

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA ANÁLISE DE  
RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS

Fernanda Rodrigues Mittelbach

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D. Sc.

---

Prof. Sérgio Fernandes Villaça, D. Sc.

---

Prof. Webe João Mansur, Ph. D.

---

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2002

MITTELBACH, FERNANDA RODRIGUES

Método das Diferenças Finitas Energéticas  
na Análise de Reservatórios Cilíndricos [ Rio de  
Janeiro] 2002

XI, 96p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ), M.Sc.,  
Engenharia Civil, 2002)

Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Reservatórios Cilíndricos
2. Método das Diferenças Finitas Energéticas  
I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

Com amor e admiração a  
todos meus colegas de  
mestrado.

## AGRADECIMENTOS

Ao amigo Luiz Fernando Taborda Garcia pela orientação e pelos ensinamentos acadêmicos e de vida compartilhados.

Aos familiares e amigos pela paciência e compreensão dispensadas.

À minha avó por todo o amor e dedicação.

Ao Carlos Henrique pelo amor e companheirismo.

A CAPES e FAPERJ pelo auxílio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA ANÁLISE DE RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS

Fernanda Rodrigues Mittelbach

Dezembro/2002

Orientador: Luiz Fernando Taborda Garcia

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho trata da utilização do método das diferenças finitas energéticas na análise de reservatórios constituídos por uma casca cilíndrica e por uma placa circular de fundo, submetidos a carregamentos axissimétricos, incluindo solicitações térmicas. A formulação numérica é desenvolvida isoladamente para a casca e para a placa, sendo a solução do reservatório obtida mediante compatibilização dos deslocamentos na junção.

Desenvolveu-se também um elemento de transição, a fim de permitir o uso de uma discretização não uniforme, que se mostra adequada para a abordagem dos efeitos de perturbação de bordo na casca.

São apresentados alguns exemplos de aplicação, visando comprovar a eficácia do tratamento numérico proposto para o problema.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF CYLINDRICAL TANKS BY THE ENERGETIC FINITE DIFFERENCE  
METHOD

Fernanda Rodrigues Mittelbach

December/2002

Advisor: Luiz Fernando Taborda Garcia

Departament: Civil Engineering

This work presents a numerical treatment by means of the energetic finite difference method applied to the analysis of tanks, formed by a cylindrical shell and a circular bottom plate. Only axisymmetric loading, including thermal effects, are considered. The numerical formulation for the shell and the plate are developed in separate parts, being the tank solution obtained from the compatibility of linear displacements and rotations at the junction.

A "transition element" was specially developed to allow the use of a non-uniform discretization, which proved to be useful in analysing edge effects in the shell.

Finally, some examples are considered in order to verify the efficiency of the numerical approach proposed for this kind of structure.

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - TRATAMENTO ANALÍTICO DA PLACA E DA CASCA	4
2.1 – Introdução	4
2.2 – Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.)	4
2.3 – Hipóteses Básicas	5
2.4 – Casca Cilíndrica	5
2.4.1 - Trabalho Virtual Interno	6
2.4.1.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais	8
2.4.1.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura	9
2.4.2 – Trabalho Virtual Externo	10
2.5 – Placa Circular	11
2.5.1 – Trabalho Virtual Interno	12
2.5.1.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais	13
2.5.1.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura	14
2.5.2 – Trabalho Virtual Externo	15
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA	17
3.1 – Introdução	17
3.2 – Discretização e Sistemas de Numeração	17
3.3 – Representações em Diferenças Finitas para as Derivadas dos Deslocamentos	19
3.3.1 – Derivadas do Deslocamento $u$	20
3.3.2 – Derivadas do Deslocamento $w$	20
3.3.2.1 – Derivada Primeira para o Trecho de Integração Intermediário sem Transição	20
3.3.2.2 – Derivada Primeira para o Trecho de Integração Intermediário com Transição	21
3.3.2.3 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Intermediário sem Transição	22
3.3.2.4 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Intermediário com Transição	22
3.3.2.5 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Inicial	22
3.3.2.6 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Final	23
3.4 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno	23
3.4.1 – Casca Cilíndrica	24

3.4.1.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais	24
3.4.1.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura	25
3.4.2 – Placa Circular	25
3.4.2.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais	25
3.4.2.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura	27
3.5 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo	28
3.5.1 – Casca Cilíndrica	28
3.5.2 – Placa Circular	28
3.6 – Montagem das Matrizes de Rigidez da Casca e da Placa	29
3.6.1 – Casca Cilíndrica	30
3.6.1.1 – Matriz para o Trecho de Integração Inicial	30
3.6.1.2 – Matriz para os Trechos de Integração Genéricos	31
3.6.1.3 – Matriz para os Trechos de Integração Finais	33
3.6.2 – Placa Circular	34
3.6.2.1 – Matriz para Trecho de Integração Inicial	34
3.6.2.2 – Matriz para os Trechos de Integração Genéricos	35
3.6.2.3 – Matriz para os Trechos de Integração Finais	38
3.7 – Matriz de Rigidez do Reservatório	40
3.8 – Montagem do Vetor de Cargas para a Casca e a Placa	41
3.8.1 – Casca Cilíndrica	42
3.8.1.1 – Vetor Local de Cargas para o Trecho de Integração Inicial	42
3.8.1.2 – Vetor Local de Cargas para os Trechos Genéricos de Integração	43
3.8.1.3 – Vetor Local de Cargas para os Trechos de Integração Finais	44
3.8.2 – Placa Circular	45
3.8.2.1 – Vetor Local de Cargas para o Trecho de Integração Inicial	45
3.8.2.2 – Vetor Local de Cargas para os Trechos de Integração Genéricos	46
3.8.2.3 – Vetor Local de Cargas para os Trechos de Integração Finais	47
3.9 – Vetor de Cargas do Reservatório	48
3.10 – Sistema de Equações e Condições de Contorno	49
<b>CAPÍTULO 4 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>50</b>
4.1 – Introdução	50
4.2 – Casca Submetida à Pressão Interna Constante	50
4.2.1 – Casca apoiada	50
4.2.2 – Casca engastada	59
4.3 – Placa Circular Submetida a Carregamento Uniforme	68

4.3.1 – Placa apoiada	68
4.3.2 – Placa engastada	74
4.4 – Análise do Reservatório Cilíndrico	81
4.4.1 – Reservatório Submetido à Variação Uniforme de Temperatura	83
4.4.1.1 – Resultados na Casca	83
4.4.1.2 – Resultados na Placa	85
4.4.2 – Reservatório Cilíndrico Submetido à Pressão Hidrostática	87
4.4.2.1 – Resultados na Casca	88
4.4.2.2 – Resultados na Placa	90
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	93
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95

## NOMENCLATURA

a	- Raio da casca Raio da placa
C	- Rigidez extensional da casca Rigidez extensional da placa
D	- Rigidez flexional da casca Rigidez flexional da placa
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
h, h <sub>c</sub>	- Espessura da casca
h, h <sub>p</sub>	- Espessura da placa
l	- Dimensão longitudinal da casca
M <sub>r</sub> , M <sub>θ</sub> , M <sub>b</sub>	- Momentos fletores
$\bar{M}_r, \bar{M}_x$	- Momentos prescritos no contorno
N <sub>r</sub> , N <sub>θ</sub> , N <sub>b</sub>	- Esforços normais
$\bar{N}_r, \bar{N}_x, \bar{Q}_r, \bar{Q}_z$	- Forças prescritas no contorno
p <sub>x</sub> , p <sub>z</sub>	- Carregamentos prescritos de domínio
r, θ, z	- Direções coordenadas na placa
x, θ, z	- Direções coordenadas na casca
u, w	- Componentes de deslocamento segundo x e z
α	- Coeficiente de dilatação térmica do material

$\Delta t_e, \Delta t_i$	- Variações de temperatura nas superfícies externa e interna do reservatório
$\delta W_e, \delta W_i$	- Trabalhos virtuais das forças externas e internas
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	- Deformações específicas
$\gamma$	- Peso específico do material
$\gamma_a$	- Peso específico da água
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	- Distorções
$\lambda$	- Espaçamento nodal
$\nu$	- Coeficiente de Poisson do material
$\rho_x, \rho_y, \rho_z$	- Componentes das forças de superfície
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- Tensões normais
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	- Tensões cisalhantes

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A análise e projeto de cascas e placas, aparecendo sob forma isolada ou associada, como por exemplo os vasos de pressão, os risers para transporte de petróleo, os reservatórios para armazenamento de líquidos, ou mesmo uma simples laje de edifício, constitui uma área de interesse permanente no âmbito da engenharia estrutural.

Por outro lado, a análise numérica dessas estruturas, denominadas laminares, com comportamento linear ou não linear, estático ou dinâmico, vem merecendo, por parte dos pesquisadores, especial atenção nas últimas décadas, o que fica evidenciado pelo considerável número de publicações existentes nessa linha específica de pesquisa. Dentre os autores com trabalhos mais recentes sobre o assunto, podem ser citados BHASKAR et al [1], que realizam um estudo de cascas cilíndricas com carregamento concentrado em um dos bordos, comparando os resultados fornecidos pela teoria clássica de Love, pela teoria de distorções de ordem superior e pelo método dos elementos finitos (MEF); MIRFAKHRAEI et al [2], que analisam e comparam resultados da flambagem de cascas cilíndricas obtidos pelo método diferencial de quadratura e por aproximações em série de Fourier; KRISHNAMURTHY et al [3], que estudam impactos, bem como os danos causados por estes em cascas cilíndricas de material compósito, tanto pelo MEF como pelo uso de séries de Fourier; LI et al [4], que descrevem uma técnica numérica para resolução de placas circulares submetidas à vibração e à flambagem por solicitação térmica, utilizando o método de Ritz para validar o emprego de tal técnica; GONÇALVES et al [5] e AMABILI [6], que estudam vibrações livres em reservatórios parcialmente cheios de líquido. Na primeira referência utiliza-se uma abordagem numérica fundamentada no conceito de elementos finitos hierárquicos, e considerando diferentes condições de contorno para a base e para o topo da casca, sendo os resultados comparados aos de teorias já existentes e também com valores obtidos experimentalmente. No segundo artigo, a interação casca-placa é analisada pela suposta existência de molas rotacionais na junção, utilizando-se então o método de Rayleigh-Ritz para a resolução, com tal procedimento sendo validado através de resultados oriundos de outras referências disponíveis sobre o assunto. Por fim, cita-se o trabalho de KIM et al [7], estudando o problema de flambagem em cascas e reservatórios cilíndricos sujeitos à compressão, com base no MEF, validando e otimizando a malha através de comparação com resultados analíticos apresentados em outras referências.

Nessas e em outras publicações não citadas acima, nota-se clara preferência pelo MEF como técnica numérica de abordagem. Entretanto, técnicas alternativas mais recentes, como é o caso do método das diferenças finitas energéticas (MDFE), utilizado no presente trabalho, vêm se tornando cada vez mais atrativas e ganhando espaço, em função da sua potencialidade. Tal método difere do método convencional de diferenças finitas por substituir as derivadas dos deslocamentos por formas de diferenças finitas diretamente na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (PTV), ou então na da energia potencial total do sistema. No método convencional as representações em diferenças finitas são aplicadas sobre as equações diferenciais que governam o problema. A formulação energética, em relação à convencional, apresenta algumas vantagens, tais como o uso de derivadas de ordem mais baixa, a necessidade de prescrição somente das condições de contorno geométricas, a geração de matrizes de coeficientes simétricas e, em algumas situações, uma redução no número de graus de liberdade do problema.

As etapas de cálculo do MDFE são bastante semelhantes às do MEF, sendo oportuno destacar o aspecto de que no MDFE utilizam-se aproximações para as derivadas dos deslocamentos, enquanto no MEF são aproximados os próprios deslocamentos, característica esta conduzindo, por vezes, a um melhor desempenho do MDFE na determinação de esforços. Não obstante, é de se observar que a aplicação do MDFE se torna mais problemática no caso de contornos irregulares.

A utilização do MDFE em problemas estruturais vem sendo objeto de uma linha de pesquisa em andamento no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, a qual já deu origem a uma série de teses e publicações, citando-se por exemplo, mais recentemente, os trabalhos de COSTA [8], GRAÇA [9], DIAS [10], LIMA et al [11] e GRAÇA et al [12], onde se pode constatar a potencialidade dessa técnica numérica na abordagem de problemas estáticos, dinâmicos, lineares e geometricamente não lineares.

O presente trabalho, dando continuidade à citada linha de pesquisa, objetiva estender o uso do MDFE à análise de problemas axissimétricos de cascas cilíndricas, placas circulares e reservatórios cilíndricos (formados pela junção destes dois elementos estruturais), prevendo-se, além da atuação de forças externas, também o caso de solicitações térmicas. No estudo realizado enfatiza-se não só o cálculo dos deslocamentos, como também o de esforços solicitantes. Um elemento de transição foi especialmente desenvolvido para possibilitar o uso de uma discretização não uniforme, a qual se revela adequada na abordagem dos efeitos de perturbação de bordo na casca. Além disso, procurou-se quantificar a influência da rigidez extensional da placa, a qual usualmente é considerada infinita no cálculo do reservatório.

A seguir, faz-se uma descrição sucinta dos tópicos abordados nos demais capítulos do texto. Inicia-se, no capítulo 2, pela formulação analítica do problema. No capítulo 3 apresenta-se o tratamento numérico pelo MDFE para a casca cilíndrica e para a placa circular, isoladamente, bem como a forma de se unirem estes dois elementos estruturais para a montagem do reservatório cilíndrico. Os exemplos de aplicação selecionados e os correspondentes resultados obtidos são objeto do capítulo 4 e, finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões e algumas sugestões para a continuidade do presente trabalho.

## CAPÍTULO 2

### TRATAMENTO ANALÍTICO DA PLACA E DA CASCA

#### 2.1 – Introdução

Neste capítulo tem-se como objetivo apresentar os fundamentos analíticos necessários à análise isolada da casca cilíndrica e da placa circular, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. As expressões aqui obtidas para o trabalho virtual interno e para o trabalho virtual externo servirão de base, no capítulo subsequente, à abordagem numérica do reservatório cilíndrico.

Ambos os elementos estruturais considerados são axissimétricos devido às características geométricas dos mesmos e à natureza das solicitações atuantes.

#### 2.2 – Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.)

O P.T.V. para corpos deformáveis enuncia que se um sistema estrutural em equilíbrio for submetido a um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissível (ou seja, compatível com as vinculações do sistema e mantendo a continuidade interna) o trabalho virtual das forças que sobre ele atuam (forças externas) é igual ao trabalho virtual das forças internas.

Assim tem-se:

$$\delta W_i = \delta W_e$$

onde  $\delta W_i$  designa o trabalho virtual das forças internas (ou trabalho virtual interno) e  $\delta W_e$  o trabalho virtual das forças externas (ou trabalho virtual externo).

Considerando-se, por exemplo, o caso de um sólido no espaço definido por coordenadas cartesianas  $x, y, z$  tem-se as seguintes expressões gerais para  $\delta W_i$  e  $\delta W_e$ :

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (2.1)$$

$$\delta W_e = \int_{S_f} (\rho_x \delta u + \rho_y \delta v + \rho_z \delta w) ds + \int_V (B_x \delta u + B_y \delta v + B_z \delta w) dV \quad (2.2)$$

sendo:

$\rho_x, \rho_y, \rho_z$  – componentes das forças de superfície que atuam na região  $S_f$  do

contorno onde são prescritas forças;

$B_x, B_y, B_z$  - componentes das forças de volume;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  - componentes de tensão;

$\delta u, \delta v, \delta w$  - variações das componentes de deslocamento (u, v, w) segundo x, y, z;

$\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{yz}$  - variações das componentes de deformação, as quais, mediante as relações deformação-deslocamento, são assim ligadas às variações de deslocamento:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \delta \gamma_{xy} &= \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \delta \epsilon_y &= \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \delta \gamma_{xz} &= \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \delta \epsilon_z &= \delta \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \delta \gamma_{yz} &= \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Neste trabalho considera-se, além das cargas atuantes, também o efeito da variação de temperatura. Tendo-se as variações de temperatura nas superfícies externa e interna da casca ou da placa, faz-se uso de uma função linear para estabelecer a variação na espessura.

### 2.3 – Hipóteses Básicas

1 – Admite-se que a casca e a placa em questão são delgadas e com comportamento linear físico e geométrico;

2 – Linhas retas, normais à superfície média antes da deformação, permanecem retas, normais à superfície média e inalteradas em seu comprimento após a deformação (hipóteses de Kirchhoff da teoria de placas e de Love da teoria de cascas).

3 – A tensão normal  $\sigma_z$  ( na direção normal à superfície média) é pequena em relação às demais tensões normais e pode ser desprezada.

### 2.4 – Casca Cilíndrica

A casca cilíndrica e o sistema de coordenadas x,  $\theta$ , z utilizado acham-se representados na figura 2.1. Como o problema é axissimétrico, tem-se que todas as derivadas em relação à variável  $\theta$ , assim como os esforços solicitantes  $N_\theta, N_\theta, M_\theta$ ,

$M_x$ ,  $Q_x$  e as componentes de carregamento  $p_x$  e de deslocamento  $v$ , são nulos. Os sentidos positivos para os esforços não nulos se encontram indicados na figura 2.2.

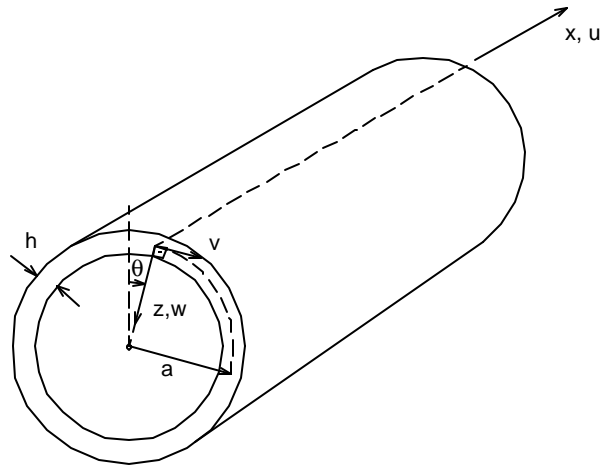


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas para a casca cilíndrica

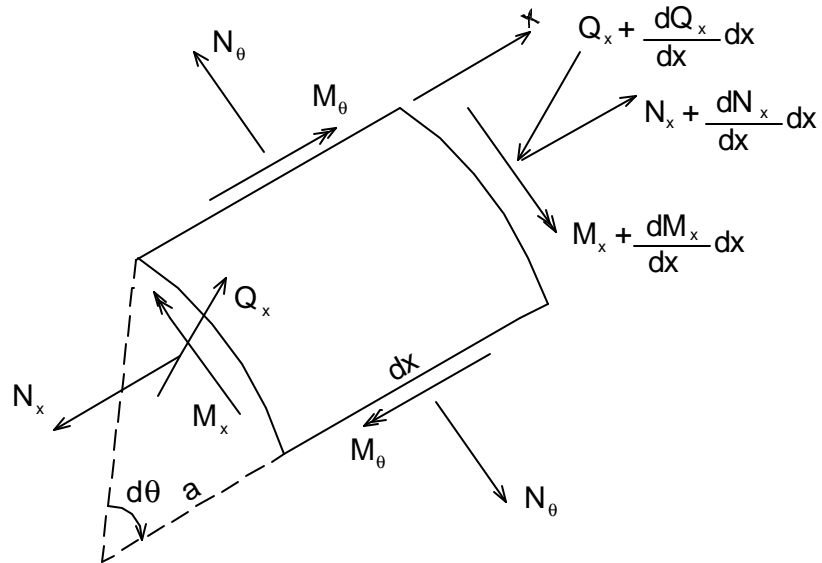


Figura 2.2 – Esforços solicitantes não nulos no elemento de casca, com os seus sentidos positivos

#### 2.4.1 - Trabalho Virtual Interno

Em função do sistema de coordenadas considerado e compativelmente com as

simplificações da teoria adotada, tem-se a seguinte expressão para o trabalho virtual interno:

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dV \quad (2.4)$$

estando  $\sigma_x$  e  $\sigma_\theta$  ligadas às deformações totais  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\theta$  e à variação de temperatura  $\Delta t = \Delta t(x, z)$  pela lei constitutiva [13]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) - \alpha \Delta t(1+\nu)] \quad (2.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) - \alpha \Delta t(1+\nu)]$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\alpha$  o coeficiente de dilatação térmica do material da casca.

Nessas expressões, as parcelas de tensão correspondentes às deformações totais e as diretamente associadas à variação de temperatura (normalmente designadas por tensões térmicas) serão analisadas separadamente. O trabalho virtual interno total será então a soma dos trabalhos virtuais relativos a estas duas parcelas.

Sendo a casca de comprimento  $l$ , espessura  $h$  e raio  $a$  de superfície média, reescreve-se o trabalho virtual interno (2.4) sob a forma:

$$\delta W_i = 2\pi a \int_0^l \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dz \right] dx \quad (2.6)$$

Tendo-se as relações deformação-deslocamento para o problema dadas por [14]:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{w}{a}$$

onde  $u_0$  traduz o deslocamento  $u$  dos pontos da superfície média, e considerando-se a definição dos esforços solicitantes, por unidade de comprimento,

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz & N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz \\
 M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz & M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

a expressão (2.6) do trabalho virtual interno assume o aspecto seguinte:

$$\delta W_i = 2\pi a \int_0^l \left( N_x \delta \frac{du_0}{dx} - M_x \delta \frac{d^2 w}{dx^2} - N_\theta \delta \frac{w}{a} \right) dx \tag{2.9}$$

#### 2.4.1.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais

As parcelas de tensão em (2.5) associadas às deformações totais são representadas por :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \\
 \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Levando-se em conta (2.7) e (2.10), tem-se, através de (2.8), os esforços solicitantes em termos dos deslocamentos  $u_0$  e  $w$ :

$$\begin{aligned}
 N_x &= C \left( \frac{du_0}{dx} - \nu \frac{w}{a} \right) & N_\theta &= C \left( \nu \frac{du_0}{dx} - \frac{w}{a} \right) \\
 M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} & M_\theta &= -\nu D \frac{d^2 w}{dx^2}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

sendo  $C$  e  $D$  as rigidezes extensional e flexional da casca, definidas por

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad ; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.12}$$

Finalmente, substituindo (2.11) em (2.9), a parcela do trabalho virtual interno relacionada às deformações totais se escreve sob a forma:

$$\delta W_i = 2\pi a \int_0^l \left[ C \left( \frac{du_0}{dx} - v \frac{w}{a} \right) \delta \frac{du_0}{dx} + D \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \frac{d^2 w}{dx^2} - C \left( v \frac{du_0}{dx} - \frac{w}{a} \right) \frac{\delta w}{a} \right] dx \quad (2.13)$$

#### 2.4.1.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura

Para uma variação de temperatura  $\Delta t$ , as parcelas de tensão a ela diretamente associadas nas expressões (2.5) se escrevem:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \alpha \Delta t (1+\nu) \quad (2.14)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E}{1-\nu^2} \alpha \Delta t (1+\nu)$$

Substituindo-se em (2.8) e adotando para  $\Delta t$  a função linear na espessura

$$\Delta t = \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} + \frac{z}{h} (\Delta t_i - \Delta t_e) \quad (2.15)$$

onde  $\Delta t_i$  e  $\Delta t_e$  designam as variações de temperatura nas superfícies interna e externa da casca, respectivamente, obtêm-se as seguintes expressões para os esforços solicitantes decorrentes das tensões térmicas:

$$N_x = -\frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} (\Delta t_i + \Delta t_e) \quad N_\theta = -\frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} (\Delta t_i + \Delta t_e) \quad (2.16)$$

$$M_x = -\frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} (\Delta t_i - \Delta t_e) \quad M_\theta = -\frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} (\Delta t_i - \Delta t_e)$$

Introduzindo, por fim, (2.16) em (2.9), a parcela do trabalho virtual interno relativa à variação de temperatura fica assim expressa:

$$\delta W_i = -\frac{\alpha \pi E a}{1-\nu} \int_0^l \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{du_0}{dx} - \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{d^2 w}{dx^2} - (\Delta t_i + \Delta t_e) \frac{\delta w}{a} \right] dx \quad (2.17)$$

O trabalho virtual interno total é dado então pela soma do trabalho virtual interno referente às deformações totais e o correspondente à variação de temperatura, expressões (2.13) e (2.17) respectivamente, ou seja:

$$\delta W_i = \int_0^l \left\{ 2\pi a \left[ C \left( \frac{du_0}{dx} - v \frac{w}{a} \right) \delta \frac{du_0}{dx} + D \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \frac{d^2 w}{dx^2} - C \left( v \frac{du_0}{dx} - \frac{w}{a} \right) \frac{\delta w}{a} \right] - \frac{\alpha \pi E a}{1-\nu} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{du_0}{dx} - \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{d^2 w}{dx^2} - (\Delta t_i + \Delta t_e) \frac{\delta w}{a} \right] \right\} dx \quad (2.18)$$

#### 2.4.2 – Trabalho Virtual Externo

A figura 2.3 mostra os possíveis carregamentos de domínio e de contorno atuantes na casca (todos representados com seus sentidos positivos).

A expressão do trabalho virtual externo relativa aos carregamentos de domínio (por unidade de área) é dada por:

$$\delta W_e = \int_S (p_x \delta u_0 + p_z \delta w) dS = 2\pi a \int_0^l (p_x \delta u_0 + p_z \delta w) dx \quad (2.19)$$

onde S designa a área da superfície média. Por sua vez, os possíveis carregamentos de contorno (por unidade de comprimento) fornecem a seguinte contribuição para o trabalho virtual externo:

$$\delta W_e = 2\pi a \left[ \bar{N}_x \delta u_0 + \bar{Q}_x \delta w - \bar{M}_x \delta \frac{dw}{dx} \right]_0^l \quad (2.20)$$

$$\text{sendo } \bar{N}_x \Big|_l = \bar{N}_x, \bar{N}_x \Big|_0 = \bar{N}_{x0}, \bar{Q}_x \Big|_l = \bar{Q}_x, \bar{Q}_x \Big|_0 = \bar{Q}_{x0}, \bar{M}_x \Big|_l = \bar{M}_x \text{ e } \bar{M}_x \Big|_0 = \bar{M}_{x0}.$$

O trabalho virtual externo total é dado então pela soma das parcelas referentes ao domínio e ao contorno, ou seja:

$$\delta W_e = 2\pi a \int_0^l (p_x \delta u_0 + p_z \delta w) dx + 2\pi a \left[ \bar{N}_x \delta u_0 + \bar{Q}_x \delta w - \bar{M}_x \delta \frac{dw}{dx} \right]_0^l \quad (2.21)$$

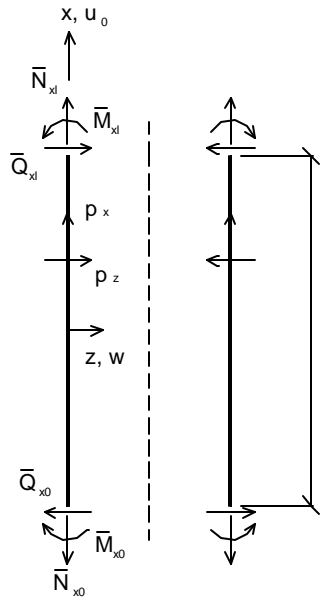


Figura 2.3 – Carregamentos de domínio e de contorno previstos na casca

## 2.5 – Placa Circular

A placa circular e o sistema de coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  utilizado se acham representados na figura 2.4.

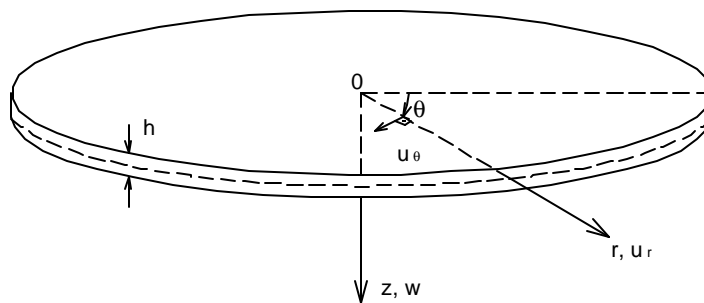


Figura 2.4 – Sistema de coordenadas para a placa circular

A placa em questão apresenta simetria de revolução, de modo que todas as derivadas em relação à variável  $\theta$ , assim como os esforços solicitantes  $M_\theta$ ,  $M_{\theta r}$ ,  $Q_\theta$  e a componente de deslocamento  $u_\theta$ , são nulos. Os sentidos positivos para os esforços

não nulos se encontram indicados na figura 2.5, notando-se que, além dos esforços de placa propriamente ditos,  $M_r$ ,  $M_\theta$  e  $Q_r$ , participam também da análise os esforços de chapa  $N_r$  e  $N_\theta$ .

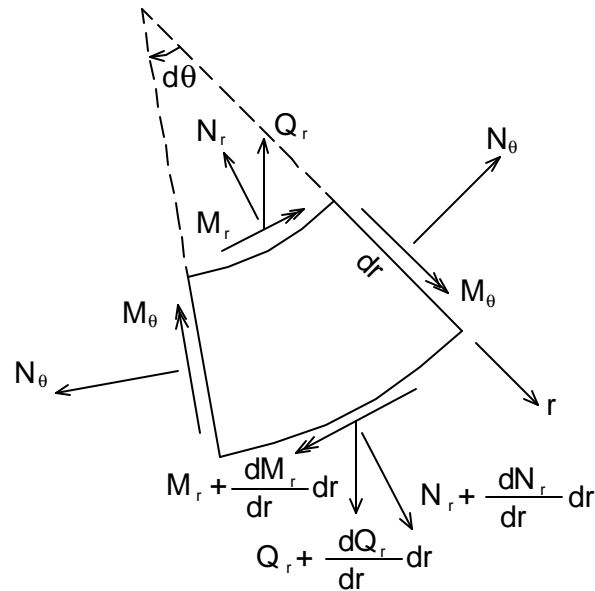


Figura 2.5 – Esforços solicitantes não nulos no elemento de placa, com os seus sentidos positivos

### 2.5.1 – Trabalho Virtual Interno

O trabalho virtual interno, levando em conta o sistema de coordenadas da figura 2.4 e as simplificações da teoria adotada, escreve-se:

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dV \quad (2.22)$$

estando  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  ligadas às deformações totais e à variação de temperatura por:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) - \alpha \Delta t (1+\nu)] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) - \alpha \Delta t (1+\nu)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sendo a placa de raio  $a$  e espessura  $h$ , tem-se:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dz \right] r dr \quad (2.24)$$

Utilizando as relações deformação-deslocamento [13,15]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du_{r0}}{dr} - z \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_{r0}}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr} \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde  $u_0$  denota o deslocamento  $u$  dos pontos da superfície média, e considerando a definição dos esforços solicitantes, por unidade de comprimento,

$$\begin{aligned} N_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz & N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz \\ M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz & M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz \end{aligned} \quad (2.26)$$

o trabalho virtual interno (2.24) pode ser apresentado sob a forma:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left( N_r r \delta \frac{du_{r0}}{dr} - M_r r \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + N_\theta \delta u_{r0} - M_\theta \delta \frac{dw}{dr} \right) dr \quad (2.27)$$

#### 2.5.1.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais

As parcelas de tensão em (2.23) envolvendo as deformações totais se escrevem:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.25) em (2.28), e levando em conta (2.26), resultam as seguintes expressões para os esforços solicitantes em função dos deslocamentos  $u_0$  e  $w$ :

$$\begin{aligned} N_r &= C \left( \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{v}{r} u_{r0} \right) & N_\theta &= C \left( v \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) \\ M_r &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right) & M_\theta &= -D \left( v \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

sendo  $C$  e  $D$  as rigidezes definidas em (2.12).

Introduzindo-se (2.29) em (2.27) escreve-se a seguinte expressão para a parcela do trabalho virtual interno correspondente às deformações totais:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= 2\pi \int_0^a \left[ C \left( r \frac{du_{r0}}{dr} + v u_{r0} \right) \delta \frac{du_{r0}}{dr} + D \left( r \frac{d^2 w}{dr^2} + v \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + C \left( v \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) \delta u_{r0} + \right. \\ &\quad \left. + D \left( v \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{dw}{dr} \right] dr \end{aligned} \quad (2.30)$$

#### 2.5.1.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura

As parcelas de tensão térmica presentes nas expressões (2.23) se escrevem:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{1-\nu^2} \alpha \Delta t (1+\nu) \\ \sigma_\theta &= -\frac{E}{1-\nu^2} \alpha \Delta t (1+\nu) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tal como anteriormente, admitindo para  $\Delta t = \Delta t(r, z)$  uma lei de variação linear na espessura, isto é,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} - \frac{z}{h} (\Delta t_i - \Delta t_e) \quad (2.32)$$

onde  $\Delta t_i = \Delta t|_{z=-\frac{h}{2}}$  e  $\Delta t_e = \Delta t|_{z=\frac{h}{2}}$ , e substituindo em (2.26), tem-se os correspondentes esforços solicitantes térmicos:

$$\begin{aligned}
N_r &= -\frac{\alpha E h}{2(1-\nu)}(\Delta t_i + \Delta t_e) & N_\theta &= -\frac{\alpha E h}{2(1-\nu)}(\Delta t_i + \Delta t_e) \\
M_r &= \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)}(\Delta t_i - \Delta t_e) & M_\theta &= \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)}(\Delta t_i - \Delta t_e)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Introduzindo (2.33) em (2.27) chega-se à seguinte expressão para a parcela do trabalho virtual interno relativa à variação de temperatura:

$$\begin{aligned}
\delta W_i &= -\frac{\alpha \pi E h}{1-\nu} \int_0^a \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) r \delta \frac{du_{r0}}{dr} + (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta u_{r0} + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) r \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + \right. \\
&\left. + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{dw}{dr} \right] dr
\end{aligned} \tag{2.34}$$

O trabalho virtual interno total é dado então pela soma das parcelas referentes às deformações totais e à variação de temperatura, expressões (2.30) e (2.34) respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned}
\delta W_i &= \int_0^a \left\{ 2\pi \left[ C \left( r \frac{du_{r0}}{dr} + \nu u_{r0} \right) \delta \frac{du_{r0}}{dr} + D \left( r \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + C \left( \nu \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) \delta u_{r0} + \right. \right. \\
&+ D \left( \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{dw}{dr} \left. \right] - \frac{\alpha \pi E h}{1-\nu} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) r \delta \frac{du_{r0}}{dr} + (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta u_{r0} + \right. \\
&\left. + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) r \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{dw}{dr} \right] \left. \right\} dr
\end{aligned} \tag{2.35}$$

## 2.5.2 – Trabalho Virtual Externo

Encontram-se representados na figura 2.6 os possíveis carregamentos de domínio (não se consideram cargas radiais  $p$ ) e de contorno atuantes na placa (todos representados com seus sentidos positivos).

A parcela do trabalho virtual externo relativa ao carregamento de domínio (por unidade de área) é dada por:

$$\delta W_e = \int_s^a p_z \delta w \, dS = 2\pi \int_0^a p_z \delta w \, r \, dr \tag{2.36}$$

onde  $S$  designa a área da superfície média, ao passo que a contribuição dos possíveis carregamentos de contorno (por unidade de comprimento) se escreve:

$$\delta W_e = 2\pi a \left( \bar{N}_{ra} \delta u_{r0} + \bar{Q}_{ra} \delta w - \bar{M}_{ra} \delta \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.37)$$

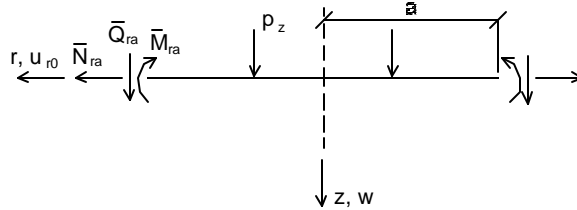


Figura 2.6 – Carregamentos de domínio e de contorno previstos na placa

O trabalho virtual externo total, dado pela soma das parcelas referentes aos carregamentos de domínio e contorno, assume então o seguinte aspecto:

$$\delta W_e = 2\pi \int_0^a p_z \delta w r dr + 2\pi a \left( \bar{N}_{ra} \delta u_{r0} + \bar{Q}_{ra} \delta w - \bar{M}_{ra} \delta \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.38)$$

## Capítulo 3

### FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

#### 3.1 – Introdução

A análise numérica do reservatório cilíndrico faz-se através da junção e compatibilização dos sistemas estruturais correspondentes à casca cilíndrica e à placa circular.

A aplicação do método numérico proposto baseia-se na avaliação das integrais relativas aos trabalhos virtuais interno e externo para cada um dos elementos estruturais supracitados, mediante a consideração de um somatório de contribuições dos diversos trechos de integração envolvidos, ao longo dos quais todas as grandezas existentes são supostas constantes. Substituem-se então as derivadas dos deslocamentos por formas de diferenças finitas, e igualam-se, em seguida, as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo, ou seja, aplica-se o P.T.V.. Com isso, e a imposição das condições de contorno e de compatibilidade na junção, monta-se um sistema de equações lineares, cujas incógnitas são os deslocamentos em pontos nodais da estrutura.

O presente trabalho possibilita o uso de uma discretização não uniforme, o que se torna útil quando as funções representativas dos deslocamentos e suas derivadas não apresentam comportamento “suave” em todo o domínio (o que acontece, por exemplo, como consequência das perturbações de bordo na casca). Com isso, pode-se ter o uso de uma discretização mais refinada somente nas regiões consideradas críticas, evitando assim o grande aumento de divisões necessário para refinar toda a malha.

#### 3.2 – Discretização e Sistemas de Numeração

A discretização e sistemas de numeração da casca e placa são semelhantes e tiram partido da axissimetria. Numeram-se os nós da placa do centro para o bordo e os da casca da base para o topo. A numeração foi assim definida para facilitar a junção casca-placa discutida posteriormente neste capítulo. Eliminam-se os nós virtuais, introduzindo como graus de liberdade as rotações  $\theta$  nos dois extremos da casca e no bordo e no centro da placa. Com isso, tem-se para  $N$  divisões da placa ou da casca  $2N+1$  nós no domínio, associando-se aos nós extremos quatro componentes de deslocamento e aos nós intermediários duas componentes, conforme

mostrado na figura 3.1. A relação de correspondência entre os índices de numeração global dos deslocamentos e os deslocamentos  $u$  e  $w$  de um nó  $i$  qualquer se dá por  $u_i \rightarrow U_{2i+1}$  e  $w_i \rightarrow U_{2i+2}$ , considerando-se ainda nos nós extremos os deslocamentos  $U_2 = \theta_1$ ,  $U_{2NN+4} = \theta_{NN}$ ,  $U_1$  e  $U_{2NN+3}$ , os dois últimos criados somente para facilitar a representação matricial do problema, sem significado físico e não influenciando a resolução do sistema de equações.

A malha de discretização, como já frisado, pode ser não uniforme, variando neste caso o espaçamento nodal  $\lambda$ .

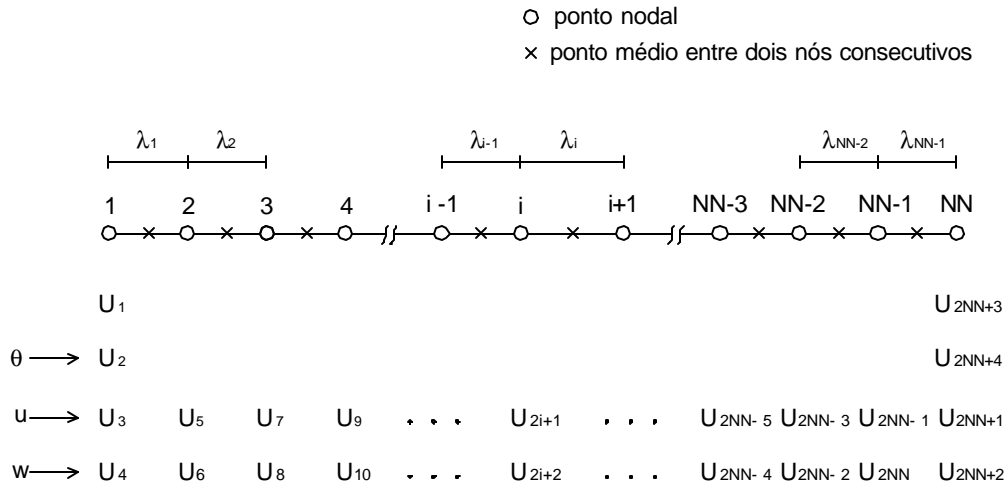


Figura 3.1 – Discretização e sistema de numeração global dos deslocamentos nodais

Além de se prever a subdivisão desigual do domínio, faz-se ainda, para fins de avaliação do trabalho virtual interno, a distinção entre trechos de integração associados às derivadas dos deslocamentos  $u$  ( $u = u_0$  na casca e  $u = u_{r0}$  na placa) e às derivadas dos deslocamentos  $w$ . Calculam-se as derivadas de  $u$  (são requeridas apenas derivadas primeiras) no ponto médio entre dois nós consecutivos (designado como ponto  $\times$ ), enquanto as derivadas de  $w$  (primeira e segunda derivadas) são obtidas no próprio ponto nodal.

Os referidos trechos de integração são mostrados na figura 3.2. Aos termos contendo a derivada  $u'$  associam-se  $NN-1$  trechos de integração, enquanto aos que envolvem as derivadas  $w'$  e  $w''$  correspondem  $NN$  trechos de integração, notando-se neste último caso que os trechos inicial e final têm, respectivamente, metade dos comprimentos  $\lambda_1$  e  $\lambda_{NN-1}$  indicados na figura 3.1.

Utiliza-se ainda um sistema de numeração local para os deslocamentos, também mostrado na figura 3.2, o qual é útil para proceder a acumulação das

contribuições dos diversos trechos de integração. Como mostra a figura, a cada um destes trechos estão associados seis deslocamentos nodais, relacionados com três nós consecutivos  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$  no caso dos trechos intermediários, e com os nós 1 e 2 ou  $NN-1$  e  $NN$  em se tratando dos trechos de extremidade. A regra de correspondência entre os índices de numeração local e global dos deslocamentos, para um trecho genérico (i) de integração, é dada por:

$$a_k \rightarrow U_{2(i-1)+k} \quad (k=1 \text{ a } 6) \quad (3.1)$$

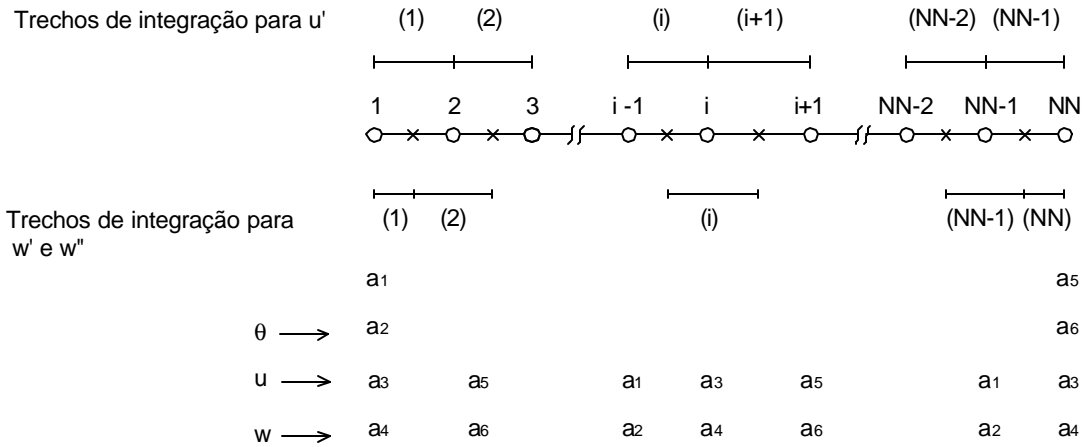


Figura 3.2 – Trechos de integração e numeração local dos deslocamentos nodais

### 3.3 – Representações em Diferenças Finitas para as Derivadas dos Deslocamentos

Conforme já mencionado, para a integração numérica das expressões (2.18) e (2.35), referentes ao trabalho virtual interno da casca e da placa respectivamente, substituem-se as derivadas dos deslocamentos  $u$  e  $w$  por representações em diferenças finitas; além disso, existe o aspecto de que tais derivadas associam-se a trechos de integração distintos, conforme mostrado na figura 3.2, tomando-se as derivadas de  $u$  no ponto  $\times$  e as de  $w$  no ponto nodal. O uso de uma discretização não uniforme torna ainda necessário, para as derivadas de  $w$ , que se considere um “elemento” (designação também usual para se referir ao trecho de integração) de transição, o qual contém o nó comum a duas subdivisões consecutivas da malha com diferentes  $\lambda$ .

Com o auxílio das figuras 3.3 a 3.8, apresentam-se em seguida as diversas representações em diferenças finitas utilizadas para as derivadas dos deslocamentos  $u$  e  $w$  nas expressões (2.18) e (2.35).

### 3.3.1 – Derivadas do Deslocamento $u$

Para o deslocamento  $u$  ( $u=u_0$  na casca e  $u=u_{r0}$  na placa), como evidenciam as expressões (2.18) e (2.35), é requerida somente a derivada primeira, a qual, de acordo com a representação reduzida [16], fica assim aproximada (figura 3.3):

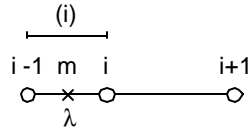


Figura 3.3 – Esquema para a obtenção da expressão (3.2)

$$u'_m \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{\lambda} \quad (3.2)$$

Note-se que tal representação dispensa automaticamente o uso de nós virtuais no cálculo da derivada para os trechos extremos de integração.

### 3.3.2 – Derivadas do Deslocamento $w$

Para o deslocamento  $w$  são necessárias representações para as derivadas primeiras e segundas. Sendo essas derivadas avaliadas nos pontos nodais, tem-se a distinção entre as representações para trechos de integração intermediários com ou sem transição.

As derivadas primeiras de  $w$  nos nós inicial e final, requeridas para os trechos de integração extremos, são os próprios graus de liberdade  $\theta_1$  e  $\theta_{NN}$ , não se fazendo portanto necessárias, em tal caso, as representações dessas derivadas em diferenças finitas.

#### 3.3.2.1 – Derivada Primeira para o Trecho de Integração Intermediário sem Transição:

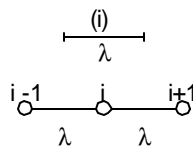


Figura 3.4 – Esquema para a obtenção da expressão (3.3)

Com o auxílio da figura 3.4, e utilizando-se a representação convencional para esta derivada, escreve-se:

$$w'_i \cong \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\lambda} \quad (3.3)$$

### 3.3.2.2 – Derivada Primeira para o Trecho de Integração Intermediário com Transição

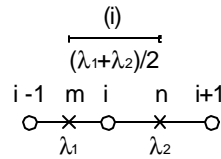


Figura 3.5 – Esquema para a obtenção da expressão (3.6)

Para a determinação da expressão de  $w'$  no nó  $i$  de transição faz-se uma interpolação linear das derivadas primeiras tomadas nos pontos médios  $m$  e  $n$  entre os nós  $i-1, i$  e  $i, i+1$  (figura 3.5). Tem-se então:

$$w'_m \cong \frac{w_i - w_{i-1}}{\lambda_1} \quad (3.4)$$

$$w'_n \cong \frac{w_{i+1} - w_i}{\lambda_2} \quad (3.5)$$

e, por interpolação,

$$w'_i \cong \frac{\lambda_1^2 w_{i+1} + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) w_i - \lambda_2^2 w_{i-1}}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (3.6)$$

notando-se que esta última recai na expressão (3.3) quando  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

### 3.3.2.3 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Intermediário sem Transição

Adota-se a representação convencional, tendo-se então de acordo com a figura 3.4:

$$w_i'' \equiv \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\lambda^2} \quad (3.7)$$

### 3.3.2.4 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Intermediário com Transição

Para a derivada segunda correspondente a um nó  $i$  de transição, tomam-se inicialmente as derivadas primeiras nos pontos médios  $m$  e  $n$  da figura 3.5, de acordo com as representações (3.4) e (3.5). Em seguida, aproxima-se a derivada segunda no nó  $i$  pela expressão:

$$w_i'' \equiv \frac{\frac{w'_n - w'_m}{\lambda_1 + \lambda_2}}{2} = \frac{2[\lambda_1 w_{i+1} - (\lambda_1 + \lambda_2) w_i + \lambda_2 w_{i-1}]}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (3.8)$$

a qual, embora mais propriamente associada ao ponto médio do trecho de integração (i), mostrou-se plenamente adequada em todos os testes realizados. É de se notar que, fazendo  $\lambda_1 = \lambda_2$  em (3.8), tem-se reproduzida a representação convencional (3.7).

### 3.3.2.5 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Inicial

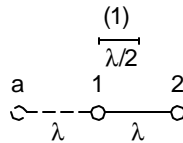


Figura 3.6 – Esquema para a obtenção da expressão (3.10)

Para a eliminação do nó virtual  $a$  (figura 3.6), define-se inicialmente a rotação  $\theta_1$  em 1:

$$\theta_1 = w'_1 \equiv \frac{w_2 - w_a}{2\lambda} \quad (3.9)$$

Escrevendo  $w_2$  em função de  $w_1$  e  $\theta_1$ , e substituindo em seguida na expressão convencional (3.7) para a derivada segunda, obtém-se para o trecho de integração inicial:

$$w_1'' \equiv \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda)}{\lambda^2} \quad (3.10)$$

### 3.3.2.6 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Final

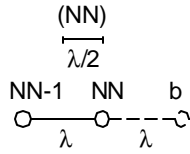


Figura 3.7 – Esquema para a obtenção da expressão (3.12)

Analogamente a (3.9) e (3.10), escreve-se com base na figura 3.7:

$$\theta_{NN} = w'_{NN} \equiv \frac{w_b - w_{NN}}{2\lambda} \quad (3.11)$$

$$w''_{NN} \equiv \frac{2(\theta_{NN} \lambda - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} \quad (3.12)$$

## 3.4 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno

Na avaliação das integrais do trabalho virtual interno, aplicam-se, para as derivadas dos deslocamentos  $u$  e  $w$ , as representações em diferenças finitas apresentadas no item anterior. Em cada um dos trechos de integração, tais derivadas, bem como todas as demais grandezas existentes na expressão, são consideradas constantes. Como os trechos de integração referentes às derivadas de  $u$  são em menor número e de características distintas dos relativos às derivadas de  $w$ , conforme evidenciado na figura 3.2, a expressão do trabalho virtual interno será sempre formada computando-se separadamente a contribuição de cada uma dessas derivadas.

A temperatura, para fins de desenvolvimento numérico, foi considerada variável somente na espessura (distribuição linear), de modo que são requeridas na análise apenas as variações de temperatura externa e interna do reservatório.

### 3.4.1 – Casca Cilíndrica

#### 3.4.1.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais

No tratamento numérico dessa parcela do trabalho virtual interno da casca, escreve-se inicialmente a expressão (2.13) sob a forma:

$$\delta W_i = 2\pi a \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} \left[ C \left( u'(j) - v \frac{w(j)}{a} \right) \delta u'(j) - C \left( v u'(j) - \frac{w(j)}{a} \right) \delta \frac{w(j)}{a} \right] d(j) + \left[ C v \frac{w(1)}{a} \delta \frac{w(1)}{a} + \right. \right. \\ \left. \left. + D w''(1) \delta w''(1) d(1) + \sum_{(j)=2}^{NN-1} [D w''(j) \delta w''(j) d(j)] + D w''(NN) \delta w''(NN) d(NN) \right] \right\} \quad (3.13)$$

onde (j) representa um trecho genérico de integração, e sendo d(j) o seu comprimento.

Em seguida, aplicando as representações em diferenças finitas do item 3.3, essa expressão fica assim escrita em função dos deslocamentos nodais:

$$\delta W_i = 2\pi a \left\{ \sum_{k=2}^{NN} \left[ C \left( \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - v \frac{w_k + w_{k-1}}{2a} \right) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - C \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - \frac{w_k + w_{k-1}}{2a} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \delta \frac{w_k + w_{k-1}}{2a} \right] \lambda_{k-1} + C v \frac{w_1}{a} \delta \frac{w_1}{a} \frac{\lambda_1}{2} + D \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} \frac{\lambda_1}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{NN-1} \left[ D \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \delta \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right. \right. \\ \left. \left. \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) \right] + D \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} \delta \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \right\} \quad (3.14)$$

com k representando um ponto nodal genérico e com os índices para o espaçamento nodal  $\lambda$  obedecendo à figura 3.1.

As derivadas de w, para os trechos de integração intermediários, encontram-se representadas em (3.14), bem como nas equações subseqüentes (3.16), (3.18) e (3.20), pela expressão correspondente ao elemento de transição, a qual, no caso de  $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ , recai na própria representação convencional, conforme já destacado anteriormente.

Observe-se ainda que os termos em  $w$  (explícito) que aparecem em (3.13) multiplicados por termos em  $u'$ , avaliados no ponto  $\times$ , acham-se representados em

(3.14) pela média  $w(j) = \frac{w_k + w_{k-1}}{2}$ ,  $k = (j)+1$ , isto é, são também tomados no ponto  $\times$ .

### 3.4.1.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura

A expressão (2.17) do trabalho virtual interno, relativa a essa parcela, escreve-se numericamente como:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & -\frac{\alpha\pi E a}{1-\nu} \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} [(\Delta t_i + \Delta t_e) \delta u'(j) d(j)] + \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta w''(1) - (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{w(1)}{a} \right] d(1) + \right. \\ & + \sum_{(j)=2}^{NN-1} \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta w''(j) - (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{w(j)}{a} \right] d(j) + \\ & \left. + \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta w''(NN) - (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{w(NN)}{a} \right] d(NN) \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Fazendo uso das representações em diferenças finitas do item 3.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & -\frac{\alpha\pi E a}{1-\nu} \left\{ \sum_{k=2}^{NN} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \lambda_{k-1} \right] + \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \right. \\ & - (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{w_1}{a} \frac{\lambda_1}{2} + \sum_{k=2}^{NN-1} \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \right. \\ & \left. \left. - (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{w_k}{a} \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) \right] + \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \right. \\ & \left. \left. - (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{w_{NN}}{a} \right] \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.4.2 – Placa Circular

#### 3.4.2.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais

Da expressão (2.30), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & 2\pi \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} C \left[ (r_u(j)u'(j) + vu(j))\delta u'(j) + \left( vu'(j) + \frac{1}{r_u(j)}u(j) \right) \delta u(j) \right] d(j) + \right. \\
& + D \left[ (r_w(1)w''(1) + vw'(1))\delta w''(1) + \left( vw'(1) + \frac{1}{r_w(1)}w'(1) \right) \delta w'(1) \right] d(1) + \\
& + \sum_{(j)=2}^{NN-1} D \left[ (r_w(j)w''(j) + vw'(j))\delta w''(j) + \left( vw''(j) + \frac{1}{r_w(j)}w'(j) \right) \delta w'(j) \right] d(j) + D[(r_w(NN)w''(NN) + \\
& + vw'(NN))\delta w''(NN) + \left( vw''(NN) + \frac{1}{r_w(NN)}w'(NN) \right) \delta w'(NN) ] d(NN) \left. \right\} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

onde (j) representa um trecho genérico de integração, d(j) seu comprimento, e  $r_u(j)$  e  $r_w(j)$ , tal como definidos adiante, caracterizam sua distância ao centro da placa.

Aplicando em (3.17) as representações em diferenças finitas do item 3.3, escreve-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & 2\pi \left\{ \sum_{k=2}^{NN} C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] \lambda_{k-1} + D \left[ \left( r_1 \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + v \theta_1 \right) \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \right. \\
& + \left. \left( v \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \frac{1}{r_1} \theta_1 \right) \delta \theta_1 \right] \frac{\lambda_1}{2} + \sum_{k=2}^{NN-1} D \left[ \left( r_k \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \right. \right. \\
& + v \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \left. \right) \delta \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \\
& + \left. \left( v \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \frac{1}{r_k} \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right) \right. \\
& \left. \delta \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right] \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) + \\
& + D \left[ \left( r_{NN} \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} + v \theta_{NN} \right) \delta \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \right. \\
& + \left. \left( v \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \frac{1}{r_{NN}} \theta_{NN} \right) \delta \theta_{NN} \right] \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \left. \right\} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

onde  $k$  representa um ponto nodal genérico. Note-se que os termos em  $u$  que aparecem sob forma explícita em (3.17) são representados em (3.18) pela média  $u(j) = \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$ ,  $k=(j)+1$ . Além disso, tem-se que a variável  $r_u$ , associada aos termos em  $u$  e  $u'$ , é tomada no ponto  $\times$  pela média  $r_u(j) = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$ , ao passo que para a variável  $r_w$  referente aos termos em  $w'$  e  $w''$ , utiliza-se o próprio valor no ponto nodal, ou seja,  $r_w(j) = r_k$ . Cabe ressaltar que para o nó 1, onde  $r_k$  seria nulo, usou-se  $r_1 = \frac{\lambda_1}{4}$ , de modo a evitar divisão por zero; e que para o nó NN, onde  $r_k$  valeria  $a$ , usou-se por analogia  $r_{NN} = a - \frac{\lambda_{NN-1}}{4}$ .

### 3.4.2.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura

Essa parcela do trabalho virtual interno, dada por (2.34), escreve-se numericamente sob a forma:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} [(\Delta t_i + \Delta t_e)(r_u(j)\delta u'(j) + \delta u(j))d(j)] + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e)(r_w(1)\delta w''(1) + \delta w'(1))d(1) + \right. \\ & + \sum_{(j)=2}^{NN-1} \left[ \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e)(r_w(j)\delta w''(j) + \delta w'(j))d(j) \right] + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e)(r_w(NN)\delta w''(NN) + \\ & \left. + \delta w'(NN))d(NN) \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo em (3.19) as representações do item 3.3 para as derivadas dos deslocamentos, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ \sum_{k=2}^{NN} [(\Delta t_i + \Delta t_e) \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \lambda_{k-1}] + \right. \\ & + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e) \left( r_1 \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \delta \theta_1 \right) \frac{\lambda_1}{2} + \\ & \left. + \sum_{k=2}^{NN-1} \left[ \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e) \left( r_k \delta \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) \Bigg] + \\
& + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \left( r_{NN} \delta \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \delta \theta_{NN} \right) \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \Bigg\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Para os termos em  $u$  que aparecem explicitamente em (3.19), bem como para as representações usadas para a variável  $r$ , segue-se o mesmo procedimento adotado em relação à expressão (3.18).

### 3.5 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo

Na avaliação numérica do trabalho virtual externo, tanto o carregamento como as funções  $u$  e  $w$  são tomados sempre no ponto nodal, considerando-se, em função disso, para trechos de integração, os mesmos associados às derivadas de  $w$  na figura 3.2.

#### 3.5.1 – Casca Cilíndrica

A expressão do trabalho virtual externo da casca cilíndrica, com base em (2.21), escreve-se numericamente:

$$\begin{aligned}
\delta W_e = 2\pi a \Bigg\{ & (p_{x1} \delta u_1 + p_{z1} \delta w_1) \frac{\lambda_1}{2} - \bar{N}_{x1} \delta u_1 - \bar{Q}_{x1} \delta w_1 + \bar{M}_{x1} \delta \theta_1 + \\
& + \sum_{k=2}^{NN-1} (p_{xk} \delta u_k + p_{zk} \delta w_k) \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) + (p_{xNN} \delta u_{NN} + p_{zNN} \delta w_{NN}) \frac{\lambda_{NN-1}}{2} + \\
& + \bar{N}_{xNN} \delta u_{NN} + \bar{Q}_{xNN} \delta w_{NN} - \bar{M}_{xNN} \delta \theta_{NN} \Bigg\} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

#### 3.5.2 – Placa Circular

O trabalho virtual externo para a placa circular, expressão (2.38), assume, para fins numéricos, a forma:

$$\delta W_e = 2\pi \left\{ r_1 p_{z1} \delta w_1 \frac{\lambda_1}{2} + \sum_{k=2}^{NN-1} r_k p_{zk} \delta w_k \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) + r_{NN} p_{zNN} \delta w_{NN} \frac{\lambda_{NN-1}}{2} + a \bar{N}_{ra} \delta u_{NN} + \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &+a\bar{Q}_{ra}\delta w_{NN} - a\bar{M}_{ra}\delta\theta_{NN} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

### 3.6 – Montagem das Matrizes de Rigidez da Casca e da Placa

Mediante o cômputo da contribuição de cada trecho de integração na figura 3.2 ao trabalho virtual interno associado exclusivamente às deformações totais da casca e da placa (a variação de temperatura, como se verá adiante, afeta apenas o vetor de cargas), o qual é dado pelas expressões (3.14) e (3.18), monta-se a matriz dos coeficientes  $[C_0]$  tanto para a casca quanto para a placa (ou seja, a matriz de rigidez para cada um desses elementos estruturais). Tal montagem, ilustrada na figura 3.8, tem por base a geração, para cada par de trechos de integração constituído por um trecho relativo à derivada  $u'$  e por outro correspondente às derivadas  $w'$  e  $w''$ , de uma matriz de coeficientes obedecendo inicialmente ao sistema de numeração local dos deslocamentos (designada por matriz local), a qual em seguida, mediante a utilização da lei de correspondência (3.1), é referida ao sistema de numeração global dos deslocamentos. Serão apresentadas a seguir essas matrizes locais relativas à casca e à placa.

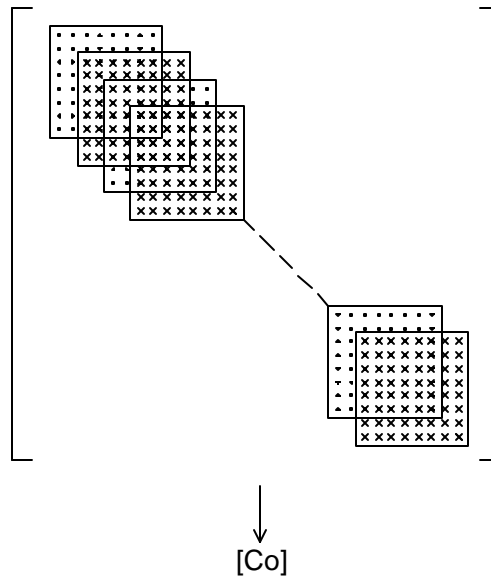


Figura 3.8 – Montagem das matrizes de rigidez da casca e da placa

### 3.6.1 – Casca Cilíndrica

#### 3.6.1.1 – Matriz para o Trecho de Integração Inicial

Na expressão (3.14), a contribuição do trecho de integração inicial ao trabalho virtual interno é dada por (ocorre aqui a única exceção onde, em lugar de um par de trechos de integração, considera-se somente o que se associa às derivadas de  $w$ ; isto porque, seja na casca ou na placa, tem-se sempre um trecho de integração a mais em relação a essas derivadas):

$$\delta W_i^1 = 2\pi a \left[ C\nu \frac{w_1}{a} \delta \frac{w_1}{a} + 4D \frac{(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} \delta \frac{(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} \right] \frac{\lambda_1}{2} \quad (3.23)$$

resultando, em função disso, a seguinte matriz local:

$$\begin{aligned}
 [c_0^1] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_1} & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_1^2} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_1^2} & 0 & \frac{\pi C \lambda}{a} + \frac{4\pi a D}{\lambda_1^3} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_1^2} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_1^3} & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_1 \\ \delta w_1 \\ \delta u_2 \\ \delta w_2 \\ \delta u_3 \\ \delta w_3 \end{matrix} \\
 & - \quad \theta_1 \quad u_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad w_3
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.6.1.2 – Matriz para os Trechos de Integração Genéricos

A contribuição desses trechos de integração é dada tomando-se os termos genéricos dos dois somatórios em (3.14), ou seja:

$$\begin{aligned}
 \delta W_i^k = & 2\pi a \left\{ C \left[ \left( \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - v \frac{w_k + w_{k-1}}{2a} \right) \delta \left( \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \right) - \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - \frac{w_k + w_{k-1}}{2a} \right) \right. \right. \\
 & \left. \delta \left( \frac{w_k + w_{k-1}}{2a} \right) \right] \lambda_{k-1} + 4D \left[ \frac{(\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1})}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right. \\
 & \left. \delta \left( \frac{\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right) \right] \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right\}, \quad k = 2 \text{ a } NN-1
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

tendo-se com isso a seguinte matriz local:

$$\begin{aligned}
 [c_0^k] = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & \pi C v & \frac{-2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & \pi C v & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \pi C v & \frac{4\pi a D}{\lambda_{k-1}^2(\lambda_{k-1} + \lambda_k)} & -\pi C v & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1}^2 \lambda_k} & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & -\pi C v & \frac{2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & -\pi C v & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \pi C v & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1}^2 \lambda_k} & -\pi C v & \frac{4\pi a D (\lambda_{k-1} + \lambda_k)}{\lambda_{k-1}^2 \lambda_k^2} + \frac{\pi C (\lambda_{k-1} + \lambda_k)}{a} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1} \lambda_k^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1} \lambda_k^2} & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_k^2 (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} & 0
 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta u_{k-2} \\ \delta w_{k-2} \\ \delta u_{k-1} \\ \delta w_{k-1} \\ \delta u_k \\ \delta w_k \\ \delta u_{k+1} \\ \delta w_{k+1} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} u_{k-2} & w_{k-2} & u_{k-1} & w_{k-1} & u_k & w_k & u_{k+1} & w_{k+1} \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Observe-se que, se for o caso de um trecho de integração sem transição, tem-se  $\lambda_{k-1}=\lambda_k$  e, nesta circunstância, a matriz (3.26) assume o aspecto particular:

$$\begin{aligned}
 [c_0^k] = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & \pi C v & \frac{-2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & \pi C v & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \pi C v & \frac{2\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} & -\pi C v & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} & 0 & \frac{2\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} \\
 0 & 0 & \frac{-2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & -\pi C v & \frac{2\pi a C}{\lambda_{k-1}} & -\pi C v & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \pi C v & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} & -\pi C v & \frac{8\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} + \frac{2\pi C \lambda_{k-1}}{a} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{k-1}^3} & 0 & \frac{2\pi a D}{\lambda_{k-1}^3}
 \end{bmatrix} \begin{matrix}
 \delta u_{k-2} \\
 \delta w_{k-2} \\
 \delta u_{k-1} \\
 \delta w_{k-1} \\
 \delta u_k \\
 \delta w_k \\
 \delta u_{k+1} \\
 \delta w_{k+1}
 \end{matrix} \quad (3.27) \\
 & \begin{matrix}
 u_{k-2} & w_{k-2} & u_{k-1} & w_{k-1} & u_k & w_k & u_{k+1} & w_{k+1}
 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

### 3.6.1.3 – Matriz para os Trechos de Integração Finais

A contribuição em (3.14) dos trechos de integração finais é representada por:

$$\begin{aligned}
 \delta W_i^{NN} = & 2\pi a \left\{ C \left[ \left( \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} - v \frac{w_{NN} + w_{NN-1}}{2a} \right) \delta \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} - \left( v \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{w_{NN} + w_{NN-1}}{2a} \right) \delta \frac{w_{NN} + w_{NN-1}}{2a} \right] \lambda_{NN-1} + 4D \left[ \frac{(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} \right. \\
 & \left. \delta \frac{(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} \right] \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \left. \right\} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

com a matriz local se escrevendo neste caso:

$$\begin{aligned}
 [c_0^{NN}] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi a C}{\lambda_{NN-1}} & \pi C v & \frac{-2\pi a C}{\lambda_{NN-1}} & \pi C v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi C v & \frac{4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^3} & -\pi C v & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^3} & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^2} \\ 0 & 0 & \frac{-2\pi a C}{\lambda_{NN-1}} & -\pi C v & \frac{2\pi a C}{\lambda_{NN-1}} & -\pi C v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi C v & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^3} & -\pi C v & \frac{4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^3} + \frac{\pi C \lambda}{a} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^2} & 0 & \frac{-4\pi a D}{\lambda_{NN-1}^2} & 0 & \frac{4\pi a D}{\lambda_{NN-1}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta u_{NN-2} \\ \delta w_{NN-2} \\ \delta u_{NN-1} \\ \delta w_{NN-1} \\ \delta u_{NN} \\ \delta w_{NN} \\ - \\ \delta \theta_{NN} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} u_{NN-2} & w_{NN-2} & u_{NN-1} & w_{NN-1} & u_{NN} & w_{NN} & - & \theta_{NN} \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

### 3.6.2 – Placa Circular

#### 3.6.2.1 – Matriz para Trecho de Integração Inicial

A contribuição na expressão (3.18) do trecho de integração inicial se escreve:

$$\begin{aligned}
 \delta W_i^1 = & 2\pi D \left[ 2 \left( r_1 \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + v \theta_1 \right) \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \left( v \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r_1} \theta_1 \right) \delta \theta_1 \right] \frac{\lambda_1}{2}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

tendo-se, com isso, a seguinte matriz local:

$$\begin{aligned}
\left[ c_0^1 \right] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\pi D \left( \frac{r_1}{\lambda_1} - v \right) & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_1} \left( \frac{2r_1}{\lambda_1} - v \right) & 0 & \frac{-2\pi D}{\lambda_1} \left( \frac{2r_1}{\lambda_1} - v \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_1} \left( \frac{2r_1}{\lambda_1} - v \right) & 0 & \frac{4\pi r_1}{\lambda_1^3} & 0 & \frac{-4\pi r_1}{\lambda_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\pi D}{\lambda_1} \left( \frac{2r_1}{\lambda_1} - v \right) & 0 & \frac{-4\pi r_1}{\lambda_1^3} & 0 & \frac{4\pi r_1}{\lambda_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_1 \\ \delta w_1 \\ \delta u_2 \\ \delta w_2 \\ \delta u_3 \\ \delta w_3 \end{matrix} \\
- & \begin{matrix} \theta_1 & u_1 & w_1 & u_2 & w_2 & u_3 & w_3 \end{matrix}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

### 3.6.2.2 – Matriz para os Trechos de Integração Genéricos

Obtém-se a contribuição de tais trechos de integração mediante a consideração dos termos genéricos dos dois somatórios em (3.18), ou seja:

$$\begin{aligned}
\delta W_i^k = & 2\pi \left\{ C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] \lambda_{k-1} + D \left[ \left( r_k \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \right. \right. \\
& \left. \left. v \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right) \delta \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \right. \\
& \left. \left. + \left( v \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \frac{1}{r_k} \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \delta \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right] \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right\}, \quad k = 2 \text{ a } NN-1
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Fazendo  $r_u = \frac{r_{k-1} + r_k}{2}$ ,  $b_1 = \lambda_{k-1} + \lambda_k$ ,  $b_2 = \lambda_{k-1} \lambda_k$  e  $b_3 = \lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2$ , a matriz local correspondente se escreve então sob a forma (3.33), sendo que, para o caso particular de  $\lambda_{k-1} = \lambda_k$ , assume a forma expressa por (3.34).

$$\begin{aligned}
\left[ c_0^k \right] = & \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\pi C \left( \frac{r_u}{\lambda_{k-1}} - v + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 2\pi C \left( \frac{-r_u}{\lambda_{k-1}} + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\pi D}{b_1 \lambda_{k-1}^2} \left( 4r_k - 4v\lambda_k + \frac{\lambda_k^2}{r_k} \right) & 0 & \frac{\pi D}{b_1 b_2 \lambda_{k-1}} \left( b_1(-4r_k + 2v\lambda_k) + b_3 \left( \frac{-\lambda_k}{r_k} + 2v \right) \right) & 0 & \frac{\pi D}{b_1 b_2} \left( 4r_k + 2v(\lambda_{k-1} - \lambda_k) - \frac{b_2}{r_k} \right) \\
0 & 0 & 2\pi C \left( \frac{-r_u}{\lambda_{k-1}} + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 2\pi C \left( \frac{r_u}{\lambda_{k-1}} + v + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\pi D}{b_1 b_2 \lambda_{k-1}} \left( b_1(-4r_k + 2v\lambda_k) + b_3 \left( \frac{-\lambda_k}{r_k} + 2v \right) \right) & 0 & \frac{\pi D}{b_1 b_2^2} \left( 4r_k b_1^2 - 4vb_1 b_3 + \frac{b_3^2}{r_k} \right) & 0 & \frac{\pi D}{\lambda_k b_1 b_2} \left( -4r_k b_1 + 2v(b_3 - \lambda_{k-1} b_1) + \frac{\lambda_{k-1} b_3}{r_k} \right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\pi D}{b_1 b_2} \left( 4r_k + 2v(\lambda_{k-1} - \lambda_k) - \frac{b_2}{r_k} \right) & 0 & \frac{\pi D}{\lambda_k b_1 b_2} \left( -4r_k b_1 + 2v(b_3 - \lambda_{k-1} b_1) + \frac{\lambda_{k-1} b_3}{r_k} \right) & 0 & \frac{\pi D}{b_1 b_2^2} \left( 4r_k - 4v\lambda_k + \frac{\lambda_{k-1}^2}{r_k} \right)
\end{bmatrix} \begin{matrix}
\delta u_{k-2} \\
\delta w_{k-2} \\
\delta u_{k-1} \\
\delta w_{k-1} \\
\delta u_k \\
\delta w_k \\
\delta u_{k+1} \\
\delta w_{k+1}
\end{matrix} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{matrix}
\mathbf{u}_{k-2} & \mathbf{w}_{k-2} & & & & & & \\
& \mathbf{u}_{k-1} & & & & & & \\
& & \mathbf{w}_{k-1} & & & & & \\
& & & \mathbf{u}_k & & & & \\
& & & & \mathbf{w}_k & & & \\
& & & & & \mathbf{u}_{k+1} & & \\
& & & & & & \mathbf{w}_{k+1} &
\end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
\left[ c_0^k \right] = & \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\pi C \left( \frac{r_u}{\lambda_{k-1}} - v + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 2\pi C \left( \frac{-r_u}{\lambda_{k-1}} + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{k-1}} \left( \frac{r_k}{\lambda_{k-1}^2} - \frac{v}{\lambda_{k-1}} + \frac{1}{4r_k} \right) & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{k-1}^2} \left( \frac{-2r_k}{\lambda_{k-1}} + v \right) & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{k-1}} \left( \frac{2r_k}{\lambda_{k-1}^2} + \frac{1}{4r_k} \right) \\
0 & 0 & 2\pi C \left( \frac{-r_u}{\lambda_{k-1}} + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 2\pi C \left( \frac{r_u}{\lambda_{k-1}} + v + \frac{\lambda_{k-1}}{4r_u} \right) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{k-1}^2} \left( \frac{-2r_k}{\lambda_{k-1}} + v \right) & 0 & \frac{8\pi D r_k}{\lambda_{k-1}^3} & 0 & \frac{-2\pi D}{\lambda_{k-1}^2} \left( \frac{2r_k}{\lambda_{k-1}} + v \right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{k-1}} \left( \frac{2r_k}{\lambda_{k-1}^2} + \frac{1}{4r_k} \right) & 0 & \frac{-2\pi D}{\lambda_{k-1}^2} \left( \frac{2r_k}{\lambda_{k-1}} + v \right) & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{k-1}} \left( \frac{r_k}{\lambda_{k-1}^2} + \frac{v}{\lambda_{k-1}} + \frac{1}{4r_k} \right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta u_{k-2} \\
\delta w_{k-2} \\
\delta u_{k-1} \\
\delta w_{k-1} \\
\delta u_k \\
\delta w_k \\
\delta u_{k+1} \\
\delta w_{k+1}
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{matrix}
\mathbf{u}_{k-2} & \mathbf{w}_{k-2} & \mathbf{u}_{k-1} & \mathbf{w}_{k-1} & \mathbf{u}_k & \mathbf{w}_k & \mathbf{u}_{k+1} & \mathbf{w}_{k+1}
\end{matrix}$$

## 3.6.2.3 – Matriz para os Trechos de Integração Finais

Pode-se escrever a contribuição na expressão (3.18) dos trechos de integração finais na forma:

$$\begin{aligned} \delta W_i^{NN} = 2\pi \left\{ C \left[ \left( \frac{r_{NN} + r_{NN-1}}{2} \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} + v \frac{u_{NN} + u_{NN-1}}{2} \right) \delta \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} + \left( v \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{r_{NN} + r_{NN-1}} \frac{u_{NN} + u_{NN-1}}{2} \right) \delta \frac{u_{NN} + u_{NN-1}}{2} \right] \lambda_{NN-1} + D \left[ 2 \left( r_{NN} \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN+1})}{\lambda_{NN-1}^2} + v \theta_{NN} \right) \right. \\ \left. \delta \frac{(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN+1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \left( v \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN+1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \frac{1}{r_{NN}} \theta_{NN} \right) \delta \theta_{NN} \right] \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \right\} \quad (3.35) \end{aligned}$$

tendo-se em função disso, e com a substituição  $\frac{r_{NN} + r_{NN-1}}{2} = r_u$ , a correspondente matriz local:

$$\begin{aligned}
 [C_0^{NN}] = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2\pi C \left( \frac{r_u}{\lambda_{NN-1}} - v + \frac{\lambda_{NN-1}}{4r_u} \right) & 0 & 2\pi C \left( \frac{-r_u}{\lambda_{NN-1}} + \frac{\lambda_{NN-1}}{4r_u} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi D r_k}{\lambda_{NN-1}^3} & 0 & \frac{-4\pi D r_{NN}}{\lambda_{NN-1}^3} & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{NN-1}} \left( \frac{2r_{NN}}{\lambda_{NN-1}} + v \right) & 0 \\
 0 & 0 & 2\pi C \left( \frac{-r_u}{\lambda_{NN-1}} + \frac{\lambda_{NN-1}}{4r_u} \right) & 0 & 2\pi C \left( \frac{r_u}{\lambda_{NN-1}} + v + \frac{\lambda_{NN-1}}{4r_u} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{-4\pi D r_{NN}}{\lambda_{NN-1}^3} & 0 & \frac{4\pi D r_{NN}}{\lambda_{NN-1}^3} & 0 & \frac{-2\pi D}{\lambda_{NN-1}} \left( \frac{2r_{NN}}{\lambda_{NN-1}} + v \right) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi D}{\lambda_{NN-1}} \left( \frac{2r_{NN}}{\lambda_{NN-1}} + v \right) & 0 & \frac{-2\pi D}{\lambda_{NN-1}} \left( \frac{2r_{NN}}{\lambda_{NN-1}} + v \right) & 0 & 2\pi D \left( \frac{2r_{NN}}{\lambda_{NN-1}} + 2v + \frac{\lambda_{NN-1}}{2r_{NN}} \right) & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta u_{NN-2} \\
 \delta w_{NN-2} \\
 \delta u_{NN-1} \\
 \delta w_{NN-1} \\
 \delta u_{NN} \\
 \delta w_{NN} \\
 - \\
 \delta \theta_{NN}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 u_{NN-2} & w_{NN-2} & u_{NN-1} & w_{NN-1} & u_{NN} & w_{NN} & - & \theta_{NN}
 \end{array}$$

### 3.7 – Matriz de Rigidez do Reservatório

Uma vez geradas as matrizes dos coeficientes  $[C_0]$  de cada elemento estrutural (conforme ilustrado na figura 3.8), mediante o cômputo da contribuição de cada par de trechos de integração representado por um trecho relativo à derivada  $u'$  e por outro associado às derivadas  $w'$  e  $w''$ , pode-se em seguida proceder a montagem da matriz do reservatório. Para tal, devem-se superpor as matrizes dos coeficientes da casca e da placa, considerando-se a compatibilização dos deslocamentos no nó comum a ambas, ficando estabelecido que a numeração global para o reservatório se inicia no centro da placa e termina no topo da casca.

Na formação da matriz de rigidez do reservatório, conforme supracitado, é levada em conta a compatibilização dos deslocamentos no nó comum à casca e à placa. Pelos sistemas de eixos da casca e placa mostrados na figura 3.9, nota-se que no nó  $i$  da junção o deslocamento  $u$  no referencial da placa é o negativo do deslocamento  $w$  referenciado à casca. Quanto ao deslocamento  $w$  na placa, este corresponde ao negativo do deslocamento  $u$  na casca. A rotação, por sua vez, quando positiva no referencial da placa é negativa se adotado o referencial da casca. O referencial utilizado, quando considerado o nó  $i$  da junção, foi o da placa, e, em função disso, essas relações de compatibilização dos elementos estruturais correspondem à troca dos sinais das linhas e colunas associadas respectivamente às variações dos deslocamentos e aos próprios deslocamentos do nó  $i$  na matriz da casca. Em seguida, faz-se então a superposição das duas matrizes de coeficientes, somando-se as linhas e colunas referentes aos três graus de liberdade ( $u_i, w_i, \theta_i$ ) no nó  $i$  da junção casca-placa.

Com a numeração se iniciando no centro da placa, a matriz dos coeficientes  $[C_0]$  deste elemento estrutural entra na formação da matriz de coeficientes do reservatório obedecendo à seguinte lei de correspondência:

$$K_{ij} = C_{0,ij}^p \quad (i=1 \text{ a } 2NN^p+4, j=1 \text{ a } 2NN^p+4) \quad (3.37)$$

onde  $K_{ij}$  representa os elementos da matriz de rigidez do reservatório,  $C_{0,ij}^p$  os elementos da matriz dos coeficientes para a placa e  $NN^p$  o número de nós da placa. Procedem-se, então, a inversão de sinais e a troca de posição das linhas e colunas da matriz dos coeficientes da casca  $[C_0^c]$ , conforme anteriormente descrito, daí resultando uma matriz modificada  $[C_0^{cm}]$ . A superposição desta última à matriz de coeficientes da placa  $[C_0^p]$  é regida pela lei de correspondência:

$$K_{2NN^p+i, 2NN^p+j} = K_{2NN^p+i, 2NN^p+j} + C_{0, ij}^{cm} \quad (i=1 \text{ a } 2NN^c+4, j=1 \text{ a } 2NN^c+4) \quad (3.38)$$

onde  $NN^c$  representa o número de nós da casca.

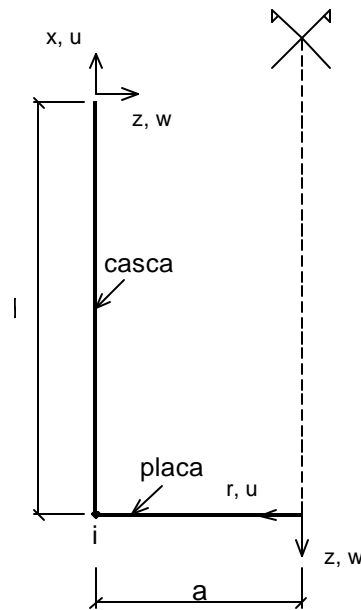


Figura 3.9 – Sistemas de eixos para o reservatório

### 3.8 – Montagem do Vetor de Cargas para a Casca e a Placa

Contribuem na montagem do vetor de cargas tanto para a casca como para a placa os termos que, na igualdade entre os trabalhos virtuais interno e externo, encontram-se multiplicados somente pelas variações dos deslocamentos. Com isso, tem-se a participação de todos os termos que compõem o trabalho virtual externo, além daqueles referentes à variação de temperatura no trabalho virtual interno (tomando-se estes últimos com seus sinais invertidos). A montagem desses vetores de carga, inicialmente no sistema de numeração local (vetores locais), é análoga à das matrizes dos coeficientes e se encontra ilustrada na figura 3.10.

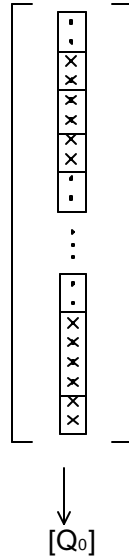


Figura 3.10 – Montagem dos vetores de carga da casca e da placa

### 3.8.1 – Casca Cilíndrica

#### 3.8.1.1 – Vetor Local de Cargas para o Trecho de Integração Inicial

Com base em (3.16), a contribuição do trabalho virtual interno para tal trecho de integração se escreve:

$$\delta W_i^1 = -\frac{\alpha\pi E a}{1-\nu} \left[ -\frac{h}{3} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} - (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{w_1}{a} \right] \frac{\lambda_1}{2} \quad (3.39)$$

Por sua vez, o trabalho virtual externo, expresso por (3.21), fornece a contribuição:

$$\delta W_e^1 = 2\pi a \left\{ (p_{x1} \delta u_1 + p_{z1} \delta w_1) \frac{\lambda_1}{2} + \bar{M}_{x1} \delta \theta_1 + \bar{N}_{x1} \delta u_1 + \bar{Q}_{x1} \delta w_1 \right\} \quad (3.40)$$

O vetor de cargas no sistema de numeração local correspondente ao cômputo das contribuições  $-\delta W_i^1 + \delta W_e^1$  é dado então por:

$$[q_0^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)} + 2\pi a \bar{M}_{x1} \\ 2\pi a \left( p_{x1} \frac{\lambda_1}{2} + \bar{N}_{x1} \right) \\ \frac{\alpha\pi a E h \lambda_1}{(1-\nu)} \left[ \frac{h(\Delta t_i - \Delta t_e)}{6\lambda_1^2} - \frac{(\Delta t_i + \Delta t_e)}{2a} \right] + 2\pi a \left( p_{z1} \frac{\lambda_1}{2} + \bar{Q}_{x1} \right) \\ 0 \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)\lambda_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_1 \\ \delta w_1 \\ \delta u_2 \\ \delta w_2 \end{matrix} \quad (3.41)$$

### 3.8.1.2 – Vetor Local de Cargas para os Trechos Genéricos de Integração

Tem-se, relativamente ao trabalho virtual interno, a seguinte contribuição dos trechos de integração genéricos na expressão (3.16):

$$\delta W_i^k = -\frac{\alpha\pi E a}{1-\nu} \left\{ \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \right] \lambda_{k-1} + \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \right. \right. \\ \left. \left. \delta \frac{2[\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} - (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{w_k}{a} \left[ \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right] \right\}, \quad k=2 \text{ a } NN-1 \quad (3.42)$$

A contribuição em (3.21) do trabalho virtual externo se escreve nesse caso:

$$\delta W_e^k = 2\pi a \left\{ \left( p_{xk} \delta u_k + p_{zk} \delta w_k \right) \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right\}, \quad k=2 \text{ a } NN-1 \quad (3.43)$$

Somando a contribuição (3.43) com o negativo de (3.41), tem-se o vetor local de cargas:

$$\left[ q_0^k \right] = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha\pi a E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{(1-\nu)} \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)\lambda_{k-1}} \\ \frac{\alpha\pi a E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{(1-\nu)} + 2\pi a \left( p_{zk} \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) \\ \frac{\alpha\pi a E h (\lambda_{k-1} + \lambda_k)}{(1-\nu)} \left[ \frac{h(\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(\lambda_{k-1}\lambda_k)} - \frac{(\Delta t_i + \Delta t_e)}{2a} \right] + 2\pi a \left( p_{zk} \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) \\ 0 \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)\lambda_k} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta u_{k-1} \\ \delta w_{k-1} \\ \delta u_k \\ \delta w_k \\ \delta u_{k+1} \\ \delta w_{k+1} \end{matrix} \quad (3.44)$$

que, para  $\lambda_{k-1} = \lambda_k$ , assume a forma seguinte:

$$\left[ q_0^k \right] = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha\pi a E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{(1-\nu)} \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)\lambda_{k-1}} \\ \frac{\alpha\pi a E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{(1-\nu)} + 2\pi a (p_{zk} \lambda_{k-1}) \\ \frac{\alpha\pi a E h \lambda_{k-1}}{(1-\nu)} \left[ \frac{h(\Delta t_i - \Delta t_e)}{3\lambda_{k-1}^2} - \frac{(\Delta t_i + \Delta t_e)}{a} \right] + 2\pi a (p_{zk} \lambda_{k-1}) \\ 0 \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)\lambda_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta u_{k-1} \\ \delta w_{k-1} \\ \delta u_k \\ \delta w_k \\ \delta u_{k+1} \\ \delta w_{k+1} \end{matrix} \quad (3.45)$$

### 3.8.1.3 – Vetor Local de Cargas para os Trechos de Integração Finais

Na expressão (3.16) tem-se a seguinte contribuição referente aos trechos de integração finais:

$$\delta W_i^{NN} = -\frac{\alpha\pi E a}{1-\nu} \left\{ \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} \right] \lambda_{NN-1} + \left[ -\frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \right. \right. \\ \left. \left. \left[ \delta \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} - (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{w_{NN}}{a} \right] \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \right\} \quad (3.46)$$

Em relação à expressão (3.21), tem-se a contribuição:

$$\delta W_e^{NN} = 2\pi a \left\{ (p_{xNN} \delta u_{NN} + p_{zNN} \delta w_{NN}) \frac{\lambda_{NN-1}}{2} - \bar{M}_{xNN} \delta \theta_{NN} + \bar{N}_{xNN} \delta u_{NN} + \bar{Q}_{xNN} \delta w_{NN} \right\} \quad (3.47)$$

O vetor local de cargas referente ao cômputo dessas duas contribuições se escreve então:

$$[q_0^{NN}] = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha\pi a E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{(1-\nu)} \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)\lambda_{NN-1}} \\ \frac{\alpha\pi a E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{(1-\nu)} + 2\pi a \left( p_{xNN} \frac{\lambda_{NN-1}}{2} + \bar{N}_{xNN} \right) \\ \frac{\alpha\pi a E h \lambda_{NN-1}}{(1-\nu)} \left[ \frac{h(\Delta t_i - \Delta t_e)}{6\lambda_{NN-1}^2} - \frac{(\Delta t_i + \Delta t_e)}{2a} \right] + 2\pi a \left( p_{zNN} \frac{\lambda_{NN-1}}{2} + \bar{Q}_{xNN} \right) \\ 0 \\ \frac{-\alpha\pi a E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)} - 2\pi a \bar{M}_{xNN} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta u_{NN-1} \\ \delta w_{NN-1} \\ \delta u_{NN} \\ \delta w_{NN} \\ - \\ \delta \theta_{NN} \end{matrix} \quad (3.48)$$

### 3.8.2 – Placa Circular

#### 3.8.2.1 – Vetor Local de Cargas para o Trecho de Integração Inicial

A expressão (3.20) fornece a seguinte contribuição para o trecho de integração inicial:

$$\delta W_i^1 = -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \left[ r_1 \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \theta_1 \lambda_1)}{\lambda_1^2} + \delta \theta_1 \right] \frac{\lambda_1}{2} \right\} \quad (3.49)$$

A contribuição do trabalho virtual externo assim se escreve de acordo com (3.22):

$$\delta W_e^1 = 2\pi r_1 p_{z1} \delta w_1 \frac{\lambda_1}{2} \quad (3.50)$$

O vetor local de cargas assume então a forma:

$$[q_0^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{6(1-\nu)} \left( \frac{\lambda_1}{2} - r_1 \right) \\ 0 \\ -\frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e) r_1}{6(1-\nu)\lambda_1} + 2\pi r_1 p_{z1} \frac{\lambda_1}{2} \\ 0 \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e) r_1}{6(1-\nu)\lambda_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_1 \\ \delta w_1 \\ \delta u_2 \\ \delta w_2 \end{matrix} \quad (3.51)$$

### 3.8.2.2 – Vetor Local de Cargas para os Trechos de Integração Genéricos

A contribuição em (3.20) dos trechos de integração genéricos é dada por:

$$\delta W_i^k = -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \right] \lambda_{k-1} + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \right. \\ \left. \left[ r_k \delta \frac{2 [\lambda_{k-1} w_{k+1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_k) w_k + \lambda_k w_{k-1}]}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} + \delta \frac{\lambda_{k-1}^2 w_{k+1} + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2) w_k - \lambda_k^2 w_{k-1}}{\lambda_{k-1} \lambda_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k)} \right] \right. \\ \left. \left( \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \right) \right\} \quad (3.52)$$

A expressão (3.22) fornece a seguinte contribuição do trabalho virtual externo:

$$\delta W_e^k = 2\pi r_k p_{zk} \delta w_k \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2} \quad (3.53)$$

O vetor local de cargas fica assim apresentado:

$$\left[ q_0^k \right] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\pi E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{2(1-\nu)} [\lambda_{k-1} - (r_k + r_{k-1})] \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{12(1-\nu)\lambda_{k-1}} (2r_k - \lambda_k) \\ \frac{\alpha\pi E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{2(1-\nu)} [\lambda_{k-1} + (r_k + r_{k-1})] \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{12(1-\nu)\lambda_{k-1}\lambda_k} [-2r_k (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + (\lambda_k^2 - \lambda_{k-1}^2)] + 2\pi r_k p_{zk} \frac{(\lambda_{k-1} + \lambda_k)}{2} \\ 0 \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{12(1-\nu)\lambda_k} (2r_k + \lambda_{k-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{k-1} \\ \delta w_{k-1} \\ \delta u_k \\ \delta w_k \\ \delta u_{k+1} \\ \delta w_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Para o caso particular no qual  $\lambda_{k-1} = \lambda_k$  este vetor assume a forma:

$$\left[ q_0^k \right] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\pi E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{2(1-\nu)} [\lambda_{k-1} - (r_k + r_{k-1})] \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{12(1-\nu)\lambda_{k-1}} (2r_k - \lambda_{k-1}) \\ \frac{\alpha\pi E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{2(1-\nu)} [\lambda_{k-1} + (r_k + r_{k-1})] \\ \frac{-\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e) r_k}{3(1-\nu)\lambda_{k-1}} + 2\pi r_k p_{zk} \lambda_{k-1} \\ 0 \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{12(1-\nu)\lambda_{k-1}} (2r_k + \lambda_{k-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{k-1} \\ \delta w_{k-1} \\ \delta u_k \\ \delta w_k \\ \delta u_{k+1} \\ \delta w_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

### 3.8.2.3 – Vetor Local de Cargas para os Trechos de Integração Finais

A contribuição em (3.20) para tais trechos é dada por:

$$\delta W_i^{NN} = -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ (\Delta t_i + \Delta t_e) \left( \frac{r_{NN} + r_{NN-1}}{2} \delta \frac{u_{NN} - u_{NN-1}}{\lambda_{NN-1}} + \delta \frac{u_{NN} + u_{NN-1}}{2} \right) \lambda_{NN-1} + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \right. \\ \left. \left[ r_{NN} \delta \frac{2(\theta_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda_{NN-1}^2} + \delta \theta_{NN} \right] \frac{\lambda_{NN-1}}{2} \right\} \quad (3.56)$$

No trabalho virtual externo (3.22), os trechos de integração finais fornecem a seguinte contribuição:

$$\delta W_e^{NN} = 2\pi \left\{ r_{NN} p_{zNN} \delta w_{NN} \frac{\lambda_{NN-1}}{2} + a \bar{N}_{ra} \delta u_{NN} + a \bar{Q}_{ra} \delta w_{NN} - a \bar{M}_{ra} \delta \theta_{NN} \right\} \quad (3.57)$$

O vetor local de cargas assume então nesse caso a forma:

$$[q_0^{NN}] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\pi E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{2(1-\nu)} [\lambda_{NN-1} - (r_{NN} + r_{NN-1})] \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e) r_{NN}}{6(1-\nu) \lambda_{NN-1}} \\ \frac{\alpha\pi E h (\Delta t_i + \Delta t_e)}{2(1-\nu)} [\lambda_{NN-1} + (r_{NN} + r_{NN-1})] \\ \frac{-\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e) r_{NN}}{6(1-\nu) \lambda_{NN-1}} + 2\pi r_{NN} p_{zNN} \lambda_{NN-1} + 2\pi a \bar{Q}_{ra} \\ 2\pi a \bar{N}_{ra} \\ \frac{\alpha\pi E h^2 (\Delta t_i - \Delta t_e)}{12(1-\nu) \lambda_k} (2r_k + \lambda_{NN-1}) - 2\pi a \bar{M}_{ra} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{NN-1} \\ \delta w_{NN-1} \\ \delta u_{NN} \\ \delta w_{NN} \\ - \\ \delta \theta_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.9 – Vetor de Cargas do Reservatório

A formação do vetor de cargas do reservatório consiste na junção dos vetores de cargas da placa e da casca. De acordo com a numeração utilizada para os nós do reservatório, iniciando-se no centro da placa e terminando no topo da casca, o vetor da placa ocupa as posições referentes aos nós 1 a  $NN^p$ , enquanto o vetor da casca ocupa as posições associadas aos nós  $NN^p+1$  a  $NN^p+NN^c$ . Vale salientar que, estando os graus de liberdade do nó da junção definidos no referencial da placa, os carregamentos existentes em tal nó devem ser também fornecidos nesse mesmo referencial.



## CAPÍTULO 4

### APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### 4.1 – Introdução

O presente capítulo visa demonstrar a aplicabilidade do algoritmo desenvolvido, procurando-se testar o seu funcionamento através da comparação dos resultados numéricos obtidos com soluções analíticas disponíveis. A obtenção desses resultados se faz mediante a consideração de três exemplos. Nos dois primeiros, cada um deles envolvendo dois problemas que diferem entre si somente na condição de apoio, é feita a abordagem da casca cilíndrica e da placa circular separadamente, tendo como objetivo orientar a escolha de uma discretização que se mostre adequada para a análise isolada de cada um desses elementos estruturais. No terceiro exemplo, englobando também dois problemas, analisa-se um dado reservatório para solicitação exclusiva de temperatura e de forças aplicadas, respectivamente.

#### 4.2 – Casca Submetida à Pressão Interna Constante

Neste exemplo, dividido em dois problemas, a saber, casca submetida à pressão interna constante, inicialmente apoiada e depois engastada na base, utilizam-se três diferentes tipos de discretização, supondo-se um mesmo número total de divisões na estrutura. Com a consideração de diferentes tipos de discretização, onde se faz uso do elemento de transição, procura-se investigar a conveniência de um maior refinamento nas regiões afetadas por perturbações de bordo e de um refinamento mais pobre nas regiões onde prevalece o regime de membrana.

A comparação das soluções obtidas com as respectivas soluções analíticas orienta, então, a escolha da discretização mais adequada em cada caso, tanto em relação à distribuição dos nós quanto ao número total de divisões.

##### 4.2.1 – Casca apoiada

Este problema se encontra representado na figura 4.1, onde se acham também indicados os dados geométricos, de carga e do material da casca.

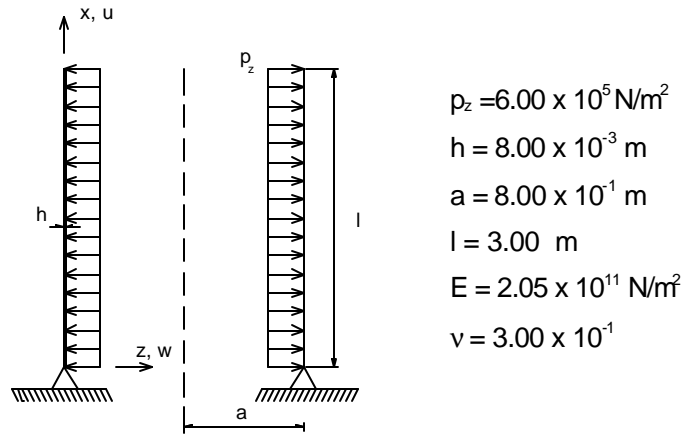


Figura 4.1 – Casca cilíndrica apoiada utilizada no problema 4.2.1

Fixando-se um total de 30 divisões na casca, são examinados os seguintes três tipos de discretização:

- Discretização 1:

Como primeiro tipo de discretização usou-se uma malha uniforme, conforme ilustrado na figura 4.2.

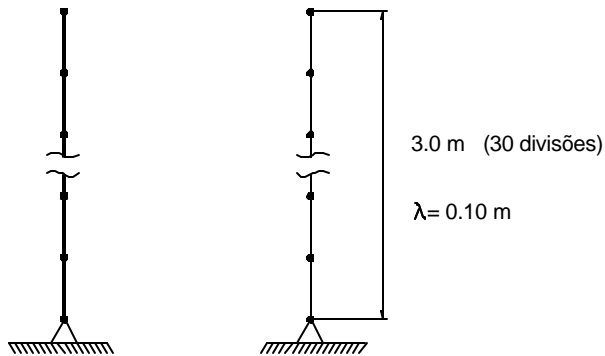


Figura 4.2 – Discretização 1 para a casca cilíndrica apoiada

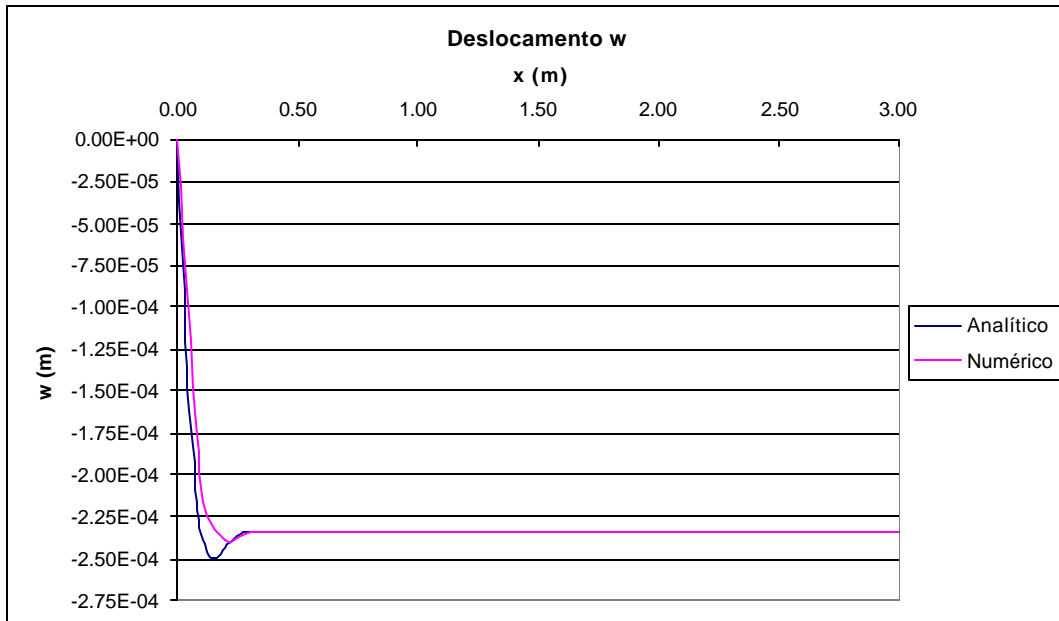
Nas tabelas 4.1 e 4.2 confrontam-se os resultados dos modelos numérico e analítico para os máximos do deslocamento transversal  $w$  e do momento  $M_x$ , seguindo-se nas figuras 4.3 e 4.4 os gráficos comparativos das variações de  $w$  e  $M_x$  ao longo da casca.

Tabela 4.1 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização 1, esquematizada na figura 4.2

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.20	$-2.387 \times 10^{-4}$	-4.44%
Analítico [17]	0.15	$-2.498 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.2 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização 1, esquematizada na figura 4.2

	Abcissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual ( $M_x$ máximo)
Numérico	0.10	$-1.856 \times 10^2$	-50.44%
Analítico [17]	0.05	$-3.745 \times 10^2$	-

Figura 4.3 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.2

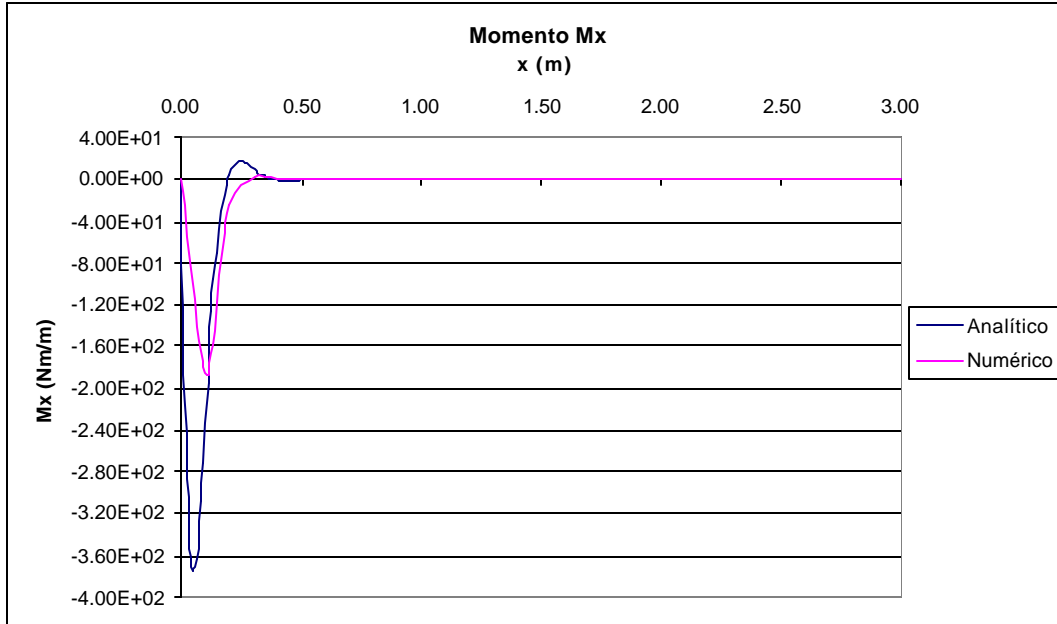


Figura 4.4 – Momentos  $M(x)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.2

Como se observa, os resultados analíticos e numéricos apresentam diferenças consideráveis (em especial para os momentos) na região onde se localizam os efeitos da perturbação de bordo, sendo praticamente coincidentes fora dessa região (onde a casca passa a apresentar comportamento de membrana). Em função disso, definiu-se um segundo tipo de discretização, mais denso junto ao apoio e mais espaçado onde o efeito de flexão torna-se desprezível.

- Discretização 2:

Conforme representado na figura 4.5, o segundo tipo de discretização apresenta uma região mais refinada próxima ao apoio, onde se manifesta o efeito de flexão, mostrando-se nas tabelas 4.3 e 4.4 os resultados das comparações analítico-numéricas para os valores máximos de  $w$  e  $M_x$ , e nas figuras 4.6 e 4.7 os gráficos relativos às funções  $w(x)$  e  $M_x(x)$  na casca.

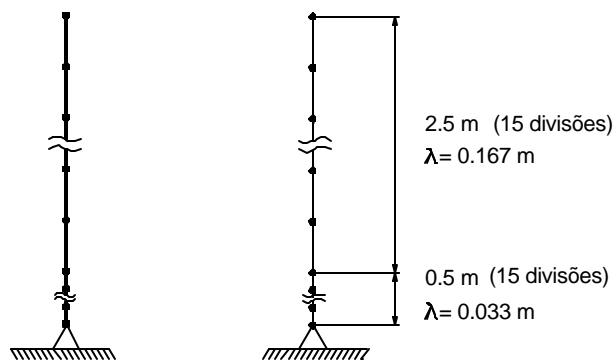


Figura 4.5 – Discretização 2 para a casca cilíndrica apoiada

Tabela 4.3 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização 2, esquematizada na figura 4.5

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.17	$-2.470 \times 10^{-4}$	-1.12%
Analítico [17]	0.15	$-2.498 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.4 – Momento  $M_x$  máximo para a discretização 2, esquematizada na figura 4.5

	Abcissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual ( $M_x$ máximo)
Numérico	0.07	$-3.341 \times 10^2$	-10.79%
Analítico [17]	0.05	$-3.745 \times 10^2$	-

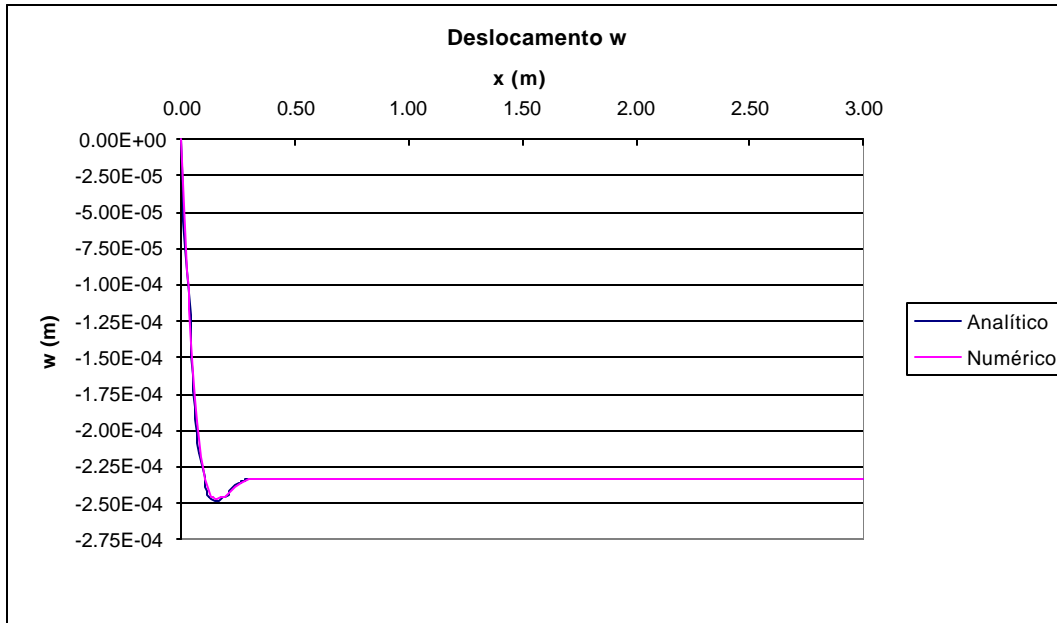


Figura 4.6 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.5

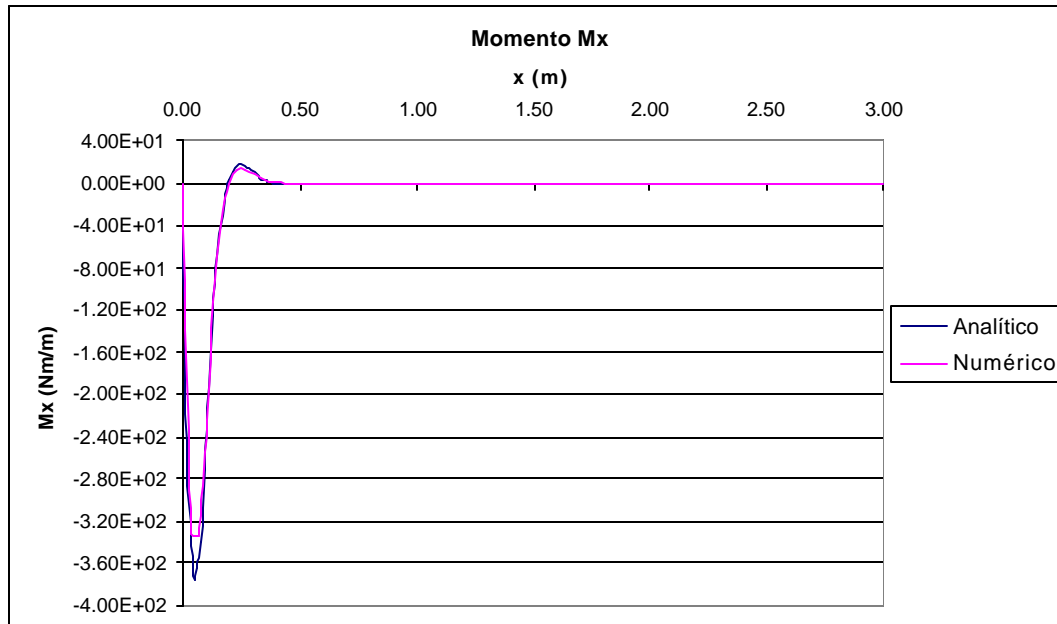


Figura 4.7 – Momentos  $M_x(x)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.5

Analisando esses últimos gráficos, nota-se uma sensível melhora em relação aos gráficos das figuras 4.3 e 4.4. O deslocamento  $w$  numérico já se confunde praticamente

com o analítico, enquanto para o momento  $M_k$  as divergências nos resultados se acentuam apenas nas proximidades do máximo negativo. Baseando-se nessa última constatação, cria-se então um terceiro tipo de discretização.

- Discretização 3:

No terceiro tipo de discretização consideram-se três regiões distintas na casca, como ilustrado na figura 4.8. A região junto ao apoio é mais refinada, seguindo-se uma região intermediária um pouco menos refinada e, por fim, utilizando-se uma discretização mais pobre na região de comportamento membranal.

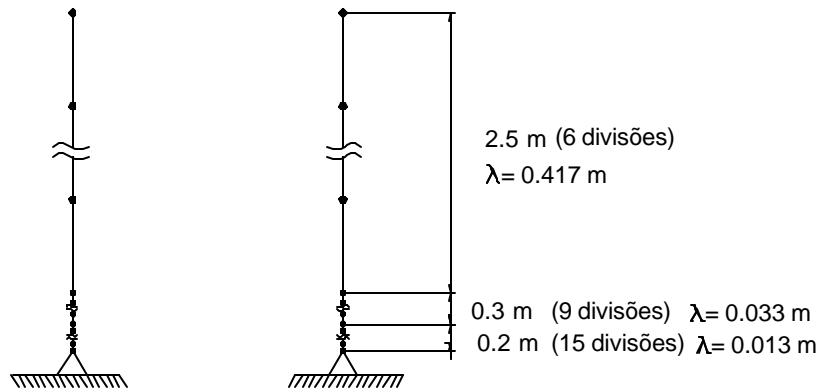


Figura 4.8 – Discretização 3 para a casca cilíndrica apoiada

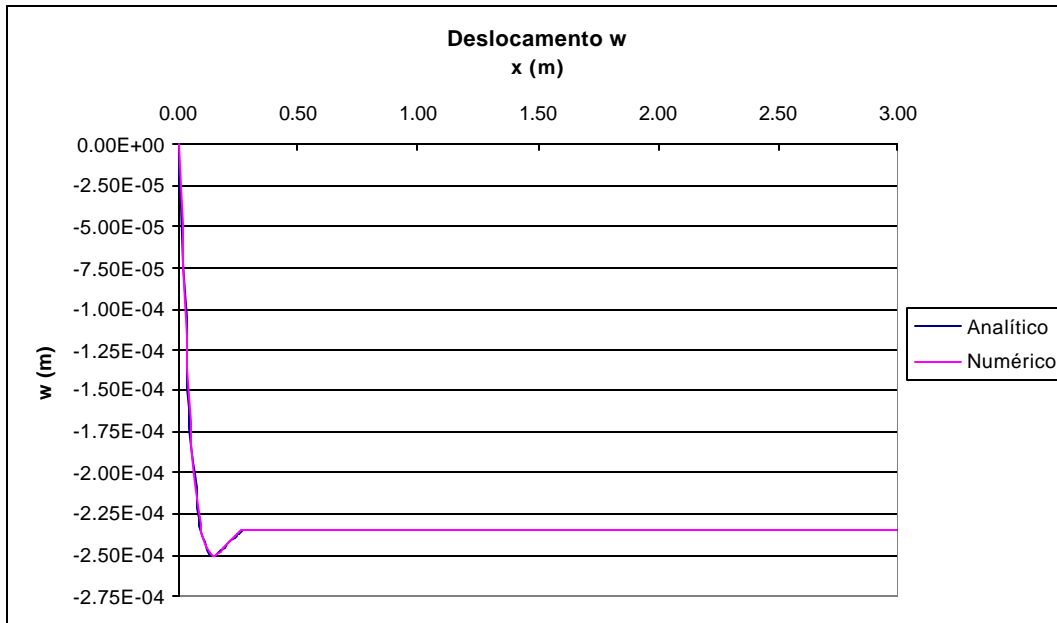
Nas tabelas 4.5 e 4.6 encontram-se as comparações entre os valores máximos numéricos e analíticos de  $w$  e de  $M_k$ , com o comportamento do deslocamento  $w$  e do momento  $M_k$  ao longo da casca sendo representado pelos gráficos das figuras 4.9 e 4.10.

Tabela 4.5 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização 3, esquematizada na figura 4.8

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.15	$-2.494 \times 10^{-4}$	-0.16%
Analítico [17]	0.15	$-2.498 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.6 – Momento  $M_k$  máximo para a discretização 3, esquematizada na figura 4.8

	Abcissa x (m)	$M_k$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual ( $M_k$ máximo)
Numérico	0.05	$-3.703 \times 10^2$	-1.12%
Analítico [17]	0.05	$-3.745 \times 10^2$	-

Figura 4.9 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico para a discretização 3, esquematizada na figura 4.8

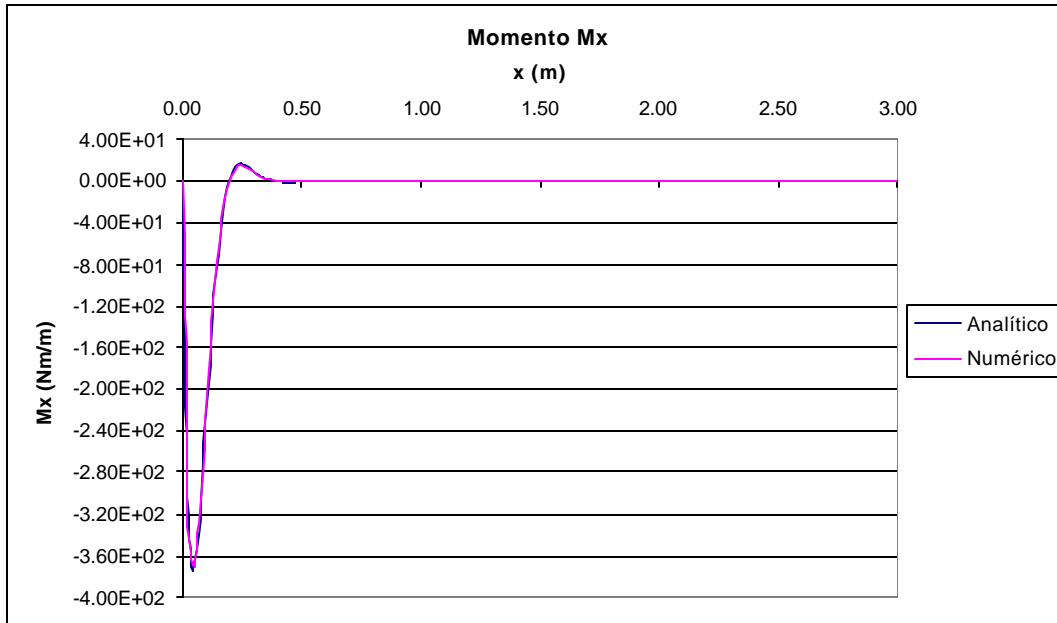


Figura 4.10 – Momentos  $M(x)$  numérico e analítico para a discretização 3, esquematizada na figura 4.8

Para esse terceiro tipo de discretização nota-se que os valores, tanto para o deslocamento  $w$  quanto para o momento  $M$ , podem ser considerados satisfatórios (admitindo-se como aceitável uma margem de erro de 1 a 2%, indistintamente para os deslocamentos e para os momentos), podendo-se então admitir essa forma de distribuição dos nós, juntamente com o número total de 30 divisões, como adequado ao problema em estudo.

Para visualizar como se processa a convergência dos resultados, apresenta-se em seguida nas tabelas 4.7 e 4.8, considerando-se esse último tipo de discretização, uma comparação dos valores máximos das grandezas analisadas ao se variar o número total de divisões na casca. São estabelecidos os mesmos comprimentos de trechos indicados na figura 4.8, mantendo-se os espaçamentos nodais  $\lambda$  sempre proporcionais aos especificados na referida figura.

Tabela 4.7 – Deslocamento  $w$  máximo para o terceiro tipo de discretização, com a variação do número total de divisões na casca apoiada

	Divisões	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	10	0.16	$-2.458 \times 10^{-4}$	-1.60%
	20	0.14	$-2.486 \times 10^{-4}$	-0.48%
	30	0.15	$-2.494 \times 10^{-4}$	-0.16%
	40	0.15	$-2.495 \times 10^{-4}$	-0.12%
	50	0.14	$-2.496 \times 10^{-4}$	-0.08%
Analítico [17]	-	0.15	$-2.498 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.8 – Momento  $M_x$  máximo para o terceiro tipo de discretização, com a variação do número total de divisões na casca apoiada

	Divisões	Abscissa $x$ (m)	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual ( $M_x$ máximo)
Numérico	10	0.04	$-3.453 \times 10^2$	-7.80%
	20	0.04	$-3.610 \times 10^2$	-3.60%
	30	0.05	$-3.703 \times 10^2$	-1.12%
	40	0.05	$-3.731 \times 10^2$	-0.37%
	50	0.05	$-3.737 \times 10^2$	-0.21%
Analítico [17]	-	0.05	$-3.745 \times 10^2$	-

É interessante observar que, ao se utilizar esse terceiro tipo de discretização, os resultados para 20 divisões já se mostram mais precisos que os relativos às discretizações ilustradas nas figuras 4.2 e 4.5, com 30 divisões (tabelas 4.1 a 4.4).

#### 4.2.2 – Casca engastada

Para a casca engastada, vista na figura 4.11, serão utilizados os mesmos três tipos de discretização da casca apoiada, fixando-se entretanto neste caso, em princípio mais desfavorável para fins de modelagem numérica (pela rotação nula em  $x = 0$ ), um total de 40 divisões na casca.

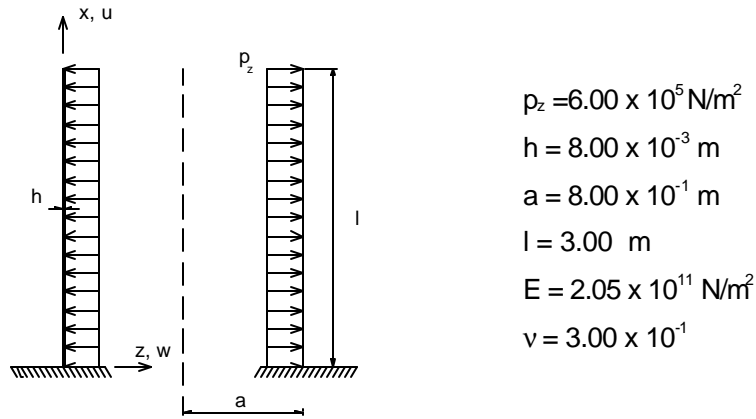


Figura 4.11 – Casca cilíndrica engastada utilizada no problema 4.2.2

- Discretização 1:

Encontra-se ilustrado na figura 4.12 o primeiro tipo de discretização (uniforme) para a casca cilíndrica engastada.

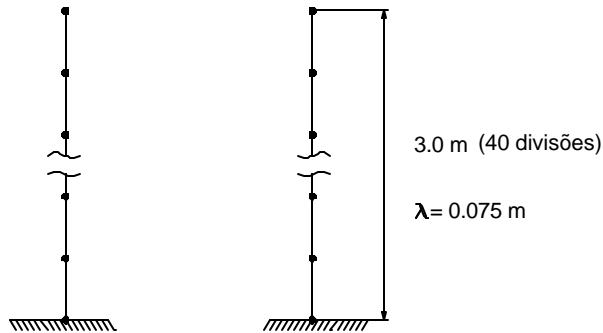


Figura 4.12 – Discretização 1 para a casca cilíndrica engastada

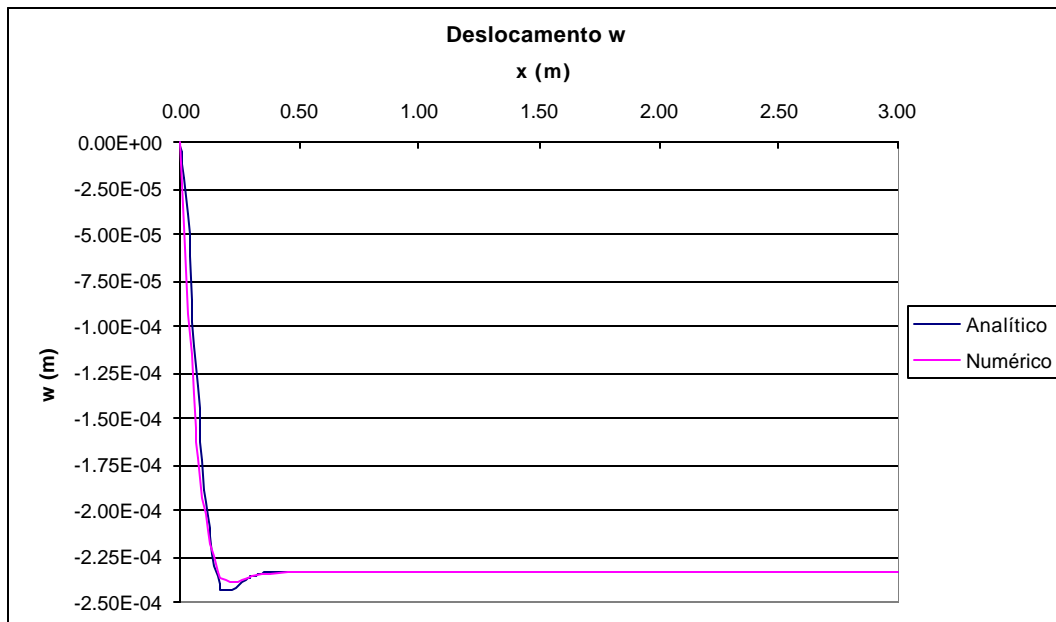
Observam-se nas tabelas 4.9 e 4.10 as comparações entre os valores máximos analítico e numérico do deslocamento  $w$  e do momento  $M_x$  (com o máximo de  $M_x$  ocorrendo no engaste), e nas figuras 4.13 e 4.14 os gráficos de  $w$  e  $M_x$  ao longo da casca.

Tabela 4.9 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização 1, esquematizada na figura 4.12

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.22	$-2.385 \times 10^{-4}$	-2.33%
Analítico [17]	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.10 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para a discretização 1, esquematizada na figura 4.12

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$5.860 \times 10^2$	-49.57
Analítico [17]	$1.162 \times 10^3$	-

Figura 4.13 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.12

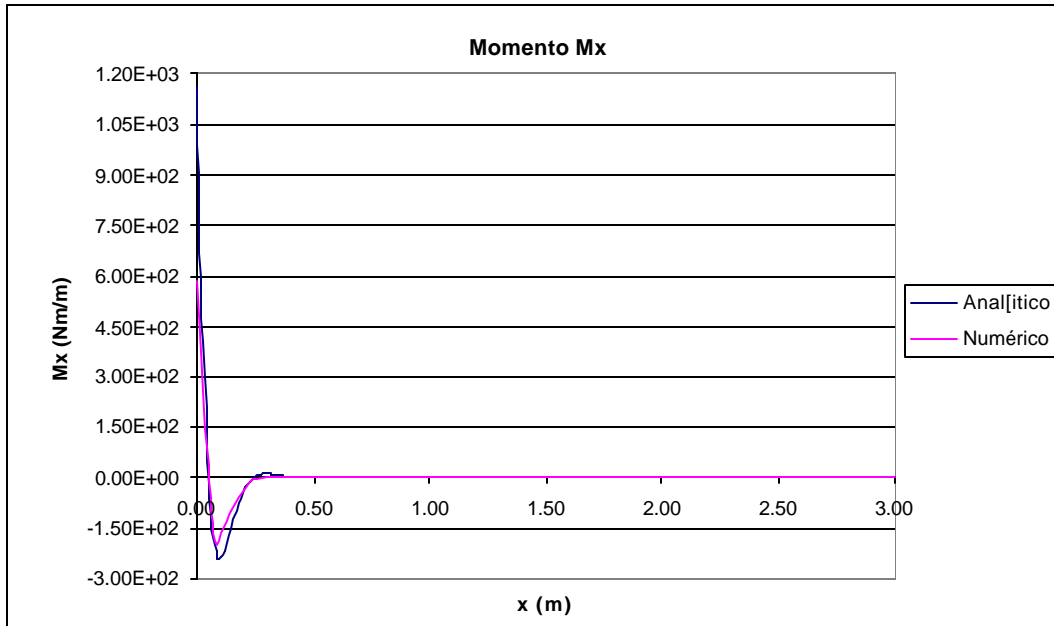


Figura 4.14 – Momentos  $M(x)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.12

Pela tabela 4.10 e figura 4.14, nota-se que há uma discrepância bastante acentuada, da ordem de 50%, entre os valores numérico e analítico do momento  $M_x$  máximo, observando-se pela figura 4.14 que divergências desse porte ficam restritas apenas à região bem próxima ao engaste. Quanto ao deslocamento  $w$ , as curvas da figura 4.13 já apresentam uma boa concordância ao longo de toda a casca.

- Discretização 2:

De maneira análoga ao caso da casca apoiada, utiliza-se um segundo tipo de discretização, mais refinado próximo à região do engaste, conforme indicado na figura 4.15.

Nas tabelas 4.11 e 4.12, têm-se as comparações entre os valores máximos analítico e numérico de  $w$  e de  $M_x$  apresentando-se em seguida, nas figuras 4.16 e 4.17, os gráficos relativos às funções  $w(x)$  e  $M_x(x)$  na casca.

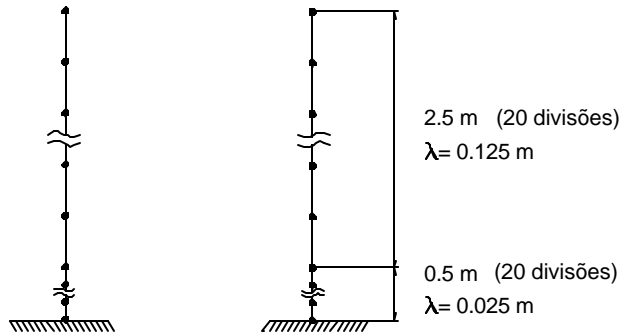


Figura 4.15 – Discretização 2 para a casca cilíndrica engastada

Tabela 4.11 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização 2, esquematizada na figura 4.15

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.20	$-2.433 \times 10^{-4}$	-0.37%
Analítico [17]	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.12 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para a discretização 2, esquematizada na figura 4.15

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$1.072 \times 10^3$	-7.74%
Analítico [17]	$1.162 \times 10^3$	-

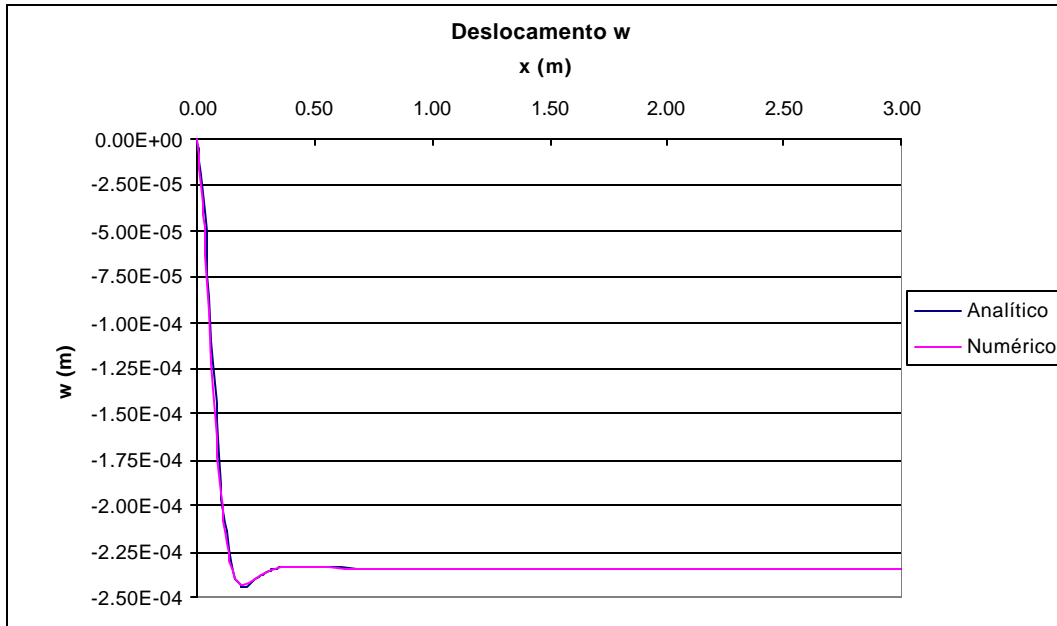


Figura 4.16 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.15

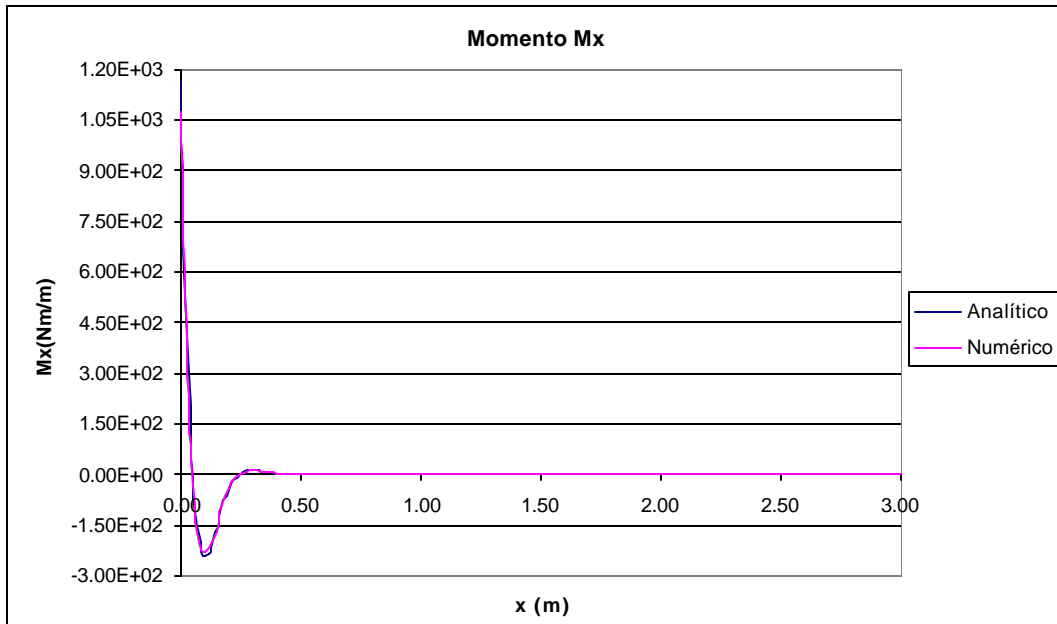


Figura 4.17 – Momentos  $M(x)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.15

Como se observa, este segundo tipo de discretização já conduz a uma melhora significativa nos resultados, sendo entretanto o resultado para o momento máximo, uma vez observada a margem de erro de 1 a 2% fixada no item 4.2.1, ainda insatisfatório.

- Discretização 3:

O terceiro tipo de discretização, ilustrado na figura 4.18, fornece os resultados apresentados nas tabelas 4.13 e 4.14 e nas figuras 4.19 e 4.20.

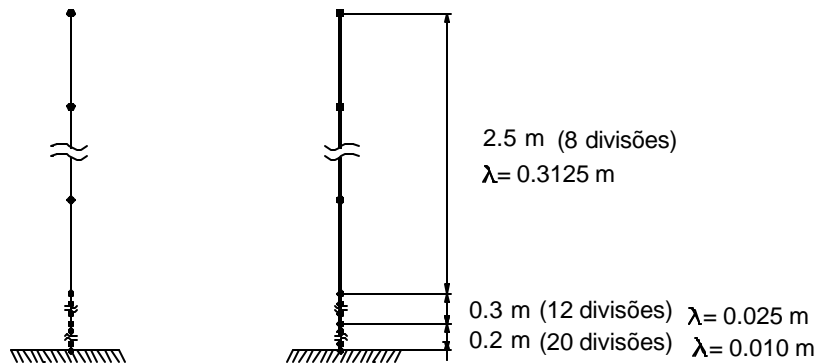


Figura 4.18 – Discretização 3 para a casca cilíndrica engastada

Tabela 4.13 – Deslocamento  $w$  máximo para a discretização 3, esquematizada na figura 4.18

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	0.00%
Analítico [17]	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.14 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para a discretização 3, esquematizada na figura 4.18

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$1.147 \times 10^3$	-1.29%
Analítico [17]	$1.162 \times 10^3$	-

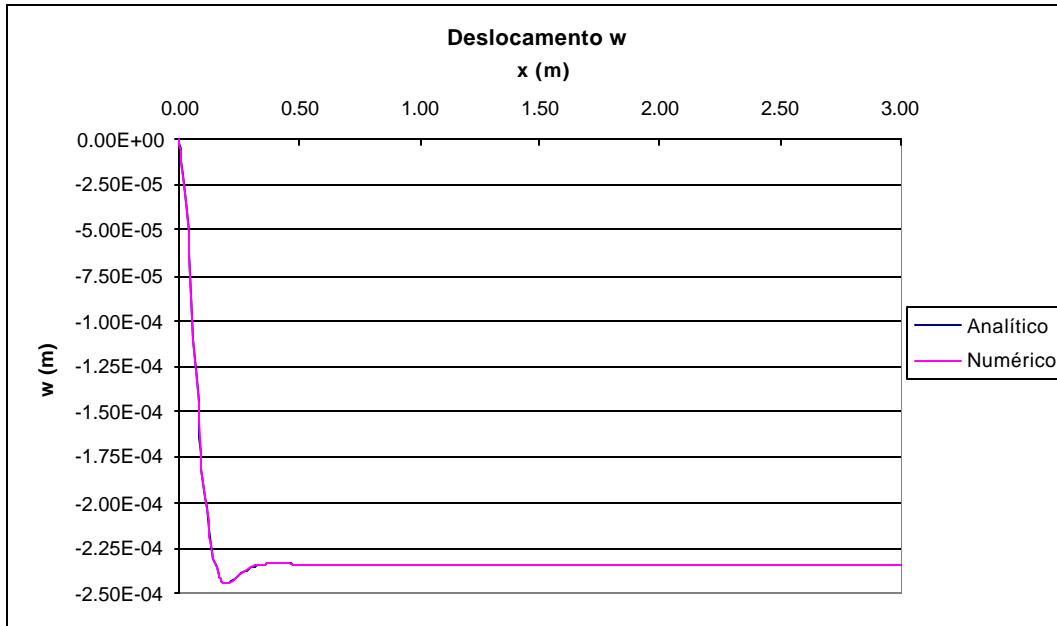


Figura 4.19 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico para a discretização 3, esquematizada na figura 4.18

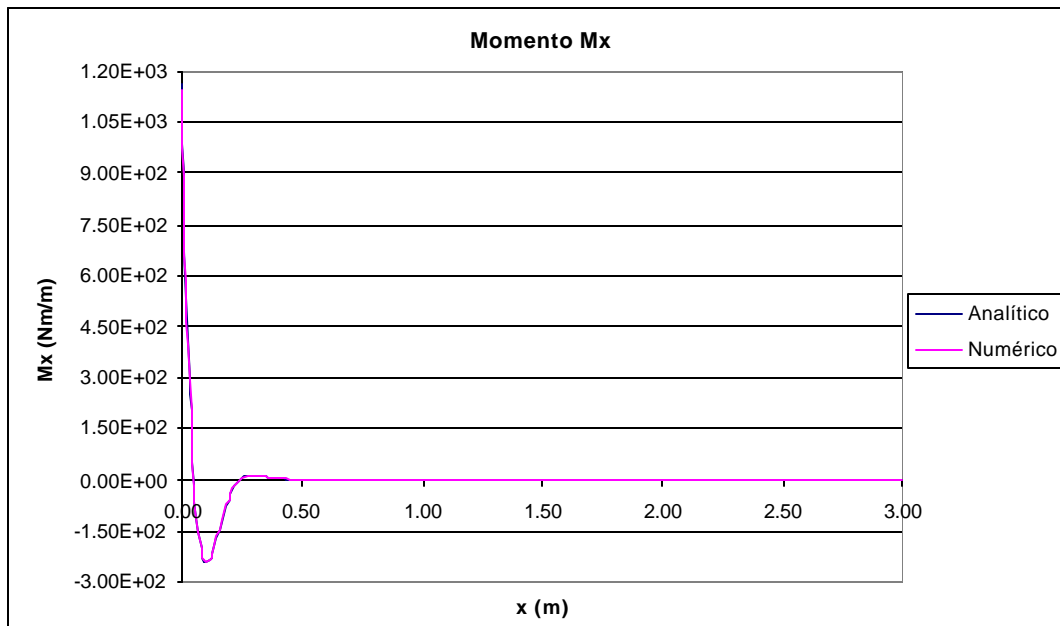


Figura 4.20 – Momentos  $M(x)$  numérico e analítico para a discretização 3, esquematizada na figura 4.18

Nota-se que os resultados, neste caso, já se situaram dentro da margem de erro pré-estabelecida, podendo-se portanto considerar esse terceiro tipo de discretização, associado ao número total de 40 divisões, como adequado ao problema em estudo.

Para uma análise de convergência, encontram-se em seguida, nas tabelas 4.15 e 4.16, uma vez fixado esse último tipo de discretização, os valores máximos de  $w$  e de  $M_x$  obtidos para diferentes números totais de divisões na casca. Segue-se aqui o mesmo procedimento utilizado na construção das tabelas 4.7 e 4.8, ou seja, são estabelecidos os mesmos comprimentos de trechos indicados na figura 4.18, mantendo-se os espaçamentos nodais  $\lambda$  sempre proporcionais aos especificados na referida figura.

Tabela 4.15 – Deslocamento  $w$  máximo para o terceiro tipo de discretização, com variação do número total de divisões na casca engastada

	Divisões	Abscissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	20	0.20	$-2.440 \times 10^{-4}$	-0.08%
	30	0.20	$-2.441 \times 10^{-4}$	-0.04%
	40	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	0.00%
	50	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	0.00%
	60	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	0.00%
Analítico [17]	-	0.20	$-2.442 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.16 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) para o terceiro tipo de discretização, com variação do número total de divisões na casca engastada

	Divisões	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	20	$1.100 \times 10^3$	-5.33%
	30	$1.135 \times 10^3$	-2.32%
	40	$1.147 \times 10^3$	-1.29%
	50	$1.152 \times 10^3$	-0.86%
	60	$1.155 \times 10^3$	-0.60%
Analítico [17]	-	$1.162 \times 10^3$	-

As tabelas 4.11 a 4.14 (correspondentes às discretizações 1 e 2, envolvendo um total de 40 divisões na casca), quando comparadas com essas duas últimas, a exemplo do ocorrido com a casca apoiada, novamente evidenciam que as diferenças percentuais entre

os valores analíticos e numéricos se mostram menores para uma discretização mais pobre (20 divisões), porém com um tipo de distribuição de nós mais adequado ao problema.

Nota-se ainda, pelos dois problemas analisados, particularmente com vistas à obtenção de resultados satisfatórios para os momentos, a conveniência de se definir o elemento de transição na casca, permitindo utilizar discretizações mais refinadas apenas nas regiões afetadas pelo efeito de flexão, mantendo-se discretizações mais pobres nas regiões correspondentes ao regime de membrana.

Constata-se, por fim, que o tipo de apoio influi significativamente na fixação do número total de divisões na casca, com o caso da casca apoiada, a semelhança do que usualmente ocorre em flexão de vigas, mostrando-se mais favorável do que a casca engastada para fins de modelagem numérica.

#### 4.3 –Placa Circular Submetida a Carregamento Uniforme

Analisam-se também neste exemplo dois problemas, a saber, placa com carregamento uniforme, inicialmente apoiada e depois engastada no bordo, testando-se, analogamente aos problemas 4.2.1 e 4.2.2 da casca cilíndrica, distintos tipos de discretização a fim de orientar a escolha do tipo mais conveniente em cada caso. Por outro lado, ao se implementar os diferentes tipos de discretização para a placa, deve-se ter em mente que o seu comportamento estrutural é completamente diverso do da casca, não se caracterizando regiões específicas onde se concentram os efeitos de flexão, os quais se estendem neste caso a todo o domínio da estrutura.

##### 4.3.1 – Placa apoiada

A placa a ser analisada encontra-se esquematizada na figura 4.21.

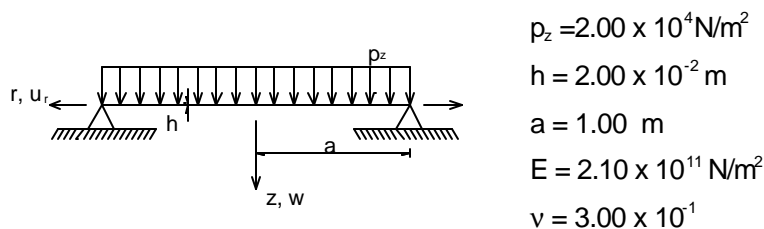


Figura 4.21 – Placa circular apoiada utilizada no problema 4.3.1

Fixando-se uma malha com um total de 20 divisões, examinam-se os seguintes dois tipos de discretização:

- Discretização 1:

O primeiro tipo de discretização, ilustrado na figura 4.22, caracteriza-se pelo uso de uma malha uniforme.

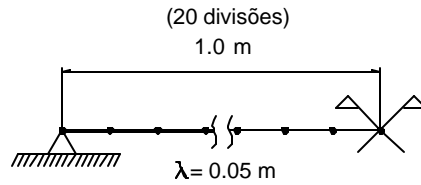


Figura 4.22 – Discretização 1 para a placa circular apoiada

As comparações de resultados dos modelos numérico e analítico para os máximos de  $w$  e  $M_r$  (ambos ocorrendo no centro da placa) encontram-se nas tabelas 4.17 e 4.18, enquanto nas figuras 4.23 e 4.24 acham-se traçados os gráficos referentes às variações de  $w$  e  $M_r$  ao longo da placa.

Tabela 4.17 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 1, esquematizada na figura 4.22

	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$8.291 \times 10^{-3}$	0.12%
Analítico [17]	$8.281 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.18 – Momento  $M_r$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 1, esquematizada na figura 4.22

	$M_r$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$4.172 \times 10^3$	1.14%
Analítico [17]	$4.125 \times 10^3$	-

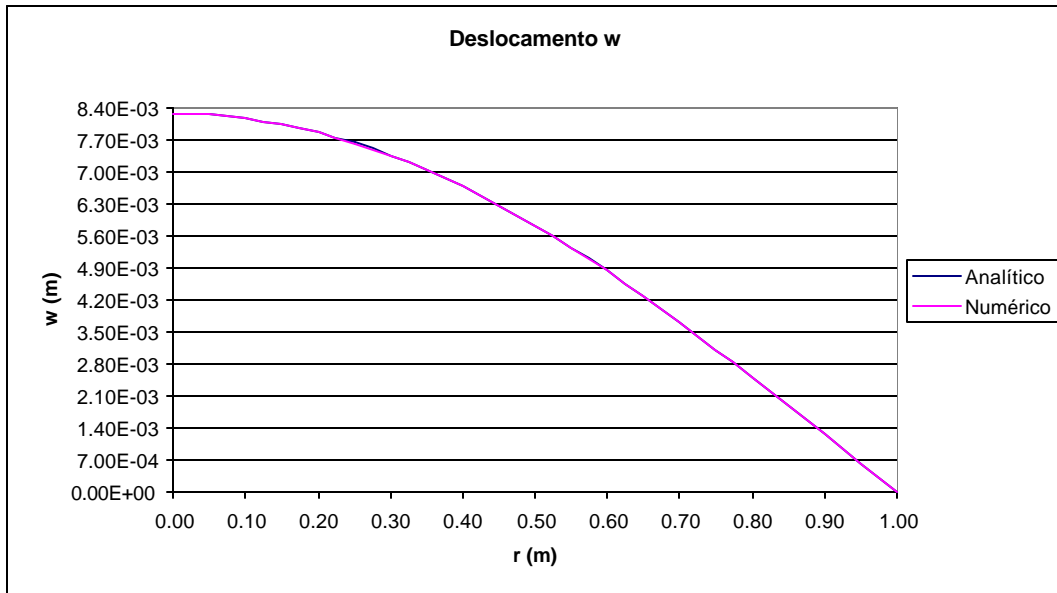


Figura 4.23 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.22

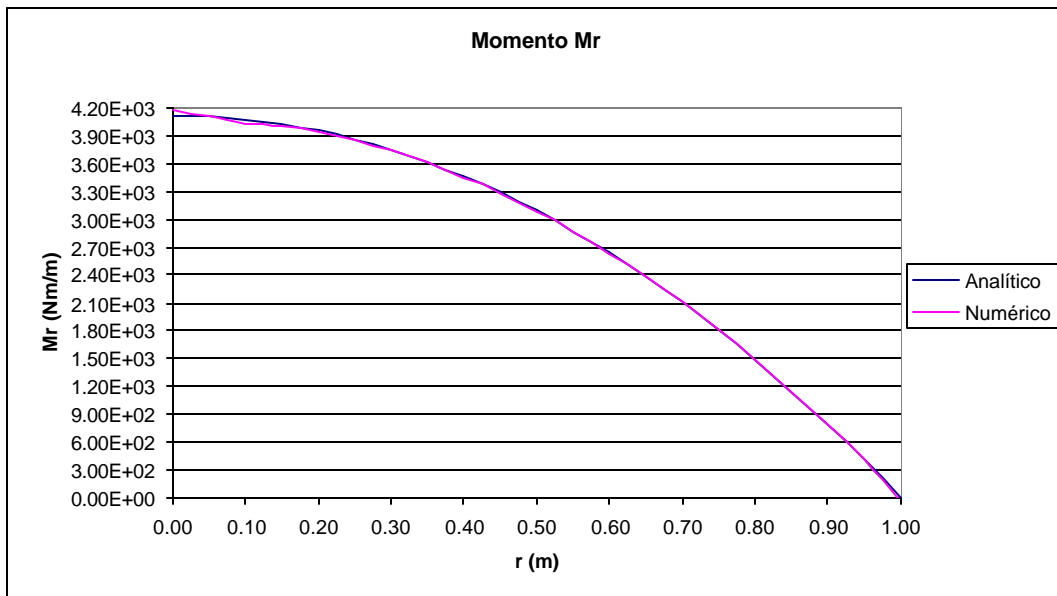


Figura 4.24 – Momentos  $M(r)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.22

Pelas tabelas 4.17 e 4.18, bem como pelas figuras 4.23 e 4.24, pode-se notar que este modelo numérico, com malha uniforme, já se mostrou adequado, uma vez que

ocasionou um erro máximo da ordem de 1% (admitindo-se a mesma margem de erro anterior de 1 a 2%).

- Discretização 2:

Embora, dentro da margem de erro estabelecida, a discretização 1 já tenha se mostrado eficiente, com o objetivo de analisar o comportamento do elemento de transição na placa, criou-se um segundo tipo de discretização, conforme ilustrado na figura 4.25. Sendo a origem  $r = 0$  (ou seja, o centro da placa) um ponto de tangente horizontal na deformada, idealizou-se então uma discretização que fosse mais refinada nas suas proximidades.

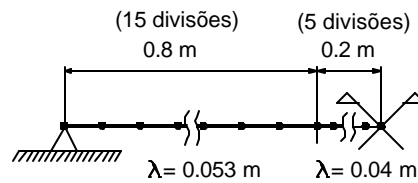


Figura 4.25 – Discretização 2 para a placa circular apoiada

Nas tabelas 4.19 e 4.20 e nas figuras 4.26 e 4.27, apresentam-se os resultados numéricos e analíticos para o deslocamento  $w$  e o momento  $M$ .

Tabela 4.19 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 2, esquematizada na figura 4.25

	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$8.291 \times 10^{-3}$	0.12%
Analítico [17]	$8.281 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.20 – Momento  $M$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 2, esquematizada na figura 4.25

	$M$ , máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$4.144 \times 10^{-3}$	0.46%
Analítico [17]	$4.125 \times 10^{-3}$	-

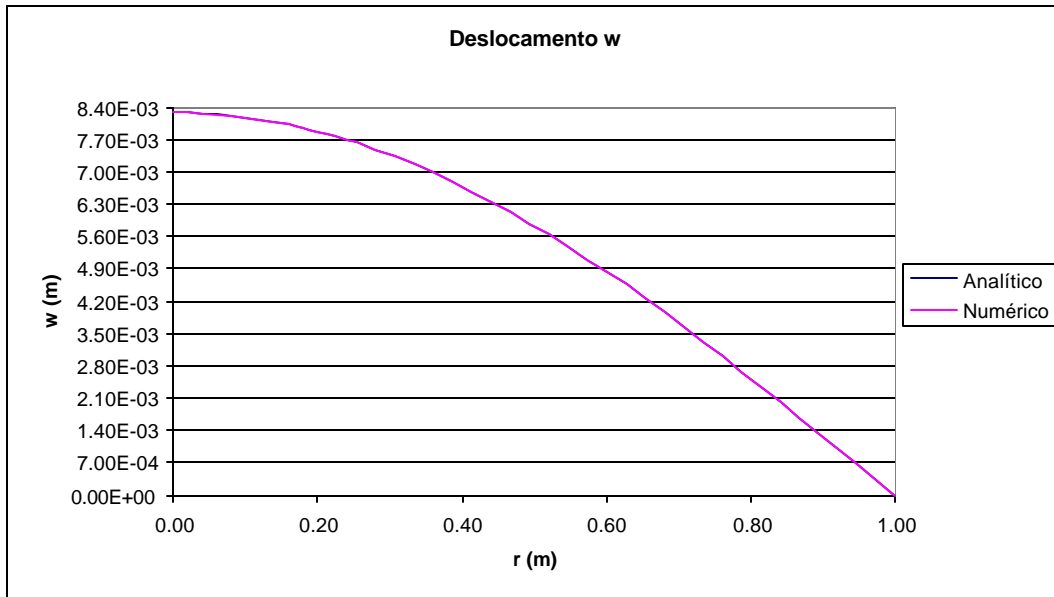


Figura 4.26 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.25

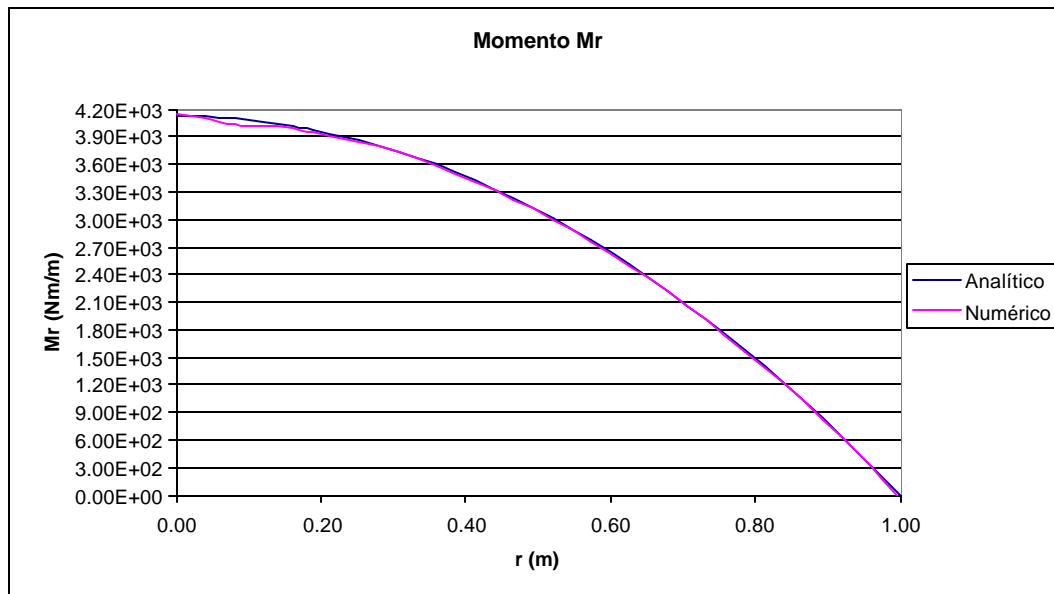


Figura 4.27 – Momentos  $M(r)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.25

O deslocamento transversal  $w$  praticamente não sofre alterações, notando-se entretanto, com o uso dessa discretização, uma melhor aproximação (traduzida por uma queda superior a 50% na diferença percentual) no valor máximo de  $M$ , ainda que em

termos globais, como revelam as figuras 4.24 e 4.27, curiosamente os resultados para  $M$  tenham demonstrado uma ligeira piora ao longo da região mais refinada.

Como já destacado, tendo-se atingido diferenças percentuais de 1 a 2% com a malha uniforme de 20 divisões, pode-se admitir tal discretização como atendendo plenamente ao caso em estudo.

Para que se possa acompanhar a convergência dos resultados, comparam-se em seguida os valores analíticos e numéricos de  $w$  e  $M_r$  máximos correspondentes a discretizações uniformes com diferentes números de divisões na placa, conforme mostrado nas tabelas 4.21 e 4.22.

Tabela 4.21 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a malha uniforme, com variação do número de divisões na placa apoiada

	Divisões	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	10	$8.309 \times 10^{-3}$	0.34%
	20	$8.291 \times 10^{-3}$	0.12%
	30	$8.286 \times 10^{-3}$	0.06%
	40	$8.284 \times 10^{-3}$	0.04%
Analítico [17]	-	$8.281 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.22 – Momento  $M_r$  máximo ( $r=0$ ) para a malha uniforme, com variação do número de divisões na placa apoiada

	Divisões	$M_r$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	10	$4.214 \times 10^3$	2.16%
	20	$4.172 \times 10^3$	1.14%
	30	$4.166 \times 10^3$	0.99%
	40	$4.164 \times 10^3$	0.94%
Analítico [17]	-	$4.125 \times 10^3$	-

## 4.3.2 – Placa engastada

Para a placa engastada, ilustrada na figura 4.28, utiliza-se um tipo a mais de discretização em relação à placa apoiada, pela presença de tangente horizontal na deformada em  $r = a$ . Para tal estudo, fixou-se um total de 20 divisões na placa.

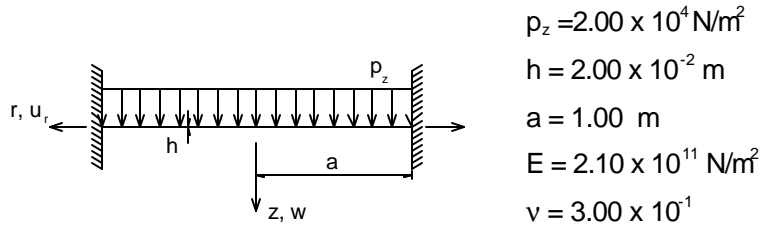


Figura 4.28 – Placa circular utilizada no problema 4.3.2

- Discretização 1:

O primeiro tipo de discretização, com malha uniforme (figura 4.29), é idêntico ao da placa apoiada.

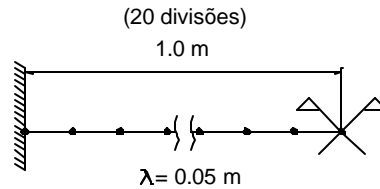


Figura 4.29 – Discretização 1 para a placa circular engastada

Encontram-se nas tabelas 4.23 e 4.24, e nas figuras 4.30 e 4.31, as comparações analítico-numéricas para os deslocamentos  $w$  (atingindo seu máximo no centro da placa) e os momentos  $M$  (com os valores máximo positivo e negativo ocorrendo no centro e no bordo da placa, respectivamente). No caso da tabela 4.24, apresentam-se os resultados relativos a esses máximos positivo e negativo de  $M$ .

Tabela 4.23 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 1, esquematizada na figura 4.29

	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$2.043 \times 10^{-3}$	0.59%
Analítico [17]	$2.031 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.24 – Momentos  $M_r$  máximos positivo ( $r=0$ ) e negativo ( $r=1.00$  m) para a discretização 1, esquematizada na figura 4.29

	$M_r$ máximo (+) (Nm/m)	$M_r$ máximo (-) (Nm/m)	Diferença Percentual	
			$M_r$ máximo (+)	$M_r$ máximo (-)
Numérico	$1.654 \times 10^3$	$-2.508 \times 10^3$	1.78%	0.32%
Analítico [17]	$1.625 \times 10^3$	$-2.500 \times 10^3$	-	-

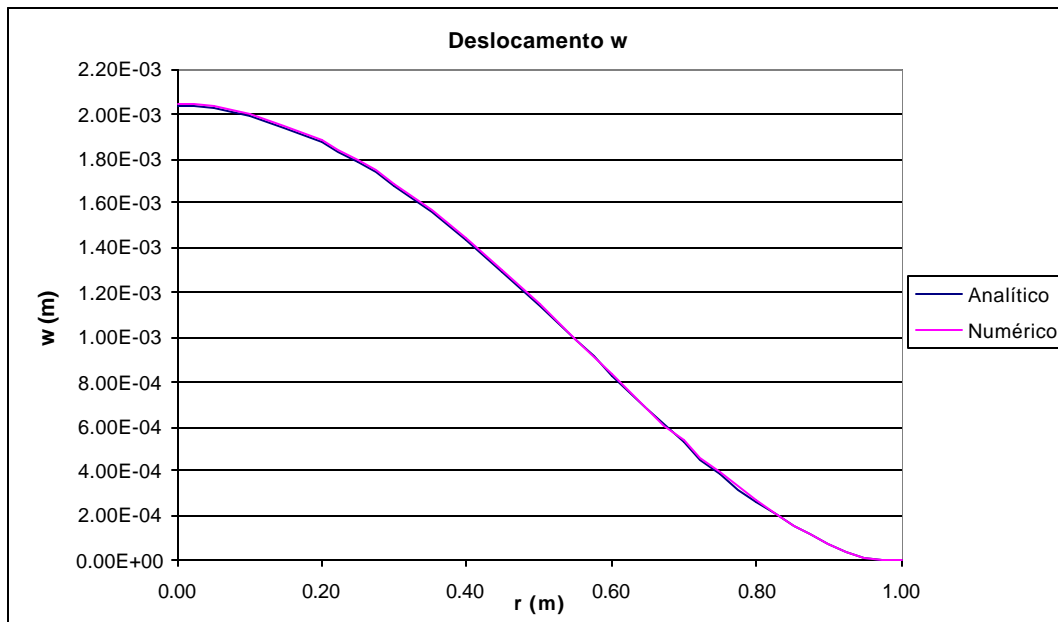


Figura 4.30 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.29

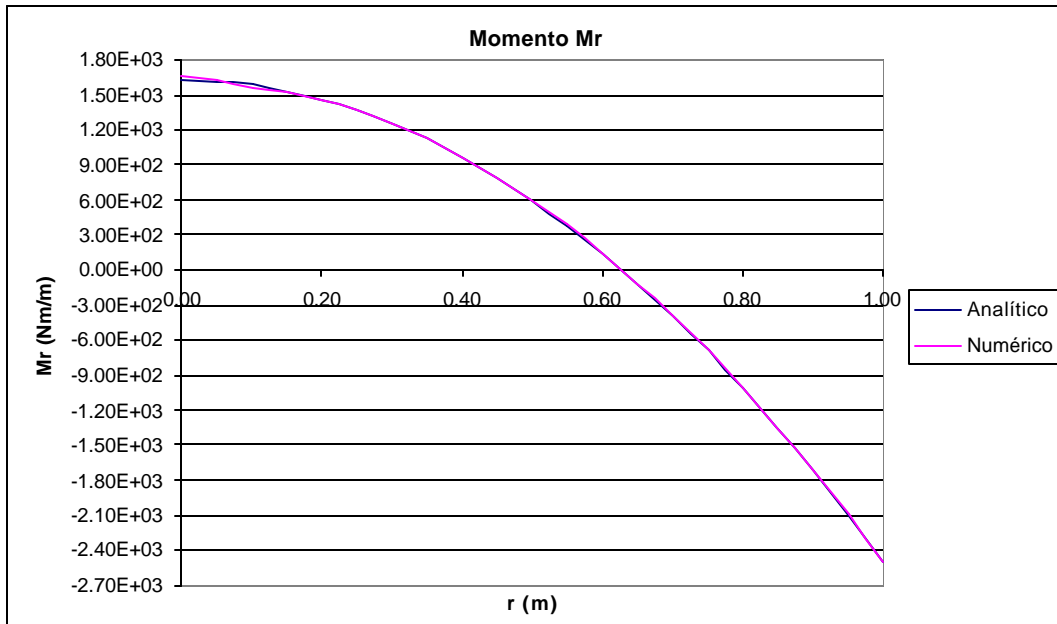


Figura 4.31 – Momentos  $M(r)$  numérico e analítico para a discretização 1, esquematizada na figura 4.29

Como se observa, os resultados obtidos já se acham dentro dos limites considerados satisfatórios.

- Discretização 2:

Conforme ilustrado na figura 4.32, analogamente ao caso da placa apoiada, introduz-se em seguida um maior refinamento na região próxima ao centro da placa.

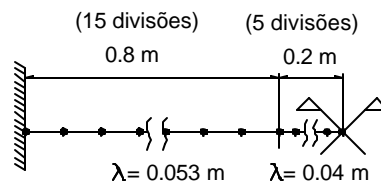


Figura 4.32 – Discretização 2 para a placa circular engastada

A comparação dos resultados analíticos e numéricos se encontra nas tabelas 4.25 e 4.26, bem como nas figuras 4.33 e 4.34.

Tabela 4.25 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 2, esquematizada na figura 4.32

	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$2.043 \times 10^{-3}$ m	0.59%
Análítico [17]	$2.031 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.26 – Momentos  $M_r$  máximos positivo ( $r=0$ ) e negativo ( $r=1.00$ m) para a discretização 2, esquematizada na figura 4.32

	$M_r$ máximo (+) (Nm/m)	$M_r$ máximo (-) (Nm/m)	Diferença Percentual	
			$M_r$ máximo (+)	$M_r$ máximo (-)
Numérico	$1.639 \times 10^3$	$-2.508 \times 10^3$	0.86%	0.32%
Análítico [17]	$1.625 \times 10^3$	$-2.500 \times 10^3$	-	-

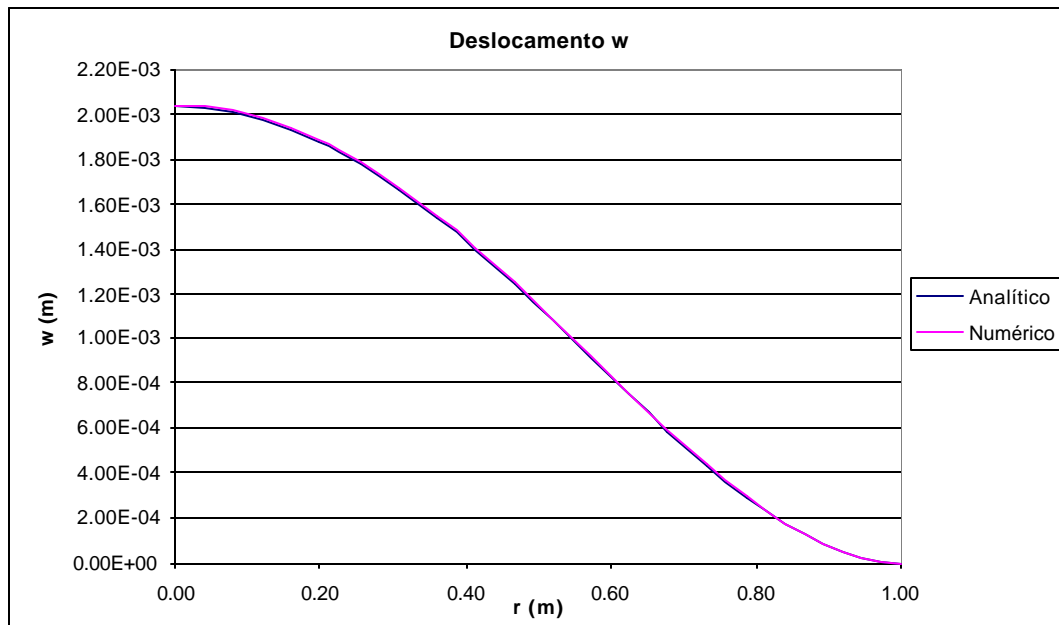


Figura 4.33 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.32

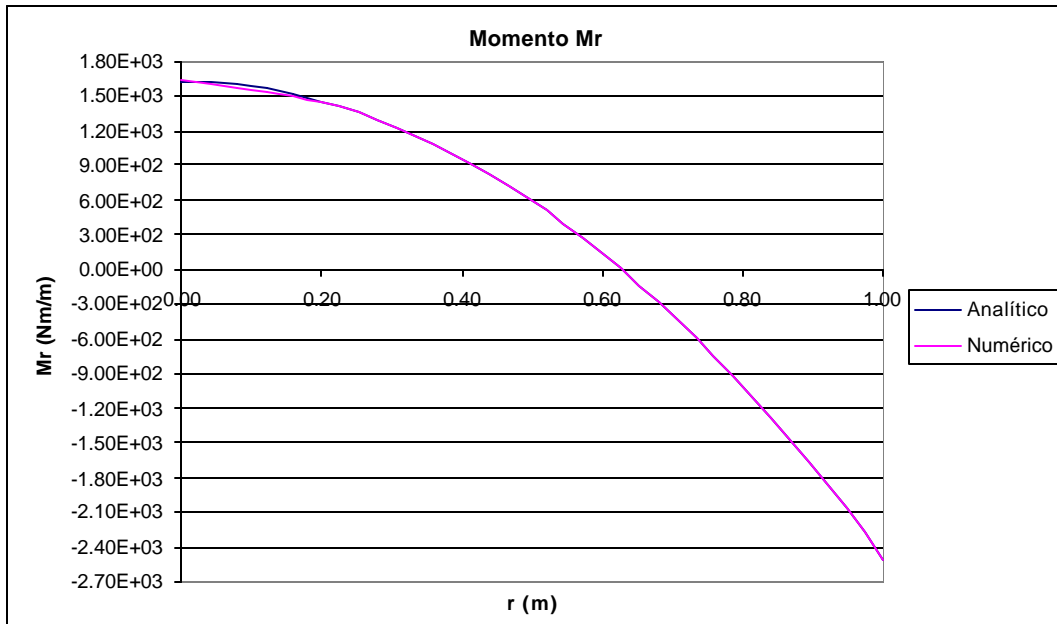


Figura 4.34 – Momentos  $M(r)$  numérico e analítico para a discretização 2, esquematizada na figura 4.32

Em comparação à discretização 1, nota-se que não houve alterações tanto para o deslocamento  $w$  máximo como para o momento  $M$  no bordo. Entretanto, em relação ao momento no centro, a presente discretização fez a diferença percentual cair aproximadamente à meta de.

- Discretização 3:

Estabeleceu-se em seguida uma terceira discretização na placa, conforme ilustrado na figura 4.35, prevendo-se um maior refinamento também na região próxima ao engaste (mantendo-se a discretização anterior junto ao centro da placa e empobrecendo-se a região intermediária).

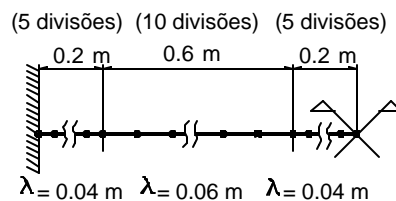


Figura 4.35 – Discretização 3 para a placa circular engastada

Nas tabelas 4.27 e 4.28 e nas figuras 4.36 e 4.37, encontram-se as comparações entre os resultados numéricos e analíticos para o deslocamento  $w$  e o momento  $M_r$ .

Tabela 4.27 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a discretização 3, esquematizada na figura 4.35

	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$2.042 \times 10^{-3}$	0.54%
Analítico [17]	$2.031 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.28 – Momentos  $M_r$  máximos positivo ( $r=0$ ) e negativo ( $r=1.00\text{m}$ ) para a discretização 3, esquematizada na figura 4.35

	$M_r$ máximo (+) (Nm/m)	$M_r$ máximo (-) (Nm/m)	Diferença Percentual	
			$M_r$ máximo (+)	$M_r$ máximo (-)
Numérico	$1.633 \times 10^3$	$-2.506 \times 10^3$	0.49%	0.24%
Analítico [17]	$1.625 \times 10^3$	$-2.500 \times 10^3$	-	-

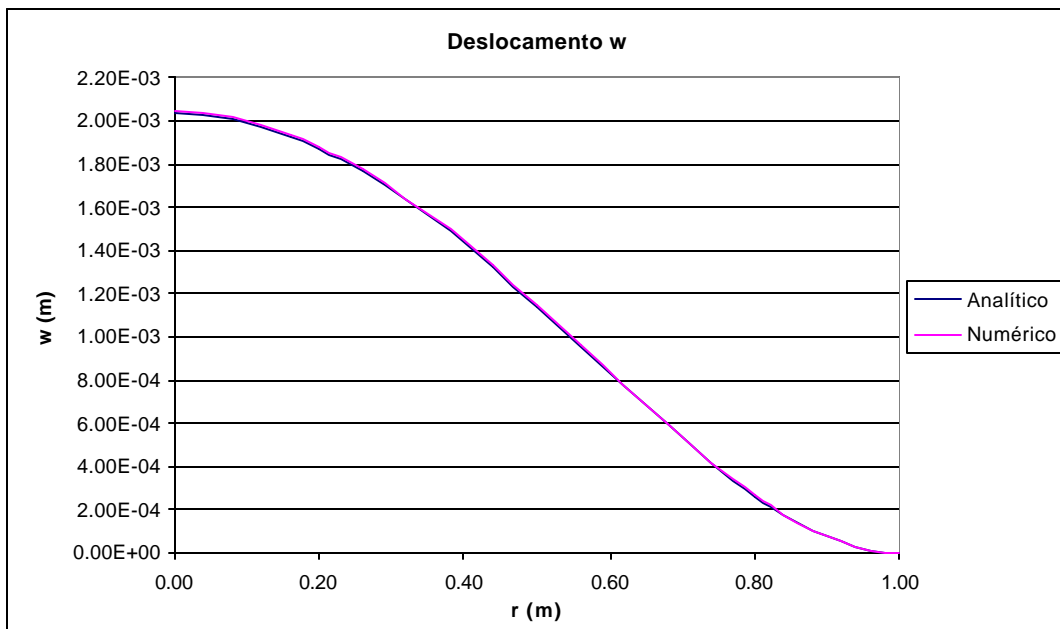


Figura 4.36 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico para a discretização 3, esquematizada na figura 4.35

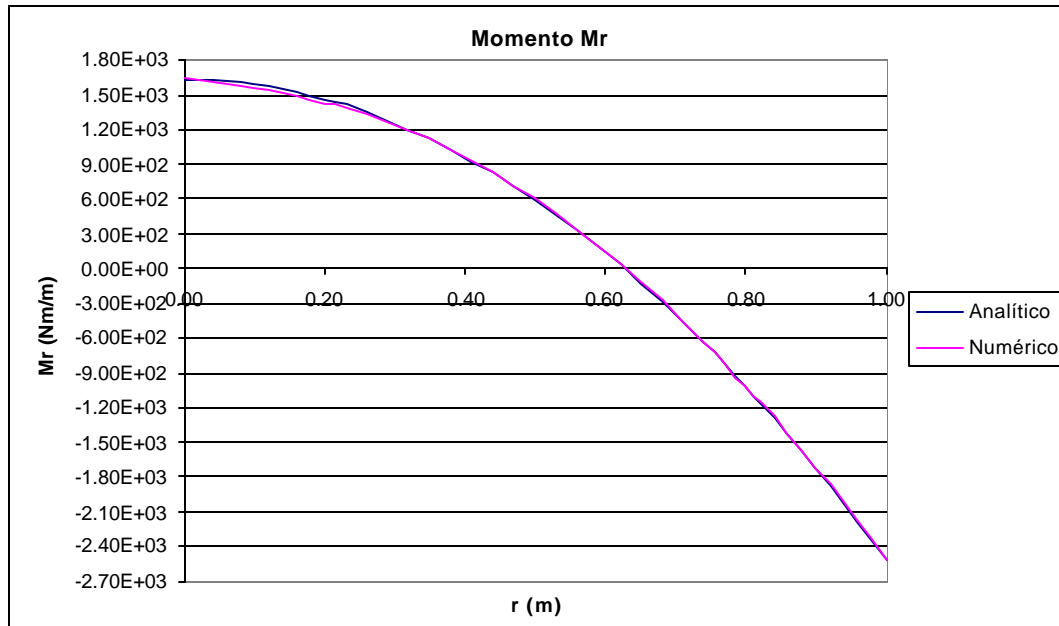


Figura 4.37 – Momentos  $M(r)$  numérico e analítico para a discretização 3, esquematizada na figura 4.35

Em relação às discretizações 1 e 2 houve uma melhora em todos os resultados, com um ganho maior para o momento  $M$  no centro (e não no engaste, em cujas proximidades houve agora um maior refinamento na discretização).

Ainda que as duas últimas discretizações tenham introduzido melhora nos resultados, a discretização com malha uniforme de 20 divisões, tal como no caso da placa apoiada, é suficiente para atender ao problema, pois corresponde a diferenças percentuais dentro da margem de erro tolerada, tendo-se evidenciado que a presença do elemento de transição não conduziu, no caso da placa, a ganhos tão significativos como para a casca.

Cabe ainda observar que, em qualquer dos três tipos de discretização considerados, os resultados para o momento no engaste foram sempre mais precisos que os correspondentes ao momento no centro da placa.

Nas tabelas 4.29 e 4.30, para uma verificação de convergência, encontram-se as comparações analítico-numéricas dos valores máximos de  $w$  e de  $M$ , considerando-se uma malha uniforme com diferentes números de divisões na placa.

Por comparação das tabelas 4.29 e 4.30 com 4.21 e 4.22 evidencia-se que, mesmo com a malha uniforme de 20 divisões atendendo a ambos os casos, a placa apoiada é mais favorável para fins de modelagem numérica do que a engastada, tal como já constatado em relação à casca.

Tabela 4.29 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) para a malha uniforme, com variação do número de divisões na placa engastada

	Divisões	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	10	$2.073 \times 10^{-3}$	2.07%
	20	$2.043 \times 10^{-3}$	0.59%
	30	$2.037 \times 10^{-3}$	0.30%
	40	$2.034 \times 10^{-3}$	0.15%
Analítico [17]	-	$2.031 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.30 – Momentos  $M_t$  máximos positivo ( $r=0$ ) e negativo ( $r=1.00m$ ) para a malha uniforme, com variação do número de divisões na placa engastada

	Divisões	$M_t$ máximo (+) (Nm/m)	$M_t$ máximo (-) (Nm/m)	Diferença Percentual	
				$M_t$ máximo (+)	$M_t$ máximo (-)
Numérico	10	$1.711 \times 10^3$	$-2.508 \times 10^3$	5.29%	0.32%
	20	$1.654 \times 10^3$	$-2.508 \times 10^3$	1.78%	0.32%
	30	$1.645 \times 10^3$	$-2.506 \times 10^3$	1.23%	0.24%
	40	$1.643 \times 10^3$	$-2.505 \times 10^3$	1.11%	0.20%
Analítico [17]	-	$1.625 \times 10^3$	$-2.500 \times 10^3$	-	-

Por fim, é de se observar que, tanto nos dois problemas de casca, como nos dois de placa, a fixação do número total de divisões na estrutura foi determinada pelos resultados dos momentos; se fossem levados em conta na análise apenas os deslocamentos, discretizações menos refinadas, como evidenciam as tabelas 4.7, 4.15, 4.21 e 4.29, já forneceriam valores dentro da margem de erro de 1 a 2% pré-estabelecida.

#### 4.4 – Análise do Reservatório Cilíndrico

Serão em seguida focalizados dois problemas referentes à análise de um dado reservatório cilíndrico, o primeiro dos quais envolve exclusivamente solicitação térmica e o segundo apenas forças aplicadas. O reservatório estudado acha-se representado na figura 4.38, onde são também indicados os dados geométricos e do material utilizados na análise (com  $\alpha$  e  $\gamma$  traduzindo, respectivamente, o coeficiente de dilatação térmica e o peso específico do material).

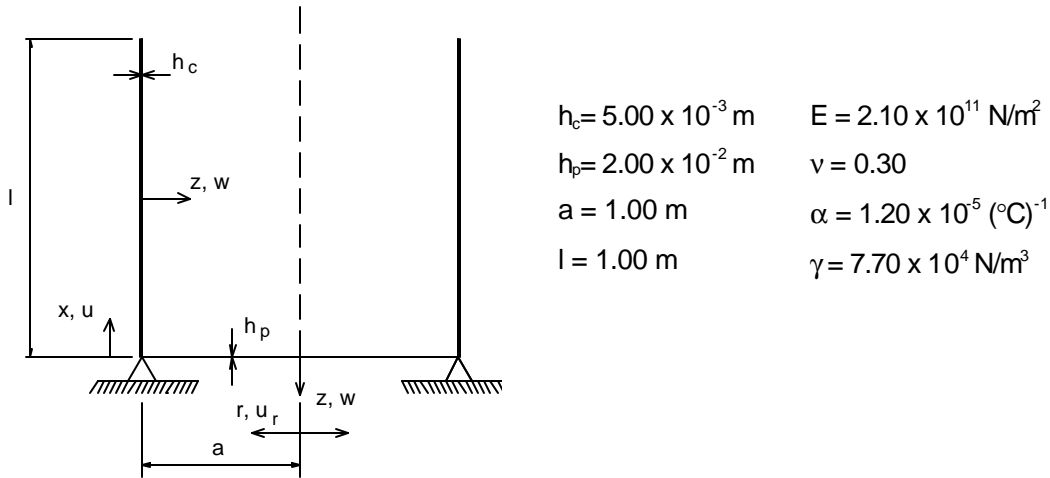


Figura 4.38 – Reservatório cilíndrico utilizado nos problemas 4.4.1 e 4.4.2

Cabe ressaltar que a obtenção da solução analítica em ambos os problemas baseia-se na análise em separado da placa e da casca, com as respectivas soluções  $w_p$  e  $w_c$  sendo geradas pela superposição dos efeitos das solicitações atuantes e dos momentos  $M$  (desconhecidos a priori) existentes na ligação (ver figura 4.39), calculando-se em seguida estes últimos mediante compatibilização das rotações no bordo da placa e na base da casca, ou seja,

$$\left. \frac{dw_p}{dr} \right|_{r=a} = - \left. \frac{dw_c}{dx} \right|_{x=0}$$

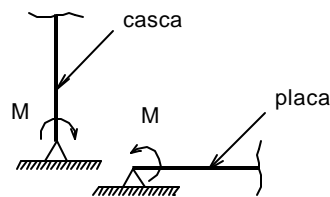


Figura 4.39 – Momentos  $M$  atuantes no bordo da placa e na base da casca

#### 4.4.1 – Reservatório Submetido à Variação Uniforme de Temperatura

Neste exemplo estudou-se um reservatório cilíndrico submetido a uma variação uniforme de temperatura na casca  $\Delta t = \Delta t_e = \Delta t_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- Discretização Utilizada

Com o auxílio do estudo realizado nos itens 4.2 e 4.3, e após alguns testes efetuados, considerou-se adequada para o presente problema a discretização ilustrada na figura 4.40.

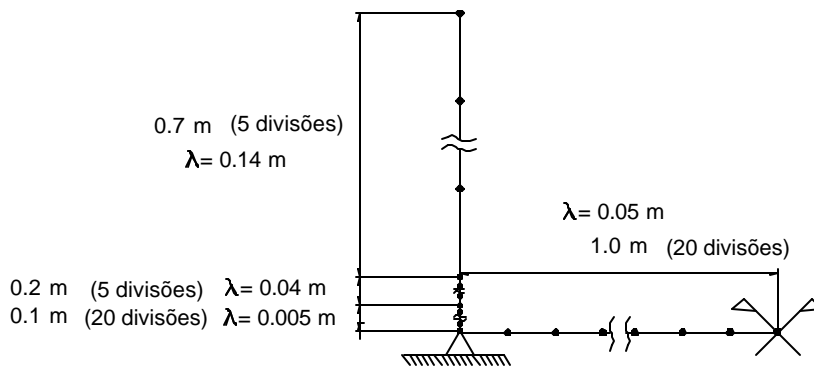


Figura 4.40 – Discretização utilizada para o reservatório cilíndrico no problema 4.4.1

##### 4.4.1.1 – Resultados na Casca

Encontram-se apresentados nas tabelas 4.31 e 4.32 os resultados analíticos e numéricos para o deslocamento  $w$  e o momento  $M$  máximos na casca cilíndrica (este último é o próprio momento na ligação casca-placa).

Tabela 4.31 – Deslocamento  $w$  máximo na casca para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.18	$-2.491 \times 10^{-4}$	-0.60%
Analítico [17]	0.16	$-2.506 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.32 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) na casca para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$2.656 \times 10^2$	0.11%
Análítico [17]	$2.653 \times 10^2$	-

Os gráficos das funções  $w(x)$  e  $M(x)$  encontram-se representados nas figuras 4.41 e 4.42.

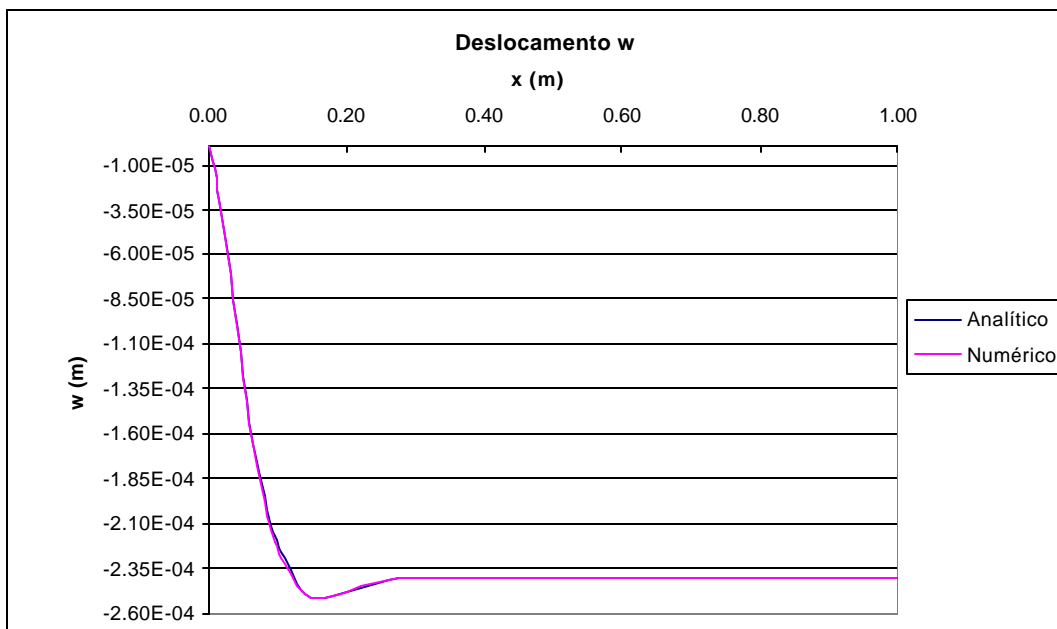


Figura 4.41 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico na casca para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

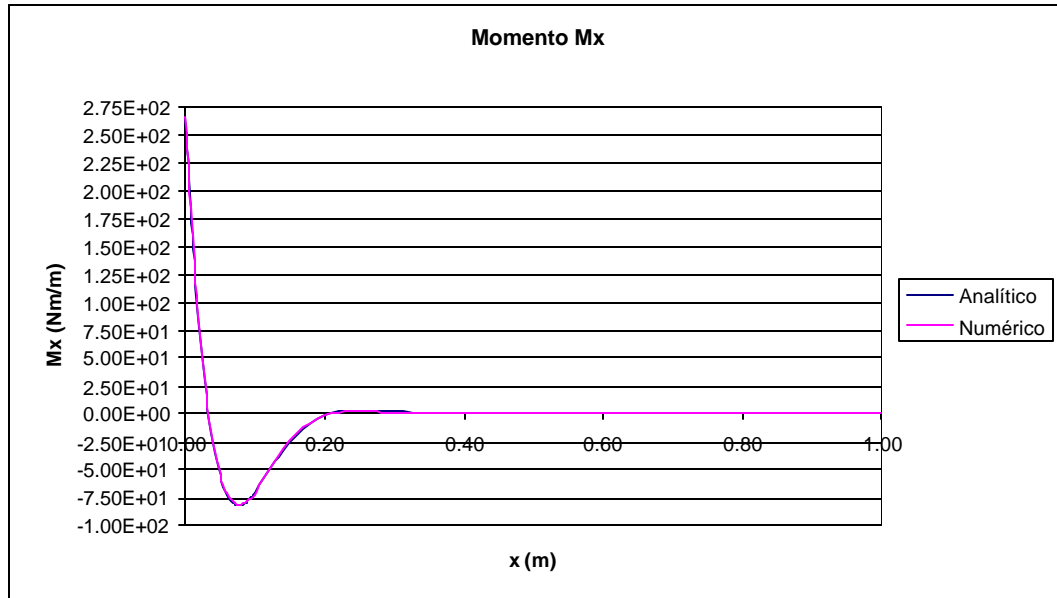


Figura 4.42 – Momentos  $M_x(x)$  numérico e analítico na casca para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

Nota-se, pelas diferenças percentuais nas tabelas e pelos próprios gráficos, que os resultados numéricos obtidos tanto para  $w$  quanto para  $M_x$  se mostram plenamente satisfatórios com a discretização utilizada.

#### 4.4.1.2 – Resultados na Placa

As tabelas 4.33 e 4.34 trazem a comparação dos resultados numéricos e analíticos relativos aos máximos do deslocamento  $w$  e do momento  $M_r$  na placa. Uma vez que o momento  $M_r$ , analiticamente, é constante ao longo da placa, para a sua avaliação numérica (onde os resultados não são rigorosamente constantes) tomou-se o valor de  $r$  que forneceu a maior diferença percentual entre os resultados analítico e numérico (no caso isto ocorreu para  $r=a$ , ou seja, no bordo da placa).

Tabela 4.33 – Deslocamento  $w$  máximo na placa ( $r=0$ ) para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

	w máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$-6.650 \times 10^{-4}$	0.24%
Analítico [17]	$-6.634 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.34 – Momento  $M$  máximo na placa ( $r=a$ ) para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

	$M_r$ (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$-2.614 \times 10^2$	-1.47%
Análítico [17]	$-2.653 \times 10^2$	-

Os gráficos de  $w(r)$  e  $M_r(r)$  encontram-se traçados nas figuras 4.43 e 4.44 .

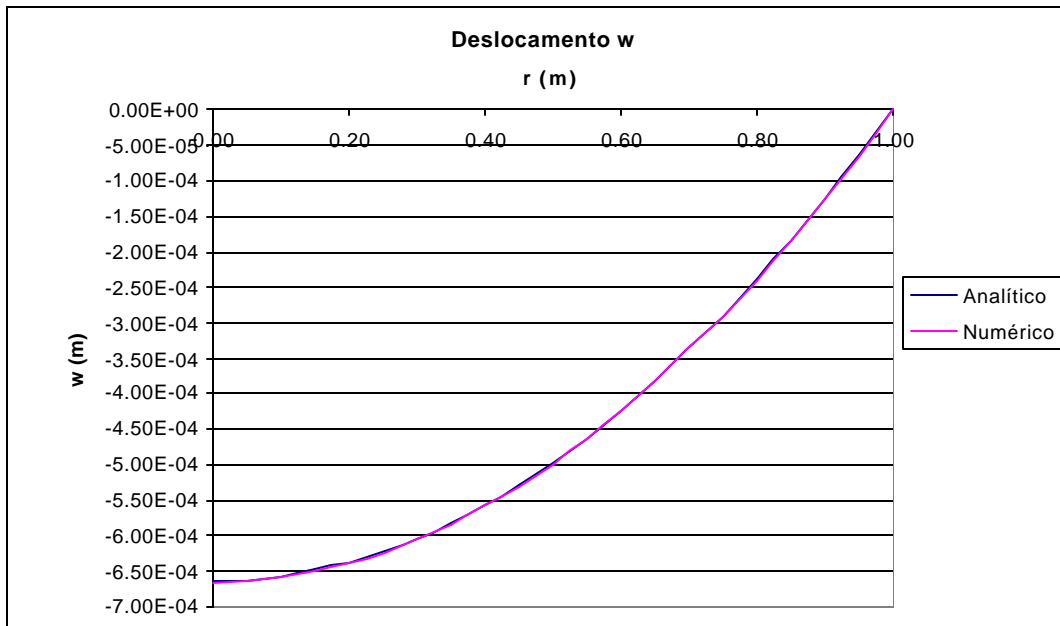


Figura 4.43 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico na placa para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

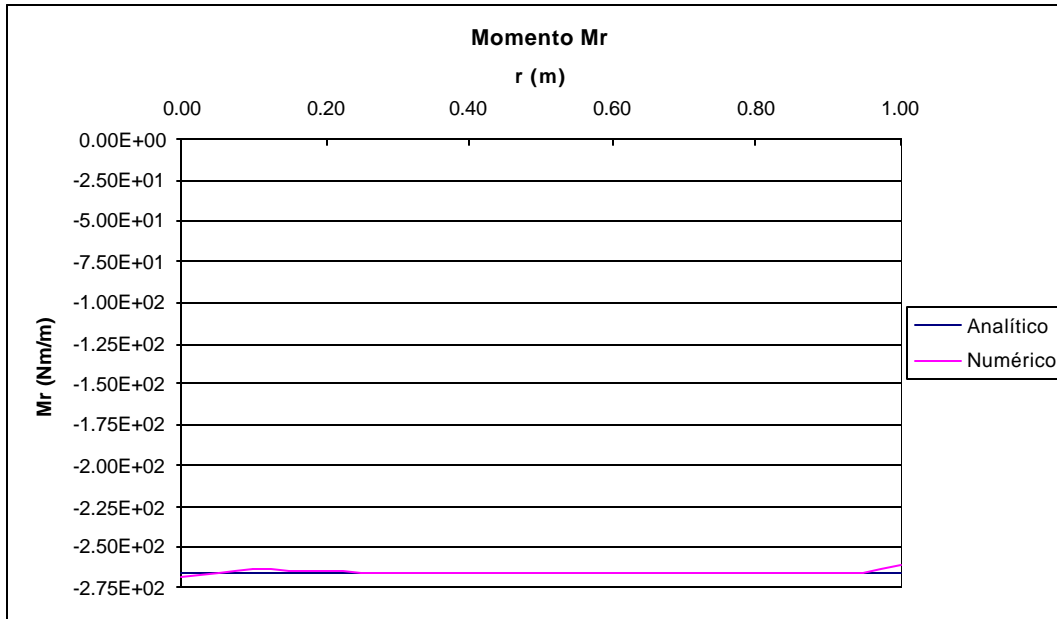


Figura 4.44 - Momentos  $M(r)$  numérico e analítico na placa para o reservatório submetido à variação uniforme de temperatura

Observa-se que também na placa de fundo do reservatório os resultados numéricos foram plenamente satisfatórios para a discretização adotada.

É de se notar que para o nó da junção, onde os momentos  $M_r$  na placa e  $M_x$  na casca deveriam ser rigorosamente iguais (em módulo), a análise numérica conduziu a valores diferindo entre si de aproximadamente 1.5%.

É interessante por fim destacar que se fosse o caso de um apoio com mobilidade radial na figura 4.38, todos os esforços se tornariam nulos no reservatório.

#### 4.4.2 – Reservatório Cilíndrico Submetido à Pressão de um Líquido

Neste problema estuda-se o comportamento de um reservatório cilíndrico submetido à pressão de um líquido, sendo também considerado o peso próprio da estrutura. A figura 4.45 representa o reservatório com esses carregamentos nele atuantes ( $\gamma_l = 1.00 \times 10^4$  N/m<sup>3</sup> traduz o peso específico do líquido).

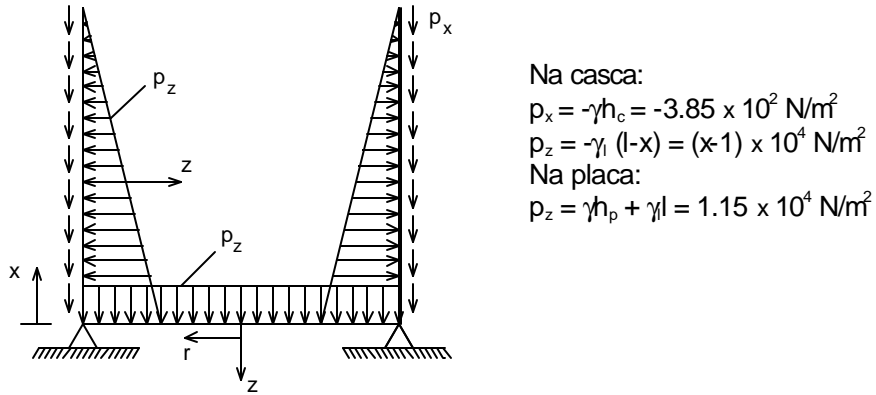


Figura 4.45 – Reservatório cilíndrico e carregamento atuante no problema 4.4.2

- Discretização Utilizada

Tendo por base os estudos realizados nos itens 4.2 e 4.3, e após a realização de alguns testes, fixou-se para o presente problema a discretização mostrada na figura 4.46.

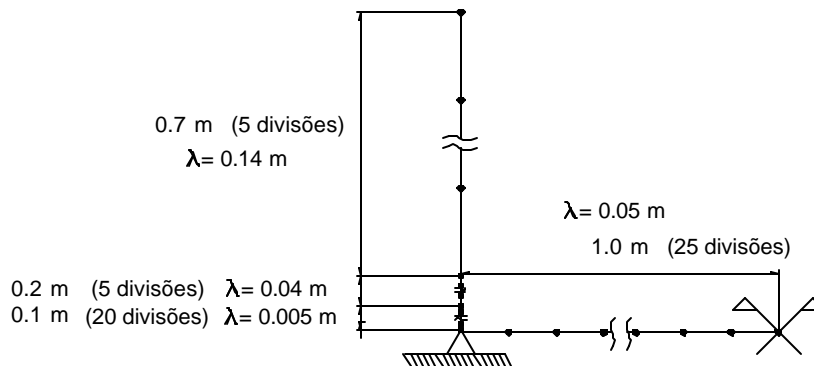


Figura 4.46 - Discretização utilizada para o reservatório cilíndrico no problema 4.4.2

#### 4.4.2.1 – Resultados na Casca

Nas tabelas 4.35 e 4.36 se encontram os valores numéricos e analíticos para o deslocamento  $w$  e o momento  $M_k$  máximos na casca cilíndrica. As figuras 4.47 e 4.48 representam o comportamento das funções  $w(x)$  e  $M_k(x)$  na casca.

Tabela 4.35 – Deslocamento  $w$  máximo na casca para o reservatório submetido à pressão de um líquido

	Abcissa $x$ (m)	$w$ máximo (m)	Diferença Percentual ( $w$ máximo)
Numérico	0.04	$8.599 \times 10^{-5}$	1.20%
Analítico [17]	0.04	$8.497 \times 10^{-5}$	-

Tabela 4.36 – Momento  $M_x$  máximo ( $x=0$ ) na casca para o reservatório submetido à pressão de um líquido

	$M_x$ máximo (Nm/m)	Diferença Percentual
Numérico	$4.556 \times 10^2$	1.54%
Analítico [17]	$4.487 \times 10^2$	-

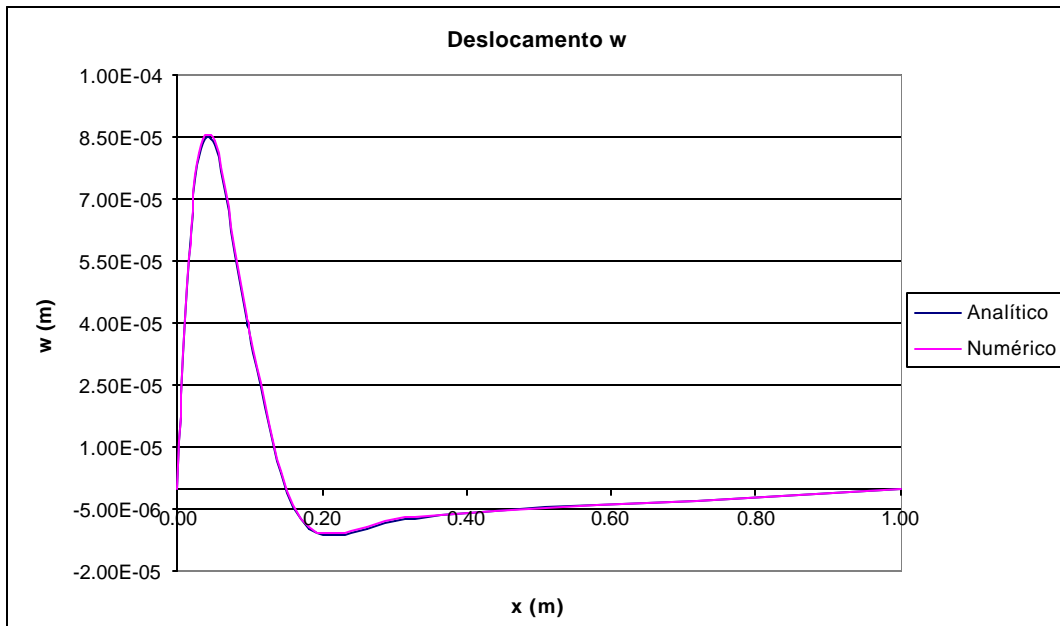


Figura 4.47 – Deslocamentos  $w(x)$  numérico e analítico na casca para o reservatório submetido à pressão de um líquido

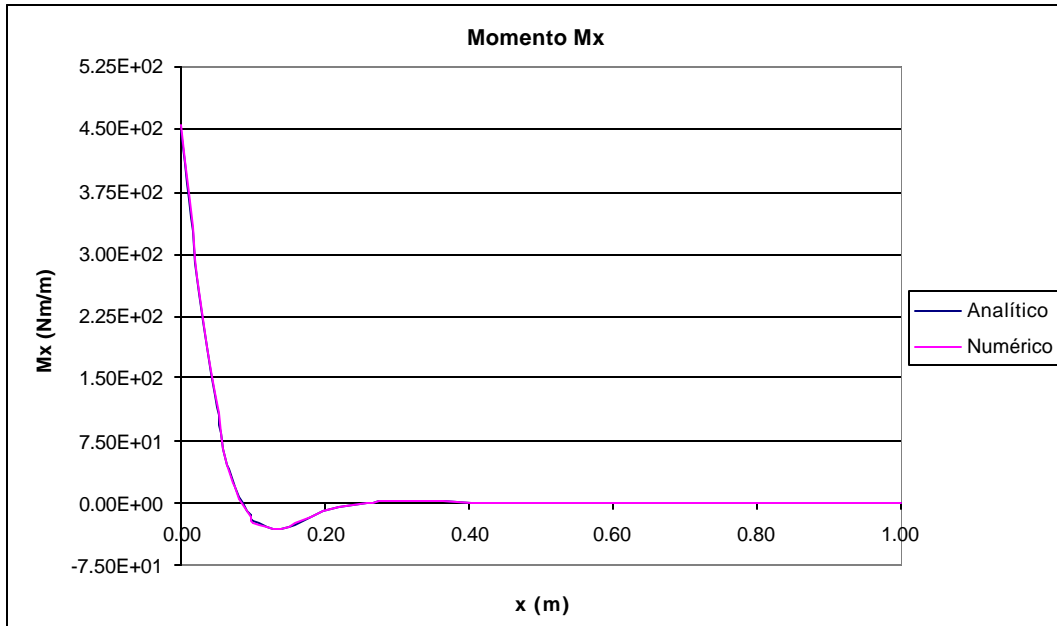


Figura 4.48 – Momentos  $M_x(x)$  numérico e analítico na casca para o reservatório submetido à pressão de um líquido

#### 4.4.2.2 – Resultados na Placa

Apresentam-se nas tabelas 4.37 e 4.38 os resultados numéricos e analíticos para o valor máximo do deslocamento  $w$  e do momento  $M_r$  na placa. Nas figuras 4.49 e 4.50 encontram-se os correspondentes gráficos representativos das variações de  $w$  e  $M_r$  na placa.

Tabela 4.37 – Deslocamento  $w$  máximo ( $r=0$ ) na placa para o reservatório submetido à pressão de um líquido

	w máximo (m)	Diferença Percentual
Numérico	$3.704 \times 10^{-3}$	1.28%
Analítico [17]	$3.657 \times 10^{-3}$	-

Tabela 4.38 – Momentos  $M_r$  máximos positivo ( $r=0$ ) e negativo ( $r=1.00\text{m}$ ) na placa para o reservatório submetido à pressão de um líquido

	$M_r$ máximo (+) (Nm/m)	$M_r$ máximo (-) (Nm/m)	Diferença Percentual	
			$M_r$ máximo (+)	$M_r$ máximo (-)
Numérico	$1.970 \times 10^3$	$-4.490 \times 10^2$	1.97%	0.07%
Analítico [17]	$1.932 \times 10^3$	$-4.487 \times 10^2$	-	-

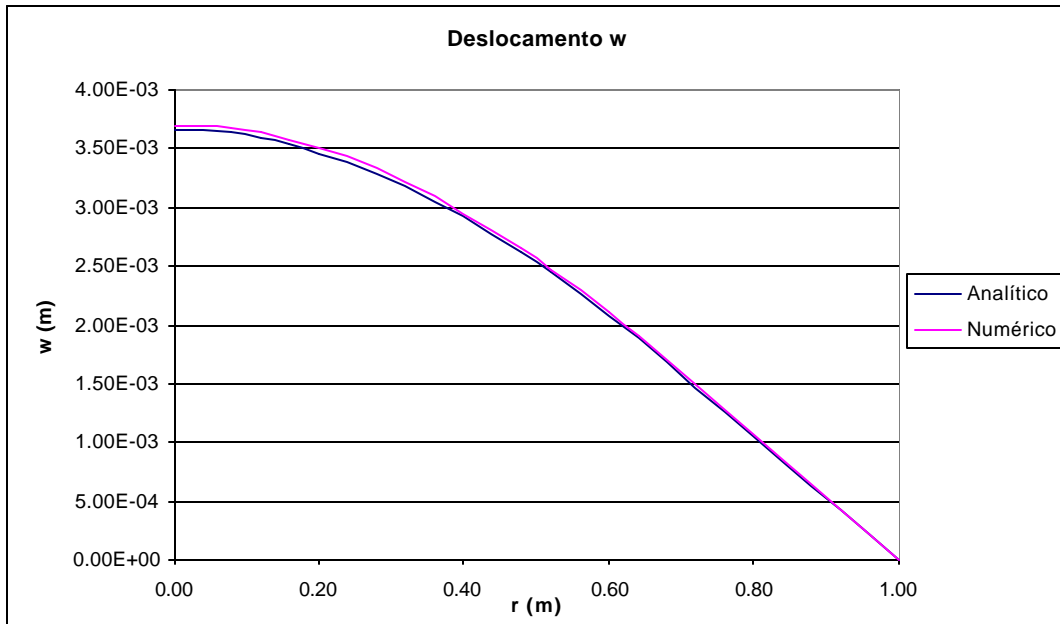


Figura 4.49 – Deslocamentos  $w(r)$  numérico e analítico na placa para o reservatório submetido à pressão de um líquido

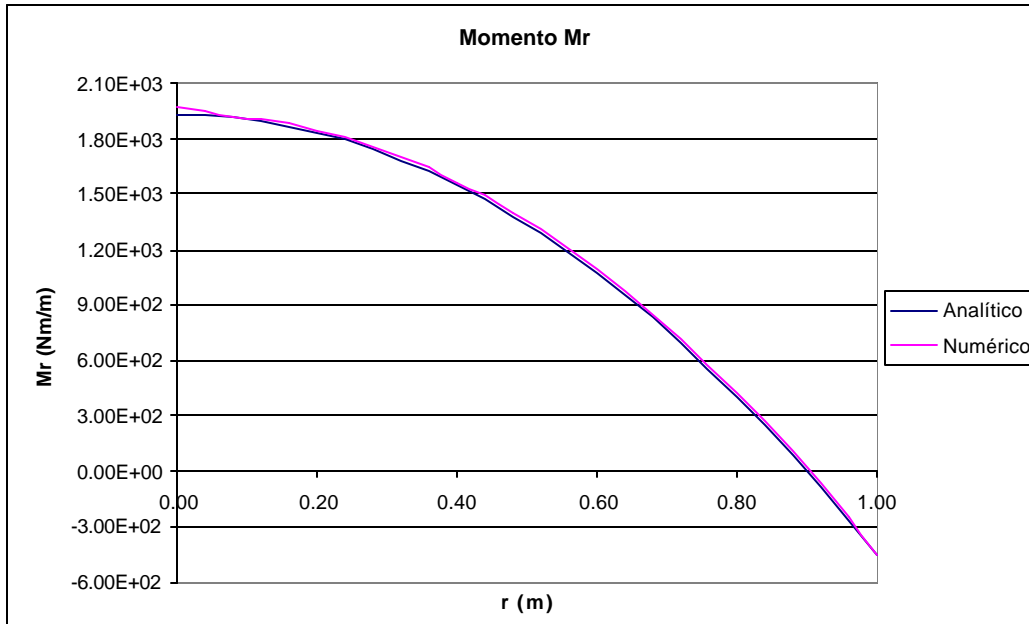


Figura 4.50 – Momentos  $M(r)$  numérico e analítico na placa para o reservatório submetido à pressão de um líquido

Nota-se para o presente exemplo, tanto na casca quanto na placa, que as diferenças percentuais máximas nos resultados se situam na faixa de 1 a 2%, podendo-se, tal como nos problemas anteriores, considerar os resultados numéricos obtidos como plenamente satisfatórios.

Da mesma forma que no problema anterior, observa-se que os resultados numéricos obtidos para os momentos  $M_r|_{r=a}$  na placa e  $M_x|_{x=0}$  na casca não são idênticos, com os mesmos diferindo agora entre si de aproximadamente 1.5%.

Foi também estudada uma variação para o presente problema que se resume na liberação do deslocamento radial no apoio da figura 4.45. Os resultados numéricos obtidos para o momento na junção casca-placa foram neste caso:

pela análise da casca:  $M_k = 4.540 \times 10^2 \text{ Nm/m}$ , o que resulta numa diferença percentual de 0.3% em relação ao resultado do problema da figura 4.45;

pela análise da placa:  $M_k = -4.475 \times 10^2 \text{ Nm/m}$ , acarretando os mesmos 0.3% de diferença percentual relativamente ao problema da figura 4.45.

Conclui-se então que a consideração da mobilidade radial para o apoio do reservatório introduziu uma variação pouco significativa no valor do momento na junção casca-placa. Tem-se assim, com esse estudo, uma confirmação numérica validando o procedimento usual de se imaginar a placa com rigidez extensional infinita na análise.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Baseando-se nos resultados obtidos para os exemplos analisados, e também por outros testes efetuados, pode-se concluir que o método das diferenças finitas energéticas teve uma vez mais demonstrada a sua potencialidade ao ser aplicado aos problemas axissimétricos de cascas cilíndricas, placas circulares e reservatórios cilíndricos formados da junção destes dois elementos estruturais.

Nos problemas de casca cilíndrica abordados, existe o efeito de flexão apenas nas proximidades do apoio, em decorrência da perturbação de bordo, sendo válida a teoria de membrana no restante da estrutura. O comportamento diferenciado nessas duas regiões levou à fixação de discretizações mais refinadas na região afetada pela perturbação de bordo e mais pobres nas regiões onde prevalece o regime de membrana. Ficou evidenciada, nesses problemas, a total conveniência de se definir um elemento de transição na casca, de modo a se utilizar uma malha não uniforme, pois o uso da malha uniforme levaria a um número total de divisões bem maior para atender à margem de erro de 1 a 2% estabelecida no cálculo dos deslocamentos e momentos.

Para a placa circular, na qual os efeitos de flexão se manifestam ao longo de todo o domínio, a malha uniforme mostrou-se plenamente adequada, não havendo assim necessidade de se recorrer ao uso do elemento de transição.

No que se refere à consideração de solitação térmica no reservatório, a implementação numérica torna-se muito simples, uma vez que esse tipo de solitação implica modificações tão somente no vetor de cargas da estrutura.

No estudo do reservatório submetido à pressão de um líquido, pôde-se observar quantitativamente a pequena influência da consideração da rigidez extensional da placa de fundo nos resultados obtidos para os momentos na junção, dando assim respaldo ao procedimento usual de se considerar tal rigidez infinita na análise.

No presente trabalho, além dos deslocamentos, enfatizou-se o cálculo dos esforços, já que estes últimos são de fundamental importância para o dimensionamento estrutural. Verificou-se, nos problemas estudados, que a escolha da discretização foi sempre comandada pelos esforços, e não pelos deslocamentos, ainda que, ao se empregar o método das diferenças finitas energéticas (onde são aproximadas diretamente as derivadas dos deslocamentos, as quais se associam aos esforços) na análise de outros tipos de problemas estruturais, já se tenha constatado o comportamento

contrário.

Com base na observação acima, e como uma primeira idéia para o prosseguimento da pesquisa, sugere-se a análise dos mesmos exemplos aqui apresentados pelo método dos elementos finitos (fazendo-se uso de um elemento finito unidimensional), considerando que neste são aproximados os deslocamentos, mediante funções de interpolação, e não as suas derivadas (o que em princípio indica um desempenho pior do método em relação aos esforços). Isso permite efetuar uma comparação com o método das diferenças finitas energéticas principalmente quanto à avaliação dos esforços.

Como outras sugestões para a continuidade do estudo realizado pode-se citar a inclusão de uma placa circular funcionando como tampa do reservatório, o que geraria perturbações do regime de membrana também no topo da casca, e ainda a análise de outros casos de carga e de solicitação térmica, além de se considerar outros tipos de cascas de revolução (como, por exemplo, uma casca esférica).

No problema estudado, face à axissimetria, a discretização resultou unidimensional. Uma sugestão adicional seria então a análise de cascas e placas com carregamentos não axissimétricos, mediante o uso de malhas bidimensionais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BHASKAR, K., BALASUBRAMANYAM, G. "Acurate Analysis of End-loaded Laminated Orthotropic Cylindrical Shells", **Composite Structures** v. 58, n. 2, pp. 209-216, Nov. 2002
- [2] MIRFAKHRAEI, P., REDEKOP, D. "Buckling of Circular Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method", **International Journal of Pressure Vessels and Piping** v. 75, n. 2, pp. 347-353, April 1998
- [3] KRISHNAMURTHY, K. S., MAHAJAN, P., MITTAL, R. K. "Impact Response and Damage in Laminatade Composite Cylindrical Shells", **Composite Structures** v. 59, pp.15-36, 2003
- [4] LI, S.-R., ZHOU,Y.-H. "Shooting Method for Non-linear Vibrations and Thermal Buckling of Heated Orthotropic Circular Plates", **Journal of Sound and Vibration** v. 248, n. 2, pp. 379-386, Nov. 2001
- [5] GONÇALVES, P. B., RAMOS, R. S. S. "Free Vibration Analysis of Cylindrical Tanks Partially Filled with Liquid" **Journal of Sound and Vibration** v. 195, n. 3, pp. 429-444, Aug. 1996
- [6] AMABILI, M. "Shell-plate Interaction in the Free Vibration of Circular Cylindrical Tanks Partially Filled with Liquid: the Artificial Spring Method" **Journal of Sound and Vibration** v. 199, n. 3, pp. 431-452, Jan. 1997
- [7] KIM, S.-E., KIM, C.-S. "Buckling Strength of the Cylindrical Shell and Tank Subjected to Axial Compressive Loads", **Thin-Walled Structures** v. 40, n. 4, pp. 329-353, April 2002
- [8] COSTA, F. P., **Análise Numérica da Flexão Dinâmica de Vigas com a Consideração de Deformabilidade por Cortante e da Inércia de Rotação.** Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998
- [9] GRAÇA, M. S. B. A. , **Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Estática e Dinâmica de Placas Delgadas e Espessas.** Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000
- [10] DIAS, C. A. C., **Comparação Numérica da Teoria de Vlassov em Vigas e Pórticos de Paredes Delgadas com Seção Aberta.** Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001
- [11] LIMA,J. M. F., GARCIA, L.F.T., VILLAÇA, S. F. "Análise Numérica por Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta." In: **XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, Brasília, Maio 2002

- [12] GRAÇA, M. S. B. A., GARCIA, L.F.T. “Aplicação do Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Placas Retangulares Espessas.” In: **XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, Brasília, Maio 2002
- [13] TIMOSHENKO , S. P., GOODIER, J.N., **Theory of Elasticity**. 3 ed. New York, McGraw-Hill, 1970.
- [14] TIMOSHENKO , S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., **Theory of Plates and Shells**. 2 ed. New York, McGraw-Hill, 1959.
- [15] MCFARLAND, D. E., SMITH,B. L., BERNHART,W. D., **Analysis of Plates**. 3 ed. New York, Spartan Books, 1972.
- [16] GARCIA, L. F. T., **Uma Contribuição ao Estudo da Flexão de Barras com Forte não Linearidade Geométrica**. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1987.
- [17] UGURAL, A. C., **Stresses in Plates and Shells**. New York, McGraw-Hill, 1981