SISTEMA FLUIDO PARA ATENUAÇÃO DE
OSCILAÇÕES DE ESTRUTURAS ESBELTAS

Roberto de Almeida Souza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUESITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D
(Presidente)

Prof. Eliane Maria Lopes Carvalho, D.Sc.

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MARÇO DE 1999

SOUZA, ROBERTO DE ALMEIDA

Sistema Fluido Para Atenuação de Oscilações de Estruturas Esbeltas [Rio de Janeiro] 1999

x, 83p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1999)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Absorsor Fluido

2. Análise Dinâmica

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais,

à Ninha,

aos professores e amigos Ronaldo e Eliane.

Agradecimentos

À minha família, especialmente à tia Silvia pelas orações e constante apoio, tia Dulce pelas conversas via e-mail e tia Alina pelo apoio logístico.

Aos eternos amigos que mesmo estando longe torceram e me apoiaram nesta caminhada, isso é de vocês também.

Aos professores do PEC, Michele, Ney, Magluta, Landau, Álvaro, Roberto, ..., por ajudarem nas diversas dúvidas ao longo das cadeiras e pelas "quebradas de galho" nas matrículas.

Aos amigos e amigas da turma de mestrado pelos momentos de descontração e companheirismo: Evandro e Roberto, José Renato, Veranise, Eben, Mônica, Paulo Milman, Luiz Fernando, Érica e Stefânia, Paulo Mappa, Flávio Guerra, ... Aos colegas do sagrado "baba" de futsal da quarta-feira. Além dos inseparáveis companheiros de trabalhos em grupo Rosângela, Iván e Luis Alfredo, pelas boas conversas da vida e da profissão e pelas piadas na hora do almoço.

Aos colegas do PEC, pelas dicas e "marretas": Flávio Barbosa e Michele, Marco Baiano, Túlio, Sérgio, Stael, ...

Ao pessoal do laboratório de computação (Thelmo, Jonny, Célio, Sassá), funcionários do PEC (Beth, Rita, Jane, Ana, ...) e funcionários do Labest (Luzidele, Flávio, Lívio, ...).

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E a todos mais que de alguma forma, em algum momento, me ajudaram a atingir esta meta.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SISTEMA FLUIDO PARA ATENUAÇÃO DE OSCILAÇÕES DE ESTRUTURAS ESBELTAS

Roberto de Almeida Souza

Março/1999

Orientadores: Ronaldo Carvalho Batista
Eliane Maria Lopes Carvalho

Programa: Engenharia Civil

Estruturas esbeltas têm, em geral, baixo amortecimento intrínseco e sob ação de cargas dinâmicas podem apresentar grandes amplitudes de vibração. Para atenuar essas amplitudes de vibração, diferentes soluções são adotadas, cada uma com características adequadas ao tipo de ação dinâmica e às características físicas e geométricas da estrutura. Dentre estas soluções algumas fazem uso de absorsores de vibração. Dos diversos tipos de sistemas absorsores, este trabalho mostra o Sistema Fluido Absorsor, constituído de um recipiente contendo fluido o qual gera forças hidráulicas que se opõem às forças de inércia causadas na estrutura pelas ações externas.

Alguns dos principais aspectos de dimensionamento, propriedades dinâmicas e eficiência para certas faixas de valores de parâmetros deste sistema são apresentados e discutidos com o auxílio dos resultados obtidos com modelos analíticos e discretizados via MEF e das respostas do sistema controlado e não controlado sob cargas periódicas.

Para demonstrar a viabilidade e eficiência desse dispositivo de atenuação de oscilações são apresentados dois exemplos de aplicações práticas na redução das oscilações por flexão de estruturas esbeltas sob ações dinâmicas: uma estrutura metálica de um descarregador de navios, sob a ação das suas partes móveis; e um edifício alto sob a ação do vento.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

FLUID DAMPER TO ATTENUATE
OSCILLATIONS IN SLENDER STRUCTURES

Roberto de Almeida Souza

March/1999

Advisors: Ronaldo Carvalho Batista
Eliane Maria Lopes Carvalho

Department: Civil Engineering

Slender structures have, in general, low self damping and may experience large amplitudes of bending vibration when subjected to dynamic loadings. To attenuate those amplitudes of vibration engineering solutions have been adopted, each one with attributes adequate for each type of dynamic loading, physical and geometrical features of the structure. Among these kind of solutions, some make use of vibration absorbers. This work shows the application of the Fluid Damper, that is a tank filled with fluid which when in motion generates hidraulic forces which counteract the inertia forces induced by the dynamic loadings acting on the structure.

Some of the main design aspects, dynamic properties and the resulting efficiency of the Fluid Damper for certain ranges of values of the system's parameters are presented and discussed with the aid of the results obtained by using both analytical and FEM models, together with comparisons between the controlled and uncontrolled responses of the structure under periodic loadings.

To demonstrate the feasibility and performance of the Fluid Damper in attenuating oscillations two examples of practical applications for reducing bending vibration amplitudes of structures excited by dynamic loadings are presented: the steel structure of a ship unloader under action of it's moving parts, and a tall building under wind force.

ÍNDICE

Capítulo I

INTRODUÇÃO **01**

Capítulo II

MODELAGEM TEÓRICA DO SISTEMA FLUIDO ABSORSOR (SFA) **04**

II.1 - Descrição do Sistema Fluido Absorsor (SFA) 04

II.2 - Solução Não-Linear para o Movimento do Fluido 06

II.3 - Solução Linear para o Movimento do Fluido 07

Capítulo III

MODELAGEM TEÓRICA DA ESTRUTURA COM O SISTEMA FLUIDO ABSORSOR **13**

III.1 - Sistema Estrutural Simples de 1 Grau de Liberdade 14

III.1.1 - Acoplamento do SFA ao Sistema 1GL 18

III.2 - Sistema Estrutural Discretizado e Método da Superposição Modal 20

III.2.1 - Acoplamento do SFA ao Sistema Estrutural Discretizado 24

Capítulo IV

ESTUDO PARAMÉTRICO E DIMENSIONAMENTO DO SISTEMA FLUIDO ABSORSOR **25**

IV.1 - Dimensionamento do SFA 26

IV.2 - Estudo da Variação da Massa do SFA 29

IV.3 - Estudo da Variação de ω_{SFA} 31

IV.3.1 - Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 1,0$ 31

IV.3.2 - Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 0,8$ 34

IV.3.3 - Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 0,5$ 36

IV.3.4 - Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 0,235$ 37

IV.4 - Estudo da Variação de h/L 40

IV.5 - Estudo da Redução da Largura b 43

IV.5.1 - Redução de b para $\omega_e/\omega_s = 1,0$ 44
IV.5.2 - Redução de b para $\omega_e/\omega_s = 0,8$ 46
IV.5.3 - Redução de b para $\omega_e/\omega_s = 0,235$ 47
IV.6 - Estudo do Uso de Óleo como Fluido do SFA 49

Capítulo V

APLICAÇÃO PRÁTICA DO SISTEMA FLUIDO ABSORSOR EM ESTRUTURAS ESBELTAS **52**

V.1 - Aplicação a um Descarregador de Minério 52
V.1.1 - Descrição da Carga Dinâmica da Operação Normal de Descarregamento 55
V.1.2 - Descrição da Carga Dinâmica de Pendulação da Caçamba 58
V.1.3 - Dimensionamento do SFA e Resultados Obtidos 59
V.2 - Aplicação a um Edifício Alto, o Citycorp Center 65
V.2.1 - Dimensionamento do SFA e Resultados Obtidos 67

Capítulo VI

CONCLUSÕES **72**

Referências Bibliográficas **74**

Anexo

MODELAGEM TEÓRICA NÃO-LINEAR DO SISTEMA FLUIDO ABSORSOR **76**

SIMBOLOGIA

A - amplitude
A_c - amplitude da aceleração do tanque
a - comprimento
b - largura do tanque
C - fator de contaminação de superfície
$\underset{\sim}{C}$ - matriz de amortecimento global da estrutura
C_i - amortecimento generalizado associado à forma modal i
c - amortecimento
$\underset{\sim}{c}^e$ - matriz de amortecimento do elemento no sistema local
$\underset{\sim}{F}$ - força de controle do SFA
F_e - fonte externa de excitação
F_i - força generalizada associada à forma modal i
$\overline{F}$ - magnitude da carga
$\underset{\sim}{F}$ - vetor global de forças nodais
f_a - força de amortecimento
f_i - foça de inércia da massa do bloco
f_e - força elástica da mola
$\underset{\sim}{f}^e$ - vetor de forças excitantes nodais
$\underset{\sim}{f}_e^e$ - vetor de força excitante atuando no elemento
$\underset{\sim}{f}_c^e$ - vetor de força de controle atuando no elemento
f_s - frequência cíclica
g - aceleração da gravidade
h - altura de fluido em repouso dentro do tanque eixo cartesiano
h_d - altura de fluido na parede direita do tanque
h_e - altura de fluido na parede esquerda do tanque
$\underset{\sim}{K}$ - matriz de rigidez elástica global da estrutura
K_i - rigidez generalizada associada à forma modal i
k - rigidez elástica
$\underset{\sim}{k}^e$ - matriz de rigidez elástica do elemento no sistema local
L - comprimento do tanque
$\underset{\sim}{L}$ - vetor posição da aplicação da força de controle na estrutura
l - comprimento dos cabos de suspensão da caçamba
M_s - massa da estrutura
M_i - massa generalizada associada à forma modal i
M_{SFA} - massa do sistema absorsor
M_{modal} - massa modal da estrutura
$\underset{\sim}{M}$ - matriz de massa global da estrutura

M - massa da caçamba cheia

m - massa

$\underset{\sim}{m^e}$ - matriz de massa consistente do elemento no sistema local

n - número de modos de vibração

T - energia cinética

T_s - período

T - força de tração nos cabos da caçamba

T_x, T_z - componentes de T nos planos x e z respectivamente

$\bar{t}$ - instante definido de tempo

t - tempo

Δt - intervalo de tempo

U - energia de deformação elástica por flexão

u - velocidade horizontal da partícula de fluido na direção x

V - energia potencial total

W_{nc} - trabalho das forças não-conservativas

X, Z - eixos cartesianos globais

x, z - eixos cartesianos locais

x - deslocamento

$\dot{x}$ - velocidade

$\ddot{x}$ - aceleração

$\bar{x}$ - amplitude da oscilação

x_o - amplitude de resposta de deslocamentos da estrutura original

x_s - deslocamento da estrutura

$\ddot{x}_s$ - aceleração da estrutura

Y_i - amplitude modal

α - parâmetro de não-linearidade

β - parâmetro de dispersão

δ - variação durante o intervalo de tempo, relação de controle dinâmico

$\underset{\sim}{\phi_i}$ - funções de forma ou de interpolação do modo i

γ_{SFA} - parâmetro de amortecimento

η - elevação da superfície livre

η_d - elevação da superfície livre na parede direita do tanque

η_e - elevação da superfície livre na parede esquerda do tanque

μ - relação entre as massas do SFA e da estrutura

ν - coeficiente de viscosidade cinemática

θ - ângulo de pendulação da caçamba

$\bar{\theta}$ - amplitude máxima de θ

ρ - massa específica

σ - parâmetro de frequência

ω_s - frequência angular natural da estrutura

ω_e - frequência angular de excitação

ω_{SFA} - frequência angular do sistema absorsor

ω_c - frequência angular do movimento de pendulação da caçamba

ξ_s - taxa de amortecimento da estrutura

ξ_i - taxa de amortecimento do modo i

Ω - potencial das cargas externas conservativas

CAPÍTULO I

Introdução

À medida que a tecnologia da construção civil avança, novos materiais são utilizados e as limitações construtivas, às quais o engenheiro está submetido, são cada vez menores. Assim, novos projetos são concebidos com estruturas mais esbeltas e arrojadas, edifícios mais altos e novas concepções estruturais são criadas, que em sua maioria são cada vez mais leves, flexíveis e com baixo amortecimento intrínseco. Estando sujeitas a ações como a do vento, ondas marinhas, terremotos ou outras ações dinâmicas, estas estruturas podem apresentar problemas de conforto para quem as usa, de utilização em serviço e até mesmo de segurança e vida útil da própria estrutura.

As amplitudes das oscilações indesejadas, induzidas pelo carregamento dinâmico, podem ser atenuadas por meio da utilização de sistemas mecânicos auxiliares para absorção da energia de vibração, ou para isolamento das vibrações induzidas por fontes externas, ou ainda por dispositivos que alteram as características dinâmicas da estrutura aumentando principalmente o amortecimento modal.

Os sistemas de absorção podem ser do tipo passivo (absorsores de vibração, isoladores de vibração), que são sistemas de controle de ciclo fechado, ou ativo (sistema de controle ativo, sistemas passivo/ativo), que podem ser tanto de ciclo aberto como fechado [1]. Todos eles produzem na estrutura, de maneira passiva ou ativa (i.e. controlada), uma força que se opõe às forças de inércia geradas na estrutura pela ação dinâmica externa, e que depende de suas propriedades de massa, amortecimento e rigidez, e principalmente do próprio deslocamento da estrutura.

A concepção de um sistema passivo de absorção pode envolver características mecânicas as mais variadas possíveis, bastando que, através de suas propriedades dinâmicas gere forças de controle passivo que resultem por atenuar as amplitudes das respostas dinâmicas da estrutura. Desta maneira, vários modelos diferentes surgiram, tais como: o absorsor hidráulico de oscilações inventado por Frahm [2], no qual a força

de controle é gerada pela variação do potencial hidráulico entre dois tanques de água com vasos comunicantes; os sistemas massa-mola-amortecedor [3]; mecanismos de amortecimento adicional, isoladores e absorsores de vibração aplicados, por exemplo, a pontes [4] e a torres esbeltas [5].

O presente trabalho tem como principal objetivo estudar o comportamento e o desempenho de um tipo relativamente novo de sistema de controle passivo dirigido à atenuação de oscilações horizontais de estruturas esbeltas: o Sistema Fluido Absorsor (SFA), desenvolvido no final da década de 80 [6]. O SFA é um recipiente rígido contendo fluido sob pressão atmosférica, que quando acoplado à estrutura excitada pela ação de cargas dinâmicas, gera com o movimento do fluido uma força hidráulica de controle passivo que permite reduzir as amplitudes das vibrações. Por se tratar de apenas um tanque com fluido é um dispositivo de baixo custo de fabricação, montagem e manutenção, além de fácil instalação.

A apresentação do trabalho foi dividida em seis capítulos e um anexo. O Capítulo II apresenta a formulação matemática do movimento do fluido no interior do Sistema Fluido de Absorção e a descrição da força de controle passivo que vai atuar na estrutura. Explica, também, porque foi utilizada uma formulação linear, apesar do movimento do fluido envolver não-linearidades.

O Capítulo III traz a modelagem teórica da estrutura e a forma de acoplamento do SFA a ela. Inicia-se com uma modelagem para um sistema de um grau de liberdade, que depois é estendida à um sistema discretizado via Método dos Elementos Finitos. A análise dinâmica da estrutura controlada e não-controlada é feita utilizando o Método da Superposição Modal.

O Capítulo IV traz um resumo dos resultados obtidos de um estudo paramétrico realizado com o objetivo de conhecer as propriedades do SFA e daí fazer seu dimensionamento. Através da variação de seus parâmetros, investiga-se o desempenho do SFA na atenuação das oscilações da estrutura quando esta é submetida a diferentes condições de excitação. É investigada também a influência das relações entre as frequências (da estrutura, da excitação e do próprio sistema absorsor), da relação entre a massa do SFA e da estrutura, e da variação do amortecimento do fluido no desempenho final do SFA sob o critério de redução de amplitudes de resposta da estrutura.

O Capítulo V faz aplicações práticas do SFA a dois tipos distintos de estruturas reais: uma estrutura metálica de um descarregador de minério de navios e um edifício alto em aço e alvenarias. A primeira é um tipo de estrutura que as amplitudes de vibrações e consequentemente a variação de tensões levam a problemas de fadiga, daí a necessidade de reduzi-las; a segunda foi utilizada com o intuito de comparar a eficiência do Sistema Fluido Absorsor em relação à de um sistema passivo de redução de vibrações do tipo massa-mola-amortecedor utilizado originalmente na estrutura existente.

O Capítulo VI apresenta as conclusões extraídas deste trabalho e novas propostas para pesquisas futuras.

Finalmente, o Anexo traz o desenvolvimento de um modelo teórico-numérico para representação não-linear do movimento do fluido, utilizado no estágio inicial do presente trabalho e abandonado em seguida devido às singularidades e divergências numéricas encontradas na sua aplicação. Este Anexo serve, então, como ponto de partida para futuras investigações a serem realizadas por interessados.

CAPÍTULO II

Modelagem Teórica do Sistema Fluido Absorsor (SFA)

Os absorsores dinâmicos passivos são sistemas auxiliares que geram "forças de controle" sobre a estrutura com o objetivo de atenuar suas vibrações. Estas forças devem sempre se opor à força excitante, e para isso dependem do deslocamento da estrutura e das próprias características do absorsor.

As características do sistema absorsor são determinadas em função da força excitante e das propriedades dinâmicas da estrutura, e, também, dos níveis desejados de redução de vibrações.

II.1 Descrição do Sistema Fluido Absorsor (SFA)

O Sistema Fluido Absorsor (SFA) consiste num recipiente rígido totalmente indeformável, que neste caso é retangular, contendo fluido sujeito à pressão atmosférica. Estando o recipiente acoplado à estrutura, o movimento deste fluido, quando a mesma é excitada, gera forças que fazem alterar as características dinâmicas da própria estrutura para reduzir as vibrações induzidas pelas ações dinâmicas.

As ações dinâmicas que atuam em estruturas civis possuem, normalmente, períodos longos e, devido a isso, vibrações indesejáveis ocorrem em estruturas muito flexíveis e de baixa frequência natural.

O amortecimento ótimo no SFA acontece quando o fluido é excitado em ressonância e responde em movimento de *sloshing*, que é uma situação limite antes de haver formação completa e quebra de onda. Para isso o SFA é dimensionado tal que sua frequência natural seja baixa, próxima da frequência da estrutura.

A Figura II-1 mostra esquematicamente um modelo de SFA, com sua força de controle F, acoplado a um sistema com um grau de liberdade de massa M_s, sujeito a uma força de excitação F_e que impõe um deslocamento x_s na estrutura.

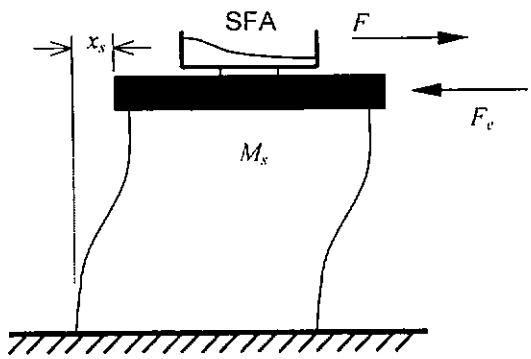

FIGURA II-1 Esquema de acoplamento do SFA a uma estrutura de um grau de liberdade

A força de controle do SFA é a força de interação entre ele e a estrutura sobre a qual está fixado. Esta força é calculada, a cada momento, em função da diferença de pressão hidráulica nas duas paredes transversais do tanque (igual à pressão hidrostática, em um certo $t = \bar{t}$). A pressão hidráulica depende das alturas de fluido nas paredes, segundo a Equação II-1 baseada na Figura II-2

$$F = -\frac{1}{2}\rho g b\left(h_d^2 - h_e^2\right) \qquad \text{(II-1)}$$

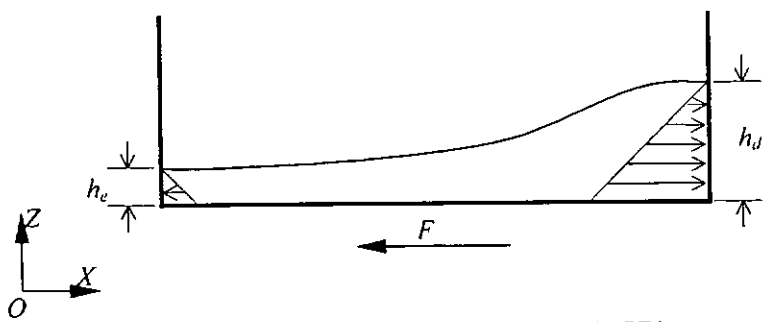

FIGURA II-2 Força de controle do SFA

onde: ρ é a massa específica do fluido;

g é a aceleração da gravidade;

b é a largura do tanque;

h_d é a altura de fluido na parede direita do tanque; e

h_e é a altura de fluido na parede esquerda do tanque.

Como mostra a Figura II-2, para se obter o equilíbrio de forças, a força de controle terá sempre sentido oposto à pressão hidráulica gerada na parede de maior elevação de fluido. Isso explica o sinal negativo na Equação II-1 em relação ao sistema de eixos cartesianos utilizado *O-X-Z*.

A força de controle F obtida pela Equação II-1 considera que a pressão hidrostática é dominante sobre a força de inércia gerada pela aceleração vertical do fluido nas paredes transversais, e sobre a força de atrito no fundo do tanque. Desta maneira, as duas foram desprezadas na formulação utilizada [7]. Para a obtenção de F também não foi considerada a força de inércia devido à parcela de massa fluida deslocada horizontalmente enquanto o fluido se movimenta em *sloshing*.

II.2 Solução Não-linear para o Movimento do Fluido

O movimento de um fluido sobre uma superfície plana e à pequena profundidade envolve não-linearidades. Inicialmente foi utilizado um modelo não-linear, baseado na teoria de águas rasas, que consiste em equações diferenciais parciais, submetidas a certas condições iniciais e de contorno, resolvidas de maneira aproximada através de procedimentos numéricos [8]. Estas equações são obtidas a partir da equação da continuidade e das equações bidimensionais de Navier-Stokes e serão apresentadas no Anexo A desta tese.

Foi feita uma implementação numérica da solução não-linear e foi constatada uma grande sensibilidade ao variar os parâmetros de discretização, tanto do espaço quanto do tempo, levando à instabilidade numérica. Para o conjunto de parâmetros com o qual se conseguiu melhores resultados verificou-se que o perfil da superfície livre do fluido era aproximadamente linear ao longo do comprimento do tanque. Optou-se, então, por utilizar um modelo analítico linearizado.

II.3 Solução Linear para o Movimento do Fluido

O tanque retangular rígido esquematizado na Figura II-3 tem comprimento L, altura de fluido em repouso h, e é submetido a um movimento horizontal dinâmico x_s na direção X. O sistema de eixo cartesiano local o-x-z é considerado sobre a superfície do líquido em repouso com origem na parede lateral esquerda do tanque.

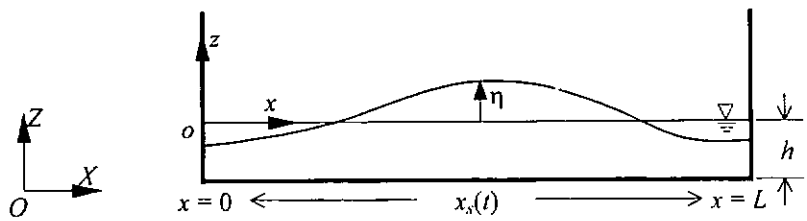

FIGURA II-3 Esquema do SFA

O movimento do fluido no tanque é simulado por uma teoria linear, dispersiva e dissipativa, a qual consiste da utilização de técnicas de integração para obter uma expressão para a função de transferência com forma analítica suficientemente simples [9]. Isto é obtido a partir das equações de onda longa do problema não-linear dispersivo e dissipativo, que na forma uni-direcional é descrita pelo sistema de duas equações diferenciais parciais representado nas Equações II-2 e II-3.

$$\dot{\eta} + \left[(h+\eta)u\right]' = 0 \tag{II-2}$$

$$\dot{u} + uu' + g\eta' - \frac{1}{3}h^2\dot{u}'' + \sqrt{\frac{\nu\omega_{SFA}}{2}}\frac{1}{h}u + \ddot{x}_s = 0 \tag{II-3}$$

onde os pontos representam derivação em relação ao tempo e as linhas em relação ao espaço, e além das variáveis e parâmetros já definidos anteriormente:

$\eta \equiv \eta(x,t)$ é a elevação da superfície livre (ver Figura II-3);

$u \equiv u(x,t)$ é a velocidade horizontal da partícula do fluido (direção x);

ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido;

ω_{SFA} é a frequência angular característica de movimento do fluido;

h é a altura do fluido em repouso; e

$\ddot{x}_s$ a aceleração do movimento de excitação do tanque (ver Figura II-3).

O movimento de excitação do tanque é harmônico na forma:

$$x_s = A\,\mathrm{sen}(\omega_e t) \tag{II-4}$$

Inicialmente o fluido está em repouso, portanto as condições iniciais do problema são

$$\eta(x,0) = 0 \tag{II-5}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{II-6}$$

A condição de impenetrabilidade das paredes transversais do tanque conduzem às seguintes condições de contorno do problema

$$u(0,t) = 0 \tag{II-7}$$

$$u(L,t) = 0 \tag{II-8}$$

As variáveis são adimensionalizadas com as relações das Equações II-9 a II-13:

$$\eta^* = \frac{A_c L}{g}\eta \tag{II-9}$$

$$x^* = Lx \tag{II-10}$$

$$t^* = \frac{L}{\sqrt{gh}}t \tag{II-11}$$

$$u^* = \frac{A_c L}{\sqrt{gh}}u \tag{II-12}$$

$$\ddot{x}_s^* = A_c f''(\omega_{SHA} t^*) \tag{II-13}$$

onde os símbolos com asterisco representam as variáveis dimensionais originais e A_c é a amplitude da aceleração do tanque. A partir deste ponto, até o final deste capítulo, todas as variáveis serão adimensionais.

Substituindo as variáveis adimensionais, agrupando termos, e considerando a dissipação devido ao atrito com as paredes laterais e a contaminação da superfície do fluido, que leva em conta o amortecimento produzido pelo seu estiramento, as Equações II-2 e II-3 são reescritas na forma adimensional:

$$\dot{\eta} + \left[u(1+\alpha\eta)u\right]' = 0 \tag{II-14}$$

$$\dot{u} + \eta' + \alpha u u' - \frac{1}{3}\beta\dot{u}'' + f^{\sigma}(\sigma t) + \gamma_{SFA} u = 0 \tag{II-15}$$

e as condições iniciais e de contorno na forma adimensional são:

$$\eta(x,0) = u(x,0) = 0 \tag{II-16}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{II-17}$$

As Equações II-14 e II-15 apresentam 4 parâmetros adimensionais.

Parâmetro de não-linearidade: $\alpha = \frac{A_c L}{gh}$; (II-18)

Parâmetro de dispersão: $\beta = \frac{h^2}{L^2}$; (II-19)

Parâmetro de amortecimento fluido:

$$\gamma_{SFA} = \sqrt{\frac{\nu\omega_{SFA}}{2}}\left(1 + S + 2\frac{h}{b}\right)\frac{L}{h\sqrt{gh}}; \tag{II-20}$$

Parâmetro de frequência: $\sigma = \frac{\omega_{SFA} L}{\sqrt{gh}}$ (II-21)

O termo $(1 + S + 2h/b)$ no parâmetro do amortecimento fluido (Equação II-20) foi sugerido por Miles conforme indica a referência [8] e é utilizado para levar em consideração o amortecimento devido ao atrito do fluido nas paredes laterais e a contaminação da superfície do fluido. O termo $2h/b$ é um coeficiente equivalente ao efeito do amortecimento por unidade de largura devido à camada de contorno das paredes laterais. O S é um fator de contaminação de superfície e seu valor varia entre 0 e 2, seguindo indicação de outros estudos [9] será usado $S = 1$, que corresponde à superfície totalmente contaminada.

As frequências naturais do movimento de *sloshing* do fluido podem ser obtidas através de

$$\omega_{SFA} = \frac{\sqrt{gh}}{L}(2n+1)\pi\left[1 - \frac{1}{6}(2n+1)^2\pi^2\left(\frac{h}{L}\right)^2\right] \qquad \text{(II-22)}$$

onde n é um número inteiro, iniciando em zero, que representa o modo de vibração desejado.

As Equações II-14 e II-15 são linearizadas, a variável $u(x,t)$ é eliminada e as expressões resultantes são

$$\eta(x,t) = -\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{sen}\left[\kappa\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\kappa}{2}\right)}e^{i\sigma t}\right\} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{sen}\left[a_n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{Re}\left[f_n e^{S_n t}\right] \qquad \text{(II-23)}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e:

$$\kappa = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\frac{1}{3}\beta\sigma^2}}\left(1 - \frac{i\gamma_{SFA}}{2\sigma}\right) \qquad \text{(II-24)}$$

$$a_n = (2n+1)\pi \qquad \text{(II-25)}$$

$$f_n = 4\frac{S_n}{\left(S_n^2+\sigma^2\right)}\frac{1+\frac{1}{3}\beta S_n^2}{\left[2S_n+\gamma_{SFA}\left(1-\frac{1}{3}\beta S_n^2\right)\right]} \qquad \text{(II-26)}$$

$$S_n = \frac{-\gamma_{SFA}-2ia_n\left(1+\frac{\beta}{3}a_n^2\right)}{2\left(1+\frac{\beta}{3}a_n^2\right)} \qquad \text{(II-27)}$$

Para validar matematicamente essa forma de solução deve-se respeitar sempre a desigualdade da Equação II-28.

$$\sigma < \sqrt{\frac{3}{\beta}} \qquad \text{(II-28)}$$

De acordo com as hipóteses utilizadas na derivação das equações dissipativas de onda longa esta solução só é válida para $\beta << 1$ e $\gamma_{SFA} << 1$.

Observando a Equação II-23 da solução da elevação η nota-se que a mesma se assemelha à resposta de um sistema dinâmico de um grau de liberdade amortecido, sendo composta por duas parcelas: (i) uma função harmônica na frequência de excitação, representando a parte permanente; e (ii) uma outra parcela que é uma combinação linear de todos os modos de oscilação do fluido no tanque, que representa a parte transiente da resposta.

No início da excitação a resposta transiente é dominante com uma amplitude maior do que a permanente, decaindo depois rapidamente devido ao termo exponencial de potência S_n, restando em seguida somente a resposta permanente.

Depois de calculada a elevação η, a força de controle é obtida através da Equação II-29.

$$F = -\frac{1}{2}\rho g b\left[(h+\eta_d)^2-(h-\eta_e)^2\right] \qquad \text{(II-29)}$$

onde: η_d é a elevação da superfície livre na parede direita do tanque; e

η_e é a elevação da superfície livre na parede esquerda do tanque, ambas representadas esquematicamente na Figura II-4.

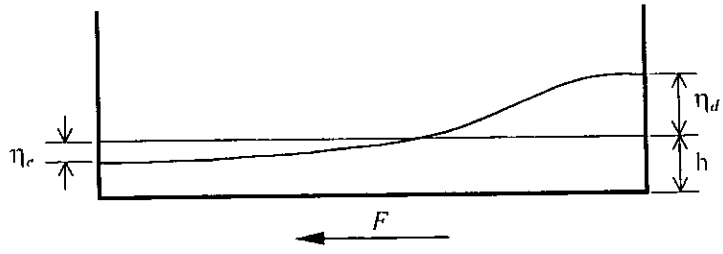

FIGURA II-4 Força de controle do SFA em função de η_e e η_d

Foi feita a implementação numérica em linguagem Fortran da equação da elevação da superfície livre (Equação II-23) para se obter a força de controle do Sistema Fluido Absorsor (Equação II-29). O Gráfico II-1 apresenta a resposta em termos da elevação $\eta(x,t)$ junto à parede direita ($x = L$). Esta resposta corresponde e se compara bem com a apresentada por Lepelletier et al [9], demonstrando que o modelo numérico implementado está correto.

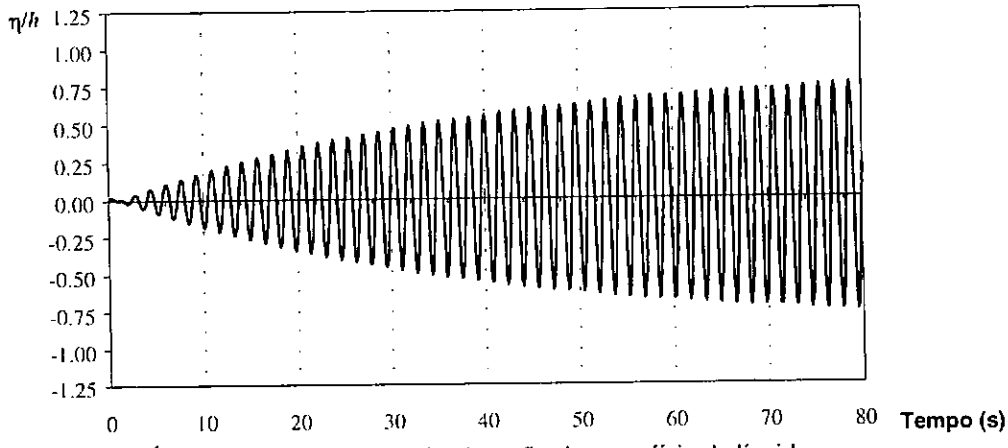

GRÁFICO II-1 Resposta da elevação da superfície do líquido na parede do tanque ($x=L$);
h=0,06m; L=0,6095m; b=0,23m; ν=9,4x10^{-7}m^2/s.

CAPÍTULO III

Modelagem Teórica da Estrutura com o Sistema Fluido Absorsor (SFA)

Excetuando-se os mecanismos e máquinas que constituem sistemas mecânico-estruturais naturalmente discretos, toda estrutura deformável, por mais simples que seja, é um sistema contínuo, no qual as respostas dinâmicas são funções contínuas das coordenadas espaciais e do tempo. A representação matemática destes sistemas estruturais contínuos é geralmente impossível devido à complexidade geométrica e dos campos de deslocamentos, deformações (tensões) e distribuição espacial e temporal dos carregamentos.

Para descrever matematicamente um destes sistemas através da equação do movimento, é necessário representá-lo por um sistema equivalente discretizado em várias partes ou elementos. Uma das ferramentas utilizadas para isso é o Método dos Elementos Finitos (MEF), no qual todo sistema complexo pode ser representado por uma montagem de elementos discretos. Estes elementos são componentes estruturais contínuos que têm o deslocamento de qualquer ponto do seu domínio determinado em função de um número finito de deslocamentos nodais dos seus extremos [10].

Para obter a equação de movimento de uma estrutura será estudado, inicialmente, um sistema idealizado de um grau de liberdade com todas as propriedades de uma estrutura qualquer, representado por uma massa, uma mola e um amortecedor. Depois de obtida a equação do movimento, o sistema absorsor será acoplado à estrutura de 1GL por meio de uma força externa.

A formulação matemática será, depois, estendida para um sistema discretizado via MEF para ser resolvido através do Método da Superposição Modal, sendo apresentado um resumo extraído das referências [10] e [11].

III.1 Sistema Estrutural Simples de 1 Grau de Liberdade

Neste modelo todas as propriedades inerentes a qualquer problema dinâmico como massa (m), amortecimento (c), rigidez elástica (k) e fonte externa de excitação ($f_e(t)$) estão concentradas em apenas um ponto físico. A força de excitação é constituída de duas parcelas: (i) uma estática permanente (F_o), representando a parcela laminar da carga de vento ou a força da gravidade, por exemplo; e (ii) uma parcela dinâmica ($F_e(t)$).

$$f_e(t) = F_o + F_e(t) \tag{III-1}$$

A estrutura é representada por um sistema massa-mola-amortecedor, como o mostrado na Figura III-1

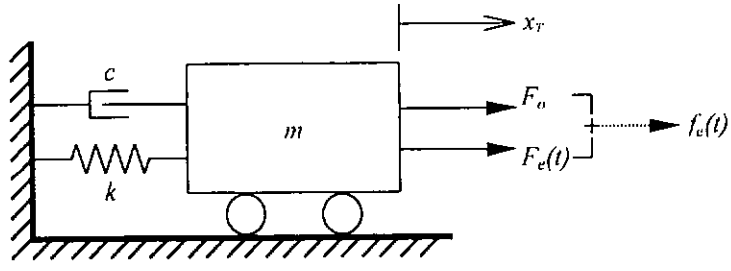

FIGURA III-1 Sistema de um grau de liberdade

As rodas restringem o movimento de forma que o bloco só tenha liberdade para se mover horizontalmente, sendo este seu único grau de liberdade, bastando a coordenada $x_T(t)$ para definir sua posição, também composta de duas parcelas

$$x_T(t) = \bar{x} + x(t) \tag{III-2}$$

onde $\bar{x} = \frac{F_o}{k}$ é a parte estática e $x(t)$ é a parte dinâmica.

A equação de movimento para o sistema estrutural será obtida através da aplicação do Princípio de Hamilton: "a variação das energias cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado por forças não-conservativas, durante um intervalo de tempo t_1 a t_2 qualquer, deve ser igual a zero", e expresso pela Equação III-3.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} = 0 \qquad \text{(III-3)}$$

onde: T é a energia cinética;

$V \equiv U + \Omega$ é a energia potencial total, formada por duas parcelas: U é a energia de deformação elástica por flexão e Ω é o potencial das cargas externas conservativas;

W_{nc} é o trabalho das forças não-conservativas;

δ é a variação durante o intervalo de tempo.

A energia cinética T do sistema é definida como:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_T^2 \qquad \text{(III-4)}$$

A energia de deformação elástica U e o potencial da carga externa conservativa Ω (que é igual à negativa do trabalho) são dados por:

$$U = \frac{1}{2} kx_T^2$$

$$\Omega = -F_o x_T \qquad \text{(III-5)}$$

Procedendo a subtração $T - V$ e sua variação:

$$T - V = T - U - \Omega = \frac{1}{2} m\dot{x}_T^2 - \frac{1}{2} kx_T^2 + F_o x_T \qquad \text{(III-6)}$$

$$\delta(T - V) = m\dot{x}_T \delta\dot{x}_T - kx_T \delta x_T + F_o \delta x_T \qquad \text{(III-7)}$$

As forças não-conservativas atuando no sistema, como mostra o diagrama de equilíbrio de forças na Figura III-2, são a força de amortecimento f_a e a parcela dinâmica da força de excitação $F_e(t)$.

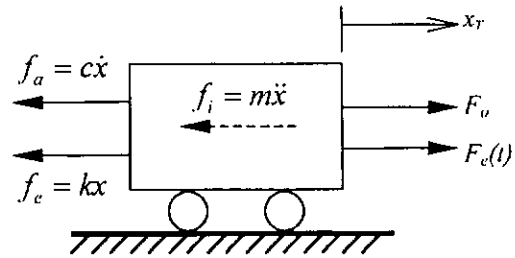

FIGURA III-2 Diagrama de equilíbrio de forças

A variação do trabalho realizado por estas forças é

$$\delta W_{nc} = F_e(t)\delta x_T - c\dot{x}_T \delta x_T \tag{III-8}$$

Substituindo as Equações III-7 e III-8 na expressão do Princípio de Hamilton (Equação III-3), teremos

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\dot{x}_T\delta\dot{x}_T - kx_T\delta x_T + F_o\delta x_T\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[F_e(t)\delta x_T - c\dot{x}_T\delta x_T\right]dt = 0 \tag{III-9}$$

Integrando o primeiro termo da Equação II-9 por partes (i.e. aplicando o Teorema de Gauss)

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}_T\delta\dot{x}_T dt = m\dot{x}_T\delta x_T\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}_T\delta x_T dt \tag{III-10}$$

Pelo Princípio de Hamilton, a variação δx_T se anula nos limites de integração t_1 e t_2, devido a isso o primeiro termo do lado direito da Equação III-10 fica igual a zero.

Reescrevendo e rearrumando a Equação III-9 com o resultado da integração por partes, agrupando todos os termos em uma só integral e colocando a variação δx_T em evidência teremos:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-m\ddot{x}_T - c\dot{x}_T - kx_T + F_o + F_e(t)\right]\delta x_T dt = 0 \tag{III-11}$$

A igualdade da Equação III-11 só será satisfeita, em qualquer circunstância, se o integrando for igual a zero. E sendo a variação δx arbitrária o termo entre colchetes deve se anular, ficando:

$$m\ddot{x}_T + c\dot{x}_T + kx_T = F_o + F_e(t) \tag{III-12}$$

Substituindo $x_T(t) = \bar{x} + x(t)$ e suas derivadas, lembrado que $\bar{x} = \frac{F_o}{k}$, mostra-se que a parcela de carregamento estático F_o pode ser eliminada do problema dinâmico, obtendo, assim, a equação de movimento do sistema de um grau de liberdade (Equação III-13), que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, não-homogênea, com coeficientes constantes.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e(t) \tag{III-13}$$

Esta equação poderia ser mais facilmente obtida com o equilíbrio direto de forças atuantes sobre a estrutura através da Segunda Lei de Newton e do Princípio de D'Alembert. Observando a Figura III-2 nota-se que existem três forças atuando sobre o bloco: (i) a força externa $F_o + F_e(t)$; (ii) a força de amortecimento f_a exercida pelo amortecedor; e (iii) a força elástica f_e devido à mola. O somatório destas forças deve satisfazer o equilíbrio dinâmico em um certo instante de tempo t, sendo igual à força de inércia f_i devido à massa do bloco. A expressão do equilíbrio destas forças fica:

$$F_o + F_e(t) - c\dot{x}_T - kx_T = m\ddot{x}_T \tag{III-14}$$

e após a substituição de x_T chega-se à Equação III-13.

Imaginando que a força dinâmica de excitação $F_e(t)$ cesse a partir de um certo instante $\bar{t}$ e, a partir daí, não exista força externa atuando sobre a estrutura, e, também, se o amortecimento é desprezado, teremos o que se chama de vibração livre linear não amortecida, representada pela Equação III-15.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{III-15}$$

Neste caso, a resposta do sistema é da forma:

$$x = \bar{x}\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{III-16}$$

onde ω é a frequência de oscilação; e

$\bar{x}$ é a amplitude da oscilação.

Substituindo a Equação III-16 na equação diferencial (III-15) resulta em:

$$\left(-m\omega^2 + k\right)\bar{x} = 0 \tag{III-17}$$

Que é o problema de autovalor do qual se determina a frequência natural da estrutura:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{III-18}$$

III.1.1 Acoplamento do SFA ao Sistema 1GL

Para o acoplamento do Sistema Fluido Absorsor à estrutura idealizada na seção III.1 o tanque será colocado sobre o bloco, assumindo que esteja rigidamente ligado e que a força gerada nele ($F(t)$) atua no mesmo único ponto físico que detém as propriedades dinâmicas do sistema. A Figura III-3 ilustra o esquema do acoplamento do SFA à estrutura.

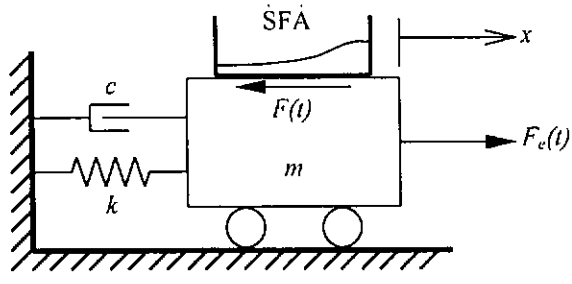

FIGURA III-3 Acoplamento do SFA à estrutura

Matematicamente o SFA será representado pela força que ele exerce na estrutura como se fosse uma força externa aplicada ao sistema, simplesmente adicionando $F(t)$ à Equação III-13.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_c(t) + F(t) \tag{III-19}$$

$F(t)$ é a força de controle gerada no SFA e é calculada pela Equação II-29. Ela depende da elevação da superfície livre do fluido η (Equação II-23), que é função de x e de t.

Para ter as respostas em deslocamento da estrutura é necessário integrar a equação de movimento no tempo. Para isso utiliza-se, por exemplo, o algoritmo de integração numérica de quarta ordem do Método de Runge-Kutta (RK) [12].

O RK é aplicado somente a equações diferenciais de primeira ordem. Como a equação do movimento da estrutura é de segunda ordem, é preciso transformá-la em duas equações de primeira ordem através da seguinte transformação linear, observando-se a mudança de notação:

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = \dot{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_3 = \dot{z}_1 = \dot{x} \\ z_4 = \dot{z}_2 = \ddot{x} \end{cases} \tag{III-20}$$

Substituindo estas novas varáveis na equação do movimento com o SFA acoplado (Equação III-19) e dividindo pela massa, têm-se o sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem para serem integradas nas variáveis z_i com o RK:

$$\begin{cases} z_2 = z_3 \\ z_4 = \dfrac{F_c(t) + F(t) - cz_3 - kz_1}{m} \end{cases} \tag{III-21}$$

Obtidas as respostas nas variáveis z_i faz-se sua equivalência para a variável x e suas derivadas, através da transformação linear da Equação III-20.

III.2 Sistema Estrutural Discretizado e Método da Superposição Modal

Nesta seção a formulação teórica apresentada na seção III.1 (sistema 1GL) é estendida à análise de estruturas reais, que são sistemas elásticos contínuos e possuem infinitos graus de liberdade.

A representação de um sistema contínuo por um sistema equivalente discretizado, utilizando o MEF, é feita definindo funções de forma para se obter o deslocamento de qualquer ponto do elemento contínuo apenas em termos de um número finito de deslocamentos nodais dos seus extremos. O conjunto destas funções de forma é o campo de deslocamentos do elemento.

Definido o campo de deslocamentos, obtém-se a equação diferencial do movimento através do Princípio de Hamilton (Equação III-3) na forma:

$$\underset{\sim}{m}^e \ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{c}^e \dot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{k}^e \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}_e^e(t) \qquad \text{(III-22)}$$

onde: $\underset{\sim}{m}^e$ é a matriz de massa consistente do elemento, no sistema de referência local;

$\underset{\sim}{c}^e$ é a matriz de amortecimento do elemento, no sistema local;

$\underset{\sim}{k}^e$ é matriz de rigidez elástica do elemento, no sistema local;

$\underset{\sim}{f}^e(t)$ é o vetor de forças excitantes nodais associadas aos deslocamentos dinâmicos [10].

A equação de movimento obtida na Equação III-22 faz referência a apenas um elemento estrutural. Para se obter a equação de movimento global da estrutura somam-se as contribuições de seus vários elementos constituintes através de suas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, já transformadas para o sistema de referência global, utilizando o mesmo procedimento de uma análise estática [13]. Assim, a equação de movimento global da estrutura na forma matricial é:

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{F}_e \qquad \text{(III-23)}$$

onde: $\underset{\sim}{M}$ é a matriz de massa global da estrutura;

$\underset{\sim}{C}$ é a matriz de amortecimento global da estrutura;

$\underset{\sim}{K}$ é matriz de rigidez elástica global da estrutura;

$\underset{\sim}{F}_e$ é o vetor global de forças nodais associadas aos deslocamentos dinâmicos.

Considera-se que no problema de vibrações livres não amortecidas

$$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{X}} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0} \tag{III-24}$$

os deslocamentos são pequenos e têm variação harmônica da forma

$$\underset{\sim}{X} = \bar{\underset{\sim}{X}}\cos(\omega t) \tag{III-25}$$

que ao ser substituído na equação diferencial (III-24) leva ao problema de autovalor, do qual se obtém os modos de vibrações da estrutura e suas frequências naturais associadas:

$$\left(\underset{\sim}{K} - \omega^2\,\underset{\sim}{M}\right)\bar{\underset{\sim}{X}} = \underset{\sim}{0} \tag{III-26}$$

Conhecidos os modos e frequências naturais faz-se a análise dinâmica através do Método da Superposição Modal. O método consiste em representar a resposta da estrutura em função de apenas alguns dos infinitos modos de vibração que ela possui. Estes modos devem ser escolhidos apropriadamente dependendo do carregamento aplicado e da influência de cada um na resposta total.

A Superposição Modal faz uso da propriedade de ortogonalidade entre os modos de vibração e apresenta ótimos resultados, mesmo utilizando somente poucos modos.

Os modos naturais de vibração são representados pelos vetores $\underset{\sim}{\phi}_i$ que contém a informação da deformação de cada ponto nodal da estrutura associado à uma

determinada frequência ω. Para se obter os deslocamentos nodais referentes a um modo i basta multiplicar seu vetor pela amplitude modal $Y_i(t)$

$$\underset{\sim}{X}_i = \underset{\sim}{\phi}_i Y_i \tag{III-27}$$

O vetor deslocamento global será o somatório dos deslocamentos referentes a todos os n modos da estrutura

$$\underset{\sim}{X} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\phi}_i Y_i \tag{III-28}$$

Na forma matricial

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{Y} \tag{III-29}$$

O produto da matriz das formas modais $\underset{\sim}{\Phi}$ com o vetor de amplitudes modais $\underset{\sim}{Y}$ promove uma transformação das coordenadas generalizadas para coordenadas geométricas $\underset{\sim}{X}$.

Substituindo o vetor deslocamento global na forma da Equação III-29, e suas derivadas no tempo, na equação do movimento (Equação III-23) e pre-multiplicando pela matriz transposta do i-ésimo modo de vibração $\underset{\sim}{\phi}_i^T$ temos

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\ddot{Y}} + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\dot{Y}} + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{F}_e \tag{III-30}$$

Lembrando que os termos do lado esquerdo da equação podem ser expandidos da forma

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\ddot{Y}} = \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\phi}_1 \ddot{Y}_1 + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\phi}_2 \ddot{Y}_2 + \ldots + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\phi}_i \ddot{Y}_i + \ldots + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\phi}_n \ddot{Y}_n \tag{III-31}$$

e como os modos de vibração são ortogonais, leva a

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\phi}_j = 0, \qquad \text{para } i \neq j \tag{III-32}$$

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\phi}_j = 0, \qquad \text{para } i \neq j \tag{III-33}$$

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\phi}_j = 0, \qquad \text{para } i \neq j \tag{III-34}$$

A propriedade de ortogonalidade entre os modos faz desaparecer todos os termos, exceto o referente ao i-ésimo modo, ficando a equação do movimento:

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\phi}_i \ddot{Y}_i + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\phi}_i \dot{Y}_i + \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\phi}_i Y_i = \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{F}_e \tag{III-35}$$

Definindo os escalares resultantes dos produtos matriciais:

$M_i \equiv \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\phi}_i$ é a massa generalizada associada à forma modal *i*;

$C_i \equiv \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\phi}_i$ é o amortecimento generalizado associado à forma modal *i*;

$K_i \equiv \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\phi}_i$ é a rigidez generalizada associada à forma modal *i*;

$F_i \equiv \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{F}$ é a força generalizada associada à forma modal *i*.

e as substituindo na Equação III-35 chega-se à equação do movimento de 1 grau de liberdade generalizado, relativa ao i-ésimo modo:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = F_{e_i} \tag{III-36}$$

Dividindo todos os termos desta equação pela massa generalizada M_i fica rescrita de outra forma:

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{F_{e_i}}{M_i} \qquad ; i = 1, 2, 3, ..., m. \tag{III-37}$$

onde $\xi_i \equiv \dfrac{C_i}{2\omega_i M_i}$ é a taxa de amortecimento do modo *i*.

Com o Método da Superposição Modal consegue-se transformar as n equações diferenciais simultâneas acopladas em $m < n$ equações modais independentes. A resposta dinâmica da estrutura é obtida resolvendo-se separadamente cada equação modal, obtendo-se as respostas modais, e depois procedendo a superposição descrita na Equação III-28 para transformá-las em respostas nas coordenadas geométricas originais.

III.2.1 Acoplamento do SFA ao Sistema Estrutural Discretizado

O acoplamento do SFA à estrutura discretizada via MEF é feito de maneira semelhante ao sistema 1GL, como força externa. A força de controle gerada pelo SFA generalizada e associada ao modo de vibração i é

$$F_i = \underset{\sim}{\phi}_i^{\mathrm{T}} \underset{\sim}{L} F(t) \tag{III-38}$$

onde: $\underset{\sim}{L}$ é um vetor de mesma dimensão de $\underset{\sim}{\phi}_i$, chamado apontador, que tem coeficiente igual a 1 na(s) posição(ções) relativa(s) ao(s) grau(s) de liberdade onde é aplicada a força de controle na estrutura e coeficiente igual a 0 em todas as demais posições; e

$F(t)$ é a força de controle gerada no SFA.

Somando F_i à força generalizada na Equação III-36 tem-se a equação do movimento relativa ao i-ésimo modo com o absorsor acoplado:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = F_{e_i} + F_i \tag{III-39}$$

CAPÍTULO IV

Estudo Paramétrico e
Dimensionamento do Sistema Fluido Absorsor

A utilização de um sistema absorsor está condicionada às características da própria estrutura onde se vai aplicar, tais como: frequência natural, modo de vibração dominante e força excitante. Além disso, é preciso determinar os parâmetros adequados do sistema absorsor como frequência, amortecimento e massa do fluido, para se obter os níveis de redução desejados.

O estudo paramétrico desenvolvido neste capítulo tem como objetivo proporcionar, a quem vai dimensionar o sistema absorsor, um sentimento maior da influência da variação dos seus parâmetros. Neste estudo obtém-se resultados comparativos do deslocamento da estrutura ao longo do tempo, a fim de julgar o desempenho do sistema e sua capacidade de adequação a diferentes condições de atuação.

Foram feitas variações dos seguintes parâmetros:

- Relação entre as massas do SFA e da estrutura

$$\mu = \frac{M_{SFA}}{M_s} \qquad \text{(IV-1)}$$

onde: M_{SFA} é a massa do sistema absorsor (massa de fluido); e

M_s é a massa modal da estrutura.

- Relações entre as três frequências: da estrutura (ω_s); da excitação (ω_e) e do sistema absorsor (ω_{SFA}):

$$\frac{\omega_e}{\omega_s} \qquad \frac{\omega_{SFA}}{\omega_e}$$

- Parâmetro de amortecimento do fluido (γ_{SFA}). A influência deste parâmetro foi verificada através da variação da viscosidade cinemática do fluido e da largura do tanque

Para cada simulação foi avaliado o deslocamento da estrutura original e o deslocamento da estrutura com o SFA acoplado, verificando sua eficiência na redução das vibrações através da relação de controle dinâmico δ definida na Equação IV-2

$$\delta = \frac{x}{x_o} \tag{IV-2}$$

onde: x é a amplitude de resposta de deslocamentos da estrutura controlada; e

x_o é a amplitude de resposta de deslocamentos da estrutura original;

Desta maneira, sempre que δ for menor que 1 indica que houve redução das vibrações.

Será usada aqui uma estrutura simples de um grau de liberdade (1GL) de frequência natural ω_s submetida a um deslocamento senoidal x_s de amplitude A e frequência ω_e, representado na Equação IV-3.

$$x_s = A\,\mathrm{sen}(\omega_e t) \tag{IV-3}$$

Com a intenção de verificar a eficiência do SFA acoplado a grandes estruturas, as características físicas do modelo utilizado, como massa, amortecimento e rigidez, foram da ordem de grandeza de uma estrutura real.

IV.1 Dimensionamento do SFA

Três parâmetros básicos afetam a eficiência do SFA:

- Relações de frequências ω_e/ω_s e ω_{SFA}/ω_e, sendo que

$$\omega_{SFA} = \frac{\pi\sqrt{gh}}{L}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi h}{L}\right)^2\right] \tag{IV-4}$$

que é a Equação (II-22) fazendo $n = 0$ para considerar apenas um modo de vibração (1GL), onde:

g é a aceleração da gravidade;

h é a altura de fluido em repouso; e

L é o comprimento do tanque.

- Relação entre massas μ (Equação IV-1), sendo

$$M_{SFA} = \rho h b L \tag{IV-5}$$

onde: ρ é a massa específica do fluido; e

b é a largura do tanque.

- Amortecimento Fluido

$$\gamma_{SFA} = \sqrt{\frac{\nu\omega_{SFA}}{2}}\left(2+2\frac{h}{b}\right)\frac{L}{h\sqrt{gh}} \tag{IV-6}$$

onde ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido.

O parâmetro mais significativo é o do amortecimento fluido.

Para dimensionar o Sistema Fluido Absorsor (SFA) é preciso definir, inicialmente, o fluido a ser utilizado, pois características físicas, como o coeficiente de viscosidade cinemática e massa específica são de importância decisiva na constituição do amortecimento do absorsor. Depois são basicamente quatro variáveis a serem determinadas: (i) frequência de movimento do fluido ω_{SFA}, (ii) altura de fluido h, (iii) largura do tanque b e (iv) massa do sistema M_{SFA}. A Figura IV-1 mostra um esquema das dimensões do SFA.

A frequência do SFA é determinada em função da frequência de excitação ou da frequência da estrutura, dependendo do tipo de carregamento, comportamento da estrutura e níveis de redução que se deseja atingir.

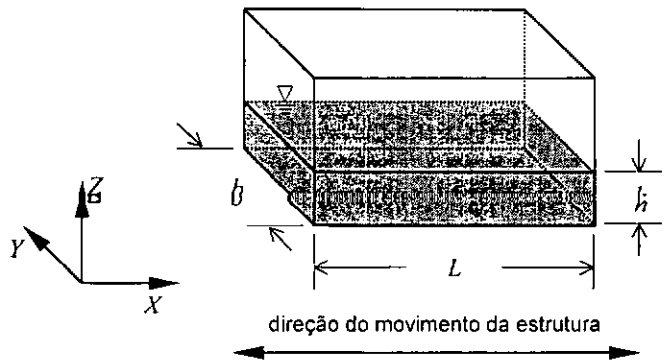

FIGURA IV-1 Esquema das dimensões do SFA

Definindo a frequência ω_{SFA} desejada e a altura h, através da Equação IV-4 determina-se o comprimento do tanque L. A altura de fluido deve ser pequena para atender à teoria de águas rasas utilizada na formulação das equações, e a relação h/L deve estar entre 0,02 e 0,25 [14].

A largura do tanque tem participação na composição da massa do fluido (Equação IV-5) e no parâmetro de amortecimento γ_{SFA} (Equação IV-6) e é obtida através de variações da relação b/L, de modo a melhorar a eficiência do SFA. Para as primeiras simulações utilizou-se a relação $b/L = 0{,}568$, posteriormente foi verificada a influência da redução do valor de b/L à metade.

Com a definição do fluido a ser utilizado no SFA (ρ) e das dimensões do tanque (h, L e b), obtém-se a massa do sistema absorsor (M_{SFA}) com a Equação IV-5.

A relação de massa μ desejada é obtida adicionando tanques idênticos ao já dimensionado.

É importante observar certas relações de dimensionamento, como: h/L, $2h/b$ e A/L (A é a amplitude da excitação).

A influência da utilização de diferentes fluidos é vista mais à frente. Inicialmente todas as simulações foram feitas usando a água como fluido do SFA, depois os resultados foram comparados para o uso de óleo.

IV.2 Estudo da Variação da Massa do SFA

O estudo paramétrico foi iniciado observando a influência da relação de massa μ (Equação IV-1) na eficiência do SFA. Estando o sistema estrutural sujeito às mesmas condições de excitação (senoidal com $\omega_e/\omega_s = 1,0$), mesma calibração da frequência do SFA ($\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$) e mesmo dimensionamento do sistema absorsor, compara-se o resultado dos deslocamentos da estrutura original com os da estrutura acoplada ao SFA para diferentes valores de μ.

Para isso foi utilizado um tanque com as seguintes relações de dimensionamento:

$$\frac{h}{L} = 0,059 \qquad \frac{2h}{b} = 0,209 \qquad \frac{A}{L} = 0,352 .$$

As relações de controle dinâmico obtidas foram plotadas no Gráfico IV-1, onde se vê que à medida que a massa do sistema absorsor cresce, aumenta sua eficiência na atenuação dos deslocamentos, atingindo níveis de redução muito bons da ordem de 80%.

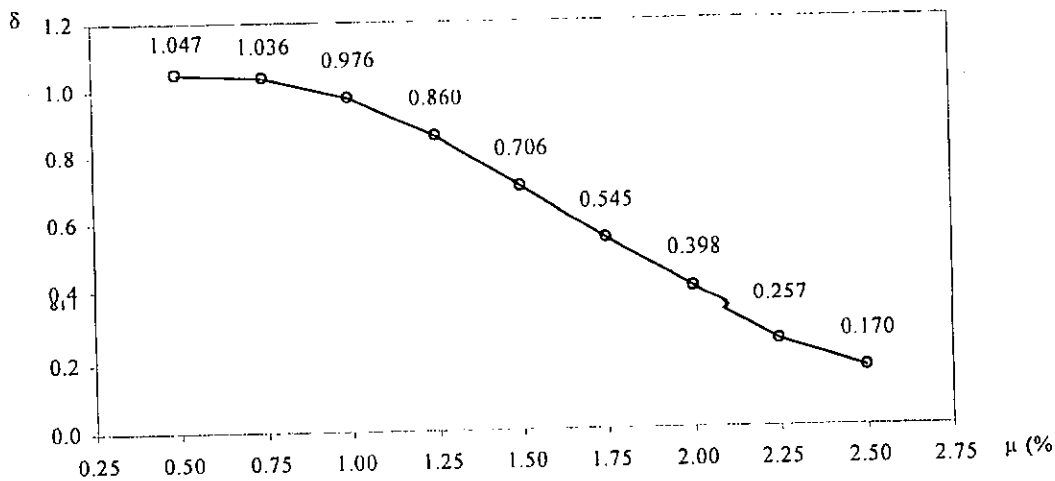

GRÁFICO IV-1 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,059; $2h/b$=0,209; A/L=0,352.

O Gráfico IV-2 mostra o histórico no tempo dos resultados para $\mu = 1,25\%$, 2,0% e 2,5%. Nota-se a presença de batimentos, por estar o SFA calibrado com frequência próxima à frequência da estrutura.

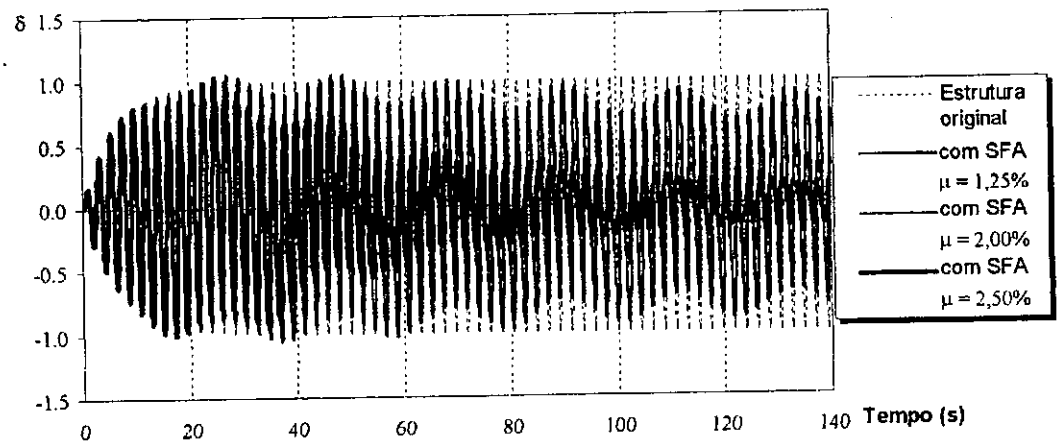

GRÁFICO IV-2 Resposta das razões de deslocamento pelo acréscimo de massa do SFA; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,059; $2h/b$=0,209; A/L=0,352.

Para $\mu = 2{,}75\%$ obteve-se uma grande redução inicial, mas ainda no início da análise o sistema não permaneceu estável, proporcionando uma amplificação dos deslocamentos e a resposta numérica divergiu, como se pode observar no Gráfico IV-3

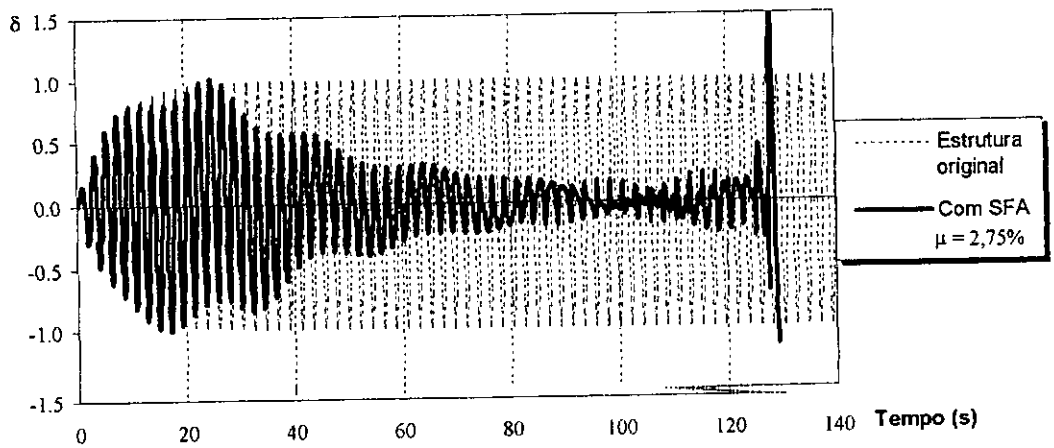

GRÁFICO IV-3 Resposta das razões de deslocamento da estrutura; μ=2,75%; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,059; $2h/b$=0,209; A/L=0,352.

O acréscimo de massa do SFA leva a uma instabilidade no sistema. Por outro lado, absorsores com grandes massas se tornam inviáveis de serem executados. À medida que a massa aumenta é necessário mais espaço físico para sua instalação, além de contribuir com mais peso para a estrutura suportar.

IV.3 Estudo da Variação de ω_{SFA}

As relações entre as frequências do sistema absorsor, da excitação e da estrutura têm importância fundamental no controle das vibrações [5].

Foi verificada a resposta para três valores da relação de frequência ω_{SFA}/ω_e: 0,9, 1,0, e 1,1; estando a estrutura sujeita, isoladamente, a quatro frequências diferentes para a excitação senoidal: em ressonância $\omega_e/\omega_s = 1,0$, e três situações com frequências menores que a frequência da estrutura $\omega_e/\omega_s = 0,8$, 0,5 e 0,235. Dentro de cada simulação foi analisado o acréscimo de massa de fluido no sistema através da relação de massa μ.

IV.3.1 Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 1,0$

Quando uma estrutura é excitada com uma frequência igual à sua frequência natural ela sofre os maiores deslocamentos. Nestas ocasiões o que limita a amplificação da resposta é o próprio amortecimento da estrutura. Será verificada aqui a resposta do sistema trabalhando livre e acoplado com o SFA.

Neste procedimento foi usado um tanque com o mesmo h, mas como a frequência ω_{SFA} variou para mudar a relação ω_{SFA}/ω_e, o comprimento e a largura do tanque variaram. As relações adimensionais para cada caso também mudaram e foram as seguintes:

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ → $\frac{h}{L} = 0,059$ $\frac{2h}{b} = 0,209$ $\frac{A}{L} = 0,352$;

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 1,0$ → $\frac{h}{L} = 0,066$ $\frac{2h}{b} = 0,233$ $\frac{A}{L} = 0,391$;

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 1,1$ → $\frac{h}{L} = 0,073$ $\frac{2h}{b} = 0,257$ $\frac{A}{L} = 0,431$.

Na comparação das respostas da relação de controle dinâmico pelo acréscimo de μ, traçadas no Gráfico IV-4, nota-se uma grande semelhança na eficiência do SFA para todas as três simulações. Observa-se que ao se acrescer a massa de água, variando μ de 0,75% a 2,0%, obtém-se um rendimento melhor na redução das vibrações.

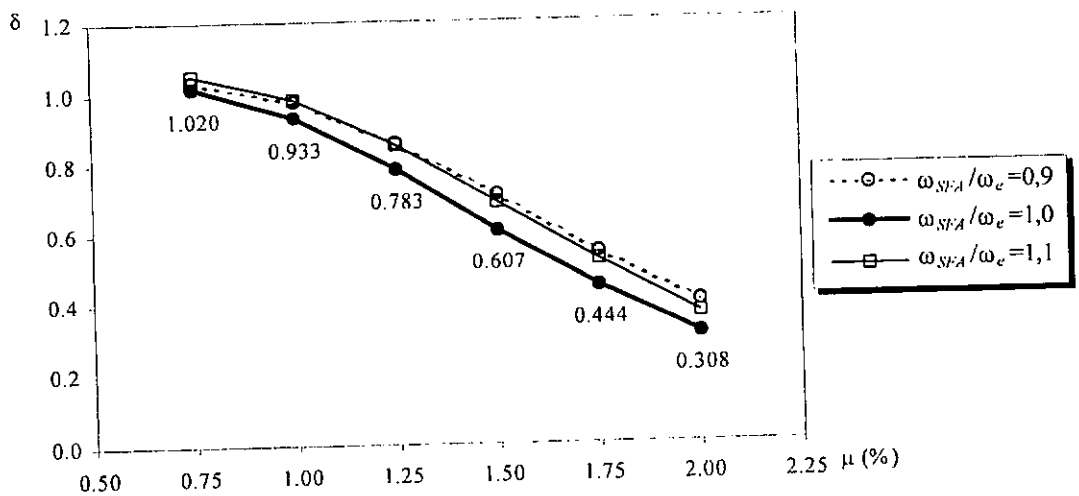

GRÁFICO IV-4 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA para diferentes frequências do SFA; ω_e/ω_s=1,0.

A utilização do SFA se mostrou mais eficiente quando $\omega_{SFA}/\omega_e = 1,0$, como se pode ver Gráfico IV-4. Observa-se, no entanto, que todas as três calibrações do sistema absorsor se mostraram eficientes, visto que foram obtidas grandes reduções das respostas ($\delta < 1,0$), principalmente para os maiores valores da relação de massa ($\mu = 2,0\%$) para o qual a redução dos deslocamentos da estrutura foi da ordem de 69%.

Para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ e 1,1 observa-se uma grande semelhança na relação de controle dinâmico, ficando um pouco mais eficiente para $\omega_{SFA}/\omega_e = 1,1$ à medida que μ cresce.

O Gráficos IV-5, IV-6 e IV-7 mostram a resposta no tempo em termos da relação de deslocamentos δ para o sistema controlado e não controlado para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$, 1,0 e 1,1, respectivamente, com $\mu = 2,0\%$.

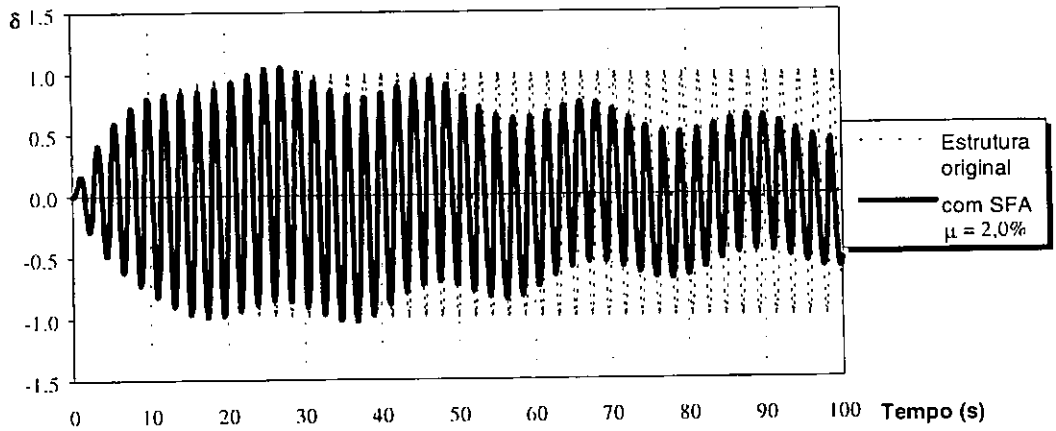

GRÁFICO IV-5 Resposta das razões de deslocamento da estrutura;
μ=2,0%; ω_e/ω_s =1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9;
h/L=0,059; $2h/b$=0,209; A/L=0,352.

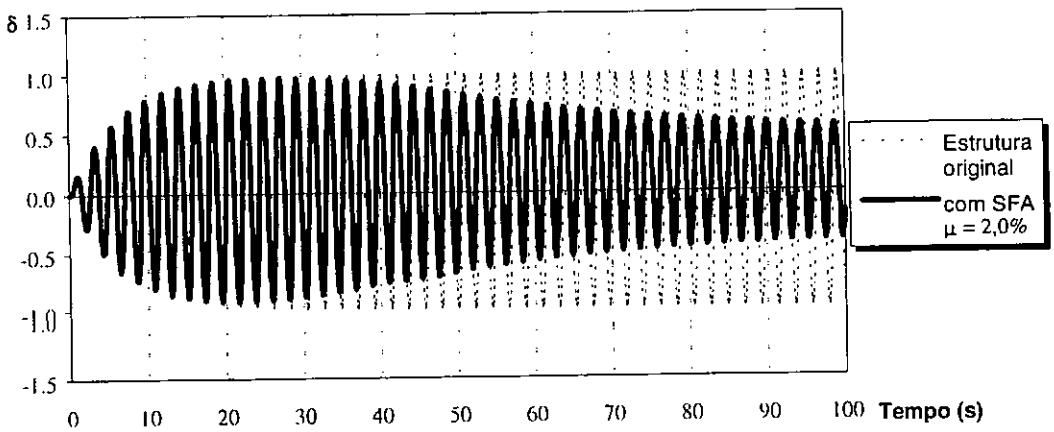

GRÁFICO IV-6 Resposta das razões de deslocamento da estrutura;
μ=2,0%; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=1,0;
h/L=0,066; $2h/b$=0,233; A/L=0,391.

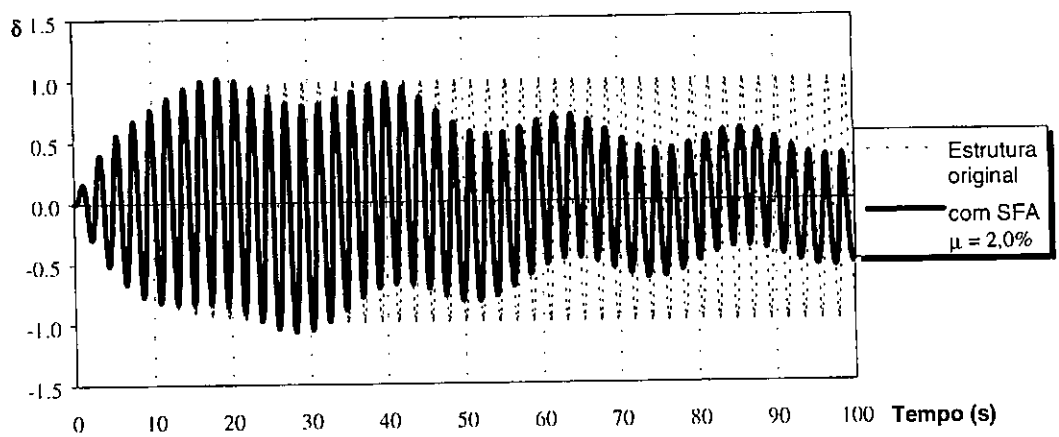

GRÁFICO IV-7 Resposta das razões de deslocamento da estrutura;
μ=2,0%; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=1,1;
h/L=0,073; $2h/b$=0,257; A/L=0,431.

As respostas do sistema controlado quando $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ e 1,1 (Gráficos IV-5 e IV-7) apresentaram batimentos por o SFA e a estrutura, excitada em ressonância, terem frequências muito próximas.

IV.3.2 Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 0,8$

A próxima condição investigada foi a de uma excitação com frequência menor que a frequência da estrutura ($\omega_e/\omega_s = 0,8$). Foram obtidos resultados para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ e 1,0. Para isso foram utilizados SFA's com as seguintes relações:

$$\text{para } \omega_{SFA}/\omega_e = 0,9 \quad \rightarrow \quad \frac{h}{L} = 0,047 \qquad \frac{2h}{b} = 0,167 \qquad \frac{A}{L} = 0,083;$$

$$\text{para } \omega_{SFA}/\omega_e = 1,0 \quad \rightarrow \quad \frac{h}{L} = 0,053 \qquad \frac{2h}{b} = 0,186 \qquad \frac{A}{L} = 0,093.$$

As respostas da relação de controle dinâmico obtidas pelo acréscimo de μ foram traçadas no Gráfico IV-8. Assim como a simulação anterior, nota-se que, ao se acrescer a massa de água, obtém-se um rendimento melhor na redução das vibrações. As duas calibrações da frequência do SFA apresentam respostas muito próximas até $\mu = 2,0\%$, para 2,5% a relação $\omega_{SFA}/\omega_e = 1,0$ se mostrou mais eficiente.

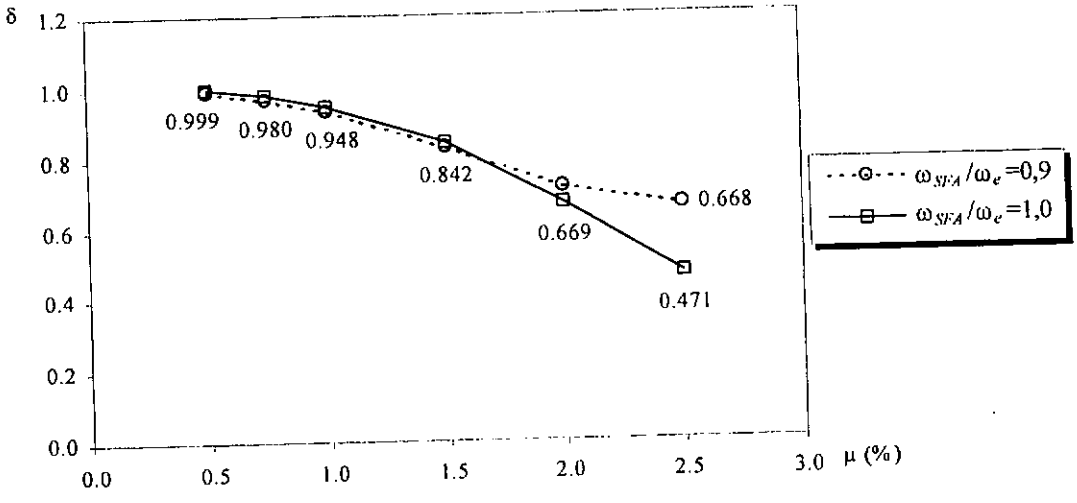

GRÁFICO IV-8 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA para diferentes frequências do SFA; ω_e/ω_s=0,8.

No Gráfico IV-9 foi traçada a história no tempo da resposta que apresentou maior redução, para $\mu = 2{,}5\%$ que alcançou $\delta = 0{,}471$.

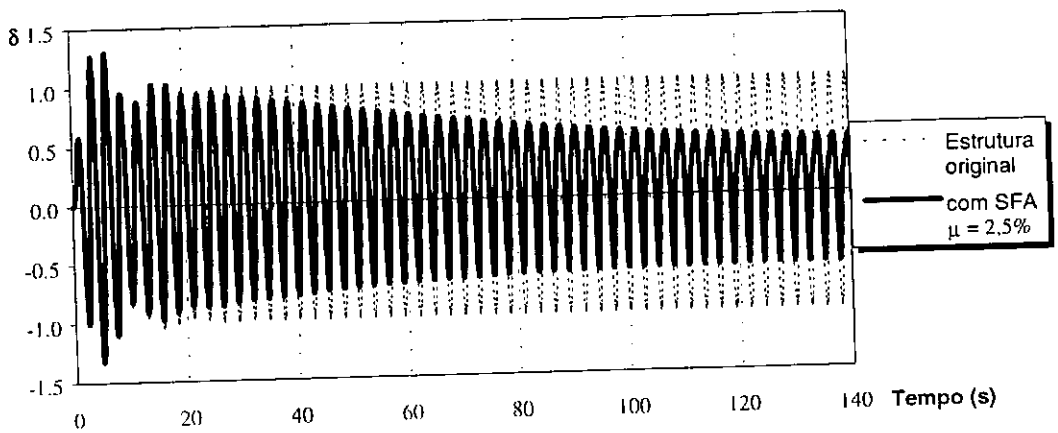

GRÁFICO IV-9 Resposta das razões de deslocamento da estrutura;
μ=2,5%; ω_e/ω_s=0,8; ω_{SFA}/ω_e=1,0;
h/L=0,053; $2h/b$=0,186; A/L=0,093.

O comportamento transiente observado nos instantes iniciais está presente mesmo quando a estrutura está sem o sistema absorsor.

Para $\mu = 3{,}0\%$ os deslocamentos apresentaram uma forte redução inicial, mas depois apresentaram divergência numérica. Isso aconteceu para as duas calibrações de frequência do SFA testadas ($\omega_{SFA}/\omega_e = 0{,}9$ e 1,0), como pode-se observar no Gráfico IV-10 as respostas para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0{,}9$.

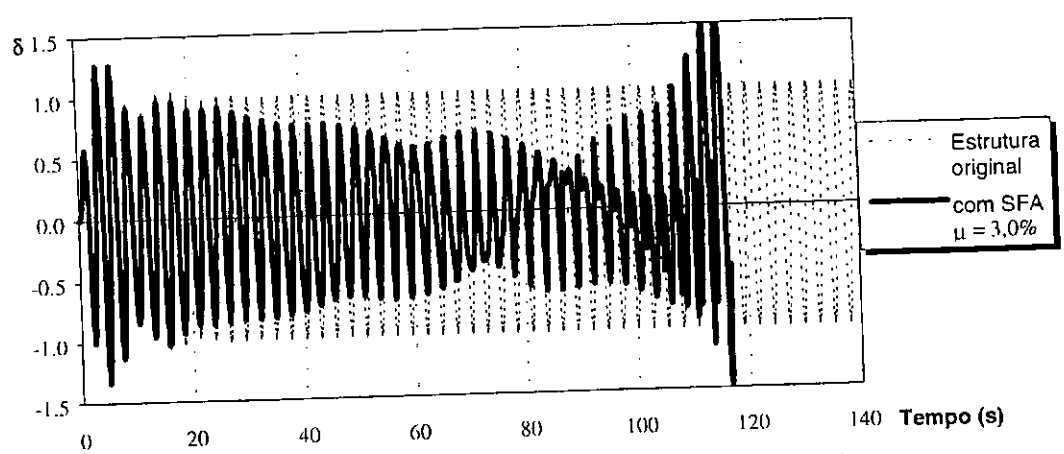

GRÁFICO IV-10 Resposta das razões de deslocamento da estrutura;
μ=3,0%; ω_e/ω_s=0,8; ω_{SFA}/ω_e=0,9;
h/L=0,047; $2h/b$=0,167; A/L=0,083.

IV.3.3 Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 0,5$

Para verificar o comportamento do SFA acoplado a uma estrutura excitada a uma frequência mais baixa o sistema foi testado para $\omega_e/\omega_s = 0,5$. O absorsor teve sua frequência calibrada com a excitação em dois valores: $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ e 1,0; e as relações de dimensionamento para isso foram:

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ → $\frac{h}{L} = 0,030$ $\frac{2h}{b} = 0,104$ $\frac{A}{L} = 0,026$;

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 1,0$ → $\frac{h}{L} = 0,033$ $\frac{2h}{b} = 0,116$ $\frac{A}{L} = 0,028$.

Observa-se no Gráfico IV-11 que o SFA não se mostrou eficiente quando a estrutura é excitada com uma frequência de valor igual à metade da sua frequência natural. Os valores de δ maiores que 1, mostrados no gráfico, indicam que ao invés de reduzir as vibrações houve uma amplificação dos deslocamentos.

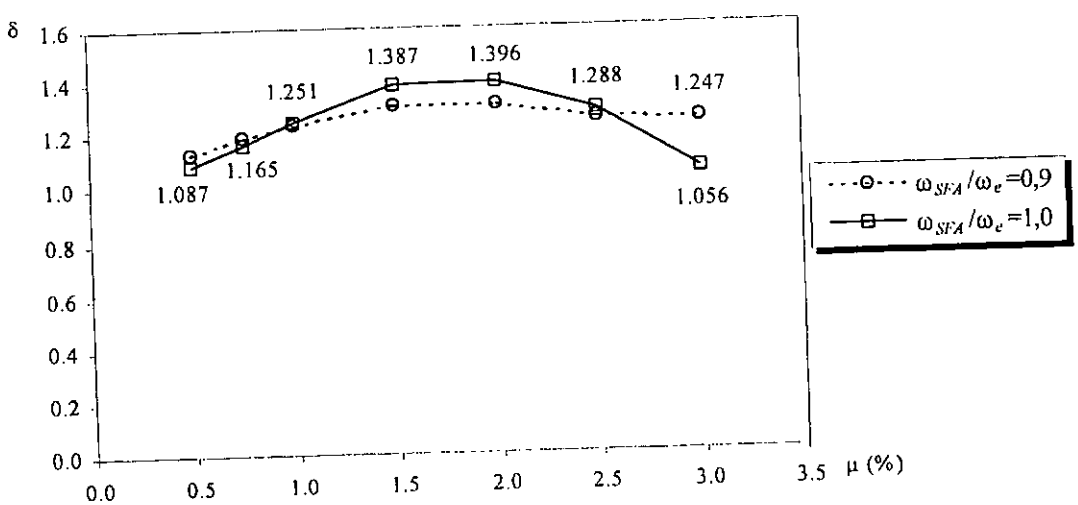

GRÁFICO IV-11 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA para diferentes frequências do SFA; ω_e/ω_s=0,5.

Ao contrário do que aconteceu nas simulações para $\omega_e/\omega_s = 1,0$ e 0,8, o acréscimo de massa do SFA não lhe trouxe eficiência.

IV.3.4 Variação de ω_{SFA} para $\omega_e/\omega_s = 0{,}235$

A última variação da frequência de excitação investigada foi a de uma excitação com frequência bem menor que a frequência da estrutura ($\omega_e/\omega_s = 0{,}235$). Assim como para as simulações anteriores, foram obtidos resultados para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0{,}9$ e 1,0, e as relações de dimensionamento do SFA foram:

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0{,}9$ → $\frac{h}{L} = 0{,}014$ $\frac{2h}{b} = 0{,}049$ $\frac{A}{L} = 0{,}010$;

para $\omega_{SFA}/\omega_e = 1{,}0$ → $\frac{h}{L} = 0{,}015$ $\frac{2h}{b} = 0{,}054$ $\frac{A}{L} = 0{,}011$.

No Gráfico IV-12 foram traçadas as relações de controle dinâmico δ do sistema versus a relação de massa μ, para as duas variações de ω_{SFA}. Observa-se que a respostas para as duas calibrações do sistema absorsor foram praticamente iguais (curvas sobrepostas), e nestas condições o SFA se mostrou ineficiente, levando até mesmo a uma pequena amplificação nas amplitudes de resposta, como se podem ver os valores de δ ligeiramente maiores que 1.

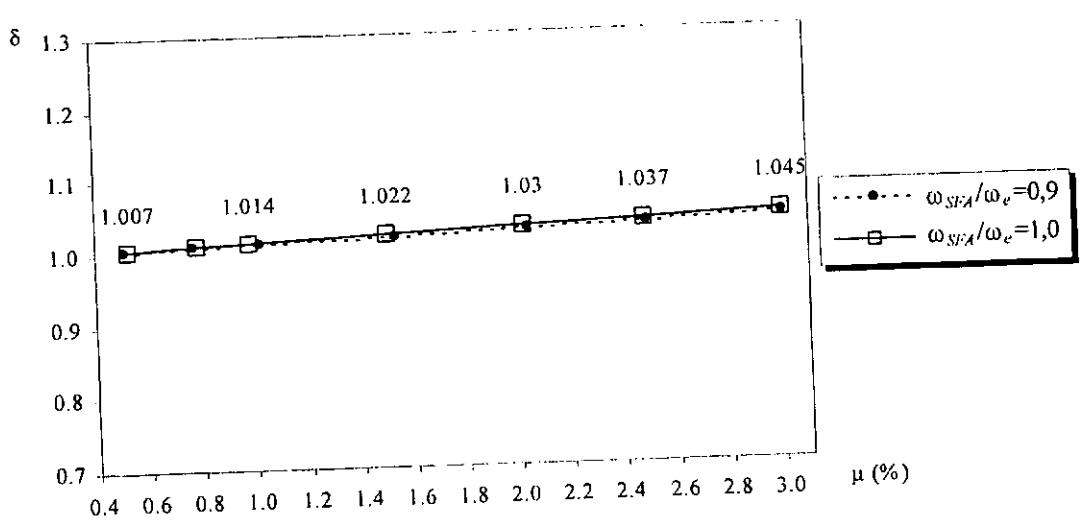

GRÁFICO IV-12 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA para diferentes frequências do SFA; ω_e/ω_s=0,235.

A necessidade de aumentar o comprimento do tanque para dimensionar o Sistema Fluido Absorsor a uma frequência baixa, faz crescer o volume de fluido e

consequentemente a massa do SFA. Por isso nem sempre é possível ter exatamente a mesma relação de massa para comparar os resultados para duas calibrações de frequências, pois utilizando 15 tanques, por exemplo, se atinge 0,96% da massa modal da estrutura, e 16 tanques já representa 1,02%.

Oscilação de frequência muito baixa em relação à frequência natural da estrutura promove uma resposta de magnitude muito menor, da ordem de 10^{-1} vezes, que a do deslocamento em ressonância, não conseguindo fazer o fluido entrar em movimento suficiente para gerar força de controle no SFA, a fim de reduzir as vibrações.

Ainda com $\omega_e/\omega_s = 0{,}235$, foi feita a variação das dimensões do SFA ($h/L = 0{,}022$, $2h/b = 0{,}077$ e $h/L = 0{,}031$, $2h/b = 0{,}109$) e se observou que a resposta também não sofre redução, pelo contrário, continua com uma pequena amplificação crescente à medida que se acrescenta massa ao absorsor, como se vê as relações de controle dinâmico crescentes e maiores que 1 no Gráfico IV-13.

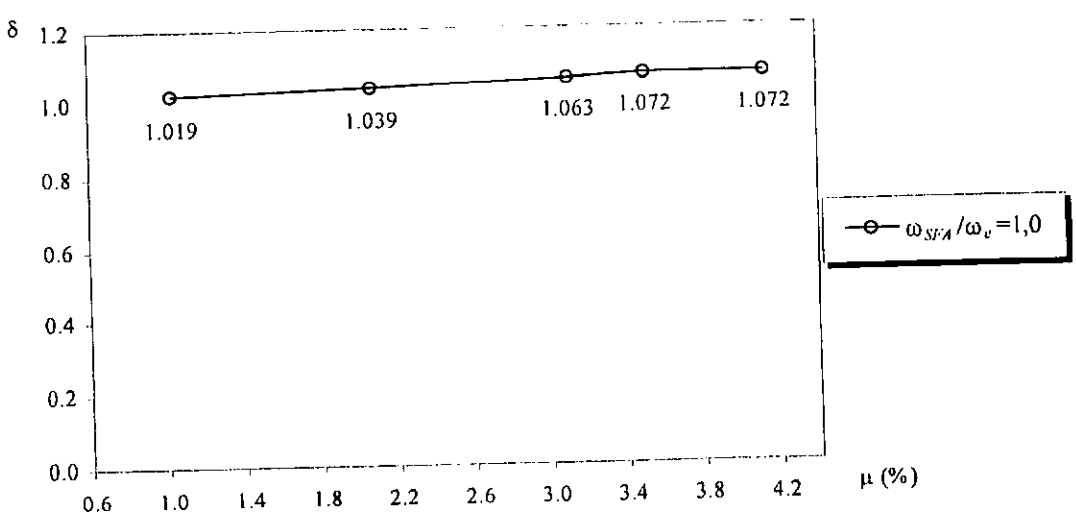

GRÁFICO IV-13 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA; ω_e/ω_s=0,235; h/L=0,022; $2h/b$=0,077; A/L=0,0075.

Para o dimensionamento $h/L = 0{,}031$ e $2h/b = 0{,}109$, observou-se que ao se trabalhar com relações de massa μ maiores, a partir de um certo valor o sistema não permanece estável, proporcionando ainda mais amplificação aos deslocamentos levando a uma resposta numérica divergente, como pode-se observar no histórico do tempo traçado no Gráfico IV-14.

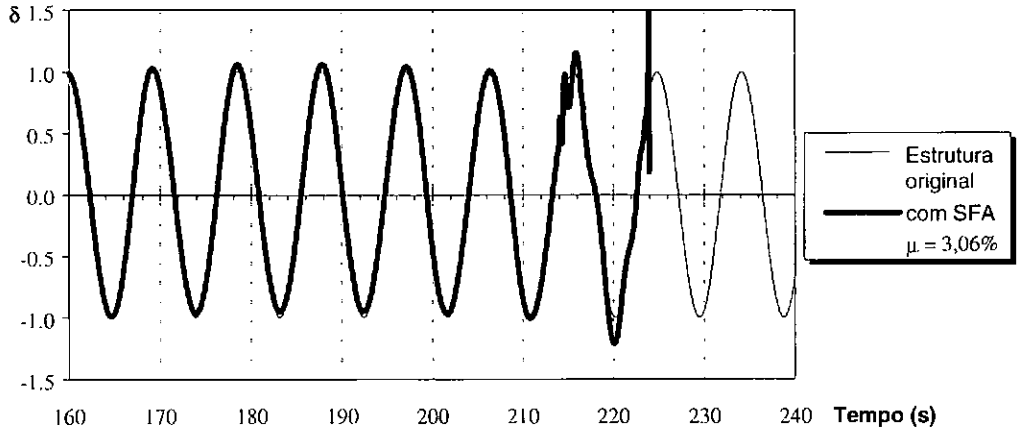

GRÁFICO IV-14 Resposta das razões de deslocamento da estrutura para μ=3,06% ; ω_e/ω_N=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,031; $2h/b$=0,109; A/L=0,0053.

A Tabela IV-1 resume os valores mínimos obtidos para as relações de controle dinâmico δ do SFA calibrado com frequência $\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$ para vários valores da relação de massa μ, e para as várias frequências de excitação a que a estrutura foi submetida.

TABELA IV-1 Relações de controle dinâmico ($\delta = x/x_o$) para várias frequências de excitação

ω_e/ω_s	μ (%)						
	0,50	**0,75**	**1,00**	**1,50**	**2,00**	**2,50**	**3,00**
1,0	1,043	1,020	0,933	0,607	0,308	divergiu	--
0,8	0,999	0,980	0,948	0,842	0,669	0,471	divergiu
0,5	1,087	1,165	1,251	1,387	1,396	1,288	1,067
0,235	1,007	1,011	1,014	1,022	1,030	1,037	1,045

Para uma melhor visualização dos resultados obtidos, estes valores são plotados no Gráfico IV-15 e verifica-se que o SFA não reduz as vibrações, para uma frequência de excitação igual ou menor que 0,5. À medida que ω_e se aproxima da frequência natural da estrutura o Sistema Fluido Absorsor torna-se bastante eficiente.

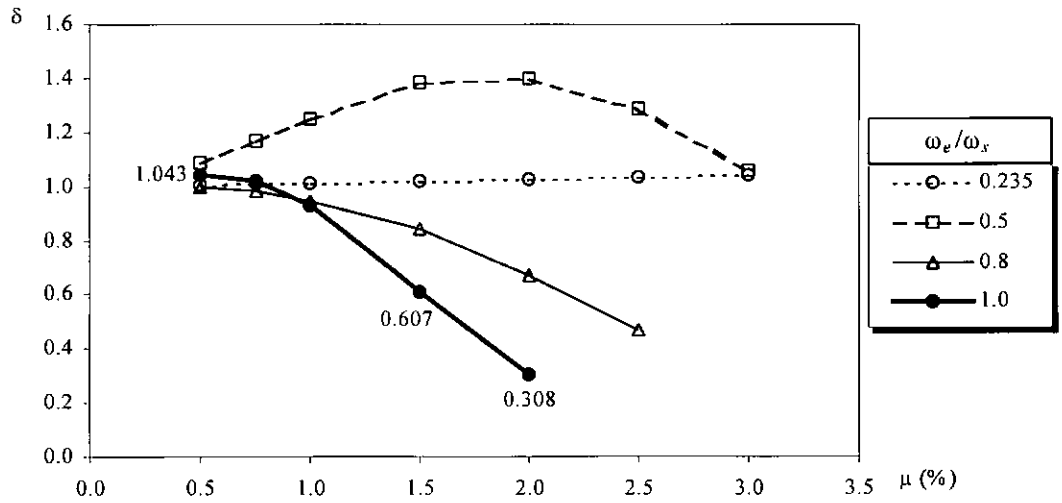

GRÁFICO IV-15 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA, para diferentes relações ω_e/ω_s ; ω_{SFA}/ω_e=1,0.

Outro aspecto interessante é que, apesar de promover uma pequena amplificação para $\mu = 0{,}5\%$ e 0,75%, o sistema submetido à frequência de excitação em ressonância apresenta grande eficiência à medida que μ cresce, chegando a 69% de redução da amplitude de deslocamentos.

IV.4 Estudo da Variação de *h/L*

Foi analisada, também, a influência da variação da relação *h/L* na eficiência do Sistema Fluido Absorsor. Para isto foi considerada a resposta para a excitação senoidal com frequência igual à da estrutura ($\omega_e/\omega_s = 1{,}0$) variando a altura de água *h* e, consequentemente, o comprimento do tanque de modo que a frequência do sistema absorsor ω_{SFA} permaneça igual a 90% da frequência de excitação ω_e. A largura do tanque também variou de maneira que a relação *b/L* permanecesse igual a 0,568.

Foram testados três dimensionamentos diferentes para o SFA, são eles:

$$\frac{h}{L} = 0{,}085 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}298 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}250;$$

$$\frac{h}{L} = 0{,}104 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}367 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}206;$$

$$\frac{h}{L} = 0{,}136 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}480 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}161.$$

Para um mesmo valor de μ nota-se que à medida que a relação *h/L* aumenta obtém-se uma maior eficiência na redução das vibrações, como mostra o Gráfico IV-16 que apresenta δ versus *h/L* para μ = 0,75%.

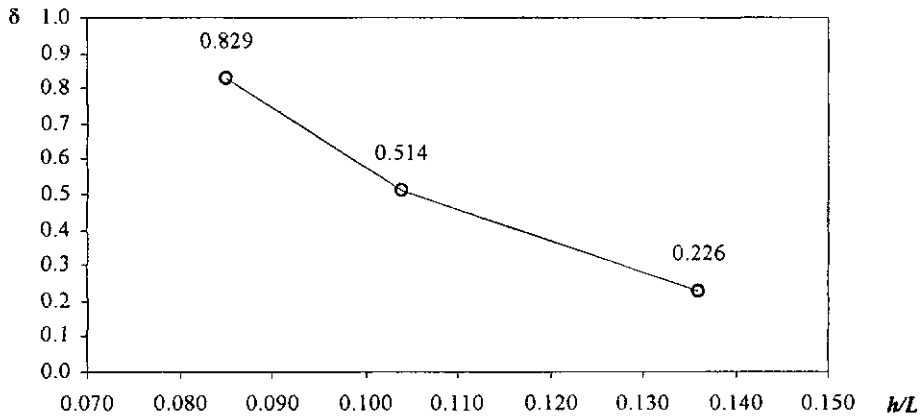

GRÁFICO IV-16 Relação de controle dinâmico para variação da relação *h/L*; μ=0,75%; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9.

O Gráfico IV-17 mostra as respostas no tempo, para os três dimensionamentos diferentes.

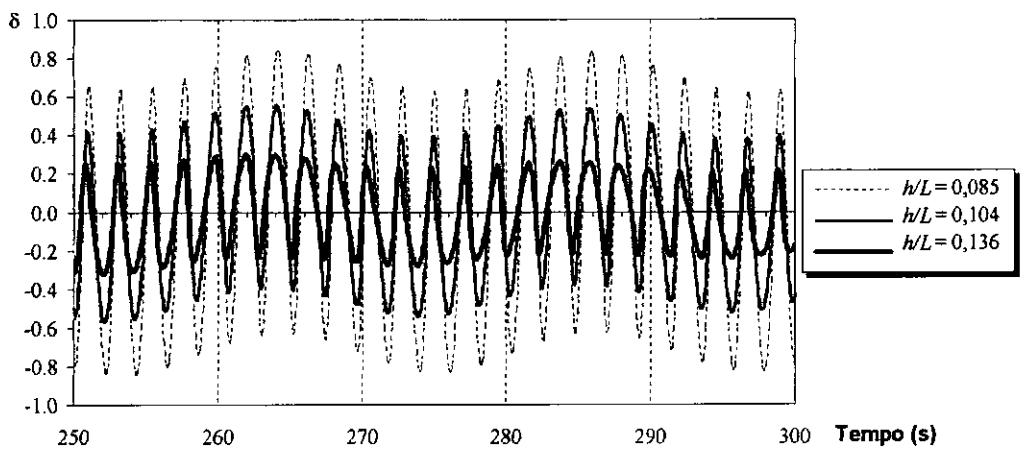

GRÁFICO IV-17 Resposta das razões de deslocamento da estrutura controlada para μ=0,75% com diferentes relações *h/L*; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9.

Assim como foi observado na seção IV.2, para a mesma relação *h/L*, ao se acrescer a massa de água verifica-se que as reduções são maiores. O Gráfico IV-18 apresenta a relação δ versus μ para *h/L* = 0,104.

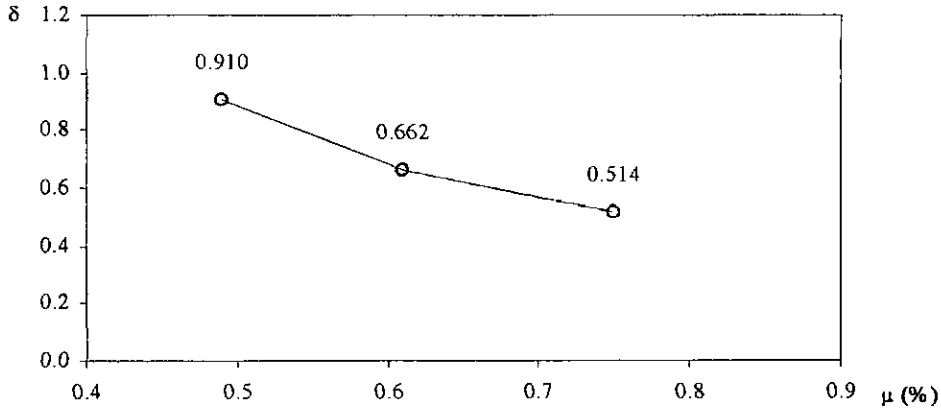

GRÁFICO IV-18 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA para h/L=0,104; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9.

O Gráfico IV-19 mostra estas respostas no tempo para diferentes relações de massa. Observa-se que já se obtém grande redução de resposta para μ = 0,76%.

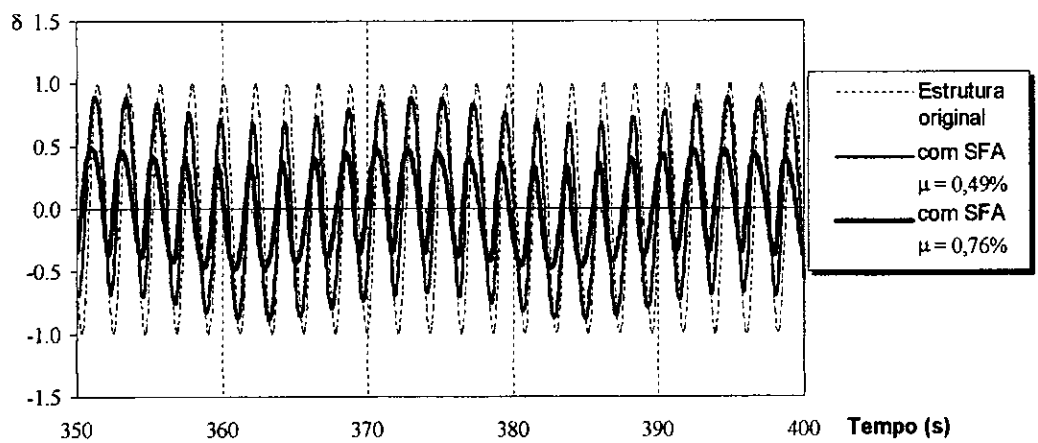

GRÁFICO IV-19 Resposta das razões de deslocamento da estrutura pelo acréscimo de massa de água; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,104; $2h/b$=0,367; A/L=0,206.

Com estes resultados pode-se notar que, desde que $\omega_e \approx \omega_s$, o SFA se mostra bastante eficiente, mesmo quando se utiliza tanques de diferentes dimensões.

Novamente observou-se, assim como na seção IV-2, que a partir de um certo valor de μ a resposta do sistema diverge para h/L = 0,136, como se observa no Gráfico IV-20.

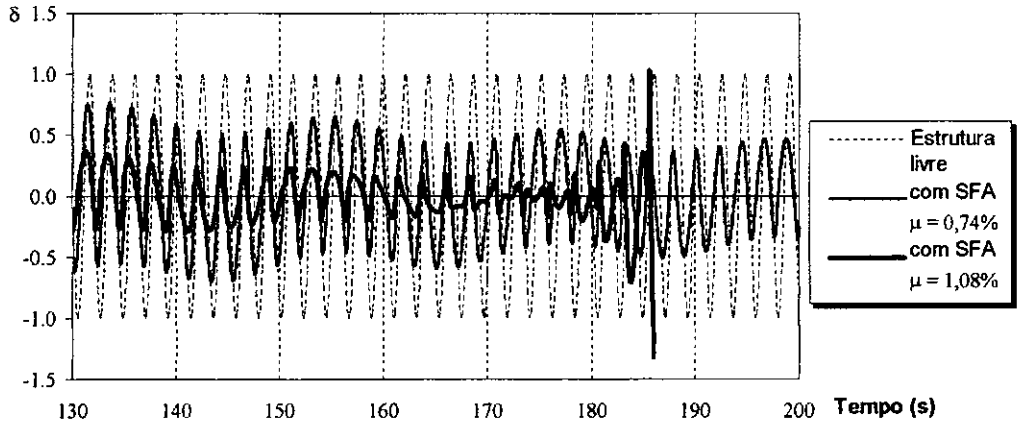

GRÁFICO IV-20 Resposta das razões de deslocamento da estrutura pelo acréscimo de massa de água; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,136; $2h/b$=0,480; A/L=0,161.

IV.5 Estudo da Redução da Largura *b*

Para verificar a influência da largura do tanque b no amortecimento fluido e, consequentemente, na eficiência do Sistema Fluido Absorsor foi feito um estudo variando-se este parâmetro.

Como foi visto na seção IV.1 a determinação da largura b se faz através de uma porcentagem de L. Até aqui todos os dimensionamentos do SFA foram para a relação b/L = 0,568, nesta seção foram verificados os resultados para uma redução de b/L pela metade, ficando igual a 0,284. Ao reduzir b pela metade e manter h e L (para não alterar a frequência ω_{SFA}) tem-se que ter duas vezes mais tanques para atingir a mesma relação de massa μ anterior.

Os resultados foram obtidos para uma excitação senoidal com três valores diferentes de frequência: um igual à frequência da estrutura (ω_e/ω_s = 1,0) e dois abaixo da frequência da estrutura (ω_e/ω_s = 0,8 e 0,235). O sistema absorsor foi calibrado com frequência igual a 90% da frequência de excitação (ω_{SFA}/ω_e = 0,9).

IV.5.1 Redução de b para $\omega_e/\omega_s = 1{,}0$

Para a excitação em ressonância com a estrutura foram utilizadas duas relações de dimensionamentos do SFA com a largura menor:

$$\frac{h}{L} = 0{,}059 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}419 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}352\,;$$

$$\frac{h}{L} = 0{,}136 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}960 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}161\,.$$

Através dos resultados traçados no Gráfico IV-21 observa-se que não há melhora na eficiência da redução das oscilações quando se compara a relação de controle dinâmico obtida para $b/L = 0{,}284$ com a obtida para $b/L = 0{,}568$, com o mesmo dimensionamento do SFA e mesma relação de massa μ.

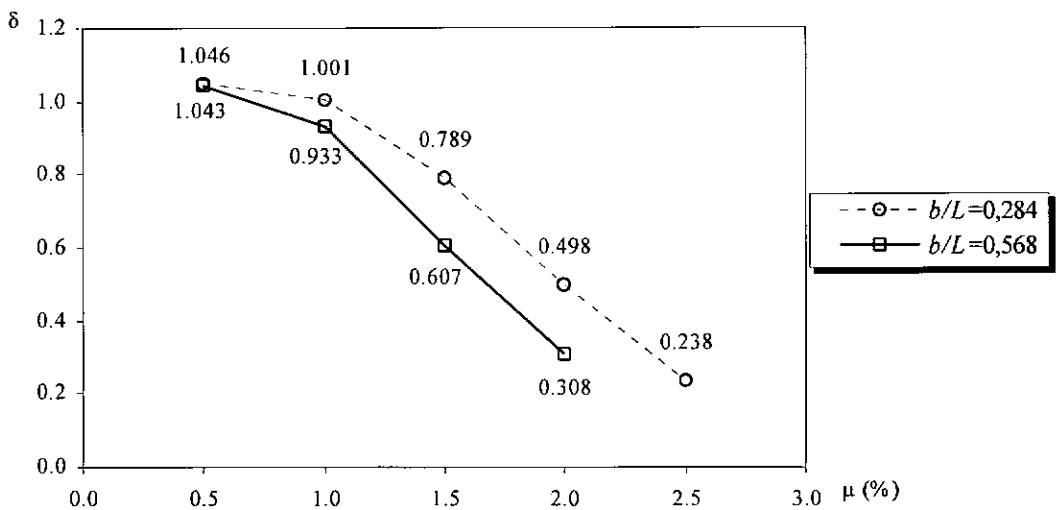

GRÁFICO IV-21 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA, comparação da redução de b ; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,059.

Para μ = 2,0%, o tanque dimensionado com largura maior foi 38% mais eficiente do que o tanque com largura menor (b/L = 0,284).

Esperava-se que houvesse melhoria na eficiência do SFA já que a participação de b no parâmetro de amortecimento γ_{SFA} (Equação IV-6) guarda uma relação inversa de proporcionalidade, quando b diminui γ_{SFA} cresce. Isso se deve ao fato de que ao reduzir a largura do tanque o movimento do fluido sofre uma maior influência das paredes laterais e, em consequência, aumenta o amortecimento do SFA. Apesar disso houve um pequeno aumento na relação de controle dinâmico passando de 0,308 para 0,498, para $\mu = 2{,}0\%$. No entanto, continua muito eficiente visto que uma redução de 50% na amplitude de resposta é bastante significativa. A perda de eficiência observada se dá, provavelmente, devido à influência das paredes laterais numa maior regularização do movimento do fluido, fazendo com que tenha mais resistência para entrar em movimento de *sloshing*.

Foi observado que a maior contribuição da redução da largura é na estabilidade da resposta. Como já foi mostrado anteriormente, para maiores valores de μ a resposta do sistema apresenta divergência, com a redução de b esta resposta estabiliza, como se vê no Gráfico IV-22, para $h/L = 0{,}059$ e $\mu = 2{,}80\%$.

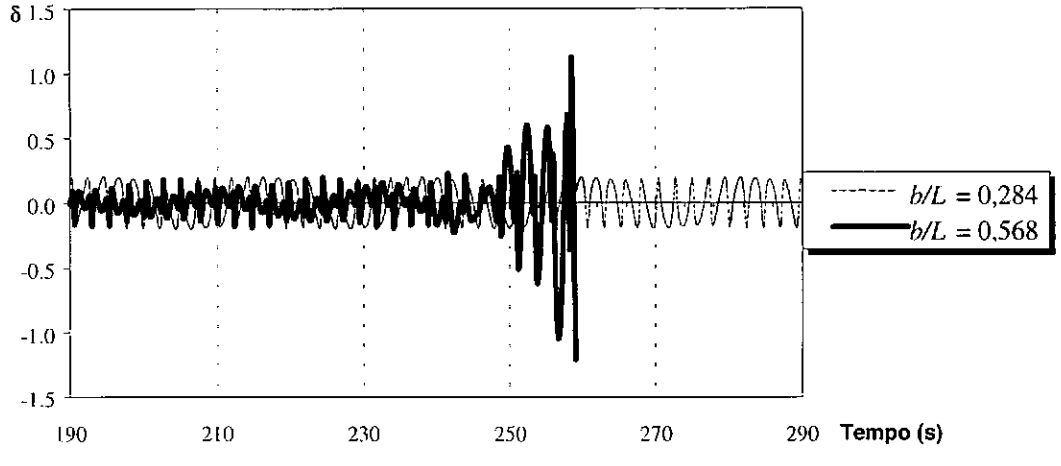

GRÁFICO IV-22 Resposta das razões de deslocamento da estrutura controlada para redução da largura b; μ=2,80%; ω_e/ω_N=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,059; A/L=0,352.

O mesmo aconteceu para $h/L = 0{,}136$, que teve sua resposta com $\mu = 0{,}74\%$, que anteriormente divergia, estabilizada como mostra o Gráfico IV-23.

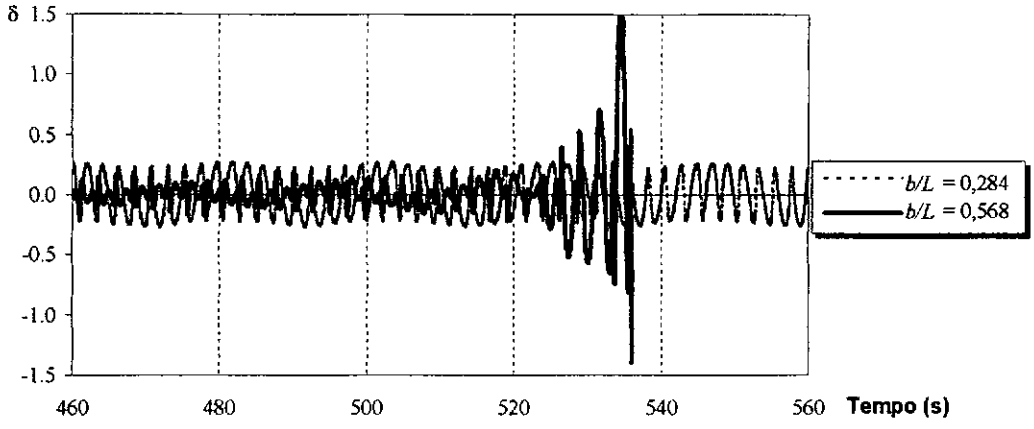

GRÁFICO IV-23 Resposta das razões de deslocamento da estrutura controlada para redução da largura b; μ=0,74%; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,136; A/L=0,161.

Ao prosseguir aumentando μ, observa-se no Gráfico IV-24 que a partir de um certo valor a resposta do sistema ainda diverge.

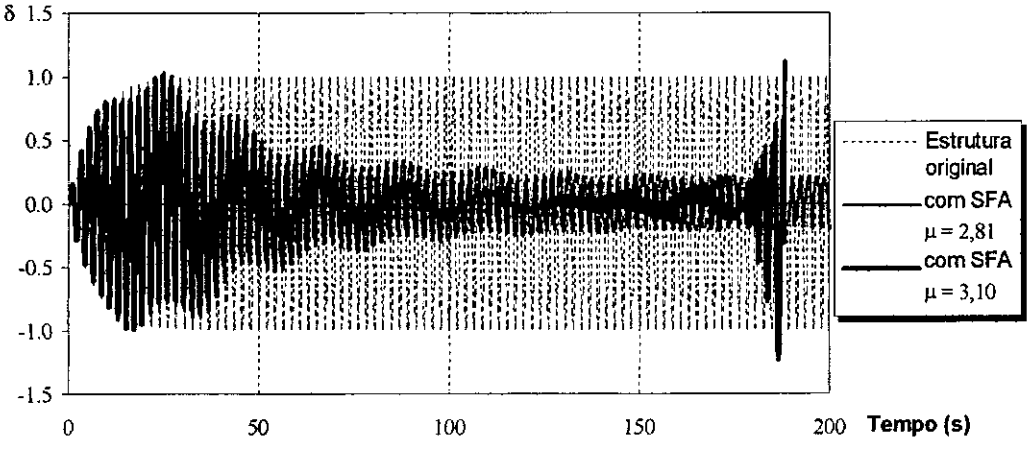

GRÁFICO IV-24 Resposta das razões de deslocamento da estrutura no tempo para variação de μ; b/L=0,284; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,059; $2h/b$=0,419; A/L=0,352.

IV.5.2 Redução de b para $\omega_e/\omega_s = 0,8$

Para a frequência de excitação sendo igual a 80% da frequência da estrutura as relações de dimensionamento do SFA, com b/L = 0,284, foram:

$$\frac{h}{L} = 0,047 \qquad \frac{2h}{b} = 0,334 \qquad \frac{A}{L} = 0,083 .$$

A variação da relação de controle dinâmico δ à medida que se acresce a massa do absorsor foi traçada no Gráfico IV-25 junto com os resultados para a relação *b/L* anterior.

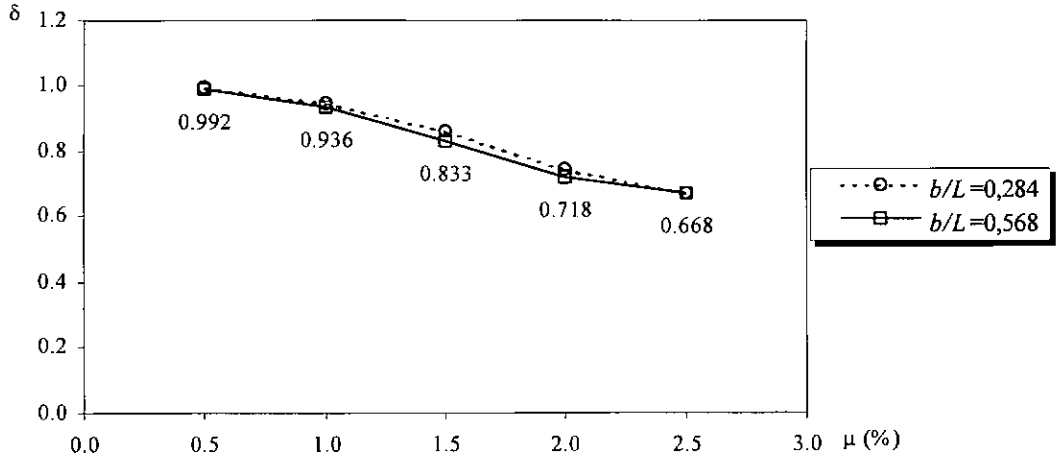

GRÁFICO IV-25 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA, comparação da redução da largura *b* ; ω_e/ω_s=0,8; ω_{SFA}/ω_e=0,9.

De maneira diferente da que aconteceu na simulação para a excitação em ressonância, pode-se ver que praticamente não houve perda de eficiência quando foi utilizado o SFA com a largura menor.

Ao fazer a relação de massa igual a 3,0% o resultado numérico divergiu, assim como tinha acontecido quando se utilizou um dimensionamento do SFA com *b/L* = 0,568.

IV.5.3 Redução de *b* para ω_e/ω_s = 0,235

Para a simulação com a relação entre a frequência de excitação e da estrutura igual a 0,235 e *b/L* = 0,284 foi dimensionado o SFA com as seguintes relações:

$$\frac{h}{L} = 0{,}014 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}098 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}010\,.$$

Os resultados obtidos para a relação de controle dinâmico δ à medida que μ cresce, para as duas relações *b/L* estudadas, foram traçados no Gráfico IV-26. As duas curvas se apresentam sobrepostas indicando que não houve variação alguma na eficiência do SFA para reduzir as vibrações ao se reduzir a largura do tanque.

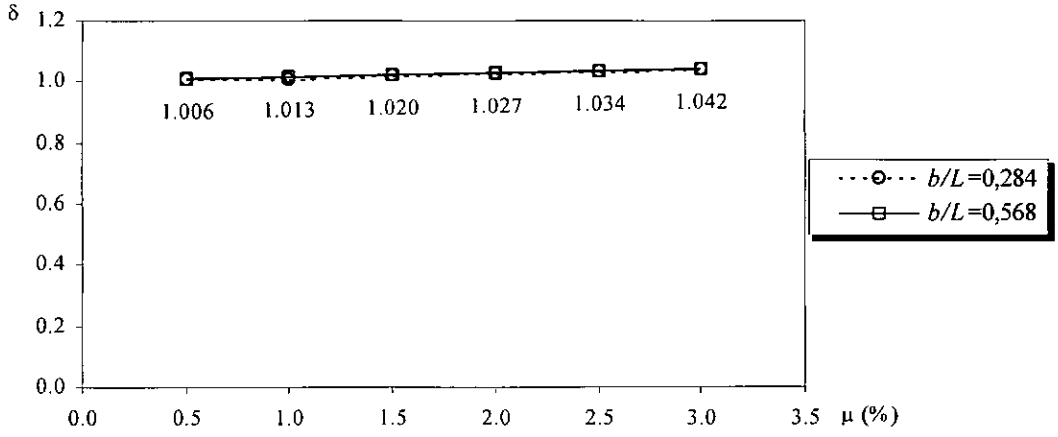

GRÁFICO IV-26 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA, comparação da redução da largura b; ω_e/ω_s=0,235; ω_{SFA}/ω_e=0,9.

Os resultados obtidos para a redução da largura b estão apresentados na Tabela IV-2 com as relações de controle dinâmico obtidas pela variação de μ, para as três frequências de excitação estudadas. Estes dados estão plotados no Gráfico IV-27 para uma melhor visualização.

TABELA IV-2 Relações de controle dinâmico ($\delta = x/x_o$) para várias frequências de excitação – redução da largura

ω_e/ω_s	μ (%)						
	0,50	**0,75**	**1,00**	**1,50**	**2,00**	**2,50**	**3,00**
1,0	1,046	1,044	1,001	0,789	0,498	0,238	divergiu
0,8	0,995	0,976	0,948	0,860	0,744	0,668	divergiu
0,235	1,006	1,009	1,012	1,019	1,026	1,033	1,041

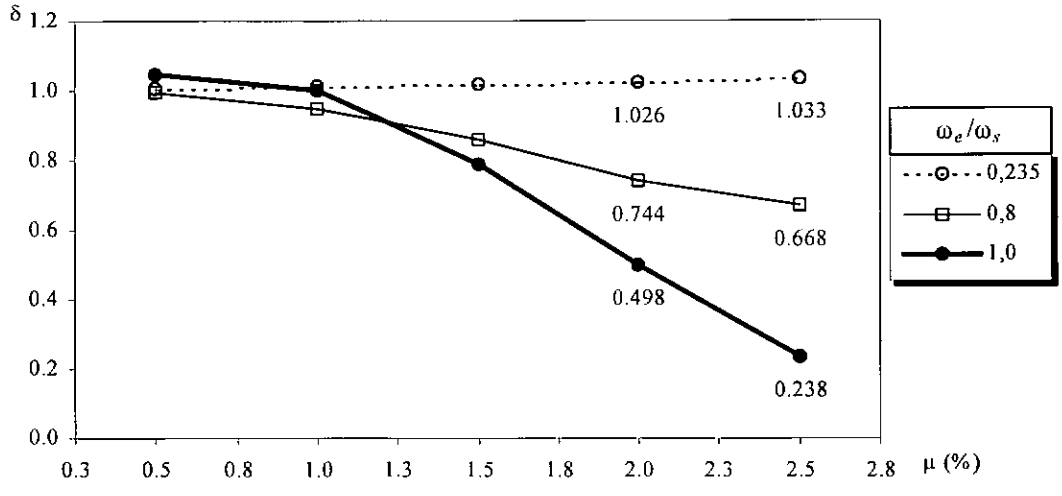

GRÁFICO IV-27 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA para diferentes relações ω_e/ω_s; ω_{SFA}/ω_e=0,9; b/L=0,284.

Da análise das curvas do gráfico pode-se observar, assim como na seção IV.3 da variação da frequência do SFA, que a eficiência do sistema absorsor está diretamente relacionada à relação entre a frequência de excitação e a frequência natural da estrutura, mesmo para uma relação *b/L* menor. À medida que ω_e/ω_s se aproxima de 1 são maiores as reduções dos deslocamentos da estrutura.

Para a excitação em ressonância ($\omega_e/\omega_s = 1,0$) o SFA apresenta grande eficiência para valores de $\mu > 1,0\%$. Uma boa redução da ordem de 30% também é obtida para $\omega_e/\omega_s = 0,8$. No entanto, como já foi visto, o SFA se mostrou ineficiente para $\omega_e/\omega_s = 0,235$, provocando até mesmo pequenas amplificações nas respostas.

IV.6 Estudo do Uso de Óleo como Fluido do SFA

Em todos os itens anteriores deste capítulo a água foi utilizada como o fluido do Sistema Fluido Absorsor acoplado à estrutura. Para estudar a influência das características físicas do fluido na capacidade de atenuação das vibrações a água foi substituída pelo óleo.

Comparando os coeficientes de viscosidade cinemática dos dois fluidos vê-se que o óleo é quase nove vezes mais viscoso que a água:

$$\nu_{água} = 9,4 \times 10^{-7}\ m^2/s \qquad \nu_{óleo} = 80,0 \times 10^{-7}\ m^2/s$$

Embora seja muito mais viscoso, o óleo contribui com menos massa, para um mesmo volume, pois pesa menos que a água. Na comparação das massas específicas vê-se que ele é doze por cento mais leve:

$$\rho_{água} = 1,0\ t/m^3 \qquad \rho_{óleo} = 0,883\ t/m^3$$

Para esta simulação a estrutura foi excitada por uma força senoidal em ressonância ($\omega_e/\omega_s = 1,0$) e a frequência do Sistema Fluido Absorsor foi calibrada igual a 90% da frequência de excitação ($\omega_{SFA}/\omega_e = 0,9$).

Utilizou-se um dimensionamento do SFA com a menor razão largura/altura testada (b/L = 0,284) e suas relações ficaram:

$$\frac{h}{L} = 0{,}136 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}960 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}161.$$

Analisando os resultados obtidos, conclui-se que é preciso de mais massa de óleo para se obter o mesmo rendimento na redução de oscilações que se alcançava utilizando a água como fluido do SFA. O Gráfico IV-28 compara os resultados das relações de controle dinâmico obtidas com o óleo e com a água, para vários valores da relação de massa μ.

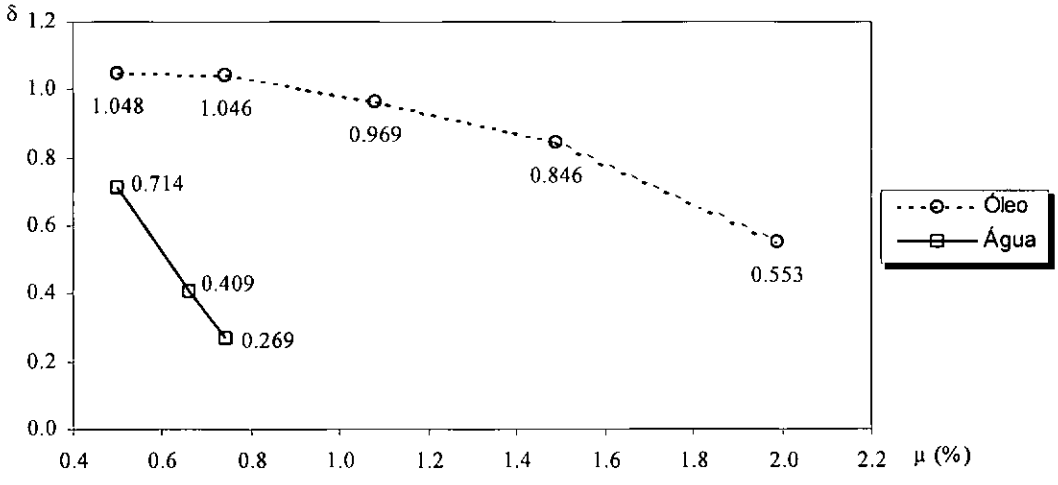

GRÁFICO IV-28 Relação de controle dinâmico pelo acréscimo de massa do SFA, comparação óleo e água; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,136; $2h/b$=0,960; A/L=0,161.

Isto assim se dá, pois se atingem maiores reduções sempre que o fluido está em movimento de *sloshing*, que seria a situação limite antes de haver formação completa e quebra de onda. Pela sua maior viscosidade, o óleo necessita de mais energia para fazer com que entre em movimento de *sloshing*. Portanto, submetido às mesmas condições de excitação e relação de massa a água atinge mais precocemente o movimento de *sloshing* que o óleo.

Por estar mais longe de ter quebra de onda o movimento do óleo tem mais estabilidade que o da água e, como no caso da redução da largura do tanque, a grande contribuição do aumento de viscosidade do fluido é na estabilidade da resposta. O Gráfico IV-29 mostra uma comparação do uso do óleo e da água para uma mesma relação de massa μ.

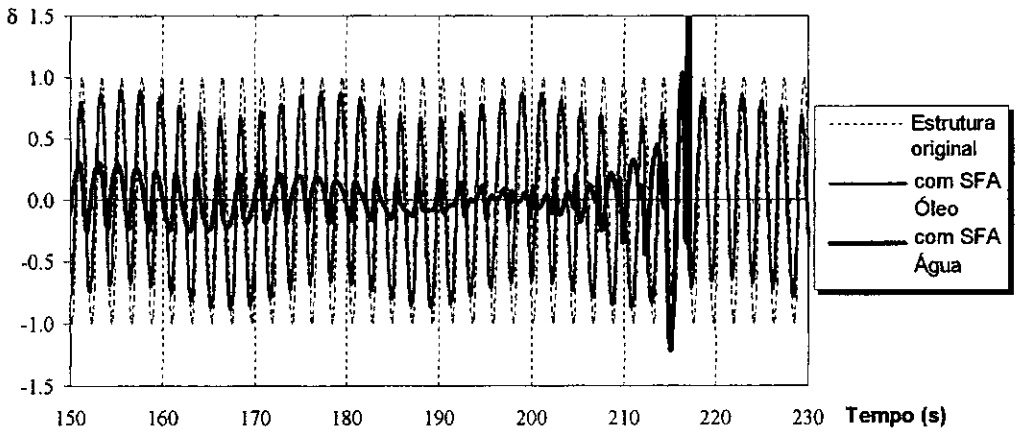

GRÁFICO IV-29 Razões de deslocamento, comparação entre água e óleo, μ=1,08%; b/L=0,284; ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,9; h/L=0,136; $2h/b$=0,960; A/L=0,161.

CAPÍTULO V

Aplicação Prática do Sistema Fluido Absorsor em Estruturas Esbeltas

Neste capítulo o Sistema Fluido Absorsor foi aplicado a estruturas esbeltas que possuem baixa frequência natural. Normalmente estas estruturas estão sujeitas a carregamentos de período longo, fazendo com que apresentem grandes deslocamentos.

Duas estruturas existentes foram utilizadas: um descarregador de minério de navios em estrutura metálica (Porto de Sepetiba, RJ), e a outra foi um edifício alto em aço e alvenarias (Citycorp Center, NY).

A escolha das estruturas a serem usadas como aplicação foi por motivos distintos. O descarregador de minério é um tipo de estrutura que usualmente apresenta ruptura por fadiga, assim justifica-se a utilização de um sistema absorsor para tentar reduzir os níveis de vibração e consequentemente prolongar sua vida útil. O Citycorp Center é uma estrutura que já possui um sistema absorsor do tipo passivo e foi utilizado para uma comparação entre os resultados obtidos com o sistema existente e com o uso do SFA.

V.1 Aplicação a um Descarregador de Minério

O descarregador usado aqui é um dos quatro existentes no Porto de Sepetiba para fazer a descarga de material a granel dos navios. Sua estrutura é composta, basicamente, por elementos tubulares de seção retangular formados por chapas soldadas e enrijecidas, constituindo uma estrutura aporticada espacial pouco travejada. Essa concepção estrutural com travejamento reduzido parece ter sido decorrente de aspectos e/ou restrições impostas pela operação da caçamba, leveza para movimentação lateral e, também, pela facilidade de ereção e montagem. A Figura V-1 mostra um esquema do descarregador.

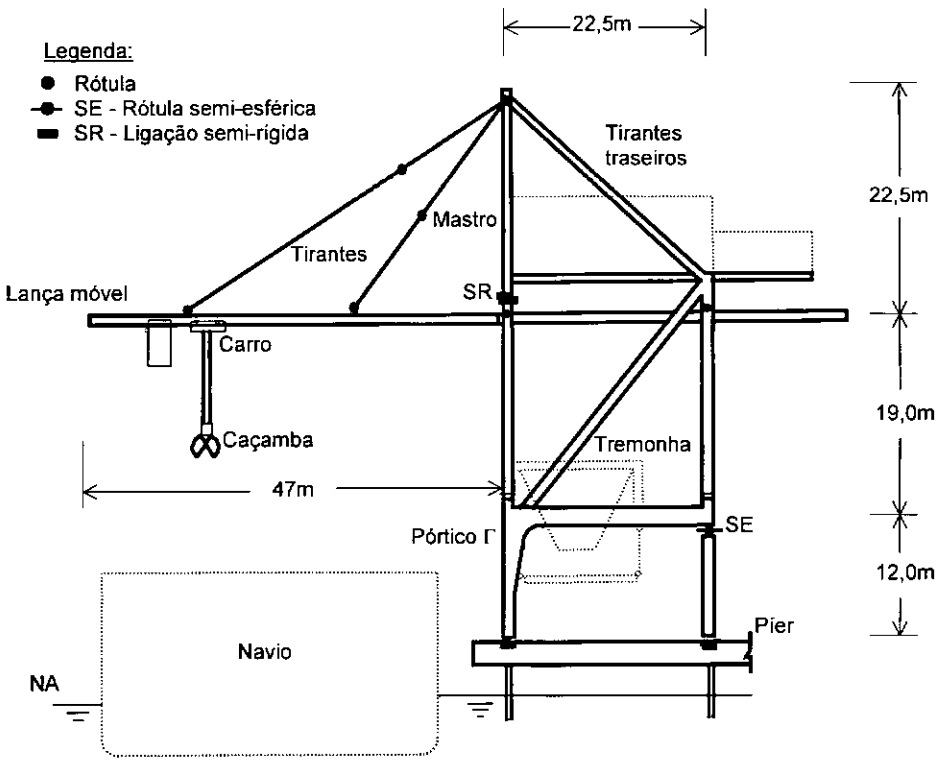

FIGURA V-1 Desenho esquemático do descarregador de minério do Porto de Sepetiba

Os esforços dinâmicos, provocados pela movimentação da caçamba na lança móvel e pelo transporte lateral do equipamento, são de certa forma atenuados pela colocação de rótulas semi-esféricas no topo das colunas do pórtico traseiro. Entretanto, essas ligações mecânicas permitem grandes amplitudes de oscilações longitudinais, transversais e de rotação axial do descarregador.

Através da análise de vibrações livres foram determinadas as frequências naturais de vibração e seus respectivos modos. Dos resultados obtidos de uma análise experimental [15] foi verificado que a carga dinâmica promovida pela operação normal de descarregamento do material excita predominantemente três modos de vibração: (i) longitudinal global; (ii) o de flexão da lança móvel; e (iii) o de flexão global da estrutura na direção longitudinal, o qual provoca movimento vertical na lança móvel.

Como o SFA se aplica exclusivamente à redução de deslocamentos horizontais foi utilizado, nesta aplicação, somente o modo de vibração longitudinal global, que tem frequência angular, frequência cíclica e período iguais a

$$\omega_s = 2{,}89\text{rad/s} \qquad f_s = 0{,}46\text{Hz} \qquad T_s = 2{,}18\text{s}.$$

A taxa de amortecimento, para este modo, obtida através da técnica do decaimento logarítmico aplicada às respostas experimentais foi de

$$\xi_s = 5{,}5\%.$$

A massa total da estrutura é de aproximadamente 700t, e a massa modal para o modo longitudinal global

$$M_{modal} = 557{,}8\text{t}.$$

Além da massa dos componentes estruturais do descarregador, os equipamentos nele instalados foram considerados como massas concentradas aplicadas nos nós da discretização espacial referentes às suas localizações.

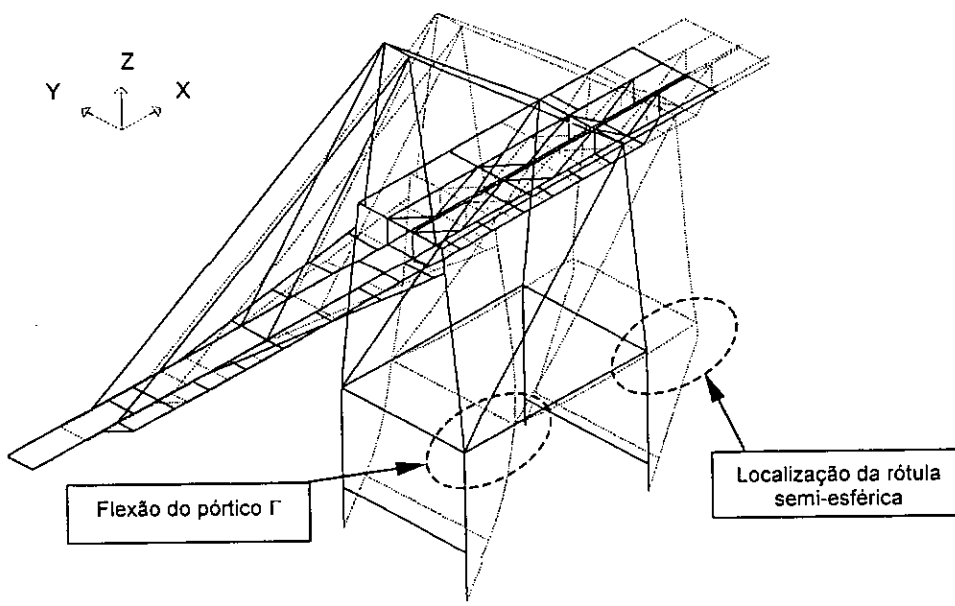

FIGURA V-2 Configuração deformada da estrutura no modo de vibração longitudinal global

A Figura V-2 mostra o modo de vibração longitudinal global do descarregador. É importante notar a influência das rótulas semi-esféricas (identificadas na Figura V-1) no comportamento da estrutura. Onde elas estão localizadas não há momentos fletores, provocando maior flexão nos pórticos laterais em forma de L invertido (Γ) que são responsáveis pela resistência da estrutura em oscilação no modo considerado.

O descarregador foi discretizado em elementos finitos com 357 nós, gerando 428 elementos e possuindo 2122 graus de liberdade.

A estrutura foi excitada por duas situações de carga, cada uma atuando isoladamente. Uma foi a própria carga da caçamba quando em procedimento normal de operação de descarregamento de um navio e a outra foi uma carga senoidal referente à pendulação da caçamba, decorrida após a frenagem do carro.

V.1.1 Descrição da Carga Dinâmica da Operação Normal de Descarregamento

A carga dinâmica do procedimento normal de descarregamento é causada pelo movimento combinado da caçamba e do carro, contido em um ciclo básico de 16 segundos. Envolve o içamento da caçamba cheia que está apoiada sobre o material (6s), o transporte da caçamba cheia até a tremonha e a descarga dentro da tremonha (10s). Este ciclo, somado ao retorno da caçamba a seu ponto de partida, se repete indefinidamente até ser completada a descarga total do navio.

Foi considerada esta carga atuando em dois pontos da estrutura: os pontos A e B ilustrados na Figura V-3. Um situado na lança móvel, à 15m de sua extremidade, que é a posição usual de descida da caçamba ao porão do navio, e o outro próximo à articulação da lança móvel com a lança fixa. São estes os pontos extremos da distância de aproximadamente 30m percorrida pelo conjunto carro/caçamba.

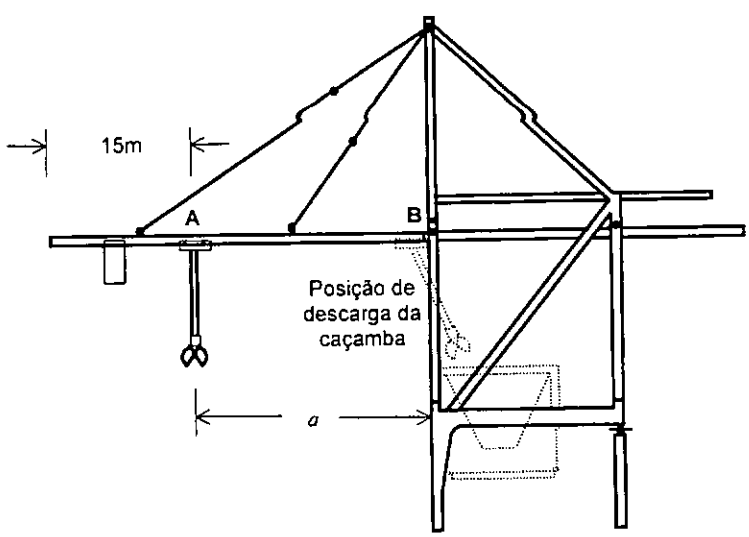

FIGURA V-3 Identificação dos pontos de atuação da carga

A carga dinâmica da operação de descarregamento é descrita pelas equações seguintes

$$T = Mg\frac{t}{6} \qquad \text{; para } 0 < t \leq 6\text{s} \qquad \text{(V-1)}$$

$$T = M\left(\ddot{x}\,\text{sen}\,\theta + l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right) \qquad \text{; para } 6 < t \leq 16\text{s} \qquad \text{(V-2)}$$

onde: T é a força de tração nos cabos da caçamba;

M é a massa da caçamba cheia;

g é a aceleração da gravidade;

t é o tempo decorrido durante a operação;

$\ddot{x}$ é a aceleração do carro de transporte da caçamba;

θ é o ângulo de pendulação da caçamba, medido a partir da vertical;

l é o comprimento dos cabos de suspensão da caçamba;

As componentes da força de tração nos cabos da caçamba no plano x-z são

$$T_x = T\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(V-3)}$$

$$T_z = T\cos\theta \qquad \text{(V-4)}$$

E aplicando nos pontos A e B ficam

$$T_{xA} = T_x\frac{a-x}{a} \qquad T_{zA} = T_z\frac{a-x}{a} \qquad \text{(V-5)}$$

$$T_{xB} = T_x\frac{x}{a} \qquad T_{zB} = T_z\frac{x}{a} \qquad \text{(V-6)}$$

onde: a é o comprimento percorrido pelo carro ($a \cong 30$m, ver Figura V-3); e

x é a posição do carro ao longo de a, iniciando no ponto A.

O movimento do carro de transporte da caçamba ilustrado na Figura V-4 é definido pelo seu deslocamento, velocidade e aceleração:

$$x = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{(t-6)}{\Delta t}\right) \qquad ;\ \text{para } 6 < t \le 16\text{s} \qquad \text{(V-7)}$$

$$\dot{x} = \dot{x}_{máx}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{(t-6)}{\Delta t}\right) \qquad ;\ \dot{x}_{máx} = a\frac{\pi}{2\Delta t} \cong 9{,}4\text{m/s} \qquad \text{(V-8)}$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_{máx}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{(t-6)}{\Delta t}\right) \qquad ;\ \ddot{x}_{máx} = -a\left(\frac{\pi}{2\Delta t}\right)^2 \cong 3{,}0\text{m/s}^2 \qquad \text{(V-9)}$$

onde Δt é o intervalo de tempo levado pelo carro para completar o percurso ($\Delta t \cong 10$s).

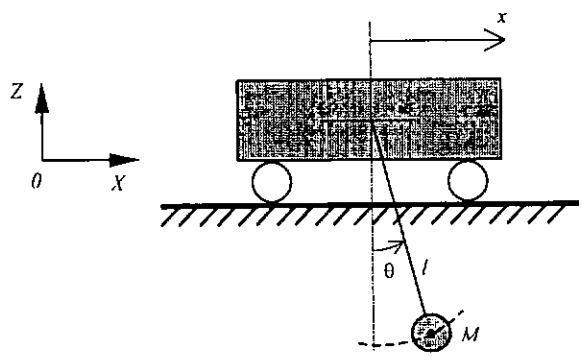

FIGURA V-4 Esquema do movimento da caçamba

O movimento de pendulação da caçamba, mostrado esquematicamente na Figura V-4 é definido pelo ângulo θ:

$$\theta = \bar{\theta}\,\mathrm{sen}(\omega_c t) \qquad \text{(V-10)}$$

onde: $\bar{\theta}$ é a amplitude angular máxima; e

ω_c é a sua frequência natural ($\omega_c = g/l$).

A caçamba vazia pesa 20 toneladas e tem capacidade de carregar uma quantidade de material igual ao seu peso, ficando com 40t quando cheia.

V.1.2 Descrição da Carga Dinâmica de Pendulação da Caçamba

Durante as verificações experimentais do descarregador foi observado que além de apresentar vibrações quando em operação normal de descarregamento ele também oscilava, com deslocamentos consideráveis, quando havia uma frenagem brusca do carro e a caçamba ficava pendulando.

Observa-se que (dependendo do comprimento do cabo de suspensão da caçamba) este movimento senoidal gera uma carga com frequência próxima à da estrutura e com magnitude semelhante à carga da operação de descarregamento, provocando uma amplificação da amplitude de resposta dinâmica da estrutura.

Neste caso, a carga é representada matematicamente por

$$F_c = \overline{F}\,\mathrm{sen}(\omega_e t) \qquad \text{(V-11)}$$

onde: $\overline{F}$ é a magnitude da carga; e

ω_e é a frequência de excitação.

A magnitude $\overline{F}$ foi obtida da carga de operação de descarregamento e a frequência ω_e foi a mesma da estrutura. Sendo a carga senoidal aplicada nos mesmos dois pontos A e B (Figura V-3), temos para cada ponto de aplicação

$$F_A = \overline{F}_A\,\mathrm{sen}(\omega_e t) \qquad \text{(V-12)}$$

$$F_B = \overline{F}_B\,\mathrm{sen}(\omega_e t) \qquad \text{(V-13)}$$

onde: $\overline{F}_A = 91$ kN;

$\overline{F}_B = 82$ kN; e

$\omega_e = 2{,}89$rad/s .

V.1.3 Dimensionamento do SFA e Resultados Obtidos

No SFA acoplado ao descarregador foram utilizados tanto a água quanto o óleo como líquido do Sistema Fluido Absorsor. A relação *b/L* foi de 0,284 e a frequência foi calibrada para três valores:

$$\omega_{SFA}/\omega_e = 0{,}9; \qquad \omega_{SFA}/\omega_e = 1{,}0; \qquad \omega_{SFA}/\omega_s = 0{,}9.$$

Dentro de cada dimensionamento procedeu-se o acréscimo de massa do SFA usando o parâmetro μ, para comparação do comportamento da estrutura original e da estrutura acoplada ao sistema absorsor

$$\mu = \frac{M_{SFA}}{M_s} \tag{V-14}$$

onde: M_{SFA} é a massa do sistema absorsor (massa de fluido); e

M_s é a massa modal da estrutura.

O SFA foi posicionado dentro da seção caixão das barras horizontais dos pórticos laterais em forma de L invertido, à altura da cota 12m. A força de interação com a estrutura foi aplicada no ponto C, localizado na curva do pórtico como mostra a Figura V-5.

Todas as respostas obtidas foram para o deslocamento horizontal do ponto B da aplicação da carga, localizado na lança móvel próximo à articulação com a lança fixa, também mostrado na Figura V-5.

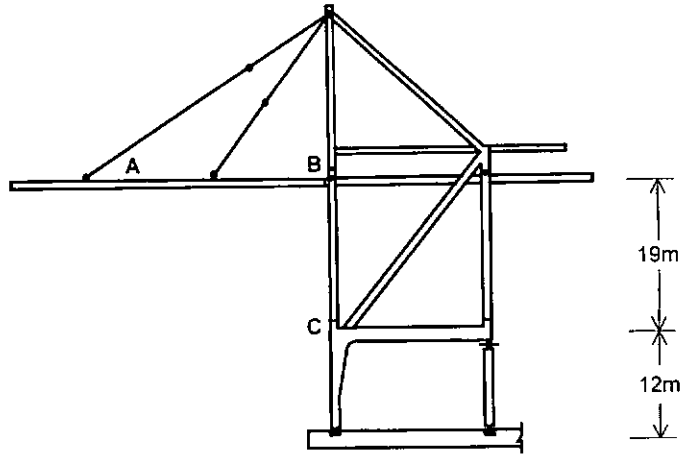

FIGURA V-5 Identificação dos pontos de atuação da carga e da força de interação do SFA com a estrutura

O deslocamento da estrutura submetida à carga de operação de descarregamento em apenas um ciclo foi obtido e a resposta dada pelo programa em Fortran, aqui desenvolvido, foi comparada com a do SAP2000. No Gráfico V-1 foram traçadas as duas curvas, que, como pode-se notar, ficaram sobrepostas.

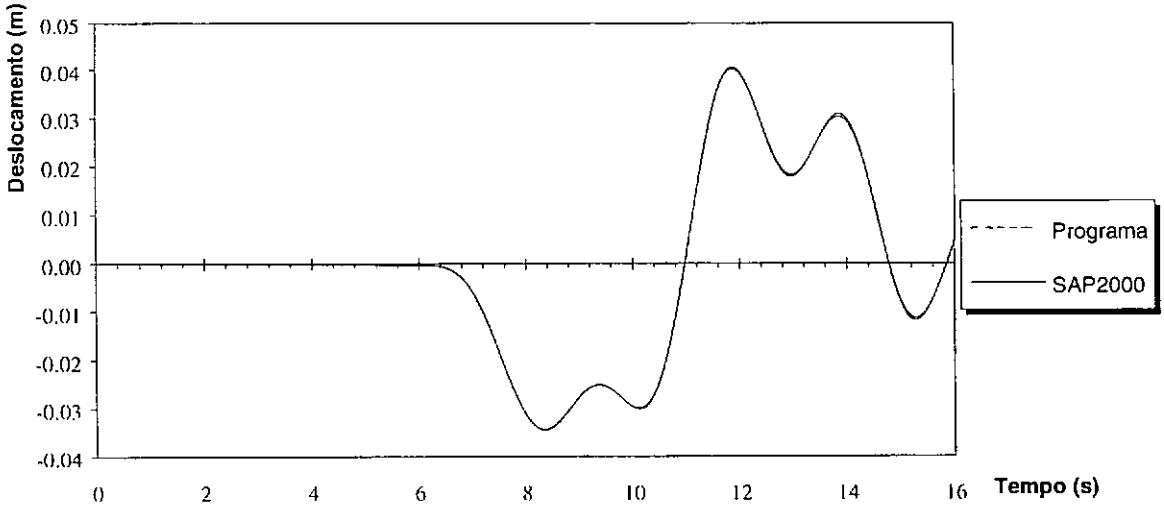

GRÁFICO V-1 Resposta da estrutura para um ciclo da carga da operação de descarregamento.

O Gráfico V-2 mostra os resultados dos deslocamentos da estrutura original e acoplado o SFA, submetida à carga da operação de descarregamento aplicada por vários ciclos, para $\omega_{SFA}/\omega_e = 0{,}9$ e com os seguintes parâmetros de dimensionamento:

$$\frac{h}{L} = 0{,}024; \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}085; \qquad \frac{A}{L} = 0{,}0055; \qquad \mu = 1{,}15\%; \qquad \text{água.}$$

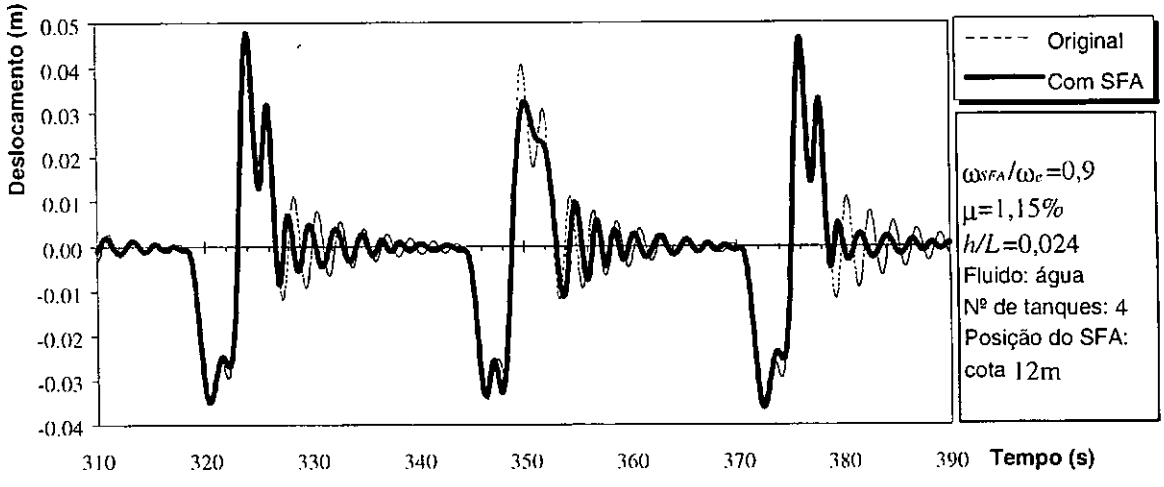

GRÁFICO V-2 Deslocamento horizontal da estrutura original e com SFA para carga da operação de descarregamento.

Observa-se que entre os ciclos da operação de descarregamento a estrutura fica sob a ação de vibrações livres.

Como se pode observar no Gráfico V-2 o SFA não se mostrou muito eficiente, pois embora tenha reduzido os deslocamentos em alguns ciclos alternados em outros ciclos chegou a promover até mesmo pequenas amplificações da resposta. Já nos intervalos em que a estrutura ficou em vibrações livres houve uma tendência de redução da resposta.

Ao acrescentar massa ao SFA verificou-se comportamento semelhante, como mostra o Gráfico V-3 para $\mu = 2{,}01\%$. Até que para $\mu = 2{,}58\%$ apresentou divergência numérica do resultado.

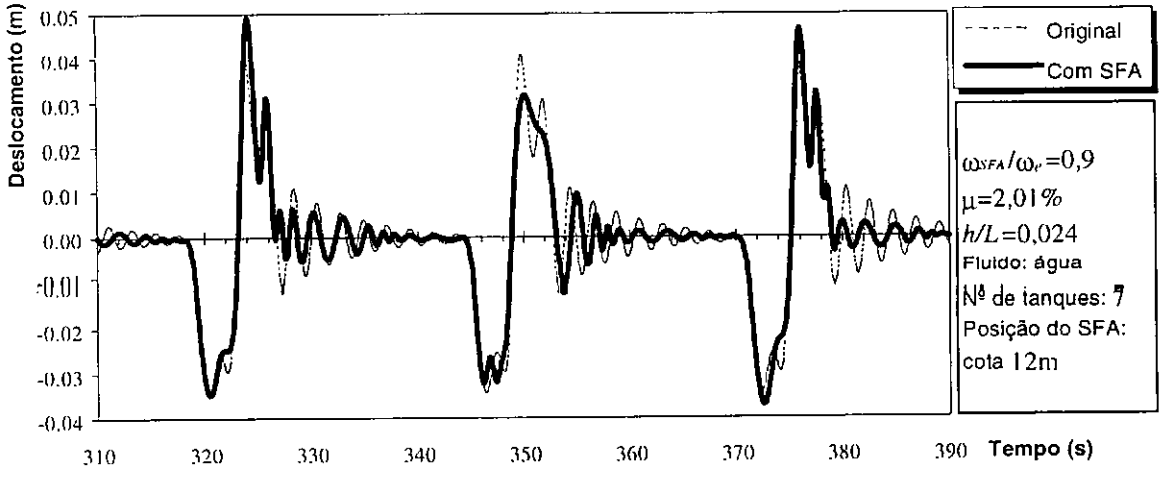

GRÁFICO V-3 Deslocamento horizontal da estrutura original e com SFA para carga da operação de descarregamento.

Resultado semelhante foi encontrado para $\omega_{SFA}/\omega_e = 1{,}0$. Isso ocorre pelo fato da excitação dinâmica ser de frequência muito baixa em relação à estrutura ($\omega_e/\omega_s = 0{,}235$) fazendo com que ela tenha relativamente pequenos deslocamentos oscilando num período longo, que não conseguem fazer o fluido do SFA entrar em movimento suficiente para gerar a força de controle desejada, apesar do SFA estar calibrado na frequência de excitação.

Fazendo a calibração do sistema de absorção com frequência igual a 90% da frequência da estrutura ($\omega_{SFA}/\omega_s = 0{,}9$) as relações de dimensionamento foram

$$\frac{h}{L} = 0{,}104; \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}734; \qquad \frac{A}{L} = 0{,}206; \qquad \mu = 1{,}01\%.$$

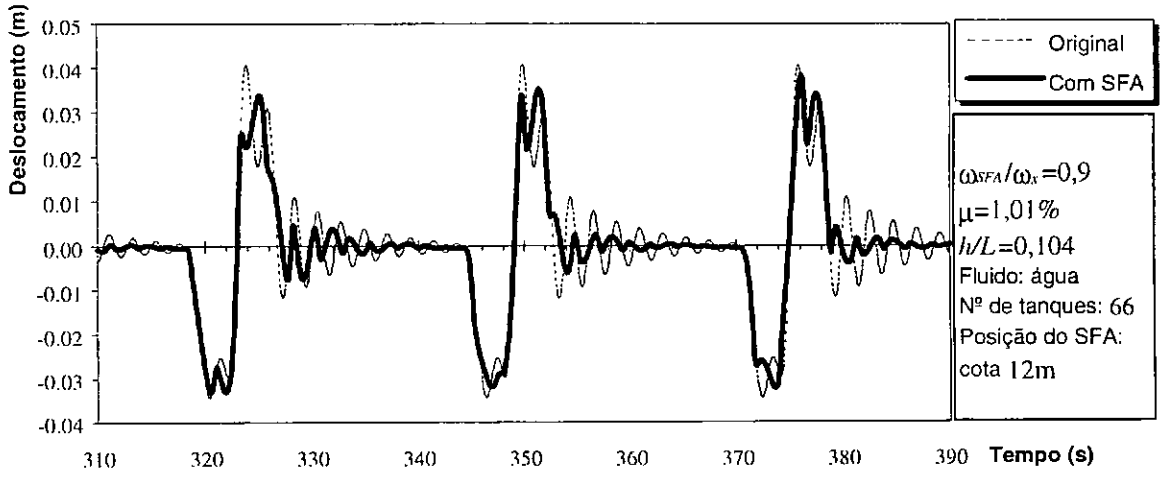

GRÁFICO V-4 Deslocamento horizontal da estrutura original e com SFA para carga da operação de descarregamento.

A resposta para a carga da operação de descarregamento foi traçada no Gráfico V-4

Nesta situação o SFA se mostrou um pouco mais eficiente, pois reduziu os deslocamentos nos intervalos em vibração livre e os picos devidos ao transporte da caçamba apresentaram uma pequena redução. Em se tratando de uma estrutura com problema de fadiga, pequenas reduções na amplitude da resposta podem levar a um acréscimo razoável de vida útil da mesma.

Fica claro nesta simulação que para frequências de excitação muito baixas em relação à frequência natural da estrutura o SFA não se mostra muito eficiente para atenuar as oscilações.

Neste caso são necessários 66 tanques de comprimento L = 1,440m e largura b = 0,409m, que seriam colocados dentro da seção caixão das barras horizontais dos pórticos laterais e do pórtico frontal, que têm seção quadrada com 2,0m de altura e de largura.

Para esta mesma carga e dimensionamento foi testada a eficiência do sistema absorsor com o uso de óleo no lugar da água como o fluido. O Gráfico V-5 mostra uma comparação das respostas com a utilização de água e de óleo para o mesmo dimensionamento, relação de frequências e de massa.

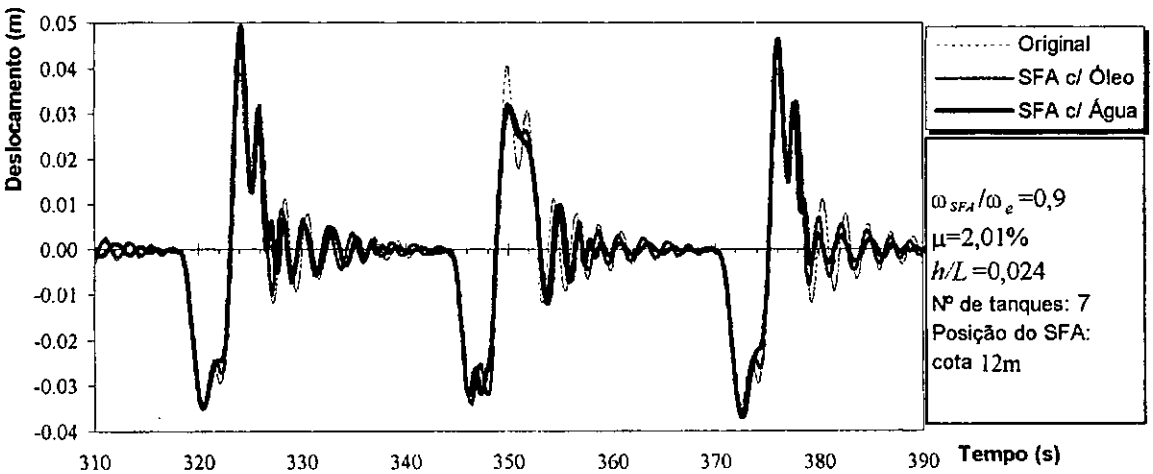

GRÁFICO V-5 Deslocamento horizontal da estrutura original e com SFA para a carga da operação de descarregamento, comparação do uso de Água e Óleo no SFA.

Observa-se comportamento semelhante no uso da água e do óleo, apresentando redução em alguns ciclos alternados e na vibração livre. O SFA com óleo se mostrou um pouco menos eficiente do que quando utilizada a água, assim como já visto no Capítulo 4.

Para a calibração do SFA com a frequência da estrutura, o uso do óleo também aponta para uma menor eficiência que a água, como mostra o Gráfico V-6

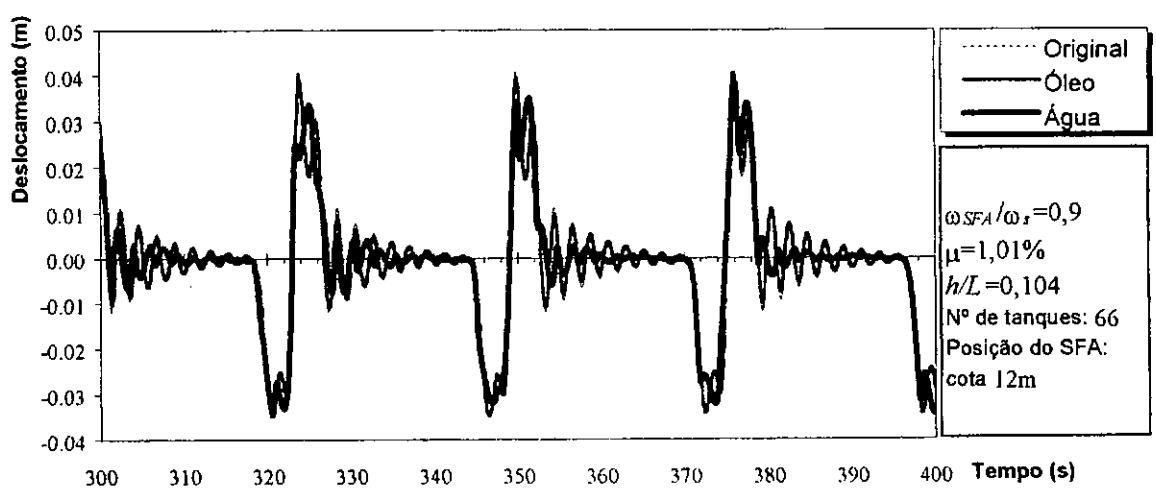

GRÁFICO V-6 Deslocamento horizontal da estrutura original e com SFA para a carga da operação de descarregamento, comparação do uso de Água e Óleo no SFA.

Para a outra situação de carregamento, carga senoidal simulando a carga dinâmica de pendulação da caçamba, a estrutura apresenta maiores deslocamentos, pois a frequência de excitação é igual à sua frequência natural. A utilização do Sistema Fluido Absorsor apresenta bons resultados na atenuação das vibrações, como pode-se ver no Gráfico V-7.

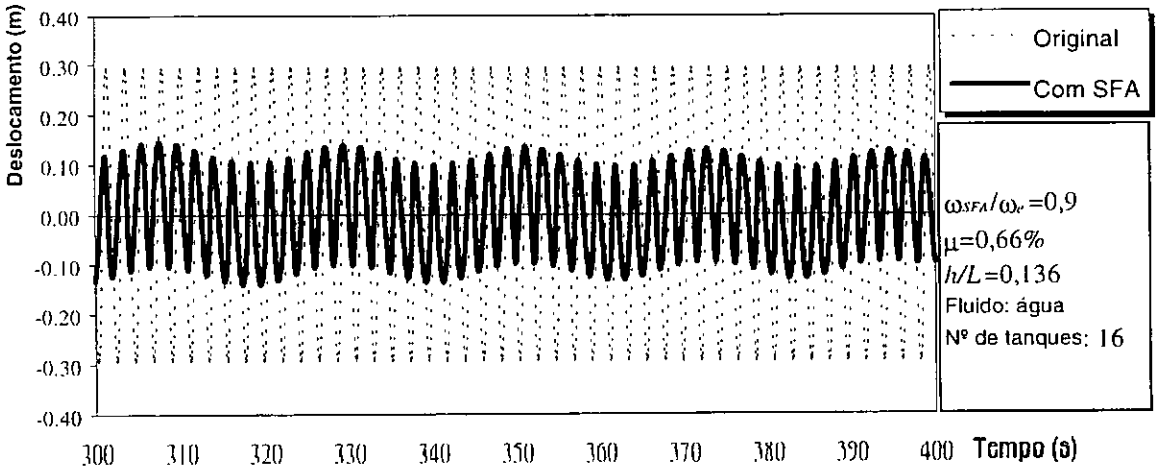

GRÁFICO V-7 Deslocamento horizontal da estrutura original e com SFA, carga de pendulação da caçamba.

A relação de controle dinâmico δ obtida para a relação de massa μ = 0,66% foi de 0,409, que representa uma redução de 59% das amplitudes de deslocamento da estrutura.

Ainda para a carga de pendulação da caçamba foi examinada a eficiência do SFA quando posicionado numa cota mais acima na estrutura. Sendo colocado na extremidade da lança fixa junto à conexão com a lança móvel, considerando a força de controle atuando no mesmo ponto B da aplicação da carga (ver Figura V-3), à altura da cota 31m. O sistema absorsor se mostrou 25% mais eficiente do que na posição anterior, como se vê no Gráfico V-8 a comparação feita para μ = 0,66%

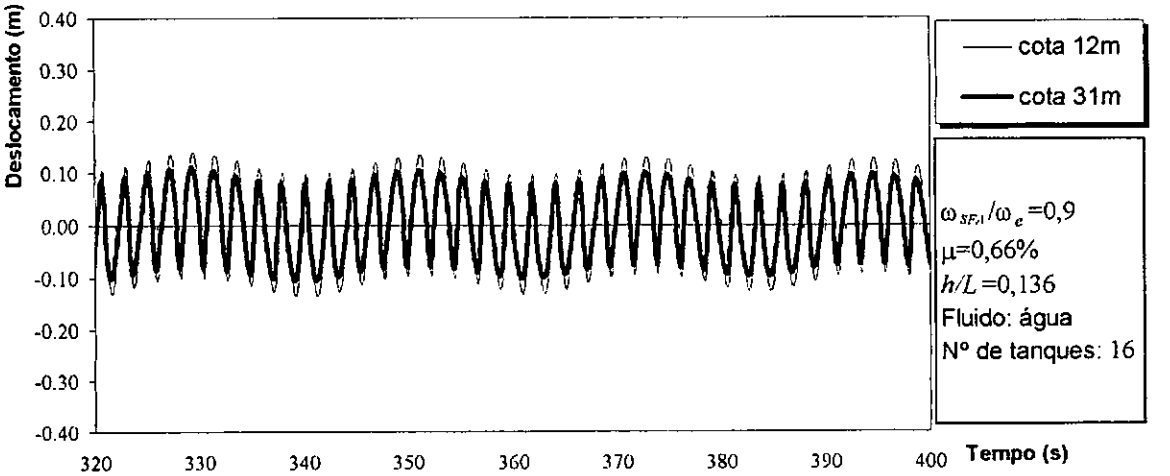

GRÁFICO V-8 Comparação do deslocamento horizontal controlado da estrutura para posicionamento do SFA em diferentes cotas, carga de pendulação da caçamba.

Apesar de apresentar uma melhor redução quando posicionado na cota de 31m sua utilização é restrita pelo espaço reduzido para alojar os tanques absorsores, pois a seção caixão da lança fixa é menor que a do pórtico Γ.

V.2 Aplicação a um edifício alto, o Citycorp Center

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos na redução de vibrações com dois tipos diferentes de sistemas absorsores foi utilizado o edifício Citycorp Center situado em Nova York, cujos dados foram obtidos na referência [1].

O Citycorp Center é um "arranha céu" com 274 metros de altura. Por ser uma estrutura esbelta tem baixa frequência natural e por estar, normalmente, submetida a um carregamento devido à ação do vento (de baixa frequência) apresenta amplificação dos seus deslocamentos.

Para atenuar as oscilações provocadas pela carga dinâmica de vento foi projetado e executado em seu topo um sistema de controle passivo que atua nas duas direções principais dos deslocamentos horizontais.

A Figura V-6 ilustra esquematicamente a estrutura do Citycorp Center com seu sistema absorsor e carregamento do vento.

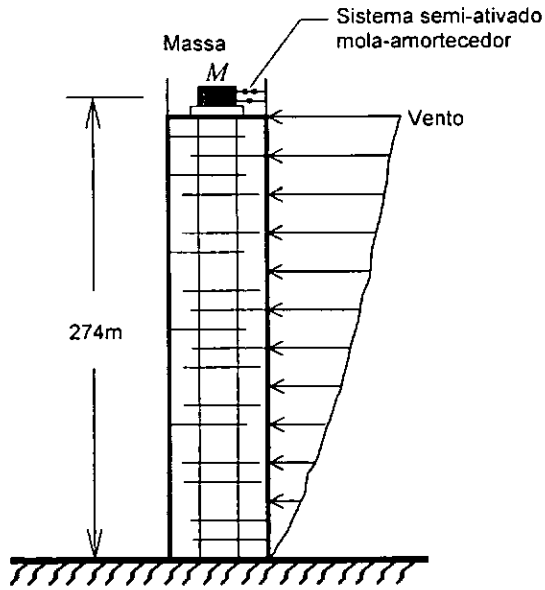

FIGURA V-6 Esquema do edifício Citycorp Center

O absorsor existente no Citycorp é do tipo passivo composto de massa e de um sistema mecânico mola-amortecedor semi-ativado.

A estrutura é considerada como um grau de liberdade (1GL) representando o deslocamento no topo do edifício, pois o primeiro modo de flexão é dominante sobre todos os outros. As características dinâmicas da estrutura e do sistema absorsor estão resumidas na Tabela V-1.

TABELA V-1 Características dinâmicas da estrutura e do absorsor

	Estrutura	**Sistema absorsor**
Massa	$1{,}8\text{x}10^4$ t	$3{,}6\text{x}10^2$ t (2,0% da massa da estrutura)
Frequência natural	1,0 rad/s	0,91 rad/s
Rigidez	$1{,}82\text{x}10^2$ kN/cm	3,03 kN/cm
Taxa de amortecimento	1,0%	3,6%

O carregamento dinâmico da ação do vento na estrutura foi representado matematicamente na Equação V-15

$$F(t) = P(3\operatorname{sen}\omega_e t + 7\operatorname{sen}2\omega_e t + 5\operatorname{sen}3\omega_e t + 4\operatorname{sen}4\omega_e t) \qquad \text{(V-15)}$$

onde: P é a magnitude da carga ($P \cong 40{,}0$ kN); e

ω_e é a frequência de excitação, de valor igual à frequência da estrutura.

Os resultado obtido em deslocamentos da estrutura original e controlada com a atuação do absorsor passivo existente é apresentado no Gráfico V-9.

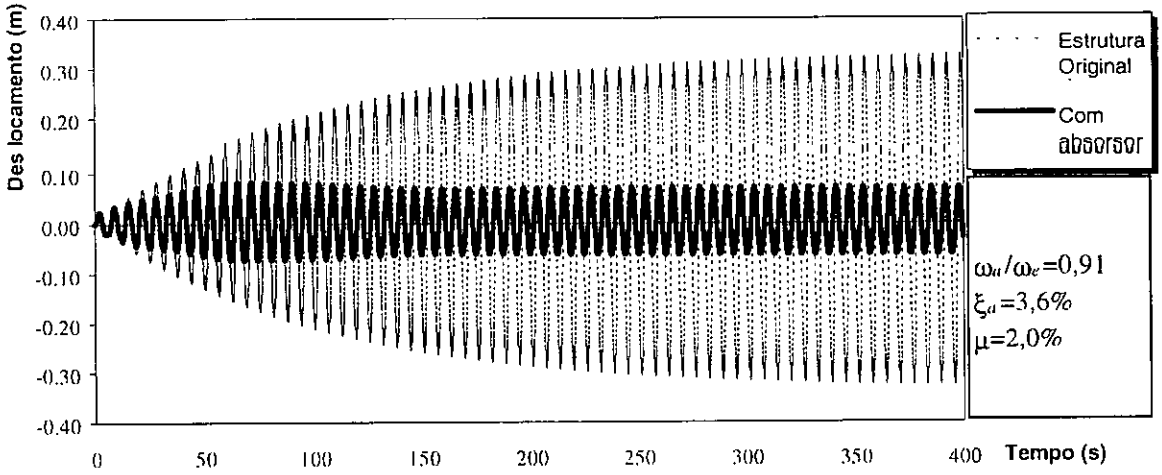

GRÁFICO V-9 Citycorp Center - Deslocamento horizontal da estrutura original e com o absorsor massa-mola-amortecedor existente.

V.2.1 Dimensionamento do SFA e Resultados Obtidos

O SFA para ser acoplado à estrutura foi dimensionado somente utilizando óleo como fluido, as tentativas de uso de água apresentaram divergência. Sua frequência foi calibrada igual a 91% da frequência natural da estrutura, assim como a do sistema passivo existente. A relação b/L utilizada foi de 0,284 e as relações de dimensionamento, com h = 0,50m, foram:

$$\frac{h}{L} = 0{,}066 \qquad \frac{2h}{b} = 0{,}464 \qquad \frac{A}{L} = 0{,}044\,.$$

A relação de massa μ, entre a massa do SFA e a massa modal da estrutura, foi variada através do número de tanques utilizados.

O Gráfico V-10 mostra a variação da relação de controle dinâmico δ versus μ obtida com a resposta de deslocamentos controlados utilizando o SFA.

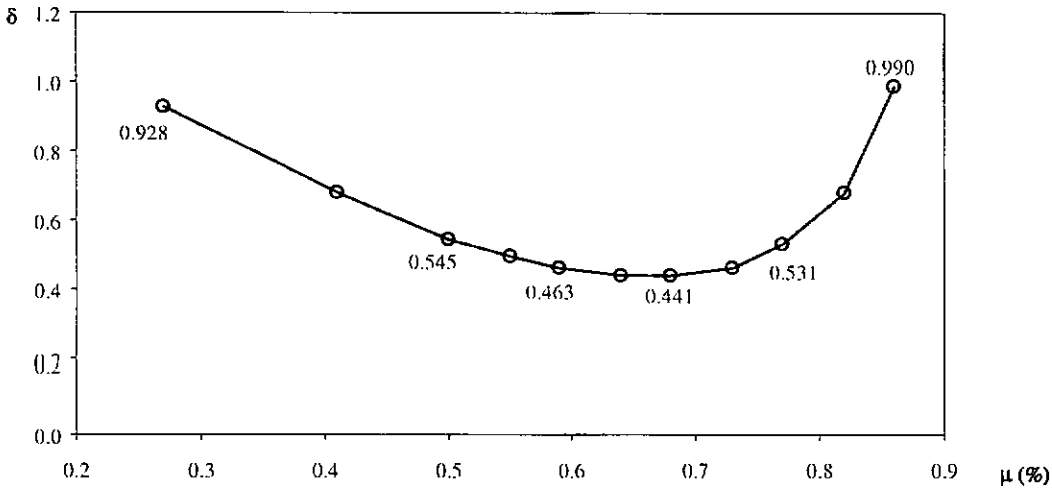

GRÁFICO V-10 Citycorp Center - Relação de controle dinâmico devida à variação da relação de massa;
ω_e/ω_s=1,0; ω_{SFA}/ω_e=0,91; h/L=0,066.

Observa-se que à medida que μ cresce, δ decresce até μ = 0,64%. Se mantém estável em μ = 0,68%, inicia um crescimento para μ maiores até acontecer divergência numérica da simulação para μ = 1,5%.

Com 15 tanques chega-se a μ = 0,68%, com o qual foram obtidos os melhores resultados de redução dos deslocamentos da estrutura, traçados no Gráfico V-11.

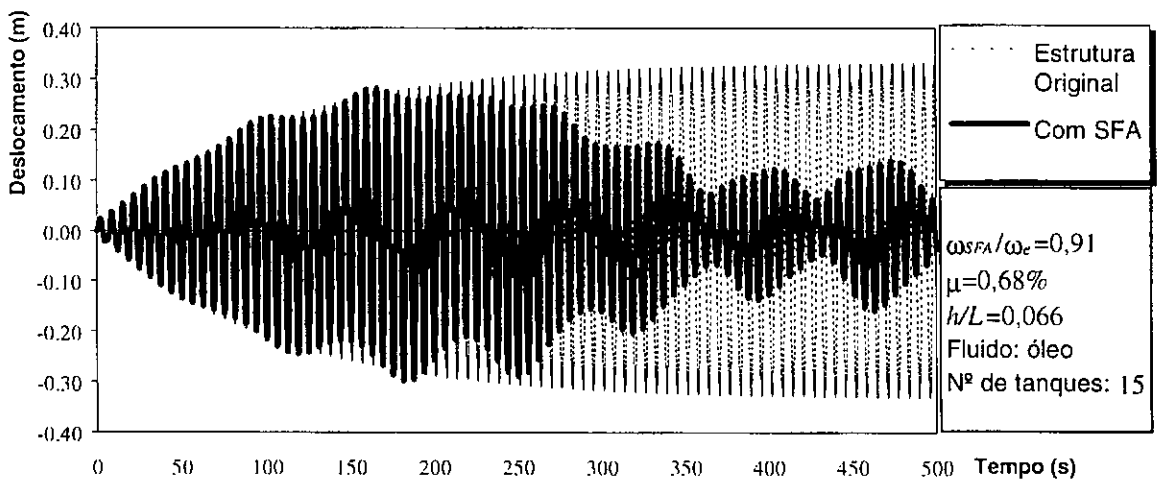

GRÁFICO V-11 Citycorp Center - Deslocamento horizontal da estrutura original e com o SFA.

Através da observação dos resultados traçados nos Gráficos V-9 e V-11 nota-se que o SFA se mostrou muito eficiente, mas o absorsor existente é um pouco mais.

Para uma melhor comparação o Gráfico V-12 põe lado a lado as respostas traçadas nos Gráficos V-9 e V-11. Nota-se, claramente, a diferença no comportamento dos deslocamentos controlados. Enquanto que a utilização do massa-mola-amortecedor apresenta uma resposta uniforme e bem comportada que entra, rapidamente, em regime permanente, o SFA apresenta oscilações de amplitudes ao longo do tempo mesmo em sua resposta permanente.

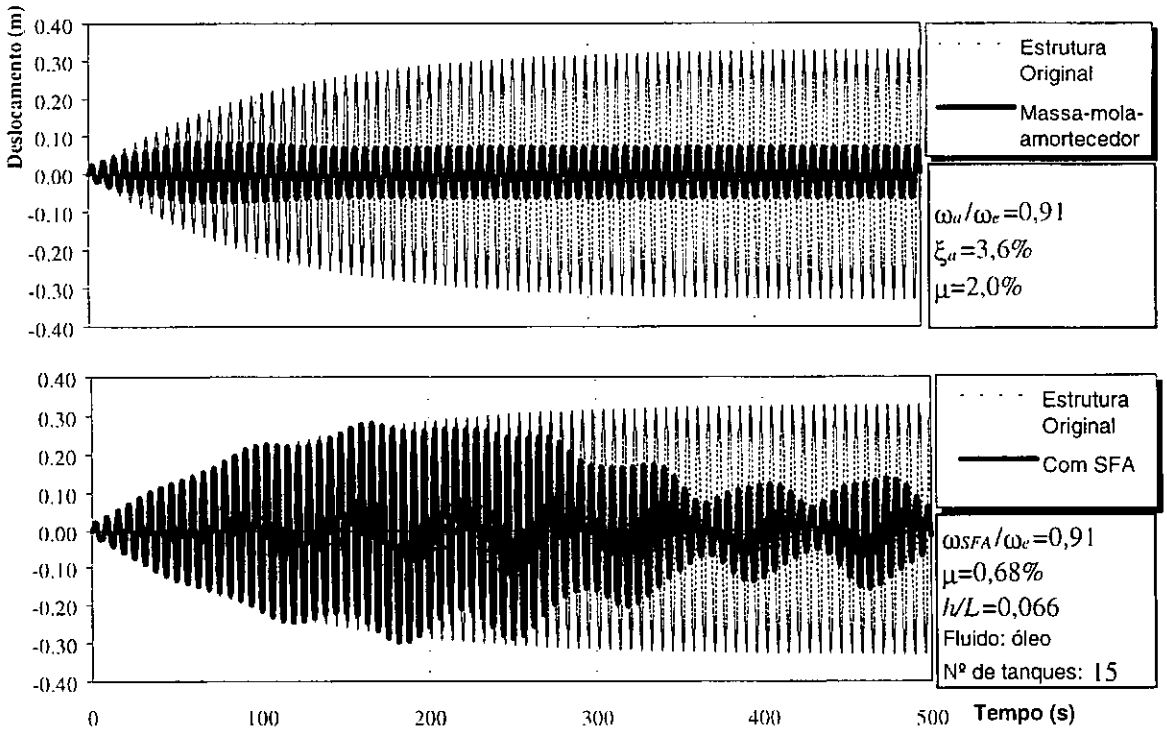

GRÁFICO V-12 Citycorp Center - Comparação dos dois sistemas de absorção

O que se mostra mais peculiar na resposta do SFA é sua demora para entrar em operação. Observando o Gráfico V-12 vê-se que decorrido 100s da análise a estrutura comporta-se como se não houvesse absorsor algum acoplado. Já no caso do massa-mola-amortecedor a resposta é quase imediata e aos 100s praticamente já atingiu a resposta permanente com seu rendimento máximo na redução das vibrações. Este retardo no início da atuação do SFA pode ser explicado pelo fato do efeito da redução das vibrações vir do movimento de *sloshing* do fluido, que leva um tempo até ser atingido a partir do fluido em repouso. É como se fosse necessário ao fluido atingir uma forma específica para estar em movimento de *sloshing* e aí promover a atenuação das oscilações. No caso do massa-mola-amortecedor isso não acontece pois basta o bloco de massa se movimentar que já provoca força de inércia para reduzir as vibrações.

O aumento da relação de controle δ para o acréscimo de massa do absorsor ocorre pois a resposta começa a apresentar uma tendência de crescimento (para μ = 0,73% e 0,77%), e a partir de 0,82% apresenta batimentos, fazendo crescer a relação de controle dinâmico. O Gráfico V-13 mostra uma dessas respostas, para μ = 1,09%.

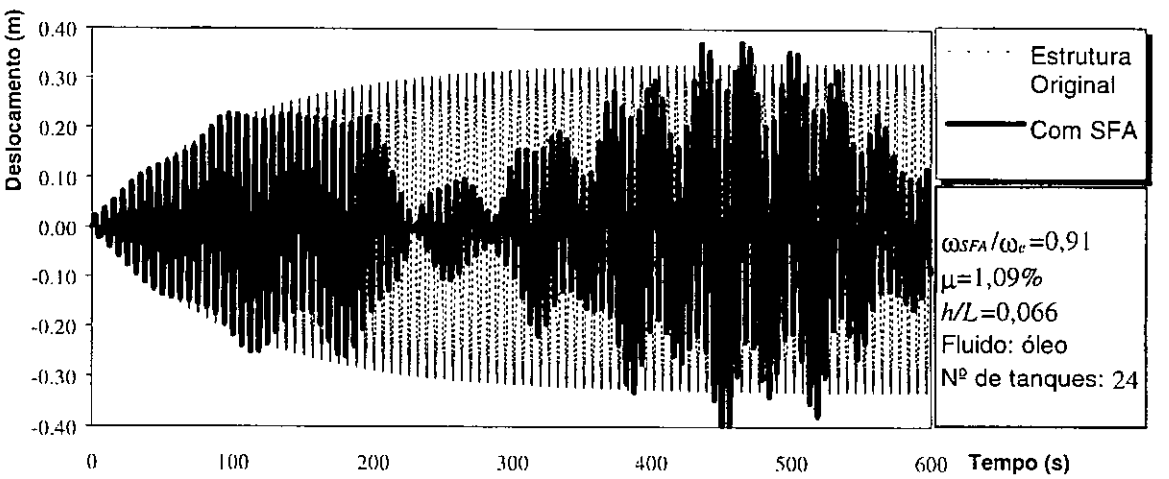

GRÁFICO V-13 Citycorp Center - Deslocamento horizontal da estrutura original e com o SFA.

Comparando o resultado obtido com o SFA com o do massa-mola-amortecedor passivo conclui-se que o Sistema Fluido Absorsor, embora seja muito eficiente chegando a reduzir em 56% as vibrações, não atinge a mesma redução de 79% promovida pelo massa-mola-amortecedor. Contudo, o SFA atinge uma redução um pouco melhor com a mesma relação de massa, pois com μ = 0,64% consegue uma redução de 56%, enquanto o massa-mola-amortecedor atinge 51%. O Gráfico V-14 mostra as duas respostas, em estado permanente, traçadas juntas ao longo do tempo.

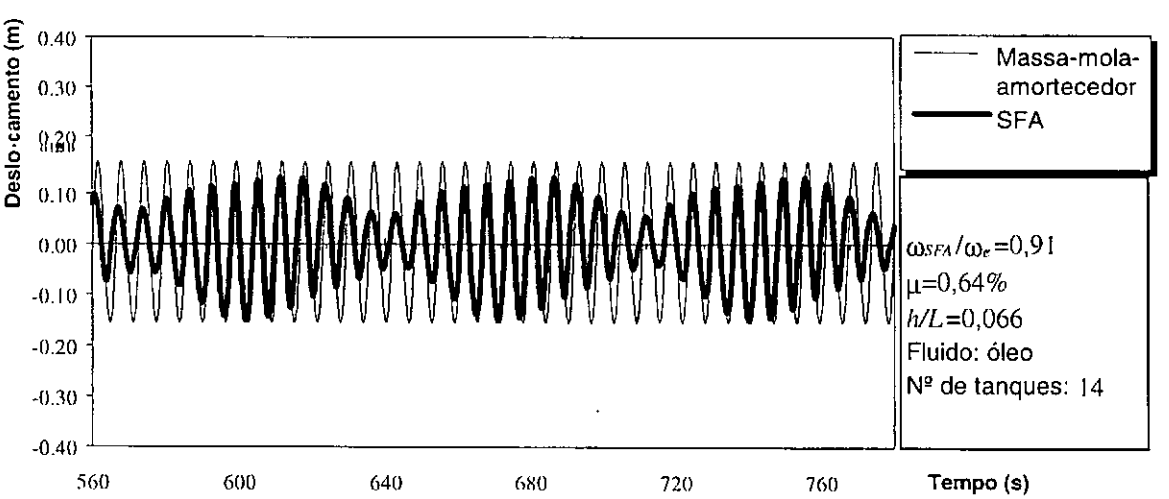

GRÁFICO V-14 Citycorp Center - Comparação dos deslocamentos horizontais controlados com os dois tipos de absorsores.

O SFA apresenta uma eficiência ligeiramente melhor, embora sua resposta apresente batimentos e não se comporte tão regular desde o início, como a do massa-mola-amortecedor.

Outra grande vantagem do SFA frente ao sistema existente é o seu custo e sua manutenção. O sistema existente no Citycorp Center é constituído de uma massa de concreto apoiada sobre uma camada de óleo, para deslizar com menos atrito, conectada a um dispositivo hidráulico semi-ativado de molas e amortecedores. Por envolver sistemas mecânicos necessita de constante manutenção. O Sistema Fluido Absorsor, caso fosse utilizado, seria composto somente dos tanques, devidamente dimensionados, necessários para atingir sua relação de massa ótima. E a única manutenção requerida é que o fluido, no caso o óleo, não pode baixar seu nível.

CAPÍTULO VI

Conclusões

As principais conclusões extraídas deste trabalho estão resumidas nos itens seguintes.

- A eficiência do Sistema Fluido Absorsor está diretamente ligada à frequência de excitação a qual a estrutura está sujeita. Para frequências próximas à frequência da estrutura o SFA é muito eficiente na atenuação das oscilações horizontais. À medida que a frequência de excitação se distancia da frequência da estrutura o SFA se torna inoperante, mesmo variando sua massa, seu dimensionamento e seu amortecimento.

- O SFA é muito sensível à variação dos parâmetros envolvidos em seu dimensionamento. À medida que a relação μ entre a massa do fluido do SFA e da estrutura cresce, aumenta a eficiência na atenuação das oscilações até um valor limite para esta relação. A partir daí o sistema apresenta amplificação das respostas e divergência numérica.

- Para conseguir adicionar mais massa ao SFA sem que haja divergência do resultado pode-se alterar seu amortecimento através da redução da largura do tanque, diminuindo a relação de dimensionamento *b/L*.

- Outra maneira de aumentar o amortecimento é utilizando um fluido de maior viscosidade cinemática no SFA. De início os estudos foram feitos utilizando água, depois mudou-se para óleo (mais leve e mais viscoso) e foi observado uma perda de eficiência para a mesma relação μ quando comparado com a utilização da água, trazendo entretanto a vantagem de não conduzir à divergência nas respostas controladas.

- Uma característica que se mostrou presente no SFA, quando comparado a um sistema absorsor do tipo massa-mola-amortecedor, foi sua demora para entrar em operação e promover a redução das vibrações. Isso pode ser explicado pela necessidade do fluido, a partir de sua configuração em repouso, atingir uma forma de movimento chamado *sloshing* para promover maiores forças hidráulicas de controle sobre a estrutura.

Para finalizar, alguns tópicos para continuação e melhor estudo do assunto abordado neste trabalho podem ser citados:

- Um estudo mais aprofundado na teoria que dá origem às equações que governam o problema do movimento do fluido confinado e em baixa profundidade, e as condições de contorno associadas, a fim de dominar os processos de linearização da formulação. Além de verificar a influência da parcela de massa fluida deslocada horizontalmente na força de controle do Sistema Fluido Absorsor.

- Proceder a verificação experimental do movimento do fluido no tanque e a força gerada por ele.

- Estender a análise para um modelo tridimensional da estrutura e do sistema absorsor utilizando novos desenvolvimentos e modelos 3D do MEF para a teoria de águas rasas [17].

- Verificar a influência da forma geométrica do tanque. Utilizar, por exemplo, um recipiente cilíndrico de maneira que possibilite a ação do Sistema Fluido Absorsor em qualquer direção horizontal, permitindo a sua aplicação a sistemas 3D com propriedade de axissimetria, a qual se reduz ao problema bi-dimensional.

- Proceder estudos sobre vários tipos de fluidos a serem utilizados com o objetivo de se obter um amortecimento ótimo para o SFA.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Batista, R. C. – *Redução e Controle de Vibrações em Estruturas*, Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[2] Frahm – *Device for Damping Vibration*, U.S. Patern nº 989, 958, 1911.

[3] Den Hartog, J. P. – *Vibrações nos Sistemas Mecânicos*, Ed. Edgard Blücheer Ltda., São Paulo, 1972.

[4] Batista, R. C.; Pfeil, M. S. – "Active/Passive Control of Vortex-Induced Oscillations of Rio-Niterói Bridge", *Proceedings of The Third European Conference on Structural Dynamics: Eurodyn'96*, Florence, Italy, pp. 561-567, Jun. 1996.

[5] Pinheiro, M. A. S. – *Absorsor Pendular Não-Linear para Redução de Vibrações em Torres Esbeltas*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.

[6] Fujii, K.; Tamura, Y.; Sato, T.; Wakahara, T. – "Wind-Induced Vibration of Tower and Practical Applications of Tuned Sloshing Damper", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 33, pp. 263-272, 1990.

[7] Reed, D.; Yu, J.; Yeh, H.; Gardarsson, S. – "Investigation of Tuned Liquid Dampers Under Large Amplitude Excitation", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. 4, pp. 405-413, Apr. 1998.

[8] Fujino, Y.; Sun, L.; Pacheco, B. M.; Chaiseri, P. – "Tuned Liquid Damper (TLD) for Suppressing Horizontal Motion of Structures", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 118, n. 10, pp. 2017-2030, Oct. 1992.

[9] Lepelletier, T. G.; Raichlen, F. – "Nonlinear Oscilations in Rectangular Tanks", *Journal of Engineering Mechanics*, v. 114, n. 1, pp. 1-23, Jan. 1988.

[10] Batista, R. C. – *Dinâmica Estrutural*, Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

[11] Clough, R. W.; Penzien, J. – *Dynamics of Structures*, Second Edition, McGraw-Hill International Editions, 1993.

[12] Carnaham, B. – *Applied Numerical Methods*, J. Willey, New York, 1969.

[13] Batista, R. C. – *Análise Estrutural*, Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.

[14] Sun, L. M.; Fujino, Y.; Pacheco, B. M.; Chaiseri, P. – "Modelling of Tuned Liquid Damper (TLD)", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 41-44, pp. 1883-1894, 1992.

[15] Batista, R. C. – *Análise Estrutural dos Descarregadores D1 e D2 do Porto de Sepetiba*, Relatórios Técnicos ET-150543, COPPETEC, Rio de Janeiro, Maio 1993.

[16] Shimizu, T.; Hayama, S. – "Nonlinear Responses of Sloshing Based on the Shallow Water Wave Theory", *JSME International Journal*, v. 30, n. 263, pp. 806-813, 1987.

[17] Ribeiro, F. L. B.; Galeão, A. C.; Landau, L. – "A Space-Time Finite Element Formulation for Shallow Water Equations", *Development and Application of Computer Techniques to Environmental Studies VI*, Computational Mechanics Publications, pp. 403-414, 1996.

ANEXO

Modelagem Teórica Não-Linear do Sistema Fluido de Absorção (SFA)

O movimento de um fluido em baixa profundidade envolve não-linearidades. Para simular este movimento foi usado um modelo não-linear [14] baseado na teoria de águas rasas, que consiste em equações diferenciais parciais sujeitas a certas condições iniciais e de contorno resolvidas através de integração numérica. Estas equações são apresentadas a seguir.

Para simplificação da análise assume-se que: (i) o fluido é considerado incompressível; (ii) a pressão é constante na sua superfície livre; (iii) o movimento da partícula do fluido acontece somente no plano x-z; e (iv) a superfície deve sempre ser contínua (não pode haver quebra de onda).

O modelo de recipiente do SFA está ilustrado na Figura A-1, onde L é o comprimento, b é a largura e h é a profundidade do fluido em repouso.

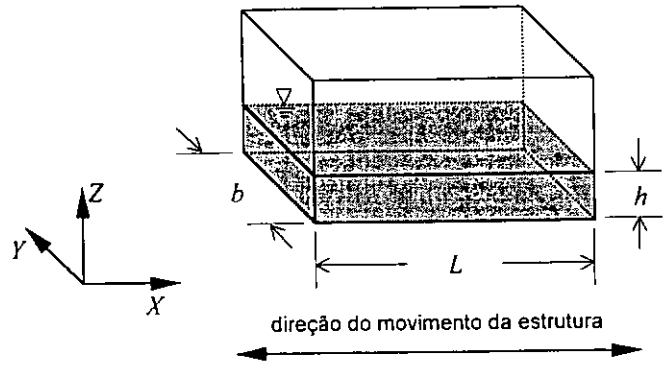

FIGURA A-1 Esquema das dimensões do SFA

Seja este tanque sujeito a um movimento horizontal x_s representado pela Figura A-2, onde η é a elevação da superfície livre. A origem do sistema cartesiano local está no meio do tanque sobre a superfície do fluido em repouso.

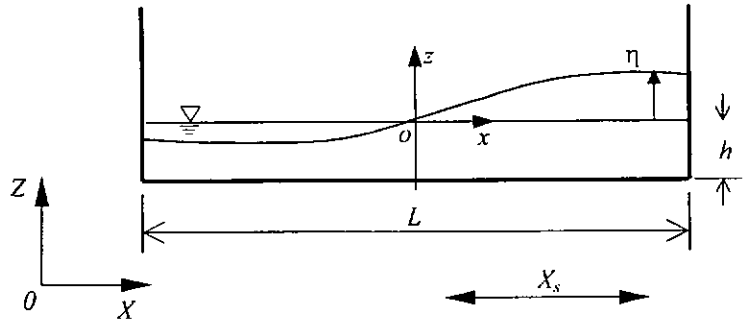

FIGURA A-2 Esquema do SFA

As equações que governam o problema são a equação de continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{A-1}$$

e as equações bidimensionais de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\ddot{x}_s \tag{A-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-g \tag{A-3}$$

onde, além das variáveis e parâmetros definidos anteriormente,

$u \equiv u(x,z,t)$ é a velocidade horizontal da partícula do fluido (relativa ao tanque);

$w \equiv w(x,z,t)$ é a velocidade vertical da partícula do fluido (relativa ao tanque);

$\ddot{x}_s$ é a aceleração do movimento de excitação do tanque; e

p é a pressão sobre o fluido.

Baseado na teoria de águas rasas [16] a função potencial de velocidade é

$$\Phi(x,z,t)=F(x,t)\cosh(k(h+z)) \tag{A-4}$$

onde $F(x,t)$ pode ser determinado usando as condições de contorno, e k é o número de onda.

As condições de contorno são

$$u = 0 \qquad \text{nas duas paredes } (x = \pm L/2) \tag{A-5}$$

$$w = 0 \qquad \text{no fundo do tanque } (z = -h) \tag{A-6}$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \text{na superfície livre } (z = \eta) \tag{A-7}$$

$$p = p_o = cte \qquad \text{na superfície livre } (z = \eta) \tag{A-8}$$

Através da Equação A-4 escreve-se a velocidade vertical w e suas derivadas em função da velocidade horizontal u. Substituindo nas Equações A-1 e A-2 e as integrando em relação a z do fundo ($z = -h$) até a superfície livre ($z = \eta$) são obtidas as equações básicas

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(1 - \tanh^2\left[k(h+\eta)\right]\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}u(\eta) + \frac{1}{k}\tanh\left[k(h+\eta)\right]\frac{\partial u(\eta)}{\partial x} = 0 \tag{A-9}$$

$$\frac{\partial u(\eta)}{\partial t} + \left(1 - \tanh^2\left[k(h+\eta)\right]\right)u(\eta)\frac{\partial u(\eta)}{\partial x} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{k}\tanh\left[k(h+\eta)\right]\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \lambda u(\eta) + \ddot{x}_s = 0 \tag{A-10}$$

O amortecimento no movimento do fluido perto da ressonância é significante. Na Equação A-10 λ é o coeficiente de amortecimento que leva em conta a influência do fundo, das paredes laterais e da superfície livre, e pode ser escrito como

$$\lambda = \frac{1}{(\eta + h)}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega_{SWA}\nu}\left(1 + \frac{2h}{b} + S\right) \tag{A-11}$$

onde, além das variáveis e parâmetros definidos anteriormente, S é um fator de contaminação de superfície, que varia de 0 a 2 [9] e será tomado como igual a um, ficando λ expresso como na Equação A-12.

$$\lambda = \frac{1}{(\eta + h)}\sqrt{2\omega_{SWA}\nu}\left(1 + \frac{h}{b}\right) \tag{A-12}$$

Substituindo λ em A-10 e modificando a notação que indica a derivada em relação a x e a t para a linha (η') e o ponto ($\dot{\eta}$), respectivamente, o sistema de equações fica

$$\dot{\eta} + \left(1 - \tanh^2[k(h+\eta)]\right)\eta' u + \frac{1}{k}\tanh[k(h+\eta)]u' = 0 \tag{A-13}$$

$$\dot{u} + \left(1 - \tanh^2[k(h+\eta)]\right)uu' + g\eta' + \frac{g}{k}\tanh[k(h+\eta)]\eta''\eta' - \sqrt{2\omega_{SWA}\nu}\left(1 + \frac{h}{b}\right)\frac{u}{(\eta+h)} + \ddot{x}_s = 0 \tag{A-14}$$

As Equações A-13 e A-14 serão integradas numericamente no tempo com o algoritmo de Runge-Kutta [12], e terá suas derivadas no espaço aproximadas por Diferenças Finitas.

Para isso é feita uma mudança de notação

$$u(x,\eta,t) = \dot{v}(x,\eta,t) \tag{A-15}$$

e $v(x,\eta,t)$ seria o deslocamento horizontal da partícula fluida.

E uma separação de variáveis

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= R(x)\eta(t) \\ v(x,\eta,t) &= S(x)v(\eta)v(t) = S(x)v(t) \end{aligned} \tag{A-16}$$

Somando o movimento horizontal de excitação da base ao deslocamento do fluido

$$\begin{aligned} v(x,\eta,t) &= S(x)v(t) + x_s \\ \dot{v}(x,\eta,t) &= S(x)\dot{v}(t) + \dot{x}_s \\ \ddot{v}(x,\eta,t) &= S(x)\ddot{v}(t) + \ddot{x}_s \end{aligned} \tag{A-17}$$

Substituindo $\eta(x,t)$ e $v(x,\eta,t)$ e suas derivadas nas Equações A-13 e A-14 temos

$$R(x)\dot{\eta}(t) + \left(1 - \tanh^2[k(h+R(x)\eta(t))]\right)R'(x)\eta(t)[S(x)\dot{v}(t) + \dot{x}_s] + \frac{1}{k}\tanh[k(h+R(x)\eta(t))]S'(x)\dot{v}(t) = 0 \tag{A-18}$$

$$S(x)\ddot{v}(t)+\left(1-\tanh^2\left[k\left(h+R(x)\eta(t)\right)\right]\right)S'(x)\dot{v}(t)\left[S(x)\dot{v}(t)+\dot{x}_s\right]$$
$$+gR'(x)\eta(t)+\frac{g}{k}\tanh\left[k\left(h+R(x)\eta(t)\right)\right]R'(x)\eta(t)R''(x)\eta(t) \qquad \text{(A-19)}$$
$$-\sqrt{2\omega_{SWA}\nu}\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{\left[S(x)\dot{v}(t)+\dot{x}_s\right]}{\left(R(x)\eta(t)+h\right)}+2\ddot{x}_s=0$$

Desta forma a variável v é o deslocamento absoluto da partícula de fluido.

Reescrevendo as Equações A-18 e A-19 sem as variáveis independentes entre parêntesis e desprezando o quarto termo da Equação A-19, que envolve o produto entre R', R'' e η^2

$$R\dot{\eta}+\left(1-\tanh^2\left[k\left(h+R\eta\right)\right]\right)\left[S\dot{v}+\dot{x}_s\right]R'\eta$$
$$+\frac{1}{k}\tanh\left[k\left(h+R\eta\right)\right]S'\dot{v}=0 \qquad \text{(A-20)}$$

$$S\ddot{v}+\left(1-\tanh^2\left[k\left(h+R\eta\right)\right]\right)\left[S\dot{v}+\dot{x}_s\right]S'\dot{v}+gR'\eta$$
$$-\sqrt{2\omega_{SWA}\nu}\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{\left[S\dot{v}+\dot{x}_s\right]}{\left(R\eta+h\right)}+2\ddot{x}_s=0 \qquad \text{(A-21)}$$

Como se pode notar, o sistema das Equações A-20 e A-21 apresenta não-linearidades nos termos quadráticos, hiperbólicos e em produtos e quocientes entre as variáveis. Para resolvê-lo foi usado, tanto na integração numérica no tempo quanto na aproximação das derivadas feitas no espaço, o Método Interativo de Newton-Raphson.

As derivadas espaciais foram resolvidas pelo Método das Diferenças Finitas. Pela dificuldade de simular o movimento do fluido em pontos externos ao tanque, para se determinar as condições de contorno para a elevação da superfície livre foi utilizado, para as derivadas dos pontos extremos da discretização, a seguinte aproximação:

$$R_1'=\frac{1}{\Delta}\left(R_2-R_1\right) \quad \text{e} \quad R_n'=\frac{1}{\Delta}\left(R_{n-1}-R_n\right) \qquad \text{(A-22)}$$

onde o índice 1 representa o ponto situado na parede esquerda do tanque e o n o ponto situado na parede direita do tanque, e Δ é o intervalo de discretização. Para os pontos intermediários a aproximação da derivada foi a seguinte:

$$R_i' = \frac{1}{2\Delta}\left(R_{i+1} - R_{i-1}\right) \tag{A-23}$$

Em cada ponto nodal discreto calcula-se a parcela em x da elevação da superfície livre η e do deslocamento horizontal da partícula fluida v. Sendo assim, é preciso saber as condições de contorno para cada variável, totalizando 4 condições e duas equações. Para v foi usada a condição de impenetrabilidade do fluido nas paredes transversais ao movimento, levando a

$$v(x,\eta,t) = 0 \tag{A-24}$$

Aplicando a condição da Equação A-5 na segunda equação básica (Equação A-10), e desconsiderando o termo não-linear do produto $\eta''\eta'$, chega-se a

$$\eta(x,t)' = R(x)'\eta(t) = \frac{-\ddot{x}_s}{g} \tag{A-25}$$

que é a condição de contorno para a elevação η.

Aplicando esta condição de contorno aos pontos extremos com as Equações A-22, obtém-se para o primeiro ponto da discretização:

$$R_1 = R_2 + \frac{\Delta\ddot{x}_s}{g\eta_1(t)} \tag{A-26}$$

e para o outro extremo a condição de contorno é

$$R_n = R_{n-1} + \frac{\Delta\ddot{x}_s}{g\eta_n(t)} \tag{A-27}$$

As Equações A-26 e A-27, junto com a Equação A-24 aplicada nos dois nós da extremidade são as quatro condições de contorno utilizadas.

A solução numérica do problema se mostrou muito instável, sendo sensível à variação dos parâmetros inerentes ao sistema. Para tentar contornar os problemas de

instabilidade numérica fez-se necessário a utilização de "filtros numéricos", que são procedimentos para "educar" a resposta obtida, a qual no Newton-Raphson servirá de passo inicial para a próxima interação, de forma a minimizar qualquer instabilidade numérica que ela possa provocar, como por exemplo uma divisão onde o divisor seja muito menor que o dividendo. Dos vários filtros testados o que se mostrou mais eficiente, para os pontos nodais situados no domínio, foi

$$R_i = 0{,}25\ R_{i-1} + 0{,}5\ R_i + 0{,}25\ R_{i+1} \tag{A-28}$$

e para os pontos do contorno foi

$$R_i = 0{,}5\ R_i + 0{,}3\ R_{i+1} + 0{,}2\ R_{i+2} \tag{A-29}$$

Além destes filtros como médias ponderadas utilizou-se um outro que faz uma comparação entre valores referentes a pontos nodais vizinhos para evitar a divisão por zero. Com a utilização destes filtros conseguiu-se uma melhoria das respostas obtendo-se resultados estáveis nos primeiros passos de tempo. Mas, a partir de um certo instante de tempo estas respostas continuaram a apresentar divergência numérica

O Gráfico A-1 mostra um perfil da elevação da superfície livre do fluido no tanque do SFA, onde pode-se observar que o perfil é aproximadamente linear, o que levou à utilização de uma teoria linear para simular o movimento do fluido.

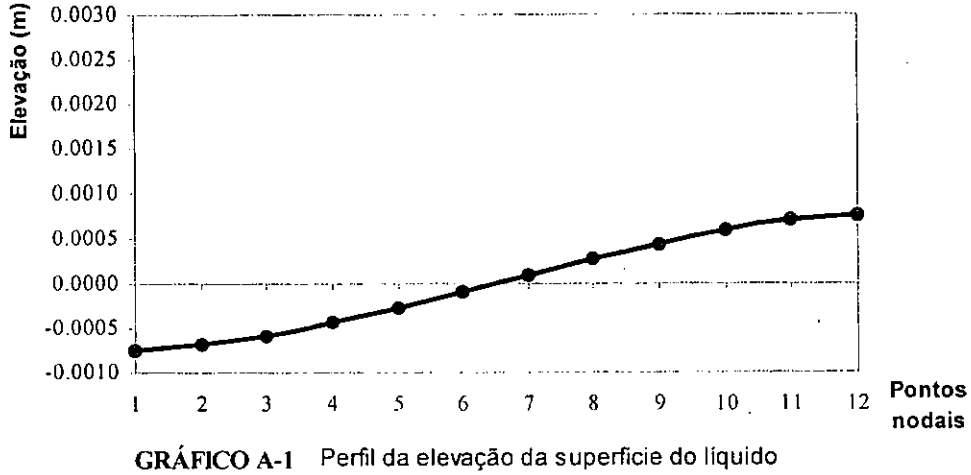

GRÁFICO A-1 Perfil da elevação da superfície do líquido
h=0,06m; L=0,6095m; b=0,23m; ν=9,4x10^{-7}m^2/s.

O Gráfico A-2 mostra um histórico da elevação do fluido na parede do tanque ao longo do tempo, onde vê-se o comportamento não-linear da resposta.

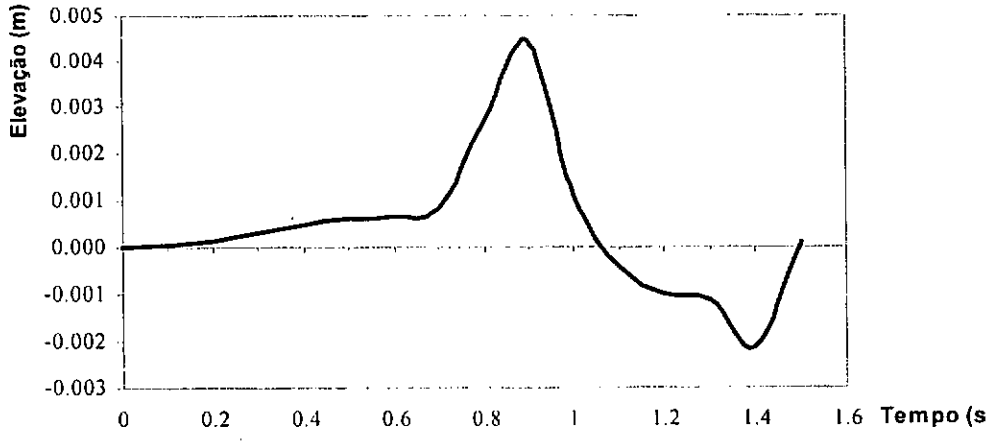

GRÁFICO A-2 Resposta da elevação da superfície do líquido na parede do tanque ($x=L$);
h=0,06m; L=0,6095m; b=0,23m; ν=9,4x10^{-7}m^2/s.