometria de cada elemento fica definida pela posição de pontos denominados nós geométricos. A interpolação dos valores das incógnitas no contorno é feita em função de seus valores em pontos do elemento conhecidos como nós funcionais.

Para pontos fonte localizados no contorno, tem-se:

$$c(\underline{\xi}) \phi(\underline{\xi}) + \int_{\Gamma} \phi(\underline{x}) v^*(\underline{\xi}; \underline{x}) d\Gamma(\underline{x}) = \int_{\Gamma} v(\underline{x}) \phi^*(\underline{\xi}; \underline{x}) d\Gamma(\underline{x}) \quad (3.38)$$

Esta equação integral é transformada em equações algébricas introduzindo-se aproximações geométricas e funcionais.

3.3.3.1 – Tipos de elementos

Elementos constantes, elementos lineares e elementos quadráticos são os tipos mais comuns de elementos de contorno utilizados na resolução de problema de potencial em duas dimensões.

Elementos constantes são aqueles onde as condições de contorno, naturais ou essenciais, são aplicadas no nó intermediário do elemento, sendo constantes ao longo do elemento. O conjunto de elementos retos tenta reproduzir a geometria do contorno original Γ .

A Figura 3.12 esquematiza cada um dos elementos mencionados.

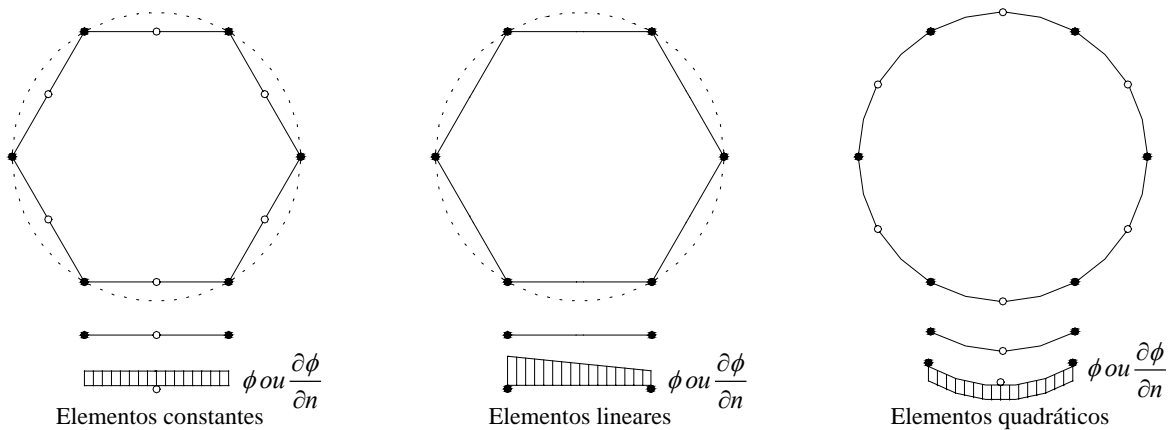


Figura 3. 12

Tipo de elementos.

As características dos elementos constantes são praticamente as mesmas dos elementos lineares, exceto por este último apresentar uma variação linear dos valores atribuídos ao potencial ou sua derivada normal ao longo de cada elemento.

Elementos quadráticos aproximam a geometria do contorno original Γ e as condições de contorno ao longo de cada elemento usando uma variação quadrática, onde são determinados os valores nos nós extremos e no nó funcional.

É evidente que os elementos constantes e lineares terão uma melhor aproximação da geometria original do contorno, ao se aumentar o número total de elementos encurtando o comprimento de cada elemento de contorno.

3.3.3.2 – Interpolações e Jacobiano

Após a aproximação da geometria do contorno original Γ por um número finito de elementos de contorno Γ_e , a expressão que determina o potencial em cada ponto fonte ξ_i é formada pela soma das contribuições correspondentes a cada elemento de contorno:

$$c(\xi_i)\phi(\xi_i) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v^*(\xi_i; x)\phi_e(x) d\Gamma_e(x) = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \phi^*(\xi_i; x)v_e(x) d\Gamma_e(x) \quad (3.39)$$

onde E representa o número total de elementos de contorno Γ_e que aproximam geometricamente o contorno original Γ .

As coordenadas nodais $\underline{X}^{(n)}$, $\underline{Z}^{(n)}$ e as funções de interpolação $[N]$ permitem aproximar as coordenadas cartesianas $x^{(e)}$ e $z^{(e)}$ de qualquer ponto ao longo de um elemento de contorno Γ_e , referente a discretização bidimensional do contorno – **Figura 3.13**.

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= [N]\underline{X}^{(n)} \\ z^{(e)} &= [N]\underline{Z}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Quanto às condições de contorno nos elementos, pode-se aproximar de maneira análoga utilizando as funções de interpolação $[M]$:

$$\begin{aligned}\phi^{(e)} &= [M]\underline{\Phi}^{(m)} \\ v^{(e)} &= [M]\underline{\gamma}^{(m)}\end{aligned}\tag{3.41}$$

onde $\underline{\Phi}^{(m)}$ e $\underline{\gamma}^{(m)}$ vetores detentores dos valores nodais das condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente.

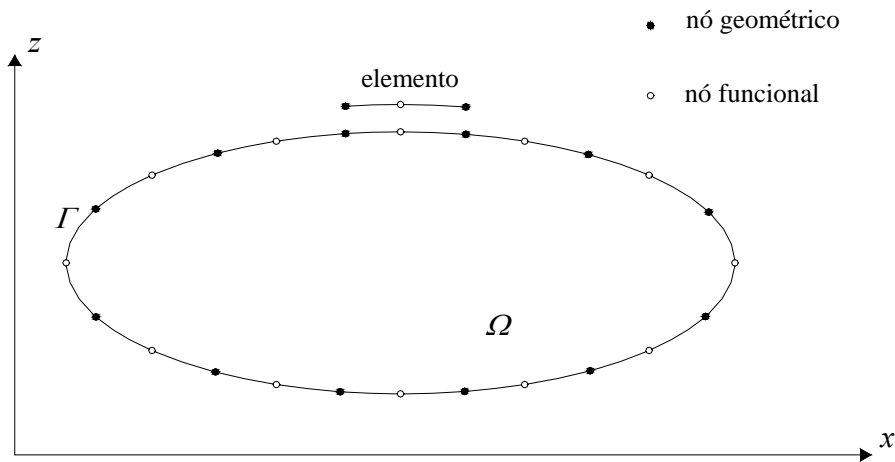


Figura 3.13

Discretização do contorno para problemas do potencial em duas dimensões.

Neste trabalho, foram utilizados elementos isoparamétricos de maneira que as funções de interpolação $[N]$ e $[M]$ coincidem, possibilitando uma reedição de (3.39) na forma:

$$c_i \phi_i + \sum_{e=1}^E \left(\int_{\Gamma_e} v_{ie}^* [N] d\Gamma \right) \underline{\Phi}^{(n)} = \sum_{e=1}^E \left(\int_{\Gamma_e} \phi_{ie}^* [N] d\Gamma \right) \underline{\gamma}^{(n)}\tag{3.42}$$

O jacobiano J aparece ao se usar uma transformação das coordenadas, tendo em vista que as funções de interpolação estão escritas em termos da coordenada adimensional η :

$$d\Gamma = |J| d\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2} d\eta\tag{3.43}$$

3.3.3.3 – Coeficiente de Influência

As integrais envolvidas em (3.42), dependentes da solução fundamental ϕ_{ie}^* , da sua derivada normal v_{ie}^* e das funções de interpolação $[N]$, levam o nome de Coeficientes de Influência.

Neste trabalho, foram usados elementos quadráticos isoparamétricos bidimensionais com os coeficientes de influência calculados por integrações em cada elemento de contorno:

$$\hat{h}_{i\alpha}^e = \int_{\Gamma_e} N_\alpha v_{ie}^* d\Gamma \quad (3.44)$$

$$\hat{g}_{i\alpha}^e = \int_{\Gamma_e} N_\alpha \phi_{ie}^* d\Gamma \quad (3.45)$$

onde i representa o ponto fonte, e representa o elemento de contorno onde se está fazendo a integração e α representa a coordenada natural.

Tanto a integral que envolve a solução fundamental ϕ_{ie}^* quanto a integral que depende da sua derivada normal v_{ie}^* são funções do comprimento de arco, ou comprimento do elemento de contorno a ser considerado, $d\Gamma$. Sendo assim, o Jacobiano é necessário para a transformação do comprimento do referido elemento em coordenada adimensional η , como esquematizado na **Figura 3.14**.

As coordenadas cartesianas x e z transformadas em coordenadas naturais η utilizadas para a aproximação da geometria são dadas por:

$$\begin{aligned} x(\eta) &= \sum_{i=1}^J N_i(\eta) x_i \\ z(\eta) &= \sum_{i=1}^J N_i(\eta) z_i \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde x_i e z_i são as coordenadas de x e z do nó i de cada elemento de contorno, $N_i(\eta)$ são funções de interpolação e η a coordenada natural, $\eta \in [-1, 1]$ e I representa o número de nós por elemento.

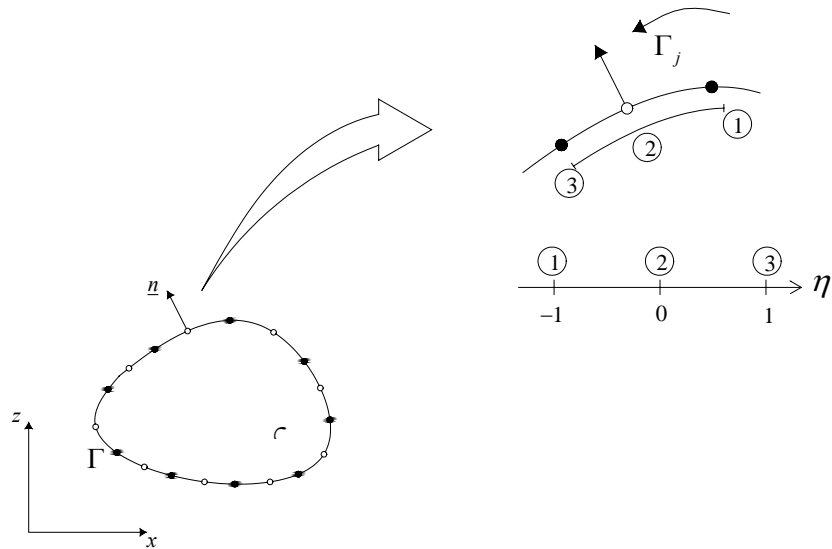


Figura 3. 14

Sistema de coordenadas para elementos quadráticos.

Por sua vez, as funções de interpolação para três pontos nos elementos quadráticos, $I=3$, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 N_1(\eta) &= \frac{1}{2} \eta(\eta-1) \\
 N_2(\eta) &= (1+\eta)(1-\eta) \\
 N_3(\eta) &= \frac{1}{2} \eta(\eta+1)
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

As funções de interpolação também podem ser usadas para a obtenção dos valores do potencial e sua derivada normal:

$$\begin{aligned}
 \phi &= [N] \underline{\Phi}^{(n)} \\
 v &= [N] \underline{\chi}^{(n)}
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}^{(n)} &= \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T \\ \underline{\gamma}^{(n)} &= \{v_1, v_2, v_3\}^T \end{aligned} \quad (3.49)$$

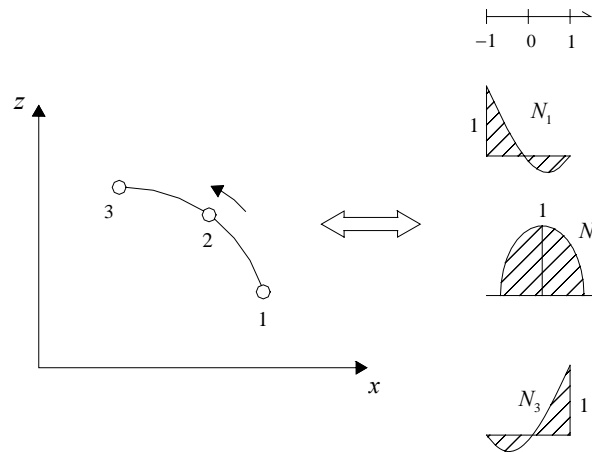


Figura 3.15

Funções de interpolação quadráticas.

3.3.3.4 – Matrizes envolvidas na resolução do MEC para elementos isoparmétricos quadráticos.

Neste trabalho, utilizaram-se os elementos isoparmétricos quadráticos devido à sua melhor aproximação de contornos curvos; dessa forma foi eliminada a possibilidade de ocorrência de cantos agudos ao longo do contorno, ocorrendo portanto a suavização do mesmo, ou seja, $c_i = 0,5$. Com isso, a equação que define a terceira identidade de Green, substituindo-se o valor correspondente a forma do contorno onde está situado o ponto fonte de forma discretizada, torna-se:

$$0,5\phi_i + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v_{ie}^* \phi_e d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \phi_{ie}^* v_e d\Gamma \quad (3.50)$$

Utilizando as aproximações quadráticas e suas funções de interpolação para cada elemento de contorno, tem-se:

$$0,5c_i + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \{N_1\phi_1^e + N_2\phi_2^e + N_3\phi_3^e\} v_{ie}^* d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \{N_1v_1^e + N_2v_2^e + N_3v_3^e\} \phi_{ie}^* d\Gamma \quad (3.51)$$

A contribuição nodal de cada elemento de contorno é esquematizada na **Figura 3.16**.

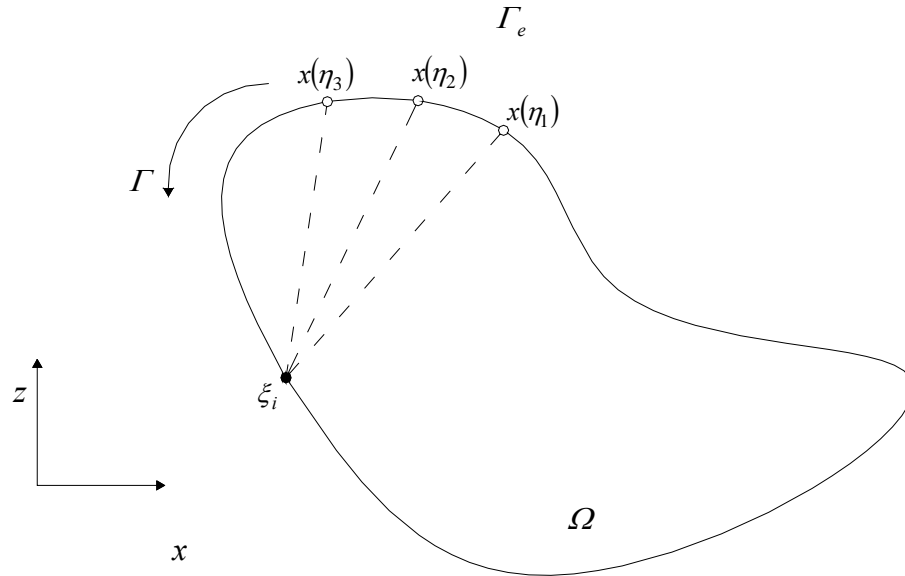


Figura 3.16

Localização do nó fonte e os nós campo de um elemento.

A expressão que resume (3.51) é dada por:

$$0,5\phi_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij}v_j \quad (3.52)$$

onde N é o número total de nós no contorno e j é o índice que corresponde a numeração ordenada de cada nó.

Partindo-se da igualdade:

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + 0,5\delta_{ij} \quad (3.53)$$

onde δ_{ij} representa o Delta de Kroneckek, dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.54)$$

conclui-se que:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} v_j \quad (3.55)$$

Finalmente, a equação matricial do método dos elementos de contorno para elementos é definida por:

$$[H]\underline{\phi} = [G]\underline{v} \quad (3.56)$$

onde $[H]$ e $[G]$ são matrizes cheias não simétricas que acumulam os coeficientes oriundos das contribuições nodais de cada elemento, $\underline{\phi}$ é o vetor que armazena os valores do potencial em cada elemento – incógnitas e condições de contorno – e \underline{v} é o vetor que guarda os valores das velocidades normais ao contorno.

Como os vetores $\underline{\phi}$ e \underline{v} contêm valores conhecidos – as condições de contorno prescritas – e desconhecidos – as incógnitas, ainda se pode chegar a uma expressão mais reduzida:

$$[A]\underline{x} = [R]\underline{r} \quad (3.57)$$

onde $[A]$ é uma matriz cheia e não simétrica que contém os coeficientes que multiplicam as incógnitas, sejam elas o potencial ou a velocidade normal; $[R]$ é a matriz que contém os demais coeficientes que multiplicam as condições de contorno; \underline{x} é o vetor que contém as incógnitas em cada elemento e \underline{r} é o vetor que contém as condições prescritas em todo o contorno.

Como $[R]$ e \underline{r} são conhecidos, o produto entre eles também o é, de modo que:

$$[A]\underline{x} = \underline{f} \quad (3.58)$$

A expressão matricial acima dá origem a um sistema linear de equações, resolvido neste trabalho por um método direto de eliminação de Gauss. Uma vez solucionado, serão conhecidos os potenciais e as velocidades normais em todos elementos de contorno neste dado instante que servirão para a atualização da geometria do contorno correspondente ao próximo tempo discreto, gerando assim, um novo PVC.

3.3.3.5 – Determinação do potencial de velocidades e de velocidades em pontos internos

Tanto o potencial de velocidades ϕ , quanto as velocidades \vec{v} para qualquer ponto interno ao domínio Ω só poderão ser determinados em um dado instante, quando para este mesmo instante já se tenha definido o potencial de velocidades e as velocidades normais para todo o contorno Γ .

As expressões já discretizadas, que definem o potencial de velocidade e a componente de velocidade em uma direção l , são:

$$\phi_l = \sum_{j=1}^N v_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N \phi_j \hat{H}_{ij} \quad (3.59)$$

$$(v_l)_i = \sum_{j=1}^E \int_{\Gamma_j} v_j \frac{\partial \phi^*}{\partial l} d\Gamma - \sum_{j=1}^E \int_{\Gamma_j} \phi_j \frac{\partial v^*}{\partial l} d\Gamma \quad (3.60)$$

As derivadas direcionais envolvidas em (3.60) podem ser substituídas por:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial l} = -\frac{1}{2\pi r} \underline{r} \cdot \underline{l} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial l} = \frac{1}{2\pi r^2} [2(\underline{r} \cdot \underline{n})(\underline{r} \cdot \underline{l}) + (\underline{l} \cdot \underline{n})] \quad (3.62)$$

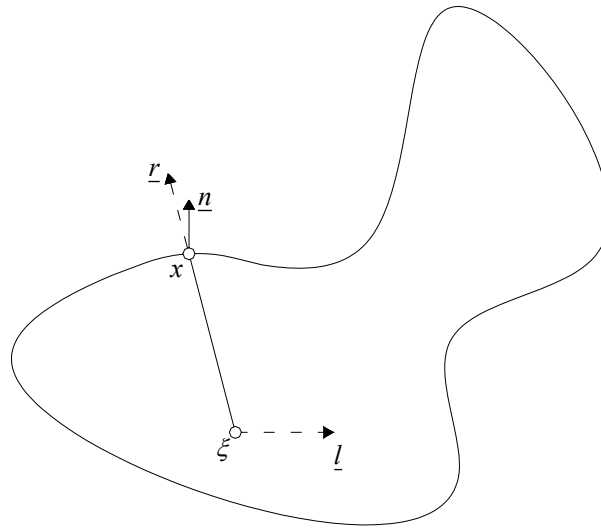


Figura 3.17
Vetores unitários \underline{r} e \underline{l} .

3.3.3.6 – Descontinuidades da velocidade normal

Algumas vezes, em determinado trecho do contorno são verificadas descontinuidades da velocidade normal. Os casos típicos de ocorrência de descontinuidades podem ser visualizados na **Figura 3.18**.

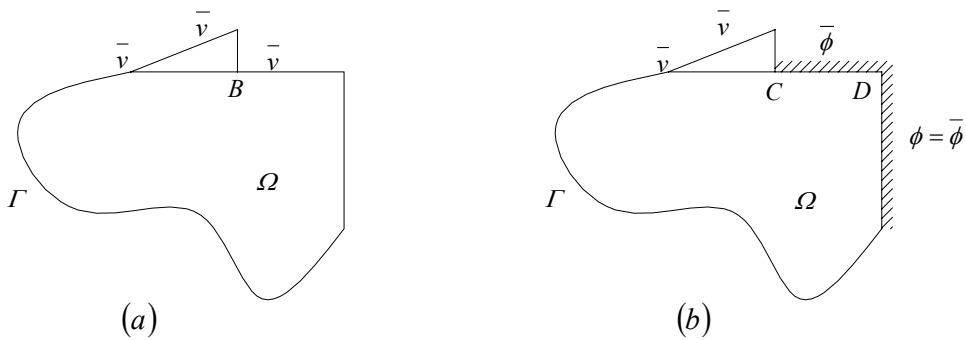


Figura 3.18
Tipos de descontinuidades.

No caso (a) a descontinuidade é devida à condição de contorno natural prescrita no ponto B . O caso (b) apresenta duas descontinuidades, onde a primeira ocorre devido a diferença de condições prescritas do lado esquerdo e direito do ponto C , e a segunda descontinuidade é devida a não suavidade do contorno onde se encontra o ponto D .

O problema da descontinuidade do ponto D é remediado por uma duplicação do nó, ou seja, no lugar onde antes havia um nó pertencente a elementos adjacentes, agora existem dois nós, cada um com sua componente da velocidade normal ao contorno correspondente, como visto na **Figura 3.19**.

As velocidades normais v_e e v_f enfim, são determinadas por:

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{\partial \phi}{\partial n_e} \\ v_f &= \frac{\partial \phi}{\partial n_f} \end{aligned} \tag{3.63}$$

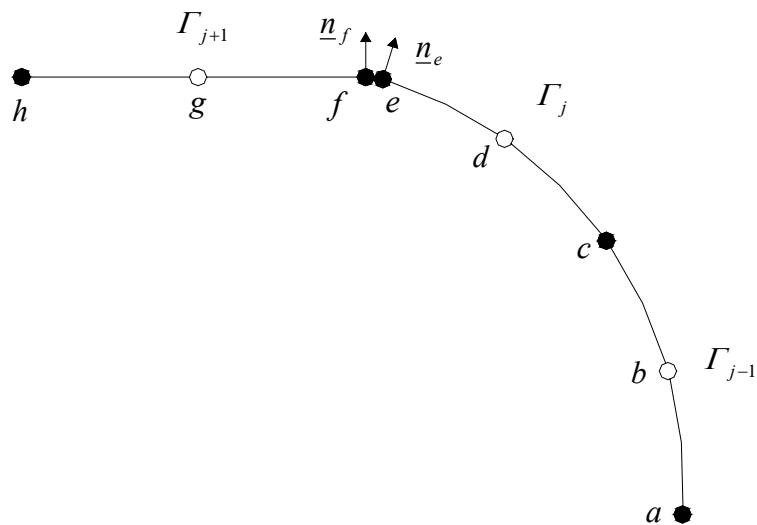


Figura 3. 19

Esquemáticação do nó duplo.

Capítulo 4

Implementação Computacional

4.1 – Introdução

Este capítulo contém a explicação da solução em duas dimensões do Problema de Valor de Contorno Inicial – PVI – , como dito anteriormente, por uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana, desdobrando o PVI original em Problemas de Valor de Contorno – PVC_s –, estes resolvidos pelo Método dos Elementos de Contorno e Problemas de Valor Inicial – PVI – resolvidos para cada nó tratado como uma partícula por um esquema Runge-Kutta de quarta ordem.

A aproximação do PVI por um conjunto de PVC_s discretizados no tempo obtém resultados satisfatórios quando o lapso de tempo entre duas soluções de PVC seguidas assume valor pequeno o suficiente para a minoração dos erros acumulados. Para a obtenção do lapso de tempo ideal, tomaram-se medidas que deviam ser conservadas numa faixa de tolerância ao longo do tempo.

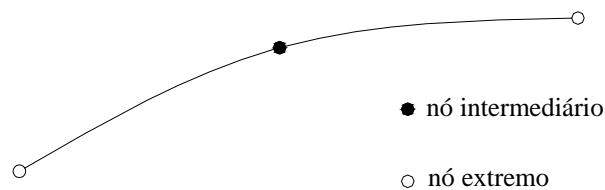


Figura 4. 1

Esquemática dos nós intermediários e extremos.

O Método dos Elementos de Contorno é usado na resolução de cada PVC para cada passo de tempo. É necessária, portanto, a partição do contorno em elementos, cada um definido por três nós – elementos quadráticos. Conforme mostrado na **Figura 4.1**. Os nós que definem a superfície livre comportam-se como partículas independentes umas das outras, ocupando diferentes posições a cada instante.

Por terem movimentos livres, o nó intermediário em dado instante poderá não mais ocupar a região central do elemento, e quando isto acontece deve ser descartado, criando-se um novo nó intermediário localizado na metade do arco com o objetivo de manter o nível de precisão dos resultados em todos os instantes.

Para se conhecer o campo de velocidades em todos os nós é necessária a determinação do vetor unitário normal e tangencial de cada nó; tais vetores dependem tão somente de geometria atual do contorno. A componente tangencial do campo de velocidades na superfície livre é obtida através das condições iniciais, sendo definida pela derivada do potencial na direção tangente. Por sua vez, a componente normal do campo de velocidades é determinada com um maior custo, sendo a solução do PVC delimitado pela superfície livre e os demais contornos.

O potencial é prescrito na superfície livre, onde se procura determinar sua derivada normal. Para o caso do tanque de ondas, as condições de contorno da parede final e superfície do gerador de ondas estão na forma da derivada potencial. O fundo não precisa ser discretizado por ser plano usando-se o método das imagens.

Sendo resolvido o PVC e, por conseguinte, determinadas as componentes das velocidades dos nós da superfície livre, o perfil longitudinal do tanque de ondas em um instante futuro é obtido utilizando-se a formulação Lagrangeana. Uma vez obtido tal perfil, o potencial na superfície livre é atualizado usando-se a equação de Bernoulli juntamente com os valores das derivadas potenciais no restante dos trechos que delimitam o contorno. O esquema Runge-Kutta de quarta ordem foi utilizado na resolução dos PVI_s resultantes da atualização da posição dos nós e seus potenciais.

O novo perfil agora é considerado como configuração inicial para o próximo lapso de tempo, dando seguimento à seqüência que terá seu fim no instante de tempo preestabelecido, servindo para simular a propagação da onda gerada.

A seqüência pode ser resumida da seguinte forma:

- Desmembrar o P_{VCI} em um conjunto de P_{VC_s} ao longo do tempo.
- Determinar o vetor unitário normal e tangencial dos nós pertencentes à superfície livre.
- Determinar as componentes das velocidades nos nós da superfície nas direções tangentes a esta superfície através da derivada potencial na direção tangente.
- Resolver o P_{VC} para encontrar as componentes das velocidades nas direções normais à superfície livre.
- Atualizar a posição dos nós na superfície livre utilizando-se os campos de velocidades previamente calculados e um esquema Runge-Kutta de quarta ordem para solucionar os P_{V_{I_s}} de cada nó.
- Redefinir a posição dos nós na parede do gerador de ondas.
- Obter o potencial dos nós da superfície livre através da fórmula de Bernoulli e as derivadas materiais do potencial.
- Alcançar o novo perfil com suas condições de contorno atualizadas para serem usadas como informações iniciais para o próximo lapso de tempo, e assim sucessivamente.

4.2 – Geometria dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno substitui a aproximação do contorno original por elementos. Neste trabalho, foram utilizados elementos isoparamétricos quadráticos, que são definidos por três nós ao longo de seu comprimento.

Na junção da superfície livre com a parede do batedor e com a parede final do tanque de ondas foram adotados os nós duplos, que possuem as mesmas coordenadas, mesmo potencial, porém componentes de velocidades normais ao contorno distintas.

Para um elemento quadrático, as coordenadas de qualquer ponto em seu interior podem ser interpoladas em função de uma coordenada adimensional η :

$$x(\eta) = x_2 + 0,5(x_3 - x_1)\eta + 0,5(x_1 - 2x_2 + x_3)\eta^2 \quad (4.1)$$

$$z(\eta) = z_2 + 0,5(z_3 - z_1)\eta + 0,5(z_1 - 2z_2 + z_3)\eta^2 \quad (4.2)$$

Estas equações são oriundas de:

$$x(\eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\eta)x_i \quad (4.3)$$

$$z(\eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\eta)z_i \quad (4.4)$$

As funções de interpolação Lagrangeana $N_i(\eta)$ têm os valores nodais conforme a **tabela 4.1** e são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,5\eta^2 - 0,5\eta \\ N_2 &= 1 - \eta^2 \\ N_3 &= 0,5\eta^2 + 0,5\eta \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nó	η	N_1	N_2	N_3
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

Tabela 4. 1

Quando calculados os coeficientes de influência, estes são definidos pela distância euclidiana $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}$, onde (x, z) e (x_s, z_s) são as coordenadas dos pontos campo e fonte respectivamente.

Sendo assim, tem-se um novo modo de se escrever $\Delta x = x - x_s$ e $\Delta z = z - z_s$, que se trata da definição das coordenadas dos pontos fonte em termos da função de interpolação do elemento do campo atual:

$$x_s = \sum_{i=1}^3 N_i x_s \quad (4.6)$$

$$z_s = \sum_{i=1}^3 N_i z_s \quad (4.7)$$

logo:

$$\Delta x = N_1(x_1 - x_s) + N_2(x_2 - x_s) + N_3(x_3 - x_s) \quad (4.8)$$

$$\Delta z = N_1(z_1 - z_s) + N_2(z_2 - z_s) + N_3(z_3 - z_s) \quad (4.9)$$

Isto implica na identidade $\sum_{i=1}^3 N_i = 1$ que por sua vez, determina que o somatório das

derivadas das funções de interpolação na direção de η é nulo:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = 0 \quad (4.10)$$

4.2.1 – Jacobiano, Comprimento de Arco e Vetores Unitários Normal e Tangencial.

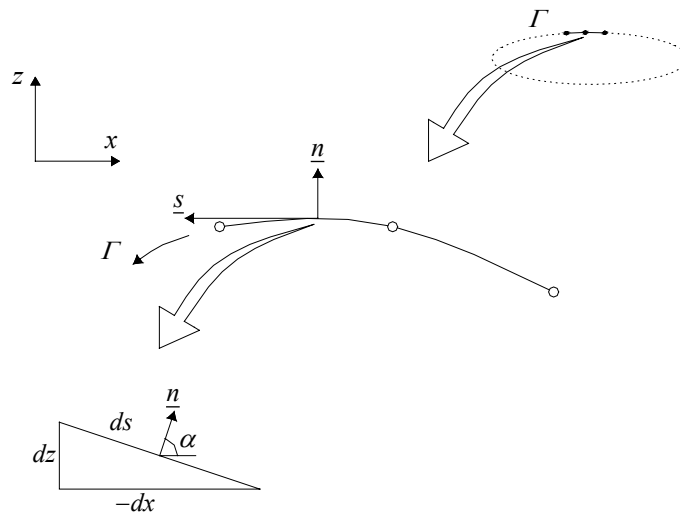


Figura 4. 2

Cossenos diretores.

Antes de qualquer coisa, para a determinação do Jacobiano de um elemento quadrático deve-se com antecedência conhecer os cossenos diretores dos pontos que compõem o mesmo:

$$\cos \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (4.11)$$

$$\sin \alpha = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad (4.12)$$

sendo α o ângulo formado entre o vetor normal e o eixo x conforme mostrado em **Figura 4.2**.

O Jacobiano que transforma as coordenadas nodais dos elementos é dado por:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} \quad (4.13)$$

Dessa forma o comprimento de arco infinitesimal é definido por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} \quad (4.14)$$

Ou:

$$ds = |J|d\eta \quad (4.15)$$

Normalmente as integrações são efetuadas sobre os elementos com suas coordenadas naturais η e os pontos de Gauss com os seus respectivos pesos; dessa forma, é forçosa a alteração das coordenadas que originalmente eram feitas sobre o contorno Γ , e que agora serão função de η .

$$\int_{\Gamma_j} F(\underline{x})d\Gamma = \int_{-1}^1 F(\underline{x}(\eta))|J(\eta)|d\eta \quad (4.16)$$

sendo \underline{x} um ponto qualquer do elemento.

A determinação dos cossenos diretores se faz possível agora, utilizando-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (4.18)$$

onde $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ são as derivadas de (4.1) e (4.2) em função de η .

Já os vetores unitários, normal e tangencial, são por definição iguais a:

$$\underline{n} = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha) = \left(\frac{\partial z}{\partial s}, -\frac{\partial x}{\partial s} \right) \quad (4.19)$$

$$\underline{s} = (-\operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (4.20)$$

4.3 – Medidas de Conservação

A fim de se avaliar a acurácia das respostas obtidas pelo modelo, foram implementadas algumas medidas que deveriam ser conservadas ao longo de toda a simulação da propagação da onda em um tanque de ondas.

4.3.1 – Conservação do Fluxo

O teorema de fluxo de Gauss diz que o fluxo total que passa através de um contorno fechado a cada instante é anulado quando se obtém a solução exata do PVC; dessa forma, o fluxo total é definido como:

$$\oint_{\Gamma} \rho \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (4.21)$$

Como a massa específica do fluido é a mesma no decorrer da propagação em todo o domínio, tem-se a fórmula adimensionalizada do fluxo total:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (4.22)$$

4.3.2 – Conservação do Nível Médio

Para se ter a equação de Laplace como a equação governante do movimento supôs-se, dentre outras coisas, que a água se tratava de um fluido perfeito, portanto, incompressível. Dessa forma, o nível médio da lâmina d'água é dado por:

$$z_s = \frac{1}{L} \int_0^L \zeta \, dx \quad (4.23)$$

onde $\zeta = z_s - d$ é a elevação da superfície livre e L é o comprimento do canal.

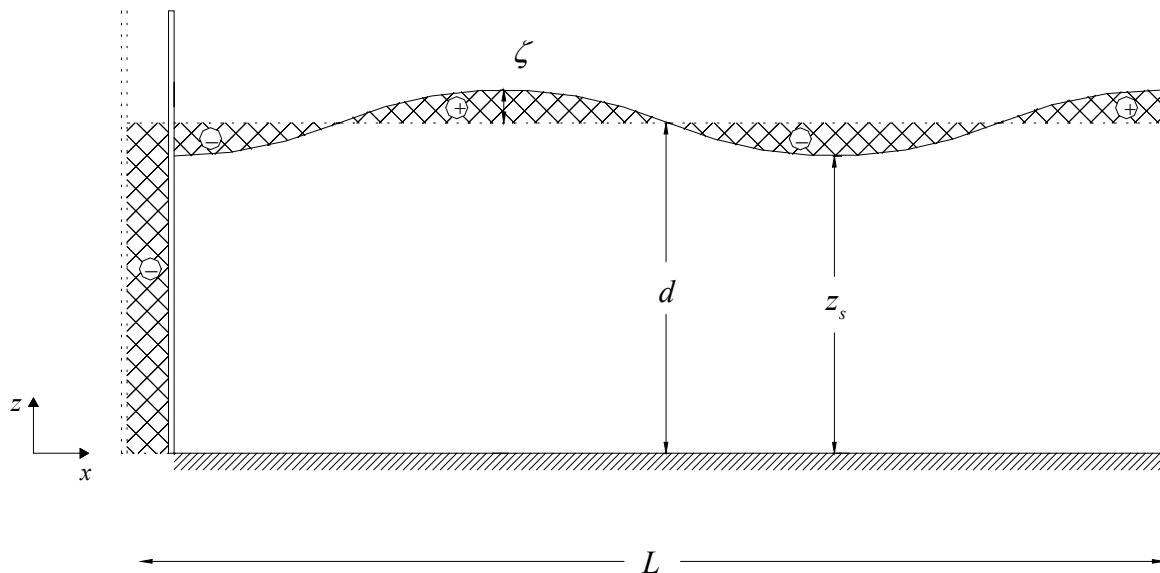


Figura 4.3

Nível médio.

O somatório das áreas compreendidas entre o nível médio inicial e a superfície livre e a área ocupada pelo movimento do batedor deve se manter nulo ao longo de toda a propagação.

4.3.3 – Conservação da Energia Total

Por fim, a última medida de conservação utilizada no modelo foi a conservação da energia total, dada pela soma da energia potencial com a energia cinética. A energia total deve-se manter constante sempre que não existir a ação de pressões em parte do contorno. Neste trabalho, coube somente ao batedor de ondas fornecer energia à massa fluida.

Os desenvolvimentos das fórmulas das energias potencial e cinética a partir de uma coluna infinitesimal d'água e de um volume elementar respectivamente foram mostrados em AZEVEDO [3] e JAIME [14].

4.3.3.1 – Energia Potencial

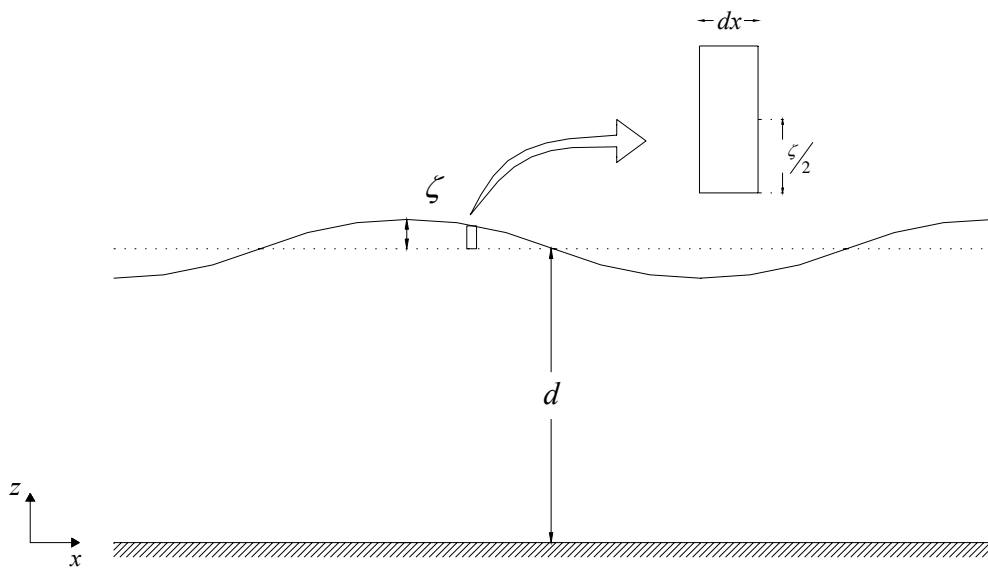


Figura 4. 4
Energia potencial.

Partindo-se de uma coluna infinitesimal d'água com altura igual a ζ , cuja massa por unidade de largura é dada por:

$$dm = \rho \zeta dx \quad (4.24)$$

a energia potencial desta coluna infinitesimal é dada por:

$$dE_p = g \frac{\zeta}{2} dm = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 dx \quad (4.25)$$

Sendo assim, integrando-se (4.25) ao longo de x , tem-se a equação que fornece a energia potencial em todo o canal:

$$E_p = \frac{\rho g}{2} \int_0^L \zeta^2 dx \quad (4.26)$$

onde L é o comprimento do canal.

4.3.3.2 – Energia Cinética

Seja um volume elementar de largura unitária e com massa definida por:

$$dm = \rho dx dz \quad (4.27)$$

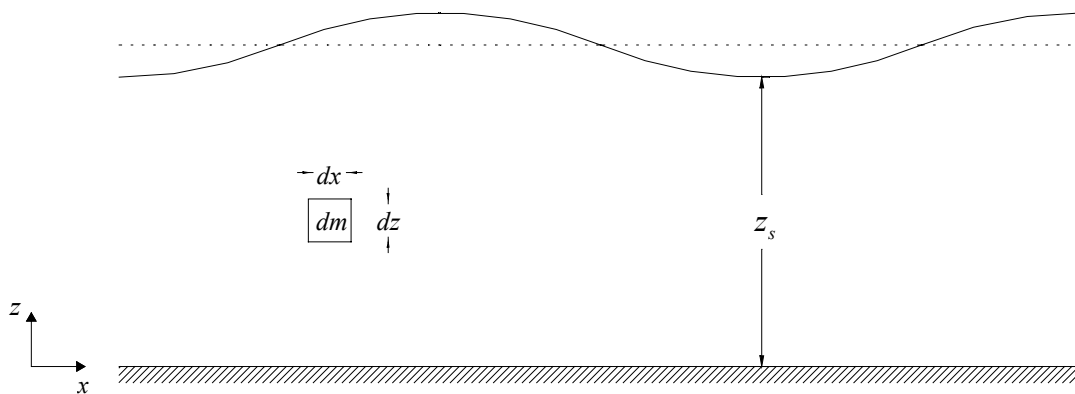


Figura 4. 5
Energia cinética.

A energia cinética deste volume elementar é dada por:

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho dx dz V^2 \quad (4.28)$$

Integrando-se (4.28) em todo o domínio tem-se a equação que define a energia cinética para todo o canal:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega \quad (4.29)$$

4.4 – Campo de Velocidades

O campo de velocidades pode ser decomposto nas suas componentes normal ao contorno e tangente ao contorno. Como dito anteriormente, uma vez conhecidas a geometria da superfície livre e o potencial em cada partícula – nó – a componente tangencial é obtida pela derivada tangencial do potencial enquanto a componente normal só será conhecida após a resolução do PVC. Acontecerá o inverso para os nós do batedor e da parede final do canal: a velocidade normal é condição de contorno prescrita, o potencial será determinado após a resolução do PVC, e assim como na superfície livre, a componente tangencial da velocidade será obtida derivando-se o potencial na direção tangente.

4.4.1 – Componente da Velocidade na Direção Normal ao Contorno

A **Figura 4.6** mostra a discretização de um trecho da superfície livre bidimensional perturbada num tanque de ondas em um dado instante, onde o eixo x coincide com o fundo e a condição de simetria foi utilizada a fim de se evitar a discretização do fundo do canal, ganhando-se dessa forma uma resposta mais rápida dada pelo modelo, pois uma vez não sendo necessária a discretização do fundo do canal, o sistema final a ser resolvido contará com menos incógnitas a serem determinadas.

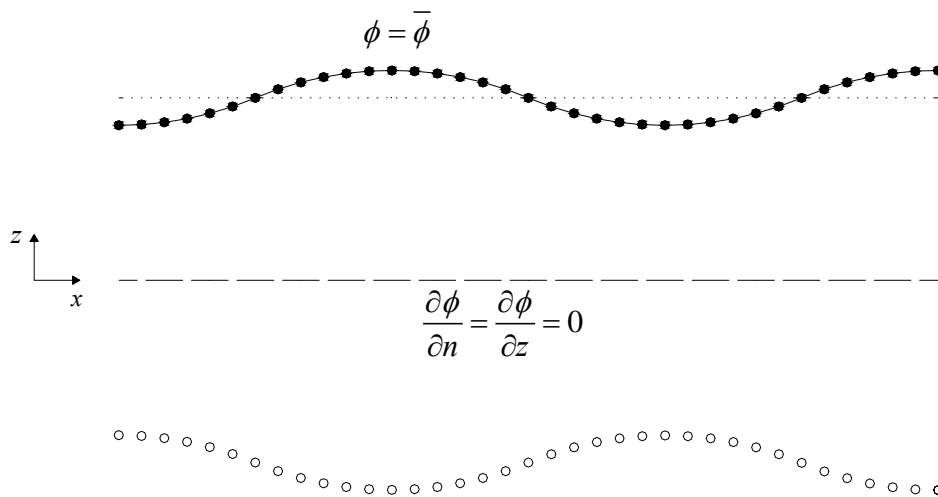


Figura 4. 6

Método das imagens.

4.4.1.1 – Componente da Velocidade na Direção Normal à Superfície Livre

A todo instante serão atualizadas a geometria da superfície livre e as condições de contorno dos nós que a compõe. A velocidade normal, como dito outras vezes, será determinada resolvendo-se o problema de valor de contorno.

As velocidades normais dos nós extremos da superfície livre não serão necessariamente iguais, os nós duplos possuirão velocidades normais distintas, contudo, o vetor velocidade tem que ser o mesmo – mesmo módulo, direção e sentido. Os nós duplos se fazem necessários devido à diferença de tipo de condição de contorno vigentes na superfície livre e no batedor, assim como na superfície livre e na parede final do canal.

Na **Figura 4.7**, os nós que definem a geometria do batedor e da parede final são representados por a e A , respectivamente. Os nós duplos têm obrigatoriamente o mesmo potencial e ocupam as mesmas coordenadas. Os nós b e B representam o primeiro nó do batedor e o último nó da parede final do canal, respectivamente, enquanto c e C são nós situados nos extremos da superfície livre; os nós representados por D correspondem aos demais nós da superfície livre.

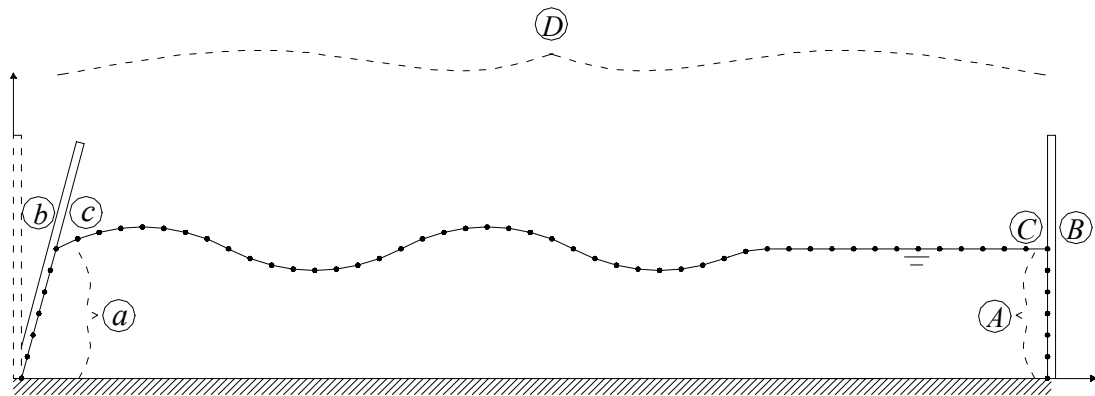


Figura 4. 7
Discretização do contorno.

4.4.1.2 – Componente da Velocidade na direção Normal ao Batedor

A componente da velocidade na direção normal ao batedor de cada nó do batedor é fornecida como condição de contorno prescrita e se altera durante o tempo em que o batedor estiver em funcionamento; dependendo do tipo de batedor, a velocidade normal varia, também, em função da altura em que o nó se encontra.

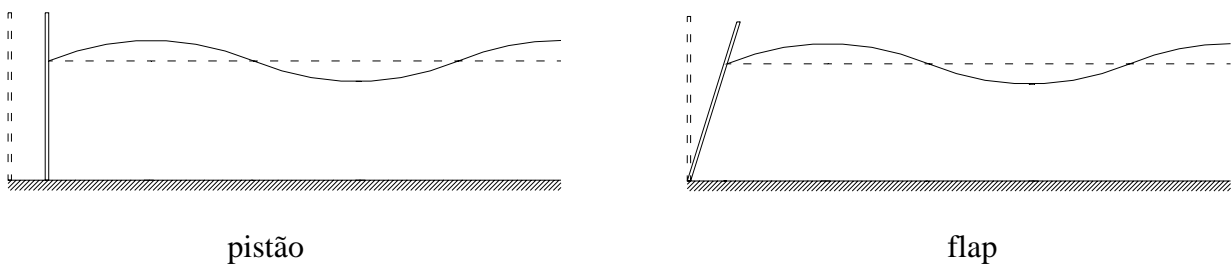


Figura 4. 8
Tipos de batedor.

Neste trabalho foram adotados dois tipos de batedor, pistão e flap, como mostrado na **Figura 4.8.**

Os batedores utilizados neste trabalho – ambos os tipos – partiram do repouso com uma aceleração constante atingindo a velocidade máxima na metade do tempo de funcionamento, percorrendo a metade de seu deslocamento. A partir deste instante, os batedores passaram a desacelerar até retornarem ao repouso quando enfim alcançaram o ponto de deslocamento máximo. As equações que regem o movimento dos batedores são equações do movimento uniformemente variado.

$$x = x_0 + v_0 \Delta t \pm \frac{a \Delta t^2}{2} \quad (4.30)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 \pm a \Delta t \quad (4.31)$$

onde $\Delta t = t_f - t_0$.

Devido aos pequenos deslocamentos na direção x , pode-se dizer que a componente da velocidade nesta direção é aproximadamente igual à componente da velocidade na direção normal ao batedor – condição de contorno do batedor:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cong \frac{\partial \phi}{\partial n} = v \quad (4.32)$$

Alguns valores destas equações são previamente conhecidos em dados instantes:

$$t_0 = 0 \text{ e } t_f = \frac{T}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{S}{2} \\ v = v_{\max} = \frac{2S}{T} \end{cases} \quad t_0 = \frac{T}{2} \text{ e } t_f = T \rightarrow \begin{cases} x = S \\ v = 0 \end{cases}$$

onde T é o tempo que o batedor pára de funcionar e S é o deslocamento máximo positivo do batedor.

O batedor se deslocará a partir do instante inicial até $\frac{1}{2} T$ com aceleração constante, momento em que atingirá sua velocidade máxima. Deste momento em diante o batedor será desacelerado até parar de funcionar no tempo T .

O módulo das acelerações é dado por:

$$a = \frac{4S}{T^2} \quad (4.33)$$

Substituindo-se (4.33) em (4.30) e (4.31), têm-se:

- Para $0 \leq t \leq T/2$

$$x = \frac{2S}{T^2} t^2 \quad (4.34)$$

$$v = \frac{4S}{T^2} t \quad (4.35)$$

- Para $T/2 \leq t \leq T$

$$x = \frac{S}{2} + \frac{2S}{T} t - \frac{4S}{T^2} t^2 \quad (4.36)$$

$$v = \frac{2S}{T} - \frac{4S}{T^2} t \quad (4.37)$$

No caso do batedor ser do tipo flap, as equações acima ainda serão multiplicadas por um fator que é a relação entre coordenada z do nó e a profundidade do canal, ou seja, tanto o valor da coordenada x , quanto o valor da velocidade normal de cada nó, serão função, além do tempo e do deslocamento máximo, desta relação.

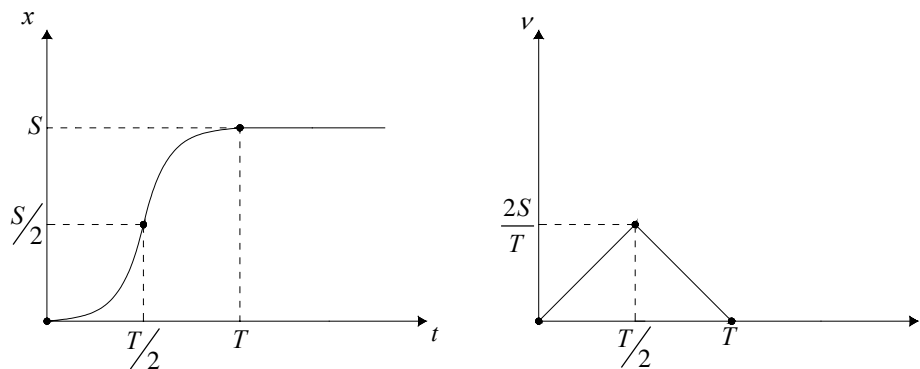


Figura 4. 9

Posição e velocidade em função do tempo.

Sendo flap o tipo do batedor, têm-se:

- Para $0 \leq t \leq T/2$

$$x = \left(\frac{2S}{T^2} t^2 \right) \frac{z}{h} \quad (4.38)$$

$$v = \left(\frac{4S}{T^2} t \right) \frac{z}{h} \quad (4.39)$$

- Para $T/2 \leq t \leq T$

$$x = \left(\frac{S}{2} + \frac{2S}{T} t - \frac{4S}{T^2} t^2 \right) \frac{z}{h} \quad (4.40)$$

$$v = \left(\frac{2S}{T} - \frac{4S}{T^2} t \right) \frac{z}{h} \quad (4.41)$$

sendo h a profundidade do canal.

Quando passados T segundos, o batedor, seja ele do tipo flap ou pistão, retornará ao repouso, sua velocidade normal a partir deste instante será nula e ele se manterá com a mesma coordenada x no batedor do tipo pistão, enquanto que no batedor de tipo flap as coordenadas x ainda sofrerão pequenas alterações nos seus valores por também serem função da relação entre a coordenada z do nó e a profundidade do canal, como dito anteriormente.

- Batedor tipo pistão para $t > T$

$$x = x(T) = cte \quad (4.42)$$

$$v = 0 \quad (4.43)$$

- Batedor do tipo flap para $t > T$

$$x = x(T) \frac{z}{h} \quad (4.44)$$

$$v = 0 \quad (4.45)$$

4.4.1.3 – Componente da Velocidade na Direção Normal a Parede Final

A condição de contorno na parede final do canal é idêntica à condição de contorno do fundo do canal se fosse necessária a sua discretização. A velocidade normal na parede final será sempre nula, impossibilitando a passagem da onda por ela resultando assim em uma reflexão.

4.4.2 – Sistema de Equações

Uma vez conhecidas a condição de contorno inicial e as coordenadas de todos os nós que compõem o contorno, o sistema de equações pode ser escrito da forma matricial:

$$[H]\{\phi\} = [G]\{v\} \quad (4.46)$$

onde $[H]$ e $[G]$ são matrizes dos coeficientes de influência, $\{\phi\}$ é o vetor com os valores nodais do potencial de velocidades e $\{v\}$ é o vetor com os valores nodais componentes da velocidade na direção normal ao contorno – $v = \frac{\partial \phi}{\partial n}$.

As matrizes de influência podem ser reescritas em termo de sub-matrizes levando-se em consideração o grupo de nós:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{AA} & H_{AB} & H_{AC} & H_{AD} & H_{Ac} & H_{Ab} & H_{Aa} \\ H_{BA} & H_{BB} & H_{BC} & H_{BD} & H_{Bc} & H_{Bb} & H_{Ba} \\ H_{CA} & H_{CB} & H_{CC} & H_{CD} & H_{Cc} & H_{Cb} & H_{Ca} \\ H_{DA} & H_{DB} & H_{DC} & H_{DD} & H_{Dc} & H_{Db} & H_{Da} \\ H_{cA} & H_{cB} & H_{cC} & H_{cD} & H_{cc} & H_{cb} & H_{ca} \\ H_{bA} & H_{bB} & H_{bC} & H_{bD} & H_{bc} & H_{bb} & H_{ba} \\ H_{aA} & H_{aB} & H_{aC} & H_{aD} & H_{ac} & H_{ab} & H_{aa} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

e

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{AA} & G_{AB} & G_{AC} & G_{AD} & G_{Ac} & G_{Ab} & G_{Aa} \\ G_{BA} & G_{BB} & G_{BC} & G_{BD} & G_{Bc} & G_{Bb} & G_{Ba} \\ G_{CA} & G_{CB} & G_{CC} & G_{CD} & G_{Cc} & G_{Cb} & G_{Ca} \\ G_{DA} & G_{DB} & G_{DC} & G_{DD} & G_{Dc} & G_{Db} & G_{Da} \\ G_{cA} & G_{cB} & G_{cC} & G_{cD} & G_{cc} & G_{cb} & G_{ca} \\ G_{bA} & G_{bB} & G_{bC} & G_{bD} & G_{bc} & G_{bb} & G_{ba} \\ G_{aA} & G_{aB} & G_{aC} & G_{aD} & G_{ac} & G_{ab} & G_{aa} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Já os vetores que possuem as variáveis nodais estão definidos por:

$$\{\phi\} = [\phi_A \ \phi_B \ \phi_C \ \phi_D \ \phi_c \ \phi_b \ \phi_a]^T \quad (4.49)$$

e

$$\{v\} = [v_A \ v_B \ v_C \ v_D \ v_c \ v_b \ v_a]^T \quad (4.50)$$

Para o canal de ondas, prescreve-se o potencial para todos os nós que pertencem à superfície livre – nós D – como também para seus nós extremos – nós c e C –; a velocidade normal é então prescrita para os nós do batedor e da parede final – nós a e A , respectivamente – incluindo os nós que formam os b e B .

- Superfície livre

$$\begin{cases} \phi = \bar{\phi}_c \\ \phi = \bar{\phi}_C \\ \phi = \bar{\phi}_D \end{cases}$$

- Batedor e parede final

$$\begin{cases} v = \bar{v}_a \\ v = \bar{v}_A \\ v = \bar{v}_b \\ v = \bar{v}_B \end{cases}$$

Informadas todas as condições de contorno, (4.46) pode ser reescrita como:

$$[H]\{\tilde{\phi}\} - [G]\{v\} = \{b\} \quad (4.51)$$

sendo $\{b\} = [\overline{H}] \{\overline{\phi}\}$ que contém a contribuição do potencial prescrito na superfície livre.

As novas matrizes e novos vetores, agora, são:

$$[\overline{H}] = [H_A \ H_B \ H_b \ H_a] = \begin{bmatrix} H_{AA} & H_{AB} & H_{Ab} & H_{Aa} \\ H_{BA} & H_{BB} & H_{Bb} & H_{Ba} \\ H_{CA} & H_{CB} & H_{Cb} & H_{Ca} \\ H_{DA} & H_{DB} & H_{Db} & H_{Da} \\ H_{cA} & H_{cB} & H_{cb} & H_{ca} \\ H_{bA} & H_{bB} & H_{bb} & H_{ba} \\ H_{aA} & H_{aB} & H_{ab} & H_{aa} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$[\overline{H}] = -[H_C \ H_D \ H_c] = - \begin{bmatrix} H_{AC} & H_{AD} & H_{Ac} \\ H_{BC} & H_{BD} & H_{Bc} \\ H_{CC} & H_{CD} & H_{Cc} \\ H_{DC} & H_{DD} & H_{Dc} \\ H_{cC} & H_{cD} & H_{cc} \\ H_{bC} & H_{bD} & H_{bc} \\ H_{aC} & H_{aD} & H_{ac} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\{\tilde{\phi}\} = [\phi_A \ \phi_B \ \phi_b \ \phi_a]^T \quad (4.54)$$

$$\{\overline{\phi}\} = [\phi_C \ \phi_D \ \phi_c]^T \quad (4.55)$$

Fazendo as devidas substituições (4.51) pode ser resumida a:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (4.56)$$

onde $[A]$ é uma matriz cheia dada por:

$$[A] = [(H_a + H_A)(H_b + H_B) - (G_c + G_C) - (G_D)(H_c)(G_B - G_b)(G_A - G_a)] \quad (4.57)$$

e $\{x\}$ é o vetor de incógnitas:

$$\{x\} = [\phi_A \ \phi_B \ v_C \ v_D \ \phi_c \ v_b \ v_a]^T \quad (4.58)$$

Uma vez resolvida a equação (4.56) têm-se o potencial e a componente da velocidade na direção normal para todos os nós do contorno. A componente da velocidade na direção normal na superfície livre será utilizada para a atualização de sua geometria e os potenciais calculados para os nós b e B devem ser iguais aos potenciais prescritos em c e C , respectivamente; uma diferença entre eles serve então como indicador de qualidade da solução do problema de valor de contorno.

4.4.3 – Componente da Velocidade na Direção Tangencial ao Contorno

A derivada do potencial em relação à coordenada natural η para elementos isoparamétricos é

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0,5(\phi_3 - \phi_1) + (\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)\eta \quad (4.59)$$

A derivada tangencial do potencial de velocidade em função do comprimento de arco nada mais é que a velocidade tangencial que pode ser relacionada com a equação (4.59) pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (4.60)$$

onde $|J| = \frac{\partial s}{\partial \eta}$ o Jacobiano da transformação de coordenadas dado pela equação (4.13).

4.5 – Avanço Temporal

A propagação de ondas em canais é um problema de valor de contorno inicial – PVI – que pode ser resolvido desmembrando-se este problema em um conjunto de PVI_s, onde cada um deles fornece os dados necessários para a atualização da geometria, bem como de suas condições de contorno.

Dada a geometria inicial da superfície livre e sua condição de contorno, a configuração atualizada para um novo instante é obtida considerando-se os nós da superfície livre como partículas – descrição Lagrangeana.

Os nós se deslocam em função das velocidades resultantes em cada nó – partícula. As componentes da velocidade nas direções x e z em cada nó da superfície livre são calculadas usando os vetores normal e tangencial, mostrados na **Figura 4.10**.

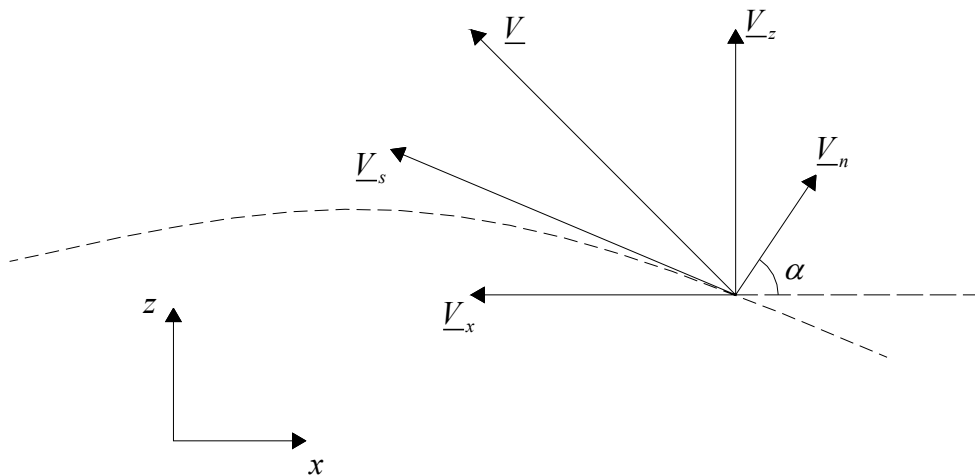


Figura 4.10

Componentes do vetor velocidade.

$$\begin{cases} v_x = v_n \cos \alpha - v_s \sin \alpha \\ v_z = v_n \sin \alpha + v_s \cos \alpha \end{cases} \quad (4.61)$$

As atualizações das posições das coordenadas x e z e das velocidades normais do batedor e da parede final do canal são obtidas de forma diferente. Na nova configuração, as coordenadas z para os nós pertencentes ao batedor, seja qual for seu tipo, e da parede final são definidas bastando redividir de maneira proporcional a porção do batedor e/ou parede final que esteja submersa, e como dito anteriormente, a coordenada x e a componente da velocidade na direção normal ao batedor do tipo pistão são definidas por equações que independem da profundidade, enquanto o batedor do tipo flap, além do tempo de funcionamento e deslocamento máximo, as equações que atualizam a coordenada x e a velocidade normal são função da relação entre a coordenada z de cada nó e da profundidade do canal $-z/h$.

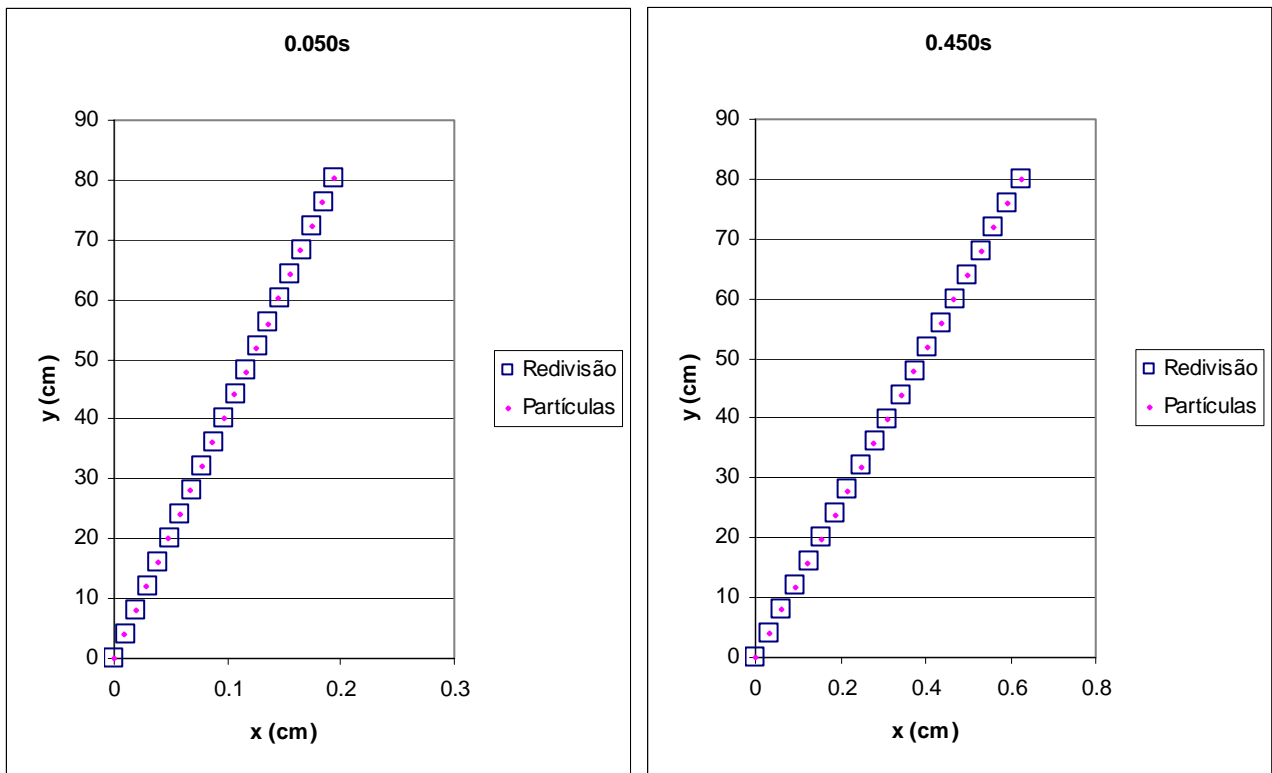


Figura 4. 11

Posição dos nós do batedor.

Apenas por curiosidade obtiveram-se atualizações da geometria do batedor tratando os nós que o compõem de maneira idêntica aos nós da superfície livre – partículas. Comparando-os com os resultados obtidos atualizando-se os nós como partículas e os resultados obtidos da redivisão da porção do batedor que se encontra submersa, constatou-se uma mínima diferença na altura dos mesmos nós quando são tratados de

formas diferentes, como se pode verificar na **Figura 4.11**. Isto se deve ao fato das perturbações serem de pequenas amplitudes.

O potencial na superfície livre é atualizado entre passos de tempo discretos consecutivos usando os nós de elementos de contorno que se movimentam como partículas – descrição Lagrangeana do movimento. As derivadas do potencial para cada nó são, portanto, derivadas materiais e são obtidas reescrevendo-se a equação de Bernoulli:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(v_s^2 + v_n^2) + (h - z) \quad (4.62)$$

onde v_s e v_n representam a componente da velocidade na direção tangente e normal respectivamente, h é a profundidade do canal e z é a coordenada vertical da superfície livre medida a partir do fundo. Como a aceleração gravitacional g e a pressão atmosférica p foram negligenciadas por se manterem constantes ao longo da propagação.

A **Figura 4.12** mostra a atualização da superfície livre partindo da posição inicial z_0 no instante inicial t_0 para a nova posição $z_{0+\Delta t}$ no instante $t_0 + \Delta t$ fazendo uso do campo de velocidades previamente calculado.

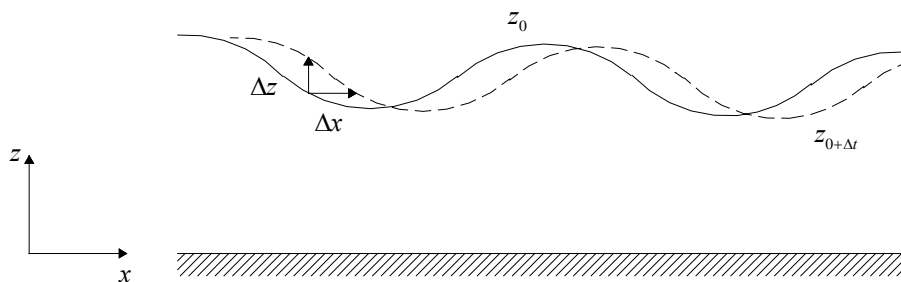


Figura 4. 12
Avanço temporal.

Neste trabalho, assim como em AZEVEDO [3] e JAIME [14], foi utilizado um esquema Runge-Kutta de quarta ordem para o avanço temporal.

Capítulo 5

Aplicações e Resultados

5.1 – Exemplo 1

O canal de ondas numérico no que foram simuladas as gerações e propagações das ondas possui 80 cm de profundidade e 800 cm de comprimento. Estas medidas foram mantidas com o intuito de serem obtidos bons níveis de precisão nos resultados oriundos do Método dos Elementos de Contorno, uma vez que para contornos muito delgados podem ocorrer singularidades quando as distâncias r_1 e r_2 , medidas entre o nó fonte e os nós campo vizinhos, são aproximadamente as mesmas, como mostrado na **Figura 5.1**.

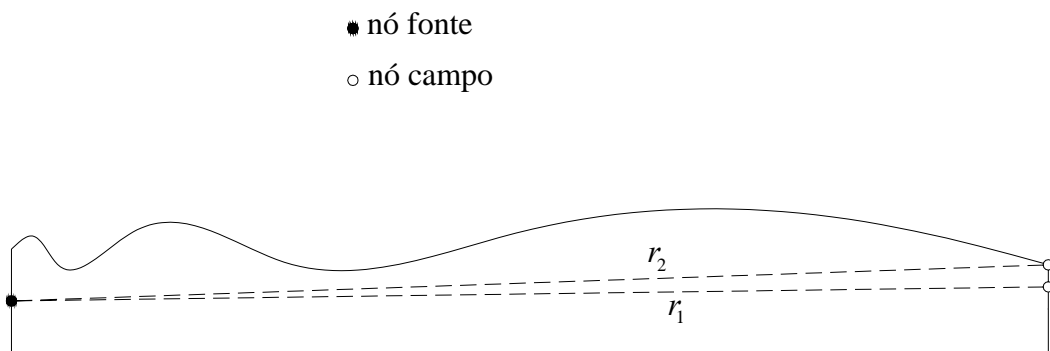


Figura 5. 1

Representação esquemática da região líquida dentro de um canal.

Nos gráficos mostrados a seguir os separadores das casas decimais são pontos; no restante do texto os separadores são vírgulas. Tanto os valores em X quanto em Y estão em centímetros.

No primeiro exemplo, a onda foi gerada a partir de um batedor tipo flap, ao qual foi aplicado um deslocamento máximo de 0,625 cm a partir do repouso, com uma aceleração constante até se atingir uma velocidade máxima em 0,125 s. A partir deste instante o batedor é levado novamente ao repouso com uma desaceleração de mesma

intensidade que a aceleração anterior durante 0,125 s. A propagação se deu ao longo de 1200 passos iguais $\Delta t = 0,005 s$ partindo do instante inicial $t = 0 s$ até $t = 6 s$.

A **Figura 5.2** mostra a perturbação da superfície livre desde o instante inicial até o momento em que o batedor alcança o ponto de máximo deslocamento onde retorna ao repouso.

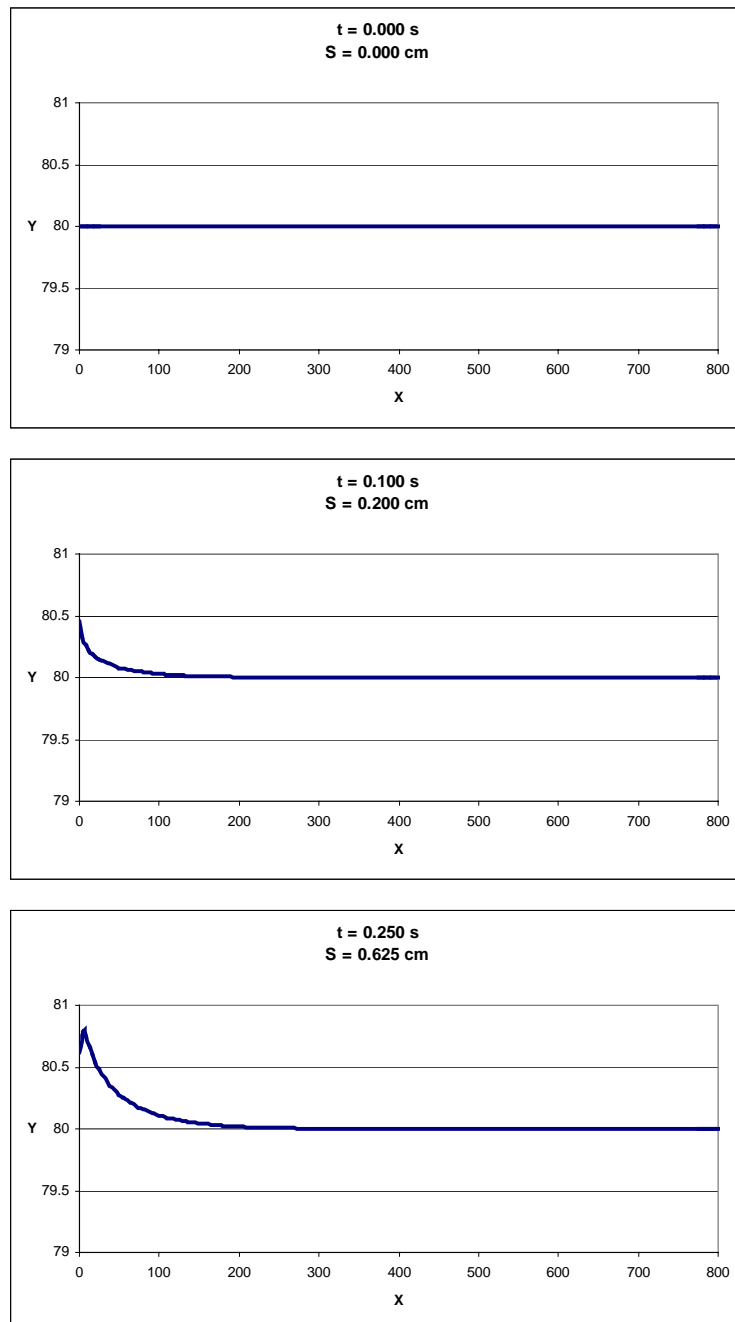


Figura 5. 2

Perfis da superfície livre do Exemplo 1 para os instantes 0 s; 0,100 s e 0,250 s.

A **Figura 5.3** mostra o trem de ondas gerado pelo batedor até instantes antes da reflexão na parede final do canal.

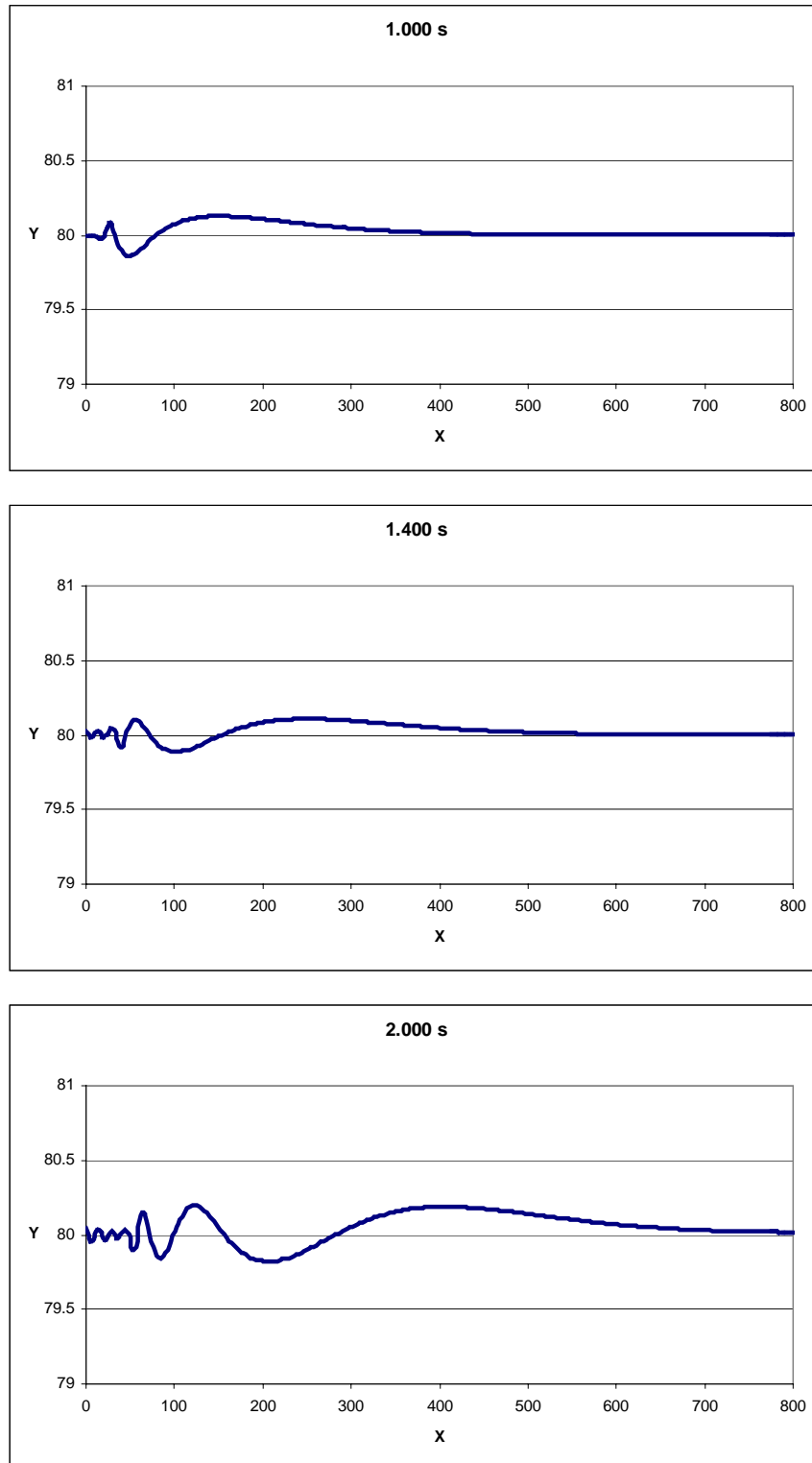


Figura 5.3

Perfis da superfície livre do Exemplo 1 para os instantes 1,000 s; 1,400 s e 2,000 s.

Nas **Figuras 5.4 e 5.5** pode-se perceber a elevação da superfície livre acima do nível médio ($Y=80$) ocasionada pela reflexão do trem de ondas, desde o instante em que ocorre a reflexão da primeira onda até o instante final da simulação da propagação.

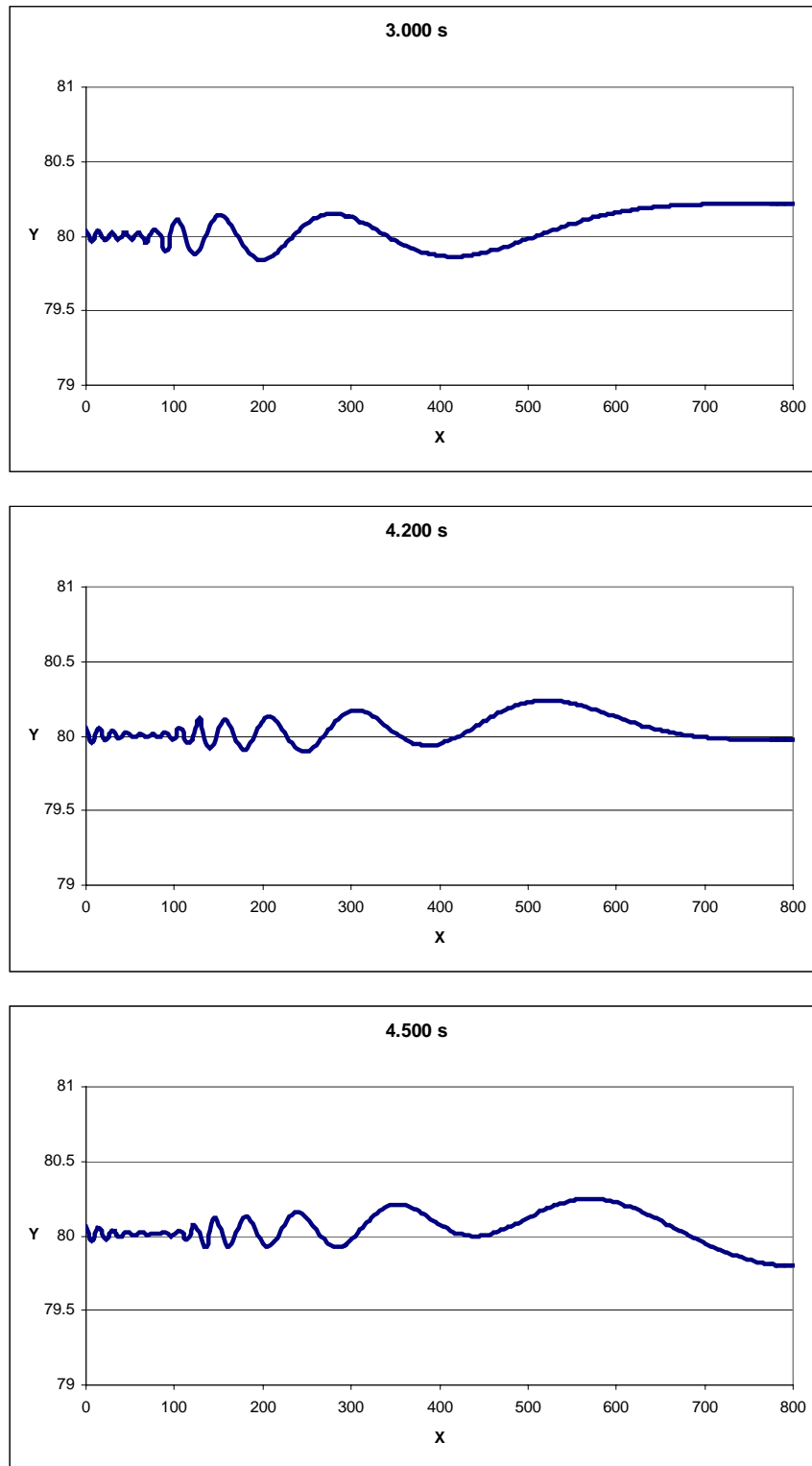


Figura 5. 4

Perfis da superfície livre do Exemplo 1 nos instantes 3,000 s; 4,200 s e 4,500 s.

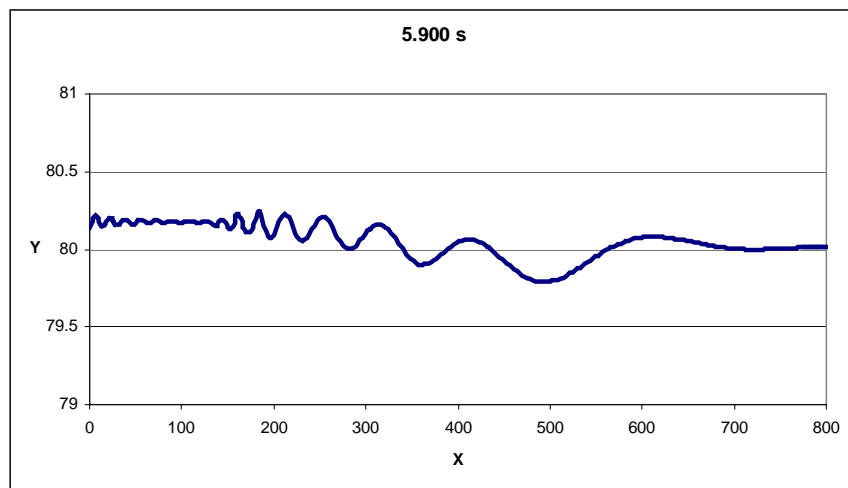
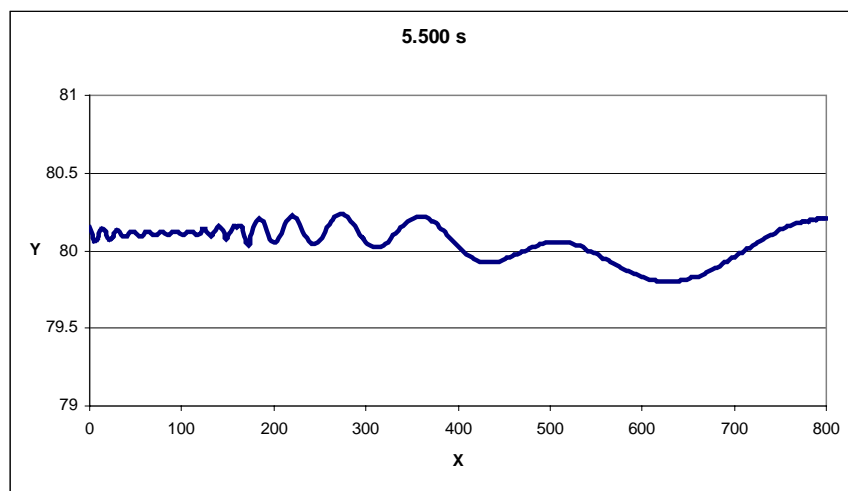
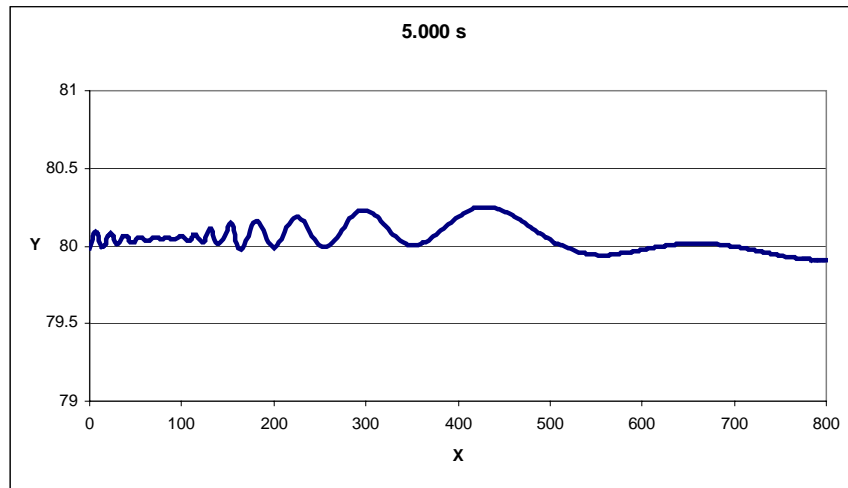


Figura 5.5

Perfis da superfície livre do Exemplo 1 para os instantes 5,000 s; 5,500 s e 5,900 s.

Na **Figura 5.6** pode-se constatar a boa qualidade dos resultados obtidos verificando-se as medidas de conservação como estabilidade da energia total a partir do instante em que o batedor retorna ao repouso, bem como a conservação de massa durante toda a simulação.

Neste e nos demais exemplos, os valores das energias potencial e cinética se mantêm constantes desde o instante em que o batedor retorna ao repouso até o momento em que ocorre a reflexão da primeira onda, quando há um acréscimo no valor da energia potencial e um decréscimo no valor da energia cinética, apesar desta variação a energia total se manteve constante ao longo de toda a simulação. Tanto as medidas de energia quanto as áreas formadas na **Figura 5.6** estão adimensionalizadas, enquanto o tempo está registrado em segundos.

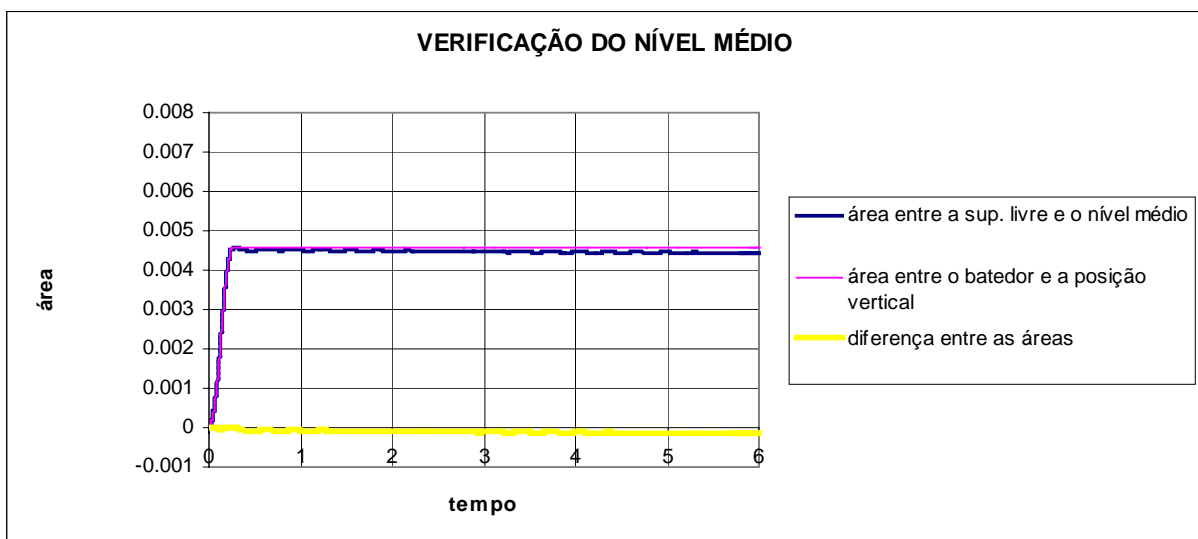
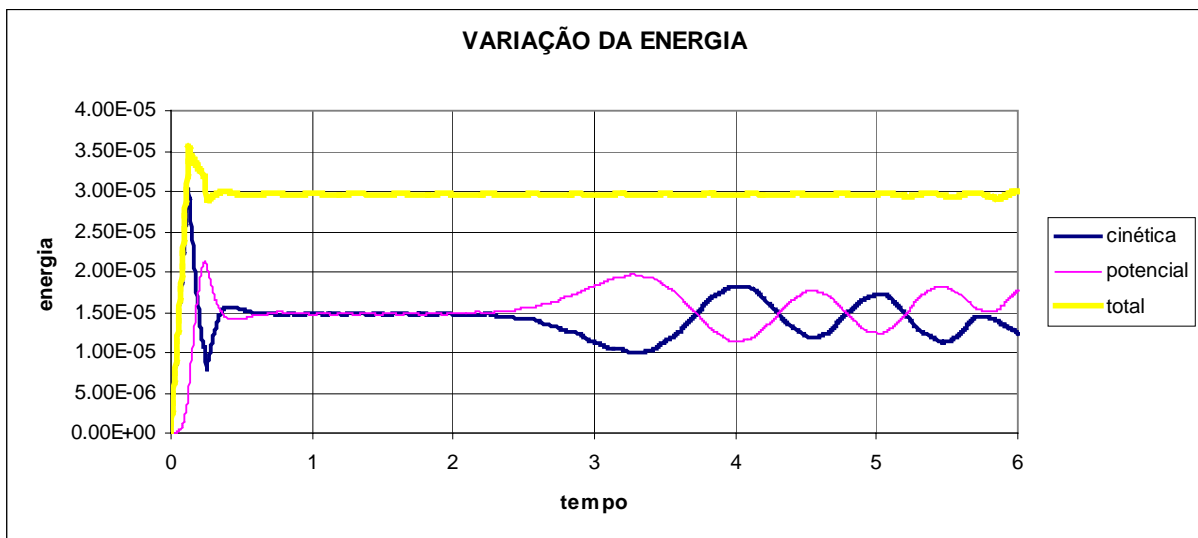


Figura 5. 6

Variação da energia total e nível médio para o Exemplo 1.

5.2 – Exemplo 2

No segundo exemplo, foi mantido o batedor tipo flap e alterou-se o deslocamento máximo para 0,750 cm permanecendo em 0,250 segundo o tempo que o batedor leva para chegar até este ponto onde voltará ao repouso. Na **Figura 5.7** podem ser vistas as evoluções temporais do trem de ondas até a reflexão da primeira onda.

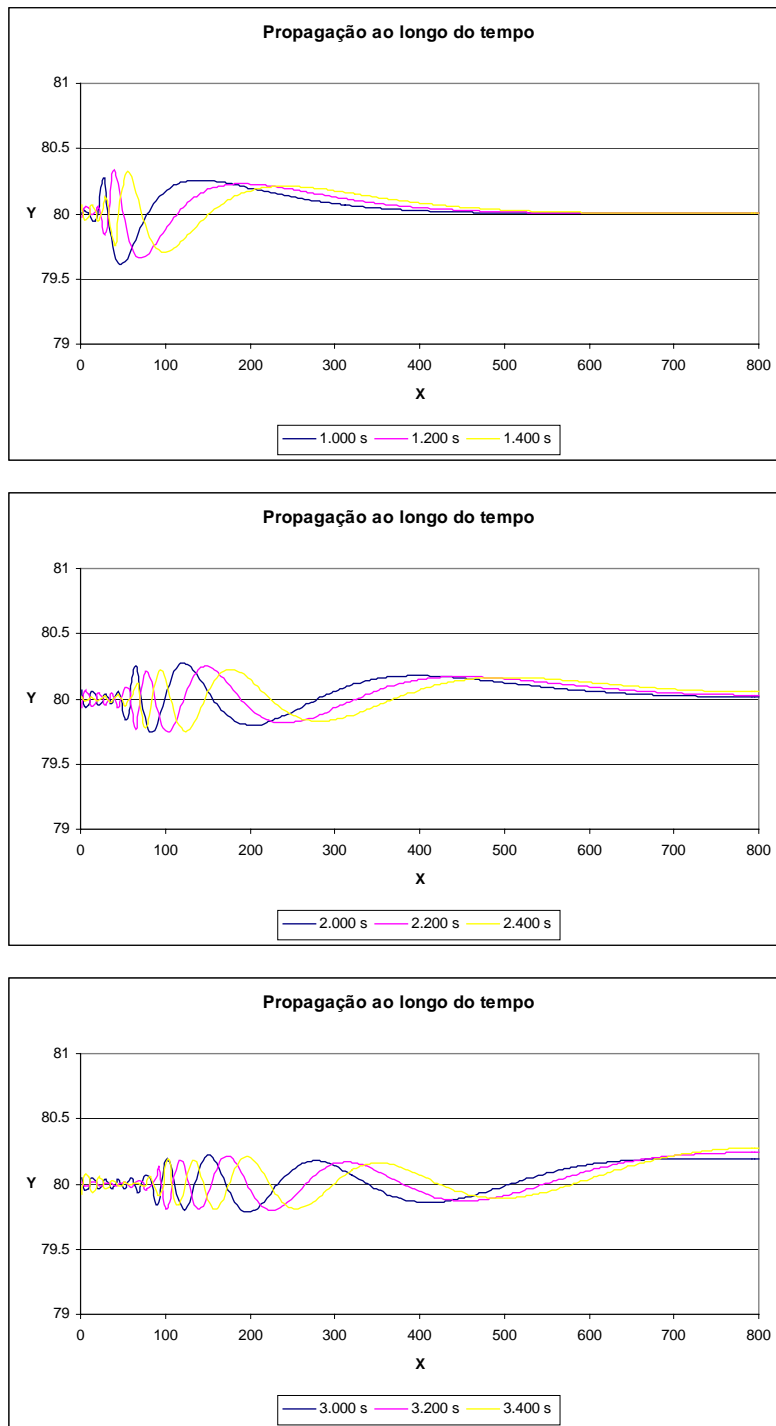


Figura 5.7

Evolução dos perfis da superfície livre para o Exemplo 2 até $t=3,400$ s.

A **Figura 5.8** mostra a evolução do trem de ondas para instantes após a reflexão até momentos antes o término da simulação.

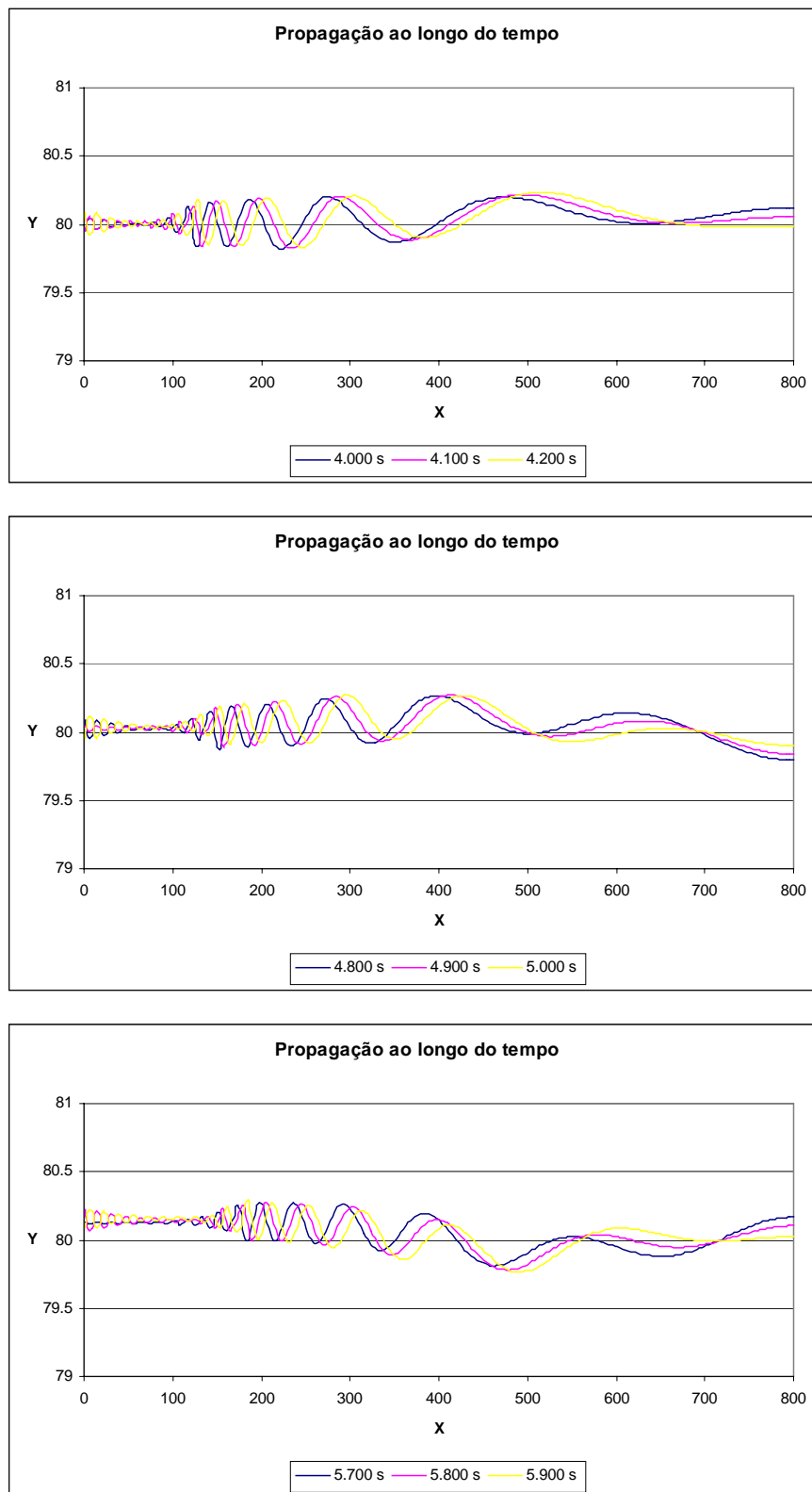


Figura 5. 8

Evolução dos perfis da superfície livre para o Exemplo 2 de $t=4,000$ s até $t=5,900$ s.

Para verificar a qualidade dos resultados apresentados, foram plotadas algumas medidas de conservação na **Figura 5.9**.

Assim como no exemplo anterior, os valores da energia e área que compõem a **Figura 5.9** estão adimensionalizados e os valores de tempo estão registrados em segundos.

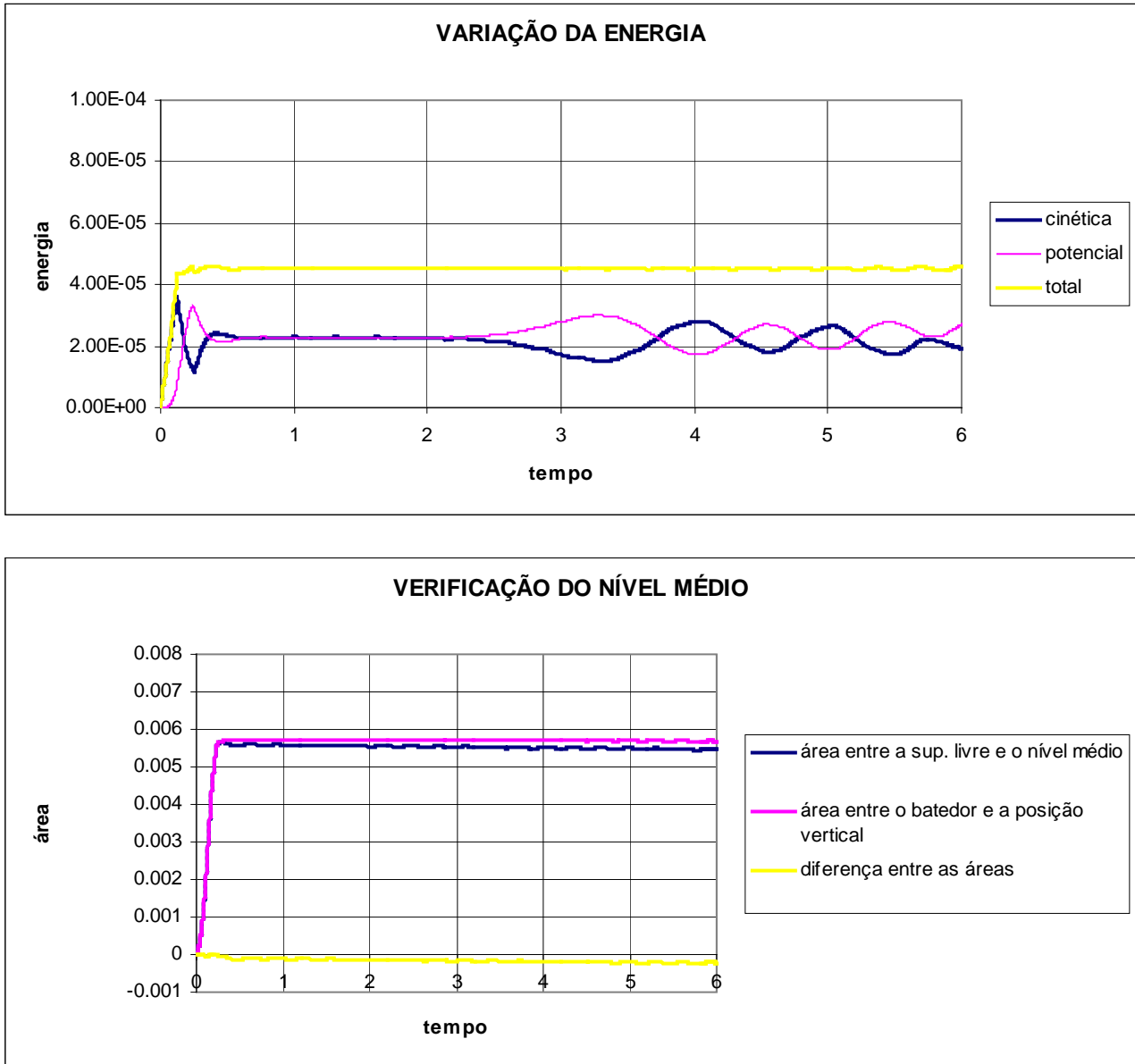


Figura 5.9

Variação da energia total e do nível médio para o Exemplo 2.

5.3 – Exemplo 3

No terceiro exemplo, simulou-se a geração de um trem de onda por um batedor do tipo pistão, o deslocamento máximo do batedor foi 0,375 cm e o tempo que o batedor leva para alcançar este ponto foi de 0,200 s, permanecendo em repouso a partir de então. Nas **Figuras 5.10** e **5.11** são comparadas as evoluções da superfície livre deste exemplo com as correspondentes ao primeiro exemplo, no qual o batedor era do tipo flap, o deslocamento máximo foi de 0,625 cm e o tempo necessário para atingir tal deslocamento foi 0,250 s.

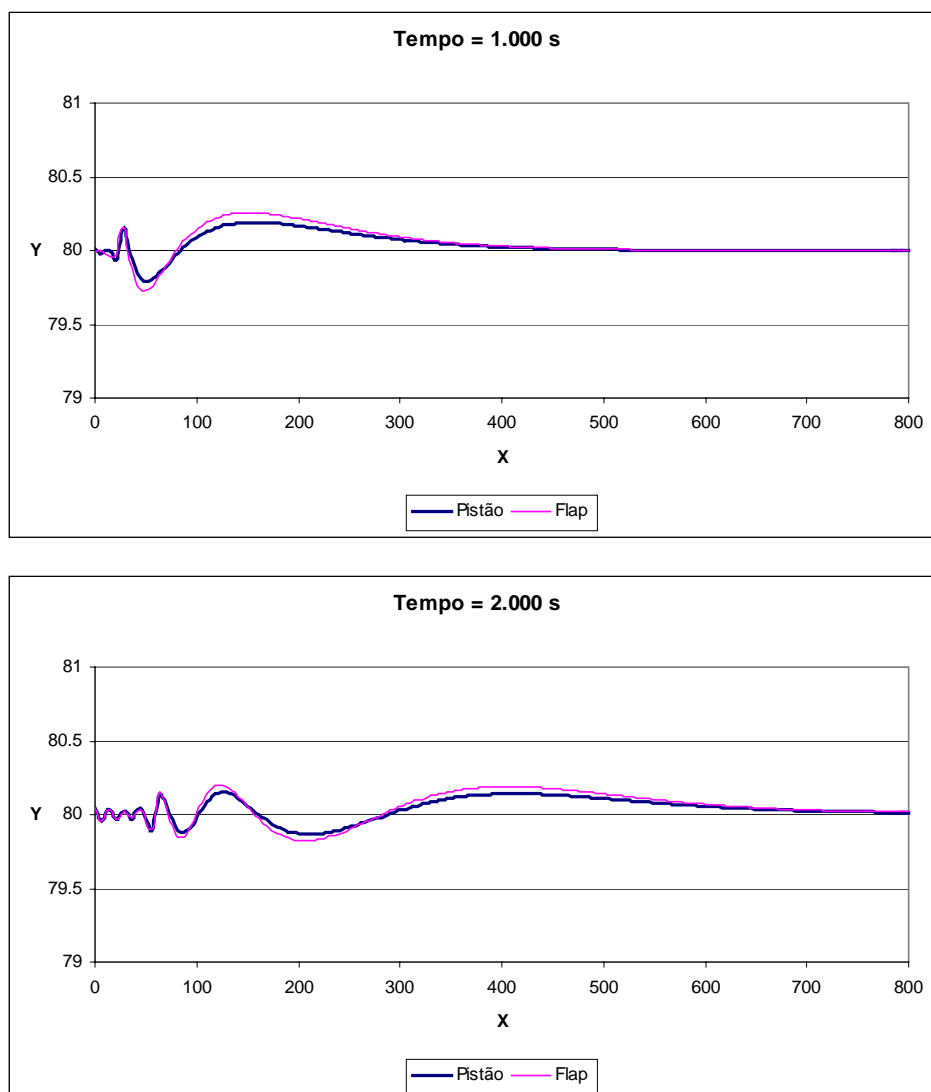


Figura 5. 10

Comparação entre os perfis gerados por flap (Exemplo 1) com outros gerados por pistão (Exemplo 3) para $t=1,000$ s e $2,000$ s.

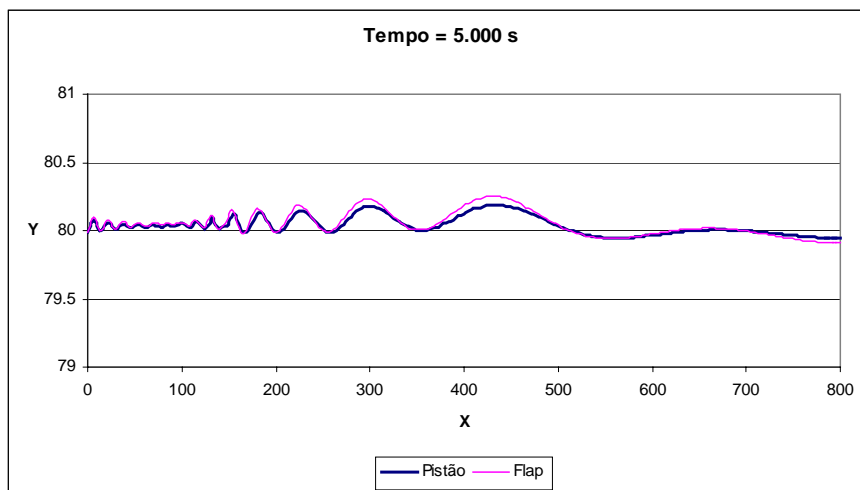
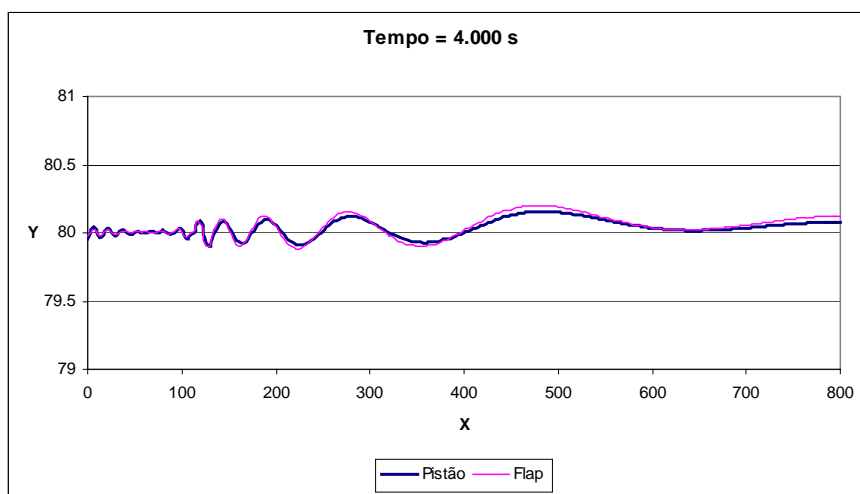
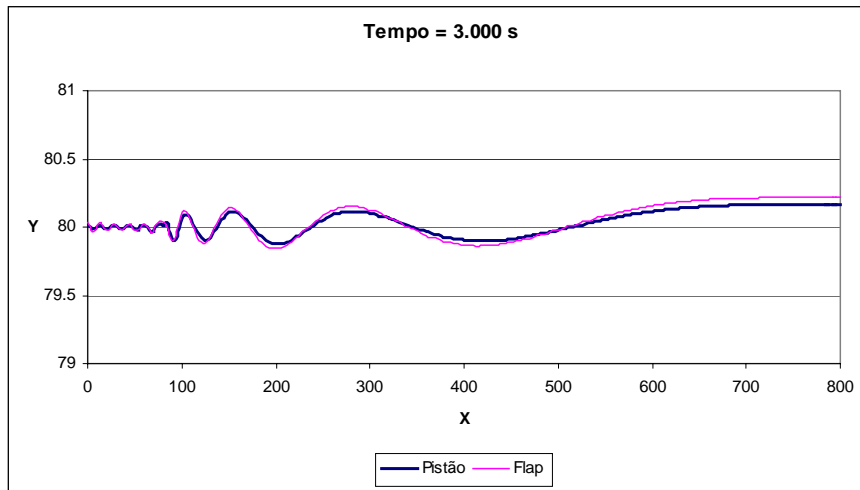


Figura 5.11

Comparação entre os perfis gerados por flap (Exemplo 1) com outros gerados por pistão (Exemplo 3) para os instantes 3,000 s; 4,000 s e 5,000 s.

A **Figura 5.12** mostra a conservação da energia total a partir do momento em que o batedor entra em repouso até o final da simulação. O mesmo acontece com a conservação de massa, onde a área entre a superfície livre e o nível de referência é igual à área que deixa de ser ocupada pela água em função do movimento do batedor ao longo do tempo, desde o início do funcionamento até o fim da simulação.

Os valores da energia e da área na **Figura 5.12** estão adimensionalizados enquanto os valores atribuídos ao tempo estão em segundos.

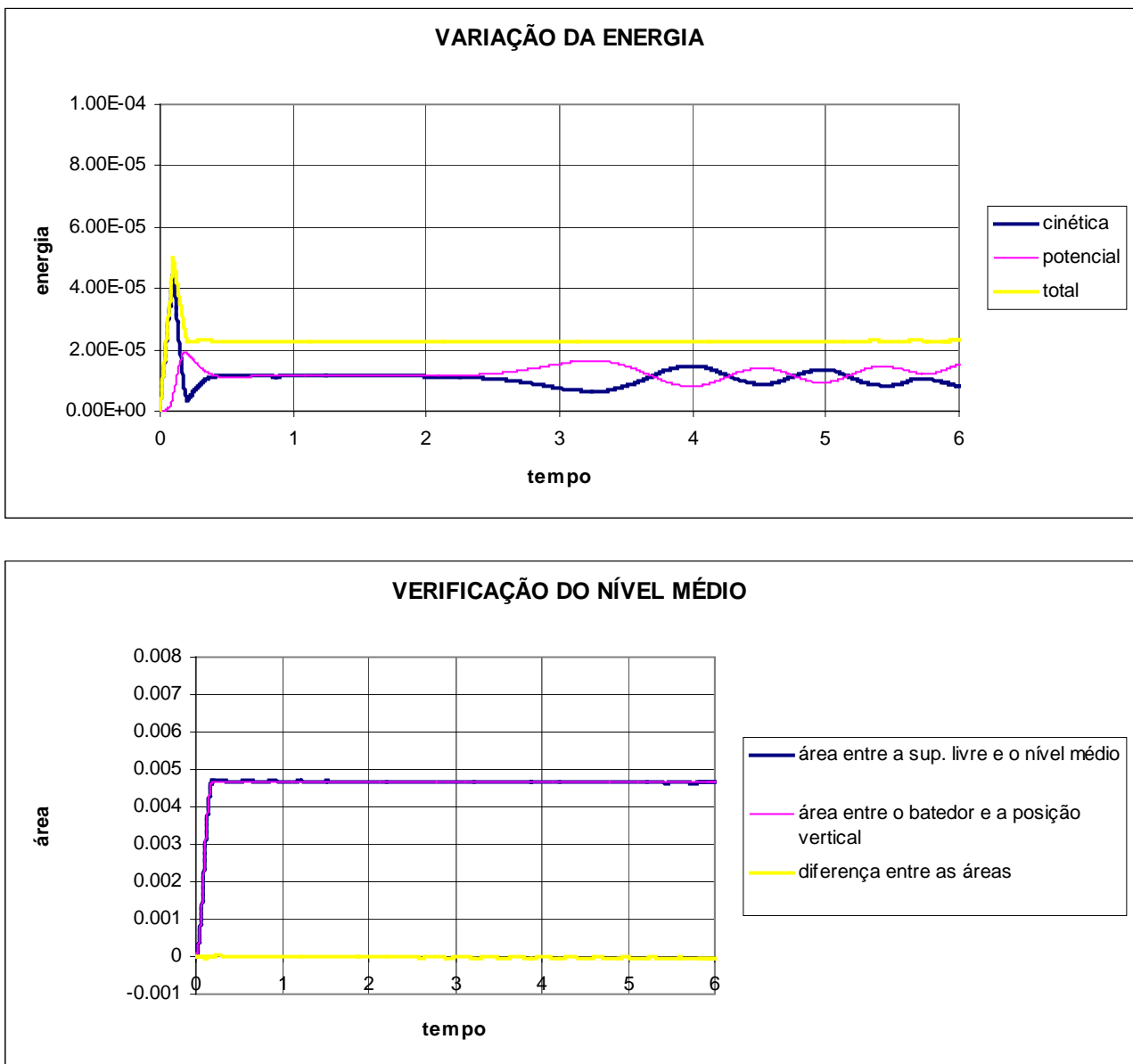


Figura 5. 12

Variação da energia total e do nível médio para o Exemplo 3.

5.4 – Exemplo 4

O quarto exemplo é a geração e propagação de um trem de onda desenvolvido por um batedor do tipo pistão com o deslocamento máximo de 0,500 cm levando 0,250 s para entrar em repouso. A **Figura 5.13** mostra a geração de um trem de ondas nos instantes iniciais.

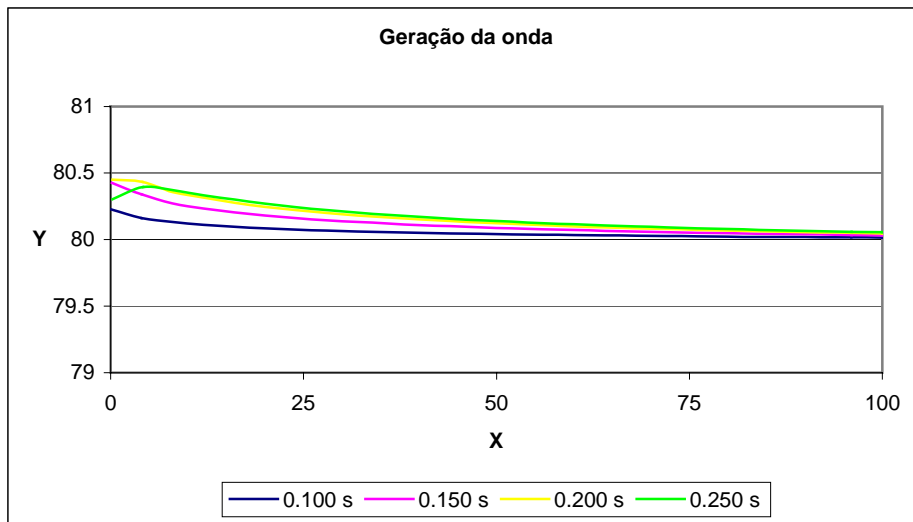


Figura 5.13

Geração do trem de onda do Exemplo 4 nos instantes 0,100 s; 0,150 s; 0,200 s e 0,250 s.

A **Figura 5.14** mostra a evolução temporal do trem de onda nos instantes em que a primeira onda chega na parede final do canal.

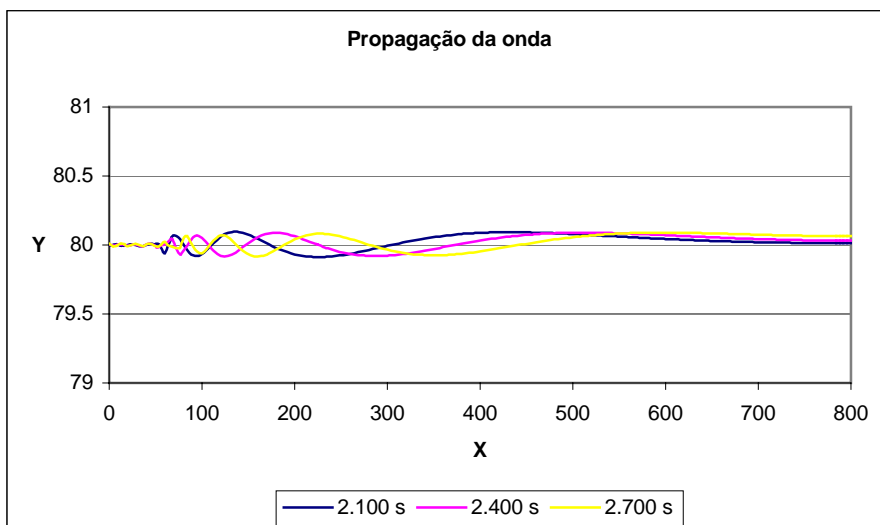


Figura 5.14

Propagação do trem de onda do Exemplo 4 nos instantes 2,100 s; 2,400 s e 2,700 s.

Na **Figura 5.15** foram plotados os perfis do trem de onda em diferentes instantes, desde a reflexão até o instante último da simulação, onde foram percebidas elevações do nível d'água acima do nível médio devido à reflexão das ondas na parede final do canal.

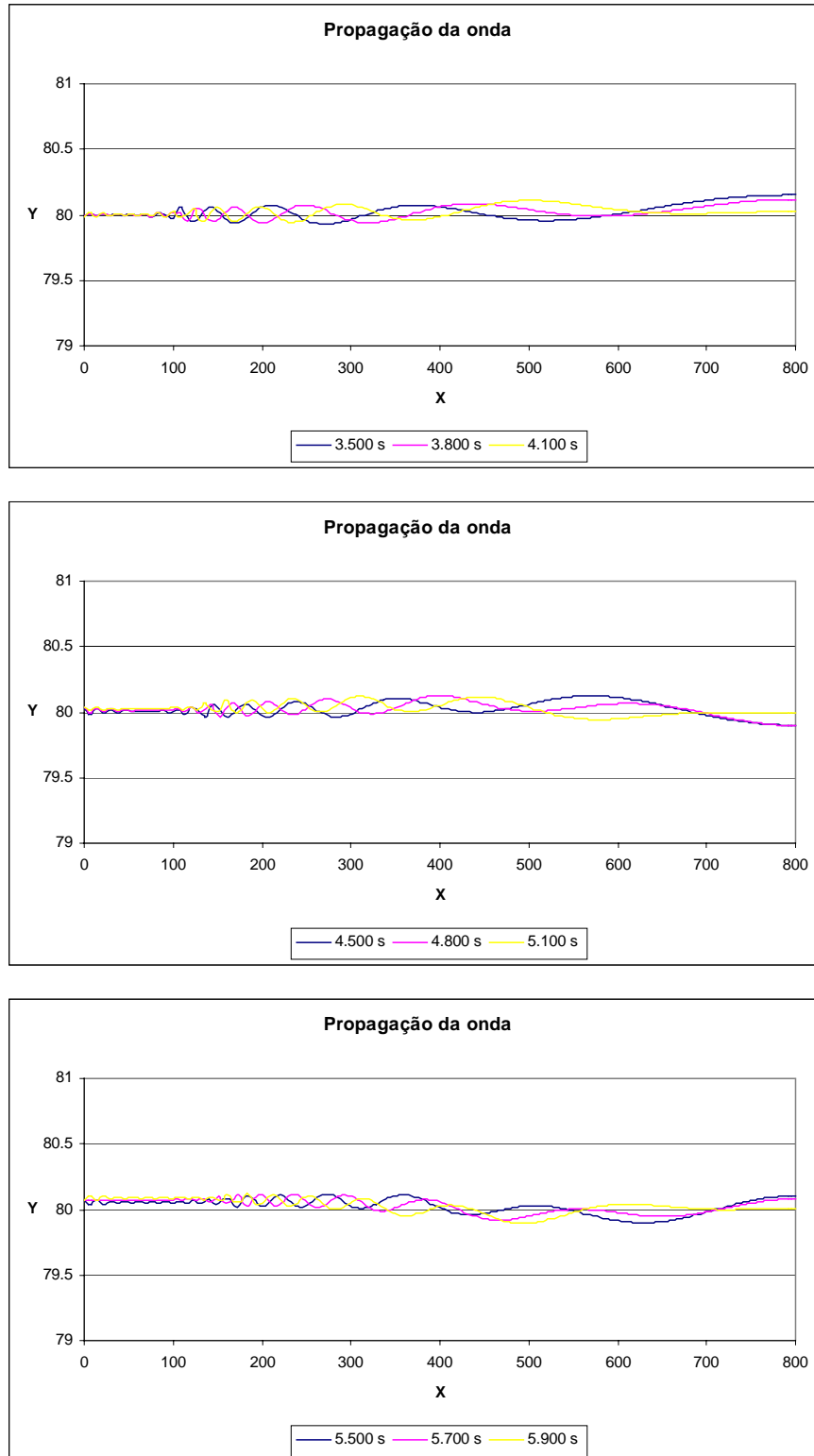


Figura 5.15

Propagação do trem de onda do Exemplo 4 desde 3,500 s até 5,900 s.

Na **Figura 5.16** são mostradas as medidas de conservação para o quarto exemplo, onde pode-se reparar que a energia total permanece quase inalterada depois que o batedor retorna ao repouso e a conservação de massa em toda a simulação.

Assim como nos demais exemplos as medidas de energia e área da **Figura 5.16** estão adimensionalizadas, enquanto as medidas relativas ao tempo então em segundos.

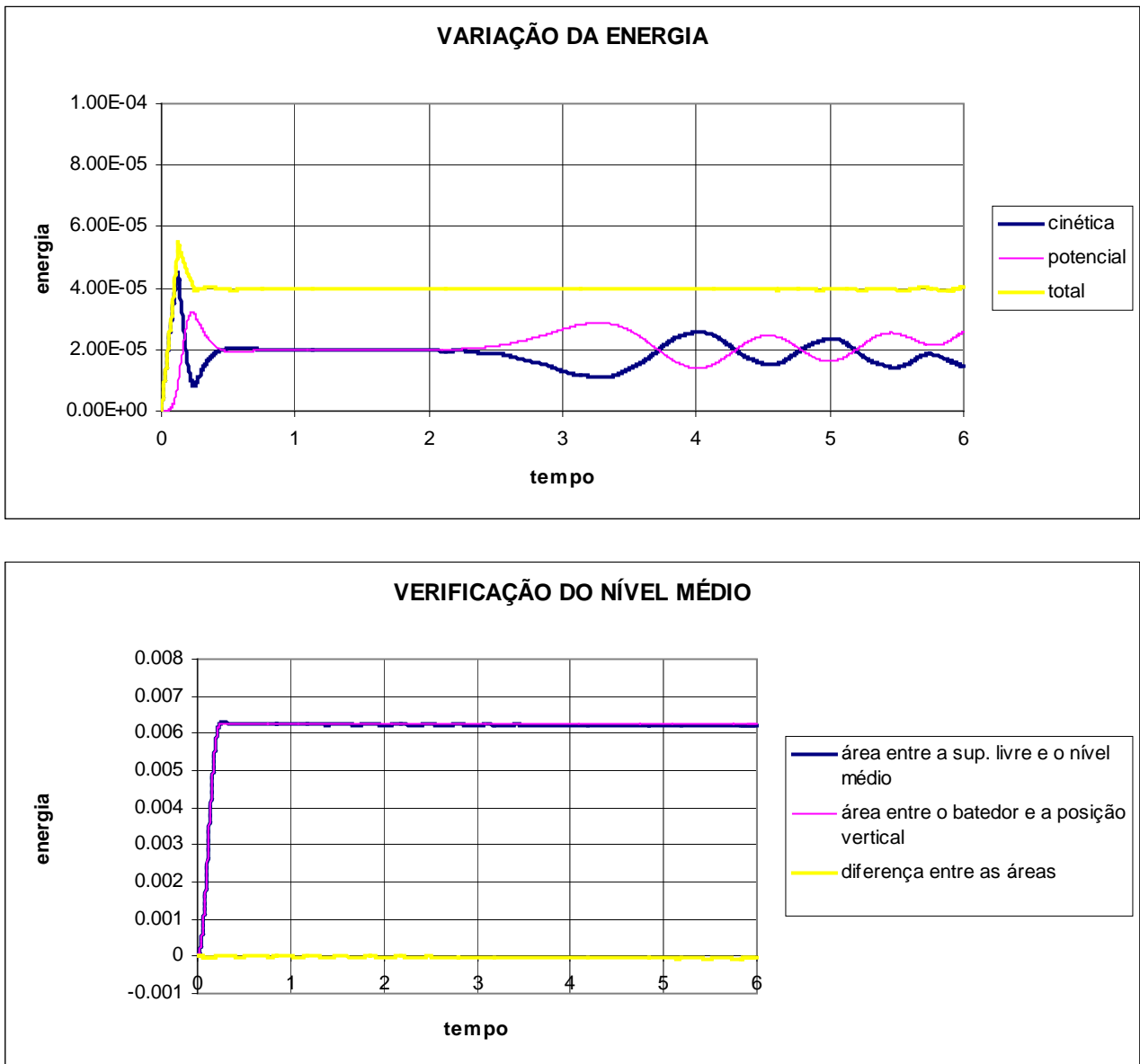


Figura 5. 16

Varição da energia total e do nível médio para o Exemplo 4.

5.5 – Exemplo 5

Neste quinto e último exemplo, o trem de onda foi gerado a partir de um batedor tipo pistão, que ao final de 0,250 s alcançou o ponto de deslocamento máximo distante 0,250 cm do ponto de partida.

A **Figura 5.17** mostra a comparação da evolução do trem de ondas do Exemplo 4 e do Exemplo 5 para instantes antes da reflexão. Tanto os valores de X quanto de Y estão em centímetros.

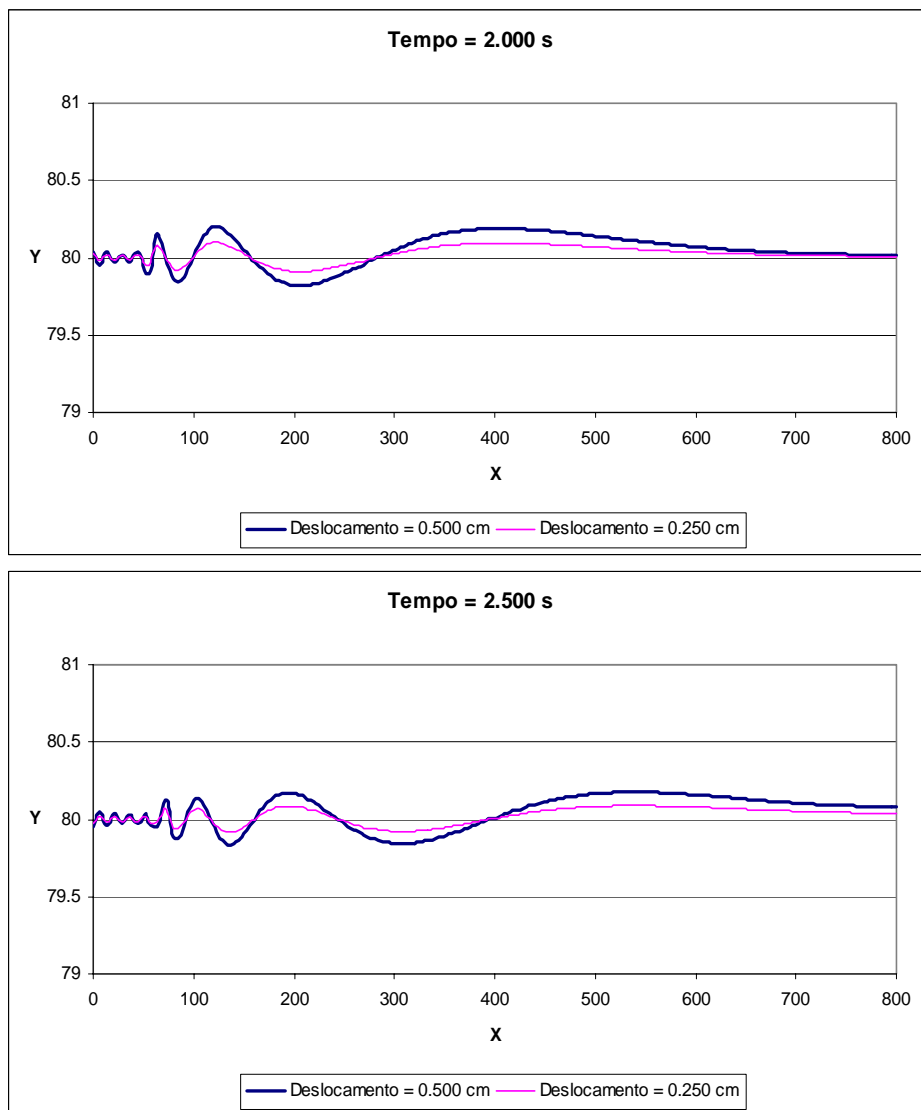


Figura 5. 17

Comparação da evolução da superfície livre para os Exemplos 4 e 5 nos instantes 2,000s e 2,500s

A **Figura 5.18** e **Figura 5.19** continuam mostrando a comparação de resultados entre os Exemplos 4 e 5, agora desde a reflexão até instantes antes do final da simulação.

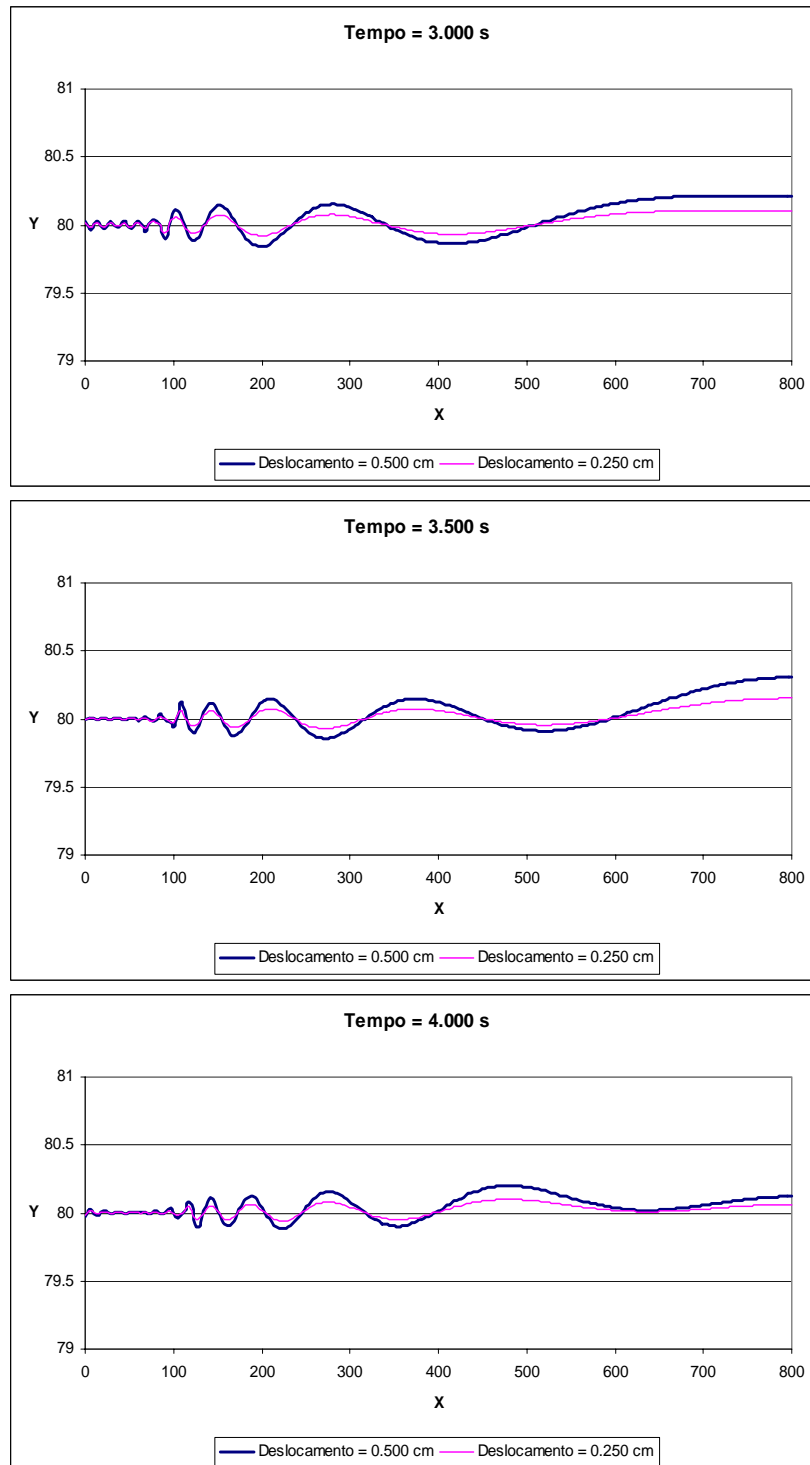


Figura 5.18

Comparação da evolução da superfície livre para os Exemplos 4 e 5 nos instantes 3,000 s; 3,500 s e 4,000 s.

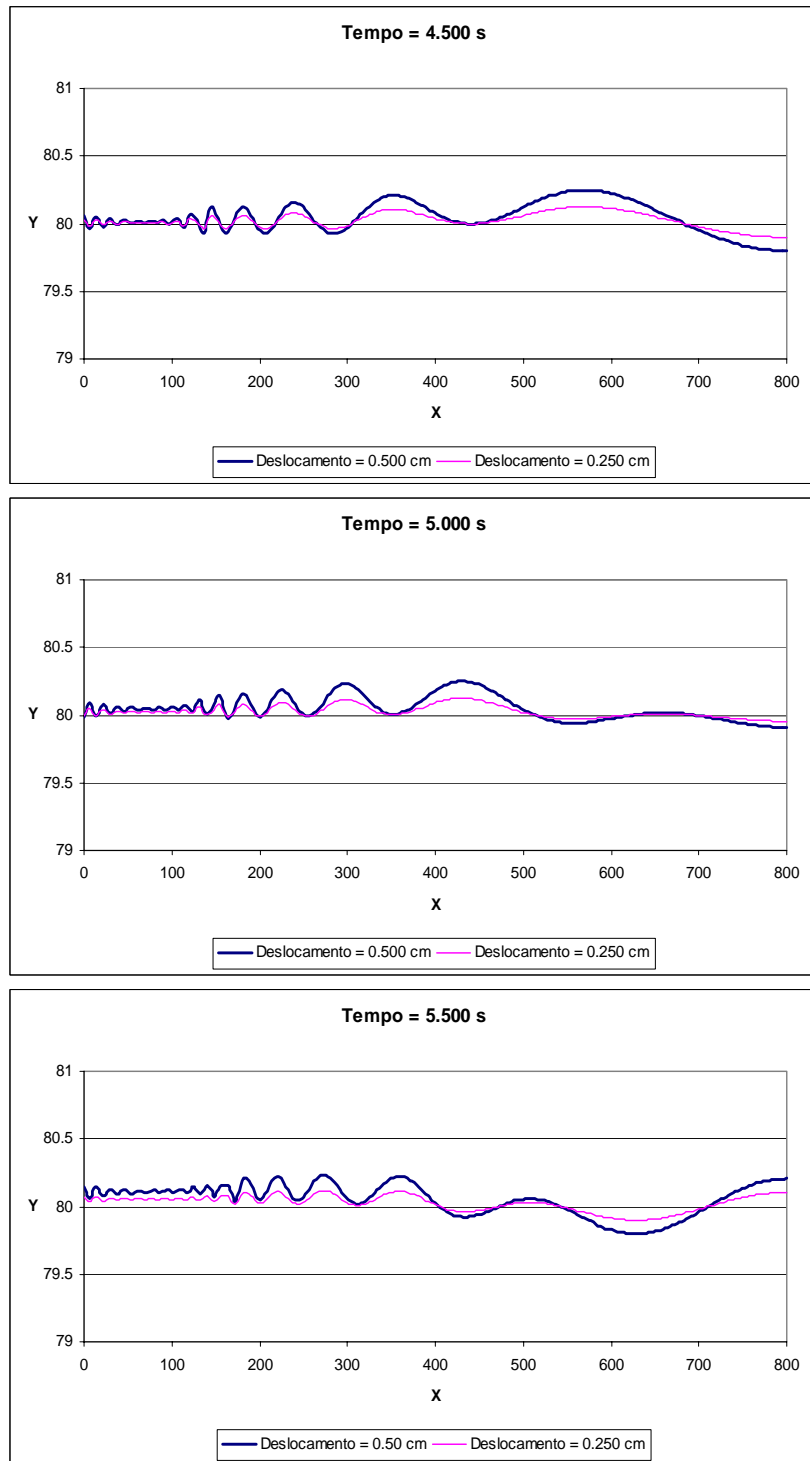


Figura 5. 19

Comparação da evolução da superfície livre para os Exemplos 4 e 5 nos instantes 4,500 s; 5,000 s e 5,500 s.

A **Figura 5.20** mostra a conservação da energia total após o batedor permanecer em repouso e a conservação da massa ao longo de toda a simulação do Exemplo 5, garantindo desta forma a boa acurácia dos resultados obtidos.

Os eixos da energia e da área estão com os valores adimensionalizados e o eixo de tempo com valores em segundos.

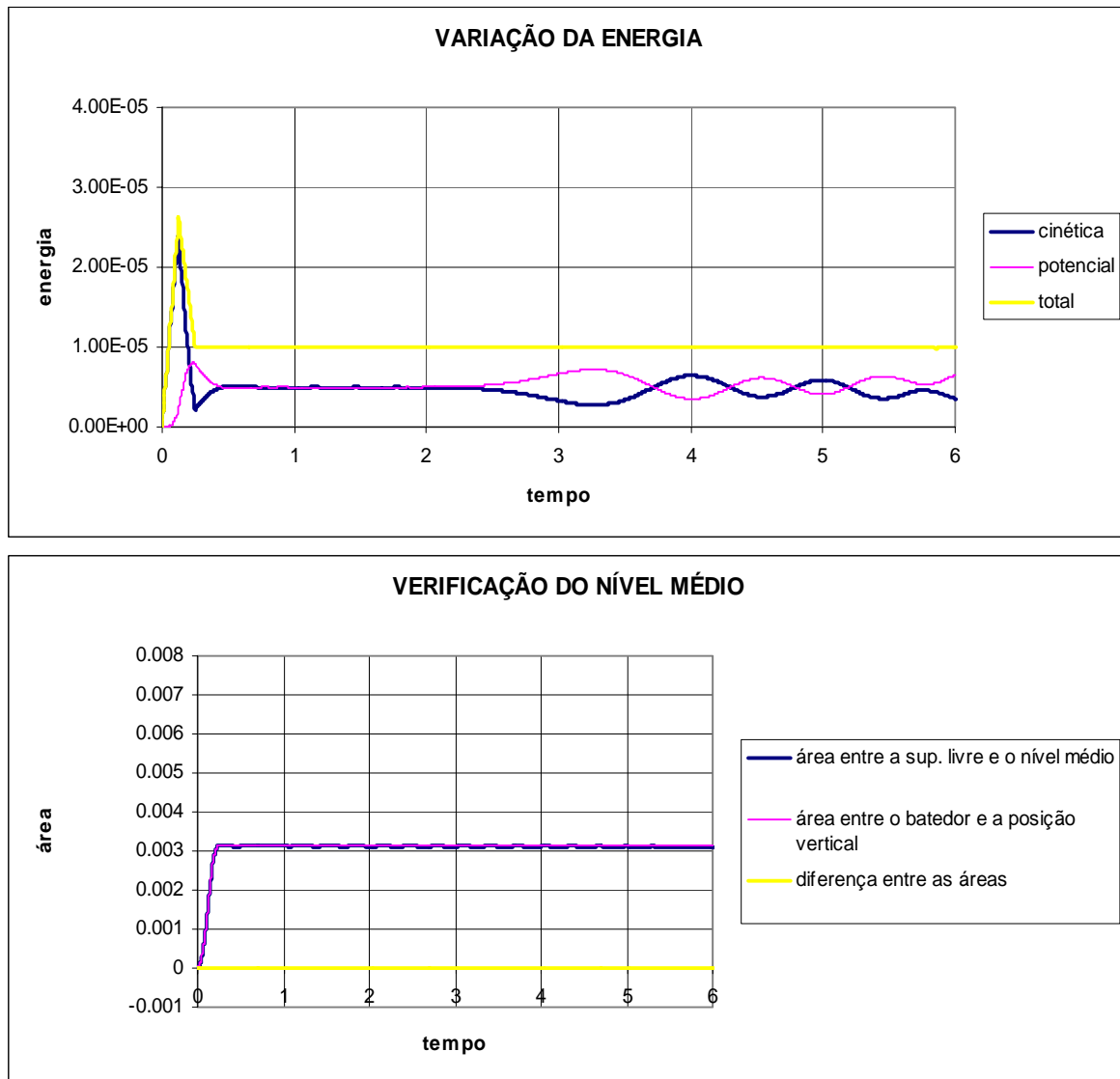


Figura 5. 20

Variação da energia total e nível médio para o Exemplo 5.

Capítulo 6

Conclusões e Recomendações

6.1 – Conclusões

O modelo computacional utilizado neste trabalho – NLWAVE – fez uso de uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana, onde a formulação Euleriana foi empregada para a determinação do campo de velocidades ao longo do contorno, e a formulação Lagrangeana utilizada para a atualização da geometria não só da superfície livre como também do batedor e da parede final do canal de ondas.

O modelo NLWAVE originalmente desenvolvido por AZEVEDO [3] para problemas de ondas especialmente periódicas e sloshing, foi ampliado de modo a incluir as condições iniciais e do contorno de um canal de ondas dotado de um batedor e a solução do Método dos Elementos de Contorno para equação de Laplace deste modelo foi comparada com a solução apresentada por um outro modelo numérico – BEMCAL2D – desenvolvido por PRODANOFF [20]. Em cada instante discreto os valores dos potenciais calculados para os nós do batedor e parede final que compõem os nós duplos foram iguais aos valores dos potenciais prescritos para os nós extremos da superfície livre indicando uma solução da equação de Laplace em cada nível de tempo.

A velocidade normal de cada nó pertencente a superfície livre foi determinada pela solução do Método dos Elementos de Contorno, enquanto a velocidade tangencial foi determinada através da derivada do potencial na direção tangente ao contorno da própria superfície livre. A componente normal da velocidade para cada nó que define a geometria do batedor é dada como condição de contorno prescrita e é atualizada a todo instante através das equações apresentadas no Capítulo 4.

A conservação da energia total após o batedor entrar em repouso pode ser observada, ou seja, ao retornar ao repouso o batedor pára de fornecer energia e esta se mantém constante ao longo da propagação sem que ocorram perdas relevantes, e a conservação de massa desde o instante inicial até o final da simulação, apresentadas no Capítulo 5,

garantem a consistência do modelo para a simulação da geração e propagação de ondas em canais.

6.2 – Recomendações

Como investigações adicionais na simulação da propagação de ondas em canais pelo Método dos Elementos de Contorno, recomenda-se:

- A implementação da solução de canais em série através de módulos, onde a perturbação da superfície livre no final de cada módulo fosse transmitida para o início do seguinte ampliando-se desta forma o comprimento do canal sem se perder qualidade na solução apresentada pelo Método dos Elementos de Contorno devido as singularidades.
- A incorporação de um fator de perda de energia no fim do canal com o objetivo de se representar a dissipação da energia da onda causada pela existência de uma praia.
- Calibrar diferentes coeficientes de perda de carga devido ao atrito causado entre o escoamento da água e o material que compõem os leitos e paredes de canais naturais.

Bibliografia

- [1] ABE, K.; SAKURABA, S.: “An hr-adaptive boundary element for water free-surface problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v 23, N° 3, pp. 223-232, 1999.
- [2] AZEVEDO, J. P. S.: “Water wave propagation using the boundary element method”, *The International Journal of BEM Communications*, vol 8, n° 2, pp. 97-102, 1997.
- [3] AZEVEDO, J. P. S.: *Application of the boundary element method to two-dimensional nonlinear gravity wave problems*, Ph.D thesis, Computational Mechanics Institute, Southampton, Inglaterra, 1991.
- [4] BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J.: *Boundary Elements: An Introductory Course*, 1st ed, New York, Computational Mechanics Publications & Mc Graw-Hill, 1989.
- [5] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C.: *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, 1st ed, Berlim, Springer-Verlag, 1984.
- [6] BROWN, J.; COLLING, A.; PARK, D.; et al: *Waves, tides and shallow-water processes*, 1st ed, England, Pergamon, 1989.
- [7] CHACALTANA, J. T. A.: *Aplicação do método da integral de contorno a escoamentos com superfície livre*, tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [8] CHOW, V. T.: *Open-Channel Hydraulics*, 19 ed, Japan, Mc Graw-Hill, 1982.
- [9] DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A.: *Water wave mechanics for engineers and scientists*, 1st ed, Singapore, World Scientific, 1991.
- [10] FLEURY JÚNIOR, P., *Formulação hiper-singular do método dos elementos de contorno visando a simulação da propagação de ondas gravitacionais*, tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.
- [11] GRILLI, S. T.; WATTS, P.: “Modeling of waves generated by a moving submerged body. Applications to underwater landslides”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 23, N° 8, pp. 645-656, 1999.

- [12] HUARINGA AGUIRRE, E. E. L.: *Aplicações de modelos hidrodinâmicos unidimensionais de propagação de ondas de cheia e de ruptura de barragem*, tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [13] HUGHES, S. A.: *Physical models and laboratory techniques in coastal engineering*, 1st ed, Singapore, World Scientific, 1993.
- [14] JAIME, P. R.: *Novas contribuições à simulação de ondas gravitacionais de grande amplitude pelo método dos elementos de contorno*, tese de M.Sc., Rio de Janeiro, RJ, Brasil, COPPE-UFRJ, 1995.
- [15] KANO, M.; OKUZONO, H.; KUROKI, T.; POWER, H.: “Boundary element analysis of large amplitude of water motion of incident waves against permeable submerged breakwaters”. In: *Boundary Elements XXIII*, v. 10, pp. 371-379, Lemnos, Grécia, maio de 2001.
- [16] KANO, M.; OKUZONO, H.; KUROKI, T.: “Experimental results and boundary element analysis of incident waves against submerged breakwaters”. In: *Boundary Elements XXII*, v. 8, pp. 275-281, Cambridge, Inglaterra, setembro de 2000.
- [17] LONGUET-HIGGINS, M. S.; COKELET, E. D.: *The deformation of steep surface waves on water: I. A Numerical Method of Computation*. London, A. 350, pp. 1-26, Proc. R. Soc. 1976.
- [18] MCKEE, W. D.: “The propagation of water waves along a channel of variable width”, *Applied Ocean Research*, v. 21, Nº 2, pp. 145-156, 1999.
- [19] MIZUMURA, K.: “Nonlinear water waves generated by an accelerated floating body”. In: *Boundary Elements XII*, v. 2, pp. 119-129, Hokkaido, Japão, setembro de 1990.
- [20] PRODANOFF, J. H. A.: *Percolação em barragens de terra em regime permanente e transiente com o Método dos Elementos de Contorno*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.
- [21] REQUENA, G. A. H.: *Metodologia de calibração automática na modelação da propagação de ondas de cheia*, tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- [22] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.: “Ondas em meios elásticos”. In: Zaguri, N., *Física 2*, 3ª ed, capítulo 19, Rio de Janeiro, Brasil, Livros Técnicos e Científicos, 1982.

- [23] ROMERO, V. J.; INGBER, M. S.: “A numerical model for 2-D sloshing of pseudo-viscous liquids in horizontally accelerated rectangular containers”. In: *Boundary Elements XVII*, v. 1 , pp. 567-583, Madison, EUA, julho de 1995.
- [24] SUGINO, R., TOSAKA, N.: “Boundary element analysis of unsteady nonlinear surface wave on water”. In: *Boundary Elements XII*, v. 2, pp. 107-117, Hokkaido, Japão, setembro de 1990.
- [25] WEBE, J. M.; PRODANOFF, J. H. A.; AZEVEDO, J. P. S.: “Método dos Elementos de Contorno em Recursos Hídricos”. In: VIEIRA DA SILVA, R. C.; *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 2*, 1ª ed, capítulo 1, Rio de Janeiro, Brasil, ABRH, 1995.
- [26] WROBEL, L. C.; EIGER, S.; ROSMAN, P. C.; “et al.”: “Introdução aos Métodos Numéricos”. In: VIEIRA DA SILVA, R. C., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, 1ª ed, capítulo 1, Rio de Janeiro, Brasil, ABRH, 1989.
- [27] ZAMBROZUSKY, N. J. M.: *Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Propagação de Ondas Gravitacionais Não Lineares*, tese M.Sc., Rio de Janeiro, RJ, Brasil, COPPE-UFRJ, 1992.