

COLAPSO PROGRESSIVO DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS

Vinicius Maia Barreto de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Ronaldo Carvalho Battista, Ph.D

Prof. Fernando Luiz Bastos Ribeiro, D.Sc.

Prof. Eliane Maria Lopes Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2002

OLIVEIRA, VINICIUS MAIA BARRETO DE

Colapso Progressivo de Estruturas

Reticuladas espaciais [Rio de Janeiro] 2002

X, 72p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Colapso Progressivo
2. Estruturas Reticuladas Espaciais
3. Estabilidade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais,
meus irmãos, à Lu e
ao professor Ronaldo.

Agradecimentos

Aos amigos Silvos, Jaime, Roberto, Wendell, Cláudio Márcio, por ajudar a diminuir a saudade da família.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E a todos mais que de alguma forma, em algum momento, me ajudaram a atingir esta meta.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

COLAPSO PROGRESSIVO DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS

Vinicius Maia Barreto de Oliveira

Abril/2002

Orientador: Ronaldo Carvalho Battista

Programa: Engenharia Civil

No presente trabalho apresenta-se uma discussão sucinta sobre os aspectos mais relevantes da instabilidade estrutural associados aos mecanismos de colapso progressivo de sistemas reticulados espaciais. Para isso são utilizadas estratégias numérico-computacionais quase-estáticas para acompanhar a progressão dos mecanismos dinâmicos de colapso. Faz-se ainda uma breve discussão dos possíveis modos de falha dos componentes estruturais e dos seus modelos matemáticos que descrevem os comportamentos pós-críticos elásticos e inelásticos. Dentro de um enfoque geral do problema da instabilidade global e/ou local dessas estruturas, atenção é também voltada à sensibilidade da estrutura e de seus componentes aos desvios aleatórios das suas características físicas e geométricas. Aspectos da instabilidade dinâmica são apresentados juntamente com técnicas para a sua análise. Finalmente são descritas sucintamente algumas técnicas usuais de análise do colapso progressivo, seguidas de um exemplo completo de modelagem do colapso de uma estrutura reticulada espacial.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

PROGRESSIVE COLLAPSE OF DOUBLE LAYER GRIDS

Vinicius Maia Barreto de Oliveira

April / 2002

Advisor: Ronaldo Carvalho Battista

Department: Civil Engineering

In the present work the most relevant aspects of the elastic and inelastic structural instability related to the collapse mechanisms of double layer grids are briefly discussed. To do this numerical-computational quasi-static schemes are used to trace the path of dynamic mechanism of collapse. Moreover it is also made a discussion of the potential failure modes of each structural component and the models which describes the inelastic and elastic post-critical behavior. In an overall view of the local/global instability problems, a special attention is given to the sensitivity of the structure and its components to the random variation of the physics and geometric characteristics. Dynamic instability aspects are also presented along with their particular analysis techniques. Finally, some common techniques to analyze the progressive collapse are presented, followed by a complete example of progressive collapse modeling.

SUMÁRIO

<u>I. INTRODUÇÃO</u>	1
<u>II. O FENÔMENO DO COLAPSO PROGRESSIVO</u>	3
<u>III. ESTABILIDADE ESTÁTICA</u>	5
III.1. MODELO MECÂNICO CLÁSSICO – PERFEITO	7
III.2. MODELO MECÂNICO CLÁSSICO – IMPERFEITO	10
III.2.1 FLAMBAGEM	12
III.3. PROBLEMA DO ACOPLAMENTO MODAL	13
III.3.1 MODELO MECÂNICO DE AUGUSTI (PONTOS PRIMÁRIOS NÃO-COINCIDENTES)	13
III.3.2 MODELO MECÂNICO DE AUGUSTI (PONTOS PRIMÁRIOS COINCIDENTES)	17
<u>IV. MODELOS DE COLAPSO POR INSTABILIDADE LOCAL E GLOBAL</u>	20
IV.1. INSTABILIDADE DE BARRAS COMPRIMIDAS	21
IV.2. INSTABILIDADE DE PAREDES DO PERFIL	25
IV.3. INSTABILIDADE DAS JUNTAS	26
IV.4. INSTABILIDADE LOCAL/GLOBAL	30
IV.4.1 MECANISMOS DE INTERAÇÃO LOCAL/GLOBAL	31
IV.5. INSTABILIDADE GLOBAL DA ESTRUTURA	32
<u>V. MODELOS SIMPLIFICADOS PARA A ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS</u>	34
<u>VI. INSTABILIDADE DINÂMICA</u>	42
VI.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA A TRELIÇA DE VON MISES	44
VI.2. ANÁLISE DO EQUILÍBRIO COM O PLANO-FASE	46
VI.3. CRITÉRIO DE BUDIANSKY	50

VI.4. CRITÉRIO DA BARREIRA POTENCIAL	52
VI.5. ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DA EQUAÇÃO DE DUFFING	56
<u>VII. TÉCNICAS USUAIS PARA ANÁLISE DO COLAPSO PROGRESSIVO</u>	<u>59</u>
<u>VIII. MODELAGEM DO COLAPSO PROGRESSIVO</u>	<u>61</u>
VIII.1. EFEITO DINÂMICO DO COLAPSO DE UMA BARRA	67
<u>IX. CONCLUSÃO</u>	<u>68</u>
<u>X. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	<u>70</u>

SIMBOLOGIA

A	- Área da seção
E	- Módulo elástico
$f(\xi)$	- função de engastamento
$f'(\xi)$	- primeira derivada da função de engastamento
H	- Projeção vertical da treliça de Von Mises
I	- Inércia da seção
L	- comprimento da haste do modelo mecânico clássico e da treliça de Von Mises
P	- carga de compressão
P_E	- carga crítica de Euler
P^*	- carga de esmagamento
R	- Projeção horizontal da treliça de Von Mises
T	- energia cinética
\mathbf{u}	- campo de deslocamentos
\mathbf{u}^F	- posição de equilíbrio estático
U	- energia potencial elástica
\mathbf{v}	- campo de deslocamentos incrementais
V	- energia potencial total
δV	- primeira variação do funcional de energia
$\delta^2 V$	- segunda variação do funcional de energia
y	- deslocamento transversal da barra comprimida
α_i	- ângulo entre a haste e os eixo horizontal i para o modelo de Augusti
δ	- Deslocamento vertical da treliça de Von Mises
Δ	- encurtamento
λ	- parâmetro de carregamento
λ_f	- índice de esbeltez
Λ_i^C	- pontos primários de bifurcação
Λ_B	- carga de bifurcação
Λ_f	- carga de flambagem
λ_c	- carga crítica
σ_y	- tensão de escoamento

- ξ - rotações do modelo mecânico clássico e da treliça de Von Mises
- $\bar{\xi}$ - desvio angular inicial
- ξ_i - desvios angulares do modelo de Augusti
- $\bar{\xi}_i$ - desvios angulares iniciais

I. INTRODUÇÃO

Sistemas reticulados espaciais têm sido largamente usados em estruturas de cobertura de grandes vãos, pontes, torres de transmissão, plataformas offshore, etc. Deve-se isso ao fato deste tipo de estrutura combinar grande capacidade portante com leveza, facilidade de montagem, além de beleza e estética agradável. Muitos exemplos de estruturas de grandes coberturas podem ser vistos em áreas de convenções como o Rio Centro (Rio de Janeiro) e o Anhembi (São Paulo), em ginásios de esportes como o Ginásio Poliesportivo de Brasília, além de outras como a cobertura dos Terminais de Cargas e de Passageiros 2 do Aeroporto Galeão, no Rio de Janeiro.

O comportamento deste tipo de estrutura, devido a sua larga utilização, tem sido alvo de variados estudos. Dentre estes estudos, um que vem se destacando é o do colapso progressivo, bastante enfatizado após o colapso do Hartford Coliseum, em 1978. Este tipo de catástrofe, com falhas frágeis das estruturas, mostram claramente que se precisa de uma modelagem para melhor representar a real resposta da estrutura diante dos carregamentos impostos.

Para a maioria das estruturas, como sistemas de placas reticuladas espaciais de duas folhas planas (duas camadas planas), a inclusão de uma não-linearidade física, que tem a função de simular a flambagem inelástica dos elementos, é suficiente para melhor representar o comportamento no colapso. Estruturas reticuladas espaciais em forma de cascas tiram proveito de sua própria geometria para resistir às cargas externas através de esforços extensionais (ou de membrana num sentido global). Entretanto, a instabilidade estrutural ocorre com a perda da capacidade de resistir a estas cargas aplicadas através da rigidez extensional (ou de membrana), devido às inevitáveis imperfeições geométricas iniciais e demais desvios existentes no sistema estrutural idealizado. Estas estruturas são, portanto, sensíveis às imperfeições iniciais e a perda de estabilidade é acompanhada de grandes deslocamentos até atingir uma outra configuração de equilíbrio ou o colapso. Nesse caso, a análise de seu comportamento de instabilidade local e global e do colapso inelástico requerem a consideração de não-linearidades geométricas e físicas.

Para que se tenha uma melhor compreensão do comportamento estrutural descrito através dos resultados obtidos em análises não-lineares, é necessário que se tenha um bom entendimento do fenômeno de instabilidade estrutural. A partir da análise de modelos simples, podem ser detectados pontos críticos e traçados os caminhos pós críticos, que apresentam dificuldades numéricas durante o processo de solução. Os modos de flambagem da estrutura imperfeita também podem ser encontrados a partir da análise não-linear, com a qual pode-se traçar o seu comportamento pós flambagem.

Também será apresentado um estudo da estabilidade dinâmica, analisando modelos de estruturas sujeitas a vibrações livres e forçadas através de critérios como o de Budiansky e da barreira potencial. Um modelo da treliça simples de von Mises será apresentado e utilizado para uma série de ensaios matemáticos que ilustrarão o efeito de cargas dinâmicas sob esta estrutura simples.

Além do exposto anteriormente, há pontos muito importantes nestes estudos da instabilidade elástica ou inelástica de estruturas reticuladas espaciais: o comportamento, a estabilidade e a resistência das juntas (nós destas estruturas). Geralmente considera-se, num projeto, que este tipo de estrutura é um treliçado espacial, portanto, estas juntas são consideradas rótulas perfeitas. Isto, obviamente, não corresponde à realidade e para que se possa bem descrever o comportamento estrutural é muito importante que se tenha uma boa aproximação do comportamento mecânico das juntas, inclusive seus possíveis modos de falha.

Durante a análise do colapso progressivo, devem ser levados em conta todos os aspectos anteriormente mencionados: desde o efeito da sensibilidade da estrutura a imperfeições até a influencia da instabilidade local das juntas sobre o comportamento global da estrutura.

Por fim serão apresentados alguns exemplos que modelam numericamente o colapso progressivo de um pequeno reticulado, fazendo uma comparação entre os resultados obtidos e valores experimentais constantes na literatura. Modelos estático e dinâmico também são comparados, avaliando o efeito da ruptura brusca para o colapso frágil de estruturas reticuladas espaciais.

II. O FENÔMENO DO COLAPSO PROGRESSIVO

Os sistemas reticulados espaciais são freqüentemente considerados, por projetistas, como tipos de estruturas com grande capacidade de redistribuir os esforços internos após a falha de um elemento. Entretanto, apesar de seu alto grau de redundância interna, ao redistribuir estes esforços outros elementos chegam a sua carga de colapso, gerando assim uma cadeia de falhas localizadas, que levam ao colapso global da estrutura. Este fenômeno é chamado de **colapso progressivo**.

O estudo aprofundado deste tipo de fenômeno é recente e sua importância começou a ficar evidente quando se percebeu que alguns tipos de colapso local levaram a um colapso total e súbito de algumas estruturas, como as citadas a seguir:

- Bucharest Exhibition Pavilion, 1965 (casca reticulada);
- Hartford Coliseum, 1978 (reticulado espacial plano);
- Cobertura do Centro de Convenções de Manaus, 1994 (casca cilíndrica reticulada);
- Cobertura do ginásio de esportes de Brasília, 1993 (calota esférica);

Apesar de estudos sobre as estruturas acima apontarem algumas falhas de projeto, consideradas responsáveis pela ruína das estruturas, o fato importante a ser observado é que estes colapsos aconteceram de forma súbita, mostrando grande insegurança destas estruturas para a realização de eventos. O objetivo de se fazer análise da forma de colapso das estruturas é conhecer o fenômeno para poder projetar estruturas que tenham a capacidade de se adaptar a uma falha localizada. Alguns países chegaram a incluir, em suas normas, a necessidade de que sejam feitas algumas considerações quanto às conseqüências da perda de algum elemento estrutural para a integridade da estrutura. Entretanto para que se possa fazer uma análise de progressão de colapso é necessário aplicar, além do MEF (Métodos dos Elementos Finitos), uma série de conhecimentos importantes da análise estrutural, como estes:

- noções de estabilidade estática;
- modelos de instabilidade local e global;
- noções de instabilidade dinâmica;
- técnicas para cálculo estrutural não linear;
- formulação e técnicas para análise dinâmica de estruturas;

- técnicas para análise do colapso estrutural.

Devido a grande importância destes conhecimentos para uma boa compreensão das formas de análise do colapso progressivo, a seguir serão expostos alguns pontos importantes de cada um destes assuntos.

III. ESTABILIDADE ESTÁTICA

Dentre as possíveis formas de falha de um sistema reticulado espacial, as que são geradas por algum tipo de instabilidade são as que mais facilmente podem dar início a um colapso progressivo, isso se deve à forma súbita que pode acontecer este tipo de falha, seja uma instabilidade de um elemento comprimido, de um conjunto de elementos (subestruturas ou módulos), ou até por instabilidade global da estrutura.

A seguir será feita uma breve exposição de vários aspectos da Estabilidade Estática como *comportamento crítico e pós-crítico, análise da sensibilidade em função de imperfeições iniciais, cargas de flambagem, pontos de bifurcação*, entre outros.

Este estudo, que foi baseado em BATISTA [06], [09], tratará a instabilidade de maneira informal como um caso de não-linearidade geométrica e/ou física e fará uso do critério clássico de energia. Este critério vai ser usado a seguir para um sistema estrutural descrito pela energia potencial total $V(\mathbf{u};\lambda)$, onde \mathbf{u} é um campo de deslocamentos devido a ação de cargas “quase estáticas” conservativas associadas a um único parâmetro de carregamento λ .

Para que uma estrutura seja considerada em uma situação de **equilíbrio estático** a energia potencial total tem que estar em um ponto estacionário, sendo assim, pelo princípio de estacionariedade, a primeira variação da energia tem que ser nula para todas as variações admissíveis do campo de deslocamentos:

$$\delta V(\mathbf{u};\lambda)=0 \quad \text{(III.1)}$$

A partir da equação variacional acima se consegue definir valores distintos de configuração deformada, \mathbf{u} , para cada valor do parâmetro de carga, λ , este conjunto de pontos definem o caminho de equilíbrio. Ao longo deste caminho serão encontrados pontos **críticos** e **não críticos** de equilíbrio.

Com relação à estabilidade das estruturas pode-se dizer que ela se refere à capacidade da estrutura de resistir ao carregamento imposto através dos esforços internos extensionais (compressão axial no caso de barras e esforços de membrana em placas e cascas). A perda desta capacidade está associada ao fenômeno de instabilidade.

De acordo com o critério de energia de Lagrange, a estrutura pode ser considerada estável se a energia potencial total (\mathbf{V}) for um mínimo relativo e completo em relação aos estados vizinhos cinematicamente admissíveis.

$$\mathbf{V}(\mathbf{u}^F + \mathbf{v}; \lambda) > \mathbf{V}(\mathbf{u}^F; \lambda) \quad (\text{III.2})$$

sendo: \mathbf{u}^F - posição de equilíbrio estático
 \mathbf{v} - campo de deslocamento incremental

Este conceito pode ser ilustrado através do sistema mostrado na Figura III-1. No caso “A” a bola está em um ponto de mínimo, portanto em posição estável, já que, para pequenas perturbações, a bola tende a voltar para a posição inicial. A representação do caso de equilíbrio instável pode ser vista na ilustração “B”, para este caso a primeira derivada da energia é nula, caracterizando um ponto de equilíbrio, entretanto, por ser um ponto de energia máxima, é instável, já que para perturbações infinitesimais a bola vai se mover para uma configuração diferente da inicial.

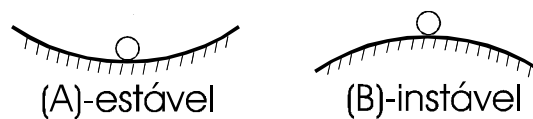


Figura III-1 - Equilíbrio estável e instável

Se for feita uma expansão em série de Taylor e isolando-se a diferença de energia entre o caminho fundamental e o caminho com a variação \mathbf{v} , chega-se à seguinte formulação:

$$\Delta \mathbf{V}(\mathbf{v}; \mathbf{u}^F; \lambda) \equiv \delta \mathbf{V}(\mathbf{v}; \mathbf{u}^F; \lambda) + \delta^2 \mathbf{V}(\mathbf{v}; \mathbf{u}^F; \lambda) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Para que a energia do ponto fundamental seja mínima ΔV tem que ser positivo, sabendo que a primeira variação é nula ($\delta V(v; u^F; \lambda) = 0$), já que este é um ponto de equilíbrio, então se faz necessário que a segunda variação seja não negativa ($\delta^2 V(v; u^F; \lambda) \geq 0$). Sendo assim se a segunda variação assume valores negativos tem-se um estado de equilíbrio instável, se for positiva o equilíbrio é estável e para o caso de ser nula o equilíbrio é crítico, sendo necessária a análise dos termos de ordem mais alta.

Como foi visto, os caminhos de equilíbrio resultam de uma equação que envolve a primeira variação da energia potencial, enquanto que a estabilidade está diretamente ligada à segunda variação, além de outras de ordem mais alta. A partir desta observação pode-se perceber que há uma conexão entre as características topológicas e a estabilidade desses caminhos de equilíbrio.

Para ilustrar os diversos aspectos da estabilidade estrutural serão expostos os seguintes modelos mecânicos e seus respectivos comportamentos:

- Modelo mecânico clássico - perfeito;
- Modelo mecânico clássico - imperfeito;
- Modelos mecânicos de Augusti;

III.1. Modelo Mecânico Clássico – Perfeito

Este modelo é formado por uma barra rígida livre no topo e elasticamente engastada na base, além disto está sujeita a uma carga vertical conservativa λ . O momento de engastamento da base é dado por uma mola e seu valor é função, linear ou não, da rotação ξ .

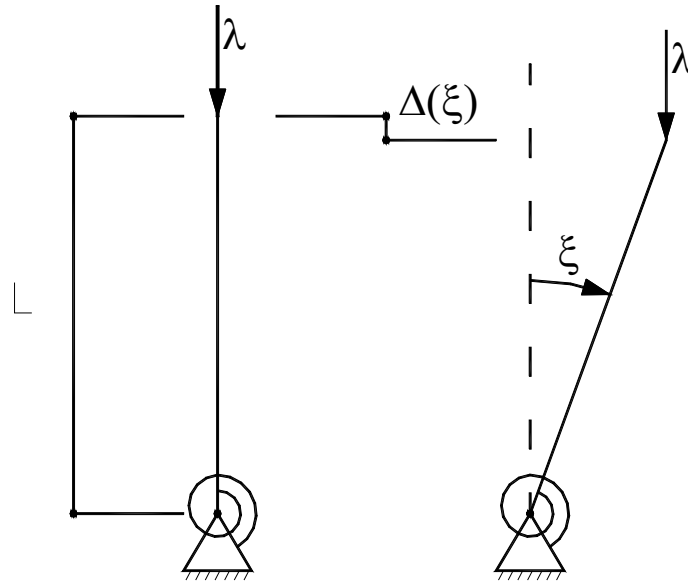


Figura III-2 - Modelo Perfeito

Para definir o equilíbrio estático do sistema será mostrada, a seguir, a formulação de sua energia potencial total, posteriormente a primeira variação (no caso, a derivada), finalmente a equação que define o equilíbrio estático.

$$V(\xi, \lambda) = \int_0^\xi f(\xi) d\xi - \lambda \cdot L \cdot (1 - \cos \xi) \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{d}{d\xi} V(\xi, \lambda) = f(\xi) - \lambda \cdot L \cdot \text{sen } \xi = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\therefore \lambda \cdot L \cdot \text{sen } \xi = f(\xi) \quad (\text{III.6})$$

Expandindo $f(\xi)$ em série de McLaurin em torno da origem e depois renomeando os coeficientes supostamente conhecidos tem-se:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f'(\xi)|_0 \cdot \xi + f''(\xi)|_0 \cdot \xi^2 + f'''(\xi)|_0 \cdot \xi^3 + \dots \\ f(\xi) &= k_1 \cdot \xi + k_2 \cdot \xi^2 + k_3 \cdot \xi^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Considerando que para uma rotação nula, o momento de engastamento $f(\xi)$ também será nulo, tem-se a solução trivial para o equilíbrio: sendo $\xi=0$, qualquer valor de λ satisfaz a equação de equilíbrio.

Além da solução anterior, também chamada de caminho fundamental, existem outros estados de equilíbrio, para valores pequenos de ξ , que podem ser representados pela seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{f(\xi)}{L \cdot \text{sen } \xi} \quad (\text{III.8})$$

Estes caminhos se interceptam com o caminho fundamental em $\xi=0$ e $\lambda=\lambda_c$, denominada **carga crítica**.

A carga crítica se encontra em um ponto de equilíbrio crítico, por isso tem-se que:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} V(\lambda, \xi) = f'(\xi) - \lambda \cdot L \cdot \cos \xi \equiv 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\xi = 0 \therefore \left. \frac{d^2}{d\xi^2} V(\lambda, \xi) \right|_{\xi=0} = k_1 - \lambda_c \cdot L \quad (\text{III.10})$$

$$\therefore \lambda_c = \frac{k_1}{L} \quad (\text{III.11})$$

Vizinho a este estado crítico se encontra o caminho **pós-crítico**, que pode ser estável ou instável como pode se ver na figura abaixo.

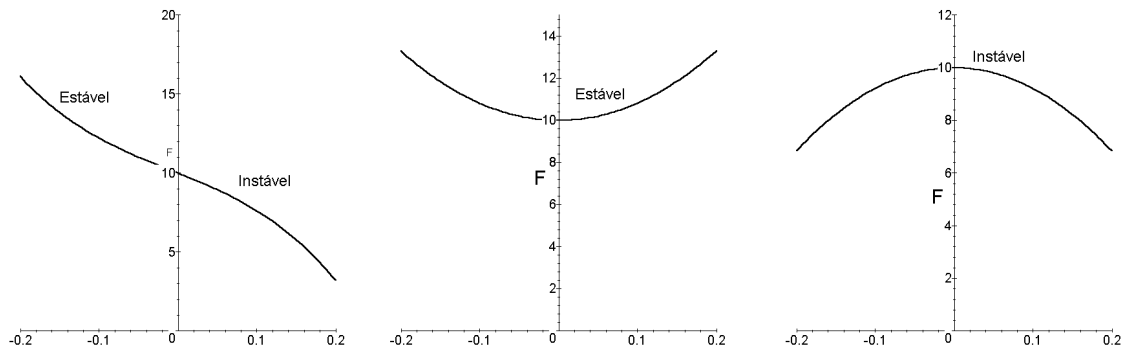


Figura III-3 - Caminhos de equilíbrio

A transição, vista na figura, do caminho fundamental para os caminhos pós-críticos ($\xi < 0$ ou $\xi > 0$) é chamada de **bifurcação** dos caminhos de equilíbrio, que pode também ser chamada de **ramificação**.

A estabilidade dos estados pré e pós-críticos pode ser analisada com base no sinal que tem a segunda variação da energia potencial. Para o caminho fundamental do modelo exposto pode ser feita uma análise simples da estabilidade do sistema:

$$p/\lambda < \lambda_c \rightarrow \left. \frac{d^2}{d\xi^2} V(\xi, \lambda) \right|_{\xi=0} > 0; \text{ equilíbrio estável} \quad (\text{III.12})$$

$$p/\lambda > \lambda_c \rightarrow \left. \frac{d^2}{d\xi^2} V(\xi, \lambda) \right|_{\xi=0} < 0; \text{ equilíbrio instável} \quad (\text{III.13})$$

Para o ponto crítico, $\lambda = \lambda_c$, a segunda variação também é nula, então a análise tem que ser feita em função de variações de maior grau.

III.2. Modelo Mecânico Clássico – Imperfeito

A diferença entre o modelo a ser analisado agora e o que foi visto anteriormente é que neste foi incluída mais uma variável, uma imperfeição inicial ($\bar{\xi}$), desta forma fica mais amplo o campo de análises que podem ser feitas, dentre elas se destaca a **análise de sensibilidade** do sistema a imperfeições iniciais, é a partir dela que pode ser definida a carga de flambagem.

O modelo mecânico, como pode ser visto na figura abaixo, só difere do anterior pela introdução de uma imperfeição geométrica inicial, caracterizada por um desvio angular ($\bar{\xi}$) em relação à posição vertical.

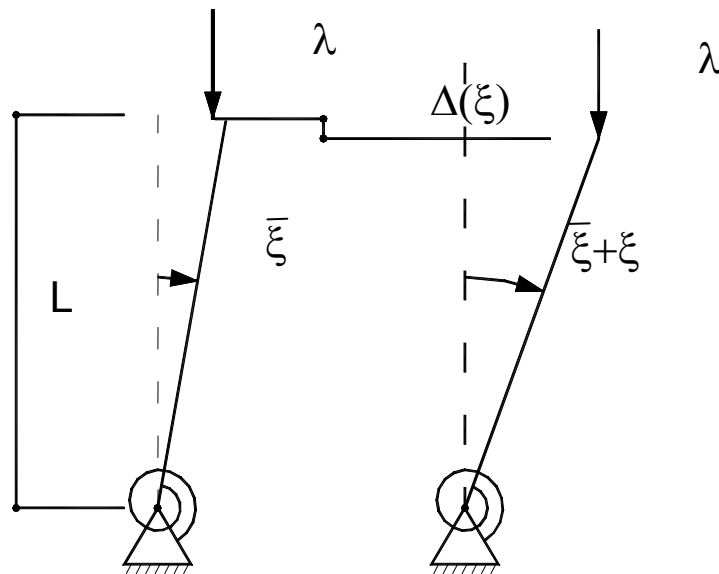


Figura III-4 - Modelo imperfeito

A inclusão desta imperfeição inicial vai fazer com que ocorram pequenas mudanças nas equações de energia, conseqüentemente suas variações também devem sofrer pequenas alterações que são vistas a seguir:

$$V(\xi, \lambda, \bar{\xi}) = \int_0^{\xi} f(\xi) d\xi + \lambda \cdot L \cdot [\cos(\xi + \bar{\xi}) - \cos \bar{\xi}] \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{d}{d\xi} V(\xi, \lambda, \bar{\xi}) = f(\xi) - \lambda \cdot L \cdot \text{sen}(\xi + \bar{\xi}) = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$\lambda = \frac{f(\xi)}{L \cdot \text{sen}(\xi + \bar{\xi})} \quad (\text{III.16})$$

Como feito para o caso do modelo perfeito, encontra-se o caminho de equilíbrio a partir do conceito de estacionariedade da energia no ponto de equilíbrio. Na figura podem ser vistas duas famílias de caminhos de equilíbrio, uma que parte da origem ($\xi=0, \lambda=0$) e outra que parte de valores de carga infinita ($\xi=0, \lambda=\infty$). Este último claramente tem valor mais acadêmico, sendo o primeiro de real validade para o estudo do modelo.

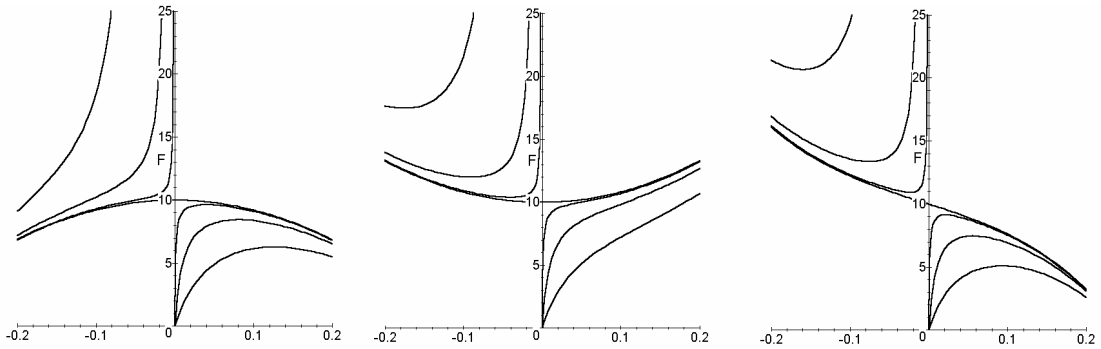


Figura III-5 - Caminhos da estrutura imperfeita

A figura também dá margem a uma outra observação, à medida que é diminuída a imperfeição as curvas se aproximam cada vez mais dos caminhos pós-críticos do modelo perfeito.

III.2.1 Flambagem

A flambagem pode ser dita como o comportamento de uma estrutura que a partir de um ponto passa a ter um aumento significativo na taxa de crescimento da rotação em função de λ .

Para o caso estável, este ponto não pode ser definido, assim pode se dizer que a carga de flambagem é indefinida. Alguns autores consideram para casos de caminhos pós-críticos estáveis, que a carga de flambagem é representada pelo ponto mínimo das curvas que partem de $\lambda=\infty$, entretanto esta carga é maior que a carga crítica da estrutura perfeita, mostrando que a estrutura não é sensível a imperfeições iniciais.

Entretanto para caminhos pós-críticos instáveis observa-se que os caminhos de equilíbrio da estrutura imperfeita têm um máximo local λ_f para uma certa rotação ξ_f , estes valores dependem do valor de $(\bar{\xi})$ e são chamados, respectivamente, de **carga e amplitude** do modo de flambagem. Estes valores são de suma importância na análise da estabilidade uma vez que é impossível haver um equilíbrio estático para $\lambda > \lambda_f$ nas vizinhanças de ξ_f , dando origem a uma flambagem súbita para pequenas e médias imperfeições.

Após estas análises fica clara a importância do conhecimento do comportamento da estrutura perfeita, é a partir do comportamento pós-crítico da estrutura idealizada como perfeita que pode se saber o que esperar do comportamento da estrutura real, imperfeita.

Dentre os comportamentos pós-críticos vistos têm que ser destacados os casos em que há uma diminuição de carga após o ponto crítico, para estes casos a estrutura é considerada **sensível a imperfeições iniciais**. São estes tipos de estruturas que estão sujeitas a flambagem súbita em presença de pequenas imperfeições iniciais. Além disso, a carga de flambagem, quando o caminho pós-crítico tem uma inclinação negativa muito forte, pode ter uma magnitude bastante inferior à carga crítica, mesmo para pequenos valores de imperfeições.

III.3. Problema do acoplamento modal

Anteriormente foram estudados modelos mecânicos em que se considerou um único grau de liberdade, a rotação ξ , desta forma estudou-se cada modo crítico separadamente e, por isso, não foi considerada nenhuma forma de acoplamento entre dois modos.

Apesar da importância dos estudos feitos, eles não têm a capacidade de explicar certos comportamentos significativos como o caso em que pontos de bifurcação se coincidem formando um comportamento pós-crítico severamente instável, mesmo que cada um dos modos seja isoladamente estável.

O estudo destes tipos de comportamento será feito a seguir através do modelo de **Augusti**.

III.3.1 Modelo Mecânico de Augusti (pontos primários não-coincidentes)

O modelo de Augusti é definido por uma barra rígida, livre no topo e que tem as rotações na base restringidas por duas molas de rigidez \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 . A posição da barra é definida pelos ângulos que ela faz com os eixos horizontais (α_1 e α_2).

Como os ângulos α_1 e α_2 já se encontram a 90° antes de qualquer alongamento, define-se ξ_1 e ξ_2 como as variáveis de estado, já que são elas que realmente definem o alongamento angular.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \pi/2 - \alpha_1 \\ \xi_2 &= \pi/2 - \alpha_2\end{aligned}\tag{III.17}$$

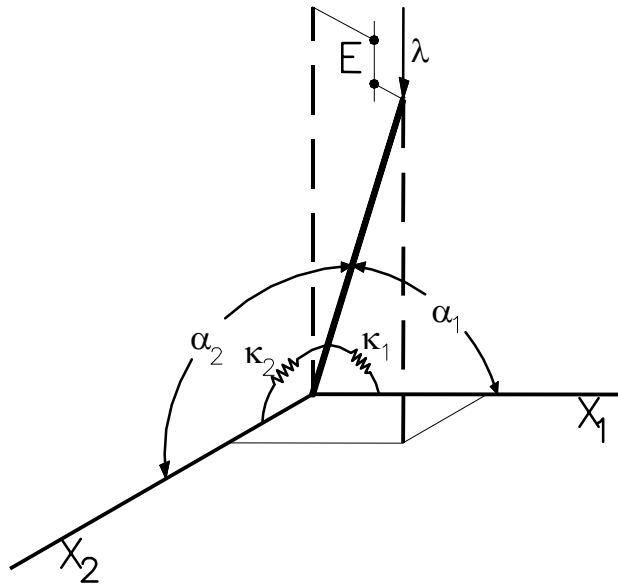


Figura III-6 - Modelo de Augusti

Como para os outros modelos apresentados, tem-se que definir a equação da energia potencial total do sistema e, a partir dela, fazer as análises de estabilidade. Matematicamente a diferença está no número de variáveis, anteriormente havia apenas um grau de liberdade, agora existem dois (ξ_1 e ξ_2), isto leva a necessidade de se utilizar as derivadas parciais para encontrar os pontos críticos do sistema.

A variação da energia potencial total assume a seguinte forma:

$$\Delta V(\xi_1, \xi_2, \lambda) = \frac{1}{2}k_1\xi_1^2 + \frac{1}{2}k_2\xi_2^2 - \lambda L \left[\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \frac{1}{24}(\xi_1^4 - 6\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4) \right] \quad (\text{III.18})$$

Sendo: L = comprimento da haste

Obs.: Para a determinação do deslocamento vertical **E**, expandiram-se as expressões trigonométricas e truncou-se a série, incluindo até termos quadráticos.

A condição crítica de equilíbrio ocorre quando a forma quadrática da equação anterior se anula, chegando às seguintes equações de equilíbrio crítico

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{1}{2}k_1\xi_1^2 + \frac{1}{2}k_2\xi_2^2 - \frac{\lambda L}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \right] = 0; i = 1, 2 \quad (\text{III.19})$$

Se este sistema for resolvido considerando o sistema perfeito e uma das variáveis nulas chega-se a duas cargas críticas desacopladas (pontos primários de bifurcação), a menor destas duas será a carga crítica do sistema perfeito.

$$\Lambda_1^C = \frac{k_1}{L}; p/\xi_2 = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\Lambda_2^C = \frac{k_2}{L}; p/\xi_1 = 0 \quad (\text{III.21})$$

A partir destes pontos de bifurcação, considerando o caso de cargas críticas distintas ($k_1 \neq k_2$), seguem três caminhos pós-críticos: a solução trivial ($\xi_1 = \xi_2 = 0$, para todo λ) nos dá o caminho primário de equilíbrio; as duas equações abaixo nos dão os dois caminhos secundários desacoplados.

$$\frac{d\Delta V}{d\xi_1} = 0 \rightarrow \xi_1^2 = 6 \left(1 - \frac{k_1}{\lambda L} \right); \quad p/\xi_2 = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{d\Delta V}{d\xi_2} = 0 \rightarrow \xi_2^2 = 6 \left(1 - \frac{k_2}{\lambda L} \right); \quad p/\xi_1 = 0 \quad (\text{III.23})$$

Para o caso de se considerar as duas variáveis não nulas, a solução pós-crítica acoplada é dada pelo sistema de equações não-lineares a seguir:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta V}{\partial \xi_1} = 0 \rightarrow k_1 - \lambda L \left(1 - \frac{1}{6} \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial \Delta V}{\partial \xi_2} = 0 \rightarrow k_2 - \lambda L \left(1 - \frac{1}{6} \xi_2^2 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

A solução deste sistema descreve os dois caminhos terciários, simétricos em relação aos eixos ξ_1 e ξ_2 . Se considerarmos $k_1 < k_2$, a bifurcação destes caminhos se dá no caminho secundário associado a $\xi_1 \neq 0$; $\xi_2 = 0$. Estes pontos de bifurcação secundários podem ser encontrados introduzindo-se deslocamentos incrementais a partir do caminho secundário de equilíbrio ($\xi_1 = \xi_1^E(\lambda) + \eta_1$; $\xi_2 = \eta_2$). A partir da análise da energia potencial total do sistema com os deslocamentos incrementais chega-se à seguinte expressão da carga de bifurcação secundária:

$$\Lambda^B = \frac{3k_1 + k_2}{4L} \quad (\text{III.26})$$

Esta carga é a carga real de ruína do sistema perfeito, já que o caminho secundário é estável, mas o caminho terciário é *instável*.

MODELO COM IMPERFEIÇÕES INICIAIS

O modelo aqui apresentado terá a função de verificar a influência das imperfeições iniciais para o caso de não-coincidência de cargas críticas, ele será análogo ao anterior, considerando a presença de imperfeições idênticas nos modos ξ_1 e ξ_2 (esta é a situação que apresenta o efeito mais severo sobre a estrutura) [06].

Sendo as imperfeições iniciais, $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}$, chega-se a expressão para o incremento da energia potencial total:

$$\Delta V(\xi_1, \xi_2, \bar{\xi}, \lambda) = \frac{1}{2} k_1 (\xi_1 - \bar{\xi})^2 + \frac{1}{2} k_2 (\xi_2 - \bar{\xi})^2 - \lambda L \left[1 + \text{sen}^2(\xi_1 - \bar{\xi}) + \text{sen}^2(\xi_2 - \bar{\xi}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.27})$$

Considerando que as imperfeições iniciais são pequenas e expandindo a expressão como foi feito para o modelo perfeito, incluindo somente os termos lineares em $\bar{\xi}$ e aplicando a condição de estacionariedade, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} k_1 \xi_1 - \lambda L \left(\xi_1 - \frac{1}{6} \xi_1^3 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \xi_1 \right) - \bar{\xi} k_1 = 0 \\ k_2 \xi_2 - \lambda L \left(\xi_2 - \frac{1}{6} \xi_2^3 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_2 \right) - \bar{\xi} k_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Que representa o caminho imperfeito de equilíbrio mostrado na Figura III-7. Se for feita uma análise da sensibilidade da estrutura a imperfeições iniciais pode-se chegar à seguinte relação entre a carga de flambagem e a carga de bifurcação secundária:

$$\frac{\Lambda_f}{\Lambda^B} = 1 - \left(\frac{3k_2}{8L} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \bar{\xi}^{\frac{2}{3}} \quad (\text{III.29})$$

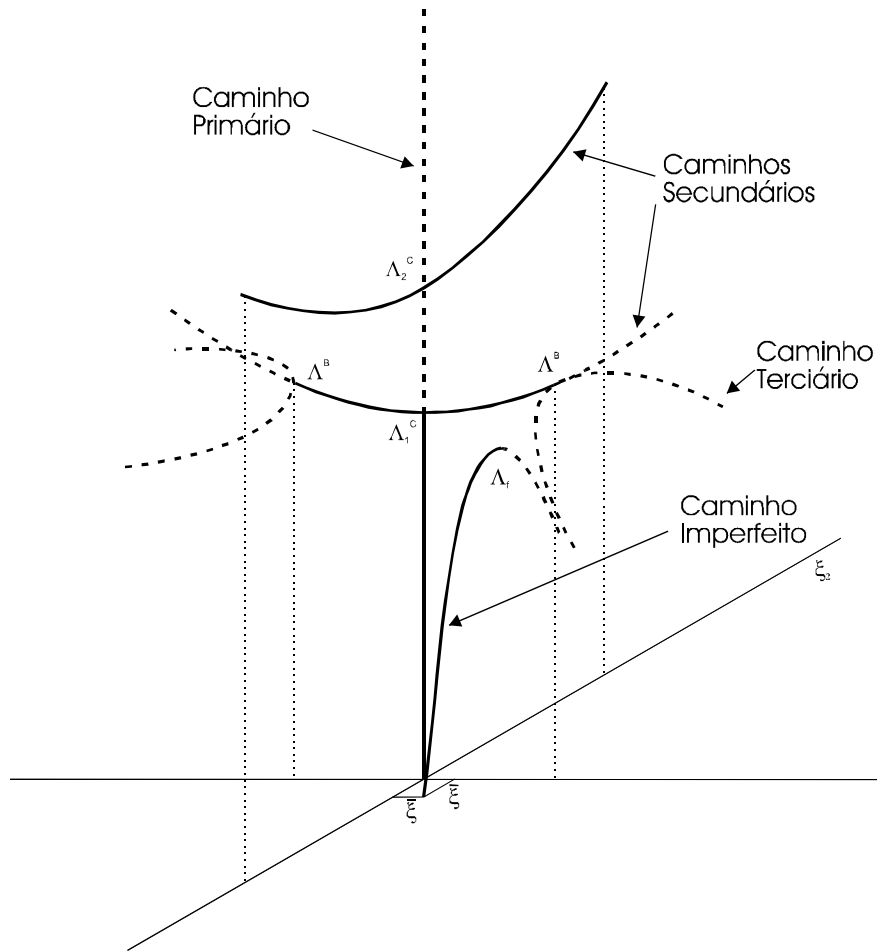


Figura III-7 - Caminhos de Equilíbrio

III.3.2 Modelo Mecânico de Augusti (pontos primários coincidentes)

Para se fazer a consideração de coincidência das cargas críticas, impõe-se a condição $k_1=k_2=k$. Desta forma a carga crítica é $\Lambda^C = \frac{k}{L}$, para $\xi_1=\xi_2=0$. A partir deste ponto ramificam os caminhos pós-críticos primários descritos pelas seguintes equações:

$$\frac{d\Delta V}{d\xi_1} = 0 \rightarrow \xi_1^2 = 6\left(1 - \frac{k}{\lambda L}\right); \quad p/\xi_2 = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{d\Delta V}{d\xi_2} = 0 \rightarrow \xi_2^2 = 6\left(1 - \frac{k}{\lambda L}\right); \quad p/\xi_1 = 0 \quad (\text{III.31})$$

Fazendo na equação da energia $k_1=k_2=k$ e $\xi_1=\xi_2=\xi$, os caminhos terciários simétricos são dados a seguir:

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = 3 \left(\frac{k}{\lambda L} - 1 \right) \quad (\text{III.32})$$

Estes caminhos, mostrados na Figura III-8, pertencem a dois planos ortogonais entre si que fazem 45° com os planos principais. Pode-se notar também que estes caminhos são instáveis e que há uma coincidência dos quatro pontos críticos, os dois pontos secundários de bifurcação e os dois pontos críticos primários.

Também pode ser feita, como anteriormente, uma análise da sensibilidade da estrutura às imperfeições iniciais, determinando a relação entre as cargas de flambagem e a crítica em função da imperfeição $\bar{\xi}$.

$$\frac{\Lambda_f}{\Lambda^c} = 1 - \left(\frac{3k}{2L} \right)^{2/3} \bar{\xi}^{-2/3} \quad (\text{III.33})$$

Se compararmos este resultado com o obtido para o caso de pontos críticos distintos, podemos observar que a sensibilidade às imperfeições iniciais para este sistema com pontos críticos coincidentes é aproximadamente $2,5(4^{2/3})$ vezes maior que o primeiro caso.

Deve-se fazer uma observação muito importante relacionada aos resultados obtidos. Eles indicam que quando uma estrutura é projetada segundo um processo de otimização baseado somente na simultaneidade de cargas críticas de seus componentes, há possibilidade de que a resposta resultante do acoplamento entre os modos críticos seja severamente instável, deixando a estrutura potencialmente instável, devido a sua forte sensibilidade a imperfeições iniciais. Ainda tem que se observar que para um sistema estrutural com multiplicidade de modos críticos, então tem-se que estudar os efeitos das imperfeições iniciais sobre a resposta resultante do acoplamento dos modos críticos deste sistema.

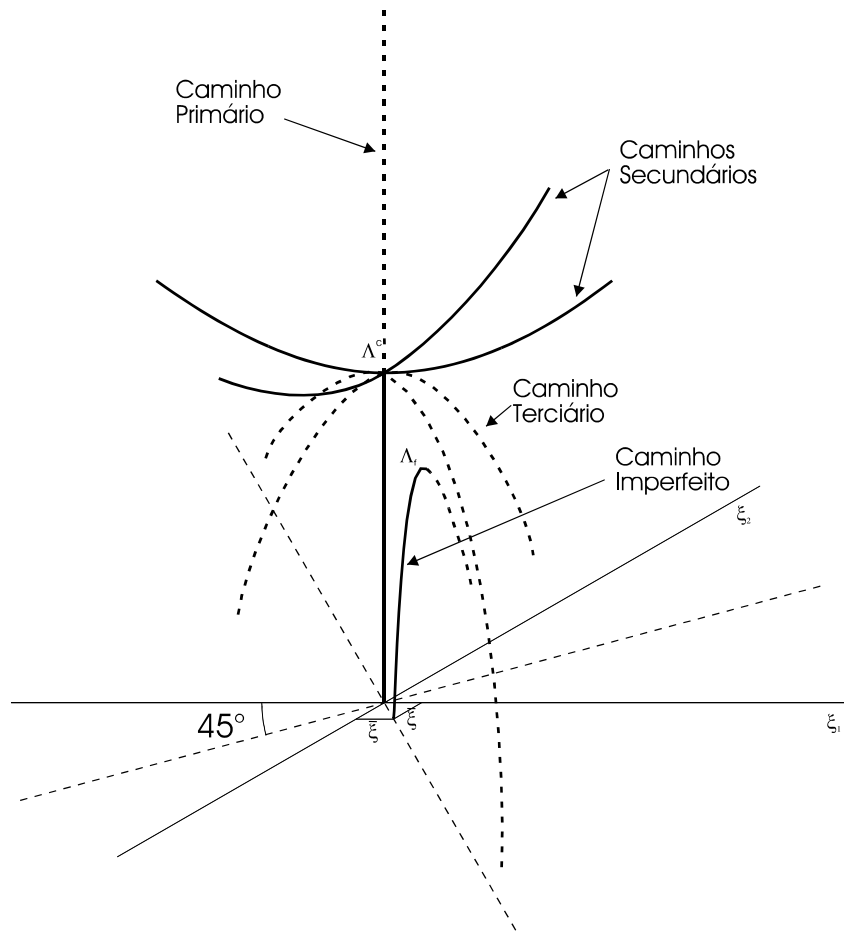


Figura III-8 - Caminhos de Equilíbrio (pontos críticos coincidentes)

IV. MODELOS DE COLAPSO POR INSTABILIDADE LOCAL E GLOBAL

Anteriormente foi dito que o colapso progressivo é o fenômeno que acontece devido à propagação de uma falha localizada para toda a estrutura, então fica claro que é de importância extrema que se conheça, da forma mais precisa possível, o comportamento de cada um dos componentes estruturais quando submetidos às cargas aplicadas. Os colapsos gerados por instabilidade são certamente os mais importantes para o estudo do colapso progressivo, isso se deve ao seu caráter súbito, entretanto existem ainda outros tipos que podem ocorrer que certamente alteram o comportamento global da estrutura, dentre estas falhas existem algumas de comportamento mais simples de ser descrito como o escoamento de barras tracionadas, e algumas mais complexas como o caso de falha localizada nos nós. A seguir será mostrada uma lista com as falhas mais importantes, posteriormente será feita uma descrição mais detalhada de cada uma:

- Por instabilidade de barras comprimidas;
- Por instabilidade das paredes do elemento barra;
- Instabilidade combinada das duas anteriores;
- Por instabilidade global da estrutura ou de um módulo (subestrutura);
- Falha nas juntas da estruturas (ou conexão entre barras);

Além destas falhas, consideradas devido ao projeto, há ainda diversos fatores que podem gerar um problema localizado na estrutura: defeitos no material, erros de fabricação, falhas na construção, impactos ou outros acidentes. Alguns destes problemas podem ser bastante minorados se for feito um controle de qualidade desde a fabricação até a montagem, entretanto não se pode afirmar que a probabilidade destas falhas ocorrerem é nula.

IV.1. Instabilidade de barras comprimidas

O comportamento de barras sujeitas a esforços de compressão sempre teve grande importância para a análise estrutural, isso se deve às características de instabilidade destes elementos em certos níveis de carga. Dentre os principais conhecimentos desta área podemos citar a carga crítica de Euler, para peças perfeitas, além das curvas de projeto usadas pelas normas obtidas através de grandes campanhas de ensaios, que servem para guiar os projetos de estruturas reais (com imperfeições), apesar da grande importância destes conhecimentos, para que seja feita uma análise não linear de um estrutura sob cargas extremas, é necessário que se conheça não só a carga crítica, mas também os comportamentos pré e pós-crítico destes elementos da estrutura. No intuito de descrever a resposta da barra sobre as cargas a ela impostas será feito um desenvolvimento em termos da relação entre a carga aplicada e a deflexão da corda, definindo como corda a linha que liga os dois extremos da barra.

Dentre os trabalhos feitos para determinar de forma apurada este comportamento da barra, muitas são as variações de considerações e de fórmulas empíricas adotadas, entretanto apesar destas mudanças todos concordam na característica básica de queda de resistência acentuada no estado pós-crítico, a seguir será feita uma exposição de considerações e resultados obtidos basicamente nos estudos de PAPADRAKAKIS [28], com as devidas inclusões de observações de outros autores.

Considerações - Para simplificar matematicamente, algumas considerações serão feitas para encontrar as curvas desejadas.

1. A barra é considerada uniforme, reta e bi-rotulada. O material é homogêneo e livre de tensões residuais, a sua relação tensão-deformação é considerada elastoplástica perfeita, com a mesma tensão de escoamento (σ_y) para compressão e tração.
2. A flambagem acontece em um único plano, sobre ação de uma carga de compressão P , que produz um encurtamento Δ . P é tido como positivo quando for de compressão, e Δ quando houver encurtamento da distância entre os

extremos da barra. Considera-se caminho de descarregamento da curva P- Δ aquele em que Δ decresce.

3. A carga crítica de compressão depende do coeficiente de esbeltez, e pode ser tanto a carga crítica elástica de Euler, $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ ou a carga de esmagamento, $P^* = A \cdot \sigma_y$, sendo **A** a área da seção transversal e **EI** a rigidez à flexão.
4. Quando a carga de compressão ultrapassa a carga crítica, a estrutura se torna curva e com a forma descrita pela seguinte equação: $y = \alpha \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$.
5. Quando sobre a ação combinada da carga P e do momento fletor M, será considerada uma distribuição elastoplástica perfeita das tensões, descartando-se os efeitos de esforços cortantes.
6. Considera-se que a barra é composta de material dúctil e nenhuma instabilidade local ocorre. Finalmente, a componente de Δ devida à deformação axial plástica ocorrida, também é desprezada.

Com base nestas considerações chega-se às curvas *tensão x deformação* mostradas na Figura IV-1.

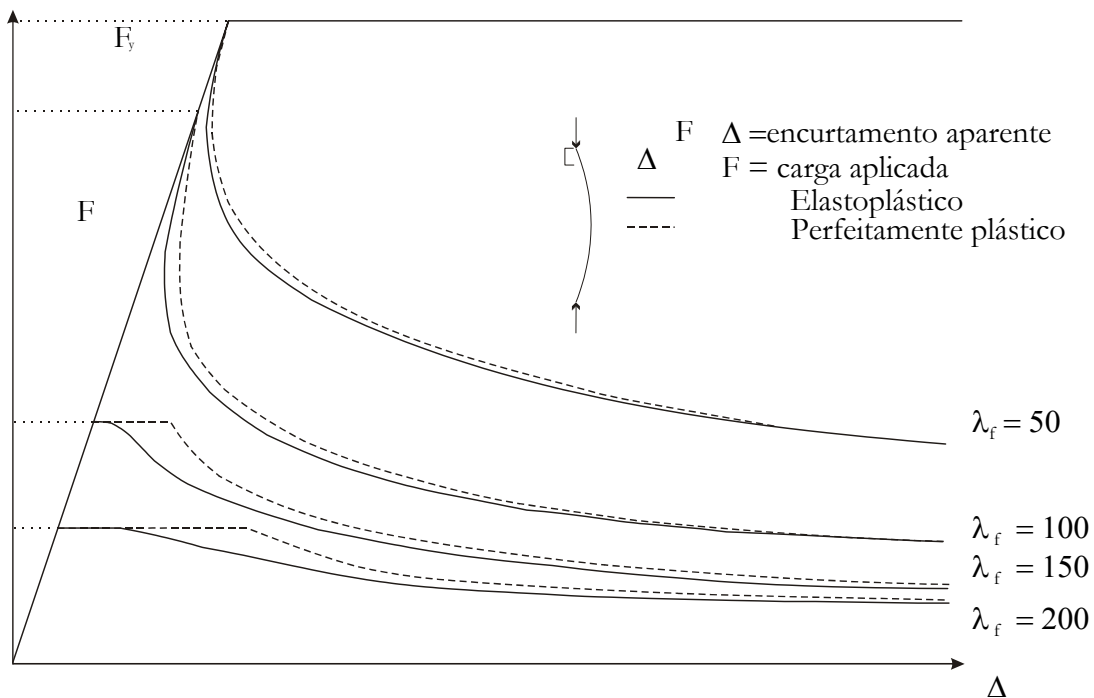


Figura IV-1 - Curvas de força x deslocamento para a barra birrotulada [28]

Pode-se ver claramente a influência do índice de esbeltez para a forma da curva. As barras, quando muito esbeltas, têm a carga crítica bastante reduzida, mas o caminho pós-crítico é suave. Para barra com esbeltez menor há um ganho no valor da carga crítica, entretanto a perda de rigidez é muito brusca, o que dificulta a redistribuição dos esforços na estrutura.

A figura a seguir mostra, além dos caminhos de carregamento, os de descarregamento da estrutura, pode se ver aí o caráter inelástico da modelagem da barra comprimida.

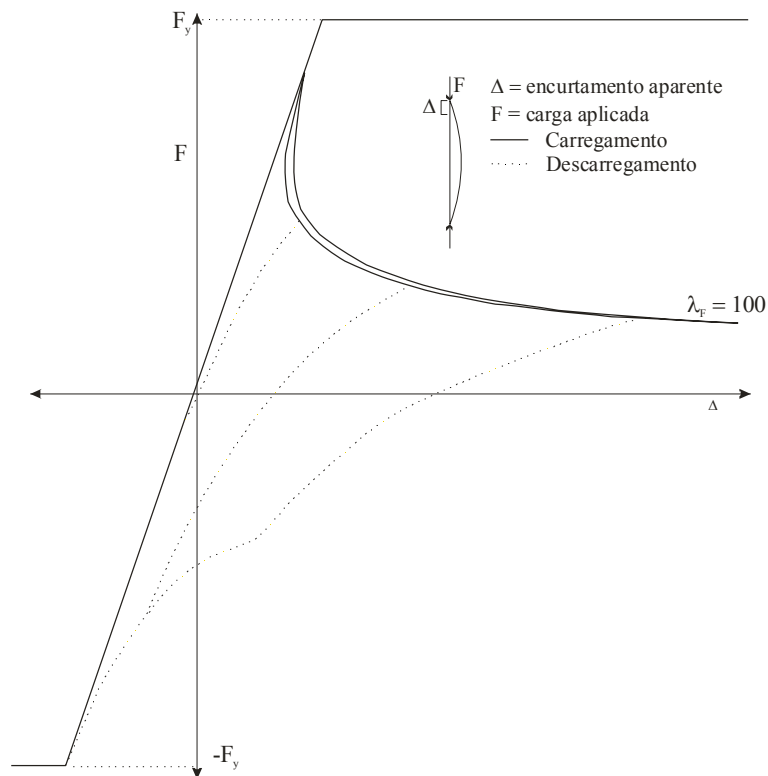


Figura IV-2 - Caminhos de descarregamento [28]

Pode ser acrescentado aos resultados obtidos por Papadrakakis, a seguinte modelagem feita por SMITH [34] com relação à influência das tensões residuais e materiais trabalhados a frio no comportamento não linear das barras.

Mesmo se for considerada uma barra perfeitamente retilínea e antes de atingir a carga crítica, há uma redução da rigidez axial quando algumas fibras escoam

prematuramente devido a presença de tensões residuais. Esta redução de rigidez podem ser quantificadas usando um Módulo de Elasticidade Tangente, que pode ser calculado de acordo com a equação abaixo para perfis laminados a quente:

$$E_t = \tau \cdot E$$

$$\text{Sendo: } \tau \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha < 1 - \gamma \\ \sqrt{(1 - \gamma) / \alpha} & \text{se } \alpha > 1 - \gamma \end{cases}$$

E = módulo de elasticidade do material;

γ = relação entre a força axial e a força necessária para o escoamento total;

α = relação entre a máxima tensão residual e a tensão de escoamento do material.

Estas relações são válidas apenas para distribuições lineares das tensões residuais. Pode também de desenvolver relações parecidas com essa para perfis trabalhados a frio, além de serem válidas para o caso de barras tracionadas.

Além destas modelagens mais apuradas das relações *cargas-deformação*, existem outras mais simplificadas que tentam descrever estes caminhos com o menor prejuízo possível, ou em alguns casos de forma conservadora. Na Figura IV-3 estão exemplificados alguns destes modelos.

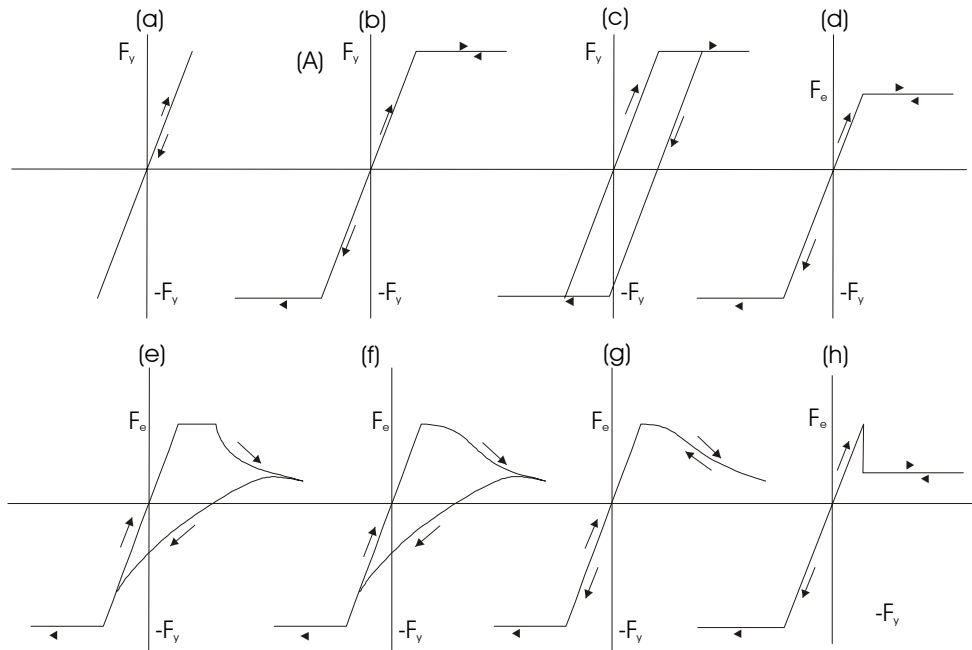


Figura IV-3 - Modelos de comportamento de barras

Pode se notar uma grande diferença entre o nível de elaboração de cada um destes modelos. Os mais elaborados aproximam mais os resultados obtidos da resposta da estrutura, mas tem que ser avaliado se o custo desta descrição mais apurada realmente traz resultados expressivos. Quando for feita a seguir uma exemplificação utilizando um modelo analítico, serão usados alguns destes modelos para observar a diferença entre as respostas.

IV.2. Instabilidade de paredes do perfil

Os perfis de paredes finas estão sendo cada vez mais usados para os mais variados tipos de estrutura. Devido ao seu baixo peso estes tipos de perfil podem diminuir bastante o custo de uma estrutura, entretanto, para que se possa utilizar estes tipos de perfis é necessário dimensioná-los levando em conta a instabilidade de suas paredes. Esta instabilidade além de influenciarem no dimensionamento também vão causar uma não linearidade do comportamento estrutural, assim, é necessário saber como funciona este mecanismo para incluí-lo no comportamento global da estrutura.

A instabilidade que acontece para estes perfis é uma instabilidade de placas, que implica uma perda súbita de rigidez da placa, caso ela seja considerada perfeita, ou gradual,

se considerada imperfeita como pode ser visto na Figura IV-4. Várias formas são utilizadas para o tratamento de placas esbeltas em seu regime pós-crítico, entretanto o que obteve uma larga aceitação e é amplamente usado, é o método das larguras efetivas (b_e). Neste método trata-se a redução de rigidez como uma redução da área efetiva, que também está mostrada na Figura IV-4.

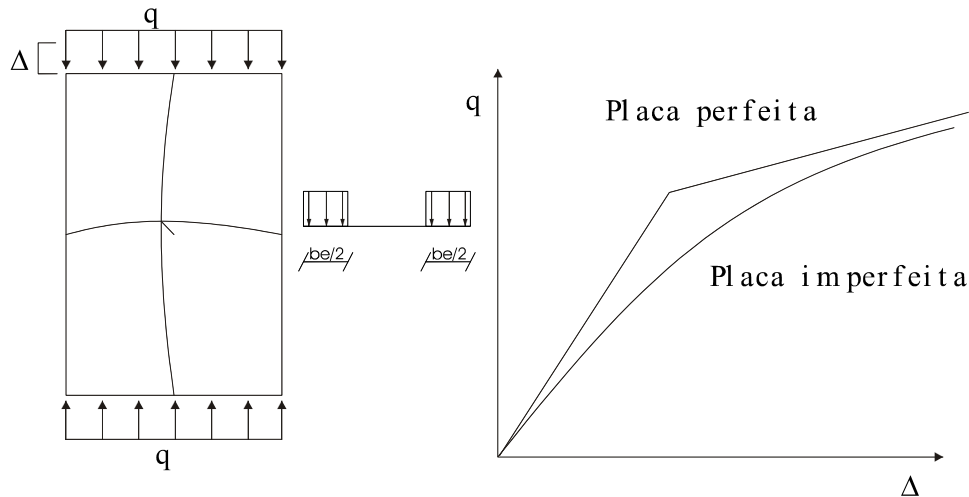


Figura IV-4 - Relação carga deformação para uma chapa

Ainda há uma observação importante a ser feita, as barras que sofrem do fenômeno de flambagem local das paredes do perfil tem que se levar em conta o acoplamento entre as duas formas de instabilidade anteriormente expostas. Este fenômeno de acoplamento é um ponto bastante complexo a ser estudado no comportamento estrutural. Nos trabalhos estudados o que se fez foi considerar apenas o uso de perfis que não sofram de flambagem local, como também devem ser considerados apenas perfis que não sofram um outro fenômeno de estabilidade chamado de flexo-torção.

IV.3. Instabilidade das Juntas

Na discretização de estruturas reticuladas espaciais é comum se negligenciar o comportamento das juntas. Normalmente o que se faz é considerar que existe uma rótula perfeita no ponto de concorrência entre as barras, o que na verdade não existe. O erro cometido por estas considerações pode ser tido como desprezível na maioria dos casos, entretanto quando se estuda o comportamento após a flambagem das barras ou até se forem feitas conexões com mais de um parafuso, que impedem a livre rotação das barras, a

resposta fornecida pelos programas de elementos finitos começam a se distanciar da realidade.

Um fator que dificulta muito a descrição do comportamento das juntas é a grande variedade de formas que existem. A Figura IV-5 mostra alguns dos tipos mais comuns de juntas.

Podem ser vistos, que dentre os diversos formatos existem uns mais rígidos, como os do tipo mero, e outros mais flexíveis como o sistema Sarton. Este último é muito usado por projetistas no Brasil, apesar de seu desempenho discutível. Esta prática de projeto é condenada na maioria dos países, sendo permitida por alguns, apenas em elementos secundários, como estrutura de fechamentos.

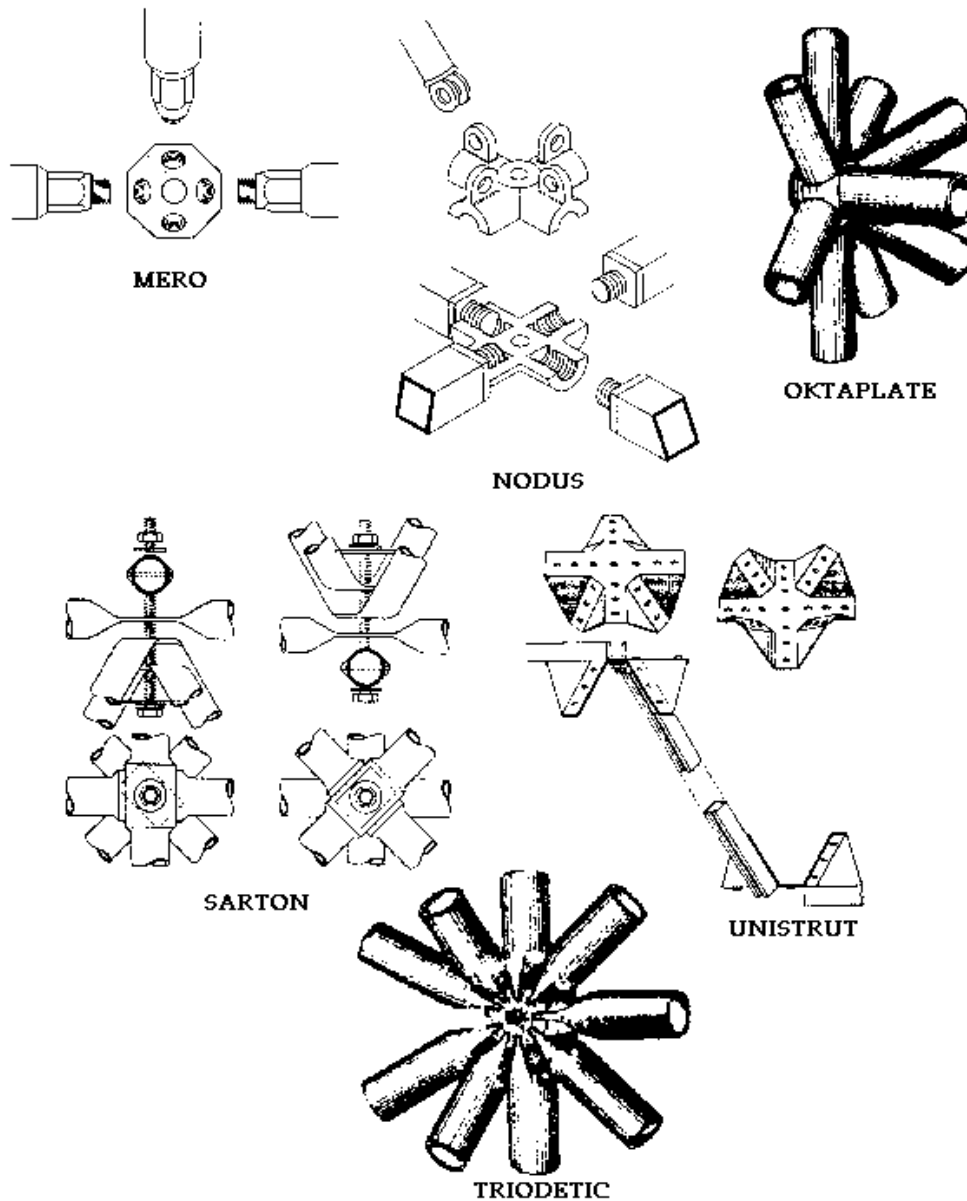


Figura IV-5 - Alguns tipos de Junta [29]

Desta forma, já que não pode ser feita uma caracterização generalizada do comportamento das juntas, tem que se caracterizar o comportamento de cada junta, determinando seus mecanismos de colapso, além de uma boa aproximação para as curvas força/momento \times deformação/rotação. A seguir serão mostrados alguns resultados de BATISTA et al [10] e [11].

A partir da seguinte montagem experimental (Figura IV-6) de um módulo da estrutura do ginásio de esportes de Brasília, chega-se à curva *carga \times deslocamento* do sistema em questão (Figura IV-7).

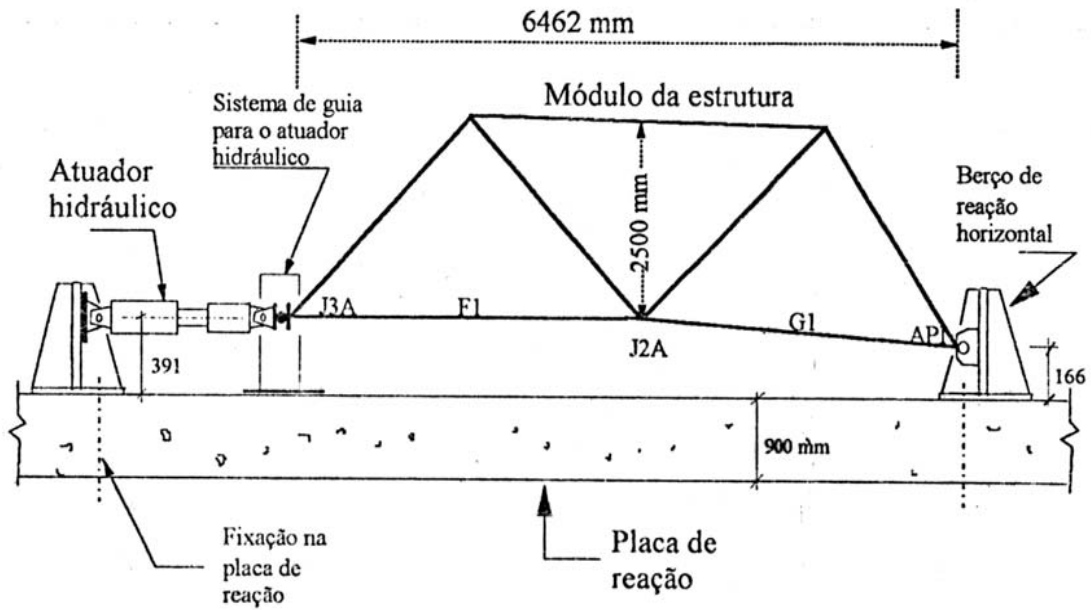


Figura IV-6 - Montagem do ensaio [10]

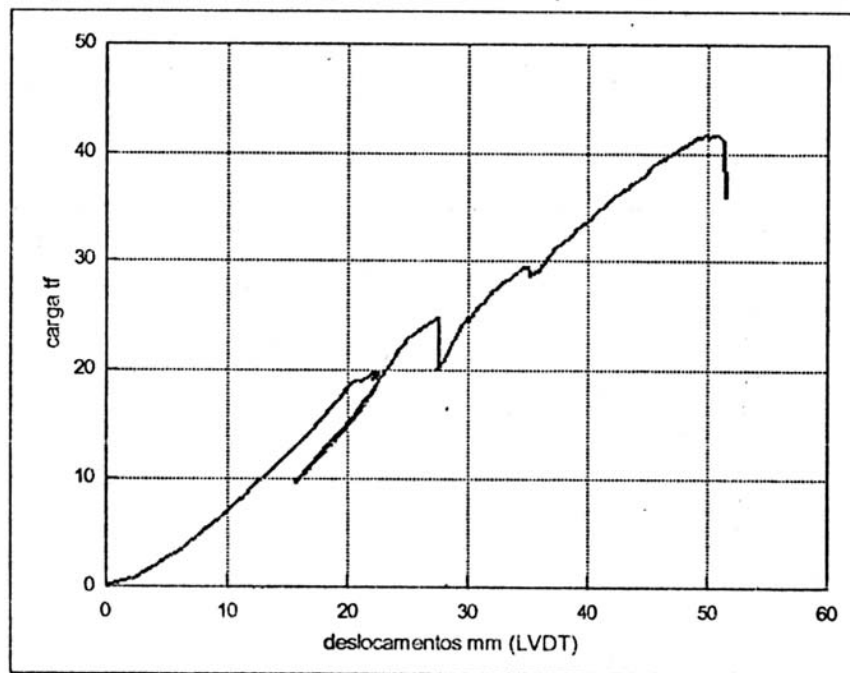


Figura IV-7 - Resposta do ensaio [10]

O mecanismo de colapso pode ser visto a seguir (Figura IV-8), este mecanismo se forma através do aparecimento de duas charneiras plásticas, uma na chapa da junta e outra nas chapas de ligação da barra. Com a definição deste mecanismo, fica ainda mais clara a dificuldade de se modelar separadamente cada um dos elementos da estrutura, tendo que se fazer uma modelagem mais refinada, considerando zonas de transição.

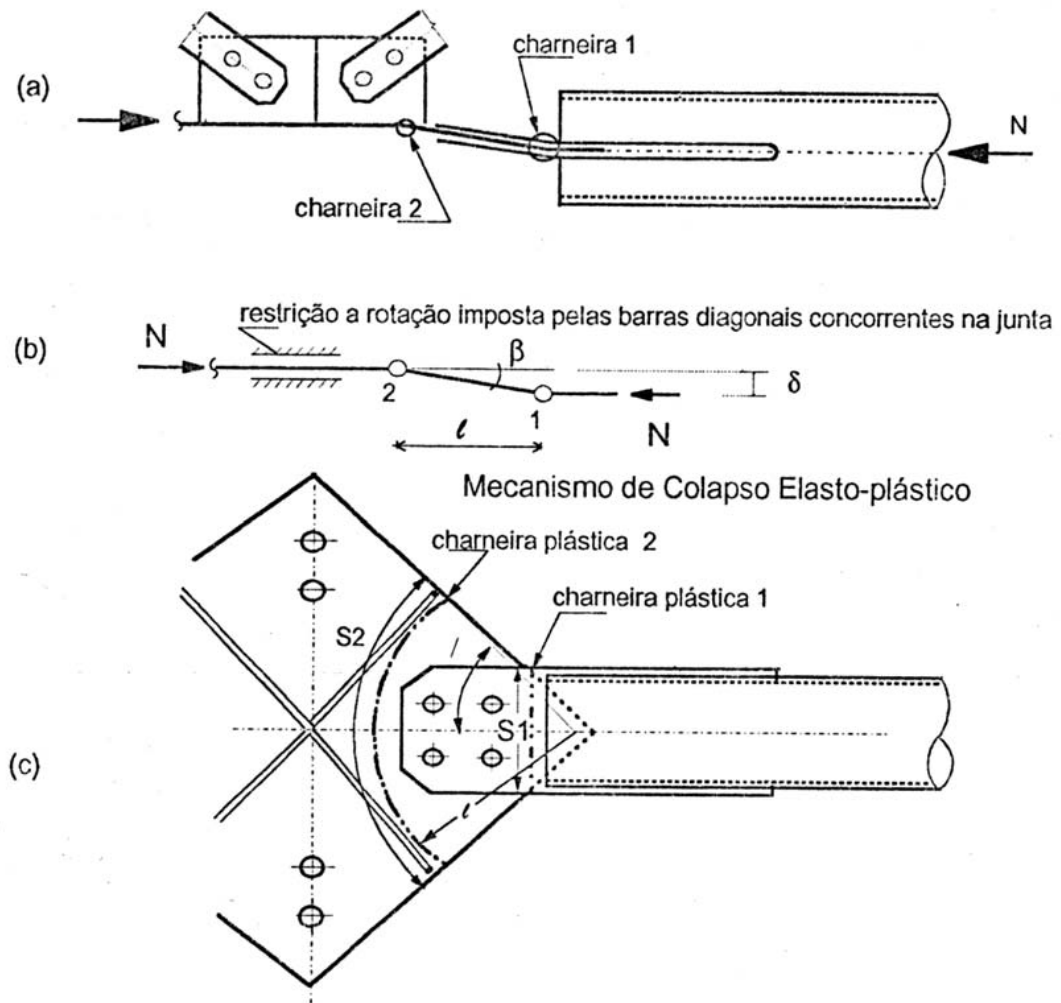


Figura IV-8 - Identificação do mecanismo de colapso local [10]

Além de problemas mais complexos de instabilidade do sistema *junta-barra*, existem ainda outros definidos por norma e que também devem ser verificados.

- Por rasgamento das chapas de ligação;
- Por corte dos parafusos;
- Além de outros definidos pela norma NB14 (NBR8800/86)

IV.4. Instabilidade local/global

Depois de vistos os tipos de instabilidade local apresentados, é necessário mostrar a forma com que cada uma destas falhas localizadas pode afetar a estabilidade global da estrutura. O efeito inicial da instabilidade local, no sentido de afetar a estabilidade global da

estrutura, é a redistribuição de esforços, isto pode acontecer em função de qualquer um dos efeitos locais mencionados, flambagem de barras, instabilidade das juntas ou até problemas de acidentes ou defeitos localizados.

A partir da redistribuição de esforços a estrutura pode se comportar de diversas formas, influenciada pelas suas configurações geométricas, distribuição de rigidezes, além de outros aspectos da estrutura como o tipo de junta mencionado. Estas formas geram diferentes mecanismos de interação local/global que serão discutidos a seguir.

IV.4.1 Mecanismos de Interação Local/global

Estes mecanismos podem ser definidos basicamente como a resposta da estrutura a uma falha localizada, trata-se da forma como a série de colapsos localizados se propaga pela estruturas, pode ser dividida em quatro formas básicas.

- **Colapso localizado** – Após a falha inicial, não ocorrem novas falhas. Pode acontecer no caso em que os elementos estruturais vizinhos a este ponto de falha têm a capacidade de suportar os esforços adicionais que estes terão que suportar após a redistribuição provocada pela falha inicial. A recuperação é simples, podendo se substituir apenas o elemento comprometido;
- **Progressão do colapso controlada** – A falha inicial gera uma sucessão de falhas, pode haver grandes deslocamentos estruturais, mas a progressão é contida em determinado ponto. A estrutura ainda se mantém segura para evacuação dos usuários e posterior recuperação;
- **Ruína estrutural parcial** – pode ser definida para estruturas contínuas com vários vãos, podendo apenas um, ou mais, módulos estruturais ruírem, tem os riscos de danos materiais e pessoais, mas em proporções menores do que a ruína total. Existe ainda a possibilidade de recuperar a estrutura, substituindo a parte danificada da estrutura, mas o custo pode ser proibitivo.
- **Ruína estrutural total**– caracterizada pela progressão do colapso local de forma que toda a estrutura se torne inutilizável, também com grandes riscos de danos materiais e pessoais;

A existência de elementos que possam conter a progressão da cadeia de colapsos certamente é um ponto de suma importância neste estudo, estes **inibidores** podem conferir a estrutura capacidade de resistir aos problemas locais sem provocar graves acidentes, por este motivo torna-se muito importante saber como projetar uma estrutura para que estes elementos inibidores estejam presentes, conseqüentemente criando estruturas mais seguras.

IV.5. Instabilidade global da estrutura

Como já foi dito em outras partes deste trabalho, a determinação da instabilidade, seja de uma barra, seja da estrutura toda, sempre acompanhará o estudo do colapso progressivo. Nesta parte do trabalho será tratado um ponto muito importante, principalmente para sistemas reticulados em forma de cascas, é o fenômeno chamado salto dinâmico (*Snap-Throught*).

Para fazer a caracterização deste fenômeno, será usado um exemplo simples, a treliça de von Mises. Na Figura IV-9 pode ser vista a sua forma e ainda a sua curva *carga x deformação*. Nesta curva, o comportamento pós-crítico apresentado mostra que a carga deve diminuir após alcançar o seu limite, havendo uma interação entre a estrutura e o carregamento. Este tipo de comportamento pode ser obtido em condições de laboratório, quando podem ser aplicadas cargas através de controle de deslocamentos. Na realidade, a maioria das estruturas estão submetidas a cargas gravitacionais, que não dependem do comportamento pós-crítico, portanto se mantêm constantes. Desta forma, quando a estrutura atinge o seu ponto crítico o salto dinâmico acontece, levando a estrutura de uma posição de equilíbrio vizinha à pré-crítica até uma pós-crítica estável, após um grande deslocamento (Δ).

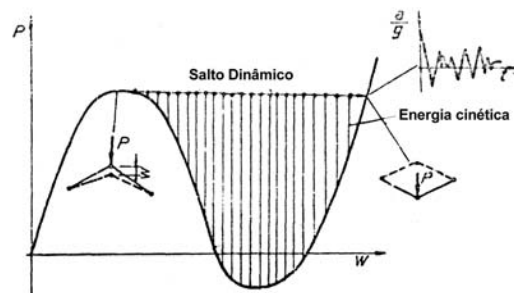


Figura IV-9 - Salto dinâmico para uma treliça de von Mises

Este fenômeno tem uma característica dinâmica acentuada, com grandes velocidades e acelerações. Durante o salto, a estrutura adquire energia cinética. Ao chegar à zona estável, a estrutura fica oscilando em torno da posição de equilíbrio. Dependendo das características dinâmicas da estrutura ela pode simplesmente amortecer este movimento, ou então desencadear um processo de falhas sucessivas que poderá levar a estrutura a ruína total.

Este exemplo da treliça de von Mises será usado nas próximas seções para ilustrar aspectos da estabilidade estática e dinâmica de estruturas.

V. MODELOS SIMPLIFICADOS PARA A ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Depois de serem caracterizados o comportamento dos elementos da estrutura, faz-se necessária a modelagem da estrutura que considerando o comportamento conjunto de seus elementos. A seguir será mostrada uma série de modelos analíticos que têm por objetivo mostrar os efeitos de cada um dos comportamentos localizados, anteriormente descritos, em uma estrutura simples de um só grau de liberdade. Através de processos de energia, como foi mostrado na análise de estabilidade, serão montadas as equações *de carga deslocamentos* para uma variação da treliça de von Mises, formada por dois elementos de treliça como mostrado abaixo.

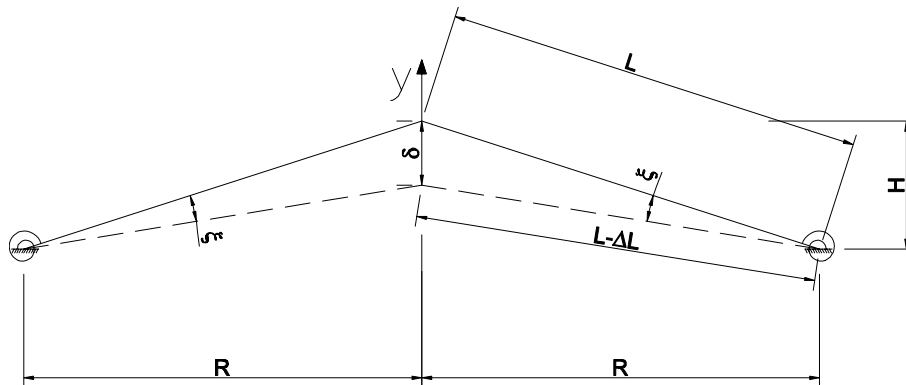


Figura V-1 - Variação da Treliça de von Mises

Este sistema é formado por duas barras rígidas à flexão, mas que se deforma axialmente segundo a função $f(\delta)$ além de duas molas que produzem momentos $f(\xi)$, a carga \mathbf{P} aplicada é suposta conservativa.

Para este primeiro modelo será considerada a inexistência das molas dos apoios. A energia potencial total do sistema é dada pela soma das energias de deformação elástica, U , e potencial da carga externa.

$$V = 2 \cdot \int_0^\delta f(\delta) d\delta + P \cdot y \quad (\text{V.1})$$

Como no sistema em questão existe apenas um grau de liberdade, as variáveis podem ser escritas em função de apenas uma delas, como é desejado traçar o caminho do nó onde a carga é aplicada, a variável escolhida para representar o sistema será y .

$$\delta = \sqrt{R^2 + H^2} - \sqrt{R^2 + (H + y)^2} \quad (\text{V.2})$$

Fazendo a mudança de variável, chega-se à seguinte equação de energia:

$$V = \int_0^y g(y)dy + P \cdot y \quad (\text{V.3})$$

Como uma estrutura em equilíbrio deve ter a primeira derivada da energia potencial total nula, então temos a seguinte condição de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dy} &= g(y) + P = 0 \\ \therefore P &= -g(y) \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Para ficar mais claro qual é esta função $g(y)$ será feito um exemplo considerando o comportamento da barra elástico linear:

$$f(\delta) = EA \cdot \frac{\delta}{\sqrt{R^2 + H^2}} \quad (\text{V.5})$$

$$f(y) = EA \cdot \frac{\sqrt{R^2 + H^2} - \sqrt{R^2 + (H + y)^2}}{\sqrt{R^2 + H^2}} \quad (\text{V.6})$$

$$d\delta = -\frac{H + y}{\sqrt{R^2 + (H + y)^2}} dy \quad (\text{V.7})$$

$$g(y) = -2 \cdot EA \cdot \frac{\sqrt{R^2 + H^2} - \sqrt{R^2 + (H + y)^2}}{\sqrt{R^2 + H^2}} \cdot \frac{H + y}{\sqrt{R^2 + (H + y)^2}} \quad (\text{V.8})$$

Utilizando o software Maple V, foi traçada a curva carga deslocamento, usando os seguintes parâmetros:

$$R=10,977 \text{ m}$$

$$H=0,695 \text{ m}$$

$$EA=10 \text{ N}$$

Pode ser visto nesta figura uma forte não linearidade geométrica, que permite o acontecimento dos saltos dinâmicos explicados anteriormente. Este tipo de estrutura é altamente instável para níveis de carregamento próximos à carga crítica.

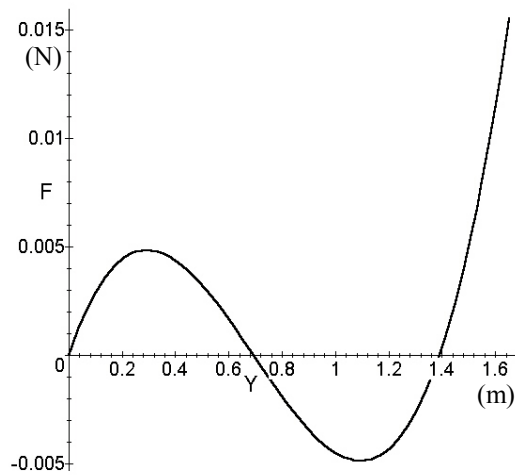


Figura V-2

Agora será considerado um comportamento não linear das duas barras de acordo com o modelo **b** da Figura IV-3. Fazendo o mesmo processo de energia a curva ao lado é encontrada.

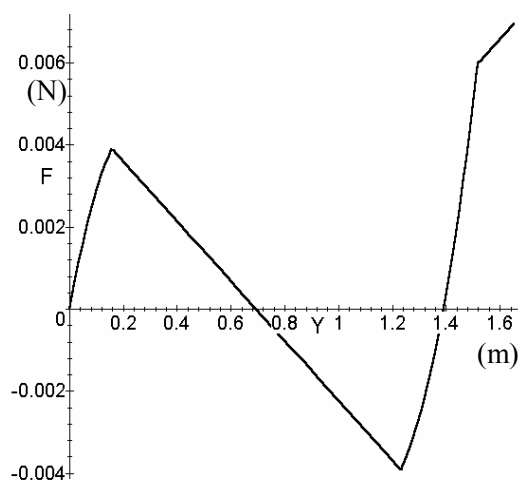


Figura V-3

A figura claramente mostra que a carga crítica diminui devido ao escoamento barra. Um gráfico de tensões será mostrado para que se veja a formação do patamar de tensões no nível de “escoamento”.

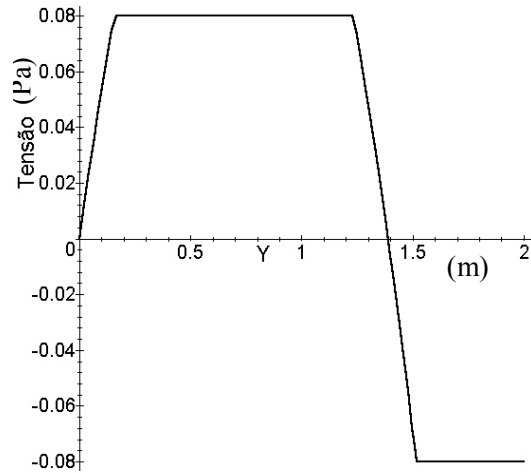


Figura V-4

Se usarmos uma linearização do caimento brusco de resistência da barra como mostrado na figura V-7 chega-se à curva *carga x deslocamento* e a curva de tensões abaixo.

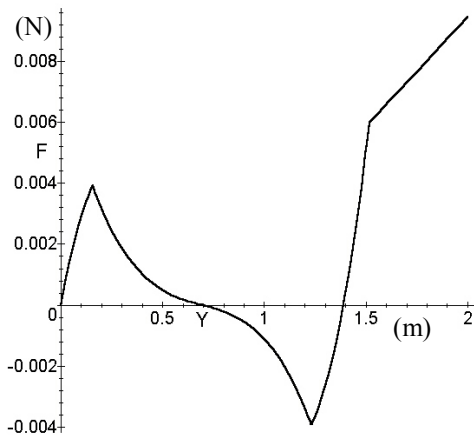


Figura V-5 - Curva carga x deslocamento

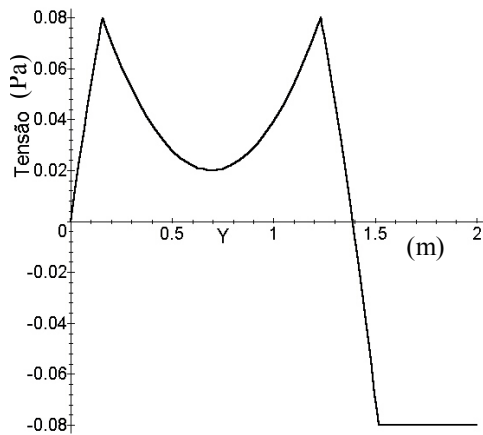


Figura V-6 - Curva tensão x deslocamento

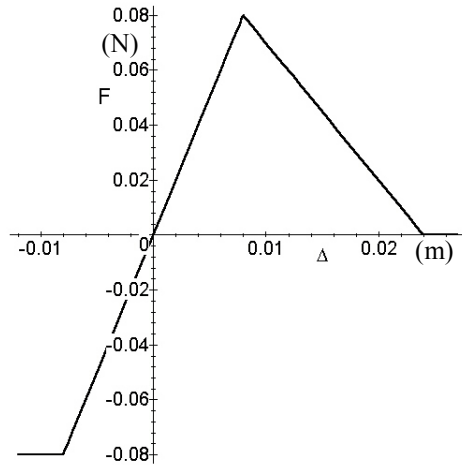


Figura V-7 - Comportamento de cada barra da treliça

Outras formas podem ser vistas nos resultados de PAPADRAKAKIS [28], que considera os efeitos de plastificação da barra.

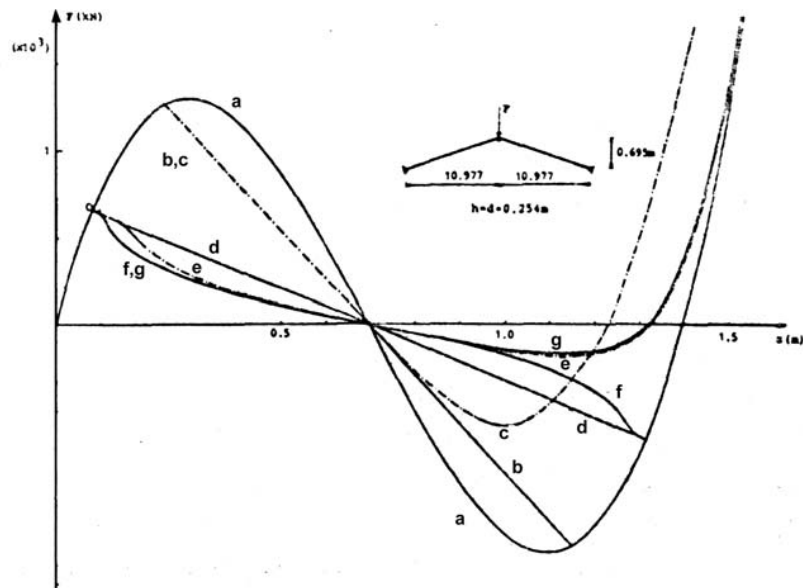


Figura V-8 -Deslocamento vertical, para os diversos modelos de comportamento da Fig.11[28]

Também há resultados de Papadrakakis para estruturas mais complexas, como a que é vista abaixo.

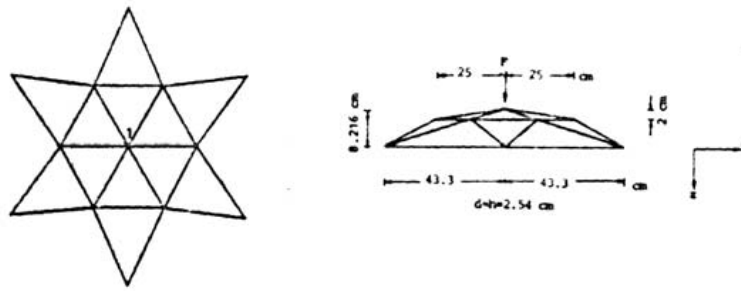


Figura V-9 - Modelo de pórtico hexagonal[28]

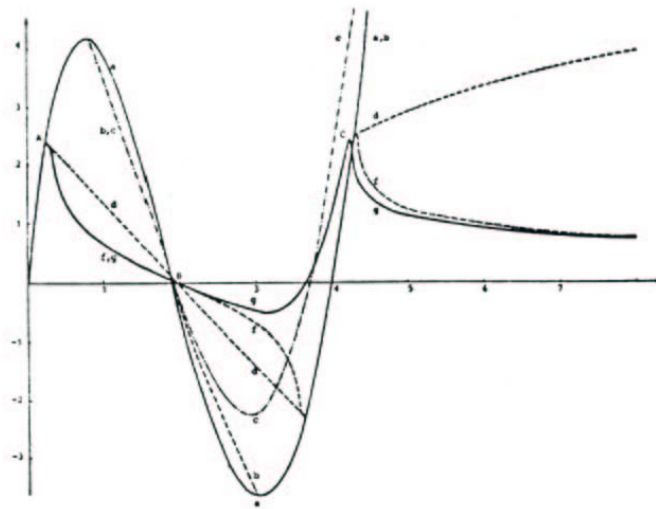


Figura V-10 – Deslocamento vertical no nó 1 do pórtico hexagonal para cada modelo da Fig. 11[28]

Pode-se perceber uma grande variedade de comportamento entre as diferentes leis constitutivas (Figura IV-3). A alguma distância do ponto crítico nota-se que as curvas relativas ao comportamento elastoplástico e elástico perfeito produzem resultados similares.

O próximo modelo analítico vai considerar a existência das duas molas que geram momentos nos pontos de apoio. Com a inclusão destas duas molas a equação da energia potencial total assume a seguinte forma:

$$V = \int_0^{\xi} f_1(\xi) d\xi + \int_0^{\xi} f_2(\xi) d\xi + \int_0^{\delta} f(\delta) d\delta + P \cdot y \quad (\text{V.9})$$

Utiliza-se o mesmo processo feito para a primeira configuração, colocam-se todas as variáveis em função de y para aplicar a condição de equilíbrio $\left(\frac{dV}{dy} = 0\right)$. Chega-se à equação que descreve o caminho de equilíbrio.

Para o caso de se considerar as molas com comportamento linear e de rigidezes iguais ($k=0.006 \text{ N/m}$), o caminho de equilíbrio está representado na Figura V-11.

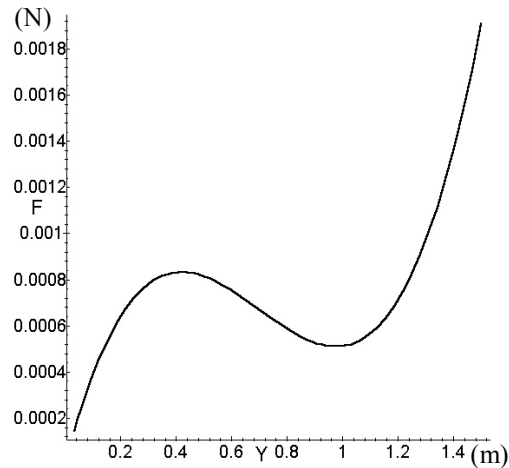


Figura V-11 - Curva carga deslocamento

Pode ser considerada uma mola com comportamento elastoplástico perfeito:

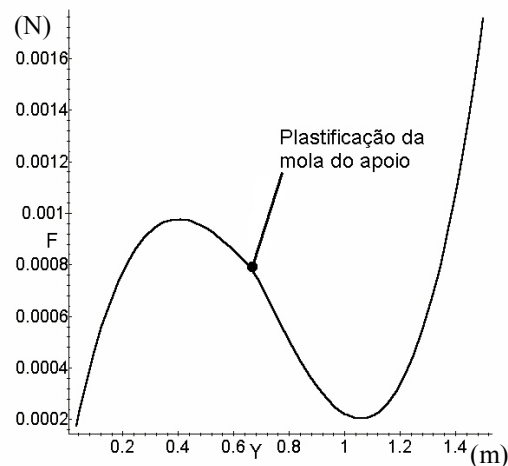


Figura V-12 - Curva carga deslocamento

Nota-se, neste item, que os comportamentos de juntas, ponteiros, barras, condições de apoio podem ser incluídos no comportamento global da estrutura de forma não muito complexa. Entretanto, tem que ser observado que foi utilizado um exemplo bastante

simples, com um único grau de liberdade, para que fosse mais fácil o desenvolvimento analítico. Para casos mais complexos e usuais, o que se deve fazer é utilizar o MEF, considerando as leis constitutivas de cada elemento da estrutura.

VI. INSTABILIDADE DINÂMICA

A importância do estudo da estabilidade dinâmica é evidente para o presente trabalho. O colapso localizado em algum elemento da estrutura, ou até um salto dinâmico apresentado pela estrutura, impõem à estrutura um comportamento dinâmico bastante acentuado devido à mudança brusca da configuração da estrutura.

Nesta seção será feito um estudo sucinto da estabilidade dinâmica, apresentando os principais conceitos e métodos para a análise da instabilidade, sem um aprofundamento maior com relação às formalidades matemáticas do problema.

Não existe uma definição absoluta apresentada na literatura para a estabilidade dinâmica, durante o desenvolvimento do seu estudo, várias modificações foram feitas para adaptá-lo às características especiais de problemas específicos, gerando uma série de teorias e métodos em torno de cada definição. Existe uma conceituação, proposta por HOFF [20], que têm um caráter bastante prático para a análise estrutural:

“Uma estrutura está em um estado de equilíbrio estável se perturbações finitas, admissíveis do seu estado inicial (estático ou dinâmico), são seguidas por deslocamentos cujas magnitudes permanecem dentro de padrões aceitáveis durante a vida útil da estrutura. Estes padrões são aqueles que não interferem no funcionamento da estrutura.”

Diferente da estabilidade estática, o caso dinâmico não é totalmente definido pela configuração da estrutura. Segundo este conceito a estabilidade de um estado inicial também depende da perturbação imposta ao sistema, da forma como esta perturbação se propaga, além dos parâmetros de funcionamento da estrutura, que podem variar bastante de uma estrutura para outra.

A perturbação imposta ao sistema pode ser de vários tipos: instantânea, periódica e dependente do tempo. Cada tipo destes requer um tratamento diferente no estudo da estabilidade.

O fenômeno de instabilidade, estático ou dinâmico, está sempre ligado a uma não linearidade forte, entretanto sempre se tentou utilizar formulações linearizadas para dar agilidade à análise em detrimento da exatidão. Em estabilidade dinâmica, muitos fenômenos de perda de estabilidade só podem ser determinados com a análise não-linear, como é o caso dos saltos dinâmicos.

Começando o estudo da estabilidade dinâmica pela apresentação da equação diferencial do movimento de um sistema estrutural com cargas conservativas, que será alvo das análises posteriores.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + f(y) = F(t) \quad (\text{VI.1})$$

Onde cada uma das parcelas tem um significado físico:

y – deslocamentos

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ – velocidades

$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ – acelerações

$m\ddot{y}$ – forças de inércia

$c\dot{y}$ – forças de amortecimento $\begin{cases} \text{se } c \neq 0 \rightarrow \text{movimento amortecido} \\ \text{se } c = 0 \rightarrow \text{movimento não-amortecido} \end{cases}$

ky – forças internas elásticas $\begin{cases} \text{se } ky \neq 0 \rightarrow \text{dinâmica dos corpos deformáveis} \\ \text{se } ky = 0 \rightarrow \text{dinâmica dos corpos rígidos} \end{cases}$

$f(y)$ – termos não-lineares característicos de não linearidade geométrica e/ou física

$F(t)$ – carregamento conservativo $\begin{cases} \text{se } F(t) \equiv 0 \rightarrow \text{vibração livre} \\ \text{se } F(t) \neq 0 \rightarrow \text{vibração forçada} \end{cases}$

A parcela $f(y)$ determina os efeitos não-lineares, caracterizando possíveis ganhos ou perda de rigidez, sendo portanto de suma importância para o estudo da instabilidade. É a partir da análise do efeito não linear que esta parcela tem no comportamento estrutural que pode se determinar a possibilidade de linearização do problema, definindo-se em que condições o julgamento linear traz bons resultados.

A seguir serão apresentados alguns métodos de análise da estabilidade dinâmica, uns através de estudos linearizados outros não lineares e ainda no domínio do tempo e da frequência. Estas exposições serão acompanhadas pela análise do modelo simples da treliça

de von Mises, já usada anteriormente para o caso estático, mas que agora será reapresentada, deduzindo a sua equação do movimento.

VI.1. Equação do movimento para a treliça de Von Mises

Este modelo é praticamente igual ao usado anteriormente, apresentado de forma mais simples. Tem apenas um grau de liberdade, também tem um comportamento não-linear acentuado (Fig. VI-1).

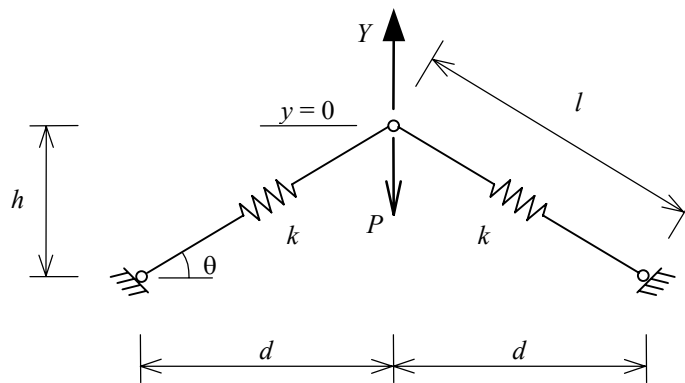


FIGURA VI-1 - Treliça de von Mises

O sistema é constituído por duas barras rotuladas entre si e nos apoios, contendo molas axiais lineares de rigidez k , submetidas à ação de uma carga P , associada a uma massa localizada m , $P = mg$, sendo g a aceleração da gravidade.

As massas das barras e das molas são consideradas desprezíveis e, inicialmente, admite-se o sistema sem amortecimento.

A equação de movimento do sistema é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange para sistemas conservativos de um grau de liberdade:

$$-\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (\text{VI.2})$$

onde, $L = T - V$ é o Lagrangeano;

T é a energia cinética do sistema; e

V é a energia potencial do sistema (soma da energia de deformação elástica e do potencial das cargas externas).

Como apresentado na referência [07], as energias cinética e potencial do sistema estrutural da treliça de von Mises são dadas por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\dot{y}^2 \\ V &= 2 \frac{1}{2} k\Delta l^2 + mgy \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

onde,

$$\Delta l = [d^2 + (h + y)^2]^{1/2} - (d^2 + h^2)^{1/2} \quad (\text{VI.4})$$

Utilizando a transformação adimensional

$$\frac{h+y}{d} = \eta \Rightarrow \frac{1}{d} \dot{y} = \dot{\eta} \Rightarrow \frac{1}{d} \ddot{y} = \ddot{\eta} \quad (\text{VI.5})$$

e aplicando o Lagrangeano na Eq.VI-1), obtém-se a equação Lagrangeana de movimento

$$\ddot{\eta} + \frac{2k}{md} [d - 1 (\eta^2 + 1)^{-1/2}] \eta + \frac{P}{md} = 0 \quad (\text{VI.6})$$

A transformação em duas equações diferenciais de primeira ordem é possível com a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 = \eta &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\eta} = x_2 \\ x_2 = \dot{\eta} &\Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{\eta} \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Assim, as equações Hamiltonianas de movimento do modelo da treliça de von Mises são:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= - \left[\frac{P}{md} + \frac{2k}{m} x_1 - \frac{2kl}{md} x_1 (1 + x_1^2)^{-1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

Admitindo as condições iniciais $x_1(0) = x_2(0) = 0$, a solução do sistema de equações (VI.8) é obtida através de integração numérica com a aplicação do algoritmo de Runge-Kutta, utilizando os *softwares* matemáticos MathCad 7.0 e Maple V r3 e r5. Estes aplicativos foram utilizados também para visualizar graficamente a projeção no plano deslocamento \times

velocidade (trajetórias no plano fase) e as respostas no tempo em termos de deslocamento, velocidade, energia cinética, energia potencial elástica, energia potencial gravitacional, e energia total.

VI.2. Análise do equilíbrio com o plano-fase

O plano-fase pode ser definido como uma particularização do espaço fase. Este, por sua vez, é a representação do sistema Hamiltoniano de dimensão $2n$.

Para o caso de haver apenas um grau de liberdade, como é o caso da treliça de von Mises, o espaço fase terá apenas duas dimensões sendo reduzido a um plano, chamado de plano-fase.

As equações Hamiltonianas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2) \quad (\text{VI.9})$$

$$\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2)$$

Considerando que nas vizinhanças da origem possa ser feita uma expansão de X_1 e X_2 em série de Taylor:

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \varepsilon_1(x_1, x_2) \quad (\text{VI.10})$$

$$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2(x_1, x_2)$$

Onde

$$a_{11} = \left. \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right|_{x_j=0} \quad (\text{VI.11})$$

Em notação matricial:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a} \underline{x} + \underline{\varepsilon} \quad (\text{VI.12})$$

Onde,

$$\underline{\tilde{x}} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}; \underline{\tilde{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}; \underline{\tilde{a}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.13})$$

Se for considerado que as funções ε_i têm valor desprezível para pequenas perturbações do equilíbrio, poderá ser feita uma análise infinitesimal baseada na seguinte equação linearizada.

$$\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{a}} \underline{\tilde{x}} \quad (\text{VI.14})$$

Se esta linearização for válida, o comportamento do sistema na vizinhança da origem pode ser avaliado a partir dos autovalores, λ_1 e λ_2 , de $\underline{\tilde{a}}$.

- λ_1 e λ_2 são reais e de mesmo sinal $\begin{cases} \text{Se } \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \rightarrow \text{nó estável} \\ \text{Se } \lambda_2 > \lambda_1 > 0 \rightarrow \text{nó instável} \end{cases}$
- λ_1 e λ_2 são reais, de sinais opostos {ponto sela}
- λ_1 e λ_2 são reais coincidentes $\begin{cases} \text{Se } \lambda_1 < 0 \rightarrow \text{nó estável} \\ \text{Se } \lambda_1 > 0 \rightarrow \text{nó instável} \end{cases}$ {nós degenerados (íncómunos)}
- λ_1 e λ_2 são complexos conjugados $\begin{cases} \text{Se } \alpha < 0 \rightarrow \text{foco estável} \\ \text{Se } \alpha > 0 \rightarrow \text{foco instável} \end{cases}$
 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$
- λ_1 e λ_2 são imaginários puros ($\alpha=0$) {centro}

Algumas ilustrações do plano-fase dos casos descritos:

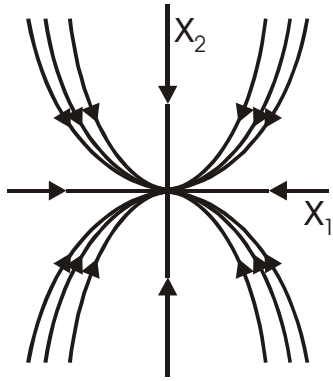


Figura VI-2 – Nó estável

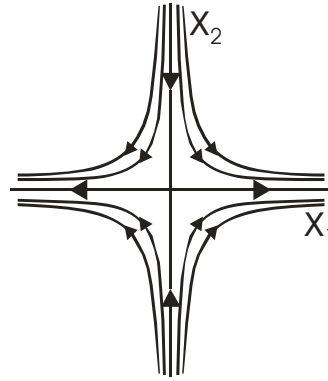


Figura VI-3 – Sela

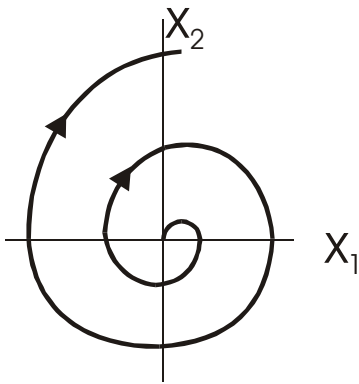


Figura VI-4 – Foco instável

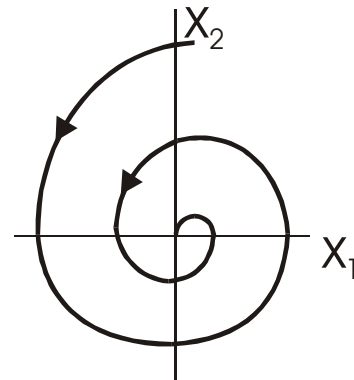


Figura VI-5 – Foco estável

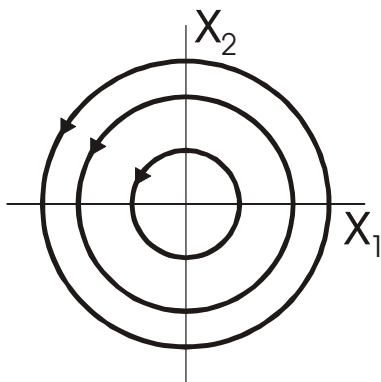


Figura VI-6 – Centro

A treliça de von Mises pode ser usada para ilustrar algumas destas situações. Para o caso de vibração livre sem amortecimento pode ser identificada a presença de dois centros e de um ponto de sela.

Nas posições de equilíbrio estável, $y=0$ e $y=1$, são identificados os centros que podem ser mostrados na Figura VI-7.

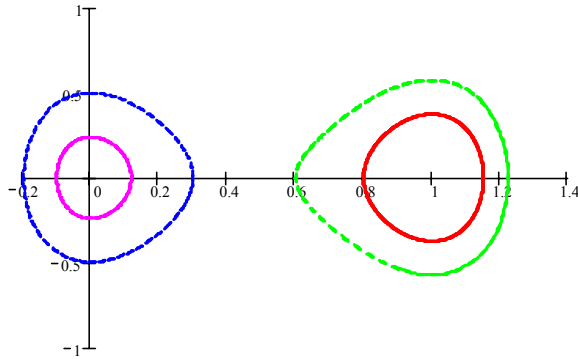


Figura VI-7

Já na posição de equilíbrio instável, $y=0,5$, pode ser identificado um ponto de sela.

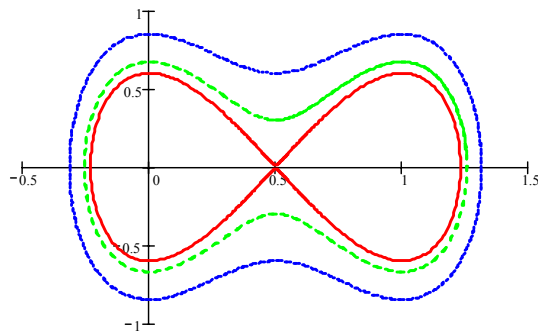


Figura VI-8

Para a treliça de von Mises amortecida pode ser identificado um foco estável.

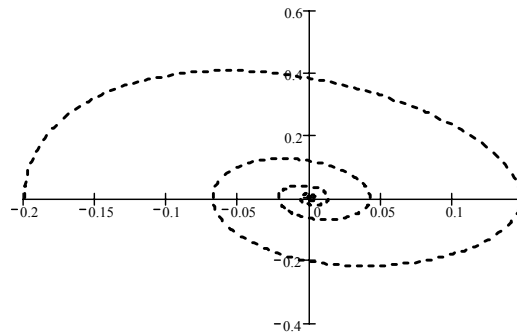


Figura VI-9

VI.3. Critério de Budiansky

O critério de Budiansky propõe a determinação da carga de instabilidade dinâmica analisando a resposta no tempo do sistema da seguinte forma: São aplicados carregamentos de magnitude crescente e para cada valor de carga é determinado o deslocamento máximo experimentado pela estrutura num determinado intervalo de tempo. Com os dados extraídos é traçada uma curva de *carga x deslocamento máximo* (Figura VI-11). Neste gráfico pode se perceber que para um intervalo de magnitude das cargas o aumento dos deslocamentos ocorre de forma suave, a partir de um certo nível (1,2) acontece um crescimento brusco no deslocamento. Esta é considerada a carga de instabilidade dinâmica.

Para auxiliar a compreensão será usado o modelo da treliça de von Mises, sem amortecimento, solicitada pela carga de impacto representada na Figura VI-10.

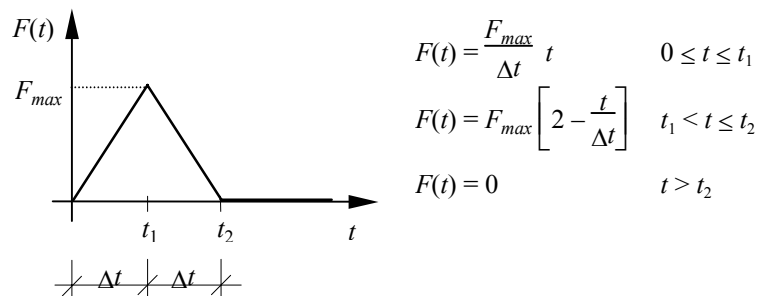


Figura VI-10- Carga de impacto

Considerando $\Delta t = 0,1s$ e os vários valores para F_{max} .

TABELA VI.1

Força e deslocamento

F_{max} (N)	$x_1(t)$ (m)
- 0,240	- 0,642
- 0,360	- 0,677
- 0,480	- 0,714
- 0,600	- 0,756
- 0,720	- 0,798
- 0,840	- 0,847
- 0,960	- 0,904
- 1,080	- 0,978
- 1,188	- 1,099
- 1,200	- 2,000
- 1,320	- 2,024
- 1,440	- 2,047

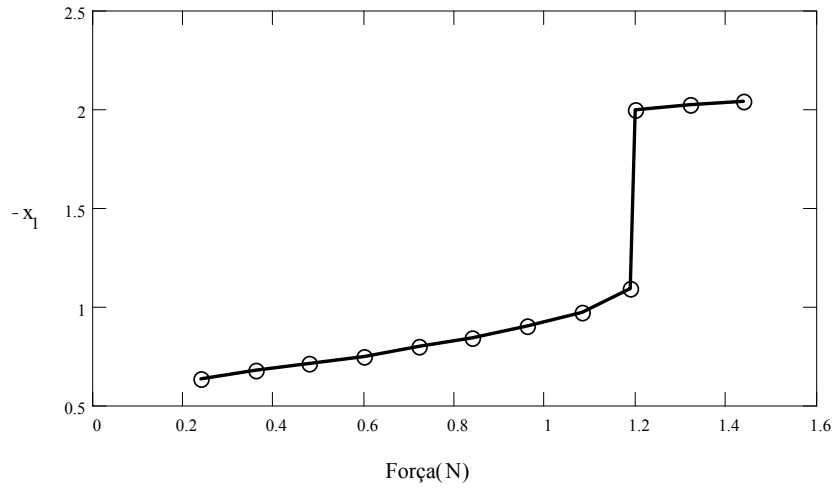


Figura VI-11- Critério de Budiansky

Para este caso fica clara posição do gráfico onde está localizada a carga de instabilidade dinâmica, mas existem casos, com não-linearidade menos acentuada, em que o comportamento é mais suave (Figura VI-12). Para se determinar a carga de instabilidade dinâmica, Budiansky sugere adotar o ponto de inflexão (F_d), STEPHENS e FULTON determinam um ponto mais conservador F_d^* .

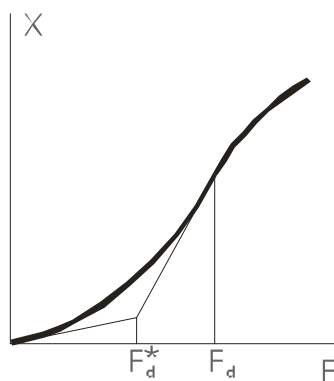


Figura VI-12

VI.4. Critério da barreira potencial

Esta é uma técnica desenvolvida para ser usada nos casos em que a ação dinâmica é uma carga de impacto de curta duração. Ela consiste basicamente em duas etapas: na primeira delas determina-se a energia do ponto de escape, conhecida esta energia o próximo passo é a determinação da carga necessária para que a estrutura passe de uma bacia de atração para outra.

Analisando o problema da treliça, pode-se determinar a energia do ponto limite a partir da energia total do sistema, resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

Como pode ser visto nos gráficos de energia da Figura VI-13, três pontos satisfazem esta condição, entretanto apenas um é instável, os outros dois são estáveis pois são pontos de mínimo local.

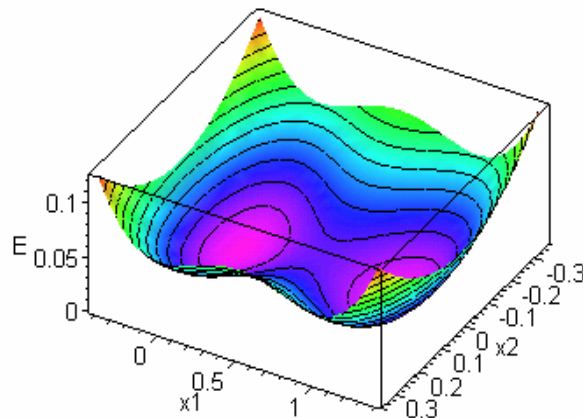


Figura VI-13 - Superfície de energia

As três soluções para o caso estudado são as seguintes:

$$\begin{aligned} y &= 0,0, \quad \dot{y} = 0,0, \quad E = 0,0 \text{ J} \\ y &= 1,0, \quad \dot{y} = 0,0, \quad E = 0,0 \text{ J} \\ y &= 0,5, \quad \dot{y} = 0,0, \quad E = 0,017948957 \text{ J} \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

Conhecendo a energia mínima necessária para que o sistema passe de uma bacia para outra, determina-se o valor da energia que um impacto fornece ao sistema. De acordo com a referência [16], para impactos de pequena duração a relação impulso-momento para uma massa m , pode ser descrita por:

$$m\Delta\dot{y} = \int_0^{t_1} [F(t) - k y(t)] dt \quad (\text{VI.17})$$

onde $\Delta\dot{y}$ representa a mudança de velocidade devida ao impulso.

Pode ser observado, a partir desta equação, que os valores de deslocamento $y(t_1)$ desenvolvidos durante o carregamento são da ordem de t_1^2 , enquanto os valores de $\Delta\dot{y}$ são da ordem de t_1 , sendo assim, para pequenos valores de t_1 , a parcela da força elástica $k y(t)$ é desprezível, levando à seguinte equação:

$$m\Delta\dot{y} = \int_0^{t_1} F(t) dt \quad (\text{VI.18})$$

$$\Delta\dot{y} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} F(t) dt$$

Para o caso de uma carga de impacto triangular:

$$\Delta\dot{y} = \frac{1}{m} \frac{F_{max} t_1}{2} \quad (\text{VI.19})$$

Como o deslocamento total pode ser considerado desprezível, a energia total do sistema pode ser considerada igual à energia cinética:

$$E = \frac{m \Delta\dot{y}^2}{2} \quad (\text{VI.20})$$

Substituindo $\Delta\dot{y}$ na expressão da energia cinética, temos:

$$E = \frac{F_{max}^2 t_1^2}{8 m} \quad (\text{VI.21})$$

Logo, definido um valor de t_1 é possível calcular a carga de fuga.

Seja então uma carga de impacto (Figura VI-10) com o tempo $t = 2\Delta t = 0,1s$, a massa $m=0,1kg$, considerando o valor de energia definido na Eq.(VI.16), F_{max} será:

$$0,017948957 = \frac{F_{max}^2 \cdot 0,01}{0,8} \quad (VI.22)$$

$$F_{max} = \pm \sqrt{0,017948957 \times 80} = \pm 1,1982974 \text{ N}$$

Obtido F_{max} o comportamento do sistema pode ser observado graficamente nas Figs. VI-14, VI-15 e VI-16.

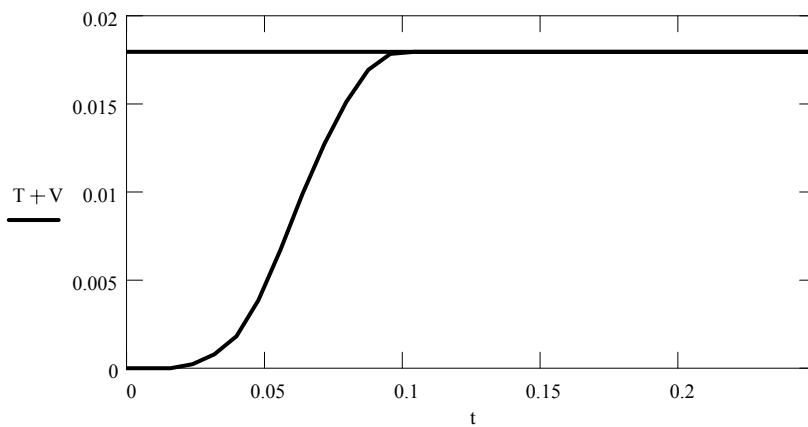


FIGURA VI-14 - Energia (J) × tempo (s)

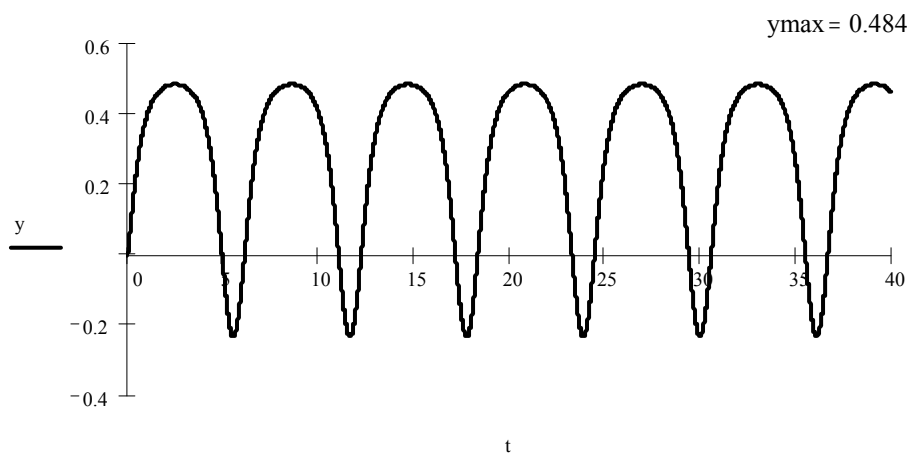


FIGURA VI-15 - Deslocamento (m) × tempo (s)

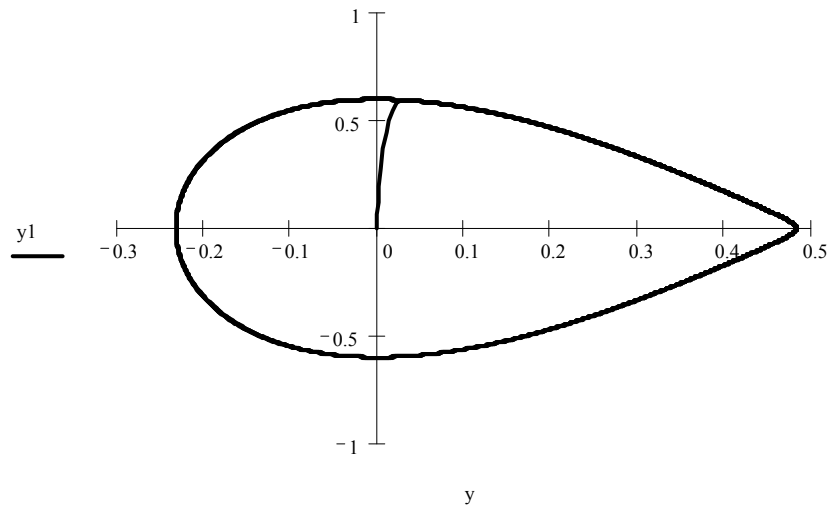


FIGURA VI-16 - Trajetória no plano fase (deslocamento y (m) x velocidade y_1 (m/s))

Nota-se, nestas figuras, que a força calculada é menor que a necessária para o escape, entretanto é uma boa aproximação já que se obtém um deslocamento máximo igual a 0,484 que chega muito próximo do valor limite que é 0,5. Por processo de tentativa, chega-se ao valor para a carga mínima de escape $F = 1,1996$ N, que corresponde a um erro de 0,1%, altamente aceitável e atribuído à aproximação da Eq. VI.18 na qual a parcela da força elástica foi desprezada. Com este valor para a força chegam-se aos gráficos das Figs. VI-17, VI-18 e VI-19.

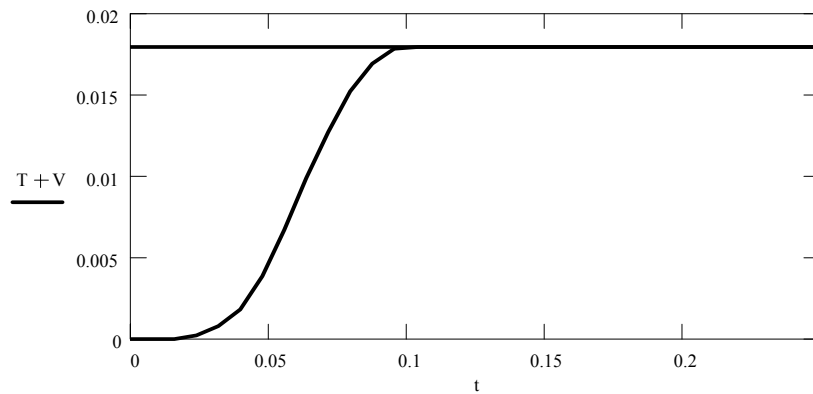


FIGURA VI-17 - Energia (J) x tempo (s)

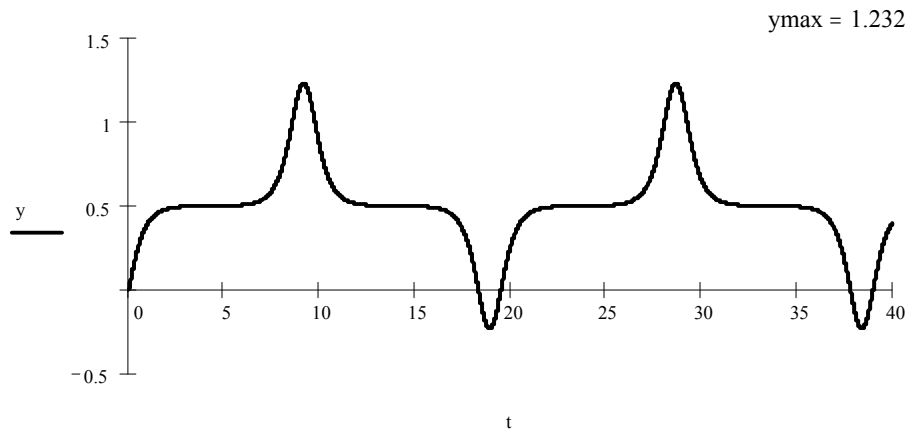


FIGURA VI-18 - Deslocamento (m) × tempo (s)

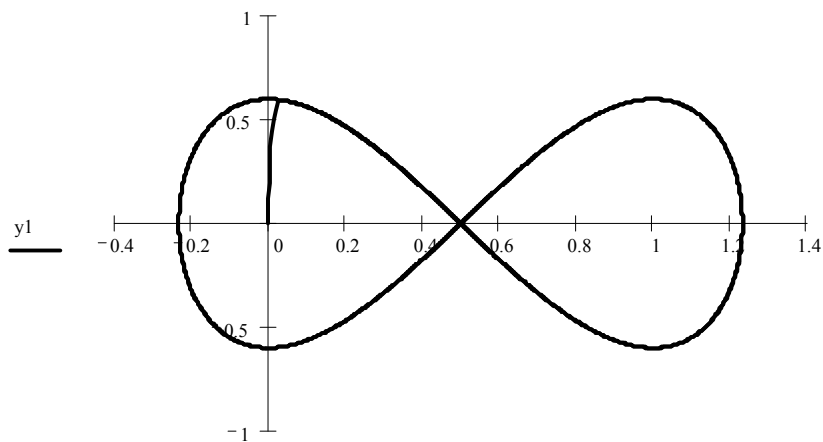


FIGURA VI-19-Trajétória no plano fase (deslocamento y(m) x velocidade y1(m/s))

VI.5. Análise no domínio da frequência da equação de Duffing

A maioria dos sistemas estruturais tem sua não linearidade bem representada por uma função cúbica do tipo αy^3 , onde a diferença qualitativa entre o comportamento destes sistemas é atribuída ao coeficiente α . Assim, em regime de vibrações livres não lineares e admitindo a inexistência de não linearidade dinâmica, a equação de movimento amortecido tem a forma:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \alpha y^3 = 0 \quad (\text{VI.23})$$

Esta equação é conhecida como equação de Duffing e o sinal do coeficiente α está relacionado a ganho (positivo) ou perda (negativo) de rigidez.

Na hipótese de um sistema estrutural solicitado por uma força harmônica, como equação de movimento teremos:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \alpha y^3 = F \cos(\Omega t) \quad (\text{VI.24})$$

ou, ainda,

$$\ddot{y} + \bar{c}\dot{y} + \omega_0^2 y + \beta y^3 = \bar{F} \cos(\Omega t) \quad (\text{VI.25})$$

onde $\bar{c} = \frac{c}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{\alpha}{m}$ e $\bar{F} = \frac{F}{m}$.

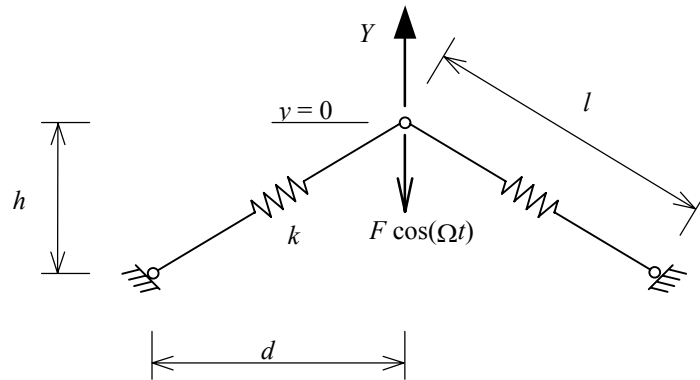


FIGURA VI-20 - Treliça com carga harmônica

Associando ao modelo da treliça de von Mises, teremos:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

(VI.26)

$$\dot{x}_2 = - \left[\frac{2k}{m} x_1 - \frac{2kl}{md} x_1 (1 + x_1^2)^{-1/2} + \frac{2cd}{m} \dot{x}_1 - \frac{F}{m} \cos \Omega t \right]$$

Admitindo que a não linearidade do sistema possa ser representada por uma função cúbica, a solução aproximada da equação diferencial não linear de segunda ordem relativa ao sistema de equações (VI.26) é obtida através da aplicação do método de Galerkin-Urabe, onde:

$$\alpha = \frac{2kl}{d} ; \quad \gamma = 2k ; \quad M = m ; \quad C = 2cd ; \quad \omega^2 = \frac{2k}{m} . \quad (\text{VI.27})$$

Fazendo $c = 0,2 \text{ Ns/m}$ e $F(t) = 3,2 \cos(3t)$, obtém-se a resposta não linear em frequência, apresentada na Fig. VI-21, onde a solução do problema não linear de vibração livre é representada pela linha pontilhada.

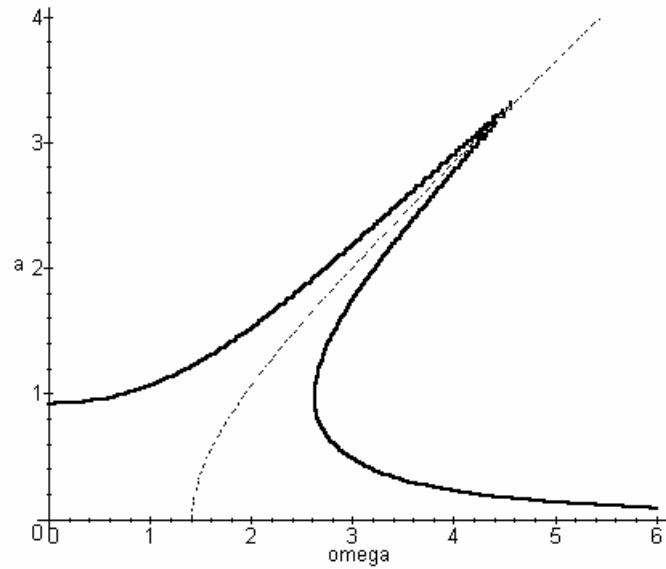


FIGURA VI-21 - Resposta não linear em frequência

VII. TÉCNICAS USUAIS PARA ANÁLISE DO COLAPSO PROGRESSIVO

Para o tipo de estrutura estudada, é quase impossível criar uma regra geral para estimar a estabilidade e a sua capacidade para suportar as cargas aplicadas após a ocorrência de uma falha localizada. Esta dificuldade deve-se à grande gama de variações que podem apresentar estas estruturas: forma geométrica (curvatura, vãos, altura, modulação), tipo de junta e ainda a distribuição das rigidezes na estrutura. Como não se tem uma expressão geral para análise sob estes critérios, faz-se necessária a utilização de uma ferramenta capaz de avaliar cada estrutura individualmente.

As várias ferramentas desenvolvidas se diferenciam basicamente em um ponto, o tratamento dado às barras em seu estado pós crítico. Apesar desta diferença básica, todas as ferramentas podem fazer dois tipos de análise: na primeira forma é supor uma perda ocasional de uma barras da estrutura e verificar a sua capacidade de adaptação à nova configuração imposta. Através deste método podem ser definidas zonas críticas em que as barras devem ter uma maior reserva de resistência. A segunda forma difere da primeira pelo seu objetivo, que é determinar a carga máxima suportada pela estrutura, para isso é aplicada uma carga monotônica até que a estrutura atinja o seu limite.

O primeiro método a ser apresentado será o mais simples e mais conservador. Este consiste em retirar da estrutura as peças que excedem sua carga crítica (que tem fator de segurança menor que 1,0). O processo segue da seguinte forma: após a flambagem da primeira barra, esta é retirada e a estrutura é reanalisada com a nova configuração, verifica-se os fatores de segurança das barras restantes, se todas têm valores acima de 1,0 o colapso se manteve local, caso alguma barra tenha fator menor que 1,0 esta é retirada e o processo se repete até que ele cesse, caracterizando um **colapso interrompido**, ou que a estrutura atinja o **colapso generalizado**.

O segundo método é menos conservador que o primeiro, o processo é basicamente o mesmo, a diferença está na substituição das barras flambadas por forças residuais equivalentes à sua resistência pós-crítica. Um inconveniente dos dois métodos apresentados

é que as barras podem voltar a ter resistência no caso de inversão da deformação numa barra, acarretando alongamentos que têm que ser monitorados para que se recolque a barra na estrutura quando necessário.

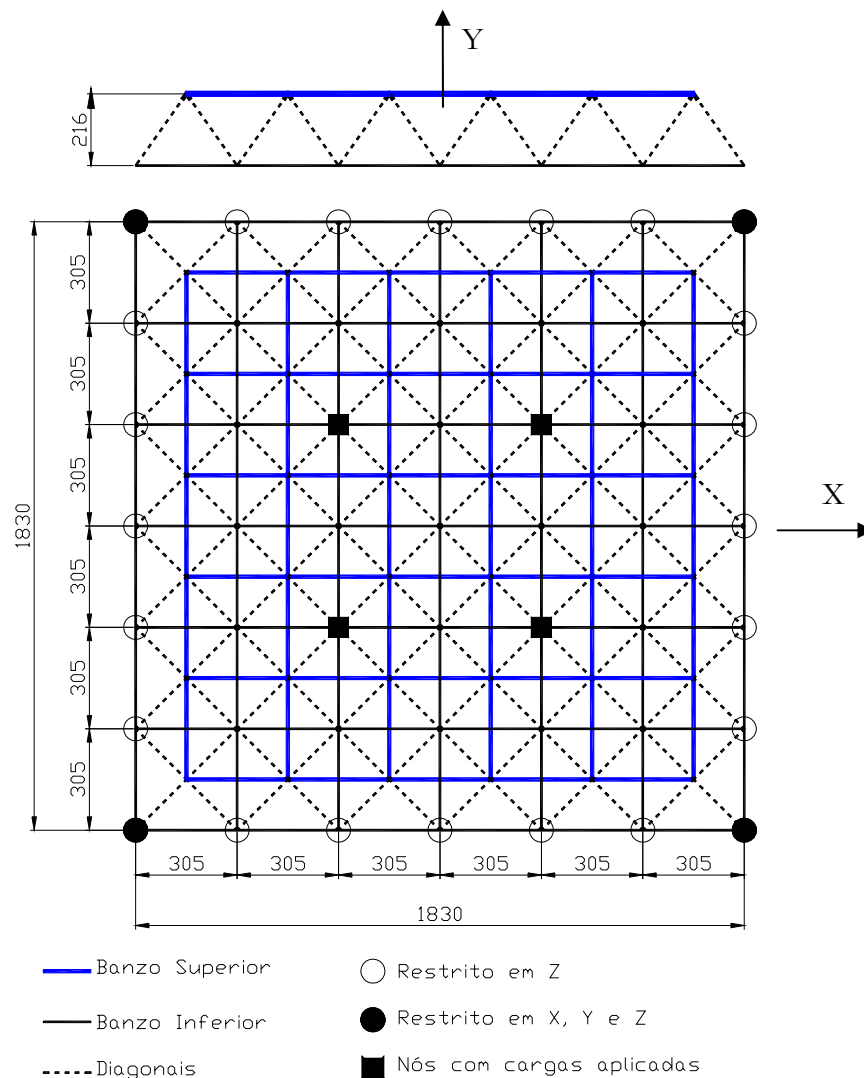
Os outros métodos são muito parecidos entre si: neles o comportamento pós-critico é incluído através da não linearidade física das barras que é descrita por suas leis físicas. Assim, se uma barra ultrapassa seu limite ela sofrerá a queda de resistência descrita pela sua curva de comportamento pós crítico, conseqüentemente os elementos vizinhos terão que suportar cargas maiores. Se estes elementos também ultrapassarem seus valores críticos, também perderá a capacidade de resistir às cargas impostas e o processo segue como nos outros métodos. Entre os métodos agora apresentados a diferença consiste na forma como é descrito o comportamento pós-critico das barras comprimidas. São diversas as formas de aproximar este caminho(Figura IV-3) , algumas consideram a plasticidade das barras, outras não.

Na próxima seção serão feitos alguns ensaios numéricos para modelar a progressão do colapso nos reticulados.

VIII. MODELAGEM DO COLAPSO PROGRESSIVO

Nesta seção será usado o software comercial ANSYS, para modelar a progressão do colapso em reticulados espaciais. Inicialmente será analisada uma estrutura com as mesmas características da usada por SCHIMIDT [32], com as mesmas condições de contorno e mesmas características geométricas, comparando os resultados numéricos e experimentais obtidos por SCHIMIDT com os resultante da presente análise.

A estrutura ilustrada na figura abaixo:



No experimento de SCHIMIDT todos os elementos usados são tubos de alumínio com 12 mm de diâmetro externo e $1,5\text{ mm}$ de espessura.

Antes de experimentar a estrutura completa foram ensaiados elementos isolados e pequenos módulos estruturais. Com estes ensaios foram determinadas as cargas críticas dos elementos considerando suas condições de contorno reais conferidas pelas ligações com os nós da estrutura. O comportamento de cada elemento sujeito a compressão pode ser visto na Figura VIII-1. Onde pode ser determinada a carga limite de compressão com sendo de aproximadamente 9 kN.

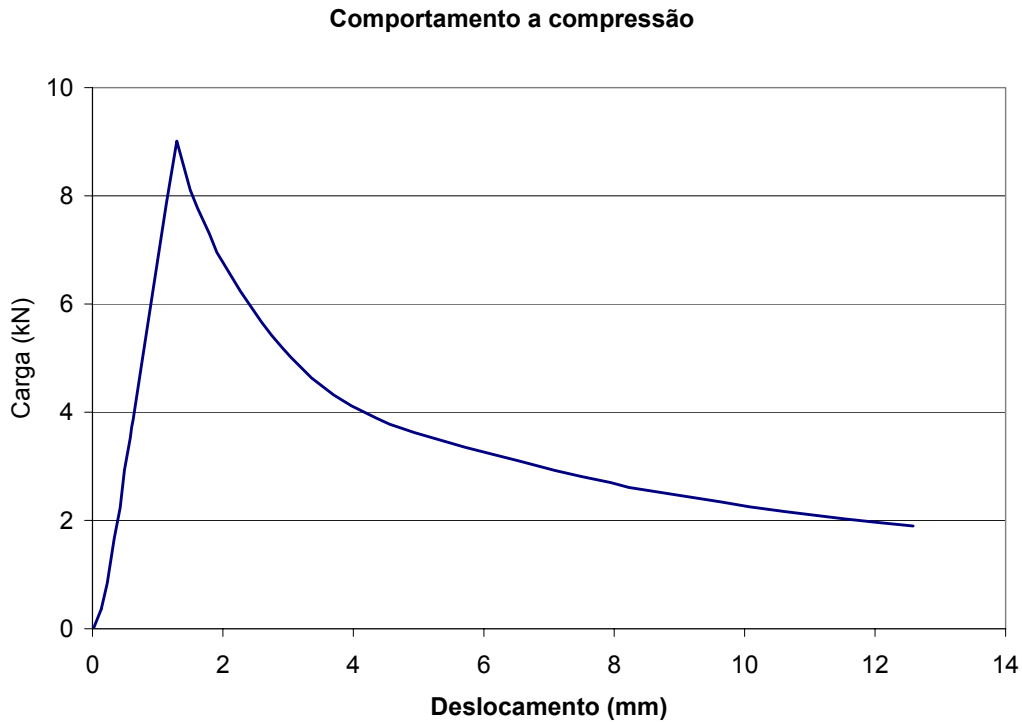


Figura VIII-1 – Resultado dos ensaios experimentais

Nos ensaios feito para pequenos módulos estruturais houve um pequeno acréscimo no valor da carga crítica devido a rigidez do nó quando conectado a vários elementos.

O experimento global apresentou a seguinte curva de $F \times \Delta$, sendo F a força total aplicada nos quatro nós e Δ a deflexão no central do banzo inferior da malha.

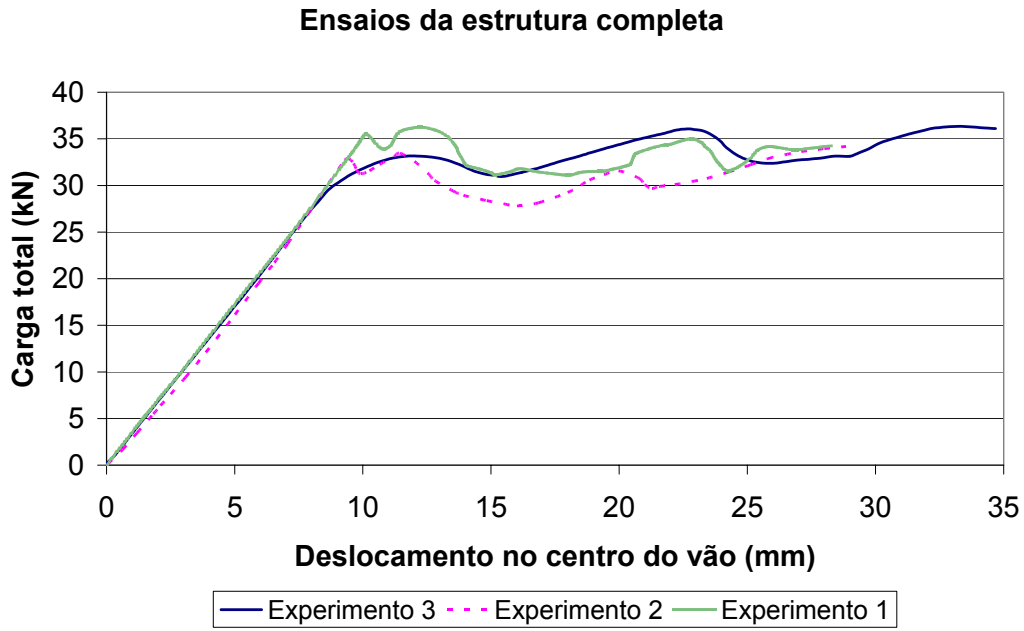


Figura VIII-2 – Resultados experimentais para a estrutura completa[32]

Definidas as características básicas da estrutura, SCHIMDT criou um modelo numérico considerando o comportamento estrutural como o apresentado na Figura IV-3-h. Com uma força residual de 2,54 kN.

Para este modelo numérico foi encontrada a seguinte resposta, que pode ser comparada aos valores experimentais na Figura VIII-3.

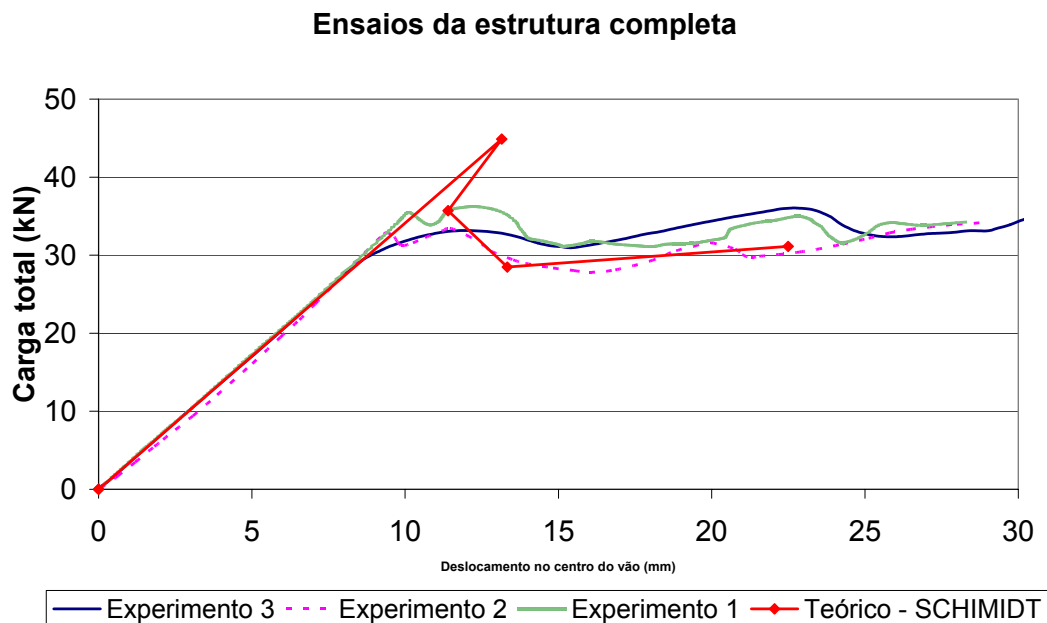


Figura VIII-3 – Comparação entre resultados experimentais[32] e numéricos com forças residuais

Aqui será feita uma modelagem parecida com a feita por SCHIMIDT, entretanto para este não será considerada a presença de forças residuais, produzindo os seguintes resultados.

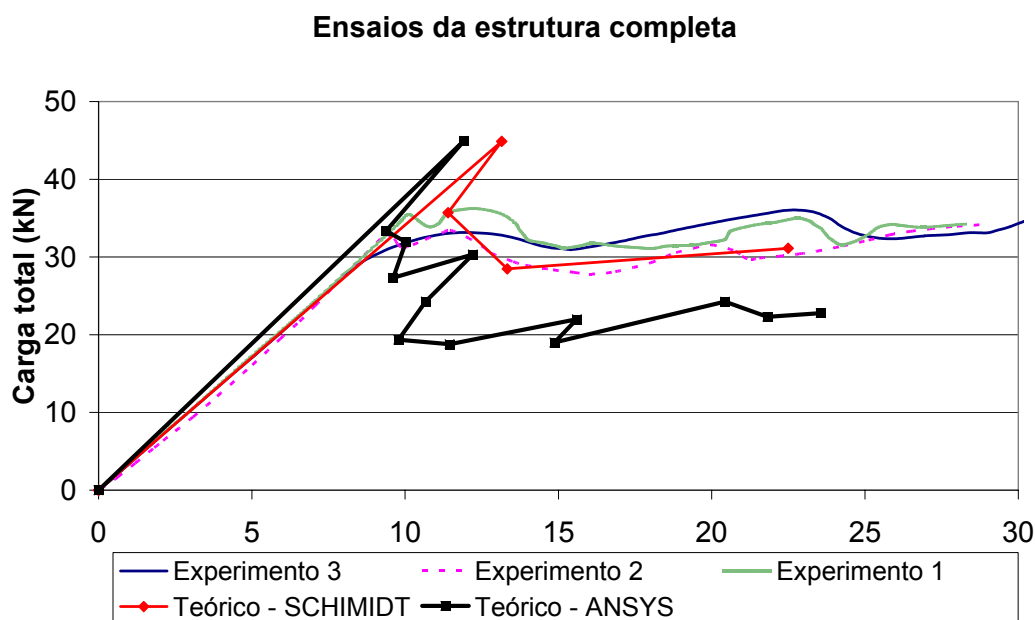


Figura VIII-4 - Comparação entre resultados experimentais[32] e os numéricos

Como pode ser notado comparando as curvas teóricas de SCHIMIDT com as do presente trabalho, existe uma pequena diferença na parte elástica da modelagem, isto é antes do rompimento da primeira barra, esta defasagem ocorre porque na modelagem de

SCHIMIDT foi considerado um módulo de elasticidade equivalente para cada tipo de barra (diagonal, banzo inferior e superior).

Apesar desta pequena diferença de rigidez dos caminhos pré-críticos de equilíbrio, os valores da carga crítica para as duas modelagens são praticamente os mesmos: 44,96 kN para a presente modelagem e 44,88 kN para a de SCHIMIDT. Entretanto, em todos os três experimentos feitos as cargas de flambagem (35,5 kN, 33,16 kN e 32,9 kN), foram bastante inferiores à carga crítica teórica, resultando em diferenças que variam de 21 a 27 %. Essas diferenças se devem ao fato de a estrutura ter sido considerada perfeita, com todas as barras retilíneas, e com as posições dos nós idealizadas. Na estrutura real nada disso acontece, as barras individualmente são geometricamente imperfeitas, as coordenadas dos nós variam em torno dos planos que definem as superfícies do reticulado. Além disso, existem esforços residuais de montagem da estrutura e a ausência da modelagem das juntas, de grande importância para o comportamento estrutural.

As sucessivas cargas pós-críticas têm, no presente modelo, valores inferiores aos do modelo de SCHIMIDT, devido à não consideração das resistências residuais. Apesar da diferença na magnitude das cargas pós-críticas, a presente modelagem identifica claramente o colapso progressivo, que ocorrem nos experimentos (mas não são detectadas na modelagem teórica de SCHIMIDT) com sucessivas cargas localizadas de colapso.

A seqüência de sucessivos colapsos locais ocorre de acordo com a numeração apresentada na Figura VIII-5 se compara bem aos ensaios (vide Figura VIII-6). Observa-se que as Figs VIII-5 e VIII-6

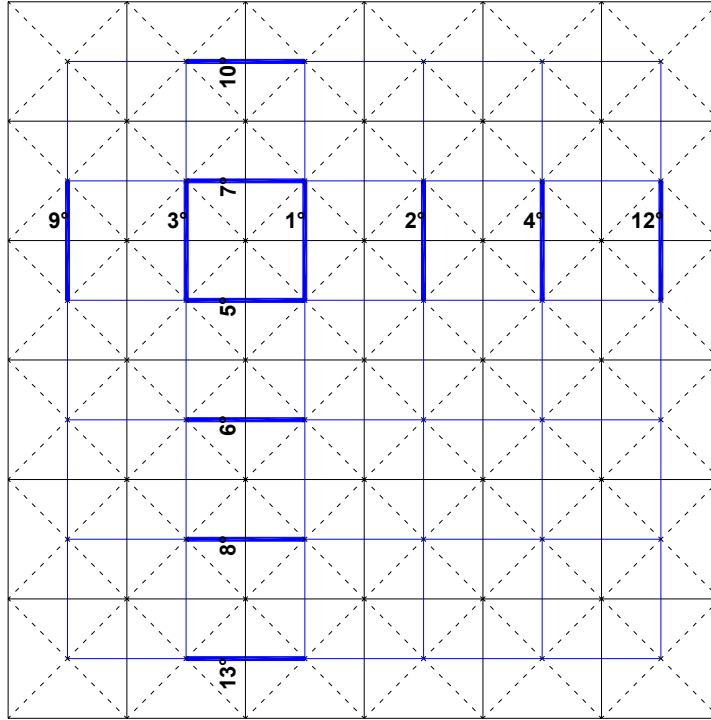


Figura VIII-5 – Localização e seqüência das falhas encontradas numericamente

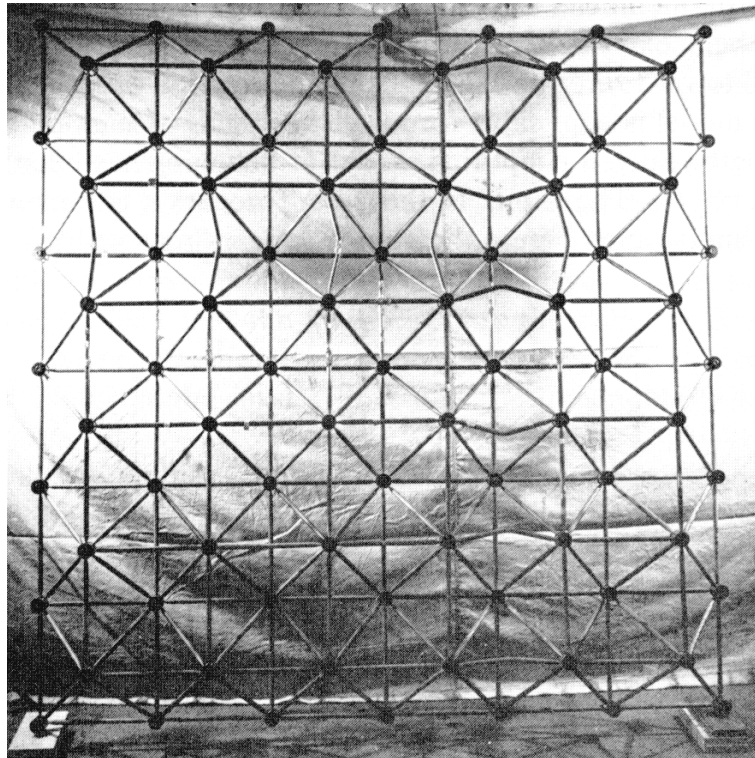


Figura VIII-6 – Foto da estrutura ilustrando a posição das falhas no experimento[32]

VIII.1. Efeito dinâmico do colapso de uma barra

Para fazer este estudo foi usada uma estrutura parecida com a anterior, retirando apenas os apoios verticais no bordo da malha, mas deixando os apoios dos cantos. Como a estrutura anterior ainda tinha frequências bastante elevada, a massa foi aumentada em 10 vezes.

Esta modelagem mostrou que a perda súbita de um elemento pode aumentar em cerca de 7% o valor das cargas nos elementos vizinhos. A comparação da carga de um elemento após a falha de um elemento próximo pode ser vista na Figura VIII-7.

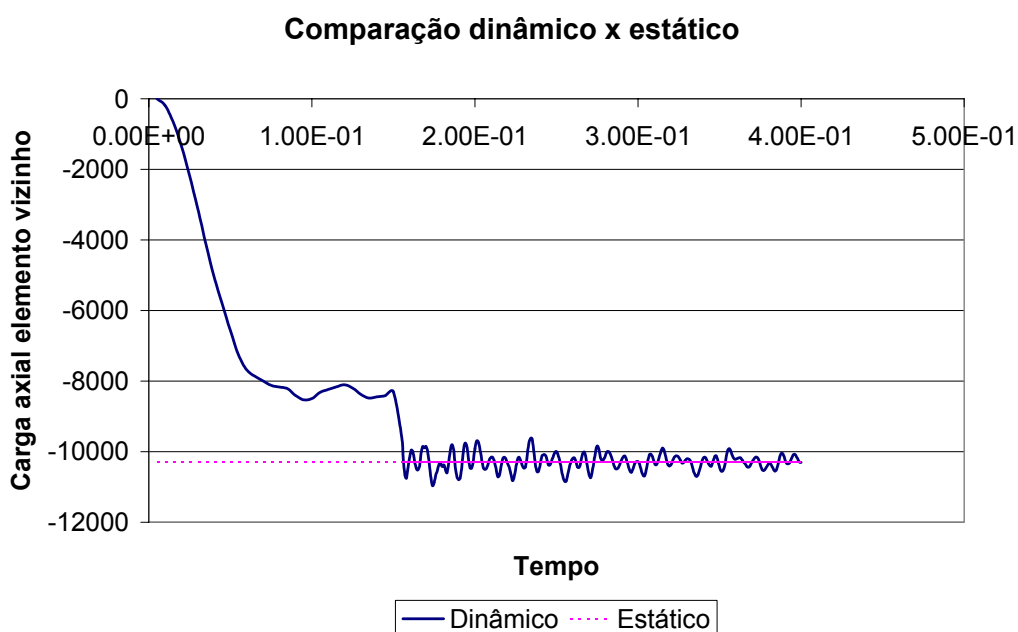


Figura VIII-7 – Efeito dinâmico do colapso súbito de uma barra

Este aumento caracteriza ainda mais o comportamento de ruptura frágil da estrutura uma vez que, em situações reais, a carga se mantém após o primeiro colapso e a falha se propaga dinamicamente.

IX. CONCLUSÃO

A larga utilização dos reticulados espaciais em estruturas para coberturas de grandes vãos evidencia a importância de se conhecer, da melhor forma possível, seu comportamento e qual o real fator de segurança destas estruturas. Além disso este tipo de análise também pode indicar zonas críticas em que a perda de uma peça pode levar a estrutura à ruína total, mostrando a necessidade de se utilizar coeficientes de segurança maiores nestas áreas, proporcionando um aumento considerável na segurança da estrutura.

Os avanços das ferramentas de análise apresentados têm melhorado os resultados obtidos tornando-os cada vez mais próximos dos resultados experimentais. Entretanto, a correlação entre estes resultados é ainda insatisfatória devido a vários fatores que influenciam os resultados:

- **Deficiências experimentais** – são basicamente do plano e tipo de instrumentação para ensaios experimentais e precisão das medições, além da localização dos pontos de correlação numérica, principalmente quando se trata da análise de um mecanismo de colapso;
- **Deficiência da modelagem numérica** – nas ferramentas mostradas foram consideradas rótulas perfeitas nas ligações entre os elementos, caso se identificasse o comportamento real da junta e estes fossem discretizados, a resposta poderia ser melhorada;
- **Desvios de característica** – inevitavelmente, as características de qualquer estrutura variam, sejam as suas características geométricas, imperfeições de seus elementos, ou até a variação que existe nas características físicas dos materiais. Todas estas variações certamente alteram os resultados obtidos experimentalmente.

Com as análises feitas ficou claro que a sofisticação da modelagem do comportamento das barras comprimidas pode-se melhorar bastante a correlação entre resultados pós-críticos experimentais e teóricos. Entretanto é fundamental notar que o comportamento após a primeira falha é instável para o tipo de estrutura analisado, caracterizando o colapso frágil.

Sabendo da deficiência deste tipo de estrutura deve-se investigar o comportamento de novas concepções topológicas, variando a forma espacial dos módulos ou até da estrutura na sua forma global. A partir destas análises pode-se chegar à concepção de estruturas mais seguras sem um aumento considerável no custo.

X. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] ALVES, R.V., “**Instabilidade Não-linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais**”, Tese de D.Sc, COPPE/UFRJ, 1995
- [02] ASCE TASK COMMITTEE ON LATTICED STRUCTURES, EXTREME LOADS SUBCOMMITTEE OF THE COMMITTEE ON SPECIAL STRUCTURES, “**Dynamic Considerations in Latticed Structures**”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, N° 10, pp. 2547-2550, 1984
- [03] ASCE TASK COMMITTEE ON LATTICED STRUCTURES OF THE COMMITTEE ON SPECIAL STRUCTURES OF THE COMMITTEE ON METALS OF THE STRUCTURAL DIVISION, “**Latticed Structures: State-of-the-art Report**”, *Journal of the Structural Division*, Vol. 102, N° 11, pp. 2197-2229, 1976
- [04] BATISTA, E.M., “**Perfis de Chapa de Aço Dobrada**”, COPPE/UFRJ, 1988.
- [05] GONÇALVES, P. B. – “**Interação Dinâmica Não Linear entre Fluido e Cascas Delgadas**”. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1987.
- [06] BATTISTA, R.C., “**Notas de Aula: Instabilidade Estrutural**”, UFOP, 1993.
- [07] BATTISTA, R. C. – “**Notas de Aula: Instabilidade Dinâmica**”, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.
- [08] BATTISTA, R.C., “**Notas de Aula: Análise Estrutural I**”, COPPE/UFRJ, 1996.
- [09] BATTISTA, R.C., “**Estabilidade Elástica de Sistemas Mecânicos Estruturais**”, LNCC, 1982.
- [10] BATTISTA, R.C., PFEIL, M.S., BATISTA, E.M., CARVALHO, E.M.L., “**Structural Upgrading of a Double-Layer Reticulated Spherical Dome**”, in *SSRC – Annual Technical Session, Atlanta, 1998*.
- [11] BATTISTA, R.C., BATISTA, E.M., “**Determinação Experimental dos Mecanismos de Colapso de uma Junta Típica de Estruturas Metálicas Reticuladas Espaciais**”, pp. 665-674 *Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos, SP, 1997*
- [12] BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. – “**Stability of Structures**”, Oxford University Press, New York, 1991.
- [13] BLANDFORD, G.E., “**Progressive Failure of Inelastic Space Truss Structures**”, *Dynamic response and progressive failure of Special Structures*, R. B. Malla, ed., ASCE, New Yourk, N.Y., pp. 1-16, 1993

- [14] BLANDFORD, G.E., **“Respose of Space Trusses During Progressive Failure”**, *Computer & Structures*, Vol. 58, N° 3, pp. 981-990, 1996
- [15] BLANDFORD, G.E., **“Review of Progressive Failure Analyses for Truss Structures”**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, N° 2, pp. 122-129, 1997
- [16] CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. – **“Dynamics of Structures”**, Second Edition, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [17] Do, T.T., Miller, M.D., Kempner, L, Lyver, T.D., Muller III, W.H., **“Collapse Load Calculated by Probability Based Analysis Compared to Full Scale Tower Test Results”**, *Dynamic response and progressive failure of Special Structures*, R. B. Malla, ed., ASCE, New Yourk, N.Y., pp. 48-59, 1993
- [18] EL-SHEIKH, A.I., **“Experimental Study of Behavior of New Space Truss System”**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, N° 8, pp. 845-853, 1996
- [19] GIONCU, V., DICULESCI, M.M., **“Progressive Buckling of Reticulated Strucutres: State of Art”**, in *Proceedings of 5th International Colloquium on Structural Stability*, pp. 652-663, Rio de Janiro, Brasil, 1996
- [20] HOFF, N.J., **“Dynamic Stability of Structures”**, em *Dynamic Stability of Structures*, Edited by G Herrmann, Pergamon Press, pp. 7-41, 1967
- [21] KASSIMALI, A., BIDHENDI, E., **“Stability of Ttrusses Under Dynamic Loads”**, *Computer & Structures*, Vol. 29, N° 3, pp. 381-392, 1988
- [22] LAM, W.F., MORLEY, C.T. **“Arc-Length Method for Passing Limit Points in Structural Calculation”**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, N° 1, pp. 169-185, 1992
- [23] Malla, R..B., Wang, B., Nalluri, B.B., **“Dynamic Effect of Progressive Member Failure on The Response of Truss Structures”**, *Dynamic response and progressive failure of Special Structures*, R. B. Malla, ed., ASCE, New Yourk, N.Y., pp. 60-76, 1993
- [24] MALITE, M., GONÇALVES, R.M., TAKEYA, T., MAGALHÃES, J.R.M., MAIOLA, C.H., **“Barras de Aço Comprimidas de Seção Tubular com Extremidades Estampadas – Análise Teórica e Experimental”**, em *XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, pp. 417-426, São Carlos, SP, Brasil, 1997
- [25] MEIROVITICH, L. – **“Elements of Vibration Analysis”**, Second Edition, McGraw-Hill International Editions, 1986.

- [26] Morris, N.F., **“The Effect of Member Snap on Progressive Collapse of Space Structures”**, *Dynamic response and progressive failure of Special Structures*, R. B. Malla, ed., ASCE, New Yourk, N.Y., pp. 17-31, 1993
- [27] NASCHIE, M.S. El, *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: an Energy Approach*, London, McGraw-Hill Internatinal Editions, 1992.
- [28] PAPADRAKAKIS, M., **“Inelastic Post-Buckling Analysis of Trusses”**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 109, N° 9, pp. 2129-2147, 1983
- [29] PRAIVA, Z.C., **“Treliças Espaciais: Projeto e Aplicações”**, Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1997
- [30] RIKS, E., **“An incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems”**, *Journal of Solids Structures*, Vol. 15 N° 7, pp. 529-551, 1979
- [31] SANTEE, D. M. – **“Vibrações Não Lineares e Instabilidades de Elementos Estruturais Sensíveis a Imperfeições”**, Tese de D.Sc., PUC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [32] SCHMIDT, L.C., MORGAN, P.R., CLARKSON, J.A., **“Space Trusses with Brittle-Type Strut Buckling”**, *Journal of the Structural Division*, Vol. 102, N° 7, pp. 1479-1492, 1976
- [33] SILVEIRA, R.A.M., GONÇALVES, P. B., **“Solução de Sistemas de Equações Não-Lineares – O Método do Comprimento de Arco”**, em *XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, pp. 1655-1664, São Carlos, SP, Brasil, 1997
- [34] SMITH, E.A., **“Alternate Path Analysis of Space Trusses For Progressive Collapse”**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, N° 9, pp. 1978-1999, 1988
- [35] SMITH, E.A., **“Space Truss Nonlinear Analysis”**, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, N° 4, pp. 688-705, 1984
- [36] SMITH, E.A., EPSTEIN, H.I., **“Hartford Coliseum Roof Colllapse: Structural Collapse Sequence and Lessons Learned”**, *Civil Engineering*, Vol. 50, N° 4, pp. 59-62, 1980
- [37] THOMPSON, J. M. T. – **“Stability of Elastic Structures and Their Loading Devices”**, *Journal Mechanical Engineering Science*, v. 3, n. 2, pp. 153-162, 1961.