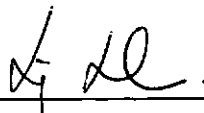


MODELO GENERALIZADO PARA RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA EM  
PLACAS

Paulo César Mappa

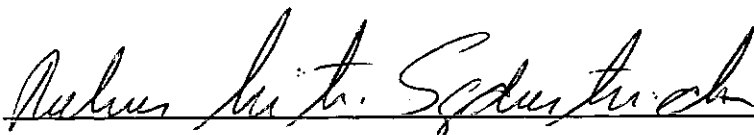
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



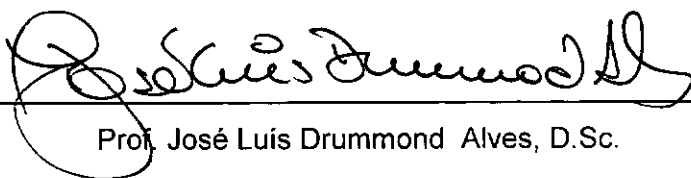
---

Prof. Luiz Landau, D.Sc.



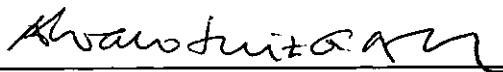
---

Rubens Mitri Sydenstricker, D.Sc.



---

Prof. José Luís Drummond Alves, D.Sc.



---

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1999

**MAPPA, PAULO CÉSAR**

**Modelo generalizado para relação  
constitutiva elasto-plástica em placas**

**[Rio de Janeiro] 1999**

**vii,68p.29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Civil, 1999)**

**Tese - Universidade Federal do Rio  
de Janeiro, COPPE**

- 1. Elementos finitos para placas**
- 2. Plasticidade em placas**

**I COPPE/UFRJ II Título(série)**

A todos que em nosso país lutaram, lutam e lutarão pelo ensino público gratuito e de qualidade

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Luiz Landau pela confiança, pela orientação durante o desenvolvimento desse trabalho e pela ajuda de sempre.

Ao Rubens Mitri pela disposição em ajudar da melhor forma possível.

Ao Professor José Alves pela boa vontade de sempre.

Ao professor Roberto de Oliveira pela atenciosa recepção quando das dúvidas.

A minha família pelo incentivo.

Aos amigos que aqui conhecemos.

Aos caros companheiros de apartamento que aqui no Rio formamos uma verdadeira família(P.S.)

Resumo da tese apresentada à COOPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências(M.Sc.)

## MODELO GENERALIZADO PARA RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTO-PLÁSTICA EM PLACAS

Paulo César Mappa

junho/1999

Orientadores: Luiz Landau

Rubens Mitri Sydenstricker

Programa : Engenharia Civil

No presente trabalho implementa-se um modelo para relação constitutiva elasto-plástica em placas, usando-se um critério de escoamento baseado em esforços. Mostra-se ainda como esse modelo pode ser usado para redução de problemas tri-dimensionais a problemas bi-dimensionais. Apresenta-se um comentário sobre o desempenho de alguns elementos no tratamento do problema de placas. Detalha-se a formulação do elemento DRM, baseado na teoria de Rössner-Mindlin.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## GENERALIZED MODEL FOR ELASTOPLASTIC CONSTITUTIVE RELATIONSHIP IN PLATES

Paulo César Mappa

june/1999

Advisors: Luiz Landau

Rubens Mitri Sydenstricker

Department : Civil Engineering

The purpose of this work is to study a constitutive model in inelastic plates, which can be used to reproduce some of the three-dimensional setting. We present a commentary of the performances of some elements with three nodes and the basic formulation for the finite elements for plates based on Reissner-Mindlin theory – DRM.

# ÍNDICE

|   |           |
|---|-----------|
| INTRODUÇÃO.....   | 1         |
| - CAPÍTULO 1-.....  | 4         |
| <b>O TRATAMENTO DO PROBLEMA DE PLACA .....</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1 - GENERALIDADES.....  | 4         |
| 1.2 – TEORIA DE REISSNER - MINDLIN.....   | 5         |
| 1.2.1 – PLACA.....  | 5         |
| 1.2.2 – SISTEMA DE REFERÊNCIA.....  | 5         |
| 1.2.3 – HIPÓTESES BÁSICAS.....  | 6         |
| 1.2.4 – DESLOCAMENTOS.....  | 6         |
| 1.2.4 - DEFORMAÇÕES.....  | 7         |
| 1.2.5 - TENSÕES.....  | 8         |
| 1.2.7 - ESFORÇOS SOLICITANTES.....  | 10        |
| 1.2.8 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....  | 11        |
| - CAPÍTULO 2 -.....   | 13        |
| <b>O ELEMENTO DRM E SUA ESCOLHA .....</b>   | <b>13</b> |
| 2.1 – UMA COMPARAÇÃO COM OUTROS ELEMENTOS.....  | 13        |
| 2.2 - O ELEMENTO DRM.....   | 14        |
| 2.2.1- MATRIZ DE RIGIDEZ.....   | 18        |
| - CAPÍTULO 3 -.....   | 20        |
| <b>O MODELO ADOTADO NO TRATAMENTO DA PLASTICIDADE.....</b>                                    | <b>20</b> |
| 3.2) MODELOS BÁSICOS.....   | 21        |
| 3.2.1) MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO.....   | 21        |
| 3.2.2) ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO.....  | 22        |
| 3.2.2 - ENDURECIMENTO CINEMÁTICO.....   | 24        |
| 3.3 - O MODELO GENERALIZADO.....  | 25        |
| 3.3.1-FUNÇÃO DE ESCOAMENTO.....   | 26        |
| 3.3.2) FUNÇÃO LIMITE.....   | 32        |
| 3.3.3 – LEI DE FLUXO.....   | 35        |
| 3.5- EXEMPLOS.....  | 43        |
| 3.5.1 - EXEMPLO 01- <i>Momento último em uma viga engastada e livre – Console curto</i> ..... | 44        |
| 3.5.2) EXEMPLO 02.....  | 46        |
| 3.5.3) EXEMPLO 03.....  | 46        |
| - CAPÍTULO 4 -.....   | 50        |
| <b>O TRATAMENTO DA NÃO LINEARIDADE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>                 | <b>50</b> |
| 4.1) O TRATAMENTO NUMÉRICO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA – MÉTODO DE NEWTON –RAPHSON.....         | 50        |
| 4.3 -ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....   | 54        |
| 4.5 - EXEMPLOS.....   | 56        |
| 4.5.1– EXEMPLO 04.....  | 56        |
| 4.5.2- EXEMPLO 05.....  | 58        |
| 4.5.5 – EXEMPLO 06.....   | 58        |
| - CAPÍTULO 5 –.....   | 60        |
| <b>COMENTÁRIOS FINAIS.....</b>  | <b>60</b> |
| <b>APÊNDICE A - OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE ESCOAMENTO ADOTADA NO MODELO GENERALIZADO ...</b>       | <b>61</b> |

## O TRATAMENTO DO PROBLEMA DE PLACA

### 1.1 - GENERALIDADES

Os primeiros modelos de elementos finitos para placa vêm da década de sessenta e utilizavam a teoria de Kirchhof. Esta, apresenta dificuldades para satisfazer as condições de continuidade  $C^1$ , na expressão da energia de deformação, requerida pelo método dos elementos finitos, além de não permitir o tratamento das deformações de cisalhamento transversal, já que tem como uma de suas hipóteses básicas:

- As normais ao plano médio permanecem retas e normais à superfície média (acarreta  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  iguais a zero nas relações deformação - deslocamento). Assim, os resultados obtidos a partir daí são insatisfatórios quando se trata de problemas onde essas deformações são importantes.

A teoria de Reissner-Mindlin considera as deformações por cisalhamento transversal através da hipótese:

- As retas normais ao plano médio permanecem alinhadas segundo retas não necessariamente normais à superfície média permitindo considerar  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$

Inicialmente os elementos baseados nessa teoria não eram satisfatórios no tratamento de placas delgadas pois atribuíam à estrutura uma rigidez excessiva. Fenômeno esse, que ficou conhecido como trancamento por cortante. Vários estudos foram feitos e apresentados na literatura e muitos elementos surgiram tentando solucionar este problema. Em 1988 Zienkiewicz e Lefebvre [9] apresentam o elemento T6/3B3 tido pelos autores como o primeiro elemento totalmente robusto.

Vários elementos, de quatro e três nós , baseados em teorias distintas são apresentados pela literatura.

Um estudo sobre alguns elementos triangulares livres de trancamento por cortante é apresentada por Sydenstricker [8]. Utiliza-se no presente trabalho o elemento DRM – discrete Reissner-Mindlin - apresentado por Zienkiewicz, Taylor Papadopoulo e Oñate [10] em 1990.

## 1.2 – TEORIA DE REISSNER - MINDLIN

### 1.2.1 – PLACA

Aqui denomina-se por placa o elemento estrutural definido pelo domínio  $\Omega$ , onde  $\Omega = \{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in [-h/2, h/2], (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ . O plano  $z=0$  é a superfície média da placa e é inextensível, a espessura  $h$  é muito menor que as outras dimensões e o carregamento é aplicado perpendicular à superfície média.

### 1.2.2 – SISTEMA DE REFERÊNCIA

O sistema de referência é composto pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  formando um triedro direto como mostrado na Figura1.1

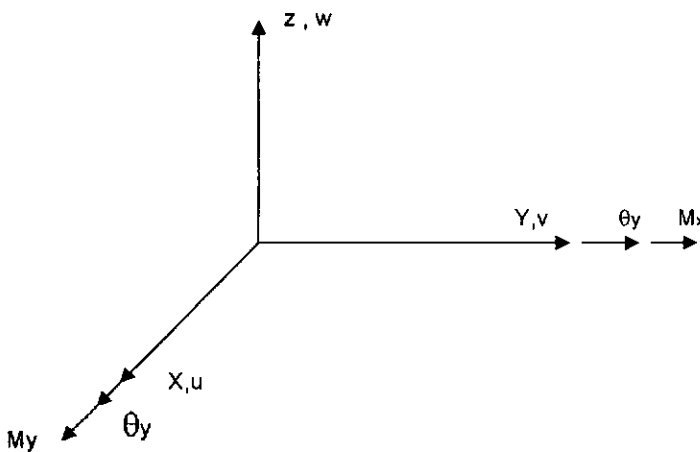


Figura1.1- Sistema de referência

## 1.2.3 – HIPÓTESES BÁSICAS

a ) Despreza-se a componente de tensão normal paralela ao eixo  $z$ ,  $\sigma_z$ .

b) Existe simetria das propriedades elásticas em relação à superfície média. Assim sendo, os pontos nela situados não sofrem deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ . Ou seja:

$$u(x,y,0) = v(x,y,0) = 0$$

c) Pontos, antes da deformação, alinhados segundo uma reta normal à superfície média permanecem, após a deformação, alinhados segundo uma reta, não necessariamente normal à superfície média.

d) Trabalha-se com pequenas rotações. Ou seja:

$$\theta \approx \tan(\theta)$$

A hipótese (a) reflete o fato de se ter nessa direção tensão da ordem do carregamento aplicado e, portanto, menores que as demais. A hipótese (b) é válida já que na definição de placa exclui-se solicitações normais à seção transversal da mesma. Na hipótese (c), faz-se a generalização da hipótese de Kirchhof. Com esta hipótese é que se permite a consideração das deformações por efeito do cisalhamento transversal, conforme já mencionado na introdução deste trabalho.

## 1.2.4 – DESLOCAMENTOS

Considerando-se as hipóteses básicas escreve-se:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z \theta_y(x,y) \\ v(x, y, z) &= -z \theta_x(x,y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Fazendo-se  $[LD] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  ,  $\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x(x,y) \\ \theta_y(x,y) \end{Bmatrix}$  , obtém-se

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = z[LD]\{\theta\} \quad (1.2)$$

O deslocamento transversal é representado apenas sobre a superfície média, ou seja:

$$w = w(x,y) \quad (1.3)$$

#### 1.2.4 - DEFORMAÇÕES

A teoria linear da elasticidade escreve:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.4_{a,b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.4_{c,d,e})$$

Ao considerar-se  $\sigma_z = 0$  possibilita-se a determinação de  $\varepsilon_z$  diretamente pelas relações constitutivas , a partir das demais componentes de deformação. Além disso, a parcela da energia de deformação devido à  $\sigma_z$  é nula e como pretende-se determiná-la, em função dos deslocamentos, para se obter a matriz de rigidez do elemento toma-se as deformações agrupadas em deformações de flexão  $\{\varepsilon_b\}$  e de cisalhamento  $\{\gamma\}$ . Assim:

$$\{\varepsilon_b\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

(1.5)

Tomando-se  $[\nabla 1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$  e  $[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$  define-se

o vetor curvatura  $\{\chi\}$  e vetor de deformações transversais  $\{\gamma\}$  da forma que segue:

$$\{\chi\} = [\nabla 1]\{\theta\} \quad (1.6)$$

$$\{\gamma\} = [\nabla]w + [LD]\{\theta\} \quad (1.7)$$

Nota-se que  $\{\gamma\}$  é constante ao longo da espessura

Levando-se em conta as equações (1.1), (1.3) e (1.4 \_ a ) chega-se a:

$$\{\epsilon_b\} = z \{\chi\} \quad (1.8)$$

### 1.2.5 - TENSÕES

Da lei de Hooke generalizada para  $\sigma_z = 0$  tem-se:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} \quad (1.9)$$

Onde:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{e para o caso de materiais isotrópicos:}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [G] \end{bmatrix} \quad \text{com:}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G] = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Considerando-se as equações (1.8) e (1.9) escreve-se:

$$\{\sigma_b\} = [D]\varepsilon_b = z[D]\{\chi\} \quad (a)$$

$$\{\tau\} = [G]\{\gamma\} \quad (b)$$

(1.11)

Onde,

$$\{\sigma_b\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Estas componentes de tensão estão representadas na Figura 1.2.

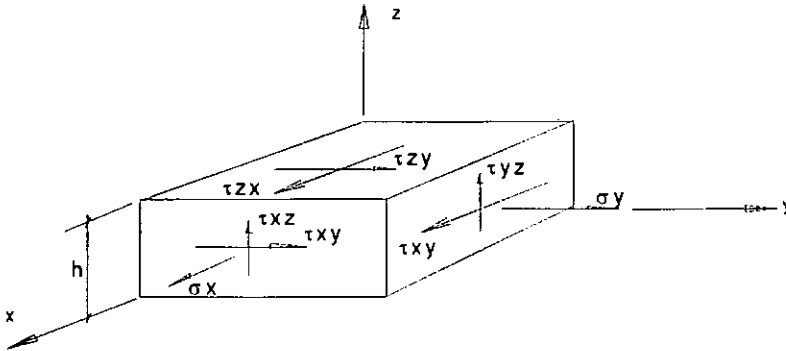


Figura 1.2 – componentes de tensão

### 1.2.7 - ESFORÇOS SOLICITANTES

Determina-se os esforços solicitantes pelas expressões:

a) Momentos:

$$\{m\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_b\} dz \quad (1.12)$$

Substituindo-se (1.6) e (1.11) em (1.12) chega-se a:

$$\{m\} = [DB] \{\chi\} \quad (1.13)$$

$$\text{com: } \{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[DB] = \frac{h^3}{12} [D]$$

b) Cortantes:

$$\{t\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\tau\} dz \quad (1.14)$$

A fim de corrigir o erro na energia de deformação decorrente da hipótese de tensões de cisalhamento transversal constantes introduz-se o coeficiente de correção de cisalhamento transversal, K, que nos permite escrever:

$$\{t\} = [DS] \{\gamma\} \quad (1.15)$$

Sendo :

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad [DS] = h K [G]$$

### 1.2.8 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia total de deformação, U, é a soma da energia de deformação por flexão,  $U_b$  (correspondente à  $\{\sigma_b\}$  e  $\{\varepsilon_b\}$ ), com a energia de deformação por cisalhamento,  $U_s$  (correspondente à  $\{\tau\}$  e  $\{\gamma\}$ ). Assim tem-se:

$$U = U_b + U_s \quad (1.16)$$

### 1.2.8.1 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO POR FLEXÃO

Da mecânica dos sólidos :

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_b\}^T \{\sigma_b\} dv \quad (1.17)$$

Substituindo-se (1.11) e (1.8) em (1.16) tem-se:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T [DB] \{\chi\} dA \quad (1.18)$$

### 1.2.8.2 – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO

A energia de deformação por cisalhamento é dada por

$$U_s = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T [DS] \{\gamma\} dA \quad (1.19)$$

com

$$[DS] = K \int_{-h/2}^{h/2} \{\gamma\}^T [DS] \{\gamma\} dz = h K \begin{bmatrix} [G] & [0] \\ [0] & [G] \end{bmatrix}$$

## **O ELEMENTO DRM E SUA ESCOLHA**

Com o objetivo de se implementar um modelo para tratar a plasticidade em placas usando-se um critério baseado em esforços, o que é mais usual na prática, e visando a sua aplicação em elementos estruturais os quais necessitem da consideração dos efeitos da deformação por esforços cisalhantes transversais, analisou-se os elementos triangulares segundo resultados apresentados por Sydenstricker [8] e optou-se pela implementação do elemento DRM.

### **2.1 – UMA COMPARAÇÃO COM OUTROS ELEMENTOS**

Sydenstricker [8] faz a comparação do elemento DRM com os seguintes elementos:

- Triângulo discreto de Kirchhof (DKT)
- Triângulo discreto de cisalhamento BL (DST-BL)
- Triângulo discreto de cisalhamento BK (DST-BK)
- Elemento discreto de Reissner-Mindilin 3 (DRM3)

Conclui, Sydenstricker [8], que o elemento DRM apresenta melhor desempenho geral; apresentando erro maior que os outros em pouquíssimos casos e além disso é pouco sensível à orientação da malha. Outra importante conclusão é que o elemento DRM não apresenta tracamento por cortante.

2.2 - O ELEMENTO DRM

O DRM é um elemento triangular de seis nós e doze graus de liberdade. Observe-os na Figura 2.1.

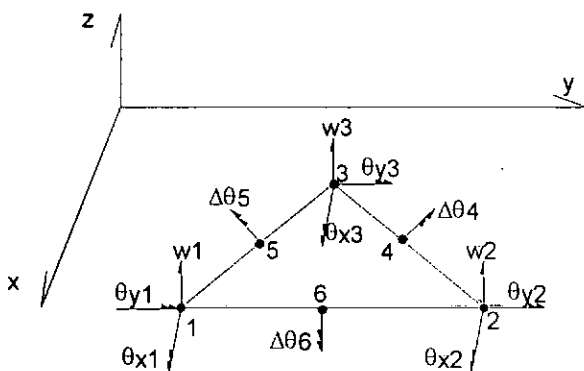


Figura 2.1- Graus de liberdade do elemento DRM

Neste elemento interpola-se o campo de deslocamentos da seguinte forma:

$$w=[Nw]\{\hat{w}\} \tag{2.1}$$

$$\{\theta\}=[N\theta]\{\hat{\theta}\}^1 \tag{2.2}$$

E o campo de cisalhamento da seguinte maneira:

$$\{\bar{\gamma}\}=[N\gamma\alpha]\{\hat{\alpha}\} \tag{2.3}$$

Aqui [Nw], [Nθ] e [Nγ α] são funções de interpolação como segue:

---

<sup>1</sup> Daqui por diante o símbolo “^” denota a referência a uma grandeza nodal. Assim,  $\{\hat{\theta}\}$  denota  $\{\theta\}$  nodal.

$$[Nw]=[L_1L_2L_3]; \tag{2.4}$$

$$[N\theta]=\begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & 4C_4L_2L_3 & 4C_5L_1L_3 & 4C_6L_1L_2 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 4S_4L_2L_3 & 4S_5L_1L_3 & 4S_6L_1L_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$[N\gamma_\alpha]=\begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Onde  $L_i$  ( $i=1,2,3$ ) são as coordenadas de área ;  $C_k$  e  $S_k$  ( $k=4,5,6$ ) são os senos e cossenos definidos em[8].

Os parâmetros nodais são:

$$\{\hat{w}\}=\begin{Bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

$$\{\hat{\theta}\}=\begin{Bmatrix} \hat{\theta}x_1 \\ \hat{\theta}y_1 \\ \hat{\theta}x_2 \\ \hat{\theta}y_2 \\ \hat{\theta}x_3 \\ \hat{\theta}y_3 \\ \Delta\hat{\theta}_4 \\ \Delta\hat{\theta}_5 \\ \Delta\hat{\theta}_6 \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\{\hat{\alpha}\}^T = \begin{Bmatrix} \{\hat{\gamma}_1\}^T \\ \{\hat{\gamma}_2\}^T \\ \{\hat{\gamma}_3\}^T \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

$\Delta\hat{\theta}_k$  é um acréscimo de rotação normal a um lado com nó intermediário  $k$ , mostrado na Figura 2.2.

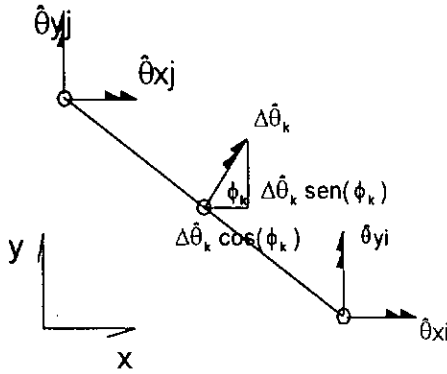


Figura 2.2 – Rotações nodais no elemento DRM

Para se obter  $\{\bar{\gamma}\}$  em função dos deslocamentos nodais elimina-se, na expressão (2.3), o parâmetro  $\{\hat{\alpha}\}$  fazendo:

$$\{\hat{\alpha}\} = [Aw]\{\hat{w}\} + [A\theta]\{\hat{\theta}\} \quad (2.10)$$

Substitui-se a expressão (2.10) na (2.3) obtendo-se:

$$\{\bar{\gamma}\} = [N_{\gamma w}]\{\hat{w}\} + [N_{\gamma \theta}]\{\hat{\theta}\} \quad (2.11)$$

Com  $[N_{\gamma w}] = [N_{\gamma \alpha}][Aw]$  e  $[N_{\gamma \theta}] = [N_{\gamma \alpha}][A\theta]$ .

Objetivando-se determinar  $[Aw]$  e  $[A\theta]$  impõe-se a seguinte restrição ao campo de cisalhamento:

$$\int_0^{l_j} (\bar{\gamma}_{sz} \Big|_{l_i} - \gamma_{sz} \Big|_{l_j}) ds = 0 \quad (2.12)$$

Para tanto supõe-se inicialmente que o campo de cisalhamento interpolado resulte em  $\bar{\gamma}_{sz}$  constantes ao longo dos lados. Como a interpolação é linear faz-se :

$$\bar{\gamma}_{sz} \Big|_{l_i} = \bar{\gamma}_{sz} \Big|_{l_j} = [t_k] \{ \hat{\gamma}_i \} = [t_k] \{ \hat{\gamma}_j \} \quad (2.13)$$

$$\bar{\gamma}_{sz} \Big|_k = \frac{1}{2} [t_k] (\{ \hat{\gamma}_i \} + \{ \hat{\gamma}_j \}) \quad (2.14)$$

e sendo assim:

$$\{ \hat{\gamma}_i \} = \begin{bmatrix} [t_p] \\ [t_q] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{sz} \Big|_p \\ \bar{\gamma}_{sz} \Big|_q \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

sendo  $pq = 56, 46, 45$  para  $i = 1, 2, 3$  respectivamente, e

$$\begin{bmatrix} [t_p] \\ [t_q] \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{C_p S_q - C_q S_p} \begin{bmatrix} C_q & -C_p \\ S_q & -S_p \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Em um lado  $ij$  tem-se as deformações de cisalhamento tangentes dadas por:

$$\bar{\gamma}_{sz} \Big| = \frac{-\hat{w}_i + \hat{w}_j}{l_{ij}} - L_i [nk] \{ \hat{\theta}_i \} - L_j [nk] \{ \hat{\theta}_j \} - 4L_i L_j \Delta \hat{\theta}_k \quad (2.17)$$

que se substituídas na expressão (2.12) fornecem:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{sz}|_4 \\ \bar{\gamma}_{sz}|_5 \\ \bar{\gamma}_{sz}|_6 \end{Bmatrix} = [Qw]\{\hat{w}\} + [Q\theta]\{\hat{\theta}\} \quad (2.18)$$

com

$$[Qw] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{23}} [0 & -1 & 1] \\ \frac{1}{l_{31}} [1 & 0 & -1] \\ \frac{1}{l_{12}} [-1 & 1 & 0] \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$[Q\theta] = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} [0] & [n_4] & [n_4] & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ [n_5] & [0] & [n_5] & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ [n_6] & [n_6] & [0] & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Substituindo-se a expressão (2.18) na (2.15) obtém-se:

$$[Aw] = [As][Qw] \quad \text{e} \quad [A\theta] = [As][Q\theta] \quad (2.21)$$

### 2.2.1- MATRIZ DE RIGIDEZ

Sabendo-se que a energia de deformação de um sólido é:

$$U = \frac{1}{2} \{\hat{u}\}^T [K] \{\hat{u}\} \quad (2.22)$$

Com  $\{\hat{u}\} = \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\hat{\theta}\} \end{Bmatrix}$  e  $[K]$  sendo a matriz de rigidez.

Da expressão (1.16), considerando-se as expressões (1.18) e (1.19), tem-se

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T [DS] \{\gamma\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T [DB] \{\chi\} dA \quad (2.23)$$

Calculando-se as integrais, já que todos os fatores dos integrandos estão determinados, temos:

Primeira parcela:

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\hat{w}\} \\ \{\hat{\theta}\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \int_A [N_{\gamma w}]^T [DS] [N_{\gamma w}] dA & \int_A [N_{\gamma w}]^T [DS] [N_{\gamma \theta}] dA \\ \int_A [N_{\gamma \theta}]^T [DS] [N_{\gamma w}] dA & \int_A [N_{\gamma \theta}]^T [DS] [N_{\gamma \theta}] dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{w}\} \\ \{\hat{\theta}\} \end{Bmatrix}$$

Segunda parcela:

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\hat{w}\} \\ \{\hat{\theta}\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \int_A ([\nabla 1][N_{\theta}])^T [DB] ([\nabla 1][N_{\theta}]) dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{w}\} \\ \{\hat{\theta}\} \end{Bmatrix}$$

Comparando-se os resultados anteriores com a expressão (2.22), conclui-se:

$$[K] = \begin{bmatrix} \int_A [N_{\gamma w}]^T [DS] [N_{\gamma w}] dA & \int_A [N_{\gamma w}]^T [DS] [N_{\gamma \theta}] dA \\ \int_A [N_{\gamma \theta}]^T [DS] [N_{\gamma w}] dA & \int_A [N_{\gamma \theta}]^T [DS] [N_{\gamma \theta}] dA \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \int_A ([\nabla 1][N_{\theta}])^T [DB] ([\nabla 1][N_{\theta}]) dA \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Observações:

1. Da expressão (2.1) pode-se concluir que  $w$  varia linearmente no elemento;
2.  $\{\theta\}$ , vê-se na expressão (2.2), é quadrático;
3.  $\bar{\gamma}$  é linear.

Estas observações se fazem importante quando da necessidade de se entender a variação dos esforços solicitantes no elemento finito usado no tratamento do problema.

## O MODELO ADOTADO NO TRATAMENTO DA PLASTICIDADE

Apresenta-se inicialmente o problema considerando uma barra sob uma tensão uniforme segundo seu eixo longitudinal. Posteriormente, faz-se a generalização para o caso das placas, o que resulta no modelo generalizado objeto de estudo desse trabalho. Na figura 3.1 tem-se um modelo para o comportamento de tal barra na situação descrita. Observa-se que até um determinado nível de carregamento se tem uma relação linear entre a tensão e a deformação apresentada pela barra (é válida a lei de Hooke), ponto que define a tensão de escoamento,  $\sigma_0$ . Ultrapassado este limite isso já não mais acontece, ou seja, observa-se uma não linearidade física. Uma outra observação a ser feita nesse problema é sobre o comportamento quando do descarregamento. Pela figura 3.2 pode-se ver que se o descarregamento for feito ainda no trecho linear do gráfico – tensão abaixo da de escoamento - a barra voltará à sua configuração geométrica inicial, caso contrário, descarregamento na fase não linear, a volta será linear, contudo, apresentando uma deformação residual.

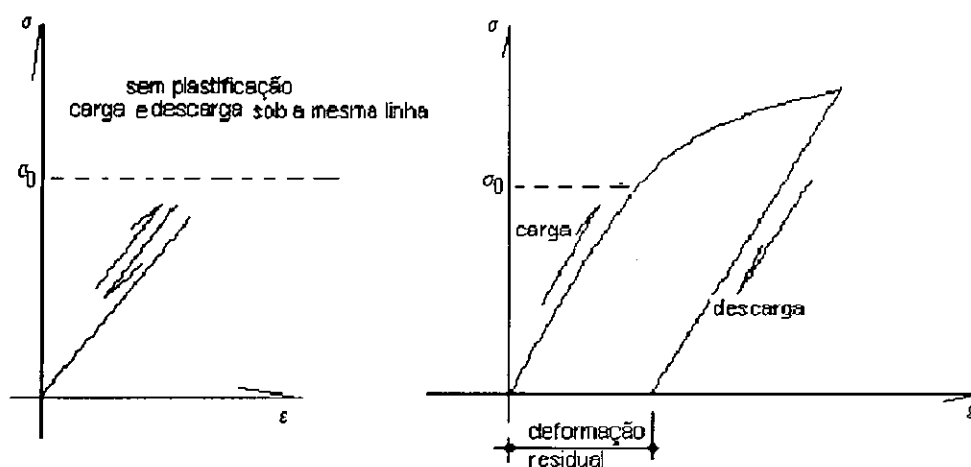


Figura 3.1 – Carregamento e descarregamento

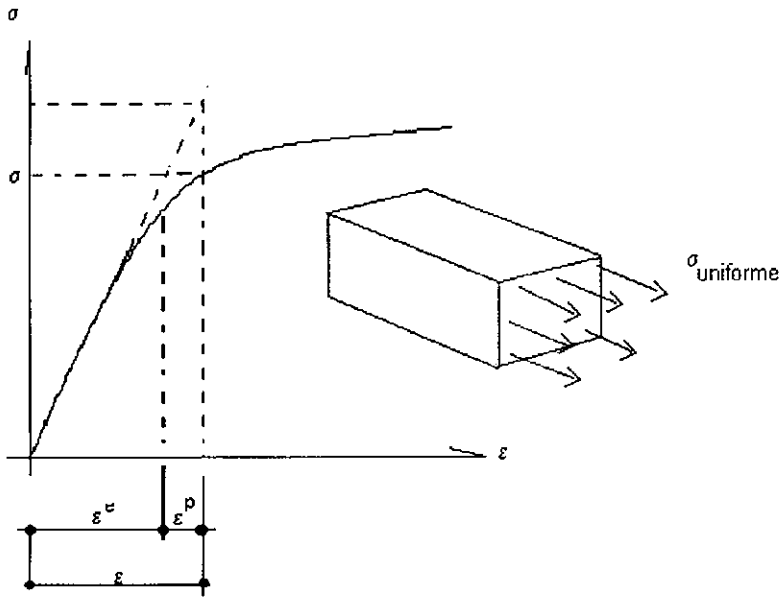


Figura 3.2 – Gráfico tensão x deformação

Para o caso das pequenas deformações considera-se válido o princípio da aditividade, segundo o qual:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (3.1)$$

Sendo  $\epsilon$  a deformação total,  $\epsilon^p$  a parcela plástica e  $\epsilon^e$  a parcela elástica. Estas parcelas estão indicadas na figura 3.2.

### 3.2) MODELOS BÁSICOS

#### 3.2.1) MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO

Nesse modelo considera-se que para tensões acima da de escoamento o material só apresenta deformação plástica e se deforma infinitamente sem nenhum acréscimo de tensão. Como representado na Figura 3.3.

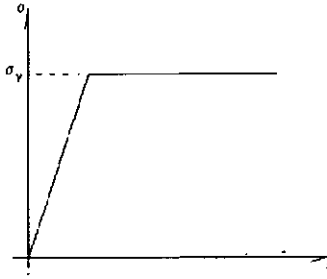


Figura 3.3-material plástico perfeito

### 3.2.2) ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

Nesse modelo considera-se que o material apresenta um ganho em seu limite de escoamento quando sujeito a um processo de carga e descarga. Esse ganho se dá igualmente nos dois sentidos de carregamento. Para barra representada na Figura 3.1 tem-se o modelo da relação constitutiva mostrado na Figura 3.4

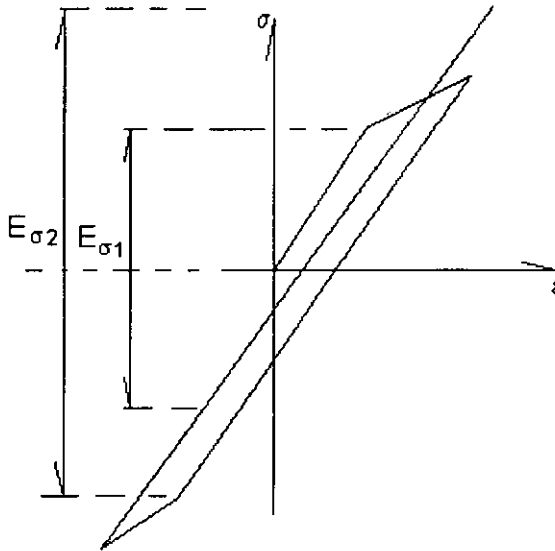


Figura 3.4 - Endurecimento isotrópico

Na Figura 3.4  $E_{\sigma}$  é o conjunto de tensões menores ou iguais à tensão de escoamento. Observe que  $E_{\sigma 1} = [-\sigma_{y1}, \sigma_{y1}]$ ,  $E_{\sigma 2} = [-\sigma_{y2}, \sigma_{y2}]$ ,  $E_{\sigma 2} \supset E_{\sigma 1}$  já que  $\sigma_{y2} > \sigma_{y1}$  e que os dois intervalos possuem como centro a origem do sistema de eixos.

Pode-se formalizar o tratamento desse modelo partindo-se das seguintes hipóteses:

- i) O centro de  $E_\sigma$  se mantém na origem.
- ii) O endurecimento é proporcional à variação da deformação plástica e independente do sinal desta, ou seja, varia linearmente com  $|\dot{\epsilon}|^2$ .

Definindo-se uma função de escoamento  $f$  como sendo tal que se  $f > 0$  houve o escoamento, pode-se para esse modelo, defini-la da seguinte forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_y + H_{iso} \alpha] \leq 0 \quad (3.2)$$

com  $\sigma_y > 0$ ,  $H_{iso} \geq 0$  e  $\alpha \geq 0$ . Assim define-se o espaço das tensões admissíveis:

$$E_\sigma = \{(\sigma, \alpha) \in R \times R_+ / f(\sigma, \alpha) \leq 0\} \quad (3.3)$$

tomando-se para um valor constante de  $\alpha$  os valores de  $\sigma$  que satisfazem a equação 3.2 tem-se a interseção de  $E_\sigma$  com a reta  $\alpha = \text{constante}$  que nos dará o trecho elástico para esse valor de  $\alpha$ . Daí tem-se o gráfico da figura 3.5.

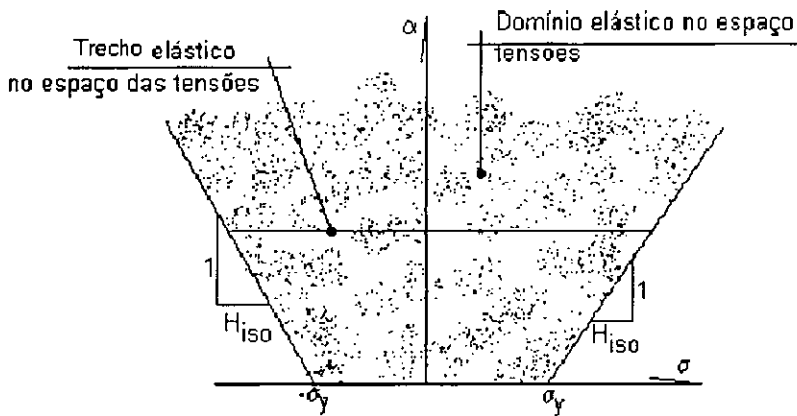


Figura 3.5 – Trecho e domínio elástico no espaço das tensões

<sup>2</sup> Com '•' sobre o símbolo indica a derivação em relação ao tempo, ou seja,  $\frac{d}{dt}$ .

Caracteriza-se, na figura 3.5,  $H_{iso}$  como sendo uma constante que ajusta o modelo a cada material, ou seja, um dado característico do material. Deve-se observar ainda, que sua dimensão é de tensão.  $H_{iso}$  é denominado de módulo plástico.

A variável  $\alpha$  mede o quanto de deformação plástica o material já sofreu, ou seja,  $\alpha$  carrega a história de deformação do material. É denominada de *acúmulo de deformação plástica*. Pela hipótese ii pode-se escrever:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^P| \tag{3.4}$$

$\dot{\epsilon}^P$  é a taxa com que  $\epsilon^P$  varia.

### 3.2.2 - ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Aqui introduz-se uma modificação na hipótese (i) do caso anterior:

A ordenada do centro de  $E_{\sigma}$  se modifica mas o trecho elástico se mantém constante. Esse modelo se diferencia do anterior pelo fato de apresentar um translado do espaço das tensões admissíveis  $E_{\sigma}$  ao invés de uma expansão do mesmo. Representa-se o modelo na Figura 3.6.

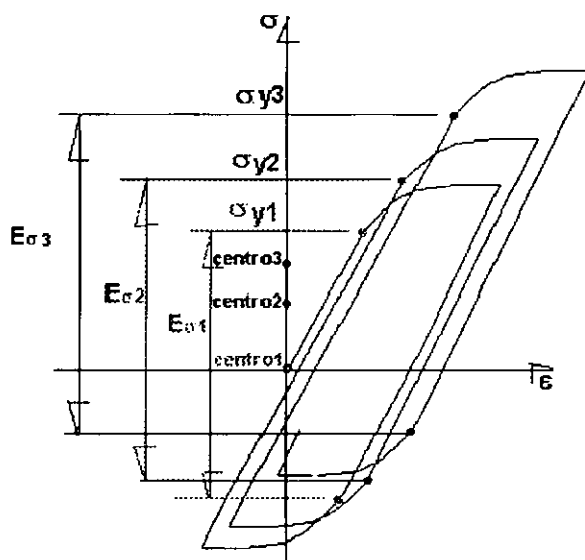


Figura 3.6-Endurecimento cinemático

Da observação do comportamento dos diversos materiais na natureza pode-se concluir que os modelos anteriores são mais distantes da realidade que um modelo que apresente uma combinação dos efeitos de endurecimento cinemático e isotrópico. Esse efeito é denominado de *efeito Bauschinger*. Para contemplar tal efeito introduz-se na função de escoamento uma variável interna 'q' que define a locação do centro de  $E_\sigma$  (ordenada do centro do trecho elástico) :

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma - q| - [\sigma_y + H_{iso} \alpha] \leq 0 \quad (3.5)$$

Tomando-se como válido o princípio de Ziegler[5],[16],[19] segundo o qual a evolução de q é proporcional à da deformação plástica, escreve-se:

$$\dot{q} = H_{cin} \dot{\epsilon}^P \quad (3.6)$$

$H_{cin}$  é uma constante característica do material denominada de módulo de endurecimento cinemático e tem dimensão de tensão.

### 3.3 - O MODELO GENERALIZADO

Em se tratando de corpos orientados é de grande praticidade para engenharia tratar o comportamento desses em termos de esforços sollicitantes ao invés de se falar em tensões como no tratamento clássico da mecânica do contínuo.

Inicia-se o tratamento formal do problema definindo-se:

i) vetor de deformação generalizado :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

ii) vetor de tensão generalizado

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \{m\} \\ \{t\} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Assim, considerando-se pequenas deformações, já se pode generalizar o princípio da aditividade.:

$$\{E\} = \{E^P\} + \{E^E\} \quad (3.9)$$

Onde  $\{E^P\}$  é parcela plástica do vetor de deformação<sup>3</sup> e  $\{E^E\}$  é a parcela elástica.

$$\{E^E\} = [D]^{-1} \{S\} \quad (3.10)$$

$[D]$  é a matriz constitutiva elástica.

O problema que se tem é, portanto, determinar essas parcelas da deformação.

### 3.3.1-FUNÇÃO DE ESCOAMENTO

No caso uniaxial se tinha apenas a tensão normal atuando sobre a seção da barra e essa era comparada com o valor da tensão de escoamento do material, considerando-se os efeitos de endurecimento. No caso geral tridimensional o que se faz é definir uma norma que represente um dado estado tensional a que se submete o material e analogamente ao caso uniaxial compara-se essa norma ao valor da tensão de escoamento, levando-se em conta o efeito do endurecimento. A combinação que se toma das tensões define uma superfície. Assim, para cada definição de tal superfície, surgem os vários critérios de escoamento apresentados na literatura. Cada qual com características que o torna mais aplicável a determinado tipo de material. Na figura 3.7 os eixos são as tensões principais e a superfície  $s$  é a de escoamento. Vê-se então, que o estado tensional  $E2$  não é admissível pois está fora da superfície. Já o estado tensional  $E1$  que esta sobre a superfície é

<sup>3</sup> A partir de agora entenda-se por vetor de deformação e vetor de tensão vetor de deformação generalizado e vetor de tensão generalizado, respectivamente.

admissível. Dessa forma, novamente toma-se o conceito introduzido pela figura 3.1 e faz-se a seguinte generalização; se o estado tensional  $E$  está no máximo sobre a superfície de escoamento  $s$ , o processo é elástico, caso contrário é elastoplástico e assim sendo, teremos uma parcela plástica e outra elástica das deformações, parcelas estas, já apresentadas na expressão (3.9). Deve-se observar que um estado tensional fora da superfície de escoamento, como  $E2$  na Figura 3.7, não existe de fato pois o material em questão não o admite. Estes estados são uma abstração teórica necessária para o tratamento do problema. Eles nos indicam que a parcela plástica da deformação que consideramos está aquém do valor verdadeiro. Mas todo estado real pertence à região do espaço limitada pela superfície de escoamento.

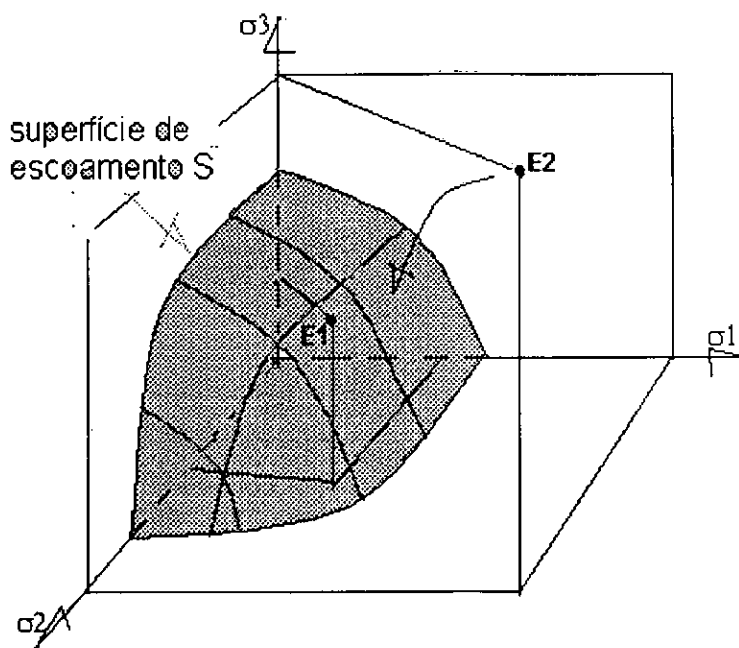


Figura 3.7-Representação de uma superfície de escoamento

### 3.3.1.1- CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON-MISES

Nesse critério a função de escoamento é definida em função das tensões principais da seguinte forma:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 6k^2 \quad (3.11)$$

onde,  $k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ ,  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento do material.

Para o caso geral o estado tensional de um sólido é dado pelo tensor  $[\tau]$ .

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para o caso tratado nesse trabalho tem-se

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

o que faz a expressão 3.11 assumir o aspecto:

$$f = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - \sigma_0^2 \quad (3.14)$$

Assim tem-se na expressão (3.14) o critério de escoamento de Von Mises para o caso das placas.

### 3.3.1.2 – A FUNÇÃO DE ESCOAMENTO DO MODELO GENERALIZADO

Com intuito de apresentar a função de escoamento adotada em [5] passa-se a analisar o caso de uma placa retangular apoiada em dois lados e com dimensão infinita no outro sentido, figura 3.8. Analisa-se primeiro um caso onde só se tenha flexão:

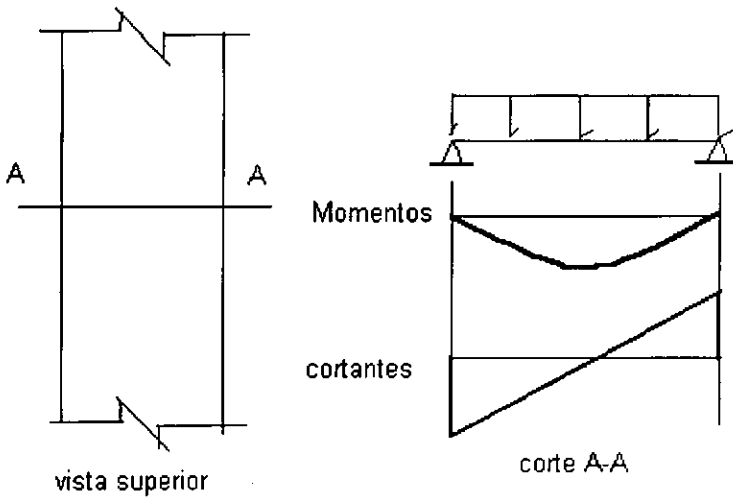


Figura 3.8 – Placa retangular biapoiada em dois lados opostos e infinita na outra direção

Esse caso é representado na Figura 3.8 pela seção localizada em  $L/2$  onde se tem cortante nulo e momento máximo. Aplica-se para essa situação a expressão (3.14) e se obtém:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (3.15)$$

Quando só se tem efeito de flexão a plastificação da seção se dará da seguinte forma:

- i) Inicia-se pelos pontos nas faces da seção ( $\pm \frac{h}{2}$ );
- ii) há uma difusão do processo pela seção até que toda ela se plastifique, formando nesse momento a chamada *rótula plástica*.

Na figura 3.9 apresenta-se o diagrama de tensões para início da plastificação, para uma situação intermediária, para o fim do processo e a difusão da plastificação pela seção transversal.

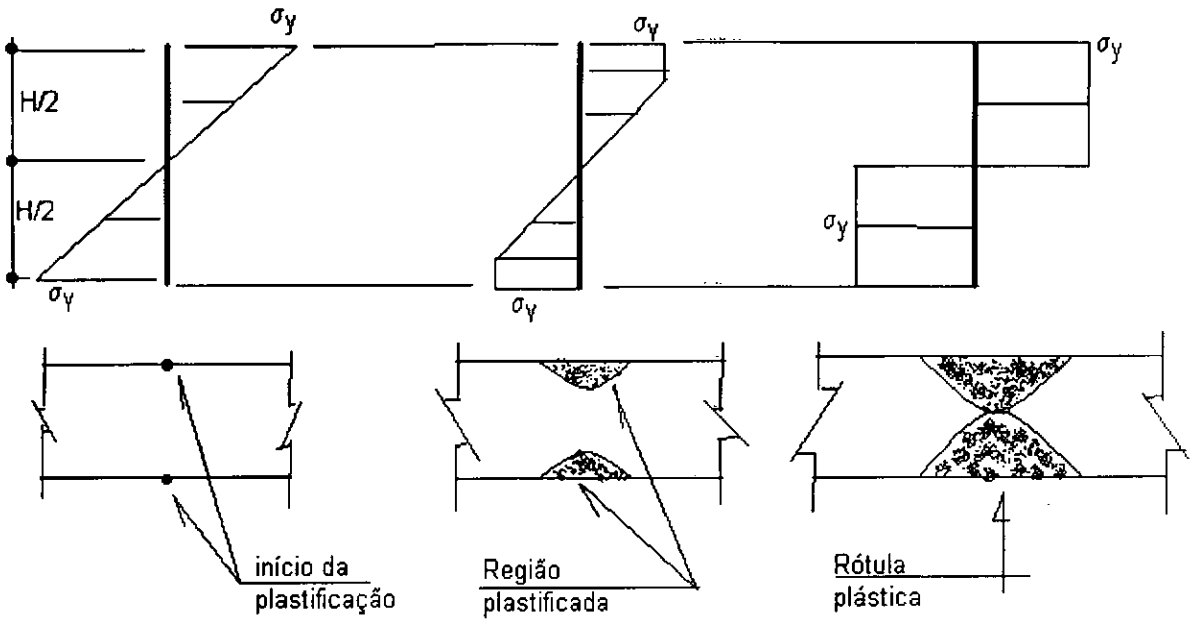


Figura3.9 – Processo de plastificação da seção transversal sob o efeito só de flexão

Tomando-se a situação do início da plastificação como mostra-se na Figura 3.9 vê-se que, assim sendo, o momento de plastificação será:

$$m = \frac{\sigma h^2}{6} \quad (3.16)$$

que resulta no seguinte estado tensional:

$$\sigma_x = \frac{6m_x}{h^2}, \quad \sigma_y = \frac{6m_y}{h^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{6m_{xy}}{h^2} \quad (3.17)$$

Com as expressões (3.17) levadas na (3.11) e com o devido algebrismo chega-se a:

$$\frac{3}{2} \left[ \frac{16}{h^2} (m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2) \right]^{\frac{1}{2}} = h \sigma_0 \quad (3.18)$$

Considerando-se as seções extremas da figura 3.7 temos o caso onde só atua na seção o esforço cisalhante. A Figura 3.9 mostra o digrama das tensões ao longo da seção transversal. Deve-se observar que o início da plastificação se dá pelo centro da seção.

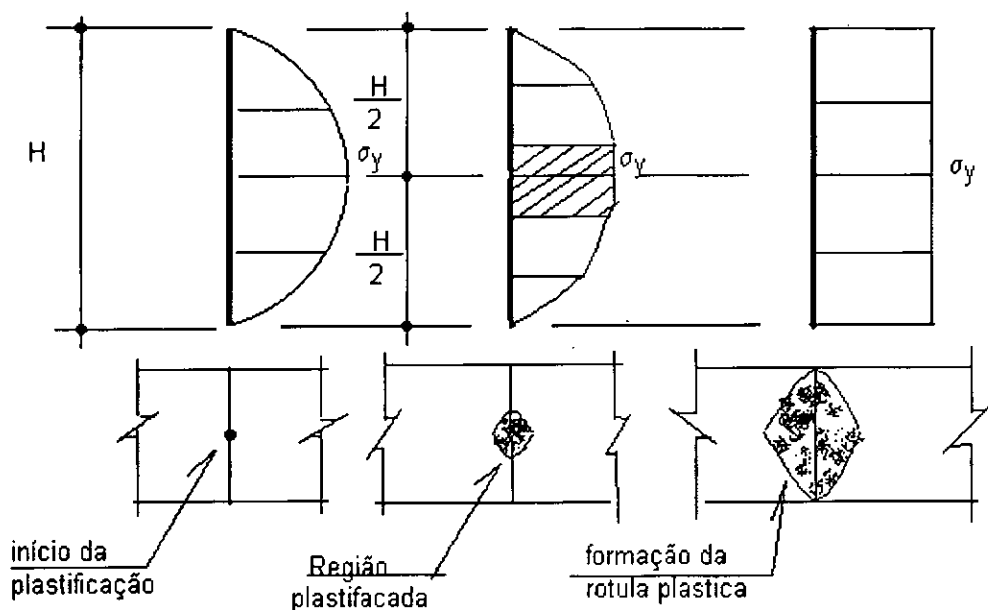


Figura3.9 – processo de formação da rótula plástica para seção sujeita só a cisalhamento

Na referência [8] tem-se o valor do esforço cisalhante máximo, ou seja, para o ponto central da seção ( $y=0$ ) dado por:

$$\{\tau\} = \frac{3}{2h} \{t\} \tag{3.19}$$

Desprezando-se os efeitos da flexão, tendo em vista a equação (3.15) e com o devido algebrismo o critério de Von Mises é escrito sob a forma seguinte :

$$h\sigma_0 = \frac{3}{2} [3(t_x^2 + t_y^2)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

Tomando-se como verdade o fato de que a plastificação se dará pela soma desses efeitos e também considerando um acréscimo na tensão de escoamento do material devido ao endurecimento isotrópico define-se uma função  $f = f(\{S\}, \alpha)$  de modo que  $f = 0$  é a superfície de escoamento. Ou seja, se  $f > 0$  houve a plastificação<sup>4</sup>. A função de escoamento aqui mostrada é apresentada em [5]. Considera que a plastificação da seção transversal da

<sup>4</sup> Aqui vale a mesma idéia de quando se diz que um estado tensional fora da superfície de escoamento é uma abstração teórica. Da mesma forma  $f > 0$ , que indica um estado tensional nesta situação, na realidade nunca existe. É uma abstração teórica necessária no tratamento da questão.

placa se dá quando um ponto qualquer da mesma se plastifica. Ao contrário das consideradas tradicionalmente que consideram que a plastificação se dá quando toda a seção se plastifica.  $f$  é dada por:

$$f = \frac{3}{2} \left[ \frac{16}{h^2} (m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}) + 3(t_x^2 + t_y^2) \right]^{\frac{1}{2}} - h(\sigma_y + H_{iso} \alpha) \quad (3.21)^5$$

Observe que o acréscimo na tensão de escoamento devido ao endurecimento é dado pelo produto  $H_{iso} \alpha$ . Incluindo-se o endurecimento cinemático e escrevendo a (3.21) de forma matricial temos:

$$f = \|\{\Sigma\}\|_A - R \quad (3.22)$$

Onde:

$$\{\Sigma\} = \{S\} - \{q\} \quad (3.22a)$$

$$\|\{\Sigma\}\|_A = (\{\Sigma\}^T [A] \{\Sigma\})^{1/2} \quad (3.23)$$

$$R = h(\sigma_y + H_{iso} \alpha) \quad (3.24)$$

Com  $[A] = \begin{bmatrix} \frac{16}{h^2} [P] & [0] \\ [0] & 3[l_2] \end{bmatrix}$ ,  $[l_2]$  é a identidade  $2 \times 2$ .

$$[P] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

### 3.3.2) FUNÇÃO LIMITE

Esta função limita o espaço dos estados tensionais admissíveis após o início da plastificação, ou seja define as superfícies de escoamento subsequentes. Um estado

<sup>5</sup> Para maiores detalhes sobre a obtenção dessa expressão veja o apêndice A

tensional  $\{\Sigma\}$  só é admissível se  $F(\{\Sigma\}, \alpha, f, \dot{\gamma}) \leq 0$ . Ou seja,  $F=0$  é a superfície de escoamento, a cada nível de tensão. Define-se  $F$ , em [5] e [15], da seguinte forma:

$$F = g(f) \frac{d}{dt} \left[ \|\Sigma\|_{\mathcal{A}} \right] - \dot{\gamma} \quad (3.25)$$

Sendo:

$\dot{\gamma}$  é sem dimensão e denominado fluxo plástico

$$g(f) = \frac{f}{\delta(h\beta - f) + H} \quad (3.26)$$

Onde :

$\beta$  e  $\delta$  são constantes positivas com dimensão de tensão .  $\delta$  é relacionada com a velocidade com que se dá a difusão da plastificação na seção transversal e  $\beta$  é, no ensaio uniaxial, a distância entre a tensão assintótica e a tensão de escoamento[18] e

$$H = h(H_{iso} + H_{cin}) \quad (3.27)$$

Na teoria clássica essas funções( $f$  e  $F$ ) são coincidentes. Quer-se dizer, a função que define a superfície de escoamento é a mesma que define o limite de escoamento.

Apresenta-se na figura 3.10 o gráfico  $F \times f$ . Observa-se a existência da descontinuidade de  $F(f)$  no ponto correspondente a  $f = f_{max}$  (denominação aqui adotada). Pode-se determinar a valor de  $f_{max}$  pela expressão (3.26):

$$f_{max} = \frac{H}{\delta} + h\beta \quad (3.28)$$

Deve-se notar que a situação de  $f = f_{max}$  torna  $g$  indeterminada –expressão (3.26)- e por conseguinte, também  $F$  – expressão (3.25). Nota-se , pela observação da (3.22), que  $f$  assume valores negativos , quando os esforços solicitantes são menores que  $R$ , e depois ao se incrementá-los, ela passa por zero e cresce com o aumento dos mesmos. Ora, chegará um determinado valor de  $f = f_{max}$  que impossibilitará a definição de  $F$ , pela(3.25). Assim é se diz que  $F$  limita o campo de tensões admissíveis.

Ainda seguindo na análise da figura 3.4, é fato que para  $f < 0$  sempre tem-se  $F < 0$ , depois vem um trecho em que  $f > 0$  mas  $F < 0$  até que  $F = 0$  e partir daí,  $f > 0$  e  $F > 0$ , até que  $f$  se iguale a  $f_{max}$ . A partir desse ponto  $F$  volta a ser negativa embora se tenha  $f$  crescente, representando incremento do estado tensional. Mas, inicialmente se tem  $F < 0$  representando um processo sem plastificação até que  $F$  seja nula, não é admissível que se volte a ter um processo elástico. Conclui-se assim, que esse fato, que representa a mudança no gráfico da figura 3.4 para o trecho hiperbólico, indica estar a placa sob um nível de tensão a partir do qual não se pode mais carregá-la. Pode-se descarregá-la o que torna o processo linear elástico, representado pela volta de  $F$  a valores negativos.

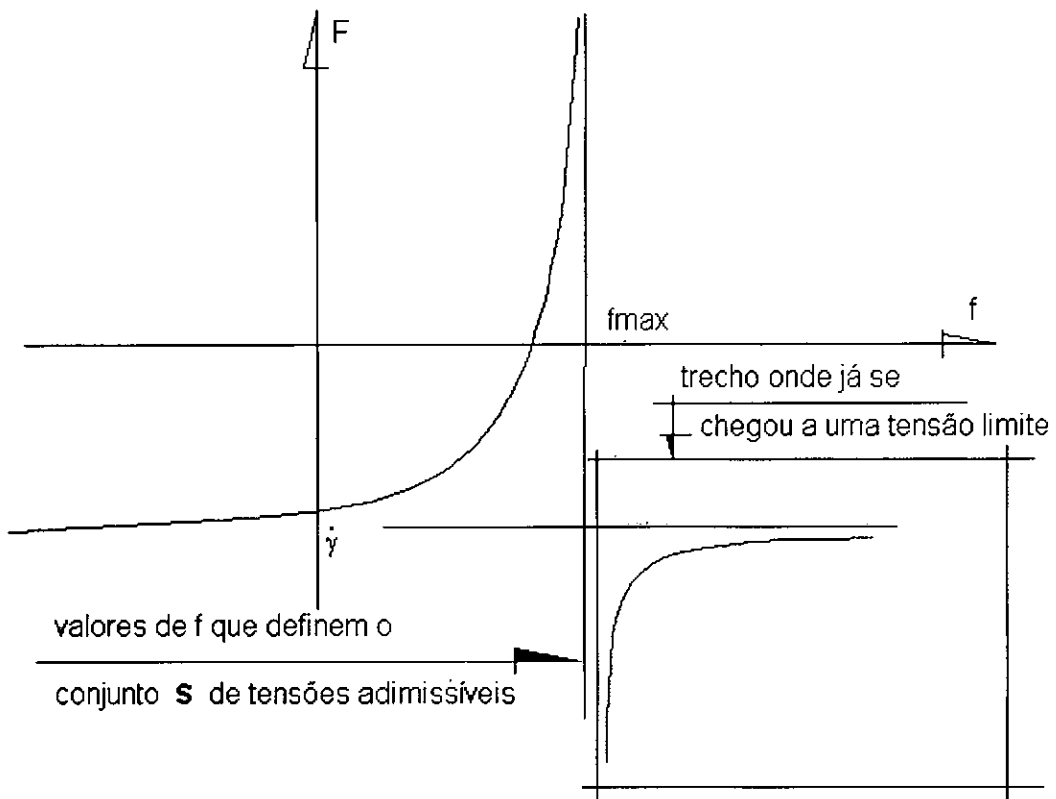


Figura 3.10 – Gráfico Fxf

Observa-se na expressão (3.25) que ao se verificar a admissibilidade de um estado tensional, determina-se  $\frac{d}{dt}(\|\Sigma\|_A)$ , que expressa a variação do estado tensional. Assim, se  $\frac{d}{dt}(\|\Sigma\|_A)$ , é positivo,  $\{\Sigma\}$  cresce, ou seja, a placa está sendo carregada; caso contrário, descarregada.

## 3.3.3 – LEI DE FLUXO

A lei de fluxo, que é a definição de como a parcela plástica da deformação evolui ao se incrementar as deformações, aqui usada é associativa e apresentada por Auricchio e Taylor [5]. Tem o seguinte aspecto:

$$\{\dot{E}^P\} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \{\Sigma\}} = \dot{\gamma} \{N\} \quad (3.29)$$

Onde:  $\dot{\gamma}$  é o fluxo plástico e  $\{N\}$  é o vetor normal à superfície de escoamento, tem dimensão de  $\{E\}$  e pode ser determinado, conforme [5], por:

$$\{N\} = \frac{[A]\{\Sigma\}}{\| \Sigma \|_A} \quad (3.30)$$

Nesta mesma referência[5] tem-se:

$$\dot{E}^P = (\{\dot{E}^P\}^T [\Lambda] \{\dot{E}^P\})^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

$$\{\dot{q}\} = h H_{cin} \dot{\gamma} [\Lambda] \{N\} \quad (3.32)$$

$$\text{com } [\Lambda]^{-1} = [A]$$

Assim, resume-se no quadro 1, abaixo, a formulação elasto-plástica do modelo que se adota nesse trabalho

Quadro1 – Formulação do problema elasto-plástico

$$\{S\} = [D]\{E^E\} = [D](\{E\} - \{E^P\})$$

$$\{\Sigma\} = \{S\} - \{q\}$$

$$f = f(\{\Sigma\}, \bar{E}^P)$$

$$\{\dot{E}^P\} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \{\Sigma\}} = \dot{\gamma} \{N\}$$

$$\bar{E}^P = \left( \{\dot{E}^P\}^T [\Lambda] \{\dot{E}^P\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\{q\} = h H_{cin} \dot{\gamma} [\Lambda] \{N\}$$

$$F = F(\{\Sigma\}, \alpha, f, \dot{\gamma})$$

$$\dot{\gamma} \geq 0, F \leq 0, \dot{\gamma} F = 0$$

#### – OBTENÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA GENERALIZADA

Fazendo-se uso de um processo incremental com controle de deformações apresenta-se neste capítulo um algoritmo para se estabelecer a relação constitutiva resumida no quadro 1.

O que se faz é basicamente:

- i) Incrementa-se o vetor de deformação generalizada  $\{E\}$ .
- ii) Determina-se o vetor de tensões generalizadas  $\{S\}$ . Aqui considera-se válida a lei de Hooke, ou seja, admite-se que não houve plastificação.
- iii) Verifica-se a admissibilidade do estado tensional representado pelo vetor  $\{S\}$ , anteriormente determinado. Se  $f \leq 0$  o estado é admissível. Caso contrário não. Sendo o estado tensional válido volta-se a etapa (i). Caso não, passa-se a etapa seguinte.

- iv) Faz-se uso de um algoritmo de retorno para se determinar a parcela plástica da deformação e retornar o estado tensional à superfície de escoamento. Essa é definida por  $F=0$ .

Convenciona-se a partir daqui que dado um incremento de nosso interesse e nesse, dois instantes distintos,  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , sendo  $t_n < t_{n+1}$ , ao se referir a uma grandeza genérica  $G(t)$ , tem-se:

$$G_n = G(t_n) \quad \text{e} \quad G = G(t_{n+1})$$

Com essa convenção pode-se dizer que problema em questão se resume a determinar-se as variáveis que definem o estado tensional em  $t = t_{n+1}$  a partir de seus valores em  $t = t_n$ . As variáveis as quais se refere são.

$$\{S_n\}, \{E_n\}, \{E_n^P\}, \alpha_n \text{ e } q_n$$

Conforme a referência [5], pode-se demonstrar que :

$$\{E^P\} = \{E_n^P\} + \lambda\{N\} \tag{3.33}$$

$$\alpha = \alpha_n + \lambda \tag{3.34}$$

$$\{q\} = \{q_n\} + hH_{cin}\lambda[A]^{-1}\{N\} \tag{3.35}$$

Sendo:

$$\lambda = \int_{t_i}^{t_{n+1}} \dot{\gamma} dt \tag{3.36}$$

Ora, o problema é então resolvido com a determinação de  $\lambda$  que é denominado de parâmetro de consistência. Uma discussão mais aprofundada desse assunto pode ser vista em Simo e Hughes [16]. Aqui limita-se a apresentar o método usado em Auricchio e Taylor [5] para se fazer a integração indicada na expressão (3.36).

Passa-se a apresentar mais detalhadamente o método para se determinar as grandezas que definem o estado tensional do elemento. Proceda-se para tanto da seguinte maneira :

PRIMEIRO PASSO - ESTADO DE TESTE

Assume-se que não houve plastificação no intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , ou seja,  $\{E^P\} = \{E_n^P\}$ . Assim sendo, tem-se:

$$\lambda^T = 0 \tag{3.37}$$

$$\{E^{PT}\} = \{E_n^P\} \tag{3.38}$$

$$\alpha^T = \alpha_n \tag{3.39}$$

$$\{q^T\} = \{q_n\} \tag{3.40}$$

$$\{S^T\} = [D](\{E\} - \{E^{PT}\}) = [D](\{E\} - \{E_n^P\}) \tag{3.41}$$

$$\{\Sigma\} = \{S^T\} - \{q^T\} = \{S^T\} - \{q_n\} \tag{3.42}$$

Com essas considerações calcula-se o valor da função  $f$  para este estado tensional e verifica-se a sua admissibilidade, ou seja, se  $f \leq 0$ . Sendo este estado possível incrementa-se o vetor  $\{E\}$  e faz-se novamente a verificação. Enquanto, ao se incrementar  $\{E\}$ , chega-se a  $f \leq 0$  se está trabalhando em regime elástico e a lei de Hooke permanece válida. Na figura 3.4 estamos no trecho onde  $f < 0$  e  $F < 0$ . Neste ponto pode-se notar um detalhe no gráfico apresentado na figura 3.4. Ele representa uma configuração da variação de  $F \times f$  para um determinado estado tensional com um determinado valor de  $\dot{\gamma}$ . Deve-se notar que enquanto se tem com procedimento anterior o estado tensional válido tem-se  $\dot{\gamma} = 0$  e portanto não houve fluxo plástico. Assim sendo, o gráfico mostrado na figura 3.4 assume a forma inicial mostrada na figura 3.5. Quando a cada incremento de  $\{E\}$  se tem um novo valor para  $\dot{\gamma}$  o

gráfico muda de aspecto. Algumas situações são representadas na figura 3.5. É importante notar que o valor do limite máximo de  $f$  não muda e o valor de  $f$  tal que  $F=0$  tende a esse limite.

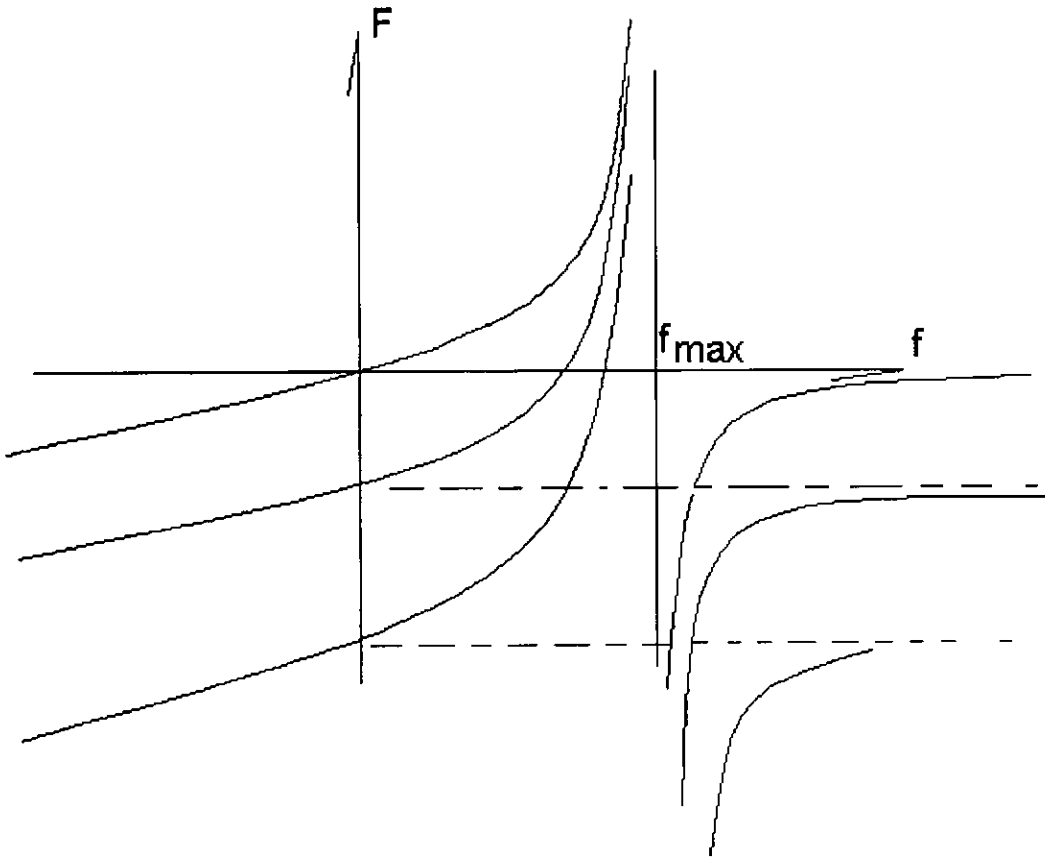


Figura 3.5 – Configuração do gráfico  $F \times f$  com avariação do estado tensional

Estando-se agora em um determinado incremento das deformações as quais produzem, via considerações anteriores, um estado tensional não admissível,  $f > 0$ , deve-se aplicar um algoritmo de retorno para se determinar a parcela plástica das deformações,  $\{E^P\}$ . Passa-se então, à segunda etapa do procedimento.

### SEGUNDO PASSO - CORREÇÃO PLÁSTICA

Para se efetuar a correção plástica se faz necessária a determinação de  $\{E^P\}$ ,  $\lambda$  e  $\{N\}$  para o incremento em questão. Feito isso, as demais variáveis podem se atualizadas pelas seguintes expressões:

$$\alpha = \alpha^T + \lambda \quad (3.43)$$

$$\{q\} = \{q^T\} + hH_{cin} \lambda [A]^{-1} \{N\} \quad (3.44)$$

$$\{S\} = [D](\{E\} - \{E^P\}) \quad (3.45)$$

$$\{\Sigma\} = \{S\} - \{q\} \quad (3.46)$$

A determinação de  $\{E^P\}$ ,  $\lambda$  e  $\{N\}$  se faz em um processo incremental, melhor detalhado em Simo e Kennedy [3], Ibrahimbegovic [7] e Simo e Hughes [16]. Da equação (3.33) pode-se definir, para um estado de teste em  $t_{n+1}$  e um dado estado tensional em  $t_n$ , a seguinte equação :

$$\{R\} = \{E_n^P\} + \lambda\{N\} - \{E^P\} = \{0\} \quad (3.47)$$

E ainda, pela definição da função F:

$$r = -F(\{E^P\}, \lambda) = 0 \quad (3.48)$$

As equações acima, (3.47) e (3.48), que devem ser satisfeitas simultaneamente, formam um sistema de equações que linearizado, referências [6] e [17], assume o aspecto:

$$\begin{Bmatrix} \{R^{(i+1)}\} \\ r^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R^{(i)}\} \\ r^{(i)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \{R^{(i)}\}}{\partial \{E^P\}} & \frac{\partial \{R^{(i)}\}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial r^{(i)}}{\partial \{E^P\}} & \frac{\partial r^{(i)}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta E^P\}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

O índice superior ( i ) indica o passo no método iterativo de Newton-Raphson que se usa para se obter a solução:

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta E^P\}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_5 + \lambda^{(i)} [B] [D] & - \{N\} \\ - T_2 [C] & - \Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{R^{(i)}\} \\ r^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Onde:

$$[B] = \frac{1}{\|\Sigma\|_A} ([A] - \{N\}\{N\}^T), \quad (3.51)$$

$$[C] = \frac{1}{\|\Sigma\|_A} \{\Sigma\}^T [A][D], \quad (3.52)$$

$$T_1 = \delta\lambda + \|\Sigma\|_A - \|\Sigma_n\|_A, \quad (3.53)$$

$$T_2 = T_1 + f, \quad (3.54)$$

$$D = \delta(h\beta - f) + H, \quad (3.55)$$

$$\Omega = D + hH_{iso}T_1. \quad (3.56)$$

faz-se a atualização das variáveis da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{E^P\} \\ \lambda \end{Bmatrix}^{(i+1)} = \begin{Bmatrix} \{\Delta E^P\} \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}^{(i+1)} + \begin{Bmatrix} \{E^P\} \\ \lambda \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (3.57)$$

Observa-se que com a equação (3.48) é que se impõe que a superfície de escoamento seja definida por  $F=0$ .

Para se visualizar a relação constitutiva anteriormente mostrada pode-se, para um determinado ponto de um elemento, aplicar-se um campo de deformações; incrementar-se o vetor  $\{E\}$ , que representa esse campo, e se obter via relação constitutiva o campo das tensões correspondentes. Para tanto pode-se fazer uso do seguinte algoritmo:

ALGORITMO:

início

inc=1

$\lambda = 0$

$\{E_n^P\} = \{0\}$

$\{q_n\} = \{0\}$

$\alpha = 0$

(estado de teste)

faço ate que inc= Ninc

( Ninc é o número total de incrementos)

10  $\{E^P\} = \{E_n^P\}$

$\{q\} = \{q_n\}$

$\alpha = \alpha_n$

$\{E^e\} = \{E\} - \{E^P\}$

$S = [D]\{E^e\}$

Calculo f

Se f menor ou igual a 0 faço

$$E = E + \Delta E$$

$$Inc=inc+1$$

Vou para 20

Senão

Calculo F

Calculo {N}

(nos próximos passos usa-se as expressões (3.50) à (3.56))

$$\{R\} = \{E_n^P\} + \lambda\{N\} - \{E^P\}$$

$$r = -F$$

verifico critério de {R} e r

se critério é satisfeito faço

$$\{E_n^P\} = \{E^P\}$$

$$\{q_n\} = \{q\}$$

vou para 20

senão

resolvo

$$\begin{Bmatrix} \Delta E^{P(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_5 + \lambda^{(i)}[B][D] & -\{N\} \\ -T_2[C] & -\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R^{(i)} \\ r^{(i)} \end{Bmatrix}$$

faço  $E^P = E^P + \Delta E^P$

$$\lambda = \lambda + \Delta \lambda$$

atualizo as variáveis(expressões(3.43) à (3.46))

$$\{E_n^P\} = \{E^P\}$$

$$\{q_n\} = \{q\}$$

$$\bar{E}^P = \bar{E}_n^P$$

$$\lambda = 0$$

$$\{E\} = \{E\} + \{\Delta E\}$$

$$INC=INC+1$$

vou para 10

fim do se

20 fim do ate que

fim

Um detalhe importante é o critério de verificação da condição de carregamento máximo ou de descarregamento. Esse critério é mostrado na figura 3.8. Nessa figura  $df$  é a variação de  $f$ , ou seja,  $f - f_n$ . Observa-se, pela figura 3.8, que se  $f < 0$  e  $df > 0$  se está carregando linearmente. Com  $f > 0$  até  $f = f_{max}$  e  $df > 0$  se carrega em processo plástico. E no descarregamento se tem  $f > 0$  até  $f = 0$  e  $df < 0$ .

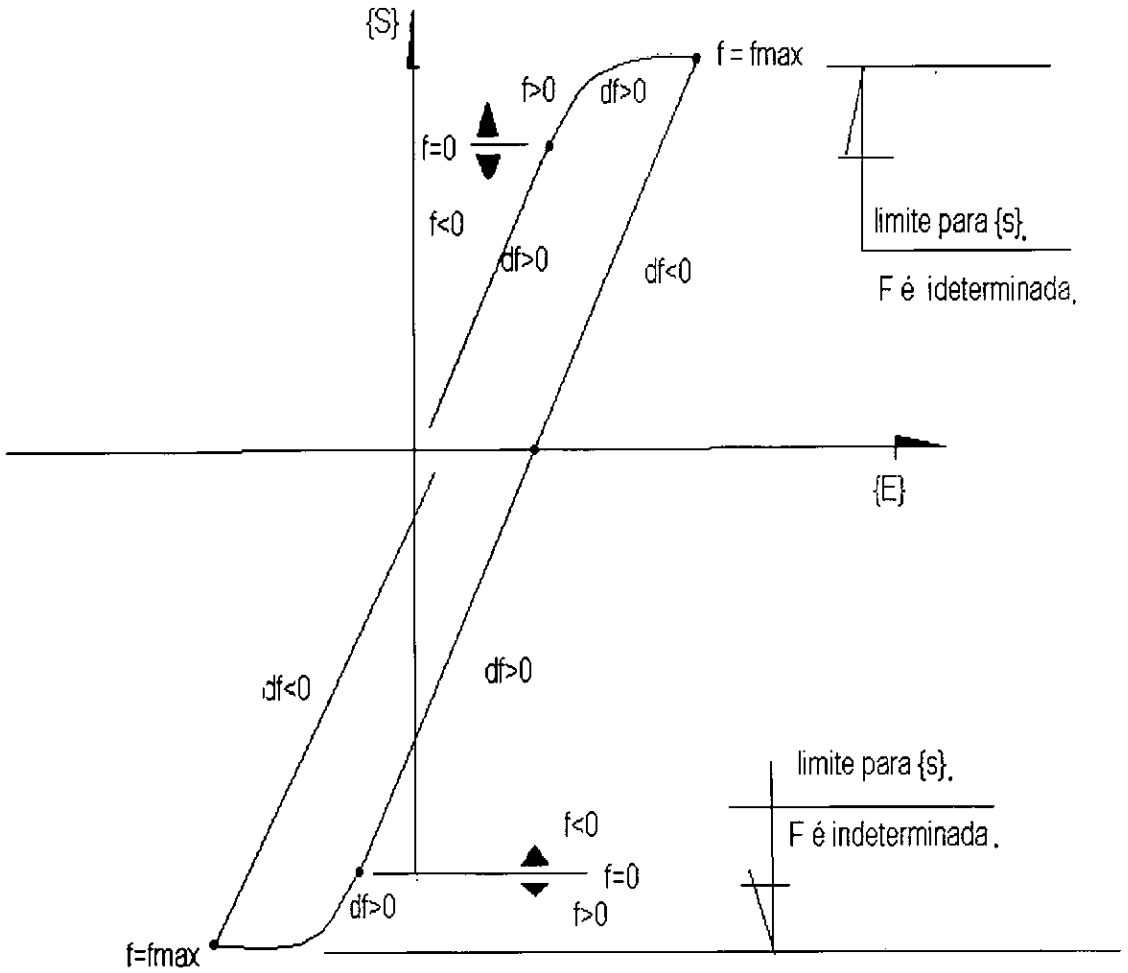


Figura 3.8 – Carga e descarga

### 3.5- EXEMPLOS

Toma-se sempre as seguintes propriedades para material:

Módulo de elasticidade :  $E = 10.92$

Coefficiente de Poisson :  $\nu = 0.3$

Módulo de cisalhamento Transversal :  $G = 4.2$

Tensão de escoamento:  $\sigma_0 = 60$

As unidades são sempre as do SI.

3.5.1 - EXEMPLO 01- Momento último em uma viga engastada e livre – Console curto

Aplica-se o algoritmo mostrado no item anterior determinando o momento último em uma viga engastada e livre. Esse exemplo é mostrado na referência 5. Os parâmetros do modelo são:  $H_{cin}=H_{iso}=0$  ,  $\beta=20$  e  $\delta=12$  . As dimensões estão na figura 3.9

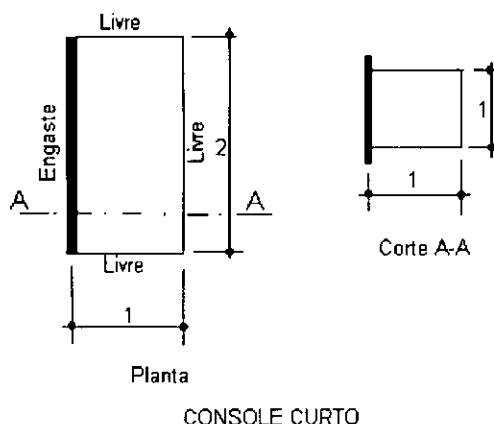


Figura 3.9 - Exemplo1

Nesse caso estaremos analisando um ponto da viga em separado, ou seja, não estamos verificando o equilíbrio global da estrutura. A motivação deste item é mostrar o aspecto da relação constitutiva e evidenciar o comportamento não linear da mesma.

O campo de deformações o qual será incrementado é obtido fazendo-se uso do elemento DRM e pela aplicação de um momento na extremidade livre da viga. O resultado obtido é mostrado na figura 3.10 e na figura 3.11 tem-se o resultado da teoria tridimensional visto em[5].

EXEMPLO 01 - MOMENTO ÚLTIMO

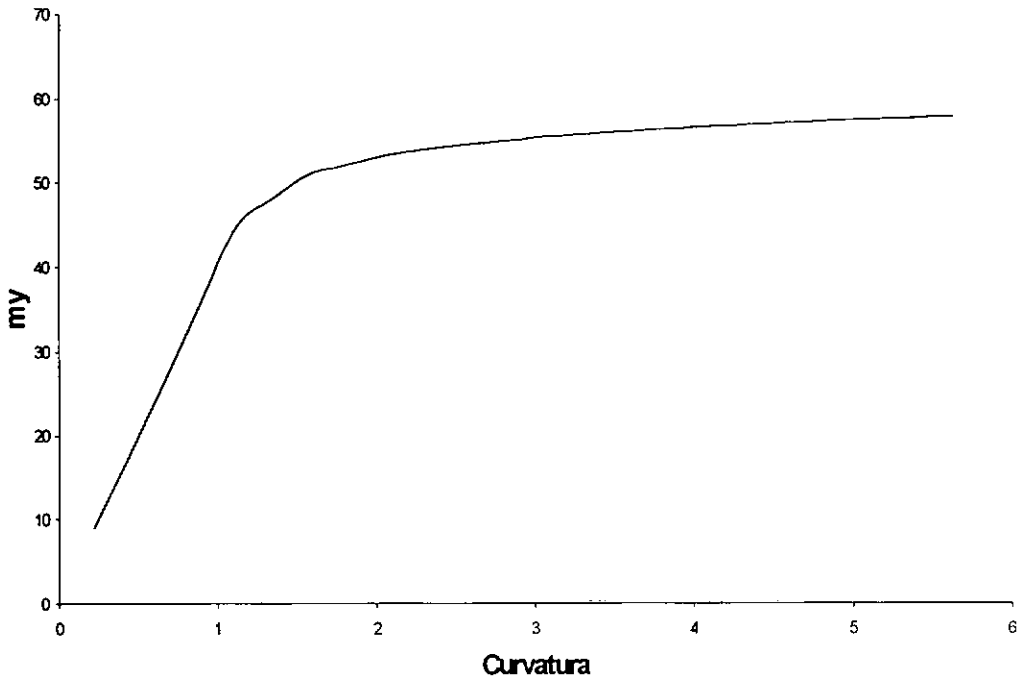


Figura 3.10 – Momento x Curvatura – exemplo 01

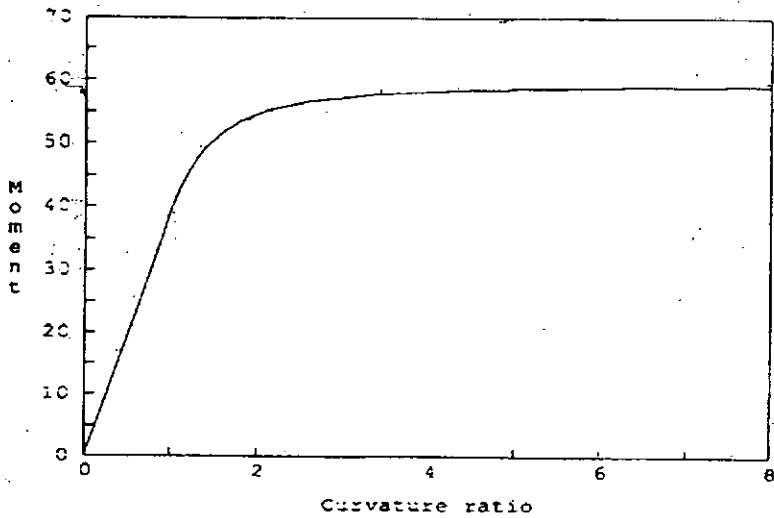


Figura 3.11- teoria tridimensional

## 3.5.2) EXEMPLO 02

Aplicaremos na mesma estrutura do exemplo 01 um carregamento cíclico e adotaremos  $H_{iso} = 50$ . O resultado obtido está na figura 3.12.

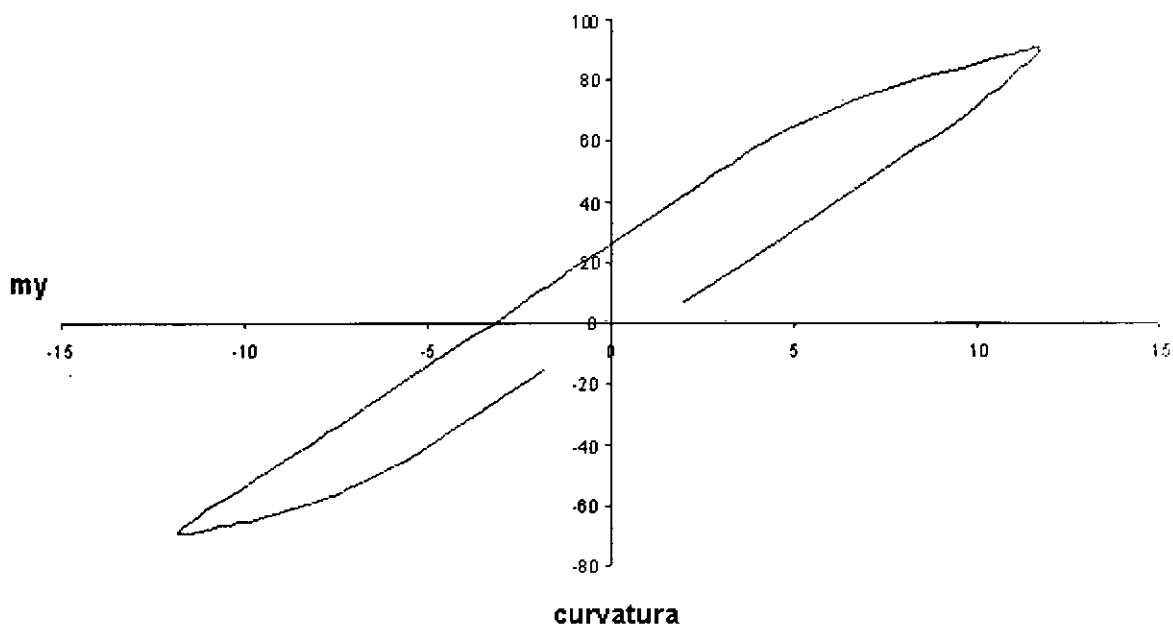


Figura 3.12-Momento x Curvatura –  $H_{iso} = 50$

## 3.5.3) EXEMPLO 03

Muda-se a altura da viga para 0.1, determina-se o momento último e aplica-se um carregamento cíclico. Os resultados estão nas figuras 3.13 e 3.14. Na figura 3.15 apresenta-se o cálculo do momento último pela teoria das vigas.

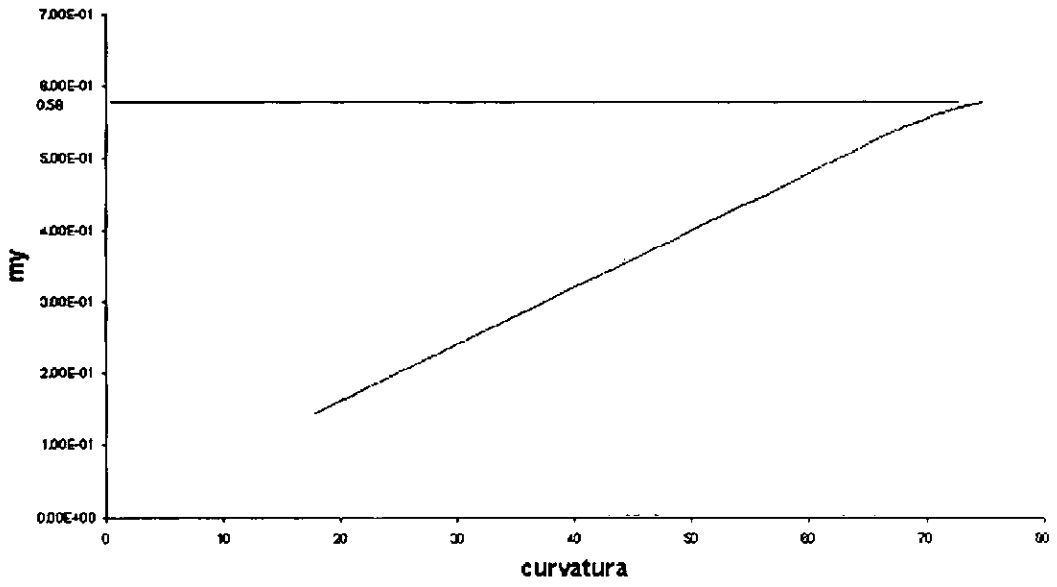


Figura 3.13 – Momento x Curvatura – Exemplo 03

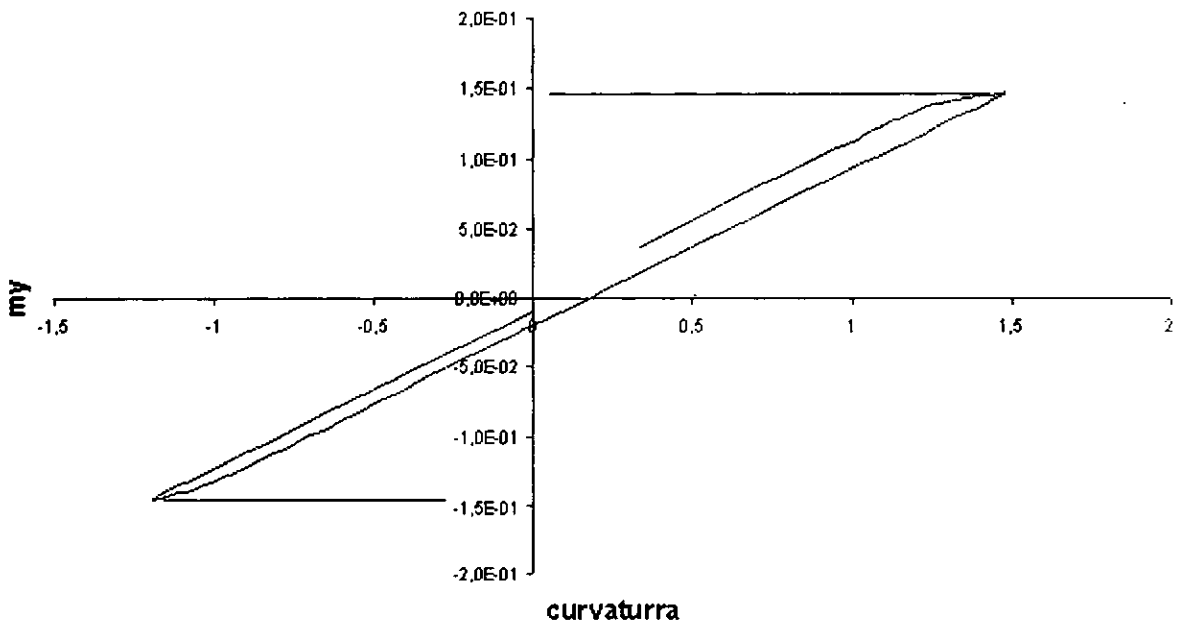


Figura 3.14- carregamento cíclico

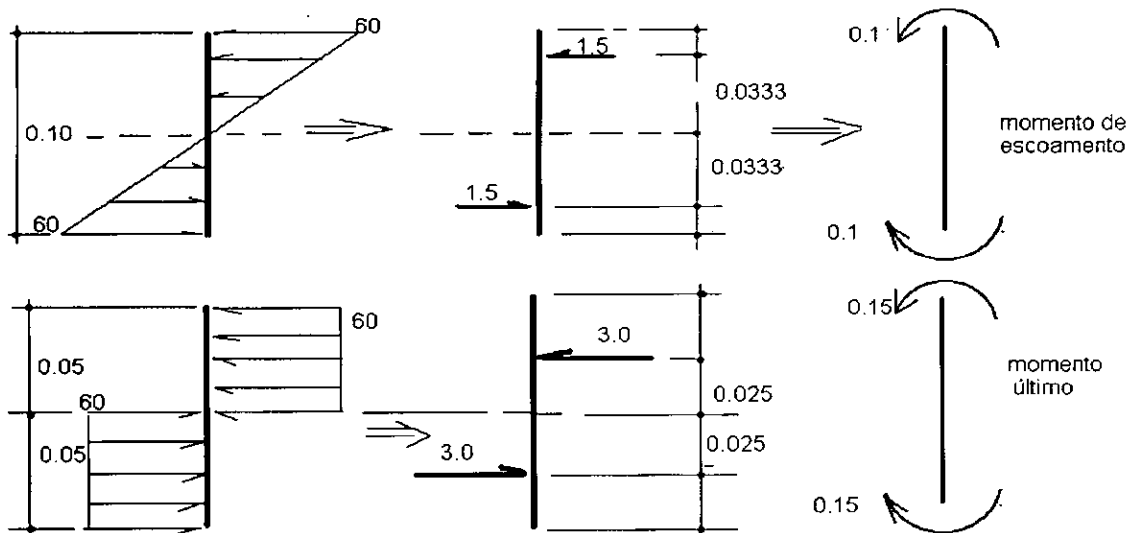


Figura 3.15 – Cálculo do momento último pela teoria de vigas.

## O TRATAMENTO DA NÃO LINEARIDADE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 4.1) O TRATAMENTO NUMÉRICO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA – MÉTODO DE NEWTON –RAPHSON

Determina-se os deslocamentos em uma estrutura resolvendo-se o sistema de equações:

$$\{F_e\} = [K(u)](u) \quad (4.1)$$

onde:  $\{F_e\}$  – Carregamento externo

$\{u\}$  – Deslocamentos – solução do problema

$[K(u)]$  – Matriz de rigidez, que no caso não linear depende dos deslocamentos.

Na referência em [20] mostra-se que o vetor de cargas internas  $\{p\}$  em um elemento pode ser determinado pela expressão:

$$\{p\} = \int_v [b]^T \sigma(\varepsilon) dv \quad (4.2)$$

sendo  $[b]$  a matriz que contém as derivadas das funções de forma e  $\sigma(\varepsilon)$  a tensão correspondente a uma dada deformação  $\varepsilon$ . Deve-se observar que é nesse ponto, ou seja, para se ter  $\sigma$  em função de  $\varepsilon$  que se faz uso da relação constitutiva.

Pode-se definir um vetor resíduo  $\Psi$  da forma seguinte:

$$\Psi(u) = \{f\} - \{p\} = \{0\} \quad (4.3)$$

Expandindo (4.3) em série de Taylor tem-se:

$$\Psi(u^{i+1}) = \Psi(u^i) + \left( \frac{\partial \Psi(u)}{\partial u} \Big|_i \right) \Delta u^i = 0 \quad (4.4)$$

sendo :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = [k_T], \text{ a matriz tangente;}$$

$$u^{i+1} = u^i + \Delta u^i$$

Assim pode-se estabelecer o seguinte procedimento para análise de um material com comportamento não linear:

1. Aplica-se o passo de carga;
2. Calcula-se o deslocamento pela expressão (4.1);
3. Determina-se o vetor de carga interna. Expressão (4.2);
4. Verifica-se o resíduo  $\Psi(u)$ ;
5. Se o resíduo atende a um determinado critério volta-se à 1; senão, passa-se ao passo seguinte;
6. Determina-se a matriz de rigidez tangente;
7. Na expressão (4.1), com a matriz de rigidez tangente, determina-se  $\Delta u$ ;
8. Faz-se  $u^i = u^{i-1} + \Delta u$ ;
9. Volta-se ao item 3 .

O item 6 desse algoritmo é uma característica do método de Newton-Raphson padrão. No presente trabalho adota-se o método modificado no qual não se faz essa reavaliação da matriz de rigidez, mantendo-a constante durante todo o processo. A Figura 4.1 mostra uma visualização deste processo.

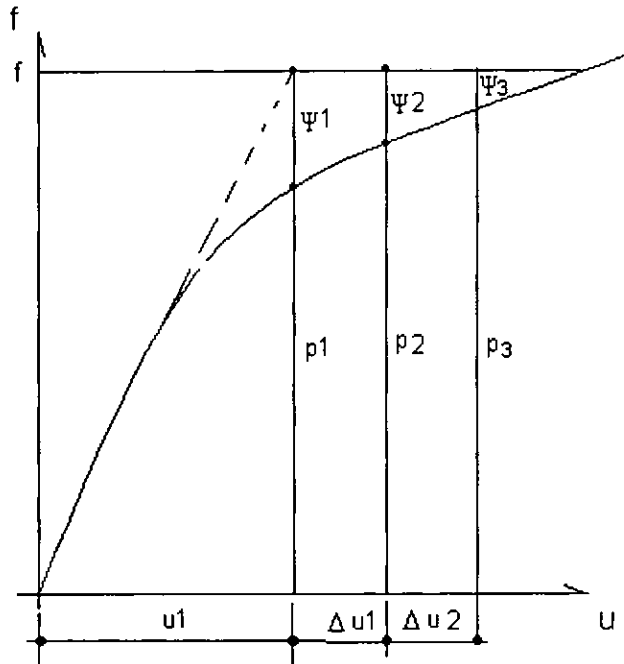


Figura 4.2 – Visualização do processo de Newton-Raphson

Para o caso que se aborda nesse trabalho a expressão para cálculo das forças internas no elemento é :

$$\{f_i\} = \int_e [B^T] \{S\} dA \quad (4.5)$$

A matriz [B] é dada por :

$$[B] = \begin{bmatrix} [0]_{3 \times 3} & [[\nabla 1][N\theta]]_{3 \times 9} \\ [N\gamma w]_{2 \times 3} & [N\gamma \theta]_{2 \times 9} \end{bmatrix}_{5 \times 12}$$

Tem-se então que fazer em cada elemento a integração indicada na expressão (4.5). Para tanto, pode-se usar o método de integração numérica de Gauss. Para o caso presente, elemento triangular e variação linear de {S} , tem-se:

$$\int_{\sigma} [B^T] \{S\} dA = \frac{\sum_{i=1}^3 [B^T]_i \{S\}_i}{3} \quad (4.6)$$

$i$  representa o ponto onde se determina  $[B]$  e  $\{S\}$ ; indicado na Figura 4.3

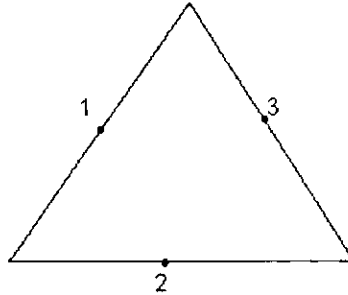


Figura 4.3- Pontos utilizados para se fazer a integração numérica.

Em se tratando do método dos elementos finitos a expressão (4.5) é válida para cada elemento. Para aplicarmos o método de Newton-Raphson temos que determinar o vetor de forças internas global –  $\{F_i\}$  – combinando os vetores de cada elemento.

$$\{F_i\} = A_{i=1}^{nnel} (\{f_i\}_i) \quad (4.7)$$

$nnel$  é o número de elementos e  $A$  é um operador que indica a combinação dos vetores de forças locais  $\{f_i\}$ . Assim sendo, pode-se escrever a expressão (4.3) da seguinte forma :

$$\{\Psi(u)\} = \{F_e\} - A_{i=1}^{nnel} (\{f_i\}_i) = \{0\} \quad (4.8)$$

Conclui-se assim, que tem-se dois processos interativos em questão. O primeiro local, que retorna um estado tensional de teste à superfície de escoamento. Determinando, deste modo, quanto da energia aplicada ao corpo um dado elemento absorve. O segundo global, que redistribui em todos os elementos essa parcela de energia, que para um determinado nível de deformação, elementos não absorvem. Garante-se, dessa forma, que

cada elemento esteja sob um estado tensional possível e que existe equilíbrio global entre as forças internas e externas.

### 4.3 -ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação que se desenvolveu, em FORTRAN , pode ser dividida em quatro etapas. Quais sejam:

- i) Cálculo dos deslocamentos - Elemento DRM.
- ii) Obtenção dos esforços.
- iii) Análise elasto-plástica local - Modelo generalizado.
- iv) Análise do equilíbrio global - Método de Newton – Raphson.

O programa é composto como indicado na Figura 4.4

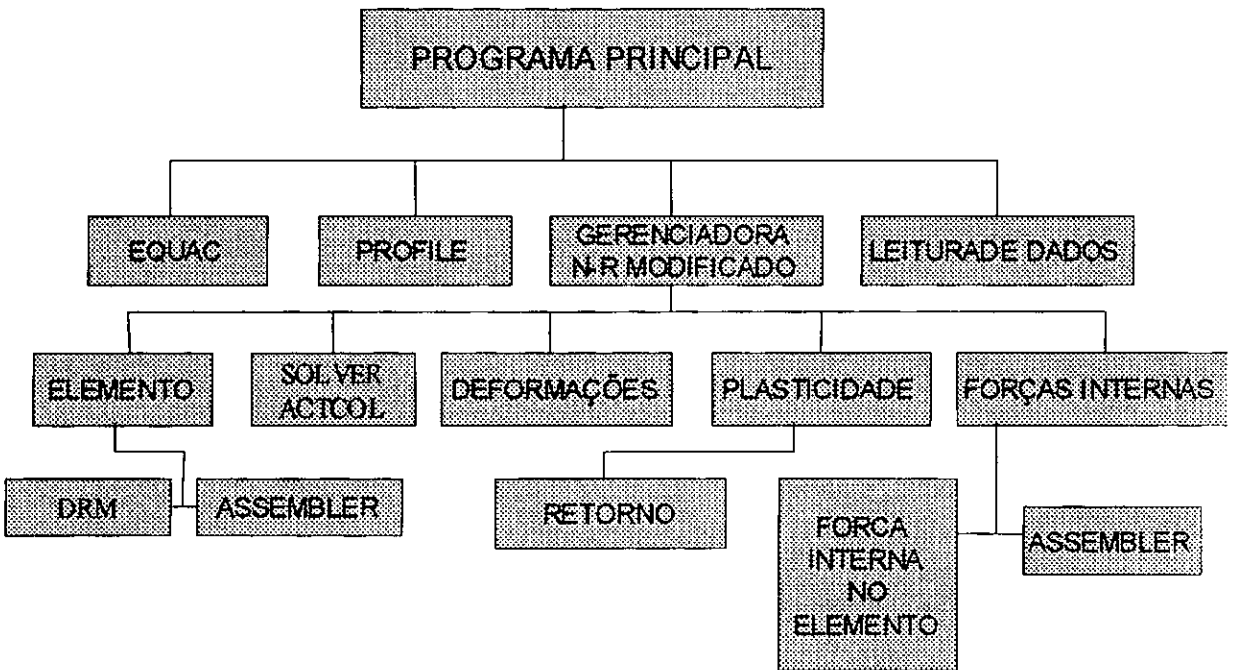


Figura 4.4 – Organização do programa

No corpo principal do programa se faz a leitura ,gravação dos dados e calcula-se os ponteiros para dimensionamento do espaço de memória necessário. A rotina 'Equac'

numera as equações contando o número de graus de liberdade não prescritos. A rotina 'profile' determina os apontadores da diagonal principal para armazenamento da matriz de rigidez por altura efetiva da coluna, que será usado na solução do sistema de equações. Chama-se a rotina 'gerenciadora' que aplica o método de Newton-Raphson. Nesta, chama-se a rotina 'elemento' que determina a matriz de rigidez de cada elemento e faz o arranjo destas para a obtenção da matriz de rigidez global. Leva-se essa matriz e o vetor que contém os carregamento na 'actcol' que determina o vetor de deslocamentos nodais. A rotina 'deformações' determina o vetor  $\{E\}$  que na rotina 'plasticidade', através da rotina 'retorno', tem suas parcelas  $\{E^e\}$  e  $\{E^p\}$  determinadas. Com a parcela  $\{E^e\}$  determina-se o vetor de forças internas - rotina 'força interna'. Compara-se, na rotina 'gerenciadora', esse vetor com o vetor de forças externas e obtém-se um resíduo. Se a norma desse resíduo for menor que 1% da norma do vetor de cargas externas passa-se ao próximo passo de carga; caso contrário, aplica-se na placa esse resíduo. Quer-se então conhecer o valor dos deslocamentos devido ao resíduo; para tanto, observa-se que a matriz de rigidez do elemento já foi calculada, não se executa novamente a rotina 'elemento'. A rotina 'actcol' possui um sinal que faz com que não se promova mais a triangularização da matriz de coeficientes para solução do sistema de equações. Nesse ponto esse sinal deve ser ativado. Com isso tem-se esses deslocamentos que ao serem somados com os anteriores são levados a rotina 'deformações'. Daí por diante o processo se repete até que se satisfaça o critério imposto ao vetor resíduo. Esse procedimento é mostrado na Figura 4.5.

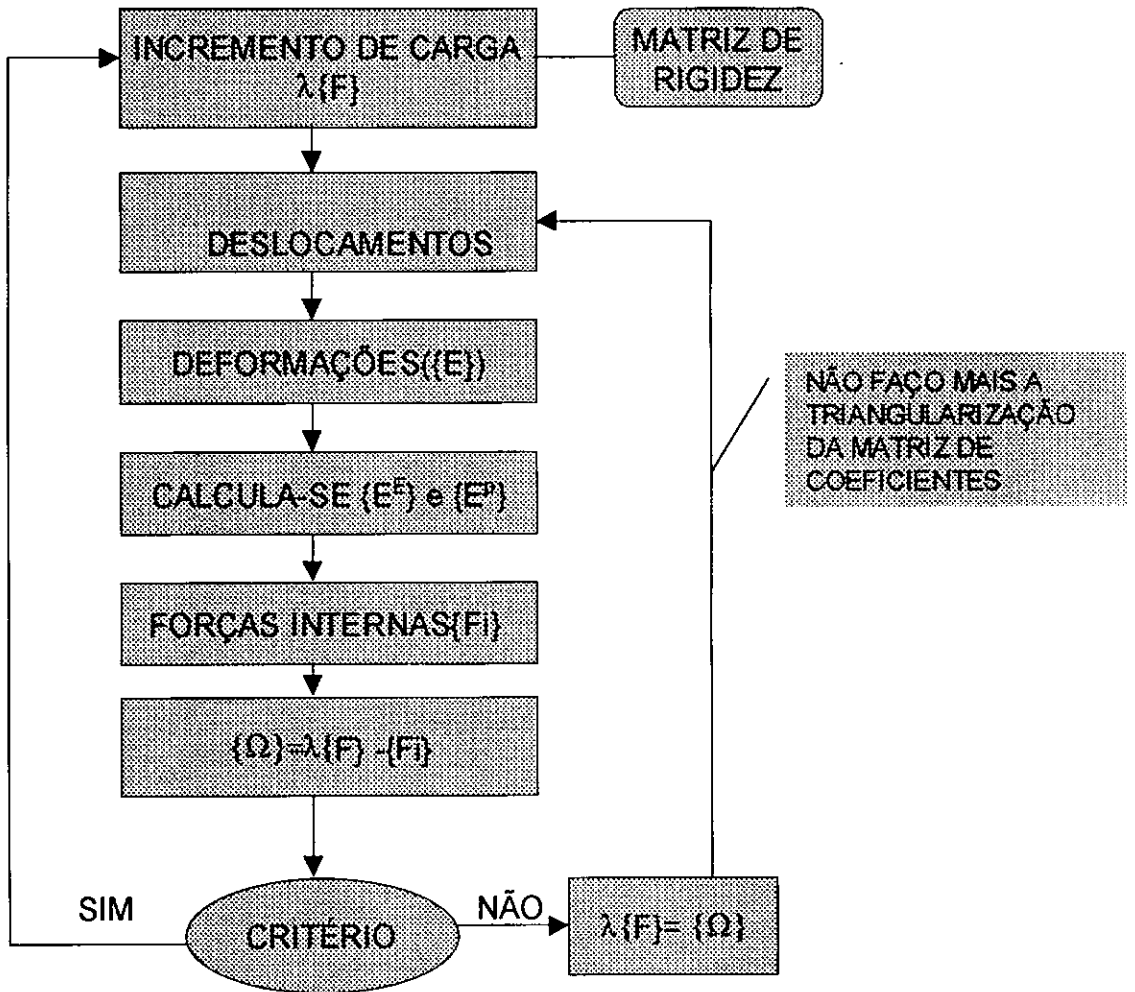


Figura 4.5 - Processo Global

## 4.5 - EXEMPLOS

### 4.5.1– EXEMPLO 04

Faz-se o determinação da carga última em uma placa circular engastada de raio igual a 10 e de altura 2. Toma-se 1/4 desta por considerações de simetria. Adota-se  $H_{iso}=H_{din}=0$ ,  $\sigma_0=60$ ,  $\delta=12$  e  $\beta=20$ . O resultado confere com o apresentado em [5], que é comparado com um resultado obtido via análise tridimensional. O carregamento é

uniformemente distribuído. A malha utilizada é mostrada na figura 4.6 e o resultado na figura 4.7

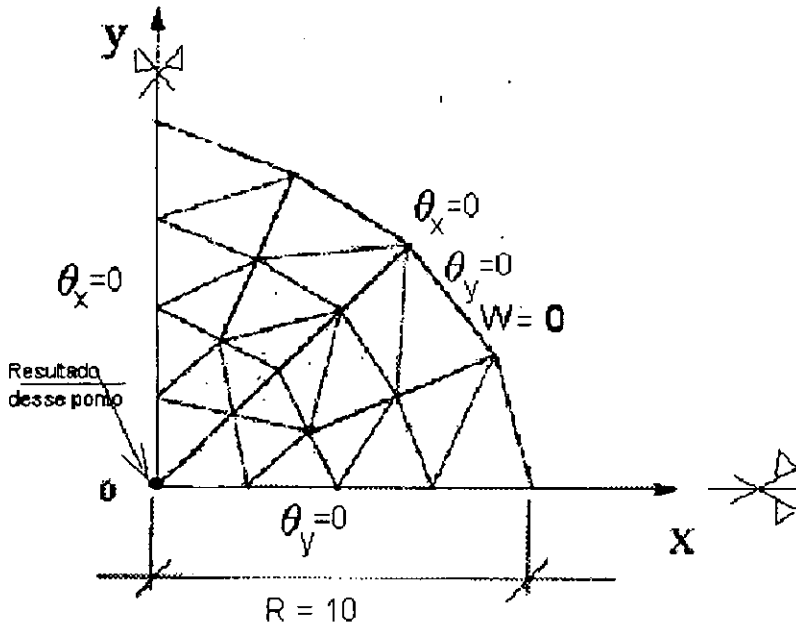


Figura 4.6 Discretização da placa

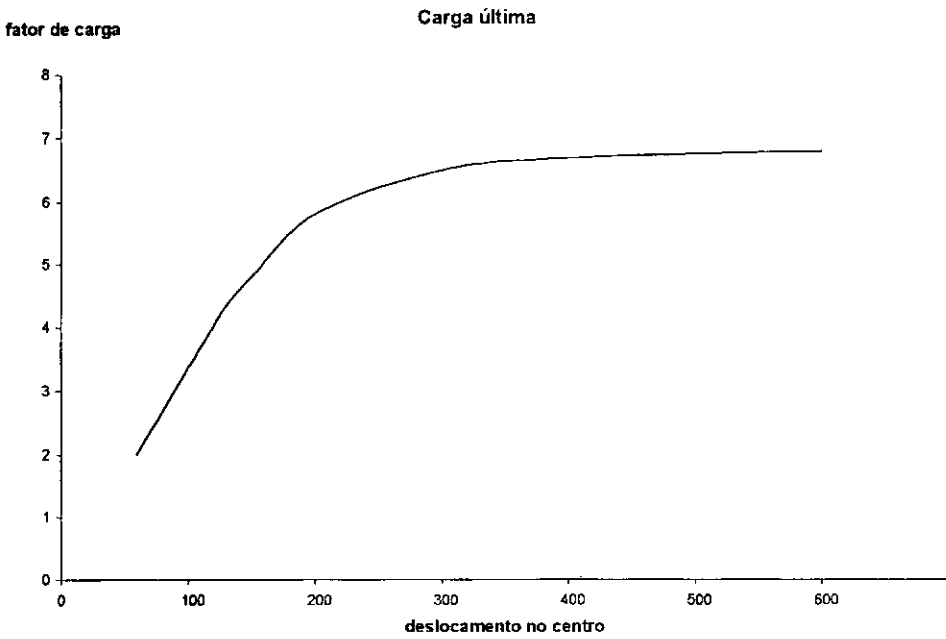


Figura 4.7 – Determinação da carga última –placa circular engastada- carga uniforme

## 4.5.2- EXEMPLO 05

Aqui analisa-se a mesma estrutura do exemplo anterior sujeita a uma situação de carga e descarga. O resultado é mostrado na figura 4.8.

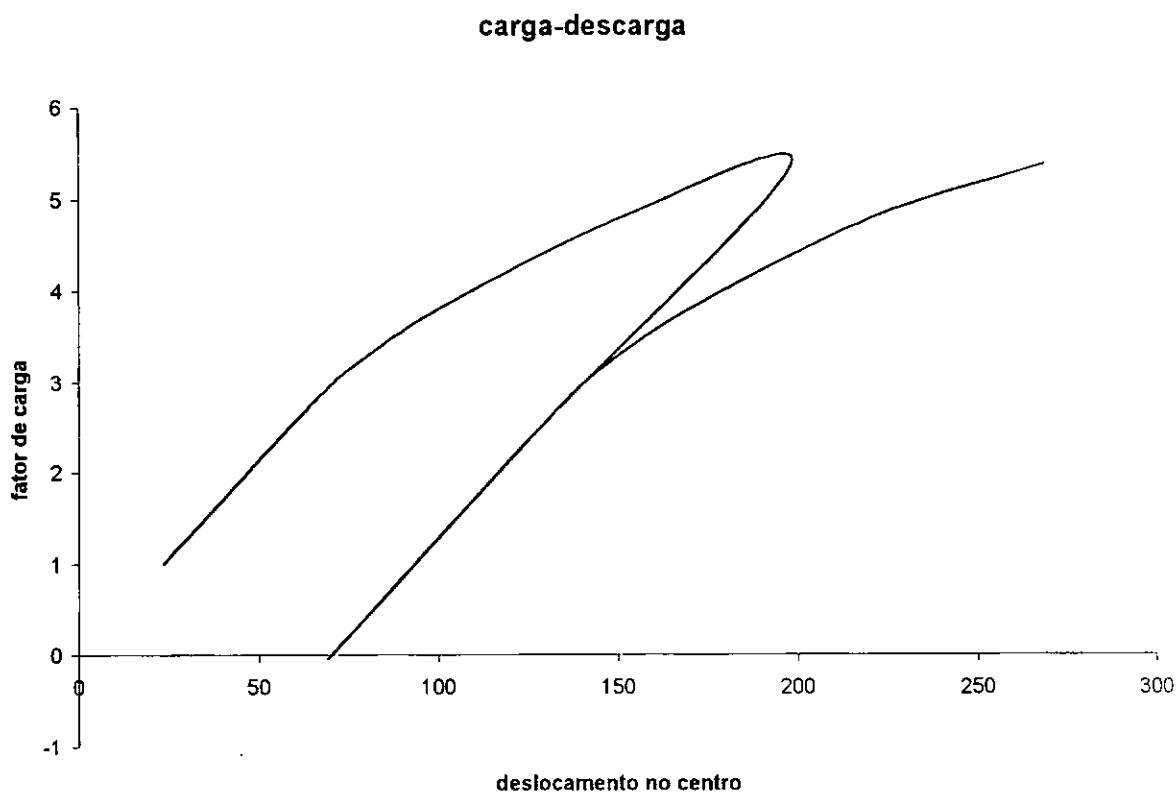


Figura 4.8 carga e descarga

## 4.5.5 – EXEMPLO 06

Toma-se a estrutura anterior sujeita a um carregamento cíclico adotando-se  $H_{\text{isso}}=H_{\text{cin}}= 50$ . O resultado é mostrado na figura 4.9.

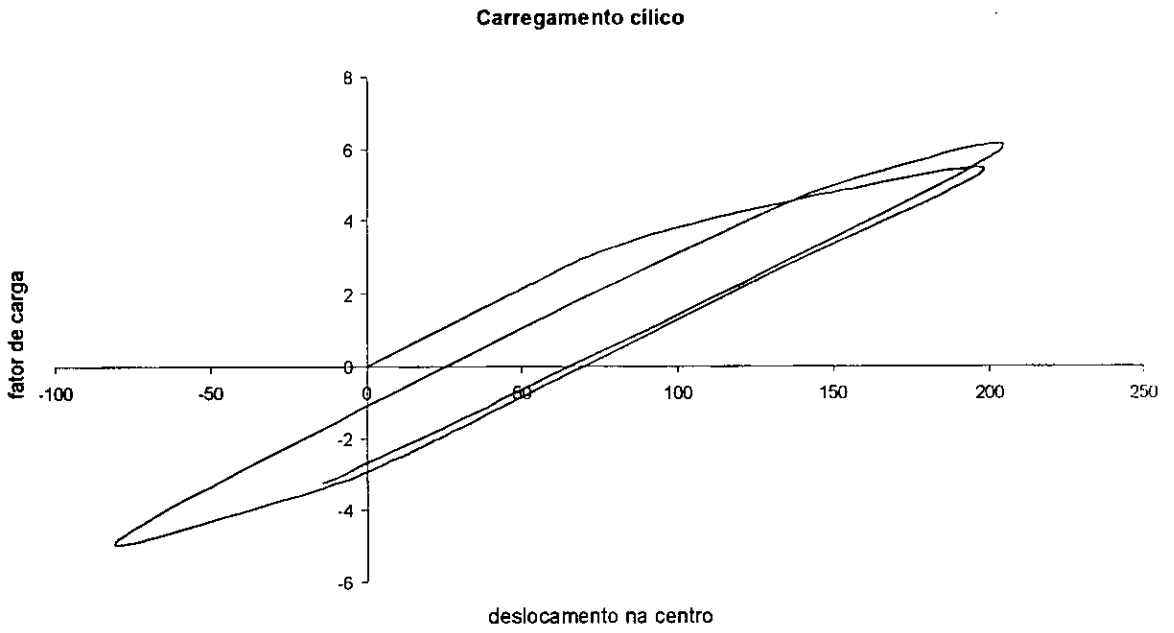


Figura 4.9 – Deslocamento no centro da placa- endurecimento isotrópico e cinemático

## **COMENTÁRIOS FINAIS**

Como a motivação deste trabalho foi o estudo dos elementos de placas triangulares seguindo o apresentado por Sydenstrick [8] e a implementação de um critério de plasticidade baseado em esforços para os mesmos, adota-se o elemento DRM, já que esse aparece em [8] como mais eficiente e implementa-se o modelo para relação constitutiva apresentado por Auricchio e Taylor [5]. Com base nos resultados apresentados nos capítulos 3 e 4 conclui-se que com o elemento DRM e com a relação constitutiva que aqui se considera tem-se um bom modelo para o tratamento do comportamento elastoplástico em placas.

Não se estudou, particularmente, a eficiência da formulação e dos algoritmos, aqui considerados, sob o ponto de vista do desempenho computacional. Contudo, observou-se no decorrer do trabalho que o algoritmo de retorno é o que toma a maior parte do tempo de processamento. E assim, se considera que estudos neste algoritmo se fazem necessários para que o modelo a obtenha maior eficiência neste aspecto.

Um outro estudo a se considerar é a implementação do modelo para o caso das cascas.

APÊNDICE A  
Obtenção da função de escoamento adotada no modelo  
generalizado

Apresenta-se a formulação da função de escoamento adotada no modelo generalizado.

Definindo o tensor de tensões:

$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Considerando-se apenas a flexão:

$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os invariantes temos:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

As tensões principais são as raízes da equação:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma = 0$$

Considerando-se o critério de Von Mises e as raízes da equação anterior chegamos a:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = 3K^2 \quad A1$$

Substituindo os resultados da expressão 3.17 chegamos a:

$$\frac{3}{2} \left[ \frac{16}{h^2} (m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2) \right]^{\frac{1}{2}} = h\sigma_0 \quad A2$$

A expressão A2 é a mesma expressão 3.18. É importante notar que a expressão 3.17 considera o ponto onde o momento é máximo. Ou seja  $h=0$ .

Considerando agora o caso onde só ocorra esforço cisalhante temos:

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Com um procedimento análogo ao apresentado acima, adotando o ponto de esforço cisalhante máximo ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) e considerando a expressão 3.19 chegamos a:

$$h\sigma_0 = \frac{3}{2} [3(t_x^2 + t_y^2)]^{\frac{1}{2}} \quad A3$$

Considerando-se que quando do caso geral, ou seja, em uma placa sujeita a esforços de flexão e cisalhamento, a plastificação se dará pela superposição dos efeitos dos casos representados pelas expressões A2 e A3, o que significa dizer, pela superposição dos efeitos de momento e cortantes máximos, estabelece-se o seguinte critério de escoamento:

$$f = \frac{3}{2} \left[ \frac{16}{h^2} (m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2 + 3(t_x^2 + t_y^2)) \right]^{\frac{1}{2}} - h(\sigma_0 + H_{iso} \alpha) \quad A4$$

Essa é expressão apresentada por Aurichio e Taylor [5]. Deve-se notar que a hipótese de superposição de esforços máximos considerados não é válido em todas as situações, sendo portanto uma aproximação.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] – Shapiro, G. S. 'On yield surfaces for ideally plastic shells'. *Problems Continuos Mechanics* ,414-418(1961).
- [2] – Ivanov, G.V. 'Aproximating the final relationship between the forces and moments of shells under Mises plasticity condition ',*Mekhanika Tverdogo Tela* 2,74,75(1967).
- [3] – Simo, J.C. , Kennedy J.G.' On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV . Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms', *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* , 96, 133-171(1992).
- [4] – Simo, J.C. , Taylor, R.L,' A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity ',*International J. numer. Methods eng.*,22,649-670(1986).
- [5] – Auricchio ,F, Taylor, R.L, 'A generalized elastoplastic plate theory and its algorithmic implementation', '*International J. numer. Methods eng.*,37,2583-2608(1994).
- [6] – Papadopoulos ,P. , Taylor, R.L,' An elasto-plastic analysis of Reissner – Mindlin plates ',*Appl. Mech.Rev.*,43,540-550(1993).
- [7] – Ibrahimbegovic, A. ,Frei, F. ,'An efficient implementation of stress resultant plasticity in analysis of Reissner – Mindlin plates', *International J. numer. Methods eng.*,36,303-320(1993).
- [8] - Sydenstrick, Rubens Mitri, 'Elementos de casca discretos baseado na teoria de Reissner-Mindlin ',*Tese,COPPE/UFRJ*(1997)
- [9] – Zienkiewicz, O. C., Lefebvre, D.," A robust triangular plate bending of the Reissner-Mindlin type ", *Int. Jour. Meth.Eng.*,26,1169-1184(1988).

- [10] - Zienkiewicz, O. C., Taylor, R.L., Papadopoulo, P., Oñate,E.,” Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements”, *Comp.& Struct.*,35,4,505-522(1990)
- [11] – A. A. Ilyushing, *Plasticity*, Gostekhizdat, Moscou (1948)
- [12] – Batoz, J.L., Bathe,K.J.,Ho,L.W.,” A study of three-node triangular plate bending elements”, *Int. Jour. Meth.Eng.*,15,1771-1812(1980)
- [13] – Batoz, J. L. , Lardeur, P. , “ A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analyses of thick to very thin plates”, *Int. Jour. Meth.Eng.*, 28, 533-560(1989).
- [14] - Batoz, J. L. , Katili, I., “On simple triangular Reissner/Mindlin plate element basead on incompatible modes and discrete constraints”, *Int. Jour. Meth.Eng.*, 35,1603- 1632(1992).
- [15] - Papadopoulo, P., Taylor, R.L.,” A triangular element basead on Reissner –Mindlin plate theory” , *Int. Jour. Meth.Eng*, 30, 1029-1049(1990).
- [16] - Simo, J.C.,HughesT.J.R., *Elasto-plasticity and visco-plasticity: Computational aspects*, Springer, Berlin.
- [17]- Papadopoulo, P., Taylor, R.L.,” Na analysis of inelastic Reissner –Mindlin plates”, *Finite element Anal.Des.*,10,221-233(1991)