

# FISSURAÇÃO PROBABILÍSTICA DO CONCRETO

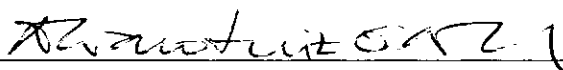
Emílio César Cavalcante Melo da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

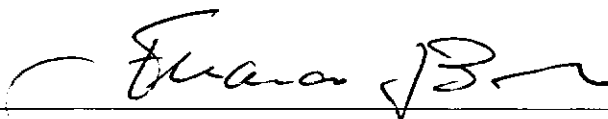
Aprovada por:



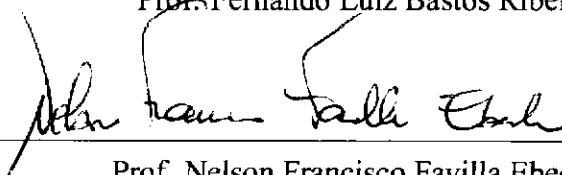
Prof. Eduardo de Moraes Rego Fairbairn, D.Ing.



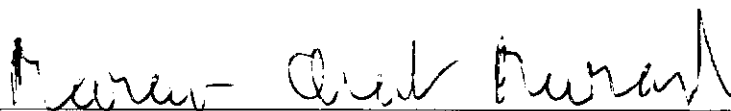
Prof. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.



Prof. Fernando Luiz Bastos Ribeiro, D.Sc.



Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.



Prof. Márcio Arab Murad, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2000

SILVA, EMÍLIO CÉSAR CAVALCANTE  
MELO

Fissuração Probabilística do Concreto  
[Rio de Janeiro] 2000

XII, 114 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
M.Sc., Engenharia Civil, 2000)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Fissuração do concreto 2. Modelo pro-  
babilístico 3. Mecânica da fratura 4. Mon-  
te Carlo 5. Métodos numéricos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Às pessoas que acreditaram em mim.

## **Agradecimentos**

Ao Professor Adrião Duarte Dória Neto, que me apresentou aos métodos numéricos;

À Professora Ada Cristina Scudelari, que me convenceu a vir para a COPPE;

Ao Professor Eduardo de Moraes Rego Fairbairn, pela orientação;

Aos demais professores do Programa de Engenharia Civil, em especial aos professores Roberto Oliveira, José Cláudio de Faria Telles e Webe João Mansur;

Aos colegas do Programa de Engenharia, especialmente a meu colega de apartamento Wagner, a Maria Cláudia, a Reila e a Thilene pela companhia;

À minha família, especialmente a minha mãe Jacilda e a meu irmão Victor, por entenderem minha ausência, a meu pai Valmir e a meu irmão Walmy pelo apoio;

E à minha companheira, Nina, por ter me incentivado a escrever esta tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## FISSURAÇÃO PROBABILÍSTICA DO CONCRETO

Emílio César Cavalcante Melo da Silva

Agosto/2000

Orientador: Eduardo de Moraes Rego Fairbairn

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho analisa um modelo probabilístico de fissuração discreta do concreto, sob os pontos de vista estatístico, numérico e mecânico. Com base nos problemas levantados por esta análise, uma implementação alternativa do modelo é formulada, baseando-se nos mesmos princípios teóricos. Os principais avanços desta nova implementação são: a introdução de um novo parâmetro, o comprimento de correlação; uma implementação mais simples e rápida através da eliminação dos elementos de interface; a implementação de um algoritmo específico para problemas elasto-frágeis e o uso de um critério de fissuração baseado na taxa de liberação de energia. A nova implementação foi testada por comparação com um experimento da literatura, observando-se a reprodução da dispersão experimental nas trajetórias de fissuração e curvas força-deslocamento, bem como do efeito de escala.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## PROBABILISTIC CRACKING OF CONCRETE

Emilio César Cavalcante Melo da Silva

August/2000

Advisor: Eduardo de Moraes Rego Fairbairn

Department: Engenharia Civil

This work analyzes a probabilistic model for discrete cracking of concrete, from the statistical, numerical and mechanical points of view. Starting from the issues raised by this analysis, an alternative implementation for the model is formulated, based on the same theoretical principles. The major advances of this new implementation are: the introduction of a new parameter, the correlation length; a simpler and faster implementation through the elimination of interface elements; the implementation of a specific algorithm for elastic-brittle problems and the use of a fracture criterion based on the energy release rate. The new implementation was tested by comparison to an experiment found in the literature, observing the reproduction of experimental scattering in the crack trajectories and load-displacement curves, as well as the scale effect.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Modelos de fissuração . . . . .	1
1.2	Modelos probabilísticos . . . . .	3
1.3	O Modelo do LCPC . . . . .	4
1.4	Implementação proposta . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modelo Probabilístico de Fissuração</b>	<b>6</b>
2.1	Princípios . . . . .	6
2.2	Preparação do problema . . . . .	9
2.3	Implementação . . . . .	10
2.4	Processo de Monte Carlo . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Análise Crítica do Modelo do LCPC</b>	<b>13</b>
3.1	Preparação do problema . . . . .	13
3.2	Implementação . . . . .	15
3.3	Processo de Monte Carlo . . . . .	17
3.4	Aspectos mecânicos . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Análise Estatística do Elemento de Interface</b>	<b>20</b>
4.1	Modelo analisado . . . . .	20
4.2	Versão discreta . . . . .	21
4.3	Versão contínua . . . . .	21
4.4	Solução analítica . . . . .	21
4.5	Versão discreta de camada única . . . . .	22
4.6	Versão discreta . . . . .	24
4.6.1	Valor médio de $P(\delta)$ . . . . .	24
4.6.2	Desvio padrão de $P(\delta)$ . . . . .	25
4.7	Elemento contínuo . . . . .	25

4.7.1	Valor esperado de $P$ . . . . .	25
4.7.2	Desvio padrão de $P$ . . . . .	26
4.8	Análise numérica . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Tópicos de Mecânica da Fratura Linear Elástica</b>	<b>31</b>
5.1	Histórico . . . . .	31
5.2	Taxa de liberação de energia . . . . .	33
5.2.1	Modelo contínuo . . . . .	33
5.2.2	Modelo discreto . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Proposta Alternativa de Implementação</b>	<b>36</b>
6.1	Geração das propriedades aleatórias . . . . .	36
6.1.1	Preparação da grade . . . . .	37
6.1.2	Cálculo da função de correlação e geração do campo . . . . .	38
6.1.3	Interpolação dos valores nodais . . . . .	39
6.2	Algoritmo de resolução . . . . .	39
6.3	Fissuração discreta . . . . .	42
6.3.1	Separação dos elementos . . . . .	43
6.4	Crerios de ruptura . . . . .	45
6.5	Implementação em um código do MEF . . . . .	46
6.5.1	Geração do campo aleatório . . . . .	47
6.5.2	Alocação extra de memória . . . . .	47
6.5.3	Cálculo do fator de sollicitação $f_s$ . . . . .	49
6.5.4	Abertura da fissura . . . . .	49
6.5.5	Cálculo de $G$ . . . . .	51
6.5.6	Saída de dados . . . . .	52
6.5.7	Sugestões para generalização do código . . . . .	52
6.6	Comparação entre as formulações . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>54</b>
7.1	Experimento real . . . . .	54
7.2	Simulação pela implementação alternativa . . . . .	59
7.3	Discussão . . . . .	66

<b>8 Conclusões</b>	<b>69</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>72</b>
<b>Apêndices</b>	<b>77</b>
<b>A Campos Aleatórios Correlacionados</b>	<b>78</b>
A.1 Revisão de Teoria da Probabilidade . . . . .	78
A.2 Campos aleatórios . . . . .	84
A.3 Geração de campos . . . . .	89
<b>B Validação do Modelo sem Elementos de Interface</b>	<b>99</b>
B.1 Exemplos . . . . .	99
B.2 Resultados . . . . .	102
<b>C Amostras de Código</b>	<b>105</b>
C.1 Geração do campo aleatório . . . . .	105
C.2 Abertura da fissura . . . . .	109

## Lista de Figuras

---

2.1	Diagramas tensão-deformação de materiais frágeis e quase-frágeis	7
4.1	Modelo analisado: barra contendo um elemento de interface . . .	20
4.2	Relação constitutiva elasto-frágil para o elemento de interface. . .	21
4.3	20 realizações de experimentos $P \times \delta$ , média de Monte Carlo (200 realizações) e média estimada por (4.10). Dados: $E = 1, t = 1, h = 1, f_{t,\mu} = 5, f_{t,\sigma} = 2, n = 1$ (interface discreta com uma única camada).	23
4.4	Resultados numéricos para 10000 realizações (10 amostras estão representadas) de um campo não correlacionado, dados $E = 5, t = 1, h = 5, \mu(f_t) = 7$ e $\mathbf{D}f_t = 2$ . . . . .	29
4.5	Resultados numéricos para 10000 realizações (10 amostras estão representadas) de um campo correlacionado, dados $E = 5, t = 1, h = 5, \mu(f_t) = 7, \mathbf{D}f_t = 2$ e $l = 0.554$ . . . . .	30
5.1	Liberação de energia $G.A$ . . . . .	33
6.1	Grade para geração do campo aleatório. . . . .	38
6.2	Abertura de uma fissura interna . . . . .	44
6.3	Bifurcação de uma fissura . . . . .	44
6.4	Abertura de uma fissura de bordo . . . . .	45
6.5	Esquema de um código do MEF para problemas lineares estáticos e alterações para implementação de uma realização da fissuração probabilística. Não está representado o processo de Monte Carlo.	48
7.1	Geometria dos corpos de prova, condições de contorno e área de fissuração. O apoio destacado está presente apenas nos ensaios do tipo T2. . . . .	55
7.2	Trajetórias de fissuração experimentais. . . . .	56
7.3	Curvas $P \times \delta$ experimentais. . . . .	57

7.4	Curvas $P \times CMOD$ experimentais. . . . .	58
7.5	Fator de solitação $f_s$ para ensaio do tipo T1 ( $D = 75\text{mm}$ ). . . . .	60
7.6	Fator de solitação $f_s$ para ensaio do tipo T2 ( $D = 75\text{mm}$ ). . . . .	60
7.7	Trajatórias de fissuração simuladas. Dimensões em mm. . . . .	61
7.8	Curvas $P \times \delta$ utilizando critério de energia global de fissuração. . .	62
7.9	Curvas $P \times CMOD$ utilizando critério de energia global de fissuração. .	63
7.10	Curvas $P \times \delta$ utilizando critério de tensão local. . . . .	64
7.11	Curvas $P \times CMOD$ utilizando critério de tensão local. . . . .	65
B.1	Caso 1: Validação da implementação alternativa . . . . .	100
B.2	Caso 2: Fissura interna unitária . . . . .	100
B.3	Caso 3: Fissura interna mínima . . . . .	101
B.4	Caso 4: Fissura externa . . . . .	102

## Lista de Tabelas

---

7.1	Dimensões dos corpos de prova da Figura 7.1. . . . .	55
B.1	Deslocamentos horizontais $u_x$ nos nós seleccionados . . . . .	103
B.2	Abertura da fissura no Caso 2 (fissura unitária) . . . . .	103
C.1	Descrição das variáveis empregadas . . . . .	106

# Capítulo 1

## Introdução

---

### 1.1 Modelos de fissuração

A aplicação de um modelo de fissuração para um material como o concreto tem como objetivo auxiliar o projetista na obtenção de respostas para as perguntas:

- Quando a peça irá romper ?
- Qual seu comportamento após a ruptura ?
- Qual será o mecanismo da ruptura ?

A primeira pergunta o permite dimensionar a peça, a segunda permite determinar a sua segurança (ductilidade) e a terceira lhe sugere formas de distribuir elementos de reforço sobre a peça. Os métodos tradicionais têm respondido satisfatoriamente a primeira pergunta, mas para responder as outras duas, torna-se necessário utilizar um modelo de fissuração.

Entretanto, o cálculo tradicional se baseia primariamente nas resistências do concreto e do aço, dados facilmente determináveis e disponíveis, mas a maioria dos modelos de fissuração incorpora diversos outros parâmetros que muitas vezes requerem ensaios delicados ou de difícil execução, ou carecem de significado físico e devem ser determinados indiretamente. O RILEM (*Internation Union of Testing and Research Laboratories for Materials and Structures*) apresenta três recomendações diferentes [4, 51] para a medição da energia de fissuração. Mesmo um parâmetro simples como a resistência à tração pode ser determinado por no mínimo três métodos diferentes<sup>1</sup>, e a padronização é impedida

<sup>1</sup>Ensaio de tração direta, compressão diametral (“Teste brasileiro”) e módulo de ruptura na flexão.

pela inconsistência entre os diferentes ensaios.

Um segundo problema é a multiplicidade de modelos (não é o objetivo deste texto revisar o extenso assunto da fissuração do concreto, para isto o leitor pode utilizar [26], [4] ou [51]<sup>2</sup>). A modelagem pode ser feita com a introdução de fissuras discretas ou repartidas, através de relações constitutivas locais ou ainda através de modelos não-locais baseados em gradientes de deformação ou contínuo micro-polar, para citar apenas alguns. Os modelos de fissura discreta podem ser coesivos ou não, e neste último caso podem ser baseados diretamente na mecânica da fratura linear elástica ou em fissuras equivalentes. Em cada caso, as propriedades do material podem ser determinísticas ou probabilísticas. A simulação do modelo pode ser feita com elementos finitos, elementos de contorno [21, 54] ou mesmo sem elementos [7]. Optando-se por elementos finitos, a implementação de fissuras discretas pode ser feita com alteração da geometria e correspondente remalhagem, com o uso de elementos de interface ou de forma independente da malha [6, 32]. Não é difícil entender porque um modelo de fissuração não foi ainda incorporado aos códigos a despeito do esforço dos pesquisadores.

Apesar de recente (os principais desenvolvimentos foram feitos nas duas últimas décadas), o estudo da fratura de materiais quase-frágeis está bastante maduro [4, 26] e alguns pontos não provocam mais discussão, como a importância do efeito de escala<sup>3</sup> e da energia de fissuração na análise. A revisão dos códigos deve iniciar por estes pontos, uma vez que os projetistas sejam convencidos da necessidade de fazê-lo [47]. Os resultados realistas dos modelos probabilísticos podem desempenhar um papel importante nesta tarefa.

O projeto baseado nestes conceitos permitiria obter margens de segurança mais uniformes ao levar em conta o efeito de escala, além de abrir a possibilidade de executar detalhes não usuais e de explorar novos materiais. Mesmo nas áreas cobertas pelos códigos, seria possível explorar o significado de recomendações como as armaduras mínimas e limites de ductilidade, os quais são empíricas até o momento [26].

---

<sup>2</sup>O leitor que procura uma introdução breve pode começar por [31, p. 528].

<sup>3</sup>Em estruturas geometricamente similares mas com dimensões distintas, observa-se experimentalmente uma diminuição da resistência nominal e da ductilidade do material com o tamanho, o que não pode ser explicado pela teoria convencional.

Enquanto isto, os modelos de fissuração têm sido aplicados com sucesso em casos específicos, como em barragens [30, 48] ou no estudo de novos materiais, como compósitos [2].

## 1.2 Modelos probabilísticos

Dentro dos modelos de fissuração, um dos pontos em estudo é o fato de se observar experimentalmente caminhos de fissuração diversos e mesmo mais de um mecanismo de ruptura em peças construídas de forma idêntica. A causa não é desconhecida: o concreto é um material heterogêneo, o que determina diretamente suas características físicas e o seu comportamento à fissuração.

A proposta dos modelos probabilísticos é simular o comportamento do concreto como um material heterogêneo, com o objetivo de obter o comportamento médio e sua faixa de variação, esta última importante para a análise da confiabilidade [15] da estrutura. Em algumas aplicações, deseja-se também obter resultados realistas para os caminhos de fissuração e para o comportamento da peça, comparáveis aos obtidos experimentalmente.

O modelo probabilístico mais direto é provavelmente o concreto numérico [39], no qual uma seção de concreto é digitalizada ou gerada artificialmente e discretizada em uma malha fina o suficiente para que se possa representar separadamente os materiais constituintes (matriz e agregado) através de elementos finitos. É desnecessário dizer que este método é numericamente dispendioso, especialmente em 3D, além de apresentar um resultado demasiadamente detalhado e difícil de analisar.

Com objetivos semelhantes, alguns modelos aproximam o concreto de forma discreta, por treliças, reticulados de vigas [49, 57] ou conjuntos de partículas rígidas [2]. Estes compartilham as desvantagens acima e possuem ainda a desvantagem adicional de não poder representar corretamente propriedades tensoriais, não podendo incorporar de forma simples relações constitutivas não-lineares quaisquer. Outro tipo semelhante de modelo aproxima a microestrutura do material por uma malha de polígonos<sup>4</sup>. Sellers e Napier [50] prescreveram fissuras nas arestas dos polígonos, simulando fissuras pré-existentes e permitiram a abertura de novas fissuras.

---

<sup>4</sup>Obtidos por discretização de Voronoi [50], triangulação de Delaunay ou mosaicos L e S [58].

A abordagem mais comum para a simulação de materiais heterogêneos é o uso do método dos elementos finitos estocásticos (MEFE) [29, 37, 52]. Neste método, as propriedades do material (módulo de elasticidade, resistência à tração, curva de *softening*) são modeladas como campos aleatórios, e um processo matemático é efetuado para determinar o comportamento médio da estrutura e o desvio em relação a esta média. O método foi aplicado ao concreto em [15], usando relações constitutivas não-lineares.

Todavia, as características do problema de fissuração discreta dificultam o emprego de artifícios matemáticos como o método da perturbação ou a expansão de Neumann [29, 37], comumente utilizados no MEFE. A alternativa é efetuar a simulação direta pelo método de Monte Carlo (ver seção 2.4).

### 1.3 O Modelo do LCPC

O modelo probabilístico de fissuração estudado neste trabalho foi desenvolvido por Rossi e Richer [40] no Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC/Paris), tendo sido obtidos resultados [42] muito semelhantes a experimentos reais. Suas características principais são a simplicidade de implementação, o reduzido número de parâmetros<sup>5</sup> e a aparência realística das simulações, principalmente das trajetórias de fissuração.

Este modelo descreve o concreto através de uma relação constitutiva local elasto-frágil, na qual a resistência à tração e o módulo de elasticidade são variáveis aleatórias. Os parâmetros adicionais relativos ao caráter estocástico, como a média e o desvio padrão, são estimados a partir de fórmulas empíricas deduzidas com base em numerosos ensaios [45].

A fissura é implementada com o auxílio de elementos de interface inseridos entre os elementos finitos, os quais perdem sua capacidade de transmitir esforços quando sua tensão normal ultrapassa a resistência local, efetivamente abrindo fissuras discretas restritas às arestas dos elementos. A presença de elementos de interface permite a implementação de diferentes relações constitutivas, das quais a relação elasto-frágil é apenas um caso especial, e ainda evita a necessidade de remalhar o problema com o progresso da

---

<sup>5</sup>Na formulação original são suficientes a resistência à compressão do concreto e a dimensão máxima do agregado

fissura.

A resposta final do problema é obtida através do método de Monte Carlo direto: diferentes realizações são calculadas pelo sorteio das resistências à tração dos elementos de interface e dos módulos de elasticidade de todos os elementos, adotando-se a média das realizações como resultado final.

## 1.4 Implementação proposta

Partindo das mesmas observações físicas que levaram à formulação do modelo do LCPC, é possível devisar formulações alternativas. Neste trabalho, algumas das deficiências do modelo tal como implementado por Paz [35] e utilizado por Dubeux [10] serão apontadas e alterações que mantenham os principais méritos serão propostas.

Questiona-se a validade e a necessidade do uso de elementos de interface<sup>6</sup>; o método de geração das propriedades aleatórias; o significado das realizações individuais e da simulação de Monte Carlo; além da validade do critério de ruptura. O resultado deste questionamento foi uma formulação alternativa, a qual descreve a fissura por meio de alterações mínimas na malha; gera as propriedades como campos aleatórios; procura obter realizações individuais mais realistas e utiliza um critério energético de ruptura.

Reconhecendo características especiais do modelo do LCPC, um algoritmo para a resolução de problemas elasto-frágeis foi implementado, simplificando a simulação tanto pela formulação proposta quanto pela formulação original.

Neste trabalho, serão mostrados os resultados de simulações obtidas com esta formulação alternativa, aplicada a um ensaio encontrado na literatura [19], apresentado pelos autores como um padrão de comparação para modelos de fissuração do concreto. O ensaio foi realizado em um grande número de corpos de prova em três diferentes dimensões e dois tipos de carregamento, tendo sido registradas diversas curvas ( $P \times \delta$ ,  $P \times CMOD$ , etc.<sup>7</sup>) e a envoltória experimental das trajetórias de fissuração. Serão mostrados os resultados de realizações individuais obtidas pelo método proposto, para comparação com estas curvas e envoltórias experimentais.

---

<sup>6</sup>Embora se reconheça sua utilidade quando há fissura coesiva

<sup>7</sup>Carga-deslocamento e carga-abertura da fissura (*crack mouth opening displacement* CMOD)

## Capítulo 2

### Modelo Probabilístico de Fissuração

---

Uma descrição mais completa do modelo do Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC/Paris), desenvolvido por Rossi e outros, pode ser encontrada nas referências originais [40, 42–45]. Detalhes do método sem correspondência nesta implementação alternativa não serão discutidos, pois a proposta deste trabalho é substituir alguns pontos do método sem questionar a validade do conjunto.

#### 2.1 Princípios

O concreto é um material heterogêneo. Sob o ponto de vista mecânico, é útil imaginá-lo como composto por duas fases [3], a matriz (pasta de cimento, outros materiais cimentantes e agregado miúdo) e o agregado (graúdo). Quando ensaiadas separadamente, ambas possuem um comportamento acentuadamente elasto-frágil [31, 33], como ilustrado na Figura 2.1(a). Contudo, o material composto comporta-se de forma quase-frágil, apresentando uma resistência residual após a ruptura.

Tal comportamento é exibido tanto na compressão quanto na tração, como ilustrado na Figura 2.1. Ambos os comportamentos foram estudados através do modelo probabilístico [42, 43], percebendo-se que para simular a falha por compressão é necessário utilizar um critério de ruptura por cisalhamento. Para evitar este parâmetro adicional, neste trabalho será tratada apenas a ruptura probabilística por *tração*.

Outra consequência da heterogeneidade é a existência de uma escala interna do material [16], relacionada com o diâmetro do agregado, a qual não é desprezível em relação às dimensões dos corpos de prova, ou mesmo das estruturas. Materiais como o aço também apresentam este tipo de escala interna, mas o comprimento desta escala é

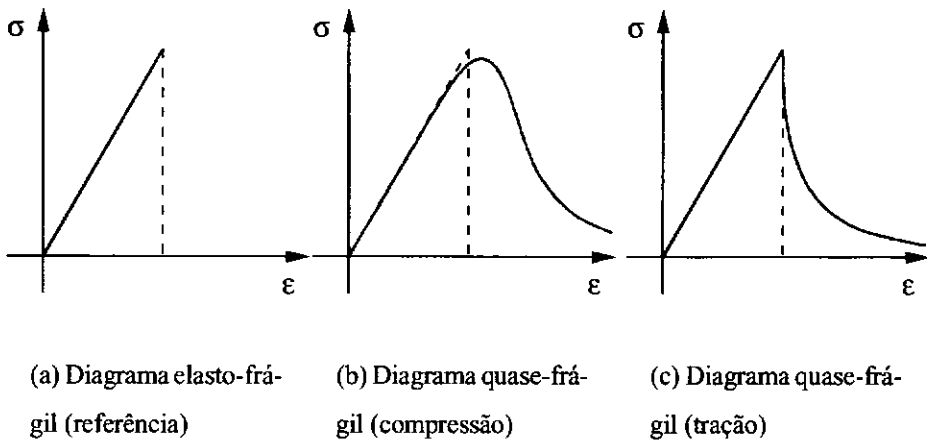


Figura 2.1: Diagramas tensão-deformação de materiais frágeis e quase-frágeis

geralmente desprezível e o material pode ser considerado homogêneo.

Com o aumento das dimensões do corpo de prova, esta escala se torna proporcionalmente menos importante, o que reduz a variabilidade das propriedades. Em simulações pelo método dos elementos finitos, as propriedades em cada elemento são uniformes<sup>1</sup>, podendo ser associadas às propriedades medidas em um corpo de prova com as dimensões do elemento. Logo, espera-se que uma malha mais grosseira apresente uma menor variabilidade das propriedades que uma malha mais refinada.

A origem da variabilidade é evidentemente a diferença entre as propriedades da matriz, do agregado e da zona de transição [45]. Em concretos normais, a matriz é menos resistente que o agregado, mas a diferença diminui à medida que a resistência do concreto aumenta [31, 33]. Portanto, espera-se que na simulação os concretos de alta resistência sejam mais homogêneos.

Observa-se experimentalmente uma diminuição da resistência com o aumento do tamanho, porém Bažant e Planas [4, cap. 12], os quais dedicaram bastante esforço ao estudo do efeito de escala, não acreditam que isto esteja relacionado com a heterogeneidade, uma vez que o efeito de escala ocorre também em materiais homogêneos e suas simulações baseadas em modelos heterogêneos prevêm um efeito de escala diferente do observado experimentalmente. Isto contraria a hipótese de Weibull<sup>2</sup>, utilizada por Rossi

<sup>1</sup>Ou variam de forma simples, como através das funções de interpolação do elemento.

<sup>2</sup>Na qual a resistência de um corpo heterogêneo depende do número de falhas contidas no mesmo. Esta hipótese, publicada em 1939, prevê portanto que a resistência deve diminuir com o aumento das dimensões

*et al.* [45] para justificar a relação entre resistência à tração e heterogeneidade (equação 2.2). Independentemente da origem, o efeito de escala deve ser observado quando se determinam as resistências aleatórias.

Outra característica do material é o seu mecanismo de ruptura<sup>3</sup>, a abertura de fissuras devido à deformação de tração excessiva. Sob carga de compressão, o concreto sofre microfissuração distribuída por toda a área comprimida, culminando com a ruptura quando as fissuras se fundem em aberturas contínuas. Sob carga de tração direta, a falha inicia com a propagação de uma fissura na área menos resistente do corpo, não tendo sido observadas experimentalmente microfissuras distribuídas neste caso. O modelo deve ser coerente com este comportamento e ainda considerar o fato de se observar que o concreto apresenta microfissuras mesmo antes do carregamento [3], pois as mesmas podem ajudar a distribuir a fissuração e bloquear a propagação de microfissuras [50].

Deseja-se, a partir das considerações acima, obter um modelo numérico que permita alcançar os objetivos propostos por Shah *et al.* [51]: identificar os locais onde a fissura deve iniciar e modelar a propagação da fissura, incluindo a coalescência e bifurcação, até o colapso final da estrutura.

Um passo importante nesta modelagem é a escolha e posterior determinação dos parâmetros. Dentre os parâmetros mais comumente empregados, destacam-se a energia de fissuração, o diagrama de *softening* e a resistência à tração. Como resultado de simulações e experimentos com barragens, utilizando principalmente o modelo de fissura coesiva, Saouma *et al.* [48] chegou à conclusão de que a forma do diagrama de *softening* é relativamente pouco importante<sup>4</sup>, bem como o valor exato da energia de fissuração, quando se considera a incerteza experimental no valor do módulo de elasticidade. O parâmetro que teve mais importância em seus experimentos foi a resistência à tração, o que o levou a concluir [47] que a escolha dos parâmetros deve ser feita através de um compromisso: os mesmos podem ser tão complexos quanto o modelo exija, uma vez que o fenômeno é complexo, mas ao mesmo tempo devem ter um significado físico que possa ser medido experimentalmente.

---

do corpo.

<sup>3</sup>Determinado por técnicas radiográficas, microscopia ou ultrassom, entre outras.

<sup>4</sup>Desde que atenda a requisitos mínimos. O diagrama bilinear é considerado satisfatório [4].

## 2.2 Preparação do problema

O ponto de partida do modelo probabilístico é uma malha de elementos finitos, na qual o corpo em estudo é subdividido. A cada elemento é atribuído um módulo de elasticidade  $E$  aleatório, o qual é sorteado de uma distribuição normal. A média  $E_\mu$  deve ser determinada experimentalmente, enquanto o desvio padrão  $E_\sigma$  depende do tamanho do agregado, como discutido na seção 2.1 e da resistência à compressão<sup>5</sup> de um corpo de prova normalizado. Seu valor é obtido a partir da fórmula empírica [45]<sup>6</sup> (2.1):

$$E_\sigma = 0,15E_\mu \left( \frac{V_E}{V_A} \right)^{-a} \quad (2.1)$$
$$a = 0,16 + 2,7 \times 10^{-3} f_c - 3,4 \times 10^{-6} f_c^2$$

onde  $V_E$  é o volume do elemento (volume do corpo de prova no trabalho original),  $V_A$  é o volume do agregado e  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto.

Recentemente, uma melhor estimativa para os parâmetros da distribuição normal tem sido obtida por análise inversa [12, 14] e a influência da heterogeneidade no módulo de elasticidade foi tratada analiticamente em [58].

Em uma segunda etapa, as arestas entre elementos (no caso bidimensional, ou faces no caso tridimensional, o qual não será considerado neste texto<sup>7</sup>) são substituídas por elementos de interface, de forma que os elementos da malha original não mais guardem vínculos uns com os outros, a não ser através de elementos de interface retangulares, nos quais duas arestas estão em contato com os elementos vizinhos e as outras duas possuem dimensão desprezível, o que torna o elemento de interface uma linha que se confunde com a própria aresta.

A cada elemento de interface é atribuída uma resistência aleatória, escolhida a partir de uma distribuição normal, de forma análoga ao módulo de elasticidade, em função das mesmas variáveis, utilizando como média  $f_{i,\mu}$  e desvio padrão  $f_{i,\sigma}$  os valores obtidos

<sup>5</sup>Utilizada como estimativa da diferença entre a resistência da matriz e do agregado, como discutido na seção 2.1, principalmente por ser facilmente determinável e por “fazer parte da bagagem cultural do engenheiro” [45].

<sup>6</sup>Há um erro de impressão na fórmula (2.1) quando reproduzida em [14].

<sup>7</sup>Ao leitor é sugerido consultar [35].

pelas fórmulas empíricas [45] (2.2) e (2.3):

$$f_{t,\mu} = 6,5 \left( \frac{V_E}{V_A} \right)^{-b} \quad (2.2)$$

$$b = 0,25 - 3,6 \times 10^{-3} f_c + 1,3 \times 10^{-5} f_c^2$$

$$f_{t,\sigma} = 0,35 \left( \frac{V_E}{V_A} \right)^{-c} \quad (2.3)$$

$$c = 4,5 \times 10^{-2} + 4,5 \times 10^{-3} f_c - 1,8 \times 10^{-5} f_c^2$$

onde  $V_E$ ,  $V_A$  e  $f_c$  têm os mesmos significados que em (2.1).

Em uma distribuição normal, pode haver valores negativos, logo Rossi utilizou uma distribuição normal truncada em zero<sup>8</sup>. Tais valores podem ser interpretados como pré-fissuras. Pode-se argumentar [5] que outra distribuição deveria ser utilizada, como discutido na seção 3.1.

Embora seja possível atribuir resistências ao cisalhamento [43], entre as várias possibilidades de critério de ruptura, neste texto será tratado apenas o critério de tração simples: quando a tensão perpendicular ao elemento de interface atinge determinado valor de tração, o elemento é considerado rompido e sua rigidez é permanentemente alterada.

Diversas alternativas poderiam ser adotadas quando o elemento de interface é rompido, dentre as quais a simulação do comportamento de *softening* [1] (resistência residual de tração) ou *aggregate interlock* (resistência residual ao cisalhamento). O caso mais simples é o elasto-frágil, quando o módulo de elasticidade do elemento de interface é levado irreversivelmente a zero, o que equivale efetivamente à remoção do elemento.

Na abordagem probabilística, mesmo este caso mais simples pode simular o fenômeno de *softening* após a simulação de Monte Carlo, como observado por Rossi e também por Vervuurt *et al.* [57], utilizando uma abordagem diferente.

## 2.3 Implementação

A resolução do modelo é feita de forma determinística<sup>9</sup>, após o sorteio das variáveis, em um código de elementos finitos relativamente padrão.

<sup>8</sup>Ou seja, se eventualmente for sorteado um valor negativo, utiliza-se zero em seu lugar.

<sup>9</sup>Ou seja, não é empregado um método estatístico como o método da perturbação [29].

A simulação deste método apresenta diversos problemas de ordem prática. Obviamente, o problema é fortemente não-linear e desafia o uso de processos como Newton-Raphson pela inversão do módulo de elasticidade na porção *softening* da curva. Ao se tentar aplicar o carregamento de forma incremental, ocorre a falha brusca e instável, não permitindo a observação do comportamento *softening* do corpo. O mesmo acontece em experimentos reais, quando o controle é feito pela carga aplicada.

Escolhendo-se um determinado nó e controlando-se a sua deformação, é possível obter a curva completa utilizando o método de Newton-Raphson, da mesma forma que experimentalmente utiliza-se o controle por deformação ou abertura da fissura (*crack mouth opening displacement* CMOD). Ainda assim, Paz [35] percebeu que a cada passo de deformação diversos elementos podem romper ao mesmo tempo, invalidando o cálculo, uma vez que cada ruptura é seguida por uma redistribuição das tensões, a qual por sua vez pode determinar a ruptura de outros elementos. Desta forma, um segundo controle é necessário para que não mais que um elemento (aquele mais solicitado) rompa a cada iteração, até que seja possível completar o passo de deslocamento, procedimento denominado “fissura hierarquizada” por Paz. Problemas semelhantes foram relatados por outros autores [1, 50], os quais adotaram soluções análogas.

O resultado da simulação determinística é uma curva carga-deslocamento, obtida plotando-se o carregamento  $P$  em um ponto selecionado contra o deslocamento  $\delta$  do nó controlado. Como a simulação é controlada por deslocamento, tem-se uma sucessão de valores de  $P$  calculados em valores pré-determinados de  $\delta$ .

## 2.4 Processo de Monte Carlo

O método de Monte Carlo [36, 46] é um método de integração numérica em um espaço multidimensional, no qual uma técnica convencional exigiria um número excessivo de avaliações da função a ser integrada.

O teorema fundamental da integração de Monte Carlo diz que, dados  $N$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , escolhidos aleatoriamente dentro do volume de integração  $V$  com densidade de probabilidade  $p$ , a integral de uma função  $f$  neste volume é dada por

$$I = \int f p dV \cong \langle f \rangle \pm \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (2.4)$$

onde

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (2.5)$$

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(x_i) \quad (2.6)$$

Reconhecendo em (2.4) a equação (A.15), este teorema sugere um procedimento para cálculo do valor esperado de uma função  $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  de  $m$  variáveis aleatórias:

- Sortear valores para as variáveis aleatórias  $\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_m^k$ , segundo sua densidade de probabilidade conjunta, ou seja, obter uma *realização*  $k$  dos mesmos;
- Avaliar a função  $f_k = f(\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_m^k)$  para esta realização;
- Calcular  $I = \langle f_k \rangle$  por (2.5) e estimar o erro por (2.4);
- Repetir até a convergência ou até o número máximo de realizações.

A técnica acima pode ser interpretada, na notação do método probabilístico de fissuração, como:

- Sortear valores para as propriedades aleatórias (módulos de elasticidade, resistências à tração);
- Efetuar a simulação de elementos finitos;
- Para cada resultado desejado, por exemplo cada ponto da curva  $P(\delta)$ , calcular a média das realizações<sup>10</sup>;
- Repetir até a convergência ou até o número máximo de realizações.

---

<sup>10</sup>O que pode ser feito a cada iteração por

$$\langle P \rangle_k = \frac{1}{k} ((k-1)\langle P \rangle_{k-1} + P_k) \quad (2.7)$$

onde  $k$  é o número da realização,  $P_k$  o resultado da mesma e  $\langle P_k \rangle$  a média calculada com  $k$  realizações.

## Capítulo 3

### **Análise Crítica do Modelo do LCPC**

---

Neste capítulo serão descritas algumas deficiências do modelo do LCPC e da sua implementação, apontando-se prováveis soluções, como o objetivo de guiar o desenvolvimento de uma versão melhorada deste modelo. Como resultado desta análise, serão elaborados quatro grupos de propostas.

O primeiro está relacionado com a discretização do problema modelado, ou seja, com a geração da malha de elementos finitos que será simulada;

O segundo grupo diz respeito à forma de efetuar a simulação, tendo em vista algumas características importantes do modelo;

O terceiro grupo de propostas está relacionado com a interpretação dos dados resultantes da aplicação do método de Monte Carlo;

Finalmente, o quarto se refere a aspectos da Mecânica da Fratura que foram negligenciados no modelo.

Algumas críticas são específicas à implementação de Paz [35], utilizada por Duboux [10] e outros [12, 13], não se aplicando à implementação original de Rossi, denominada CESAR-LCPC. Este fato deverá estar claro no texto.

#### **3.1 Preparação do problema**

Uma das primeiras etapas de uma simulação de elementos finitos estocásticos, em particular do modelo de fissuração probabilístico do concreto, é a geração do campo estocástico que representa a grandeza aleatória estudada no corpo.

A técnica mais simples consiste em se sortear aleatoriamente e independente-

mente valores para as grandezas aleatórias a partir de uma distribuição pré-determinada e de seus parâmetros.

Um problema pode ser identificado com esta abordagem: assumindo que a grandeza aleatória reproduzida pode ser representada adequadamente por valores aleatórios não correlacionados, a discretização do domínio divide o mesmo em regiões (elementos) onde a grandeza é constante ou varia suavemente. Como estes elementos possuem tamanho finito, é introduzida uma correlação espacial dependente do tamanho do elemento [58], não relacionada com o campo estocástico que se deseja estudar. Por outro lado, se o campo é autocorrelacionado espacialmente, como normalmente é o caso [8, 16, 58], a correlação é representada de forma insatisfatória por este efeito colateral da discretização. Em particular, a correlação tende a desaparecer com a diminuição do tamanho do elemento.

A solução proposta neste trabalho é, partindo da malha de elementos finitos na qual o problema é subdividido, atribuir a cada elemento um módulo de elasticidade obtido através de um campo estocástico gerado em função não só dos parâmetros da distribuição, mas também de um comprimento de correlação (relacionado possivelmente com o tamanho do agregado). A elasticidade do elemento será uma aproximação do valor do campo sobre o mesmo, como por exemplo o valor do campo sobre o ponto central do elemento<sup>1</sup>.

Desta forma, o efeito dos tamanhos do elemento e do agregado será sentido sem a necessidade de introduzir uma relação direta entre estas quantidades e o desvio padrão. Como apontado por Xi [5] em discussão sobre o desvio padrão presente em [14], esta relação aparece indiretamente como consequência da homogeneização das propriedades [58].

Através deste processo, obter-se-á a independência entre o resultado e a discretização, uma vez que no limite, quando se diminui o tamanho dos elementos, as elasticidades dos mesmos serão os próprios valores do campo estocástico e manterão a correlação desejada.

A mesma abordagem deve ser empregada para as resistências, adotando-se os valores do campo aleatório correlacionado sobre os nós como os valores locais da resis-

---

<sup>1</sup>Ver Lima [29, p. 20] para outras sugestões.

tência  $f_i$ . O efeito de escala pode ser levado em conta segundo as fórmulas empíricas, caso seja desejado, tomando-se como volume do elemento  $V_E$  uma área fixa relacionada diretamente com o comprimento de correlação.

Uma questão independente é a utilização da distribuição normal para o sorteio das resistências. Outras distribuições poderiam ser utilizadas, em particular a distribuição de Weibull, contudo os dados experimentais [45] não são suficientes para decidir entre as duas. Carmeliet e de Borst [8] utilizaram para fins análogos uma distribuição de valores extremos do tipo III, baseando-se em considerações físicas. Diversas aplicações empregam a distribuição log-normal, a qual possui a significativa vantagem de não gerar valores nulos ou negativos. Além disto, esta distribuição possui uma “cauda” mais longa, o que permite obter maior ductilidade para a simulação (atualmente obtida com o aumento do desvio padrão, sob pena de se gerar ocasionalmente valores negativos [35]). Optando-se por empregar uma distribuição não-gaussiana, pode-se testar também (desde que o elemento finito seja suficientemente pequeno para justificá-la) uma distribuição que possua dois picos de probabilidade, relativos às propriedades dos dois principais constituintes do material (matriz e agregado).

### 3.2 Implementação

Uma das formas mais simples de efetuar uma simulação de fissuras discretas é inserir elementos de interface nas arestas do modelo de elementos finitos. Desta forma, a fissura segue o contorno dos elementos sem haver a necessidade de introduzir novos nós ou elementos na malha. Entretanto, a trajetória da fissura deixa de corresponder à prevista pelo modelo de fissuração que se está simulando.

Em sua implementação do modelo de fissuração discreta probabilística do concreto, Paz [35] descreve em detalhes a formulação de um elemento de interface, a qual difere da formulação de Rossi [40]<sup>2</sup>. Na formulação de Paz, o elemento possui uma espessura fictícia  $h$ , pequena o suficiente para não interferir no resultado da simulação antes de romper. Desta forma, o elemento possui uma rigidez muito maior que seus vizinhos, interferindo drasticamente no condicionamento da matriz de rigidez, o que prejudica o

---

<sup>2</sup>Na qual é utilizado um elemento quadrilátero de seis nós, interpolado quadraticamente na direção longitudinal e linearmente na direção normal ao elemento, com espessura “infinitamente pequena”.

desempenho de métodos iterativos de solução como o gradiente conjugado.

Por outro lado, as alternativas possuem seus próprios problemas: métodos adaptativos ou de ajuste da malha provocam a criação de novos nós (e em alguns casos elementos), provocando dificuldades de implementação e dificuldades numéricas como o aumento da largura de banda da matriz de rigidez (o que sugeriria o emprego de esquemas de armazenamento elemento-por-elemento) e distorção excessiva dos elementos<sup>3</sup>, como argumentado por Alfaiate *et al.* [1].

Logo, a escolha da utilização dos elementos de interface é resultado de um balanço entre os problemas desta alternativa e os problemas relativos à remalhagem, sendo ambas as escolhas válidas.

Aponta-se apenas o fato de que o critério de ruptura é baseado na tensão normal ao elemento de interface, calculada no centro do mesmo. Supondo que não exista um elemento de interface correspondente à direção mais solicitada, é possível que a ruptura seja erroneamente deslocada para um ponto diferente do mais solicitado. Na implementação proposta, o nó mais solicitado é determinado *a priori*, e apenas em seguida tenta-se aproximar a direção da fissura sobre a malha. Logo, a localização da fissura não pode ser falseada pela configuração local da malha.

Em [1], tal discussão não se aplica porque está sendo simulada uma única fissura, partindo de um entalhe (*notch*).

Propõe-se assumir o risco de adotar a abordagem de alteração da topologia da malha, abrindo-se mão dos elementos de interface, com o objetivo de obter maior eficiência (ao diminuir o número de graus de liberdade) e maior flexibilidade (em algumas situações a malha pode ser ajustada para melhor aproximar a direção da fissura). A mudança de topologia é conceitualmente e numericamente equivalente (ver Apêndice B) e permite simular adequadamente um material elasto-frágil<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>O que pode ser corrigido ao custo da maior complexidade do código, alternativa empregada nos softwares FRANC2D/3D e QUEBRA2D.

<sup>4</sup>Outros tipos de comportamento, como *softening*, podem ser simulados introduzindo elementos de interface na abertura criada, reduzindo as vantagens do método, pois a reestruturação da malha se torna mais trabalhosa (ver seção 6.3).

### 3.3 Processo de Monte Carlo

No modelo probabilístico, cada experimento numérico, ou realização do campo estocástico, gera um resultado que, como o experimental, está distribuído em torno de uma média mantendo um certo desvio da mesma. Através do processo de Monte Carlo, é possível a partir destas realizações obter a média, ou valor esperado, do experimento. Um outro dado do processo é o desvio padrão, desprezado no modelo probabilístico padrão.

Fazendo-se uma análise estatística do comportamento do elemento de interface elasto-frágil, como mostrado no Capítulo 4, verifica-se que o processo de Monte Carlo converge para um valor determinado, o que é coerente com os resultados obtidos até então [10, 12, 14, 35]. Além disto, este valor é equivalente ao valor obtido utilizando-se uma relação constitutiva com *softening*, o que sugere que o “modelo material” elasto-frágil torna-se apenas um artifício de cálculo. Embora as conclusões do capítulo tenham sido baseadas na análise de um único elemento, em um caso unidimensional, é possível extrapolar algumas das conclusões.

O fato da realização individual não possuir um significado definido é obviamente insatisfatório. Um dos objetivos do modelo probabilístico é obter uma aproximação plausível para um resultado experimental, a qual deveria estar representada pela realização, não pelo resultado de Monte Carlo, o qual é determinístico e representa um comportamento médio em relação a qual não se conhece o desvio.

Propõe-se adaptar o método com este objetivo em mente. A primeira alteração, sugerida pela análise do Capítulo 4, é a utilização do comprimento de correlação.

Uma vez que as realizações individuais correspondam a resultados experimentais, é possível utilizar o desvio padrão entre as realizações como estimativa do desvio padrão real. Este valor possui grande utilidade na análise de confiabilidade, permitindo estabelecer uma faixa de comportamento esperado em lugar de um comportamento padrão. Isto permite obter estimativas melhores do coeficiente de segurança. Além disto, pode-se simular o caráter probabilístico de um problema (não do material), como do ensaio de tração direta.

### 3.4 Aspectos mecânicos

Desde a década de 20, com o trabalho de Griffith [20], sabe-se que não é possível utilizar a tensão como critério de ruptura de um corpo elástico fissurado, uma vez que em tal caso a tensão na ponta da fissura se aproxima de infinito sob qualquer carregamento.

Este fato provocou a falha dos primeiros modelos de elementos finitos que procuraram simular a abertura de fissuras através do uso de elementos elasto-frágeis (determinísticos) com um critério de ruptura baseado na tensão [4, 31, 51]. À medida que a malha é refinada as tensões crescem, o que torna o resultado da simulação não objetivo.

Introduzindo-se alguma não-linearidade na relação constitutiva do material, é possível limitar as tensões na ponta da fissura a um valor finito, permitindo que se continue a utilizar a tensão como critério de fissuração. O sucesso na utilização de tal critério para o método probabilístico [10, 14, 35] deve-se provavelmente ao efeito de suavização de tensões gerado pela incapacidade do modelo de elementos finitos representar adequadamente o campo de deformações próximo à ponta da fissura sem funções de interpolação especiais. Isto permitiu que a tensão se mantivesse em níveis aceitáveis, o que foi ainda acentuado pelo fato das tensões não serem calculadas na ponta da fissura, e sim as tensões a uma certa distância da mesma, no centro do elemento de interface.

O uso da tensão a uma distância fixa da ponta da fissura, desde que a distância seja pequena o suficiente, é equivalente a usar o fator de intensidade de tensões [18], contudo não é este o caso, e ainda assim o limite de tensão neste ponto teria de estar multiplicado por uma constante. A determinação do valor desta constante, provavelmente como função do volume e do grau de aproximação do elemento empregado, pode tornar equivalentes o uso da tensão no nó<sup>5</sup> e o uso do fator de intensidade de tensões. Esta é uma proposta promissora, na opinião do autor. Experimentos numéricos em modelos simples da Mecânica da Fratura (chapa com entalhe, por exemplo), utilizando os resultados analíticos amplamente disponíveis na literatura, permitiriam testar hipóteses ou fórmulas de cálculo para esta constante.

Mesmo quando se utilizam relações constitutivas não-lineares com *softening*, é

---

<sup>5</sup>Encarada como uma aproximação da tensão a uma distância fixa do nó, a ser corrigida pela constante citada.

necessário utilizar a energia de fissuração para evitar a dependência da malha [4, 51].

A proposta deste trabalho é introduzir o critério de Griffith (ver Capítulo 5), o que equivale a adotar a Mecânica da Fratura linear elástica (LEFM). O local da fissura ainda será determinado pela máxima tensão de tração, por ser extremamente dispendioso encontrar o local de máxima liberação de energia.

Contudo, o uso da LEFM também é questionável, pois a mesma prevê resistências muito altas para corpos pequenos e não permite estudar corpos sãos ou com fissuras menores que uma dimensão crítica. Em materiais quase-frágeis, a presença de uma zona de processamento de fissura torna a resistência à fratura variável, contrariando a hipótese básica do critério citado.

Neste trabalho, não se procurou uma solução definitiva, mas apenas um avanço em relação à solução anterior. A solução adotada é válida se o material for suficientemente frágil, se a zona de processamento de fissuras for suficientemente pequena e se houver um tamanho mínimo de fissura (neste caso, imposto pela discretização).

## Capítulo 4

### Análise Estatística do Elemento de Interface

Neste capítulo são apresentadas as bases para a argumentação da seção 3.3, através da análise analítica e numérica de um modelo unidimensional, com o objetivo de demonstrar a importância do comprimento de correlação na simulação de Monte Carlo utilizada pelo método probabilístico.

#### 4.1 Modelo analisado

O modelo mecânico empregado foi a barra e a interface mostrada na Figura 4.1. O experimento numérico consiste em aplicar um deslocamento crescente  $\delta$  à extremidade livre e medir a carga  $P$  resistida pelo elemento de interface. O resultado é a relação  $P - \delta$  para a interface.

Este modelo foi utilizado previamente [12, 13] para introduzir técnicas de análise inversa no contexto do modelo probabilístico do concreto.

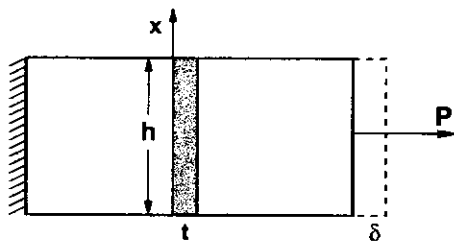


Figura 4.1: Modelo analisado: barra contendo um elemento de interface

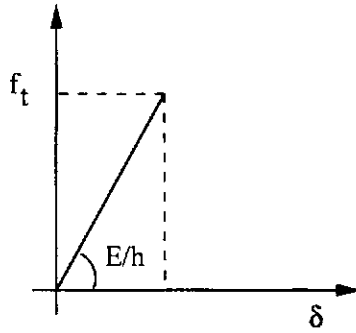


Figura 4.2: Relação constitutiva elasto-frágil para o elemento de interface.

## 4.2 Versão discreta

O problema pode ser formulado usando uma representação discreta para a interface, composta de  $n$  camadas, cada uma possuindo uma relação constitutiva elasto-frágil (Figura 4.2) com resistência à tração  $f_t^i, i = 1, \dots, n$ . Supõe-se que o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  são constantes para todos os elementos, o que simplifica a exposição sem comprometer sua generalidade.

Os valores individuais  $f_t^i$  são sorteados de uma distribuição selecionada, descrita por sua função de densidade de probabilidade  $p_{f_i}(f_t^x)$  e pela função de distribuição acumulada correspondente  $F_{f_i}(f_t^x)$ .

## 4.3 Versão contínua

Quando  $n$  tende a infinito, um campo contínuo é obtido, o qual pode ser devesado de forma mais geral como um campo aleatorio unidimensional  $f_t(x), x \in [0; h]$ , interpretado como a resistência à tração em cada ponto  $x$  do elemento de interface. Supõe-se que a interface perca a continuidade em uma região de dimensão  $dx$  em torno de um ponto  $x$  quando a tensão de tração  $\sigma x$  atinge o valor máximo local  $f_t(x)$ .

As resistências  $f_t(x)$  são novamente sorteadas de uma distribuição descrita pelas funções  $p_{f_i}(f_t^x)$  e  $F_{f_i}(f_t^x)$ , apresentadas anteriormente.

## 4.4 Solução analítica

O objetivo da análise é prever a forma do diagrama  $P \times \delta$  para as realizações individuais e para a média de Monte Carlo.

Para cada realização  $k$ , um conjunto de resistências  $f_{t,k}^i$  para a versão discreta, ou um campo aleatório  $f_{t,k}(x)$  para a versão contínua, é obtido através da distribuição de probabilidade.

Em ambas as versões do modelo, a carga  $P_k$  é obtida integrando-se as tensões na interface:

$$P_k(\delta) = \int_0^h \sigma_k(x) dx \quad (4.1)$$

onde  $\sigma_k(x)$  pode assumir dois valores diferentes, de acordo com o estado do ponto  $x$ :

$$\sigma_k(x) = \frac{E\delta}{t} B_k(\delta, x) \quad (4.2)$$

onde:

$$B_k(\delta, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{E\delta}{t} > f_{t,k}(x); \\ 1 & \text{se } \frac{E\delta}{t} \leq f_{t,k}(x) \end{cases} \quad (4.3)$$

Um procedimento de Monte Carlo é usado em seguida para obter o valor esperado  $\langle P_k(\delta) \rangle$  e o desvio padrão  $\mathbf{D}P_k(\delta)$  para o conjunto de  $N$  realizações:

$$\langle P_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P_k \quad (4.4)$$

$$\mathbf{D}P_k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (P_k - \langle P_k \rangle)^2} \quad (4.5)$$

#### 4.5 Versão discreta de camada única

Este caso particular da versão discreta será analisado separadamente para que se obtenha algumas conclusões primárias.

Para cada realização  $k$ , a interface tem uma resistência homogênea  $f_{t,k}$  e conseqüentemente uma tensão homogênea  $\sigma_k$ , a partir da qual a carga pode ser calculada:

$$P_k(\delta) = h\sigma_k = \frac{Eh\delta}{t} B_k(\delta) \quad (4.6)$$

onde  $B_k(\delta)$  foi definido em (4.3).

Cada realização  $P_k$  possui, previsivelmente, um comportamento elasto-frágil.

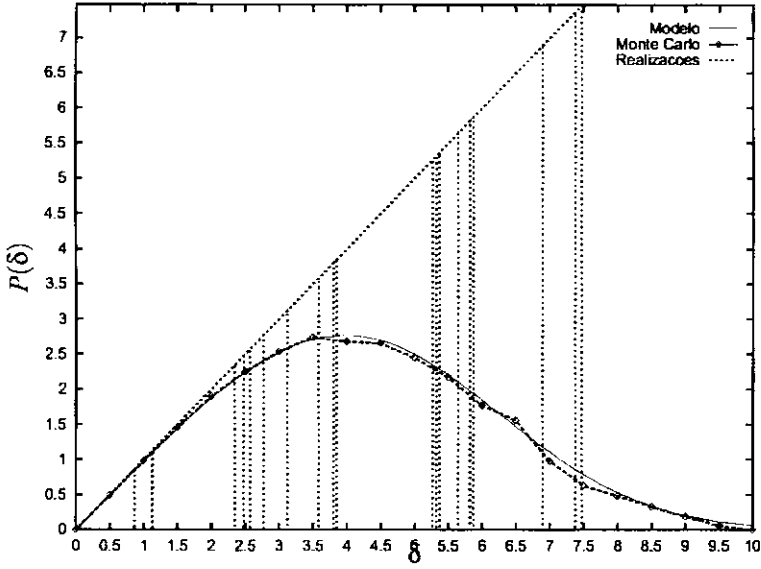


Figura 4.3: 20 realizações de experimentos  $P \times \delta$ , média de Monte Carlo (200 realizações) e média estimada por (4.10). Dados:  $E = 1, t = 1, h = 1, f_{t,\mu} = 5, f_{t,\sigma} = 2, n = 1$  (interface discreta com uma única camada).

A média  $\langle P_k(\delta) \rangle$  para um número infinito de realizações pode ser calculada como segue:

$$\langle P_k(\delta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Eh\delta}{t} B_k(\delta) p(f_t) df_t \quad (4.7)$$

$$= \frac{Eh\delta}{t} \langle B_k(\delta) \rangle \quad (4.8)$$

Pode-se mostrar facilmente que:

$$\langle B_k(\delta) \rangle = 1 - F_{f_t} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \quad (4.9)$$

Logo:

$$\langle P_k(\delta) \rangle = \frac{Eh\delta}{t} \left[ 1 - F_{f_t} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \right] \quad (4.10)$$

Este resultado, juntamente com algumas realizações individuais, pode ser visto na Figura 4.3. Neste caso, uma distribuição normal foi empregada, com média  $f_{t,\mu}$  e desvio padrão  $f_{t,\sigma}$ .

É notável que a média de Monte Carlo seja suave e corresponda a um comportamento *softening*, embora as realizações individuais sejam puramente elasto-frágeis e

descontínuas. Será mostrado que este também é o caso para a versão discreta com número arbitrário de camadas.

Como uma primeira conclusão deste exemplo simplificado, pode-se verificar que a equação (4.10) representa uma solução fechada para um problema determinístico, para o qual o elemento de interface tem um comportamento *softening*, dado pela equação (4.11), derivada diretamente de (4.10):

$$\sigma = \frac{E\delta}{t} \left[ 1 - F_{f_i} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \right] \quad (4.11)$$

Esta relação constitutiva é função da distribuição e de seus parâmetros, por exemplo a média  $f_{i,\mu}$  e o desvio padrão  $f_{i,\sigma}$  no caso da distribuição normal.

A Figura 4.3 mostra também que as realizações individuais não possuem qualquer semelhança com a solução obtida após a convergência do processo de Monte Carlo, e que o modelo material elasto-frágil é útil apenas como método alternativo de resolução.

A falta de significado para as realizações individuais é óbvia neste primeiro exemplo, mas não tão evidente nos seguintes, e pode estar oculta em outras aplicações do modelo probabilístico, onde a suavização do resultado surge como produto do processo de Monte Carlo.

## 4.6 Versão discreta

### 4.6.1 Valor médio de $P(\delta)$

Se o elemento de interface é dividido em  $n$  partes iguais, cada uma com altura  $h/n$ , há apenas  $n$  valores diferentes para  $\sigma_k(x)$ , os quais serão representados por  $\sigma_k^i, i = 1, \dots, n$ .

O valor de  $P_k$  pode ser calculado pela análoga discreta da equação (4.1):

$$P_k(\delta) = \sum_{i=1}^n \frac{h}{n} \sigma_k^i \quad (4.12)$$

Para a qual cada  $\sigma_k^i$  pode ser calculada por (4.2), resultando:

$$P_k(\delta) = \sum_{i=1}^n \frac{Eh\delta}{nt} B_k^i(\delta) \quad (4.13)$$

onde  $B_k^i(\delta)$  é definido por (4.3).

O valor esperado  $\langle P_k \rangle$  pode ser calculado por:

$$\langle P_k \rangle = \frac{Eh\delta}{nt} \left\langle \sum_{i=1}^n B_k^i(\delta) \right\rangle \quad (4.14)$$

sabendo-se que  $\langle \sum_{i=1}^n B_k^i(\delta) \rangle = n \langle B_k(\delta) \rangle$ , e utilizando (4.9):

$$\langle P_k \rangle = \frac{Eh\delta}{t} \left[ 1 - F_{f_l} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \right] \quad (4.15)$$

Pode-se notar que esta equação é igual a (4.10), o que mostra que a sempre se obtém o mesmo resultado para a interface discretizada, mesmo para o caso degenerado  $n = 1$ . De fato, as equações (4.10) e (4.15) mostram que o resultado não depende de  $n$ .

#### 4.6.2 Desvio padrão de $P(\delta)$

Uma segunda informação importante sobre  $P(\delta)$  é seu desvio padrão em torno do valor esperado. Foi mostrado acima que um cálculo de  $\langle P_k(\delta) \rangle$  permite obter seu valor esperado para qualquer discretização, contudo o mesmo não é verdade para o desvio padrão  $DP_k(\delta)$ .

Usando fórmulas padrões, pode-se mostrar que:

$$DP_k = \frac{Eh\delta}{nt} \mathbf{D} \sum_{i=1}^n B_k^i(\delta) \quad (4.16)$$

$$= \frac{Eh\delta}{\sqrt{nt}} \sqrt{\left( 1 - F_{f_l} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \right) F_{f_l} \left( \frac{E\delta}{t} \right)} \quad (4.17)$$

O desvio aproxima-se lentamente de zero quando o número de elementos aumenta, mas há sempre algum desvio introduzido apenas pela discretização.

Será mostrado que a origem deste desvio está relacionada com o fato de haver correlação unitária entre pontos sobre o mesmo elemento. Esta correlação, quando inserida na função de distribuição e substituída em (4.35), é a fonte do desvio indesejado.

## 4.7 Elemento contínuo

### 4.7.1 Valor esperado de $P$

De (4.1) e (4.2):

$$P_k(\delta) = \int_0^h \sigma_k(x) dx = \frac{E\delta}{t} \int_0^h B_k(x) dx \quad (4.18)$$

Mais uma vez, é trivial obter, a partir das propriedades da integral de campos aleatórios:

$$P_k(\delta) = \frac{Eh\delta}{t} \left[ 1 - F_{f_t} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \right] \quad (4.19)$$

Deve-se notar que (4.21) é o mesmo que (4.15) e seu caso especial (4.10). Isto significa que um elemento com infinitas camadas é capaz de reproduzir o “resultado de Monte Carlo” sem o processo de Monte Carlo.

Se houver correlação no campo  $f_t(x)$ , (4.19) seria obtida apenas após a simulação de Monte Carlo, como anteriormente:

$$\langle P_k(\delta) \rangle = \int_0^h \langle \sigma_k(x) \rangle dx = \frac{E\delta}{t} \int_0^h \langle B_k(x) \rangle dx \quad (4.20)$$

$$= \frac{Eh\delta}{t} \left[ 1 - F_{f_t} \left( \frac{E\delta}{t} \right) \right] \quad (4.21)$$

#### 4.7.2 Desvio padrão de $P$

Quando não há correlação, o resultado é quase-determinístico (com probabilidade 1) e não há desvio padrão. A tarefa de obter o desvio padrão para o caso geral (ou seja, com correlação) é significativamente mais difícil.

A equação (A.40) será utilizada:

$$\mathbf{D}P_k(\delta)^2 = \left[ \mathbf{D} \int_0^h \langle \sigma_k(x) \rangle dx \right]^2 \quad (4.22)$$

$$= \int_0^h \int_0^h B_{\sigma}^0(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.23)$$

onde  $B_{\sigma}^0(x_1, x_2)$  é a covariância do campo estocástico, definida em (A.33).

Esta equação pode ser simplificada ao se assumir que o campo é homogêneo. Neste caso,  $B_{\sigma}^0(x_1, x_2)$  depende apenas da distância entre  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja,  $B_{\sigma}^0(x_1, x_2) = B_{\sigma}^0(x_1 - x_2)$ . Portanto:

$$\mathbf{D}P_k(\delta)^2 = 2 \int_0^h (h-x) B_{\sigma}^0(x) dx \quad (4.24)$$

Examinando esta equação, verifica-se que o desvio padrão depende apenas da covariância do campo. No caso particular onde o campo é não correlacionado,  $B_{\sigma}^0(x) = 0$

para  $x \neq 0$ , não havendo portanto desvio padrão, caso em que o resultado da realização é igual ao valor esperado com probabilidade um.

A última tarefa é o cálculo desta covariância a partir da função conhecida, a covariância das resistências à tração  $B_{f_i}^0(x_1, x_2)$ . Da definição de covariância (A.33), usando (4.2) e (4.9):

$$B_{\sigma}^0(x_1, x_2) = \langle \sigma_k(x_1)\sigma_k(x_2) - \langle \sigma_k(x) \rangle^2 \rangle \quad (4.25)$$

$$= \langle \sigma' S(x_1)\sigma' S(x_2) - \sigma'^2(1 - F_{f_i}(\sigma'))^2 \rangle \quad (4.26)$$

$$= \sigma'^2(\langle S(x_1)S(x_2) \rangle - (1 - F_{f_i}(\sigma'))^2) \quad (4.27)$$

onde  $\sigma' = \frac{E\delta}{l}$ .

A quantidade ainda indeterminada em (4.27) é  $\langle S(x_1)S(x_2) \rangle$ . Como  $S(x)$  tem uma distribuição discreta e  $S(x_1)S(x_2)$  é não nulo apenas quando  $S(x_1)$  e  $S(x_2)$  são ambos não nulos, esta quantidade pode ser expressa como:

$$\langle S(x_1)S(x_2) \rangle = P(S(x_1) = 1 \text{ e } S(x_2) = 1) \quad (4.28)$$

$$= P(f_i(x_1) > \sigma' \text{ e } f_i(x_2) > \sigma') \quad (4.29)$$

onde a probabilidade pode ser obtida com a ajuda da função de distribuição de dimensão finita  $F_{f_i(x_1), f_i(x_2)}(p, q)$ , para a qual:

$$F_{f_i(x_1), f_i(x_2)}(p, q) = P(f_i(x_1) < p \text{ e } f_i(x_2) < q) \quad (4.30)$$

utilizando esta equação e o fato de que a função de distribuição marginal  $F_{f_i}(f_i^x)$  é independente do ponto específico, tem-se:

$$\langle S(x_1)S(x_2) \rangle = 1 - 2F_{f_i}(\sigma') + F_{f_i(x_1), f_i(x_2)}(\sigma', \sigma') \quad (4.31)$$

Substituindo-se (4.31) em (4.27), tem-se:

$$B_{\sigma}^0(x_1, x_2) = \sigma'^2(1 - 2F_{f_i} + F_{f_i(x_1), f_i(x_2)}(\sigma', \sigma') - (1 - F_{f_i}(\sigma'))^2) \quad (4.32)$$

$$= \sigma'^2(F_{f_i(x_1), f_i(x_2)}(\sigma', \sigma') - F_{f_i}(\sigma')^2) \quad (4.33)$$

É interessante notar que, quando as resistências  $f_i$  não são correlacionadas, a função de distribuição conjunta é simplesmente  $F_{f_i(x_1), f_i(x_2)}(p, q) = F_{f_i}(p)F_{f_i}(q)$ , o que faria  $B_{\sigma}^0(x_1, x_2) = 0$  e  $DP = 0$  como esperado.

Finalmente, levando-se (4.33) a (4.24), empregando o fato do campo ser homogêneo,  $B_{f_i}^0(x_1, x_2) = B_{f_i}^0(x_1 - x_2)$ , tem-se:

$$\mathbf{DP}^2 = 2\sigma'^2 \int_0^h (h-x) (F_{f_i(0), f_i(x)}(\sigma', \sigma') - F_{f_i}(\sigma')^2) dx \quad (4.34)$$

$$= 2\sigma'^2 \left( \int_0^h (h-x) F_{f_i(0), f_i(x)}(\sigma', \sigma') dx - \frac{h^2}{2} F_{f_i}(\sigma')^2 \right) \quad (4.35)$$

onde a última tarefa é avaliar a integral, quando a função de distribuição conjunta é conhecida.

Esta equação pode ser solucionada numericamente, sendo provavelmente a melhor abordagem a simples simulação de Monte Carlo. O resultado mais importante é a prova de que o desvio padrão depende apenas da correlação, através da distribuição conjunta, resultado que pode ser aplicado também ao caso discreto, utilizando-se uma função de correlação adequada (ver [59]).

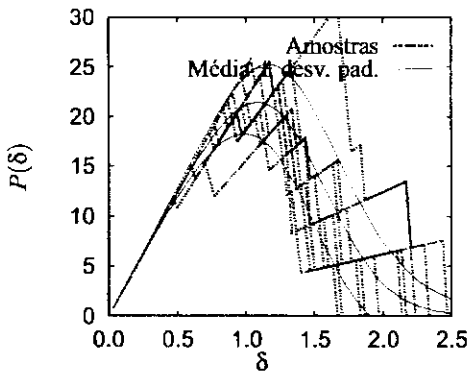
## 4.8 Análise numérica

Se for adotada uma abordagem na qual o elemento de interface é aproximado por um modelo dividido em  $n$  partes com resistências não correlacionadas, abordagem adotada por alguns artigos [13], a equação (4.17) mostra claramente a dependência entre o desvio padrão e o número de partes.

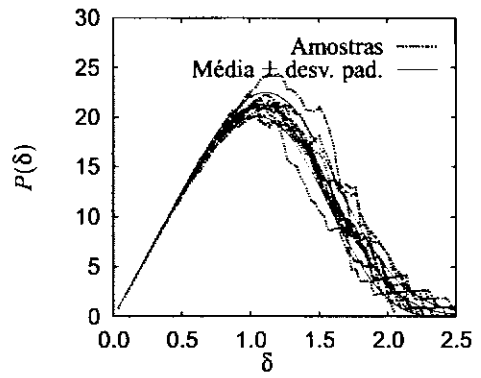
A Figura 4.4 mostra alguns resultados. Cada figura mostra a média e o desvio padrão, estimados por (4.17), juntamente com algumas realizações representativas. Valores aleatórios gaussianos não correlacionados foram utilizados para as resistências  $f_i^i$ .

Este desvio indesejado não pode ser retirado sem alterar o resultado. Entretanto, se algum desvio for esperado, oriundo da correlação do campo verdadeiro, este desvio pode ser introduzido artificialmente tornando o campo correlacionado.

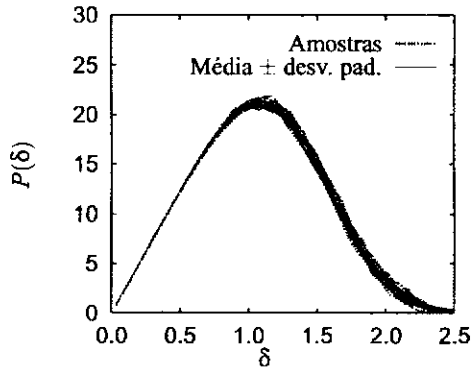
A Figura 4.5 mostra os mesmos experimentos numéricos da Figura 4.4, utilizando valores correlacionados para o campo. Demonstra-se desta forma que o desvio mantém um valor consistente, o qual pode ser obtido por (4.24), independente do refinamento, o que é o comportamento desejado. O desvio foi calculado diretamente através da



(a)  $n = 8$

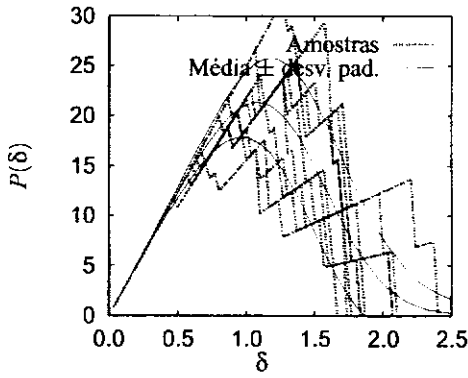


(b)  $n = 64$

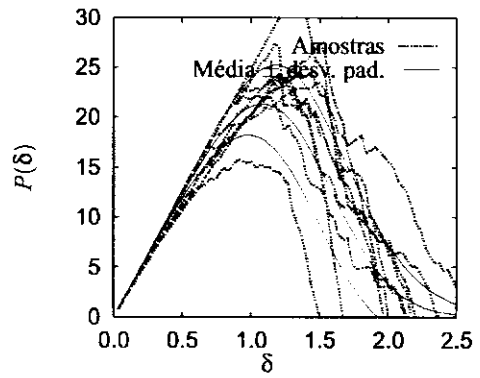


(c)  $n = 512$

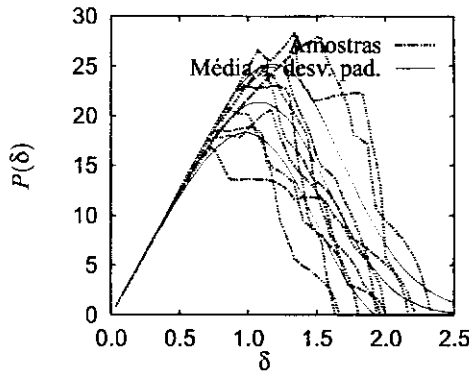
Figura 4.4: Resultados numéricos para 10000 realizações (10 amostras estão representadas) de um campo não correlacionado, dados  $E = 5$ ,  $t = 1$ ,  $h = 5$ ,  $\mu(f_i) = 7$  e  $\mathbf{D}f_i = 2$ .



(a)  $n = 8$



(b)  $n = 64$



(c)  $n = 512$

Figura 4.5: Resultados numéricos para 10000 realizações (10 amostras estão representadas) de um campo correlacionado, dados  $E = 5$ ,  $t = 1$ ,  $h = 5$ ,  $\mu(f_i) = 7$ ,  $\mathbf{D}f_i = 2$  e  $l = 0.554$ .

simulação de Monte Carlo, com 10000 realizações. A covariância utilizada foi:

$$B_{F_i}^0(x, y) = \mathbf{D}f_i^2 \exp\left(-\pi \left(\frac{x-y}{2l}\right)^2\right) \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{D}f_i$  é o desvio padrão das resistências e  $l$  é o comprimento de correlação. Nos exemplos,  $l$  foi escolhido de forma a se obter uma variância comparável aos resultados com 8 elementos.

## Capítulo 5

### Tópicos de Mecânica da Fratura Linear Elástica

---

#### 5.1 Histórico

A necessidade da Mecânica da Fratura foi percebida quando Inglis [23] publicou em 1913 sua solução do problema de concentração de tensões em uma cavidade elipsoidal em um sólido elástico infinito, apontando que as tensões tendem a infinito quando a cavidade tende a uma linha.

Baseando-se neste resultado, Griffith [20] concluiu que a tensão não pode ser utilizada como critério de ruptura em um sólido fissurado e propôs que a propagação de uma fissura deve requerer uma determinada quantidade de energia superficial específica (por unidade de área), a qual o mesmo associou com a energia  $\gamma_s$  necessária para quebrar as ligações microestruturais do sólido. Esta energia é proveniente da liberação da energia de deformação armazenada no corpo, medida pela taxa de liberação de energia (por unidade de área)  $G$ .

Pode-se generalizar esta afirmação para o caso não-linear e evitar os problemas com a interpretação física da quantidade  $\gamma_s$  (a qual não corresponde à energia de superfície quando medida por outros meios) definindo um parâmetro denominado resistência à fratura  $R$ , a ser determinado experimentalmente. Em concreto, costuma-se utilizar como  $R$  a energia de fissuração  $G_F$ , medida a partir do trabalho realizado pelas forças externas, através da área do diagrama carga-deslocamento.

O critério de Griffith pode ser expresso como

$$G = R \tag{5.1}$$

Este é um critério global, que associa uma liberação de energia ao nível estrutural com a propagação da fissura. O próximo avanço foi a introdução do conceito de fator de intensidade de tensões<sup>1</sup>  $K_I$  por Irwin [24] em 1957, o qual permite definir um critério de ruptura equivalente ao global mas que possui uma relação direta com o campo de tensões nas proximidades da ponta da fissura, o que permitiu a larga aplicação da Mecânica da Fratura. Para Irwin, o critério de propagação da fissura (no modo I) é  $K_I = K_{Ic}$ , onde  $K_{Ic}$  é a tenacidade à fratura do material. Utiliza-se a notação  $G_c$  para a resistência à fratura  $R$  quando se obtém o valor da mesma através da relação  $G_c = K_{Ic}^2/E$ .

Finalmente, em 1968 Rice [38] definiu a integral  $J$ , a qual permite calcular a liberação de energia global de um corpo elástico, a partir de uma integral de linha<sup>2</sup> na vizinhança da ponta da fissura, fechando as bases da Mecânica da Fratura Linear Elástica (LEFM).

Como tanto os fatores de intensidade de tensões quanto a integral  $J$  carecem da generalidade dos conceitos globais ( $G$  e  $R$ ), neste trabalho optou-se por trabalhar apenas com estes últimos. Sabendo-se que no caso linear elástico, utilizado como primeira aproximação<sup>3</sup>, a resistência  $R$  é uma propriedade do material, a utilização do critério de ruptura da equação (5.1) requer apenas o cálculo da liberação de energia  $G$ .

O uso de um modelo linear se justifica apenas na abordagem probabilística. As tentativas de aplicar a LEFM diretamente ao concreto datam de 1961, com o trabalho de Kaplan [25], mas os repetidos fracassos levaram à adoção da Mecânica da Fratura não-linear (NLFM) e ao desenvolvimento dos numerosos modelos de fissuração atualmente disponíveis. Em particular, verifica-se experimentalmente que a energia de fissuração  $G_F$ , medida a partir do trabalho das forças externas, é consistentemente superior ao valor  $G_c$  obtido através da tenacidade à fratura, além de variar com a geometria do corpo de prova, contrariando as hipóteses básicas da LEFM.

---

<sup>1</sup>Há três modos de fissuração e um fator para cada modo:  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ . Neste trabalho, apenas o modo I (abertura) é considerado.

<sup>2</sup>A qual pode ser facilmente convertida em integral de domínio, como feito em [32].

<sup>3</sup>Ver também a discussão ao final da seção 3.4.

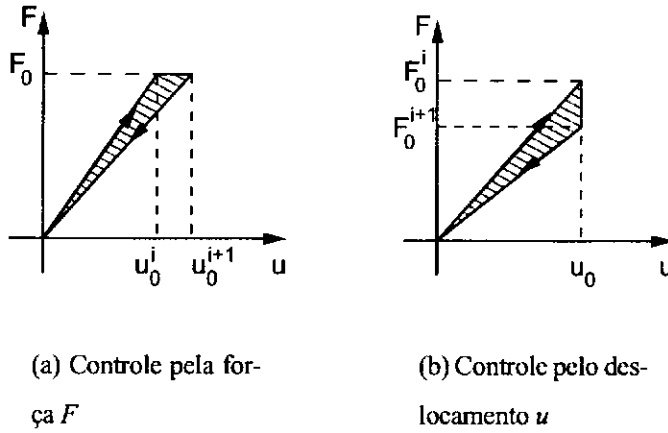


Figura 5.1: Liberação de energia  $G.A$

## 5.2 Taxa de liberação de energia

Para efeito de simplificação, na discussão abaixo se supõe um material perfeitamente elástico e linear, mesmo que alguns dos resultados não dependam desta restrição. Em particular, assume-se que a energia de deformação é igual à energia de deformação complementar [28, 55] e que não há deformação permanente.

### 5.2.1 Modelo contínuo

Seja um corpo  $\Omega$  delimitado por um contorno  $\Gamma$ , contendo uma fissura  $\Gamma_F$ , submetido a condições de contorno de deslocamento prescrito ( $u = \bar{u}$ ) em  $\Gamma_u$  e forças prescritas ( $F = \bar{F}$ ) em  $\Gamma_p$ .

Fazendo a fissura sofrer um incremento  $d\Gamma_F$ , mantendo constantes as condições de contorno, verifica-se uma alteração nos deslocamentos em  $\Gamma_p$  e nas forças em  $\Gamma_u$ . De forma simplificada, os deslocamentos tendem a aumentar e as reações nos pontos de deslocamento imposto tendem a diminuir.

Na Figura 5.1, estão representados os casos simplificados em que se tem apenas uma força e seu deslocamento correspondente, com condições de força prescrita (Figura 5.1(a)) e deslocamento prescrito (Figura 5.1(b)).

Verifica-se que há uma diferença entre o trabalho realizado pelas forças externas durante o carregamento e o trabalho realizado pelo corpo durante o descarregamento. Esta diferença está representada pela parte destacada na Figura 5.1, correspondendo à energia

liberada pelo processo de fissuração. Representando o incremento da fissura pelo seu aumento de área  $dA$ , tem-se que a liberação de energia por unidade de área, ou taxa de liberação de energia, é dada por [28]

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( F \frac{\partial u}{\partial A} - u \frac{\partial F}{\partial A} \right) d\Gamma \quad (5.2)$$

resultado este que pode ser visualizado facilmente na Figura 5.1.

Como esta equação utiliza apenas os valores no contorno, a mesma pode ser separada em

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} \bar{F} \frac{\partial u}{\partial A} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \bar{u} \frac{\partial F}{\partial A} d\Gamma \quad (5.3)$$

sabendo-se que  $u$  e  $F$  são constantes em determinadas partes do contorno.

### 5.2.2 Modelo discreto

Em um modelo discreto, a equação correspondente a (5.3) é

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A} \quad (5.4)$$

onde  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{u}$  são os vetores de forças externas e deslocamentos, respectivamente.  $dA$  é o incremento de área da fissura.

Dentre as formas sugeridas em [28], escolheu-se calcular  $G$  diretamente através de (5.4), aproximando-se as derivadas por diferenças finitas. Calculam-se os deslocamentos  $\mathbf{u}^i$  e forças  $\mathbf{F}^i$  no estado inicial, cria-se uma fissura de área  $\Delta A$  no corpo e determinam-se os deslocamentos  $\mathbf{u}^{i+1}$  e forças  $\mathbf{F}^{i+1}$  no estado final. De (5.4), tem-se

$$G^i = \frac{1}{2} \mathbf{F}^i \cdot \frac{\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i}{dA} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^i \cdot \frac{\mathbf{F}^{i+1} - \mathbf{F}^i}{dA} \quad (5.5)$$

Desde que a alteração causada pelo crescimento das fissuras seja pequena, o cálculo dos valores da iteração  $i + 1$  pode ser efetuado por um método iterativo, utilizando os valores na iteração anterior como valor inicial. Sabendo-se que estes valores serão também úteis para o cálculo de  $G^{i+1}$ , conclui-se que o método é suficientemente econômico e geral, ressaltando-se que não é necessário implementar rotinas adicionais (como seria necessário se fosse adotado o método da integral  $J$ ) nem utilizar malhas excessivamente refinadas (como nos métodos que calculam o fator de intensidade de tensões).

O valor exato do carregamento não é essencial para o cálculo de  $G$ , desde que o carregamento seja proporcional. Isto é muito importante, uma vez que se deseja utilizar o valor de  $G$  para determinar o valor do carregamento em que ocorre a abertura ou propagação de uma fissura. Com carregamento proporcional, tem-se

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (5.6)$$

e, portanto

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (5.7)$$

Definindo  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_0$

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{K}\mathbf{u}_0 \quad (5.8)$$

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}_0 \quad (5.9)$$

logo, é necessário apenas calcular  $\mathbf{u}_0$  correspondente a  $\lambda = 1$ , tendo-se os demais valores calculados por (5.9).

Substituindo-se (5.6) e (5.9) em (5.5), tem-se

$$G^i = \frac{1}{2}(\lambda^i)^2 \left( \mathbf{F}_0^i \cdot \frac{\mathbf{u}_0^{i+1} - \mathbf{u}_0^i}{dA} - \mathbf{u}_0^i \cdot \frac{\mathbf{F}_0^{i+1} - \mathbf{F}_0^i}{dA} \right) \quad (5.10)$$

onde as quantidades  $\mathbf{F}_0^k$  e  $\mathbf{u}_0^k$  são calculadas para  $\lambda = 1$ .

Desta equação, pode-se obter facilmente  $\lambda$  para que  $G$  assuma qualquer valor desejado, por exemplo o valor de  $R$  para o material.

$$\lambda = \sqrt{R/G_0} \quad (5.11)$$

No caso não proporcional, tem-se um carregamento permanente  $F_p$ , causando um deslocamento permanente  $u_p$ . O carregamento total e o deslocamento correspondente são dados por:

$$F = F_p + \lambda F_0 \quad (5.12)$$

$$u = u_p + \lambda u_0 \quad (5.13)$$

Substituindo-se (5.12) e (5.13) em (5.5), e assumindo-se  $G = R$  (equação 5.1), é possível obter uma equação não-linear em  $\lambda$ , a ser utilizada em lugar de (5.11).

## Capítulo 6

### **Proposta Alternativa de Implementação**

---

Neste capítulo será descrita uma implementação alternativa do método probabilístico, com o objetivo de mostrar a possibilidade de se formular um modelo coerente com os princípios expostos na seção 2.1, sem os problemas descritos no Capítulo 3. Como as justificativas foram apresentadas anteriormente, será dada ênfase à implementação propriamente dita.

Ao final do capítulo, será sugerida uma forma de inserir os fragmentos de código do Apêndice C em um programa pré-existente de elementos finitos.

#### **6.1 Geração das propriedades aleatórias**

Supõe-se (ver seção A.3 no Apêndice A) que é possível gerar um campo aleatório em forma de grade, não obrigatoriamente igualmente espaçada nas duas direções, uma vez que o número de intervalos precisa obedecer simultaneamente ao critério descrito adiante na seção 6.1.1 e à restrição do método espectral, o qual exige a utilização de potências de dois por empregar a FFT.

De posse deste campo, a seção 6.1.3 explica como obter os valores nodais exigidos pela implementação.

Os dados de entrada para a geração do campo devem ser obtidos juntamente com os demais dados do problema, sendo eles:

- Resistência média do campo  $f_{t,\mu}$ ;
- Desvio padrão da resistência  $f_{t,\sigma}$ ;

- Comprimento de correlação  $f_{t,l}$ .

Por analogia, pode-se utilizar o mesmo procedimento para a determinação dos módulos de elasticidade dos elementos. Como discutido na seção 3.1, calcula-se o valor do campo aleatório no centróide do elemento.

### 6.1.1 Preparação da grade

De posse de todas as coordenadas nodais, é necessário obter as coordenadas de um retângulo que contenha todo o modelo. Estas coordenadas, denominadas aqui  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , serão utilizadas para determinar o tamanho da grade necessária. Deve-se adicionar uma “margem” de um comprimento de correlação em cada lado para contornar a periodicidade do campo obtido pelo método espectral descrito no Apêndice A.3.

Em seguida, de posse do comprimento de correlação é possível estimar o espaçamento máximo entre os pontos do grid, sabendo-se que para uma função de correlação isotrópica “gaussiana” como (6.1), a densidade espectral é dada por (6.2).

$$B(x) = \sigma^2 \exp\left(-\pi\left(\frac{x}{2l}\right)^2\right) \quad (6.1)$$

$$f(\omega) = \frac{l}{\pi} \sigma^2 \exp\left(-\frac{1}{\pi}(\omega l)^2\right) \quad (6.2)$$

A densidade espectral cai para 1% de seu valor máximo na frequência  $\omega = \frac{\sqrt{4.6\pi}}{l}$ . Sabendo-se que a frequência máxima (denominada frequência de *Nyquist*) presente em uma representação discreta de espaçamento  $\Delta$  é  $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta}$ , calcula-se o espaçamento necessário por:

$$\frac{\pi}{\Delta} \geq \frac{\sqrt{4.6\pi}}{l} \quad (6.3)$$

ou seja:

$$\Delta \geq \sqrt{\frac{\pi}{4.6}} l = 0.826l \quad (6.4)$$

O valor conservativo de  $0.8l$  será adotado para estimar a densidade de pontos necessária para cobrir o campo:

$$N' = \frac{x_2 - x_1 + 2l}{0.8l} + 1 \quad (6.5)$$

$$M' = \frac{y_2 - y_1 + 2l}{0.8l} + 1 \quad (6.6)$$

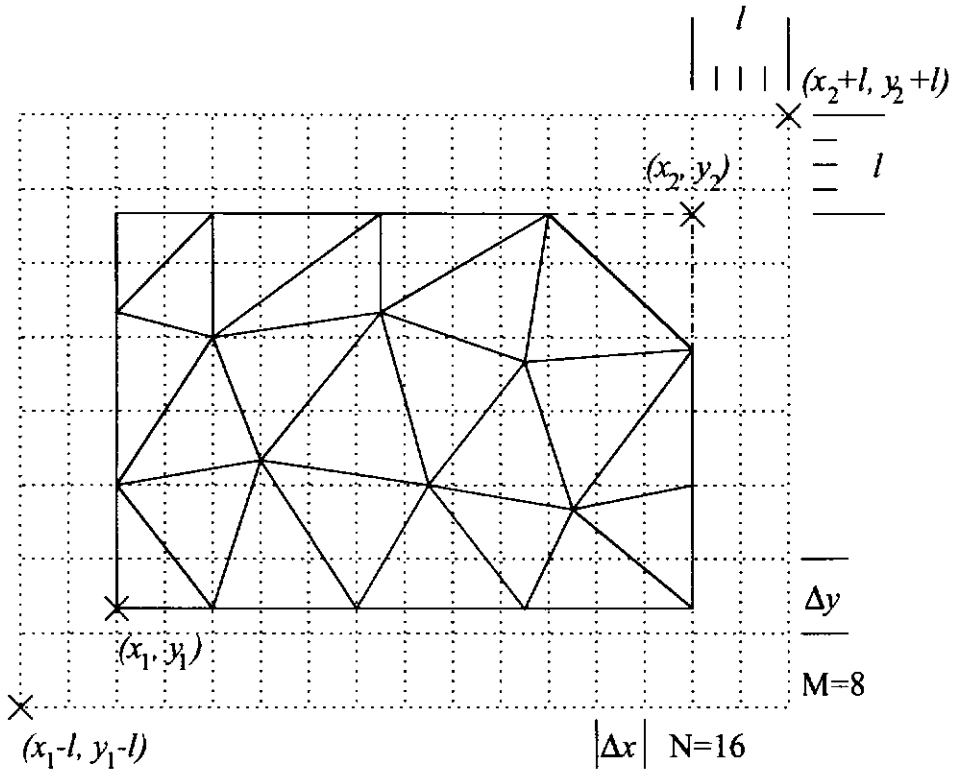


Figura 6.1: Grade para geração do campo aleatório.

valores que devem ser arredondados para a potência de dois mais próxima, resultando nos valores  $N$  e  $M$ . Os espaçamentos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são dados por

$$\Delta x = \frac{x_2 - x_1 + 2l}{N - 1} \quad (6.7)$$

$$\Delta y = \frac{y_2 - y_1 + 2l}{M - 1} \quad (6.8)$$

A Figura 6.1 ilustra as grandezas citadas nesta seção.

### 6.1.2 Cálculo da função de correlação e geração do campo

O campo será gerado de forma discreta, em uma grade de índices inteiros  $f_{nm}$ , com  $n = 1, \dots, N$  e  $m = 1, \dots, M$ . Calculam-se os valores da função de correlação para um quarto do campo (os demais valores são refletidos pelo procedimento de geração do campo) por

$$B_{nm} = \sigma(f_l)^2 \exp \left( -\frac{\pi}{4l^2} \left( ((n-1)\Delta x)^2 + ((m-1)\Delta y)^2 \right) \right) \quad (6.9)$$

O campo discreto gerado possui as características desejadas. Sua relação com o

campo contínuo é dada por:

$$f_{nm} = f_l(x_1 - l + (n - 1)\Delta x, y_1 - l + (m - 1)\Delta y) \quad (6.10)$$

### 6.1.3 Interpolação dos valores nodais

Definido o campo aleatório discreto, os valores intermediários podem ser interpolados para a obtenção dos valores nodais. Optou-se por uma simples interpolação linear<sup>1</sup>, utilizando-se o quadrilátero que contém o nó desejado.

Para cada nó da malha, determinam-se os índices  $(n, m)$  do vértice superior esquerdo do quadrilátero por

$$n = \text{Int} \left( \frac{x - x_1 + l}{\Delta x} \right) + 1 \quad (6.11)$$

$$m = \text{Int} \left( \frac{y - y_1 + l}{\Delta y} \right) + 1 \quad (6.12)$$

onde  $\text{Int}(z)$  é a parte inteira de  $z$  e  $(x, y)$  são as coordenadas do nó desejado. Se  $f_{nm}$  é o valor do campo aleatório para os índices dados, então

$$x' = \frac{x - x_1 + l}{\Delta x} - n + 1 \quad (6.13)$$

$$y' = \frac{y - y_1 + l}{\Delta y} - m + 1 \quad (6.14)$$

$$f(x, y) = f_{nm}(1 - x')(1 - y') + f_{(n+1)m}x'(1 - y') + f_{n(m+1)}(1 - x')y' + f_{(n+1)(m+1)}x'y' \quad (6.15)$$

## 6.2 Algoritmo de resolução

Devido ao caráter elasto-frágil da relação constitutiva proposta para o material, uma importante simplificação pode ser utilizada [57]. Todos os cálculos da nova implementação serão realizados em modelos elásticos lineares, uma vez que entre as iterações o corpo será sempre considerado íntegro. Entre outras características, isto significa que é

<sup>1</sup>Esta é a maneira mais simples, porém não a mais indicada, por não atender totalmente à hipótese feita na equação (6.4). A interpolação deveria ser suave o suficiente, idealmente usando a própria série de Fourier. Na prática, uma interpolação por *splines* cúbicas é provavelmente adequada. A alternativa empregada foi utilizar um valor conservativo para  $\Delta$  em (6.4).

possível aplicar um carregamento unitário e extrapolar o resultado linearmente, desde que o carregamento seja proporcional (o caso não proporcional é discutido adiante).

Esta simplificação permite que se resolva o problema sem recorrer a algoritmos não-lineares como Newton-Raphson. Não é necessário também efetuar o carregamento em passos de carga, nem há qualquer diferença<sup>2</sup> entre o controle por carga ou por deslocamento, uma vez que o método é controlado pelo próprio progresso da fissuração, embora qualquer tipo de controle possa ser simulado em uma etapa de pós-processamento.

A cada iteração, um carregamento unitário será aplicado e a tensão em todos os nós será determinada. Determina-se então o fator de sollicitação a ser multiplicado pelo carregamento para que seja rompido o nó mais sollicitado, segundo o procedimento abaixo.

Se  $K^k$  é a matriz de rigidez do problema na iteração  $k$ , e  $F_0$  é o carregamento unitário, o deslocamento unitário é calculado por:

$$u_0^k = (K^k)^{-1} F_0 \quad (6.16)$$

de onde é possível calcular o tensor de tensões no nó  $i$ ,  $\sigma_{0,i}$ , através da matriz constitutiva  $D$  e das derivadas das funções de interpolação  $B$ , calculadas no nó  $i$ <sup>3</sup>:

$$\sigma_{0,i}^k = DBu_0^k \quad (6.17)$$

e através de um cálculo simples pode-se obter um vetor com as tensões principais correspondentes.

Seja  $\sigma_{t,i}$  a máxima tensão de tração (ou mínima de compressão) no nó  $i$  (o índice da iteração é deixado implícito para maior clareza) e  $f_{t,i}$  a resistência à tração neste mesmo

---

<sup>2</sup>Exceto pela forma de calcular a energia de fissuração. Utilizando-se controle por deslocamento, tem-se um limite inferior e, analogamente, um limite superior ao empregar o controle por carga. O valor real está localizado entre os dois [28].

<sup>3</sup>Se o campo de deslocamentos possui derivadas descontínuas no nó, como ocorre ao se utilizarem funções de interpolação lineares para os deslocamentos, uma aproximação para as tensões deve ser empregada. O autor utilizou a média das tensões calculadas individualmente em cada elemento que converge para o nó [1].

nó. Obtém-se o fator de sollicitação  $f_{s,i}$  do nó por:

$$f_{s,i} = \begin{cases} f_{t,i}/\sigma_{t,i} & \text{se } f_{t,i} \leq 0 \text{ e } \sigma_{t,i} > 0 \\ \infty & \text{se } \sigma_{t,i} \leq 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

e o fator de sollicitação do corpo é o fator correspondente ao nó mais sollicitado:

$$f_s^k = \min(f_{s,i}) \quad (6.19)$$

Finalmente, o carregamento aplicado e o deslocamento correspondente são determinados por:

$$u^k = f_s^k u_0^k \quad (6.20)$$

$$F^k = f_s^k F_0 \quad (6.21)$$

A próxima iteração é obtida abrindo-se a fissura no nó mais sollicitado ( $n_{ms}$ , onde  $f_{s,nms} = f_s^k$ ) como descrito na seção 6.3 e calculando-se a próxima matriz de rigidez  $K^{k+1}$ .

Quando há carregamento permanente (não-proporcional), utiliza-se a superposição de efeitos. O campo de tensões gerado pelo carregamento permanente é utilizado como dado de entrada para o cálculo a seguir.

Seja  $F_p$  o carregamento permanente. Utilizando-se a notação apresentada acima, calcula-se o deslocamento permanente:

$$u_p^k = (K^k)^{-1} F_p \quad (6.22)$$

e as tensões causadas pelo carregamento permanente:

$$\sigma_{p,i}^k = DBu_p^k \quad (6.23)$$

Deseja-se calcular as tensões  $\sigma_c^k$  correspondentes ao carregamento combinado (permanente + proporcional) a partir dos deslocamentos combinados:

$$u_c^k = (K^k)^{-1} (F_p + f_s^k F_0) = u_p^k + f_s^k u_0^k \quad (6.24)$$

onde  $f_s^k$  é o fator de sollicitação, ainda indeterminado, e:

$$\sigma_{c,i}^k = DB(u_p^k + f_s^k u_0^k) = \sigma_{p,i}^k + f_s^k \sigma_0^k, \quad (6.25)$$

Para tornar mais evidente a não-linearidade em  $f_s^k$  introduzida pelo cálculo da máxima tensão principal, será tomada explícita a transformação. O tensor de tensões no nó é representado pelo vetor  $\sigma_{c,i}^k$ :

$$\sigma_{c,i}^k = [ \sigma_{x,c} \ \sigma_{y,c} \ \tau_{xy,c} ]^T \quad (6.26)$$

de onde os índices do nó e da iteração foram suprimidos para maior clareza. A primeira tensão principal  $\sigma_{t,i}^k$  é dada por:

$$\sigma_{t,i}^k = \frac{\sigma_{x,c} + \sigma_{y,c}}{2} + \sqrt{\tau_{xy,c}^2 + \left( \frac{\sigma_{x,c} - \sigma_{y,c}}{2} \right)^2} \quad (6.27)$$

onde por (6.25), tem-se:

$$\sigma_{x,c} = \sigma_{x,p} + f_s^k \sigma_{x,0} \quad (6.28)$$

$$\sigma_{y,c} = \sigma_{y,p} + f_s^k \sigma_{y,0} \quad (6.29)$$

$$\tau_{xy,c} = \tau_{xy,p} + f_s^k \tau_{xy,0} \quad (6.30)$$

A obtenção de  $f_{s,i}$  não é tão simples quanto em (6.18), mas ainda pode ser efetuada satisfatoriamente utilizando-se  $f_{s,i}$  em lugar de  $f_s^k$  nas equações (6.28), (6.29) e (6.30), substituindo-as em (6.27) e resolvendo-se não-linearmente

$$\sigma_{t,i}^k = f_{t,i} \quad (6.31)$$

onde devem surgir problemas de ordem prática relacionados com os casos especiais, como resistência negativa e tensão de compressão. Este método não foi implementado pelo autor.

### 6.3 Fissuração discreta

Em cada nó a ser rompido, será determinada a direção principal perpendicular à direção da maior tração, de forma que uma linha imaginária passando pelo nó e seguindo a direção de uma fissura imaginária possa ser traçada. A geometria da malha será alterada para se aproximar tão bem quanto possível desta fissura ideal.

Embora a utilização de elementos finitos convencionais nas proximidades das fissuras seja questionável, a aproximação obtida não é pior que o trabalho original de Rossi ou que trabalhos mais recentes como [1]. Procurou-se evitar o uso de elementos

não convencionais (elementos singulares ou elementos “de ponta de fissura”), para evitar a complexidade do algoritmo de remalhagem empregado por Ingraffea e Wawryzynek em seu simulador FRANC2D/3D, ou por Martha *et al.* no programa QUEBRA2D. Como alternativa, poderia ser adotada uma abordagem baseada na partição de unidade (*partition of unity*) [6, 32], porém isto complicaria desnecessariamente o código de elementos finitos.

Ao serem abandonados os elementos de interface, perde-se a possibilidade de simular comportamentos diferentes do elasto-frágil. Contudo, a alteração na geometria, tal como proposta neste trabalho, permite que se adicionem facilmente elementos de interface “triangulares”<sup>4</sup>, como descrito nas notas de rodapé 7 e 8 na página 45.

Por outro lado, a ausência de elementos de interface melhora o condicionamento da matriz, o que auxilia a convergência de métodos iterativos como o gradiente conjugado.

### 6.3.1 Separação dos elementos

Após o cálculo do fator de sollicitação, descrito na seção 6.2, está determinado o ponto mais sollicitado  $n_{ms}$ .

Define-se o ângulo  $\gamma$  como a direção fictícia da fissura, perpendicular à direção principal de maior tensão de tração. O ângulo é medido também em relação ao eixo dos  $x$ , variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , sendo calculado por:

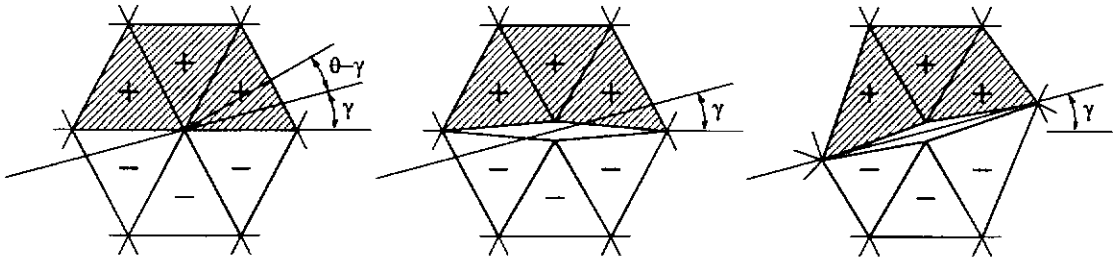
$$\gamma = \frac{1}{2} \arg(\sigma_y - \sigma_x, 2\tau_{xy}) \quad (6.32)$$

onde  $\arg(x, y)$  é o ângulo entre o vetor de coordenadas  $(x, y)$  e o eixo dos  $x$ , em FORTRAN  $\text{atan2}(y, x)$ . Este ângulo está ilustrado na Figura 6.2.

Para cada elemento ligado ao nó mais sollicitado, obtém-se o ângulo  $\theta$  da bissetriz das duas arestas do elemento ligadas ao nó. O ângulo é medido em relação a um eixo paralelo ao eixo dos  $x$  global, tendo o  $n_{ms}$  como origem. O sinal do ângulo  $\gamma - \theta$ , após ajustado para o intervalo  $(-180^\circ, 180^\circ]$ , definirá o grupo do elemento em questão (positivo ou negativo).

---

<sup>4</sup>A espessura dos elementos é nula, devendo-se introduzir uma espessura fictícia de forma análoga à formulação dos elementos de interface de Paz [35].

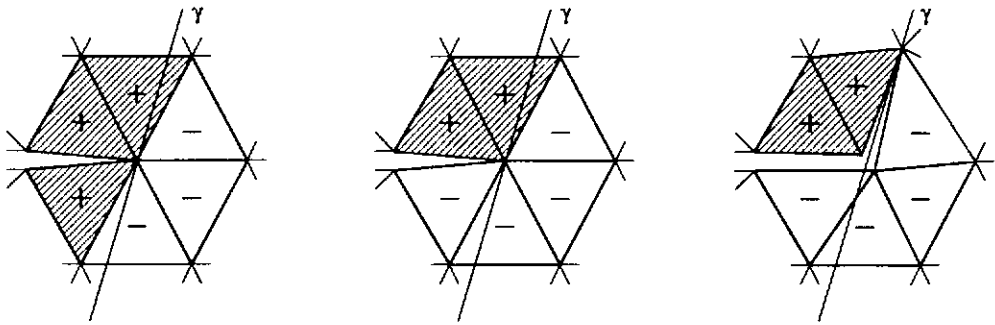


(a) Divisão dos elementos

(b) Abertura da fissura

(c) Alteração das pontas da fissura

Figura 6.2: Abertura de uma fissura interna



(a) Divisão dos elementos

(b) Agrupamento dos elementos

(c) Bifurcação da fissura

Figura 6.3: Bifurcação de uma fissura

Caso haja ao final apenas um grupo de elementos, não é possível abrir uma fissura e será utilizado o próximo nó mais solicitado.

Caso o  $n_{ms}$  esteja localizado em uma ponta de fissura, deve-se partir desta fissura, apenas mudando a direção da mesma. Os elementos contidos no menor ângulo formado por esta fissura e pela direção  $\gamma$  serão movidos para o grupo contrário, de forma a se ter apenas dois grupos divididos pela fissura, como mostrado na Figura 6.3.

Cria-se um nó sombra  $n_s$ , com as mesmas coordenadas do  $n_{ms}$  e os elementos de um dos grupos são movidos para este nó, efetivamente abrindo a fissura. Todo o procedimento acima está vinculado à tentativa de aproximar geometricamente a fissura. Se fosse desejado manter a forma da malha, entre outros motivos para não deformar os elemen-

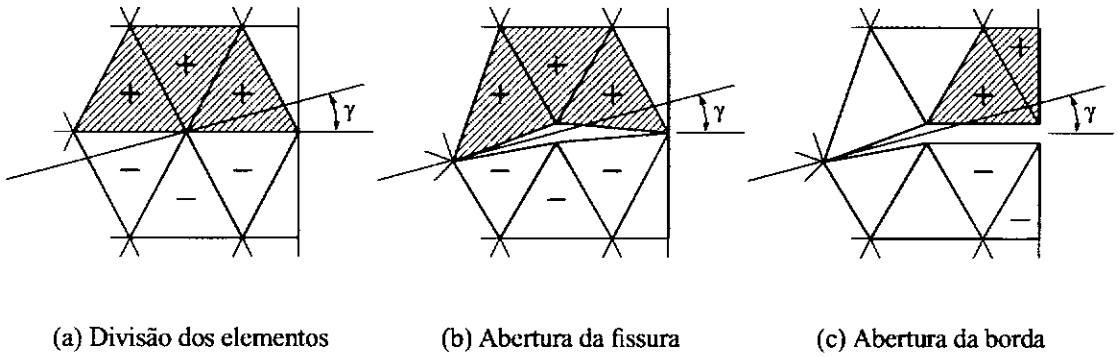


Figura 6.4: Abertura de uma fissura de bordo

tos<sup>5</sup>, poder-se-ia utilizar como alternativa o critério descrito em [1], resumidamente abrir as arestas cujas tensões nas direções normais às mesmas fossem máximas.

Para cada nó  $n_p$  nas pontas da fissura recém aberta (apenas um nó se a fissura parte da borda do corpo ou de uma fissura pré-existente), toma-se uma das ações:

- Se o nó é interno, o mesmo é movido<sup>6</sup> para que o ângulo da aresta  $n_{ms}-n_p$  seja igual a  $\gamma^7$ ;
- Caso contrário, o nó está em um bordo e a fissura deve emergir para a superfície, ou está em uma fissura já existente, com a qual a nova fissura deve se fundir. Em qualquer dos casos, deve haver a criação de um segundo nó sombra  $n_{s,2}$  e a abertura da ponta da fissura, como ilustrado na Figura 6.4<sup>8</sup>.

## 6.4 Critérios de ruptura

O critério de ruptura descrito acima não corresponde diretamente ao critério adotado por Rossi na formulação do LCPC, sendo utilizado o critério da máxima tensão de

<sup>5</sup>É necessário evitar que a deformação gere elementos de área negativa ou nula. A implementação atual reverte progressivamente a alteração feita ao nó, caso isto seja detectado.

<sup>6</sup>Ver nota 5.

<sup>7</sup>Adicionalmente, caso se deseje incluir elementos de interface na fissura recém-aberta, deve-se criar um elemento triangular utilizando-se o nó  $n_p$  como ponta e os nós  $n_{ms}$  e  $n_s$  como base.

<sup>8</sup>Caso desejado, pode ser incluído um elemento de interface retangular, utilizando os nós  $n_p$  e  $n_{s,2}$  para formar uma das bases menores e os nós  $n_{ms}$  e  $n_s$  para formar a outra.

tração, proposto por Erdogan e Sih [11] e utilizado por diversos autores [1, 19, 32]. O critério escolhido possui a evidência experimental [18, 19] do problema utilizado para validar a formulação (ver Capítulo 7), existindo outros [4, 28, 51], como a direção da máxima liberação de energia, máxima densidade de energia, etc.

Se a fissura for restrita às arestas, as formulações são equivalentes, exceto pela escolha do local de abertura da fissura. Esta formulação sempre abrirá a fissura no nó mais solicitado, enquanto a formulação original depende da existência ou não de uma aresta adequada, correspondente à direção da fissura neste nó.

O critério para a escolha do local de abertura da fissura é a tensão, e a direção da mesma é perpendicular à direção principal da maior tensão de tração. O valor de  $\lambda$  (fator a multiplicar pelo vetor de carregamento unitário  $F_0$  e pelo vetor de deslocamentos unitários  $u_0$  correspondente, para obter a resposta do problema na iteração) é escolhido para que a tensão no nó mais solicitado seja igual à resistência à tração local do material. Como alternativa, implementou-se o cálculo de  $\lambda$  por (5.11), tomando-se  $R = cf_{t,i}^2$ , onde  $c$  é uma constante que permite transferir o caráter estocástico da resistência à tração nodal  $f_{t,i}$  para a resistência à fissuração  $R$ . A resistência à tração possui distribuição normal, mas seu quadrado não, o que resulta no fato da energia de fissuração aumentar com o desvio padrão de  $f_t$ , o que ocorre também no modelo do LCPC.

## 6.5 Implementação em um código do MEF

Esta seção descreve os passos necessários para a conversão de um programa padrão do Método dos Elementos Finitos [22, 60] em um programa de fissuração probabilística do concreto, com o objetivo de se isolar as porções do código diretamente envolvidas com o modelo probabilístico das porções normais de um código do MEF e guiar a inserção das rotinas-exemplo do Apêndice C em um programa existente.

O programa sobre o qual a implementação usada pelo autor foi desenvolvida é um código didático de elementos finitos, tentando-se tornar as alterações tão portáteis quanto possível. Ainda assim, alguns passos são específicos à implementação efetuada e devem ser adaptados para outros códigos.

Utilizou-se o esqueleto de programa para o cálculo de um problema linear está-

tico pelo MEF, apresentado no lado esquerdo da Figura 6.5, sobre o qual foram inseridos os passos mostrados no lado direito da mesma figura.

### 6.5.1 Geração do campo aleatório

A geração do campo aleatório é feita pela subrotina `genftfld`, a qual implementa o método descrito na seção 6.1. Este método requer bastante memória, e uma vez efetuada a interpolação, pode-se desalocar esta memória. Portanto, o momento mais oportuno para este passo seria logo após a leitura dos dados dos nós (que são necessários) e antes da leitura dos dados dos elementos (que são desnecessários), pois a memória necessária para os mesmos e para a matriz de rigidez ainda não teria sido alocada.

### 6.5.2 Alocação extra de memória

É preciso que todas as alocações de memória que dependem do número de nós sejam aumentadas para que haja espaço para os novos nós, uma vez que realocar a memória a cada iteração seria dispendioso.

Sugere-se para tanto a criação de uma variável auxiliar de valor  $n_{node} + \sqrt{n_{node}}$ , a qual será utilizada em lugar de  $n_{node}$  para a alocação de memória.

Cada nó acrescentado representará uma série de graus de liberdade adicionais. Deve-se, portanto, prever que a matriz de rigidez possa crescer para acomodar tais graus de liberdade. Caso o armazenamento seja feito em perfil (*skyline*), deve-se prever um crescimento de  $n_{df}\sqrt{n_{node}}$  na diagonal principal e  $n_{df}n_{node}\sqrt{n_{node}}$  elementos da matriz, onde  $n_{df}$  é o número de graus de liberdade por nó e  $n_{node}$  é o número de nós do problema. Estes números foram estimados e utilizados pelo autor, podendo ser utilizados como ponto de partida, mas obviamente podem se mostrar insuficientes ou excessivos em certos casos, especialmente se o refinamento da malha não é uniforme.

Não haverá alteração no número de elementos, apenas na sua vinculação. Portanto, se a matriz for armazenada elemento por elemento (*EBE*), não há alteração no espaço necessário para a mesma.

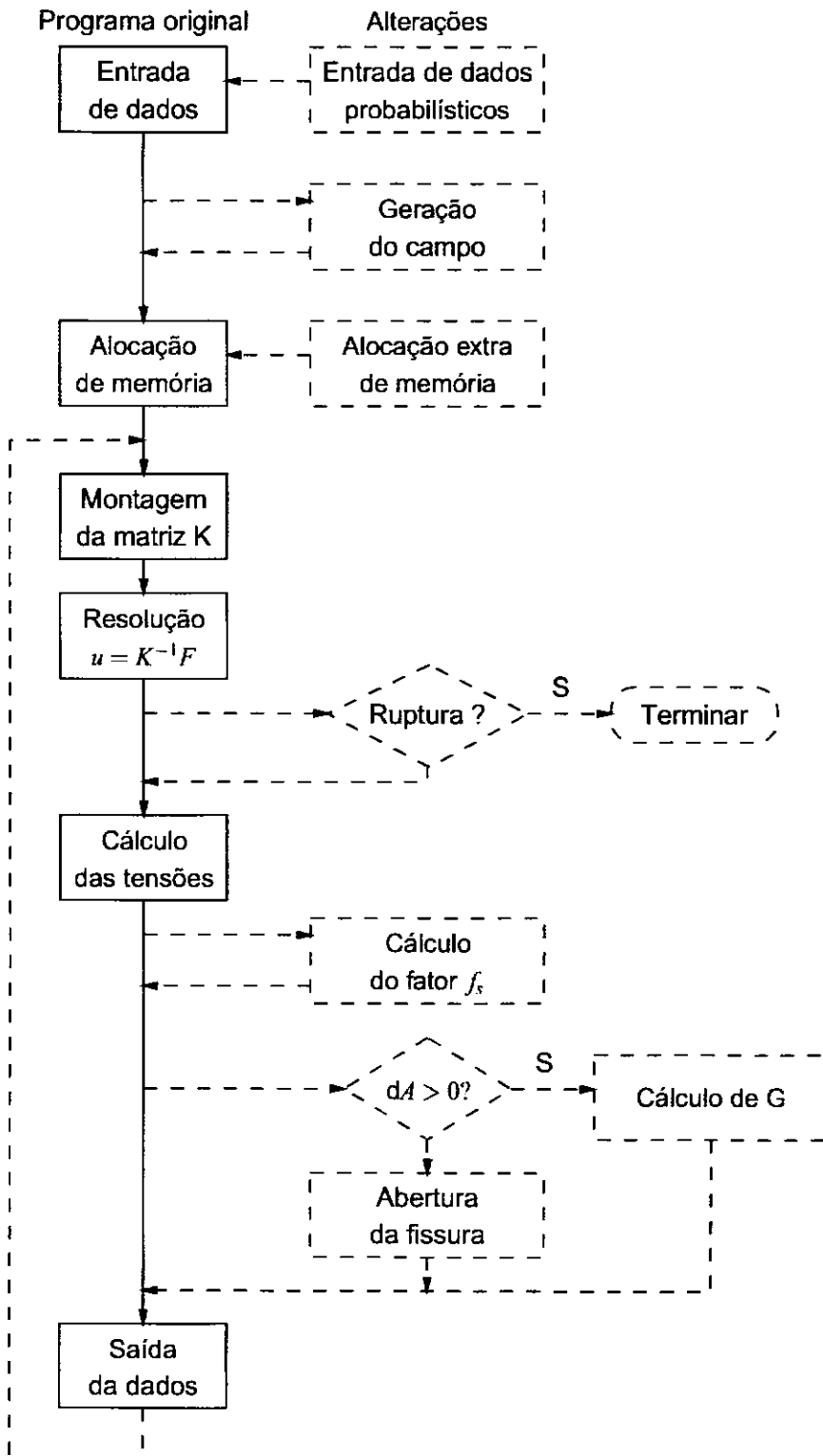


Figura 6.5: Esquema de um código do MEF para problemas lineares estáticos e alterações para implementação de uma realização da fissuração probabilística. Não está representado o processo de Monte Carlo.

### 6.5.3 Cálculo do fator de solicitação $f_s$

O cálculo do fator de solicitação é feito pela subrotina `CalcFs`, conforme descrito na seção 6.2, sendo necessário apenas obter as tensões nodais (provavelmente calculando-se as tensões em cada elemento e utilizando-se a média, ver nota de rodapé 3 na página 40). A equação (6.31) pode ser implementada nesta subrotina, permitindo-se o uso de carregamento não proporcional.

Durante o cálculo de  $f_s$ , é possível ao mesmo tempo determinar o primeiro candidato a nó mais solicitado  $n_{ms}$ .

### 6.5.4 Abertura da fissura

A implementação do processo descrito na seção 6.3 não é simples e provavelmente a melhor referência é o código real do Apêndice C. Resumidamente:

Inicialmente obtém-se uma lista dos elementos que contém o nó, com as respectivas arestas (subrotina `Arestas`). As arestas são retornadas em ordem, partindo-se quando possível de uma aresta livre (na borda do corpo ou de uma fissura) e seguindo-se em sentido horário ou anti-horário até retornar para a mesma aresta ou para a outra aresta livre. Não havendo arestas livres, o ponto de partida é uma aresta arbitrária. Em seguida, para cada um dos elementos, calcula-se o sinal de  $\gamma - \theta$ , marcando-se os elementos que possuem o mesmo sinal do primeiro elemento da lista.

Se algum elemento continuou desmarcado, continua-se com a abertura da fissura. Senão, procura-se o próximo nó candidato a nó mais solicitado, como explicado mais adiante.

Verifica-se se a primeira aresta da lista é diferente da última, o que significa que a fissura está localizada em uma borda e as duas arestas citadas são arestas de borda. Neste caso, é preciso reagrupar os elementos, o que é feito trocando a marca dos elementos (subrotina `TagAresta`) a partir da borda mais próxima da linha da fissura e seguindo-se os vizinhos até ser ultrapassada a linha da fissura (o que é detectado verificando-se que o elemento já com a marca correta)

Após o reagrupamento acima (o qual não é necessário se a primeira aresta for igual à última ou se as arestas do bordo já estiverem em grupos diferentes), pode-se mudar

os elementos não marcados para o nó sombra<sup>9</sup> (subrotina MudarElementos).

Neste momento, pode-se criar um novo nó na malha (subrotina NovoNo), o nó sombra  $n_s$ , o qual compartilha as coordenadas e a resistência à tração do nó mais solicitado. O nó já é criado com as vinculações definidas no passo anterior.

Deve-se incrementar a contagem do número de nós  $n_{node}$  em 1 e a contagem do número de equações  $n_{eq}$  em  $n_{df}$ , onde  $n_{df}$  é o número de graus de liberdade por nó. O vetor  $ID(i, j)$ <sup>10</sup> que representa a equação correspondente a cada grau de liberdade  $i$  do nó  $j$  deve ser atualizado.

$$n_s = n_{node} + 1$$

para  $i = 1$  até  $n_{df}$ , faça  $ID(i, n_s) = n_{eq} + i$ .

$$n_{eq} = n_{eq} + n_{df}$$

$$n_{node} = n_{node} + 1$$

Todos os dados do nó original devem ser copiados, como suas coordenadas, sua resistência à tração, e outros dados que o programa mantenha.

O próximo passo é verificar que arestas foram separadas pelo procedimento acima (basicamente verificar que arestas estão contidas ao mesmo tempo em elementos marcados e desmarcados) e totalizar a área da fissura  $dA$ , somando-se os comprimentos das arestas. Ao mesmo tempo, registra-se os nós finais destas arestas, os quais são as pontas da fissura recém-aberta.

Para cada um dos nós registrados neste passo, chama-se Arestas neste nó e verifica-se a posição do mesmo, chamando TagAresta para marcar os elementos partindo-se da aresta que liga o nó ao  $n_{ms}$ , ou seja, de uma das faces da fissura recém-aberta. Caso todos os elementos tenham sido marcados, isto significa que é possível chegar à outra face da fissura partindo-se desta face, logo a ponta da fissura ainda está dentro do corpo. Caso contrário, conclui-se a mesma está no contorno ou em outra fissura.

Se o nó é interno, determina-se as coordenadas onde o mesmo deveria estar de

---

<sup>9</sup>O número do nó já é conhecido, é  $n_{node} + 1$ , mesmo que o nó não exista ainda.

<sup>10</sup>Nota: este procedimento é obviamente específico à implementação utilizada neste trabalho, devendo ser adaptado para outras implementações.

forma que a fissura tenha exatamente o ângulo  $\gamma$ , mantendo-se o comprimento da aresta que liga este nó ao  $n_{ms}$ .

Se o nó está numa borda, a fissura deve emergir para a superfície, o que é feito chamando as subrotinas `MudarElementos` e `NovoNo` novamente. Os elementos que devem ser mudados já foram marcados por `TagAresta`.

Toda esta mudança de topologia possui conseqüências que dependem do tipo de método empregado para resolver o sistema de equações de elementos finitos. Se o método implica em decompor a matriz, se torna obrigatório fazê-lo a cada alteração. Utilizando-se um método iterativo como o gradiente conjugado, as alterações na matriz de rigidez são mínimas, e o resultado da topologia anterior é um excelente ponto de partida para a nova topologia, o que pode acelerar grandemente o método.

Caso não tenha havido mudança alguma (se todos os elementos foram marcados no primeiro passo), é necessário buscar o próximo candidato a  $n_{ms}$ . Este candidato deve ter um fator de sollicitação igual ou maior ao  $f_s(n_{ms})$ . Para evitar que este nó seja escolhido novamente, sua resistência é diminuída de uma quantidade muito pequena antes da procura. Encontrado o próximo candidato, reinicia-se o processo acima, até que haja alguma alteração na topologia.

### **6.5.5 Cálculo de $G$**

Escolheu-se como estratégia de implementação incluir um indicador que é ligado quando da abertura de uma fissura, sinalizando que é necessária uma segunda iteração para o cálculo de  $G$ . Quando este indicador está ativo, em lugar de se realizar a abertura da fissura é efetuado o cálculo de  $G$ . Para isto, foi necessário adaptar o programa para guardar os deslocamentos e reações do passo anterior.

Como o incremento da fissura  $dA$  é não-nulo apenas logo após a abertura da mesma, optou-se por utilizar esta área como indicador. Obviamente após o cálculo de  $G$ , a área é anulada para que na próxima iteração seja efetuada a abertura da fissura.

### 6.5.6 Saída de dados

Para efeito de saída de dados, pode-se multiplicar todas as deformações e tensões por  $f_s$ , obtendo-se os valores correspondentes a  $\sigma_{nms} = f_{t,nms}$ , ou seja, ao limiar de ruptura do nó mais solicitado. Note-se que o nó mais solicitado é conhecido definitivamente apenas após a abertura da fissura, o que precisa ser levado em conta, para que não se efetue a saída de dados utilizando o  $f_s$  incorreto (caso seja feita a saída antes) ou refletindo a nova topologia da malha (caso seja feita depois)<sup>11</sup>.

Uma segunda opção é adiar o ajuste para uma etapa de pós-processamento, onde é possível utilizar o critério energético (equação 5.11). Optou-se por ter esta flexibilidade na implementação real.

### 6.5.7 Sugestões para generalização do código

Sugere-se implementar o processo iterativo em um código de análise dinâmica linear, considerando cada iteração como um incremento de tempo. Neste caso, pode mesmo ser vantajoso abrir mão do algoritmo descrito na seção 6.2 para maior generalidade (carregamento variável com o tempo).

Uma proposta para a implementação não-linear é simplesmente fazer a ruptura do nó mais solicitado logo após o cálculo não-linear, ao se obterem as tensões, mas apenas se o fator de solitação for menor ou igual a 1. A cada ruptura, o cálculo não-linear deve ser efetuado na nova topologia, e o resultado final a ser apresentado como saída não pode apresentar nenhum nó com  $f_s$  maior ou igual a 1. Ou seja, o corpo fissurado deve estar estável sob o carregamento aplicado. Como no cálculo não-linear não há singularidades (dependendo da relação não-linear), não é preciso utilizar o critério energético, devendo-se apenas evitar a dependência da malha [4].

A não-linearidade pode ser mas não se limita a plasticidade ou viscoplasticidade, contanto que a fissura seja não-coesiva, pela ausência de elementos de interface.

Uma abordagem semelhante permite efetuar o cálculo dinâmico linear ou mesmo

---

<sup>11</sup>Na sua própria implementação, o autor optou por dividir a saída de dados em dois passos independentes, o primeiro consistindo na saída da topologia, antes da abertura da fissura, e o segundo na saída das deformações e tensões, logo após a abertura da fissura mas referentes ainda ao corpo original.

não linear. Em um desenvolvimento posterior, poderia-se determinar uma velocidade de fissuração e resolver o problema de forma realmente dinâmica, limitando-se o número de fissuras por passo de acordo com a relação entre o intervalo de tempo da simulação e a velocidade de fissuração, o que permitiria ao modelo prever o efeito da velocidade do carregamento [41].

## 6.6 Comparação entre as formulações

Em um nível conceitual, ambas as propostas se baseiam em pontos semelhantes:

- O concreto possui módulo de elasticidade e resistência à tração aleatórios;
- O critério de ruptura é a tensão local de tração;
- A ruptura ocorre pela criação de fissuras discretas não coesivas, não por dano progressivo e/ou fenômenos distribuídos;

As diferenças básicas são:

- As grandezas aleatórias empregadas são todas geradas como campos aleatórios correlacionados, em lugar de serem independentemente sorteadas;
- Não são criados elementos de interface, embora a ruptura ocorra como se houvessem existido (uma comparação detalhada encontra-se no Apêndice B);
- As resistências são atribuídas aos nós da malha, e não a arestas (representadas pelos elementos de interface);
- O critério de ruptura utiliza a tensão principal de tração no nó, não a tensão perpendicular à aresta;
- A abertura da fissura procura aproximar a direção perpendicular à máxima tensão de tração [11], sem a limitação de ter que percorrer as arestas dos elementos;
- Todos os cálculos são realizados considerando o corpo linear elástico no intervalo entre fissuras, o que simplifica o cálculo e evita a utilização de procedimentos não-lineares.

## Capítulo 7

### Resultados

---

#### 7.1 Experimento real

A comprovação da validade do modelo foi feita simulando-se um experimento da literatura. Gálvez *et al.* [19] realizaram experimentos em concreto, apresentando um novo método de ensaio (flexão em quatro pontos de uma viga com entalhe (*notch*) sob a ação de dois atuadores independentes) com o objetivo específico de fornecer um padrão de comparação para modelos e métodos numéricos de simulação de fratura em modo misto (modos I – abertura e II – deslizamento).

Os autores utilizaram para simulação um método determinístico, testado em um material elasto-frágil perfeito (o PMMA) em um trabalho anterior [19], usando como modelo a mecânica da fratura elástica linear e como método numérico o método dos elementos finitos, com o auxílio de elementos singulares na ponta da fissura e de um algoritmo de remalhagem, implementado no programa FRANC2D de Ingraffea e Wawrzynek. O sucesso da aplicação deste procedimento com o concreto se deve provavelmente ao uso de um concreto de boa resistência e reduzida dimensão máxima do agregado, tornando a zona de processamento de fratura reduzida e permitindo a aplicação da LEFM.

Ainda assim, contrastando com o PMMA, o concreto apresentou desvios em torno do resultado simulado, revelando o caráter probabilístico do material, que será refletido nas simulações obtidas com o método probabilístico desenvolvido neste trabalho.

Os ensaios foram realizados em corpos de prova de concreto, com (valores médios)  $f_{ck}$  56,8 MPa,  $f_{ct}$  3,0 MPa,  $G_f$  68,8 N/m,  $E$  38,4 GPa, utilizando fator a/c 0,45 e agregado com  $d_{max} = 5\text{mm}$ .

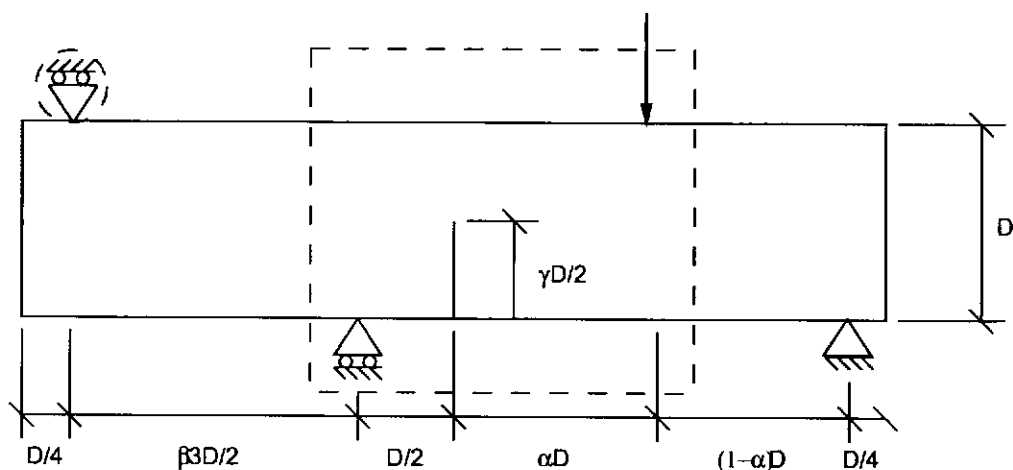


Figura 7.1: Geometria dos corpos de prova, condições de contorno e área de fissuração. O apoio destacado está presente apenas nos ensaios do tipo T2.

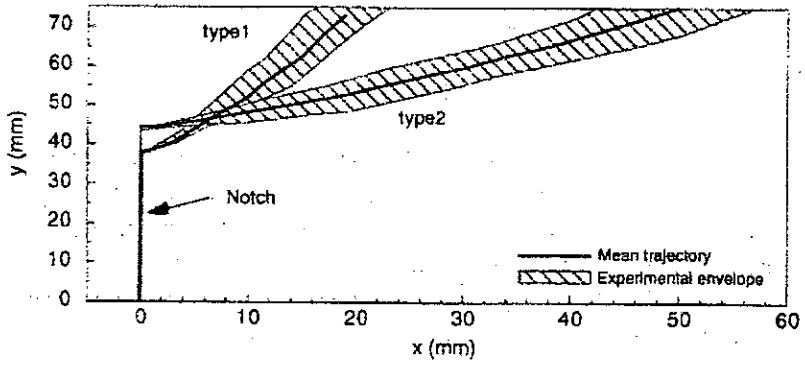
Tipo	$D$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
T1D1	75	1,133	1,00	1,0
T1D2	150	1,000	1,00	1,0
T1D3	300	1,000	0,89	1,0
T2D1	75	1,133	1,00	1,2
T2D2	150	1,000	1,00	1,0
T2D3	300	1,000	0,89	1,0

Tabela 7.1: Dimensões dos corpos de prova da Figura 7.1.

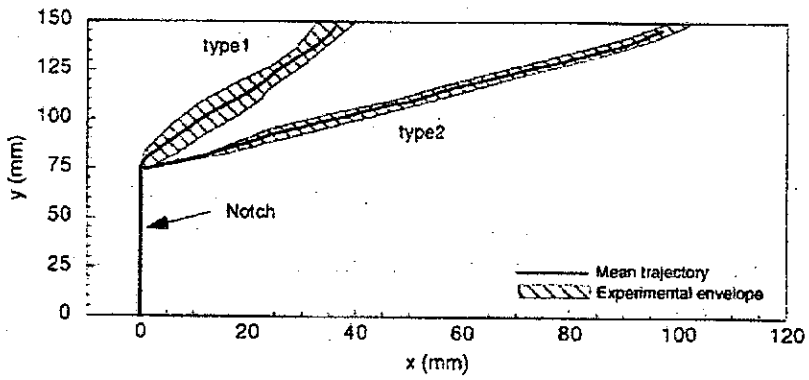
Dois tipos de carregamento (T1 e T2) foram aplicados em três tamanhos de corpos de prova ( $D1$ ,  $D2$  e  $D3$ ), com pequenas diferenças de geometria. Os corpos de prova eram prismáticos de seção retangular  $50 \times D$ mm, com as dimensões indicadas na Figura 7.1. Os valores para as três dimensões de corpo de prova estão enumerados na Tabela 7.1.

As trajetórias de fissuração experimentais, reproduzidas do trabalho de Gálvez *et al.* [19], estão apresentadas na Figura 7.2.

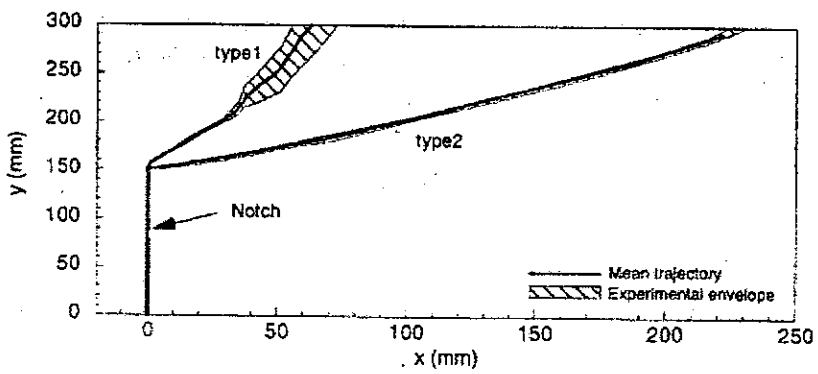
As curvas  $P \times \delta$  e  $P \times CMOD$  experimentais estão mostradas nas Figuras 7.3 a 7.4.



(a)  $D = 75\text{mm}$

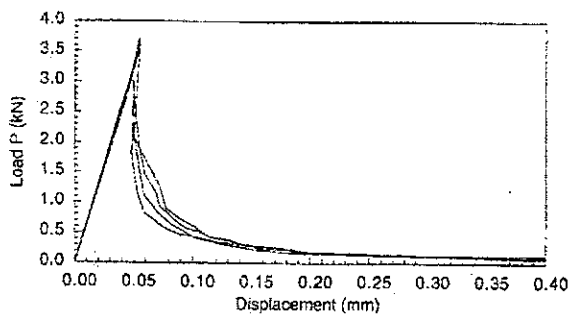


(b)  $D = 150\text{mm}$

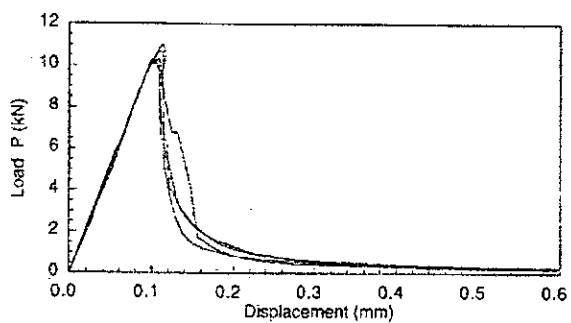


(c)  $D = 300\text{mm}$

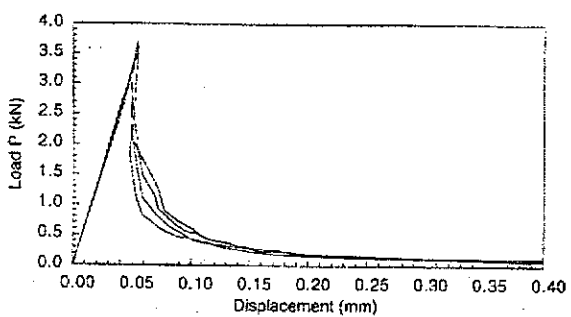
Figura 7.2: Trajetórias de fissuração experimentais.



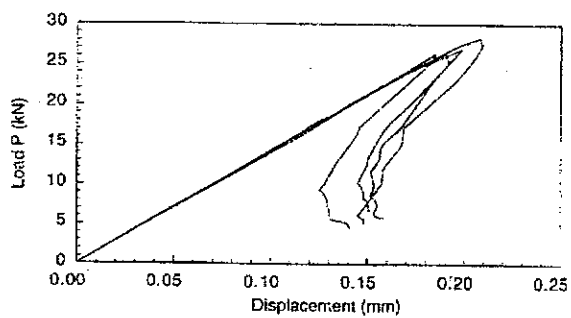
(a) T1,  $D = 75\text{mm}$



(b) T1,  $D = 300\text{mm}$

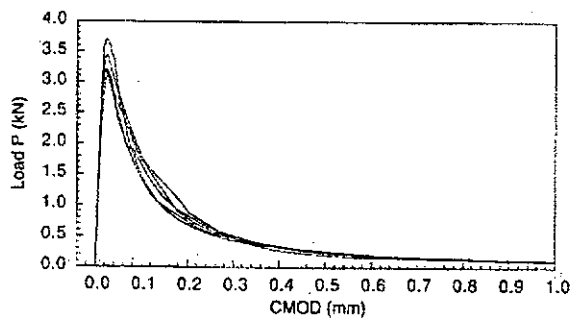


(c) T2,  $D = 75\text{mm}$

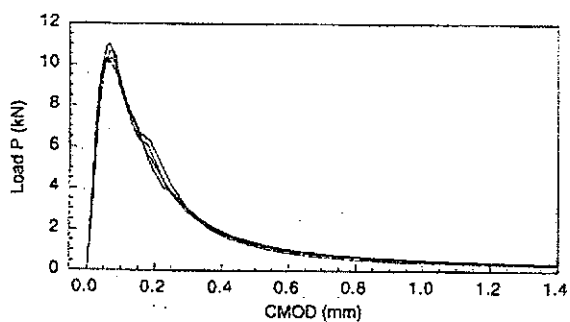


(d) T2,  $D = 300\text{mm}$

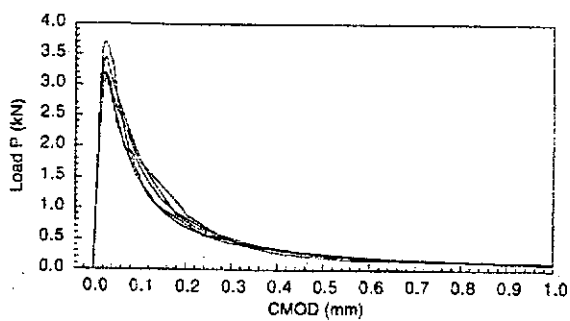
Figura 7.3: Curvas  $P \times \delta$  experimentais.



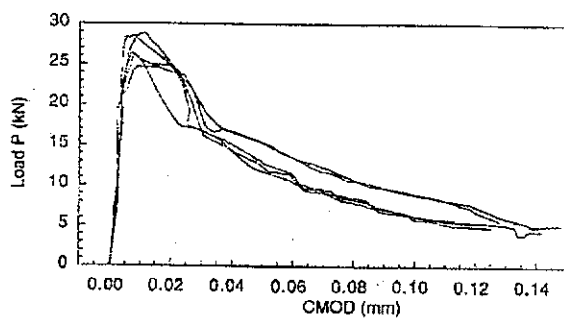
(a) T1,  $D = 75\text{mm}$



(b) T1,  $D = 300\text{mm}$



(c) T2,  $D = 75\text{mm}$



(d) T2,  $D = 300\text{mm}$

Figura 7.4: Curvas  $P - CMOD$  experimentais.

## 7.2 Simulação pela implementação alternativa

Para efetuar a simulação, foi necessário arbitrar alguns dos parâmetros do método. Trabalhos posteriores podem tratar da determinação mais precisa destes parâmetros por análise inversa ou outros meios, como feito para o método do LCPC [12]. Neste trabalho, procurar-se-á apenas uma concordância qualitativa com os resultados experimentais, como forma de validar as alterações feitas no modelo probabilístico e comprovar a utilidade da formulação alternativa. As diferenças entre a simulação e o experimento serão justificadas.

Procurou-se utilizar os valores médios experimentais para o módulo de elasticidade e resistência à tração, arbitrando-se os desvios padrões  $E_{\sigma} = 10\text{GPa}$  e  $f_{t,\sigma} = 0,2\text{MPa}$ . Utilizou-se o comprimento de correlação  $l_E = l_{f_t} = 5\text{mm}$ , exatamente a dimensão máxima do agregado, para as propriedades aleatórias. Finalmente, a resistência à fissuração  $R$  em cada ponto foi obtida por  $R = \frac{68,8\frac{\text{N}}{\text{m}}}{3^2\text{MPa}^2} f_t^2$ .

Os contornos do fator de sollicitação na viga e configuração deformada durante uma simulação dos ensaios dos tipos T1 e T2 podem ser observados nas amostras das Figuras 7.5 e 7.6.

As trajetórias das fissuras para cinco amostras de cada tipo de ensaio podem ser observadas nas Figuras 7.7(a) a 7.7(c). Apenas a região demarcada na Figura 7.1 é mostrada.

As curvas  $P \times \delta$ , onde  $\delta$  é o deslocamento do ponto de aplicação da carga, estão mostradas nas Figuras 7.8(a) a 7.8(f). O critério de ruptura empregado foi a energia de fissuração.

As curvas  $P \times CMOD$ , onde  $CMOD$  é a abertura da borda inferior do entalhe (*notch*), estão mostradas nas Figuras 7.9(a) a 7.9(f). O critério de ruptura empregado foi novamente a energia de fissuração.

As curvas correspondentes  $P \times \delta$  e  $P \times CMOD$  utilizando a tensão de tração como critério de ruptura estão mostradas nas Figuras 7.10(a) a 7.10(f) e 7.11(a) a 7.11(f), respectivamente.

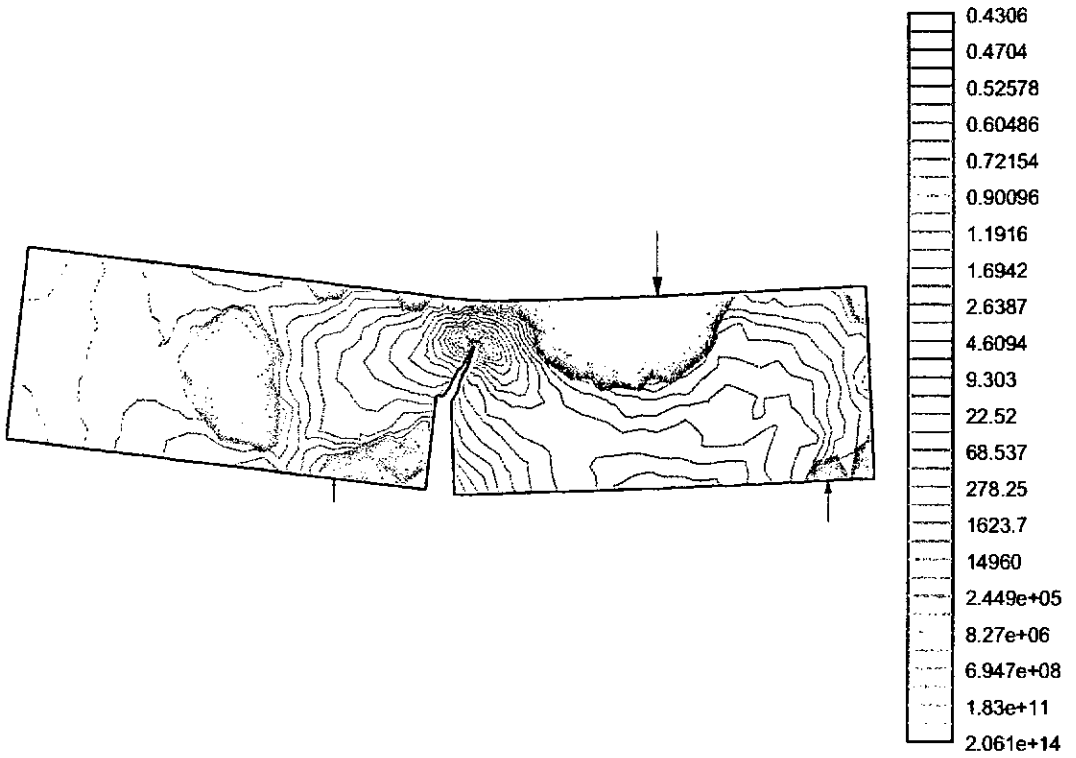


Figura 7.5: Fator de sollicitação  $f_s$  para ensaio do tipo T1 ( $D = 75\text{mm}$ ).

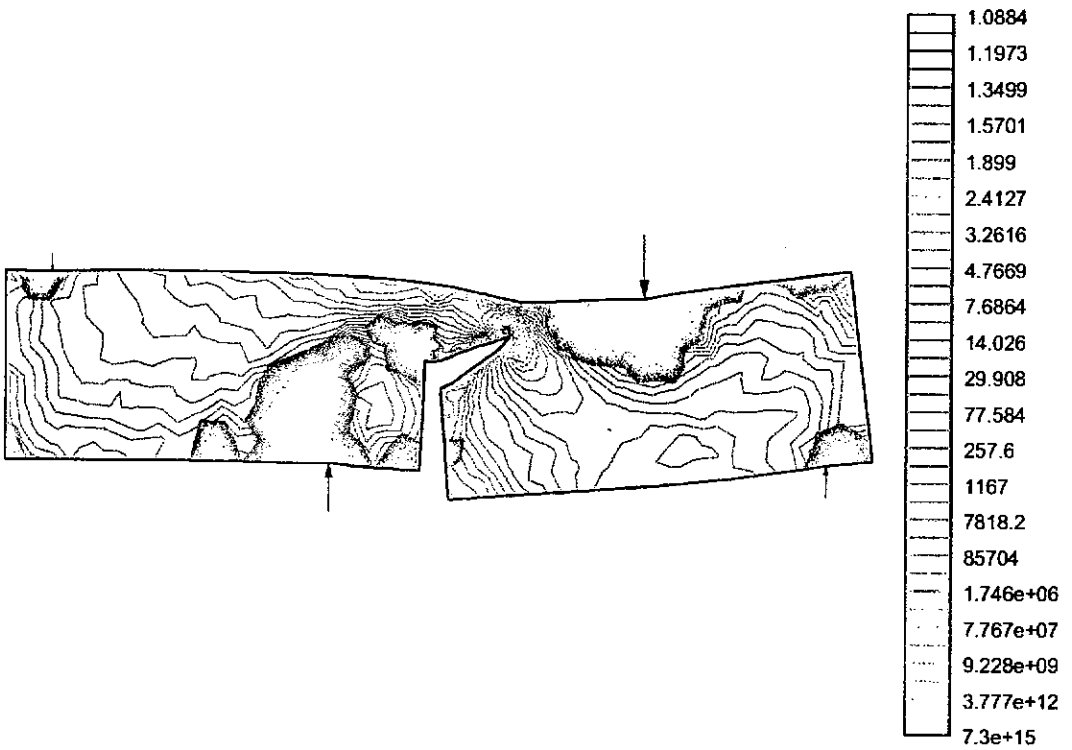
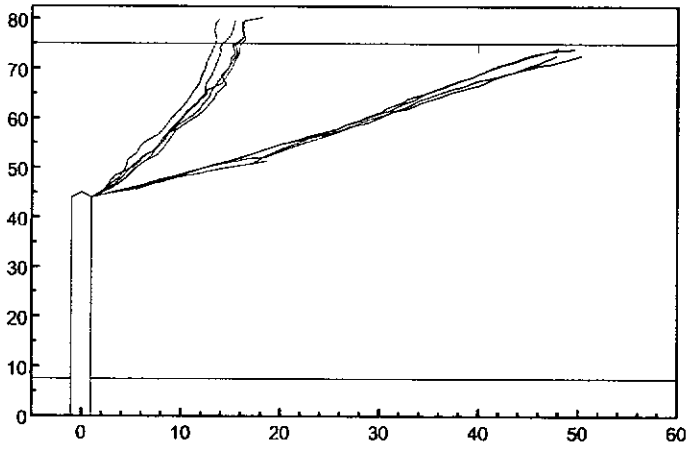
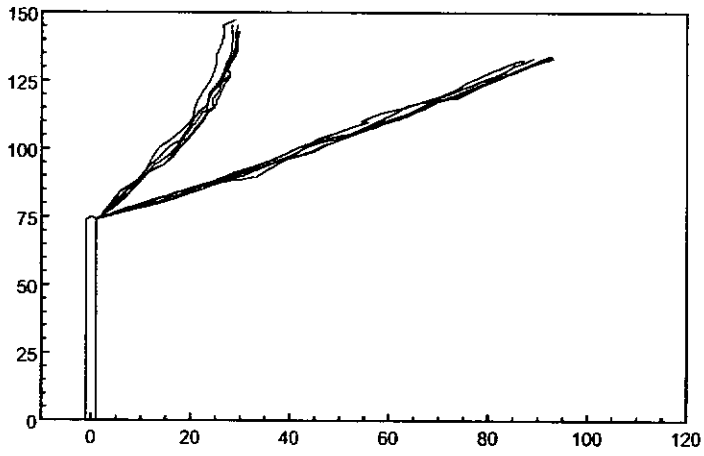


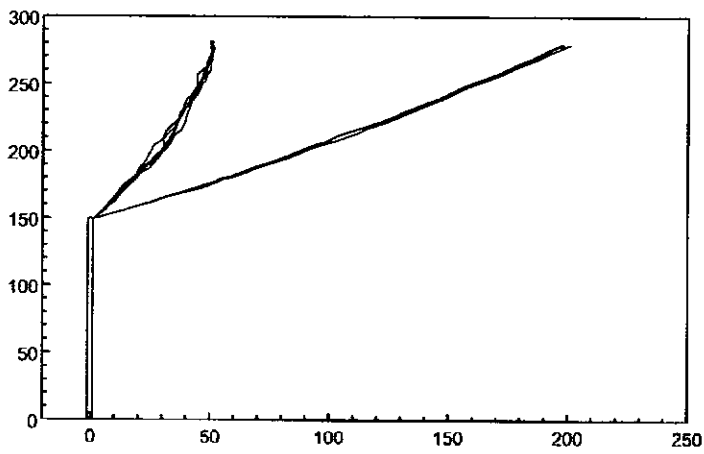
Figura 7.6: Fator de sollicitação  $f_s$  para ensaio do tipo T2 ( $D = 75\text{mm}$ ).



(a) T1 e T2,  $D = 75\text{mm}$

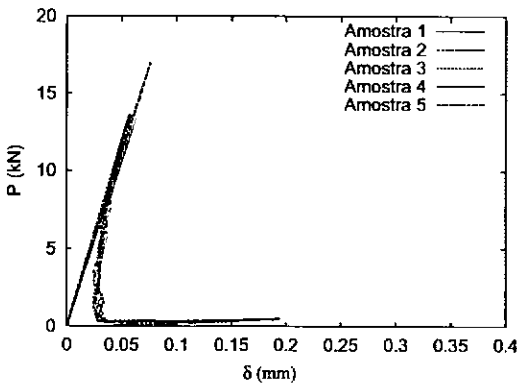


(b) T1 e T2,  $D = 150\text{mm}$

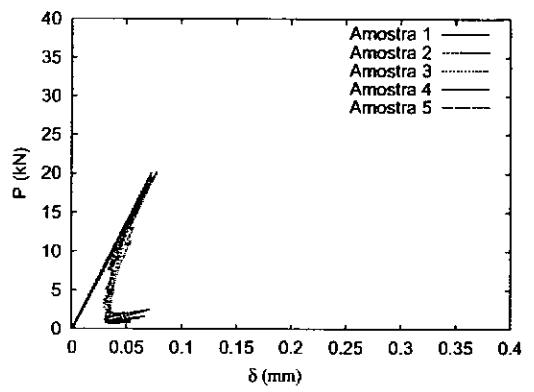


(c) T1 e T2,  $D = 300\text{mm}$

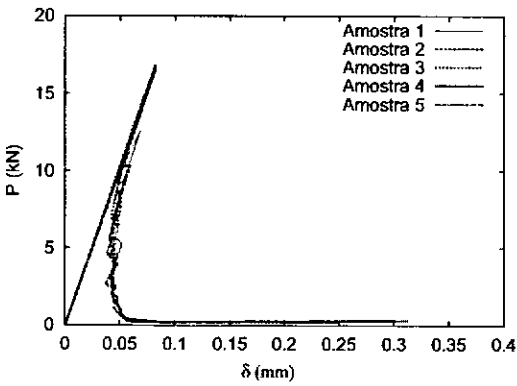
Figura 7.7: Trajetórias de fissuração simuladas. Dimensões em mm.



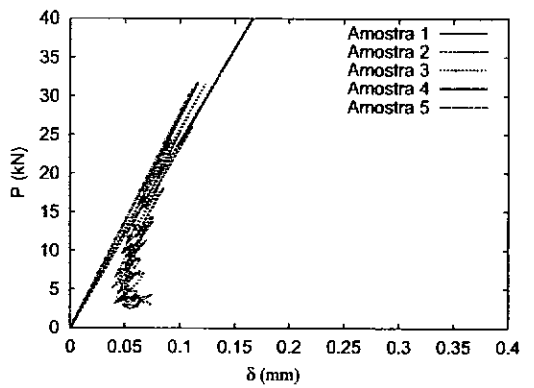
(a) T1,  $D = 75\text{mm}$



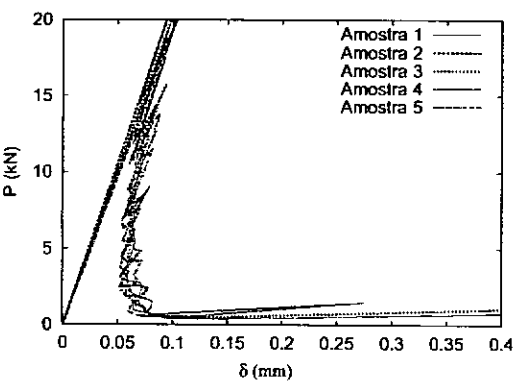
(b) T2,  $D = 75\text{mm}$



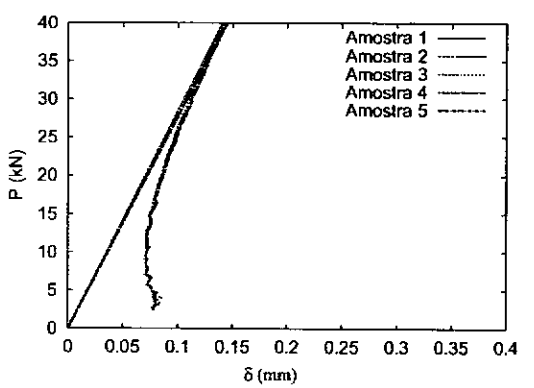
(c) T1,  $D = 150\text{mm}$



(d) T2,  $D = 150\text{mm}$

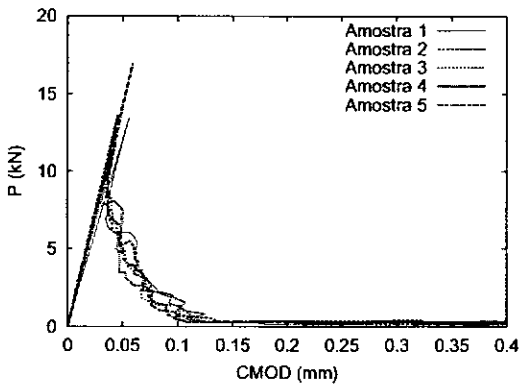


(e) T1,  $D = 300\text{mm}$

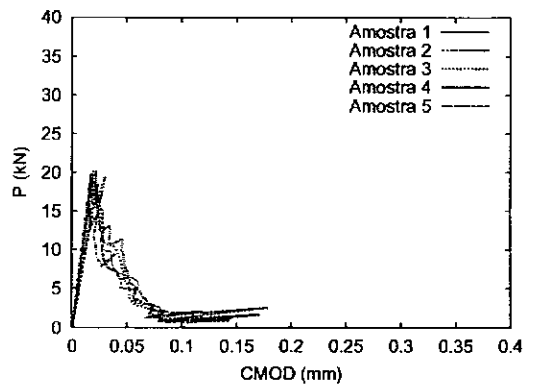


(f) T2,  $D = 300\text{mm}$

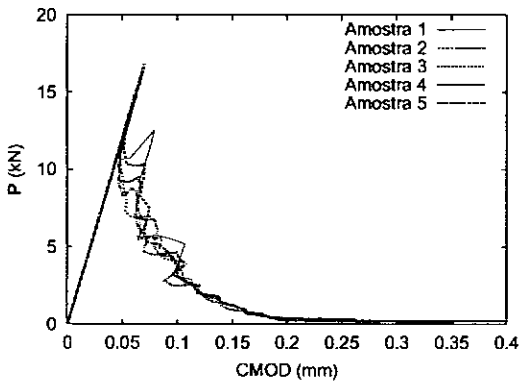
Figura 7.8: Curvas  $P \times \delta$  utilizando critério de energia global de fissuração.



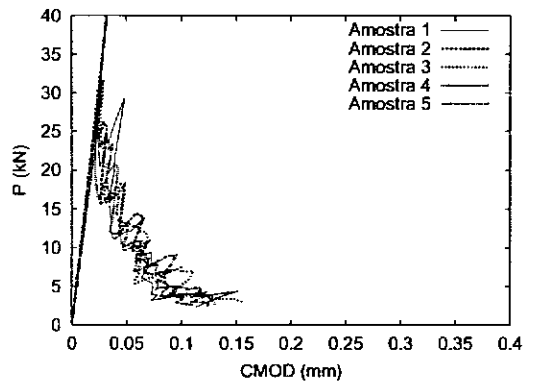
(a) T1,  $D = 75\text{mm}$



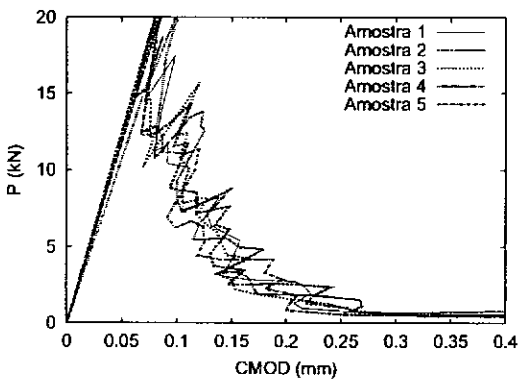
(b) T2,  $D = 75\text{mm}$



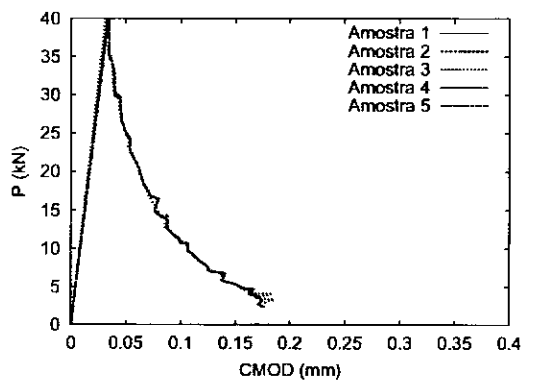
(c) T1,  $D = 150\text{mm}$



(d) T2,  $D = 150\text{mm}$

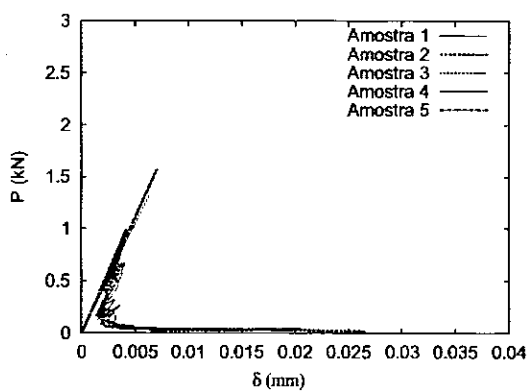


(e) T1,  $D = 300\text{mm}$

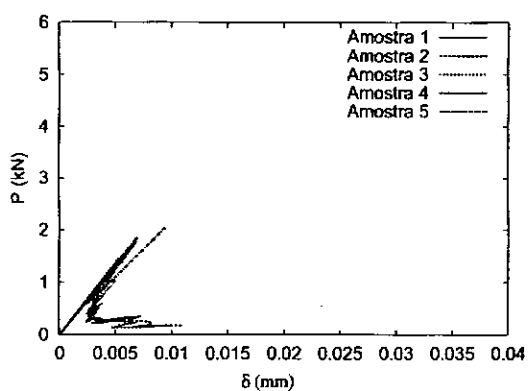


(f) T2,  $D = 300\text{mm}$

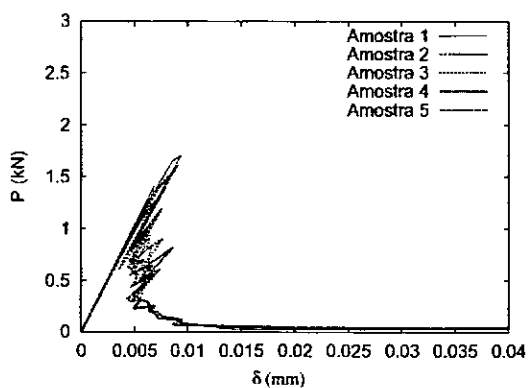
Figura 7.9: Curvas  $P \times CMOD$  utilizando critério de energia global de fissuração.



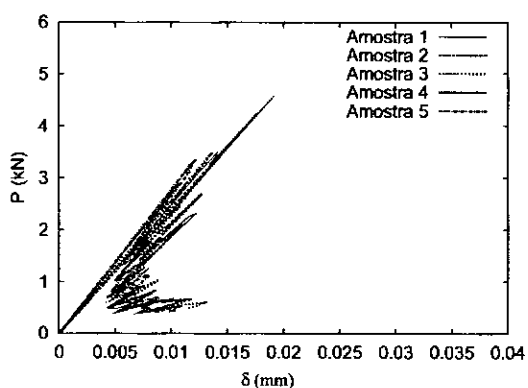
(a) T1,  $D = 75\text{mm}$



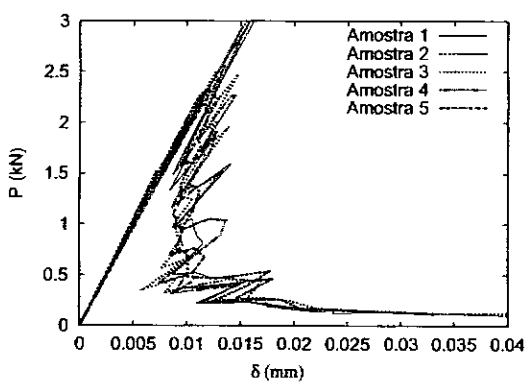
(b) T2,  $D = 75\text{mm}$



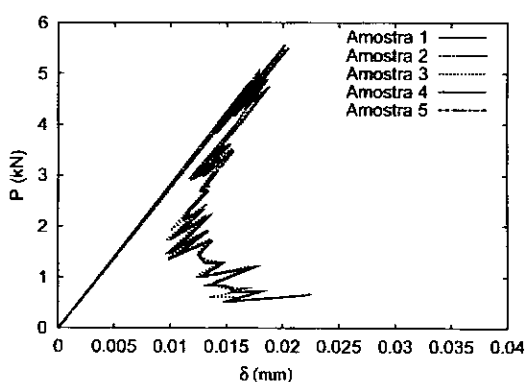
(c) T1,  $D = 150\text{mm}$



(d) T2,  $D = 150\text{mm}$

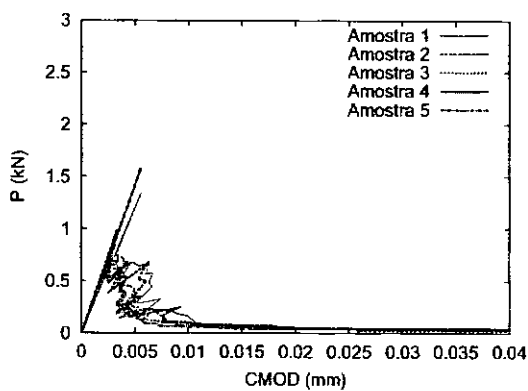


(e) T1,  $D = 300\text{mm}$

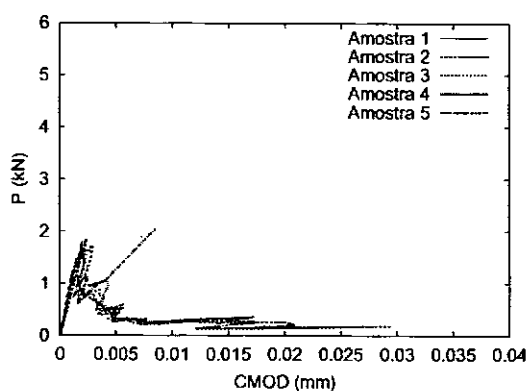


(f) T2,  $D = 300\text{mm}$

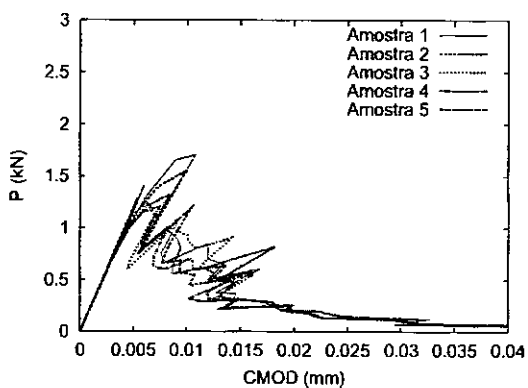
Figura 7.10: Curvas  $P \times \delta$  utilizando critério de tensão local.



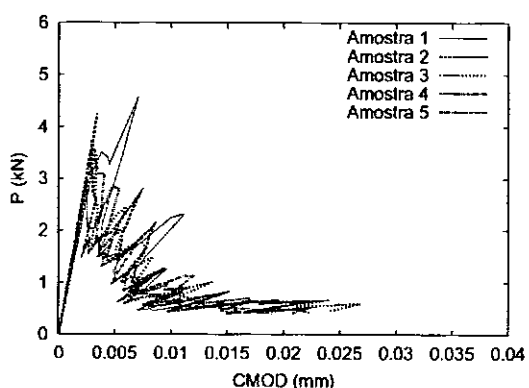
(a) T1,  $D = 75\text{mm}$



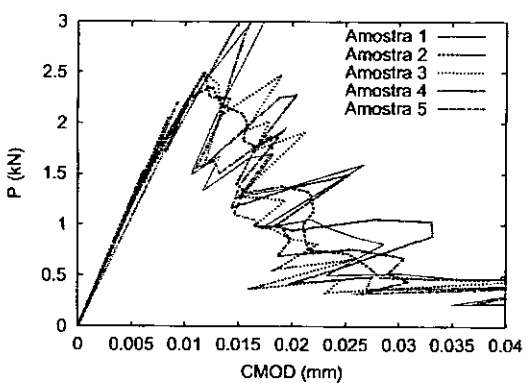
(b) T2,  $D = 75\text{mm}$



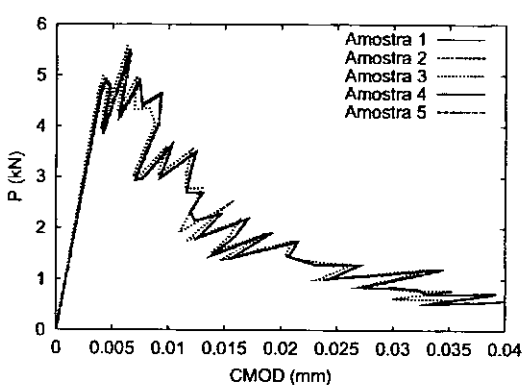
(c) T1,  $D = 150\text{mm}$



(d) T2,  $D = 150\text{mm}$



(e) T1,  $D = 300\text{mm}$



(f) T2,  $D = 300\text{mm}$

Figura 7.11: Curvas  $P \times CMOD$  utilizando critério de tensão local.

### 7.3 Discussão

Visualiza-se claramente nas Figuras 7.5 e 7.6 que o entalhe (*notch*), e posteriormente a própria fissura, concentra as tensões em sua extremidade, definindo a localização do ponto mais solicitado. Pela magnitude do efeito, o caráter probabilístico da resistência à tração não foi suficiente para localizar este ponto em outro local. Isto está de acordo com a evidência experimental [18, 19] e com o comportamento do concreto à tração [3].

Devido ao uso de elementos CST (*constant stress triangle*), os quais possuem tensão uniforme, não era raro que o nó mais solicitado fosse erroneamente localizado em um dos outros nós de um dos triângulos que contém a ponta da fissura. Para minimizar este efeito, foi necessário adaptar o programa para reduzir artificialmente<sup>1</sup> (para 50%) a resistência das pontas das fissuras, utilizando-se como argumento físico o fato da tensão real tender a infinito neste ponto. O problema se tornava maior quando o nó mais solicitado era localizado na própria borda da fissura, provocando-se uma bifurcação e uma mudança indesejada na direção da fissura. Para evitar este problema, o programa aumenta artificialmente a resistência das bordas de uma fissura recém-aberta (em 100%), utilizando-se o fato destas bordas terem, no problema físico, tensão nula na normal à borda.

Após este ajuste, o programa passou a traçar trajetórias contínuas e independentes da variação da resistência à tração, uma vez que a direção da fissura é determinada pela direção principal de tração e a mesma não depende da resistência.

Todavia, no experimento real as trajetórias não são coincidentes, o que indica que a variação (dentro das hipóteses do modelo) deve ser atribuída somente à variação do módulo de elasticidade, a qual pode alterar significativamente as direções principais. Comparando as Figuras 7.7(a) e 7.7(c), verifica-se que esta variação é dependente das dimensões do corpo. Como os espécimes são geometricamente similares (e possuem aproximadamente o mesmo refinamento na discretização), a diferença só pode ser atribuída ao comprimento de correlação: quanto maior o espécime, menor a influência do comprimento de correlação e mais homogêneo o corpo de prova. O fato das trajetórias serem menos dispersas que as trajetórias experimentais parece indicar que o desvio padrão do módulo

---

<sup>1</sup>Este valor reduzido é utilizado apenas para determinação do nó mais solicitado. O cálculo do fator de sollicitação para saída de dados e para o traçado dos gráficos é o valor original.

de elasticidade foi subestimado.

Exceto por este fato, que pode ser corrigido experimentando-se com os parâmetros do modelo (o que não é objetivo deste trabalho), as trajetórias experimentais foram muito bem aproximadas, comprovando a validade do modelo sob este aspecto.

O segundo objetivo do modelo é reproduzir as curvas  $P \times \delta$  e  $P \times CMOD$  experimentais. Neste sentido, qualitativamente as curvas obtidas pelo critério energético (Figuras 7.8 e 7.9) *parecem* boas, em forma e dispersão, exceto pelas referentes ao ensaio T1 ( $D = 300\text{mm}$ ), as quais estão excessivamente dispersas.

Quantitativamente, os valores obtidos para a carga são muito superiores aos experimentais, e exibem um efeito de escala exagerado (os corpos de prova de 300mm não são duas vezes mais resistentes que os de 150mm, por exemplo). Como discutido anteriormente, a LEFM não pode ser aplicada diretamente ao concreto, especialmente com corpos de prova tão pequenos quanto os utilizados neste experimento. As altas resistências mostradas nestes gráficos devem-se à baixa dissipação de energia pelo material, considerado frágil, em relação à dissipação real de energia do material quase-frágil.

Novamente, os gráficos poderiam ser tomados mais próximos dos experimentais ajustando-se  $G_f$ . Contudo, o forte efeito de escala da LEFM continuaria presente.

Os gráficos obtidos utilizando a tensão de tração como critério de ruptura (Figuras 7.2 e 7.2) não exibem efeito de escala, como esperado, porém subestimam a resistência do corpo de prova em aproximadamente quatro vezes, e exibem dispersão excessiva. Em um caso extremo, a curva referente ao ensaio T2 ( $D = 300\text{mm}$ ) não exhibe dispersão significativa *entre* as amostras, mas ao mesmo tempo não exhibe a variação suave encontrada na curva correspondente, obtida usando o critério energético.

A diferença quantitativa já era esperada, e deve-se ao fato da tensão no nó mais solicitado ser infinita (pela LEFM), mas pobremente aproximada pelos elementos CST. Reduzindo-se os elementos, obtém-se uma melhor aproximação para a tensão (infinita), e simultaneamente torna-se necessário aumentar a resistência do material, como relatado por outros autores<sup>2</sup>. Como nestes exemplos o tamanho relativo dos elementos foi o mesmo para todos os exemplos, um mesmo fator ( $\sim 4$ ) pode ser multiplicado pela resistência.

<sup>2</sup>Fairbairn e Paz, em comunicação pessoal.

A dispersão excessiva dos gráficos pode ser atribuída à pobre aproximação de elementos finitos para as tensões nas proximidades da fissura, exatamente de onde os valores são colhidos para traçar o gráfico. Com o refinamento, as tensões devem se tornar melhores e os gráficos mais suaves. Comparando-se com os gráficos obtidos com o critério energético, percebe-se que a malha necessária para uma boa aproximação da energia é bem mais grosseira.

## Capítulo 8

### Conclusões

---

O modelo probabilístico do LCPC tem potencial para ser uma excelente aplicação do método dos elementos finitos estocásticos ao problema da fissuração do concreto. Contudo, foi possível mostrar ao longo deste trabalho uma série de problemas com a formulação original de Rossi, os quais prejudicam a utilização e interpretação dos resultados do modelo.

As alterações propostas tiveram o objetivo de corrigir as deficiências encontradas, sem desprezar os conceitos teóricos que embasam o modelo original. Desta forma, a implementação alternativa pode aproveitar os resultados já obtidos e os trabalhos desenvolvidos em torno da formulação original, em particular a aplicação de análise inversa com redes neurais [14] para determinação dos parâmetros probabilísticos, a qual se aplica sem alterações a este método.

Esta proposta de implementação do método probabilístico reúne as vantagens do mesmo, ou seja, a possibilidade de simular os resultados experimentais, seu desvio do valor esperado e a consideração da heterogeneidade do material. Os resultados possuem qualidade superior aos obtidos anteriormente, a um menor custo computacional e menor consumo de memória, uma vez que não serão introduzidos elementos estranhos à discretização do corpo, optando-se por mudar a topologia do problema. Ao abrir mão dos elementos de interface, após cuidadosa análise dos mesmos, foi possível obter trajetórias de fissuração mais suaves, por não estarem restritas às arestas dos elementos, além de se obter um melhor condicionamento da matriz de rigidez, o que auxilia a convergência de métodos como o gradiente conjugado. O uso da energia em lugar da tensão permite ainda a obtenção de resultados mais suaves, aproximando a realização individual do resultado

experimental que a mesma deve representar. Desta forma, pode-se empregar a realização individual como estimativa do comportamento do corpo, e não como apenas um valor intermediário no processo de Monte Carlo.

O problema básico do método probabilístico, o qual prejudica sua utilização rotineira, é a determinação dos parâmetros. A implementação alternativa introduz mais dois<sup>1</sup>, além da energia de fissuração, a qual possui significado físico e ensaio para sua medição. Mesmo empregando os métodos de análise inversa, é difícil determinar se os parâmetros obtidos são parâmetros do material, do modelo, do problema ou da discretização. A resistência à tração é um exemplo de parâmetro do material e da discretização, na formulação original. A energia de fissuração na formulação alternativa é possivelmente um parâmetro do material e do modelo, sendo consequência do uso de uma relação elasto-frágil e da LEFM. Esta área ainda está carente de desenvolvimento.

Mais importante é a determinação do critério de fissuração a ser empregado, uma vez que ambas as propostas apresentadas neste trabalho se mostraram deficientes. Uma proposta promissora, na opinião do autor, é a utilização do critério de resistência em todos os nós, inclusive nas pontas de fissura, nas quais a resistência seria multiplicada por uma constante que permita relacionar a tensão (mal) aproximada pelo modelo de elementos finitos com a tensão prevista pela Mecânica da Fratura a uma distância pequena (mas finita) da ponta da fissura. Este critério misto permitiria conciliar o critério de resistência, necessário para iniciação e determinação do local da fissura, com o de energia (indiretamente através do fator de intensidade de tensões), necessário para a determinação objetiva da resistência do corpo após o início da fissuração.

Espera-se a fácil inclusão desta implementação alternativa em códigos de elementos finitos pré-existentes, a partir dos exemplos anexados a este trabalho e das diversas sugestões feitas durante o texto. A implementação empregada pelo autor foi a mais simples possível, mas o princípio geral pode ser empregado em códigos dinâmicos e não-lineares, pode ser implementada a inserção de elementos de interface sugerida no texto, permitindo a implementação de fissuras coesivas, e pode-se empregar um remalhamento automático, com o uso de elementos singulares e/ou refinamento adaptativo. Em especial,

---

<sup>1</sup>Os comprimentos de correlação dos campos de resistências e módulos de elasticidade. Os mesmos podem ser considerados iguais, eliminando um parâmetro.

os princípios de abertura de fissura podem ser estendidos ao caso 3-D com algum esforço, tendo-se como recompensa a grande diminuição no número de graus de liberdade e o melhor condicionamento da matriz de rigidez, facilitando o uso de procedimentos iterativos de resolução do sistema de equações.

Acredita-se que este trabalho tenha possibilitado uma revisão crítica e um rejuvenescimento do modelo probabilístico do LCPC, abrindo novas possibilidades de avanço, resolvendo ou apenas discutindo alguns dos problemas que o afigiam.

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALFAIATE, J., PIRES, E. B., MARTINS, J. A. C., “A Finite Element Analysis of Non-prescribed Crack Propagation in Concrete”. *Computers and Structures*, v. 63, n. 1, pp. 17–26, 1997.
- [2] ALWAN, J. M., MOBASHER, B., BOLANDER, J. E., *et al.*, “Computer Models”. In: NAAMAN, A. E., REINHARDT, H. W. (eds.), *2nd. Int. Workshop, High Performance Fiber Reinforced Cement Composites*, pp. 229–289, London, E&FN Spon, Jun. 1995.
- [3] BASCOUL, A., “State of the Art Report – Part 2: Mechanical Micro-cracking of Concrete”. *Materials and Structures*, v. 29, pp. 67–78, 1996.
- [4] BAŽANT, Z. P., PLANAS, J., *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasi-brittle Materials*. New York, CRC Press LLC, 1998.
- [5] BAŽANT, Z. P., RAJAPAKSE, Y. D. S., ALLEN, D. H., *et al.*, “Report on ONR Workshop on Fracture Scaling”, Jun. 1999, unpublished.
- [6] BELYTSCHKO, T., BLACK, T., “Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, pp. 601–620, 1999.
- [7] BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y., GU, L., “Element-Free Galerkin Methods”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, pp. 229–256, 1994.
- [8] CARMELIET, J., DE BORST, R., “Stochastic Approaches for Damage Evolution in Standard and Non-standard Continua”. *International Journal of Solids and Structures*, v. 32, n. 8/9, pp. 1149–1160, 1995.
- [9] CHAMBERS, J. M., *Computational Methods for Data Analysis*. New York, John Wiley and Sons, 1977.

- [10] DUBEUX, V. J. C., *Aplicação do Modelo Probabilístico para a Análise da Fissuração de Modelos Reduzidos de Barragens*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, Dez. 1999.
- [11] ERDOGAN, F., SIH, G. C., “On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear”. *Journal of Basic Engineering*, v. 85, pp. 519–527, 1963, *apud Gálvez et al.* [19].
- [12] FAIRBAIRN, E. M. R., EBECKEN, N. F. F., GOULART, E., *et al.*, “Probabilistic Modelling of Concrete Cracking: Using Neural Networks to Solve the Inverse Problem”. In: TOPPING, B. H. V. (ed.), *Advances in Engineering Computational Technology*, v. 1998, pp. 215–219, Edinburgh, Ago. 1998.
- [13] FAIRBAIRN, E. M. R., GUEDES, Q. M., ULM, F.-J., “An Inverse Problem Analysis for the Determination of Probabilistic Parameters of Concrete Behaviour Modeled by a Statistical Approach”. *Materials and Structures*, v. 32, pp. 9–13, Jan.–Fev. 1999.
- [14] FAIRBAIRN, E. M. R., PAZ, C. N. M., EBECKEN, N. F. F., *et al.*, “Use of Neural Networks for Fitting of FE Probabilistic Scaling Model Parameters”. *International Journal of Fracture*, v. 95, pp. 315–324, 1999.
- [15] FRANGOPOL, D. M., LEE, Y.-H., WILLAM, K. J., “Nonlinear Finite Element Reliability Analysis of Concrete”. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 122, n. 12, pp. 1174–1182, Dez. 1996.
- [16] FRANTZISKONIS, G., “Heterogeneity and Implicated Surface Effects: Statistical, Fractal Formulation and Relevant Analytical Solution”. *Acta Mechanica*, v. 108, pp. 157–178, 1995.
- [17] FRANTZISKONIS, G., “Letter to the Editor: Discussion of ‘Stochastic Approaches for Damage Evolution ...’”. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n. 15, pp. 2261–2265, 1996.
- [18] GÁLVEZ, J., ELICES, M., GUINEA, C. V., *et al.*, “Crack Trajectories under mixed mode and non-proportional loading”. *International Journal of Fracture*, v. 81, pp. 171–193, 1996.

- [19] GÁLVEZ, J. C., ELICE, M., GUINEA, G. V., *et al.*, “Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading”. *International Journal of Fracture*, v. 94, n. 3, pp. 267–284, 1998.
- [20] GRIFFITH, A. A., “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, series A*, v. 221, pp. 163–198, 1920, *apud* Mehta e Monteiro [31].
- [21] GUIMARÃES, S., *Sobre o Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Mecânica da Fratura*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, Brasil, Ago. 1992.
- [22] HUGHES, T. J. R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, 1987.
- [23] INGLIS, C. E., “Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners”. *Transaction Institute, Naval Architects*, v. 55, pp. 219–241, 1913, *apud* Shah *et al.* [51].
- [24] IRWIN, G. R., “Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate”. *J. Applied Mechanics – Trans ASME*, v. 24, pp. 361–364, 1957, *apud* Mehta e Monteiro [31].
- [25] KAPLAN, M. E., “Crack Propagation and Fracture of Concrete”. *Journal of the American Concrete Institute*, v. 58, n. 5, pp. 591–610, 1961, *apud* Shah *et al.* [51].
- [26] KARIHALOO, B. L., *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. Concrete Design and Construction, London, Longman Sci. & Tech., 1994.
- [27] KOROLIUK, V. S., *Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática*. Moscú, URSS, Editorial Mir, 1981.
- [28] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L., *Mécanique des Matériaux Solides*. Paris, Dunod, 1988.
- [29] LIMA, B. S. L. P., *Modelos Probabilísticos e Possibilísticos para o Tratamento de Incertezas das Propriedades do Contínuo*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, Dez. 1996.

- [30] MARTHA, L. F., LLORCA, J., INGRAFEA, A. R., *et al.*, “Numerical Simulation of Crack Initiation and Propagation in an Arch Dam”. *Dam Engineering*, v. 2, pp. 193–213, 1991, *apud* Karihaloo [26].
- [31] MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M., *Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais*. São Paulo, Pini, 1994.
- [32] MOËS, N., DOLBOW, J., BELYTSCHKO, T., “A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, pp. 131–150, Set. 1999.
- [33] NEVILLE, A., *Properties of Concrete*. London, Longman, 3rd ed., 1993.
- [34] PATEL, J. K., READ, C. B., *Handbook of the Normal Distribution*. New York, Marcel Dekker, 1982.
- [35] PAZ, C. N. M., *Implementação Paralela do Modelo Probabilístico 3D para Fissuração do Concreto*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, Set. 2000, (a ser defendida).
- [36] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., *et al.*, *Numerical Recipes in FORTRAN: the Art of Scientific Computing*. Cambridge, MA, Cambridge University Press, 2nd ed., 1992.
- [37] REN, Y. J., ELISHAKOFF, I., “New Results in Finite Element Method for Stochastic Structures”. *Computers and Structures*, v. 67, pp. 125–135, 1998.
- [38] RICE, J. R., “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, v. 35, n. 6, pp. 379–386, 1968, *apud* Shah *et al.* [51].
- [39] ROELFSTRA, P. E., SADOUKI, H., WITTMANN, F. H., “Le Béton Numerique”. *Materials and Structures*, v. 18, pp. 327–335, 1985, *apud* Bažant e Planas [4].
- [40] ROSSI, P., RICHER, S., “Numerical Modeling of Concrete Cracking Based on a Stochastic Approach”. *Materials and Structures*, v. 20, n. 119, pp. 334–337, 1987.

- [41] ROSSI, P., TOUTLEMONDE, F., “Effect of Loading Rate on the Tensile Behaviour of Concrete: Description of the Physical Mechanisms”. *Materials and Structures*, v. 29, pp. 116–118, 1996.
- [42] ROSSI, P., ULM, F.-J., “Size Effects in the Biaxial Tensile-Compressive Behaviour of Concrete: Physical Mechanisms and Modelling”. *Materials and Structures*, v. 30, n. 198, pp. 210–216, Maio 1997.
- [43] ROSSI, P., ULM, F.-J., HACHI, F., “Compressive Behaviour of Concrete: Physical Mechanisms and Modeling”. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 122, n. 11, pp. 1038–1043, Nov. 1996.
- [44] ROSSI, P., WU, X., “Probabilistic Model for Material Behavior Analysis and Appraisal of Concrete Structures”. *Mag. Concrete Res.*, v. 44, pp. 271–280, 1992, *apud* Bažant e Planas [4].
- [45] ROSSI, P., WU, X., LE MAOU, F., *et al.*, “Scale Effect on Concrete in Tension”. *Materials and Structures*, v. 27, n. 172, pp. 437–444, 1994.
- [46] RUBINSTEIN, R. Y., *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York, John Wiley and Sons, Abr. 1981.
- [47] SAOUMA, V. E., “On Fracture Mechanics in General and Discrete Cracks in Particular”, 1995, <http://civil.colorado.edu/~saouma/Fracture/Framcos/framcos.html>.
- [48] SAOUMA, V. E., AYARI, M. L., BOGGS, H., “Fracture Mechanics of Concrete Gravity Dams”. In: SHAH, S. P., SWARTZ, S. E. (eds.), *Fracture of Concrete and Rock*, pp. 311–333, New York, Springer-Verlag, 1989, *apud* Bažant e Planas [4].
- [49] SCHLANGEN, E., VERVUURT, A., VAN VLIET, M. R. A., *et al.*, “Numerical Materials Science of Concrete using Lattice Analysis”. *Diana World*, v. 1, 1998.
- [50] SELLERS, E., NAPIER, J., “A Comparative Investigation of Micro-Flaw Models for the Simulation of Brittle Fracture in Rock”. *Computational Mechanics*, v. 20, pp. 164–169, 1997.

- [51] SHAH, S. P., SWARTZ, S. E., OUYANG, C., *Fracture Mechanics of Concrete*. New York, John Wiley and Sons, 1995.
- [52] SHINOZUKA, M., YAMAZAKI, F., “Stochastic Finite Element Analysis: an Introduction”. In: ARIARATNAN, S. T., SCHUËLLER, G. I., ELISHAKOFF, I. (eds.), *Stochastic Structural Dynamics*, chapter 14, pp. 241–265, New York, CRC Press, Nov. 1998.
- [53] SPIEGEL, M. R., *Probabilidade e Estatística*. São Paulo, McGraw-Hill, 1978.
- [54] TELLES, J. C. F., CASTOR, G. S., GUIMARAES, S., “A Numerical Green’s Function Approach for Boundary Elements Applied to Fracture Mechanics”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 3259–3274, 1995.
- [55] TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. E., *Mecânica dos Sólidos*. Rio de Janeiro, LTC, 1993.
- [56] VANMARCKE, E., *Random Fields*. Cambridge, MIT Press, 1983, *apud* Frantziskonis [17].
- [57] VERVUURT, A., SCHLANGEN, E., VAN MIER, J. G. M., “Tensile Cracking in Concrete and Sandstone: Part 1 – Basic Instruments”. *Materials and Structures*, v. 29, pp. 9–18, 1996.
- [58] XI, Y., “Representative Volumes of Composite Materials”. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 122, n. 12, pp. 1159–1167, Dez. 1996.
- [59] YAGLOM, A. M., *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. New York, Springer-Verlag, 1986.
- [60] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., *The Finite Element Method*. New York, McGraw-Hill, 4th ed., 1989.

## Apêndice A

### Campos Aleatórios Correlacionados

---

#### A.1 Revisão de Teoria da Probabilidade

A teoria da probabilidade abrange o estudo de experimentos aleatórios, ou seja, experimentos cujo resultado não é univocamente determinado pelas condições iniciais, a partir de leis, mas permite uma classe de resultados para um mesmo conjunto de condições.

A definição acima implica que é possível repetir um experimento aleatório diversas vezes sob as mesmas condições, a princípio de forma ilimitada. Cada repetição do experimento aleatório é denominada realização e denotada por  $\omega$ . A cada elemento ou subconjunto  $A$  do conjunto de realizações possíveis é possível atribuir uma quantidade denominada probabilidade  $P\{A\}$ , a qual pode ser definida matematicamente através de axiomas, mas que para os fins deste documento será definida como o limite

$$P\{A\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} k_n(A) \quad (\text{A.1})$$

onde  $k_n(A)$  é o número de realizações contidas em  $A$ , dentre  $n$  realizações escolhidas arbitrariamente.

Por outro lado, este tipo de definição implica que o experimento possui uma regularidade tal que estas probabilidades possuam algum significado, o que seria extremamente restritivo se muitos fenômenos naturais e artificiais não possuíssem tal regularidade.

As definições resumidas aqui podem ser encontradas em qualquer texto de probabilidade, por exemplo [53], ou em textos mais avançados como [27].

### A.1.1 Variáveis aleatórias

Uma *variável aleatória*  $\xi(\omega)$  é uma quantidade medida após um experimento aleatório  $\omega$ , sendo portanto uma função do resultado deste experimento. Dado um conjunto  $\Lambda$  de valores, é possível definir uma medida probabilística

$$P_{\xi}\{\Lambda\} = P\{\xi(\omega) = \xi \in \Lambda\} \quad (\text{A.2})$$

a qual mede a probabilidade de  $\xi$  assumir valores dentro do conjunto.

Nesta seção, o estudo será restrito a variáveis reais, ou seja, variáveis  $\xi$  que assumem valores reais  $x$ . A *função de distribuição* da quantidade  $\xi$  é definida como

$$F_{\xi}(x) = P_{\xi}\{(-\infty, x)\} = P\{\xi < x\} \quad (\text{A.3})$$

sendo uma função não decrescente que varia de 0 a 1. A derivada desta função é a *função de densidade de probabilidade*

$$f_{\xi}(x) = \frac{dF}{dx} \quad (\text{A.4})$$

A partir da densidade de probabilidade, é possível redefinir a função de distribuição como

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(u) du \quad (\text{A.5})$$

(por isso, às vezes  $F_{\xi}(x)$  é chamada função de densidade de probabilidade acumulada) e a medida probabilística como

$$P_{\xi}\{\Lambda\} = \int_{\Lambda} f_{\xi}(u) du \quad (\text{A.6})$$

Caso a função de distribuição  $F_{\xi}(x)$  seja descontínua, sua derivada pode não existir, contudo a densidade de probabilidade pode ser definida com o auxílio de funções delta de Dirac.

Se a um determinado experimento se podem associar  $m$  variáveis aleatórias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , a cada região  $\Delta$  do espaço  $m$ -dimensional definido pelos valores possíveis destas quantidades ( $R^m$  para as quantidades reais) pode ser atribuída uma medida

$$P_{\xi_1, \dots, \xi_m}\{\Delta\} = P\{(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Delta\} \quad (\text{A.7})$$

associada à probabilidade de que o vetor formado por tais quantidades esteja dentro da região. A função de distribuição conjunta destas variáveis é definida por

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_m < x_m\} \quad (\text{A.8})$$

A densidade de probabilidade conjunta destas variáveis é definida como

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \quad (\text{A.9})$$

de onde

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m \quad (\text{A.10})$$

e

$$P_{\xi_1, \dots, \xi_m}\{\Delta\} = \int \dots \int_{\Delta} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m \quad (\text{A.11})$$

Tomando  $F_{\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_m}(\infty, \dots, x_i, \dots, \infty)$  obtém-se a distribuição marginal  $F_{\xi_i}(x_i)$  da variável  $\xi_i$ , ou a distribuição da variável considerada separadamente das demais. Analogamente pode-se definir a densidade marginal  $f_{\xi_i}(x_i)$ . No caso especial em que as variáveis aleatórias são independentes, então a distribuição conjunta pode ser escrita como produto das distribuições marginais de cada variável

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_m}(x_m) \quad (\text{A.12})$$

e da mesma forma a densidade de probabilidade pode ser escrita como produto das densidades marginais

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = f_{\xi_1}(x_1) \dots f_{\xi_m}(x_m) \quad (\text{A.13})$$

### A.1.2 Esperança matemática

A esperança matemática  $\langle \xi \rangle$  de uma variável aleatória  $\xi$  é a média dos valores tomados por esta variável, ponderados por suas probabilidades. No caso de uma variável contínua, é dada pela fórmula abaixo, que também apresenta as diversas notações para a esperança:

$$E[\xi] = \mu(\xi) = \bar{\xi} = \langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \quad (\text{A.14})$$

A esperança de uma função  $g(\xi_1, \dots, \xi_m)$  de  $m$  variáveis aleatórias é dada por:

$$\langle g(\xi_1, \dots, \xi_m) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_m) f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (\text{A.15})$$

A esperança também é denominada *primeiro momento*, pois denomina-se momento de ordem  $k$  de uma variável aleatória a quantidade:

$$\mu_k(\xi) = \langle \xi^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx \quad (\text{A.16})$$

O momento *central* de ordem  $k$  é dado por:

$$\mu_k^0(\xi) = \langle (\xi - \bar{\xi})^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^k f_{\xi}(x) dx \quad (\text{A.17})$$

Os momentos mais importantes de uma variável aleatória são o primeiro momento, a *média*, e o segundo momento central, a *variância*  $\mu_2^0 = \sigma^2(\xi) = D^2(\xi)$ . A raiz quadrada da variância é denominada *desvio padrão*  $\sigma(\xi) = D(\xi)$ , e reflete a dispersão da variável em torno de sua média.

Sejam  $k_1, \dots, k_m$  números inteiros, tais que  $k_1 + \dots + k_m = k$ . Então, a quantidade:

$$\langle \xi_1^{k_1} \dots \xi_m^{k_m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (\text{A.18})$$

é denominada momento misto de ordem  $k$  das variáveis  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . Os momentos mistos mais importantes são o momento de segunda ordem  $B(\xi_1, \xi_2) = \langle \xi_1 \xi_2 \rangle$  e o momento central de segunda ordem

$$B^0(\xi_1, \xi_2) = \langle (\xi_1 - \bar{\xi}_1)(\xi_2 - \bar{\xi}_2) \rangle = B(\xi_1, \xi_2) - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \quad (\text{A.19})$$

também denominado *covariância*. Quando as variáveis  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são ajustadas para terem média nula, a covariância se confunde com o momento de segunda ordem. A *correlação* é a dada por

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{B^0(\xi_1, \xi_2)}{D(\xi_1)D(\xi_2)} \quad (\text{A.20})$$

e se confunde com a covariância quando as variáveis são normalizadas para terem desvio padrão unitário.

Dadas  $m$  variáveis  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , define-se a matriz de covariâncias como  $C = ||B_{ij}^0||$ , onde  $B_{ij}^0 = B^0(\xi_i, \xi_j)$ , e analogamente a matriz de correlação como  $R = ||r_{ij}||$ , onde  $r_{ij} = r(\xi_i, \xi_j)$ . A nomenclatura não é rígida, e muitas vezes a matriz  $C$  também é denominada matriz de correlação. Ambas as matrizes são obrigatoriamente positivas semidefinidas<sup>1</sup>.

### A.1.3 Distribuição normal

A distribuição normal é a mais importante distribuição da estatística, posto concedido pelo Teorema do Limite Central, o qual expressa que a soma de variáveis aleatórias não correlacionadas de quaisquer distribuições tende a possuir distribuição normal. Logo, fatores como erros de medida, ruído, flutuações térmicas, entre outros fenômenos que podem ser considerados como a soma de inúmeros fatores não correlacionados, todos podem ser razoavelmente aproximados por variáveis aleatórias normais.

Embora esta distribuição seja descrita em absolutamente todos os textos de probabilidade e estatística, alguns resultados mais específicos podem ser encontrados em [34].

A função de densidade de probabilidade desta distribuição é a curva gaussiana

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.21})$$

a qual depende apenas da média  $\mu$  e do desvio padrão  $\sigma$  da variável aleatória.

Integrando-se esta função de  $-\infty$  a  $x$ , tem-se a função de distribuição normal

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(u) du = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \quad (\text{A.22})$$

onde  $\operatorname{erf}(x)$  é a função erro, definida como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{A.23})$$

---

<sup>1</sup>Uma matriz  $A$  é positiva definida se para todos os vetores  $x$ , a quantidade  $x^T A x$  é positiva. Caso a quantidade possa ser nula, a matriz se diz positiva semidefinida. Os autovalores de uma matriz positiva são também todos positivos.

Em duas variáveis, a densidade de probabilidade *normal bivariada* é dada por

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r_{12}^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-r_{12}^2)} \left( \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{2r_{12}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2^2} \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as médias respectivamente de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são os desvios padrões e  $r_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$  é o coeficiente de correlação, dado em função da covariância  $\sigma_{12}$  entre as variáveis. As distribuições marginais são normais com média  $\mu_j$  e desvio padrão  $\sigma_j$ , independentes da correlação.

O caso mais geral da densidade de probabilidade normal *multivariada* de um vetor  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  é dada por

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu) \right] \quad (\text{A.25})$$

onde  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  é o vetor de médias e  $C$  é a matriz de covariâncias, definida em A.1.2.

Definindo-se uma variável aleatória  $\zeta$ , cujos valores  $z$  são obtidos a partir dos valores  $x$  de uma variável aleatória normal  $\xi$  pela relação  $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , onde  $\mu$  é a média de  $\xi$  e  $\sigma$  é seu desvio padrão, obtém-se uma variável padronizada de média 0 e desvio padrão 1. Para esta variável, a densidade de probabilidade toma a forma:

$$f_{\zeta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (\text{A.26})$$

e a densidade da distribuição normal bivariada padrão possui a forma

$$f_{\xi_1, \xi_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\sigma_{12}^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\sigma_{12}^2)} (z_1 - 2\sigma_{12}z_1z_2 + z_2) \right] \quad (\text{A.27})$$

onde  $\sigma_{12} = r_{12}$  é a covariância (e correlação) entre as variáveis normais padrões  $z_1$  e  $z_2$ .

As funções de distribuição bivariada e multivariada podem ser encontradas integrando-se as densidades de probabilidade dadas acima, conforme descrito anteriormente. Por exemplo, para a distribuição bivariada:

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = P\{\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (\text{A.28})$$

Outra probabilidade importante pode ser obtida pela fórmula abaixo:

$$\begin{aligned}
 P\{\xi_1 \geq x_1, \xi_2 \geq x_2\} &= \int_{x_1}^{-\infty} \int_{x_2}^{-\infty} f(u_1, u_2) du_1 du_2 \\
 &= 1 - F_{\xi_1}(x_1) - F_{\xi_2}(x_2) + F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)
 \end{aligned}
 \tag{A.29}$$

Este último resultado possui uma forma alternativa de cálculo, encontrada em [34] e escrita na forma padrão apenas por brevidade:

$$\begin{aligned}
 P\{\zeta_1 \geq z_1, \zeta_2 \geq z_2\} &= \int_{z_1}^{\infty} \int_{z_2}^{\infty} f_{\zeta_1, \zeta_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 \\
 &= \int_{z_1}^{\infty} f_{\zeta}(u) \left( 1 - F_{\zeta} \left( (z_2 - \sigma_{12}u) / \sqrt{1 - \sigma_{12}^2} \right) \right) du
 \end{aligned}
 \tag{A.30}$$

onde  $f_{\zeta_1, \zeta_2}(z_1, z_2)$  é a densidade conjunta da distribuição bivariada padrão,  $f_{\zeta}(z_1)$  é a sua densidade marginal, ou seja, a densidade normal padrão, e  $F_{\zeta}(z_1)$  é a função de distribuição correspondente.

A combinação linear  $ax_1 + bx_2$  de duas variáveis normais é também normal, porém a razão  $x_1/x_2$  possui uma distribuição de Cauchy, e a quantidade  $x_1^2 + x_2^2$  (o quadrado do módulo de um número complexo cujas partes real e imaginária são aleatórias e normais) possui a distribuição de Rayleigh, quando as médias são nulas e os desvios são idênticos (esta última condição caracteriza uma distribuição normal *circular*). Não há uma distribuição clássica para o produto  $x_1x_2$ , o qual claramente não é normal.

## A.2 Campos aleatórios

### A.2.1 Definições

Até o momento, tem-se considerado variáveis aleatórias isoladas. Uma importante parte da teoria da probabilidade estuda as *funções* aleatórias de uma ou mais variáveis. Tais funções associam uma grandeza aleatória a um número ou vetor  $n$ -dimensional. Quando a variável dependente é o tempo  $t$ , a função aleatória  $\xi(t)$  é denominada *processo estocástico*. Quando se trata de uma função de uma coordenada espacial  $x$ , a função  $\xi(x)$  é denominada *campo estocástico* ou *campo aleatório*. Enquanto o estudo de processos estocásticos dispõe de uma vasta literatura e pode ser encontrado até em textos básicos de teoria da probabilidade, o estudo de campos aleatórios é feito em textos mais especializados, como [27]. Um bom texto sobre campos aleatórios, voltado para aplicações, é [59].

O valor de  $\xi(x)$  associado a cada ponto  $x$  é uma variável aleatória, logo é importante distinguir entre o campo  $\xi(x)$ , o qual é uma função aleatória, e suas realizações individuais  $\xi(\omega, x)$ , as quais são funções ordinárias do vetor  $x$ . Quando não houver perigo de confusão, a notação  $\xi(x)$  será utilizada tanto para o campo quanto para as realizações individuais.

Em princípio, uma descrição completa de um campo aleatório só é possível através da especificação de todas as funções de distribuição de dimensões finitas, ou seja, as funções de distribuição conjuntas para  $\xi(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , com  $m$  qualquer e  $x_k$  escolhidos arbitrariamente. Contudo, tais funções somente podem ser obtidas para casos muito especiais, preferindo-se a descrição em termos de momentos.

Os momentos de um campo aleatório são definidos de forma análoga aos de variáveis aleatórias:

$$\mu_k(x_1, \dots, x_k) = \langle \xi(x_1) \cdots \xi(x_k) \rangle \quad (\text{A.31})$$

e são funções (ordinárias) das variáveis  $x_1, \dots, x_k$ . O primeiro momento,  $\mu(x) = \langle \xi(x) \rangle$ , se denomina valor médio do campo aleatório. Da mesma forma, são definidos os momentos centrais:

$$\mu_k^0(x_1, \dots, x_k) = \langle (\xi(x_1) - \mu(x_1)) \cdots (\xi(x_k) - \mu(x_k)) \rangle \quad (\text{A.32})$$

dos quais o mais importante é o segundo momento central,

$$B^0(x_1, x_2) = \langle (\xi(x_1) - \mu(x_1))(\xi(x_2) - \mu(x_2)) \rangle = \langle \xi(x_1)\xi(x_2) \rangle - \mu(x_1)\mu(x_2) \quad (\text{A.33})$$

denominado função de correlação do campo aleatório.

## A.2.2 Representação em série

Dado um campo vetorial com função de correlação  $B^0(x_1, x_2)$ , existe uma representação em série ortogonal completa de funções  $\varphi_n(x)$ , tais que

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int B^0(x, y) \varphi_n(y) dy \quad (\text{A.34})$$

com  $\lambda_n$  não nulos e de soma finita, obtidos por

$$\lambda_n = \int \int B^0(x, y) \varphi_n \overline{\varphi_n} dx dy \quad (\text{A.35})$$

a partir dos quais se pode escrever

$$B^0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} \quad (\text{A.36})$$

O campo aleatório  $\xi(x)$  pode ser representado em função da mesma série, como

$$\xi(x) = \mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k(x) \quad (\text{A.37})$$

onde  $\eta_k$  são variáveis aleatórias não correlacionadas com média 0 e variância  $\lambda_n$ . Seu valor para uma realização arbitrária pode ser calculado como

$$\eta_k = \int \xi(x) \phi_k(x) dx \quad (\text{A.38})$$

### A.2.3 Campos gaussianos

Um campo gaussiano possui todas as distribuições de dimensões finitas normais multivariadas. Em outras palavras, quaisquer pontos do campo, escolhidos ao acaso, estão distribuídos de uma forma que depende apenas de suas médias e das correlações entre eles, dois a dois.

Logo, o campo médio  $\mu(x)$  e a função de correlação  $B^0(x, y)$  são suficientes para caracterizar um campo gaussiano, sendo que a função  $B^0(x, y)$  deve ser positiva semi-definida, o que restringe de certa forma o conjunto de funções adequadas. É suficiente, para tanto, que dados os pontos quaisquer  $x_1, \dots, x_n$ , a matriz de covariâncias  $C$  cujos elementos são  $c_{ij} = B^0(x_i, x_j)$  seja positiva semidefinida.

### A.2.4 Integração, continuidade e derivação

A integral de um campo aleatório é também uma variável aleatória. Caso o campo seja gaussiano, a integral será uma variável aleatória gaussiana. Em qualquer caso, tem-se

$$\left\langle \int_{\Omega} \xi(x) dx \right\rangle = \int_{\Omega} \langle \xi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \mu(x) dx \quad (\text{A.39})$$

e

$$D \left[ \int_{\Omega} \xi(x) dx \right] = \int_{\Omega} \int_{\Omega} B^0(x, y) dx dy \quad (\text{A.40})$$

onde  $\Omega$  é o domínio de definição do campo  $\xi(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

Um campo aleatório é contínuo se  $\mu(x)$  é contínua e se  $B^0(x,y)$  obedece a uma certa condição [27]. Em particular, os campos gaussianos são contínuos com probabilidade 1<sup>2</sup>. Devido à definição especial de continuidade de um campo, as realizações particulares não precisam ser contínuas.

Para que o campo aleatório  $\xi(x)$  seja derivável, é suficiente que  $\mu(x)$  e  $B^0(x,y)$  sejam deriváveis. Se a derivada  $\xi'(x)$  do campo aleatório é contínua com probabilidade 1, então quase todas as realizações do campo aleatório também serão contínuas, e suas derivadas serão realizações do campo aleatório  $\xi'(x)$ .

### A.2.5 Campos homogêneos

Um campo aleatório *homogêneo* é o análogo espacial de um processo aleatório *estacionário*. Para que um campo seja homogêneo no amplo sentido, é suficiente que o campo médio seja constante,  $\mu(x) = \mu$  e que a correlação dependa apenas da diferença entre os pontos,  $B^0(x,y) = B^0(x-y)$ . Se  $x$  e  $y$  são vetores, a diferença deve ser tomada vetorialmente.

Um campo homogêneo é contínuo se a correlação  $B^0(x)$  é contínua em zero.

Uma definição mais rígida exige que todas as distribuições de dimensão finita do campo devem ser invariáveis à translação. Caso isto seja verdade, o campo se diz homogêneo no estreito sentido.

Se a função de correlação depende apenas da norma da distância entre os pontos,  $B^0(x-y) = B^0(|x-y|)$ , então o campo é homogêneo e isotrópico.

### A.2.6 Comprimento de correlação

O comprimento de correlação de um campo aleatório homogêneo pode ser compreendido como a distância a partir da qual dois pontos do campo não guardam mais

<sup>2</sup>Ou seja, a probabilidade de uma realização específica ser descontínua é nula, embora tal evento não viole as propriedades do campo.

correlação significativa. A definição exata desta quantidade é dada por

$$l = \int_0^{\infty} r(u) du \quad (\text{A.41})$$

onde  $r(x)$  é a função de correlação  $B^0(x)/B^0(0)$ .

Algumas funções de covariância clássicas podem ser escritas em função do comprimento de correlação, como a exponencial

$$B^0(x) = \alpha \exp(-x/l) \quad (\text{A.42})$$

e a “gaussiana”, a qual não tem qualquer relação com a distribuição de probabilidade dos valores do campo

$$B^0(x) = \alpha \exp\left(-\pi \left(\frac{x}{2l}\right)^2\right) \quad (\text{A.43})$$

### A.2.7 Representação espectral

A representação espectral de um campo homogêneo é um assunto bem mais complexo que o resumo aqui apresentado, e ao leitor é particularmente recomendada a leitura de [59]. Resumidamente, é possível representar um campo aleatório homogêneo como uma superposição de oscilações harmônicas, através de séries ou integrais de Fourier modificadas, cujas amplitudes são aleatórias mas relacionadas com as amplitudes da decomposição espectral da função de correlação.

Os campos homogêneos unidimensionais possuem uma representação espectral dada por

$$\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dG(\omega) \quad (\text{A.44})$$

onde  $G(\omega)$  é um processo aleatório (de valores complexos) não decrescente denominado processo espectral de  $\xi(x)$ . A integral acima é uma integral de Fourier-Stieljes<sup>3</sup> e, na maior parte dos casos, não pode ser interpretada como a transformada inversa de Fourier de alguma função  $2\pi g(\omega) = 2\pi \frac{dG}{d\omega}$ , porque tal derivada não existe.

Contudo, a função de correlação de um campo homogêneo de média nula<sup>4</sup> pode

<sup>3</sup>Por definição,  $\int f(x) dG(x) = \lim_{x_2-x_1 \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k)(G(x_k) - G(x_{k-1}))$

<sup>4</sup>O qual pode ser obtido como  $\xi^0(x) = \xi(x) - \mu$ , caso em que  $B^0(x) = B(x)$ .

ser escrita como

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(\omega) d\omega \quad (\text{A.45})$$

em função da *densidade espectral* do processo aleatório,  $f(\omega)$ . Por esta expressão, verifica-se que  $2\pi f(\omega)$  é a transformada de Fourier da função de correlação  $B(x)$ . A densidade espectral é uma função não negativa, e este fato pode ser usado para verificar se  $B(x)$  é realmente função de correlação de algum campo aleatório, ou seja, se é positiva semidefinida. A integral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\omega) d\omega \quad (\text{A.46})$$

chama-se *função espectral* do campo aleatório e possui a importante propriedade

$$\langle |dG(\omega)|^2 \rangle = dF(\omega) \quad (\text{A.47})$$

que relaciona a função espectral com o processo espectral. Além disto,

$$\langle dG(\omega_1)dG(\omega_2) \rangle = 0 \text{ se } \omega_1 \neq \omega_2 \quad (\text{A.48})$$

Uma interpretação da relação acima é que a função espectral determina a esperança da *densidade de potência*  $|dG(\omega)|^2$  das realizações individuais do campo aleatório. Por outro lado, é possível estimar (grosseiramente, principalmente para grandes  $x$ ) a correlação  $B(x)$  utilizando a relação na direção inversa. O procedimento numérico pode ser encontrado em [36]. Se o campo é gaussiano, a densidade de potência é também um campo aleatório gaussiano, porém não-correlacionado.

A aplicação da representação espectral na geração de campos aleatórios é descrita em na seção A.3.4, bem como a forma discreta das relações acima.

Os argumentos acima podem ser generalizados para duas e três dimensões, o que não será descrito aqui.

### A.3 Geração de campos

Nesta seção, será apresentada a forma mais simples de geração, através da decomposição de Cholesky da matriz de covariâncias, uma forma alternativa de decomposição da matriz, e finalmente uma metodologia espectral usando a transformada de Fourier.

Esta forma apresenta resultados tão bons quanto os do método mais simples, em muito menos tempo. O leitor que dispuser de literatura específica sobre o assunto, por exemplo [56], pode ignorar esta seção.

Neste trabalho, presume-se a disponibilidade de um gerador ideal de números aleatórios segundo a distribuição normal, com média nula e desvio padrão unitário. Algumas técnicas de obtenção deste gerador ideal podem ser encontradas em [36]. Este trabalho utilizou a implementação contida na RANLIB<sup>5</sup>, baseada na transformação de um gerador de números uniformemente distribuídos, provavelmente pela técnica de transformação descrita em [36].

### A.3.1 Métodos de decomposição

Como definido anteriormente, a covariância é dada pela equação:

$$B^0(\alpha, \beta) = \langle (\alpha - \bar{\alpha}) \cdot (\beta - \bar{\beta}) \rangle \quad (\text{A.49})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são variáveis aleatórias de médias  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$ , respectivamente, e  $\langle x \rangle$  simboliza a esperança matemática. A covariância de uma variável aleatória com si própria é igual à sua variância (quadrado do desvio padrão), e duas variáveis independentes possuem covariância nula.

Dado um vetor de variáveis aleatórias  $x = [x_i]^T$ , independentes ou não, sua matriz de covariâncias  $C$  é composta pelas covariâncias dos componentes de  $x$  dois a dois:  $c_{ij} = B^0(x_i, x_j)$ . A matriz de covariâncias é simétrica e positiva definida, podendo ser obtida por  $C = \langle x \cdot x^T \rangle$  (se a média das variáveis é nula).

Dado um vetor de números aleatórios normais de média nula e desvio padrão unitário  $z$ , é possível obter um vetor de números correlacionados a partir da matriz de covariâncias. Se houver uma decomposição de  $C$  em uma matriz e sua transposta, multiplicadas ( $C = A \cdot A^T$ ) então o produto  $y = A \cdot z$  gera um vetor com as covariâncias desejadas, uma vez que

$$\langle y \cdot y^T \rangle = \langle A \cdot z \cdot (A \cdot z)^T \rangle = \langle A \cdot z \cdot z^T \cdot A^T \rangle \quad (\text{A.50})$$

---

<sup>5</sup>Library of FORTRAN routines for Random Number Generation, obtida em [www.netlib.org](http://www.netlib.org).

mas desde que o vetor  $z$  seja composto realmente de variáveis independentes e normalizadas, então

$$z.z^T = I \quad (\text{A.51})$$

$$\langle y.y^T \rangle = \langle A.A^T \rangle = \langle C \rangle = C \quad (\text{A.52})$$

como se deseja.

### **A.3.2 Decomposição de Cholesky**

A forma mais simples de decompor uma matriz real simétrica da forma desejada é através da decomposição de Cholesky, a qual é numericamente estável, desde que a matriz seja simétrica e positiva definida. Esta foi a forma utilizada, por exemplo, em [29] e [52].

Contudo, a matriz de covariâncias é extremamente mal condicionada, pois seus autovalores se tornam rapidamente desprezíveis em relação à precisão do computador quando se monta uma matriz suficientemente grande. Isto impede a utilização, na prática, da decomposição de Cholesky (um processo simples e robusto, de ordem  $O(n^3)$  com um coeficiente pequeno multiplicando  $n^3$ ).

Neste trabalho são apresentadas duas alternativas a este método, sendo a primeira a implementação de uma breve sugestão encontrada em [9] e a segunda uma forma totalmente diferente, baseada nas propriedades espectrais de um campo aleatório, provavelmente o mesmo método utilizado em [8]

### **A.3.3 Decomposição por autopares**

Na demonstração da seção A.3.1, não é feita a exigência que a matriz  $A$  seja triangular inferior, como resulta da decomposição de Cholesky. Na verdade, qualquer matriz com a propriedade de resultar  $C$  quando multiplicada pela transposta é adequada. Em [9], são brevemente citadas alternativas como a decomposição em autovetores, detalhada abaixo, e a decomposição em valores singulares, sendo esta segunda descrita em [36] e não considerada aqui.

Toda matriz real quadrada  $C$  pode ser decomposta na forma:

$$X_L.A.X \quad (\text{A.53})$$

onde  $X_L$  é a matriz de autovetores “esquerdos” (*Left eigenvectors*), definida por

$$X_L.C = \Lambda.X_L \quad (\text{A.54})$$

$X$  é a matriz de autovetores, definidos pela relação clássica

$$C.X = X.\Lambda \quad (\text{A.55})$$

e  $\Lambda$  é a matriz diagonal composta pelos autovalores de  $C$ .

Se a matriz  $C$  é simétrica, o vetor  $X_L$  é igual a  $X^T$ , e  $X$  é ortogonal, ou seja,  $X.X^T = I$ . Multiplicando (A.55) por  $X^T$ , tem-se que:

$$C.X.X^T = X.\Lambda.X^T \quad (\text{A.56})$$

$$C = X.\Lambda.X^T \quad (\text{A.57})$$

Esta relação ainda não está na forma desejada, mas definindo  $\Lambda^{1/2}$  como a matriz obtida tirando a raiz quadrada dos elementos de  $\Lambda$ , ou seja, a matriz diagonal formada pelas raízes quadradas dos autovalores de  $C$ , tem-se que

$$A = X.\Lambda^{1/2} \quad (\text{A.58})$$

tem a propriedade desejada, uma vez que

$$A.A^T = X.\Lambda^{1/2}.(X.\Lambda^{1/2})^T = X.(\Lambda^{1/2}.\Lambda^{1/2.T}).X^T = X.\Lambda.X^T = C \quad (\text{A.59})$$

como se deseja.

O problema com este método é a necessidade de se obter todos os autovalores e autovetores da matriz de covariâncias, por um algoritmo complexo (utilizou-se a redução à forma diagonal e posterior fatoração QR implícita, como sugerido em [36]) e de ordem (aproximadamente)  $O(n^{10/3})$ , com um coeficiente muito alto, o que o torna muitas vezes menos eficiente que a fatoração de Cholesky.

Uma alternativa é a obtenção apenas dos primeiros autovalores e autovetores, o que não foi tentado, pois os valores obtidos pela técnica de decomposição foram utilizados apenas para comparar e criticar os valores obtidos pelo método espectral descrito adiante. Como a maior parte dos autovalores é quase nula, provavelmente esta alternativa é válida quando não se desejar utilizar o método espectral abaixo. Uma possibilidade seria guardar a matriz para gerar uma grande quantidade de números com a mesma matriz de correlação, o que necessita apenas de uma multiplicação matriz vetor, processo de ordem  $O(n^2)$ .

### A.3.4 Geração espectral de campos aleatórios

Como mostrado na seção A.2.7, um campo aleatório pode ser decomposto em uma superposição de harmônicos, cujas amplitudes são dadas por um campo aleatório não correlacionado cuja variância depende da amplitude da decomposição espectral da função de correlação pela equação (A.68). Supõe-se no restante do texto que o campo médio  $\mu(x)$  é nulo, contudo pode-se obter um campo de média qualquer somando-se a média aos valores obtidos por este procedimento.

Para efetuar a geração do campo por computador, é necessário trabalhar com uma versão discreta dos conceitos apresentados na seção A.2.7. Nesta versão, o campo aleatório  $\xi(x)$  é representado por seus valores  $\xi_k = \xi(x_k)$  em  $N$  pontos discretos de um intervalo fechado  $[0; L]$ , espaçados de  $\Delta = \frac{L}{N-1}$ , de forma que

$$x_k = k\Delta, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{A.60})$$

A densidade do processo espectral<sup>6</sup>  $G(\omega)$  do campo, representada aqui como  $g(\omega)$ <sup>7</sup>, também é representada de forma discreta por  $N$  valores

$$g_n = \sum_m g\left(\omega_n + \frac{2m\pi}{\Delta}\right) \quad (\text{A.61})$$

$$n = -N/2, \dots, N/2 - 1,$$

$$m = -\infty, \dots, \infty$$

onde

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\Delta N} \quad (\text{A.62})$$

variando em  $[-\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta}]$ , com espaçamento  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta N}$ . O somatório representa o efeito de *aliasing*, pelo qual as freqüências  $\omega_n + \frac{2m\pi}{\Delta}$  não podem ser distinguidas entre si quando a função é discretizada [36, 59]. O valor  $\frac{\pi}{\Delta}$  representa a freqüência de Nyquist da discretização.

Os valores  $g_n$  podem ser calculados através da transformada discreta de Fourier (implementada possivelmente na forma da transformada rápida de Fourier [36]), sendo

<sup>6</sup>Definido pela relação  $\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dG(\omega)$ .

<sup>7</sup>Embora na seção A.2.7 seja notado que tal densidade  $g(\omega) = \frac{dG}{d\omega}$  não existe, porque o processo  $G(\omega)$  não é diferenciável, na representação discreta pode-se utilizar a diferença finita  $\frac{\Delta G}{\Delta\omega}$  como aproximação.

dados por<sup>8</sup>

$$2\pi g_n = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k e^{-i\omega_n x_k} \quad (\text{A.63})$$

onde, substituindo (A.60) e (A.62), tem-se

$$2\pi g_n = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k e^{-i2\pi nk/N} \quad (\text{A.64})$$

Pode-se utilizar um raciocínio análogo para calcular a densidade espectral  $f(\omega)$ <sup>9</sup> na forma discreta  $f_n$ , em função da amostragem da função de correlação  $B_k = B^0(x_k)$ , efetuada com o mesmo número de pontos e mesmo intervalo

$$2\pi f_n = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} B_k e^{-i2\pi nk/N} \quad (\text{A.65})$$

Sabe-se da seção A.2.7 que a densidade  $g(\omega)$  do processo espectral é uma função aleatória de valores complexos e está relacionada com a densidade espectral  $f(\omega)$  através da relação

$$\langle |g_n \Delta \omega|^2 \rangle = f_n \Delta \omega \quad (\text{A.66})$$

$$\langle |g_n|^2 \rangle = \frac{f_n}{\Delta \omega} \quad (\text{A.67})$$

$$\langle |g_n|^2 \rangle = \frac{\Delta N}{2\pi} f_n \quad (\text{A.68})$$

e que os valores  $g_n$  são não correlacionados, obedecendo a

$$\langle g_n g_m \rangle = 0, \quad \text{se } n \neq m \quad (\text{A.69})$$

logo é possível obter uma realização arbitrária através do sorteio de  $N$  números complexos atendendo a (A.68), ou seja, deve-se sortear  $2N$  números reais  $a_n, b_n$ , de uma distribuição normal, atendendo

$$\mu(a_n) = \mu(b_n) = 0 \quad (\text{A.70})$$

$$D(a_n) = D(b_n) = \sqrt{\frac{\Delta N f_n}{4\pi}} \quad (\text{A.71})$$

<sup>8</sup>Por sua definição,  $g(\omega)$  difere da transformada de Fourier por um fator de  $2\pi$ .

<sup>9</sup>Definida a partir da função de covariância  $B^0(x)$  como  $B^0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} dt$ , ou seja, é a transformada de Fourier de  $B^0(x)$ .

de onde

$$g_n = a_n + ib_n \quad (\text{A.72})$$

A partir destes valores  $g_n$ , é possível obter a realização  $\xi_k$  na forma discreta através da fórmula de inversão

$$\xi_k = \frac{1}{\Delta N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} 2\pi g_n e^{i2\pi nk/N} \quad (\text{A.73})$$

Para que o processo seja real, é necessário que os valores  $g_n$  obedeçam à simetria

$$g_n = \bar{g}_{-n} \quad (\text{A.74})$$

onde  $\bar{g}_{-n}$  é o complexo conjugado de  $g_{-n}$ . Por esta simetria, ainda,  $g_0$  deve ser obrigatoriamente real. Como é possível verificar que  $g_n = g_{n+N}$ , uma segunda consequência é que  $g_{-N/2} = g_{N/2}$  é real. Logo, há apenas  $N$  números reais a serem sorteados.

### A.3.5 Implementação

Como a função de correlação é real, é possível utilizar-se deste fato para acelerar a obtenção de sua transformada discreta de Fourier  $f_n$ . A função de correlação de um campo aleatório homogêneo é ainda simétrica e par, o que permite expressá-lo em termos de uma série de cossenos. Contudo, o próprio campo aleatório não é par, logo esta otimização não será empregada por motivos que ficarão claros a seguir.

Para garantir a simetria da função de correlação, seus valores são copiados para que  $B_k = B_{N-k}$ .

De [36], toma-se a implementação da transformada rápida de Fourier (FFT), para campos reais, com o nome de `realft`<sup>10</sup>. Nesta implementação específica, é retornada apenas a parte positiva do resultado,  $f_n$ ,  $n = 0, \dots, N/2$ , e ainda assim o valor  $f_{N/2}$ , sendo real (pelos mesmos motivos expostos acima para  $g_n$ ), é retornado como a parte imaginária de  $f_0$ .

---

<sup>10</sup>No livro [36], a FFT é implementada com sinais contrários, logo as rotinas que calculam a Fourier (`four1`, `rlft3`, `fourn`) tiveram o sinal da exponencial invertido para coincidir com o significado desta seção, que é o mesmo da implementação do MATLAB e de diversos outros livros. Outros textos já apontaram esta discrepância.

A partir dos valores de  $f_n$ , são gerados os valores de  $g_n$ , utilizando um gerador de números aleatórios normais na forma da função `gennor (avg, std)`, a qual recebe como parâmetros a média (`avg`) e o desvio padrão (`std`) da distribuição normal.

Finalmente, os valores  $g_n$  são invertidos com o auxílio da mesma subrotina `realft`. Esta subrotina retorna o campo multiplicado por  $N/2$ , logo uma última multiplicação por  $2/N$  gera o campo desejado.

Os fatores  $\Delta$  e  $2\pi$  se cancelam, pois as implementações numéricas calculam apenas os somatórios em (A.65) e (A.73), o que simplifica a implementação. Deve-se notar que as variáveis  $g_n$  e  $f_n$ , na implementação abaixo, estão portanto divididas por  $\frac{2\pi}{\Delta}$ .

Algoritmo:

*para*  $k = N/2 + 1$  até  $N - 1$  *faça*  $B_k = B_{N-k}$ ;

$f_n = \text{realft}(B_k, N, 1)$ ; *FFT direta*

$\text{Re}(g_0) = \text{gennor}(0, \sqrt{N \text{Re}(f_0)})$ ;

$\text{Im}(g_0) = \text{gennor}(0, \sqrt{N \text{Im}(f_0)})$ ;

*para*  $n = 1$  até  $N/2 - 1$  *faça*

$$sd = \sqrt{\frac{N}{2} |f_n|}$$

$\text{Re}(g_n) = \text{gennor}(0, sd)$ ;

$\text{Im}(g_n) = \text{gennor}(0, sd)$ ;

*fim para*

$\xi_k = \frac{2}{N} \text{realft}(g_n, N, -1)$ ; *FFT inversa*

Este algoritmo gera um campo unidimensional com as características desejadas.  $\Delta$  é assumido unitário por este algoritmo, o que não gera problema algum se tanto o campo quanto a função de correlação forem expressos em termos de distâncias unitárias entre os pontos de amostragem.

Pelo menos uma otimização podem ser efetuada, levando-se em conta a linearidade da transformada e o fato de que  $D(a\xi) = aD(\xi)$ , onde  $\xi$  é uma variável aleatória e  $a$  é uma constante. Logo, todas as constantes podem ser reunidas e multiplicadas aos

termos  $g_n$  antes da transformada.

### A.3.6 Campos bidimensionais

As mesmas considerações acima podem ser estendidas ao caso bidimensional (ou tridimensional). Neste caso, o campo e sua respectiva função de correlação são discretizados em  $NM$  pontos, sendo  $N$  na direção  $x$  e  $M$  na direção  $y$ . O algoritmo é basicamente o mesmo, utilizando a rotina `rfft3` de [36] para efetuar a transformada discreta. Este algoritmo retorna os valores  $g_{nm}$ ,  $n = 0, \dots, N/2$ ;  $m = 0, \dots, M-1$ .

Algumas simetrias precisam ser levadas em conta ao gerar os números aleatórios. A função de correlação  $B_{nm}$  precisa ser par, o que é garantido pelo primeiro passo do algoritmo. A transformada de um campo real obedece

$$g_{nm} = g_{(N+n)(M+m)} = \bar{g}_{(N-n)(M-m)} \quad (\text{A.75})$$

e por conseqüência  $g_{00}$ ,  $g_{0(M/2)}$ ,  $g_{(N/2)0}$  e  $g_{(N/2)(M/2)}$  são reais,  $g_{0m} = \bar{g}_{0(M-m)}$  e  $g_{(N/2)m} = \bar{g}_{(N/2)(M-m)}$ , ou seja, em  $n = 0$  e  $n = N/2$  o espectro possui esta restrição. Analogamente para  $m = 0$  e  $m = M/2$ , o que é irrelevante porque  $n$  varia apenas entre 0 e  $N/2$ . Para que o campo seja real e válido, é necessário que o espectro de valores aleatórios obedeça às mesmas restrições.

Nota-se que apenas metade do espectro é gerado pela `rfft3`. Os pontos da direção  $x$  representam metade do espectro mas na direção  $y$  todo o espectro é retornado, o que explica os limites dos loops. O fato de que os valores  $g_{(N/2)m}$  são retornados em uma matriz separada deve ser considerado na implementação real.

Algoritmo:

para  $n = N/2 + 1$  até  $N - 1$  e

$m = 0$  até  $M/2$  faça  $B_{nm} = B_{(N-n)m}$ ;

para  $m = M/2 + 1$  até  $M - 1$  e

$n = 0$  até  $N - 1$  faça  $B_{nm} = B_{n(M-m)}$ ;

$f_{nm} = \text{rfft3}(B_{nm}, N, M, 1)$ ; FFT direta;

para  $n = 0$  até  $N/2$  e  $m = 0$  até  $M - 1$  faça

$$sd = \sqrt{\frac{NM}{2}} |f_{nm}|;$$

$$\text{Re}(g_{nm}) = \text{gennor}(0, sd);$$

$$\text{Im}(g_{nm}) = \text{gennor}(0, sd);$$

*fim para*

$$\text{Im}(g_{00}) = \text{Im}(g_{0(M/2)}) = 0;$$

$$\text{Re}(g_{00}) = 2 \text{Re}(g_{00});$$

$$\text{Re}(g_{0(M/2)}) = 2 \text{Re}(g_{0(M/2)});$$

$$\text{Im}(g_{(N/2)0}) = \text{Im}(g_{(N/2)(M/2)}) = 0;$$

$$\text{Re}(g_{(N/2)0}) = 2 \text{Re}(g_{(N/2)0});$$

$$\text{Re}(g_{(N/2)(M/2)}) = 2 \text{Re}(g_{(N/2)(M/2)});$$

*para m = 1 até M/2 - 1 faça*

$$g_{0m} = \bar{g}_{0(M-m)};$$

$$g_{(N/2)m} = \bar{g}_{(N/2)(M-m)};$$

*fim para*

$$\xi_{nm} = \frac{2}{NM} \text{realft}(g_{nm}, N, M, -1); \quad \text{FFT inversa}$$

Este método pode ser otimizado da mesma forma que o unidimensional.

## Apêndice B

### Validação do Modelo sem Elementos de Interface

---

Como validação da formulação sem elementos de interface, será feita uma análise comparativa.

O modelo original será representado através da utilização do elemento de interface descrito em [35]. Será utilizado o elemento elasto-frágil, suprimindo-se os elementos onde se deseja representar a existência de uma fissura. Uma implementação ligeiramente diferente da original será empregada, pelos motivos descritos em 3.2.

A implementação alternativa será feita alterando-se a topologia da malha de forma a representar adequadamente a descontinuidade de deslocamentos, conforme proposto em 6.3.

Os exemplos utilizarão discretizações muito grosseiras, procurando-se analisar as diferenças entre as abordagens e não o resultado correto dos problemas apresentados.

#### B.1 Exemplos

Em todos os exemplos, tenta-se simular um estado de carregamento uniaxial, através de vínculos adequados na face lateral esquerda do corpo e de um carregamento uniforme na face direita, mantendo-se livres as demais faces. Os vínculos exatos estão mostrados nas figuras.

Procura-se obter um campo de tensões uniforme com  $\sigma_x = 1$ ,  $\sigma_y = 0$  e  $\tau_{xy} = 0$  no corpo não fissurado, mantendo-se o mesmo carregamento no corpo fissurado. No caso descrito no item B.1.2, não foi possível obter obter este campo, o que não influencia as conclusões. O material possui os coeficientes físicos  $E = 10.0$  e  $\nu = 0.2$ .

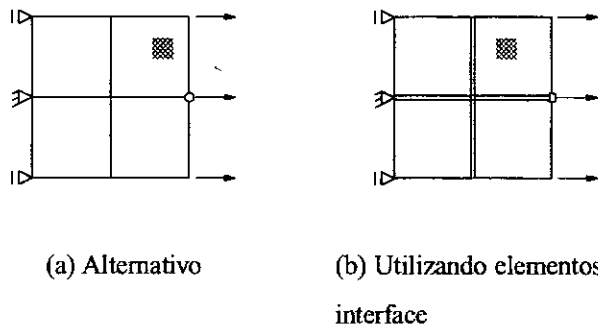


Figura B.1: Caso 1: Validação da implementação alternativa

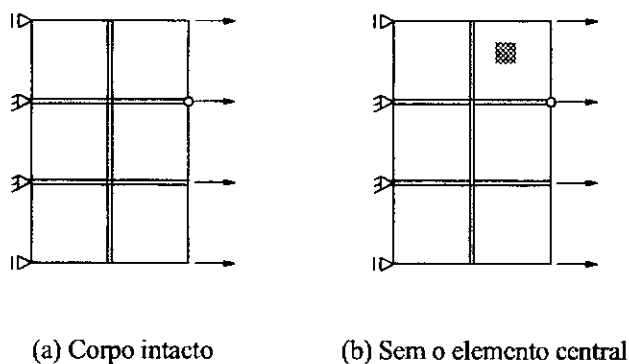


Figura B.2: Caso 2: Fissura interna unitária

### B.1.1 Caso 1: Validação

O primeiro exemplo a ser executado é uma malha regular de quatro elementos quadriláteros, conforme a Figura B.1, para confirmar que os deslocamentos são independentes da presença dos elementos de interface.

### B.1.2 Caso 2: Fissura interna unitária

Em seguida, tenta-se determinar se a presença de uma fissura interna de tamanho correspondente a exatamente uma aresta, caso que não pode ser representado através da implementação alternativa, possui algum significado na implementação através de elementos de interface.

Uma malha de seis elementos, conforme a Figura B.2, é resolvida com e sem elementos de interface, sendo o elemento de interface central removido, como indicado na figura. A malha sem elementos de interface, não fissurada, é resolvida para comparação.

Para medir a abertura da fissura, um modelo com o elemento de interface central

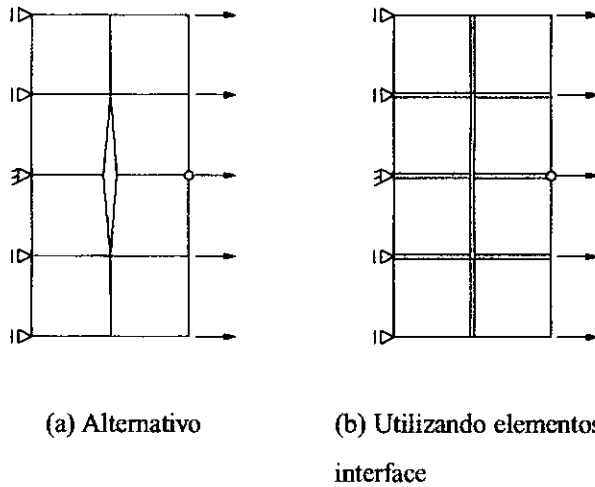


Figura B.3: Caso 3: Fissura interna mínima

intacto é utilizado como referência para o valor esperado dos deslocamentos das bordas da fissura.

### B.1.3 Caso 3: Fissura interna mínima

O próximo exemplo é a fissura interna mínima representável pela implementação alternativa, correspondendo a duas arestas contíguas entre elementos.

A malha de oito elementos empregada, mostrada na Figura B.3, teve a fissura introduzida através da criação de um nó “sombra” com as mesmas coordenadas do nó central da malha e a divisão dos quatro elementos centrais entre o nó original e o nó “sombra”. Não há, como poderia ser sugerido pela figura, abertura inicial da fissura, pois o nó sombra possui as mesmas coordenadas do nó original.

A malha correspondente, com elementos de interface, teve os elementos de interface suprimidos nas duas arestas abertas.

### B.1.4 Caso 4: Fissura externa mínima

Uma fissura externa unitária (correspondente a uma única aresta) pode ser adequadamente representada através da implementação alternativa, confundindo-se então com a fissura mínima. Esta fissura foi introduzida através da criação de um novo nó, na implementação alternativa, ou através da eliminação do elemento de interface correspondente, na implementação original. A malha empregada foi a malha de validação da

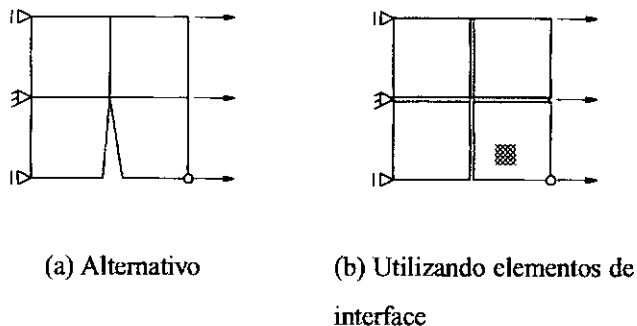


Figura B.4: Caso 4: Fissura externa

seção B.1.1, conforme a Figura B.4.

## B.2 Resultados

Dois tipos de resultados são importantes nos exemplos utilizados, os deslocamentos e as tensões.

Os deslocamentos são avaliados nos nós, o que introduz uma pequena diferença entre os modelos com e sem elementos de interface. Para efeito de comparação, os nós do modelo *sem* elementos de interface são utilizados como referência. Os nós do modelo *com* elementos de interface que correspondem em posição a estes nós de referência têm seus deslocamentos calculados e a média dos mesmos é utilizada para comparação.

As tensões são calculadas nos elementos. A comparação é feita nos elementos correspondentes nos dois modelos, sendo notada a diferença entre estes resultados e os resultados calculados nos elementos de interface.

### B.2.1 Deslocamentos

O deslocamento de um nó importante de cada modelo foi calculado para ambos os dois modelos e representado na Tabela B.1. Verifica-se que em todos os casos o modelo com elementos de interface é um pouco menos rígido que o modelo original, contudo a diferença não é significativa e provavelmente diminuiria com a espessura dos elementos.

A diferença um pouco maior no caso 4 pode ser atribuída à malha muito grosseira empregada no seu cálculo.

Calculando-se a diferença entre os deslocamentos das bordas da fissura unitário,

Caso	Alternativo	Original	Diferença (%)
1	0.18884	0.19083	1.05
2	0.18590	0.18729	0.75
3	0.40611	0.40925	0.77
4	1.0455	1.1400	9.04

Tabela B.1: Deslocamentos horizontais  $u_x$  nos nós selecionados

Caso	Abertura
Corpo intacto	0.000201
Fissura aberta	0.002267
Diferença (%)	1027

Tabela B.2: Abertura da fissura no Caso 2 (fissura unitária)

verifica-se que tal fissura, único caso que não pode ser representado adequadamente pela implementação alternativa, apresenta uma abertura significativa, conforme a Tabela B.2. Contudo, é importante ressaltar que tal diferença só é percebida pelos próprios elementos de interface, não interferindo de forma significativa nos deslocamentos dos elementos comuns. Isto indica que a capacidade de modelar uma fissura com a dimensão de uma única aresta na malha original não é estritamente necessária, validando a proposta alternativa de representação de fissuras discretas.

### B.2.2 Tensões

Como as tensões nos elementos da malha original são calculados em função dos deslocamentos nodais, e mostrou-se no item anterior que os mesmos são equivalentes nos dois modelos, o campo de tensões dentro dos elementos é praticamente idêntico em todos os casos.

Contudo, os elementos de interface possuem a peculiaridade de possuir arestas muito próximas, o que permite a estimação muito mais precisa das tensões *normais* a estes elementos. As tensões na direção do elemento não possuem a mesma precisão, bem como as tensões de cisalhamento, mas estas tensões também estão prejudicadas pela própria formulação do elemento, conforme discutido anteriormente.

A precisão “extra” obtida com os elementos de interface se torna importante nas proximidades das fissuras, quando os campos de tensões se tornam singulares e a estimativa de tensões nos elementos normais se torna mais grosseira. A tensão empregada para efetuar a ruptura do elemento de interface é esta tensão mais precisa, logo haverá uma diferença significativa entre as implementações do modelo probabilístico, tanto na determinação do local de abertura da fissura quanto na escolha de sua direção.

Interpreta-se esta diferença como uma escolha de se calcular, através de um refinamento peculiar da malha, um valor mais preciso para as tensões normais às direções predefinidas para a abertura das fissuras. Na implementação alternativa, as tensões são calculadas de forma mais grosseira e se tornam muito pouco confiáveis no local onde são mais importantes, nas extremidades das fissuras.

## Apêndice C

### Amostras de Código

---

Este apêndice contém as subrotinas mais importantes dentre as descritas na seção 6.5. O código foi compilado pelo autor utilizando o compilador de FORTRAN77 *GNU G77*, sob sistema operacional Linux, contudo o código deve ser facilmente portátil para outros compiladores e sistemas operacionais (exceto pela rotina *TagAresta*, a qual poderia ser reescrita de forma mais portátil<sup>1</sup>).

As variáveis empregadas como parâmetros por estas subrotinas se referem ao código principal de elementos finitos, estando descritas na Tabela C.1.

#### C.1 Geração do campo aleatório

```
*-----  
*   Geração propriamente dita do campo aleatório e interpolação dos  
*   valores nodais  
Subroutine genftfld( ft, x, nnode, ndm, muft, sigft, lenft,  
& ix, nenl, numel, Ernd, muE, sigE, mem )  
  Integer nnode, ndm, nenl, numel, ix(nenl, numel)  
  Real ft(nnode), muft, sigft, lenft, mem(*), muE, sigE,  
& Ernd(numel)  
  Real*8 x(ndm, nnode)  
  Real*8 x1, x2, y1, y2, dx, dy  
  Integer i, N, M, itemp, ialoc  
  
  If (ndm .ne. 2) Then  
    Write(*,*) 'Cannot generate a ', ndm, '-dimensional field,'  
& ' only 2D'  
  EndIf  
  
  ! 1o. passo - determinar as dimensões do campo  
  
  x1 = x(1, 1)  
  x2 = x1  
  y1 = x(2, 1)  
  y2 = y1
```

---

<sup>1</sup>Quando foi escrita pela primeira vez, a rotina era mais complexa e não podia ser escrita de forma simples sem recursão. Na versão atual, a sua função é mais simples e possivelmente dispensa a recursão.

Variável	Descrição
dA	Incremento da área da fissura.
Ernd (el)	Módulo de elasticidade do elemento el.
f (gl, no)	Grandeza prescrita no grau de liberdade gl do nó no.
fs (no)	Fator de solitação no nó no.
ft (no)	Resistência à tração (alterada) no nó no.
ftorig (no)	Resistência à tração original no nó no.
id (gl, no)	Número da equação referente ao grau de liberdade gl do nó no.
ix (ord, el)	Nó nº ord do elemento el (conectividade).
jdiag (eq)	Posição do elemento eq da diagonal no armazenamento <i>skyline</i> da matriz.
lenft	Comprimento de correlação das propriedades $f_{i,l} = E_l$ .
mem	Matriz utilizada como memória "alocável".
muE	Média dos módulos de elasticidade $E_{\mu}$ .
muft	Média das resistências à tração $f_{i,\mu}$ .
ndf	Número de graus de liberdade por nó.
ndm	Dimensão do problema (2D, 3D).
nels (no)	Número de elementos contendo o nó no.
nen	Número de nós por elemento.
nen1	(=nen+1) Primeira dimensão de ix.
neq	Número de equações no problema.
nnode	Número de nós no problema.
nnodep	Número de nós máximo previsto pela alocação de memória.
nms	Nó mais solicitado.
numel	Número de elementos no problema.
sigE	Desvio padrão dos módulos de elasticidade $E_{\sigma}$ .
sigft	Desvio padrão das resistências à tração $f_{i,\sigma}$ .
sigx (no)	Tensão $\sigma_x$ no nó no.
sigy (no)	Tensão $\sigma_y$ no nó no.
tauxy (no)	Tensão $\tau_{xy}$ no nó no.
x (dir, no)	Coordenada na direção dir do nó no.

Tabela C.1: Descrição das variáveis empregadas

```

Do i = 2, nnode
  If (x(1, i) .lt. x1) x1 = x(1, i)
  If (x(1, i) .gt. x1) x2 = x(1, i)
  If (x(2, i) .lt. x1) y1 = x(2, i)
  If (x(2, i) .gt. x1) y2 = x(2, i)
End Do

! Acrescentar a margem de um comprimento de correlação

x1 = x1 - lenft !*2
x2 = x2 + lenft !*2
y1 = y1 - lenft !*2
y2 = y2 + lenft !*2

! Número provisório de pontos, supondo um grid de 0.8l de espaçamento

N = (x2 - x1)/(0.8*lenft) + 1
M = (y2 - y1)/(0.8*lenft) + 1

! Arredondados para potências de dois

i = 2
Do While (i .lt. N)
  i = 2*i
End Do
N = i

i = 2
Do While (i .lt. M)
  i = 2*i
End Do
M = i

! Cálculo dos incrementos a serem utilizados

dx = (x2 - x1)/(N-1)
dy = (y2 - y1)/(M-1)

! 2o. passo: Geração dos campos

! Alocação da memória (N*M reais)

itemp = ialoc( N*M, 1 )

! Criação da função de correlação

Call CalcB( mem(itemp), N, M, dx, dy, sigft, lenft )

! Geração propriamente dita

Call InitRandom
Call genfld2d( mem(itemp), N, M )

! 3o. passo: Interpolação dos valores nodais (e soma da média)

Call InterFt( mem(itemp), N, M, x1, y1, dx, dy, muft, ndm,
& nnode, x, ft )

*-----
*   Repetição para módulo de elasticidade

Call CalcB( mem(itemp), N, M, dx, dy, sigE, lenft )
Call InitRandom
Call genfld2d( mem(itemp), N, M )
Call InterE( mem(itemp), N, M, x1, y1, dx, dy, muE, ndm,
& nnode, x, ix, nen1, numel, Ernd )
*-----

```

```

! Desalocação de memória (só funciona imediatamente após a alocação)
Do i = 1, N*M
  mem(itemp+i-1) = 0.
End Do
itemp = ialoc( -N*M, 1 )

```

```
End
```

```
*-----
```

```
*-----
```

```

* Cálculo da função de correlação
Subroutine CalcB( B, N, M, dx, dy, sigft, lenft )
Integer N, M, i, j
Real B(N, M), c1, c2, sigft, lenft
Real*8 dx, dy

c1 = sigft**2
c2 = -atan(1.)/lenft**2

Do i = 0, N/2
  Do j = 0, M/2
    B(i+1, j+1) = c1*exp(c2*( (i*dx)**2 + (j*dy)**2 ))
  End Do
End Do

```

```
End
```

```
*-----
```

```
*-----
```

```

* Interpolação dos valores nodais (resistência à tração)
Subroutine InterFt( f, N, M, x1, y1, dx, dy, muft, ndm, nnode,
& x, ft )
Integer N, M, i, nn, mm, nnode, ndm
Real f(N, M), ft(nnode), muft
Real*8 x(ndm, nnode), x1, y1, dx, dy, xx, yy

Do i = 1, nnode
  nn = Int( (x(1, i) - x1)/dx ) + 1
  mm = Int( (x(2, i) - y1)/dy ) + 1
  xx = (x(1, i) - x1)/dx - nn + 1
  yy = (x(2, i) - y1)/dy - mm + 1
  ft(i) = muft + f(nn,mm)*(1-xx)*(1-yy) + f(nn+1, mm)*xx*(1-yy) +
& f(nn, mm+1)*(1-xx)*yy + f(nn+1, mm+1)*xx*yy
End Do

```

```
End
```

```
*-----
```

```
*-----
```

```

* Interpolação dos valores de elasticidade do elemento
Subroutine InterE( f, N, M, x1, y1, dx, dy, muE, ndm, nnode,
& x, ix, nen1, numel, E )
Integer N, M, i, nn, mm, nnode, ndm, nen1, numel, ix(nen1, numel)
Real f(N, M), E(numel), muE
Real*8 x(ndm, nnode), x1, y1, dx, dy, xx, yy, xm, ym

Do i = 1, numel
  xm = (x(1, ix(1, i)) + x(1, ix(2, i)) + x(1, ix(3, i)))/3
  ym = (x(2, ix(1, i)) + x(2, ix(2, i)) + x(2, ix(3, i)))/3
  nn = Int( (xm - x1)/dx ) + 1
  mm = Int( (ym - y1)/dy ) + 1
  xx = (xm - x1)/dx - nn + 1
  yy = (ym - y1)/dy - mm + 1
  E(i) = muE + f(nn,mm)*(1-xx)*(1-yy) + f(nn+1, mm)*xx*(1-yy) +
& f(nn, mm+1)*(1-xx)*yy + f(nn+1, mm+1)*xx*yy
  If (E(i) .lt. 0d0) E(i) = 0e0
End Do

```

End

\*-----

## C.2 Abertura da fissura

\*-----

```
*      Cálculo do fator de sollicitação
Subroutine CalcFs( sigx, sigy, tauxy, fs, ft, nnode, nms )
Integer nnode, nms
Double Precision sigx(nnode), sigy(nnode), tauxy(nnode), minfs,
& fs(nnode)
Real ft(nnode), fti, sti
Integer i
Logical isNaNd

nms = 1
minfs = 1e100
Do i = 1, nnode
  fti = ft(i)
  sti = .5d0*(sigx(i)+sigy(i)) + ! fórmula para sigma_1
& sqrt( (0.5d0*(sigx(i)-sigy(i)))**2+tauxy(i)**2 )
  If (sti .lt. 0.) Then
    fti = 1.0
    sti = 0.0 ! Preparado para resultar Inf e impedir a ruptura
  End If

  fs(i) = fti/sti          ! Cálculo do fator de sollicitação fs
  If (fs(i) .lt. minfs) Then
    minfs = fs(i)
    nms = i
  End If
End Do

If (isNaNd(minfs)) Then
  Write(*,*) 'Fator de sollicitação ', minfs
  Stop
End If

End
```

\*-----

\*-----

```
*      Abertura da fissura
Subroutine OpenCrack(nms, nnode, neq, ndf, ndm, numel, nen, id,
& f, x, ix, jdiag, nels, ft, sigx, sigy, tauxy, fs, nnodep, dA,
& ftorig)
Integer nms, nnode, neq, ndf, ndm, numel, nen, nnodep
Integer id(ndf, nnode), ix(nen+1, numel), jdiag(neq), nels(nnode)
Double Precision f(ndf, nnode), x(ndm, nnode), sigx(nnode),
& sigy(nnode), tauxy(nnode), fs(nnode), dA
!-----
Double Precision oldx, oldy ! Para evitar determinantes nulos 06/07/2000
Double Precision xr, xs, yr, ys
Integer elem
Logical nulDet
!----- 06/07/2000
Real ft(nnode), ftorig(nnode) ! Acrescentado ftorig 14/07/2000
Integer i, ll, n1, n2, sinal, sn
Double Precision pi, g, dgt, thrfs, minfs, infly
Double Precision t1, t2, dgt1, dgt2
Integer chng, chng1
Logical isNanD, isInfD
Integer iaresta(3,10), ia ! iaresta(1,i) - elemento
! ! iaresta(2,i) - nó 1 (1 - x - 2)
```

```

!                               ! iaresta(3,i) - nó 2
! Nota: máximo de 10 arestas convergindo em um dado nó.
Integer inosab(10), innosab
Double Precision dA1
Double Precision angulo ! função de mef-util.f

pi = 4d0*atan(1d0)

infty = 0.
infty = 1./infty ! Exatamente. 1./0. não é aceito.

! 1o. passo: separar os elementos

chng = 0          ! Número de elementos mudados
Do While (chng .eq. 0)
  ! Ver arestas ligadas ao nó nms
  Call Arestas( nms, iaresta, numel, nen, ix )

  ! Procurar quais elementos serão mudados
  sinal = 0

  ! Ângulo da fissura fictícia...
  g = 0.5d0*angulo(atan2(-2d0*tauxy(nms), sigy(nms)-sigx(nms)),
&      0d0, 2d0*pi)

  ia = 1
  Do While (iaresta(1, ia) .ne. 0)
    n1 = iaresta(2, ia)
    n2 = iaresta(3, ia)
    ! Normalizar (g-t) entre (-180; 180]
    ! onde t é a bissetriz do ângulo centrado em nms.
    dgt = angulo(g - atan2( 0.5d0*(x(2,n1)+x(2,n2))-x(2,nms),
&      0.5d0*(x(1,n1)+x(1,n2))-x(1,nms) ), -pi, pi)

    sn = 1
    If (dgt .lt. 0) sn = -1
    If (sinal .eq. 0) sinal = sn ! sinal dos elementos ligados
    !                               ! ao nó original

    ! Caso o elemento tenha o mesmo sinal de sn, então
    ! mudar seu sinal para que ele não seja mudado em MudarElementos
    If (sn .eq. sinal) Then
      iaresta(1, ia) = -iaresta(1, ia)
    Else
      chng = chng + 1
    End If
    ia = ia + 1
  End Do

  If (chng .gt. 0) Then
    ! Bem, alguns elementos mudaram de sinal. Mas será que não
    ! existe uma fissura pré-existente ?
    ! Se existir, eu vou tentar abrir o mais distante dela possível
    ! Deixe-me ver se há uma borda...
    ! Ah, estou confiando em ia do loop anterior...
    ia = ia - 1
    n1 = iaresta(2, 1)
    n2 = iaresta(3, ia)
    If (n1 .ne. n2) Then
      ! Tenho uma borda, realmente.
      If (iaresta(1, 1)*iaresta(1, ia) .gt. 0) Then
        ! Pior, tenho uma borda em um único lado da fissura.
        ! Isto quer dizer que vou abrir outra borda
        ! mas não se eu puder evitar
        ! Como ? Levando os elementos a partir da borda mais
        ! próxima da linha da fissura para o outro lado
        t1 = atan2( 0.5d0*(x(2,n1)+x(2,iaresta(3,1)))-x(2,nms),
&      0.5d0*(x(1,n1)+x(1,iaresta(3,1)))-x(1,nms) )

```

```

t2 = atan2( 0.5d0*(x(2,n2)+x(2,iaresta(2,ia)))-x(2,nms),
&      0.5d0*(x(1,n2)+x(1,iaresta(2,ia)))-x(1,nms) )
dgt1 = min( abs(angulo(g - t1, -pi, pi)),
&      abs(angulo(g-pi-t1, -pi, pi)) )
dgt2 = min( abs(angulo(g - t2, -pi, pi)),
&      abs(angulo(g-pi-t2, -pi, pi)) )
If (dgt1 .lt. dgt2) Then
! Note o último argumento: TagAresta só quer o sinal dele
Call TagAresta(iaresta, n1, -iaresta(1, 1))
Else
Call TagAresta(iaresta, n2, -iaresta(1, ia))
! E pela natureza de TagAresta, ele vai parar assim que
! encontrar o "outro lado", mesclando os dois.
Endif
End If
End If

! Criar novo nó e mudar os elementos não marcados com (-)
! para este novo nó.
Call MudarElementos(iaresta, nms, nnode+1, nen, ix,
&      ndf, id, neq, ll)
Call NovoNo(nms, nnode, nnodep, ndf, id, f, jdiag, neq,
&      ll, x, ndm, ft, fs, nels, chng, ftorig)

! Totalizar a abertura da fissura
! Para cada aresta, procurar uma outra em um elemento
! de sinal contrário. Ao encontrar, somar em dA.
! Como bonus, guardar o nó final da fissura recém-aberta
! em inosab.
ia = 1
innosab = 0
dA = 0d0
Do While (iaresta(1, ia) .ne. 0)
If (iaresta(1, ia)*iaresta(1, ia+1) .lt. 0) Then
n1 = iaresta(3, ia)
dA = dA + sqrt((x(2,n1)-x(2,nms))**2 +
&      (x(1,n1)-x(1,nms))**2)
innosab = innosab + 1
inosab(innosab) = n1
End If
ia = ia + 1
End Do

! Próximo passo: verificar se os nós das pontas de fissura
! são internos ou de borda. Os internos devem ser movidos
! e os de borda, abertos.

Do i = 1, innosab
Call Arestas( inosab(i), iaresta, numel, nen, ix )
Call TagAresta( iaresta, nms, -1 )
ia = 1
chng1 = 0
Do While (iaresta(1, ia) .ne. 0)
If (iaresta(1, ia) .gt. 0) Then
chng1 = chng1 + 1
End If
ia = ia + 1
End Do
If (chng1 .ne. 0) Then ! Infelizmente, existiam
Call MudarElementos(iaresta, ! dois grupos de elementos,
&      inosab(i), nnode+1, nen, ix, ! preciso separá-los
&      ndf, id, neq, ll)
Call NovoNo(inosab(i), nnode, nnodep, ndf, id, f, jdiag,
&      neq, ll, x, ndm, ft, fs, nels, chng1, ftorig)
Else
! A idéia é abrir a fissura na direção descrita em IAM-00-01
! Ajustando os nós de ponta de fissura, para melhorar.
dA1 = sqrt((x(2,inosab(i))-x(2,nms))**2 +

```

```

&      (x(1,inosab(i))-x(1,nms))**2)
dgt = angulo( g-atan2( x(2,inosab(i))-x(2,nms),
&      x(1,inosab(i))-x(1,nms) ), -pi, pi )
oldx = 1d0*x(1,inosab(i))
oldy = 1d0*x(2,inosab(i))
If (abs(dgt) .le. 0.5*pi) Then
    x(1,inosab(i)) = x(1,nms) + dA1*cos(g)
    x(2,inosab(i)) = x(2,nms) + dA1*sin(g)
Else
    x(1,inosab(i)) = x(1,nms) - dA1*cos(g)
    x(2,inosab(i)) = x(2,nms) - dA1*sin(g)
End If
! Ah, já que é uma ponta de fissura, vou reduzir a
! resistência do nó para compensar a aproximação ruim
! da concentração de tensões no nó.
ft(inosab(i)) = ft(inosab(i))/2.0
! Infelizmente a mudança pode fazer com que o nó saia
! de dentro de um dos elementos. Neste caso, o elemento
! fica com determinante negativo ou nulo. Pode-se
! corrigir trazendo lentamente o nó para a posição original.
! (06/07/2000)
nulDet = .true.
Do While (nulDet)
    ia = 1
    nulDet = .false.
    Do While (iaresta(1, ia) .ne. 0 .and. .not. nulDet)
        elem = abs(iaresta(1, ia))
        xr = x(1,ix(1, elem))-x(1,ix(3, elem))
        yr = x(2,ix(1, elem))-x(2,ix(3, elem))
        xs = x(1,ix(2, elem))-x(1,ix(3, elem))
        ys = x(2,ix(2, elem))-x(2,ix(3, elem))
        nulDet = (xr*ys-xs*yr) .le. 0d0

        ia = ia + 1
    End Do
    If (nulDet) Then
        x(1,inosab(i)) = 0.9d0*x(1,inosab(i)) + 0.1d0*oldx
        x(2,inosab(i)) = 0.9d0*x(2,inosab(i)) + 0.1d0*oldy
        Write(*,*) 'DEBUG: Correcting null determinant at ',
&      inosab(i), ' x=', x(1,inosab(i)), ' y=',
&      x(2,inosab(i))
    End If
End Do
End If
End Do
Else
thrfs = fs(nms) ! Resistência mínima a ser considerada.
! ! Abaixo disto, já foi tentado sem sucesso.
fs(nms) = fs(nms) - 1e-6*abs(fs(nms)) - 1e-15
if (fs(nms) .eq. thrfs) Then
    fs(nms) = infty
End If
minfs = infty
nms = 0
Do i = 1, nnode
    If (fs(i) .ge. thrfs .and. fs(i) .le. minfs) Then
        minfs = fs(i)
        nms = i
    End If
End Do
If (isNaN(minfs) .or. isInfD(minfs)) Then
    Write (*,*) 'Fator de solitação ', minfs
    Stop
End If
If (nms .eq. 0) Then
    Write (*,*) 'Nenhum nó possível de romper'
    Stop
End If

```

```

    End If
  End Do

  End

*-----
*-----
*   Muda os elementos de um nó para outro e grava a menor equação
*   que foi afetada por esta mudança (ll), dado usado por NovoNó.
  Subroutine MudarElementos(iaresta, noant, nodep, nen, ix,
& ndf, id, neq, ll )
  Integer iaresta(3, *), noant, nodep, nen, ix(nen+1, *), ndf,
& id(ndf, *), neq, ll
  Integer ia, i, j, k

  ia = 1
  ll = neq ! Nota: qual seria um bom valor ?
  !       ! a versão anterior usava neq.
  !       ! De qualquer forma, a rotina desta forma só funciona
  !       ! bem se nodep for um novo nó.
  Do While (iaresta(1, ia) .ne. 0)
    If (iaresta(1, ia) .gt. 0) Then
      j = iaresta(1, ia)
      Do i = 1, nen
        If (ix(i, j) .eq. noant) Then
          ! Se for o nó antigo, mudar.
          ix(i, j) = nodep
        ElseIf (ix(i, j) .ne. 0) Then
          ! Se for outro nó, anotar a equação.
          Do k = 1, ndf
            If (id(k, ix(i, j)) .gt. 0) Then
              ll = min(ll, id(k, ix(i, j)))
            End If
          End Do
        End Do
      End If
    End Do
  End Do
  ia = ia + 1
End Do

  End

*----- 23/05/00
*-----
*   Cria um novo nó e faz as alterações devidas
  Subroutine NovoNo(nms, nnode, nnodep, ndf, id, f, jdiag, neq,
& ll, x, ndm, ft, fs, nels, chng, ftorig)
  Integer nms, nnode, nnodep, ndf, neq, ll, ndm, chng
  Integer id(ndf, *), jdiag(*), nels(*)
  Double Precision f(ndf, *), x(ndm, *), fs(*)
  Real ft(*), ftorig(*) ! Acrescentado ftorig, 14/07/2000
  Integer i

*-----
*   Verifica se foi reservado espaço para o novo nó
  If (nnode .ge. nnodep) Then
    Write(*,*) 'Excesso de nós no problema. Último nó: ', nnode
    Return
  End If

  nnode = nnode + 1 ! Bóvio.

  Do i = 1, ndf
    id(i, nnode) = neq+i      ! Atualizar a numeração das equações
    f(i, nnode) = 0d0        ! e a força prescrita no nó
    jdiag(neq+i) = jdiag(neq+i-1) + neq+i - ll + 1
    !                         ! E jdiag, usando ll de MudarElementos
  End Do

```

```

neq = neq + ndf          !... criando ndf novas
Do i = 1, ndm
  x(i, nnode) = x(i, nms) ! Copiar as coordenadas
End Do
! Aumentar um pouco a resistência deste nó, para contornar
! a aproximação pobre dos elementos finitos e refletir o
! fato da face da fissura não ter tensões
ft(nms) = ft(nms)*2.0
ft(nnode) = ft(nms)      ! e a resistência do original,
ftorig(nnode) = ftorig(nms) ! e a resistência original,
fs(nnode) = fs(nms)     ! e o fator de soicitação...
! Atualizar o número de elementos dos nós:
nels(nnode) = chng
nels(nms) = nels(nms) - chng

```

End

\*-----

\*-----

```

*   TagAresta marca na lista de arestas os elementos que contém
*   o nó no, com o sinal da marca tag, e em seguida os elementos
*   vizinhos, até encontrar uma borda ou um elemento já marcado.
*   Esta rotina NÃO compila diretamente por ser recursiva.
*   No compilador G77, a solução adotada foi converter o código
*   para C usando F2C e adaptar o código (recursivo) resultante.
*   Deve haver uma solução mais simples, esta foi adotada por
*   motivos históricos.

```

```

Subroutine TagAresta( iaresta, no, tag )
Integer no, tag
Integer ia, c1, c2

```

```

ia = 1
Do While (iaresta(1, ia) .ne. 0)
  If (iaresta(1, ia)*tag .lt. 0) Then
    c1 = iaresta(2, ia)
    c2 = iaresta(3, ia)
    If (c1 .eq. no .or. c2 .eq. no) Then
      iaresta(1, ia) = -iaresta(1, ia)
      If (c1 .eq. no) c1 = c2
      Call TagAresta( iaresta, c1, tag )
    End If
  End If
  ia = ia + 1
End Do

```

End

\*-----