

FLAMBAGEM REOLÓGICA DE ESTACAS ESBELTAS EM SOLOS ARGILOSOS

Daniela Lobo Francisco

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Ronaldo Carvalho Battista, Ph.D.

Prof^a. Bernadete Ragoni Danziger, D.Sc.

Prof. Eduardo de Moraes Rego Fairbairn, Dr.Ing.

Prof. Paulo Eduardo Lima de Santa Maria, Ph.D.

Prof. Ian Schumann Marques Martins, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 2003

FRANCISCO, DANIELA LOBO

Flambagem Reológica de Estacas
Esbeltas em Solos Argilosos [Rio de
Janeiro] 2003

XIII, 113 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Civil, 2003)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Deformações reológicas visco-elásticas
de estacas

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DEFORMAÇÕES REOLÓGICAS DE ESTACAS ESBELTAS EM SOLOS ARGILOSOS

Daniela Lobo Francisco

Setembro / 2003

Orientador: Ronaldo Carvalho Battista

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho analisa o problema de flambagem reológica de estacas esbeltas, em camada de solo argiloso, submetidas à compressão excêntrica. Três modelos visco-elásticos com fundamentos nas teorias de estruturas e de adensamento de solos são desenvolvidos e aplicados na análise do problema. As equações íntegro-diferenciais obtidas para esses modelos matemáticos são solucionadas utilizando-se algoritmos computacionais específicos, adequados à análise. Esses novos modelos matemático-numéricos são analisados por meio de exemplos-teste, de uma estaca metálica sob flexo-compressão, atravessando uma camada espessa de argila mole. Os resultados numéricos obtidos mostram o esperado comportamento de deflexão diferida no tempo.

Um exemplo de aplicação prática, envolvendo um caso real de colapso de um edifício de concreto armado, é explorado para demonstrar a potencialidade desses modelos matemáticos na análise do problema de flambagem reológica de estacas esbeltas em argila mole.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

RHEOLOGICAL BUCKLING OF SLENDER PILES IN SOFT CLAY

Daniela Lobo Francisco

September/ 2003

Advisor: Ronaldo Carvalho Battista

Department: Engenharia Civil

In this work the rheological buckling problem of eccentrically compressed slender piles in a thick layer of soft clay is analysed. Three visco-elastic models developed within the theoretical frameworks of structural mechanics and time-dependent settlement in soils are applied to the focused problem. The obtained integro-differential equations are solved by using specific computational algorithms which are appropriate to deal with this particular problem. These new analytical-numerical models are assessed by means of test-examples of a steel pile embedded in a thick layer of soft clay. The obtained numerical results show the expected creep behaviour for the lateral deflection.

One practical example, related to a real case of collapse of a entire reinforced concrete building, is explored to demonstrate the potential of these analytical-numerical models for the analysis of the focused problem of creep-buckling of slender piles embedded in soft clay.

SUMÁRIO

I.	INTRODUÇÃO	1
II.	CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA EM FOCO.....	3
II.1.	DESCRIÇÃO SUMÁRIA DO PROBLEMA PRÁTICO	3
II.2.	CONSIDERAÇÕES SOBRE O FENÔMENO REOLÓGICO	6
III.	MODELOS REOLÓGICOS.....	8
III.1.	OS ELEMENTOS FUNDAMENTAIS: MOLA E AMORTECEDOR	8
III.2.	MODELOS CONJUGADOS	11
III.2.1.	MODELO DE MAXWELL	12
III.2.2.	MODELO DE KELVIN	15
III.2.3.	MODELO DE BOLTZMANN.....	20
IV.	MODELO VISCO-ELÁSTICO LINEAR – INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA	24
V.	MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR – INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA	42
VI.	ANÁLISE COMPARATIVA DOS MODELOS	59
VII.	EXEMPLO DE APLICAÇÃO PRÁTICO	65
VII.1.	APLICAÇÃO DO MODELO VISCO-ELÁSTICO LINEAR	71
VII.2.	APLICAÇÃO DO MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR	89
VII.3.	ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS	94
VIII.	CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	102
VIII.1.	CONCLUSÃO.....	102
VIII.2.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104
A.	PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DO MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR	106

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO II

II.1.	Modelo tri-dimensional	3
II.2.	Vista em elevação da estrutura e fundação de um edifício típico residencial urbano	4
II.3.	Planta típica de formas dos blocos de fundações e vigas de equilíbrio [1]	5

CAPÍTULO III

III.1.	Mola - Elemento Linear Elástico.....	9
III.2.	Amortecedor - Elemento Linear Viscoso	10
III.3.	Modelo de Maxwell.....	12
III.4.	(a) Resposta de deformações do Modelo de Maxwell. A tensão é mantida constante para $t < t_1$; (b) Resposta de tensões para o Modelo de Maxwell. Ocorre a relaxação de tensões para $t > t_1$	15
III.5.	Modelo de Kelvin - mola e amortecedor em paralelo.....	16
III.6.	(a) Resposta de deformações do Modelo de Kelvin. A deformação é mantida constante em $t_1 < t < t_2$; (b) Resposta de tensões do Modelo de Kelvin. A tensão é removida em $t = t_2$. Não ocorre relaxação entre t_1 e t_2	19
III.7.	Modelo de Boltzmann	20

CAPÍTULO IV

IV.1.	(a) Modelo Visco-Elástico Linear – Interação Solo-Estrutura; (b) Modelo Visco-Elástico Linear equivalente sob ação da força horizontal $F_H(t)$	25
IV.2.	Elementos estudados isoladamente	26

IV.3.	Força horizontal no apoio visco-elástico.....	32
IV.4.	(a) Exemplo de Aplicação – Modelo Visco-Elástico Linear; (b) Corte AA ilustrando a seção transversal da estaca	34
IV.5.	Rigidez elástica linear da estaca	35
IV.6.	Primeiro tipo de carregamento para o Exemplo de Aplicação Hipotético	37
IV.7.	Segundo tipo de carregamento para o Exemplo de Aplicação Hipotético	37
IV.8.	Deflexão elástica linear máxima de uma coluna sob compressão excêntrica .	38
IV.9.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético – Modelo Visco-Elástico Linear.....	40
IV.10.	Curvas adimensionais Carga x Deslocamento	41

CAPÍTULO V

V.1.	(a) Modelo Visco-Elástico Não-Linear – Interação solo-estrutura; (b) Modelo Visco-Elástico Não-Linear Equivalente sob força horizontal.....	43
V.2.	(a) Estaca com carga axial excêntrica na sua posição inicial; (b) Estaca fletida no plano yz; (c) Curva carga x deslocamento	44
V.3.	Modelo Visco-Elástico Não-Linear Equivalente. associação do Modelo de Boltzmann para o solo com uma rigidez elástica não-linear para a estaca	46
V.4.	Coeficiente de rigidez elástico não-linear	47
V.5.	(a) Modelo Visco-Elástico Não-Linear - Exemplo de Aplicação Hipotético; (b) Corte AA.....	54
V.6.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético - Modelo Visco-Elástico Não-Linear	57
V.7.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento	58

CAPÍTULO VI

VI.1.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético - Carregamento 1	60
VI.2.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Carregamento 1	61
VI.3.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético - Carregamento 2	63
VI.4.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Carregamento 2	64

CAPÍTULO VII

VII.1.	Concepção Estrutural Básica [12, 13]	66
--------	--	----

VII.2.	Modelo para Verificação da Flambagem no Conjunto Pilar-Estaca [12].....	69
VII.3.	Modelo Visco-Elástico Linear – Exemplo de Aplicação Prático.....	71
VII.4.	Viga T - Pilotis	72
VII.5.	Rigidez à flexão do conjunto Pilar + Viga T.....	73
VII.6.	Rigidez a flexão lateral do cintamento	74
VII.7.	Modelos Elásticos Analítico e Numérico (MEF).....	78
VII.8.	Carregamento 1 - Contínuo	82
VII.9.	Carregamento 2 - Trechos constantes de carga	83
VII.10.	Carregamento 3 - Trechos Contínuos e Trechos com Carga Constante.....	83
VII.11.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo do Exemplo de Aplicação Prático, para o Modelo Visco-Elástico Linear.....	84
VII.12.	Cálculo do parâmetro η para a Carga Crítica.....	85
VII.13.	Obtenção do parâmetro η para a Carga Crítica [16]	86
VII.14.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Modelo Linear	88
VII.15.	Modelo Visco-Elástico Não-Linear - Exemplo de Aplicação Prático.....	89
VII.16.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo do Exemplo de Aplicação Prático, para o Modelo Visco-Elástico Não-Linear.....	92
VII.17.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Modelo Visco-Elástico Não-Linear.....	93
VII.18.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Prático - Carregamento 1.....	96
VII.19.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento - Carregamento 1	97
VII.20.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Prático -Carregamento 2.....	98
VII.21.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento - Carregamento 2.....	99
VII.22.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Prático - Carregamento 3.....	100
VII.23.	Gráfico adimensional Carga x Deslocamento - Carregamento 3	101
APÊNDICE A		
A.1.	Gráfico Força Axial x Tempo - Carregamento 3.....	110
A.2.	Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo - Carregamento 3	112
A.3.	Gráfico Força Axial x Deslocamento Lateral - Carregamento 3.....	113

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO IV

IV.1.	Exemplo de Aplicação Hipotético – Modelo Visco-Elástico Linear	38
-------	--	----

CAPÍTULO V

V.1.	Exemplo de Aplicação Hipotético – Modelo Visco-Elástico Não-Linear	55
------	--	----

CAPÍTULO VI

VI.1.	Tipo de Carregamento 1 - Deslocamento Lateral no Topo da Estaca para a Carga Máxima	59
VI.2.	Tipo de Carregamento 2 - Deslocamento Lateral no Topo da Estaca para a Carga Máxima	62
VI.3.	Tipo de Carregamento 1 ou 2 - Diferença entre os Deslocamentos Laterais Máximos no Topo da Estaca	63

CAPÍTULO VII

VII.1.	Modelo Visco-Elástico Linear.....	84
VII.2.	Modelo Visco-Elástico Não- Linear.....	91
VII.3.	Deslocamentos Máximos -Tipo de Carregamento 1, 2 ou 3	94
VII.4.	Diferenças - Tipo de Carregamento 1, 2 ou 3	95

LISTA DE SÍMBOLOS

- B_{ef} - largura efetiva do conjunto de estacas;
- C_p - coeficiente de rigidez rotacional;
- E - módulo de elasticidade;
- E_1 - módulo de elasticidade da mola do elemento elástico do modelo de Boltzmann;
- E_2 - módulo de elasticidade da mola do elemento de Kelvin do modelo de Boltzmann;
- E_∞ - módulo de elasticidade final do modelo de Boltzmann;
- F_e - força horizontal elástica linear ou não-linear, atuante na estrutura, diferida no tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- $\dot{F}_e = \frac{dF_e}{dt}$ - taxa da força horizontal elástica atuante na estrutura, diferida no tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- F_H - força horizontal total equivalente à força axial, diferida no tempo, atuante nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- $\dot{F}_H = \frac{dF_H}{dt}$ - taxa da força horizontal total equivalente à força axial, diferida no tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- \bar{F}_H - força horizontal, atuante no elemento de Boltzmann, diferida no tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- $\dot{\bar{F}}_H = \frac{d\bar{F}_H}{dt}$ - taxa da força horizontal, atuante no elemento de Boltzmann, diferida no tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- I - momento de inércia mínimo da seção transversal da estaca;
- K - coeficiente de elasticidade;

- K_{AT} - coeficiente de reação lateral do aterro (em kN/m^2);
- K_e - coeficiente de elasticidade linear da estrutura no modelo visco-elástico linear;
- K_e^{NL} - coeficiente de elasticidade não-linear da estrutura, ao longo do tempo, no modelo visco-elástico não-linear;
- K_E - coeficiente de elasticidade do elemento elástico, do elemento de Boltzmann, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- K_s - coeficiente de elasticidade do elemento de Kelvin, do elemento de Boltzmann, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- K_s^* - relação entre os coeficientes de elasticidade do elemento de Boltzmann, e o coeficiente de elasticidade da estrutura;
- K_x - coeficiente de reação lateral do solo (em kN/m^2);
- L_{ef} - comprimento efetivo do conjunto de estacas;
- P - força axial diferida no tempo;
- P_{crit} - força axial crítica de Euler;
- P_{max} - força axial máxima atuante nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- T_{carreg} - tempo final de carregamento nas duas formas de carregamento, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- c - coeficiente de amortecimento;
- c_s - coeficiente de amortecimento do elemento de Kelvin, do elemento de Boltzmann, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear (em kNs/m);
- c_s^* - relação entre o coeficiente de amortecimento do elemento de Kelvin, do elemento de Boltzmann, e os coeficientes de elasticidade da estrutura e do elemento elástico do elemento de Boltzmann;
- e_0 - excentricidade construtiva da carga axial;
- e_{min} - excentricidade mínima da carga axial, de acordo com a NB-1;
- n_h - coeficiente de reação volumétrica do solo (em kN/m^3);
- t - tempo decorrido;
- t_1 - tempo até o qual há fluência do material;
- t_2 - tempo a partir do qual há recuperação de deformações do material;
- t_{max} - tempo final máximo de cálculo dos três tipos de carregamentos;
- u - deslocamento da mola;
- $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ - taxa de deslocamento da mola ou derivada do deslocamento no tempo;

- ΔF_{Hj} - j-ésimo acréscimo de força horizontal total equivalente à força axial, diferida no tempo, atuante nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- ΔP - acréscimo de força no tipo de carregamento 2;
- ΔP_j - j-ésimo acréscimo de força axial, diferida no tempo, atuante nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- Δt - acréscimo de tempo no tipo de carregamento 2;
- $\Delta \delta_j$ - j-ésimo acréscimo de deslocamento;
- $\Delta \delta_{\max}$ - razão entre a diferença entre deformações máximas e as deformações máximas dos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- Φ - função de forma do conjunto de estacas;
- β - relação entre o módulo de elasticidade e o coeficiente de viscosidade;
- δ - deformação total do modelo ao longo do tempo;
- $\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt}$ - taxa de deformação total, diferida no tempo, nos modelos visco - elásticos linear e não - linear;
- δ_e - deformação elástica linear da estrutura, ao longo do tempo, no modelo visco-elástico linear;
- $\dot{\delta}_e = \frac{d\delta_e}{dt}$ - taxa de deformação elástica linear da estrutura, diferida no tempo, no modelo visco - elástico linear;
- $\delta_{e \max}$ - deformação elástica linear máxima da estrutura, no modelo visco-elástico linear;
- δ_e^{NL} - deformação elástica não-linear da estrutura, ao longo do tempo, no modelo visco-elástico não-linear;
- $\delta_{e \max}^{NL}$ - deformação elástica não-linear máxima da estrutura, no modelo visco-elástico não-linear;
- δ_E - deformação elástica do elemento de Boltzmann, ao longo do tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- $\dot{\delta}_E = \frac{d\delta_E}{dt}$ - taxa de deformação elástica do elemento de Boltzmann, diferida no tempo, nos modelos visco - elásticos linear e não - linear;
- δ_{\max} - deformação total máxima dos modelos visco-elásticos linear e não-linear;
- δ_s - deformação visco-elástica do elemento de Boltzmann, ao longo do tempo, nos modelos visco-elásticos linear e não-linear;

- $\dot{\delta}_s = \frac{d\delta_s}{dt}$ - taxa de deformação visco - elástica do elemento de Boltzmann, diferida no tempo, nos modelos visco - elásticos linear e não - linear;
- ε - deformação do material, ou do elemento, ao longo do tempo;
- ε_0 - deformação instantânea do elemento elástico ou deformação elástica instantânea da mola;
- ε_1 - deformação total do elemento elástico do modelo de Boltzmann;
- ε_2 - deformação total do elemento de Kelvin do modelo de Boltzmann;
- ε_e - deformação do elemento elástico ou deformação da mola;
- ε_t - deformação total do elemento elástico ou deformação total da mola;
- ε_v - deformação do elemento viscoso ou deformação do amortecedor;
- $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ - taxa de deformação do material ou derivada da deformação no tempo;
- $\dot{\varepsilon}_1 = \frac{d\varepsilon_1}{dt}$ - taxa de deformação do elemento elástico do modelo de Boltzmann;
- $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{d\varepsilon_2}{dt}$ - taxa de deformação do elemento de Kelvin do modelo de Boltzmann;
- η - módulo de viscosidade (em kNs/m/m);
- η_2 - módulo de viscosidade do amortecedor do elemento de Kelvin do modelo de Boltzmann;
- σ - tensão solicitante;
- σ_0 - tensão de valor constante;
- σ_e - tensão no elemento elástico ou tensão na mola;
- σ_v - tensão no elemento viscoso ou tensão no amortecedor;
- τ - tempo de integração; e
- τ_r - tempo de relaxação.

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

Este trabalho trata do problema de flambagem reológica de estacas esbeltas, submetidas a uma carga de compressão axial excêntrica, atravessando camadas de solo coesivo saturado, tal como camada espessa de argila mole.

O desenvolvimento de modelos adequados ao tratamento desse problema se tornou necessário, pois não foram encontrados na literatura técnica modelos que descrevessem este tipo de comportamento reológico para estacas.

Na literatura técnica, o problema de flambagem de estacas esbeltas é, em geral, tratado por meio de modelos simplificados que não consideram a interação da estrutura com o solo, no que diz respeito aos efeitos das suas propriedades reológicas.

Neste trabalho são apresentados dois modelos matemáticos especificamente concebidos e desenvolvidos para o estudo do referido problema.

A deformação lateral diferida no tempo é aqui considerada na modelagem do problema de interação solo-estaca por meio do acoplamento de modelos constitutivos visco-elásticos existentes na literatura

O primeiro modelo é um modelo linear, formado por um elemento elástico, representando a rigidez da estaca em flexo-compressão, conectado em paralelo a um elemento de Kelvin representando a deformação visco-elástica do solo.

O segundo modelo, denominado *Modelo Visco-Elástico Não-Linear* tem fundamentos na teoria das estruturas, considerando a não-linearidade geométrica e os efeitos da interação esforço normal-momento fletor. O elemento de Boltzmann é utilizado para caracterizar o comportamento visco-elástico do solo.

Os dois modelos analíticos formulados neste trabalho são experimentados em dois exemplos de aplicação. O primeiro é um exemplo-teste de uma estaca em camada visco-elástica submetida a dois modos de carregamento. O carregamento 1 é aplicado aos modelos com velocidade de carga constante, e o carregamento 2 através de passos de carga axial.

O segundo é um exemplo de aplicação prática, consistindo na aplicação dos modelos analíticos aqui propostos para análise do processo de flambagem reológica de um conjunto pilar-estacas de um edifício residencial que sofreu colapso súbito durante a sua fase final de acabamento.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA EM FOCO

CAPÍTULO II

II.1. DESCRIÇÃO SUMÁRIA DO PROBLEMA PRÁTICO

O problema prático consiste na análise de estacas esbeltas em edifícios com blocos de fundação não cintados. Estas estacas podem sofrer flambagem reológica causando o colapso da edificação.

Considere-se a estrutura em concreto armado de um edifício residencial urbano composto de vários tetos estruturais a partir do nível dos blocos de fundações, conforme ilustrado nos esquemas estruturais das Figuras II.1 e II.2.

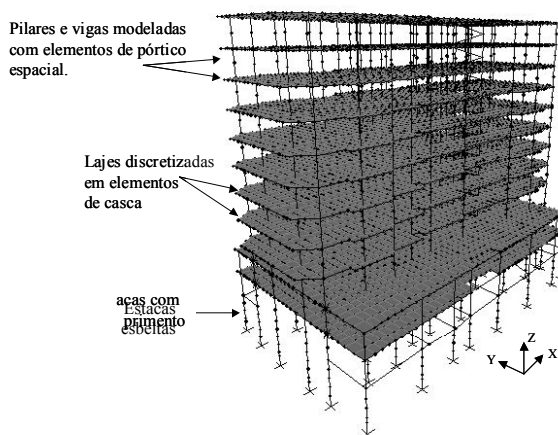


Figura II.1: Modelo tri-dimensional

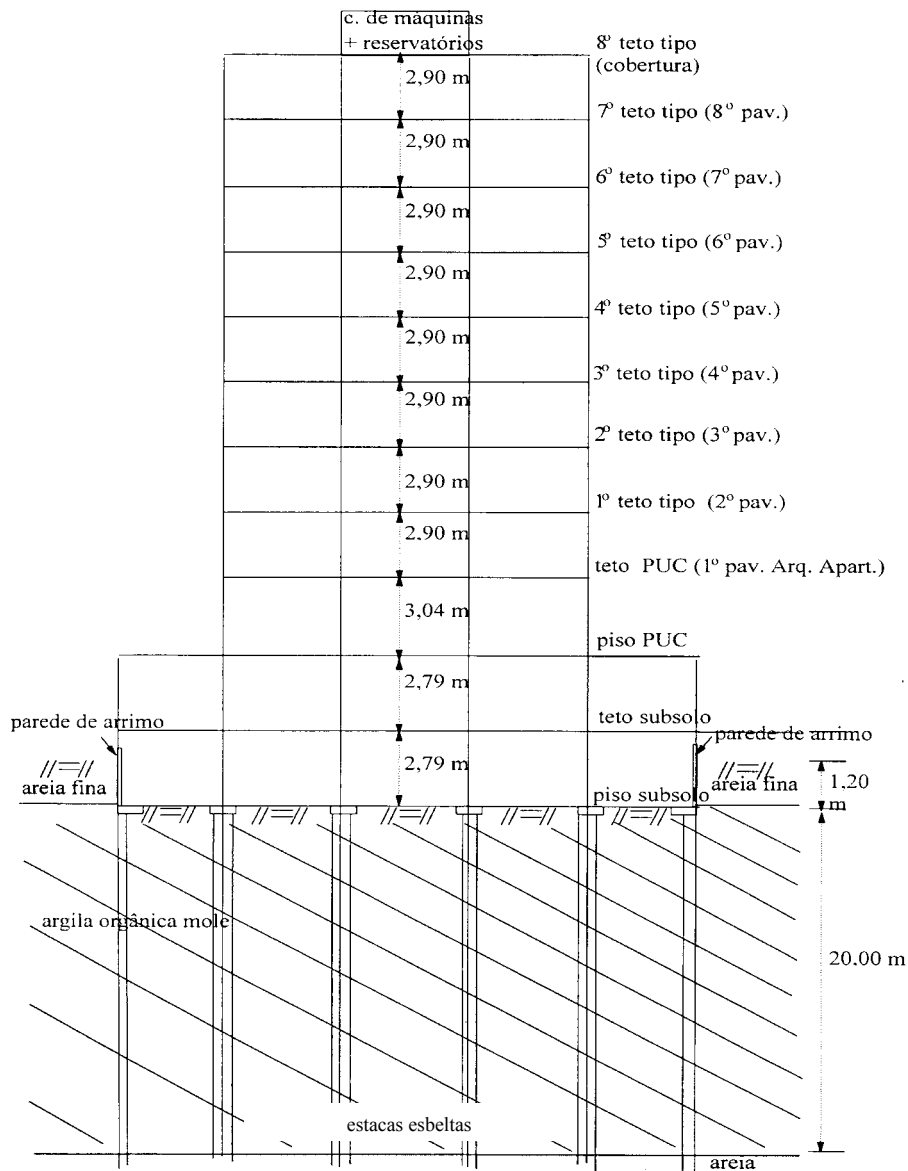


Figura II.2: Vista em elevação da estrutura e fundação de um edifício típico residencial urbano

As fundações do edifício são constituídas de blocos de concreto armado sobre estacas esbeltas, por exemplo metálicas. A planta de forma dos blocos de fundação é mostrada na Figura II.3, onde é delineada com linha tracejada a projeção dos pavimentos elevados. Observa-se que não há estrutura de piso e cintas (lajes e vigas de concreto armado) e, portanto, não há travejamento horizontal dos blocos de fundações mais internos. O terreno de fundação do edifício é constituído por espessa camada superficial de vários metros de argila mole, atravessado pelas estacas com pontas cravadas em camada resistente até alcançar as negas adequadas. Este é o tipo de fundação que pode ser analisada pelos modelos desenvolvidos neste trabalho.

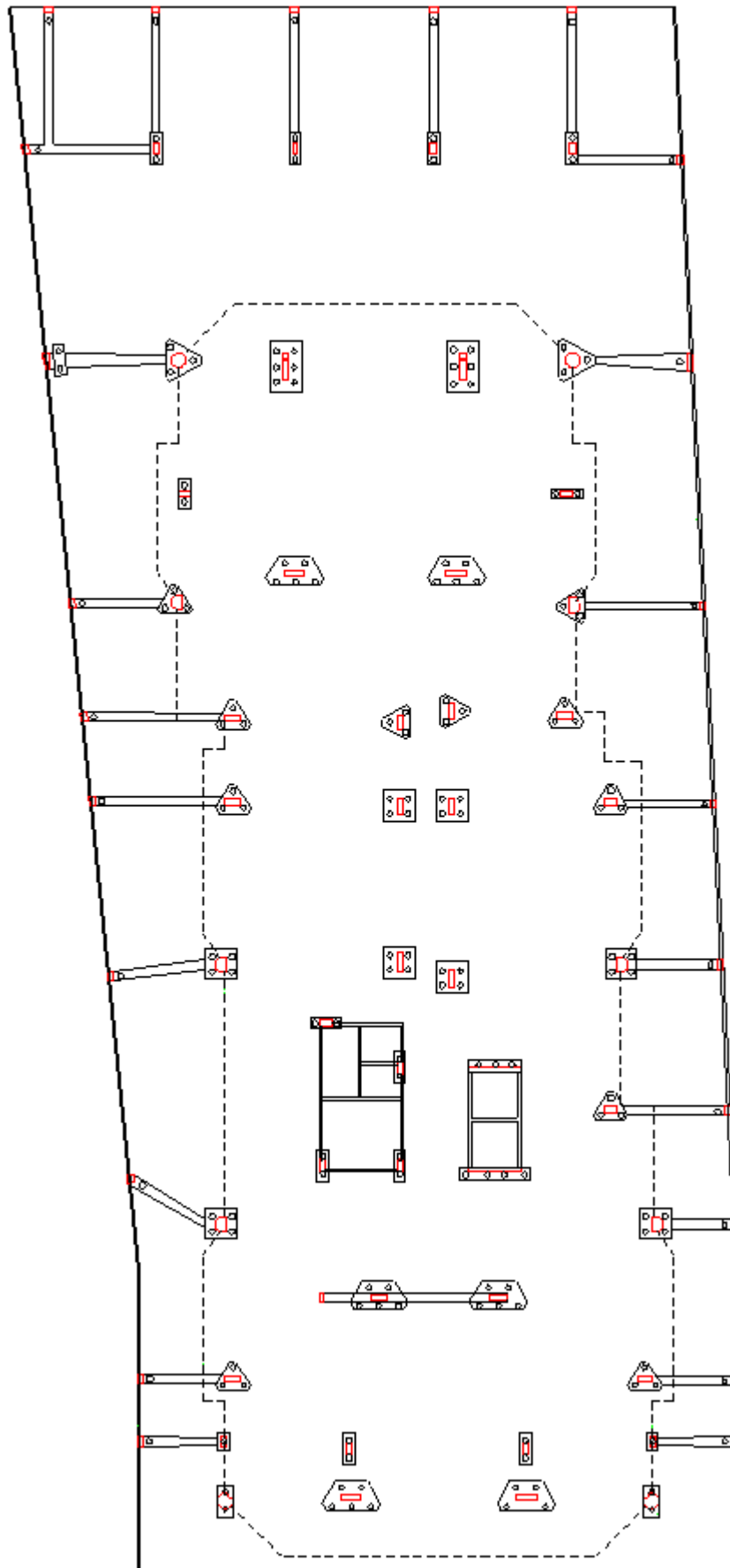


Figura II.3: Planta típica de formas dos blocos de fundações e vigas de equilíbrio [1]

II.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O FENÔMENO REOLÓGICO

A Engenharia Civil e particularmente a de Estruturas alicerçou uma grande parte de seu desenvolvimento na Resistência dos Materiais e na teoria da Elasticidade Linear, na qual os corpos possuem comportamento elástico e se deformam instantaneamente com a aplicação de um carregamento. As deformações são proporcionais às tensões solicitantes, e se anulam por completo quando removidas essas tensões.

A reologia, de maneira complementar, estuda a evolução no tempo das leis tensão-deformação dos corpos e dos materiais que os constituem.

O estudo da reologia interessa à tecnologia de fabricação e, em geral, à ciência dos materiais com comportamento físico descrito por equações constitutivas envolvendo deformações viscosas, juntamente com deformações elásticas e plásticas. Dentre os materiais com características visco-elásticas comumente envolvidos nos problemas de engenharia civil podem-se citar: as argamassas cimentícias, o concreto, as resinas poliméricas e também os solos coesivos tais como as argilas.

No caso das argilas o cálculo elástico pode ser efetuado somente com grandes aproximações. As deformações de um solo argiloso estão muito longe de poderem ser consideradas proporcionais às tensões que evoluem no tempo, não sendo reversíveis.

Na Reologia pode-se destacar a Macro-Reologia, que compreende o estudo dos corpos considerando-os homogêneos e, desta forma, não considerando a estrutura interna do material. Este segmento da Reologia se contrapõe à Micro-Reologia, que estuda a composição estrutural dos materiais dos corpos e os analisa reologicamente [2].

A Macro-Reologia visa o estabelecimento de relações entre forças aplicadas e deformações em um determinado corpo, com suas leis de evolução no tempo. Como exemplo pode-se citar o estudo do comportamento de um corpo prismático submetido a força de tração axial; macro-reologicamente será examinada apenas a relação entre a força aplicada e o seu alongamento e a forma como este evolui ao longo do tempo. Em um estudo de fundações, empenha-se por serem obtidas as relações entre as cargas aplicadas à fundação, em um certo terreno, e as deformações que este e a estrutura sofrem [3].

Se, para comprovar o acerto das leis estabelecidas, ou a sua validade geral, não for feita nenhuma relação entre o comportamento e a estrutura do corpo, está-se no campo puramente macro-reológico.

Denominam-se *equações constitutivas* dos diferentes meios, as relações entre tensões e deformações, que exprimem, sob o ponto de vista macroscópico, ou macro-reológico, o comportamento do meio em estudo. O comportamento reológico de um meio pode ser definido por uma equação fundamental do tipo [4, 5]:

$$R(\sigma, \varepsilon, t) = 0 \quad (\text{II.1})$$

onde σ é a tensão solicitante; ε é a deformação que ocorre no material; e t é o tempo decorrido.

Para melhor visualizar as propriedades reológicas dos materiais reais, e simplificar a sua análise, são utilizados modelos simples encontrados na literatura técnica, denominados *modelos reológicos* ou *modelos viscoelásticos*. A viscoelasticidade, como o nome sugere, é uma generalização de elasticidade e viscosidade.

MODELOS REOLÓGICOS

CAPÍTULO III

Para descrever e interpretar o comportamento diferido no tempo de certos materiais têm sido utilizados vários modelos reológicos. Pode-se entender como um modelo reológico, ou modelo visco-elástico, uma associação de elementos mecânicos simples, que se comportam de forma muito semelhante a materiais viscoelásticos quando submetidos a tensões uniaxiais e cujas equações constitutivas são conhecidas. Estes sistemas possibilitam um tratamento matemático das relações entre esforços atuantes e deformações correspondentes, estabelecendo as equações diferenciais que os regem. Os modelos reológicos são usualmente constituídos por elementos discretos elásticos e viscosos, representados por corpos mecanicamente muito simples, tais como molas e amortecedores [6].

III.1.OS ELEMENTOS FUNDAMENTAIS: MOLA E AMORTECEDOR

Dois elementos básicos de reologia são os elementos de Hooke e de Newton. O primeiro pode ser analisado através de uma equação bastante simples, a Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{III.1})$$

Ela significa que as tensões são diretamente proporcionais às deformações, variando linearmente, onde E é o módulo de elasticidade de valor constante.

A mola helicoidal é o modelo mecânico adequado para o elemento de Hooke, pois é um elemento elástico linear ideal [7]. Quando uma força de tração P é aplicada o comprimento da mola aumenta de uma certa quantia u, proporcional à carga P, e quando esta força é removida a mola retorna ao seu comprimento original. O gráfico na Figura III.1 ilustra o comportamento linear deste modelo, onde K é o coeficiente de elasticidade ou de rigidez axial da mola, com dimensão força por comprimento (N/m):

$$P = Ku \quad (III.2)$$

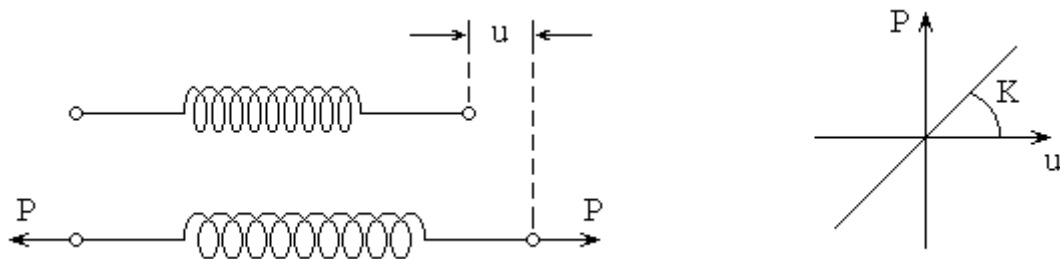


Figura III.1: Mola - Elemento Linear Elástico

O modelo representativo do elemento de Newton é o amortecedor viscoso-linear, formado por um cilindro contendo um líquido viscoso e com um êmbolo perfurado, de forma a impedir que qualquer ar entre em seu interior. Este é o elemento ideal viscoso-linear, referindo-se aos corpos perfeitamente viscosos. O líquido de Newton é uma evolução do líquido de Pascal, líquidos que não são susceptíveis de mobilizar tensões tangenciais, sejam quais forem as deformações impostas (ausência de deformações distorcionais) e também são incompressíveis (não sofrem deformações volumétricas).

A relação linear tensão-deformação para o fluido do amortecedor é:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (III.3)$$

onde o coeficiente de viscosidade η , dado em $N \times s/m^2$ [força vezes tempo por comprimento quadrado], é a viscosidade do fluido, de valor constante, $(d\varepsilon/dt)$ é denominada taxa de deformação e σ é a tensão aplicada.

Em um material viscoso, representado por um amortecedor (Figura III.2), a tensão aplicada ao modelo é proporcional à taxa de deformação, ou a força aplicada é diretamente proporcional à taxa de deslocamento (ou velocidade), variando linearmente de acordo com o coeficiente de amortecimento c dado em $N \times s / m$ [força vezes tempo por comprimento]:

$$P = c \frac{du}{dt} = c \dot{u} \quad (III.4)$$

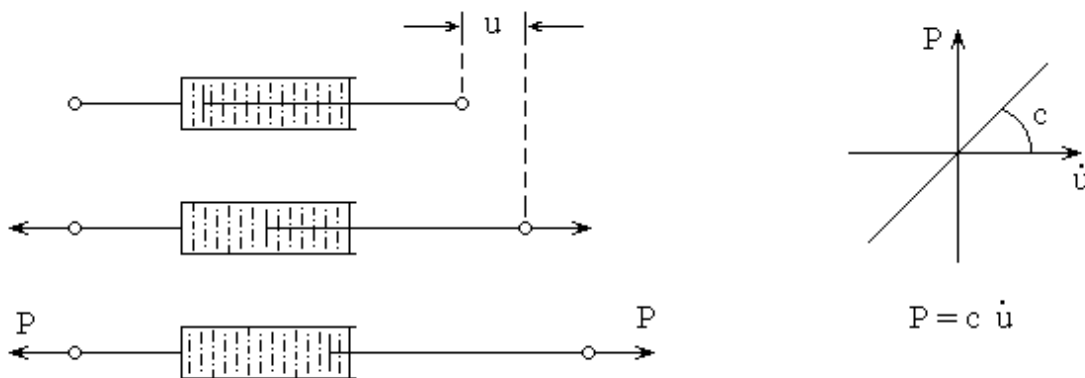


Figura III.2: Amortecedor - Elemento Linear Viscoso

A mola como modelo do sólido de Hooke, ou o amortecedor como modelo do líquido de Newton, isoladamente não acrescentam muito em facilidade de compreensão do comportamento dos materiais. As relações tensão-deformação dos materiais, em geral, são bastante complexas, não se enquadrando nesses modelos elementares isolados.

Para uma formulação matemática razoável e simples do comportamento destes materiais, e também de determinados problemas e fenômenos, deve-se associar os modelos fundamentais, resultando em *modelos compostos ou conjugados*. Esta associação é feita com os modelos fundamentais arranjados em série ou em paralelo. Na associação em série são adicionadas deformações e na segunda associação são adicionadas tensões.

Os modelos compostos mais típicos são os de Saint-Venant, Maxwell e Kelvin (ou Voigt), nomes dos cientistas que os investigaram. O primeiro modelo se refere aos meios elasto-plásticos, e os dois outros aos meios visco-elásticos.

III.2. MODELOS CONJUGADOS

Alguns corpos, quando submetidos a um carregamento, de valor constante e aplicado instantaneamente, apresentam uma deformação instantânea, proporcional à carga, e uma deformação subsequente, função do tempo, e com velocidade constante, proporcional à tensão distorcional.

A deformação instantânea que o corpo sofre sugere que a modelagem do material deve possuir elementos com características de Hooke. Contudo, a deformação lenta, função do tempo, mostra que a estrutura interna do material deve ser modelada também com elementos com características de líquido de Newton. Uma associação criteriosa dos elementos hookeanos e newtonianos poderá descrever o comportamento do material deste corpo.

Quando um material visco-elástico fica submetido a um estado de deformações constante e ocorre uma lenta redução das tensões com o tempo, o material sofre o fenômeno denominado de *relaxação*. Um segundo comportamento observado é a *fluência*, que pode ser definida como o aumento gradual da deformação com o tempo sob carga ou tensão aplicada mantida constante.

Em materiais visco-elásticos a deformação causada por tensões é então dependente do tempo e os fenômenos reológicos podem por consequência influir na resistência e na ductilidade do corpo, que são funções do tempo e da taxa de deformação.

Diversos modelos conjugados podem ser utilizados como uma forma de descrever esses materiais.

A tensão aplicada ao modelo é função da deformação e do tempo, podendo ser expressa através de uma equação que correlacione estas variáveis:

$$\sigma = f(\varepsilon, t) \quad \text{(III.5)}$$

O comportamento visco-elástico pode ser também simulado de uma maneira mais refinada por meio de uma série de modelos conjugados, os quais são compostos pelos elementos fundamentais: a mola hookeana, representando a elasticidade ideal, cuja deformação é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{III.6-a})$$

e o amortecedor visco-elástico, representando a viscosidade newtoniana, com taxa de deformação dada por:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{III.6-b})$$

III.2.1. MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell para visco-elasticidade de um material (ou de um corpo) consiste de uma associação em série de uma mola hookeana e de um amortecedor newtoniano (Figura III.3). A aplicação da tensão σ (originada pela força P) implicará em uma deformação instantânea na mola ε ou em um deslocamento instantâneo, que será proporcional à tensão (ou à carga P). Porém o amortecedor também estará sofrendo a influência desta mesma tensão (ou força P), também se deformando. A velocidade desta última deformação será proporcional à tensão (ou à carga P), com um coeficiente de proporcionalidade igual à viscosidade η do líquido que está contido no amortecedor (ou ao coeficiente de amortecimento c).

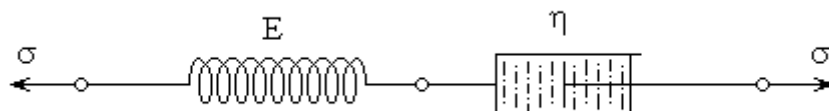


Figura III.3: Modelo de Maxwell

Se o estado de deformações for mantido invariável (mantendo, na Figura III.3, os extremos direito e esquerdo imobilizados), após ser aplicada uma tensão de tração, a mola começará a estender-se, vencendo a resistência viscosa do amortecedor. É quando ocorre a relaxação.

Qualitativamente o modelo de Maxwell é adequado para descrever o comportamento de corpos que tenham essa característica. Esta categoria de corpos recebeu da Reologia a designação de líquidos de Maxwell. Do ponto de vista quantitativo seu tratamento também é adequado e consideravelmente simples.

Este modelo obedece à relação de tensões:

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v \quad (\text{III.7-a})$$

$$\sigma = E\varepsilon_e = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad (\text{III.7-b})$$

Como os elementos estão conectados em série:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad (\text{III.8})$$

Diferenciando esta equação, e considerando a primeira expressão, é obtida a relação entre tensões e deformações:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad (\text{III.9-a})$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (\text{III.9-b})$$

Esta expressão é a equação reológica do líquido de Maxwell, onde ε é a deformação total do modelo, ε_e é a deformação elástica instantânea sofrida pela mola e ε_v é a deformação viscosa no amortecedor, que varia a uma taxa η constante; σ_e é a tensão na mola, σ_v a tensão atuante no amortecedor e σ é a tensão aplicada ao modelo.

Considere o comportamento do modelo em um primeiro estágio, quando submetido a uma tensão constante, $\sigma_{\text{constante}} = \sigma_0$, em $t = 0$. A variação de tensões será nula:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (\text{III.10})$$

A deformação elástica, instantânea, sofrida pela mola é

$$\varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{E} \quad (\text{III.11})$$

Uma deformação contínua, de taxa constante, ocorrerá no amortecedor, de acordo com a equação

$$\frac{d\varepsilon_v}{dt} = \frac{\sigma_o}{\eta} \quad (\text{III.12})$$

A deformação total desenvolvida no modelo, após um certo tempo t , é

$$\varepsilon = \sigma_o \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (\text{III.13})$$

o que significa que o líquido de Maxwell, sob tensão constante, se deformará a velocidade constante e linearmente proporcional à tensão. Este comportamento é mostrado graficamente na Figura III.4 pelos trechos de curvas para $0 < t < t_1$.

Em um segundo estágio, iniciado em $t = t_1$, é fixado o estado de deformação, ($\varepsilon_{\text{constante}} = \varepsilon_1$) e, portanto, a taxa de deformação no modelo é nula

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (\text{III.14})$$

e a equação reológica do líquido de Maxwell se torna uma equação diferencial homogênea em termos de tensões:

$$\left(\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \right) + \left(\frac{1}{\eta} \sigma \right) = 0 \quad (\text{III.15})$$

que integrada, com σ_o sendo o valor da tensão para o instante em que se inicia o fenômeno da relaxação ($t = t_1$), conduz a:

$$\sigma = \sigma_o e^{\left(-\frac{E}{\eta} t \right)} \quad (\text{III.16-a})$$

$$\sigma = \sigma_o e^{\left(-\frac{t}{\tau_r} \right)} \quad (\text{III.16-b})$$

o que mostra a variação exponencial do processo de relaxação de tensões, e onde (η/E) tem dimensão associada ao tempo, sendo a grandeza $\tau_r = \eta/E$ designada por *tempo de relaxação*.

No primeiro estágio a deformação aumenta de valor sob tensão constante. Esta é a fase de fluência (Figura III.4-a). No segundo estágio as tensões decrescem sob deformação constante, isto é, diz-se que o material *relaxa*. Esta é a denominada fase de relaxação (Figura III.4-b) [8].

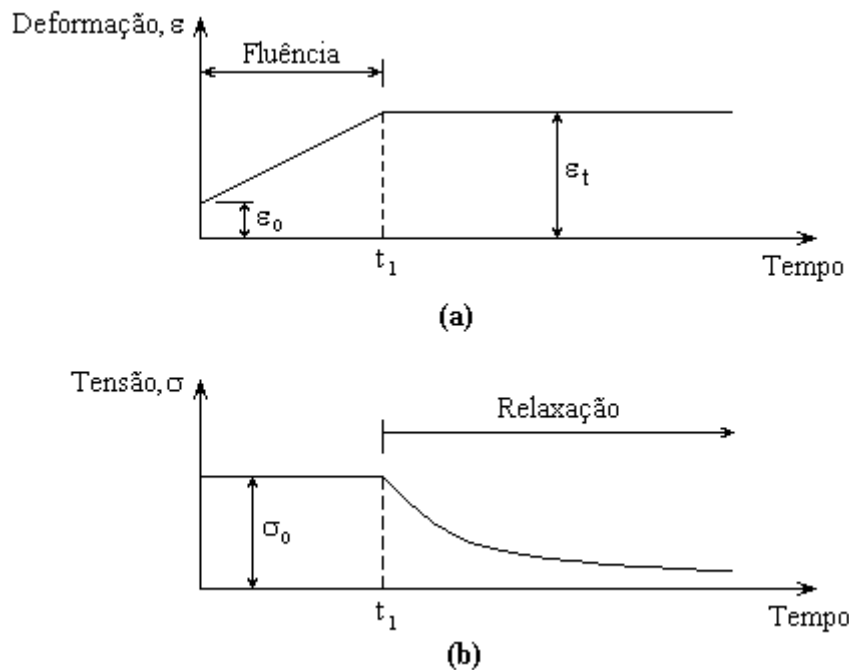


Figura III.4: (a) Resposta de deformações do Modelo de Maxwell. A tensão é mantida constante para $t < t_1$;
 (b) Resposta de tensões para o Modelo de Maxwell. Ocorre a relaxação de tensões para $t > t_1$.

III.2.2. MODELO DE KELVIN

Outra categoria de corpos reais possui um comportamento caracterizado pelos seguintes aspectos, quando sujeitos a um carregamento constante, aplicado de forma instantânea:

- Sua deformação instantânea é praticamente nula; e

- A deformação ocorrida ao longo do tempo tende para uma assíntota a um valor constante. Este valor constante é proporcional à tensão aplicada.

Se a carga for retirada, esses corpos não retornam imediatamente à sua forma original, ou seja, não há recuperação instantânea de deformações. Essa recuperação se processa ao longo do tempo, até ocorrer por completo. Este fenômeno é designado como *elasticidade retardada*, isto é, a recuperação total das deformações quando são anuladas as tensões.

Considerando que nestes corpos as deformações são função do tempo, tendendo a um valor constante, e que eles exibem a elasticidade retardada, pode se sugerir que estes possuam elementos com um comportamento de Hooke.

Mas o fato de as deformações, quer sob carga, quer por anulação desta, se processarem com retardamento, indica por outro lado que também devem existir nestes corpos elementos com comportamento newtoniano.

Parece portanto que se está perante de um outro caso em que associação conveniente de elementos de Hooke e de Newton pode constituir um modelo adequado para descrever o comportamento desses corpos. Sendo evidente que esta associação deve ser diferente daquela utilizada para descrever os líquidos de Maxwell, será tomada a associação de um elemento de Hooke com um elemento de Newton, não mais em série, mas em paralelo (Figura III.5).

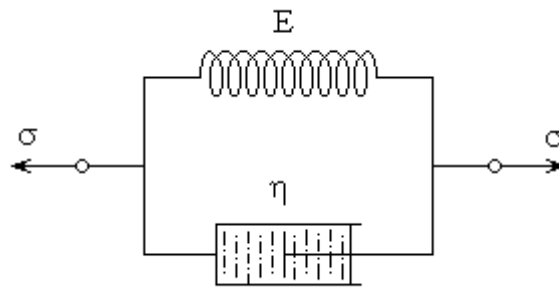


Figura III.5: Modelo de Kelvin - mola e amortecedor em paralelo.

Se a compressibilidade do líquido que preenche o amortecedor for considerada muito pequena, a deformação imediata do corpo será praticamente nula, quando este for submetido a uma força aplicada de forma instantânea. Como a compressibilidade do amortecedor é muito pequena, comparada à deformabilidade da mola, toda a solitação ficará sobre o líquido que está contido no amortecedor. O êmbolo do amortecedor começará a se deslocar a uma velocidade função da tensão solitante no amortecedor e

da viscosidade do líquido. A mola também se deformará, em conjunto com o amortecedor, ficando com uma solicitação cada vez maior, pois a força na mola é diretamente proporcional à deformação nesta.

Como a carga total é constante, o aumento de tensão na mola significa que ocorre uma transferência gradual de tensão do amortecedor para a mola. Portanto, a tensão no líquido que preenche o amortecedor irá diminuindo, assim como a sua velocidade de deformação. No fim do processo, a deformação cessará, por se ter anulado a tensão no amortecedor, estando a tensão totalmente suportada pela mola, cuja deformação será proporcional à solicitação total.

Se a força exterior for retirada subitamente a mola tenderá a distender-se, mas no instante inicial isso não poderá ocorrer, devido à resistência viscosa que o líquido do amortecedor oferecerá ao deslocamento do êmbolo. O movimento de êmbolo será gradual, assim como a distensão da mola. Quanto maior a distensão desta, menor a resistência oferecida pelo amortecedor. Ou seja, a tensão no amortecedor começa a diminuir gradualmente, assim como a velocidade de deformação. No limite, a recuperação da deformação do corpo será total, com a mola totalmente distendida. Terá se processado a *elasticidade retardada*.

O modelo de Kelvin é adequado para descrever o comportamento dos corpos designados por *sólidos de Kelvin*.

O tratamento quantitativo deste modelo também é de fácil entendimento. Mantendo as mesmas convenções para σ , σ_e , σ_v e para ε , ε_e , ε_v , considere a resposta deste modelo quando submetido a uma tensão σ .

Como os dois elementos estão em paralelo, haverá uma distribuição de tensões entre o amortecedor e a mola, sendo a soma da tensão na mola e da tensão no amortecedor a tensão total.

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \quad (\text{III.17})$$

Atendendo às características hookeana e newtoniana, respectivamente, da mola e do amortecedor, pode-se escrever:

$$\sigma_e = E\varepsilon_e \quad (\text{III.18-a})$$

$$\sigma_v = \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad (\text{III.18-b})$$

Substituindo na equação de tensões:

$$\sigma = E\varepsilon_e + \eta \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad (\text{III.19})$$

As extensões da mola e do amortecedor serão sempre iguais entre si e representam a extensão do corpo.

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad (\text{III.20})$$

Considerando esta igualdade de deformações obtém-se a equação reológica do sólido de Kelvin:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{III.21})$$

Observe-se o caso particular de um meio viscoso em repouso, em que a taxa de deformação é nula (ε é constante), este se torna um meio elástico, onde as tensões são linearmente proporcionais às deformações.

Se o meio estiver sujeito a uma deformação constante, ($\sigma = \sigma_0$), para ($t > 0$), a equação anterior, integrada, conduz a:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - e^{\left(-\frac{E}{\eta} t \right)} \right] \quad (\text{III.22-a})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_t \left[1 - e^{\left(-\frac{E}{\eta} t \right)} \right] \quad (\text{III.22-b})$$

A qual exprime a lei deformação-tempo, indicada na Figura III.6 para ($t < t_2$), isto é, quando uma tensão constante σ_0 é aplicada ao modelo, a deformação cresce exponencialmente de zero ao valor:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_0}{E} \quad (\text{III.23})$$

Essa deformação, que se produziria instantaneamente na ausência do elemento viscoso, agora é alcançada assintoticamente.

Para o caso em que, quando for atingida a deformação total ε_t , a tensão σ_0 é suprimida ($\sigma = 0$), ou seja, para o caso em que é esperada a ocorrência da *elasticidade retardada*, tem-se:

$$0 = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{III.24})$$

a qual integrada conduz a:

$$\varepsilon = \varepsilon_t \times e^{\left(\frac{-E}{\eta}t\right)} \quad (\text{III.25})$$

por onde se verifica o andamento no tempo da curva de elasticidade retardada, ou seja, a deformação diminui assintoticamente até anular-se, com maior ou menor lentidão, em função dos valores relativos de E e η . Quando $t \rightarrow \infty$, resulta que $\varepsilon \rightarrow 0$; sendo ε_t o valor da deformação quando se inicia o processo, isto é, quando é retirada a solitação externa σ_0 . Esta recuperação de deformações exponencial pode ser visualizada na Figura III.6, para $t > t_2$.

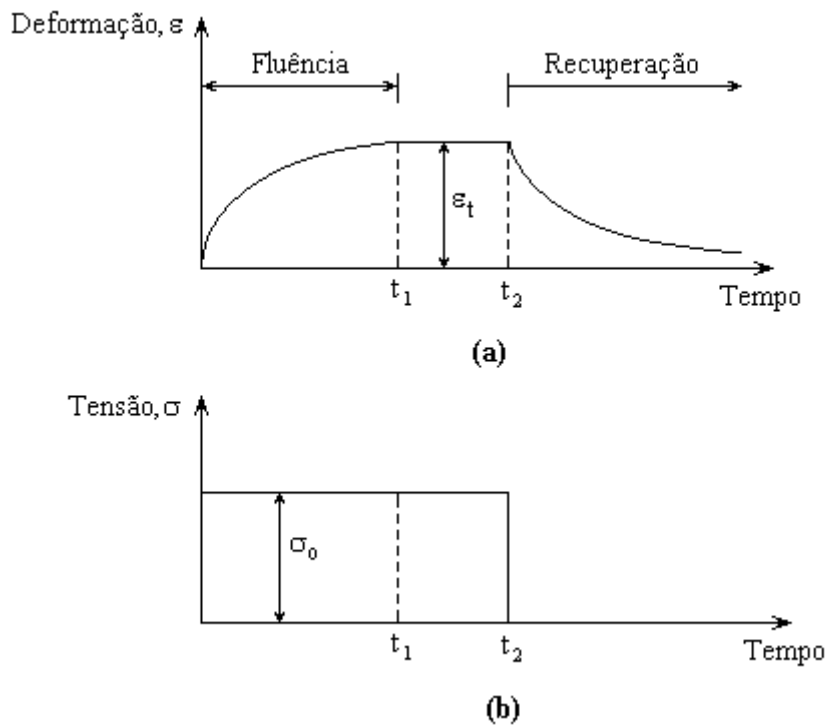


Figura III.6: (a) Resposta de deformações do Modelo de Kelvin. A deformação é mantida constante em $t_1 < t < t_2$;
(b) Resposta de tensões do Modelo de Kelvin. A tensão é removida em $t=t_2$. Não ocorre relaxação entre t_1 e t_2 .

Um comportamento semelhante ao modelo de Kelvin pode ser observado em materiais betuminosos. Ainda nos solos argilosos é desse tipo a variação encontrada experimentalmente em função do tempo. Neste tipo de solo, argiloso, a deformação não é recuperada integralmente.

A diferença fundamental entre os modelos de Maxwell e Kelvin é que, no primeiro, o elemento viscoso representa uma deformação que é somada à deformação elástica. No Modelo de Kelvin, o amortecedor representa uma resistência amortecedora ao estabelecimento do equilíbrio elástico.

O modelo de Maxwell proporcionou resultados realísticos para o fenômeno da relaxação, porém, para demonstrar a fluência, não se mostrou adequado. O Modelo de Kelvin fornece aproximações consideráveis para o fenômeno da fluência, mas não representa a relaxação. Outros modelos, conjugando Kelvin e Maxwell, objetivando representar os dois fenômenos, foram idealizados para descrever os complexos comportamentos dos materiais reais.

III.2.3. MODELO DE BOLTZMANN

O Modelo de Boltzmann (Figura III.7) busca descrever as deformações devidas à viscosidade, juntamente com deformações elásticas e plásticas. Este é um modelo dito visco-elástico, por apresentar deformações elásticas e viscosas.

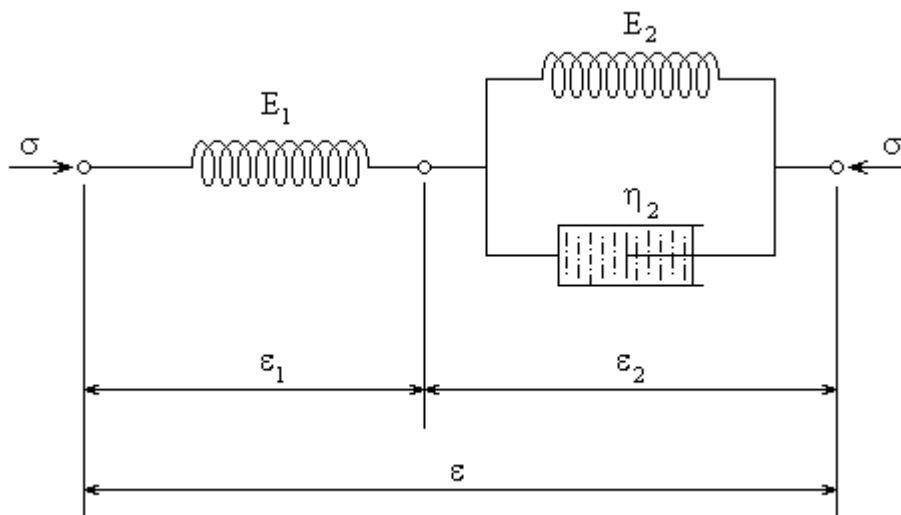


Figura III.7: Modelo de Boltzmann

Este é um modelo importante e essencialmente simples e representa as propriedades reológicas características de diversos materiais, no que diz respeito a deformações variáveis com o tempo. Assume ele um papel básico quer para o entendimento da influência dessas propriedades, quer para o seu equacionamento mais complexo.

Podem-se estabelecer as notações: σ é a tensão total no modelo, ε é a deformação total do modelo, ε_1 é a deformação na primeira mola, ε_2 é a deformação do elemento de Kelvin, E_1 é o módulo de elasticidade da primeira mola, E_2 e η_2 são o módulo de elasticidade e o coeficiente de viscosidade do elemento de Kelvin, respectivamente.

A tensão na primeira mola é:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 \quad (\text{III.26})$$

e a deformação nesta mola,

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1} \quad (\text{III.27})$$

derivando em relação ao tempo,

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \quad (\text{III.28})$$

A tensão no elemento de Kelvin é dada por:

$$\sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta_2 \dot{\varepsilon}_2 \quad (\text{III.29})$$

e a deformação total é:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{III.30})$$

A deformação no elemento de Kelvin e sua derivada são expressos por:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 \quad (\text{III.31-a})$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \quad (\text{III.31-b})$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \quad (\text{III.31-c})$$

Levando os valores de ε_2 e $(d\varepsilon_2/dt)$ à equação para a tensão aplicada ao elemento de Kelvin, pode-se escrever:

$$\sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta_2 \dot{\varepsilon}_2 \quad (\text{III.32-a})$$

e substituindo-se as expressões de ε_2 e $(d\varepsilon_2/dt)$,

$$\sigma = E_2 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) + \eta_2 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right) \quad (\text{III.32-b})$$

e multiplicando-se ambos os membros desta equação por E_1 , chega-se à equação constitutiva do modelo:

$$\eta_2 \dot{\sigma} + (E_1 + E_2) \sigma = \eta_2 E_1 \dot{\varepsilon} + E_1 E_2 \varepsilon \quad (\text{III.33})$$

A integração desta equação permite determinar as deformações em intervalos de tempo distintos, para uma certa tensão aplicada cronologicamente, e reciprocamente, para deformações cronológicas dadas, permite obter o correspondente histórico de tensões.

Existem duas situações particulares que são extremamente importantes: a fluência e a relaxação.

A fluência é o fenômeno da variação das deformações com o tempo, sob tensão aplicada. Tomando o caso particular de tensão constante, $\sigma = \sigma_0$, obtém-se:

$$(E_1 + E_2) \sigma_0 = \eta_2 E_1 \dot{\varepsilon} + E_1 E_2 \varepsilon \quad (\text{III.34})$$

cuja integração, com condição inicial $\varepsilon(0) = \sigma_0/E_1$, leva a:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_2} e^{\beta t} \right) \quad (\text{III.35})$$

onde é introduzida a notação:

$$\beta = \frac{E_2}{\eta_2} \quad (\text{III.36})$$

A função para a resposta $\varepsilon(t)$ mostra que, em cada instante, a deformação é proporcional a σ_0 , variando desde (σ_0/E_1) para $t = 0$, até (σ_0/E_∞) para $t \rightarrow \infty$, sendo E_∞ dado por:

$$E_{\infty} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \quad (\text{III.37})$$

Tudo se passa como se houvesse uma queda do módulo de elasticidade com o tempo, de E_1 para E_{∞} . Esta queda faz com que a deformação cresça sob tensão constante.

Denomina-se relaxação o fenômeno da variação das tensões com o tempo, sob deformação aplicada.

Fazendo-se na equação III.33, $\varepsilon = \varepsilon_0$, constante, obtém-se da equação constitutiva do modelo:

$$\eta_2 \dot{\sigma} + (E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \varepsilon_0 \quad (\text{III.38})$$

Cuja integração, com a condição inicial $\sigma(0) = E_1 \varepsilon_0$ leva a:

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{E_1}{E_2} e^{-\left(\frac{E_1 + E_2}{\eta_2}\right)t} \right] \quad (\text{III.39})$$

Esta função resposta $\sigma(t)$ mostra que, em cada instante, a tensão é proporcional a ε_0 , variando desde $(E_1 \times \varepsilon_0)$ para $t = 0$, até $(E_{\infty} \times \varepsilon_0)$ para $t \rightarrow \infty$.

Tudo se passa como se houvesse uma queda do módulo de elasticidade com o tempo, também de E_1 para E_{∞} . Esta queda faz com que a tensão caia sob deformação constante.

Os resultados aqui obtidos podem ser generalizados para qualquer material visco-elástico linear, com equação constitutiva linear, em estados de tração ou compressão simples.

O Modelo de Boltzmann é o modelo visco-elástico que permite obter analítica ou numericamente uma solução para uma equação constitutiva que considera os fenômenos de fluência e relaxação. Estes fenômenos podem ser analisados tanto em conjunto quanto isoladamente. Este modelo será utilizado para o cálculo de deslocamentos lineares visco-elásticos no problema linear de interação solo-estaca sob carga axial excêntrica.

MODELO VISCO-ELÁSTICO LINEAR – INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

CAPÍTULO IV

Apresenta-se neste capítulo um modelo matemático-analítico para tratar o problema reológico de interação entre o solo e uma estaca esbelta se deformando lateralmente sob a ação de uma força de compressão excêntrica $P(t)$, aplicada em seu topo. A resultante da reação lateral do solo, ao longo do fuste da estaca sob flexo-compressão, é representada por uma força horizontal $F_H(t)$ que depende das propriedades reológicas do solo, sendo estas últimas representadas por um modelo visco-elástico linear, tal como ilustrado na Figura IV.1.

O comportamento de consolidação do solo pode ser descrito com o auxílio de diversos modelos compostos que consideram deformações devidas à viscosidade, juntamente com deformações elásticas e plásticas, dependentes do tempo e das tensões aplicadas. Estes modelos também podem ser utilizados para descrever o comportamento reológico de materiais estruturais, tal como o concreto, mas serão aqui utilizados para descrever apenas o comportamento reológico do solo do tipo argiloso.

O Modelo Linear de interação solo-estrutura indicado na Figura IV.1 é baseado no Modelo visco-elástico de Boltzmann e não leva em conta a interação não-linear força axial x momento fletor, i.é a não-linearidade geométrica. Neste modelo, as deformações elásticas imediatas do solo ao longo do fuste da estaca são representadas pela deformação elástico-linear da primeira mola com coeficiente de rigidez equivalente K_E .

A deformação do conjunto formado pelo amortecedor em paralelo com a segunda mola (Elemento de Kelvin), representa a fase de consolidação secundária do

solo, correspondente à deformação diferida no tempo. O elemento de Kelvin representa a reação à deformação lateral da estaca oferecida ao longo do tempo pelo solo, cujos parâmetros (K_s e c_s) dependem das características deste. A carga axial excêntrica $P(t)$ aplicada é variável no tempo, assim como a conseqüente força horizontal resultante $F_H(t)$. A rigidez lateral oferecida pela estaca é representada pelo coeficiente de rigidez elástico linear K_e para um deslocamento horizontal unitário imposto no topo da estaca, com comprimento efetivo, L_{ef} , de engastamento no solo.

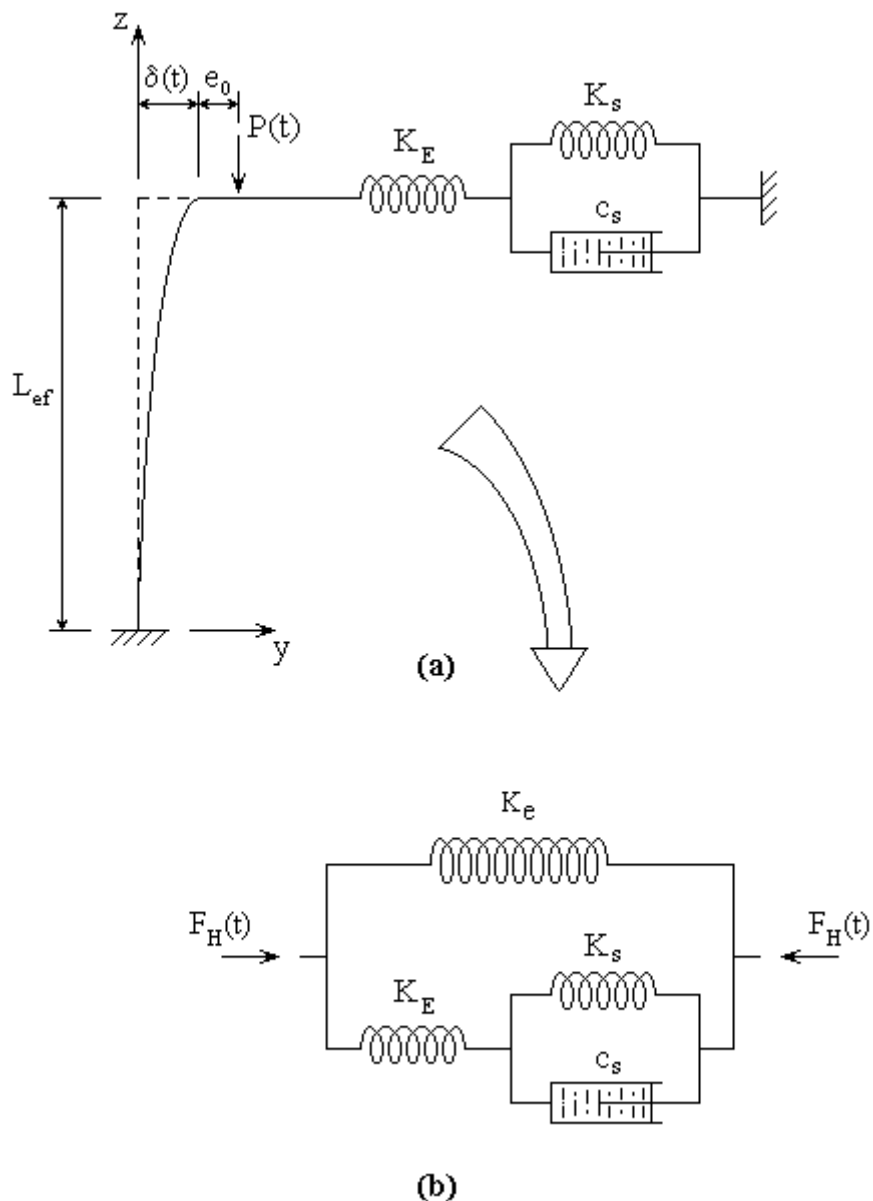


Figura IV.1: (a) Modelo Visco-Elástico Linear – Interação Solo-Estrutura;
(b) Modelo Visco-Elástico Linear equivalente sob ação da força horizontal $F_H(t)$

O deslocamento lateral total $\delta(t)$ no topo da estaca será a soma do deslocamento elástico linear da primeira mola $\delta_E(t)$ com o deslocamento visco-elástico $\delta_s(t)$ do elemento de Kelvin associados, respectivamente, aos deslocamentos imediatos e diferidos no tempo do solo.

A deformação do solo pode ser distinguida em duas parcelas: uma recuperável e outra não-recuperável. A parcela recuperável é imputável à deformação de elementos hookeanos, proporcional à tensão efetiva. A parcela não-recuperável é proporcional a uma potência da tensão efetiva, dependente do tempo, atribuída ao amortecedor newtoniano em paralelo com a segunda mola.

A equação constitutiva do modelo é obtida isolando-se os elementos em série e em paralelo, conforme ilustrado na Figura IV.2:

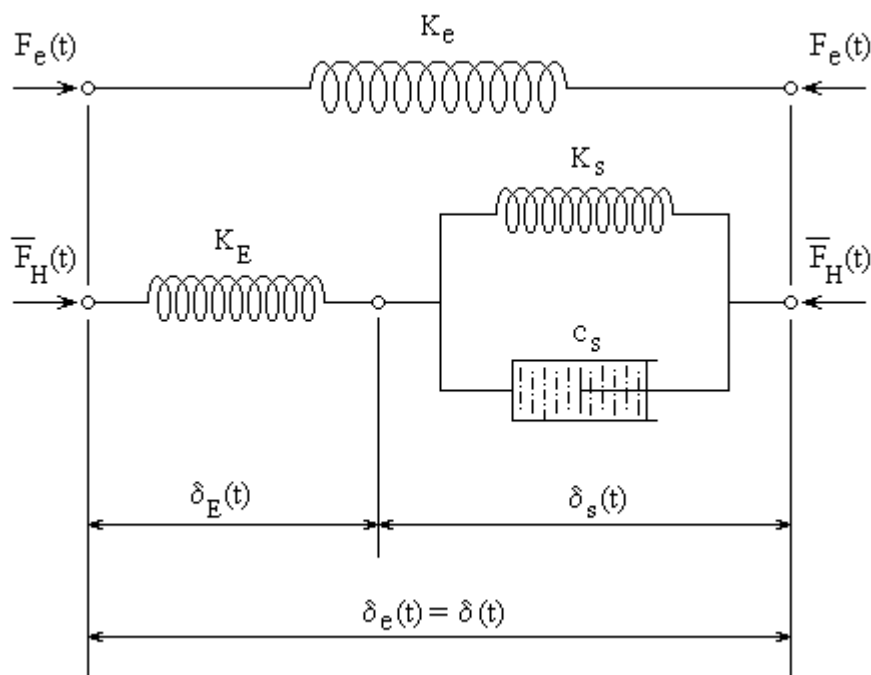


Figura IV.2: Elementos estudados isoladamente

onde

$$F_H(t) = F_e(t) + \bar{F}_H(t) \quad (IV.1-a)$$

e

$$\delta(t) = \delta_e(t) = \delta_E(t) + \delta_s(t) \quad (IV.1-b)$$

Pode-se escrever a Lei de Hooke para os elementos elásticos submetidos a uma força variável com o tempo, a partir da qual são obtidas as equações para os respectivos deslocamentos:

$$F_e(t) = K_e \delta_e(t) \quad (\text{IV.2-a})$$

$$\delta_e(t) = \frac{F_e(t)}{K_e} \quad (\text{IV.2-b})$$

$$\bar{F}_H(t) = K_E \delta_E(t) \quad (\text{IV.2-c})$$

$$\delta_E(t) = \frac{\bar{F}_H(t)}{K_E} \quad (\text{IV.2-d})$$

com derivadas:

$$\dot{\delta}_e(t) = \frac{\dot{F}_e(t)}{K_e} \quad (\text{IV.3-a})$$

$$\dot{\delta}_E(t) = \frac{\dot{\bar{F}}_H(t)}{K_E} \quad (\text{IV.3-b})$$

O deslocamento no elemento de Kelvin, que representa o deslocamento diferido no tempo é:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \delta_E(t) \quad (\text{IV.4-a})$$

substituindo a equação de $\delta_E(t)$:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{\bar{F}_H(t)}{K_E} \quad (\text{IV.4-b})$$

introduzindo a expressão da força horizontal atuante no elemento de Boltzmann:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{[F_H(t) - F_e(t)]}{K_E} \quad (\text{IV.4-c})$$

substituindo a expressão da força linear elástica atuante na estrutura $F_e(t)$:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{[F_H(t) - K_e \delta_e(t)]}{K_E} \quad (\text{IV.4-d})$$

considerando que $\delta(t) = \delta_e(t)$:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{[F_H(t) - K_e \delta(t)]}{K_E} \quad (\text{IV.4-e})$$

a equação para $\delta_s(t)$ fica:

$$\delta_s(t) = \left(1 + \frac{K_e}{K_E}\right) \delta(t) - \frac{F_H(t)}{K_E} \quad (\text{IV.4-f})$$

sua derivada é:

$$\dot{\delta}_s(t) = \left(1 + \frac{K_e}{K_E}\right) \dot{\delta}(t) - \frac{\dot{F}_H(t)}{K_E} \quad (\text{IV.4-g})$$

Do elemento de Kelvin tem-se a seguinte equação:

$$\bar{F}_H(t) = K_s \delta_s(t) + c_s \dot{\delta}_s(t) \quad (\text{IV.5})$$

Substituindo as equações IV.2-a e IV.5 na expressão para a força horizontal total:

$$F_H(t) = F_e(t) + \bar{F}_H(t) \quad (\text{IV.6-a})$$

$$F_H(t) = K_e \delta_e(t) + K_s \delta_s(t) + c_s \dot{\delta}_s(t) \quad (\text{IV.6-b})$$

introduzindo as expressões do deslocamento $\delta_s(t)$ e sua derivada e considerando que $\delta(t) = \delta_e(t)$:

$$F_H(t) = K_e \delta(t) + K_s \left[\left(1 + \frac{K_e}{K_E}\right) \delta(t) - \frac{F_H(t)}{K_E} \right] + c_s \left[\left(1 + \frac{K_e}{K_E}\right) \dot{\delta}(t) - \frac{\dot{F}_H(t)}{K_E} \right] \quad (\text{IV.6-c})$$

organizando-se esta equação, obtém-se:

$$c_s \left(\frac{K_E + K_e}{K_E} \right) \dot{\delta}(t) + \left(\frac{K_e K_E + K_s K_E + K_s K_e}{K_E} \right) \delta(t) = \left(\frac{K_E + K_s}{K_E} \right) F_H(t) + \frac{c_s}{K_E} \dot{F}_H(t) \quad (IV.6-c)$$

Pode-se introduzir as notações:

$$c_s^* = c_s \left(\frac{K_E + K_e}{K_E} \right) \quad (IV.7-a)$$

$$K^* = \left(\frac{K_e K_E + K_s K_E + K_s K_e}{K_E} \right) \quad (IV.7-b)$$

$$\beta = \frac{K^*}{c_s^*} \quad (IV.7-c)$$

Considerando-se estas notações, chega-se à equação constitutiva do modelo:

$$\dot{\delta}(t) + \beta \delta(t) = \left(\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} F_H(t) + \frac{1}{(K_E + K_e)} \dot{F}_H(t) \quad (IV.8)$$

A integração desta equação constitutiva permite obter, para um histórico de forças $F_H(t)$, o correspondente histórico de deslocamentos $\delta(t)$, e reciprocamente, para um histórico de deslocamentos dado, o correspondente histórico de forças.

Pode-se escrever esta Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem (equação IV.8), na forma compacta:

$$\dot{\delta}(t) + \beta \delta(t) = f(t) \quad (IV.9)$$

onde o membro direito é dado pela função $f(t)$:

$$f(t) = \left(\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} F_H(t) + \frac{1}{(K_E + K_e)} \dot{F}_H(t) \quad (IV.10)$$

A solução desta EDO é na forma da seguinte função para o deslocamento total $\delta(t)$:

$$\delta(t) = e^{-\beta(t-t_0)} \left[\int_{t_0}^t e^{\beta(\tau-t_0)} f(\tau) d\tau + \delta_0 \right] \quad (\text{IV.11})$$

As condições iniciais são:

$$t_{\text{inic}} = t_0 \quad (\text{IV.12})$$

$$\delta(t = t_0) = \delta_{\text{inic}} = \delta_0 = \frac{F_e(t_0)}{K_e} \quad (\text{IV.13})$$

O deslocamento lateral total é dado pela função resposta no tempo:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{-\beta(t-t_0)} + e^{-\beta t} \left[\int_{t_0}^t e^{\beta\tau} f(\tau) d\tau \right] \quad (\text{IV.14})$$

Onde a função $f(\tau)$ é dada por:

$$f(\tau) = \left(\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} F_H(\tau) + \frac{1}{(K_E + K_e)} \dot{F}_H(\tau) \quad (\text{IV.15})$$

Substituindo a equação IV.15 na equação IV.14, a função resposta $\delta(t)$ se torna:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{-\beta(t-t_0)} + e^{-\beta t} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} \left[\left(\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} F_H(\tau) + \frac{1}{(K_E + K_e)} \dot{F}_H(\tau) \right] d\tau \right\} \quad (\text{IV.16-a})$$

ou,

$$\begin{aligned} \delta(t) = & \delta_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} F_H(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{(K_E + K_e)} e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} \dot{F}_H(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{IV.16-b})$$

Integrando por partes a íntegro-diferencial contida no segundo membro da equação IV.16-b, tem-se:

$$\int_{t_0}^t e^{\beta\tau} \dot{F}_H(\tau) d\tau = e^{\beta t} F_H(t) - e^{\beta t_0} F_H(t_0) - \beta \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} F_H(\tau) d\tau \quad (\text{IV.17})$$

substituindo a equação IV.17 na equação anterior de $\delta(t)$ tem-se:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} F_H(\tau) d\tau + \frac{1}{(K_E + K_e)} e^{-\beta t} \left[e^{\beta t} F_H(t) - e^{\beta t_0} F_H(t_0) - \beta \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} F_H(\tau) d\tau \right] \quad (IV.18-a)$$

ou,

$$\delta(t) = \delta_0 e^{-\beta(t-t_0)} - \frac{1}{(K_E + K_e)} e^{\beta t_0} F_H(t_0) e^{-\beta t} + \frac{1}{(K_E + K_e)} F_H(t) + \left(\frac{K_E + K_s - \beta c_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} F_H(\tau) d\tau \quad (IV.18-b)$$

a qual, considerando-se que para $t = t_0 = 0$; $F_H(0) = 0$ e $\delta_0 = 0$, pode ser reescrita como:

$$\delta(t) = \frac{1}{(K_E + K_e)} F_H(t) + \left(\frac{K_E + K_s - \beta c_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{\beta\tau} F_H(\tau) d\tau \quad (IV.18-c)$$

Onde $\delta(t)$ é o histórico do deslocamento lateral no topo da estaca no solo argiloso, quando submetida a uma força horizontal $F_H(t)$, variável com o tempo. Este deslocamento representa o somatório de duas parcelas: a imediata (ou elástica) e a secundária, quando a força $F_H(t)$ é aplicada em incrementos constantes ao longo de intervalos discretos.

Observa-se que a linearidade da equação constitutiva justifica a superposição de efeitos, permitindo concluir que os campos de força e de deslocamento em qualquer instante t , produzidos por diversas ações, podem ser obtidos pela superposição dos correspondentes campos produzidos por essas mesmas ações no instante t , supostas elas agindo isoladamente, o que permite escrever:

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^J \Delta\delta_j(t) \quad (IV.19-a)$$

onde,

$$\Delta\delta_j(t) = \frac{1}{(K_E + K_e)} \Delta F_{Hj}(t) + \left(\frac{K_E + K_s - \beta c_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} e^{-\beta t} \int_{t_j}^t e^{\beta\tau} \Delta F_{Hj}(\tau) d\tau \quad (\text{IV.19-b})$$

A força horizontal equivalente $F_H(t)$ é uma função de carga axial $P(t)$, obtida pela equivalência de momentos fletores na seção correspondente ao comprimento efetivo de engaste da estaca (Figura IV.3):

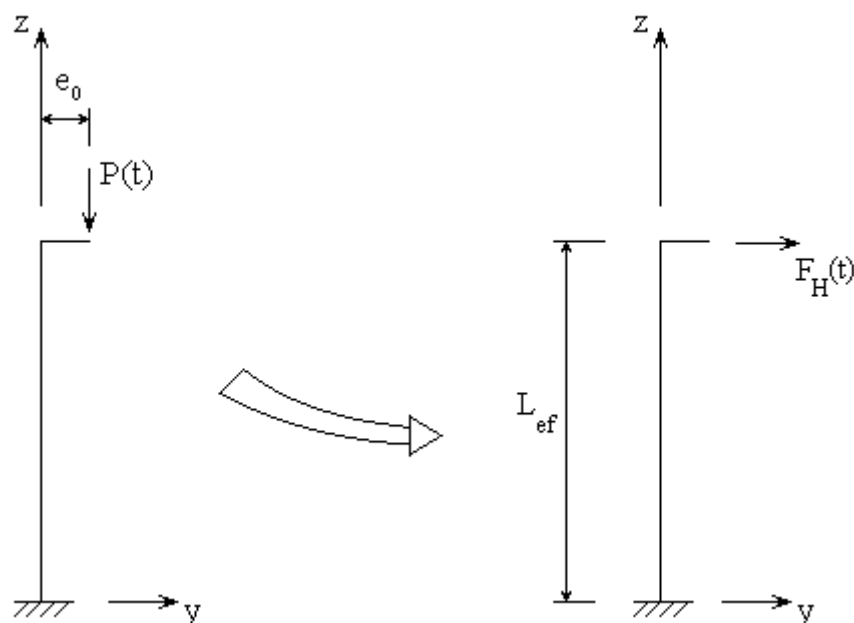


Figura IV.3: Força horizontal no apoio visco-elástico

Para este modelo visco-elástico linear desprezar-se-á a não-linearidade geométrica, inerente ao problema de interação entre a força axial e o momento fletor. Os momentos fletores produzidos pelas forças axial $P(t)$ e horizontal $F_H(t)$, em qualquer tempo t , são equivalentes na seção de engaste da estaca no solo:

$$M(z=0) = P(t)e_0 = F_H(t)L_{ef} \quad (\text{IV.20})$$

A força lateral equivalente à carga axial excêntrica, para valores adotados para e_0 e L_{ef} , é dada pela relação entre $F_H(t)$ e $P(t)$:

$$F_H(t) = \frac{e_0}{L_{ef}} P(t) \quad (\text{IV.21})$$

Levando à equação de $\Delta\delta_j(t)$ esta expressão de $F_H(t)$, obtém-se a função resposta para o j-ésimo incremento de deslocamento lateral no topo da estaca em função do j-ésimo incremento da carga axial excêntrica.

$$\Delta\delta_j(t) = \frac{1}{(K_E + K_e)} \frac{e_0}{L_{ef}} \Delta P_j(t) + \left(\frac{K_E + K_s - \beta c_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} \frac{e_0}{L_{ef}} e^{-\beta t} \int_{t_j}^t e^{\beta\tau} \Delta P_j(\tau) d\tau \quad (IV.22)$$

O somatório de todos os incrementos das parcelas de deslocamentos incrementais lineares visco-elásticos, é dado pela equação:

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^J \Delta\delta_j(t) \quad (IV.23)$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO HIPOTÉTICO

Para demonstrar a aplicabilidade deste modelo é apresentado a seguir um exemplo de aplicação hipotético, constituído por uma estaca isolada em um terreno argiloso, submetida a uma carga axial excêntrica, variável no tempo (Figura IV.4).

A estaca de fundação, sob bloco de concreto armado de seção transversal 0,50 x 0,50 m, é constituída por um perfil soldado CS 250 x 76, com as seguintes características de seção transversal: altura $h= 250$ mm, espessura da alma $t_0= 8,0$ mm, altura da alma $h_0= 218$ mm, largura da mesa $b_f= 250$ mm e espessura da mesa $t_f= 16,0$ mm. Logo: área $A= 97,4$ cm², momento de inércia mínimo $I_{min}= I_y= 4168$ cm⁴ e módulo de elasticidade do aço $E_{aço}= 2,05 \times 10^8$ kN/m².

O comprimento efetivo de engastamento da estaca no solo é considerado igual a 3,50 m: $L_{ef} = 3,50$ m.

A excentricidade acidental da carga axial é admitida como sendo a excentricidade do eixo do pilar de concreto em relação ao centro do bloco, de acordo com a NB-1:

$$e_0 = \frac{b}{30} \quad (IV.24)$$

$$e_0 = \frac{0,20}{30} \cong 0,007 \text{ m}$$

onde b é a menor dimensão da seção transversal do pilar de concreto armado 0,20m x 0,40m sobre o bloco de coroamento da estaca.

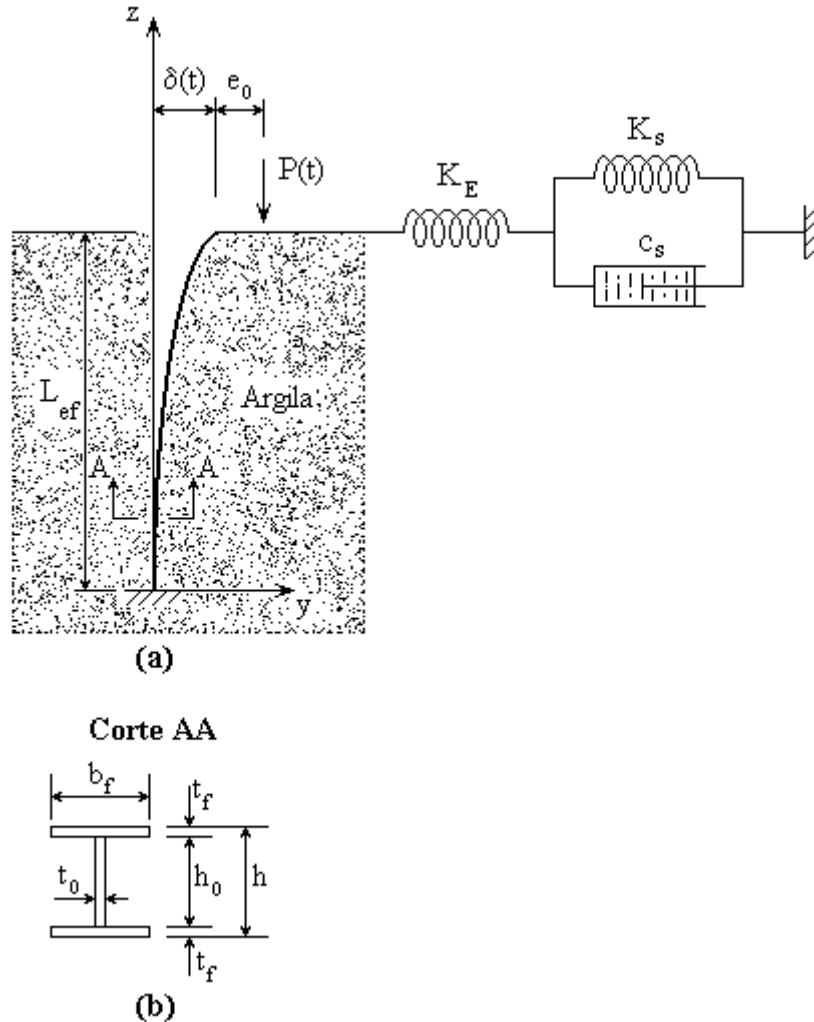


Figura IV.4: (a) Exemplo de Aplicação – Modelo Visco-Elástico Linear;
(b) Corte AA ilustrando a seção transversal da estaca

Visando estudar o comportamento da estaca em solo argiloso quando submetida a um carregamento crescente, neste exemplo é aplicada uma carga máxima perto da carga limite ou de flambagem elástica ($P_{\max} \approx 95\%$ de P_{crit}).

A carga crítica de Euler é aproximadamente o valor limite elástico de carga axial suportada pela estaca em configuração ligeiramente fletida:

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{4L_{\text{ef}}^2} \quad (\text{IV.25})$$

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 \times 2,05 \times 10^8 \times 4168 \times 10^{-8}}{4 \times 3,5^2} \cong 1721 \text{ kN}$$

logo, a carga máxima axial aplicada ao modelo é:

$$P_{\text{max}} = 1721 \times 0,95 \cong 1635 \text{ kN}$$

A rigidez lateral da estaca associada a um deslocamento unitário imposto em sua extremidade livre é dada pelo coeficiente de rigidez elástico linear K_e [9]. Este coeficiente de rigidez elástico linear K_e é o da mola representando a rigidez lateral da estaca, sendo a reação elástica imediata da argila representada pelo coeficiente elástico linear K_E da primeira mola do modelo reológico de Boltzmann.

Da Figura IV.5 pode-se escrever o coeficiente de rigidez elástico linear K_e através da expressão.

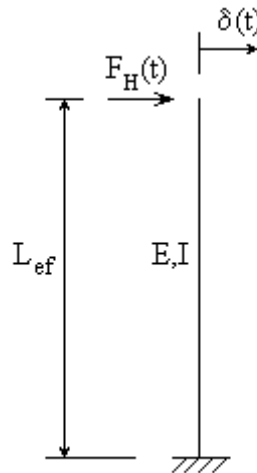


Figura IV.5: Rigidez elástica linear da estaca

para o deslocamento elástico linear lateral no topo da estaca é [9]:

$$\delta(t) = \frac{F_H(t)L_{ef}^3}{3EI} \quad (\text{IV.26})$$

sendo o coeficiente de rigidez elástico linear da estaca

$$(\text{IV.27-a})$$

$$K_e = \frac{F_H(t)}{\delta(t)}$$

ou,

$$K_e = \frac{3EI}{L_{ef}^3} \quad (IV.27-b)$$

Considerando-se os parâmetros utilizados neste exemplo de aplicação hipotético, obtém-se o valor de K_e :

$$K_e = \frac{3 \times 2,05 \times 10^8 \times 4168 \times 10^{-8}}{3,50^3} \cong 598 \text{ kN/m}$$

Como este é um exemplo hipotético para mostrar resultados do modelo linear, os parâmetros representativos do solo são aqui arbitrados de forma que os deslocamentos do elemento de Kelvin sejam compatíveis com a estaca escolhida para este exemplo. Estes parâmetros também devem permitir uma visualização gráfica tanto dos deslocamentos elásticos quanto dos deslocamentos viscosos. Desta forma, arbitra-se:

$$K_E = 400 \text{ kN/m}$$

$$K_s = 10 \text{ kN/m}$$

$$c_s = 10 \times 10^8 \text{ kN s/m}$$

Para melhor demonstrar os resultados obtidos com a equação de $\delta(t)$, são aplicados dois tipos de carregamentos. O primeiro é linear e contínuo (Figura IV.6) e o segundo é constituído por quatro degraus de acréscimos de carga (Figura IV.7).

A solução da equação integral para incrementos discretos de deslocamentos para estes dois casos de carregamentos será obtida através do programa Mathcad [10].

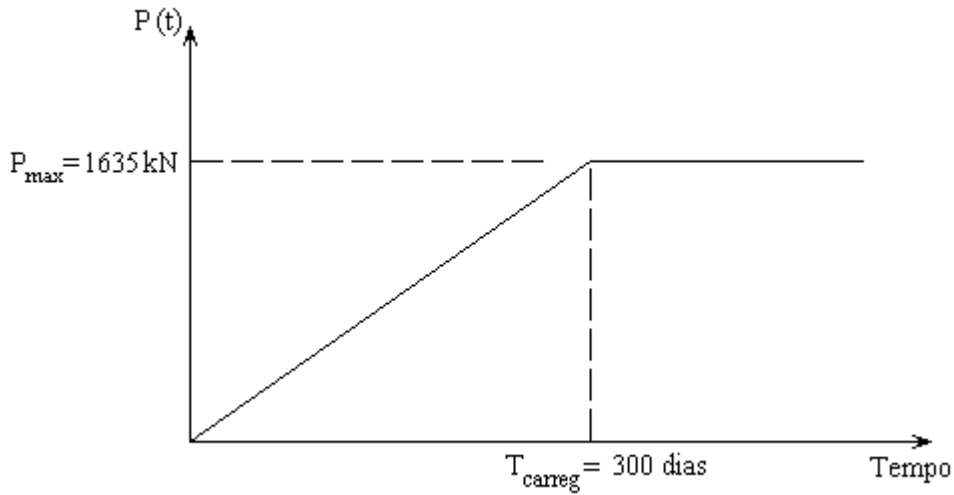


Figura IV.6: Primeiro tipo de carregamento para o Exemplo de Aplicação Hipotético

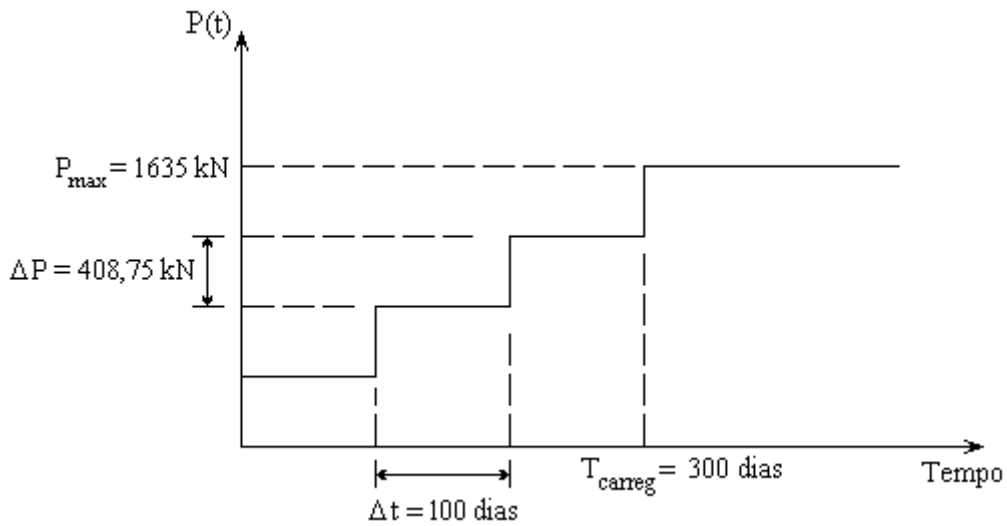


Figura IV.7: Segundo tipo de carregamento para o Exemplo de Aplicação Hipotético

Na Tabela IV.1 são apresentados os resultados obtidos para $\delta(t)$ através das suas respectivas equações. São os deslocamentos laterais no topo da estaca para a carga axial máxima, no tempo final de carregamento máximo de cálculo, ou seja, para:

$$P(t_{\max}) = P_{\max} = 1635 \text{ kN}$$

$$t_{\max} = 800 \text{ dias}$$

Para ambos os carregamentos, a carga máxima é alcançada em $t = 300$ dias e é mantida constante até $t_{\max} = 800$ dias. O tempo máximo de carregamento foi escolhido de forma que após ser atingida a carga máxima, esta continuasse sendo aplicada à estaca por um tempo consideravelmente grande. A deflexão na estaca quando é aplicada a carga máxima (P_{\max}), no maior tempo de cálculo (t_{\max}), é denominada deflexão máxima (δ_{\max}).

TABELA IV.1: EXEMPLO DE APLICAÇÃO HIPOTÉTICO – MODELO VISCO-ELÁSTICO LINEAR	
TIPO DE CARREGAMENTO	DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA, NO TEMPO MÁXIMO (δ_{\max})
Carregamento 1	5,34 mm
Carregamento 2	5,34 mm

Os dois tipos de carregamentos fornecem resultados muito próximos para os deslocamentos laterais máximos. Estes deslocamentos máximos obtidos para o Modelo Visco-Elástico Linear podem ser comparados com a deflexão elástica linear máxima de uma coluna metálica engastada na base e livre na extremidade superior, submetida a uma carga de compressão excêntrica, aplicada no topo da coluna (Figura IV.8).

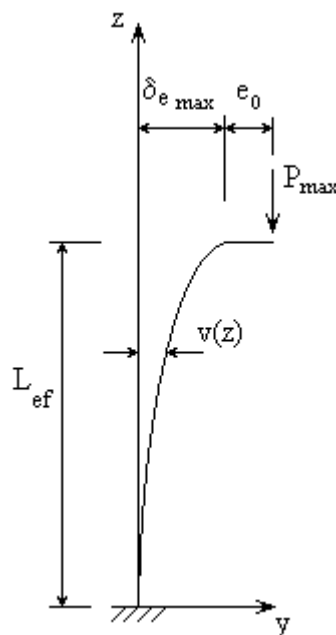


Figura IV.8: Deflexão elástica linear máxima de uma coluna sob compressão excêntrica

O deslocamento elástico linear lateral máximo no topo da coluna ($\delta_{e \max}$) é devido à deflexão elástica linear produzida pela carga axial máxima aplicada.

$$\delta_{e \max} = \frac{F_{H \max}}{K_e} \quad (\text{IV.28-a})$$

utilizando as equações para a força equivalente horizontal (equação IV.21) e para a rigidez elástica linear (equação IV.27-b):

$$\delta_{e \max} = \frac{e_0 P_{\max}}{L_{ef}} \times \frac{L_{ef}^3}{3EI} \quad (\text{IV.28-b})$$

substituindo os valores deste exemplo de aplicação hipotético:

$$\delta_{e \max} = \frac{0,007 \times 1635}{3,50} \times \frac{3,50^3}{3 \times (2,05 \times 10^8) \times (4168 \times 10^{-8})}$$

$$\delta_{e \max} = 0,00547 \text{ m} = 5,47 \text{ mm}$$

O deslocamento elástico linear máximo é muito próximo dos deslocamentos visco-elásticos lineares máximos obtidos para os dois tipos de carregamentos, mostrados na Tabela IV.1.

O gráfico da Figura IV.9 apresenta os históricos dos deslocamentos visco-elásticos lineares laterais no topo da estaca em função do tempo, para os dois tipos de carregamentos, aplicados na estaca. Neste gráfico também está a curva da equação linear elástica, obtida pela equação:

$$\delta_e(t) = \frac{e_0 P(t)}{L_{ef}} \times \frac{L_{ef}^3}{3EI} \quad (\text{IV.29})$$

que fornece o histórico do deslocamento linear elástico, não considerando a viscosidade do solo argiloso e a não-linearidade geométrica existente entre a força axial e a deflexão lateral.

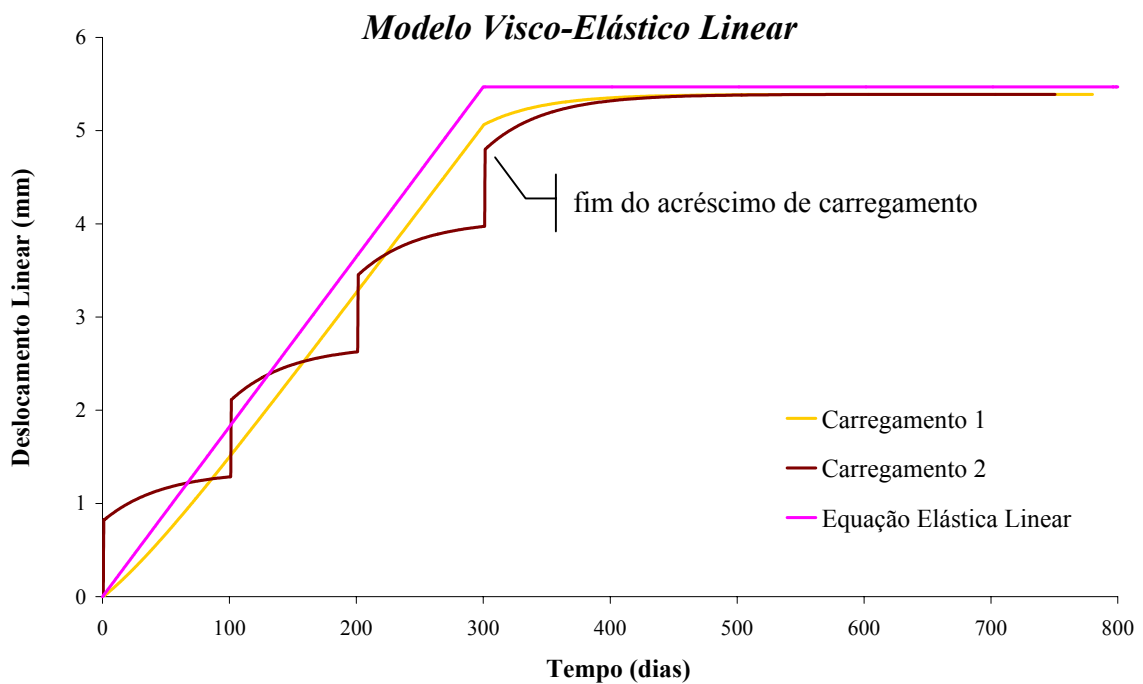


Figura IV.9: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético – Modelo Visco-Elástico Linear

Neste gráfico observa-se que os deslocamentos laterais crescem linearmente para o carregamento linear e tendem a um valor constante para os dois tipos de carregamento. Para o carregamento com acréscimos de carga por degraus, há um crescimento da deflexão com a carga mantida constante, que é a contribuição da deformação do elemento de Kelvin no Modelo Visco-Elástico Linear.

Na Figura IV.10 as curvas respostas para $\delta(t)$ para este exemplo hipotético são apresentadas na forma adimensional para possibilitar um melhor entendimento das suas características. A ordenada é a relação entre a carga axial excêntrica aplicada e a carga crítica de Euler. A abscissa é a razão entre o deslocamento lateral no topo da estaca e o deslocamento elástico linear máximo.

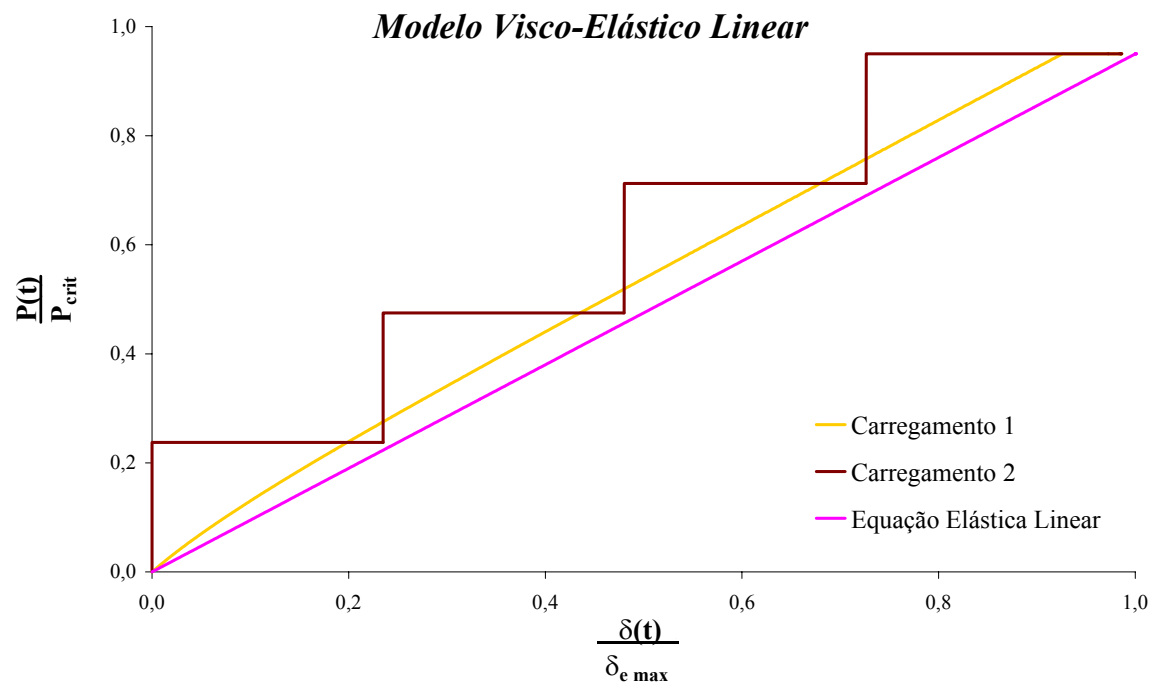


Figura IV.10: Curvas adimensionais Carga x Deslocamento

MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR – INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

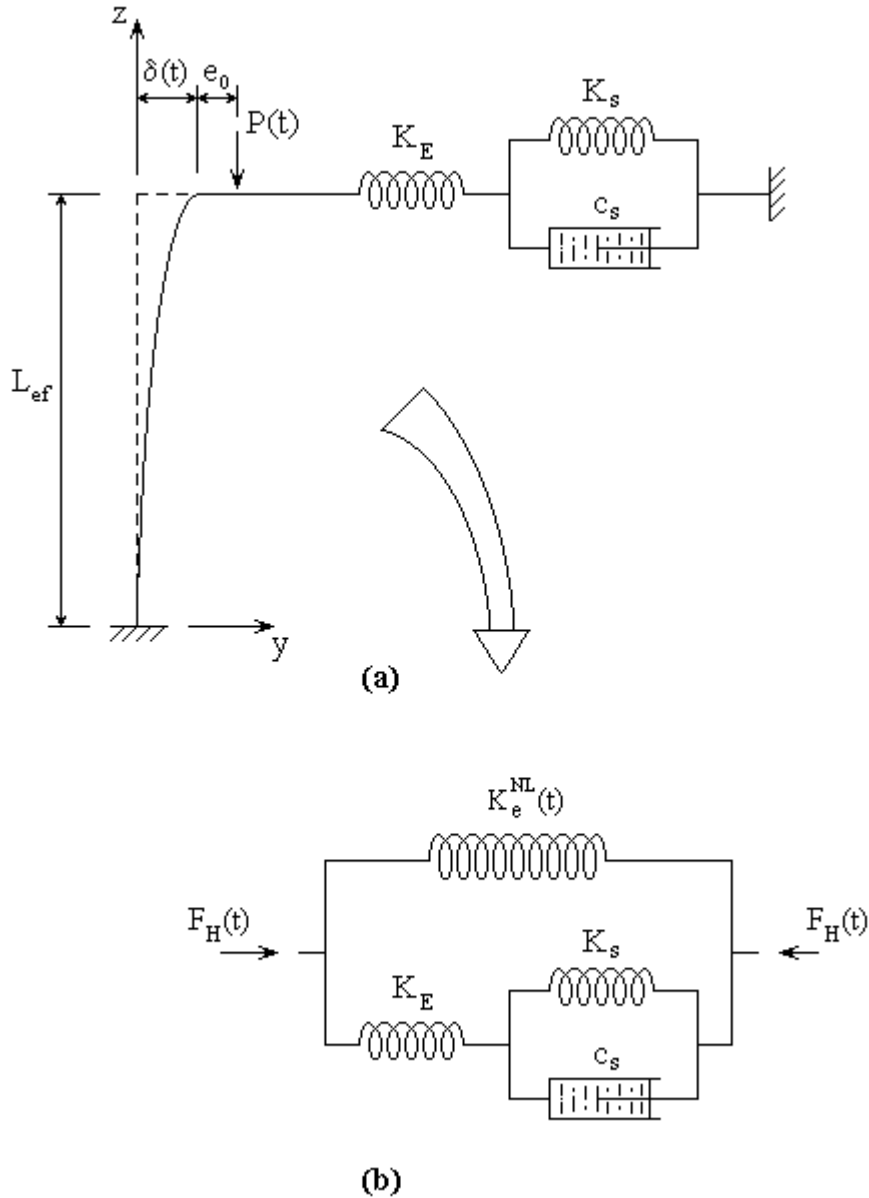
CAPÍTULO V

O Modelo Visco-Elástico Não-Linear é a associação do modelo visco-elástico de Boltzmann com o modelo estrutural não-linear elástico para a estaca. Este modelo faz a simulação do problema de interação solo-estrutura, com o solo sendo constituído de material reológico e a estrutura por uma estaca se deformando lateralmente sob a ação de uma carga excêntrica axial. O comportamento reológico do solo é descrito através de um modelo de Kelvin, pois este representa adequadamente o fenômeno da fluência.

A deformação elástica do fuste da estaca é dada por uma função admissível associada a um grau de liberdade generalizado, e o deslocamento elástico no topo da estaca é devido à ação de uma carga axial excêntrica, sendo calculado através da relação não-linear entre a carga axial P e a deflexão δ produzida.

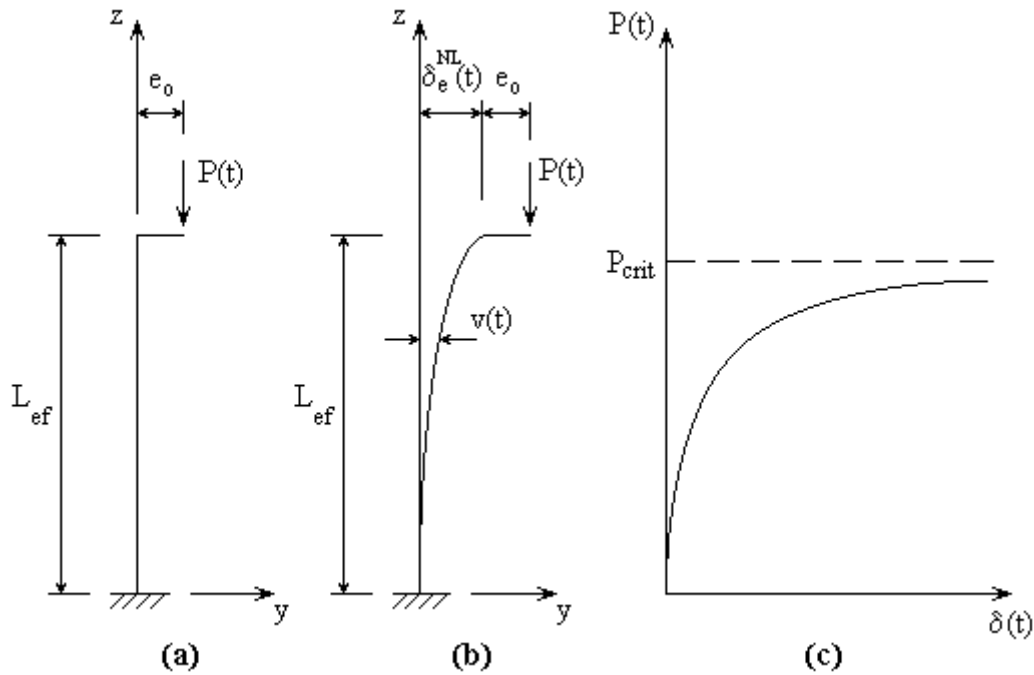
O deslocamento lateral da estaca $\delta(t)$ é restringido pelo solo deformando como um material reológico. Esta deformação é constituída de duas parcelas: uma imediata elástica E devido à aplicação da carga $P(t)$ e outra visco-elástica diferida no tempo, ambas causadas pela deflexão elástica não-linear associada ao processo de flambagem da estaca, dentro do solo argiloso.

Os parâmetros associados à Figura V.1 são os mesmos anteriormente definidos para o modelo visco-elástico linear, exceto a rigidez elástica da estaca, a qual é agora não-linear, $K_e^{NL}(t)$ e dependente do tempo.



**Figura V.1: (a) Modelo Visco-Elástico Não-Linear – Interação solo-estrutura;
 (b) Modelo Visco-Elástico Não-Linear Equivalente sob força horizontal**

Para o cálculo do deslocamento $\delta_E^{NL}(t)$ será considerada uma estaca esbelta e retilínea, com um comprimento efetivo (L_{ef}), engastada na base e livre na extremidade superior, submetida a uma carga axial, aplicada excentricamente (Figura V.2-a). A excentricidade é medida do centro de gravidade da seção transversal até a linha de ação das forças axiais e o plano de flexo-compressão da estaca é o plano yz (Figura V.2-b).



**Figura V.2: (a) Estaca com carga axial excêntrica na sua posição inicial;
 (b) Estaca fletida no plano yz;
 (c) Curva carga x deslocamento**

O deslocamento lateral elástico não-linear no topo da estaca, quando submetida a uma carga axial excêntrica, é dado pela seguinte equação [11]:

$$\delta_e^{NL}(t) = \frac{4e_0}{\pi} \frac{P(t)}{[P_{crit} - P(t)]} \quad (V.1)$$

Nesta equação observa-se que quando a carga axial se aproxima do valor crítico, a deflexão $\delta_e^{NL}(t)$ cresce acentuadamente e a estaca sofre o fenômeno de instabilidade conhecido por flambagem.

O valor desta carga crítica, P_{crit} , para uma coluna reta, geometricamente perfeita, engastada na base e livre na extremidade superior, é:

$$P_{crit} = \eta \frac{\pi^2 EI}{4L_{ef}^2} \quad (V.2)$$

Onde o coeficiente η leva em conta a rigidez lateral que o conjunto estrutural formado por Pilar-Bloco-Cintas, agrega ao topo da estaca. Para o caso de uma estaca livre na sua extremidade superior: $\eta=1$.

A força axial $P(t)$ pode ser escrita em função do deslocamento elástico não-linear $\delta_e^{NL}(t)$. Isolando-se $P(t)$ na equação V.1:

$$P(t) = P_{crit} \left[\frac{\pi \delta_e^{NL}(t)}{4e_0 + \pi \delta_e^{NL}(t)} \right] \quad (V.3)$$

A deflexão total no topo da estaca $\delta(t)$ será calculada com base no modelo da Figura V.1. A mola não-linear representando a estaca é posta em paralelo com um Modelo de Boltzmann que representa as propriedades reológicas do solo argiloso.

A força horizontal $F_H(t)$ dependente da força aplicada $P(t)$ é obtida igualando-se os momentos fletores produzidos por $P(t)$ na seção de engastamento da estaca. Contudo, uma carga axial excêntrica aplicada no topo da estaca produz, além da ação compressiva, uma ação de flexão. Esta ação de flexão produz deflexões adicionais que, por sua vez, tem o efeito de aumentar os momentos atuantes no topo e na base da estaca. Deste modo, esses momentos fletores são dependentes das deflexões, existindo assim uma relação não-linear entre a carga axial e o deslocamento lateral do topo da estaca.

Igualando-se os momentos fletores produzidos por $P(t)$ e $F_e(t)$, indicada na Figura V.4, na seção de engastamento da estaca no solo, tem-se:

$$M(z=0) = [e_0 + \delta_e^{NL}(t)]P(t) = L_{ef} F_e(t) \quad (V.4)$$

a força horizontal no apoio elástico é então escrita como função da força axial excêntrica $P(t)$:

$$F_e(t) = \frac{[e_0 + \delta_e^{NL}(t)]}{L_{ef}} P(t) \quad (V.5)$$

Substituindo na equação acima a expressão para a força axial em função da deflexão elástica não-linear $\delta_e^{NL}(t)$ (equação V.3), vem:

$$F_e(t) = \frac{[e_0 + \delta_e^{NL}(t)]}{L_{ef}} P_{crit} \left[\frac{\pi \delta_e^{NL}(t)}{4e_0 + \pi \delta_e^{NL}(t)} \right] \quad (V.6)$$

que é a força horizontal, decorrente da carga axial excêntrica, atuante no topo da estaca em solo de fundação.

A construção da equação diferencial constitutiva do Modelo Visco-Elástico Não-Linear segue o desenvolvimento apresentado no Capítulo IV em relação à Figura IV.3, e aqui reproduzida na Figura V.3, onde:

$$F_H(t) = F_e(t) + \bar{F}_H(t) \quad (V.7)$$

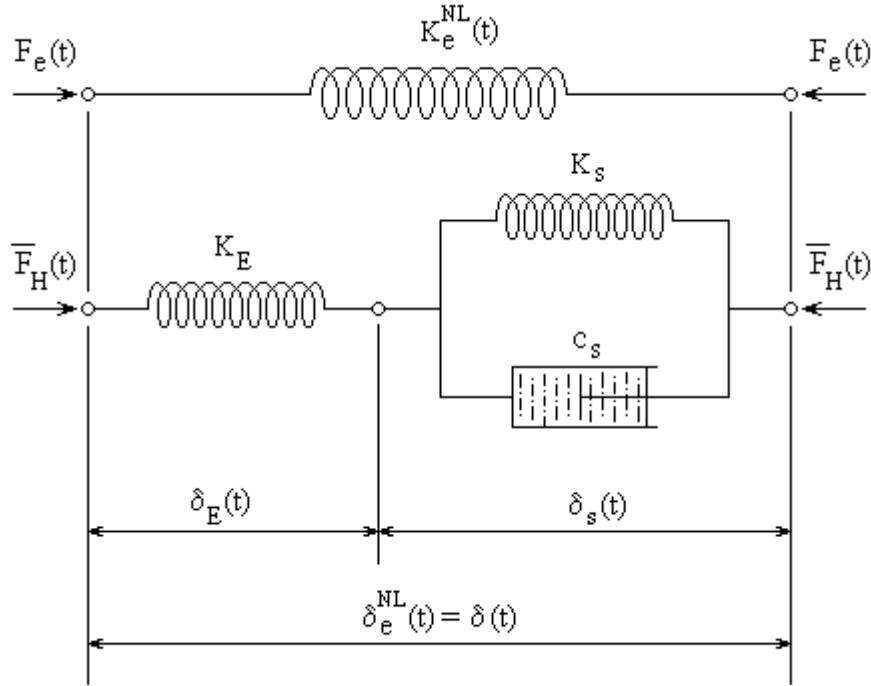


Figura V.3: Modelo Visco-Elástico Não-Linear Equivalente: associação do Modelo de Boltzmann para o solo com uma rigidez elástica não-linear para a estaca

Isolando-se o a primeira mola do elemento de Boltzmann, com rigidez elástica linear K_E , representando a parcela elástica de deformação do solo, tem-se:

$$\bar{F}_H(t) = K_E \delta_E(t) \quad (V.8)$$

Para a mola com a rigidez não-linear $K_e^{NL}(t)$, representando a rigidez elástica não-linear lateral da estaca, pode-se escrever a equação:

$$F_e(t) = K_e^{NL}(t) \delta_e^{NL}(t) \quad (V.9)$$

onde a rigidez elástica não-linear da estaca para qualquer estágio de carga $P(t)$, ou de $F_e(t)$, é ilustrada na Figura V.4:

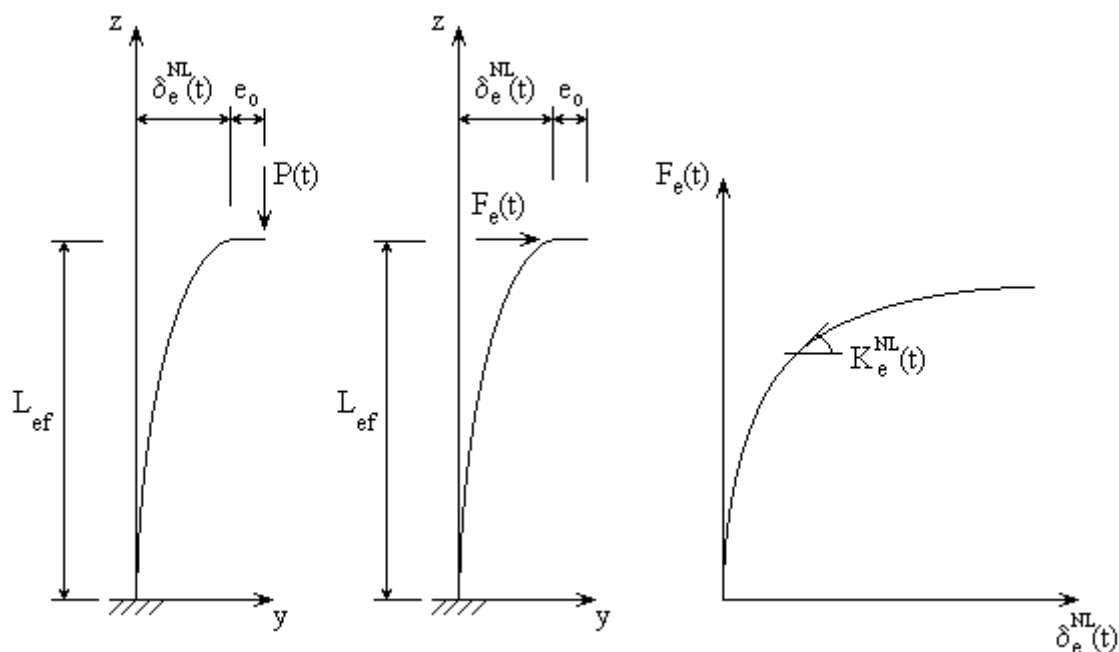


Figura V.4: Coeficiente de rigidez elástico não-linear

Pode-se escrever a rigidez elástica não-linear em função da derivada da força horizontal atuante na estrutura:

$$K_e^{NL}(t) = \frac{dF_e(t)}{d\delta_e^{NL}(t)} \quad (V.10-a)$$

substituindo a equação V.6:

$$K_e^{NL}(t) = \frac{d}{d\delta_e^{NL}(t)} \left\{ \frac{[e_0 + \delta_e^{NL}(t)]}{L_{ef}} P_{crit} \left[\frac{\pi\delta_e^{NL}(t)}{4e_0 + \pi\delta_e^{NL}(t)} \right] \right\} \quad (V.10-b)$$

com esta equação, a aparente rigidez elástica não-linear é dada pela seguinte expressão, válida para qualquer estágio de carga ao longo do tempo:

$$K_e^{NL}(t) = \frac{P_{crit}}{L_{ef}} \left\{ \frac{4\pi e_0^2 + 8\pi e_0 \delta_e^{NL}(t) + \pi^2 [\delta_e^{NL}(t)]^2}{[4e_0 + \pi\delta_e^{NL}(t)]^2} \right\} \quad (V.10-c)$$

o coeficiente de rigidez elástico não-linear $K_e^{NL}(t)$ pode ser escrito em função da força axial $P(t)$. Considerando-se a equação V.1:

$$K_e^{NL}(t) = \frac{P_{crit}}{L_{ef}} \left\{ \frac{4\pi e_0^2 + 8\pi e_0 \left\{ \frac{4}{\pi} e_0 \frac{P(t)}{[P_{crit} - P(t)]} \right\} + \pi^2 \left\{ \frac{4}{\pi} e_0 \frac{P(t)}{[P_{crit} - P(t)]} \right\}^2}{\left\{ 4e_0 + \pi \left\{ \frac{4}{\pi} e_0 \frac{P(t)}{[P_{crit} - P(t)]} \right\} \right\}^2} \right\} \quad (V.10-d)$$

logo,

$$K_e^{NL}(t) = \frac{P_{crit}}{L_{ef}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{P(t)}{P_{crit}} + \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \left[\frac{P(t)}{P_{crit}} \right]^2 \right\} \quad (V.10-e)$$

Do elemento de Kelvin tem-se a seguinte equação:

$$\bar{F}_H(t) = K_s \delta_s(t) + c_s \dot{\delta}_s(t) \quad (V.11)$$

Substituindo as equações V.9 e V.11 na expressão para a força horizontal total:

$$F_H(t) = F_e(t) + \bar{F}_H(t) \quad (V.12-a)$$

$$F_H(t) = K_e^{NL}(t) \delta_e^{NL}(t) + K_s \delta_s(t) + c_s \dot{\delta}_s(t) \quad (V.12-b)$$

Para se obter a expressão do deslocamento do elemento de Kelvin, $\delta_s(t)$, e sua derivada, escreve-se a Lei de Hooke para o elemento elástico contido no elemento de Boltzmann, submetido a uma força variável com o tempo:

$$\bar{F}_H(t) = K_E \delta_E(t) \quad (V.13-a)$$

$$\delta_E(t) = \frac{\bar{F}_H(t)}{K_E} \quad (V.13-b)$$

com derivada:

$$\dot{\delta}_E(t) = \frac{\dot{\bar{F}}_H(t)}{K_E} \quad (V.14)$$

O deslocamento no elemento de Kelvin, que representa o deslocamento diferido no tempo é:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \delta_E(t) \quad (V.15-a)$$

substituindo a equação de $\delta_E(t)$:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{\bar{F}_H(t)}{K_E} \quad (\text{V.15-b})$$

introduzindo a expressão da força horizontal atuante no elemento de Boltzmann:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{[F_H(t) - F_e(t)]}{K_E} \quad (\text{V.15-c})$$

substituindo a expressão da força linear elástica atuante na estrutura $F_e(t)$:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{[F_H(t) - K_e^{NL}(t)\delta_e^{NL}(t)]}{K_E} \quad (\text{V.15-d})$$

considerando que $\delta(t) = \delta_e^{NL}(t)$:

$$\delta_s(t) = \delta(t) - \frac{[F_H(t) - K_e^{NL}(t)\delta(t)]}{K_E} \quad (\text{V.15-e})$$

a equação para $\delta_s(t)$ fica:

$$\delta_s(t) = \left(1 + \frac{K_e^{NL}(t)}{K_E}\right)\delta(t) - \frac{F_H(t)}{K_E} \quad (\text{V.15-f})$$

sua derivada é:

$$\dot{\delta}_s(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \left[1 + \frac{K_e^{NL}(t)}{K_E}\right] \delta(t) \right\} - \frac{\dot{F}_H(t)}{K_E} \quad (\text{V.15-g})$$

ou:

$$\dot{\delta}_s(t) = \dot{\delta}(t) + \frac{K_e^{NL}(t)}{K_E} \dot{\delta}(t) + \frac{\delta(t)}{K_E} \dot{K}_e^{NL}(t) - \frac{\dot{F}_H(t)}{K_E} \quad (\text{V.15-h})$$

Tem-se a equação da força horizontal equivalente:

$$F_H(t) = K_e^{NL}(t)\delta_e^{NL}(t) + K_s\delta_s(t) + c_s\dot{\delta}_s(t) \quad (V.16-a)$$

agora, introduzindo na equação V.16-a as expressões do deslocamento $\delta_s(t)$ e sua derivada e considerando que para o Modelo Visco-Elástico Não-Linear: $\delta(t) = \delta_e^{NL}(t)$ chega-se a,

$$F_H(t) = K_e^{NL}(t)\delta(t) + K_s \left[\left(1 + \frac{K_e^{NL}(t)}{K_E} \right) \delta(t) - \frac{F_H(t)}{K_E} \right] + c_s \left[\dot{\delta}(t) + \frac{\dot{\delta}(t)K_e^{NL}(t)}{K_E} + \frac{\delta(t)\dot{K}_e^{NL}(t)}{K_E} - \frac{\dot{F}_H(t)}{K_E} \right] \quad (V.16-b)$$

ou ainda, organizando-se esta equação, obtém-se:

$$c_s \left[\frac{K_E + K_e^{NL}(t)}{K_E} \right] \dot{\delta}(t) + \left[\frac{K_e^{NL}(t)K_E + K_sK_E + K_sK_e^{NL}(t) + c_s\dot{K}_e^{NL}(t)}{K_E} \right] \delta(t) = \left[\frac{K_E + K_s}{K_E} \right] F_H(t) + \frac{c_s}{K_E} \dot{F}_H(t) \quad (V.16-e)$$

E introduzindo-se as notações:

$$c_s^*(t) = c_s \left[\frac{K_E + K_e^{NL}(t)}{K_E} \right] \quad (V.17-a)$$

$$K^*(t) = \left[\frac{K_e^{NL}(t)K_E + K_sK_E + K_sK_e^{NL}(t) + c_s\dot{K}_e^{NL}(t)}{K_E} \right] \quad (V.17-b)$$

$$\beta(t) = \frac{K^*(t)}{c_s^*(t)} \quad (V.17-c)$$

onde:

$$K_e^{NL}(t) = \frac{P_{crit}}{L_{ef}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{P(t)}{P_{crit}} + \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \left[\frac{P(t)}{P_{crit}} \right]^2 \right\} \quad (V.17-d)$$

logo:

$$\frac{d[K_e^{NL}(t)]}{dt} = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{L_{ef}} \frac{d[P(t)]}{dt} + \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \frac{1}{P_{crit} L_{ef}} \frac{d[P^2(t)]}{dt} \quad (V.17-e)$$

Chega-se à equação constitutiva do modelo:

$$\dot{\delta}(t) + \beta(t)\delta(t) = \left[\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e^{NL}(t)} \right] \frac{1}{c_s} F_H(t) + \left[\frac{1}{K_E + K_e^{NL}(t)} \right] \dot{F}_H(t) \quad (V.18)$$

Esta é a equação constitutiva do modelo, cuja integração permite obter, para um histórico de forças $F_H(t)$, o correspondente histórico de deslocamentos $\delta(t)$, e reciprocamente, para um histórico de deslocamentos dado, o correspondente histórico de forças.

Pode-se escrever a Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem (equação V.18), na forma compacta:

$$\dot{\delta}(t) + \beta(t)\delta(t) = f(t) \quad (V.19)$$

Onde o membro direito é dado pela função $f(t)$:

$$f(t) = \left[\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e^{NL}(t)} \right] \frac{1}{c_s} F_H(t) + \left[\frac{1}{K_E + K_e^{NL}(t)} \right] \dot{F}_H(t) \quad (V.20)$$

A solução desta EDO é na forma da seguinte função para o deslocamento total $\delta(t)$:

$$\delta(t) = e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left[\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} f(\tau) d\tau + \delta_0 \right] \quad (V.21)$$

As condições iniciais são:

$$t_{inic} = t_0 = 0$$

$$\delta(t = t_0) = \delta_{\text{inic}} = \delta_0 = 0$$

Substituindo a equação V.20, de $f(t)$, e considerando as condições iniciais, o deslocamento total $\delta(t)$ passe a ser dado pela seguinte expressão:

$$\delta(t) = e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left[\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left\{ \left[\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{1}{c_s} F_H(\tau) + \left[\frac{1}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \dot{F}_H(\tau) \right\} d\tau \right] \quad (\text{V.22})$$

A força horizontal $F_H(t)$ pode ser escrita em função da força axial excêntrica $P(t)$. Igualando-se os momentos fletores na base engastada da estaca

$$M(z = 0) = P(t)[e_0 + \delta_e^{NL}(t)] = L_{ef} F_H(t) \quad (\text{V.23})$$

a força horizontal atuante no Modelo Visco-Elástico Não-Linear fica:

$$F_H(t) = P(t) \left[\frac{e_0 + \delta_e^{NL}(t)}{L_{ef}} \right] \quad (\text{V.24-a})$$

substituindo o valor do deslocamento elástico não-linear $\delta_e^{NL}(t)$ a força horizontal fica:

$$F_H(t) = \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ P(t) + \frac{4}{\pi} \frac{P^2(t)}{[P_{\text{crit}} - P(t)]} \right\} \quad (\text{V.24-b})$$

Substituindo a expressão V.24-b para $F_H(t)$, na expressão V.22, o deslocamento total $\delta(t)$ fica:

$$\delta(t) = e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left\{ \left[\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{1}{c_s} \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ P(\tau) + \frac{4}{\pi} \frac{P^2(\tau)}{[P_{\text{crit}} - P(\tau)]} \right\} \right\} d\tau \right\} + e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left\{ \left[\frac{1}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ \frac{dP(\tau)}{d\tau} + \frac{4}{\pi} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{P^2(\tau)}{[P_{\text{crit}} - P(\tau)]} \right\} \right\} \right\} d\tau \right\} \quad (\text{V.25})$$

A carga axial pode ser aplicada por superposição, podendo-se escrever:

$$P(t) = \sum_{j=1}^J \Delta P_j(t) \quad (V.26)$$

Logo:

$$\Delta \delta(t) = e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left[\left[\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{1}{c_s} \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ \Delta P(\tau) + \frac{4}{\pi} \frac{\Delta P^2(\tau)}{[P_{crit} - \Delta P(\tau)]} \right\} \right] d\tau \right\} +$$

$$e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left[\left[\frac{1}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ \frac{d\Delta P(\tau)}{d\tau} + \frac{4}{\pi} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\Delta P^2(\tau)}{[P_{crit} - \Delta P(\tau)]} \right\} \right\} \right] d\tau \right\} \quad (V.27)$$

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^J \Delta \delta_j(t) \quad (V.28)$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO HIPOTÉTICO

Para demonstrar a aplicabilidade deste modelo é apresentado a seguir um exemplo de aplicação hipotético, cujas características são iguais às do exemplo analisado para o Modelo Visco-Elástico Linear, ou seja, o exemplo é constituído por uma estaca isolada, em um terreno argiloso, submetida a uma carga axial excêntrica, variável no tempo (Figura V.5).

As propriedades da estaca de fundação, sob bloco de concreto armado de seção transversal 0,50 x 0,50 m, também serão mantidas as mesmas do exemplo para o Modelo Visco-Elástico Linear, i.e perfil soldado CS 250 x 76, com as seguintes características da seção transversal: altura $h= 250$ mm, espessura da alma $t_0= 8,0$ mm, altura da alma $h_0= 218$ mm, largura da mesa $b_f= 250$ mm e espessura da mesa $t_f= 16,0$

mm. Assim: área $A = 97,4 \text{ cm}^2$, momento de inércia mínimo $I_{\min} = I_y = 4168 \text{ cm}^4$ e módulo de elasticidade do aço $E_{\text{aço}} = 2,05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$.

O comprimento efetivo também é considerado igual a 3,50 m: $L_{\text{ef}} = 3,50 \text{ m}$.

A excentricidade acidental é a mesma utilizada no exemplo de aplicação do Modelo Visco-Elástico Linear: $e_0 = 0,007 \text{ m}$.

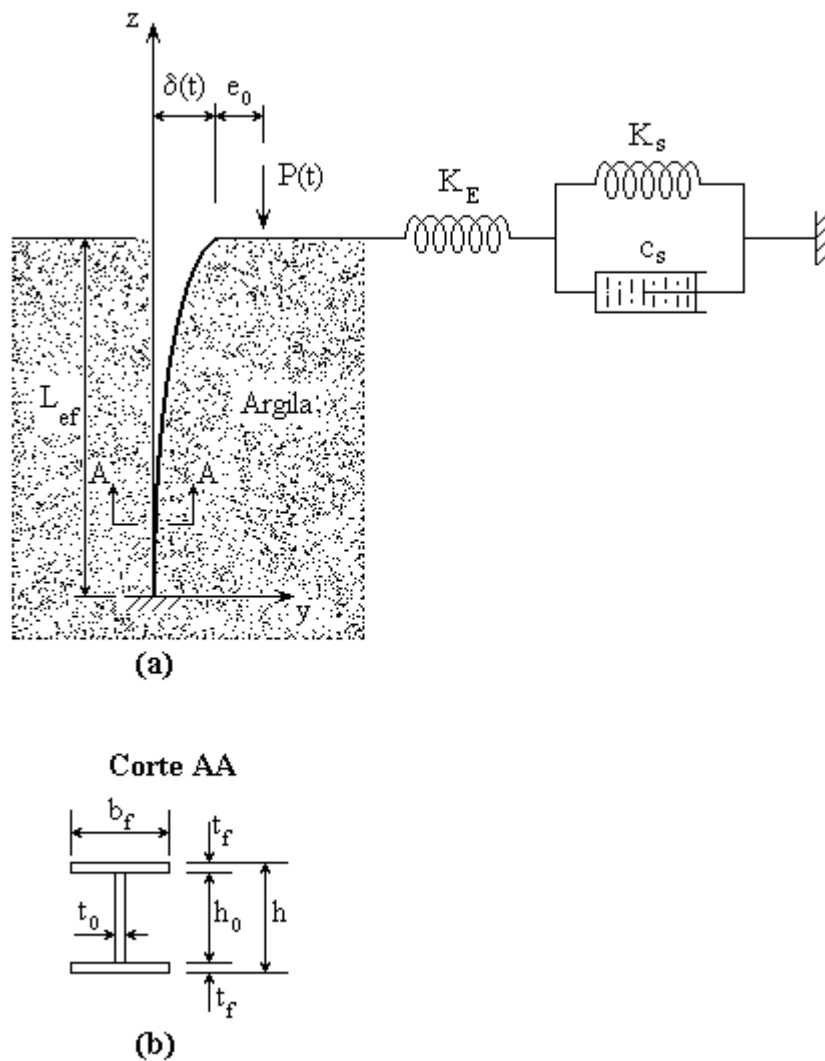


Figura V.5: (a) Modelo Visco-Elástico Não-Linear - Exemplo de Aplicação Hipotético;
(b) Corte AA

Como as características da estaca foram mantidas, o valor da sua carga crítica também é o mesmo: $P_{\text{crit}} = 1721 \text{ kN}$.

Para que os resultados dos exemplos possam ser comparados posteriormente todas as suas características devem ser mantidas:

i. Parâmetros do solo:

$$K_E = 400 \text{ kN/m}, K_s = 10 \text{ kN/m} \text{ e } c_s = 10 \times 10^8 \text{ kN s/m}.$$

ii. Força axial excêntrica máxima aplicada ao modelo, próxima à carga crítica:

$$P_{\max} = 1635 \text{ kN}.$$

iii. Dois tipos de carregamento:

Carregamento 1: linear, com velocidade de carregamento constante, conforme a Figura IV.6; e

Carregamento 2: quatro acréscimos de carga axial, aplicados de forma instantânea e mantidos constantes, de acordo com a Figura IV.7.

iv. Tempo de aplicação da carga, ou tempo até o qual há acréscimo de carregamento, após o qual a força aplicada é mantida constante:

$$T_{\text{aplic}} = 300 \text{ dias (Figuras IV.6 e IV.7)}.$$

v. Tempo máximo de cálculo, ou tempo até o qual a força é mantida no seu valor máximo. A carga axial possui valor constante e igual a P_{\max} , de T_{aplic} a T_{\max} .

$$T_{\max} = 800 \text{ dias}.$$

A Tabela V.1 contém os resultados para o deslocamento máximo (δ_{\max}). Esta deflexão é a obtida na força máxima (P_{\max}) e no tempo máximo de cálculo (T_{\max}). Estes resultados também foram conseguidos por meio da utilização do programa Mathcad [10], para solucionar o problema da expressão íntegro-diferencial de $\delta(t)$.

TABELA V.1: EXEMPLO DE APLICAÇÃO HIPOTÉTICO – MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR	
TIPO DE CARREGAMENTO	DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA, NO TEMPO MÁXIMO (δ_{\max})
Carregamento 1	164,42 mm
Carregamento 2	164,41 mm

Como ocorreu no Modelo Visco-Elástico Linear, os deslocamentos laterais máximos para os dois tipos de carregamentos são iguais.

A força axial excêntrica atuante no topo da estaca produz, além da ação compressiva, uma ação de flexão. Esta ação de flexão produz deflexões adicionais que, por sua vez, tem o efeito de aumentar o momento atuante no topo da estaca. Assim, os momentos fletores nas extremidades da estaca não podem ser determinados independentemente das deflexões, existindo assim uma relação elástica não-linear entre a força axial e o deslocamento lateral. De acordo com [11] pode-se escrever a seguinte equação:

$$\delta_e^{NL}_{max} = \frac{4e_0}{\pi} \times \frac{P_{max}}{(P_{crit} - P_{max})} \quad (V.29)$$

utilizando nesta expressão os valores dos parâmetros do exemplo de aplicação hipotético:

$$\delta_e^{NL}_{max} = \frac{4 \times 0,007}{\pi} \times \frac{1635}{(1721 - 1635)}$$

$$\delta_e^{NL}_{max} = 0,16944 \text{ m} = 169,44 \text{ mm}$$

Os deslocamentos visco-elásticos não-lineares máximos possuem valores muito próximos deste deslocamento elástico não-linear máximo.

As curvas do deslocamento lateral no ponto superior da estaca em função do tempo, para os dois tipos de carregamentos, são mostradas na Figura V.6. O modo de crescimento de carregamento é fator determinante para a função da carga axial excêntrica, influenciando diretamente nestas curvas.

Nesta figura também está desenhada a curva para a equação elástica não-linear. De acordo com [11], a equação elástica não-linear é:

$$\delta_e^{NL}(t) = \frac{4e_0}{\pi} \left[\frac{P(t)}{P_{crit} - P(t)} \right] \quad (IV.1)$$

Na Figura V.6 observa-se que a curva para o Carregamento 2 cresce mais rapidamente do que a curva do Carregamento 1, nos tempos iniciais de cálculo. Porém, as duas curvas tendem a um valor constante e igual aquela para a deflexão visco-elástica não-linear.

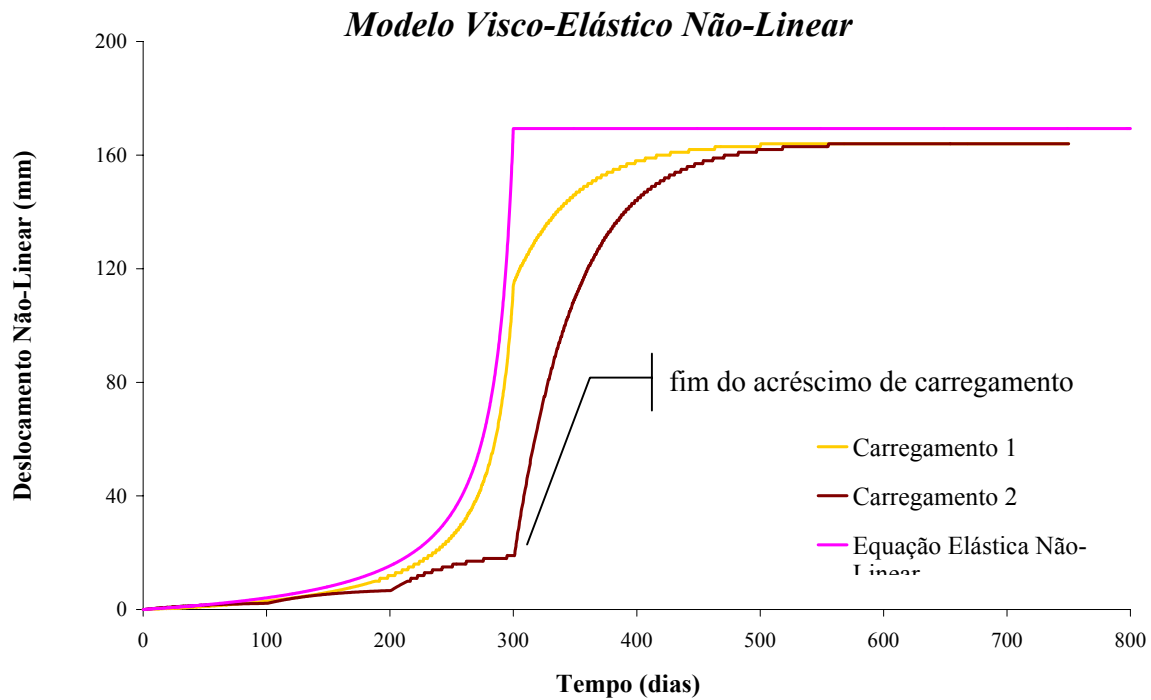


Figura V.6: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético - Modelo Visco-Elástico Não-Linear

A Figura V.7 apresenta as curvas de resposta $\delta(t)$ para este exemplo hipotético. Este gráfico é adimensional para possibilitar um melhor entendimento das características do problema. A ordenada é a relação entre a carga axial excêntrica aplicada ao exemplo hipotético e a carga crítica de Euler. A abscissa é a razão entre os deslocamentos laterais no topo da estaca e o deslocamento elástico não-linear máximo.

Modelo Visco-Elástico Não-Linear

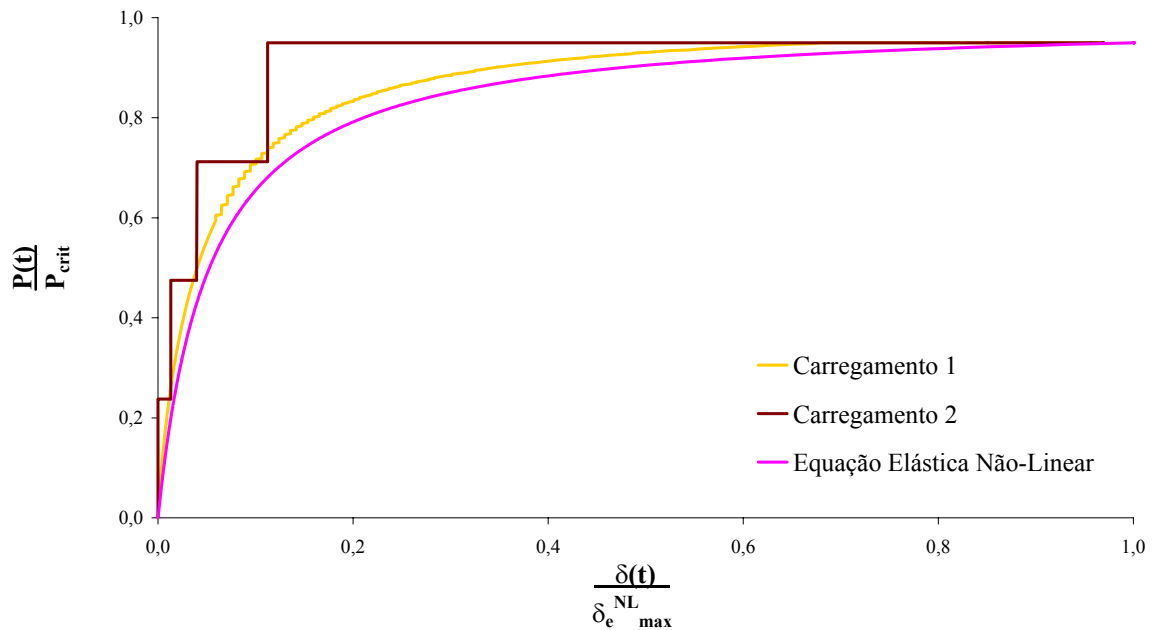


Figura V.7: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento

Nesta Figura V.7 pode-se notar na curva do Carregamento 2 o crescimento do deslocamento lateral no topo da estaca nos trechos de carga axial mantida constante. Este comportamento retrata a contribuição da deformação diferida no tempo, ou seja, a influência do elemento de Kelvin, fazendo com que haja este acréscimo de deflexão sob força constante.

ANÁLISE COMPARATIVA DOS MODELOS

CAPÍTULO VI

Apresenta-se neste capítulo a análise comparativa dos resultados obtidos nos Capítulos IV e V para os dois modelos no mesmo exemplo de aplicação hipotético.

Na Tabela VI.1 encontram-se os valores das deflexões laterais máximas no topo da estaca, para o tipo de carregamento 1 (Figura IV.6). Os deslocamentos máximos são os associados à força axial excêntrica máxima alcançada no tempo máximo de análise, ou seja, para: $t_{\max} = 800$ dias e $P(t_{\max}) = P_{\max} = 1635$ kN.

TABELA VI.1: TIPO DE CARREGAMENTO 1 - DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA	
MODELO	δ_{\max}
Modelo Visco-Elástico Linear	5,34 mm
Modelo Visco-Elástico Não-Linear	164,42 mm

Na Figura VI.1 são mostradas as duas curvas dos históricos do deslocamento lateral, no topo da estaca, em função do tempo para os dois Modelos Visco-Elásticos desenvolvidos neste trabalho.

Nesta figura também estão desenhadas as curvas relativas às soluções das equações elástica linear e não-linear.

A equação da curva elástica linear é dada por,

$$\delta_e(t) = \frac{e_0}{L_{ef}} \times \frac{P(t)L_{ef}^3}{3EI} \quad (VI.1)$$

A equação elástica não-linear [11] considera apenas a não-linearidade geométrica, evidenciada através da relação carga-deslocamento da extremidade livre de uma haste delgada em regime elástico, sob a ação de uma carga axial excêntrica.

$$\delta_e^{NL}(t) = \frac{4e_0}{\pi} \left[\frac{P(t)}{P_{crit} - P(t)} \right] \quad (VI.2)$$

Deve-se enfatizar que a deflexão diferida no tempo, devido às características reológicas do solo, não é considerada nesta equação, onde $P_{crit} = 1721$ kN é a carga crítica de Euler e a excentricidade acidental considerada é $e_0 = 0,007$ m.

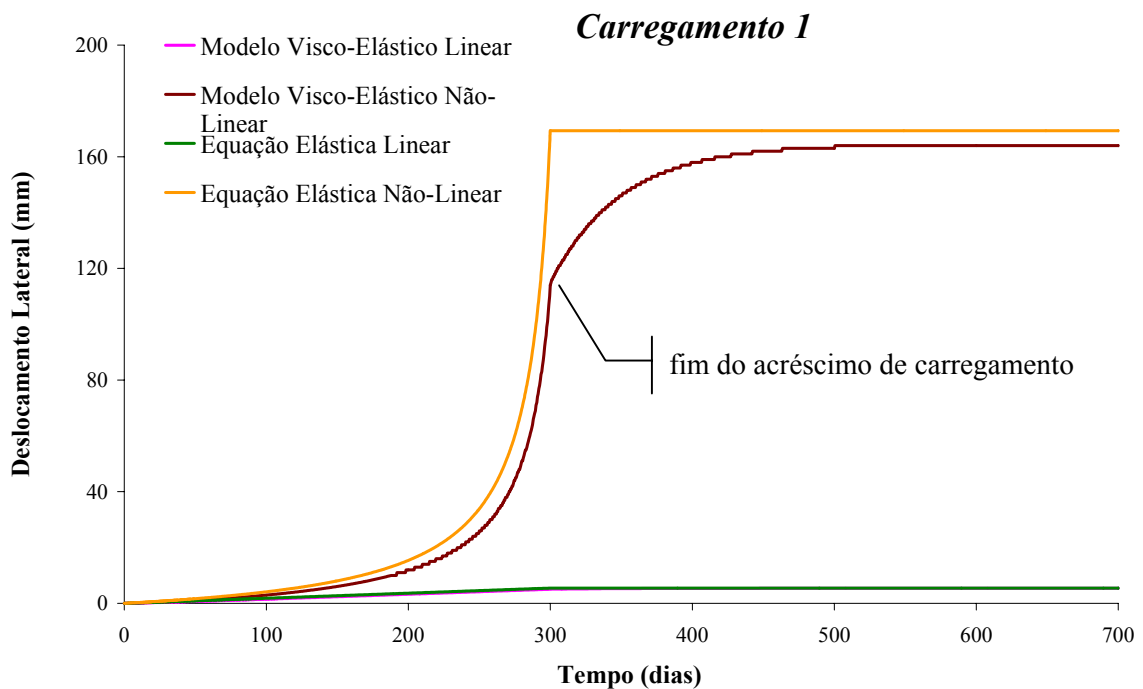


Figura VI.1: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético - Carregamento 1

A Figura VI.2 mostra as curvas adimensionais, para os dois modelos, quando submetidos ao tipo de Carregamento 1. A ordenada é a relação entre a carga axial excêntrica aplicada e a carga crítica de Euler. Para as curvas associadas à equação elástica linear e ao Modelo Visco-Elástico Linear a abscissa é a razão entre os deslocamentos obtidos das respectivas equações matemáticas e o deslocamento elástico linear máximo ($\delta_{e\text{ max}} = 5,47$ mm). Nas curvas referentes à equação elástica não-linear e ao Modelo Visco-Elástico Não-Linear a abscissa é a razão entre os deslocamentos calculados e o deslocamento elástico não-linear máximo ($\delta_{e\text{ max}}^{\text{NL}} = 169,44$ mm).

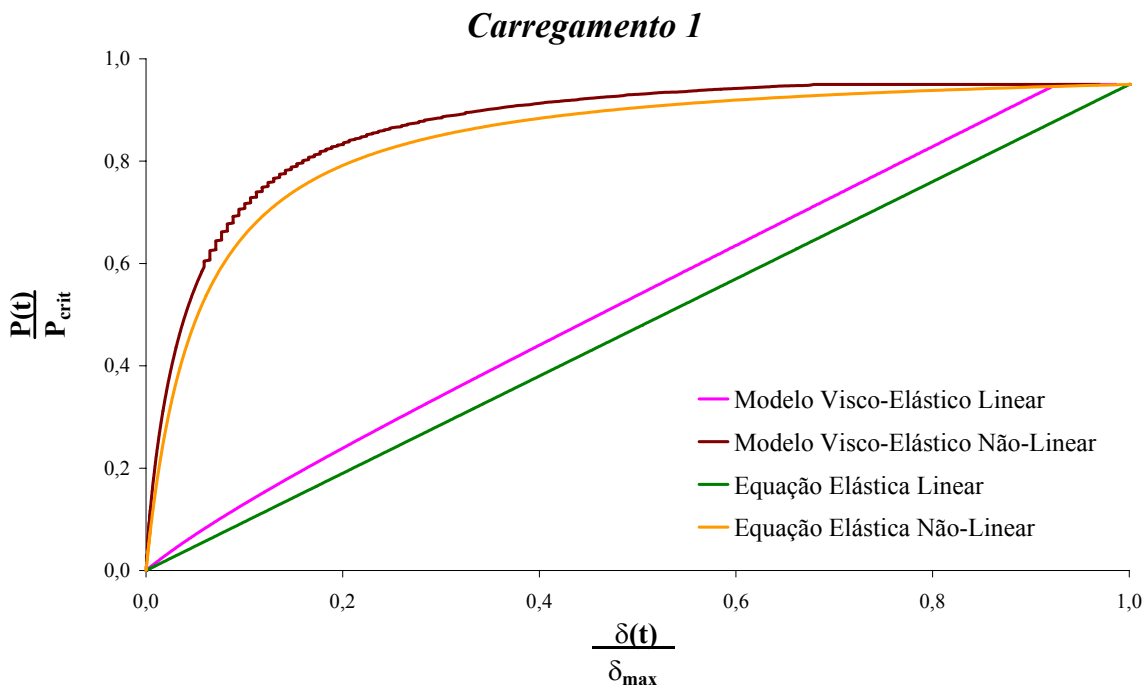


Figura VI.2: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Carregamento 1

A Tabela VI.2 apresenta os resultados do exemplo de aplicação hipotético, para o tipo de carregamento 2 (Figura IV.7), com acréscimos de carga instantâneos. Nesta tabela encontram-se os valores dos deslocamentos laterais máximos no ponto superior da estaca. As deflexões máximas são as obtidas para a força axial excêntrica máxima e no tempo máximo de análise.

TABELA VI.2: TIPO DE CARREGAMENTO 2 - DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA	
MODELO	δ_{MAX}
Modelo Visco-Elástico Linear	5,34 mm
Modelo Visco-Elástico Não-Linear	164,41 mm

Os resultados da Tabela VI.2 são exatamente iguais aos da Tabela VI.1, demonstrando que o valor final da deflexão na extremidade superior da estaca não depende de como varia no tempo o carregamento, desde que aplicado no mesmo intervalo de tempo e atingindo o mesmo valor máximo.

As deflexões máximas encontradas para os Modelos Visco-Elásticos Linear e Não-Linear são relacionadas às deflexões elásticas linear e não-linear máximas, respectivamente ($\delta_{e \text{ max}}$ e $\delta_{e \text{ max}}^{\text{NL}}$), na Tabela VI.3 a qual resume os desvios percentuais entre estas deflexões.

No Modelo Visco-Elástico Linear, este desvio é calculado com a equação:

$$\Delta\delta_{\text{max}} = \frac{\delta_{e \text{ max}} - \delta_{\text{max}}}{\delta_{e \text{ max}}} \times 100\% \quad (\text{VI.3})$$

e utilizando os valores do exemplo de aplicação hipotético, resulta em,

$$\Delta\delta_{\text{max}} = \frac{5,47 - 5,34}{5,47} \times 100\% = 2,38\%$$

Para o Modelo Visco-Elástico Não-Linear, o desvio é calculado com a equação:

$$\Delta\delta_{\text{max}} = \frac{\delta_{e \text{ max}}^{\text{NL}} - \delta_{\text{max}}}{\delta_{e \text{ max}}^{\text{NL}}} \times 100\% \quad (\text{VI.4})$$

e com os parâmetros do exemplo de aplicação hipotético, resulta em,

$$\Delta\delta_{\text{max}} = \frac{169,44 - 164,42}{169,44} \times 100\% = 3,05\%$$

TABELA VI.3: TIPO DE CARREGAMENTO 1 OU 2 - DIFERENÇA ENTRE OS DESLOCAMENTOS LATERAIS MÁXIMOS NO TOPO DA ESTACA	
MODELO	$\Delta\delta_{MAX}$
Modelo Visco-Elástico Linear	2,38 %
Modelo Visco-Elástico Não-Linear	3,05 %

O Modelo Visco-Elástico Não-Linear é o que fornece a maior diferença entre os deslocamentos máximos, pois este é o modelo que considera a não-linearidade da relação carga-deslocamento. O Modelo Visco-Elástico Linear, por não considerar a não-linearidade, resulta em deflexões consideravelmente menores, comparadas com as encontradas no Modelo Visco-Elástico Não-Linear.

A Figura VI.3 mostra as duas curvas dos históricos do deslocamento lateral, no topo da estaca, para o Carregamento 2. Esta figura apresenta também as curvas obtidas das equações elásticas linear e não-linear.

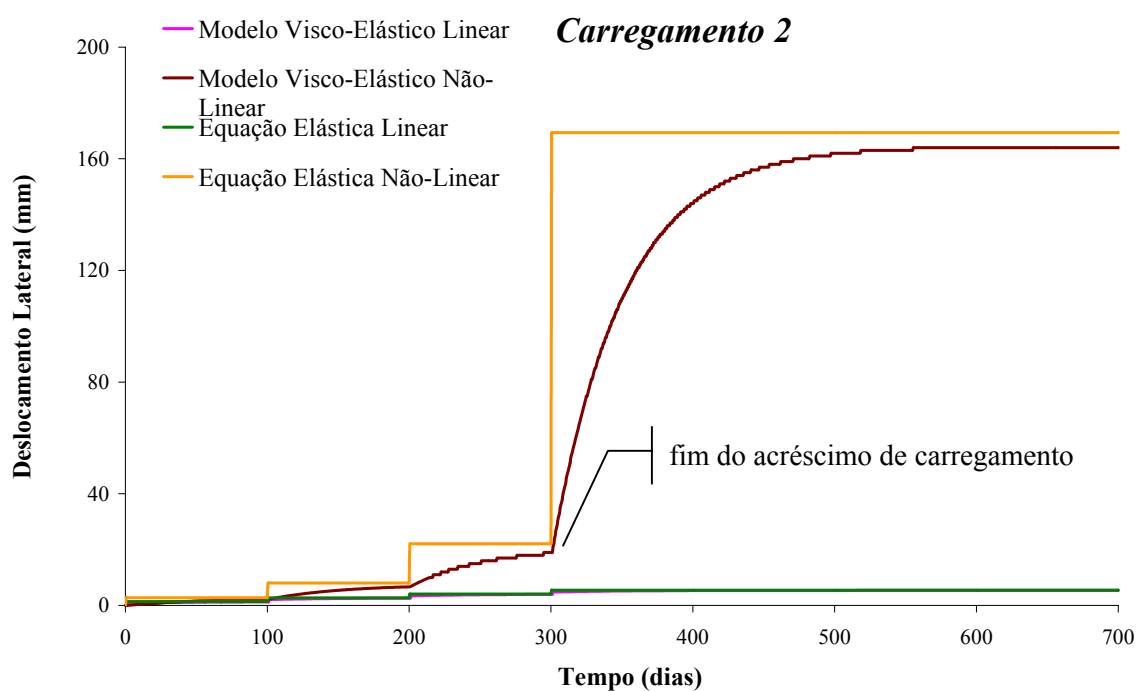


Figura VI.3: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Hipotético - Carregamento 2

Com as respostas $\delta \times t$ mostradas na Figura VI.3, pode-se observar que o Modelo Visco-Elástico Linear sempre fornece resultados muito menores que os do Modelo Visco-Elástico Não-Linear, já que este último considera o comportamento de flambagem lateral da estaca.

As curvas adimensionais relativas às respostas do Carregamento 2, para os dois modelos, estão desenhadas na Figura VI.4. As relações utilizadas na abscissa e na ordenada são as mesmas utilizadas para a construção da Figura VI.2.

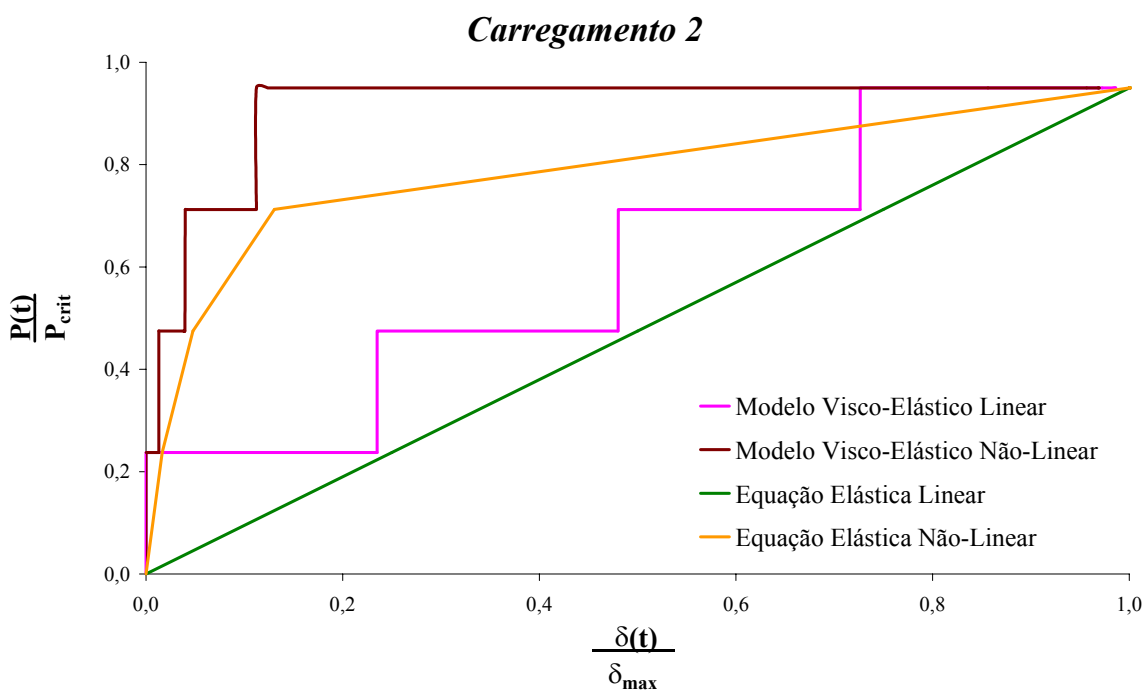


Figura VI.4: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Carregamento 2

Nesta figura pode-se observar que para o Modelo Visco-Elástico Linear e para o Modelo Visco-Elástico Não-Linear há o crescimento da deflexão lateral no topo da estaca nos trechos de carga axial constante. O mesmo não ocorre para a equação elástica não-linear, para a qual, quando a força axial é constante, o valor do deslocamento não se modifica.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO PRÁTICO

CAPÍTULO VII

Para exemplificar a aplicação prática dos modelos teóricos desenvolvidos são utilizados os aspectos associados ao mecanismo de interação entre a estrutura de um edifício em concreto armado e as fundações profundas e esbeltas. Trata-se de um edifício residencial de 13 andares situado numa capital de um estado da região norte do Brasil. Seu colapso súbito ocorreu em 1987, na fase final de acabamento, levando à morte cerca de 40 operários [12,13].

A estrutura e fundações do edifício residencial em concreto armado, cuja concepção básica é ilustrada na Figura VII.1, era constituída de:

- Blocos de fundações sobre estacas metálicas com pontas de concreto;
- Cintamento no nível térreo sem laje de piso. Este cintamento não convencional dos pilares, junto aos blocos das fundações sobre estacas, era inadequado e inexistente em alguns trechos na direção longitudinal;
- Núcleo estrutural formado por caixa de escadas e poço de elevadores, não resistente ao contraventamento, por ser constituído por pilares de pequena rigidez à flexão e vigas ainda menos rígidas;
- 01 (um) pavimento sobre pilotis, não contendo vigamento contínuo longitudinal; e
- 12 (doze) pavimentos estruturais para apartamentos e painel de cobertura.

Os pavimentos estruturais tipo - 2º ao 11º - podem ser referidos como não-convencionais, por não possuírem vigas transversais e longitudinais cruzando sobre os pilares principais. A concepção básica estrutural era assim constituída por pilares e “balancins” interligados por painel de laje, formando pórticos com travejamento horizontal de pequena rigidez à flexão. Os pavimentos tipo também não possuíam em seu interior vigamento contínuo longitudinal interligando os pórticos típicos ao núcleo central.

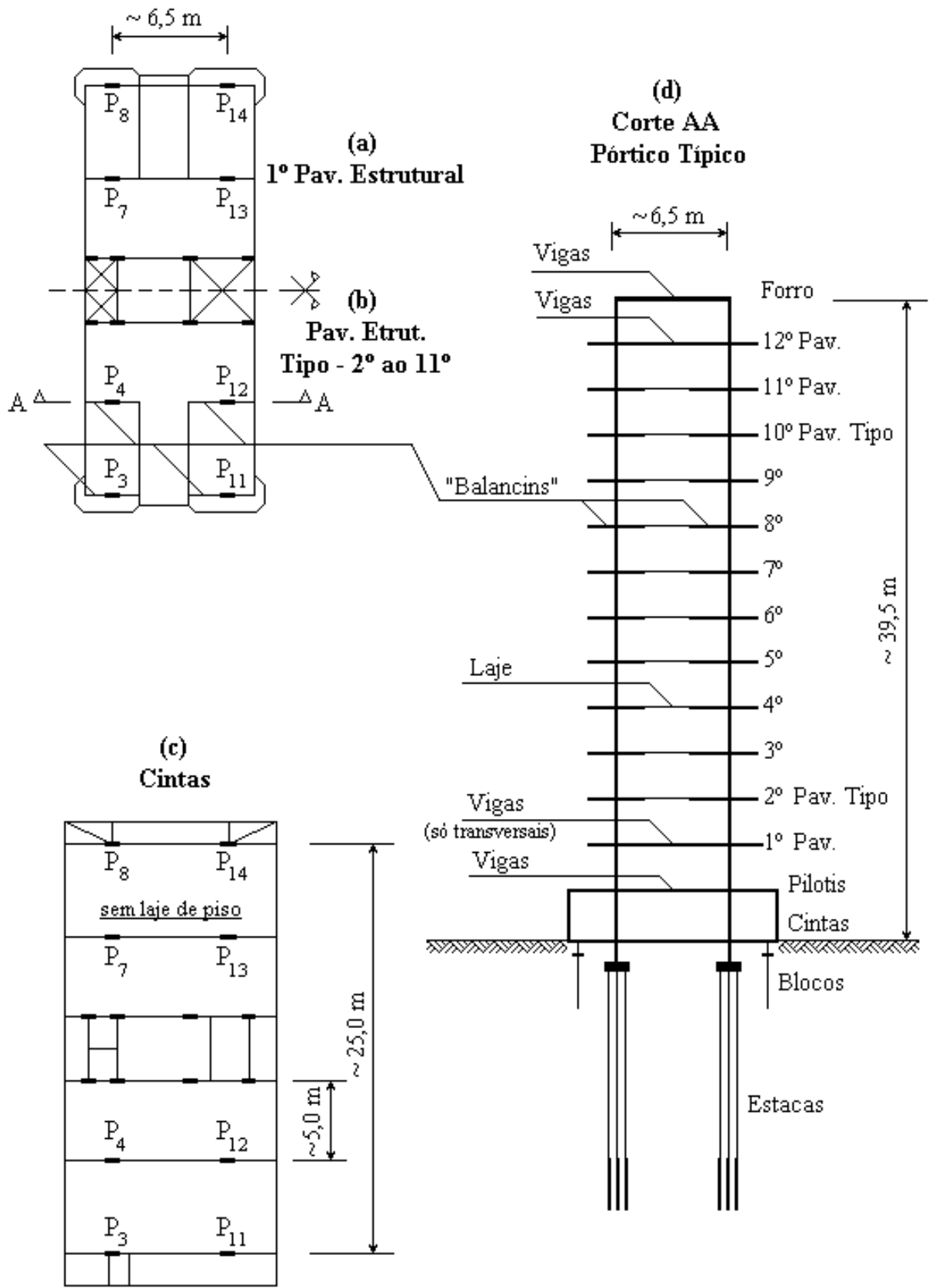


Figura VII.1: Concepção Estrutural Básica [12, 13]

Em suma, a estrutura era constituída por pórticos esbeltos isolados, interligados basicamente pelas lajes de piso, com deficiências nas ligações estrutura-fundações.

Os resultados mais relevantes obtidos com a análise estrutural via Método dos Elementos Finitos são a seguir apresentados para o entendimento do mecanismo de colapso da edificação:

➤ *Cargas nos Pilares no Nível das Cintas nos Blocos de Fundação:*

As cargas nos pilares no nível dos blocos de fundação foram calculadas com o somatório das cargas obtidas dos modelos em elementos finitos dos pavimentos tipo, além daquelas estimadas para o primeiro pavimento e para cobertura, caixa d'água e casa de máquinas. Pela distribuição final de cargas permanentes (peso próprio da estrutura em concreto armado + revestimento de piso + paredes de alvenaria acabadas) observa-se que os pilares P_{12} e P_{13} são os que possuem a maior carga de compressão axial atuante de serviço, igual a 3527 kN no trecho de pilar entre o bloco de fundação e o pavimento em pilotis.

Os momentos solicitantes na direção transversal na base dos pilares P_{12}/P_4 e P_{13}/P_7 , que formam os pórticos mais solicitados, são absorvidos principalmente pelas vigas e lajes do pilotis, cabendo às cintas uma pequena parcela de absorção desse momentos, que chegam aos blocos de fundações com valores bastante pequenos.

Segundo a direção longitudinal sem cintamento, verificou-se que os momentos sobre os blocos das fundações também são bastante pequenos. Conclui-se que as cargas sobre os blocos de fundação, devido ao carregamento permanente total, eram efetivamente cargas verticais, com excentricidades inerentes ao processo construtivo [12].

➤ *Solo Local e Fundações Adotadas:*

O solo local apresenta uma camada de argila orgânica muito mole com espessura que varia de 10,0 a 12,0 m, sobrejacente a uma camada de areia silto argilosa de compactidade variável (pouco compacta a compacta) com 3,0 a 4,0 m de espessura. Sob a areia encontra-se espessa camada de argila silto arenosa rija. Uma segunda camada de areia aparece a cerca de 27, 0 m de profundidade.

As fundações do edifício eram em estacas mistas compostas de perfis metálicos I10" com ponteira de concreto de seção quadrada de 30cm x 30cm com 3,0m de comprimento. As estacas tinham comprimentos cravados que variavam de 13,0 a 15,6 m. Desta forma, suas ponteiros ficavam cravadas na camada de areia silto argilosa subjacente à argila orgânica muito mole. As estacas foram compostas em grupos de 3, 4

e 5 perfis I10”, coroados por blocos rígidos travados apenas em uma direção: a direção da maior dimensão ou inércia da seção transversal dos pilares e, coincidentemente, também a direção da maior dimensão ou inércia das seções transversais das estacas, igualmente orientadas.

Pela análise de capacidade de carga nas estacas pôde-se avaliar [12,13] que, embora com margem de segurança reduzida, as fundações não entrariam em colapso para as solicitações devidas às cargas permanentes efetivamente atuantes na data do colapso estrutural.

➤ *Verificação da flambagem de uma estaca isolada:*

A verificação mostrou que a carga crítica (de flambagem) de uma estaca típica era superior à carga atuante, embora com coeficiente de segurança à flambagem reduzido [12].

➤ *Verificação de ruptura do pilar mais solicitado por compressão axial centrada:*

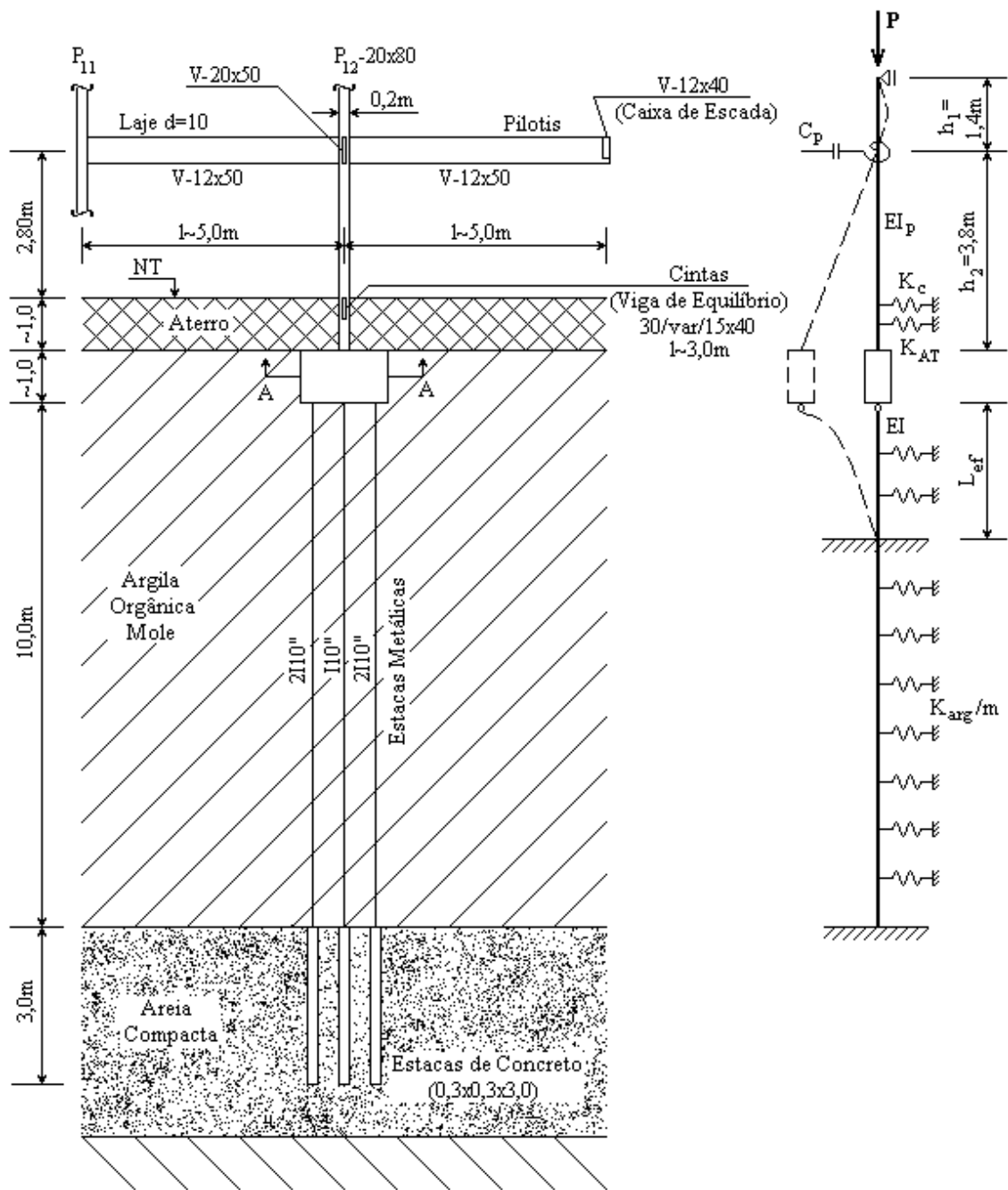
Esta verificação indicou uma carga de ruptura, no trecho de pilar entre o bloco de fundação e o pavimento em pilotis, superior à carga máxima atuante de serviço, embora o fator de segurança fosse inferior ao requerido pela NB1.

➤ *Estabilidade do Conjunto Pilar-Bloco-Estacas (ver Figura VII.2):*

Devido à inexistência de cintamento, dos pilares mais carregados, tal como P₁₂ e P₁₃, na direção longitudinal em planta do edifício a estabilidade do conjunto estrutural composto pelo pilar de concreto armado, mais o bloco de coroamento da fundação e pelo grupo de cinco estacas metálicas (perfis I10”), estava em situação crítica sob ação das cargas permanentes.

A inexistência de cintamento na direção da menor dimensão da seção transversal desses pilares, aliada à condição de rótula plástica conferida pela débil ligação fretada entre o topo de cada estaca metálica e o fundo do bloco, leva a um mecanismo de flambagem lateral do conjunto. Este mecanismo se acentua com a adição de qualquer excentricidade construtiva, provocando, a cada acréscimo de pavimentos, incrementos de deslocamentos laterais (δ) e rotação do bloco de fundação, sobrecarregando o par de estacas mais extremas (Figura VII.2).

Devido às características reológicas da argila orgânica mole a evolução desse deslocamento lateral é diferida no tempo. A cada acréscimo de carga (por exemplo, a carga de cada pavimento construído) há um acréscimo de deslocamento diferido, visco-elástico, adicionado aquele como puramente elástico (δ_e), devido à aplicação hipoteticamente instantânea da carga permanente total de mais um pavimento [12].



Corte AA

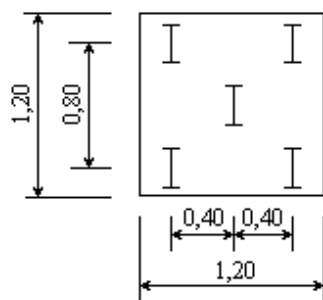


Figura VII.2: Modelo para Verificação da Flambagem no Conjunto Pilar-Estaca [12]

➤ *Mecanismo de Colapso Estrutural:*

A verificação da carga de ruptura por flexo-compressão por exemplo do pilar P_{12} indicou que, durante o processo relativamente lento de flambagem sob acréscimos sucessivos de carga, este pilar foi levado a uma ruptura brusca para uma carga aproximadamente igual a 350 tf, aplicada excentricamente (Figura VII.2).

Com a ruptura brusca do pilar P_{12} (ou alternativamente de P_{13}) todos os demais pilares que faziam parte dos pórticos transversais principais (P_3/P_{11} , P_4/P_{12} , P_7/P_{13} e P_8/P_{14}) foram levados à ruptura, devido à inexistência de elementos de ligação (vigamentos nas duas direções ortogonais intertravando esses pilares) com rigidez à flexão suficiente para promover o necessário travejamento (ou “aporticamento”) e conseqüente distribuição de cargas.

Ressalta-se que com o desbalanceamento existente de momentos transversais no nível da cada pavimento – conferidos pelos “balancins” e voltados para dentro da estrutura – o colapso do edifício ocorreu subitamente como se fora uma implosão programada [12, 13].

O mecanismo de colapso total da estrutura é o resultado do processo relativamente lento de flambagem reológica, do conjunto pilar-estacas, sob acréscimos sucessivos de carga permanente devido a cada novo pavimento construído, levando o pilar P_{12} à ruptura por flexo-compressão, durante estágio avançado do processo de flambagem.

Embora esse mecanismo de colapso tenha sido relatado por Battista [12, 13] baseando-se no entendimento do fenômeno reológico decorrente da interação solo-estacas, as verificações da ruptura dos pilares de concreto armado foram feitas com base apenas em modelos lineares e não-lineares associados a flambagem elástica.

Aqui, aproveita-se este caso prático como exemplo de aplicação dos modelos visco-elásticos desenvolvidos nesta tese e descritos nos capítulos anteriores. Com base nesses modelos linear e não-linear são investigadas as histórias no tempo dos deslocamentos laterais do topo das estacas e, assim, re-analisado o comportamento reológico e o mecanismo de colapso estrutural.

VII.1. APLICAÇÃO DO MODELO VISCO-ELÁSTICO LINEAR

O Modelo Visco-Elástico Linear descrito no Capítulo IV é aplicado ao problema da Figura VII.2, sendo este modelo ilustrado na Figura VII.3.

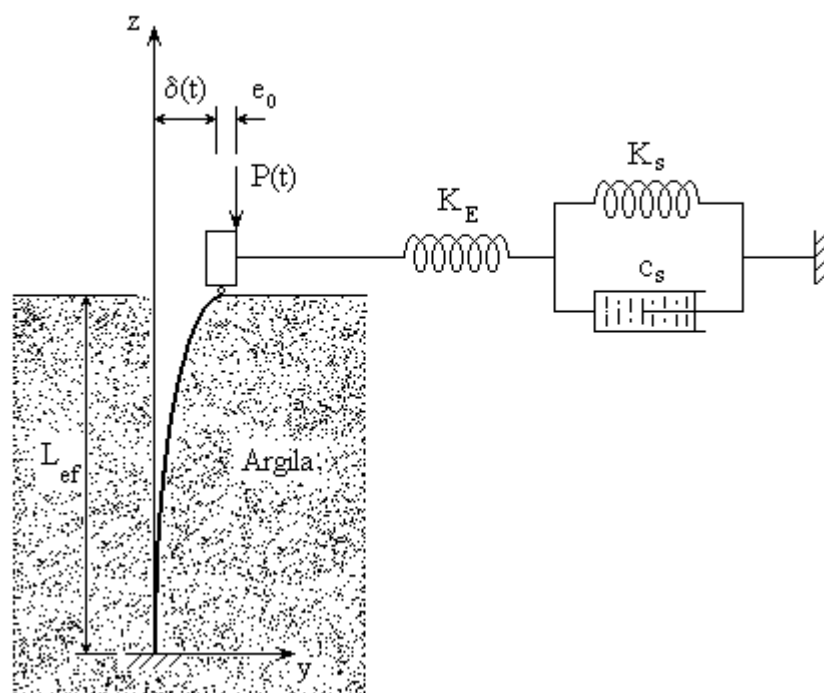


Figura VII.3: Modelo Visco-Elástico Linear – Exemplo de Aplicação Prático

Neste exemplo o coeficiente de rigidez elástico total K_e corresponde à superposição das seguintes contribuições:

- i. Devido à rigidez elástica linear do próprio conjunto de estacas:

O coeficiente de rigidez elástico linear do conjunto de estacas ($K_{estacas}$) é [10]:

$$K_{estacas} = \frac{3E_{aço} I_{conj. estacas}}{L_{ef}^3} \quad (VII.1)$$

$$K_{estacas} = \frac{3 \times (2,1 \times 10^8) \times (5 \times 282 \times 10^{-8})}{2,52^3} = 555 \text{ kN/m}$$

ii. Devido à rigidez elástica linear à flexão do conjunto pilar + vigas T do pavimento em pilotis:

A viga T é constituída da viga e da laje do pavimento em pilotis. Seu módulo de rigidez rotacional (C_p) é calculado para a direção de menor rigidez do pilar P_{12} . Na Figura VII.4 está representado o esquema estrutural e a seção transversal desta viga T do pavimento em pilotis, ilustrado na Figura VII.2.

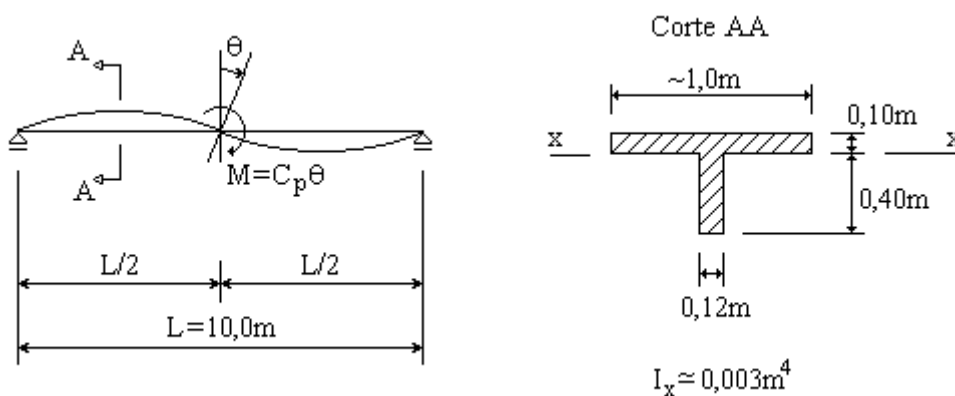


Figura VII.4: Viga T - Pilotis

O coeficiente de rigidez a rotação no ponto médio desta viga biapoiada é [9]:

$$C_p = \frac{24E_c I_x}{L} \quad (\text{VII.2})$$

onde E_c é o módulo de elasticidade do concreto, I_x é o momento de inércia da seção transversal da viga T em relação ao eixo x e L é o comprimento do vão: $E_c = 2,5 \times 10^7$ kN/m², $I_x \cong 0,003$ m⁴ e $L = 10,0$ m.

$$C_p = \frac{24 \times 2,5 \times 10^7 \times 0,003}{10,0} = 18 \times 10^4 \text{ kN m/ rad}$$

O coeficiente de rigidez a rotação do conjunto viga T + Pilar (Figura VII.5) é [12]:

$$\bar{C}_p = C_p + \frac{3E_c I_p}{h_1} \quad (\text{VII.3})$$

onde I_p é o momento de inércia da seção transversal do Pilar 12 (20 x 80 cm), na direção de menor rigidez:

$$I_p = \frac{b \times h^3}{12} \quad (\text{VII.4})$$

$$I_p = \frac{0,80 \times 0,20^3}{12} \cong 5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Substituindo os valores dos parâmetros I_p , E_c e h_1 na equação do coeficiente de rigidez a rotação do conjunto Viga T e pilar, resulta em:

$$\bar{C}_p = 18 \times 10^4 + \frac{3 \times (2,5 \times 10^7) \times (5 \times 10^{-4})}{1,4} = 20,7 \times 10^4 \text{ kN m/rad}$$

A Figura VII.5 ilustra o esquema estrutural para identificar os coeficientes de rigidez que contribuem para o coeficiente de rigidez total do conjunto pilar e viga T do teto do pilotis (ver também a Figura VII.2).

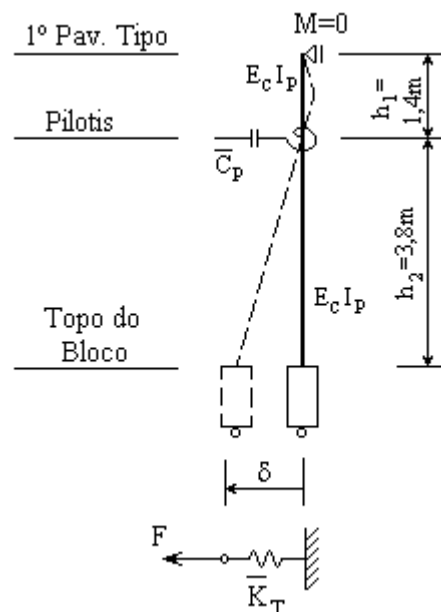


Figura VII.5: Rigidez à flexão do conjunto Pilar + Viga T

O coeficiente de rigidez elástico equivalente à flexão do conjunto pilar + viga T é dado por [12]:

$$\bar{K}_T = \frac{\bar{C}_p}{h_2^2} - \frac{3E_c I_p}{h_2^3} \quad (\text{VII.5})$$

logo, substituindo os valores numéricos dos parâmetros envolvidos,

$$\bar{K}_T = \frac{20,7 \times 10^4}{3,8^2} - \frac{3 \times (2,5 \times 10^7) \times (5 \times 10^{-4})}{3,8^3} = 1,36 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

iii. Devido à rigidez a flexão lateral do cintamento:

A Figura VII.6 mostra o esquema estrutural da cinta e da viga de equilíbrio do bloco de fundação do pilar mais carregado, ou seja, do pilar P₁₂:

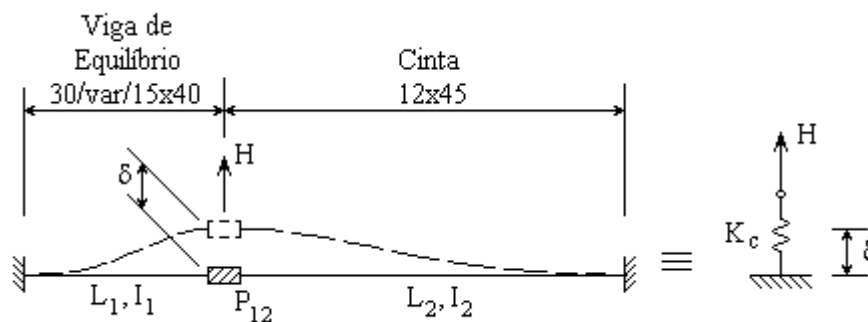


Figura VII.6: Rigidez a flexão lateral do cintamento

onde: $L_1 \cong 3,0 \text{ m}$; $I_1 \cong 3,8 \times 10^{-4} \text{ m}^4$; $L_2 \cong 6,0 \text{ m}$; e $I_2 \cong 6,5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$.

A rigidez a flexão lateral devido ao cintamento (K_c) é dada por [12]:

$$K_c = 12E_c \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} \right) \quad (\text{VII.6})$$

e logo, com os valores numéricos dos parâmetros envolvidos, tem-se:

$$K_c = 12 \times (2,5 \times 10^7) \left(\frac{3,8 \times 10^{-4}}{3,0^3} + \frac{6,5 \times 10^{-5}}{6,0^3} \right) = 4310 \text{ kN/m}$$

iv. Devido ao empuxo passivo do aterro sobre a face lateral do pilar, no trecho entre o topo do bloco e as cintas:

Considerando o coeficiente de reação lateral do aterro (k_{AT}) igual a 2500 kN/m³, a rigidez a flexão lateral devido ao aterro (K_{AT}) será:

$$K_{AT} = b_{\text{pilar}} \times h_{\text{aterro}} \times k_{AT} \quad (\text{VII.7})$$

e logo, resulta em:

$$K_{AT} = 0,8 \times 1,0 \times 2500 = 2000 \text{ kN/m}$$

O coeficiente de rigidez elástico total (K_T), do conjunto formado por pilar, viga T, cintas, bloco e aterro, é dado pelo somatório de três parcelas (ii, iii, iv):

$$K_T = \bar{K}_T + K_c + K_{AT} \quad (\text{VII.8})$$

resultando em,

$$K_T = 13.600 + 4.310 + 2.000 = 19.910 \text{ kN/m}$$

O coeficiente de rigidez elástico total K_e é dado pela soma de K_T com a rigidez elástica linear do conjunto de estacas (K_{estacas}):

$$K_e = K_{\text{estacas}} + K_T \quad (\text{VII.9})$$

o valor numérico de K_e resulta em,

$$K_e = 555 + 19.910 = 20.465 \text{ kN/m}$$

O coeficiente de rigidez elástica do solo ($K_E = K_s$) é obtido pela integração da função de forma associada a deformada elástica do fuste da estaca, considerando-se o coeficiente de reação lateral da argila orgânica mole ($K_h = 550 \text{ kN/m}^3$):

$$K_E = K_s = \int_0^{L_{ef}} \Phi^2(z) K_x dz \quad (\text{VII.10})$$

onde $\Phi(z)$ é a função de forma aproximada (meia onda cossenoidal):

$$\Phi(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2L_{ef}}\right) \quad (\text{VII.11})$$

a qual atende às condições de contorno impostas para o conjunto de estacas:

$$\Phi(z=0)=0 \text{ e } \Phi'(z=0)=0 \quad (\text{VII.12})$$

A função de forma elevada ao quadrado é dada pela expressão:

$$\Phi^2(z) = \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L_{ef}}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi z}{2L_{ef}}\right) + 1 \quad (\text{VII.13})$$

e o coeficiente de rigidez lateral do solo K_x por:

$$K_x = n_h B_{ef} \quad (\text{VII.14})$$

onde B_{ef} é a largura efetiva do conjunto de cinco estacas metálicas de cada bloco:

$$B_{ef} = \xi h n \quad (\text{VII.15})$$

e com: $\xi = 1$ (hipótese mais desfavorável), $h = 11,8 \text{ cm}$ (largura do perfil I10" da estaca na direção de menor rigidez do pilar, $h = b_{I10''}$) e $n = 5$ (número de estacas contidas em cada bloco), chega-se a:

$$B_{ef} = 1 \times 0,118 \times 5 = 0,59 \text{ m}$$

Considerando-se $n_h = 550 \text{ kN/m}^3$ (valor do coeficiente de reação volumétrica da argila orgânica mole) e substituindo na equação VII.14 de K_x , resulta em:

$$K_x = 550 \times 0,59 = 324,5 \text{ kN/m}^2$$

O comprimento efetivo da estaca (L_{ef}) é dado pela seguinte expressão desenvolvida por Davidsson [14]:

$$L_{ef} = 1,8 \left(\frac{E_{aço} I_{conj. estacas}}{k_h} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (\text{VII.16})$$

onde,

$$I_{conj. estacas} = \sum_{i=1}^5 I_{mínimo} \quad (\text{VII.17})$$

e com os seguintes valores numéricos,

$$\text{Perfil I10": } I_{mínimo} = 282 \text{ cm}^4$$

$$I_{conj. estacas} = 5 \times 2,82 \times 10^{-6} = 14,1 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

o comprimento efetivo do conjunto de estacas enterradas resulta em:

$$L_{ef} = 1,8 \left(\frac{2,05 \times 10^7 \times 14,1 \times 10^{-6}}{550} \right)^{\frac{1}{5}} = 2,52 \text{ m}$$

Agora, substituindo a expressão VII.13 na integral VII.10, vem:

$$K_E = K_s = \int_0^{L_{ef}} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi z}{2L_{ef}} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi z}{2L_{ef}} \right) + 1 \right] K_x dz \quad (\text{VII.18-a})$$

ou:

$$K_E = K_s = K_x \left\{ \int_0^{L_{ef}} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi z}{L_{ef}} \right) \right] dz + \left[z - \frac{4L_{ef}}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{2L_{ef}} \right) \right]_0^{L_{ef}} \right\} \quad (\text{VII.18-b})$$

logo:

$$K_E = K_s = K_x \left\{ \frac{1}{2} \left[z + \frac{L_{ef}}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{L_{ef}} \right) \right]_0^{L_{ef}} + L_{ef} - \frac{4L_{ef}}{\pi} \right\} \quad (\text{VII.18-c})$$

$$K_E = K_s = K_x \left(\frac{L_{ef}}{2} + L_{ef} - \frac{4L_{ef}}{\pi} \right) \quad (\text{VII.18-d})$$

obtém-se:

$$K_E = K_s = K_x L_{ef} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (\text{VII.18-e})$$

Utilizando os valores numéricos de K_x e L_{ef} obtém-se:

$$K_E = K_s = 324,5 \times 2,52 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = 185,43 \text{ kN/m}$$

Observa-se que para o modelo puramente elástico, do conjunto de estacas com comprimento equivalente L_{ef} , a rigidez é dominada pelas parcelas correspondentes à estrutura de concreto armado e do empuxo passivo do aterro (K_T). A parcela de contribuição à rigidez elástica proveniente da camada de argila mole (K_E) é, em geral, bastante reduzida. A relação entre as rigidezes é:

$$\frac{K_T}{K_E} = \frac{19.910,00}{185,43} = 107,37$$

Pondo isto, pode-se comparar os resultados obtidos no Modelo Elástico Analítico com os resultados do Modelo Elástico Numérico (MEF) (Figura VII.7).

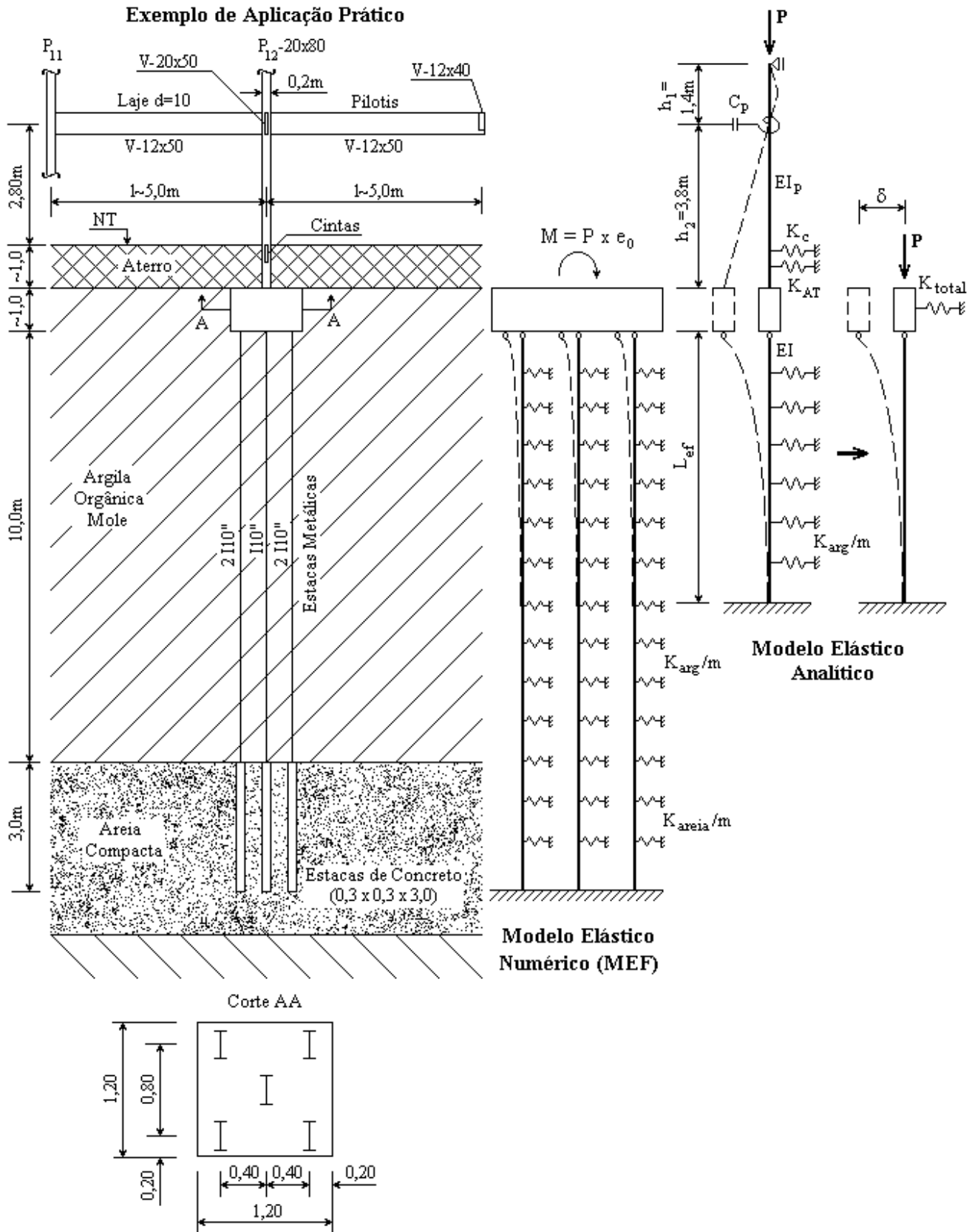


Figura VII.7: Modelos Elásticos Analítico e Numérico (MEF)

Considerando que os resultados obtidos dos modelos elásticos analítico e numérico (MEF) mostram o mesmo comportamento não-linear e pouco diferem em termos de deslocamentos máximos, para P_{max} , conclui-se pela utilização do modelo elástico – analítico – simplificado do conjunto de estacas com comprimento efetivo de engastamento. Daí então, fica demonstrado que o modelo elástico simplificado pode ser usado numa análise não-linear, mesmo para as estacas embebidas em camada de argila orgânica mole.

Assim sendo, entende-se que o modelo elástico simplificado pode ser utilizado na modelagem do problema visco-elástico. Observa-se que na situação final, num tempo “infinito” (ié no final do processo reológico), o modelo visco-elástico torna a ser puramente elástico.

Para o fator η que aparece na expressão do coeficiente de amortecimento do solo c_s :

$$c_s = \int_0^{L_{ef}} \Phi^2(z) \eta dz \quad (VII.19)$$

foi adotado um valor normal fornecido em [15], onde para um ensaio de um solo normalmente adensado hidrostáticamente sob uma tensão efetiva p'_e , e ensaiado sob uma velocidade de deformação constante ($\dot{\epsilon}_t$), o coeficiente η é dado pela expressão [15]:

$$\eta = \frac{C_0 \left(\dot{\epsilon}_t \right)}{\dot{\epsilon}_t} p'_e \quad (VII.20)$$

Para um ensaio de fluência (CR-I-2) [15], a tensão de adensamento e a velocidade média de ensaio são, respectivamente:

$$p'_e = 78,4 \text{ kPa}$$

$$\dot{\epsilon}_t = 5,5 \times 10^{-4} \text{ \%/min}$$

A velocidade adotada neste ensaio foi ($\dot{\epsilon}_t$) a qual é igual à velocidade dos ensaios convencionais de fluência, onde os corpos de prova rompem com tensões desviadoras praticamente iguais às do ensaio CR-I-2. Esta incerteza no valor de $\dot{\epsilon}_t$ ocasiona uma

falta de acurácia no valor da constante C_0 , cujo valor pode ser obtido pela expressão [15]:

$$C_0 = 0,528 \left(\dot{\varepsilon}_t \right)^{0,235} \quad (\text{VII.21})$$

resultando em,

$$C_0 = 0,528 (5,5 \times 10^{-4})^{0,235} = 0,090494$$

Substituindo estes valores na equação do parâmetro η :

$$\eta = \frac{0,090494}{5,5 \times 10^{-4}} \times 78,4$$

obtem-se:

$$\eta = 12899,49 \frac{\text{kPa min}}{\%} = 77,397 \times 10^6 \frac{\text{kN} \times \text{s}}{\text{m}}$$

Observa-se que este valor para o parâmetro η não tem, em geral, uma boa precisão, em virtude dos valores estipulados para os outros parâmetros dependentes de características do solo e do ensaio.

O coeficiente de amortecimento do solo (c_s) é obtido integrando-se a equação VII.19:

$$c_s = \int_0^{L_{ef}} \Phi^2(z) \eta dz \quad (\text{VII.22-a})$$

ou ainda, para η constante,

$$c_s = \eta \int_0^{L_{ef}} \Phi^2(z) dz \quad (\text{VII.22-b})$$

obtendo-se a expressão,

$$c_s = \eta L_{ef} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (\text{VII.22-c})$$

a qual, utilizando os valores dos parâmetros deste exemplo de aplicação, resulta em

$$c_s = 77,397 \times 10^6 \times 2,52 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = 44,227 \times 10^6 \frac{\text{kN s}}{\text{m}}$$

Os valores numéricos da rigidez elástica total e dos parâmetros do solo são a seguir substituídos na equação do deslocamento lateral no topo da estaca para o apoio visco-elástico do Modelo Visco-Elástico Linear:

$$\Delta\delta_j(t) = \frac{1}{(K_E + K_e)} \frac{e_0}{L_{ef}} \Delta P_j(t) + \left(\frac{K_E + K_s - \beta c_s}{K_E + K_e} \right) \frac{1}{c_s} \frac{e_0}{L_{ef}} e^{-\beta t} \int_{t_j}^t e^{\beta\tau} \Delta P_j(\tau) d\tau \quad (\text{IV.22}')$$

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^J \Delta\delta_j(t) \quad (\text{IV.23}')$$

Substituindo então na equação IV.22' os valores numéricos para os diversos parâmetros envolvidos neste exemplo de aplicação prático: $L_{ef} = 2,52 \text{ m}$; $K_e = 20.465,0 \text{ kN/m}$; $K_E = K_s = 185,43 \text{ kN/m}$; e $c_s = 44,23 \times 10^6 \text{ kN s/m}$, e a excentricidade acidental:

$$e_0 = \frac{b}{30} \quad (\text{VII.23})$$

onde o parâmetro b é a menor dimensão da seção transversal do pilar P_{12} (20 x 80 cm) típico da estrutura em estudo:

$$e_0 = \frac{0,20}{30} \cong 0,007 \text{ m}$$

A equação IV.23' da deflexão lateral da extremidade superior do conjunto de estacas foi solucionada utilizando-se o programa Mathcad [10]. Através deste programa foram obtidos todos os históricos de deslocamentos, para os dois modelos em estudo, dependendo da forma de aplicação da força axial excêntrica.

Para análise deste exemplo são aplicados três tipos de carregamento. Todos os tipos de carregamento possuem força axial máxima $P_{\max} = 3500 \text{ kN}$ (carga de serviço de P_{12}), tempo total de construção do edifício estimado em 300 dias e tempo máximo de análise estipulado em $t_{\max} = 800 \text{ dias}$.

- a) **Carregamento 1:** contínuo com velocidade de carregamento constante durante todo o período de construção (Figura VII.8).

Embora este carregamento não retrate a condição real da construção é aqui utilizado como uma função de referência teórica para posterior avaliação dos resultados teóricos obtidos com carregamentos práticos.

O deslocamento máximo (δ_{\max}) obtido para o ponto no topo da estaca com este modelo visco-elástico linear é de 0,47 mm.

Ressalta-se que esta deflexão máxima na extremidade superior da estaca é relativa a carga axial excêntrica máxima e para o tempo máximo de análise:

$$t_{\max} = 800 \text{ dias}$$

$$P(t_{\max}) = P_{\max} = 3500 \text{ kN}$$

$$\delta(t_{\max}) = \delta_{\max}$$

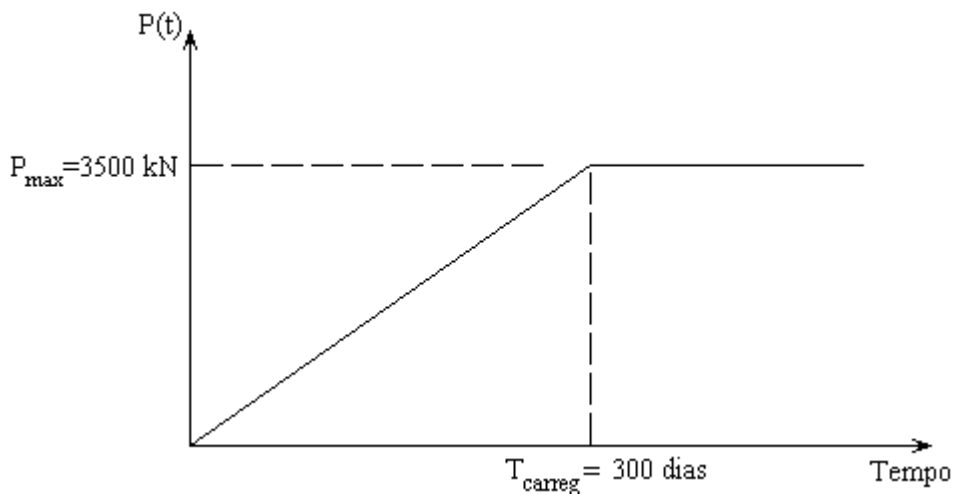


Figura VII.8: Carregamento 1 - Contínuo

- b) **Carregamento 2:** acréscimos de carga hipoteticamente instantâneos, mantidos constantes por um período determinado de tempo. Para este carregamento foram estipulados dez passos de carga, simulando um número aproximado de pavimentos do edifício (Figura VII.9).

O término do carregamento ($T_{\text{carreg}} = 300 \text{ dias}$) do conjunto de estacas deve ocorrer no mesmo instante para os três tipos de carregamento, ou seja, a força axial deve atingir seu valor máximo no mesmo tempo para os três tipos de carregamento.

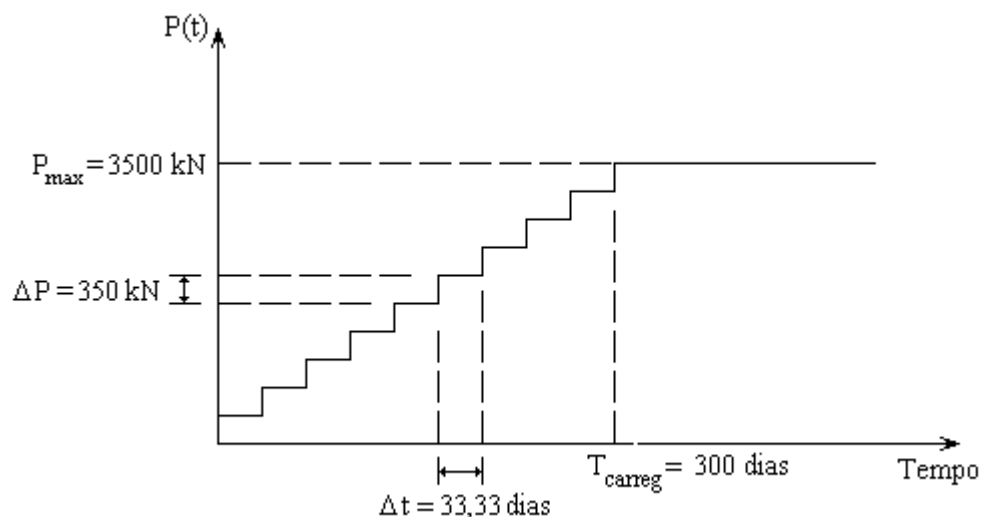


Figura VII.9: Carregamento 2 - Trechos constantes de carga

A deflexão máxima obtida para o ponto no topo da estaca para o carregamento 2, no Modelo Linear foi 0,47 mm, para um tempo de cálculo de 800 dias e uma força axial de serviço de 3500 kN.

- c) **Carregamento 3:** trechos de crescimento de carga linear e trechos de carga mantida constante (Figura VII.10):

Este carregamento simula de maneira mais aproximada as etapas construtivas dos diversos pavimentos do edifício ilustrado na Figura VII.1.

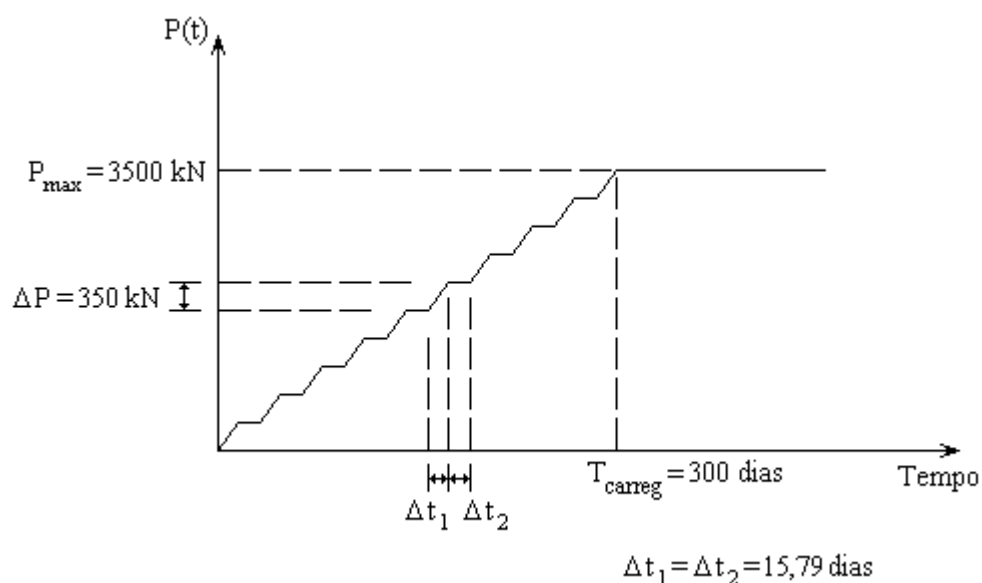


Figura VII.10: Carregamento 3 - Trechos Contínuos e Trechos com Carga Constante

O deslocamento máximo obtido no topo da estaca para este tipo de carregamento, no Modelo Linear Visco-Elastico, também é 0,47 mm.

A Tabela VII.1 reúne os resultados obtidos para as deflexões máximas neste modelo:

TABELA VII.1: MODELO VISCO-ELÁSTICO LINEAR	
TIPO DE CARREGAMENTO	DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA, NO TEMPO MÁXIMO (δ_{MAX})
Carregamento 1	0,47 mm
Carregamento 2	0,47 mm
Carregamento 3	0,47 mm

Pode-se observar que a forma de carregamento não exerce influência sobre o valor final da deflexão, tal como foi observado para o Exemplo de Aplicação Hipotético.

A Figura VII.11 mostra os históricos de deslocamentos para as três formas de carregamentos.

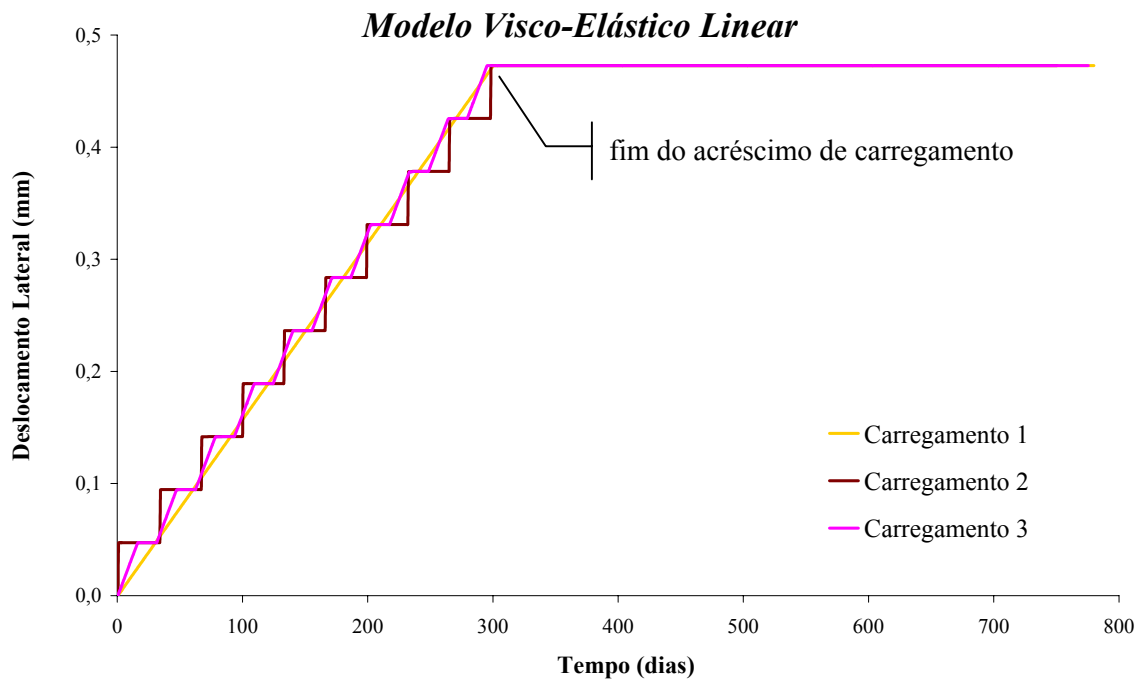


Figura VII.11: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo do Exemplo de Aplicação Prática, para o Modelo Visco-Elástico Linear

Neste Modelo Visco-Elástico Linear a curva do Carregamento 2 é muito próxima da curva do Carregamento 3 nos últimos trechos de crescimento de carga. Após ser atingida a força axial máxima não há aumento do valor da deflexão lateral.

Como foi realizado para o Exemplo de Aplicação Hipotético, as deflexões calculadas para o Modelo Visco-Elástico Linear são analisadas com relação ao deslocamento elástico linear máximo de uma haste engastada na base e livre na extremidade superior, submetida a uma carga axial excêntrica de compressão atuante no topo. Este deslocamento é denominado deflexão elástica linear máxima ($\delta_{e\max}$), sendo obtido ao ser aplicada a carga axial máxima (ver Figura IV.3):

$$F_{H\max} = \frac{e_0}{L_{ef}} P_{\max} \quad (\text{VII.24-a})$$

$$\delta_{e\max} = \frac{e_0}{L_{ef}} \frac{P_{\max}}{K_e} \quad (\text{VII.24-b})$$

$$\delta_{e\max} = \frac{0,007}{2,52} \times \frac{3500}{20465} = 0,000475 \text{ m} = 0,475 \text{ mm}$$

Para uma força axial a carga crítica de Euler é dada pela equação:

$$P_{\text{crit}} = \eta \frac{\pi^2 E_{\text{aço}} I_{\text{conj. estacas}}}{4L_{ef}^2} \quad (\text{VII.25})$$

O parâmetro η considera o efeito da condição de ligação entre a estaca e a estrutura. Para a estimativa do valor de η no ábaco da Figura VII.13, são necessários dois parâmetros associados a ilustração na Figura VII.12.

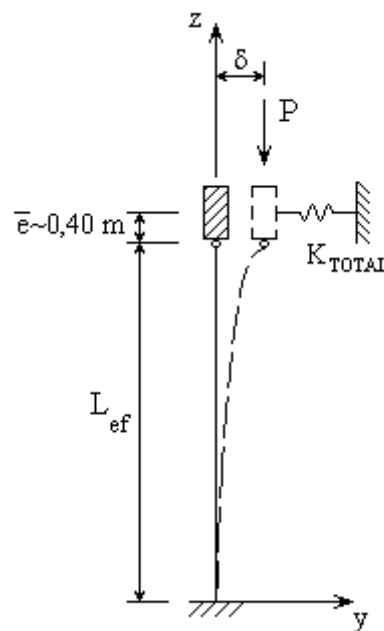


Figura VII.12: Cálculo do parâmetro η para a Carga Crítica

O valor numérico do parâmetro η pode ser estimado de um ábaco (Figura VII.13) reproduzido da referência [16].

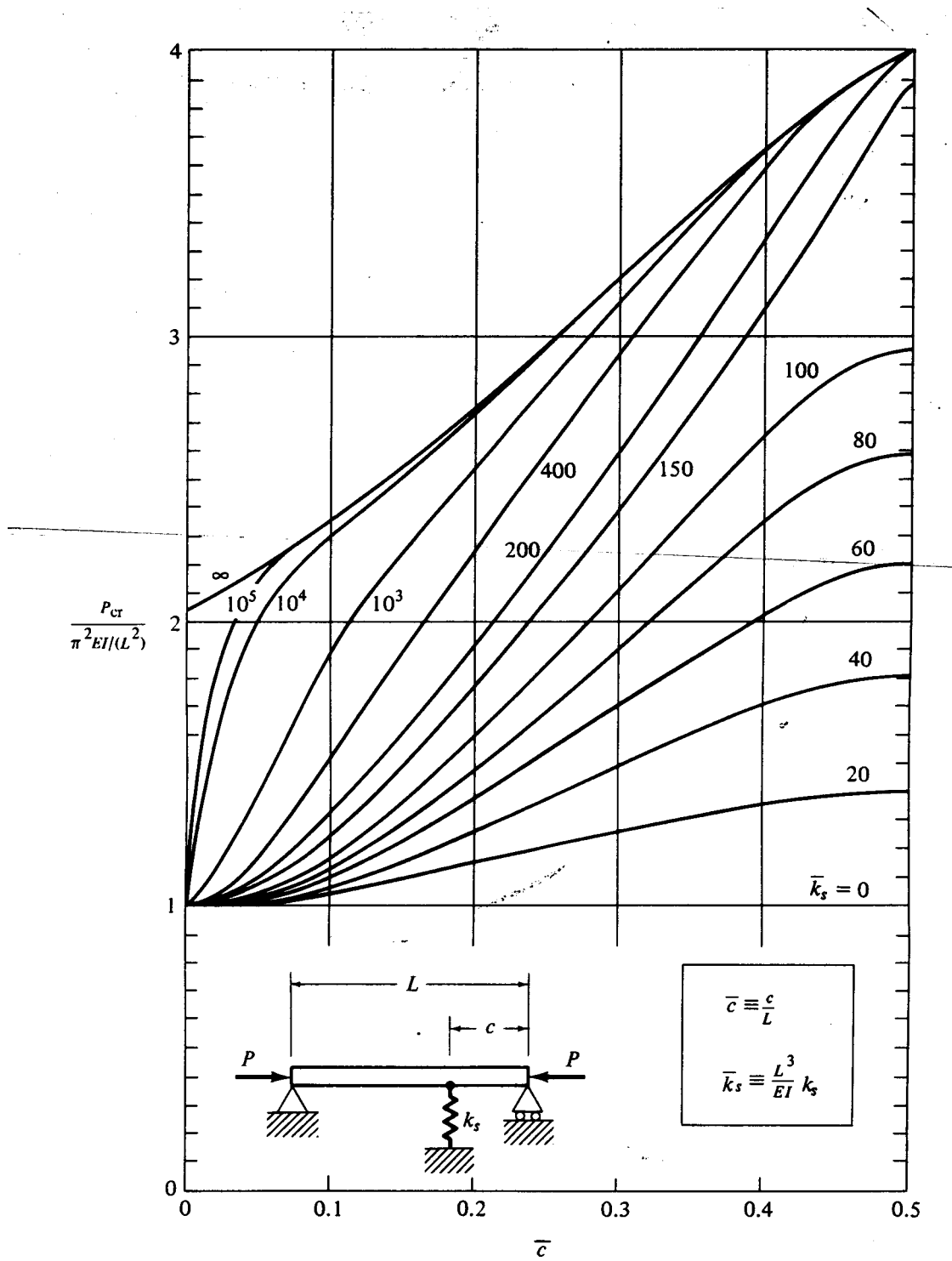


Figura VII.13: Obtenção do parâmetro η para a Carga Crítica [16]

Os parâmetros são:

$$\bar{c} = \frac{c}{L} \quad (\text{VII.26-a})$$

ou:

$$\bar{c} = \frac{(L_{ef} - \bar{e})}{2L_{ef}} \quad (\text{VII.26-b})$$

que, após substituição dos valores numéricos das constantes envolvidas, resulta em,

$$\bar{c} = \frac{(2,52 - 0,40)}{2 \times 2,52} = 0,42$$

e o segundo parâmetro é dado pela expressão

$$\bar{k}_T = \frac{L^3}{E_{aço} I_{conj. estacas}} \times K_{TOTAL} \quad (\text{VII.27})$$

resulta, com a substituição dos valores numéricos, em

$$\bar{k}_T = \frac{(2 \times 2,52)^3}{(2,1 \times 10^8) \times (5 \times 282 \times 10^{-8})} \times (1,991 \times 10^4) = 860$$

Agora com os valores de c e k_T , obtém-se do ábaco da Figura VII.13, $\eta = 3,75$.

Para este conjunto de parâmetros a carga crítica (equação VII.25) resulta em,

$$P_{crit} = 3,75 \left[\frac{\pi^2 \times (2,1 \times 10^8) \times (5 \times 282 \times 10^{-8})}{4 \times (2,52)^2} \right] = 4341 \text{ kN}$$

A Figura VII.14 apresenta as curvas obtidas das equações para $\delta(t)$ para o exemplo de aplicação prático. Neste gráfico adimensional, a ordenada é a relação entre a carga axial excêntrica aplicada ao exemplo prático e a carga crítica de Euler; a abscissa é a razão entre os deslocamentos laterais no topo do conjunto de estacas e o deslocamento elástico linear máximo.

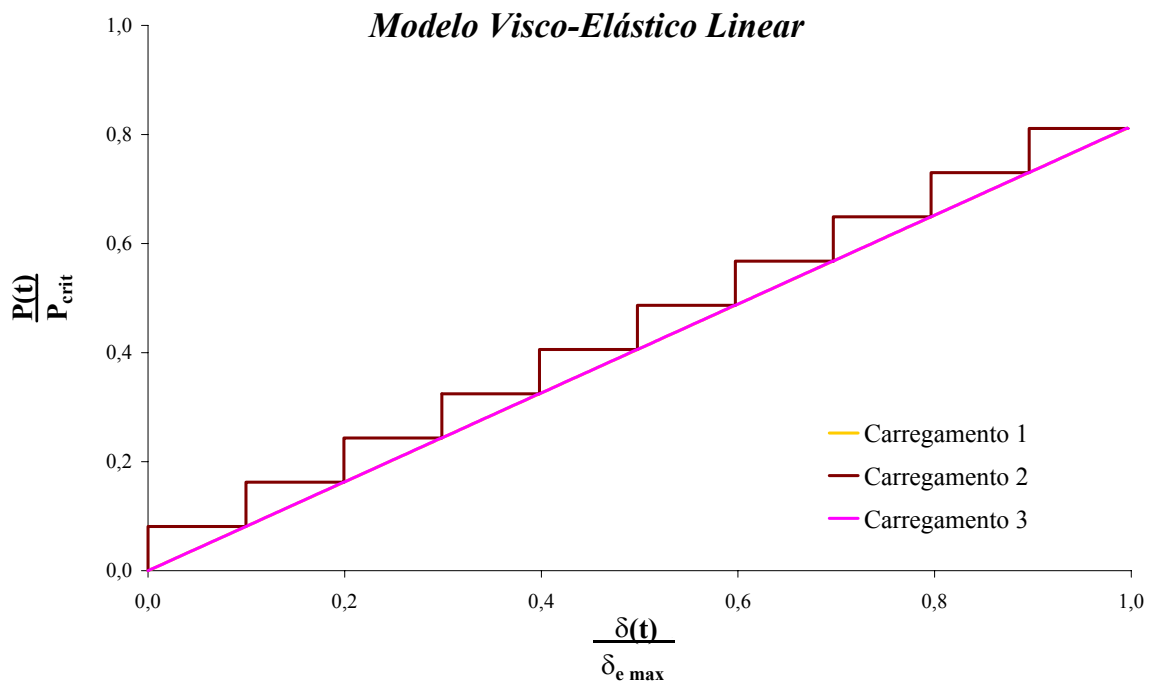


Figura VII.14: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Modelo Linear

A Figura VII.14 mostra também o crescimento do deslocamento lateral para os Carregamentos 2 e 3, nos trechos em que a carga axial tem valor constante. As respostas encontradas com o Modelo Visco-Elástico Linear para as deflexões laterais para estes dois tipos de carregamentos são praticamente iguais. Observa-se que o efeito da fluência é pequeno.

VII.2. APLICAÇÃO DO MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR

O Modelo Visco-Elástico Não-Linear descrito no Capítulo V é aplicado ao problema da Figura VII.2, sendo este modelo ilustrado na Figura VII.15.

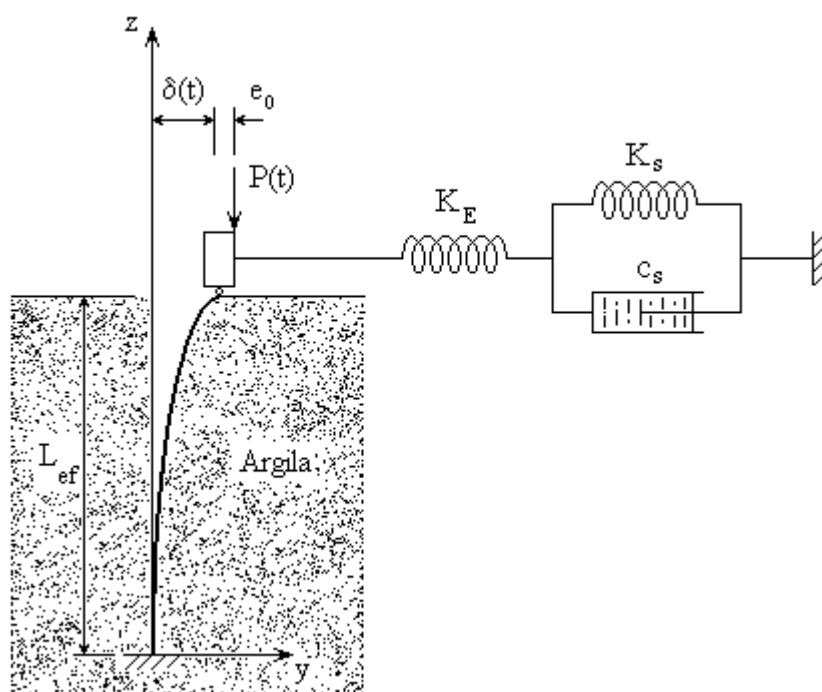


Figura VII.15: Modelo Visco-Elástico Não-Linear - Exemplo de Aplicação Prático

Neste exemplo, o coeficiente de rigidez $K_e^{NL}(t)$ corresponde a mesma superposição das contribuições de rigidez indicados no início da seção VII.1 para o Modelo Visco-Elástico Linear, exceto no que diz respeito ao conjunto de estacas cuja rigidez elástica é agora não-linear e variável no tempo, já que depende do deslocamento lateral do topo das estacas que, por sua vez, depende do tempo.

As propriedades do exemplo são as mesmas utilizadas no Modelo Visco-Elástico Linear:

- i. Comprimento efetivo do conjunto de estacas:

$$L_{ef} = 2,52 \text{ m}$$

- ii. Excentricidade accidental mínima, de acordo com a NB-1:

$$e_0 = 0,007 \text{ m}$$

- iii. Carga Crítica de Euler:

$$P_{crit} = 4341 \text{ kN}$$

- iv. Coeficiente de rigidez elástica do solo, para o Modelo de Boltzmann:

$$K_E = K_s = 185,43 \text{ kN/m}$$

- v. Coeficiente de amortecimento do solo, para o Modelo de Boltzmann:

$$c_s = 44,227 \times 10^6 \frac{\text{kN s}}{\text{m}}$$

Estes parâmetros são utilizados na equação que descreve o comportamento do deslocamento lateral no Modelo Visco-Elástico Não-Linear de interação solo-estrutura:

$$\Delta\delta(t) = e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left\{ \left[\frac{K_E + K_s}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{1}{c_s} \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ \Delta P(\tau) + \frac{4}{\pi} \frac{\Delta P^2(\tau)}{[P_{crit} - \Delta P(\tau)]} \right\} \right\} d\tau \right\} +$$

$$e^{-\int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta(\tau) d\tau} \left\{ \left[\frac{1}{K_E + K_e^{NL}(\tau)} \right] \frac{e_0}{L_{ef}} \left\{ \frac{d\Delta P(\tau)}{d\tau} + \frac{4}{\pi} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\Delta P^2(\tau)}{[P_{crit} - \Delta P(\tau)]} \right\} \right\} \right\} d\tau \right\} \quad (\text{V.27'})$$

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^J \Delta\delta_j(t) \quad (\text{V.28'})$$

Esta equação integral foi solucionada através da utilização do programa computacional Mathcad [1]. O programa desenvolvido para este modelo encontra-se no Apêndice A.

Para o Exemplo de Aplicação Prático deste Modelo Visco-Elástico Não-Linear, foram também considerados os três tipos de carregamento, cujas características serão exatamente as mesmas daquela adotadas na seção anterior (VII.1):

- a) **Carregamento 1:** contínuo com velocidade constante durante toda a construção (Figura VII.8);
- b) **Carregamento 2:** acréscimos de carga hipoteticamente instantâneos, mantidos constantes por um período determinado de tempo (Figura VII.9); e
- c) **Carregamento 3:** trechos de crescimento de carga linear e trechos de carga mantida constante (Figura VII.10).

A Tabela VII.2 contém os resultados para o deslocamento lateral máximo (δ_{\max}) obtidos para os três tipos de carregamento. Esta deflexão é a obtida na força máxima (P_{\max}) e no tempo máximo de cálculo (T_{\max}) e resulta do somatório do deslocamento elástico não-linear com o deslocamento visco-elástico, no topo do conjunto de estacas.

TABELA VII.2: MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO- LINEAR	
TIPO DE CARREGAMENTO	DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA, NO TEMPO MÁXIMO (δ_{\max})
Carregamento 1	35,425 mm
Carregamento 2	35,425 mm
Carregamento 3	35,425 mm

Como ocorreu no Modelo Visco-Elástico Linear, os deslocamentos laterais máximos para os três tipos de carregamentos resultam iguais, demonstrando que a forma de carregamento da estrutura não exerce influência sobre este valor máximo, desde que mantido o intervalo de tempo para atingir a mesma carga máxima.

A Figura VII.16 apresenta as curvas respostas do deslocamento lateral na extremidade livre da estaca em função do tempo, para os três tipos de carregamentos.

Observa-se que as deflexões laterais tendem a crescer de acordo com a forma do carregamento aplicado à estrutura, mas que as três curvas tendem para um mesmo patamar referido ao deslocamento lateral máximo.

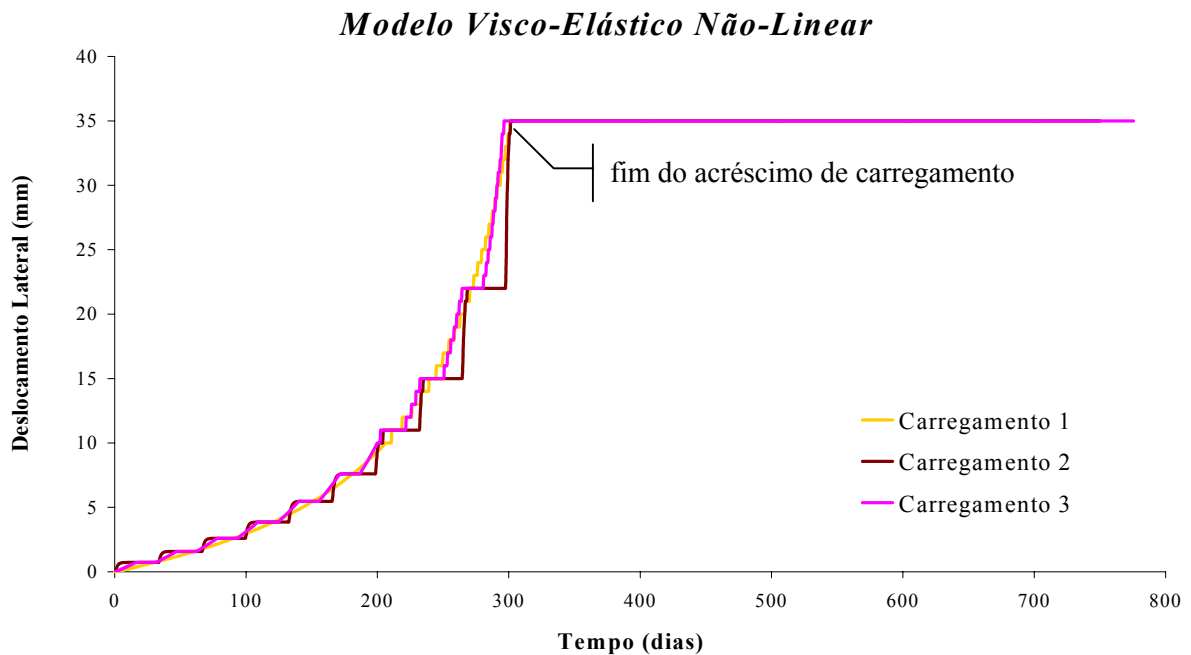


Figura VII.16: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo do Exemplo de Aplicação Prática, para o Modelo Visco-Elástico Não-Linear

Os deslocamentos laterais obtidos com este Modelo Visco-Elástico Não-Linear são a seguir analisados com relação ao deslocamento elástico não-linear máximo ($\delta_e^{NL}_{max}$), obtido para a carga axial máxima aplicada excentricamente no topo de uma estaca engastada na base e livre na extremidade superior. Considerando-se a não-linearidade geométrica entre a força e o deslocamento, este deslocamento máximo é calculado com a expressão:

$$\delta_e^{NL}_{max} = \frac{4e_0}{L_{ef}} \frac{P_{max}}{(P_{crit} - P_{max})} \quad (VII.28)$$

que resulta, após a substituição dos valores numéricos dos parâmetros envolvidos, em,

$$\delta_{e \max}^{NL} = \frac{4 \times 0,007}{2,52} \frac{3500}{(4314 - 3500)} = 0,03832 \text{ m} = 38,32 \text{ mm}$$

tendo a carga crítica de Euler o valor $P_{crit} = 4341 \text{ kN}$.

A Figura VII.17 apresenta curvas relativas às respostas obtidas para a equação de $\delta(t)$ em função dos carregamentos aplicados ao Modelo Visco-Elástico Não-Linear. Este gráfico é adimensional; a abscissa é a relação entre os deslocamentos laterais no topo do conjunto de estacas e o deslocamento elástico não-linear máximo, enquanto a ordenada é a razão entre a carga axial excêntrica aplicada ao exemplo e a carga crítica de Euler.

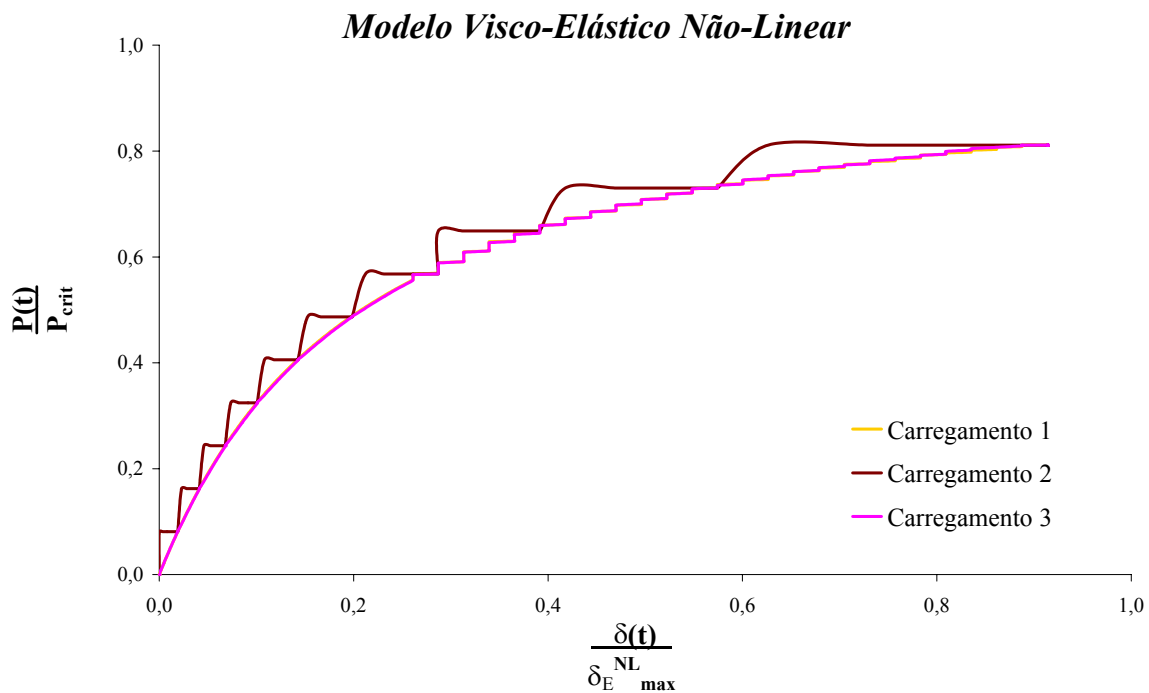


Figura VII.17: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento – Modelo Visco-Elástico Não-Linear

Observa-se na Figura VII.17 que nos trechos do carregamento 2, em que os passos de carga são constantes, há o aumento do valor da deflexão lateral. A exemplo do que ocorreu para o Modelo Visco-Elástico Linear, as diferenças entre as três curvas obtidas com o Modelo Visco-Elástico Não-Linear para os deslocamentos laterais são muito pequenas.

VII.3. ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS

A análise comparativa dos resultados obtidos para o exemplo de aplicação prático é realizada através de diversas tabelas e gráficos. Os valores numéricos foram obtidos através da resolução das equações de deflexão lateral dos dois modelos propostos.

Na Tabela VII.3 encontram-se os resultados dos deslocamentos máximos do exemplo de aplicação prático para os dois modelos. Os deslocamentos máximos são os obtidos no tempo de cálculo máximo e para a força axial excêntrica máxima, ou seja, para:

$$t_{\max} = 800 \text{ dias}$$

$$P(t_{\max}) = P_{\max} = 3500 \text{ kN}$$

$$\delta(t_{\max}) = \delta_{\max}$$

Nesta tabela estão reunidos os valores das deflexões laterais máximas no topo da estaca, para o carregamento 1 (Figura VII.8), para o carregamento 2 (Figura VII.9) e para o carregamento 3 (Figura VII.10). Foi possível reunir estes resultados em somente uma tabela, pois os deslocamentos laterais máximos dos Modelos Visco-Elásticos Linear e Não-Linear não mudam de valor quando há variação no tipo de carregamento.

TABELA VII.3: DESLOCAMENTOS MÁXIMOS -TIPO DE CARREGAMENTO 1, 2 OU 3	
MODELO	DESLOCAMENTO LATERAL NO TOPO DA ESTACA PARA A CARGA MÁXIMA, NO TEMPO MÁXIMO (δ_{\max})
Modelo Visco-Elástico Linear	0,473 mm
Modelo Visco-Elástico Não-Linear	35,425 mm

Os valores obtidos para os deslocamentos máximos nos Modelos Visco-Elásticos Linear e Não-Linear podem ser comparados com as deflexões puramente elásticas linear e não-linear máximas, respectivamente:

$$\delta_{e_{\max}} = 0,475 \text{ mm}$$

$$\delta_{e_{\max}}^{\text{NL}} = 38,322 \text{ mm}$$

A Tabela VII.4 mostra as diferenças percentuais entre as deflexões obtidas através dos dois modelos e os deslocamentos elásticos linear e não-linear máximos, calculadas com as equações:

$$\Delta\delta_{\max} = \frac{\delta_{e_{\max}} - \delta_{\max}}{\delta_{e_{\max}}} \times 100\% \quad (\text{VII.29-a})$$

$$\Delta\delta_{\max} = \frac{\delta_{e_{\max}}^{\text{NL}} - \delta_{\max}}{\delta_{e_{\max}}^{\text{NL}}} \times 100\% \quad (\text{VII.29-b})$$

TABELA VII.4: DIFERENÇAS - TIPO DE CARREGAMENTO 1, 2 OU 3	
MODELO	DIFERENÇA ENTRE OS DESLOCAMENTOS LATERAIS MÁXIMOS NO TOPO DA ESTACA ($\Delta\delta_{\max}$)
Modelo Visco-Elástico Linear	0,42 %
Modelo Visco-Elástico Não-Linear	7,56 %

Observa-se que o Modelo Visco-Elástico Linear resulta em deflexões máximas consideravelmente menores, quando comparadas com as encontradas para o Modelo Visco-Elástico Não-Linear, que considera a não-linearidade da relação carga-deslocamento.

Na Figura VII.18 estão plotadas as curvas dos históricos do deslocamento lateral, no topo da estaca, em função do tempo, para os dois modelos e para o tipo de Carregamento 1.

Nesta figura está também o histórico de deslocamentos obtidos das equações puramente elásticas linear e não-linear.

A expressão do deslocamento elástico linear é dada por:

$$\delta_e(t) = \frac{e_0}{L_{ef}} \frac{P(t)}{K_e} \quad (\text{VII.30})$$

De acordo com [11], a expressão do deslocamento elástico não-linear é:

$$\delta_e^{NL}(t) = \frac{4e_0}{\pi} \left[\frac{P(t)}{P_{crit} - P(t)} \right] \quad (\text{VI.1'})$$

onde a carga crítica de Euler é $P_{crit} = 4341$ kN; e a excentricidade acidental mínima, de acordo com a NB-1, é: $e_0 = 0,007$ m..

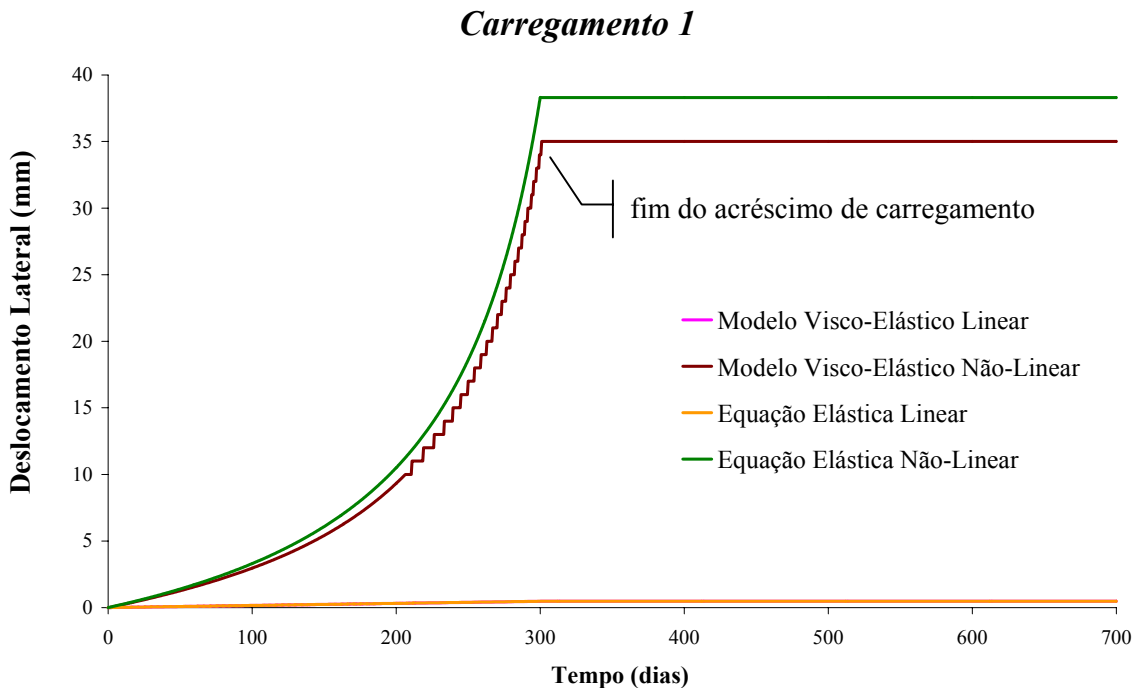


Figura VII.18: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Prática - Carregamento 1

Na Figura VII.19 encontram-se as curvas adimensionais, para os dois modelos, quando submetidos ao tipo de Carregamento 1. Esta figura apresenta também as curvas relativas às equações elásticas linear e não-linear. A ordenada é a relação entre a carga axial excêntrica aplicada ao exemplo hipotético e a carga crítica de Euler. Para as curvas da equação elástica linear e do Modelo Visco-Elástico Linear a abscissa é a razão entre os deslocamentos obtidos nas respectivas equações matemáticas e o deslocamento elástico linear máximo ($\delta_{e \max} = 0,475 \text{ mm}$). Nas curvas da equação elástica não-linear e do Modelo Visco-Elástico Não-Linear a abscissa é a razão entre os deslocamentos calculados e o deslocamento elástico não-linear máximo ($\delta_{e \max}^{\text{NL}} = 38,322 \text{ mm}$).

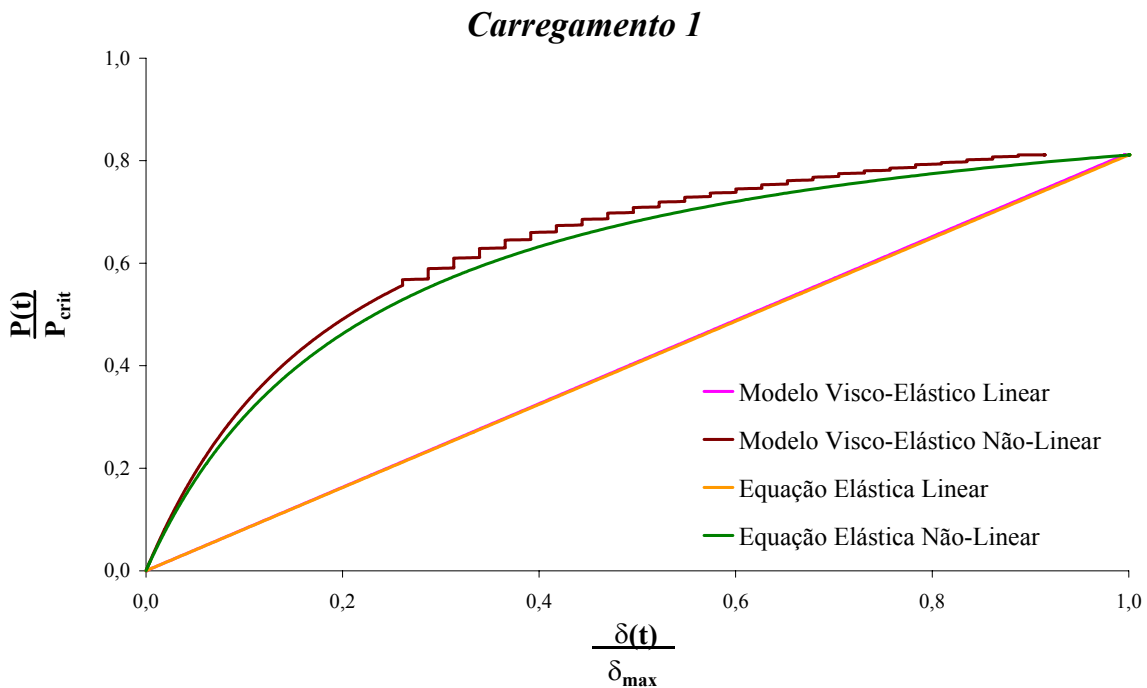


Figura VII.19: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento - Carregamento 1

Observa-se nesta figura que a curva do Modelo Visco-Elástico Não-Linear é a que fornece os maiores valores para os deslocamentos laterais no topo da estaca, durante todo o processo de carregamento do conjunto de estacas.

Os históricos de deslocamentos laterais para o Carregamento 2 estão plotados na Figura VII.20, a qual mostra também as curvas obtidas das equações elásticas linear e não-linear.

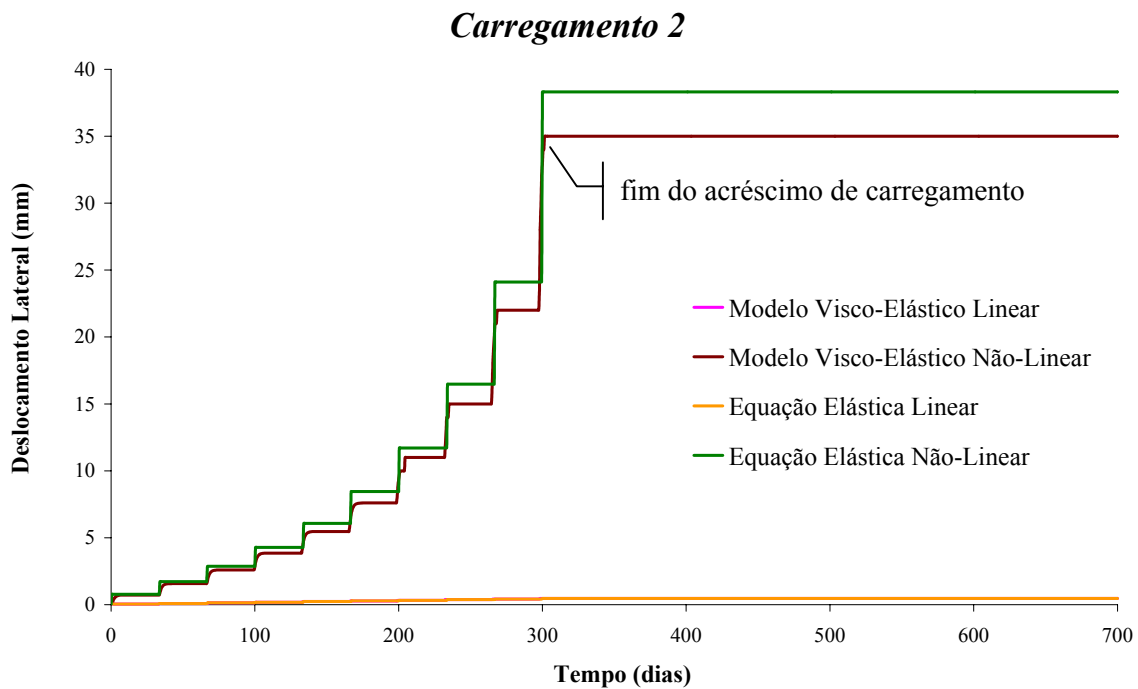


Figura VII.20: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Prática -Carregamento 2

Observa-se na Figura VII.20 que o Modelo Visco-Elástico Linear sempre fornece valores menores que os do Modelo Visco-Elástico Não-Linear, já que este último considera a não-linearidade geométrica envolvida na flambagem lateral da estaca. Observa-se também que os deslocamentos para os dois modelos tendem a um valor máximo, constante no tempo.

As curvas adimensionais para o tipo de Carregamento 2 estão desenhadas na Figura VII.21. Nesta figura encontram-se as duas curvas relativas aos deslocamentos laterais obtidos das equações dos dois modelos visco-elásticos propostos e as curvas das soluções das equações elásticas linear e não-linear. As abscissas e as ordenadas deste

gráfico têm as mesmas relações que assumiram no gráfico adimensional construído para o tipo de Carregamento 1 (ver Figura VII.19).

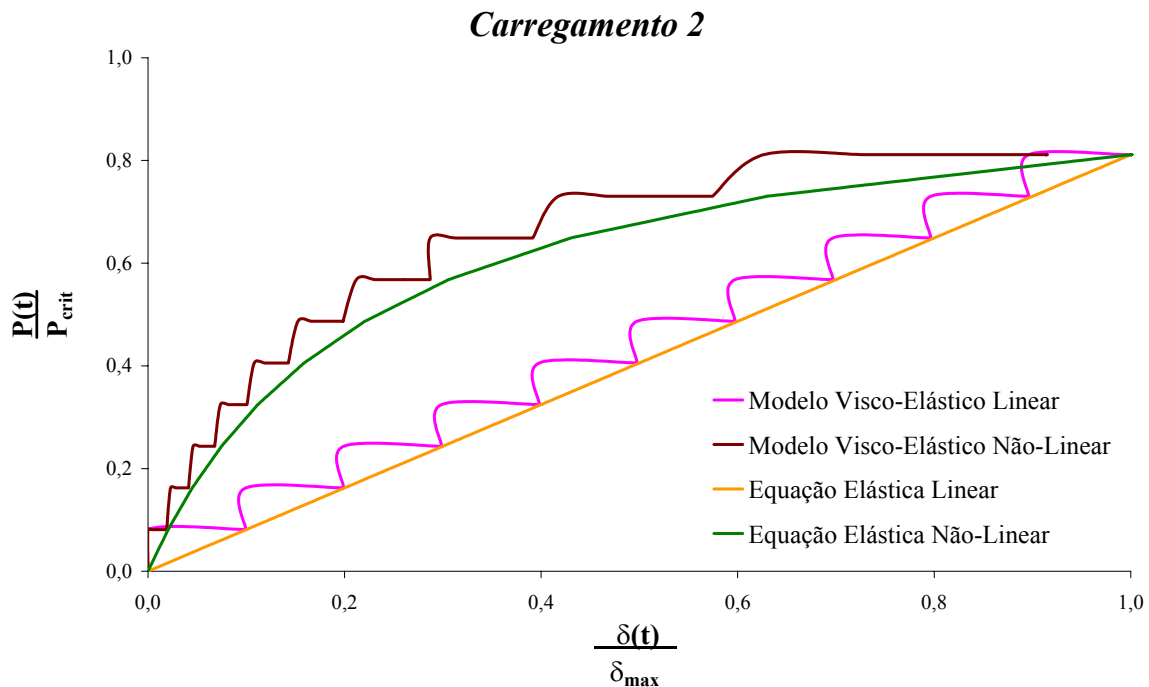


Figura VII.21: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento - Carregamento 2

Na Figura VII.21 pode-se observar o crescimento do deslocamento lateral, nos trechos de carga axial constante, para os Modelos Visco-Elásticos Linear e Não-Linear.

A tendência de estabilização da curva para um deslocamento constante, para uma carga não variável, é esperada para a equação elástica não-linear.

Os históricos de deslocamentos laterais para o Carregamento 3 estão plotados na Figura VII.22. Nesta figura estão as curvas referidas aos dois modelos e as curvas das equações elásticas linear e não-linear.

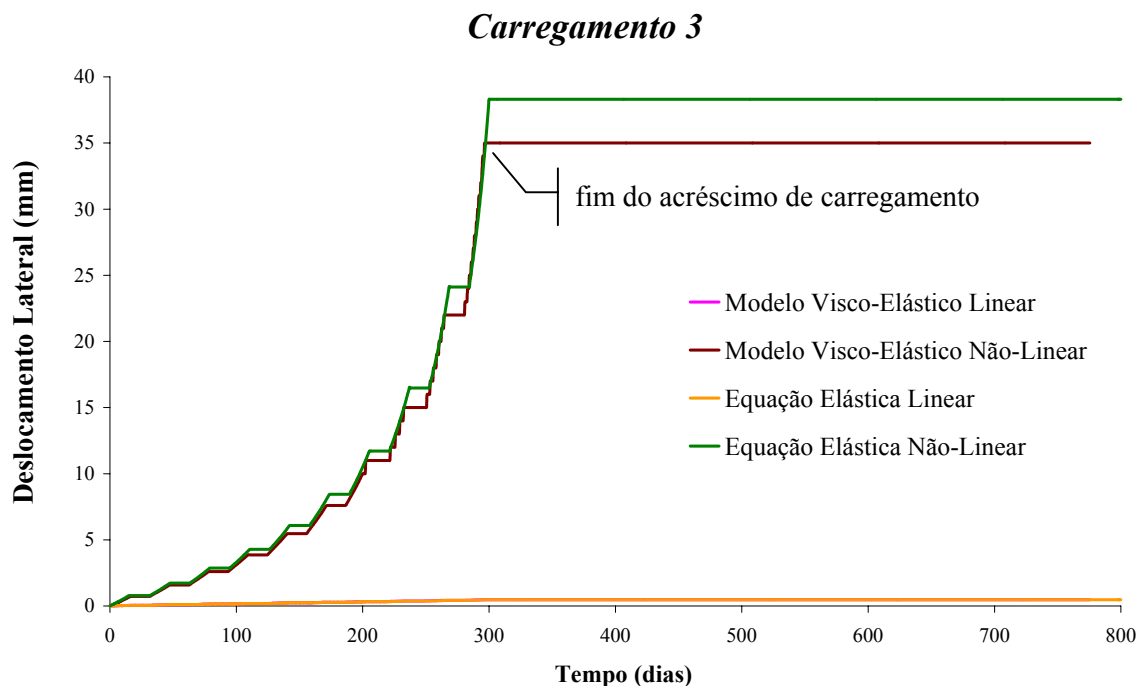


Figura VII.22: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo para o Exemplo de Aplicação Prático - Carregamento 3

Nesta figura observa-se que todas as curvas acompanham a forma de crescimento do tipo de carregamento e tendem a um valor constante para o deslocamento lateral máximo. Como ocorreu para os dois tipos de carregamentos estudados anteriormente, a equação do Modelo Visco-Elástico Não-Linear é a que resulta nos maiores valores para os deslocamentos laterais, durante todo o processo de carregamento da estrutura.

Na Figura VII.23 encontram-se as curvas adimensionais dos dois modelos analisados, quando submetidos ao tipo de Carregamento 3. Neste gráfico também estão as curvas construídas através das soluções das equações elásticas linear e não-linear. A ordenada é a relação entre a carga axial excêntrica aplicada ao exemplo hipotético e a carga crítica de Euler. A razão utilizada na abscissa é a mesma dos gráficos adimensionais anteriormente apresentados neste capítulo.

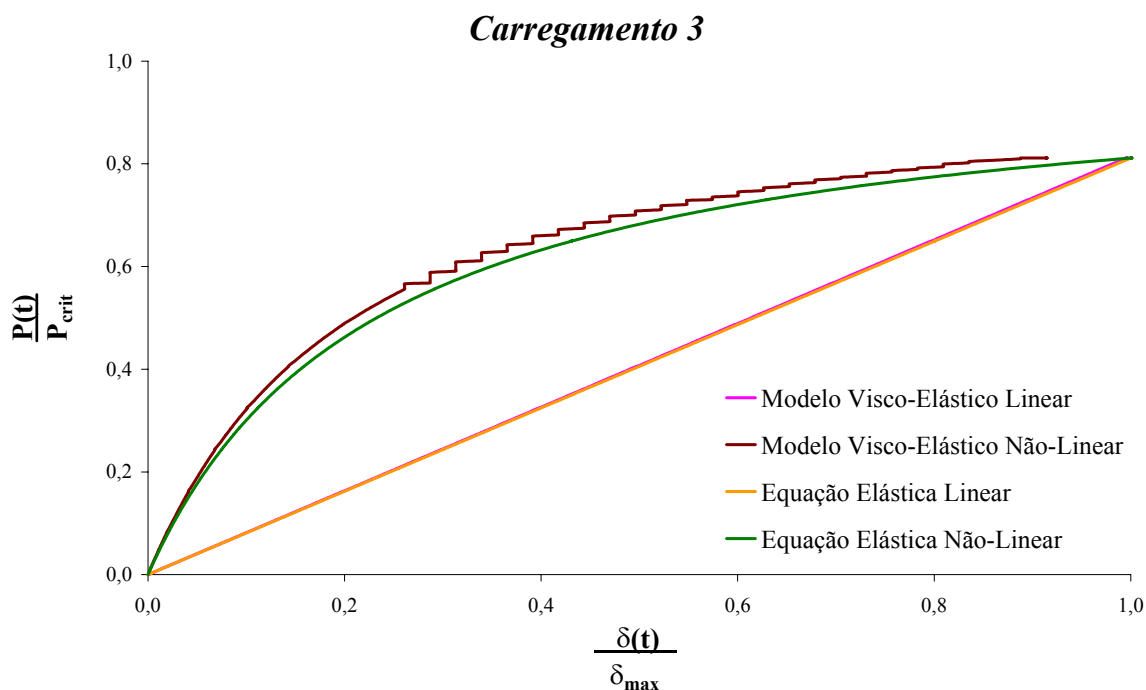


Figura VII.23: Gráfico adimensional Carga x Deslocamento - Carregamento 3

Nas curvas dos Modelos Visco-Elásticos Linear e Não-Linear, a deflexão lateral aumenta seu valor, com a carga axial constante. Este crescimento indica a existência da deflexão diferida no tempo, resultante da contribuição do elemento de Kelvin à deformação lateral destes modelos. Este tipo de crescimento não é observado nas curvas das equações elásticas linear e não-linear, que crescem somente quando o carregamento aplicado aumenta de valor.

Esta análise do comportamento das curvas de deslocamento dos dois modelos aqui formulados, também pode ser realizada para todas as curvas traçadas anteriormente, para este exemplo de aplicação prático, quando submetidos aos outros dois tipos de carregamentos.

CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

CAPÍTULO VIII

VIII.1. CONCLUSÃO

Neste trabalho são desenvolvidos dois modelos visco-elásticos simplificados para estimativas do deslocamento lateral na extremidade superior livre de uma estaca embecida em camada espessa de argila mole, sendo considerada a interação solo-estrutura diferida no tempo.

A validação do Modelo Visco-Elástico Não-Linear é feita por meio de um exemplo de aplicação prático, em um caso real de um edifício residencial envolvendo a análise do colapso da estrutura de concreto armado; sendo o colapso associado ao processo de flambagem reológica do conjunto pilar-estacas.

Ao contrário do Modelo Visco-Elástico Não-Linear aqui apresentado, os modelos simples já existentes na literatura, para flambagem de estacas em solo argiloso, não consideram o fator tempo ou o efeito reológico do solo. Os resultados numéricos obtidos com os modelos matemáticos desenvolvidos neste trabalho se correlacionam adequadamente, mostrando ser um passo adiante, com relação aos modelos simplificados, na resolução do problema reológico de interação da estrutura com o solo.

VIII.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os modelos foram desenvolvidos para tratar do problema de flambagem diferida no tempo de estacas esbeltas em camadas de argila mole, quando submetidas a uma carga de compressão axial excêntrica. Estes modelos visco-elásticos se basearam em modelos mais simples e em teorias existentes na literatura. Até onde se tem conhecimento, não foram encontrados na literatura modelos matemáticos que descrevam este tipo de comportamento de estacas, sendo portanto necessária a criação de modelos específicos adequados para esta análise.

O primeiro modelo baseado no Modelo de Boltzmann, para representar as características reológicas do solo, é um modelo visco-elástico linear, pois considera que o deslocamento lateral da estaca varia linearmente com a carga, sendo esta parcela representada no modelo pela mola hookeana.

O segundo modelo proposto é o Modelo Visco-Elástico Não-Linear e o primeiro a se basear em fundamentos de estrutura que consideram a não-linearidade existente na relação carga-deslocamento, além do modelo de Boltzmann para o solo.

No Modelo Visco-Elástico Não-Linear a estaca é admitida como estando no regime elástico, ou seja, as tensões na estaca não ultrapassam o limite de proporcionalidade do material. Caso este limite fosse transposto, a estaca entraria no regime inelástico, e a carga máxima deixaria de ser a de Euler, assumindo um valor menor do que este, denominado carga teórica de flambagem inelástica.

Para dar continuidade a esta pesquisa, a concepção de um modelo dinâmico visco-elástico e a montagem de um modelo físico experimental seriam os próximos estágios de desenvolvimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MOREIRA, T. do V., *Análise da Sensibilidade Dinâmica de Edifícios com Estruturas Esbeltas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002.
- [2] FOLQUE, J. B., *Reologia de Solos Não Saturados*. 1 ed. Lisboa, Ministério da Obras Públicas, 1961.
- [3] CAPUTO, H. P., *Mecânica dos Solos e suas Aplicações*. v. 1, 6 ed. v. 2, 3 ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1988 e 1977.
- [4] VARGAS, MILTON, *Introdução à Mecânica dos Solos*. 1 ed. São Paulo, SP, Brasil, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1978.
- [5] BOWLES, JOSEPH E., *Foundation Analysis and Design*. 3 ed., International Student Edition, McGraw-Hill International Book Company, 1982.
- [6] FLÜGGE, W., *Viscoelasticity*. 2 ed. New York - Heidelberg - Berlin, Springer-Verlag, 1975.
- [7] BLAND, D. R., *The Theory of Linear Viscoelasticity*. 1 ed. Oxford - London - New York - Paris, Pergamon Press, 1960.
- [8] VERNON, J., *Introduction to Engineering Materials*. 3 ed. Maxmillan, 1992.
- [9] TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. E., *Mecânica dos Sólidos*, v. 2. 1 ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1984.
- [10] Programa computacional MATHCAD.
- [11] TIMOSHENKO, S. P., *Theory of Elastic Stability*, 1 ed, USA, McGraw-Hill International Book Company, 1961.

[12] BATTISTA, R. C., CARVALHO, E. M. L., “Relato e Análise do Colapso Total de um Edifício em Concreto Armado”. In: *Acidentes Estruturais na Construção Civil*, v. 2, Editora Pini, pp. 63-74, 1998.

[13] BATTISTA, R. C., LOPES, F. R., “Investigação das Causas do Colapso do edifício Raimundo de Farias” – Belém, PA, Relatório Técnico COPPETEC ET-15334, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1987.

[14] DAVIDSSON M. T., ROBINSON K. E., *Bending and Buckling of Partially Embedded Piles*, 6th Conf. On Soil Mechanics & Foundation Engineering, USA, 1965.

[15] MARTINS, I. S. M., *Fundamentos de um Modelo de Comportamento de Solos Argilosos Saturados*. Tese de D.Sc., COPPE/ UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1992.

[16] BRUSH, D. O., ALMROTH, B. O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. 1 ed. USA, McGraw-Hill International Book Company, 1975.

PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DO MODELO VISCO-ELÁSTICO NÃO-LINEAR

APÊNDICE A

Neste apêndice está anexado o programa que soluciona a equação de deslocamento lateral, para estacas esbeltas submetidas a uma força axial de compressão, do Modelo Visco-Elástico Não-Linear. O histórico de deflexão, para a forma de carregamento 3, foi obtido com a utilização dos parâmetros do exemplo de aplicação prático. O programa foi construído utilizando-se a ferramenta computacional Mathcad [1]. Programa para resolução da equação matemática do Modelo Visco-Elástico Não-Linear:

Tempo Inicial:

$$t0 := 0 \quad \text{dias}$$

$$t0 := t0 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$$

$$t0 = 0 \quad \text{segundos}$$

Tempo de Aplicação de Carga:

$$taplic := 300 \quad \text{dias}$$

$$taplic := taplic \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$$

$$taplic = 2.592 \cdot 10^7 \quad \text{segundos}$$

Tempo Máximo de Cálculo:

$$tmaxcalc := 800 \quad \text{dias}$$

$$tmaxcalc := tmaxcalc \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$$

$$tmaxcalc = 6.912 \cdot 10^7 \quad \text{segundos}$$

Figura A.1: Gráfico Força Axial x Tempo - Carregamento 3

Figura A.2: Gráfico Deslocamento Lateral x Tempo - Carregamento 3

Figura A.3: Gráfico Força Axial x Deslocamento Lateral - Carregamento 3