

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS BIFÁSICOS
DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS E IMISCÍVEIS EM MEIOS POROSOS VIA
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Anderson de Lima Mendonça

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D. Sc.

Prof. Luiz Landau, D. Sc.

Prof. José Luis Drummond Alves, D. Sc.

Dr. Luis Felipe Feres Pereira, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2003

MENDONÇA, ANDERSON DE LIMA

Simulação Numérica de Escoamentos
Incompressíveis Bifásicos de Fluidos Não-
Newtonianos e Imiscíveis em Meios Porosos Via
Método dos Elementos Finitos [Rio de Janeiro]
2003

VIII, 147 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 2003)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Método dos elementos finitos
2. Meio poroso
3. Escoamento bifásico
4. Fluido não-newtoniano

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*A minha esposa Adriana e aos meus filhos Anderson Carlos e Marcus Vinícius
Aos meus pais João Carlos e Nilza*

Agradecimentos

Ao Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, amigo e orientador, por sua dedicação e paciência demonstradas para comigo durante o período de orientação, como também pela confiança e incentivo ao longo de todo o desenvolvimento desse trabalho de pesquisa.

Ao Prof. Luiz Landau pela disponibilização dos recursos materiais necessários para a realização desse trabalho.

Ao Prof. José Luis Drummond Alves pela constante prestatividade durante a realização desse trabalho.

Ao Prof. Fernando L. B. Ribeiro pela disponibilização do visualizador *View 3d*.

À ANP (Agência Nacional de Petróleo) pelo apoio financeiro através da bolsa de mestrado, indispensável à realização desse trabalho.

Ao amigo Renato Nascimento Elias pelas longas e valiosas discussões que muito contribuíram para a realização desse trabalho de pesquisa.

Ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD/COPPE/UFRJ) e ao Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia (LAMCE/COPPE/UFRJ) pelo apoio computacional.

Aos amigos da COPPE/UFRJ que sempre me apoiaram: Marcos André Duarte Martins e Denis Araujo Filgueiras de Souza.

Em especial a minha querida esposa Adriana pela compreensão nos momentos de ausência e pelo carinho e incentivo nos momentos de dificuldades.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS BIFÁSICOS
DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS E IMISCÍVEIS EM MEIOS POROSOS VIA
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Anderson de Lima Mendonça

Outubro/2003

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta uma formulação estabilizada de elementos finitos para a simulação de escoamentos incompressíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos. Esta formulação é uma importante ferramenta para a simulação de invasão de fluidos durante operações de perfuração. O modelo de lei das potências é usado para descrever o comportamento dos fluidos não-newtonianos. Portanto tanto o fluido invasor quanto o residente podem ser considerados como pseudoplásticos ou dilatantes. A equação resultante para a saturação da fase molhante é aproximada pelo método SUPG acrescido de um termo de captura de choque, a equação da pressão é aproximada pelo método de Galerkin e é usado um pós-processamento global para recuperar a velocidade de Darcy, garantindo a conservação de massa. Testes numéricos em problemas unidimensionais, arranjo de cinco poços e configurações de poço mostram a eficiência da aproximação proposta. Particularmente na simulação de invasão de lama do poço para a formação foi verificado que para baixas taxas de deformação a lama pseudoplástica invade a formação mais lentamente.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

NUMERICAL SIMULATION OF TWO-PHASE INCOMPRESSIBLE FLOWS OF
NON-NEWTONIAN IMMISCIBLE FLUIDS IN POROUS MEDIA BY FINITE
ELEMENT METHODS

Anderson de Lima Mendonça

October/2003

Advisor: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Department: Civil Engineering

This work presents a stabilized finite element formulation for the simulation of two-phase incompressible flows of non-newtonian immiscible fluids in porous media. This is an important tool for the simulation of fluid invasion during drilling operations. The power law model is used to describe the behavior of non-newtonian fluids. Therefore the invading and resident fluids can be considered either as pseudo-plastic or dilatant. The resulting equation for the saturation of the wetting phase is approximated by the SUPG method supplemented by a discontinuity capturing term, the pressure equation is approximated by the Galerkin method and is used a global post-processing to recover the Darcy's velocity, enforcing mass conservation. Numerical tests in one-dimensional, five-spot and borehole configurations show the effectiveness of the proposed approach. Particularly for the simulation of mud invasion in a borehole was verified that for low deformation rates pseudo-plastic muds provide the slowest invasion into the formation.

Índice

Capítulo 1 Introdução	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Objetivos do trabalho	6
1.3 Organização do texto	6
Capítulo 2 Formulação Matemática	8
2.1 Equações Governantes	9
2.1.1 Forma geral das equações para escoamentos multifásicos	11
2.1.2 Escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos	12
2.1.3 Saturação, saturação residual e saturação efetiva	13
2.1.4 Permeabilidade absoluta e permeabilidade relativa	15
2.1.5 Pressão capilar	16
2.1.6 Viscosidade e viscosidade aparente	17
2.2 Equação da Pressão	21
2.3 Equação da Saturação	24
2.4 Sistema Acoplado de Equações Diferenciais	28
2.5 Condições de contorno e condições iniciais	30
Capítulo 3 Formulação Aproximada de Elementos Finitos	32
3.1 Método dos Elementos Finitos	32
3.2 Discretização Espacial	37
3.3 Formulação de Galerkin para a Equação da Pressão	38
3.4 Matrizes de Elemento para a Equação da Pressão	39
3.4.1 Matriz de Coeficientes	41
3.4.2 Vetor de Termos Independentes	42
3.5 Pós-processamento do Campo de Velocidades	46
3.6 Matrizes de Elemento para a Equação da Velocidade	47

3.7	Formulação Estabilizada para a Equação da Saturação	55
3.8	Matrizes de Elemento para a Equação da Saturação	57
3.8.1	Matriz de Massa	59
3.8.2	Correção SUPG da Matriz de Massa	60
3.8.3	Matriz de Convecção	61
3.8.4	Correção SUPG da Matriz de Convecção	63
3.8.5	Matriz de Difusão	64
3.8.6	Matriz de Correção do Operador de Captura de Descontinuidade	65
3.9	Discretização Temporal	66
3.9.1	Algoritmo sequencialmente implícito	67
3.9.2	Algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor	68
3.10	Solução dos Sistemas de Equações Lineares	71
3.10.1	Métodos Iterativos	72
3.10.2	Implementação elemento-por-elemento	73
3.10.3	Pré-condicionamento	74
Capítulo 4 Resultados Numéricos		78
4.1	Exemplos de validação	78
4.1.1	Caso unidimensional – injeção de um fluido newtoniano	79
4.1.2	Caso unidimensional – injeção de um fluido pseudoplástico	82
4.1.3	Problema clássico de cinco poços	83
4.2	Exemplos Numéricos	92
4.2.1	Problema clássico de cinco poços	92
4.2.2	Simulação de um poço de petróleo	106
4.2.3	Problema clássico de cinco poços com meio heterogêneo	122
Capítulo 5 Conclusões		139
5.1	Considerações finais	139
5.2	Trabalhos futuros	142
Bibliografia		143

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

Os estudos sobre escoamentos de fluidos não-newtonianos através de meios porosos saturados têm sido bastante estimulados nos últimos anos devido suas amplas aplicações nas áreas de engenharia e ciências físicas. Tais escoamentos ocorrem, por exemplo, em sistemas geofísicos, processos de recuperação de óleo, engenharia de polímeros e processos de filtração [7].

Um entendimento profundo sobre o escoamento de fluidos não-newtonianos através de meios porosos é de fundamental importância para diversas aplicações nas áreas de engenharia. Nas últimas décadas, muitos estudos quantitativos e experimentais trouxeram consideráveis progressos para a compreensão do comportamento de um único fluido não-newtoniano escoando através de um meio poroso. Entretanto, são encontrados poucos trabalhos sobre escoamento multifásico de fluidos não-newtonianos através de meios porosos ou aproximações numéricas para tais análises. Para escoamentos de fluidos não-newtonianos através de meios porosos, as equações governantes apresentam fortes não-linearidades mesmo no caso de escoamento de um único fluido, isto porque a viscosidade aparente do fluido não-newtoniano é expressa por uma função altamente não-linear da taxa de deformação do escoamento. A solução para tais problemas em geral é alcançada somente com a utilização de métodos numéricos [38].

Os problemas de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis através de meios porosos aplicam-se à indústria de petróleo principalmente em simulações de

reservatórios. Tradicionalmente, os simuladores de reservatórios utilizam o método das diferenças finitas para discretizar as equações diferenciais parciais governantes. Como as equações governantes são altamente não-lineares e nesse tipo de problema é comum o desenvolvimento de frentes abruptas, cuidados especiais devem ser tomados tanto para representar essas não-linearidades quanto para evitar o surgimento de oscilações espúrias nas proximidades das frentes. Este último problema é geralmente contornado empregando-se esquemas de diferenças *upwind*. Infelizmente, tais esquemas dissipam artificialmente as frentes abruptas e conduzem a resultados que são sensíveis à orientação da malha computacional. Muitos simuladores comerciais tratam as não-linearidades do problema empregando métodos explícitos na discretização temporal. Recentemente, os métodos totalmente implícitos têm se tornado mais populares por serem mais robustos e incondicionalmente estáveis. Em alguns problemas os métodos implícitos são também mais eficientes que os métodos explícitos porque possuem menos restrições quanto ao incremento de tempo [21]. Aziz e Settari [2] apresentam uma ampla revisão deste tema e realizam comparações entre os diferentes esquemas de diferenças finitas usados em simuladores comerciais.

A existência de estruturas geológicas com geometrias complexas, tais como falhas e estratificações, e a presença de heterogeneidades podem influenciar decisivamente no escoamento dos fluidos através destas formações. Portanto, métodos de discretização espacial voltados para malhas não-estruturadas são extremamente atraentes para a simulação de escoamentos na presença de cenários complexos. Os simuladores de reservatórios comerciais geralmente não possuem grande flexibilidade para o tratamento de geometrias complexas, devido principalmente ao emprego de métodos de diferenças finitas como a técnica principal de discretização espacial [10].

As principais dificuldades encontradas na resolução de problemas de escoamento multifásico de fluidos em meios porosos estão ligadas às fortes não-linearidades presentes nas relações constitutivas e ao fato de que esses tipos de problemas geralmente são dominados pelos efeitos convectivos onde a utilização de métodos numéricos clássicos além de resultar em oscilações espúrias mostra também excessiva difusão artificial [20]. Adicionalmente, o cálculo da velocidade utilizando diretamente a lei de Darcy, a qual necessita de uma multiplicação pelo gradiente de

pressão, acarreta perda na precisão dos resultados e não garante o princípio de conservação de massa [27].

Diversos autores têm apresentado nos últimos anos diferentes formulações que são empregadas na discretização de problemas de escoamento multifásico de fluidos em meios porosos, onde o modelo matemático é expresso por duas equações diferenciais parciais, uma conhecida como equação da pressão e outra conhecida como equação da saturação. Biswas e Carey [4] utilizam uma formulação que resolve a pressão de forma implícita e a saturação de forma explícita (IMPES – *implicit pressure/explicit saturation*), sendo empregada a formulação de elementos finitos de Galerkin/mínimos quadrados. Durlofsky [14] utiliza elementos finitos mistos para a pressão e a velocidade e técnicas de volumes finitos para a equação da saturação. Já Douglas *et al.* [13] empregam a combinação de métodos de elementos finitos mistos para a equação da pressão e o método das características para acompanhar a evolução da frente de saturação, em ambientes de computação paralela [12]. Deb *et al.* [11] e Silva [34] empregam uma formulação de elementos finitos com refinamento de malha adaptativo do tipo *hp* onde a equação da saturação é solucionada com a formulação SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) acrescida de um operador de captura de descontinuidade. Masud e Hughes [27] discutem os problemas que surgem quando a velocidade é calculada diretamente a partir da lei de Darcy e apresentam uma formulação estabilizada de elementos finitos mistos para escoamentos de um único fluido através de meios porosos. Para problemas de escoamento de fluidos miscíveis em meios porosos Loula *et al.* [22] e Malta *et al.* [24] utilizaram uma estratégia de pós-processamento do campo de velocidades para recuperar a precisão na aproximação da velocidade onde todas as variáveis do problema foram aproximadas por interpolações Lagrangianas de mesma ordem. Langtangen [21] compara os resultados obtidos a partir do emprego de diferentes formulações de elementos finitos. Nos casos onde os efeitos capilares foram significativos os campos de pressão e de saturação mostraram-se suaves e todas as formulações utilizadas por Langtangen [21] apresentaram bons resultados. Por outro lado, segundo Langtangen [21] foram encontradas dificuldades para representar a frente de saturação formada quando os efeitos capilares foram negligenciados, sendo tais dificuldades superadas com o emprego de uma formulação de Petrov-Galerkin que acrescenta estabilidade tanto na direção das linhas de corrente quanto na direção do gradiente de saturação. Langtangen [21] mostrou também em seu

estudo comparações entre as eficiências de diferentes métodos iterativos combinados a diversas técnicas de pré-condicionamento. Coutinho *et al.* [9] apresentam um algoritmo DMP (*Dynamic Mesh Partition*) onde o domínio de elementos finitos é particionado de acordo com um critério de estabilidade, baseado em um número de *Courant* local, e um critério de precisão, baseado em variações locais do gradiente da solução. Coutinho e Alves [8] apresentam uma formulação estabilizada de elementos finitos utilizando técnicas de solução em ambientes de computação paralela para escoamentos miscíveis em meios porosos. Juanes e Patzek [20] utilizam uma formulação estabilizada de elementos finitos, a qual baseia-se na decomposição das variáveis de interesse em multiescalas, para escoamentos tanto de fluidos imiscíveis quanto de fluidos miscíveis em meios porosos. Parsons e Coutinho [28] destacam um melhor desempenho do método multigrid na solução do sistema de equações referente à equação da pressão quando comparado com o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel.

O escoamento incompressível bifásico de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos aplica-se por exemplo a operações de perfurações de poços de petróleo, onde o fluido de perfuração possui comportamento não-newtoniano e sob determinadas condições invade o reservatório deslocando o fluido residente. Este tipo de simulação permite portanto analisar o problema da perda do fluido de perfuração durante a perfuração de poços.

Wu e Pruess [37] tratam do escoamento de fluidos não-newtonianos através de meios porosos. Esses autores apresentam um tratamento numérico detalhado para o modelo de lei das potências e para o modelo de fluido de *Bingham*. Em seu trabalho Wu e Pruess [37] utilizam o método das diferenças finitas na discretização espacial das equações governantes. Zhu *et al.* [39] também utilizam o método das diferenças finitas para simular o escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos, porém implementam um modelo de fluido não-newtoniano conhecido como modelo hiperbólico. Chiu *et al.* [7] apresentam uma formulação de elementos finitos para o escoamento de fluidos não-newtonianos em meios porosos. Esses autores apresentam dois modelos de fluidos não-newtonianos, ambos baseados no modelo de lei das potências, conhecidos respectivamente por modelo de Kozeny e modelo de Teeuw e

Hasselink. Chui *et al.* [7] estudaram os efeitos dos parâmetros tanto dos fluidos não-newtonianos quanto do meio poroso sobre a solução do problema.

Neste trabalho apresenta-se uma formulação estabilizada de elementos finitos para a simulação de escoamentos incompressíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos. Esta formulação é uma importante ferramenta para a simulação de invasão de fluidos durante operações de perfuração de poços de petróleo. O modelo de Kozeny mostrado em [7] é usado para descrever o comportamento dos fluidos não-newtonianos. A equação da saturação é aproximada pelo método SUPG [5] acrescido de um termo de captura de choque do tipo CAU [1], a equação da pressão é aproximada pelo método de Galerkin e é usada uma estratégia de pós-processamento para recuperar a velocidade de Darcy, garantindo a conservação de massa [24].

Uma formulação variacional semi-discreta é utilizada para resolver o conjunto acoplado de equações diferenciais parciais que descreve o problema. O conjunto acoplado de equações diferenciais ordinárias resultante da discretização espacial será discretizado no tempo utilizando o método trapezoidal generalizado apresentado por Hughes [18]. Para realizar o avanço da solução do problema no tempo adota-se uma estratégia baseada no algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor mostrado em Coutinho e Alves [8]. Neste algoritmo é necessário, a cada iteração não-linear ou multicorreção, resolver três sistemas de equações lineares distintos. Esses sistemas de equações lineares referem-se, respectivamente, à pressão, velocidade e saturação. No caso do sistema de equações referente à pressão a matriz de coeficientes é simétrica positiva-definida e para resolvê-lo aplica-se o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel (PCG). No cálculo das velocidades pós-processadas o sistema de equações também possui uma matriz de coeficientes simétrica positiva-definida porém neste caso a solução é alcançada com a utilização do método de Jacobi livre de matrizes. A técnica de pós-processamento do campo de velocidades utilizada baseia-se na formulação variacional da lei de Darcy combinada com o resíduo da equação de balanço de massa [24]. O sistema de equações referente à saturação é não-simétrico e o método GMRES (*Generalized Minimal Residual*) com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel descrito em [33] é utilizado para resolvê-lo.

1.2 Objetivos do trabalho

Os objetivos do presente trabalho podem ser enumerados da seguinte maneira:

i) implementar uma formulação de elementos finitos estabilizada para simular escoamento de fluidos não-newtonianos através de meios porosos;

ii) analisar o comportamento da viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos e sua influência na solução do problema;

iii) verificar se o tratamento numérico dos fluidos não-newtonianos interfere significativamente no comportamento tanto dos métodos iterativos quanto do algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor, afim de não comprometer a qualidade dos resultados;

iv) fornecer subsídios para o estudo do fenômeno de perda do fluido de perfuração durante operações de perfurações de poços de petróleo (escala de poço) e simular o deslocamento de fluidos não-newtonianos no interior dos reservatórios acompanhando sua variação de viscosidade aparente (escala de reservatório).

1.3 Organização do texto

Os próximos capítulos deste trabalho encontram-se assim organizados. O Capítulo 2 apresenta a formulação matemática do problema estudado. Nele são apresentadas as considerações empregadas na solução do problema, as relações constitutivas do modelo, a forma final das equações governantes além das condições de contorno e condições iniciais necessárias para completar o modelo matemático. No Capítulo 3 apresenta-se a formulação de elementos finitos empregada. Neste capítulo descreve-se detalhadamente a formulação estabilizada de elementos finitos, os métodos utilizados para solucionar os sistemas de equações lineares oriundos da discretização de elementos finitos, o algoritmo de avanço no tempo e as matrizes de elemento que compõem o sistema a ser

solucionado. No Capítulo 4 encontram-se os resultados numéricos que demonstram a potencialidade e a aplicabilidade da formulação apresentada. Finalmente no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais e as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Formulação Matemática

A modelagem matemática de escoamentos multifásicos de fluidos imiscíveis em meios porosos é fundamentada nas equações básicas da mecânica do contínuo. Tais equações são expressas pelas leis de conservação de massa (equação da continuidade), conservação da quantidade de movimento (equação do movimento) e conservação de energia.

Neste trabalho será estudado o caso específico de um escoamento bifásico e isotérmico de fluidos imiscíveis e incompressíveis através de um meio poroso rígido cujo volume não se altera durante o processo de escoamento. Como se trata de um problema isotérmico as equações governantes neste caso são expressas pelas equações da continuidade e do movimento.

As hipóteses e as considerações utilizadas neste trabalho serão discutidas em detalhes na Seção 2.1. Além disso as equações que governam o processo de escoamento multifásico bem como as relações constitutivas que completam a modelagem do problema também serão apresentadas nesta seção. As Seções 2.2 e 2.3 apresentam as formulações alternativas do problema conforme apresentado por Aziz e Settari [2], Helmig [17], Langtangen [21] e Peaceman [29]. A Seção 2.4 faz uma recapitulação das equações que modelam o problema enquanto a Seção 2.5 mostra o conjunto de condições de contorno e condições iniciais necessário para completar a modelagem matemática.

Do ponto de vista matemático considera-se que o problema em questão apresenta um domínio $\Omega \subset R^2$ com um contorno Γ o qual se encontra equipado com um vetor normal unitário externo $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$. O vetor posição é representado por $\mathbf{x} = (x, y)$ e o tempo por $t \in [0, T]$.

2.1 Equações Governantes

O problema de escoamento multifásico e isotérmico de fluidos imiscíveis através de meios porosos é governado pelas equações da continuidade e do movimento [26], mostradas respectivamente a seguir:

$$\frac{\partial(\mathbf{f} s_i \mathbf{r}_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i) - q_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{f} \mathbf{r}_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \mathbf{u}_i \nabla \cdot (\mathbf{r}_i \mathbf{u}_i) - \nabla \cdot \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \mathbf{g}, \quad (2)$$

onde \mathbf{v}_i é a velocidade superficial de escoamento da fase i [LT^{-1}], \mathbf{u}_i é a velocidade intersticial de escoamento da fase i [LT^{-1}], \mathbf{r}_i é a massa específica da fase i [ML^{-3}], q_i é a vazão mássica por unidade de volume da fase i [$\text{MT}^{-1}\text{L}^{-3}$], s_i é a saturação da fase i [adimensional], \mathbf{f} é a porosidade do meio [adimensional], \mathbf{s}_i é o tensor tensão da fase i [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$] e \mathbf{g} é o vetor campo gravitacional [LT^{-2}].

A velocidade superficial de escoamento, utilizada amplamente em substituição à velocidade intersticial, é medida desconsiderando a presença da matriz porosa [25]. As velocidades superficial e intersticial se relacionam da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{f} \mathbf{u}_i. \quad (3)$$

Na modelagem de um problema constituído por n fases são necessárias equações da continuidade e do movimento para cada fase existente. É importante ressaltar que na equação da continuidade (1) a vazão mássica por unidade de volume q_i será positiva quando se tratar de fonte e negativa quando se tratar de sumidouro.

As equações (1) e (2) governam o escoamento de n fluidos imiscíveis através de um meio poroso. Essas equações são definidas em escala microscópica e geralmente o que se faz [17] em mecânica dos fluidos é trabalhar em escala macroscópica, ou seja, utiliza-se um valor médio das propriedades microscópicas de uma certa quantidade de substância contida em um determinado volume (REV – *Representative Elementary*

Volume). Assim, segundo Helmig [17], na transição da escala microscópica para a escala macroscópica a equação do movimento toma a forma da lei de Darcy. De acordo com Massarani [25] a lei de Darcy é utilizada indiscriminadamente na literatura sobre a fluidodinâmica em meios porosos.

Cada problema de escoamento em meios porosos tem suas particularidades e portanto deve ser tratado por meio de diferentes estratégias. Segundo Perry *et al.* [30], problemas de escoamentos de fluidos envolvendo formações geológicas, como por exemplo reservatórios de petróleo e aquíferos, são problemas que apresentam escoamento lento e neles aplica-se a lei de Darcy em substituição à equação do movimento. Nesses problemas o número de *Reynolds*, grandeza que expressa o balanço entre os efeitos convectivos e os efeitos viscosos, é menor que um ($Re < 1$). Alguns autores, como por exemplo Helmig [17], apresentam valores limites para o número de *Reynolds* onde a lei de Darcy pode ser aplicada.

Massarani [25] descreve as considerações e hipóteses que permitem simplificar a equação do movimento na equação de Darcy. Helmig [17] faz um apanhado dos diversos trabalhos que tratam a equação de Darcy como uma simplificação da equação do movimento.

Nos escoamentos em meios porosos onde o número de *Reynolds* é baixo as forças viscosas predominam e a queda de pressão é proporcional à viscosidade do fluido e à sua velocidade superficial. No caso de escoamentos onde o número de *Reynolds* é elevado a queda de pressão é proporcional à densidade do fluido e ao quadrado de sua velocidade superficial [30].

Como neste trabalho o meio poroso é um reservatório de petróleo e através dele o escoamento dos fluidos é lento, utiliza-se a equação de Darcy, generalizada para o caso de escoamento multifásico de fluidos imiscíveis, em substituição à equação do movimento. A equação de Darcy generalizada para o caso de escoamento multifásico tem a seguinte forma:

$$\mathbf{v}_i = -\frac{k_{ri}}{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{K}(\nabla p_i - \mathbf{r}_i \mathbf{g}), \quad (4)$$

onde \mathbf{K} é o tensor permeabilidade absoluta do meio [L^2], k_{ri} é a permeabilidade relativa da fase i [adimensional], $\boldsymbol{\eta}$ é a viscosidade dinâmica da fase i [$ML^{-1}T^{-1}$], p_i é a pressão da fase i [$ML^{-1}T^{-2}$].

É comum definir a grandeza escalar mobilidade de fase como:

$$l_i = \frac{k_{ri}}{m} \quad (5)$$

O tensor permeabilidade absoluta e o vetor campo gravitacional são definidos no R^2 , respectivamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

Neste trabalho considera-se a simetria do tensor permeabilidade absoluta, isto é, em todos os casos analisados $k_{xy}=k_{yx}$.

Nas subseções seguintes será apresentada a forma geral das equações tanto para o caso de escoamento multifásico quanto para o caso de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos. Apresenta-se também, nestas subseções, o conjunto de informações que caracterizam o sistema, as denominadas equações constitutivas.

2.1.1 Forma geral das equações para escoamentos multifásicos

A forma geral das equações para o caso de escoamento multifásico de fluidos imiscíveis através de meios porosos é obtida combinando a equação da continuidade com a equação de Darcy. Desta forma tem-se:

$$\frac{\partial(\mathbf{f} s_i \mathbf{r}_i)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\mathbf{r}_i \frac{k_{ri}}{m} \mathbf{K} (\nabla p_i - \mathbf{r}_i \mathbf{g}) \right) - q_i = 0. \quad (8)$$

Além da equação (8) dois tipos de relações suplementares são necessárias. O primeiro tipo relaciona as saturações das fases enquanto o segundo tipo relaciona as pressões das fases através do conceito de pressão capilar. Então tem-se:

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1 \quad (9)$$

$$p_{cay} = p_a - p_y = f(s_1, \dots, s_n) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \neq \mathbf{y} . \quad (10)$$

Nas equações (9) e (10) n representa o número de fases existente e a pressão capilar p_{cay} entre as fases \mathbf{a} e \mathbf{y} depende somente da saturação das fases como será mostrado adiante na Subseção 2.1.5.

As equações (8), (9) e (10) representam um sistema acoplado de equações diferenciais que descreve o escoamento de dois ou mais fluidos imiscíveis através de um meio poroso saturado ou não. O comportamento deste sistema acoplado de equações diferenciais é altamente não-linear pelo fato da pressão capilar e da permeabilidade relativa serem expressas por funções não-lineares das saturações das fases [17]. O caráter não-linear deste sistema acoplado de equações diferenciais é ainda maior quando se trabalha com fluidos não-newtonianos onde, ao contrário dos fluidos newtonianos, a viscosidade não é constante. A viscosidade dos fluidos não-newtonianos podem ser expressas de diferentes formas. Chiu *et al.* [7] e Massarani e Telles [26] apresentam a viscosidade dos fluidos não-newtonianos como uma função da velocidade do escoamento. Por outro lado, Wu e Pruess [37] apresentam a viscosidade dos fluidos não-newtonianos como uma função do gradiente do potencial.

2.1.2 Escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos

No caso específico em que tem-se apenas duas fases (escoamento bifásico), identificadas pelos subíndices w e n os quais representam a fase molhante e a fase não-molhante respectivamente, as equações (8), (9) e (10) têm a seguinte forma:

$$\frac{\partial(\mathbf{f} s_w \mathbf{r}_w)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\mathbf{r}_w \frac{k_{rw}}{\mathbf{m}_w} \mathbf{K} (\nabla p_w - \mathbf{r}_w \mathbf{g}) \right) - q_w = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{f} s_n \mathbf{r}_n)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\mathbf{r}_n \frac{k_{rn}}{\mathbf{m}_n} \mathbf{K} (\nabla p_n - \mathbf{r}_n \mathbf{g}) \right) - q_n = 0 \quad (12)$$

$$s_w + s_n = 1 \quad (13)$$

$$p_c = p_n - p_w. \quad (14)$$

No escoamento bifásico existem quatro incógnitas ou variáveis primárias, são elas as saturações e as pressões de ambas as fases. Aziz e Settari [2], Helmig [17], Langtangen [21] e Peaceman [29] apresentam diferentes estratégias onde as equações (11) e (12) são rearranjadas com objetivo de reduzir o número de variáveis primárias. Neste trabalho optou-se em utilizar apenas s_w e p_n como variáveis primárias. Conforme mostrado por Aziz e Settari [2], Helmig [17], Langtangen [21] e Peaceman [29] outras escolhas de variáveis também são possíveis (p_w - s_n , p_w - s_w , p_n - s_n etc). O resultado da estratégia adotada resulta em duas equações, uma conhecida como equação da pressão e outra conhecida como equação da saturação. O desenvolvimento matemático para se obter as equações da pressão e da saturação será apresentado adiante nas Seções 2.2 e 2.3.

2.1.3 Saturação, saturação residual e saturação efetiva

Os espaços vazios em um meio poroso podem estar completamente ou parcialmente preenchidos por um ou mais fluidos. Quando os vazios do meio poroso estão completamente preenchidos o meio poroso é chamado de saturado. Por outro lado quando os vazios do meio poroso estão parcialmente preenchidos o meio poroso é chamado de não-saturado.

O conceito de saturação surge quando os vazios do meio poroso estão preenchidos por dois ou mais fluidos imiscíveis. Define-se saturação de uma

determinada fase como sendo a fração do volume poroso ocupada por esta fase [3]. Assim no caso em que tenha-se n fases ocupando os vazios de um meio poroso a seguinte relação é verdadeira:

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1. \quad (15)$$

Quando os fluidos que estão ocupando os vazios de um meio poroso são miscíveis o conceito de saturação é substituído pelo conceito de concentração.

Outro conceito muito utilizado é o conceito de saturação residual. A saturação residual de uma determinada fase pode ser entendida como sendo o menor valor possível assumido pela saturação de fase. A saturação residual da fase i é representada por s_{ri} .

Segundo Helmig [17] a definição da saturação efetiva s_e baseia-se nas curvas de permeabilidade relativa e de pressão capilar e pode ser expressa de várias maneiras. Uma das possíveis formas de expressar a saturação efetiva é mostrada a seguir:

$$s_e = \frac{s_w - s_{rw}}{1 - s_{rw}} \quad s_{rw} \leq s_w \leq 1, \quad (16)$$

onde s_e é a saturação efetiva, s_w é a saturação da fase molhante e s_{rw} é a saturação residual da fase molhante.

No caso de um escoamento bifásico onde os subíndices w e n indicam respectivamente a fase molhante e a fase não-molhante respectivamente a saturação efetiva pode ser expressa por:

$$s_e = \frac{s_w - s_{rw}}{1 - s_{rw} - s_m} \quad s_{rw} \leq s_w \leq 1 - s_m, \quad (17)$$

onde s_e é a saturação efetiva, s_w é a saturação da fase molhante, s_{rw} é a saturação residual da fase molhante e s_m é a saturação residual da fase não-molhante.

Helmig [17] apresenta uma discussão detalhada sobre as diferentes definições de saturação efetiva, suas particularidades, aplicações e limitações.

2.1.4 Permeabilidade absoluta e permeabilidade relativa

O tensor permeabilidade absoluta \mathbf{K} definido em (6) mede a habilidade do meio em permitir o escoamento de fluidos através de seus poros. Portanto o tensor permeabilidade absoluta é uma característica intrínseca do meio.

Se os vazios de um meio poroso estiverem sendo ocupados por mais de um fluido, a presença de uma das fases interfere no escoamento das outras fases presentes e vice-versa. Assim o escoamento de cada fase será influenciado tanto pelo meio (permeabilidade absoluta) quanto pela presença das outras fases (permeabilidade relativa). A permeabilidade relativa é portanto uma grandeza adimensional que mede o quanto cada fase influencia no escoamento das demais fases presentes no meio.

As curvas de permeabilidade relativa são obtidas em laboratório através de ensaios realizados sobre amostras do meio poroso. Tais curvas podem ser expressas por funções não-lineares da saturação da fase molhante s_w . Vários autores apresentam diferentes formas de modelar as curvas de permeabilidade relativas em função da saturação da fase molhante s_w . A seguir apresenta-se alguns modelos de permeabilidade relativa para o caso específico de escoamento bifásico.

Chiu *et al.* [7] apresentam as seguintes equações para as permeabilidade relativas das fases molhante e não-molhante respectivamente:

$$k_{rw} = \left(\frac{p_d}{p_c} \right)^{2+3I} \quad (18)$$

$$k_m = \left(1 - \left(\frac{p_d}{p_c} \right)^I \right)^2 \left(1 - \left(\frac{p_d}{p_c} \right)^{2+I} \right) \quad (19)$$

onde k_{rw} é a permeabilidade relativa da fase molhante, k_m é a permeabilidade relativa da fase não-molhante, p_c é a pressão capilar, p_d é a pressão de deslocamento e I é uma constante empírica do modelo.

A pressão de deslocamento p_d é definida como sendo a pressão capilar mínima necessária para que a fase não-molhante comece a penetrar em um meio poroso saturado pela fase molhante.

Um modelo bem mais simples, muito comum em engenharia de petróleo para representar as permeabilidades relativas das fases molhantes e não-molhantes respectivamente, é dado por:

$$k_{rw} = s_w^2 \quad (20)$$

$$k_m = (1 - s_w)^2, \quad (21)$$

onde k_{rw} é a permeabilidade relativa da fase molhante, k_m é a permeabilidade relativa da fase não-molhante e s_w é saturação da fase molhante.

É importante destacar que em todos os modelos apresentados a permeabilidade relativa é uma função não-linear da saturação da fase molhante s_w .

2.1.5 Pressão capilar

A pressão capilar é um efeito que ocorre na interface das fases e pode ser entendida como sendo uma descontinuidade de pressão no interior do meio poroso. A pressão capilar pode ser expressa como a diferença entre as pressões das fases não-molhante e molhante:

$$p_c = p_n - p_w, \quad (22)$$

sendo p_c a pressão capilar, p_n a pressão da fase não-molhante e p_w a pressão da fase molhante.

Em processos multifásicos a pressão capilar pode ser expressa como uma função da saturação da fase molhante s_w , ou seja:

$$p_c = p_c(s_w). \quad (23)$$

Vários autores apresentam diferentes relações entre as curvas de pressão capilar e a saturação da fase molhante s_w . A seguir apresenta-se alguns modelos de pressão capilar para o caso específico de escoamento bifásico.

Helmig [17] apresenta o modelo de *Brooks-Corey* para a pressão capilar:

$$s_e(p_c) = \frac{s_w - s_{rw}}{1 - s_{rw}} = \left(\frac{p_d}{p_c} \right)^I, \quad (24)$$

onde s_e é a saturação efetiva, s_w é a saturação da fase molhante, s_{rw} é a saturação residual da fase molhante, p_d é a pressão de deslocamento, p_c é a pressão capilar e I é uma constante empírica do modelo.

Durlofsky [14] apresenta um modelo que relaciona a pressão capilar e a saturação da fase molhante da seguinte forma:

$$p_c = \frac{p_{c \max}}{\ln\left(\frac{eps}{1 + eps}\right)} \ln\left(\frac{s_w + eps}{1 + eps}\right), \quad (25)$$

onde p_c é pressão capilar, $p_{c \max}$ é a pressão capilar máxima, s_w é a saturação da fase molhante e eps é um parâmetro do modelo.

É importante destacar que em todos os modelos apresentados a pressão capilar é uma função não-linear da saturação da fase molhante s_w .

2.1.6 Viscosidade e viscosidade aparente

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a ação de uma tensão de cisalhamento, não importando quão pequena essa tensão de cisalhamento possa ser. Os

fluidos podem ser classificados de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação.

Os fluidos nos quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação são chamados de fluidos newtonianos, então:

$$\mathbf{t} \propto \frac{d\mathbf{g}}{dt}. \quad (26)$$

A constante de proporcionalidade na equação (26) é a viscosidade absoluta ou viscosidade dinâmica \mathbf{m} Portanto a lei de Newton da viscosidade é dada por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{m} \frac{d\mathbf{g}}{dt}. \quad (27)$$

Os fluidos nos quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação são chamados de fluidos não-newtonianos. Segundo Fox [16] numerosas equações empíricas têm sido propostas para elaborar o modelo matemático das relações observadas entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação no caso de fluidos não-newtonianos. Para muitas aplicações práticas de engenharia essas relações entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação podem ser adequadamente representadas pelo modelo exponencial, conhecido como lei das potências, dado por:

$$\mathbf{t} = H \left(\frac{d\mathbf{g}}{dt} \right)^n, \quad (28)$$

onde H é chamado de parâmetro de consistência e o expoente n é o índice de comportamento do escoamento.

A equação (28) se reduz à lei de Newton da viscosidade quando $n = 1$ e $H = \mathbf{m}$ É comum reescrever a equação (28) da seguinte forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{h} \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \quad (29)$$

sendo:

$$\mathbf{h} = H \left(\frac{d\mathbf{g}}{dt} \right)^{n-1}, \quad (30)$$

onde \mathbf{h} é a viscosidade aparente do fluido não-newtoniano.

Os fluidos em que a viscosidade aparente diminui com taxas de deformações crescentes ($n < 1$) são chamados de pseudoplásticos. Se a viscosidade aparente aumentar com taxas de deformação crescentes ($n > 1$) o fluido é chamado de dilatante.

Existem fluidos que se comportam como um sólido até que uma tensão de cisalhamento mínima seja excedida e, subsequentemente, apresentam uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. Um fluido que apresenta tais características é denominado fluido plástico de Bingham ou simplesmente fluido de Bingham. O modelo apropriado para a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação para o fluido de Bingham é dado por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\min} + \mathbf{m}_b \frac{d\mathbf{g}}{dt}, \quad (31)$$

onde \mathbf{m}_b é o coeficiente de viscosidade do fluido de Bingham e \mathbf{t}_{\min} é a tensão de cisalhamento mínima do fluido de Bingham.

A Figura 1 apresenta as curvas típicas da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação para diferentes tipos de fluidos.

No caso de escoamento de fluidos não-newtonianos através de meios porosos os parâmetros que caracterizam o meio também influenciam na viscosidade aparente.

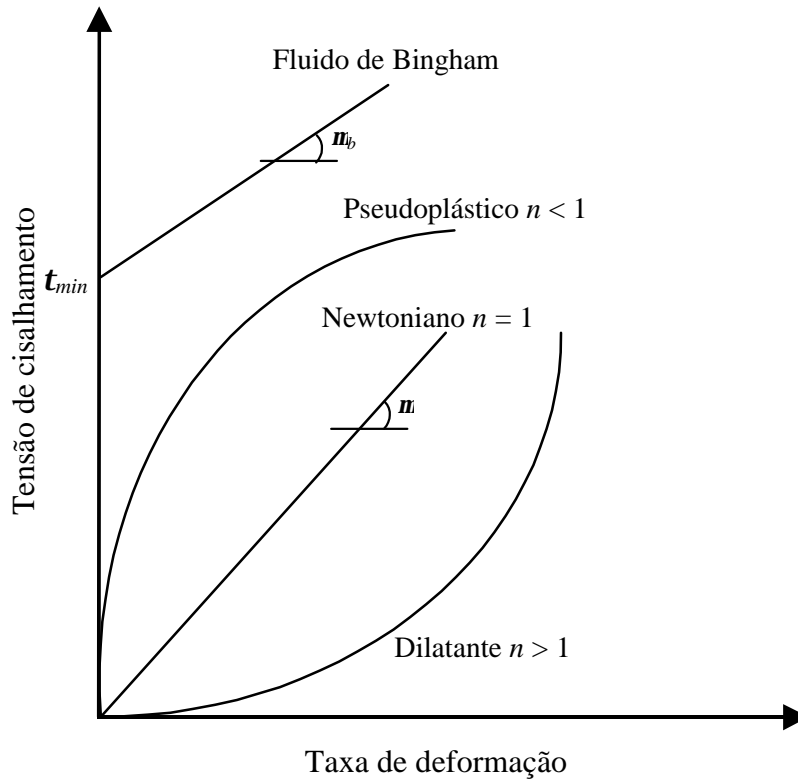


Figura 1 – Curvas típicas da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação para diferentes tipos de fluidos.

Vários modelos para viscosidade aparente de fluidos não-newtonianos em meios porosos têm sido propostos. Chiu *et al.* [7] apresentam um modelo de lei das potências onde a viscosidade dos fluidos não-newtonianos é uma função da velocidade do escoamento. Massarani e Telles [26] apresentam um modelo semelhante ao modelo apresentado por Chiu *et al.* [7]. Wu e Pruess [37] apresentam tanto um modelo de lei das potências quanto um modelo de fluido de Bingham onde a viscosidade dos fluidos não-newtonianos é uma função do gradiente do ¹potencial.

Neste trabalho o modelo de Kozeny, que é baseado no modelo de lei das potências apresentado por Chiu *et al.* [7], é utilizado para se obter a viscosidade aparente do fluido não-newtoniano. Tal modelo é expresso por:

$$\mathbf{h} = \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n 150^{\frac{1-n}{2}} (\mathbf{k}_a \mathbf{f})^{\frac{1-n}{2}} \|\mathbf{v}_t\|^{n-1}, \quad (32)$$

¹ Alguns autores substituem a nomenclatura potencial por pressão piezométrica.

onde H é o parâmetro de consistência, n é o índice de comportamento do escoamento, k_a é permeabilidade absoluta na direção do escoamento, f é a porosidade do meio e $\|\mathbf{v}_t\|$ é a norma euclidiana da velocidade total do escoamento.

Assim como a permeabilidade relativa e a pressão capilar a viscosidade aparente de fluidos não-newtonianos também é expressa por uma função não-linear. No caso do modelo de Kozeny, equação (32), a viscosidade aparente é uma função não-linear da velocidade do escoamento e não da saturação da fase molhante s_w . Como o problema de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos é descrito por um sistema acoplado de equações diferenciais, como pode ser observado mais adiante na Seção 2.4, entende-se que a viscosidade aparente possui uma dependência não-linear indireta com a saturação da fase molhante s_w .

2.2 Equação da Pressão

A equação da pressão, segundo Langtangen [21], é obtida conforme mostrado abaixo.

As equações da continuidade, no caso de escoamentos incompressíveis, para as fases molhante e não-molhante são dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial(f s_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_w - \frac{q_w}{\mathbf{r}_w} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial(f s_n)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_n - \frac{q_n}{\mathbf{r}_n} = 0. \quad (34)$$

Somando as equações (33) e (34) tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial[f(s_w + s_n)]}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_w + \mathbf{v}_n) - (Q_w + Q_n) = 0 \quad (35)$$

onde:

$$Q_i = \frac{q_i}{\mathbf{r}_i}, i = w, n. \quad (36)$$

Assim, levando em conta a relação (13), a equação (35) toma a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_t - Q_t = 0, \quad (37)$$

onde:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_n \quad (38)$$

$$Q_t = Q_w + Q_n. \quad (39)$$

Sendo \mathbf{v}_t a velocidade total de percolação das fases e Q_t a vazão volumétrica total das fases por unidade de volume.

A velocidade total de percolação das fases \mathbf{v}_t , deve ser escrita em função das variáveis primárias do problema, p_n e s_w , como será apresentado a seguir.

Sabendo-se que a velocidade de percolação de cada fase é dada pela Lei de Darcy, generalizada para escoamentos multifásicos, tem-se:

$$\mathbf{v}_w = -\mathbf{K} \mathbf{I}_w (\nabla p_w - \mathbf{r}_w \mathbf{g}) \quad (40)$$

$$\mathbf{v}_n = -\mathbf{K} \mathbf{I}_n (\nabla p_n - \mathbf{r}_n \mathbf{g}). \quad (41)$$

Somando as equações (40) e (41) tem-se:

$$\mathbf{v}_t = -\mathbf{K} \mathbf{I}_w \nabla p_w - \mathbf{K} \mathbf{I}_n \nabla p_n + \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n). \quad (42)$$

Pela definição da pressão capilar sabe-se que:

$$p_w = p_n - p_c. \quad (43)$$

Calculando o gradiente da equação (43) obtém-se:

$$\nabla p_w = \nabla p_n - \nabla p_c. \quad (44)$$

Como a pressão capilar é uma função da saturação da fase molhante s_w , podemos escrever a equação (44) da seguinte maneira:

$$\nabla p_w = \nabla p_n - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w. \quad (45)$$

Substituindo a equação (45) na equação (42) temos a seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_t = -\mathbf{K}\mathbf{I}_w \left(\nabla p_n - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right) - \mathbf{K}\mathbf{I}_n \nabla p_n + \mathbf{K}\mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n). \quad (46)$$

Manipulando a equação (46) chegamos a forma final da expressão da velocidade total de percolação das fases em função da pressão da fase não-molhante p_n e da saturação da fase molhante s_w :

$$\mathbf{v}_t = -\mathbf{K}\mathbf{I}_t \nabla p_n + \mathbf{K}\mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + \mathbf{K}\mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n), \quad (47)$$

onde:

$$\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_w + \mathbf{I}_n. \quad (48)$$

As equações (37) e (47) compõe a modelagem do sistema pressão/velocidade. A equação (47) é conhecida como equação da velocidade. A equação da pressão é obtida substituindo a equação (47) na equação (37) da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \left[-\mathbf{K} \mathbf{I}_t \nabla p_n + \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) \right] - Q_t = 0. \quad (49)$$

A equação (49) é conhecida como equação da pressão, porém é comum a utilização das equações (37) e (47) para representarem, respectivamente, a equação pressão e a equação da velocidade total de percolação das fases.

Segundo Peaceman [29] a equação da pressão para escoamentos incompressíveis, que é o caso da equação (49), é uma equação elíptica enquanto no caso de escoamentos ligeiramente compressíveis a equação resultante será uma equação parabólica.

2.3 Equação da Saturação

A equação da saturação, segundo Aziz e Settari [2], Helmig [17] e Peaceman [29], é obtida conforme mostrado abaixo.

Primeiramente utiliza-se a definição de pressão capilar, equação (44), na equação da velocidade da fase não-molhante, equação (41), o que fornece a seguinte equação:

$$\mathbf{v}_n = -\mathbf{K} \mathbf{I}_n (\nabla p_w + \nabla p_c - \mathbf{r}_n \mathbf{g}). \quad (50)$$

A combinação das equações (40) e (50) fornece a equação do escoamento fraccional:

$$\mathbf{v}_w = \frac{I_w}{I_n} \mathbf{v}_n + I_w \mathbf{K} (\nabla p_c + \mathbf{r}_w \mathbf{g} - \mathbf{r}_n \mathbf{g}). \quad (51)$$

Utilizando-se a definição de velocidade total de percolação das fases, equação (38), em conjunto com a equação (51) obtém-se o seguinte:

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{1 + \frac{I_w}{I_n}} [\mathbf{v}_t - I_w \mathbf{K}(\nabla p_c + \mathbf{r}_w \mathbf{g} - \mathbf{r}_n \mathbf{g})]. \quad (52)$$

Substituindo a equação (52) na equação (34) tem-se:

$$\nabla \cdot [f_n \mathbf{v}_t - h_w \mathbf{K}(\nabla p_c + \mathbf{r}_w \mathbf{g} - \mathbf{r}_n \mathbf{g})] = \mathbf{f} \frac{\partial s_w}{\partial t} + Q_n, \quad (53)$$

onde definem-se as funções de fluxo fracionário como:

$$f_n = \frac{I_n}{I_w + I_n} \quad (54)$$

$$f_w = \frac{I_w}{I_w + I_n}, \quad (55)$$

e a função h_w também é definida como sendo uma função das mobilidades de fase:

$$h_w = \frac{I_w I_n}{I_w + I_n}. \quad (56)$$

Alguns termos da equação (53), que são funções da saturação da fase molhante s_w , podem ser escritos da seguinte forma:

$$\nabla p_c = \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \quad (57)$$

$$\nabla \cdot (f_n \mathbf{v}_t) = \mathbf{v}_t \cdot \nabla f_n + f_n \nabla \cdot (\mathbf{v}_t) = \mathbf{v}_t \cdot \frac{df_n}{ds_w} \nabla s_w + f_n Q_t \quad (58)$$

$$\nabla \cdot [h_w \mathbf{K}(\mathbf{r}_w \mathbf{g} - \mathbf{r}_n \mathbf{g})] = \mathbf{K} \mathbf{g}(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}_n) \cdot \nabla h_w = \mathbf{K} \mathbf{g}(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}_n) \cdot \frac{dh_w}{ds_w} \nabla s_w. \quad (59)$$

Analisando as equações (54) e (55) pode-se concluir que:

$$\frac{df_n}{ds_w} = -\frac{df_w}{ds_w} \quad (60)$$

$$f_w + f_n = 1. \quad (61)$$

Então a seguinte simplificação pode ser escrita:

$$-Q_n + f_n Q_t = Q_w - f_w Q_t. \quad (62)$$

Neste ponto, fazendo as simplificações e substituições necessárias na equação (53) chega-se a seguinte equação:

$$\mathbf{f} \frac{\partial s_w}{\partial t} + \left[\mathbf{v}_t \frac{df_w}{ds_w} + \mathbf{K} \mathbf{g} G \right] \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \left[\mathbf{K} h_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right] + Q_w - f_w Q_t = 0, \quad (63)$$

onde:

$$G = (\mathbf{r}_w - \mathbf{r}_n) \frac{dh_w}{ds_w}. \quad (64)$$

De acordo com Langtangen [21] nas vizinhanças dos poços as fontes e os sumidouros, respectivamente, injetam e extraem fluidos na proporção de suas mobilidades locais. Então pode-se realizar a seguinte simplificação:

$$Q_w = f_w Q_t = f_w \nabla \cdot \mathbf{v}_t. \quad (65)$$

Substituindo (65) em (63) chega-se finalmente à forma final da equação da saturação que é a seguinte:

$$\mathbf{f} \frac{\partial s_w}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla s_w = 0. \quad (66)$$

Na equação (66) \mathbf{v}_a é a velocidade aparente de transporte do fluido e \mathbf{D} , de acordo com a nomenclatura utilizada por Helmig [17], é o tensor de difusão. Segundo Durlofsky [14] os efeitos capilares introduzem ao tensor \mathbf{D} efeitos semelhantes aos efeitos difusivos, embora este não seja um tensor de difusão propriamente dito. Abaixo são apresentadas as equações que definem as duas grandezas acima descritas.

A velocidade aparente de transporte do fluido é expressa por:

$$\mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \end{bmatrix}, \quad (67)$$

onde:

$$v_{ax} = v_x \frac{df_w}{ds_w} + (k_x g_x + k_{xy} g_y) G \quad (68)$$

$$v_{ay} = v_y \frac{df_w}{ds_w} + (k_{xy} g_x + k_y g_y) G \quad (69)$$

O tensor de difusão é expresso por:

$$\mathbf{D} = h_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{K}. \quad (70)$$

Do ponto de vista físico o primeiro termo da equação (66) é o termo de acúmulo, o segundo é o termo convectivo e o terceiro é o termo difusivo.

A equação da saturação, equação (66), tem um caráter altamente não-linear visto que algumas das grandezas que compõe esta equação, como por exemplo a pressão capilar e a permeabilidade relativa das fases, são funções não-lineares da saturação da fase molhante s_w . Quando se trata de escoamento de fluidos não-newtonianos o caráter não-linear da equação (66) é ainda maior uma vez que a viscosidade que será utilizada na equação de Darcy será a viscosidade aparente, que pode ser expressa por uma função não-linear tanto da velocidade do escoamento quanto do gradiente do potencial.

Segundo Peaceman [29] a equação da saturação, equação (66), é uma equação parabólica-hiperbólica. O comportamento da equação (66) é determinado pelo valor da

derivada da pressão capilar em função da saturação da fase molhante $\left(\frac{dp_c}{ds_w}\right)$. Quando a derivada da pressão capilar em função da saturação da fase molhante apresentar valores significativos a equação (66) terá um comportamento predominantemente parabólico. Por outro lado quando a derivada da pressão capilar em função da saturação da fase molhante apresentar valores pequenos $\left(\frac{dp_c}{ds_w} \cong 0\right)$ a equação (66) terá um comportamento predominantemente hiperbólico [17].

2.4 Sistema Acoplado de Equações Diferenciais

Com base nas Seções 2.2 e 2.3 pode-se agora escrever o sistema completo de equações diferenciais objeto de estudo deste trabalho, dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_t - Q_t = 0 \quad (37)$$

$$\mathbf{v}_t = -\mathbf{K} \mathbf{I}_t \nabla p_n + \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) \quad (47)$$

$$\mathbf{f} \frac{\partial s_w}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla s_w = 0. \quad (66)$$

A equação (37) é a equação da pressão, a equação (47) é a equação da velocidade total de percolação das fases e a equação (66) é a equação da saturação. A equação da velocidade total de percolação das fases é responsável pelo acoplamento das equações da pressão e da saturação.

De acordo com Durlofsky [14] o sistema acoplado de equações diferenciais parciais acima descrito pode ser adimensionalizado identificando-se valores característicos para cada variável, sendo que as equações adimensionais resultantes dependem de dois grupos adimensionais. O primeiro grupo adimensional quantifica a relação entre os efeitos gravitacionais e os efeitos convectivos e é dado por:

$$G_d = \frac{K_c \Delta r \|\mathbf{g}\|}{\mathbf{m}_e v_{Tc}}, \quad (71)$$

onde K_c é a permeabilidade característica do reservatório, $\Delta r = r_w - r_n$, \mathbf{m}_e é a viscosidade característica do escoamento, \mathbf{m}_{Tc} é a velocidade total característica do escoamento. O segundo grupo adimensional quantifica a relação entre os efeitos convectivos e os efeitos relacionados à pressão capilar e é dado por:

$$P_e = \frac{\mathbf{m}_e v_{Tc} L_c}{\bar{p}_c K_c}, \quad (72)$$

onde L_c é o comprimento característico do reservatório e \bar{p}_c é a pressão capilar característica.

Langtangen [21] também apresenta dois grupos adimensionais que, da mesma maneira como descrito por Durlafsky [14], permitem tratar o sistema de equações diferenciais em estudo de forma adimensional. O primeiro grupo adimensional apresentado por Langtangen [21] é dado por:

$$V_c = \frac{\dot{p}_c K_c t_c}{\mathbf{m}_e L_c^2}, \quad (73)$$

onde \dot{p}_c é a pressão característica do reservatório e t_c é o tempo característico da análise. O segundo grupo adimensional apresentado por Langtangen [21] é dado por:

$$W_c = \frac{\mathbf{r}_c g_c K_c t_c}{\mathbf{m}_e L_c}, \quad (74)$$

onde \mathbf{r}_c é a massa específica característica e g_c é um valor característico que representa os efeitos gravitacionais.

Conforme apresenta Langtangen [21] o valor real de uma determinada grandeza é obtido multiplicando seu valor característico por seu valor adimensionalizado usado na simulação. Por exemplo, no caso da viscosidade tem-se:

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_c \mathbf{m}_i^*, i = w, n, \quad (75)$$

onde w e n indicam as fases molhante e não-molhante respectivamente e o superíndice asterístico identifica o valor adimensionalizado da grandeza.

2.5 Condições de contorno e condições iniciais

Para completar a descrição do problema é preciso especificar um conjunto apropriado de condições de contorno e condições iniciais. A fronteira Γ do domínio Ω pode apresentar regiões de poços injetores, poços produtores e condições de fluxo nulo. Assim a fronteira Γ do domínio Ω pode então ser particionada de modo que $\Gamma = \Gamma_i \oplus \Gamma_p \oplus \Gamma_d \oplus \Gamma_n$, onde Γ_i e Γ_p denotam, respectivamente, a fronteira nos poços injetor e produtor, Γ_d denota a fronteira onde a pressão é prescrita e Γ_n a parte da fronteira onde a condição de fluxo nulo é especificada.

No caso da equação da pressão, equação (37), pode-se prescrever tanto valores para as pressões (condição de contorno essencial) quanto para os fluxos (condição de contorno natural). Para a equação da saturação, equação (66), por questões práticas geralmente limita-se a prescrever saturações (condição de contorno essencial) na fronteira dos poços injetores.

Portanto as condições de contorno para a equação da pressão são dadas por:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = h_i \quad \text{em} \quad \Gamma_i \times [0, T] \quad (76)$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = h_p \quad \text{em} \quad \Gamma_p \times [0, T] \quad (77)$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_n \times [0, T] \quad (78)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_d \quad \text{em} \quad \Gamma_d \times [0, T] \quad (79)$$

onde h_i e h_p são os fluxos prescritos nos contornos de poços injetores e poços produtores respectivamente e p_d é o valor de pressão prescrita.

Para a equação da saturação as condições de contorno são dadas por:

$$s_w(\mathbf{x}, t) = s_i \quad \text{em} \quad \Gamma_i \times [0, T] \quad (80)$$

$$\mathbf{D}\nabla s_w \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_n \times [0, T] \quad (81)$$

As condições iniciais para as equações da pressão e da saturação são dadas respectivamente por:

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (82)$$

$$s(\mathbf{x}, 0) = s_0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (83)$$

Juntamente com as equações da pressão, da velocidade e da saturação, as equações de condições de contorno e condições iniciais completam a modelagem matemática do problema de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis e incompressíveis através de um meio poroso rígido.

Capítulo 3

Formulação Aproximada de Elementos Finitos

A solução analítica do modelo matemático representado pelas equações (37), (47) e (66) raramente pode ser alcançada nos casos práticos de engenharia. Assim utilizam-se métodos numéricos para se conseguir uma solução aproximada do problema. Diversos métodos numéricos podem ser empregados para se alcançar a solução aproximada, como por exemplo, o método das diferenças finitas, o método dos volumes finitos e o método dos elementos finitos.

Neste trabalho adota-se o método dos elementos finitos para se obter uma solução aproximada. Desta forma será utilizada uma formulação variacional semi-discreta para se resolver o conjunto acoplado de equações diferenciais parciais que representa o problema estudado. A formulação variacional semi-discreta caracteriza-se pela discretização por elementos finitos no espaço seguida pela discretização por diferenças finitas no tempo.

3.1 Método dos Elementos Finitos

No método dos elementos finitos a formulação matemática (equação diferencial e o conjunto de condições de contorno e condições iniciais) é reformulada em termos de uma formulação variacional.

O método dos elementos finitos consiste em subdividir o domínio do problema Ω em um conjunto de subdomínios Ω^e (elementos finitos) tal que, $\Omega = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega^e$ e

$\bigcap_{e=1}^{nel} \Omega^e = \emptyset$, onde nel representa o número total de elementos da malha e o superíndice e

indica o e -ésimo elemento da malha. Desta forma a solução do problema leva em conta a contribuição de cada elemento da malha.

É necessário ainda definir os conjuntos de funções admissíveis para a pressão P^h , para a saturação S^h e o conjunto de funções peso W^h ,

$$P^h = \{p_n^h / p_n^h \in H^h(\Omega), p_n^h(\mathbf{x}, t) = p_d \text{ em } \Gamma_d\} \quad (84)$$

$$S^h = \{s_w^h / s_w^h \in H^h(\Omega), s_w^h(\mathbf{x}, t) = s_i \text{ em } \Gamma_i\} \quad (85)$$

$$W^h = \{w^h / w^h \in H^h(\Omega), w^h = 0 \text{ em } \Gamma_d \oplus \Gamma_i\} \quad (86)$$

onde o superíndice h indica a discretização de elementos finitos, sendo $H^h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ um espaço de dimensões finitas sobre o domínio Ω e $H^1(\Omega)$ é o espaço das funções cuja a primeira derivada é quadrado integrável [18], isto é, se

$$f \in H^1(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 d\Omega < \infty. \quad (87)$$

Neste trabalho utiliza-se elementos triangulares lineares para discretizar o domínio Ω conforme mostra a Figura 2. Para se resolver as integrais do problema realiza-se uma mudança de variáveis, isto é, um elemento triangular linear qualquer definido em variáveis globais $\mathbf{x} = (x, y)$ é mapeado para um “Elemento Pai” definido em variáveis naturais $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ conforme esquema apresentado na Figura 2.

As variáveis do problema e a função peso são aproximadas da seguinte forma:

$$p_n^h = \sum_{i=1}^{mos} N_i p_i \quad (88)$$

$$s_w^h = \sum_{i=1}^{mos} N_i s_i \quad (89)$$

$$\frac{\partial s_w^h}{\partial t} = \sum_{i=1}^{mos} N_i a_i, \quad (90)$$

$$w^h = \sum_{i=1}^{mos} N_i c_i \quad (91)$$

onde p_i é a pressão nodal, s_i é a saturação nodal, a_i é a derivada temporal nodal de s_w , c_i é uma constante qualquer arbitrária, $nnos$ é número total de nós da malha de elementos finitos e N_i é a função de interpolação do nó i dependente somente da posição, isto é, $N_i=N_i(\mathbf{x})$.

No caso de elementos triangulares lineares as funções de interpolação são definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]. \quad (92)$$

As componentes do vetor de funções de interpolação para o elemento triangular linear, definidas em coordenadas naturais, são dadas por:

$$N_1 = \mathbf{x} \quad (93)$$

$$N_2 = \mathbf{h} \quad (94)$$

$$N_3 = 1 - \mathbf{x} - \mathbf{h}. \quad (95)$$

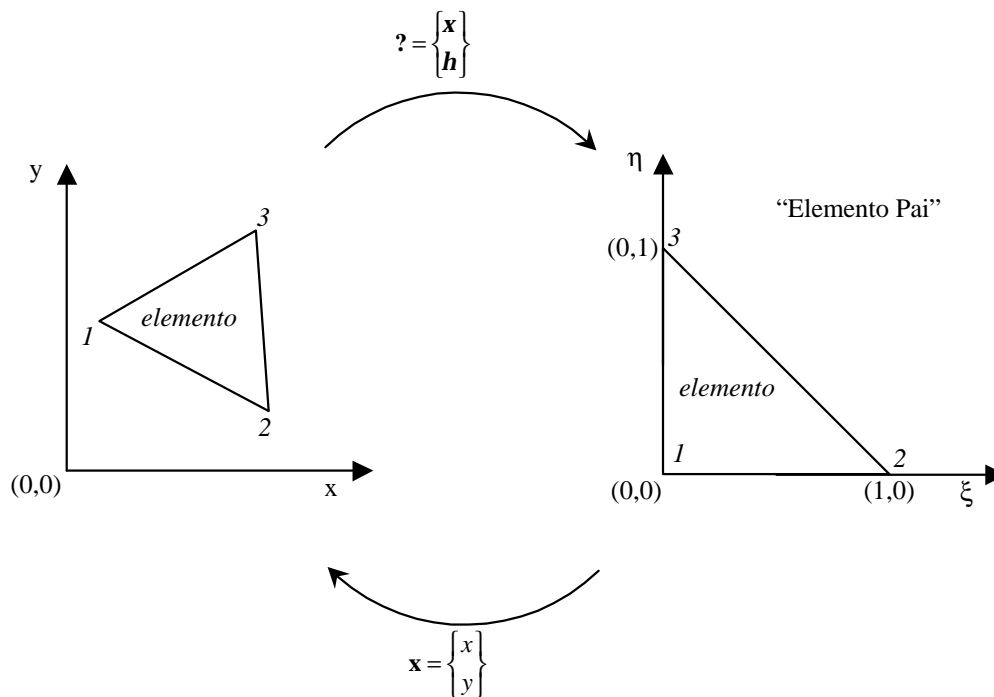


Figura 2 – Elemento triangular linear.

É comum definir o operador gradiente discreto das funções de interpolação por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

onde $\mathbf{N}_{,x} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}$, $\mathbf{N}_{,y} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}$.

As derivadas de \mathbf{N} em função das coordenadas globais (x,y) podem ser avaliadas utilizando a regra da cadeia como:

$$N_{a,x} = N_{a,x} \mathbf{x}_{,x} + N_{a,h} \mathbf{h}_{,x} \quad (97)$$

$$N_{a,y} = N_{a,x} \mathbf{x}_{,y} + N_{a,h} \mathbf{h}_{,y}, \quad (98)$$

onde $a=1,2,3$.

As equações (97) e (98) podem ser escritas em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} N_{a,x} & N_{a,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{a,x} & N_{a,h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,x} & \mathbf{x}_{,y} \\ \mathbf{h}_{,x} & \mathbf{h}_{,y} \end{bmatrix}. \quad (99)$$

As derivadas $N_{a,x}$ e $N_{a,h}$ podem ser computadas explicitamente a partir das definições (93), (94) e (95). Entretanto, os termos da matriz quadrada existente na equação (99) não podem ser computados explicitamente uma vez que não se têm expressões explícitas de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y)$ e $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x, y)$. Por outro lado, tem-se as seguintes relações inversas:

$$x(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{a=1}^3 N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}) x_a^e \quad (100)$$

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{a=1}^3 N_a(\mathbf{x}, \mathbf{h}) y_a^e, \quad (101)$$

as quais nos permite calcular a seguinte matriz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,x} & x_{,h} \\ y_{,x} & y_{,h} \end{bmatrix}. \quad (102)$$

As componentes da matriz (102) são dadas por:

$$x_{,x} = \sum_{a=1}^3 N_{a,x} x_a^e \quad (103)$$

$$x_{,h} = \sum_{a=1}^3 N_{a,h} x_a^e \quad (104)$$

$$y_{,x} = \sum_{a=1}^3 N_{a,x} y_a^e \quad (105)$$

$$y_{,h} = \sum_{a=1}^3 N_{a,h} y_a^e. \quad (106)$$

A matriz (102) é a inversa da matriz quadrada existente na equação (99), ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,x} & \mathbf{x}_{,y} \\ \mathbf{h}_{,x} & \mathbf{h}_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} y_{,h} & -x_{,h} \\ -y_{,x} & x_{,x} \end{bmatrix}, \quad (107)$$

onde $j = \det(\mathbf{J}) = x_{,x}y_{,h} - x_{,h}y_{,x}$.

Com base no que foi exposto é possível calcular as derivadas $N_{a,x}$ e $N_{a,y}$. A matriz (102), que define a transformação de coordenadas globais para coordenadas naturais, é conhecida como matriz jacobiana.

Calculando-se a inversa da matriz jacobiana, no caso de elementos triangulares lineares, tem-se:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \end{bmatrix}, \quad (108)$$

onde $2A = \det(\mathbf{J})$ sendo A a área do elemento e $x_{ij} = x_i - x_j$ e $y_{ij} = y_i - y_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Fazendo as substituições necessárias o operador gradiente discreto das funções de interpolação para o elemento triangular linear pode finalmente ser calculado e é representado por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}. \quad (109)$$

O operador gradiente discreto pode ser escrito em função de suas componentes como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \end{bmatrix}, \quad (110)$$

e desta forma tem-se que:

$$\mathbf{B}_x = \frac{1}{2A} [y_{23} \quad y_{31} \quad y_{12}] \quad (111)$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{1}{2A} [x_{32} \quad x_{13} \quad x_{21}]. \quad (112)$$

A definição do operador gradiente discreto é intensamente utilizada no desenvolvimento das matrizes de elemento.

3.2 Discretização Espacial

Como a equação da pressão, equação (37), é uma equação elíptica a formulação clássica de Galerkin é suficiente para se obter uma boa aproximação da solução. Porém no caso da equação da saturação, equação (66), que é uma equação parabólica-hiperbólica a formulação clássica de Galerkin torna-se instável, apresentando fortes oscilações numéricas principalmente em problemas predominantemente convectivos, onde existe uma frente abrupta de saturação que se move no domínio.

Então no caso da equação da saturação, equação (66), para se evitar o surgimento de oscilações numéricas indesejáveis ou refina-se drasticamente a malha de

elementos finitos [5], aumentando o esforço computacional ou adota-se uma formulação estabilizada.

Neste trabalho optou-se pela utilização de uma formulação estabilizada que acrescenta à formulação clássica de Galerkin estabilidade tanto na direção das linhas de corrente (SUPG - *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) quanto na direção do gradiente da solução (CAU – *Consistent Approximate Upwind*). O termo que acrescenta estabilidade na direção das linhas de corrente é conhecido como correção SUPG enquanto o termo que acrescenta estabilidade na direção do gradiente da solução é conhecido como operador de captura de choque (ou descontinuidade). Para fornecer a estabilidade desejada, à função peso de Galerkin é somada uma função peso descontínua referente a correção SUPG [5] e acrescenta-se também à formulação um termo referente ao operador de captura de choque [1].

Maiores detalhes a respeito das formulações de elementos finitos usadas neste trabalho serão apresentados nas Seções 3.3 e 3.7.

3.3 Formulação de Galerkin para a Equação da Pressão

A formulação clássica de Galerkin para a equação da pressão, equação (37), consiste em encontrar $p_n^h \in P^h$ tal que $\forall w^h \in W^h$ tem-se:

$$\int_{\Omega} w^h (\nabla \cdot \mathbf{v}_t^h - Q_t^h) d\Omega = 0. \quad (113)$$

Resolvendo a equação (113) tem-se:

$$\int_{\Omega} w^h \nabla \cdot \mathbf{v}_t^h d\Omega = \int_{\Omega} w^h Q_t^h d\Omega. \quad (114)$$

Aplicando o teorema da divergência combinado à técnica de integração por partes no lado esquerdo da equação (114) tem-se:

$$-\int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \mathbf{v}_t^h d\Omega + \int_{\Gamma} w^h \mathbf{v}_t^h \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} w^h Q_t^h d\Omega. \quad (115)$$

Dependendo do tipo de condição de contorno especificada o produto escalar $\mathbf{v}_t^h \cdot \mathbf{n}$ pode ter seu valor nulo (condição de fluxo nulo) ou pode ter um valor de fluxo específico. Neste desenvolvimento adota-se a condição de fluxo nulo devido sua comodidade, porém ao final deve-se ficar claro que em alguns problemas o termo referente ao fluxo prescrito deve existir embora aqui o mesmo tenha sido omitido. Assim de acordo com as condições impostas acima e substituindo a equação da velocidade total de percolação dos fluidos, equação (47), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w^h \mathbf{K} \mathbf{I}_t \nabla p_n^h d\Omega &= \int_{\Omega} w^h Q_t^h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w^h \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w^h d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \nabla w^h \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) d\Omega \end{aligned} \quad (116)$$

3.4 Matrizes de Elemento para a Equação da Pressão

Substituindo as definições (88), (89) e (91) na equação (116) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_{a,x} \mathbf{K} \mathbf{I}_t N_{b,x} P_b d\Omega &= \int_{\Omega} N_a N_b q_b d\Omega + \int_{\Omega} N_{a,x} \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} N_{b,x} s_b d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} N_{a,x} \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) d\Omega \end{aligned} \quad (117)$$

A equação (117) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (118)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de coeficientes, \mathbf{f} é o vetor de termos independentes e \mathbf{p} é o vetor de incógnitas nodais (pressões nodais).

É conveniente escrever os termos das parcelas da equação (118) em função das contribuições de cada elemento. Assim, os termos que contribuem para a formação da matriz \mathbf{K} são dados por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \left(\mathbf{k}^e \right) \quad (119)$$

$$\mathbf{k}^e = \left[\mathbf{k}_{ab}^e \right], \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (120)$$

$$\mathbf{k}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} N_{a,x} \mathbf{K} \mathbf{I}_t N_{b,x} d\Omega^e, \quad (121)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

Desta forma, a matriz do elemento “ e ” é dada por:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_t \mathbf{B} d\Omega^e. \quad (122)$$

Analogamente o vetor \mathbf{f} pode ser escrito em termos da contribuição de cada elemento da seguinte forma:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \left(\mathbf{f}^e \right) \quad (123)$$

$$\mathbf{f}^e = \left[\mathbf{f}_a^e \right], \quad a = 1, 2, 3 \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^e &= \int_{\Omega^e} N_a N_b q_b d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_{a,x} \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} N_{b,x} s_b d\Omega^e \\ &+ \int_{\Omega^e} N_{a,x} \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) d\Omega^e \end{aligned} \quad (125)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

Desta forma, o vetor do elemento “ e ” é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e = & \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} \, d\Omega^e \\ & + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) \, d\Omega^e \end{aligned} \quad (126)$$

3.4.1 Matriz de Coeficientes

A matriz de coeficientes, definida em (118), é representada por:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_t \mathbf{B} \, d\Omega^e. \quad (127)$$

Substituindo a definição (109) e considerando que os termos do integrando de (127) são constante no interior do elemento, uma vez que as grandezas envolvidas são avaliadas no baricentro do elemento, a matriz de coeficientes pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{k}^e = \frac{\mathbf{I}_t}{4A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}. \quad (128)$$

Deste ponto em diante em todas as integrais resolvidas neste trabalho as grandezas envolvidas serão avaliadas no baricentro do elemento. Como consequência disto os termos do integrando de cada integral serão constantes no interior do elemento.

Resolvendo a expressão (128) tem-se a forma final da matriz de coeficientes:

$$\mathbf{k}^e = \frac{\mathbf{I}_t}{4A} \begin{bmatrix} -(k_{12} + k_{13}) & k_{12} & k_{13} \\ \text{sim} & -(k_{12} + k_{23}) & k_{23} \\ & & -(k_{13} + k_{23}) \end{bmatrix}, \quad (129)$$

onde:

$$k_{12} = y_{23}k^1 + x_{32}k^2 \quad (130)$$

$$k_{13} = y_{23}k^3 + x_{32}k^4 \quad (131)$$

$$k_{23} = y_{31}k^3 + x_{13}k^4 \quad (132)$$

$$k^1 = y_{31}k_x + x_{13}k_{xy} \quad (133)$$

$$k^2 = y_{31}k_{xy} + x_{13}k_y \quad (134)$$

$$k^3 = y_{12}k_x + x_{21}k_{xy} \quad (135)$$

$$k^4 = y_{12}k_{xy} + x_{21}k_y \quad (136)$$

3.4.2 Vetor de Termos Independentes

O vetor de termos independentes leva em conta os termos fonte no domínio, as condições de contorno e os efeitos gravitacionais.

Portanto o vetor de termos independentes toma a seguinte forma:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_{s_w} + \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_p, \quad (137)$$

onde \mathbf{f}_q é o vetor de termos fonte no domínio, \mathbf{f}_{s_w} é o vetor que leva em conta os valores da saturação s_w , \mathbf{f}_g é o vetor que leva em conta os efeitos gravitacionais e \mathbf{f}_p é o vetor que leva em conta as condições de contorno de pressões prescritas.

O vetor que leva em conta as condições de contorno de fluxo prescrito \mathbf{f}_Γ é calculado a nível de elemento e em seguida armazenado diretamente no vetor global \mathbf{f} . O processo pode ser representado por:

$$\mathbf{f}(neq) = \mathbf{f}(neq) + \mathbf{f}_\Gamma, \quad (138)$$

onde neq indica a contribuição do vetor de elemento para o vetor global.

O vetor de termos fonte no domínio \mathbf{f}_q tem a seguinte forma:

$$\mathbf{f}_q = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} d\Omega^e. \quad (139)$$

Considerando a definição (92) para a função de interpolação \mathbf{N} e resolvendo cada integral trivial envolvida em (139), o vetor de termos fonte no domínio pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_q = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Resolvendo a expressão (140) tem-se a forma final para o vetor de termos no domínio:

$$\mathbf{f}_q = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2q_1 + q_2 + q_3 \\ q_1 + 2q_2 + q_3 \\ q_1 + q_2 + 2q_3 \end{bmatrix}. \quad (141)$$

O vetor que leva em conta os valores da saturação da fase molhante \mathbf{f}_s tem a seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{sw} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} d\Omega^e. \quad (142)$$

Substituindo a definição (109) e considerando que os termos do integrando de (142) são constante no interior do elemento, o vetor que leva em conta os valores da saturação da fase molhante pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{sw} = \frac{\mathbf{I}_w}{4A} \frac{dp_c}{ds_w} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad (143)$$

Resolvendo a expressão (143) tem-se a forma final para o vetor que leva em conta os valores da saturação da fase molhante:

$$\mathbf{f}_{sw} = \frac{\mathbf{I}_w}{4A} \frac{dp_c}{ds_w} \begin{bmatrix} y_{23}k_{sx} + x_{32}k_{sy} \\ y_{31}k_{sx} + x_{13}k_{sy} \\ y_{12}k_{sx} + x_{21}k_{sy} \end{bmatrix}, \quad (144)$$

onde:

$$k_{sx} = k_x s_x + k_{xy} s_y \quad (145)$$

$$k_{sy} = k_{xy} s_x + k_y s_y \quad (146)$$

$$s_x = y_{23} s_1 + y_{31} s_2 + y_{12} s_3 \quad (147)$$

$$s_y = x_{32} s_1 + x_{13} s_2 + x_{21} s_3. \quad (148)$$

O vetor que leva em conta os efeitos gravitacionais \mathbf{f}_g tem a seguinte forma:

$$\mathbf{f}_g = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) d\Omega^e. \quad (149)$$

Substituindo a definição (109) e considerando que os termos do integrando de (149) são constante no interior do elemento, o vetor que leva em conta os efeitos gravitacionais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_g = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) \int_{\Omega^e} d\Omega^e. \quad (150)$$

Resolvendo a expressão (150) tem-se a forma final para o vetor que leva em conta os efeitos gravitacionais:

$$\mathbf{f}_g = \frac{\mathbf{l}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{l}_n \mathbf{r}_n}{2} \begin{bmatrix} y_{23}g_1 + x_{32}g_2 \\ y_{31}g_1 + x_{13}g_2 \\ y_{12}g_1 + x_{21}g_2 \end{bmatrix}, \quad (151)$$

onde:

$$g_1 = k_x g_x + k_{xy} g_y \quad (152)$$

$$g_2 = k_{xy} g_x + k_y g_y. \quad (153)$$

O vetor que leva em conta as pressões da fase não-molhante prescritas \mathbf{f}_p tem a seguinte forma:

$$\mathbf{f}_p = -\mathbf{k}^e \mathbf{p}^e, \quad (154)$$

onde \mathbf{k}^e é a matriz de coeficientes a nível de elemento, definida em (129), e \mathbf{p}^e é o vetor de pressões nodais prescritas a nível de elemento. Assim conforme apresentado em (129), tem-se:

$$\mathbf{f}_p = -\frac{\mathbf{l}_t}{4A} \begin{bmatrix} -(k_{12} + k_{13}) & k_{12} & k_{13} \\ \text{sim} & -(k_{12} + k_{23}) & k_{23} \\ & & -(k_{13} + k_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}. \quad (155)$$

Resolvendo a expressão (155) tem-se a forma final para o vetor que leva em conta as pressões da fase não-molhante prescritas:

$$\mathbf{f}_p = -\frac{\mathbf{l}_t}{4A} \begin{bmatrix} -(k_{12} + k_{13})p_1 + k_{12}p_2 + k_{13}p_3 \\ k_{12}p_1 - (k_{12} + k_{23})p_2 + k_{23}p_3 \\ k_{13}p_1 + k_{23}p_2 - (k_{13} + k_{23})p_3 \end{bmatrix}. \quad (156)$$

O vetor que leva em conta as condições de contorno de fluxo prescrito \mathbf{f}_Γ tem a seguinte forma:

$$\mathbf{f}_\Gamma = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h_n \, d\Gamma^e. \quad (157)$$

Considerando a definição (92) para a função de interpolação \mathbf{N} e resolvendo cada integral trivial envolvida em (157), o vetor que leva em conta as condições de contorno de fluxo prescrito pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_\Gamma = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad (158)$$

onde L representa o comprimento do lado do elemento onde se tem condição de contorno de fluxo prescrito e h_1 e h_2 são os valores dos fluxos prescritos.

Resolvendo a expressão (158) tem-se a forma final para o vetor que leva em conta as condições de contorno de fluxo prescrito:

$$\mathbf{f}_\Gamma = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2h_1 + h_2 \\ h_1 + 2h_2 \end{bmatrix}. \quad (159)$$

3.5 Pós-processamento do Campo de Velocidades

Quando o campo de velocidades é calculado diretamente a partir da lei de Darcy, equação (47), os resultados obtidos não apresentam boa precisão, satisfazem fracamente a condição de fluxo nulo e não garantem a conservação de massa [22][24][27][28].

Uma estratégia para melhorar a aproximação do campo de velocidades é a utilização de métodos mistos conforme mostrado, por exemplo, em Masud e Hughes [27] e em Durlofsky [14]. Alternativamente, técnicas de pós-processamento do campo de velocidades podem ser utilizadas para se obter resultados satisfatórios [22][24].

Neste trabalho utiliza-se a estratégia de pós-processamento global do campo de velocidades apresentada por Malta *et al.* [24]. Esta estratégia baseia-se na formulação variacional da lei de Darcy (47) combinada com o resíduo da equação de balanço de massa (37).

Então conhecendo-se os campos de pressão p_n^h e de saturação s_w^h e definindo:

$$U^h = \left\{ \mathbf{w}^h \in H^h(\Omega) \times H^h(\Omega), \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_n \right\}, \quad (160)$$

o pós-processamento do campo de velocidades consiste em encontrar $\tilde{\mathbf{v}}_t^h \in U^h$ tal que $\forall \mathbf{w}^h \in U^h$ tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^h \left(\tilde{\mathbf{v}}_t^h + \mathbf{K} \mathbf{I}_t \nabla p_n^h - \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w^h - \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{d} \nabla \cdot \mathbf{w}^h (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_t^h - Q_t^h) d\Omega^e = 0 \quad (161)$$

onde $\tilde{\mathbf{v}}_t^h$ é o vetor de velocidades pós-processadas e o parâmetro \mathbf{d} é dependente da malha de elementos finitos e pode ser tomado como $\mathbf{d} = \frac{h^e}{2}$, onde h^e é o tamanho característico do elemento dado por $h^e = \sqrt{2A}$ sendo A a área do elemento.

Com a utilização desta técnica de pós-processamento do campo de velocidades as variáveis do problema, pressão, velocidade e saturação, são aproximadas por interpolações Lagrangianas de mesma ordem [22].

3.6 Matrizes de Elemento para a Equação da Velocidade

Substituindo as definições (88), (89) e (91) na equação (161) tem-se a seguinte forma matricial:

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad (162)$$

onde $\tilde{\mathbf{K}}$ é a matriz de coeficientes, $\tilde{\mathbf{v}}$ é o vetor de velocidades pós-processadas e $\tilde{\mathbf{f}}$ é o vetor de termos independentes.

É conveniente escrever os termos das parcelas da equação (162) em função das contribuições de cada elemento. Assim, os termos que contribuem para a formação da matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ são dados por:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{nel} (\tilde{\mathbf{k}}^e) \quad (163)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}^e = [\tilde{\mathbf{k}}_{ab}^e] \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (164)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} N_a N_b d\Omega^e + \mathbf{d} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot N_a \nabla \cdot N_b d\Omega^e, \quad (165)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

Desta forma, a matriz do elemento “ e ” é dada por:

$$\tilde{\mathbf{k}}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega^e + \mathbf{d} \int_{\Omega^e} \mathbf{D}_{div}^T \mathbf{D}_{div} d\Omega^e, \quad (166)$$

onde \mathbf{D}_{div} é o operador divergente discreto definido, no caso de elementos triangulares lineares, como:

$$\mathbf{D}_{div} = \frac{1}{2A} [y_{23} \quad x_{32} \quad y_{31} \quad x_{13} \quad y_{12} \quad x_{21}]. \quad (167)$$

A matriz de coeficientes definida em (166) é formada pela soma de duas matrizes e portanto pode ser escrita como:

$$\tilde{\mathbf{k}}^e = \tilde{\mathbf{k}}_1^e + \tilde{\mathbf{k}}_2^e. \quad (168)$$

A matriz $\tilde{\mathbf{k}}_1^e$ definida em (168) é dada por:

$$\tilde{\mathbf{k}}_1^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega^e. \quad (169)$$

Considerando a definição (92) para a função de interpolação \mathbf{N} , tem-se:

$$\tilde{\mathbf{k}}_1^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{I} \\ N_2 \mathbf{I} \\ N_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} [N_1 \mathbf{I} \quad N_2 \mathbf{I} \quad N_3 \mathbf{I}] d\Omega^e. \quad (170)$$

Na equação (170) \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 2 dada por:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (171)$$

Resolvendo cada integral trivial envolvida em (170), tem-se a forma final para a matriz $\tilde{\mathbf{k}}_1^e$:

$$\tilde{\mathbf{k}}_1^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (172)$$

A matriz $\tilde{\mathbf{k}}_2^e$ definida em (168) é dada por:

$$\tilde{\mathbf{k}}_2^e = \mathbf{d} \int_{\Omega^e} \mathbf{D}_{\text{div}}^T \mathbf{D}_{\text{div}} d\Omega^e. \quad (173)$$

Considerando a definição (167) para o operador divergente discreto e que os termos do integrando de (173) são constantes no interior do elemento tem-se:

$$\tilde{\mathbf{k}}_2^e = \frac{\mathbf{d}}{4A} \begin{bmatrix} y_{23} \\ x_{32} \\ y_{31} \\ x_{13} \\ y_{12} \\ x_{21} \end{bmatrix} [y_{23} \quad x_{32} \quad y_{31} \quad x_{13} \quad y_{12} \quad x_{21}]. \quad (174)$$

Resolvendo a equação (174) tem-se a forma final para a matriz $\tilde{\mathbf{k}}_2^e$:

$$\tilde{\mathbf{k}}_2^e = \frac{\mathbf{d}}{4A} \begin{bmatrix} y_{23}y_{23} & y_{23}x_{32} & y_{23}y_{31} & y_{23}x_{13} & y_{23}y_{12} & y_{23}x_{21} \\ & x_{32}x_{32} & x_{32}y_{31} & x_{32}x_{13} & x_{32}y_{12} & x_{32}x_{21} \\ & & y_{31}y_{31} & y_{31}x_{13} & y_{31}y_{12} & y_{31}x_{21} \\ & & & x_{13}x_{13} & x_{13}y_{12} & x_{13}x_{21} \\ & & & & y_{12}y_{12} & y_{12}x_{21} \\ \text{sim} & & & & & x_{21}x_{21} \end{bmatrix}. \quad (175)$$

Analogamente o vetor $\tilde{\mathbf{f}}$ pode ser escrito em termos da contribuição de cada elemento da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{A} \left(\tilde{\mathbf{f}}^e \right)_{e=1}^{nel} \quad (176)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^e = [\tilde{\mathbf{f}}_a^e] \quad a = 1, 2, 3 \quad (177)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_a^e &= \mathbf{d} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot N_a N_b q_b d\Omega^e - \int_{\Omega^e} N_a \mathbf{K} \mathbf{I}_t N_{b,x} p_b d\Omega^e \\ &+ \int_{\Omega^e} N_a \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} N_{b,x} s_b d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_a \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) d\Omega^e \end{aligned} \quad (178)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

Desta forma, o vetor do elemento “ e ” é dado por:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}^e &= \mathbf{d} \int_{\Omega^e} \mathbf{D}^T \mathbf{N} \mathbf{q} \, d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_t \mathbf{B} \mathbf{p} \, d\Omega^e \\
&+ \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} \, d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{l}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{l}_n \mathbf{r}_n) \, d\Omega^e.
\end{aligned} \tag{179}$$

O vetor de termos independentes definido em (179) é formado pela soma de quatro vetores e portanto pode ser escrita como:

$$\tilde{\mathbf{f}}^e = \tilde{\mathbf{f}}_1^e - \tilde{\mathbf{f}}_2^e + \tilde{\mathbf{f}}_3^e + \tilde{\mathbf{f}}_4^e, \tag{180}$$

onde $\tilde{\mathbf{f}}_1^e$ é o vetor de termos fonte no domínio, $\tilde{\mathbf{f}}_2^e$ é o vetor referente ao gradiente de pressão, $\tilde{\mathbf{f}}_3^e$ é o vetor referente ao gradiente de saturação e $\tilde{\mathbf{f}}_4^e$ é o vetor referente aos efeitos gravitacionais.

O vetor de termos fonte no domínio $\tilde{\mathbf{f}}_1^e$ tem a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_1^e = \mathbf{d} \int_{\Omega^e} \mathbf{D}^T \mathbf{N} \mathbf{q} \, d\Omega^e. \tag{181}$$

A integral das funções de interpolação N_i , $i=1,2,3$, pode ser facilmente calculada e portanto tem-se:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{N} \, d\Omega^e = \frac{2A}{6} [1 \quad 1 \quad 1]. \tag{182}$$

Substituindo as definições (92) e (167) e considerando que os termos do integrando de (181) são constantes no interior do elemento, o vetor de termos fonte no domínio pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_1^e = \frac{\mathbf{d}}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} \\ x_{32} \\ y_{31} \\ x_{13} \\ y_{12} \\ x_{21} \end{bmatrix} \frac{2A}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (183)$$

Resolvendo a expressão (183) tem-se a forma final para o vetor de termos fonte no domínio:

$$\tilde{\mathbf{f}}_1^e = \frac{\mathbf{d}}{6} (q_1 + q_2 + q_3) \begin{bmatrix} y_{23} \\ x_{32} \\ y_{31} \\ x_{13} \\ y_{12} \\ x_{21} \end{bmatrix}. \quad (184)$$

O vetor referente ao gradiente de pressão $\tilde{\mathbf{f}}_2^e$ tem a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_2^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_t \mathbf{B} \mathbf{p} \, d\Omega^e. \quad (185)$$

Substituindo as definições (92) e (109) e considerando que os termos do integrando de (185) são constantes no interior do elemento, o vetor de referente ao gradiente de pressão pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_2^e = \frac{2A}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \mathbf{I}_t \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}. \quad (186)$$

Resolvendo a expressão (186) tem-se a forma final para o vetor referente ao gradiente de pressão:

$$\tilde{\mathbf{f}}_2^e = \frac{\mathbf{I}_t}{6} \begin{bmatrix} k_x p_x + k_{xy} p_y \\ k_{xy} p_x + k_y p_y \\ k_x p_x + k_{xy} p_y \\ k_{xy} p_x + k_y p_y \\ k_x p_x + k_{xy} p_y \\ k_{xy} p_x + k_y p_y \end{bmatrix}, \quad (187)$$

onde:

$$p_x = y_{23} p_1 + y_{31} p_2 + y_{12} p_3 \quad (188)$$

$$p_y = x_{32} p_1 + x_{13} p_2 + x_{21} p_3. \quad (189)$$

O vetor referente ao gradiente de saturação $\tilde{\mathbf{f}}_3^e$ tem a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_3^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} d\Omega^e. \quad (190)$$

Substituindo as definições (92) e (109) e considerando que os termos do integrando de (190) são constantes no interior do elemento, o vetor de referente ao gradiente de saturação pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_3^e = \frac{2A}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \mathbf{I}_w \frac{dp_c}{ds_w} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad (191)$$

Resolvendo a expressão (191) tem-se a forma final para o vetor referente ao gradiente de saturação:

$$\tilde{\mathbf{f}}_3^e = \frac{\mathbf{I}_w dp_c}{6 ds_w} \begin{bmatrix} k_x s_x + k_{xy} s_y \\ k_{xy} s_x + k_y s_y \\ k_x s_x + k_{xy} s_y \\ k_{xy} s_x + k_y s_y \\ k_x s_x + k_{xy} s_y \\ k_{xy} s_x + k_y s_y \end{bmatrix}, \quad (192)$$

onde:

$$s_x = y_{23}s_1 + y_{31}s_2 + y_{12}s_3 \quad (193)$$

$$s_y = x_{32}s_1 + x_{13}s_2 + x_{21}s_3. \quad (194)$$

O vetor referente aos efeitos gravitacionais $\tilde{\mathbf{f}}_4^e$ tem a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_4^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{g} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n) d\Omega^e. \quad (195)$$

Substituindo a definição (92) e considerando que os termos do integrando de (195) são constantes no interior do elemento, vetor referente aos efeitos gravitacionais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_4^e = \frac{2A}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x g_x + k_{xy} g_y \\ k_{xy} g_x + k_y g_y \end{bmatrix} (\mathbf{I}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{I}_n \mathbf{r}_n). \quad (196)$$

Resolvendo a expressão (196) tem-se a forma final para o vetor referente aos efeitos gravitacionais:

$$\tilde{\mathbf{f}}_4^e = \frac{A}{3} (\mathbf{l}_w \mathbf{r}_w + \mathbf{l}_n \mathbf{r}_n) \begin{bmatrix} k_x g_x + k_{xy} g_y \\ k_{xy} g_x + k_y g_y \\ k_x g_x + k_{xy} g_y \\ k_{xy} g_x + k_y g_y \\ k_x g_x + k_{xy} g_y \\ k_{xy} g_x + k_y g_y \end{bmatrix}. \quad (197)$$

O vetor de velocidades pós-processadas a nível de elemento tem a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{v}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x^{(1)} \\ \mathbf{v}_y^{(1)} \\ \mathbf{v}_x^{(2)} \\ \mathbf{v}_y^{(2)} \\ \mathbf{v}_x^{(3)} \\ \mathbf{v}_y^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (198)$$

onde o superíndice (i) , $i=1,2,3$, indica a numeração local do nó no elemento e o subíndice $j=x,y$ indica a direção da componente do vetor de velocidade.

3.7 Formulação Estabilizada para a Equação da Saturação

Antes de apresentar a formulação estabilizada para a equação da saturação define-se um operador bilinear que identifica a equação (66) como:

$$L(s_w^h, \mathbf{v}_a^h) = \mathbf{f} \frac{\partial s_w^h}{\partial t} + \mathbf{v}_a^h \cdot \nabla s_w^h + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla s_w^h. \quad (199)$$

A formulação estabilizada de Petrov-Galerkin para a equação da saturação, equação (66), consiste em encontrar $s_w^h \in S^h$ tal que $\forall w^h \in W^h$ tem-se:

$$\int_{\Omega} w^h L(s_w^h, \mathbf{v}_a^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{t}_1 \mathbf{v}_a^h \cdot \nabla w^h L(s_w^h, \mathbf{v}_w^h) d\Omega^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{t}_2 \nabla w^h \cdot \nabla s_w^h d\Omega^e = 0 \quad (200)$$

Na equação (200) a primeira integral representa o termo de Galerkin, o primeiro somatório de integrais representa o termo de correção SUPG e o segundo somatório de integrais representa o termo de correção referente ao operador de captura de descontinuidade.

Os parâmetros de estabilização \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 são dependentes da malha de elementos finitos e podem ser calculados da seguinte forma:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{d}_1^e}{\|\mathbf{v}_a^e\|} \min\left(\frac{Pe^e}{3}, 1\right) \quad (201)$$

$$Pe^e = \mathbf{d}_1^e \frac{\|\mathbf{v}_a^e\|^3}{(\mathbf{v}_a^e)^T \cdot \mathbf{D} \mathbf{v}_a^e} \quad (202)$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{|L(s_w^e, \mathbf{v}_a^e)|}{\|\nabla s_w^e\|} \mathbf{d}_2^e \min\left(\frac{Pe_{//}^e}{4}, 1\right) \quad (203)$$

$$Pe_{//}^e = \mathbf{d}_2^e \frac{\|\mathbf{v}_{a//}^e\|^3}{(\mathbf{v}_{a//}^e)^T \cdot \mathbf{D} \mathbf{v}_{a//}^e} \quad (204)$$

$$\mathbf{v}_{a//}^e = \frac{\mathbf{v}_a^e \cdot \nabla s_w^e}{\|\nabla s_w^e\|^2} \nabla s_w^e \quad (205)$$

Nas definições (201), (202), (203), (204) e (205) Pe^e é o número de Peclet o qual representa o balanço entre os efeitos convectivos e os efeitos difusivos. O superíndice e indica que a variável foi calculada no interior do elemento enquanto o subíndice $//$ indica a projeção da variável na direção paralela ao gradiente da solução, isto é, paralela à ∇s_w^e . Considera-se que $\mathbf{d}_1^e = \frac{h^e}{2}$ enquanto que \mathbf{d}_2^e pode ser ponderado por $\mathbf{d}_2^e = \frac{h^e}{2}$ ou por $\mathbf{d}_2^e = h^e$. O tamanho característico do elemento é dado por $h^e = \sqrt{2A}$, onde A representa a área do elemento.

No desenvolvimento da formulação estabilizada, equação (200), aplica-se o teorema da divergência combinado à técnica de integração por partes no termo difusivo de Galerkin. O termo difusivo referente à correção SUPG é nulo uma vez que o mesmo é ponderado por funções peso constantes no interior do elemento. Da maneira como foi definido o operador de captura de descontinuidade só age em regiões onde o gradiente da solução for diferente de zero.

3.8 Matrizes de Elemento para a Equação da Saturação

Substituindo as definições (88), (89), (90) e (91) na equação (200) tem-se a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{s} = \mathbf{f}_s, \quad (206)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa generalizada, \mathbf{C} é a matriz efetiva de coeficientes, \mathbf{s} é o vetor de incógnitas nodais (saturações nodais), \mathbf{a} é o vetor das derivadas temporais de \mathbf{s} , \mathbf{f}_s é o vetor que provém da contribuição dos graus de liberdade prescritos de \mathbf{s} .

É conveniente escrever os termos das parcelas da equação (206) em função das contribuições de cada elemento. Assim, os termos que contribuem para a formação da matriz \mathbf{M} são dados por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \left(\mathbf{m}^e \right) \quad (207)$$

$$\mathbf{m}^e = \left[\mathbf{m}_{ab}^e \right], \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (208)$$

$$\mathbf{m}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} \left(N_a \mathbf{f} + N_{a,x} \mathbf{f} t_1 v_{ax} + N_{a,y} \mathbf{f} t_1 v_{ay} \right) N_b d\Omega, \quad (209)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

Desta forma, a matriz do elemento “e” é dada por:

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_x^T \mathbf{f} \mathbf{t}_1 v_{ax} \mathbf{N} + \mathbf{B}_y^T \mathbf{f} \mathbf{t}_1 v_{ay} \mathbf{N} d\Omega^e. \quad (210)$$

Na equação (210) a primeira integral é referente à matriz de massa e a segunda integral é referente à correção SUPG da matriz de massa.

Analogamente a matriz \mathbf{C} pode ser escrita em termos da contribuição de cada elemento da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \left(\mathbf{c}^e \right)_{e=1}^{nel} \quad (211)$$

$$\mathbf{c}^e = \left[\mathbf{c}_{ab}^e \right], \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (212)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ab}^e = & \int_{\Omega^e} \left(N_a v_{ax} N_{b,x} + N_a v_{ay} N_{b,y} \right) + \\ & \mathbf{t}_1 \left(N_{a,x} v_{ax} v_{ax} N_{b,x} + N_{a,x} v_{ax} v_{ay} N_{b,y} \right. \\ & \quad \left. + N_{a,x} v_{ay} v_{ax} N_{b,y} + N_{a,y} v_{ay} v_{ay} N_{b,y} \right) + \\ & \left(N_{a,x} \mathbf{D} N_{b,x} + N_{a,y} \mathbf{D} N_{b,y} \right) + \\ & \mathbf{t}_2 \left(N_{a,x} N_{b,x} + N_{a,y} N_{b,y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (213)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

Desta forma, a matriz do elemento “e” é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^e = & \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{N}^T v_{ax} \mathbf{B}_x + \mathbf{N}^T v_{ay} \mathbf{B}_y \right) d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{t}_1 \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} d\Omega^e + \\ & \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{t}_2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega^e \end{aligned}, \quad (214)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} v_{ax}^2 & v_{ax}v_{ay} \\ v_{ay}v_{ax} & v_{ay}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (215)$$

Na equação (214) a primeira integral é referente à matriz de convecção, a segunda integral é referente à correção SUPG da matriz de convecção, a terceira integral é referente à matriz de difusão de Galerkin e a quarta integral é referente ao operador de captura de descontinuidade do tipo CAU.

O vetor \mathbf{f}_s , definido em (206), provém da contribuição dos graus de liberdade prescritos da saturação da fase molhante s_w e portanto tem a seguinte forma:

$$\mathbf{f}_s = -\mathbf{A} \left(\mathbf{m}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{s}^e \right), \quad (216)$$

onde nel é o número de elementos na malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

3.8.1 Matriz de Massa

A parcela de Galerkin referente à matriz de massa, definida em (206), é representada por:

$$\mathbf{m}_g^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega^e, \quad (217)$$

onde o subíndice g identifica o termo proveniente da parcela de Galerkin.

Considerando a definição (92) para a função de interpolação \mathbf{N} , tem-se:

$$\mathbf{m}_g^e = \mathbf{f} \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] d\Omega^e. \quad (218)$$

Resolvendo cada integral trivial envolvida em (218), tem-se a forma final para a matriz de massa:

$$\mathbf{m}_g^e = \mathbf{f} \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (219)$$

3.8.2 Correção SUPG da Matriz de Massa

O termo referente à correção SUPG da matriz de massa, definido em (206), é representado por:

$$\mathbf{m}_{pg}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_x^T \mathbf{f} \mathbf{t}_1 v_{ax} \mathbf{N} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_y^T \mathbf{f} \mathbf{t}_1 v_{ay} \mathbf{N} d\Omega^e, \quad (220)$$

onde o subíndice pg identifica o termo proveniente da parcela de correção SUPG.

Considerando que os termos do integrando de (220) são constante no interior do elemento, a correção SUPG da matriz de massa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{m}_{pg}^e = \mathbf{f} \mathbf{t}_1 v_{ax} \mathbf{B}_x^T \int_{\Omega^e} \mathbf{N} d\Omega^e + \mathbf{f} \mathbf{t}_1 v_{ay} \mathbf{B}_y^T \int_{\Omega^e} \mathbf{N} d\Omega^e. \quad (221)$$

A integral das funções de interpolação N_i , $i=1,2,3$, pode ser facilmente calculada e portanto tem-se:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{N} d\Omega^e = \frac{2A}{6} [1 \quad 1 \quad 1]. \quad (222)$$

Assim, considerando o resultado obtido em (222) e utilizando as definições (111) e (112) a correção SUPG da matriz de massa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{m}_{pg}^e = \frac{\mathbf{ft}_1 v_{ax}}{6} \begin{bmatrix} y_{23} \\ y_{31} \\ y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{ft}_1 v_{ay}}{6} \begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{13} \\ x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (223)$$

Resolvendo a equação (223) tem-se a forma final para a expressão da correção SUPG da matriz de massa:

$$\mathbf{m}_{pg}^e = \frac{\mathbf{ft}_1}{6} \begin{bmatrix} m_{pg}^1 & m_{pg}^1 & m_{pg}^1 \\ m_{pg}^2 & m_{pg}^2 & m_{pg}^2 \\ m_{pg}^3 & m_{pg}^3 & m_{pg}^3 \end{bmatrix}, \quad (224)$$

onde:

$$m_{pg}^1 = y_{23} v_{ax} + x_{32} v_{ay} \quad (225)$$

$$m_{pg}^2 = y_{31} v_{ax} + x_{13} v_{ay} \quad (226)$$

$$m_{pg}^3 = y_{12} v_{ax} + x_{21} v_{ay}. \quad (227)$$

3.8.3 Matriz de Convecção

Os termos convectivos referentes à parcela de Galerkin, definidos em (206), são representados por:

$$\mathbf{c}_g^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T v_{ax} \mathbf{B}_x d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T v_{ay} \mathbf{B}_y d\Omega^e, \quad (228)$$

onde o subíndice g identifica o termo proveniente da parcela de Galerkin.

Substituindo as definições (111) e (112) e considerando que os termos do integrando de (228) são constante no interior do elemento, a matriz de convecção pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{c}_g^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T d\Omega^e v_{ax} \frac{1}{2A} [y_{23} \quad y_{31} \quad y_{12}] + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T d\Omega^e v_{ay} \frac{1}{2A} [x_{32} \quad x_{13} \quad x_{21}]. \quad (229)$$

De forma similar à equação (222) verifica-se que:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T d\Omega^e = \frac{2A}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (230)$$

Substituindo a definição (230) na expressão (229) tem-se:

$$\mathbf{c}_g^e = \frac{v_{ax}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [y_{23} \quad y_{31} \quad y_{12}] + \frac{v_{ay}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [x_{32} \quad x_{13} \quad x_{21}]. \quad (231)$$

Resolvendo a expressão (231) tem-se a forma final da matriz de convecção de Galerkin:

$$\mathbf{c}_g^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_g^1 & c_g^2 & c_g^3 \\ c_g^1 & c_g^2 & c_g^3 \\ c_g^1 & c_g^2 & c_g^3 \end{bmatrix}, \quad (232)$$

onde:

$$c_g^1 = y_{23} v_{ax} + x_{32} v_{ay} \quad (233)$$

$$c_g^2 = y_{31} v_{ax} + x_{13} v_{ay} \quad (234)$$

$$c_g^3 = -(c_g^1 + c_g^2). \quad (235)$$

3.8.4 Correção SUPG da Matriz de Convecção

O termo referente à correção SUPG da matriz de convecção, definido em (206), é representado por:

$$\mathbf{c}_{pg}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{t}_1 \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \, d\Omega^e, \quad (236)$$

onde o subíndice pg identifica o termo proveniente da parcela de correção SUPG.

Substituindo as definições (109) e (215) e considerando que os termos do integrando de (236) são constante no interior do elemento, a expressão para a correção SUPG da matriz de convecção tem a seguinte forma:

$$\mathbf{c}_{pg}^e = \frac{\mathbf{t}_1}{4A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}. \quad (237)$$

Resolvendo a expressão (237) tem-se a forma final para expressar a correção SUPG da matriz de convecção:

$$\mathbf{c}_{pg}^e = \frac{\mathbf{t}_1}{4A} \begin{bmatrix} -(B_{12} + B_{13}) & B_{12} & B_{13} \\ \text{sim} & -(B_{12} + B_{23}) & B_{23} \\ & & -(B_{13} + B_{23}) \end{bmatrix}, \quad (238)$$

onde:

$$B_{12} = y_{23} B^1 + x_{32} B^2 \quad (239)$$

$$B_{13} = y_{23} B^3 + x_{32} B^4 \quad (240)$$

$$B_{23} = y_{31} B^3 + x_{13} B^4 \quad (241)$$

$$B^1 = y_{31}A_{11} + x_{13}A_{12} \quad (242)$$

$$B^2 = y_{31}A_{21} + x_{13}A_{22} \quad (243)$$

$$B^3 = y_{12}A_{11} + x_{21}A_{12} \quad (244)$$

$$B^4 = y_{12}A_{21} + x_{21}A_{22}. \quad (245)$$

3.8.5 Matriz de Difusão

A parcela que contém os termos difusivos, definida em (206), é representada por:

$$\mathbf{c}_{dg}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^e, \quad (246)$$

onde o subíndice dg identifica o termo de difusão proveniente da parcela de Galerkin.

Substituindo a definição (109) e (70) e considerando que os termos do integrando de (246) são constante no interior do elemento, a matriz de difusão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{c}_{dg}^e = \frac{h_w}{4A} \frac{dp_c}{ds_w} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}. \quad (247)$$

Resolvendo a expressão (247) tem-se a forma final para a matriz de difusão:

$$\mathbf{c}_{dg}^e = \frac{h_w}{4A} \frac{dp_c}{ds_w} \begin{bmatrix} -(c_{12} + c_{13}) & c_{12} & c_{13} \\ \text{sim} & -(c_{12} + c_{23}) & c_{23} \\ & & -(c_{13} + c_{23}) \end{bmatrix}, \quad (248)$$

onde:

$$c_{12} = y_{23}c^1 + x_{32}c^2 \quad (249)$$

$$c_{13} = y_{23}c^3 + x_{32}c^4 \quad (250)$$

$$c_{23} = y_{31}c^3 + x_{13}c^4 \quad (251)$$

$$c^1 = y_{31}k_x + x_{13}k_{xy} \quad (252)$$

$$c^2 = y_{31}k_{xy} + x_{13}k_y \quad (253)$$

$$c^3 = y_{12}k_x + x_{21}k_{xy} \quad (254)$$

$$c^4 = y_{12}k_{xy} + x_{21}k_y. \quad (255)$$

3.8.6 Matriz de Correção do Operador de Captura de Descontinuidade

O termo referente ao operador de captura de descontinuidade, definido em (206), é representado por:

$$\mathbf{c}_{op}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{t}_2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega^e, \quad (256)$$

onde subíndice *op* identifica o termo proveniente da parcela de correção do operador de captura de descontinuidade.

Substituindo a definição (109) e considerando que os termos do integrando de (256) são constantes no interior do elemento, a matriz de correção do operador de captura de descontinuidade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{c}_{op}^e = \frac{\mathbf{t}_2}{4A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}. \quad (257)$$

Resolvendo a expressão (257) tem-se a forma final para a matriz de correção do operador de captura de descontinuidade:

$$\mathbf{c}_{op}^e = \frac{\mathbf{t}_2}{4A} \begin{bmatrix} -\left(B_{12}^{op} + B_{13}^{op}\right) & B_{12}^{op} & B_{13}^{op} \\ & -\left(B_{12}^{op} + B_{23}^{op}\right) & B_{23}^{op} \\ sim & & -\left(B_{13}^{op} + B_{23}^{op}\right) \end{bmatrix}. \quad (258)$$

onde:

$$B_{12}^{op} = y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13} \quad (259)$$

$$B_{13}^{op} = y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21} \quad (260)$$

$$B_{23}^{op} = y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21}. \quad (261)$$

3.9 Discretização Temporal

Neste trabalho utiliza-se uma formulação variacional semi-discreta para resolver o conjunto acoplado de equações diferenciais parciais que descreve o problema de escoamento bifásico de fluidos imiscíveis em meios porosos. A formulação variacional semi-discreta caracteriza-se pela discretização por elementos finitos no espaço seguida pela discretização por diferenças finitas no tempo. Deste modo o conjunto acoplado de equações diferenciais ordinárias resultante da discretização espacial será discretizado no tempo utilizando o método trapezoidal generalizado apresentado por Hughes [18]. Para realizar o avanço da solução do problema no tempo adota-se uma estratégia baseada no algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor mostrado em Coutinho e Alves [8].

As equações (118) e (206) formam um sistema acoplado não-linear de equações diferenciais ordinárias que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p(p, s, t) \\ \mathbf{F}_s(p, s, \dot{s}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix}, \quad (262)$$

onde os subíndices p e s indicam, respectivamente, as contribuições da pressão da fase não-molhante e da saturação da fase molhante. Os termos \mathbf{F}_p e \mathbf{F}_s são funções não-

lineares da pressão, da saturação e da derivada temporal da saturação. Os termos Q_p e Q_s levam em conta os termos fonte e as condições de contorno.

O sistema (262) possui dois graus de liberdade, a pressão da fase não-molhante e a saturação da fase molhante.

Existem duas estratégias de solução para se resolver o sistema (262). Na primeira os dois graus de liberdade do problema são solucionados simultaneamente. Já na segunda estratégia de solução resolve-se sequencial cada equação de conservação do problema, ou seja, cada grau de liberdade do problema é solucionado separadamente de forma sequencial. Langtangen [21] apresenta dois algoritmos baseados nessas duas estratégias, tais algoritmos são identificados respectivamente como algoritmo totalmente implícito e algoritmo sequencialmente implícito.

Neste trabalho utiliza-se o algoritmo sequencialmente implícito apresentado por Langtangen [21] para solucionar o sistema (262).

3.9.1 Algoritmo sequencialmente implícito

A experiência mostra que o emprego da estratégia de solução totalmente implícita demanda mais memória quando comparado com a estratégia de solução sequencialmente implícita. Assim ao contrário da estratégia totalmente implícita, que armazena uma única matriz referente ao sistema global, a estratégia sequencialmente implícita armazena individualmente submatrizes associadas a cada grau de liberdade do problema. A área de armazenamento para as submatrizes é consideravelmente menor do que a área necessária para armazenar a matriz associada ao sistema global. O ganho no armazenamento das submatrizes em relação ao armazenamento da matriz referente ao sistema global fica mais evidente quando se trabalha com problemas de grande porte. Entretanto o número de iterações necessárias para se alcançar a solução do problema é geralmente maior na estratégia sequencialmente implícita do que na estratégia totalmente implícita. Todavia o tempo necessário para se completar uma única iteração no processo de solução é menor na estratégia sequencialmente implícita quando comparado com a estratégia totalmente implícita. A experiência tem mostrado que, em geral, o balanço final é favorável à estratégia sequencialmente implícita quando aplicada à solução de problemas bidimensionais de grande porte e geralmente a todos os problemas tridimensionais [15].

Um outro ponto favorável à estratégia sequencialmente implícita é o fato de que a solução iterativa dos sistemas de equações lineares resultantes da discretização das equações diferenciais parciais tem seu comportamento relacionado ao tipo de equação diferencial a ser discretizada. No presente trabalho por exemplo, aplicando-se a estratégia de solução sequencialmente implícita serão resolvidos dois sistemas de equações lineares distintos, um simétrico oriundo de uma equação elíptica (equação da pressão) e outro não-simétrico oriundo de uma equação parabólica-hiperbólica (equação da saturação). O sistema oriundo da equação elíptica necessita de um número de iterações tipicamente $O(h^{-2})$ para convergir enquanto o sistema oriundo da equação parabólica-hiperbólica necessita de um número de iterações tipicamente $O(h^{-1})$ para convergir. Se a estratégia de solução totalmente implícita for aplicada ao problema apenas um sistema de equações lineares será resolvido. Este sistema de equações lineares é não-simétrico e nele encontram-se presentes termos relativos à equação elíptica e à equação parabólica-hiperbólica. Desta forma existe uma tendência dos termos relativos à parcela elíptica predominarem e induzirem um comportamento tipicamente $O(h^{-2})$ para o sistema[21].

A estratégia de solução sequencialmente implícita permite a escolha de métodos iterativos e de pré-condicionadores mais adequados e eficientes para cada sistema de equação linear envolvido no problema. Buscando sempre otimizar a forma de solucionar um problema a estratégia de solução sequencialmente implícita mostra-se bem mais atraente quando comparada com a estratégia de solução totalmente implícita.

No presente trabalho a estratégia de solução sequencialmente implícita resulta na seguinte seqüência de cálculos:

- 1) Resolve-se a equação da pressão;
- 2) Calcula-se o campo de velocidades;
- 3) Resolve-se a equação da saturação.

3.9.2 Algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor

O problema é discretizado no tempo através do método trapezoidal generalizado apresentado por Hughes [18] e o avanço da solução do problema de um instante de

tempo n para um instante de tempo $n + 1$ é obtido com o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor [8] descrito a seguir:

Dados: \mathbf{s}_n , \mathbf{a}_n , $\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_n$, $\mathbf{v}_{n+1}^i = \mathbf{v}_n$

Inicializa as grandezas (predição)

$$i = 0$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^i = \mathbf{s}_n + (1 - g)\Delta t \mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^i = 0$$

Para $i = 0, 1, 2, 3 \dots$ até *maxiter* ou até convergir, **Faça**

Bloco 1: Resolve a equação da pressão

$$\mathbf{K}(\mathbf{s}_{n+1}^i) \mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_{n+1}^i)$$

Bloco 2: Calcula o campo de velocidade

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}) \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1})$$

Bloco 3: Resolve a equação da saturação

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1}) \Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{r}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1})$$

onde:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1}) + g\Delta t \mathbf{C}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_s(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1}) - \mathbf{M}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1}) \mathbf{a}_{n+1}^i - \mathbf{C}(\mathbf{s}_{n+1}^i, \mathbf{p}_{n+1}^{i+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^{i+1}) \mathbf{s}_{n+1}^i$$

Atualiza as grandezas (correção)

$$\mathbf{s}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{s}_{n+1}^i + g\Delta t \Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1}$$

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1}$$

Fim.

No algoritmo acima descrito n é o contador de passos de tempo, $maxiter$ é o número máximo de iterações não-lineares do algoritmo, i é o contador das multiterações (iterações não-lineares), Δt é o passo de tempo da análise, $\Delta \mathbf{a}$ é o incremento da derivada temporal da saturação e \mathbf{g} é o parâmetro que controla a estabilidade e a precisão na integração do tempo. No presente trabalho adota-se $\mathbf{g} = 0.5$ o que leva a um método implícito, incondicionalmente estável e de segunda ordem ($O(\Delta t)^2$) conhecido como método de *Crank-Nicolson*.

O processo iterativo continua até que seja atingido um critério de convergência pré-determinado, que é avaliado empregando-se as seguintes medidas de erros das variáveis de interesse:

$$e^p = \frac{\|\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{p}_{n+1}^i\|}{\|\mathbf{p}_{n+1}^{i+1}\|} \quad (263)$$

$$e^v = \frac{\|\mathbf{v}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{v}_{n+1}^i\|}{\|\mathbf{v}_{n+1}^{i+1}\|} \quad (264)$$

$$e^a = \frac{\|\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1}\|}{\|\mathbf{a}_{n+1}^{i+1}\|} \quad (265)$$

$$e^R = \frac{\|\mathbf{r}_{n+1}^{i+1}\|}{\|\mathbf{r}_{n+1}^{i=0}\|} \quad (266)$$

$$e^E = \left[\frac{(\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1})^T \mathbf{r}_{n+1}^{i+1}}{(\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i=0})^T \mathbf{r}_{n+1}^{i=0}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (267)$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma Euclidiana do vetor e e^p , e^v e e^a são respectivamente os erros relativos à pressão, à velocidade e à derivada temporal da saturação. A quantidade e^R mede o erro no balanço de massa da equação da saturação e e^E representa o erro relativo à norma de energia, uma vez que a seguinte relação é válida:

$$\Delta \mathbf{a}^T \mathbf{r} = \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{a}. \quad (268)$$

Para se alcançar a convergência é necessário satisfazer as seguintes condições:

$$\frac{e^p}{tol} \leq 1 \quad (269)$$

$$\frac{e^v}{tol} \leq 1 \quad (270)$$

$$e^{\text{sat}} = \max\left[\frac{e^a}{tol}, \frac{e^R}{tol}, \frac{e^E}{tol}\right] \leq 1. \quad (271)$$

O parâmetro *tol* representa o valor da tolerância do problema e é fornecido pelo usuário. Se as condições (269) e (270) forem satisfeitas os valores da pressão e da velocidade permanecerão inalterados durante as iterações não-lineares e o algoritmo continuará atualizando somente os valores da saturação. Quando a condição (271) for satisfeita encerra-se o processo iterativo.

De acordo com Durlofsky [14] em problemas de simulação de reservatórios de petróleo as variações de pressão e de velocidade ocorrem em intervalos de tempo bem maiores do que as variações de saturação. Nesses casos a equação da pressão e a equação da velocidade não precisam ser resolvidas a cada passo de tempo. Define-se então um número fixo de passos de tempo em que a pressão e a velocidade permanecerão constantes e o algoritmo de solução somente resolverá a equação da saturação durante este número fixo de passos de tempo. Este procedimento pode conduzir a ganhos computacionais consideráveis visto que a solução da equação da pressão é mais dispendiosa do que a solução da equação da saturação.

3.10 Solução dos Sistemas de Equações Lineares

No algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor utilizado neste trabalho é necessário, a cada iteração não-linear ou multicorreção, resolver três sistemas de equações lineares distintos. Esses sistemas de equações lineares referem-se, respectivamente, a pressão, velocidade e saturação.

Os métodos utilizados para resolver um sistema de equações lineares podem ser classificados como métodos diretos ou métodos iterativos. Os métodos diretos são baseados na fatoração da matriz de coeficientes do sistema, tal como eliminação de

Gauss. Esses métodos não são indicados no caso de resolução de problemas de grande porte [21]. Os métodos iterativos baseiam-se na idéia de que a partir de uma estimativa inicial da solução gera-se uma seqüência de aproximações que faz a solução parcial do problema, a cada etapa de cálculo, se aproximar da solução exata. Os métodos iterativos em comparação com os métodos diretos são mais eficientes do ponto de vista computacional principalmente em problemas 3D [21].

Os métodos iterativos podem ser implementados a partir de diferentes estratégias, como por exemplo técnicas esparsas [32], técnicas elemento-por-elemento [18] e técnicas baseadas nas arestas dos elementos [23]. Cada uma dessas técnicas possuem suas particularidades, vantagens, desvantagens e características próprias que influenciam em sua aplicabilidade.

A taxa de convergência de um método iterativo depende das propriedades espectrais da matriz de coeficientes. Segundo Langtangen [21] a aplicação de técnicas de pré-condicionamento sobre o sistema de equações aumentam consideravelmente a taxa de convergência do método iterativo.

Para se alcançar uma eficiência computacional satisfatória na resolução de sistemas de equações lineares deve existir uma harmonia entre os diversos aspectos do problema. Assim o sucesso de um método iterativo depende, por exemplo, da existência de um algoritmo eficiente, que está associado à natureza do problema, aliado a uma técnica de pré-condicionamento adequada.

3.10.1 Métodos Iterativos

Neste trabalho adotam-se métodos iterativos para se resolver os sistemas de equações lineares referentes às equações da pressão, velocidade e saturação. Como cada um dos sistemas de equações têm características específicas, diferentes métodos iterativos são utilizados para resolvê-los individualmente.

No caso do sistema de equações referente à equação da pressão a matriz de coeficientes é simétrica positiva-definida e para resolvê-lo aplica-se o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel (PCG). No cálculo das velocidades pós-processadas o sistema de equações também possui uma matriz de coeficientes simétrica positiva-definida porém neste caso utiliza-se o método de Jacobi livre de matrizes. O sistema de equações referente à

equação da saturação é não-simétrico e o método GMRES (*Generalized Minimal Residual*) com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel é utilizado para resolvê-lo.

Detalhes sobre os algoritmos para cada um dos métodos iterativos acima citados podem ser obtidos em [21], [31] e [33].

3.10.2 Implementação elemento-por-elemento

Os métodos iterativos usados neste trabalho foram implementados utilizando técnicas elemento-por-elemento. Basicamente, os métodos iterativos envolvem operações entre vetores e matrizes. As principais operações são produto escalar entre dois vetores, atualização de vetores e o produto matriz-vetor.

O produto matriz-vetor é uma operação de grande importância pois depende da forma como a matriz de coeficientes está armazenada. A implementação elemento-por-elemento evita a montagem da matriz de coeficientes global visto que esta operação é bastante dispendiosa. O produto matriz-vetor é solucionado então a nível de elemento e em seguida seu resultado é distribuído para o problema de forma global.

O produto matriz-vetor implementado na forma elemento-por-elemento pode ser representado por:

$$\mathbf{Ax} = \left(\begin{matrix} nel \\ \mathbf{A} \mathbf{A}_e \\ e=1 \end{matrix} \right) \mathbf{x} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e,$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{x} são respectivamente a matriz de coeficientes global e o vetor global, \mathbf{A}_e e \mathbf{x}_e são respectivamente a matriz de coeficientes de elemento e o vetor de elemento, nel é o número de elementos da malha de elementos finitos e \mathbf{A} é o operador de globalização [18].

A execução do produto matriz-vetor implementado na forma elemento-por-elemento realiza-se através de três passos como se segue [33]:

- 1 – Localização das componentes do vetor de elementos no vetor global:

$$\mathbf{x}_e \leftarrow \mathbf{x}.$$

2 – Executa a operação matriz-vetor a nível de elemento:

$$\mathbf{y}_e \leftarrow \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e.$$

3 – Espalha as componentes do vetor de elemento no vetor global:

$$\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y} + \mathbf{y}_e.$$

Os passos 1 e 2 deste algoritmo podem ser executados de forma paralela ou vetorial sem maiores dificuldades. Porém o passo 3, que envolve uma operação de atualização em um vetor global, só pode ser executado de forma paralela ou vetorial dentro de um grupo de elementos não-adjacentes. Grupos de elementos não-adjacentes podem ser construídos reordenando a malha de elementos finitos, antes de se iniciar os cálculos, através de um algoritmo de coloração de malha [8].

3.10.3 Pré-condicionamento

A taxa de convergência de um método iterativo, usado na resolução de um determinado sistema de equações lineares, depende das propriedades espectrais da matriz de coeficientes do sistema. A técnica de pré-condicionamento baseia-se na idéia de transformar o sistema de equações original em um outro sistema que seja equivalente ao sistema original, ou seja, que possua a mesma solução do sistema original porém tenha propriedades espectrais mais favoráveis [35]. Esta última característica aumenta a taxa de convergência do método iterativo. Neste trabalho utilizam-se pré-condicionadores elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel conforme apresentado em [8] e em [33].

Para descrever o pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel utilizado neste trabalho são considerados dois sistemas equações lineares, um simétrico referente a equação da pressão, e um não-simétrico referente a equação da saturação, dados respectivamente a seguir:

$$\mathbf{H}\mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (272)$$

$$\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{b}}. \quad (273)$$

Os sistemas (272) e (273) são inicialmente transformados da seguinte forma:

$$\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b} \quad (274)$$

$$\overline{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{b}}, \quad (275)$$

onde:

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{H}) \quad (276)$$

$$\overline{\mathbf{W}} = \text{diag}(\overline{\mathbf{H}}) \quad (277)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{s} \quad (278)$$

$$\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{W}}^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{s}}. \quad (279)$$

Os sistemas (274) e (275) são reescritos como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (280)$$

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{u}}, \quad (281)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \quad (282)$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \quad (283)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b} \quad (284)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}. \quad (285)$$

Em seguida, a cada multicorreção executada pelo método iterativo, realizam-se sobre os sistemas (280) e (281) as seguintes operações que definem o pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} \quad (286)$$

$$\mathbf{L}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\bar{\mathbf{u}}, \quad (287)$$

onde:

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{x}}. \quad (288)$$

As matrizes \mathbf{B} , \mathbf{L} e \mathbf{U} são obtidas a partir da decomposição de Gauss-Seidel das matrizes \mathbf{A} e $\bar{\mathbf{A}}$ como:

$$\mathbf{B} = \prod_{e=1}^{nel} \{\mathbf{L}_e\} \times \prod_{e=nel}^1 \{\mathbf{L}_e^T\} \quad (289)$$

$$\mathbf{L} = \prod_{e=1}^{nel} \bar{\mathbf{L}}_e \quad (290)$$

$$\mathbf{U} = \prod_{e=nel}^1 \bar{\mathbf{U}}_e, \quad (291)$$

tal que:

$$\mathbf{L}_e + \mathbf{L}_e^T = \mathbf{A}_e + \mathbf{I} \quad (292)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_e + \bar{\mathbf{U}}_e = \bar{\mathbf{A}}_e + \mathbf{I} \quad (293)$$

sendo que o subíndice e indica a contribuição das matrizes a nível de elemento e nel é o número de elementos da malha de elementos finitos.

A aplicação do pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel não envolve nenhuma área de memória adicional além da área referente às matrizes de elemento. Além disso, a ação do pré-condicionador pode ser calculada de forma paralela ou vetorial sem maiores dificuldades [8].

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados dois grupos diferentes de resultados. O primeiro grupo é formado pelos exemplos de validação. Os exemplos de validação têm o objetivo de comprovar a qualidade dos resultados obtidos com a formulação desenvolvida. Desta forma os resultados obtidos nesse trabalho são comparados com os resultados encontrados na literatura. Uma vez demonstrada a eficiência da formulação desenvolvida nesse trabalho o segundo grupo de exemplos é apresentado, os exemplos numéricos. Nesses exemplos analisa-se como a reologia dos fluidos influencia na solução do problema. Compara-se então os resultados obtidos a partir do escoamento de diferentes fluidos, tais como newtonianos, dilatantes e pseudoplásticos. Nos exemplos numéricos também serão tratados casos em que o meio poroso é heterogêneo.

Neste trabalho o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo de Gauss-Seidel, empregado para resolver a equação da pressão, é identificado como PCG. O método GMRES com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo de Gauss-Seidel, empregado para resolver a equação da saturação, é identificado como GMRES. O método de Jacobi livre de matrizes empregado no cálculo das velocidades, é identificado como JCB.

4.1 Exemplos de validação

São apresentados três exemplos de validação cuja a solução numérica obtida é comparada com a solução encontrada na literatura. O primeiro exemplo de validação é o caso unidimensional onde injeta-se um fluido newtoniano pela lateral esquerda do domínio, o segundo é o caso unidimensional onde injeta-se um fluido pseudoplástico

pela lateral esquerda do domínio e o terceiro exemplo de validação é o problema clássico de cinco poços.

Nesses exemplos de validação investiga-se a influência dos parâmetros da formulação estabilizada, empregada na aproximação da equação da saturação, sobre o resultado da simulação. Deste modo, na equação da saturação, a formulação de Galerkin pode ser acrescida somente da formulação SUPG, ou somente do termo referente ao operador de captura de descontinuidade do tipo CAU ou acrescida tanto da formulação SUPG quanto do termo referente ao operador de captura de descontinuidade do tipo CAU. Os resultados onde somente a formulação SUPG foi usada são representados simplesmente por SUPG. Quando a formulação SUPG é usada juntamente com o operador de captura de descontinuidade do tipo CAU os resultados são representados por SUPG+CAU. É importante notar que a contribuição do operador de captura de descontinuidade pode ser ponderada tanto por $\mathbf{d}_2^e = h^e$ quanto por $\mathbf{d}_2^e = \frac{h^e}{2}$, sendo seus referidos resultados representados respectivamente por CAU h e CAU $h/2$. Os casos onde somente o operador de captura de descontinuidade foi utilizado são identificados simplesmente por CAU h ou por CAU $h/2$.

Em todos os exemplos de validação a tolerância dos métodos iterativos é fixada em 10^{-6} e a tolerância para iteração não-linear em 10^{-2} , o número máximo de multicorrecções é fixado em 10 e o passo de tempo é fixado em $\Delta t = 0.0001$, exceto exemplo 4.1.3 onde o passo de tempo é fixado em $\Delta t = 0.001$. Adota-se também um número de 25 vetores de Krylov para o algoritmo GMRES.

4.1.1 Caso unidimensional – injeção de um fluido newtoniano

O objetivo deste exemplo é validar a formulação estabilizada utilizada para resolver a equação da saturação. Para tal o problema unidimensional apresentado por Durlofsky [14] é usado como referência. Conforme apresenta Durlofsky [14], as grandezas do problema são dadas em um sistema compatível de unidades. O problema consiste em injetar um fluido (fase molhante) pela lateral esquerda do domínio com o objetivo de deslocar o fluido existente no reservatório (fase não-molhante), sendo ambos os fluidos considerados newtonianos. Utiliza-se uma malha com 1×80 células, sendo cada célula dividida em dois elementos triangulares, distribuídas no retângulo $0 \leq x \leq 4$,

$0 \leq y \leq 0.05$. Foram aplicadas condições de contorno periódicas na direção y para simular o deslocamento unidimensional na direção x , onde o deslocamento total é $L = 4$. Neste exemplo os efeitos da pressão capilar e dos termos fonte no interior do domínio foram desconsiderados. A velocidade total é $\mathbf{v}_t = \mathbf{i}_x$ e fixou-se $s_w=1$ em $x = 0$. Inicialmente considera-se que o reservatório está preenchido apenas pela fase não-molhante, ou seja, em $t = 0$ $s_w = 0$ em todo o reservatório. A porosidade do reservatório é igual a 0.20 e as permeabilidades relativas das fases molhante e não-molhante são dadas respectivamente por $k_{rw} = s_w^2$ e $k_m = (1 - s_w)^2$. O reservatório é considerado um meio poroso homogêneo e isotrópico. A razão entre a viscosidade da fase não-molhante e a viscosidade da fase molhante é igual a 5.

Dois casos distintos são analisados: no primeiro os efeitos gravitacionais são desconsiderados, enquanto no segundo tais efeitos são levados em consideração e agem no sentido oposto ao deslocamento dos fluidos. No primeiro caso $G_d = 0$ enquanto que no segundo caso $G_d = 2$, onde G_d é definido em (71). Os resultados são apresentados em termos de Volumes Porosos Injetados (VPI), que é uma grandeza análoga ao tempo adimensionalizado.

A Figura 3 mostra o perfil de saturação obtido para o caso em que os efeitos gravitacionais não foram considerados enquanto a Figura 4 mostra o perfil de saturação para o caso em que se considera os efeitos gravitacionais. Ambos os resultados são tomados em $t = 0.5$ VPI. Segundo Durlofsky [14] a altura teórica para o choque no caso sem gravidade é 0.41, o que está em boa concordância com os resultados obtidos, como pode ser observado na Figura 3. Na Figura 4 estão os resultados obtidos com gravidade e, de acordo com Durlofsky [14], neste caso a altura teórica para o choque é de 0.76, o que também está em boa concordância com os presentes resultados.

Na Figura 3 o resultado obtido quando utiliza-se somente a formulação SUPG é o menos difusivo, apresentando porém as oscilações espúrias (*under-shooting*) mais acentuadas. No caso do resultado obtido quando se utiliza a formulação SUPG+CAU $h/2$ também se constata a presença de oscilações espúrias, embora com menor intensidade. Nos demais resultados essas oscilações espúrias não são observadas. Quando os efeitos gravitacionais são considerados verifica-se, na Figura 4, a ausência de oscilações espúrias e mais uma vez o resultado obtido quando somente a formulação SUPG é empregada apresenta-se como o menos difusivo.

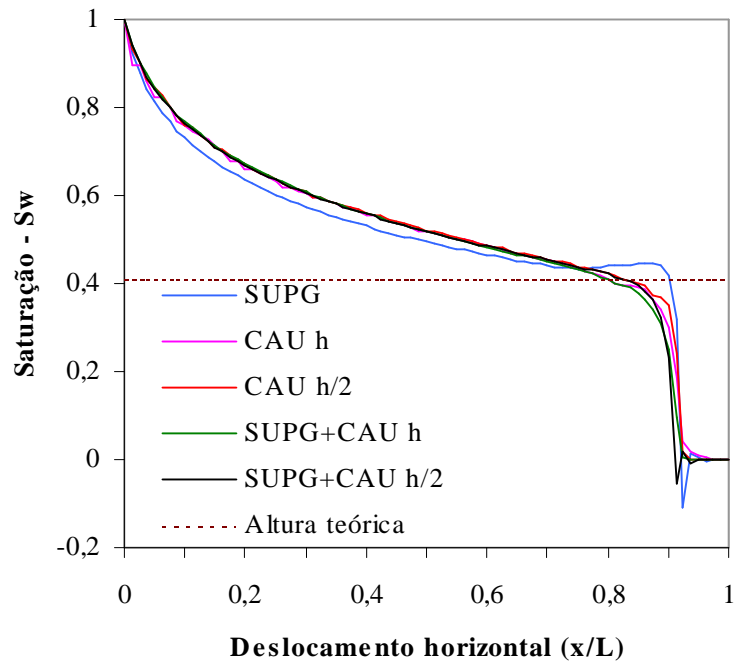


Figura 3 – Frente de saturação em $t=0.5$ VPI para o caso unidimensional sem gravidade.

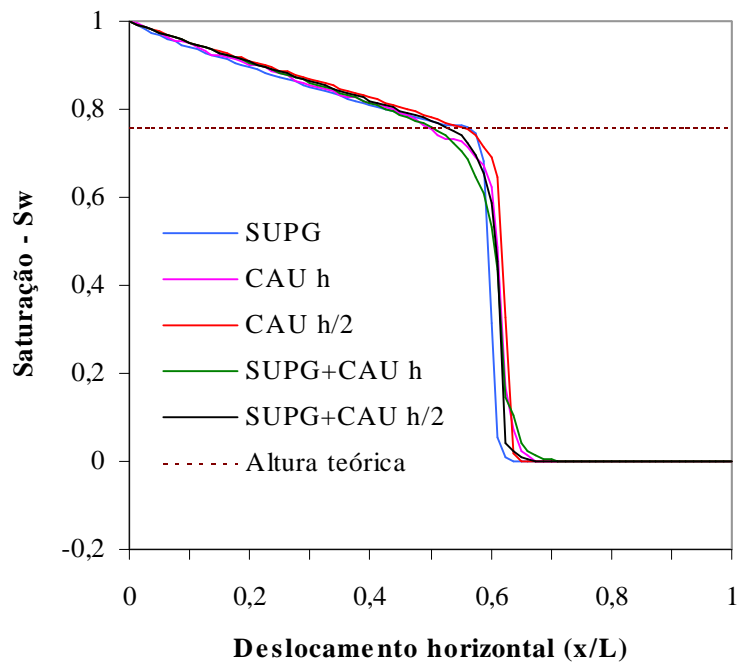


Figura 4 – Frente de saturação em $t=0.5$ VPI para o caso unidimensional com gravidade.

4.1.2 Caso unidimensional – injeção de um fluido pseudoplástico

O objetivo deste exemplo é validar o cálculo da viscosidade dos fluidos não-newtonianos. Para tal o problema unidimensional apresentado por Wu e Pruess [37] é usado como referência. O problema consiste em injetar um fluido pseudoplástico (fase molhante) pela lateral esquerda do domínio com o objetivo de deslocar o fluido existente no reservatório (fase não-molhante) sendo este último considerado um fluido newtoniano. Utiliza-se uma malha com 1×80 células, sendo cada célula dividida em dois elementos triangulares, distribuídas no retângulo $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$, $0 \leq y \leq 0.05 \text{ m}$. Foram aplicadas condições de contorno periódicas na direção y para simular o deslocamento unidimensional na direção x , onde o deslocamento total é $L = 4 \text{ m}$. Neste exemplo os efeitos da pressão capilar, dos termos fonte no interior do domínio e os efeitos gravitacionais foram desconsiderados. A saturação residual da fase não-molhante é igual a 0.20. A porosidade do reservatório é igual a 0.20. As permeabilidades relativas das fases molhante e não-molhante são dadas respectivamente por $k_{rw} = 1.17(s_w)^2$ e $k_m = 0.75(1 - 1.2s_w)^2$. O reservatório é considerado um meio poroso homogêneo e isotrópico sendo a permeabilidade absoluta deste igual a 1 Darcy. A taxa de injeção é de $0.8233 \times 10^{-5} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ enquanto o tempo total de injeção é de 10h (dez horas). A viscosidade da fase não-molhante é igual a 5cP e para a fase molhante o parâmetro de consistência e o índice de comportamento do escoamento, utilizados no modelo de lei das potências, são dados respectivamente por $H = 0.01 \text{ Pa.s}$ e $n = 0.5$.

A Figura 5 mostra o perfil de saturação obtido depois de 10h de injeção. O resultado numérico obtido está em boa concordância com o resultado apresentado por Wu e Pruess [37], onde a altura teórica para o choque é 0.36, o que valida o código utilizado para calcular a viscosidade dos fluidos não-newtonianos.

Na Figura 5, assim como verificado no exemplo anterior, o resultado obtido quando utiliza-se somente a formulação SUPG é o menos difusivo apresentando porém as oscilações espúrias (*under-shooting*) mais acentuadas. No caso do resultado obtido quando se utiliza a formulação SUPG+CAU $h/2$ também se constata a presença de oscilações espúrias, embora com menor intensidade. Nos demais resultados essas oscilações espúrias não são observadas. Analisando a Figura 5 conclui-se ainda que o melhor resultado é obtido quando se utiliza a formulação SUPG+CAU h .

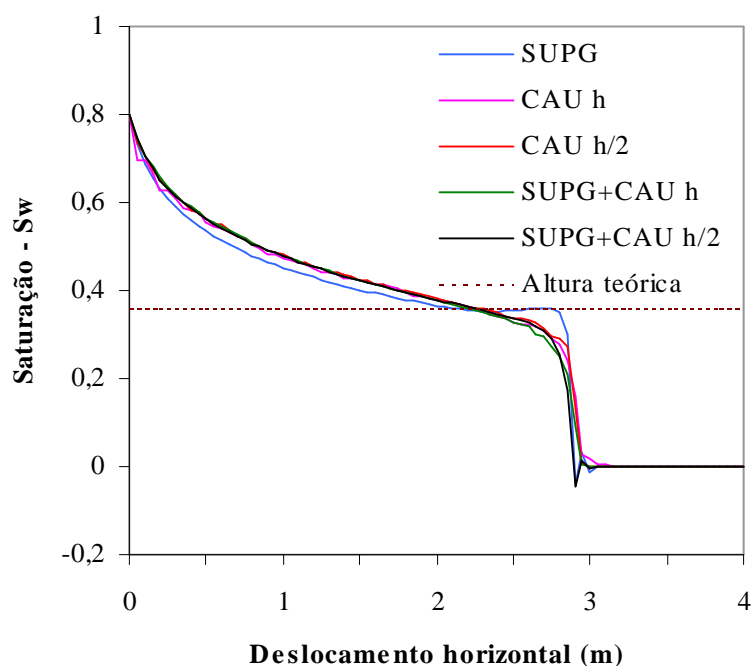


Figura 5 – Frente de saturação depois de 10h de injeção de um fluido pseudoplástico.

4.1.3 Problema clássico de cinco poços

O objetivo deste exemplo é validar a solução do sistema acoplado de equações (pressão-velocidade-saturação). Para tal o problema clássico de cinco poços apresentado por Durlofsky [14] é usado como referência. Assim como em Durlofsky [14] o problema consiste em resolver um quarto do problema de cinco poços. Neste problema o fluido injetado no poço injetor (fase molhante) desloca o fluido do reservatório (fase não-molhante) em direção ao poço produtor, sendo ambos os fluidos considerados newtonianos. Conforme apresenta Durlofsky [14], as grandezas do problema são dadas em um sistema compatível de unidades. O domínio do problema é um quadrado de lado unitário. Foram utilizados 800 elementos triangulares lineares para discretizar regularmente o domínio do problema. Neste exemplo os efeitos da pressão capilar, dos termos fonte no interior do domínio e os efeitos gravitacionais foram desconsiderados. Inicialmente considera-se que o reservatório está preenchido apenas pela fase não-molhante, ou seja, em $t=0$ $s_w=0$ em todo o reservatório. No poço injetor fixou-se $s_w=1$ e as permeabilidades relativas das fases molhante e não-molhante são dadas

respectivamente por $k_{rw} = s_w^2$ e $k_{rn} = (1 - s_w)^2$. O reservatório é considerado um meio poroso homogêneo e isotrópico, assim sendo a permeabilidade absoluta do mesmo é dada por $\mathbf{K}=\mathbf{I}$. A porosidade do reservatório é igual a 0.20. A razão entre a viscosidade da fase não-molhante e a viscosidade fase molhante é igual a 4.

Dois cenários distintos são analisados: no primeiro, identificado como diagonal, a linha imaginária poço injetor-poço produtor é perpendicular às linhas diagonais dos elementos triangulares; no segundo, identificado como paralelo, as linhas diagonais dos elementos triangulares são paralelas à linha imaginária poço injetor-poço produtor. A Figura 6 mostra a malha de elementos finitos usada neste problema. No caso identificado como diagonal o poço injetor está situado no vértice inferior esquerdo e o poço produtor no vértice superior direito. No caso identificado como paralelo o poço injetor está situado no vértice superior esquerdo e o poço produtor no vértice inferior direito. Nos dois casos, nos vértices onde não existem poços prescrevem-se pressões nulas e no restante do contorno a condição de fluxo nulo é especificada. Segundo Durlofsky [14] os resultados para os dois cenários, o diagonal e o paralelo, deveriam ser idênticos pois o desenvolvimento matemático é o mesmo em ambos os casos. Porém pode-se notar que os resultados obtidos diferem um pouco devido ao efeito de orientação de malha.

Os resultados são apresentados em termos de Volumes Porosos Injetados (VPI), que é uma grandeza análoga ao tempo adimensionalizado. Assim como em Durlofsky [14] os resultados são mostrados de duas maneiras diferentes: recuperação de óleo normalizada pelo volume total injetado e acumulação de óleo recuperado (volume de óleo produzido ou volume de óleo recuperado).

As Figuras 7 a 12 mostram que os resultados numéricos obtidos estão em boa concordância com os resultados apresentados por Durlofsky [14]. O resultado onde somente a formulação SUPG foi utilizada, na configuração paralela, foi o que apresentou a maior discrepância em relação aos resultados mostrados em Durlofsky [14]. A análise dos resultados obtidos permite verificar a presença do efeito de orientação de malha, porém nos casos onde a formulação SUPG+CAU h foi utilizada este efeito foi praticamente eliminado conforme pode ser observado nas Figuras 11 e 12. Nos demais casos o efeito de orientação de malha existe porém não é tão acentuado quanto o encontrado na solução SUPG.

As Figuras 13 e 14 apresentam o número médio de multicorrekções por passo de tempo executado pelo algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor e o número médio de iterações em cada multicorrekção executado pelos métodos numéricos utilizados para resolver as equações da pressão e da saturação assim como nos cálculos das velocidades. As Tabelas 1 e 2 apresentam o número total de passos de tempo da análise, o número total de soluções para as equações da pressão, velocidade e saturação e o número de total de iterações executado pelos métodos PCG, JCB e GMRES.

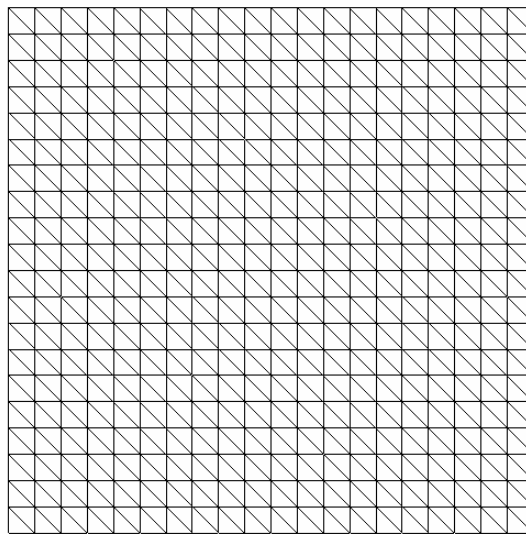


Figura 6 – Malha de elementos finitos com 800 elementos triangulares lineares.

Analisando as Figuras 13 e 14 pode-se observar que o método PCG necessita em média de um número muito elevado de iterações para atingir a convergência quando comparado com os demais métodos apresentados. Nota-se também que quando a formulação SUPG é empregada sem o operador de captura de choque o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor necessita em média de apenas 3 iterações para convergir. O emprego do operador de captura de choque aumenta consideravelmente o número de multicorrekções desse algoritmo. Nas Tabelas 1 e 2 observa-se que para todas as formulações apresentadas, exceto na formulação SUPG com a configuração paralela, o método GMRES executou o maior número de iterações. É importante destacar também o baixo número de iterações executado pelo método JCB em todos os casos

mostrados. Finalmente conclui-se que neste exemplo o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor precisou em média de 10 multicorreções por passo de tempo para convergir, exceto quando se empregou a formulação SUPG sem o operador de captura de choque. As equações da pressão e da velocidade foram solucionadas em média uma única vez a cada passo de tempo enquanto que a equação da saturação precisou ser solucionada durante todas as multicorreções do algoritmo.

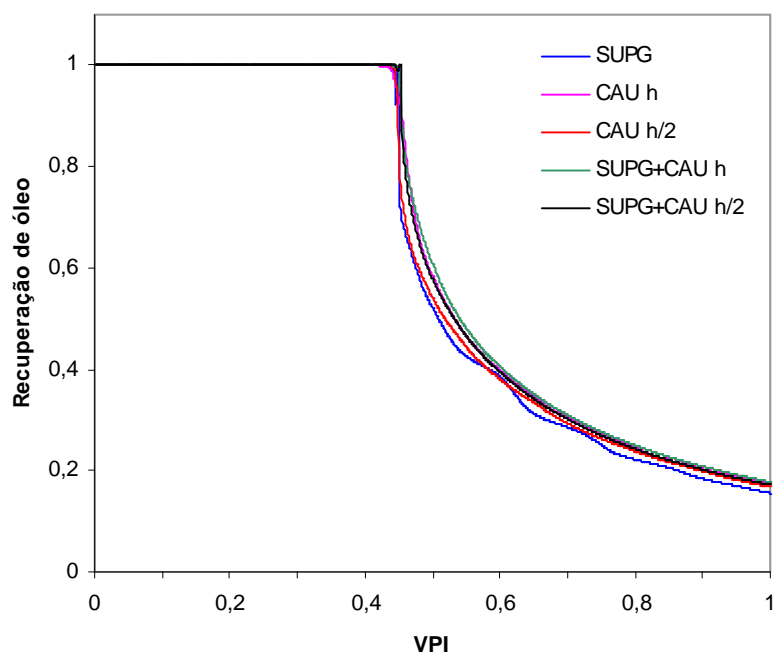


Figura 7 – Recuperação de óleo normalizada pelo volume total injetado na configuração diagonal.

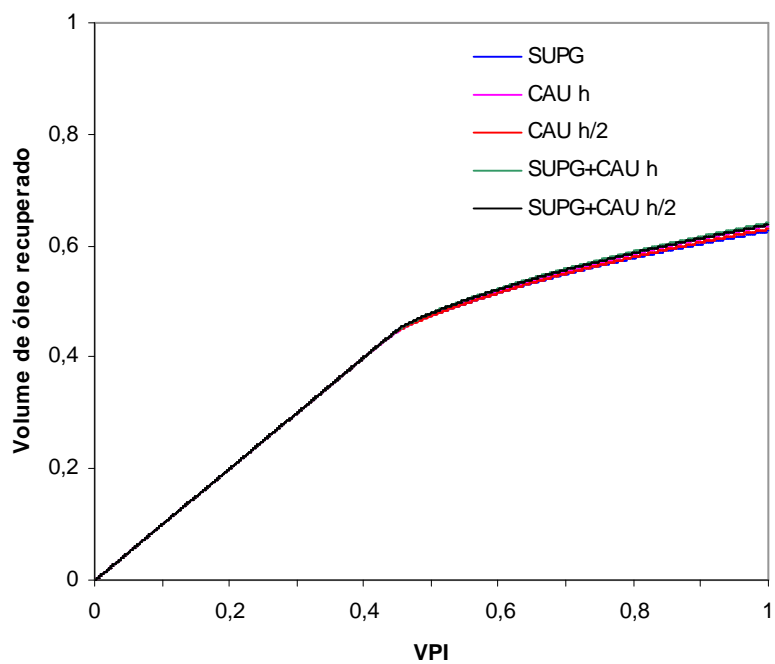


Figura 8 – Volume de óleo recuperado na configuração diagonal.

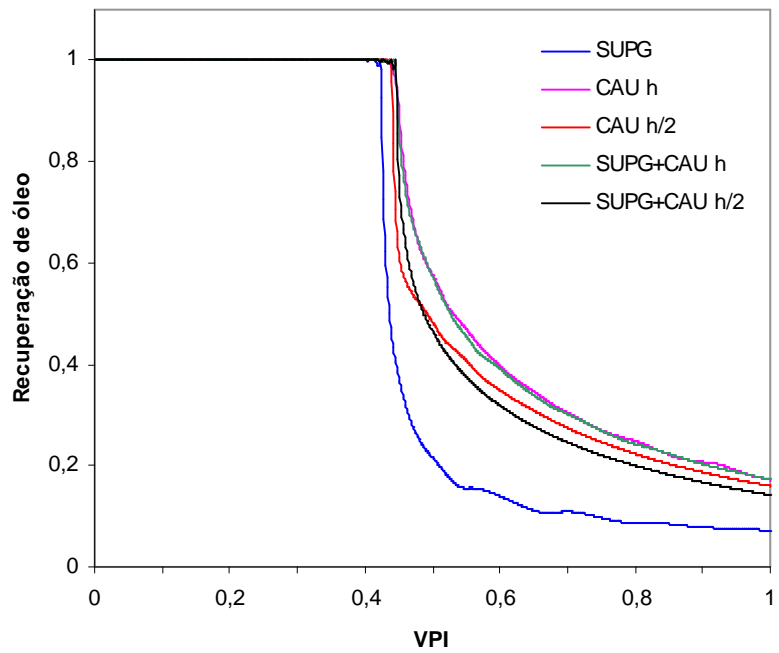


Figura 9 – Recuperação de óleo normalizada pelo volume total injetado na configuração paralela.

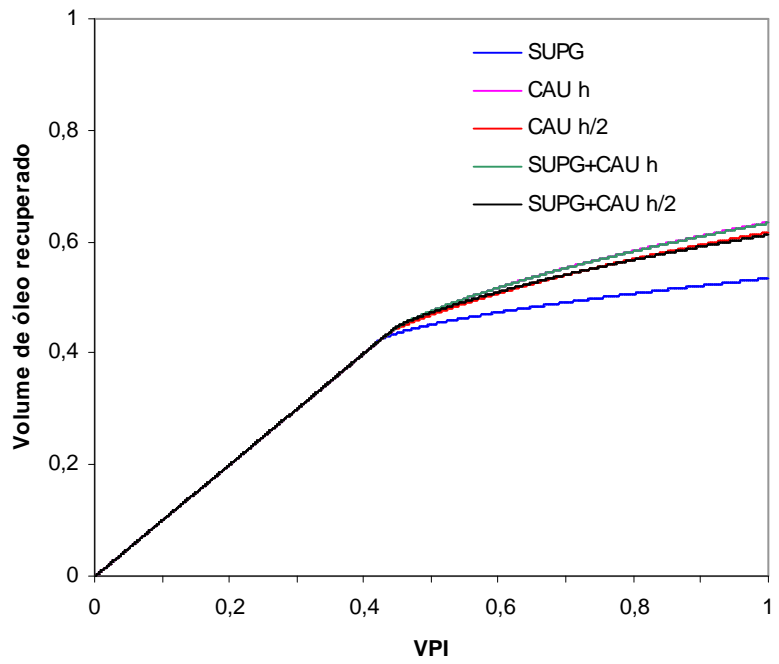


Figura 10 – Volume de óleo recuperado na configuração paralela.

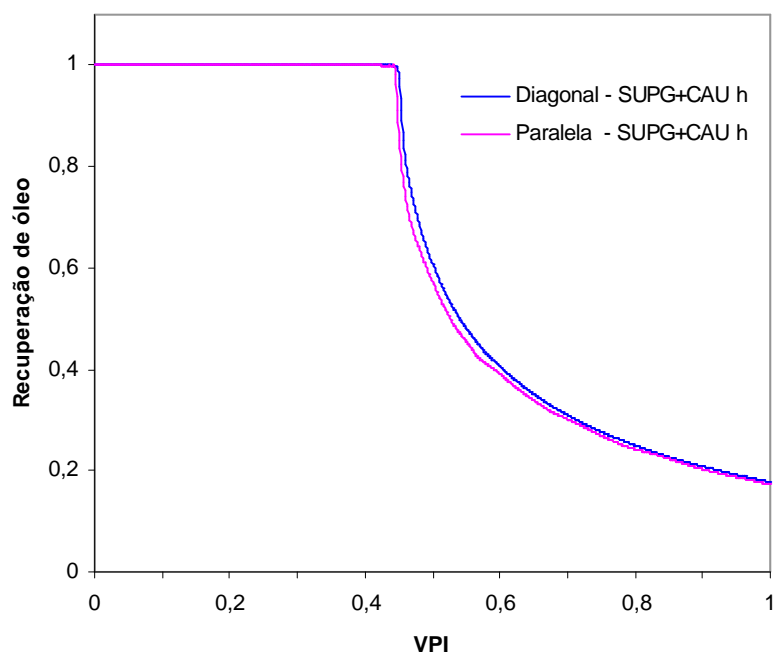


Figura 11 – Recuperação de óleo normalizada pelo volume total injetado em diferentes cenários utilizando a formulação SUPG+CAU *h*.

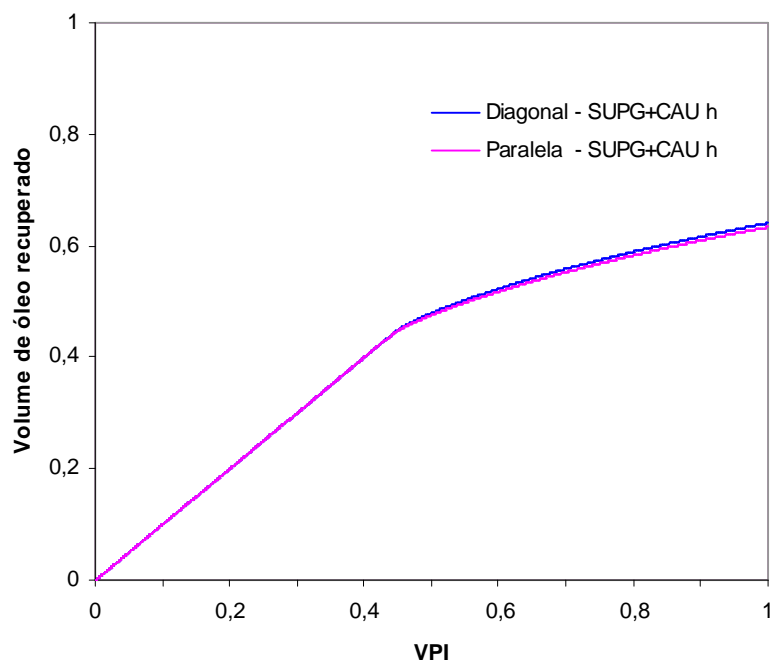


Figura 12 – Volume de óleo recuperado em diferentes cenários utilizando a formulação SUPG+CAU *h*.

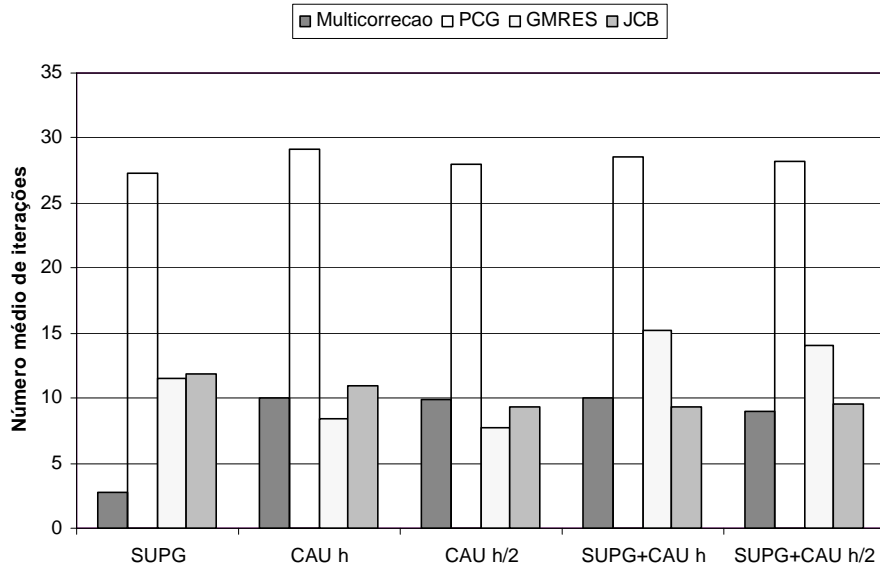


Figura 13 – Número médio de iterações para o problema de cinco poços na configuração diagonal.

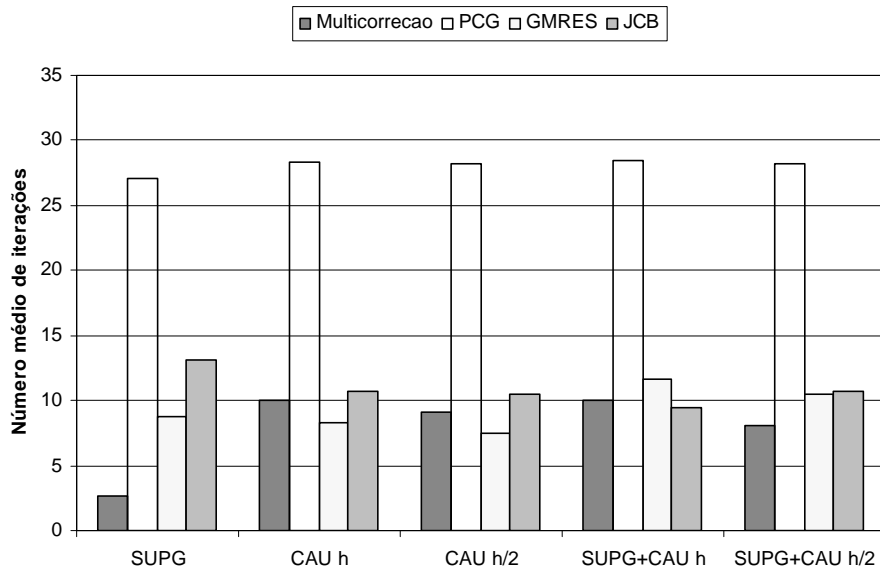


Figura 14 – Número médio de iterações para o problema de cinco poços na configuração paralela.

Tabela 1 – Número total de passos de tempo, número total de soluções para as equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para a configuração diagonal.

	SUPG	CAU h	CAU $h/2$	SUPG+CAU h	SUPG+CAU $h/2$
Passos de tempo	1000	1000	1000	1000	1000
Eq. pressão	1007	1008	1007	1007	1006
PCG _{total}	27464	29412	28227	28710	28400
Eq. velocidade	1004	1001	1002	1001	1007
JCB _{total}	11940	10966	9311	9289	9620
Eq. saturação	2798	10000	9930	10000	9019
GMRES _{total}	32287	84595	76510	152368	126962

Tabela 2 – Número total de passos de tempo, número total de soluções para as equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para a configuração paralela.

	SUPG	CAU h	CAU $h/2$	SUPG+CAU h	SUPG+CAU $h/2$
Passos de tempo	1000	1000	1000	1000	1000
Eq. pressão	1005	1008	1007	1007	1006
PCG _{total}	27189	28578	28389	28619	28325
Eq. velocidade	1009	1013	1013	1014	1020
JCB _{total}	13263	10821	10659	9517	10895
Eq. saturação	2618	9995	9131	9998	8024
GMRES _{total}	22811	82725	68144	116392	84436

4.2 Exemplos Numéricos

São apresentados três exemplos numéricos com o objetivo de demonstrar a potencialidade e a aplicabilidade da formulação desenvolvida. O primeiro exemplo numérico é o problema clássico de cinco poços, o segundo é a simulação de um poço de petróleo e o terceiro exemplo numérico é o problema clássico de cinco poços com meio heterogêneo. Nesses exemplos são injetados no reservatório diferentes tipos de fluidos.

Em todos os exemplos será empregada a formulação SUPG+CAU h na aproximação da equação da saturação, a tolerância dos métodos iterativos é fixada em 10^{-6} , a tolerância para iteração não-linear é fixada em 10^{-2} e o número máximo de multiorreções é fixado em 15. Adota-se também um número de 25 vetores de Krylov para o algoritmo GMRES.

4.2.1 Problema clássico de cinco poços

Neste exemplo, assim como no exemplo 4.1.3, resolve-se um quarto do problema cinco de poços. O fluido injetado no poço injetor (fase molhante) desloca o fluido do reservatório (fase não-molhante) em direção ao poço produtor. As grandezas do problema são dadas em um sistema compatível de unidades. O domínio do problema é um quadrado de lado unitário. Foram utilizados 800 elementos triangulares lineares para discretizar regularmente o domínio do problema. A malha de elementos finitos usada neste exemplo é a mesma utilizada no exemplo 4.1.3 e mostrada na Figura 6. O poço injetor situa-se no vértice inferior esquerdo e o poço produtor no vértice superior direito. Nos outros dois vértices do quadrado prescrevem-se pressões nulas e no restante do contorno a condição de fluxo nulo é especificada. Neste exemplo os efeitos da pressão capilar, dos termos fonte no interior do domínio e os efeitos gravitacionais foram desconsiderados. Inicialmente considera-se que o reservatório está preenchido apenas pela fase não-molhante, ou seja, em $t=0$ $s_w = 0$ em todo o reservatório. No poço injetor fixou-se $s_w = 1$ e as permeabilidades relativas das fases molhante e não-molhante são dadas respectivamente por $k_{rw} = s_w^2$ e $k_{rn} = (1 - s_w)^2$. O reservatório é considerado um meio poroso homogêneo e isotrópico, assim sendo a permeabilidade absoluta do mesmo é dada por $\mathbf{K} = \mathbf{I}$. A porosidade do reservatório é igual a 0.20 e o passo de tempo é fixado

em $\Delta t = 0.001$. O fluido existente no reservatório é considerado newtoniano e sua viscosidade é igual a 4. Os resultados são expressos em função do Volume Poroso Injetado (VPI) que é uma grandeza análoga ao tempo adimensionalizado.

Serão analisados três casos distintos onde o parâmetro de consistência H do modelo de lei das potências assume diferentes valores. Em todos os casos quando se injetar um fluido newtoniano sua viscosidade será igual à viscosidade do fluido existente no reservatório. Os parâmetros reológicos dos fluidos não-newtonianos injetados no reservatório estão apresentados nas Tabelas 3 a 5.

A Figura 15 apresenta a frente de saturação e o perfil de viscosidade, em $t = 0.5$ VPI, tomados entre o poço injetor e o poço produtor, estando o poço injetor situado no ponto de coordenada $x = 0$ e o poço produtor situado no ponto de coordenada $x = 1.4$, onde x representa a distância poço injetor-poço produtor.

Analisando a Figura 15 conclui-se que a velocidade com que a frente de saturação se desloca no interior do reservatório é maior no caso de fluidos dilatantes do que no caso de fluidos pseudoplásticos. Nota-se também, no caso de fluidos não-newtonianos, que quanto maior o parâmetro de consistência H menor a velocidade com que a frente de saturação se desloca. Portanto quando $H = 4$ a maior velocidade de deslocamento da frente de saturação é a do fluido dilatante e em todos os demais casos, $H = 8$ e $H = 16$, a frente de saturação se desloca mais rapidamente no caso de fluido newtoniano.

Na Figura 15 observa-se também comportamentos opostos quanto à viscosidade aparente dos fluidos dilatantes e dos fluidos pseudoplásticos. No caso de fluidos dilatantes a viscosidade aparente apresenta valores elevados próximo ao poço injetor que diminuem gradativamente quando o fluido se afasta deste poço. Por outro lado, no caso de fluidos pseudoplásticos a viscosidade aparente apresenta valores reduzidos próximo ao poço injetor que aumentam gradativamente quando o fluido se afasta deste poço. Quanto à viscosidade do fluido newtoniano, logicamente, permanece constante por todo reservatório.

As Figuras 16 e 17 comparam os resultados obtidos para injeção de diferentes fluidos em $t = 0.50$ VPI. Na Figura 16 a frente de saturação obtida com a injeção do fluido newtoniano é comparada com o resultado (frente de saturação) obtido com a injeção de diferentes fluidos dilatantes. Na Figura 17 a frente de saturação obtida com a injeção do fluido newtoniano é comparada com o resultado (frente de saturação) obtido com a injeção de diferentes fluidos pseudoplásticos. Em ambos os casos quanto maior o

valor do parâmetro de consistência H dos fluidos não-newtonianos menor a velocidade com que a frente de saturação se desloca.

As Figuras 18, 19 e 20 apresentam a distribuição de viscosidade aparente de diferentes fluidos dilatantes. A análise dessas figuras mostra que a viscosidade aparente dos fluidos dilatantes é elevada nas proximidades do poço injetor e diminui gradativamente quando o fluido se afasta deste poço.

As Figuras 21, 22 e 23 apresentam a distribuição de viscosidade aparente de diferentes fluidos pseudoplásticos. A análise dessas figuras mostra que a viscosidade aparente dos fluidos pseudoplásticos possui valores reduzidos nas proximidades do poço injetor que aumentam gradativamente quando o fluido se afasta deste poço.

Em todos os casos analisados a viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos aumenta com o aumento do parâmetro de consistência H .

A Figura 24 apresenta o número médio de multicorreções por passo de tempo executado pelo algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor e o número médio de iterações em cada multicorreção executado pelos métodos numéricos utilizados para resolver as equações da pressão e da saturação assim como nos cálculos das velocidades. A Tabela 6 apresenta o número total de passos de tempo da análise, o número total de soluções para as equações da pressão, velocidade e saturação e o número de total de iterações executado pelos métodos PCG, JCB e GMRES.

Analisando a Figura 24 pode-se observar que o método PCG necessita em média de um número muito elevado de iterações para atingir a convergência quando comparado com os demais métodos apresentados. Na Tabela 6 observa-se que o método GMRES executou o maior número de iterações. É importante destacar também o baixo número de iterações executado pelo método JCB em todos os casos mostrados. Observa-se também nesta tabela que o número de iterações executado pelo método JCB aumenta com o aumento do parâmetro de consistência H . Finalmente conclui-se que neste exemplo o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor precisou em média de 11 multicorreções por passo de tempo para convergir. As equações da pressão e da velocidade foram solucionadas em média uma única vez a cada passo de tempo enquanto que a equação da saturação precisou ser solucionada durante todas as multicorreções do algoritmo.

Tabela 3 – Parâmetros reológicos dos fluidos não-newtonianos - Caso 1.

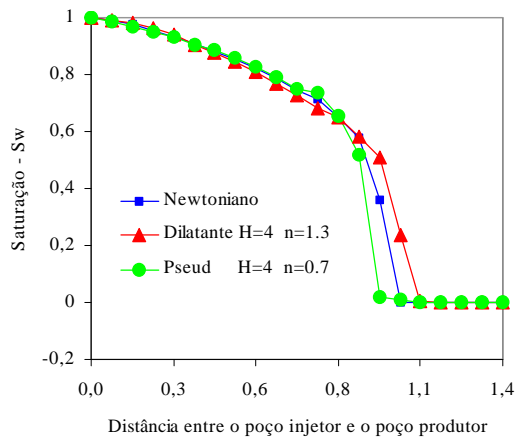
<i>Fluido Dilatante</i>	
Parâmetro de consistência	$H=4$
Índice de comportamento do escoamento	$n=1.3$
<i>Fluido Pseudoplástico</i>	
Parâmetro de consistência	$H=4$
Índice de comportamento do escoamento	$n=0.7$

Tabela 4 – Parâmetros reológicos dos fluidos não-newtonianos - Caso 2.

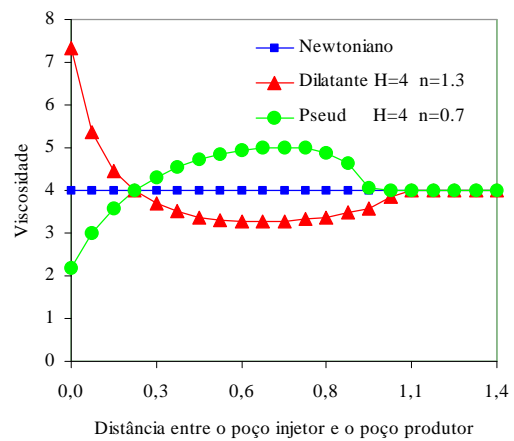
<i>Fluido Dilatante</i>	
Parâmetro de consistência	$H=8$
Índice de comportamento do escoamento	$n=1.3$
<i>Fluido Pseudoplástico</i>	
Parâmetro de consistência	$H=8$
Índice de comportamento do escoamento	$n=0.7$

Tabela 5 – Parâmetros reológicos dos fluidos não-newtonianos - Caso 3.

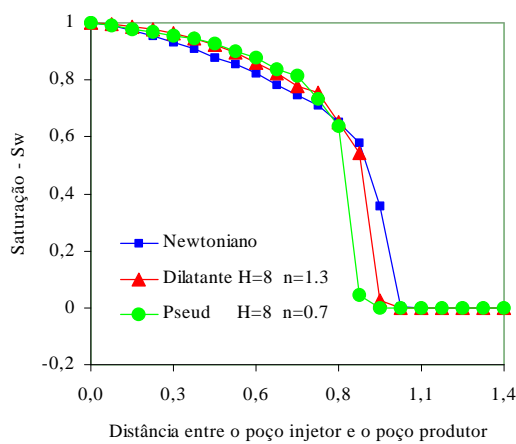
<i>Fluido Dilatante</i>	
Parâmetro de consistência	$H=16$
Índice de comportamento do escoamento	$n=1.3$
<i>Fluido Pseudoplástico</i>	
Parâmetro de consistência	$H=16$
Índice de comportamento do escoamento	$n=0.7$



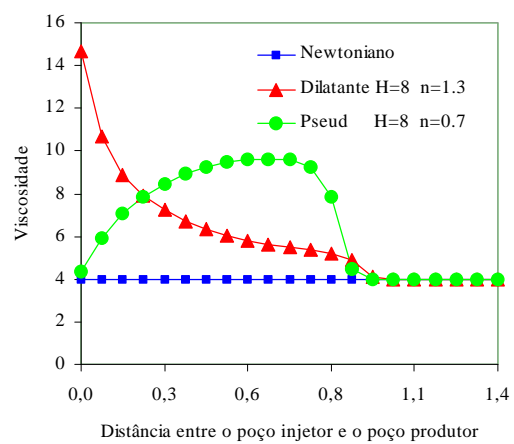
(a)



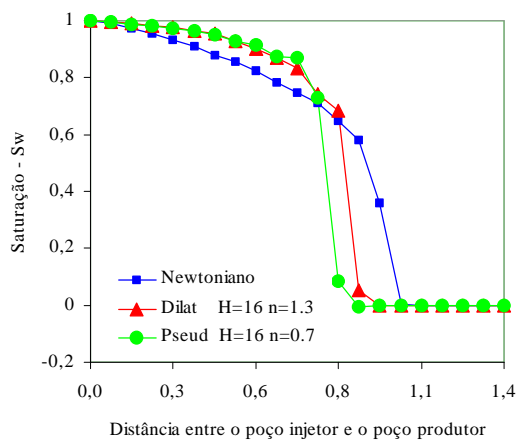
(b)



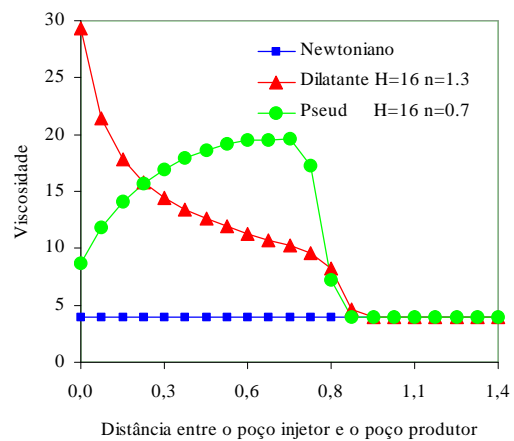
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 15 – Frente de saturação e perfil de viscosidade, ambos tomados em $t=0.50$ VPI, para diferentes valores do parâmetro de consistência: (a) frente de saturação, $H=4$; (b) perfil de viscosidade, $H=4$; (c) frente de saturação, $H=8$; (d) perfil de viscosidade, $H=8$; (e) frente de saturação, $H=16$; (f) perfil de viscosidade, $H=16$.

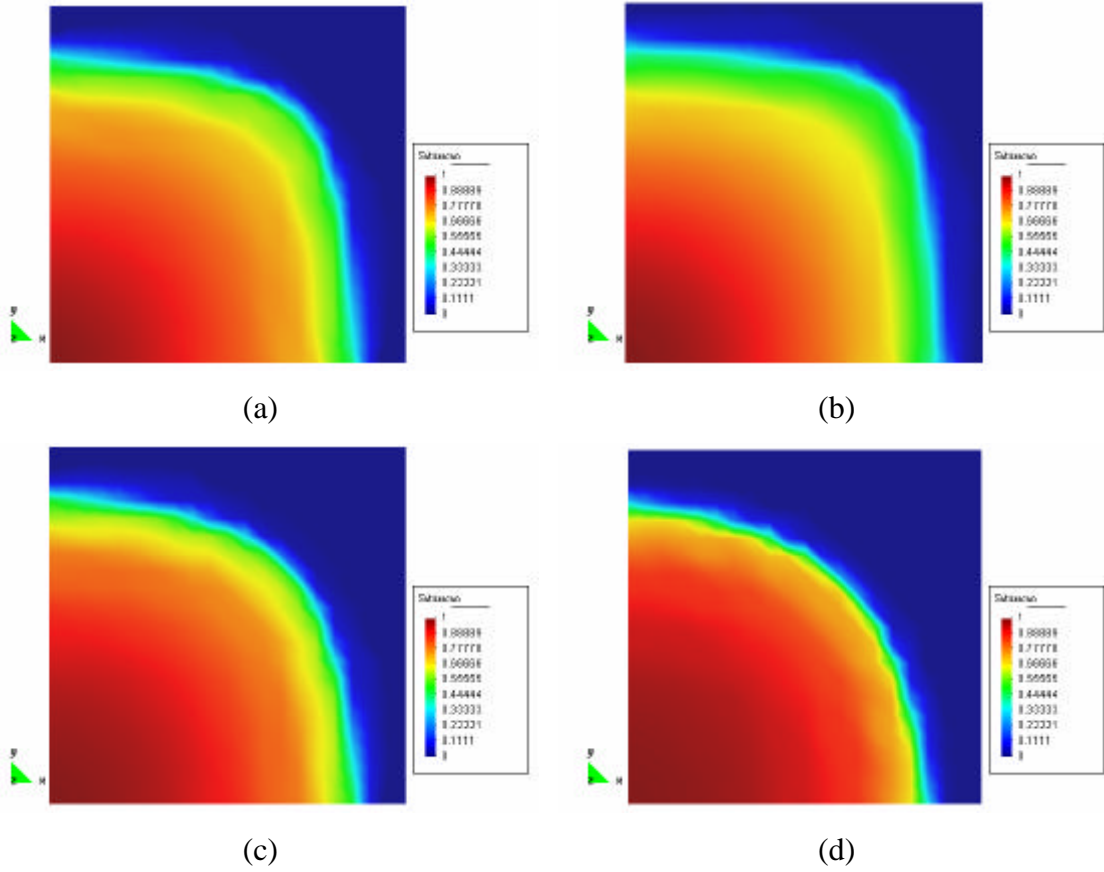


Figura 16 – Frente de saturação tomada em $t = 0.5$ VPI: (a) injeção de fluido newtoniano com viscosidade $m_v=4$, (b) injeção de fluido dilatante – Caso 1, (c) injeção de fluido dilatante – Caso 2 e (d) injeção de fluido dilatante – Caso 3.

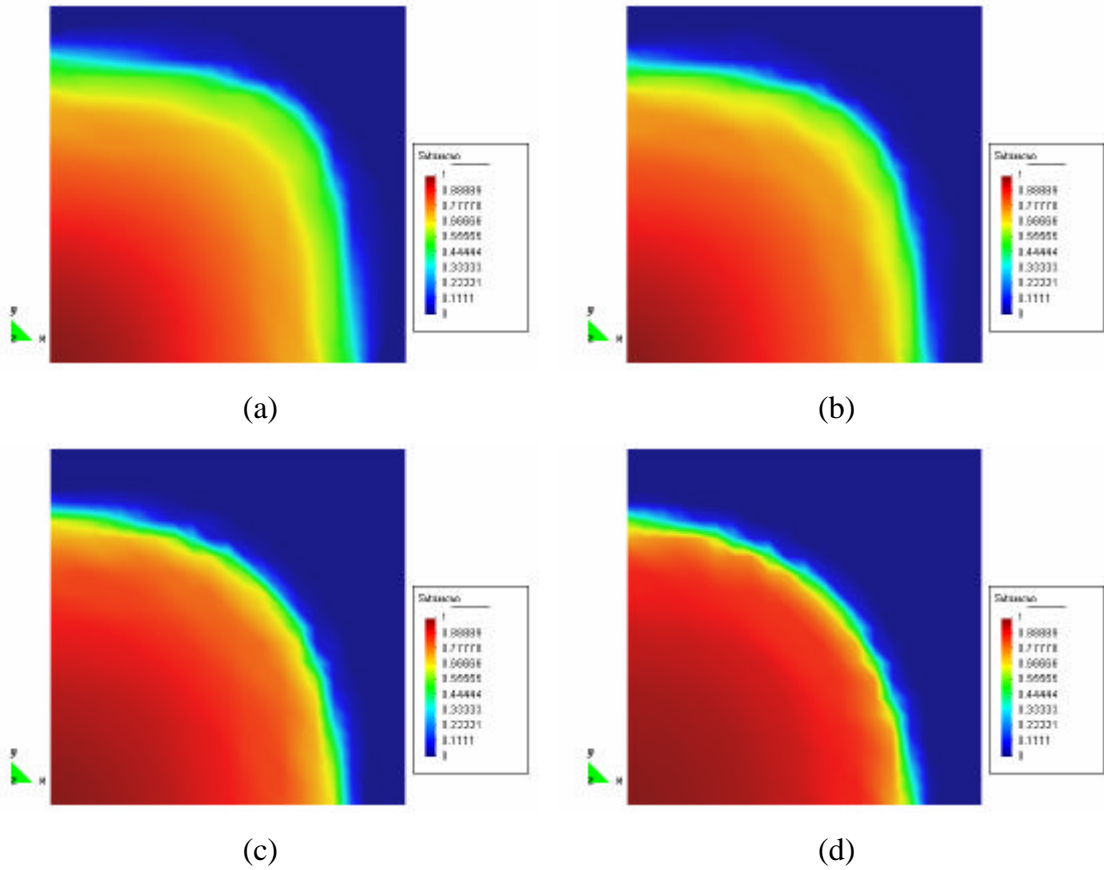


Figura 17 – Frente de saturação tomada em $t = 0.5$ VPI: (a) injeção de fluido newtoniano com viscosidade $m_v=4$, (b) injeção de fluido pseudoplástico – Caso 1, (c) injeção de fluido pseudoplástico – Caso 2 e (d) injeção de fluido pseudoplástico – Caso 3.

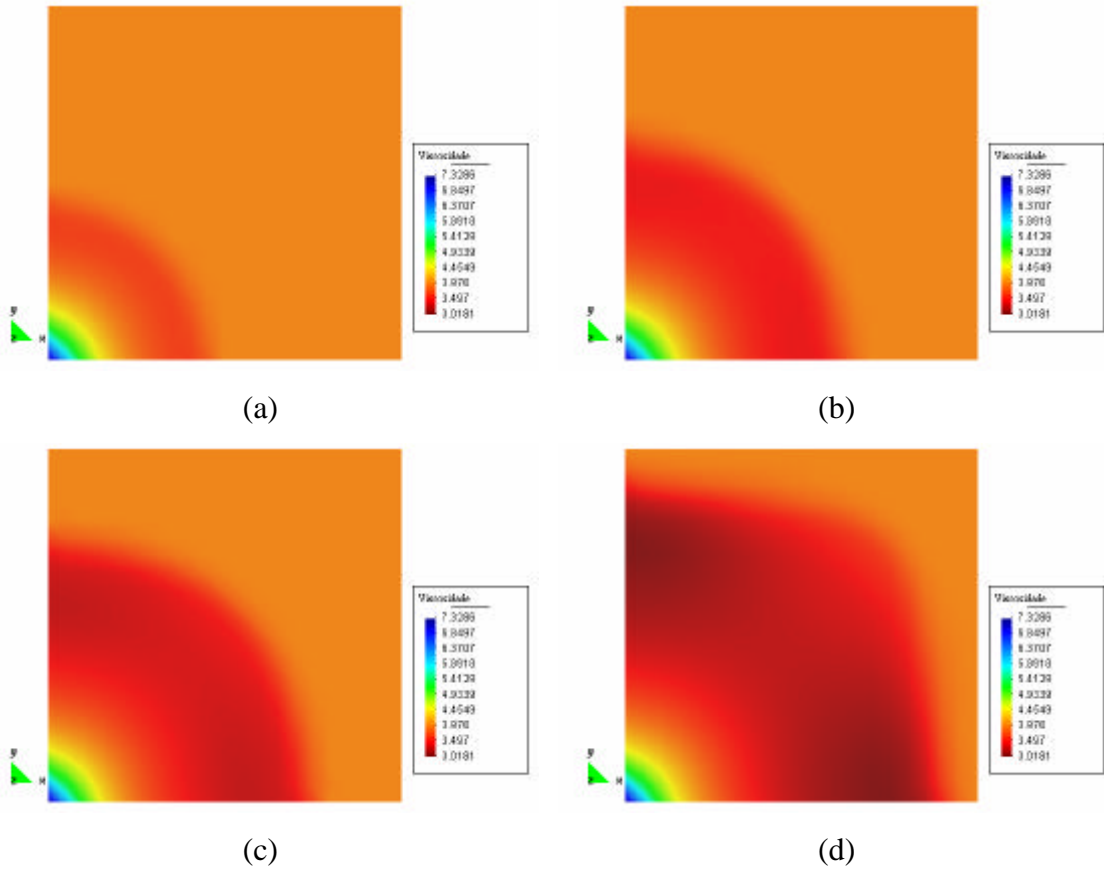


Figura 18 – Distribuição de viscosidade para injeção de fluido dilatante – Caso 1:
 (a) $t = 0.1$ VPI, (b) $t = 0.2$ VPI, (c) $t = 0.3$ VPI e (d) $t = 0.5$ VPI.

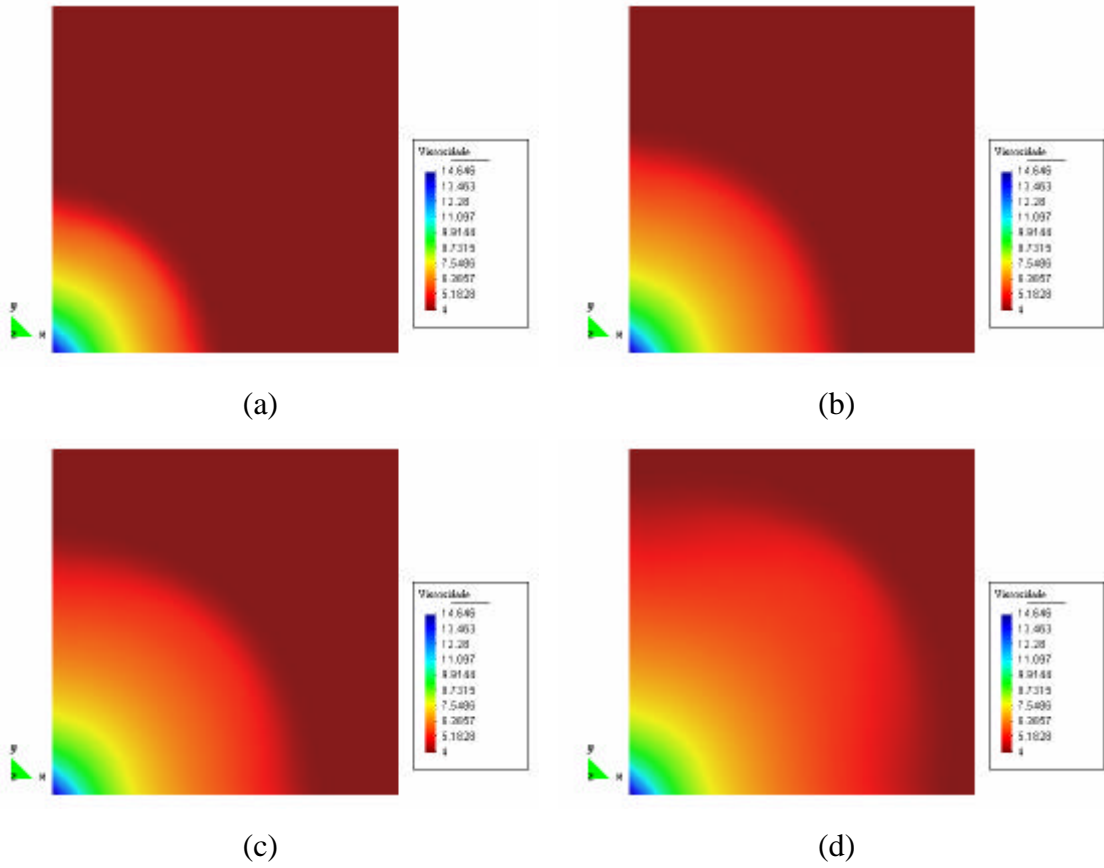


Figura 19 – Distribuição de viscosidade para injeção de fluido dilatante – Caso 2:
 (a) $t = 0.1$ VPI, (b) $t = 0.2$ VPI, (c) $t = 0.3$ VPI e (d) $t = 0.5$ VPI.

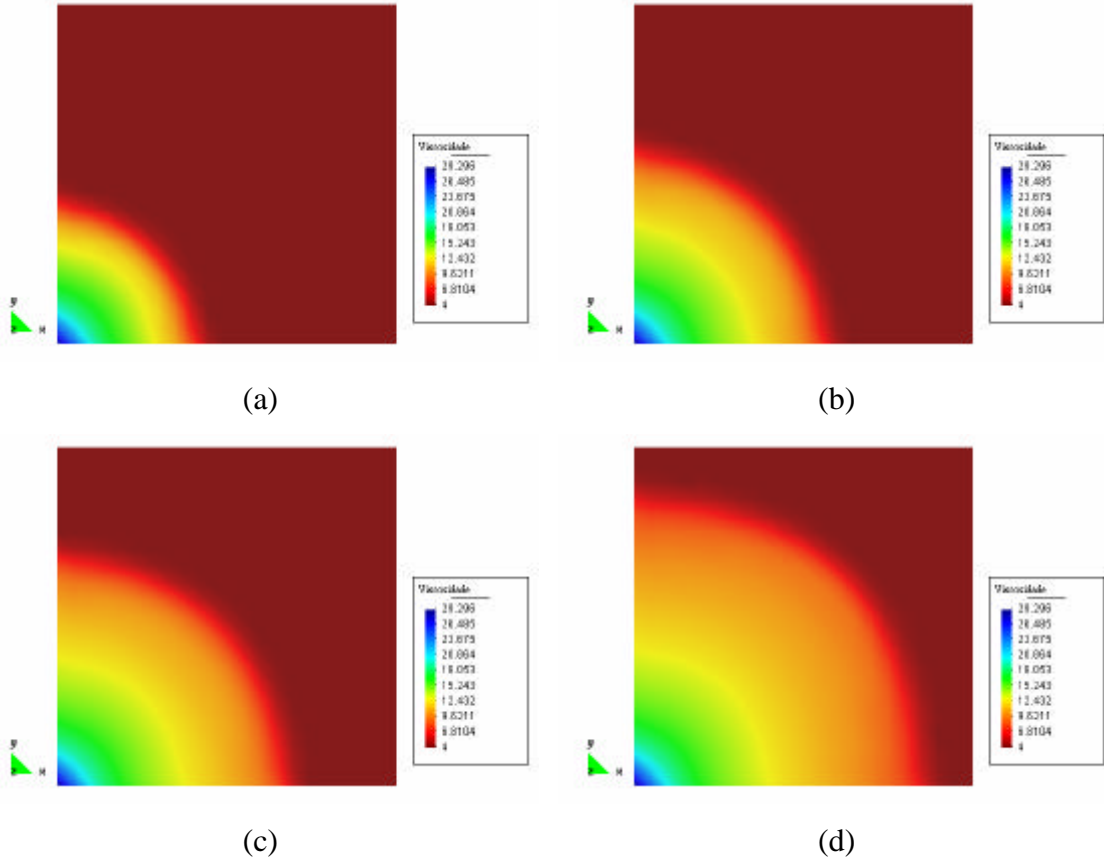


Figura 20 – Distribuição de viscosidade para injeção de fluido dilatante – Caso 3: (a) $t = 0.1$ VPI, (b) $t = 0.2$ VPI, (c) $t = 0.3$ VPI e (d) $t = 0.5$ VPI.

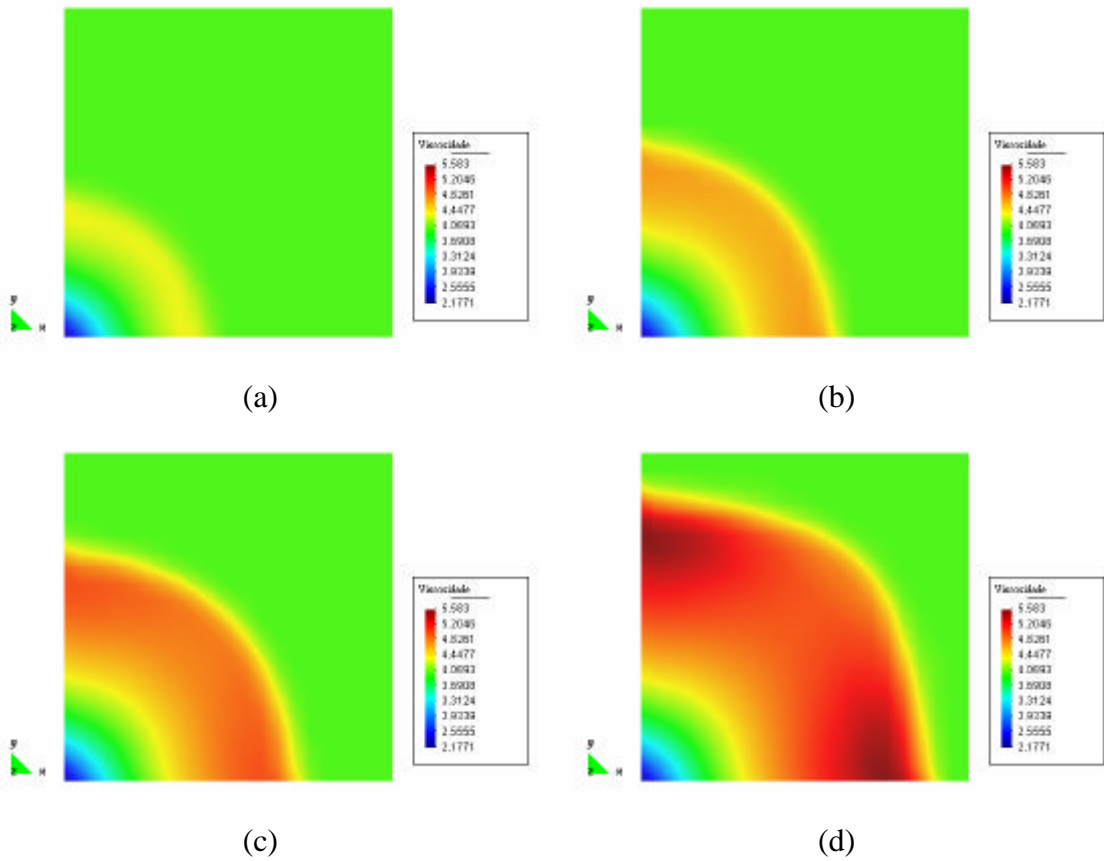


Figura 21 – Distribuição de viscosidade para injeção de fluido pseudoplástico – Caso 1: (a) $t = 0.1$ VPI, (b) $t = 0.2$ VPI, (c) $t = 0.3$ VPI e (d) $t = 0.5$ VPI.

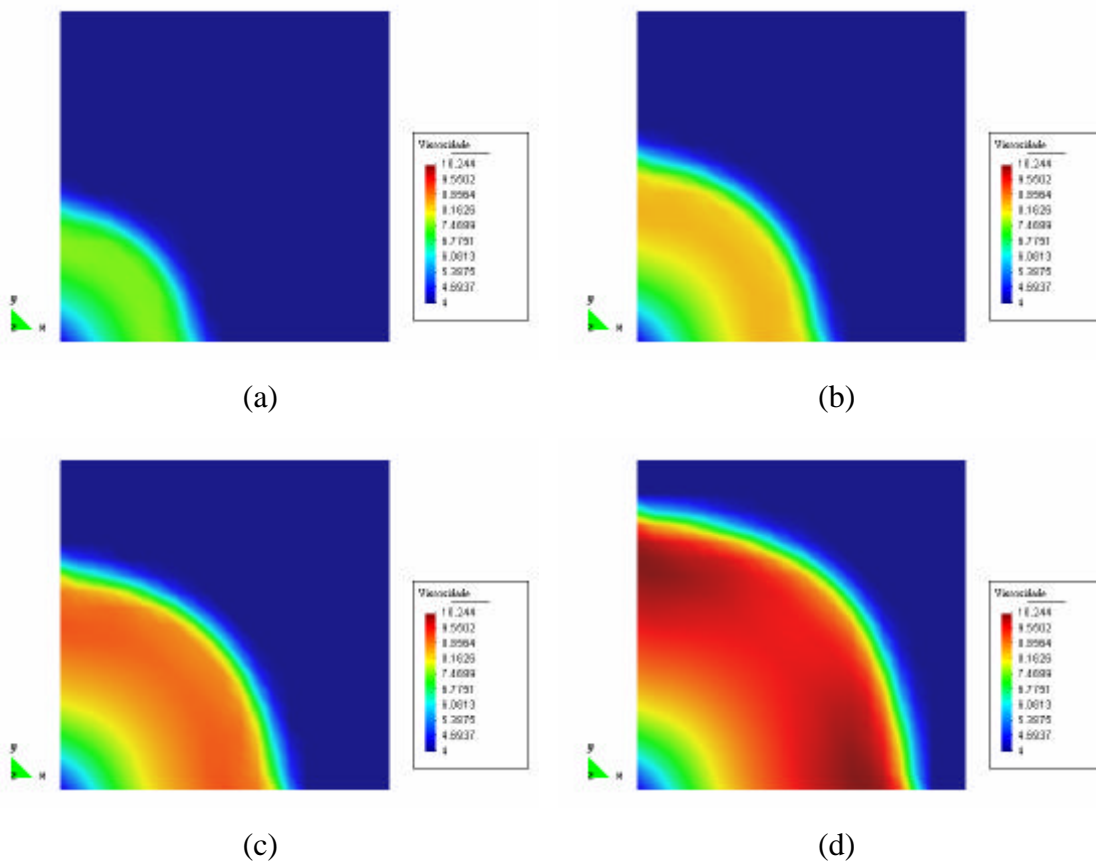


Figura 22 – Distribuição de viscosidade para injeção de fluido pseudoplástico – Caso 2: (a) $t = 0.1$ VPI, (b) $t = 0.2$ VPI, (c) $t = 0.3$ VPI e (d) $t = 0.5$ VPI.

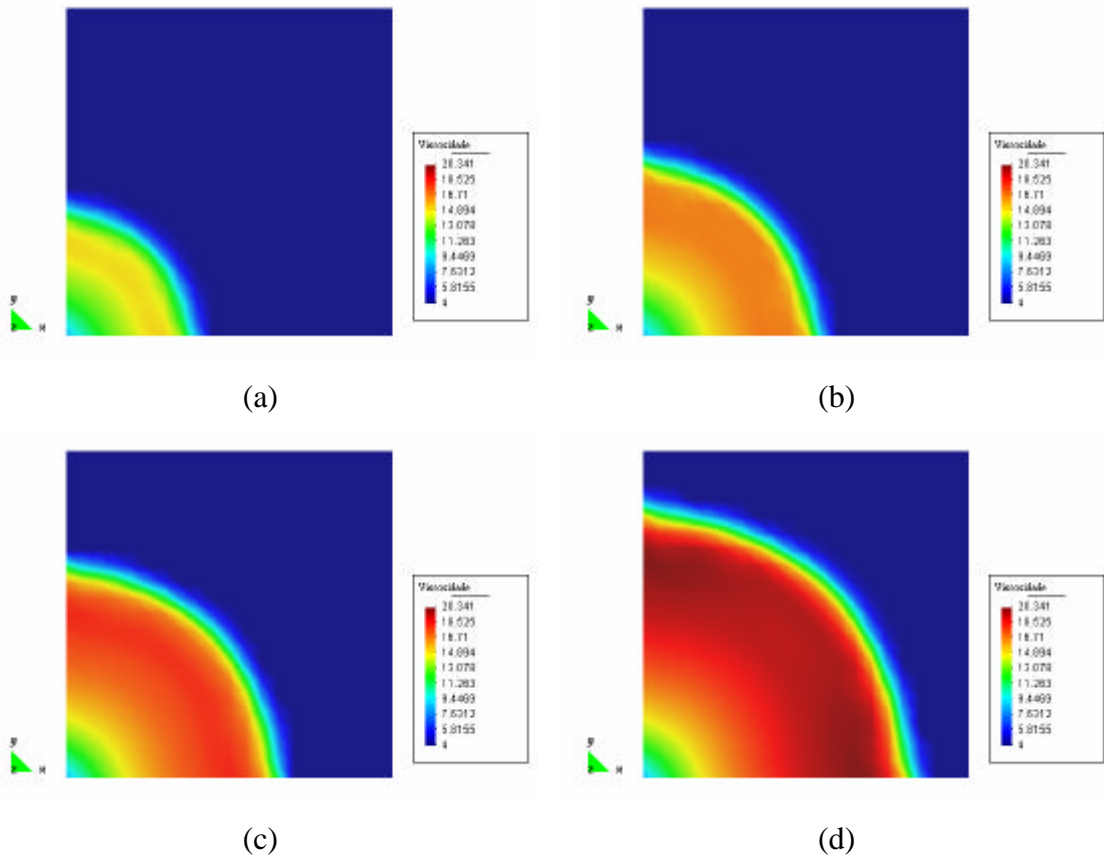


Figura 23 – Distribuição de viscosidade para injeção de fluido pseudoplástico – Caso 3: (a) $t = 0.1$ VPI, (b) $t = 0.2$ VPI, (c) $t = 0.3$ VPI e (d) $t = 0.5$ VPI.

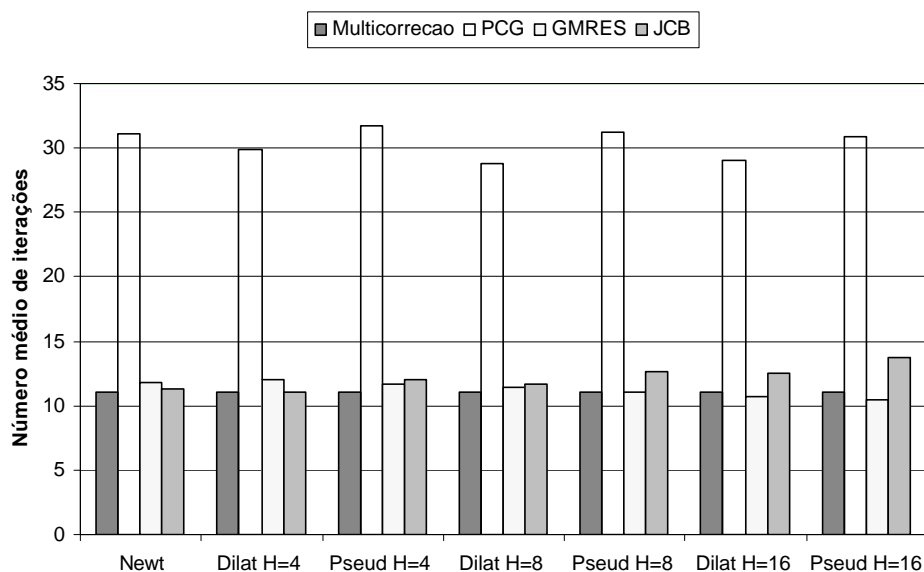


Figura 24 - Número médio de iterações para o problema de cinco poços considerando injeção de diferentes tipos de fluidos.

Tabela 6 – Número total de passos de tempo, número total de soluções das equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para o problema de cinco poços considerando injeção de diferentes tipos de fluidos.

	Newt	Dilat H4	Pseud H4	Dilat H8	Pseud H8	Dilat H16	Pseud H16
Passos de tempo	500	500	500	500	500	500	500
Eq. pressão	508	518	505	529	520	551	543
PCG _{total}	15794	15455	16017	15243	16246	15987	16752
Eq. velocidade	502	503	504	505	503	506	505
JCB _{total}	5697	5567	6041	5868	6364	6361	6938
Eq. saturação	5526	5524	5524	5530	5531	5543	5555
GMRES _{total}	65064	66404	64335	63142	61172	59009	57780

4.2.2 Simulação de um poço de petróleo

Neste exemplo analisa-se o escoamento dos fluidos nas proximidades de um poço de petróleo. Desta forma o fluido que invade o reservatório (fase molhante), proveniente do poço, desloca o fluido residente (fase não-molhante).

Este exemplo fornece subsídios às operações de perfurações de poços de petróleo onde o fluido de perfuração, que é um fluido não-newtoniano, sob determinadas condições de operação invade o reservatório deslocando o fluido residente. Nas operações de perfurações de poços de petróleo é importante evitar a perda do fluido de perfuração, ou seja, é importante minimizar a invasão do fluido de perfuração no reservatório.

As grandezas do problema são dadas em um sistema compatível de unidades. Utiliza-se um quarto do domínio do problema, ou seja, o domínio computacional é um quarto de uma coroa circular de raio menor igual a 0.20 e raio maior igual a 10, onde o raio menor é o raio do poço. A malha de elementos finitos utilizada possui 1600 elementos triangulares lineares e está mostrada na Figura 25. Esta malha caracteriza-se por ser uma malha com um grande refinamento na região próxima ao poço.

Neste exemplo os efeitos da pressão capilar, dos termos fonte no interior do domínio e os efeitos gravitacionais foram desconsiderados. Inicialmente considera-se que o reservatório está preenchido apenas pela fase não-molhante, ou seja, em $t = 0$ $s_w = 0$ em todo o reservatório. No poço fixou-se $s_w = 1$ e as permeabilidades relativas das fases molhante e não-molhante são dadas respectivamente por $k_{rw} = s_w^2$ e $k_m = (1 - s_w)^2$. O reservatório é considerado um meio poroso homogêneo e isotrópico, assim sendo sua permeabilidade absoluta é dada por $\mathbf{K}=\mathbf{I}$. A porosidade do reservatório é igual a 0.20 e o passo de tempo é fixado em $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. O fluido existente no reservatório é considerado newtoniano e sua viscosidade é igual a 5.

O escoamento dos fluidos nesse exemplo é governado pela prescrição de um diferencial de pressão entre o poço e o reservatório. Dois casos são analisados, no primeiro a diferença de pressão entre o poço e o reservatório é $\Delta P = 40$ enquanto no segundo esta diferença é $\Delta P = 10$. Como esse exemplo consiste em escoamento de fluidos incompressíveis apenas a diferença de pressão, e não o valor absoluto desta grandeza, é fisicamente relevante [21].

A Figura 26 mostra a frente de saturação em $t = 1000$ passos de tempos considerando a injeção de diferentes fluidos para $\Delta P = 40$. Analisando esta figura verifica-se que nos fluidos newtonianos a velocidade com que a frente de saturação se desloca é maior do que no caso de fluidos não-newtonianos. É fácil constatar que o fluido newtoniano com viscosidade $m_v = 1$ é o caso onde a frente de saturação se movimenta mais rapidamente. Através da Figura 26 também é possível verificar que no caso de fluidos pseudoplásticos a frente de saturação se movimenta mais rapidamente do que no caso de fluidos dilatantes.

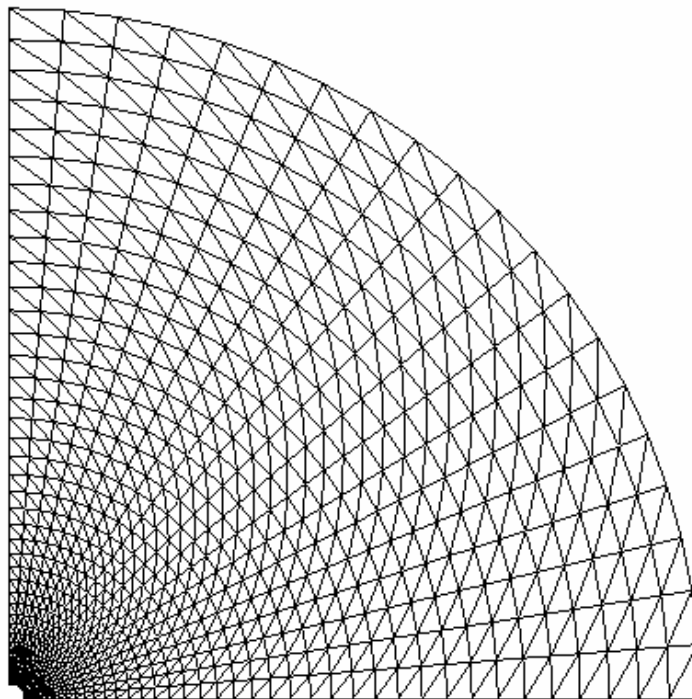


Figura 25 – Malha de elementos finitos com 1600 elementos triangulares lineares.

A Figura 31 mostra a frente de saturação em $t = 4000$ passos de tempos considerando a injeção de diferentes fluidos para $\Delta P = 10$. A interpretação desta figura fornece resultados análogos aos obtidos com a análise da Figura 26, exceto pelo fato de que neste caso a frente de saturação se movimenta mais rapidamente nos fluidos dilatantes do que nos fluidos pseudoplásticos.

As Figuras 27, 28, 32 e 33 apresentam a distribuição de viscosidade aparente de diferentes fluidos dilatantes. A análise dessas figuras mostra que a viscosidade aparente dos fluidos dilatantes é elevada nas proximidades do poço e diminui gradativamente quando o fluido se afasta do poço. Fazendo comparações entre as Figuras 27 e 32 e entre as Figuras 28 e 33 conclui-se que quando $\Delta P = 40$ a viscosidade aparente dos fluidos dilatantes é maior do que quando $\Delta P = 10$.

Tabela 7 – Parâmetros reológicos dos fluidos injetados no reservatório.

<i>Fluido Newtoniano 1</i>	
Viscosidade	$m_v = 1$
<i>Fluido Newtoniano 2</i>	
Viscosidade	$m_v = 5$
<i>Fluido Dilatante 1</i>	
Parâmetro de consistência	$H=8$
Índice de comportamento do escoamento	$n=1.3$
<i>Fluido Dilatante 2</i>	
Parâmetro de consistência	$H=12$
Índice de comportamento do escoamento	$n=1.3$
<i>Fluido Pseudoplástico 1</i>	
Parâmetro de consistência	$H=8$
Índice de comportamento do escoamento	$n=0.7$
<i>Fluido Pseudoplástico 2</i>	
Parâmetro de consistência	$H=12$
Índice de comportamento do escoamento	$n=0.7$

As Figuras 29, 30, 34 e 35 apresentam a distribuição de viscosidade aparente de diferentes fluidos pseudoplásticos. A análise dessas figuras mostra que a viscosidade

aparente dos fluidos pseudoplásticos possui valores reduzidos nas proximidades do poço que aumentam gradativamente quando o fluido se afasta do poço. Fazendo comparações entre as Figuras 29 e 34 e entre as Figuras 30 e 35 conclui-se que quando $\Delta P = 40$ a viscosidade aparente dos fluidos pseudoplásticos é menor do que quando $\Delta P = 10$.

Em se tratando de fluidos não-newtonianos fica evidente que tanto a velocidade de deslocamento da frente de saturação quanto o comportamento da viscosidade aparente dependem do diferencial de pressão aplicado. Como os exemplos analisados são governados pela lei de Darcy, onde a velocidade de escoamento do fluido é diretamente proporcional ao gradiente de pressão, as interpretações acima permitem concluir que para $\Delta P = 40$ o escoamento encontra-se em uma região de elevada taxa de deformação enquanto que para $\Delta P = 10$ o escoamento encontra-se em uma região de baixa taxa de deformação.

Em todos os casos analisados a viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos aumenta com o aumento do parâmetro de consistência H .

As Figuras 36 e 37 apresentam o número médio de multicorrekções por passo de tempo executado pelo algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor e o número médio de iterações em cada multicorrekção executado pelos métodos numéricos utilizados para resolver as equações da pressão e da saturação assim como nos cálculos das velocidades. As Tabelas 8 e 9 apresentam o número total de passos de tempo da análise, o número total de soluções para as equações da pressão, velocidade e saturação e o número de total de iterações executado pelos métodos PCG, JCB e GMRES.

Analisando as Figuras 36 e 37 pode-se observar que o método PCG necessita em média de um número muito elevado de iterações para atingir a convergência quando comparado com os demais métodos apresentados. Nas Tabelas 8 e 9 observa-se que o método GMRES executou o maior número de iterações. É importante destacar também o baixo número de iterações executado pelo método JCB em todos os casos mostrados. Observa-se também nestas tabelas que o número de iterações executado pelo método JCB aumenta com o aumento do parâmetro de consistência H . Finalmente conclui-se que neste exemplo o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor precisou em média de 11 multicorrekções por passo de tempo para convergir. As equações da pressão e da velocidade foram solucionadas em média uma única vez a cada passo de tempo enquanto que a equação da saturação precisou ser solucionada durante todas as multicorrekções do algoritmo.

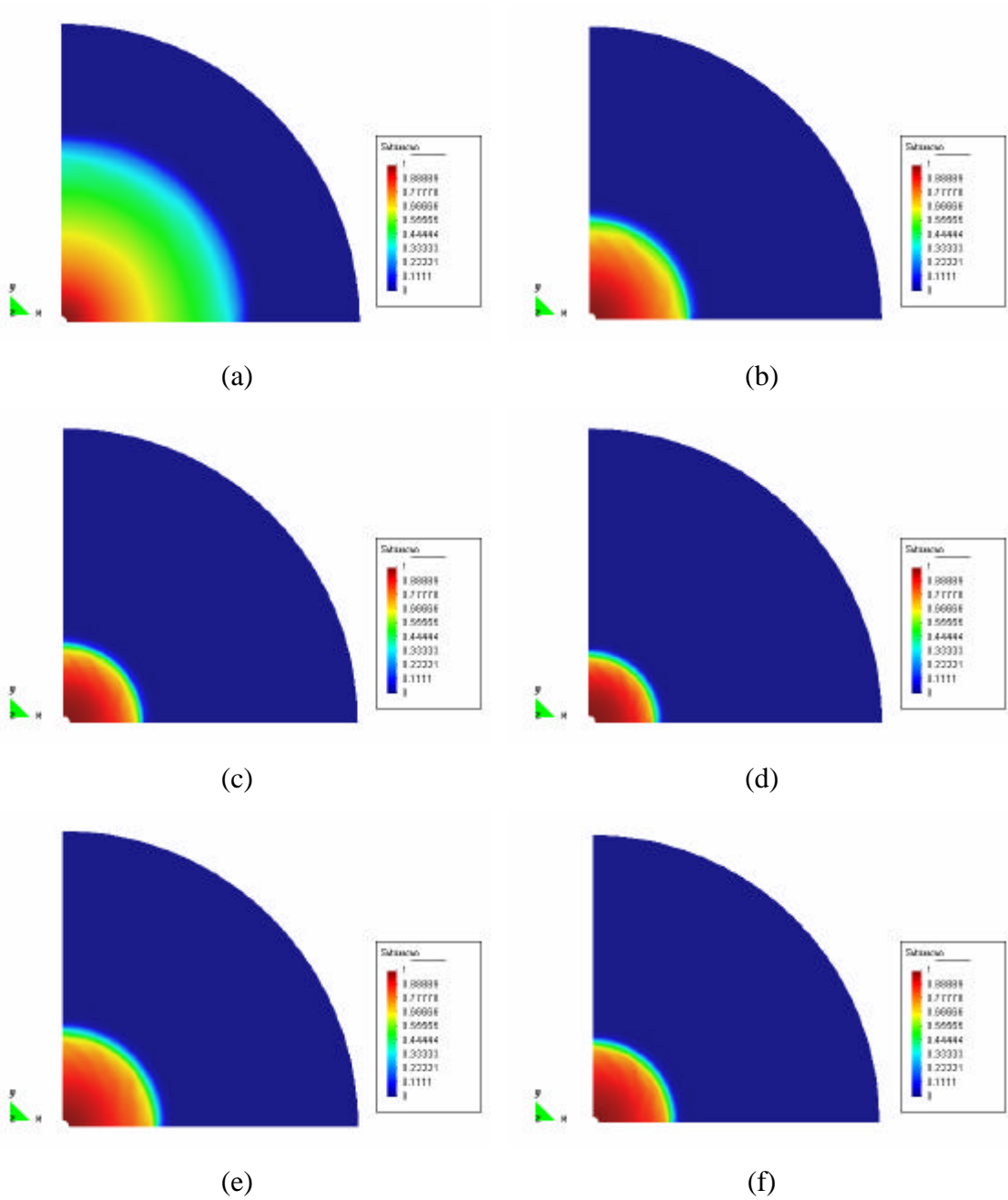


Figura 26 – Frente de saturação em $t = 1000$ passos de tempos ($\Delta P = 40$): (a) injeção de fluido newtoniano com $m_v = 1$, (b) injeção de fluido newtoniano com $m_v = 5$, (c) injeção de fluido dilatante com $H = 8$, (d) injeção de fluido dilatante com $H = 12$, (e) injeção de fluido pseudoplástico com $H = 8$ e (f) injeção de fluido pseudoplástico com $H = 12$.

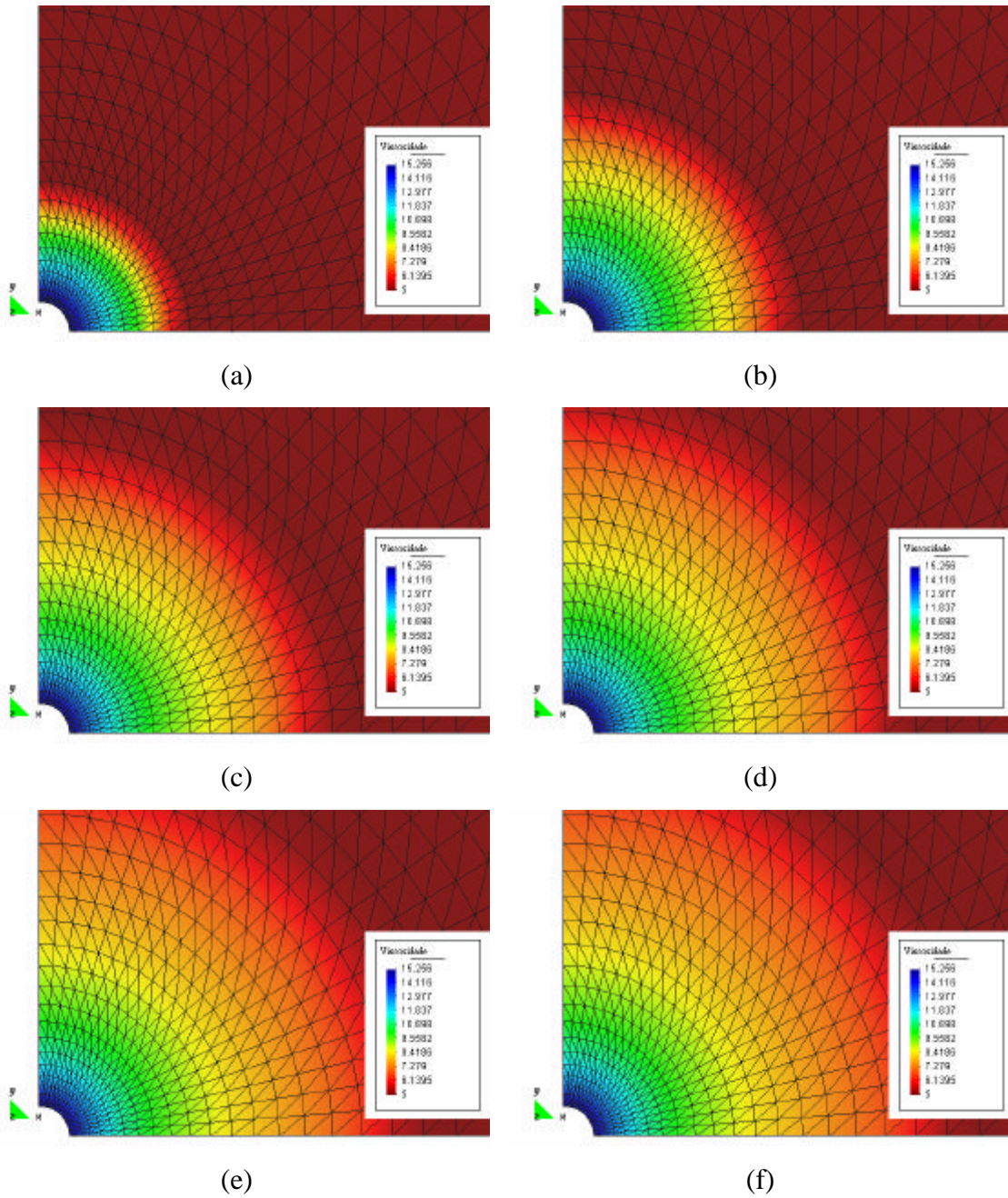


Figura 27 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 8$ ($\Delta P = 40$): (a) $t = 100$ passos de tempos, (b) $t = 300$ passos de tempos, (c) $t = 500$ passos de tempos, (d) $t = 700$ passos de tempos, (e) $t = 900$ passos de tempos e (f) $t = 1000$ passos de tempos.

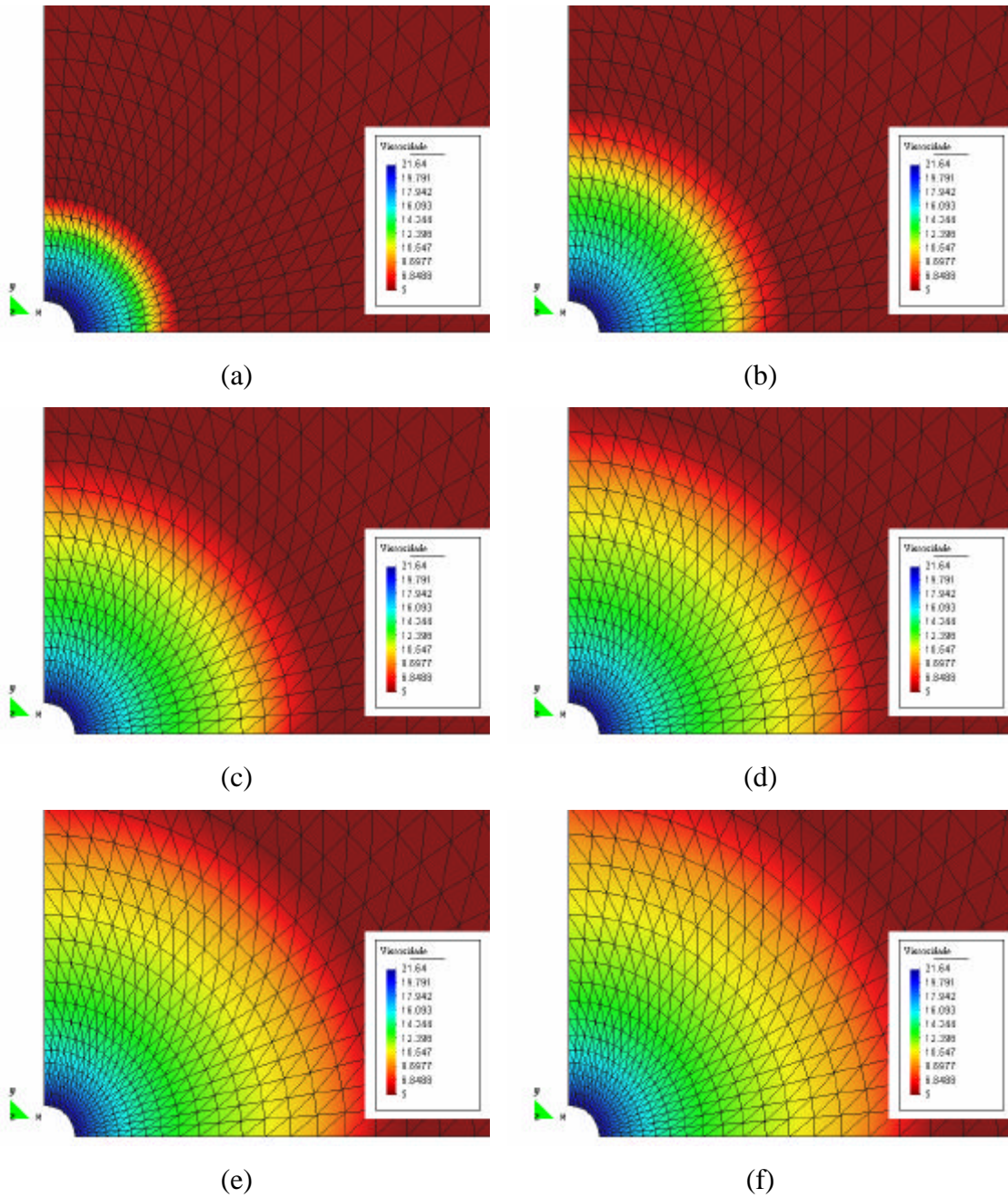


Figura 28 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 12$ ($\Delta P = 40$): (a) $t = 100$ passos de tempos, (b) $t = 300$ passos de tempos, (c) $t = 500$ passos de tempos, (d) $t = 700$ passos de tempos, (e) $t = 900$ passos de tempos e (f) $t = 1000$ passos de tempos.

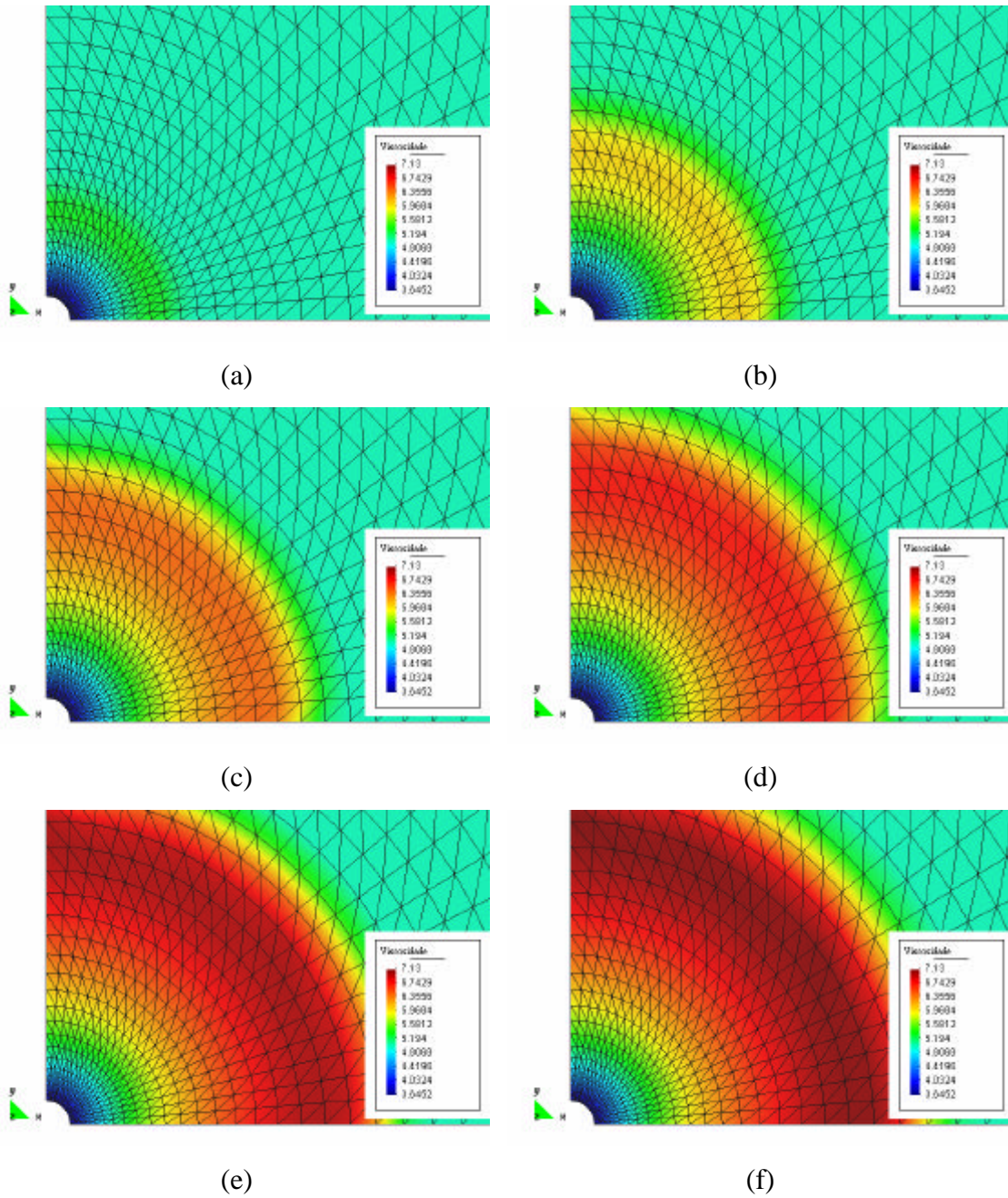


Figura 29 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 8$ ($\Delta P = 40$): (a) $t = 100$ passos de tempos, (b) $t = 300$ passos de tempos, (c) $t = 500$ passos de tempos, (d) $t = 700$ passos de tempos, (e) $t = 900$ passos de tempos e (f) $t = 1000$ passos de tempos.

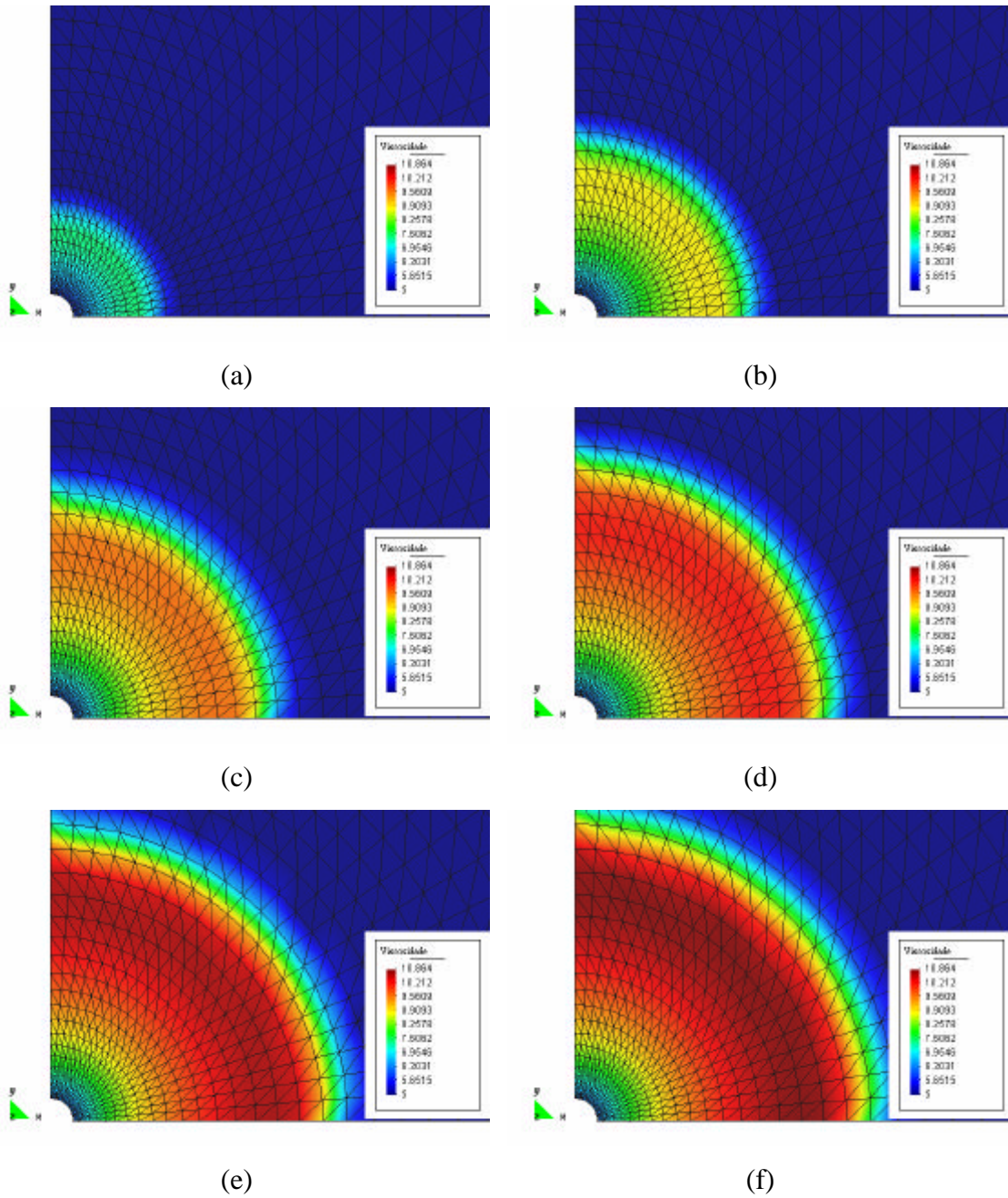


Figura 30 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 12$ ($\Delta P = 40$): (a) $t = 100$ passos de tempos, (b) $t = 300$ passos de tempos, (c) $t = 500$ passos de tempos, (d) $t = 700$ passos de tempos, (e) $t = 900$ passos de tempos e (f) $t = 1000$ passos de tempos.

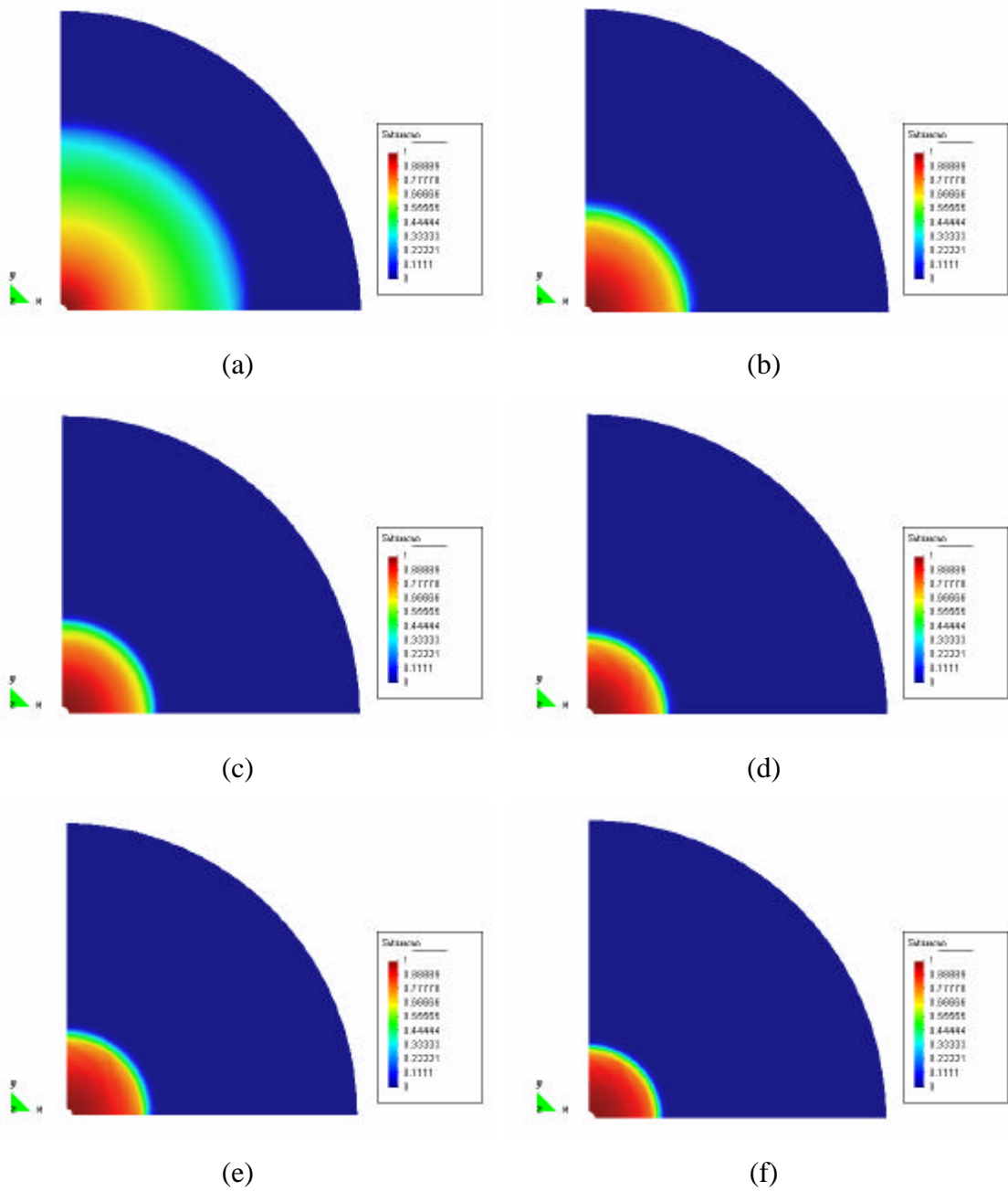


Figura 31 – Frente de saturação em $t = 4000$ passos de tempos ($\Delta P = 10$): (a) injeção de fluido newtoniano com $m_v = 1$, (b) injeção de fluido newtoniano com $m_v = 5$, (c) injeção de fluido dilatante com $H = 8$, (d) injeção de fluido dilatante com $H = 12$, (e) injeção de fluido pseudoplástico com $H = 8$ e (f) injeção de fluido pseudoplástico com $H = 12$.

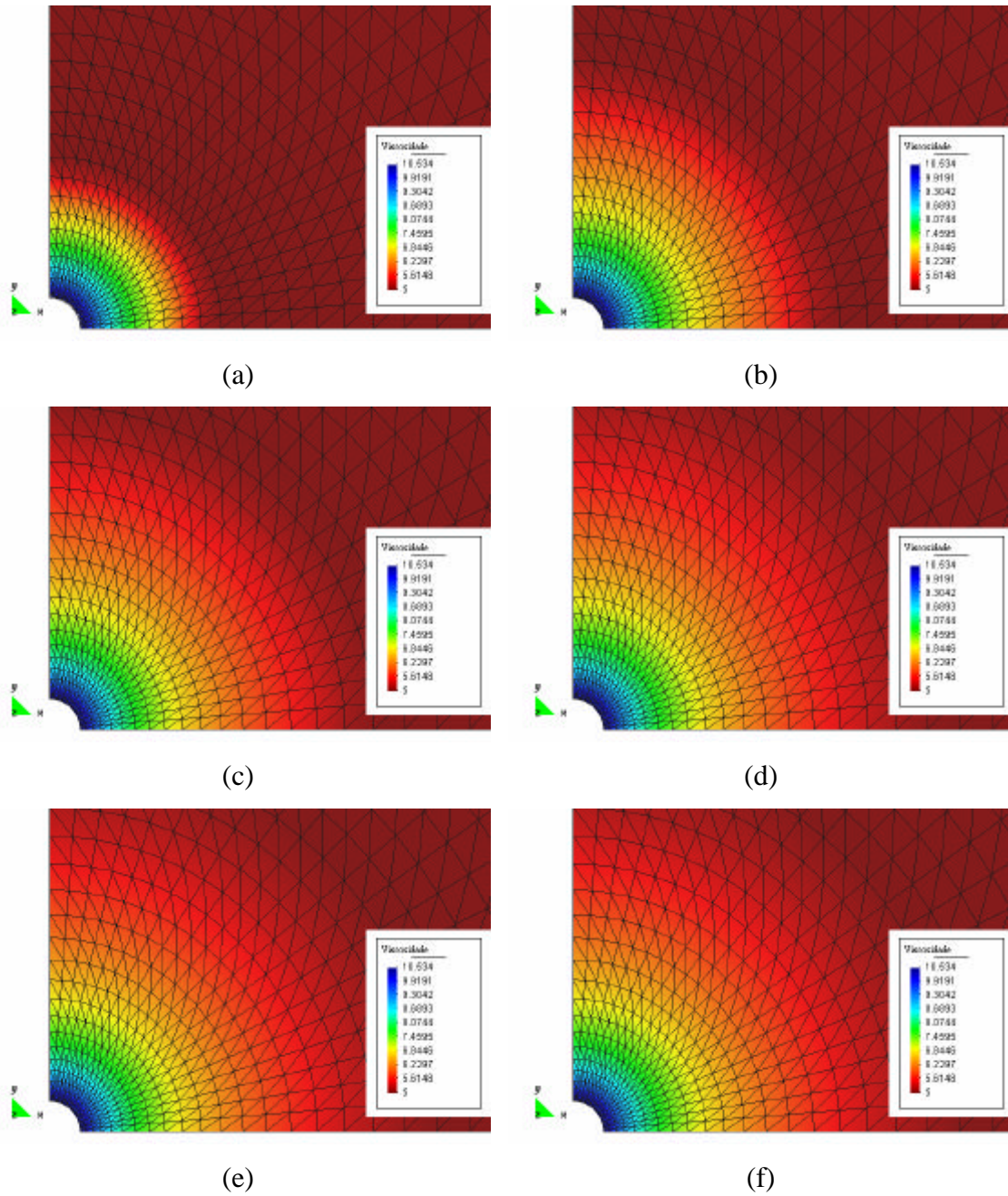


Figura 32 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 8$ ($\Delta P = 10$): (a) $t = 400$ passos de tempos, (b) $t = 1200$ passos de tempos, (c) $t = 2000$ passos de tempos, (d) $t = 2800$ passos de tempos, (e) $t = 3600$ passos de tempos e (f) $t = 4000$ passos de tempos.

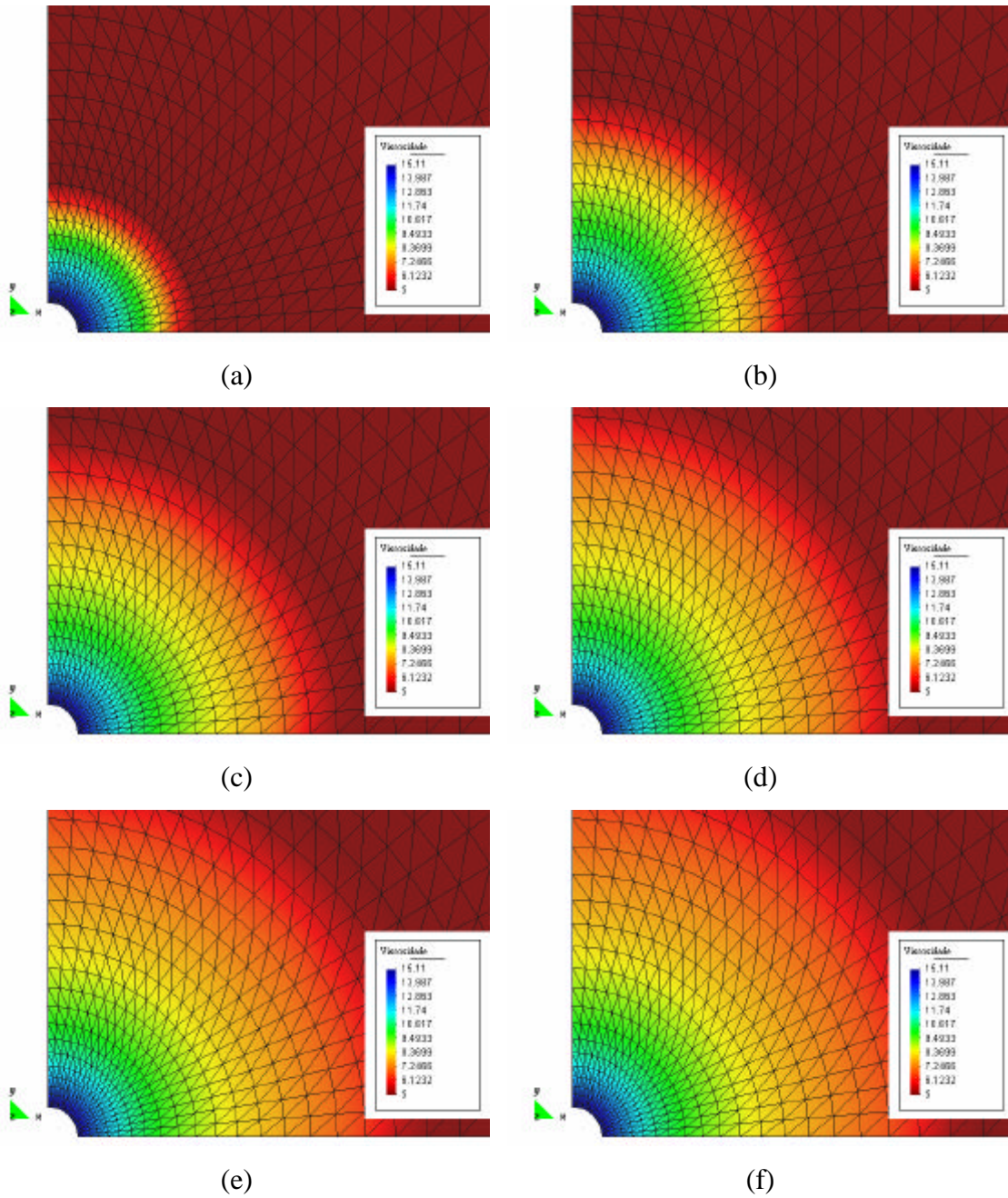


Figura 33 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 12$ ($\Delta P = 10$): (a) $t = 400$ passos de tempos, (b) $t = 1200$ passos de tempos, (c) $t = 2000$ passos de tempos, (d) $t = 2800$ passos de tempos, (e) $t = 3600$ passos de tempos e (f) $t = 4000$ passos de tempos.

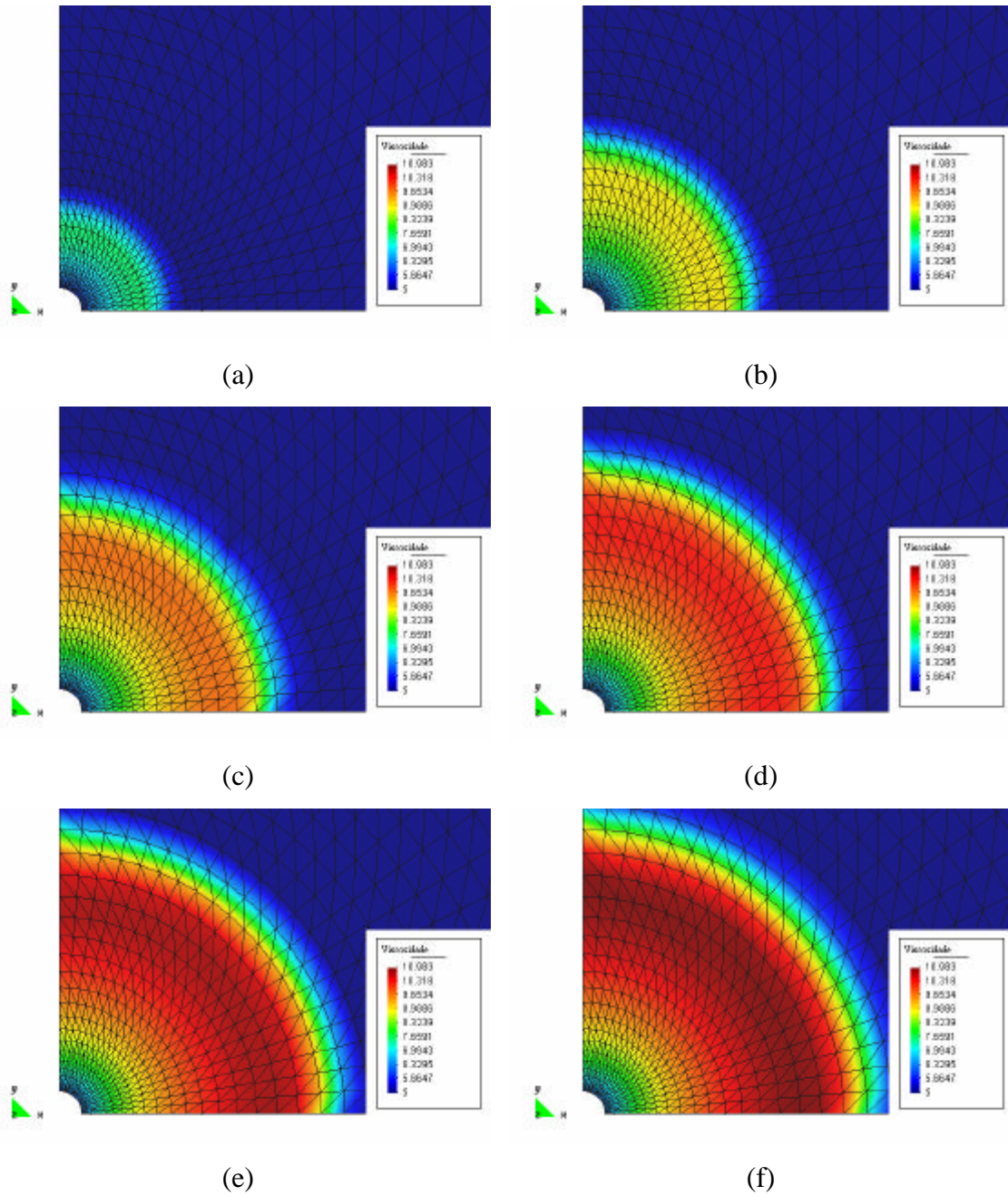


Figura 34 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 8$ ($\Delta P = 10$): (a) $t = 400$ passos de tempos, (b) $t = 1200$ passos de tempos, (c) $t = 2000$ passos de tempos, (d) $t = 2800$ passos de tempos, (e) $t = 3600$ passos de tempos e (f) $t = 4000$ passos de tempos.

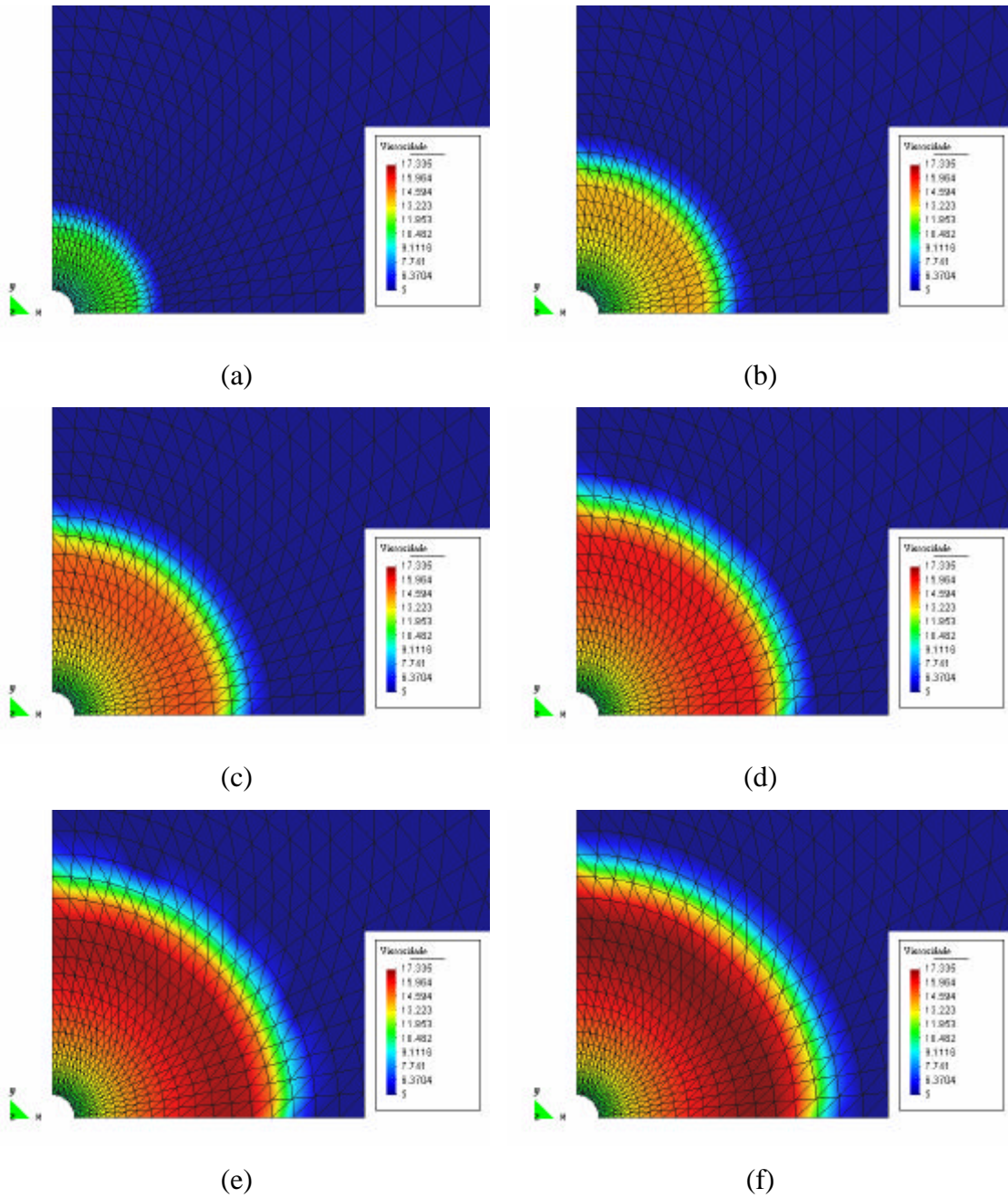


Figura 35 – Distribuição de viscosidade nas proximidades do poço no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 12$ ($\Delta P = 10$): (a) $t = 400$ passos de tempos, (b) $t = 1200$ passos de tempos, (c) $t = 2000$ passos de tempos, (d) $t = 2800$ passos de tempos, (e) $t = 3600$ passos de tempos e (f) $t = 4000$ passos de tempos.

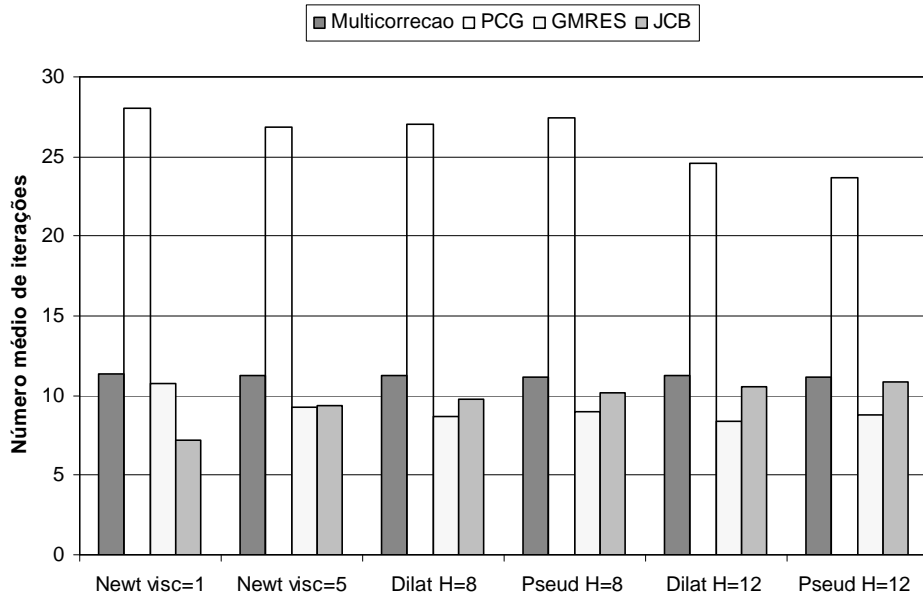


Figura 36 - Número médio de iterações para a simulação de um poço de petróleo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos ($\Delta P = 40$).

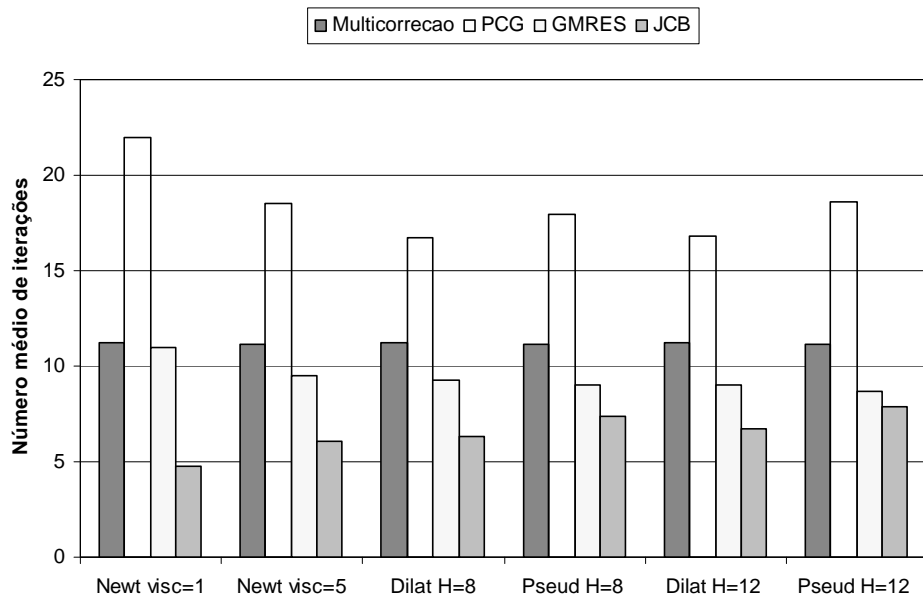


Figura 37 - Número médio de iterações para a simulação de um poço de petróleo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos ($\Delta P = 10$).

Tabela 8 – Número total de passos de tempo, número total de soluções das equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para a simulação de um poço de petróleo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos ($\Delta P = 40$).

	Newt 1	Newt 5	Dilat H8	Pseud H8	Dilat H12	Pseud H12
Passos de tempo	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Eq. pressão	1008	1004	1017	1006	1017	1007
PCG _{total}	28284	26916	27547	27593	24989	23896
Eq. velocidade	1017	1048	1031	1052	1050	1054
JCB _{total}	7336	9846	10121	10739	11054	11405
Eq. saturação	11335	11256	11290	11193	11275	11198
GMRES _{total}	122229	103964	98593	100963	94872	97956

Tabela 9 – Número total de passos de tempo, número total de soluções das equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para a simulação de um poço de petróleo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos ($\Delta P = 10$).

	Newt 1	Newt 5	Dilat H8	Pseud H8	Dilat H10	Pseud H10
Passos de tempo	4000	4000	4000	4000	4000	4000
Eq. pressão	4003	4004	4009	4006	4018	4006
PCG _{total}	87866	74177	66947	71814	67470	74609
Eq. velocidade	4040	4036	4045	4056	4038	4048
JCB _{total}	19352	24602	25592	30058	27086	31787
Eq. saturação	44832	44764	44844	44601	44908	44538
GMRES _{total}	494058	427385	415176	402617	404149	387057

4.2.3 Problema clássico de cinco poços com meio heterogêneo

Neste exemplo resolve-se um quarto do problema cinco de poços. O fluido injetado no poço injetor (fase molhante) desloca o fluido do reservatório (fase não-molhante) em direção ao poço produtor. As grandezas do problema são dadas em um sistema compatível de unidades. O domínio do problema é um quadrado de lado unitário. Foram utilizados 3200 elementos triangulares lineares para discretizar regularmente o domínio do problema. A malha de elementos finitos usada neste exemplo encontra-se na Figura 38. O poço injetor está situado no vértice inferior direito e o poço produtor no vértice superior esquerdo. Nos outros dois vértices do quadrado prescrevem-se pressões nulas e no restante do contorno a condição de fluxo nulo é especificada. Neste exemplo os efeitos da pressão capilar, dos termos fonte no domínio e os efeitos gravitacionais foram desconsiderados. Inicialmente considera-se que o reservatório está preenchido apenas pela fase não-molhante, ou seja, em $t = 0$ $s_w = 0$ em todo o reservatório. No poço injetor fixou-se $s_w = 1$ e as permeabilidades relativas das fases molhante e não-molhante são dadas respectivamente por $k_{rw} = s_w^2$ e $k_{rn} = (1 - s_w)^2$. A porosidade em todo reservatório é igual a 0.20 e o passo de tempo é fixado em $\Delta t = 0.001$. O fluido existente no reservatório é considerado newtoniano e sua viscosidade é igual a 5. Os parâmetros reológicos dos fluidos injetados no reservatório encontram-se na Tabela 10. Os resultados são expressos em função do Volume Poroso Injetado (VPI) que é uma grandeza análoga ao tempo adimensionalizado.

O reservatório é considerado um meio poroso heterogêneo composto por três materiais diferentes estando sua configuração dada na Figura 39. O interior do reservatório apresenta uma região de alta e uma região de baixa permeabilidade. São analisados dois casos distintos onde a localização dessas regiões são alteradas. Os valores das permeabilidades absolutas dos materiais que compõem o reservatório, para cada caso analisado, encontram-se nas Tabelas 11 e 12.

As Figuras 40, 41, 42, 45, 46 e 47 mostram o deslocamento da frente de saturação no interior do reservatório para injeção de diferentes fluidos. Todos os resultados obtidos representaram bem a heterogeneidade do meio. Em todos os casos nota-se a formação de zonas preferenciais de escoamento dos fluidos coincidindo com as regiões de alta permeabilidade existentes no reservatório. Por outro lado, as regiões de baixa permeabilidade do reservatório agem como uma barreira. A frente de saturação

se movimenta mais rapidamente no caso do fluido newtoniano do que no caso dos fluidos não-newtonianos. Os resultados mostram que a velocidade de deslocamento da frente de saturação é maior quando se injeta um fluido dilatante em comparação com a injeção de um fluido pseudoplástico.

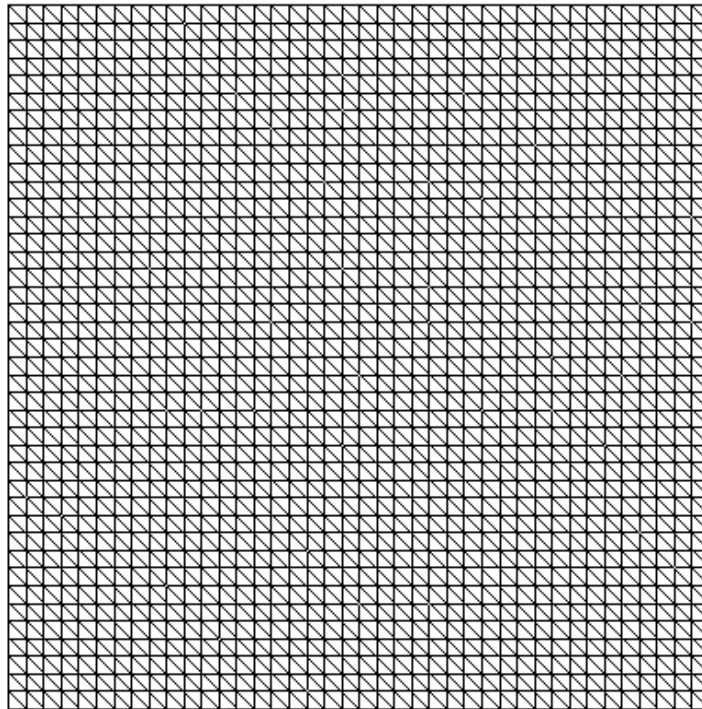


Figura 38 – Malha de elementos finitos com 3200 elementos triangulares lineares.

As Figuras 43, 44, 48 e 49 mostram a distribuição de viscosidade no interior do reservatório para a injeção de diferentes fluidos não-newtonianos. No caso de injeção de fluido dilatante verificou-se a formação de zonas de baixas viscosidades no interior do reservatório. Já no caso de injeção de fluido pseudoplástico verificou-se a formação de zonas de altas viscosidades no interior do reservatório. Tanto as zonas de altas viscosidades quanto as zonas de baixas viscosidades encontram-se próximas as regiões de alta e de baixa permeabilidade do reservatório demonstrando como a heterogeneidade do meio está influenciando na viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos.

O fato do problema de escoamento de fluidos pseudoplásticos apresentar zonas de altas viscosidades no interior do reservatório explica porque para esses fluidos a velocidade com que a frente de saturação se movimenta é menor do que no caso de

escoamento de fluidos dilatantes que apresentam zonas de baixas viscosidades no interior do reservatório.

Tabela 10 – Parâmetros reológicos dos fluidos injetados no reservatório.

Fluido Newtoniano

Viscosidade $m_v = 1$

Fluido Dilatante

Parâmetro de consistência $H=5$

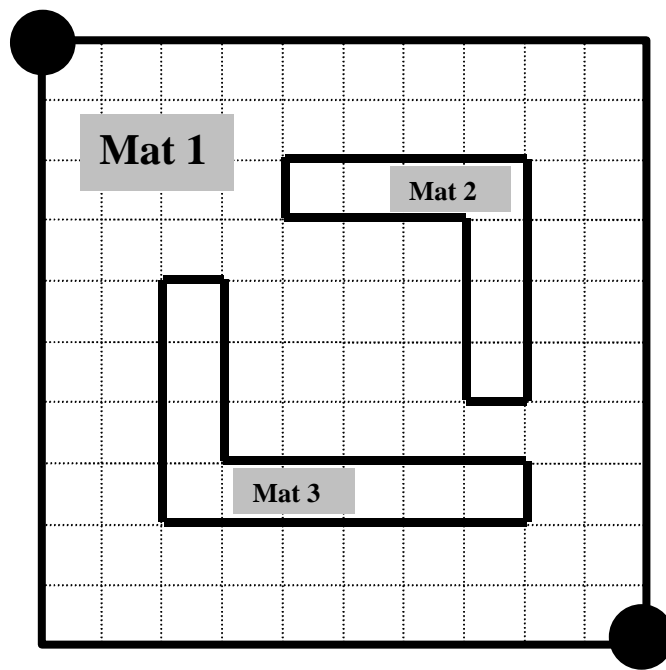
Índice de comportamento do escoamento $n=1.3$

Fluido Pseudoplástico

Parâmetro de consistência $H=5$

Índice de comportamento do escoamento $n=0.7$

Poço produtor



Poço injetor

Figura 39 – Configuração do reservatório para o problema de cinco poços com meio heterogêneo.

Tabela 11 – Permeabilidade absoluta dos materiais que compõe o reservatório – Caso 1.

<i>Material 1</i>		
Permeabilidade absoluta	$k_x = k_y = 1$	$k_{xy} = 0$
<i>Material 2</i>		
Permeabilidade absoluta	$k_x = k_y = 0.01$	$k_{xy} = 0$
<i>Material 3</i>		
Permeabilidade absoluta	$k_x = k_y = 10$	$k_{xy} = 0$

Tabela 12 – Permeabilidade absoluta dos materiais que compõe o reservatório – Caso 2.

<i>Material 1</i>		
Permeabilidade absoluta	$k_x = k_y = 1$	$k_{xy} = 0$
<i>Material 2</i>		
Permeabilidade absoluta	$k_x = k_y = 10$	$k_{xy} = 0$
<i>Material 3</i>		
Permeabilidade absoluta	$k_x = k_y = 0.01$	$k_{xy} = 0$

Nota-se também que a velocidade com que a frente de saturação se desloca no interior do reservatório é menor quando o reservatório possui as permeabilidades absolutas apresentadas na Tabela 12 - Caso 2. Neste caso, por exemplo, a frente de saturação do fluido pseudoplástico não consegue alcançar o poço produtor como pode ser observado na Figura 47.

As Figuras 50 e 51 apresentam o número médio de multicorreções por passo de tempo executado pelo algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor e o número médio de iterações em cada multicorreção executado pelos métodos numéricos utilizados para resolver as equações da pressão e da saturação assim como nos cálculos das velocidades. As Tabelas 13 e 14 apresentam o número total de passos de tempo da

análise, o número total de soluções para as equações da pressão, velocidade e saturação e o número de total de iterações executado pelos métodos PCG, JCB e GMRES.

Analisando as Figuras 50 e 51 pode-se observar que o método PCG necessita em média de um número muito elevado de iterações para atingir a convergência quando comparado com os demais métodos apresentados. Nas Tabelas 13 e 14 observa-se que o método GMRES executou o maior número de iterações. É importante destacar também o baixo número de iterações executado pelo método JCB em todos os casos mostrados. Observa-se também nestas tabelas que o número de iterações executado pelo método JCB aumenta com o aumento do parâmetro de consistência H . Finalmente conclui-se que neste exemplo o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor precisou em média de 11 multicorreções por passo de tempo para convergir. As equações da pressão e da velocidade foram solucionadas em média uma única vez a cada passo de tempo enquanto que a equação da saturação precisou ser solucionada durante todas as multicorreções do algoritmo.

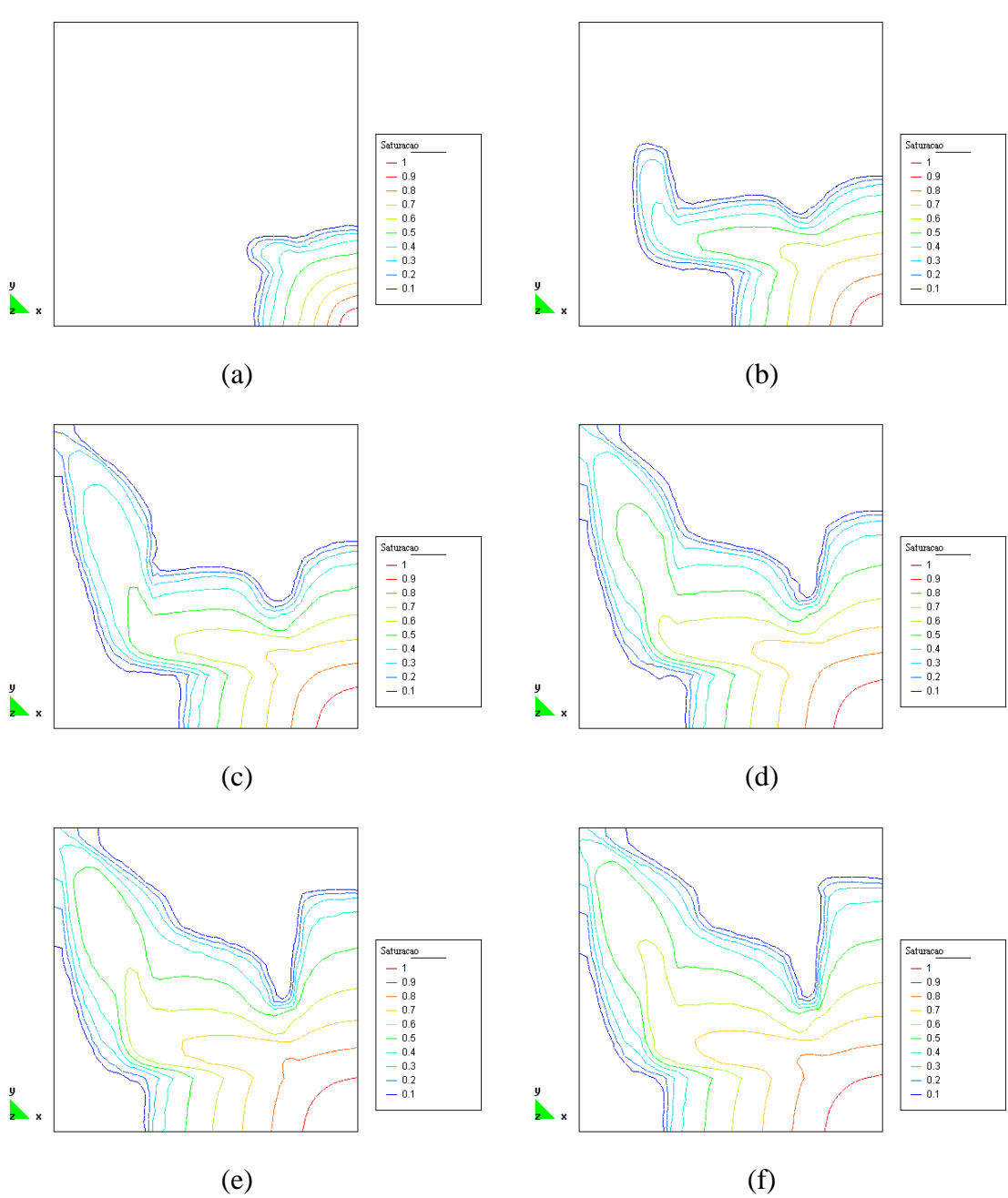


Figura 40 – Linhas de contorno de saturação no caso de injeção de fluido newtoniano com $m_v = 1$ – Caso 1: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

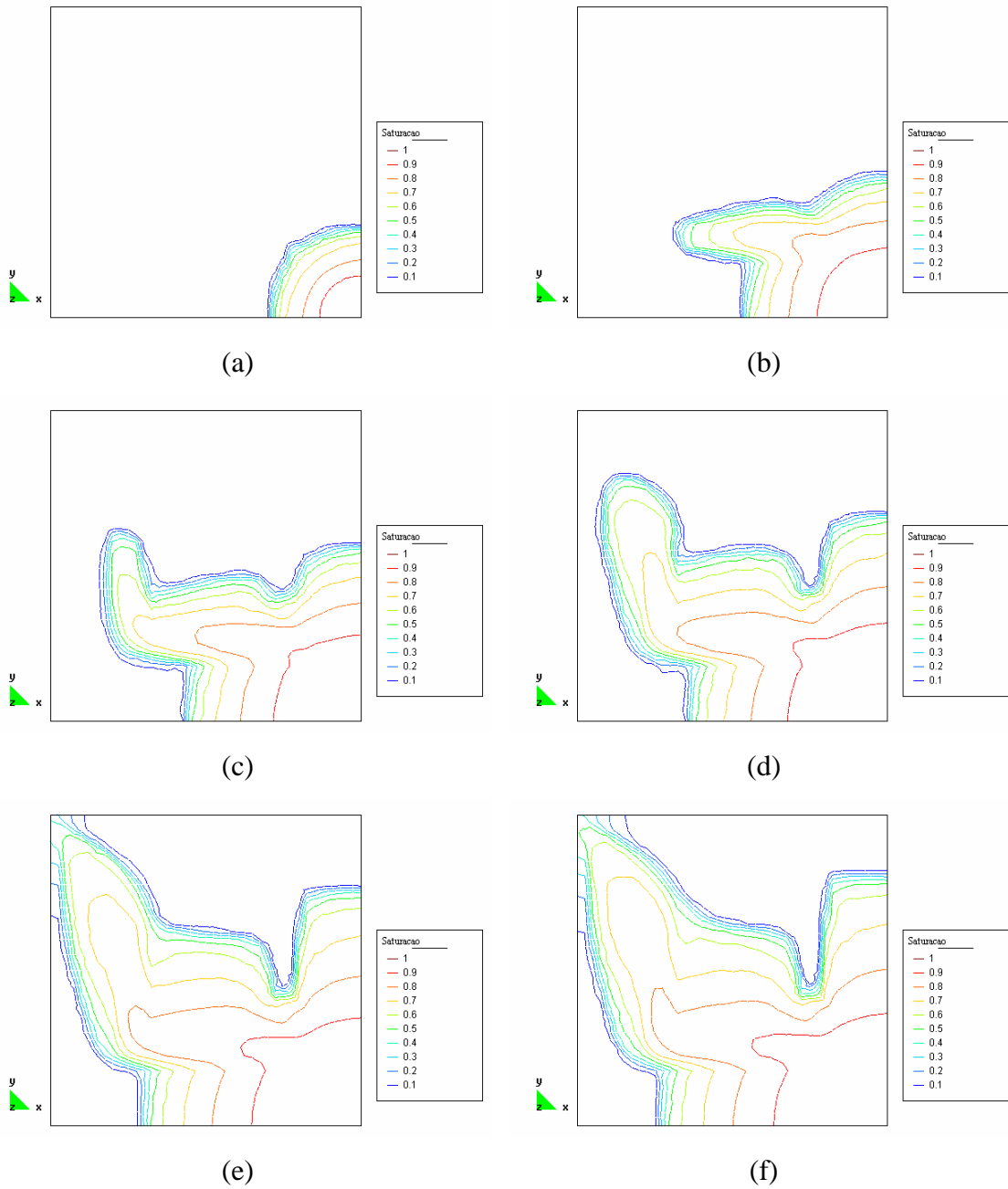


Figura 41 – Linhas de contorno de saturação no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 5$ – Caso 1: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

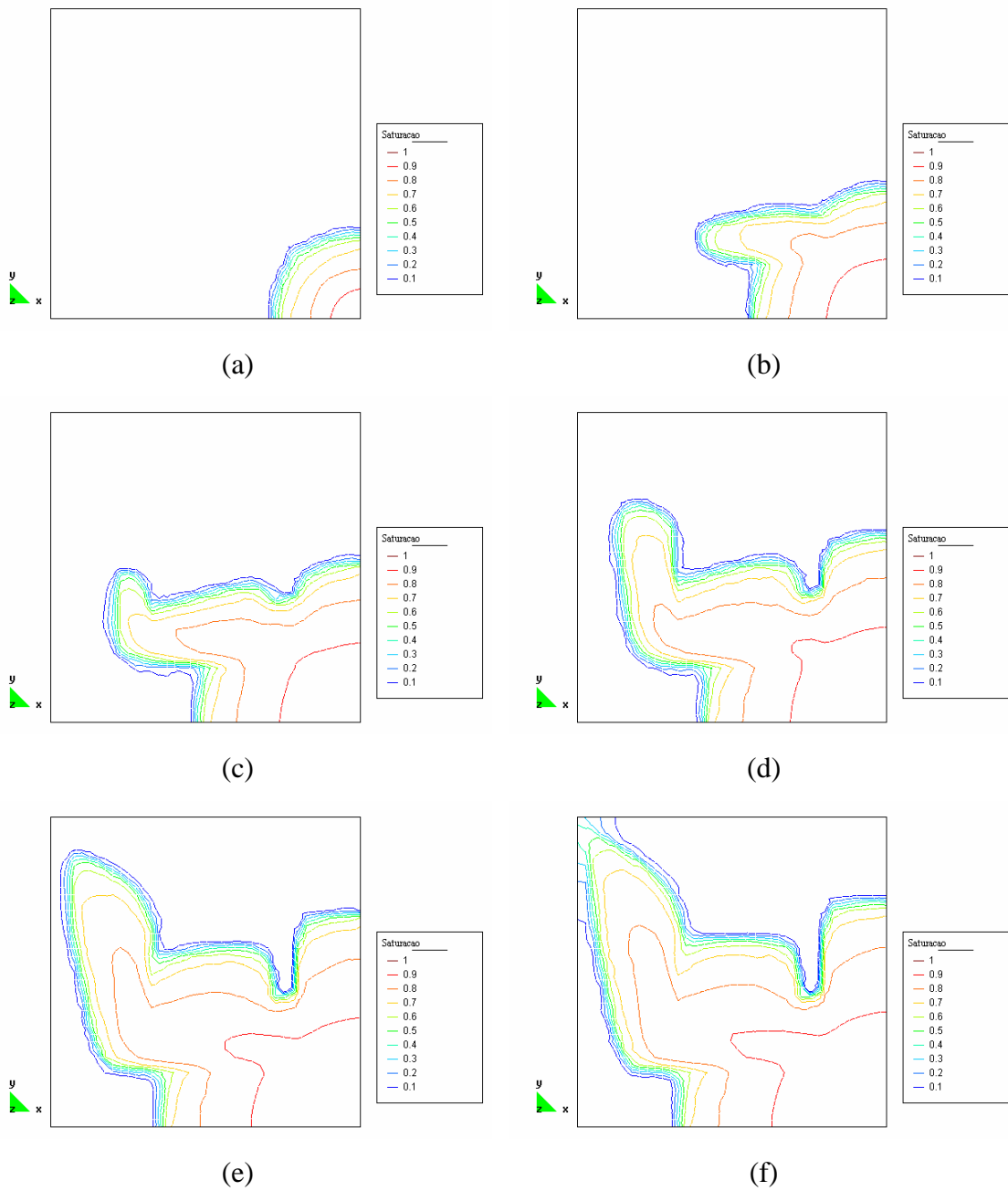


Figura 42 – Linhas de contorno de saturação no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 5$ – Caso 1: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

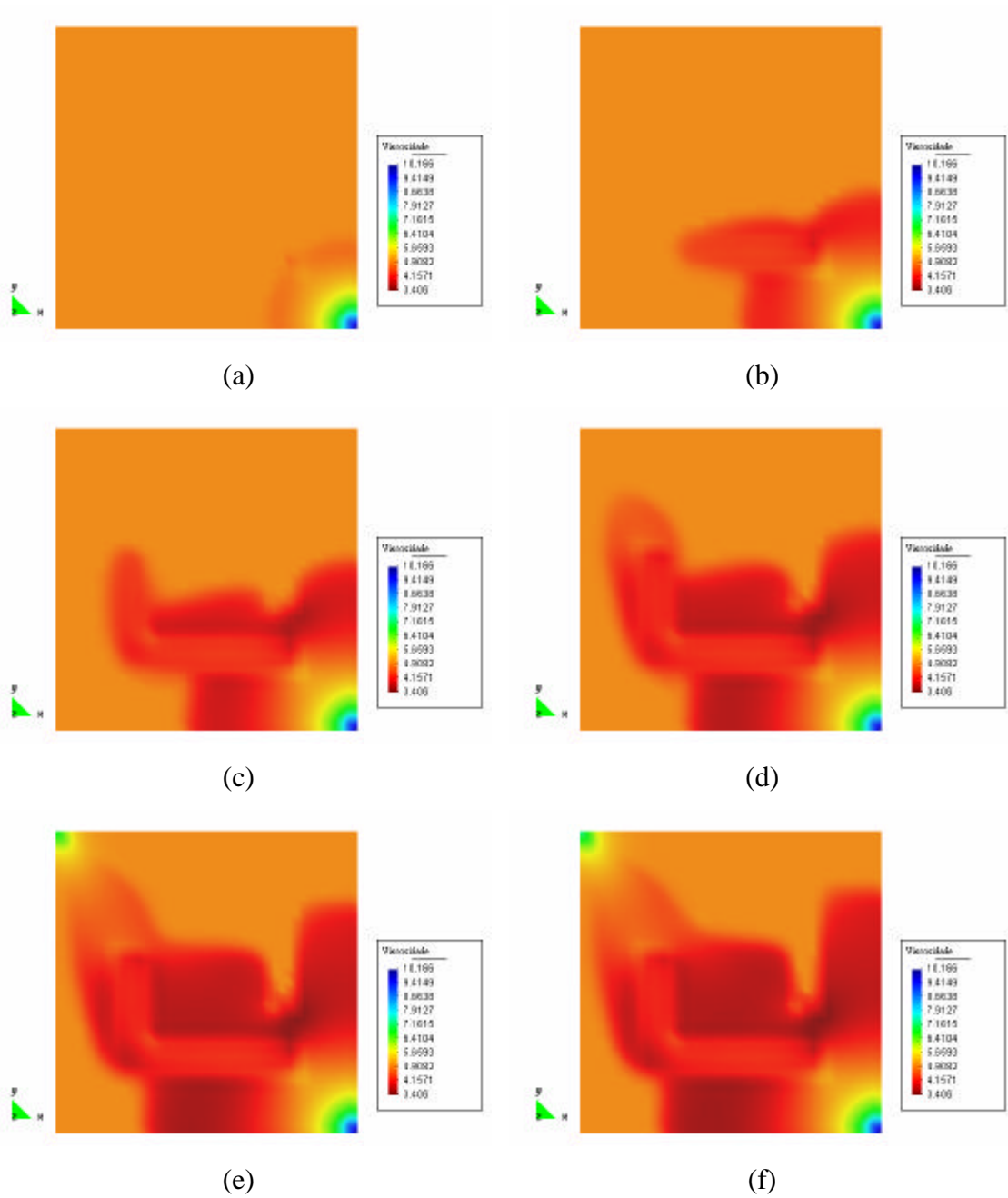


Figura 43 – Distribuição de viscosidade no interior do reservatório no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 5$ – Caso 1: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

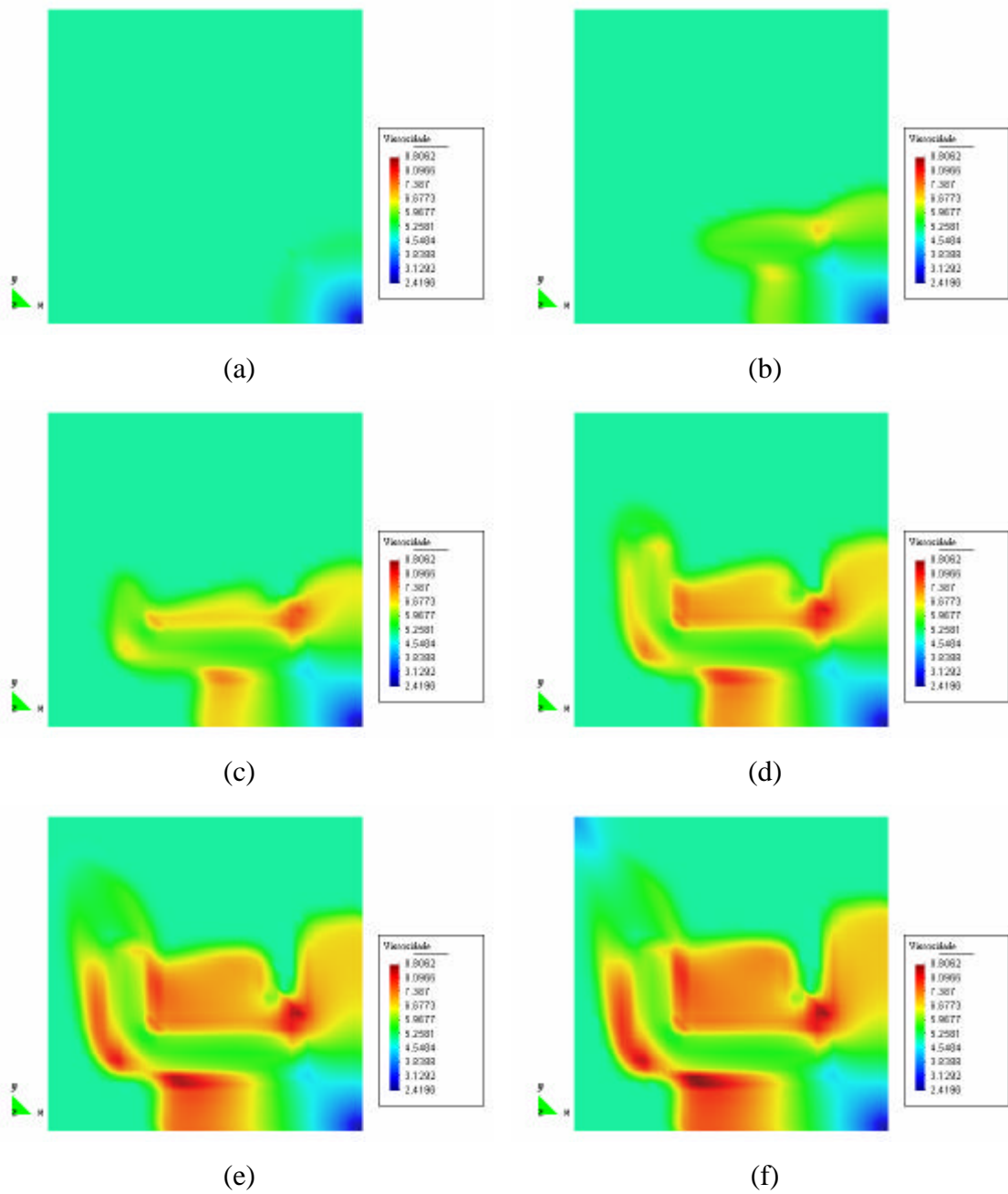


Figura 44 – Distribuição de viscosidade no interior do reservatório no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 5$ – Caso 1: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

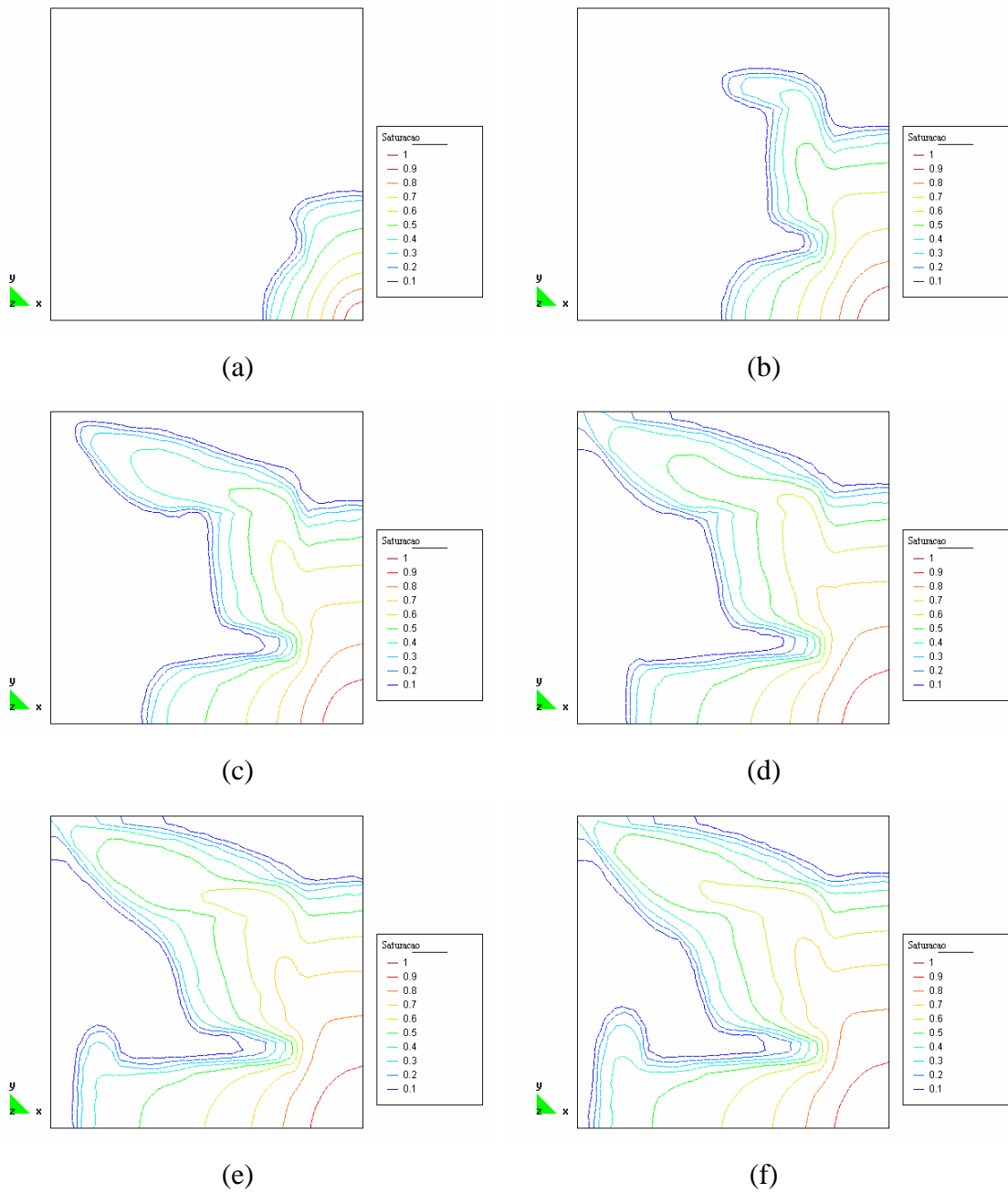


Figura 45 – Linhas de contorno de saturação no caso de injeção de fluido newtoniano com $m_v = 1$ – Caso 2: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

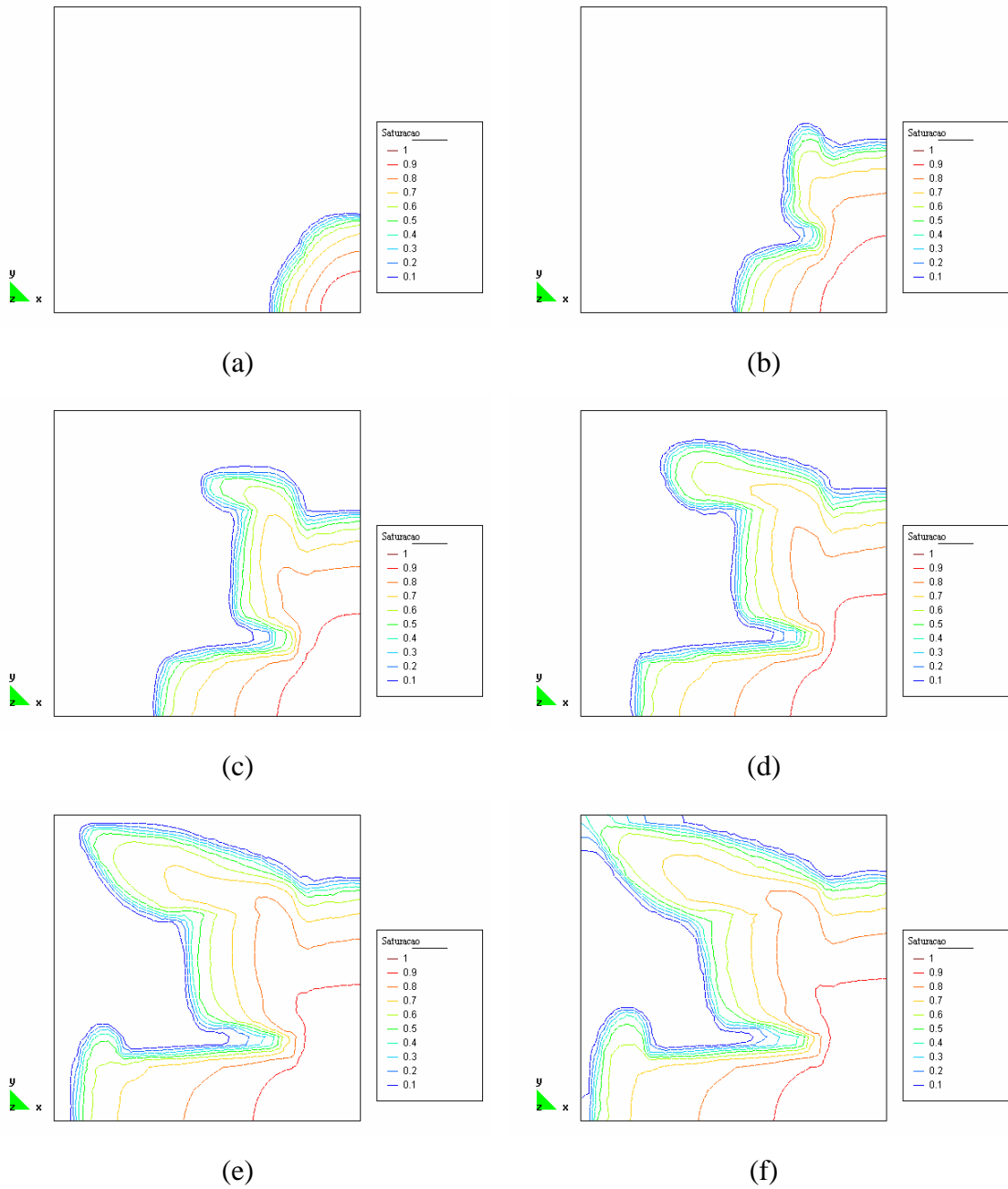


Figura 46 – Linhas de contorno de saturação no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 5$ – Caso 2: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

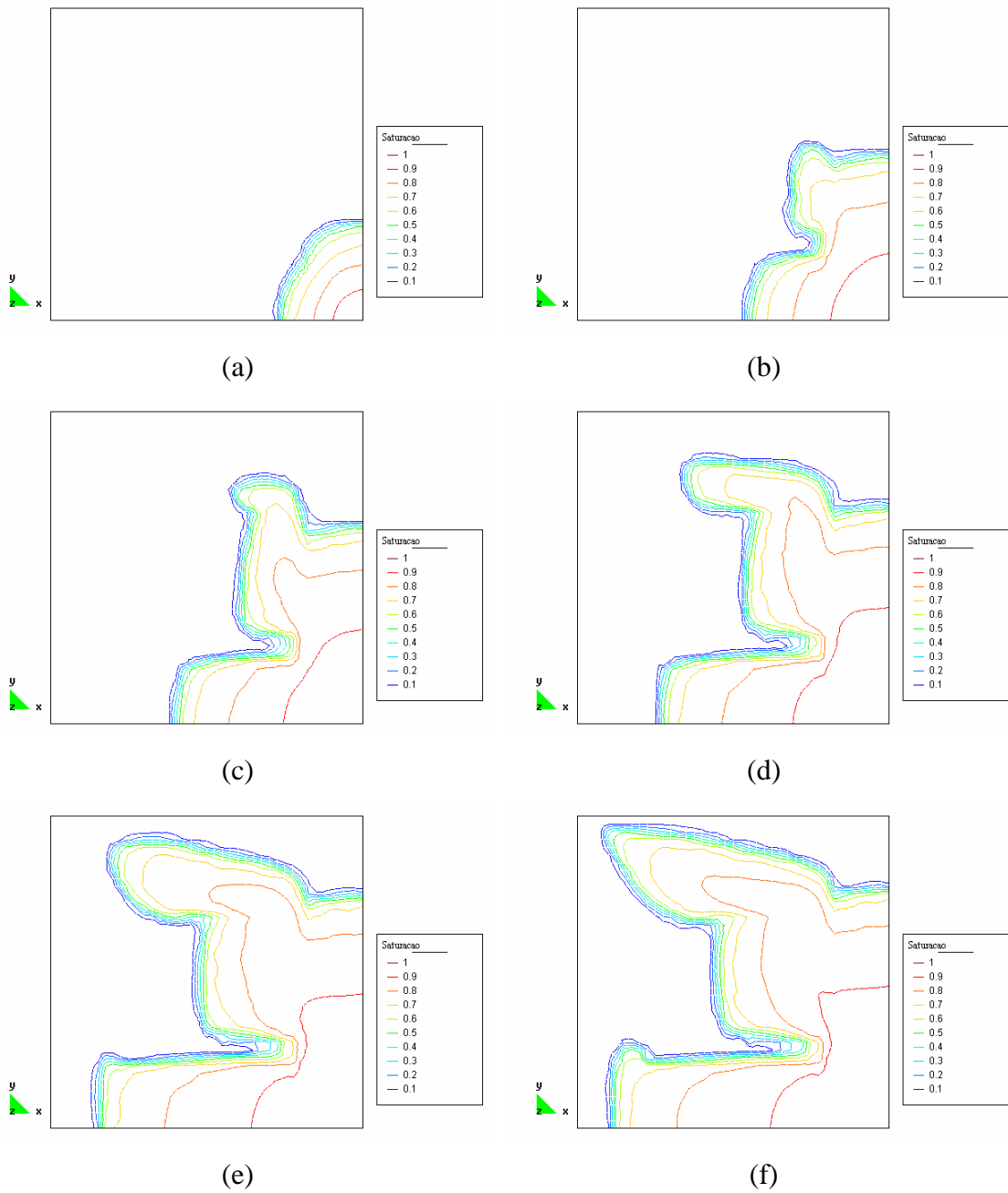


Figura 47 – Linhas de contorno de saturação no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 5$ – Caso 2: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

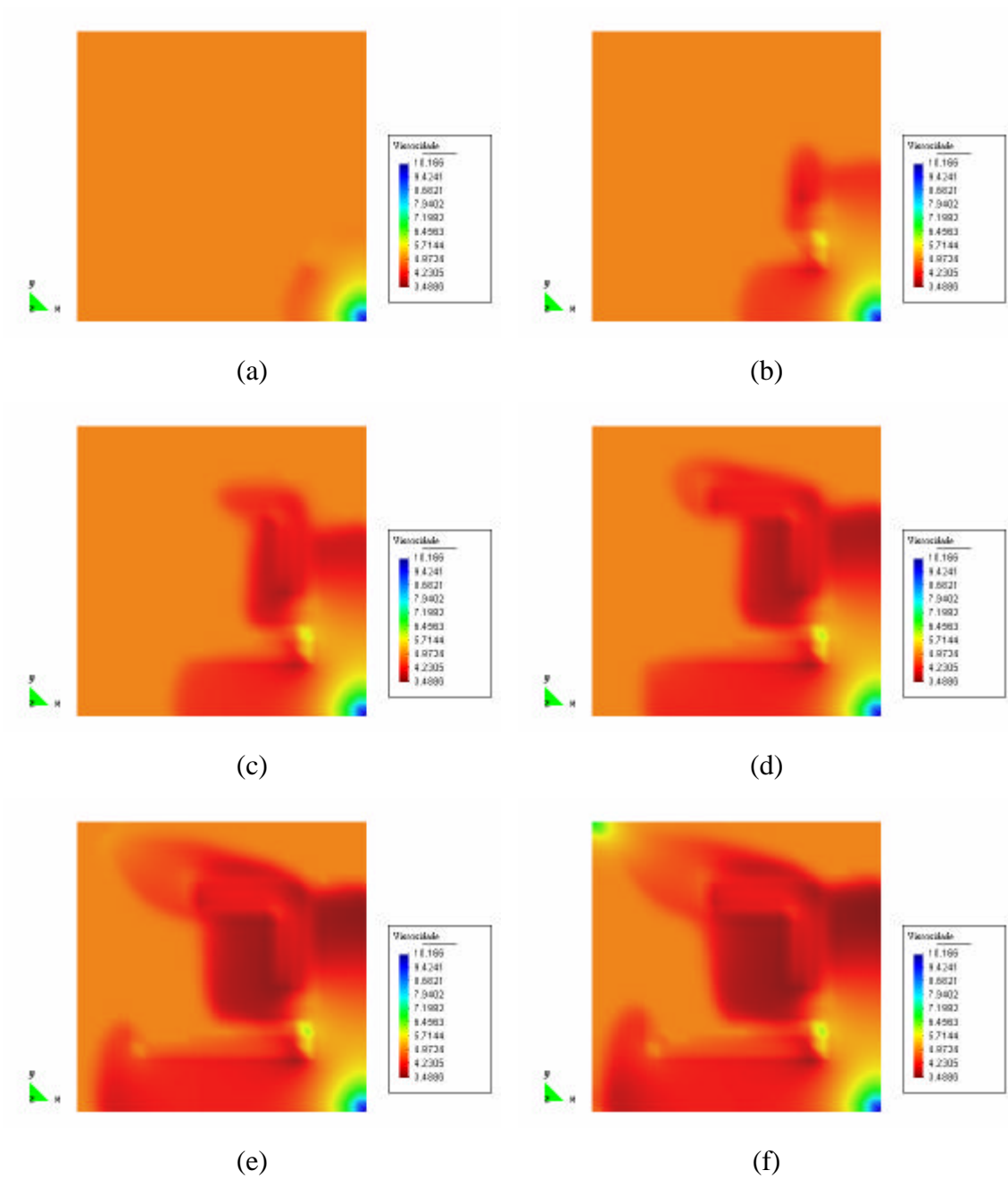


Figura 48 – Distribuição de viscosidade no interior do reservatório no caso de injeção de fluido dilatante com $H = 5$ – Caso 2: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

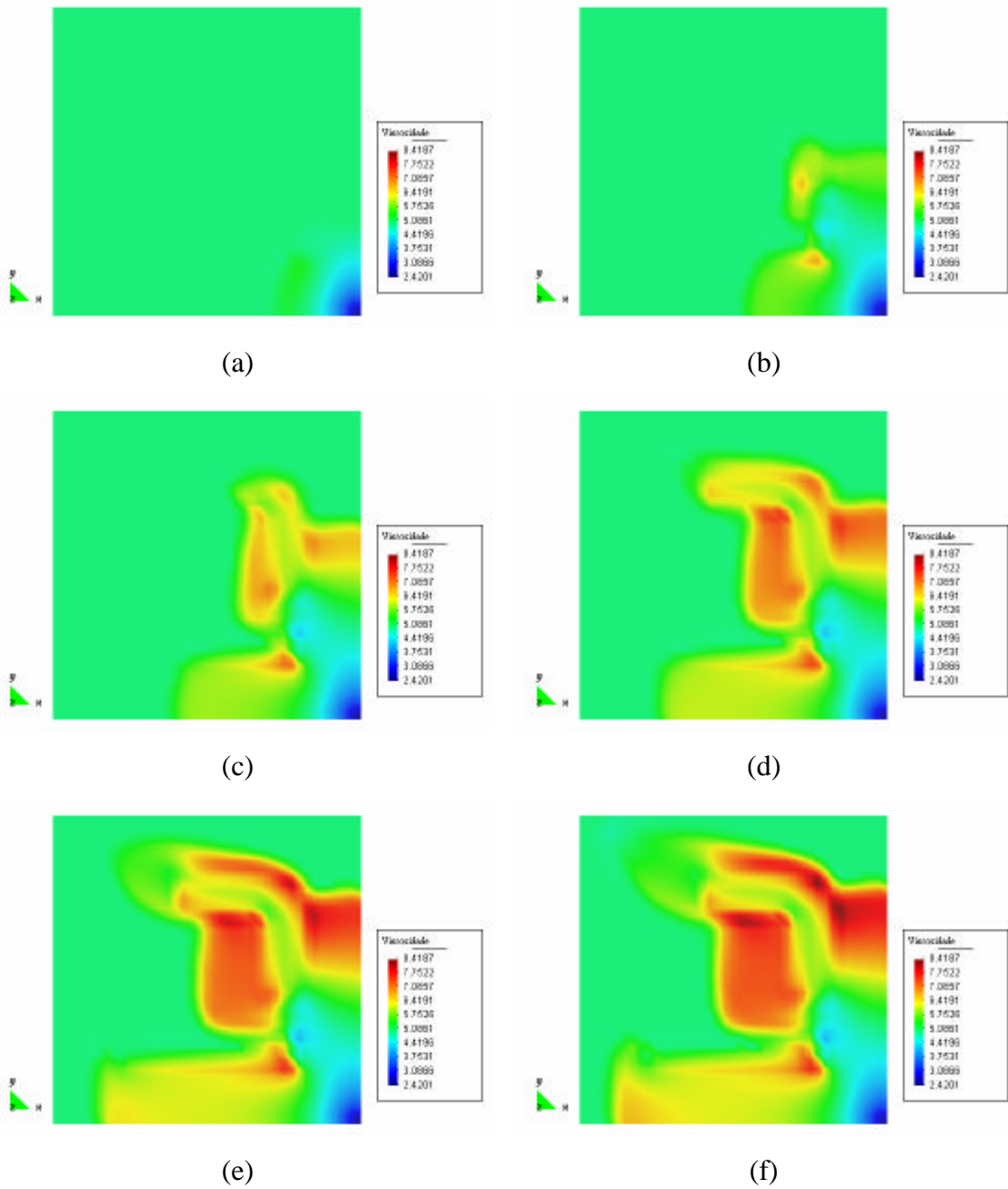


Figura 49 – Distribuição de viscosidade no interior do reservatório no caso de injeção de fluido pseudoplástico com $H = 5$ – Caso 2: (a) $t = 0.05$ VPI, (b) $t = 0.15$ VPI, (c) $t = 0.25$ VPI, (d) $t = 0.35$ VPI, (e) $t = 0.45$ VPI e (f) $t = 0.50$ VPI.

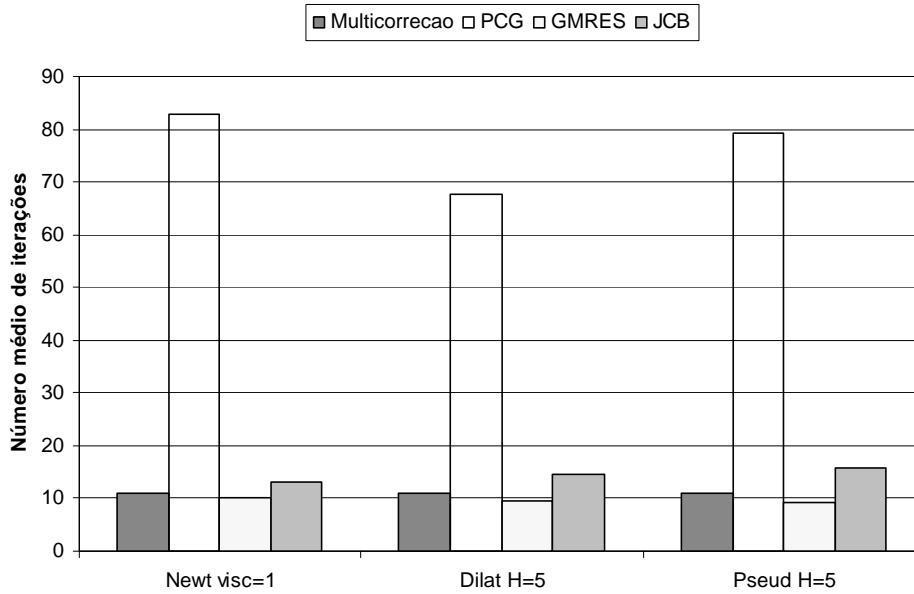


Figura 50 - Número médio de iterações para o problema de cinco poços com meio heterogêneo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos (Caso 1).

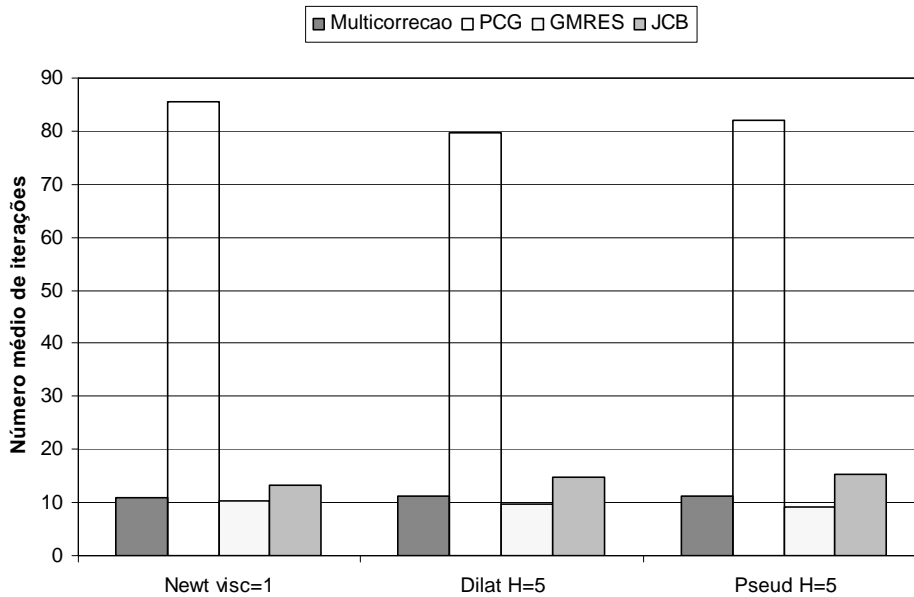


Figura 51 - Número médio de iterações para o problema de cinco poços com meio heterogêneo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos (Caso 2).

Tabela 13 – Número total de passos de tempo, número total de soluções das equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para o problema de cinco poços com meio heterogêneo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos (Caso 1).

	Newt visc=1	Dilat H=5	Pseud H=5
Passos de tempo	500	500	500
Eq. pressão	505	518	509
PCG _{total}	41884	35112	40287
Eq. velocidade	535	508	544
JCB _{total}	7068	7469	8538
Eq. saturação	5523	5577	5587
GMRES _{total}	56623	53878	52044

Tabela 14 – Número total de passos de tempo, número total de soluções das equações da pressão, velocidade e saturação, número total de iterações dos métodos PCG, JCB e GMRES para o problema de cinco poços com meio heterogêneo considerando injeção de diferentes tipos de fluidos (Caso 2).

	Newt visc=1	Dilat H=5	Pseud H=5
Passos de tempo	500	500	500
Eq. pressão	505	512	508
PCG _{total}	43200	40845	41648
Eq. velocidade	537	508	541
JCB _{total}	7122	7480	8342
Eq. saturação	5521	5570	5570
GMRES _{total}	57545	53730	51009

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Considerações finais

Neste trabalho apresentou-se a implementação de uma formulação de elementos finitos para a simulação de escoamentos incompressíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos. Esta formulação mostrou-se uma importante ferramenta para a simulação de invasão de fluidos durante operações de perfuração. Além disso, o estudo do problema na escala de reservatório também apresentou resultados interessantes, principalmente sobre a variação de viscosidade no interior do reservatório.

O modelo de Kozeny, que é baseado no modelo de lei das potências, foi usado para descrever o comportamento reológico dos fluidos não-newtonianos. Este modelo representou bem as variações de viscosidade aparente no interior do reservatório e nas proximidades do poço.

A utilização da estratégia de pós-processamento global do campo de velocidades permitiu aproximar as variáveis do problema, pressão, velocidade e saturação, por interpolações Lagrangianas de mesma ordem.

Os parâmetros da formulação estabilizada de Petrov-Galerkin, empregada na aproximação da equação da saturação, influenciam na solução do problema como pôde ser constatado nos exemplos de validação apresentados na Seção 4.1. A análise dos exemplos apresentados nesta seção permitiu escolher a formulação SUPG+CAU h como a melhor formulação para o tipo de problema estudado e portanto todos os exemplos da Seção 4.2 foram solucionados desta forma. Os resultados onde somente a

formulação SUPG foi empregada, na Seção 4.1, foram os menos difusivos quando comparados com os demais resultados apresentados nesta seção. Todavia tais resultados apresentam as oscilações espúrias (*under-shooting*) mais acentuadas. Quando se empregou a formulação SUPG+CAU $h/2$ também se constatou a presença de oscilações espúrias, embora com menor intensidade. Nas demais formulações empregadas neste trabalho não foi verificada a presença de oscilações espúrias. Constatou-se então que a formulação SUPG quando empregada isoladamente não consegue evitar o surgimento de oscilações espúrias na solução do problema. Para evitar o surgimento de tais oscilações foi necessário utilizar o operador de captura de choque do tipo CAU. Os resultados obtidos quando empregou-se somente o operador de captura de choque não apresentaram oscilações espúrias porém mostraram-se mais difusivos do que os resultados obtidos onde a formulação SUPG foi empregada. No exemplo 4.1.3 observou-se que o emprego do operador de captura de choque aumentou consideravelmente o número de multicorreções efetuadas pelo algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor.

O comportamento dos solucionadores lineares empregados neste trabalho foi analisado com o auxílio de seus respectivos números de iterações. No caso de escoamento de fluidos não-newtonianos o comportamento desses solucionadores não foi significativamente alterado quando comparado com o caso de escoamento de fluidos newtonianos. Portanto o cálculo da viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos não trouxe prejuízo ao desempenho desses solucionadores. Um comportamento análogo foi observado no algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor. Em todos os exemplos onde estudou-se o escoamento de fluidos não-newtonianos o número de iterações para o método de Jacobi livre de matrizes (JCB) apresentou um pequeno aumento, já esperado, quando comparado com o caso de escoamento de fluidos newtonianos. Esta observação mostra como o cálculo da viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos acrescenta não-linearidade à solução do problema.

Analisando o exemplo 4.2.3 observou-se que o número médio de iterações para o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador elemento-por-elemento do tipo Gauss-Seidel (PCG) aumenta mais rapidamente com o aumento do número de elementos da malha do que para os demais métodos iterativos. Comparando os exemplos 4.2.1 e 4.2.3, nota-se que o número médio de iterações para o PCG no

exemplo 4.2.3 é praticamente três vezes maior do que no exemplo 4.2.1 enquanto os demais números médios de iterações permanecem praticamente inalterados.

Em todos os exemplos apresentados neste trabalho onde utilizou-se a formulação SUPG acrescida do operador de captura de choque do tipo CAU o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor precisou em média de 11 iterações não-lineares (ou multicorreções) por passo de tempo para convergir. As equações da pressão e da velocidade foram resolvidas em média uma única vez a cada passo de tempo enquanto a equação da saturação teve que ser resolvida durante todas as multicorreções do algoritmo. Desta forma, mostrou-se que o escoamento dos fluidos não-newtonianos não alterou o comportamento do algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor quando comparado com o escoamento de fluidos newtonianos. O número elevado de multicorreções efetuadas pelo algoritmo está associado ao emprego do operador de captura de choque. Como um dos objetivos deste trabalho é verificar se o comportamento do algoritmo é alterado quando se trata de escoamento de fluidos não-newtonianos utilizou-se elevados valores para o número máximo de multicorreções efetuadas pelo algoritmo. Porém para se obter um melhor desempenho do algoritmo pode-se limitar o número máximo de multicorreções a valores menores comparando os resultados até se encontrar um número ideal de multicorreções.

A viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos apresentou o comportamento esperado em todos exemplos analisados. No caso de escoamento de fluidos dilatantes os maiores valores de viscosidade aparente foram verificados em regiões próximas ao poço onde a velocidade do escoamento é mais elevada. Um comportamento oposto foi verificado no caso de escoamento de fluidos pseudoplásticos, ou seja, nas regiões próximas ao poço a viscosidade aparente apresentou os menores valores. No exemplo 4.2.3 onde o reservatório é heterogêneo, constatou-se que a heterogeneidade do meio provocou o surgimento de zonas de altas e de baixas viscosidades no interior do reservatório. Além disso em todos os casos analisados a viscosidade aparente dos fluidos não-newtonianos aumentou com o aumento do parâmetro de consistência H .

No exemplo 4.2.2 onde um fluido de perfuração invade o reservatório foi possível analisar dois cenários distintos. No primeiro, onde $\Delta P = 40$, o fluido dilatante

apresentou altos valores de viscosidade aparente e portanto sua penetração no meio poroso foi menos efetiva do que a penetração do fluido pseudoplástico. No segundo cenário analisado, onde $\Delta P = 10$, o fluido pseudoplástico apresentou altos valores de viscosidade aparente e portanto neste caso sua penetração no meio poroso foi menos efetiva do que a penetração do fluido dilatante. Tais observações permitem concluir que quando $\Delta P = 40$ o escoamento encontra-se em uma região de altas taxas de deformação enquanto que para $\Delta P = 10$ o escoamento encontra-se em uma região de baixas taxas de deformação. Este exemplo fornece subsídios para se estudar a perda do fluido de perfuração em operações de perfurações de poços de petróleo. Nos exemplos 4.2.1 e 4.2.3 a frente de saturação se deslocou mais rapidamente no caso de escoamento de fluidos dilatantes do que no caso de escoamento de fluidos pseudoplásticos. Portanto conclui-se que nesses exemplos o escoamento encontra-se em uma região de baixas taxas de deformação.

A utilização da formulação apresentada permitiu simular o surgimento de zonas de altas e de baixas viscosidades no interior de um reservatório heterogêneo para o caso de escoamento de fluidos não-newtonianos (exemplo 4.2.3). Este tipo de informação é uma importante contribuição para o entendimento dos diversos fenômenos que ocorrem no interior de um reservatório durante o processo de escoamento de fluidos.

5.2 Trabalhos futuros

Algumas sugestões para trabalhos futuros são agora apresentadas: i) extensão da formulação para abranger problemas tridimensionais; ii) incorporar ao código outros modelos de fluidos não-newtonianos conforme citados em [39]; iii) utilizar estratégias de dados por aresta na implementação dos métodos iterativos conforme descrito em [6] com o objetivo de otimizar o código; iv) implementar problemas de escoamentos trifásicos considerando além das duas fases líquidas e imiscíveis a presença também de uma fase gasosa muito comum em acumulações de petróleo.

Bibliografia

- [1] ALMEIDA, R. C., GALEÃO, A. C., “An Adaptative Petrov-Galerkin Formulation for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 129, pp. 157-176, 1996.
- [2] AZIZ, K., SETTARI, A., *Petroleum Reservoir Simulation*. London, Elsevier Applied Science Publishers, 1979.
- [3] BEAR, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*. London, Elsevier, 1972.
- [4] BISWAS, D., CAREY, G. F., “A Least-Square Mixed Scheme for the Simulation of Two-Phase Flow in Porous Media on Unstructured Grids”, *Transport in Porous Media*, vol. 32, pp. 75-95, 1998.
- [5] BROOKS, A. N., HUGHES, T.J.R., “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 32, pp.199-259, 1982.
- [6] CATABRIGA, L., *Soluções Implícitas das Equações de Euler empregando Estruturas de Dados por Aresta*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
- [7] CHIU, T. W., WAKEMAN, R. J., HARRIS, P. R., MEURIC, O. F. J, “Effects of non-Newtonian fluid and porous media parameters on two-phase flow in porous media”, *Trans IchemE*, vol. 74(A), pp. 220-231, March 1996.
- [8] COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., “Parallel finite element simulation of miscible displacement in porous media”, *SPE Journal*, 1 (4) SPE 37399,

487-500, 1996.

- [9] COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., LANDAU, L., EBECKEN, N. F. F., “A dynamic mesh partition algorithm for the finite element solution of two-phase immiscible flow in oil reservoir”, *Finite Element in Fluids: New Trends and Applications*, vol. II, 856-865, 1993.
- [10] COUTINHO, A. L. G. A., SILVA, A. S., DEVLOO, P. R. D., “Uma comparação de esquemas de estabilização para a simulação por elementos finitos de escoamentos imiscíveis bi-fásicos em meios porosos”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 19, n. 3, pp.279-294, 2003.
- [11] DEB, M. K., REDDY, M. P., THUREN, J. B., ADAMS, W. T., “A new generation solution adaptive reservoir simulation”, *SPE Journal*, SPE 30720, 175-189, 1995.
- [12] DOUGLAS JR., J., FELIPE PEREIRA, YEH, L. M., “A parallelizable method for two-phase flows in naturally fractured reservoirs”, *Computational Geosciences*, vol. 1, n. 4, pp. 333-368, 1997.
- [13] DOUGLAS JR., J., FELIPE PEREIRA, FURTADO, F., “On the numerical simulation of waterflood of heterogeneous petroleum reservoirs”, *Computational Geosciences*, vol. 1, n. 2, pp. 155-190, 1997.
- [14] DURLOFSKY, L. J., “A Triangle Based Mixed Finite Finite Element - Finite Volume Technique for Modeling Two Phase Flow through Porous Media”, *Journal of Computational Physics*, vol. 105, pp. 252-266, 1993.
- [15] FLUENT INC., *Theory Manual FIDAP 8, December 1998*.
- [16] FOX, R. W., McDONALD, A. T., *Introduction to Fluid Mechanics*. 4 ed. New York, Jonh Wiley & Sons, 1992.

- [17] HELMIG, R., *Multiphase Flow and Transport Process in the Subsurface: a Contribution to the Modeling of Hydrosystems*. New York, Springer-Verlag, 1997.
- [18] HUGHES, T. J. R., *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewoods Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1987.
- [19] JUANES, R., PATZEK, T. W., “Multiple-scale stabilized finite elements for the simulation of tracer injection and waterflood”, *SPE Journal*, SPE 75231, 2002.
- [20] JUANES, R., PATZEK, T. W., “Multiscale finite element method for miscible and immiscible flow in porous media”. *International Groundwater Symposium of the IAHR*, Berkeley, CA, 2002.
- [21] LANGTANGEN, H. P., “Implicit Finite Element Methods for Two-Phase Flow in Oil Reservoirs”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 10, pp. 651-681, 1990.
- [22] LOULA, A. F. D., GARCIA, E. L. M., COUTINHO, A. L. G. A., “Miscible displacement simulation by finite element methods in distributed memory machines”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 174, pp. 339-354, 1999.
- [23] LUO, H., BAUM, J. D., LÖHNER, R., “Edge-Based Finite Element Scheme for the Euler Equations”, *AIAA Journal*, vol. 32, n. 6, pp. 1183-1190, 1994.
- [24] MALTA, S. M. C., LOULA, A. F. D., GARCIA, E. L. M., “Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 187, pp. 119-136, 2000.

- [25] MASSARANI, G., *Fluidodinâmica em sistemas particulados*. Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 1997.
- [26] MASSARANI, G., TELLES, A. S., “An Extended Capillary Model for Flows in Porous Media”, *Journal of Porous Media*, v. 4(4), pp. 297-307, 2001.
- [27] MASUD, A., HUGHES, T. J. R., “A stabilized mixed finite element method for Darcy flow”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 4341-4370, 2002.
- [28] PARSONS, I. D., COUTINHO, A. L. G. A., “Finite element multgrid methods for two-phase immiscible flow in heterogeneous media”, *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 15, pp. 1-7, 1999.
- [29] PEACEMAN, D. W., *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.
- [30] PERRY, R. H., GREEN, D. W., MALONEY, J. O., *Perry's Chemical Engineers' Handbook*. 7 ed. New York, McGraw-Hill, 1997.
- [31] SAAD, Y, SCHULTZ, M. H., “GMRES: Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Non-Symmetric Systems”, *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, vol.7, pp. 856-869, 1996.
- [32] SAAD, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company, 1996.
- [33] SHAKIB, F., HUGHES, T.J.R., JOHAN, Z., “A multi-element group preconditioned GMRES algorithm for nonsymmetric systems arising in finite element analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.75, pp.415-456, 1989.
- [34] SILVA, A. S., *Elementos Finitos Adaptativos para Escoamentos Bifásicos*

Imiscíveis Ligeiramente Compressíveis. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

- [35] TEZDUYAR, T. E., BEHR, M., ALIABADI, S. K., MITTAL, S., RAY, S. E., “A new mixed preconditioning method for finite element computations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 99, pp. 27-42, 1992.

- [36] THOMAS, G. W., *Principles of Hydrocarbon Reservoir Simulation*. 2 ed. Boston, International Human Resources Development Corporation, 1982.

- [37] WU, Y. S., PRUESS, K., “A numerical method for simulating non-Newtonian fluid flow and displacement in porous media”, *Advances in Water Resources*, vol. 21, pp. 351-362, 1998.

- [38] WU, Y. S., PRUESS, K., *Numerical Method for Simulating Non-Newtonian Fluid Flow in Porous Media*, Environmental Remediation Technology, Annual Report, 1997.

- [39] ZHU, Z., WU, Q., GAO, C., DU, X., “Numerical simulation of two-dimensional transient water driven non-Newtonian fluid flow in porous media”, *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 18, pp. 229-240, 2002.