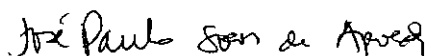


SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO TRANSIENTE BIDIMENSIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

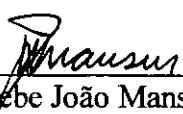
JÚLIO CESAR DE JESUS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

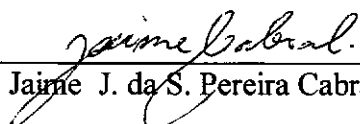
Aprovado por:



Profº José Paulo Soares de Azevedo, Ph.D.



Profº Webe João Mansur, Ph.D



Profº Jaime J. da S. Pereira Cabral, Ph.D

Rio de Janeiro, RJ – Brasil
Fevereiro de 1999

JESUS, JÚLIO CESAR

Simulação Computacional para Solução da Equação da Difusão Transiente Bidimensional utilizando o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno

[Rio de Janeiro] 1999

VIII,136 p.29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1999)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Elementos Finitos 2. Métodos Numéricos 3. Difusão Transiente

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao meu primo
Luiz G.Sobrinho,
às minhas tias ausentes,
Edeltrudes, Rosália; ao
meu irmão Jovan e à
minha mãe Elizete.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas Instituições e pessoas que com seu suporte contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho:

À Universidade Federal da Bahia pela oportunidade do treinamento e capacitação.

Aos meus colegas do Departamento de Engenharia da EAUFBA pela presteza e confiança em mim depositada.

Ao professor orientador José Paulo Soares de Azevedo pelo sublime espírito incentivador, sabedoria, dedicação, interesse, colaboração e tempestivas sugestões durante o acompanhamento.

Aos professores da área de Recursos Hídricos, em especial ao Professor Webe Mansur, pela sua atenção, seriedade, presteza, sábia transmissão de sua experiência.

Ao funcionário do LHC Franklin pela sua amizade, presteza e atenção.

À Fundação José Bonifácio (FUJB) da UFRJ pelo uso de Computador e impressoras adquiridos pelo projeto nº 7631-7.

Aos colegas dos cursos de Mestrado e Doutorado pelo convívio e amizade, Antonio Luiz F. Abreu, Glória Figueredo, Rodrigo Saavedra, Rodrigo Matos, Samuel Dias, Rafael Kelman, Olga Calman Kelman, José Otávio Pecly, Marcelo Miguez, Marco Ferro, Carlos Eduardo de Melo e em especial João Luiz Borges de Carvalho pela sua singular simplicidade e espírito cooperativo.

A minha mãe Elizete, ao meu primo Luiz G. Sobrinho e ao meu irmão Jovan, que com seu suporte e incentivo, tornaram realidade este projeto.

A Deus pela sua benção e proteção.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO TRANSIENTE BIDIMENSIONAL UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Júlio Cesar de Jesus

Fevereiro, 1999

Orientador: Prof^o José Paulo Soares de Azevedo

Programa: Engenharia Civil

O Método dos Elementos Finitos foi aplicado a problemas transientes regidos pela equação da difusão em sua forma bidimensional.

Para isto, foi desenvolvido um programa em linguagem Fortran, onde o domínio espacial foi discretizado em elementos triangulares lineares, a variação do potencial u dentro de cada intervalo de tempo foi suposta linear, e sua aproximação no domínio tempo foi feita por Diferenças Finitas..

Pode-se avançar no tempo partindo de um valor de potencial conhecido num instante inicial $t=t_0$ com condições de contorno prescritas ao longo do tempo em termos de u e sua derivada normal ao contorno. Valores de u no tempo $t=t_0+\Delta t$ (instante seguinte) são então computados e usados como valores iniciais para o próximo passo de tempo, e assim sucessivamente.

Foi estabelecida uma comparação dos diversos tipos de algoritmos tais como Crank-Nicholson, Galerkin e Totalmente Implícito através dos respectivos perfis de potencial ao longo do tempo, observando a questão de estabilidade numérica.

Os resultados das soluções numéricas para os exemplos utilizados foram comparados com o método dos Elementos de Contorno.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc)

COMPUTATIONAL SIMULATION FOR SOLUTION OF THE BIDIMENSION
TRANSIENT DIFFUSION EQUATION USING THE FINITE ELEMENTS AND
BOUNDARY ELEMENTS METHODS

Júlio Cesar de Jesus

February, 1999

Supervisor: José Paulo Soares de Azevedo

Program: Civil Engineering

The Finite Element method was used in applications to transient problems governed by the diffusion equation in its two dimensional form .

Thus, a program was developed in Fortran language , where the space domain was discretized with linear triangular elements, the variation of the potential u of within each time step was supposed linear, and its time variation was approximated domain by finite differences.

The time stepping procedure starts with the known value of the potential u at an initial instant $t=t_0$. Values of u at time $t=t_0+\Delta t$ (next time step) are thus computed to be used as initial values for the next time step, and so forth .

A comparison was established of the several types of algorithms such as Crank Nicholson, Galerkin and Totally Implicit through the respective profiles, showing the behavior of the numerical stability.

The results of the numeric solutions for the used examples were compared with the Boundary Element Method.

ÍNDICE

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – MÉTODOS NUMÉRICOS (ELEMENTOS FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO).....	4
II.I. - Método dos Elementos Finitos	5
II.I.a - Introdução.....	5
II.I.b - Resíduos Ponderados.....	6
II.I.c.- Formulação do Método dos Elementos Finitos.....	10
II.I.d - Aplicação a Problemas Transientes.....	22
II.I.e- Aproximação de Diferenças Finitas no tempo.....	25
II.II - Métodos dos Elementos de Contorno.....	26
II.II.a.-Introdução.....	26
II.II.b -Método dos Elementos de Contorno para problemas de Di- fusão Transiente.....	27
II.II.b.1 Discretização.....	28
CAPÍTULO III – APLICAÇÕES.....	19
III.I - Introdução.....	20
III.II - Simulação de Difusão Transiente Unidimensional.....	22
III.II.a- Choque.....	22
III.II.b-Choque Gradual.....	48
III.III -Simulação de Difusão Transiente Bidimensional em região retangular.....	62
III.III.a- Choque térmico em todo o contorno.....	62
III.III.b- Choque térmico apenas na face $x = 0$	72

III.IV - Simulação de difusão transiente bidimensional em região quadrada com fluxo prescrito no contorno.....	90
III.V - Choques sucessivos em região Circular.....	103
CAPÍTULO IV- CONCLUSÃO.....	113
CONCLUSÃO.....	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	116
APÊNDICE.....	118

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos, uma técnica numérica muito versátil, teve seu início em meados de 1960. Tem sido aplicado a numerosos problemas de fluxo através de meio poroso, fluxo com superfície freática, dispersão hidrodinâmica, consolidação, e fluxo de calor e massa através do meio poroso. Ele é um método poderoso e extremamente flexível. O método consegue tratar qualquer forma de contorno e qualquer combinação de condições de contorno, meios heterogêneos e anisotrópicos, contornos móveis, superfícies livres e interfaces, etc. O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em se dividir a região que está sendo estudada num certo número de pequenos elementos (não infinitesimais) que são conectados uns aos outros através de nós, geralmente colocados nos vértices ou nas arestas dos elementos.

No Método dos Elementos Finitos, o objetivo é transformar a equação diferencial em uma equação Integral, que no caso da difusão, baixando a ordem das derivadas no espaço. Usando aproximações geométrica e funcional esta equação se reduz a um sistema de equações algébricas envolvendo valores das incógnitas no domínio

O presente trabalho tem por objetivo realizar Simulações Computacionais do Método dos Elementos Finitos aplicados a Problemas de Difusão Transientes, conforme apresentado por WROBEL (1989), e estabelecer uma comparação com as Simulações análogas pelo Método dos Elementos de Contorno. Para tal fim tomou-se a equação da Difusão em sua forma bidimensional, a qual representa a distribuição de potenciais (temperatura em problemas de condução de calor e concentração de substâncias em problemas sem convecção) em um meio ao longo do tempo, tendo aplicação em problemas de meio ambiente.

Dando curso à Implementação Computacional, foi desenvolvido um programa em linguagem Fortran para a Solução da Equação da Difusão em duas dimensões utilizando elementos triangulares no espaço (geometria triangular do sub-domínio e variação linear do potencial dentro do elemento) e aproximação da grandeza tempo em diferenças finitas, a partir de condições iniciais e condições de contorno que podem

variar ao longo do tempo.

A seguir, discutimos em detalhes no capítulo 2 a aplicação do Método dos Elementos Finitos e Elementos de contorno a problemas de Difusão.

No capítulo 3 apresentamos os resultados das simulações de alguns exemplos encontrados na literatura e comparamos com aqueles obtidos pelo Método dos Elementos de Contorno.

No capítulo 4 apresentamos as conclusões obtidas a partir dos resultados obtidos.

No apêndice encontra-se a listagem do Programa de Elementos Finitos para a Solução da Equação da Difusão utilizado nas simulações.

CAPÍTULO II - MÉTODOS NUMÉRICOS
(ELEMENTOS FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO)

CAPÍTULO II – MÉTODOS NUMÉRICOS

(ELEMENTOS FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO)

II.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

II.1.a INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em se dividir a região que está sendo estudada num certo número de pequenos elementos (não infinitesimais) que são conectados a um certo conjunto de nós, geralmente colocados no vértice ou nas arestas dos elementos. No caso unidimensional, estes elementos são segmentos; no caso bidimensional, os elementos podem ter a forma de qualquer tipo de polígono, embora o mais difundido seja o elemento triangular; no caso tridimensional pode ser usado qualquer tipo de poliedro,

Dentro de cada elemento, aplica-se uma aproximação local da variável do problema, em cada um desses elementos. Essa aproximação é dada por uma função de interpolação que pode ser de diversos tipos, sendo que os mais usados são funções lineares ou quadráticas. Esta função de interpolação é definida em relação aos valores que o potencial (a variável do problema) assume nos nós associados com cada elemento.

Fazendo-se posteriormente, a junção de todos os elementos, obtém-se um sistema de equações relativo ao modelo discreto, com um número finito de incógnitas.

A propósito, saliente-se que uma das características que torna o Método dos Elementos Finitos mais preciso que o Método de Diferenças Finitas (MDF) é que o potencial é aproximado por uma solução contínua por partes ao longo de todo o domínio enquanto que no Método das Diferenças Finitas o potencial é definido apenas nos nós.

II.1.b RESÍDUOS PONDERADOS

Conforme MOURA (1997), o Método dos Resíduos Ponderados (MRP) utiliza soluções aproximadas para as equações diferenciais, permitindo estabelecer o sistema de equações dos principais métodos numéricos de solução de equações diferenciais através de métodos (esquemas) particulares do MRP.

Considere-se como exemplo, o problema de valor de contorno definido pela equação de Laplace no domínio Ω :

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

com condições de contorno prescritas do tipo:

$$\text{- Essenciais: } u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.2)$$

$$\text{- Naturais: } p = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p \quad (2.3)$$

A solução aproximada u pode ser escrita como uma combinação linear de funções linearmente independentes ϕ_i pertencentes a um conjunto completo:

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(\underline{x}) \quad (2.4)$$

onde $\underline{x} = (x, y)$ representa um ponto genérico do domínio bi-dimensional e α_i são incógnitas a serem determinadas, que representam a participação de cada uma das N componentes ϕ_i .

Como u não é a solução real do problema, esta aproximação em geral não satisfará exatamente nem a equação diferencial (2.1), nem as condições de contorno, equações (2.2) e (2.3).

Assim, define-se um resíduo no domínio como

$$E_{\Omega}(u, \underline{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0, \underline{x} \in \Omega \quad (2.5)$$

Um resíduo no contorno T_u :

$$E_{T_u}(u, \underline{x}) = u - \bar{u} \neq 0, \underline{x} \in T_u \quad (2.6)$$

$$E_{T_p}(u, \underline{x}) = p - \bar{p} \neq 0, \underline{x} \in T_p \quad (2.7)$$

Nas expressões que definem os resíduos, equações (2.5) a (2.7), pode-se observar que estes são definidos para cada solução aproximada $u(\underline{x})$ e possuem um valor para cada ponto \underline{x} .

Dentre as infinitas soluções aproximadas dadas pela equação (2.4) podemos determinar uma aproximação única escrevendo tantas equações quanto o número de incógnitas N via ponderação dos resíduos no domínio e no contorno, onde i é genérico ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\int_{\Omega} E_{\Omega}(u, \underline{x}) W_{\Omega}^i(\underline{x}) d\Omega(\underline{x}) + \int_{T_u} E_{T_u}(u, \underline{x}) W_{T_u}^i(\underline{x}) d\Gamma_u(\underline{x}) + \int_{T_p} E_{T_p}(u, \underline{x}) W_{T_p}^i(\underline{x}) d\Gamma_p(\underline{x}) = 0 \quad (2.8)$$

onde $W_{\Omega}^i(\underline{x}), W_{T_u}^i(\underline{x}), W_{T_p}^i(\underline{x})$, são as funções de ponderação no domínio, em T_u e T_p , respectivamente. Tais funções devem ser linearmente independentes para que o sistema de equações algébricas resultante seja não singular após a introdução das condições de contorno essenciais.

A equação (3.8) pode ser escrita de forma mais compacta sem sobrecarregar a notação como:

$$\int_{\Omega} E_{\Omega} W_{\Omega}^i d\Omega + \int_{T_u} E_{T_u} W_{T_u}^i d\Gamma_u + \int_{T_p} E_{T_p} W_{T_p}^i d\Gamma_p = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

O sistema de equações algébricas resultante pode ser escrito matricialmente como:

$$[K]\{u\}=\{f\} \quad (2.10)$$

Onde o vetor $\{u\}$ contém as incógnitas α_i , os termos K_{in} da matriz $[K]$ são obtidos pela integração de funções conhecidas e o vetor $\{f\}$ é o vetor de termos independentes das incógnitas α_i .

O que distingue um método numérico em particular dos outros é o conjunto de funções de ponderação adotadas em cada caso.

Dentre os vários métodos que podem ser considerados como casos particulares do MRP destacamos o método da colocação por pontos, colocação por sub-domínios e o método de Galerkin. Por simplicidade serão escritas as expressões de resíduos ponderados omitindo as ponderações de contorno.

Colocação por Pontos

No método da colocação por pontos, impõe-se que a equação diferencial seja exatamente satisfeita em certos pontos \underline{x}_i , chamados pontos de colocação, i.e., faz-se,

$$E_{\Omega}(u, \underline{x}_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

Isto equivale a considerar na sentença de resíduos ponderados a função de ponderação igual à função delta de Dirac, aplicada a cada ponto de colocação \underline{x}_i , $W_{\Omega}^1(\underline{x}) = \delta(\underline{x}, \underline{x}_i) = 0$, já que pela propriedade de amostragem do Delta de Dirac, temos:

$$\int_{\Omega} E_{\Omega}(u, \underline{x}) \delta(\underline{x}, \underline{x}_i) d\Omega(\underline{x}) = E_{\Omega}(u, \underline{x}_i) \quad (2.12)$$

Colocação por Subdomínios

Neste caso, o domínio original é sub-dividido em tantos sub-domínios Ω_j quanto o número de incógnitas N . Em cada sub-domínio impõe-se que a integral do resíduo se anule, resultando nas N equações necessárias:

$$\int_{\Omega_j} E_{\Omega}(u, \underline{x}) d\Omega_j = 0 \quad j=1,2,\dots,N \quad (2.13)$$

Isto equivale adotar na sentença de resíduos ponderados funções do tipo delta de Kronecker como funções de ponderação:

$$W_{\Omega}^1(\underline{x}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{x} \in \Omega_j \neq \Omega_i \\ 1 & \text{se } \underline{x} \in \Omega_j = \Omega_i \end{cases} \quad (2.14)$$

Método de Galerkin

No método de Galerkin adotam-se as mesmas funções para as funções conhecidas ϕ_i e as funções de ponderação.

A sentença de resíduos ponderados, fica então:

$$\int_{\Omega_j} E_{\Omega}(u, \underline{x}) \phi_i(\underline{x}) d\Omega(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.15)$$

II.I.c. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

II.I.c.1. Problemas Bidimensionais

No Método dos Elementos Finitos, a equação diferencial sujeita às condições de contorno pode ser resolvida a partir de equações algébricas obtidas, usando a formulação fraca do Método dos Resíduos Ponderados, adotando-se funções de interpolação locais.

Em seguida, apresentaremos a aplicação do Método a um problema mais complexo, bidimensional, regido pela equação de campo generalizada conforme descrito em WROBEL (1989).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u - c = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.16)$$

com condições de contorno:

$$\text{Essenciais: } u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.17)$$

$$\text{Naturais: } K_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y = f(x,y) + h(x,y)u \quad \text{em } \Gamma_p \quad (2.18)$$

Onde K_x , K_y , λ , c , f , e h são constantes ou funções conhecidas, n_x e n_y são os cossenos diretores da normal externa ao contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$ e \bar{u} é um valor de contorno conhecido.

Inicialmente, escreve-se uma equação de resíduos ponderados, método de Galerkin, incluindo o erro cometido pela não satisfação da condição de contorno natural (2.18).

$$\int_{\Omega} E_{\Omega} W_{\Omega}^l d\Omega + \int_{\Gamma_u} E_{\Gamma_u} W_u^l d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} E_{\Gamma_p} W_p^l d\Gamma_p = 0 \quad (2.19)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u - c \right] W_{\Omega}^{\prime} d\Omega + \int_{\Gamma_p} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y - f(x, y) - h(x, y)u \right) W_{\Gamma_p}^{\prime} d\Gamma_p = 0 \quad (2.20)$$

Escolhendo-se para ponderação no contorno $W_p^{\prime} = -W_{\Omega}^{\prime}$, e lembrando que $W_u^{\prime} = 0$ em Γ_u , onde são aplicadas condições essenciais, temos:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u - c \right] W_{\Omega}^{\prime} d\Omega = \int_{\Gamma_p} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y - f(x, y) - h(x, y)u \right) W_{\Omega}^{\prime} d\Gamma_p \quad (2.21)$$

A seguir, integra-se por partes os dois primeiros termos do lado esquerdo de (2.21), já que pretende-se trabalhar com aproximações lineares para u em cada elemento. Tomando-se, por exemplo, o termo em x , pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) W_{\Omega}^{\prime} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} W_{\Omega}^{\prime} \right) d\Omega - \int_{\Omega} K_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W_{\Omega}^{\prime}}{\partial x} d\Omega \quad (2.22)$$

Aplicando-se o teorema da divergência ao primeiro termo do lado direito, obtém-se;

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} W_{\Omega}^{\prime} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} K_x \frac{\partial u}{\partial x} W_{\Omega}^{\prime} n_x d\Gamma \quad (2.23)$$

Procedendo-se de maneira análoga com o termo em y de (2.20), e lembrando que $W_u^{\prime} = 0$ em Γ_u , onde são aplicadas condições essenciais, obtém-se da equação (2.20):

$$\int_{\Omega} \left[K_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W_{\Omega}^{\prime}}{\partial x} + K_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial W_{\Omega}^{\prime}}{\partial y} - (\lambda u - c) W_{\Omega}^{\prime} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_p} (f + h u) W_{\Omega}^{\prime} d\Gamma_p = 0 \quad (2.24)$$

Observando que no método de Galerkin, a função de ponderação é igual a função de interpolação ($W_{\Omega}^I = \phi_I$), podemos escrever (2.24) como a seguir:

$$\int_{\Omega} \left[K_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_I}{\partial x} + K_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_I}{\partial y} - (\lambda u - c) \phi_I \right] d\Omega - \int_{\Gamma_p} (f + h u) \phi_I d\Gamma_p = 0 \quad (2.25)$$

O passo seguinte é a discretização do contínuo e aproximação da variação de u em cada elemento. Esta pode ser introduzida em forma matricial, para um elemento genérico:

$$u = [N] \{u^e\} \quad (2.26)$$

A expressão acima, relaciona o valor da incógnita u , em qualquer ponto do elemento, com seus valores nos pontos nodais do elemento, representados pelo vetor $\{u^e\}$, através da matriz de funções de interpolação $[N]$.

A partir da equação (2.26), pode-se obter as seguintes aproximações:

$$\phi_I = [N] \{\phi_I^e\} = \{\phi_I^e\}^T [N]^T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u^e\} = [N_x] \{u^e\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial [N]}{\partial y} \{u^e\} = [N_y] \{u^e\}$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial x} = \{\phi_I^e\}^T [N_x]^T$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial y} = \{\phi_I^e\}^T [N_y]^T$$

Introduzindo as aproximações acima na equação (2.25) discretizada, obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \left(K_x \{\phi_i^e\}^T [N_x]^T [N_x] \{u^e\} + K_y \{\phi_i^e\}^T [N_y]^T [N_y] \{u^e\} - \lambda \{\phi_i^e\}^T [N]^T [N] \{u^e\} + c \{\phi_i^e\}^T [N]^T \right) d\Omega_e = \int_{\Gamma_{p,e}} (f \{\phi_i^e\}^T [N]^T + h \{\phi_i^e\}^T [N]^T N \{u^e\}) d\Gamma_{p,e} \quad (2.27)$$

Considerando que os vetores $\{u^e\}$ e $\{\phi_i^e\}$ contêm apenas valores pontuais, a equação (2.27) pode ser reescrita na forma:

$$\{\phi_i^e\} \left\{ \left[\int_{\Omega_e} (K_x [N_x]^T [N_x] + K_y [N_y]^T [N_y]) d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \lambda [N]^T [N] d\Omega_e \right] \{u^e\} + \int_{\Omega_e} c [N]^T d\Omega_e - \int_{\Gamma_{p,e}} f [N]^T d\Gamma_{p,e} \right\} = 0 \quad (2.28)$$

Definindo-se as matrizes e vetores abaixo:

$$[K^e] = \int_{\Omega_e} (K_x [N_x]^T [N_x] + K_y [N_y]^T [N_y]) d\Omega_e$$

$$[M^e] = \int_{\Omega_e} [N]^T [N] d\Omega_e$$

$$[H^e] = \int_{\Gamma_{p,e}} h [N]^T [N] d\Gamma_{p,e}$$

$$\{P_c^e\} = \int_{\Omega_e} c [N]^T d\Omega_e$$

$$\{P_f^e\} = \int_{\Gamma_{p,e}} f [N]^T d\Gamma_{p,e}$$

chega-se à seguinte equação matricial para cada elemento:

$$([K^e] - \lambda [M^e] - [H^e]) \{u^e\} = \{P_f^e\} - \{P_c^e\} \quad (2.29)$$

Tipos de Elementos

Alguns dos elementos mais utilizados em problemas bidimensionais são o triangular linear, o triangular quadrático, o retangular linear e o retangular quadrático. Existem muitos outros tipos de elementos que podem ser utilizados. Em geral, quanto maior o grau da função de interpolação, melhor a aproximação. No entanto, na maior parte das aplicações de engenharia, levando-se em conta o grau de precisão das medidas dos parâmetros, não há necessidade de se aplicar funções de grau maior que 2.

Elementos Triangulares

Funções de interpolação

Consideremos elementos triangulares com função de interpolação linear. Dispondo-se das coordenadas geométricas dos nós, calcula-se os coeficientes da função de interpolação para cada elemento, como será visto em seguida.

A variação linear de u dentro do elemento pode ser expressa por:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.30)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são parâmetros a determinar. Como se prefere descrever a variação linear a partir de valores nodais de u , pode-se escrever, para os pontos nodais:

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3$$

ou em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Invertendo a matriz acima, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_1^0 & 2A_2^0 & 2A_3^0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

onde $a_i = x_k - x_j$, $b_i = y_j - y_k$, $2A_i^0 = x_j y_k - x_k y_j$, para $i=1,2,3; j=2,3,1$;

$k=3,1,2$, e A é a área do elemento.

Substituindo as expressões de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dadas por (2.32) em (2.30) e arrumando:

$$u = \frac{1}{2A} [(2A_1^0 + b_1 x + a_1 y)u_1 + (2A_2^0 + b_2 x + a_2 y)u_2 + (2A_3^0 + b_3 x + a_3 y)u_3]$$

ou, na forma da expressão (2.26),

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (2.33)$$

sendo

$$N_i = \frac{1}{2A} (2A_i^0 + b_i x + a_i y) \quad i=1,2,3 \quad (2.34)$$

É mais conveniente trabalhar-se com um sistema de coordenadas naturais, adimensionais, definido na figura 2.1.

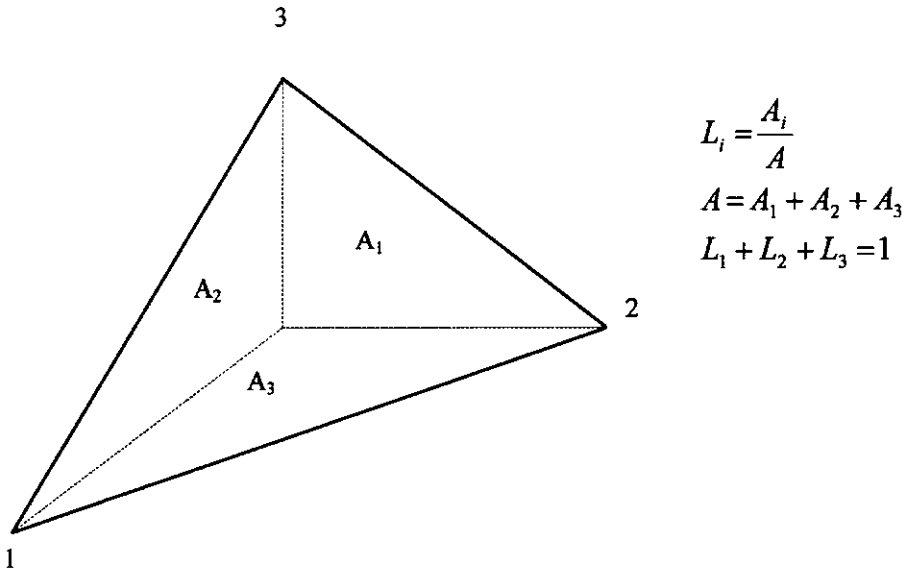


Fig.2.1. Definição das coordenadas naturais de um triângulo.

A relação entre as coordenadas triangulares L_i ($i=1,2,3$) e as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer são dadas por:

$$L_i = \frac{1}{2A} (2A_i^0 + b_i x + a_i y) \quad (2.35)$$

Isto significa que, para um elemento triangular linear, as funções de interpolação N_i são as próprias coordenadas naturais L_i . Pode-se verificar, facilmente, que estas funções atendem a um requisito básico para as funções de interpolação, que é o de assumir o valor 1 quando aplicado no nó associado, e o valor zero nos outros nós.

As derivadas de u com respeito às coordenadas cartesianas, levando em consideração (2.34) e (2.35), são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A} (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) \quad (2.37)$$

De posse dos dados acima, pode-se calcular explicitamente, para este caso, as expressões das matrizes definidas na secção anterior.

Para a matriz $[K^e]$, obtém-se:

$$[K^e] = \frac{1}{4A^2} \int_{\Omega_e} (K_x \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} [b_1 \ b_2 \ b_3] + K_y \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} [a_1 \ a_2 \ a_3]) d\Omega$$

Supondo K_x e K_y constantes dentro de cada elemento, o resultado da integração é:

$$[K^e] = \frac{1}{4A^2} (K_x \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{bmatrix} + K_y \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}) \quad (2.38)$$

Para obtenção da matriz $[M^e]$, a expressão inicial é:

$$[M^e] = \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} [L_1 \ L_2 \ L_3] d\Omega_e \quad (2.39)$$

Considerando a expressão geral de integração de áreas, em coordenadas triangulares,

$$\int_{\Omega_e} L_1^i L_2^j L_3^k d\Omega = \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} 2A$$

obtém-se:

$$[M^e] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Analogamente, a expressão final do vetor $\{P_c^e\}$ é:

$$\{P_c^e\} = c \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} d\Omega = \frac{cA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Para a determinação da Matriz $[H^e]$, será usada a nomenclatura mostrada na figura 2.2, onde l_1, l_2, l_3 são os comprimentos dos lados sobre os quais atuam h_1, h_2, h_3 , respectivamente. Considerando estes valores constantes em cada elemento, pode-se escrever

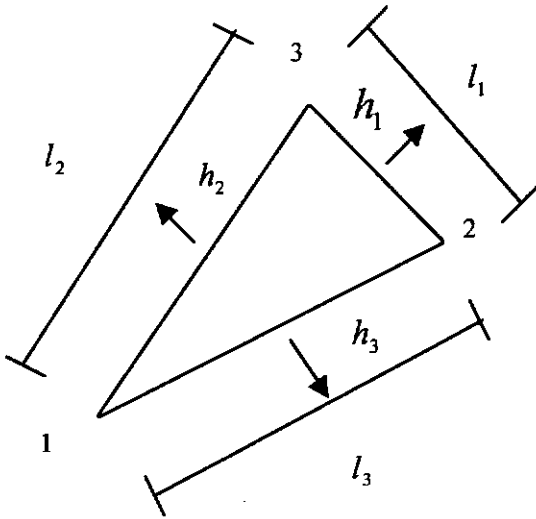


Fig. 2.2 Nomenclatura para cálculo de $[H^e]$.

$$[H^e] = h_3 \int_{-2} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} [L_1 \ L_2 \ L_3] d\Gamma + h_1 \int_{2-3} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} [L_1 \ L_2 \ L_3] d\Gamma + h_2 \int_{-1} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} [L_1 \ L_2 \ L_3] d\Gamma$$

Levando-se em conta que L_1 é nulo ao longo do lado 2-3, L_2 é nulo em 3-1 e L_3 é nulo em 1-2, e considerando a expressão geral de integração de linhas:

$$\int_{-2} L_1^i L_2^j d\Gamma = \frac{i! j!}{(i+j+1)!} l_3$$

obtem-se a expressão final para a matriz $[H^e]$:

$$[H^e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_2 l_2 + h_3 l_3) & h_3 l_3 & h_2 l_2 \\ h_3 l_3 & 2(h_3 l_3 + h_1 l_1) & h_1 l_1 \\ h_2 l_2 & h_1 l_1 & 2(h_1 l_1 + h_2 l_2) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Para o vetor $\{P_f^e\}$, adotando uma nomenclatura análoga à da figura 2.2, chega-se à expressão

$$\{P_f^e\} = f_3 \int_{-2} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} d\Gamma + f_1 \int_{2-3} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} d\Gamma + f_2 \int_{3-1} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} d\Gamma$$

cuja integração fornece:

$$\{P_f^e\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f_2 l_2 + f_3 l_3 \\ f_3 l_3 + f_1 l_1 \\ f_1 l_1 + f_2 l_2 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Duas considerações devem ser ressaltadas sobre as expressões (2.38) a (2.43): O primeiro é o fato das matrizes $[K^e], [M^e], [H^e]$ serem todas simétricas, como esperado; o segundo é que os valores de h_1, h_2, h_3 ou (f_1, f_2, f_3) são considerados nulos quando nenhum lado do elemento pertence à parte do contorno onde são especificadas condições de contorno naturais.

Montagem da matriz global

Depois de calcular os termos componentes das matrizes dos elementos, é preciso montar a matriz global, que é obtida somando-se os termos correspondentes. Assim, a matriz global $[K]$ e o vetor de condição natural global $\{P_f\}$ dados pelas seguintes expressões :

$$[K] = \sum_1^{NE} [K^e] \text{ e } \{P_f\} = \sum_1^{NE} \{P_f^e\}$$

são montadas a partir das contribuições elementares $[K^e]$ e $\{P_f^e\}$ acumulando-se os valores de K_{ij}^e e $P_{f_i}^e$ nas posições globais correspondentes aos nós que definem as conectividades do elemento.

Cada elemento é definido por uma numeração local (i,j,k) que começa em qualquer nó e segue sempre no mesmo sentido, geralmente o anti-horário. Verifica-se qual o número na numeração global que corresponde a cada nó de modo a posicionar cada termo da matriz local na posição correspondente da matriz global. A figura 2.3. mostra um exemplo da montagem da matriz global a partir das matrizes locais, e a tabela em anexo mostra a relação entre a numeração local e global.

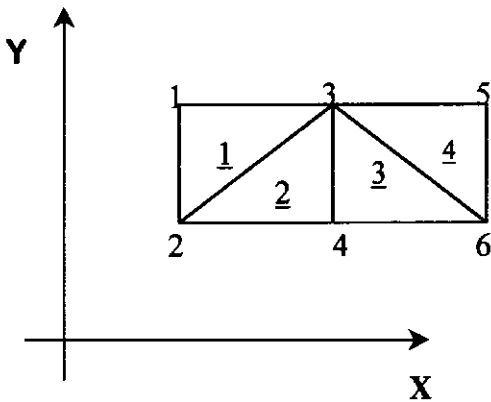
A matriz global é simétrica, podendo ser armazenada na memória do computador apenas a matriz triangular superior (diagonal principal e termos acima da diagonal).

A maior parte dos elementos está agrupada junto da diagonal principal (matriz banda), de modo que existem vários zeros junto aos extremos da diagonal secundária. Para melhor aproveitamento do espaço disponível na memória, estes zeros não precisam ser armazenados.

A largura da banda depende da maneira como são discretizados os elementos e da forma segundo a qual são numerados os nós. Considere-se o exemplo da figura 2.3: se os elementos 3 e 4 fossem separados por uma barra ligando os nós 4 e 5 ao invés

dos nós 3 e 6, os zeros junto à diagonal principal da matriz global seriam preenchidos e se reduziria a largura da banda.

Na elaboração de um programa computacional não é necessário armazenar as matrizes dos elementos. Calcula-se os termos locais e já se acumula esses valores diretamente nos termos correspondentes da matriz global.



MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL

(OS NÚMEROS SUBLINHADOS REFEREM-SE AOS ELEMENTOS)

Elemento - 1

*	*	*			
*	*	*			
*	*	*			

Elemento - 2

	*	*	*		
	*	*	*		
	*	*	*		

Elemento	Nós		
	i	j	k
<u>1</u>	1	2	3
<u>2</u>	2	4	3
<u>3</u>	3	4	6
<u>4</u>	3	6	5

Elemento - 3

		*	*		*
		*	*		*
		*	*		*

Elemento - 4

		*		*	*
		*		*	*
		*		*	*
		*		*	*

MATRIZ GLOBAL

*	*	*			
*	*	*	*		
*	*	*	*	*	*
	*	*	*		*
		*		*	*
		*	*	*	*

Figura 2.3.

O vetor $\{P_f^e\}$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\{P_f^e\} = \begin{Bmatrix} P_{f_i}^e \\ P_{f_j}^e \\ P_{f_k}^e \end{Bmatrix}$$

Desse modo, o termo $P_{f_k}^e$ seria acumulado na linha K do vetor $\{P_f\}$ global.

II.I.d APLICAÇÃO A PROBLEMAS TRANSIENTES

Para aplicar o Método dos Elementos Finitos a problemas transientes tomaremos como modelo a equação da difusão em sua forma bidimensional, particularizada para o caso de transferência de calor sem consideração de geração interna de energia, conforme apresentado por Wrobel et al. (1989):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.44)$$

Onde K_x e K_y são as condutividades térmicas nas direções x e y , ρ é a massa específica do meio, c o seu calor específico e $u(x,t)$ a temperatura, incógnita do problema.

As condições de contorno do problema são dadas por:

-Essenciais

$$u = \bar{u} \quad \text{em} \quad \Gamma_u \quad (2.45)$$

- Naturais :

$$- K_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y = f(x, y) + h(x, y)u \quad \text{em} \quad \Gamma_p \quad (2.46)$$

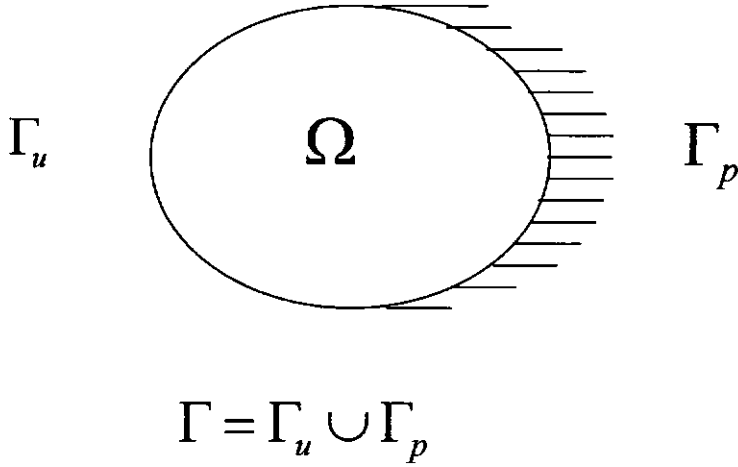


Fig.2.1. Domínio e condições de contorno.

sendo f um fluxo de calor conhecido e h o coeficiente de transferência de calor. Além disso, são necessárias condições iniciais, dadas pela distribuição de temperatura no tempo.

Inicialmente, estabelecemos uma equação de resíduos ponderados na forma

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \right] W_{\Omega}^i d\Omega = \int_{\Gamma_p} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y - f - hu \right) W_{\Omega}^i d\Gamma_p \quad (2.47)$$

Integrando por partes e lembrando que $W_u^i = 0$ em Γ_u , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W_{\Omega}^i}{\partial x} + K_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial W_{\Omega}^i}{\partial y} + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} W_{\Omega}^i \right) d\Omega - \int_{\Gamma_p} (f + hu) W_{\Omega}^i d\Gamma_p = 0 \quad (2.48)$$

Lembrando que na aproximação de Galerkin $W_{\Omega}^i = \phi_i$, obtemos:

$$\int_{\Omega} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \phi_i \right) d\Omega - \int_{\Gamma_p} (f + hu) \phi_i d\Gamma_p = 0 \quad (2.49)$$

O passo seguinte é a discretização do contínuo e aproximação da variação de u em cada elemento. Nesta altura, entretanto, proporemos apenas uma aproximação espacial de u , como a seguir, com uma aproximação análoga para $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$:

$$u = [N]\{u^e\} \tag{2.50}$$

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{u}^e\} \tag{2.51}$$

$$\phi_i = [N]\{\phi_i^e\} = \{\phi_i^e\}^T [N]^T \tag{2.52}$$

Levando-se as aproximações na equação (6) discretizada, obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \left(K_x \{\phi_i^e\}^T [N_x]^T [N_x] \{u^e\} + K_y \{\phi_i^e\}^T [N_y]^T [N_y] \{u^e\} + \rho c \{\phi_i^e\}^T [N]^T [N] \{\dot{u}^e\} \right) d\Omega -$$

$$\int_{\Gamma_{p,e}} \left(f \{\phi_i^e\}^T [N]^T + h \{\phi_i^e\}^T [N]^T [N] \{u^e\} \right) d\Gamma_{p,e} = 0 \tag{2.53}$$

Considerando que os vetores $\{u^e\}$ e $\{\phi_i^e\}$ contêm apenas valores pontuais, a equação (2.53) pode ser reescrita na forma:

$$\{\phi_i^e\} \left\{ \left[\int_{\Omega_e} (K_x [N_x]^T [N] + K_y [N_y]^T [N]) d\Omega_e - \int_{\Gamma_{p,e}} h [N]^T [N] d\Gamma_{p,e} \right] \{u^e\} + \right. \\ \left. \int_{\Omega_e} \rho c [N]^T [N] d\Omega_e \{\dot{u}^e\} - \int_{\Gamma_{p,e}} f [N]^T d\Gamma_{p,e} \right\} = 0 \tag{2.54}$$

Chegamos então à seguinte equação matricial para cada elemento:

$$([K^e] - [H^e])\{u^e\} + [M^e]\{\dot{u}^e\} = \{P_f^e\} \tag{2.55}$$

onde

$$[M^e] = \int_{\Omega_e} \rho c [N]^T [N] d\Omega$$

e as outras matrizes e vetores são definidos como na secção anterior.

Adicionando-se as contribuições de todos os elementos chega-se, finalmente, ao sistema global:

$$[C]\{U\} + [M]\{\dot{U}\} = \{P_f\} \quad (2.56)$$

No qual $[C] = [K] - [H]$.

A solução da equação (2.56), para a variável u , exige um esquema de discretização no tempo com aproximação temporal de u e \dot{u} em cada passo. Faremos esta aproximação pelos métodos de diferenças finitas.

II.1.e APROXIMAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS NO TEMPO

Neste tipo de aproximação supõem-se uma variação linear para u , em cada ponto x_i , entre os níveis de tempo t_i e $t_i + \Delta t$ na forma

$$u(x_i, t_i + \theta \Delta t) = \theta u(x_i, t_i + \Delta t) + (1 - \theta) u(x_i, t_i) \quad 1 \geq \theta \geq 0 \quad (2.57)$$

Sendo a relação entre θ e $t = t_i + \theta \Delta t$ tem-se para u :

$$\dot{u}(x_i, t_i + \theta \Delta t) = (u(x_i, t_i + \Delta t) - u(x_i, t_i)) / \Delta t \quad (2.58)$$

Levando-se as duas aproximações acima em (2.56) e rearrumando, obtém-se

$$(M / \Delta t + \theta C) U_{i, t_i + \Delta t} = [M / \Delta t - (1 - \theta) C] U_{i, t_i} + (1 - \theta) P_{f, t_i} + \theta P_{f, t_i + \Delta t} \quad (2.59)$$

na qual foi considerada uma variação para P análoga à dada em (2.57).

Os valores mais comumente adotados para θ são : $\theta = 1/2; 2/3$ e 1 , que correspondem aos esquemas de Crank-Nicolson, Galerkin e Totalmente Implícito. Note-se que, neste caso, mesmo para $\theta = 0$ é necessário resolver um sistema de equações algébricas simultâneas a cada passo de tempo, e o termo “explícito” perde o significado que tinha na solução por diferenças finitas.

II.II MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

II.II.a INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) surgiu no fim da década de 70 e tem-se mostrado útil na análise de diversos problemas de engenharia.

Uma das vantagens do método sobre os outros processos consiste na redução da quantidade de dados necessários para resolver o problema em estudo, além de em geral apresentar uma melhor precisão numérica dos resultados do que métodos de domínio.

Conforme CABRAL(1996), a melhoria de precisão dos resultados é particularmente importante quando se necessita das derivadas das variáveis. Outros processos, como MDF e MEF, calculam de início só o valor das variáveis. Isto acarreta um erro relativamente grande no cálculo das derivadas, enquanto no MEC já se calcula diretamente o valor das variáveis e de suas derivadas.

O método dos elementos de contorno apresenta ainda vantagens na simulação numérica de superfícies livres, interface móveis, domínio infinito e problemas com singularidades.

Em se tratando de água subterrânea, o método de elementos de contorno é em geral muito adequado. No entanto, não é eficiente no caso do meio poroso altamente heterogêneo, quando se torna necessário dividir o domínio em várias sub-regiões, perdendo-se a vantagem do método em utilizar as equações apenas no contorno da região de estudo.

II.II.b MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE DIFUSÃO TRANSIENTE

Para obtenção da equação integral de contorno a partir da equação da Difusão Transiente dada por

$$\nabla^2 u(\underline{x}, t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(\underline{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega \quad (2.60)$$

com condições de contorno do seguinte tipo:

$$u(\underline{x}, t) = \bar{u}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \Gamma_1 \quad (2.61)$$

$$p(\underline{x}, t) = \frac{\partial u(\underline{x}, t)}{\partial n(\underline{x})} = \bar{p}(\underline{x}, t) \quad \underline{x} \in \Gamma_2 \quad (2.62)$$

onde α é o coeficiente de difusividade térmica cuja dimensão é $[L^2 T^{-1}]$

Deve-se também prescrever as condições iniciais num tempo $t = t_0$, pois o problema é dependente do tempo.

$$u(\underline{x}, t) = \bar{u}(\underline{x}, t_0) \quad (2.63)$$

Utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo, aplicando-se uma sentença de resíduos ponderados, integrando-se por partes e utilizando um processo de limite quando o ponto interno é levado ao contorno obtém-se a Equação Integral de Contorno, válida para pontos do contorno ou do domínio:

$$c(\underline{\xi})u(\underline{\xi}, t_F) = \alpha \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} p(\underline{x}, t) u^*(\underline{\xi}, \underline{x}; t_F, t) d\Gamma(\underline{x}) dt - \alpha \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} u(\underline{x}, t) p^*(\underline{\xi}, \underline{x}; t_F, t) d\Gamma(\underline{x}) dt \quad (2.64)$$

onde $c(\underline{\xi})$ é função do ângulo interno no ponto $\underline{\xi}$.

A solução fundamental dependente do tempo u^* para duas dimensões é dada por:

$$u^*(\underline{\xi}, \underline{x}; t_F, t) = \frac{1}{4\pi\alpha\tau} \exp\left[\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right] \quad (2.65)$$

$$p^*(\underline{\xi}, \underline{x}; t_F, t) = \frac{-r \frac{\partial r}{\partial n}}{8\pi\alpha^2\tau^2} \exp\left[\frac{-r^2}{4\alpha\tau}\right] \quad (2.66)$$

onde: $-r \frac{\partial r}{\partial n} = [x_1(\underline{\xi}) - x_1(\underline{x})]n_1(\underline{x}) + [x_2(\underline{\xi}) - x_2(\underline{x})]n_2(\underline{x})$

é a projeção da distância r sobre a normal ao contorno.

II.II.b.1. Discretização com elementos constantes no espaço e no tempo

Adotando na discretização geométrica elementos constantes, na discretização funcional no tempo a consideração que u e p são constantes em cada intervalo de tempo dentro de cada elemento Γ_j , e levando-se em conta que o contorno é suave em $\underline{\xi}$, podemos reescrever a equação (2.64) da seguinte forma:

$$0,5u_i^{NT} = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \sum_{k=1}^{NT} p^k(\underline{x}) \int_{t_0^k}^{t_j^k} \alpha u^*(\underline{\xi}, \underline{x}; t_F, t) dt d\Gamma_j(\underline{x}) - \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \sum_{k=1}^{NT} u^k(\underline{x}) \int_{t_0^k}^{t_j^k} \alpha p^*(\underline{\xi}, \underline{x}; t_F, t) dt d\Gamma(\underline{x}) \quad (2.67)$$

onde: NT = Número de intervalos em que o período de tempo considerado é dividido

$u_i^{NT} = u(\underline{\xi}, t_F)$ é o valor de u no tempo t^{NT} no ponto ξ_i .

t_0^k – tempo inicial do k -ésimo intervalo de tempo.

t_f^k – tempo final do k-ésimo intervalo de tempo.

A expressão matricial resultante é conforme EFFREN(1997)

$$\sum_{k=1}^{NT} [H]^k \{u\}^{NT-k+1} = \sum_{k=1}^{NT} [G]^k \{p\}^{NT-k+1} \quad (2.68)$$

Tendo em vista que não conhecemos previamente os valores de u_j e p_j em todos os tempos, para calcularmos os valores de $\{u\}$ e $\{p\}$ no tempo NT deveremos estabelecer um esquema de marcha no tempo a partir de NT=1.

Então, particularizando-se a equação (2.67) para NT=1:

$$[H]^1 \{u\}^1 = [G]^1 \{p\}^1 \quad (2.69)$$

Incorporando-se as condições de contorno na equação (2.67) de maneira análoga ao caso permanente, resulta no seguinte sistema de equações:

$$[A]^1 \{x\}^1 = \{f\}^1 \quad (2.70)$$

que, após sua solução, fornece os valores de u_j^1 e p_j^1 em todo o contorno discretizado.

Uma vez conhecidos u_j^1 e p_j^1 em todo o contorno, pode-se avançar no tempo e calcular u_j^2 e p_j^2 usando a expressão (2.68) para NT = 2 , e assim sucessivamente até atingir o tempo desejado NT.

Potenciais em pontos internos, são obtidos pela forma discreta da equação (2.64) com $c(\xi)=1$. Introduzindo-se as aproximações geométricas e funcionais (espaciais e temporais):

$$u_i^{NT} = \sum_{k=1}^{NT} \left(\sum_{j=1}^{NE} G_{ij}^k p_j^k - \sum_{j=1}^{NE} \hat{H}_{ij}^k u_j^k \right) \quad (2.71)$$

A cada passo de tempo, todos os valores de u_j e p_j no contorno são conhecidos até o nível de tempo atual.

CAPÍTULO III - APLICAÇÕES

CAPITULO III – APLICAÇÕES

III.1 INTRODUÇÃO

A implementação descrita no capítulo anterior foi utilizada em exemplos de difusão de calor unidimensional e bidimensional. A solução numérica pelos Métodos dos Elementos Finitos é comparada com a analítica através de gráficos.

Nos exemplos estudados empregam-se elementos triangulares na dimensão espaço, variação linear do potencial entre dois níveis de tempo, a difusividade térmica é igual a $1 \text{ m}^2/\text{s}$ para os exemplos 1 e 4, e $1 \text{ cm}^2/\text{s}$ para os demais.

O exemplo estudado que simula difusão transiente unidimensional para um choque térmico conforme EFFREN (1997), foi apresentado por BREBBIA (1978) para regime permanente. A solução numérica para o regime transiente é comparada com a solução analítica desenvolvida a partir de BOYCE e DIPRIMA (1979).

Dando curso às simulações, aplicamos ao longo da face $x = 0$ um choque gradual, onde agora a temperatura nesta face varia linearmente durante um intervalo de tempo de 1,0 s, mantendo-se constante para tempos posteriores, e as condições de contorno são prescritas a cada $\Delta t = 0,1\text{s}$.

Em seguida, simulamos o fluxo bidimensional sobre uma região retangular medindo 10 cm x 8 cm, estando inicialmente à temperatura de 0°C , quando subitamente é aplicada uma temperatura de 1°C ao longo de todo o contorno. Este exemplo também foi simulado pelo Método dos Elementos de Contorno por EFFREN(1997) com 28 elementos na discretização espacial e $\Delta t = 0,25\text{s}; 0,5\text{s}$ e $1,0\text{s}$.

Logo após, simulamos o fluxo bidimensional para uma região quadrada de lado $L = 1,0 \text{ m}$, estando inicialmente à temperatura de 0°C , aplicando-se na face $x = 0$ uma temperatura de $1,0^\circ\text{C}$, na face $x = 1,0$ uma temperatura de 0°C , e condições de contorno naturais $p = 1$ na face $y = 0$, e $p = 0$ na face $y = 1,0$.

Por fim, simulamos choques térmicos sucessivos ao redor de uma região

circular de raio unitário. EFFREN(1997) também simulou este exemplo pelo Método dos Elementos de Contorno, utilizando uma discretização espacial com 24 elementos e $\Delta t = 0,05s$.

Os resultados das três últimas simulações pelo Método dos Elementos Finitos são comparadas com Simulações usando o Elementos de Contorno através de gráficos e/ou tabelas.

É interessante observar nas duas primeiras simulações os resultados obtidos ao variarmos o parâmetro de peso na grandeza tempo θ , para valores iguais a $1/2$, $2/3$ e 1 que correspondem, respectivamente aos esquemas de Crank-Nicholson, Galerkin e Totalmente Implícito.

Um esquema condicionalmente estável foi utilizado, arbitrando o parâmetro de peso na grandeza tempo $\theta = 1/4$. para fluxo unidimensional e $\theta = 0,48$ para fluxo bidimensional. Sua evolução até atingir a condição estável pode ser acompanhada pelas figuras 3.10 , 3.36 e 3.37.

Assim, buscamos experimentar diferentes discretizações espaciais e temporais, gerando múltiplas simulações conforme descrito nas secções seguintes.

Nos gráficos foram usados pontos decimais no lugar de vírgulas.

III.II SIMULAÇÃO DE DIFUSÃO TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL

III.II.a. CHOQUE

(Exemplo 1)

Tomemos para aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos (MEF) à equação da difusão, uma região quadrada de lado $L = 6\text{m}$, isolada nas faces $y = 0$ e $y = 6\text{m}$, estando inicialmente à temperatura de 0°C . A temperatura na face $x = 0$ é subitamente elevada para 300°C , enquanto a face $x = 6$ é mantida a 0°C . As diferentes discretizações adotadas, as condições de contorno e as condições iniciais são mostradas nas figs. 3.1 e 3.2., que correspondem às malhas utilizadas; uma menos discretizada (32 elementos) e outra mais discretizada (com 72 elementos).

Os perfis de temperaturas analíticos e numéricos ao longo da abscissa x para intervalo de tempo $\Delta t = 0,1\text{s}$, são mostrados nas figuras de 3.3.a a 3.4.b.

Na fig.3.3.a. vemos que os resultados numéricos nos instantes iniciais estão afastados dos analíticos, o que pode ser imputado ao fato da malha ser pobre, insuficiente portanto para melhor captar o fenômeno, causando pequenas oscilações numéricas que podem ser observadas.

As pequenas oscilações presentes, conforme descrito em ZIENKIEWICZ e TAYLOR (1991), são devidas principalmente à abrupta mudança de temperatura (descontinuidade). A maioria das oscilações são introduzidas usando simplesmente condições iniciais não realistas fisicamente.

Notamos na figura 3.3.b. que os potenciais de temperaturas obtidos numericamente por ocasião de $t = 5\text{s}$, já estão bastantes próximos dos analíticos e tendem a coincidir com os resultados de regime permanente obtidos por Brebbia(1978) em $t=20\text{s}$.

Ainda nos perfis das figuras 3.3.a e 3.3.b, notamos que para cada nível de tempo são efetuadas três simulações que correspondem aos diferentes valores do

parâmetro de peso no tempo $\theta = 1/2, 2/3, 1$, gerando os esquemas numéricos de Crank Nicholson, Galerkin e Totalmente Implícito, respectivamente.

Observa-se nesses perfis uma certa proximidade das curvas de Crank Nicholson, Galerkin e Totalmente Implícito. Esse estreitamento marcante dessas curvas pode ser notado pela quase superposição dos caracteres gráficos que as definem, em cada nível de tempo, e pode ser atribuído à utilização de um passo de tempo Δt muito pequeno, da ordem de um décimo de segundo.

As figuras 3.4.a e 3.4.b. mostram as distribuições de potenciais de temperaturas ao longo da distância para a malha mais discretizada da figura 3.2. É possível identificar na figura 3.4.a, que nos instantes iniciais do processo difusivo térmico os potenciais de temperaturas já estão bem mais próximos daqueles correspondentes aos mesmos instantes quando utilizada a malha da fig.3.1, menos discretizada (32 elementos). Na figura 3.4.b notamos que por ocasião de $t = 5s$ os resultados numéricos se aproximam bastante do resultado analítico e coincidem com aqueles da solução permanente em $t = 20,0s$.

Selecionamos um ponto P de coordenadas $x = 1,5$ e $y = 1,5$ sobre os domínios discretizado das figuras 3.1., e.3.2. para acompanharmos a evolução dos potenciais de temperatura ao longo do processo transiente. As figuras 3.5 e 3.6. mostram essas distribuições de potenciais ao longo do tempo e em ambos os casos notamos que inicialmente a temperatura sobe rapidamente e depois vai crescendo mais suavemente até atingir o patamar da solução permanente por volta de $t = 20.0s$.

Na figura 3.7.a notamos que para uma mesma fila de nós na direção normal ao fluxo, numa secção situada em $x = 1,5$, há uma alternância dos valores de potenciais de temperaturas durante o transiente, que são minimizados paulatinamente com o avanço no tempo, desaparecendo totalmente ao chegarmos ao regime permanente. Ainda nessa figura, relativa ao domínio da fig. 3.1.(malha discretizada com 32 elementos simétricos) podemos ver que os valores flutuantes nos nós são também simétricos.

Na figura 3.7.b. percebemos que as variações de temperaturas ao longo de uma

fila de nós na mesma secção, situada em $x = 1,5\text{m}$ sobre a região discretizada da fig. 3.2(malha mais discretizada com 72 elementos), nos instantes iniciais são muito pequenas, tornando-se imperceptíveis nos instantes subsequentes.

Uma visão mais geral dessas flutuações transversais em qualquer secção e em níveis de tempos diferentes, pode ser obtida pelo detalhamento dos gráficos tridimensionais contidos nas figuras de 3.8.a a 3.8.h para a discretização da figura 3.1 e de 3.9.a a 3.9.h para a discretização da figura 3.2.

Os diagramas espaciais representam superfícies de distribuição de potenciais ao longo das regiões discretizadas para diferentes níveis de tempo. Percebemos nos gráficos correspondentes aos instantes iniciais do processo difusivo térmico regiões definidas pela cor preta, que designa potenciais negativos. Esses, como discutido no início desta seção, podem ser atribuídos à súbita descontinuidade na mudança de temperatura, análogo ao comportamento da função de Heaviside. Na realidade esses potenciais deveriam ser nulos, o que não acontece tendo em vista a rigidez expressa nos perfis correspondentes aos respectivos níveis de tempo, e são mais acentuados naqueles referentes à região menos discretizada da figura 3.1.

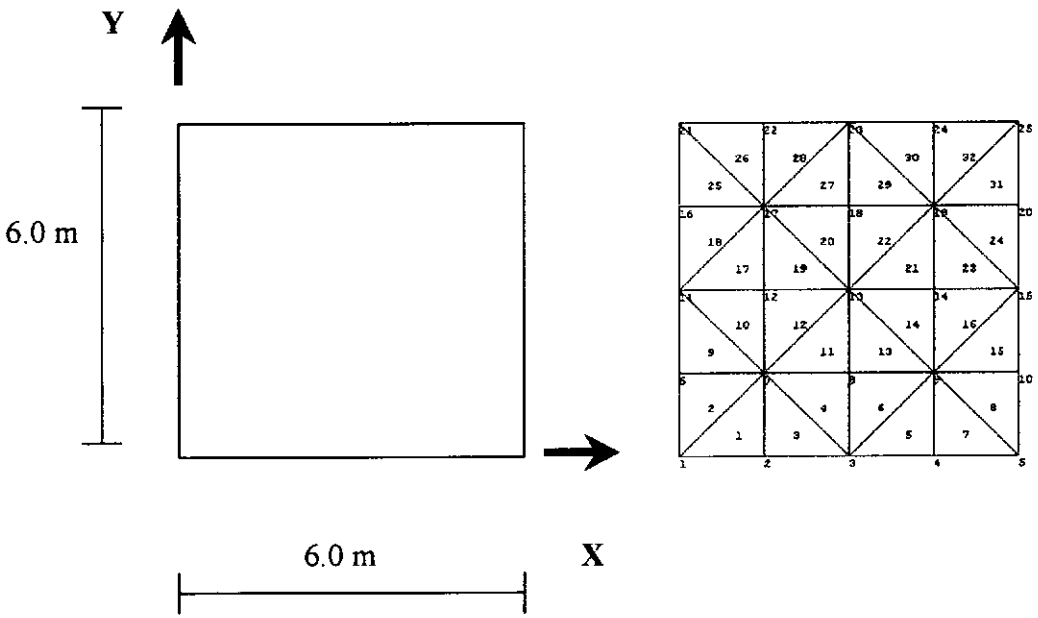
Experimentamos um esquema numérico condicionalmente estável postulando o parâmetro de peso na grandeza tempo $\theta = 1/4$. Em seguida, procuramos variar o passo de tempo Δt de tal modo que fosse possível encontrar um valor máximo apropriado abaixo do qual o esquema seria estável. Estas incursões podem ser seguidas pelos gráficos das figuras 3.10 e 3.11.

A figura 3.11 é um detalhamento da figura 3.10, e representa a distribuição de potenciais de temperatura, ao longo da região discretizada da figura 3.2, para os valores de $\Delta t = 0,17$, $0,16$ e $0,1\text{s}$, submetida à condição de choque durante o tempo de $20,0\text{s}$. Podemos inferir dela que o valor máximo apropriado para Δt abaixo do qual o esquema é condicionalmente estável é $\Delta t = 0,16\text{s}$.

Na esteira dessas simulações, enveredamos num processo inverso, ou seja fixamos um passo de tempo Δt e variamos o parâmetro de peso no tempo θ , diligenciando um valor adequado para o qual o algoritmo seria condicionalmente

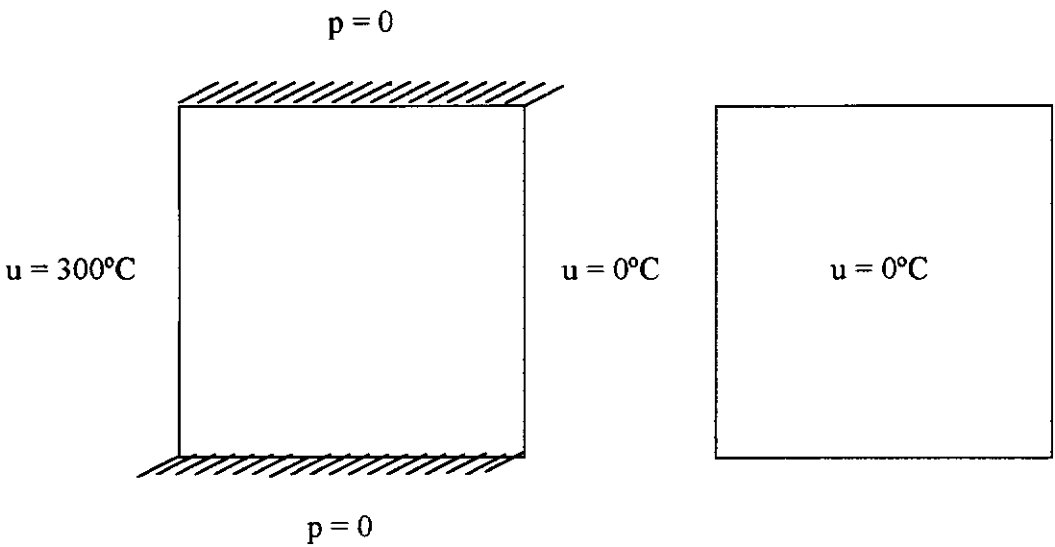
estável. O acompanhamento dessas sondagens pode ser visto pelas figuras 3.12 e 3.13.

A figura 3.12 representa uma distribuição de potenciais de temperatura ao longo da distância para aplicação de choque térmico no contorno durante um tempo de 20,0s, variando-se o parâmetro θ para valores iguais a 0,38, 0,39, 0,40 e 0,5. Notamos que para $\theta = 0,38$ conduz a variações bruscas de temperaturas, produzindo valores que oscilam de -1.000°C a 2.000°C , portanto não compatíveis com a realidade física. Descartando essa curva, obtemos os gráficos da figura 3.13, onde percebemos que valores de $\theta = 0,39$ e $0,40$ acarretam em divergências e para $\theta = 0,5$ como era de se esperar gera um esquema incondicionalmente estável.



(a) Geometria

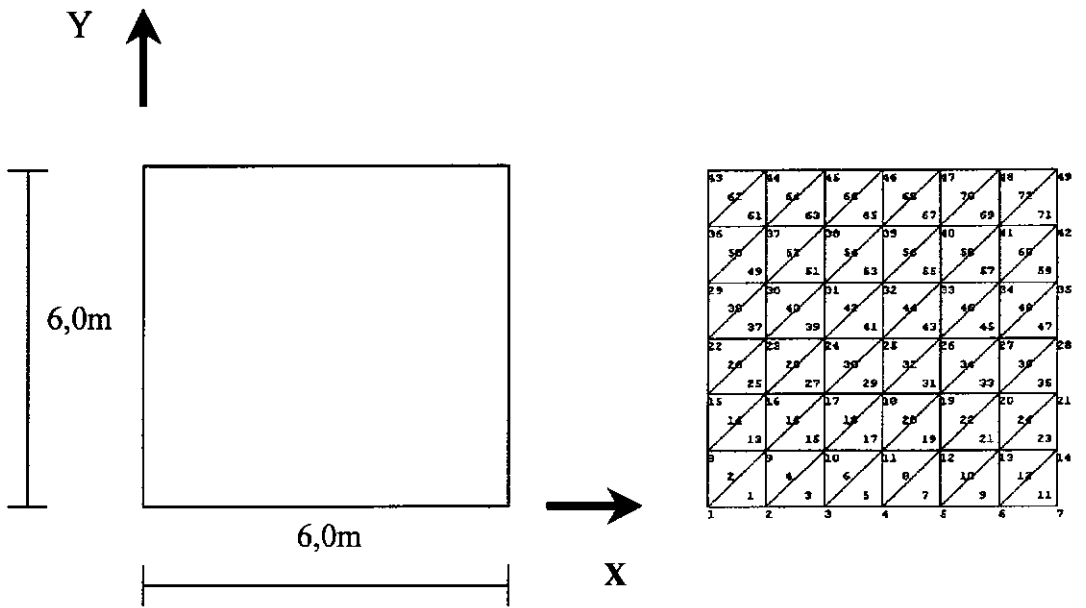
(b) Discretização Espacial



(c) Condições de Contorno

(d) Condições Iniciais

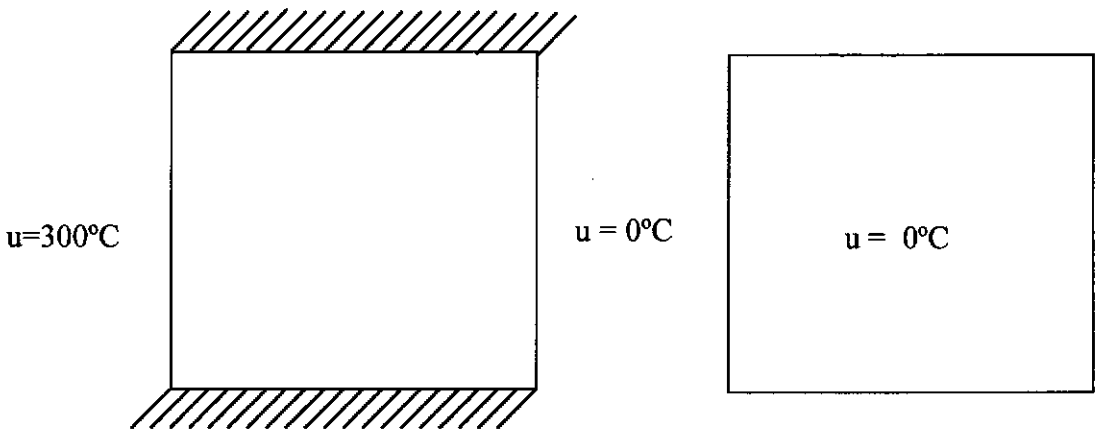
Figura. 3.1. Difusão transiente unidimensional em região quadrada . Malha menos discretizada



(A) Geometria

(B) Discretização

$$p = 0$$



$$p = 0$$

(C) Condições de Contorno

(D) Condições Iniciais

Fig.3.2-Simulação de difusão transiente unidimensional. Malha do MEF mais refinada

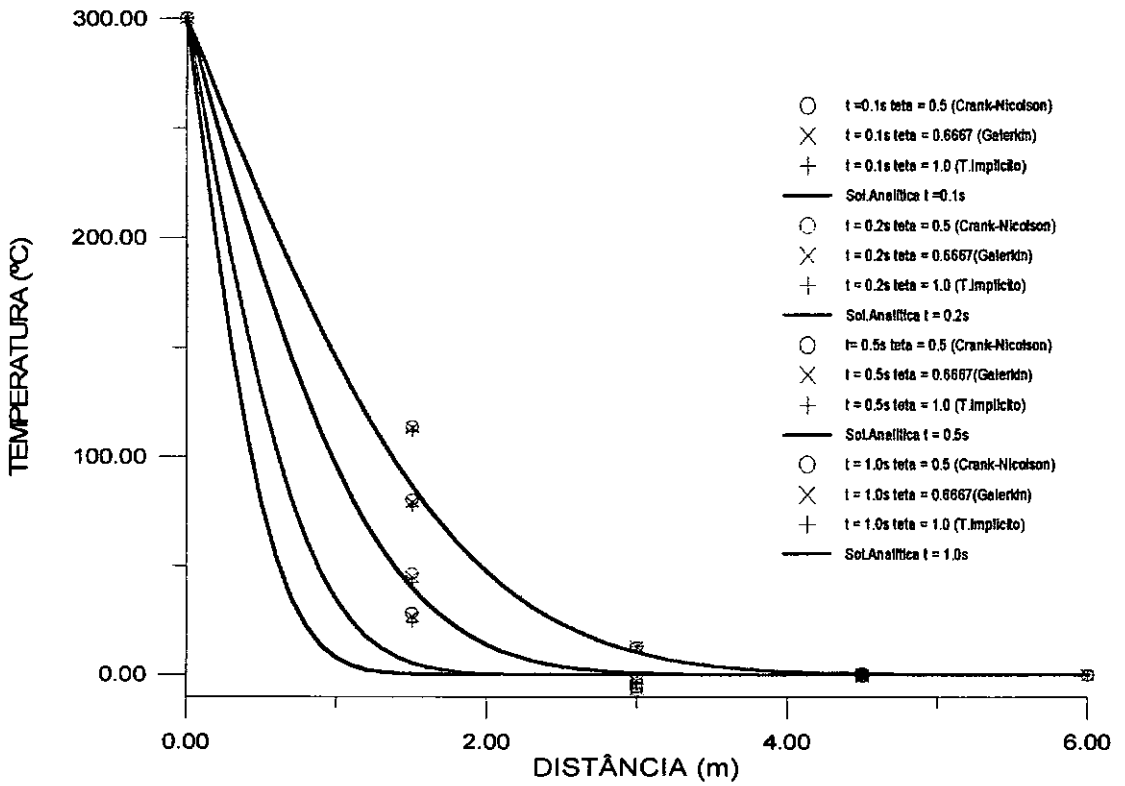


Figura 3.3.a. Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo de x para a região discretizada da figura 3.1. (32 elementos) para tempos iniciais.

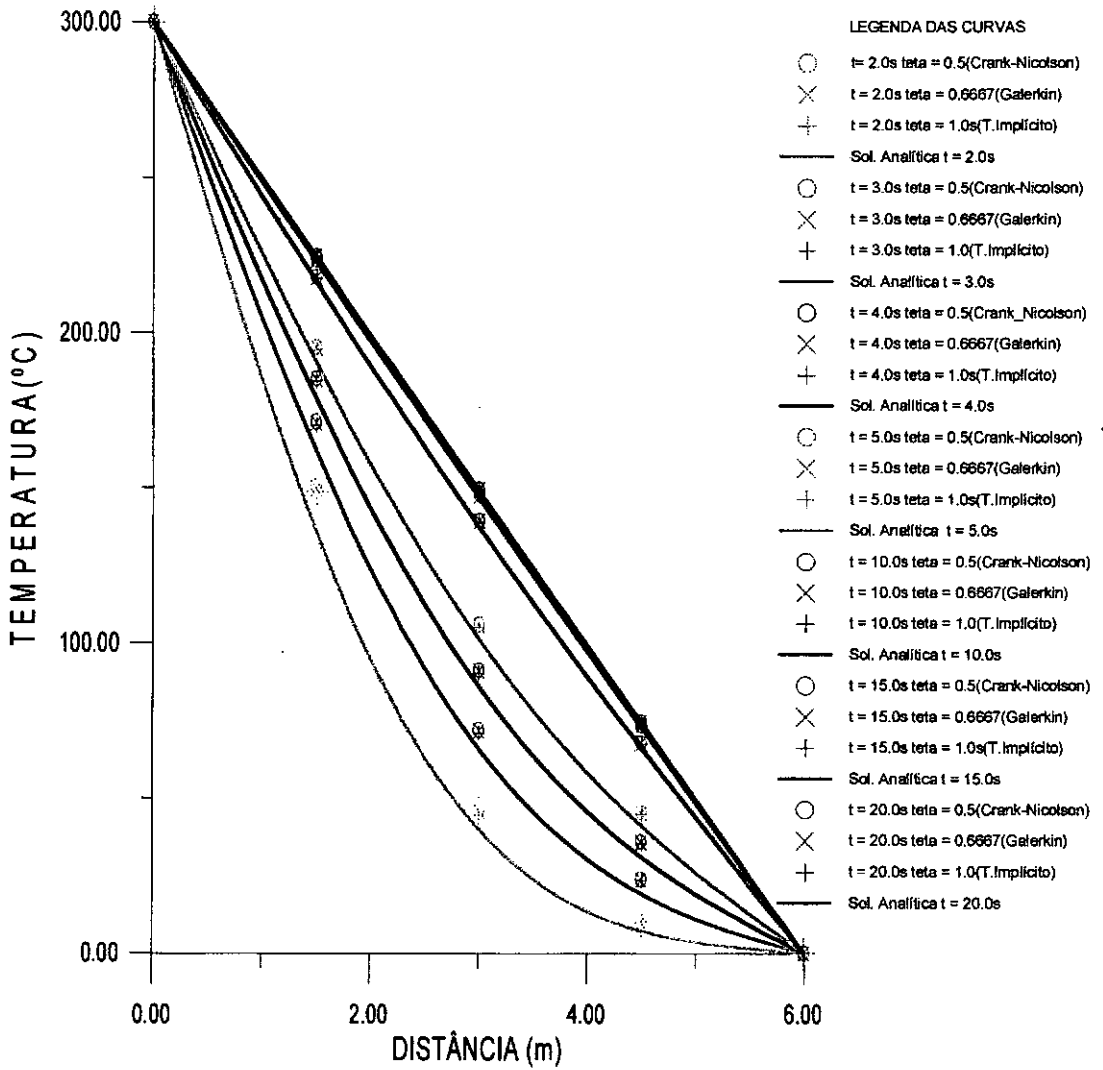


Figura 3.3.b. Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo da distância para a região discretizada da fig.3.1. (32 elementos) para tempos avançados.

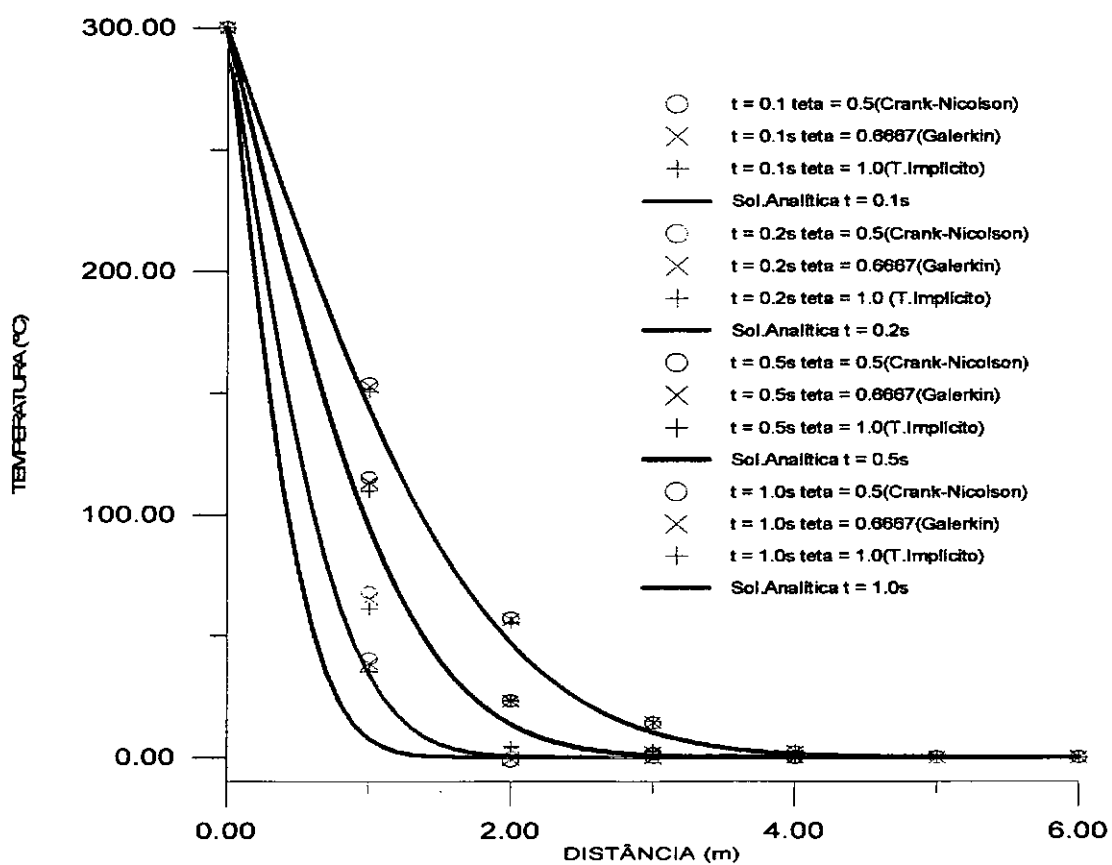


Figura 3.4.a. Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo da distância para a região discretizada da fig. 3.2(72 elementos) para tempos iniciais.

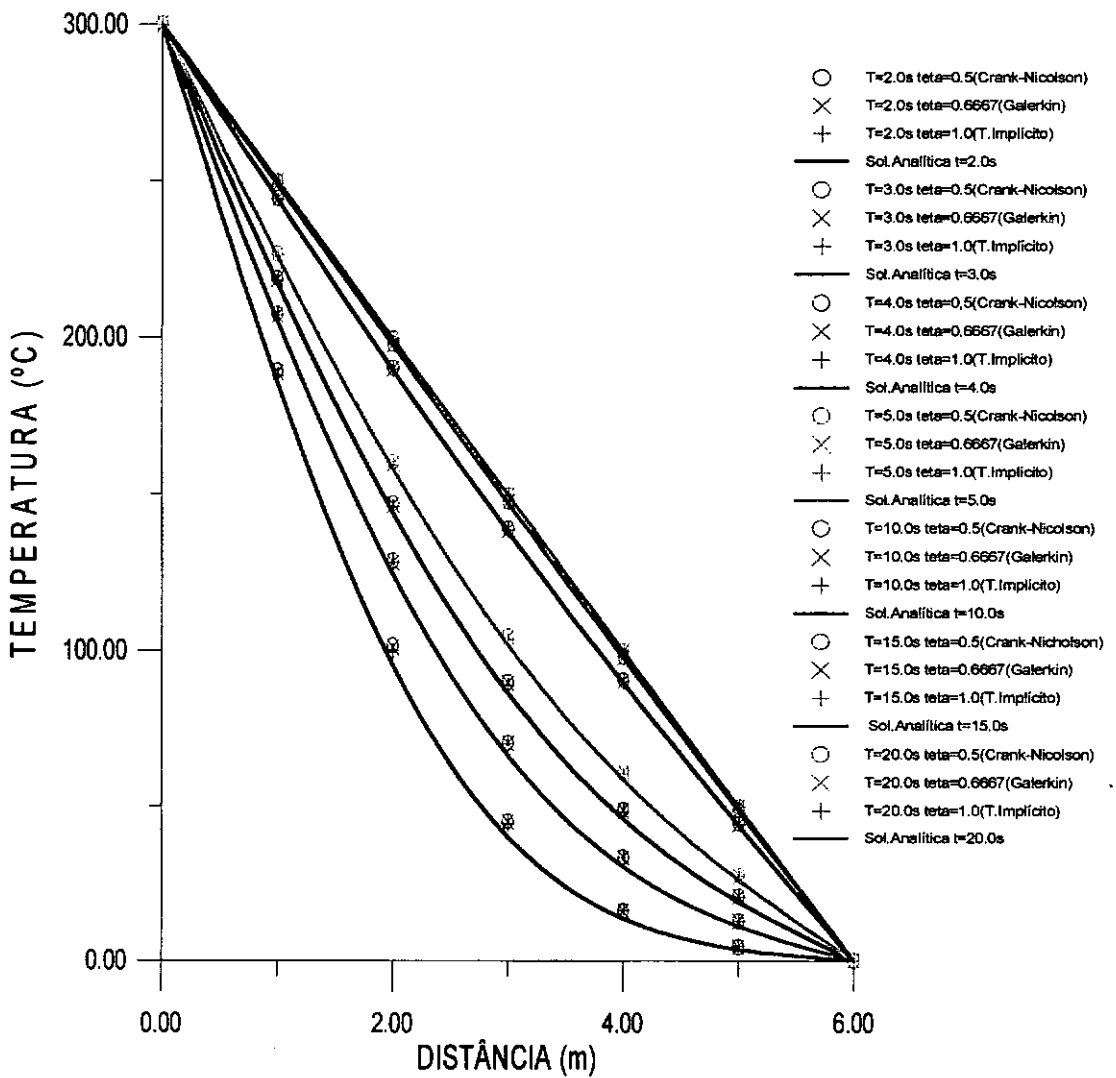


Figura 3.4.b. Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo da distância para a região discretizada da fig. 3.2.(72 elementos) para tempos avançados.

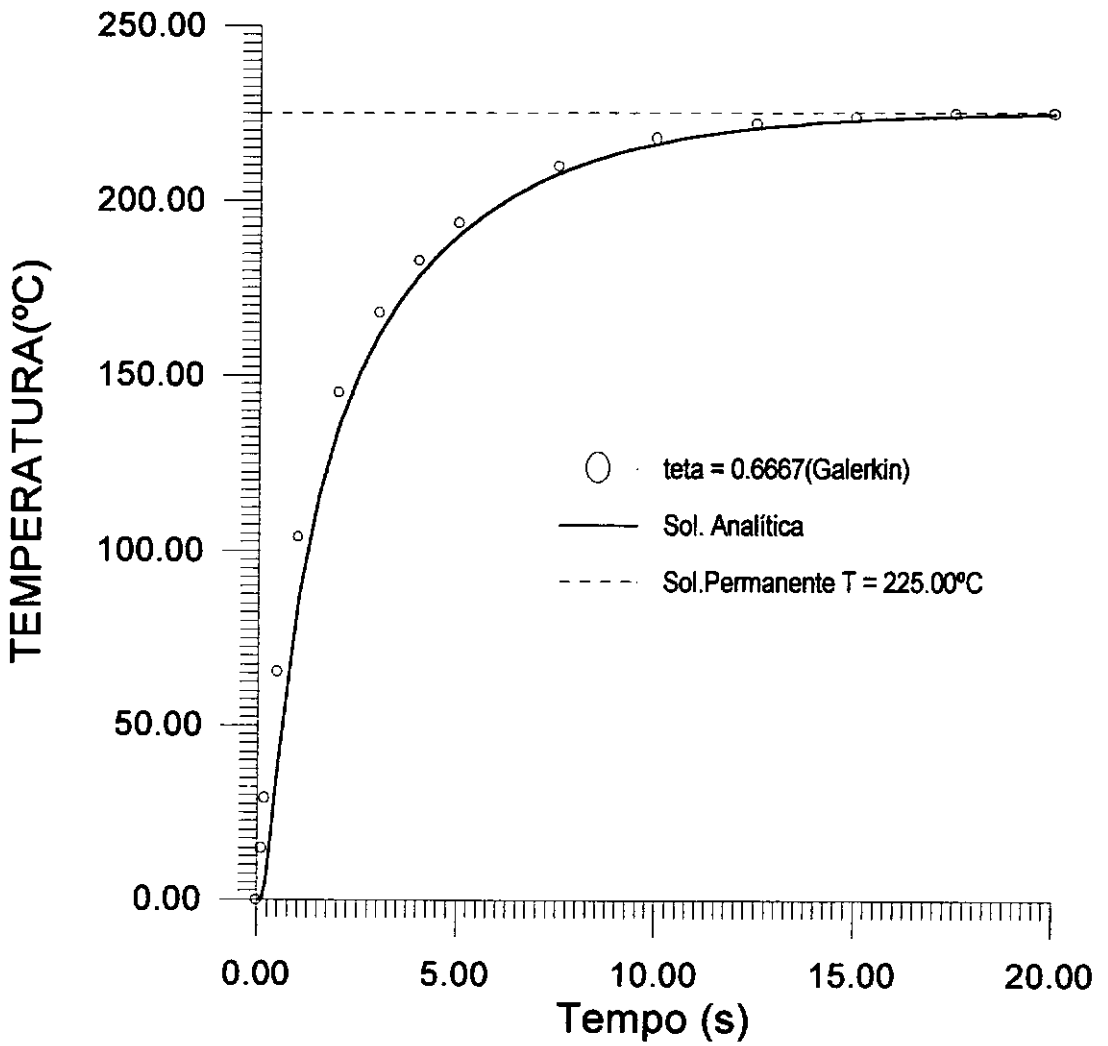


Figura 3.5. Distribuição dos potenciais de temperaturas ao longo do tempo para um ponto P(1,5;1,5) sobre o domínio discretizado da fig. 3.2.(32 elementos finitos).

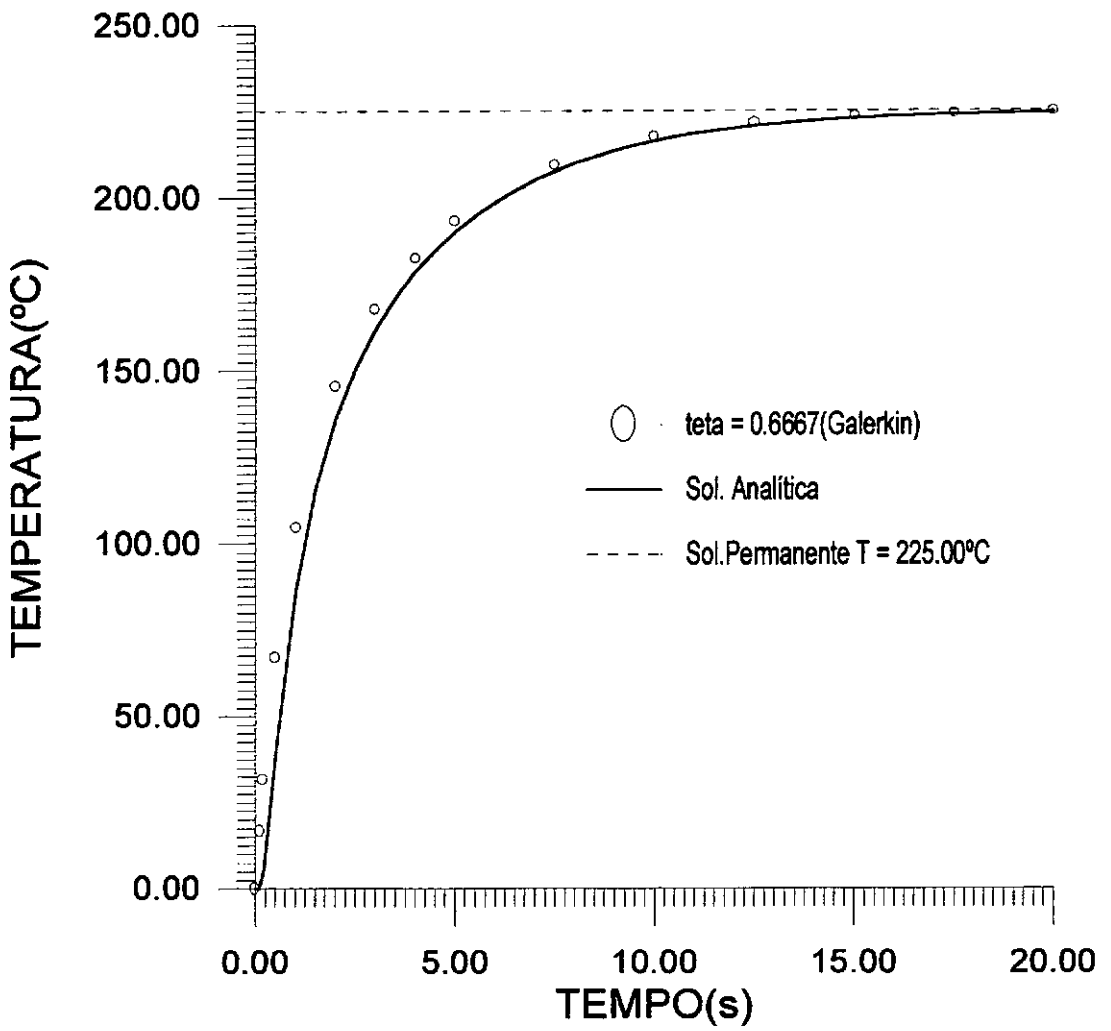


Figura 3.6. Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para um ponto P(1,5;1,5) sobre o domínio discretizado da fig. 3.1.(72 elementos).

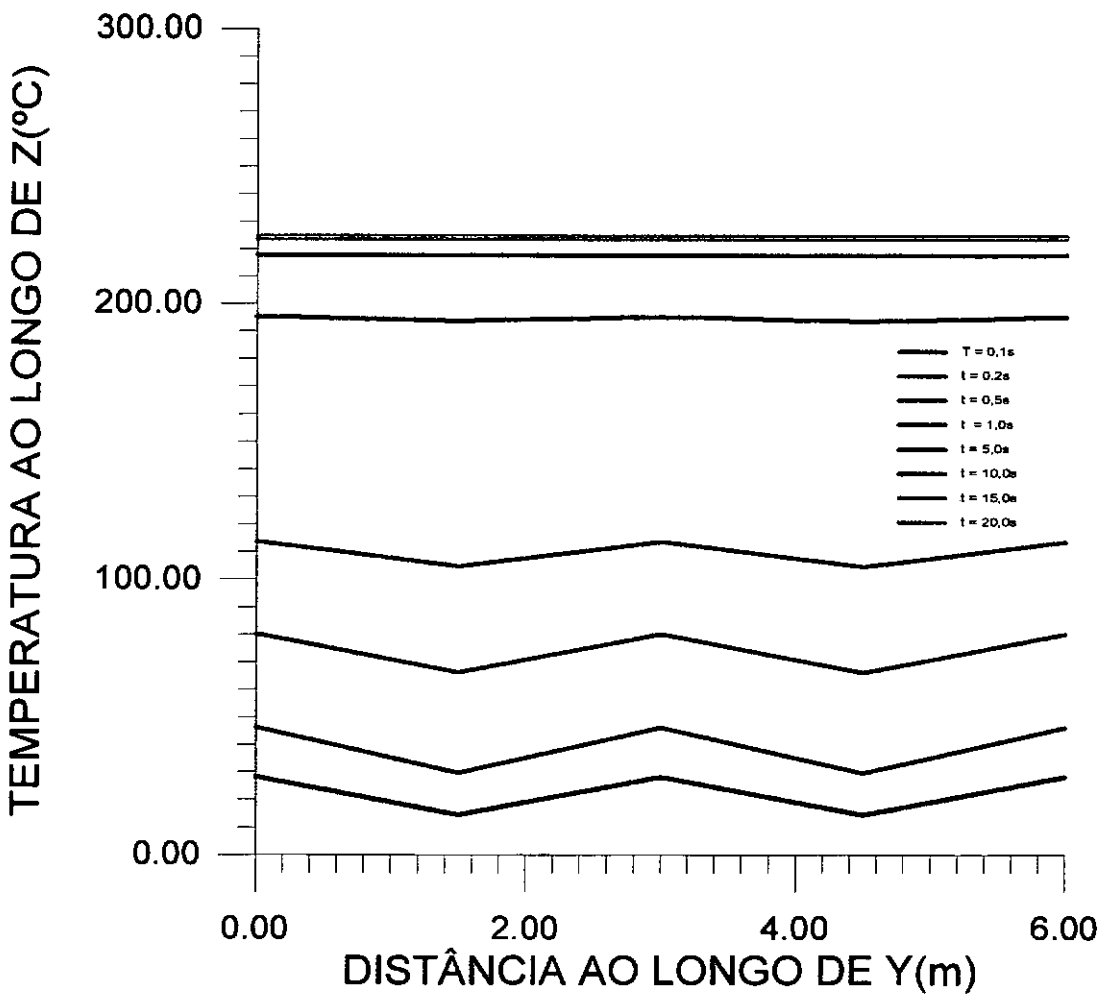


Figura 3.7.a. Variação de potenciais de temperaturas ao longo de um fila de nós situados numa seção em $x = 1,5\text{m}$ sobre a região discretizada da fig 3.1.(32 elementos).

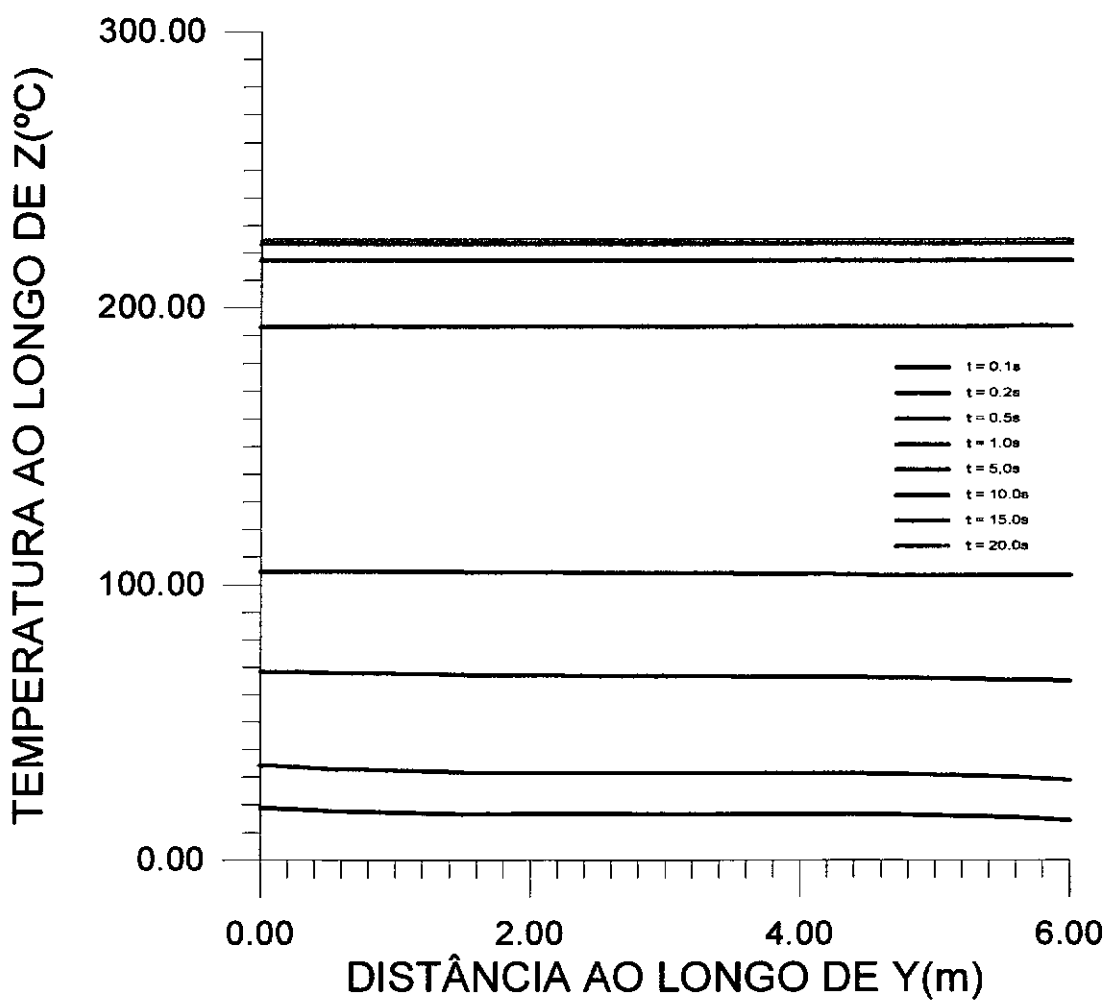


Figura 3.7.b. Variação de potenciais de temperaturas numa seção em $x = 1,5\text{m}$ sobre a região discretizada da fig.3.2.(72 elementos).

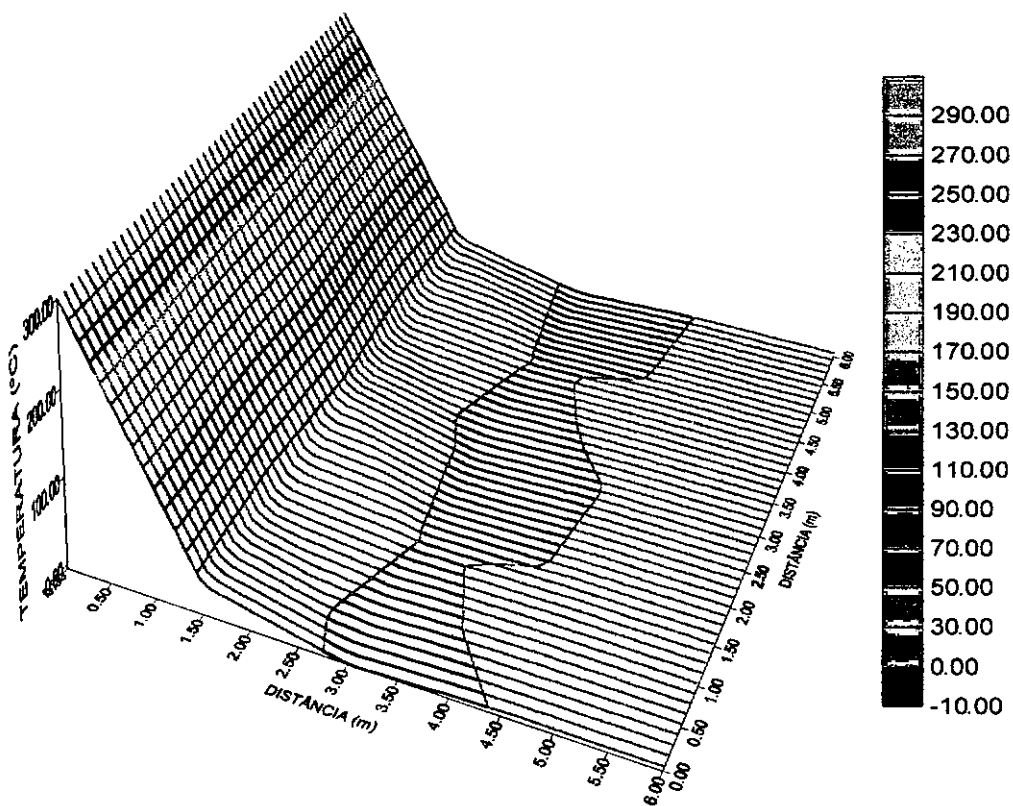


Figura 3.8.a. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,1s$ para a discretização da fig. 3.1.(32 elementos simétricos).

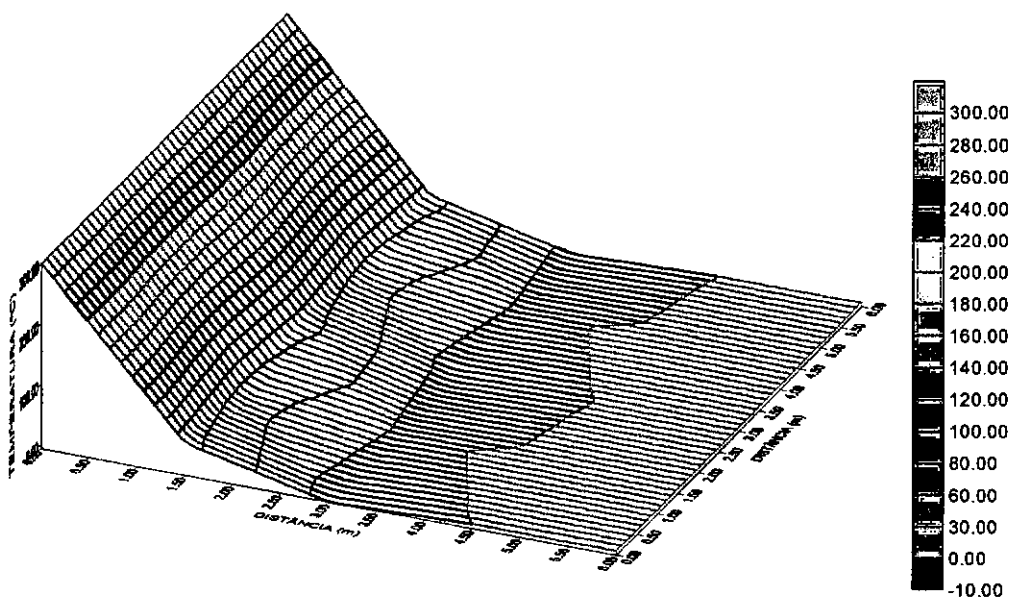


Figura 3.8.b. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,2s$.
(32 elementos).

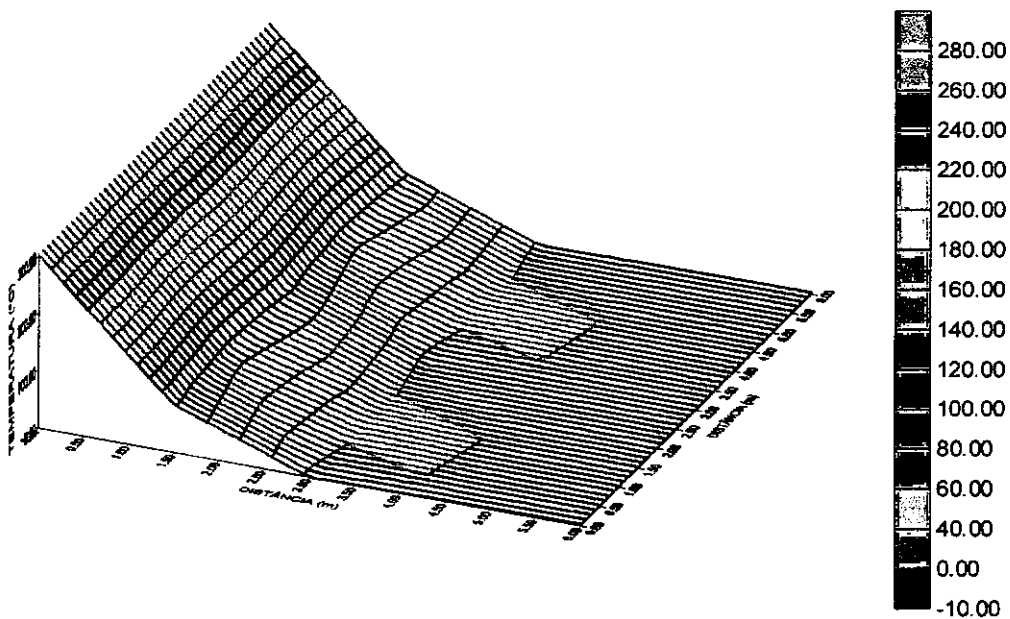


Figura 3.9.c. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,5s$.

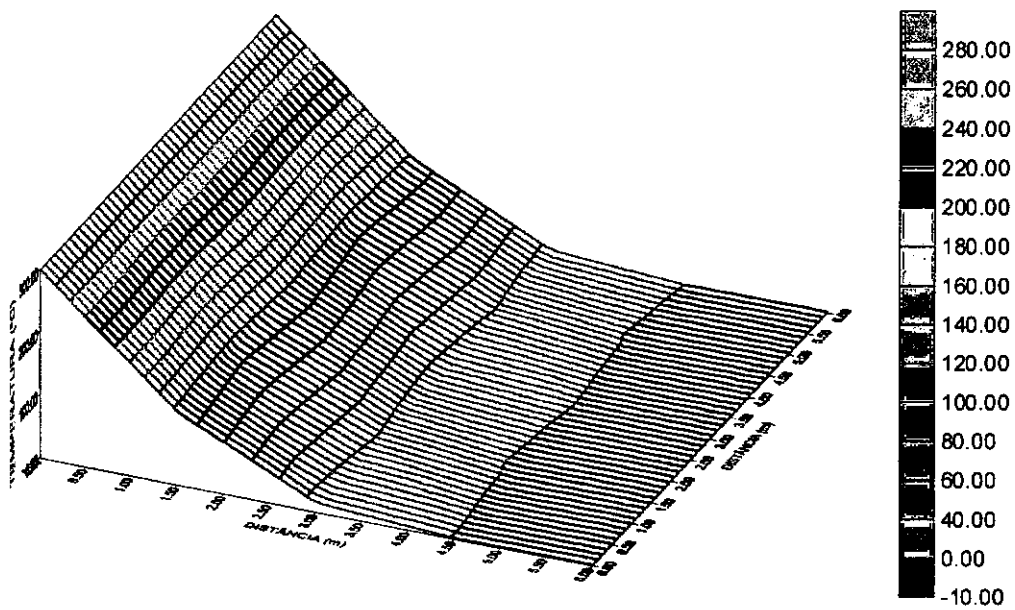


Figura 3.8.d. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 1,0s$.

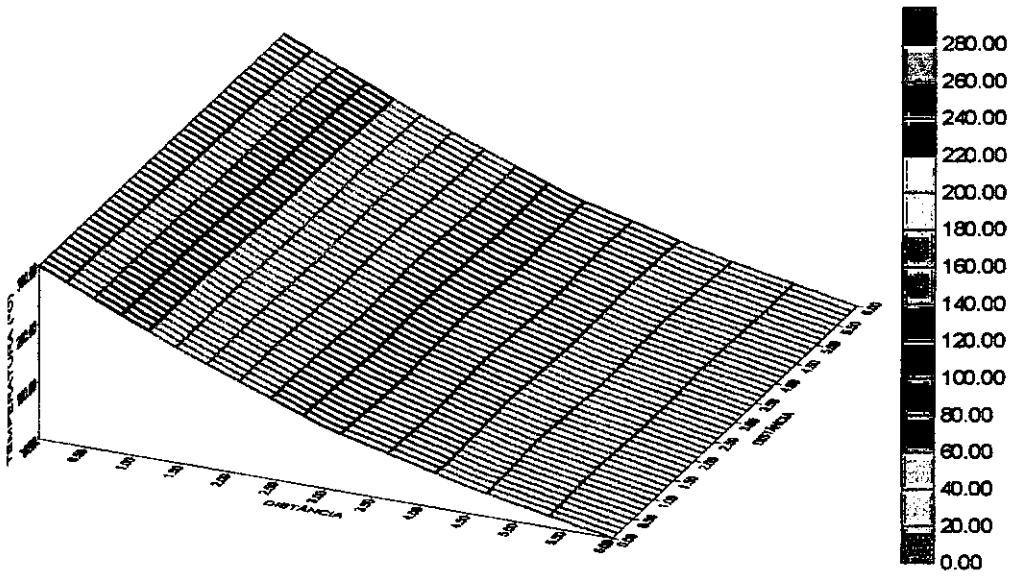


Figura 3.8.e. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 5,0$ s.

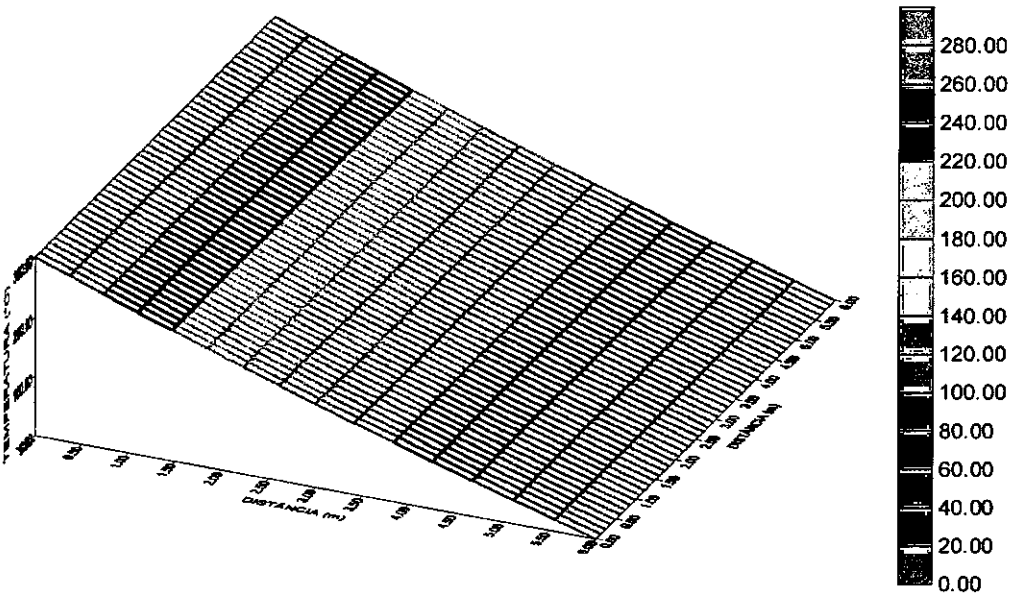


Figura 3.8.f. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 10,0$ s.

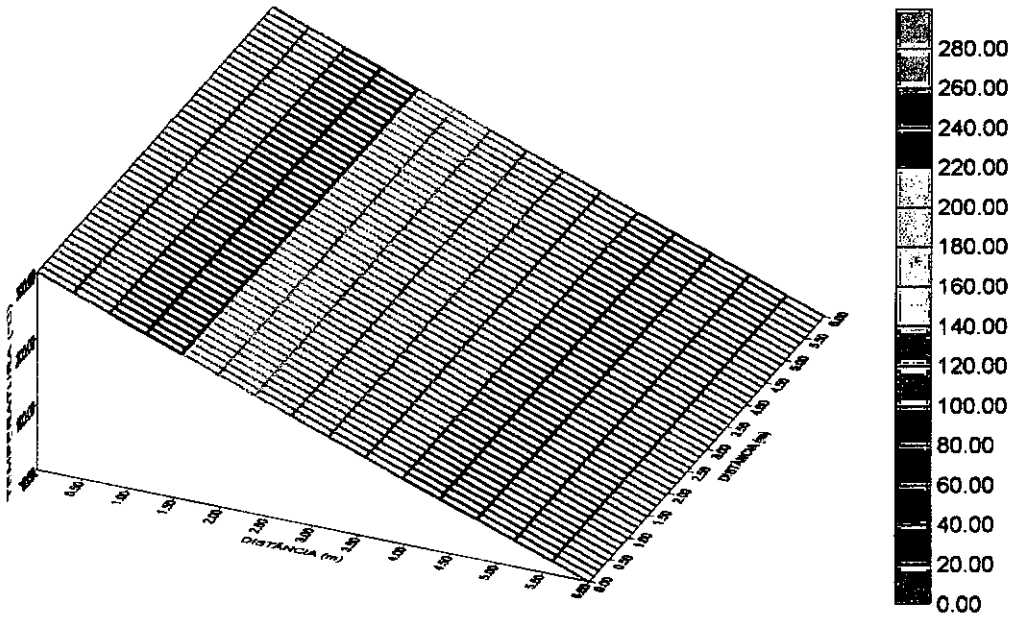


Figura 3.8.g. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 15,0s$.

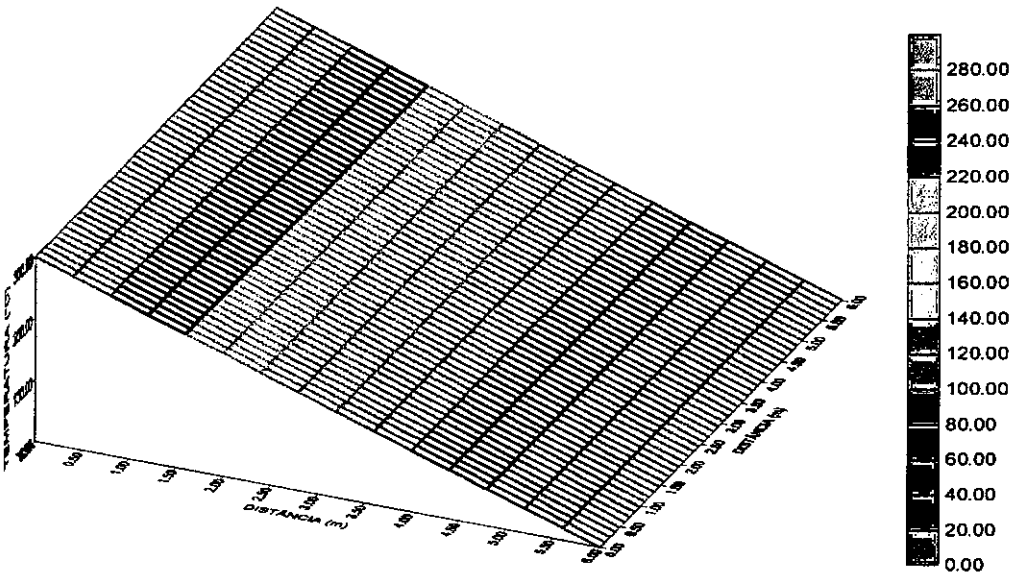


Figura 3.8.h. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 20,0s$.

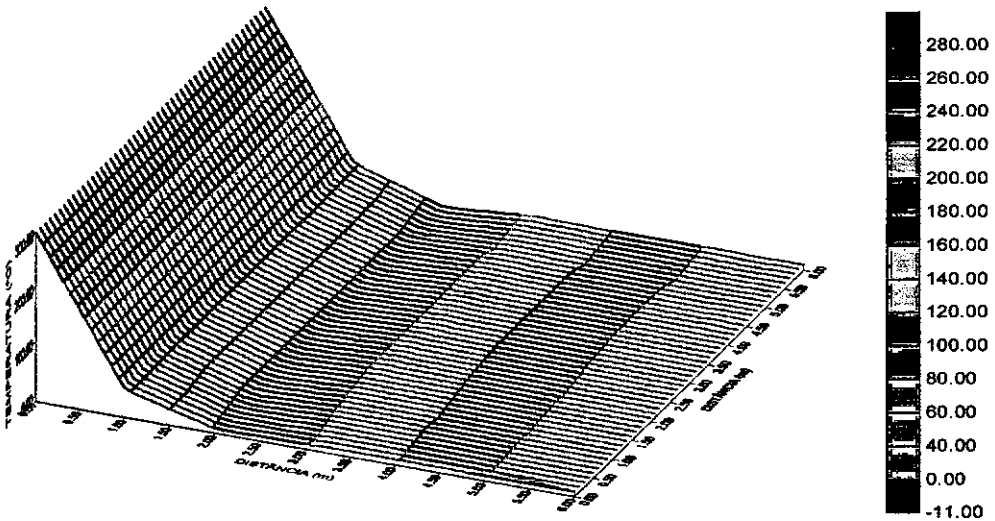


Figura 3.9.a Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,1s$
 Para a região discretizada fig. 3.2.(72 elementos).

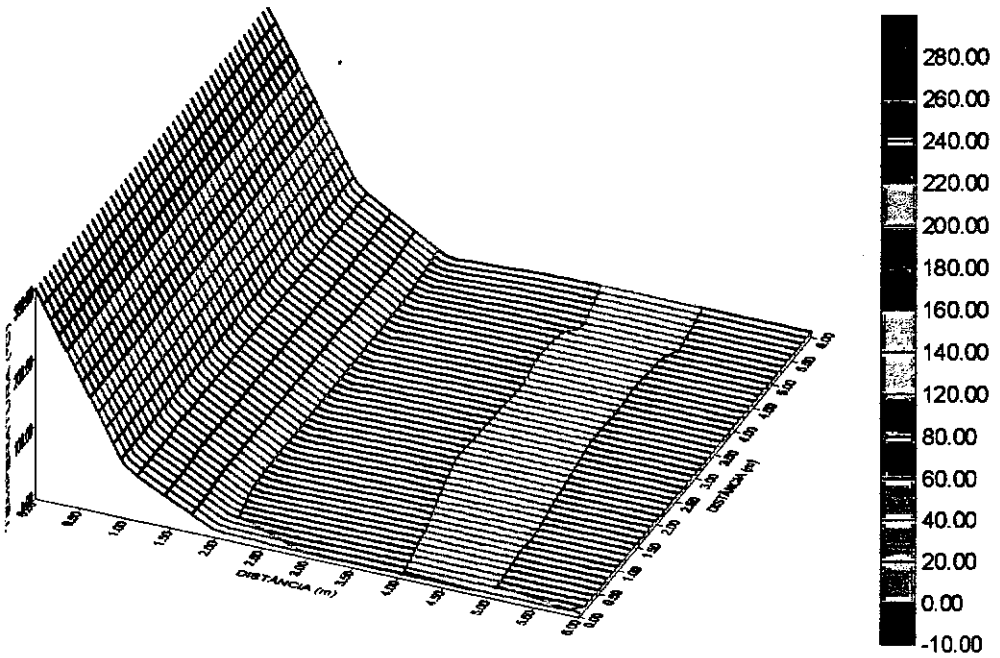


Figura 3.9.b. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,2s$.
 (72 elementos)

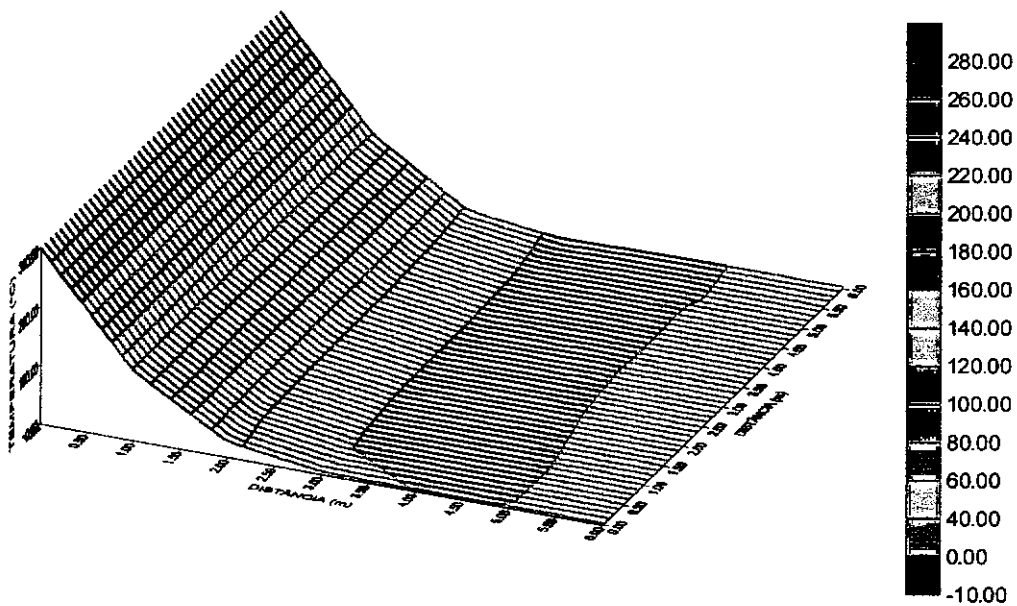


Figura 3.9.c. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,5s$.
(72 elementos)

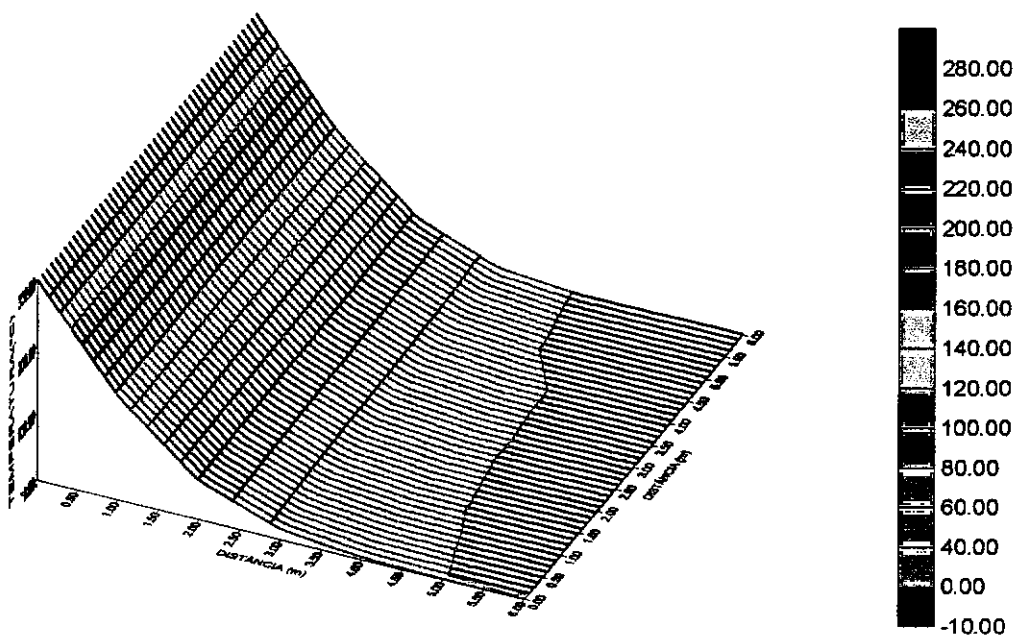


Figura 3.9.d. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 1,0s$.
(72 elementos)

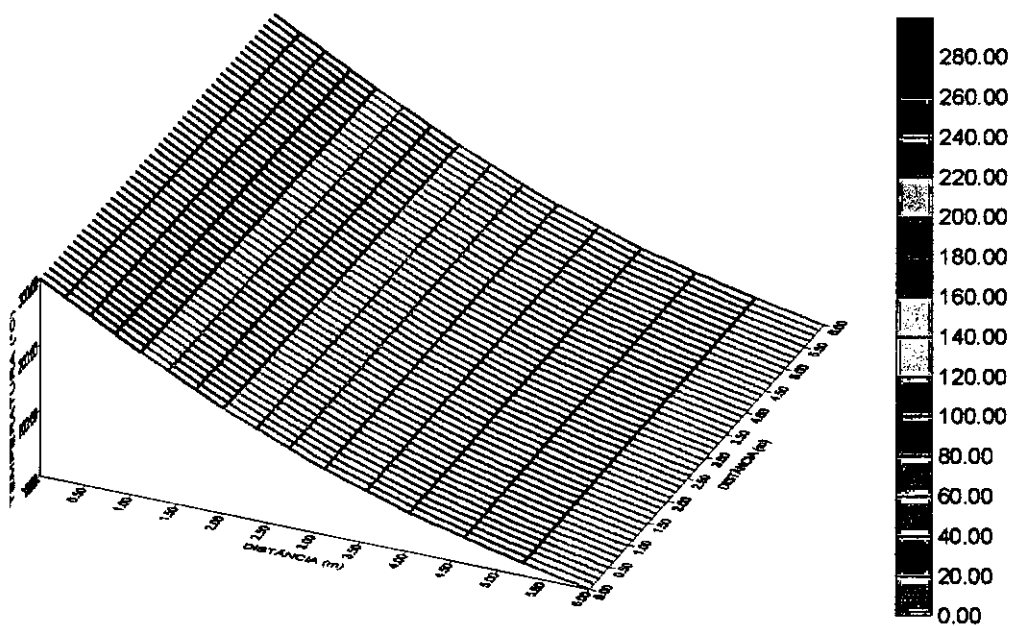


Figura 3.9.e. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 5,0s$.
(72 elementos)

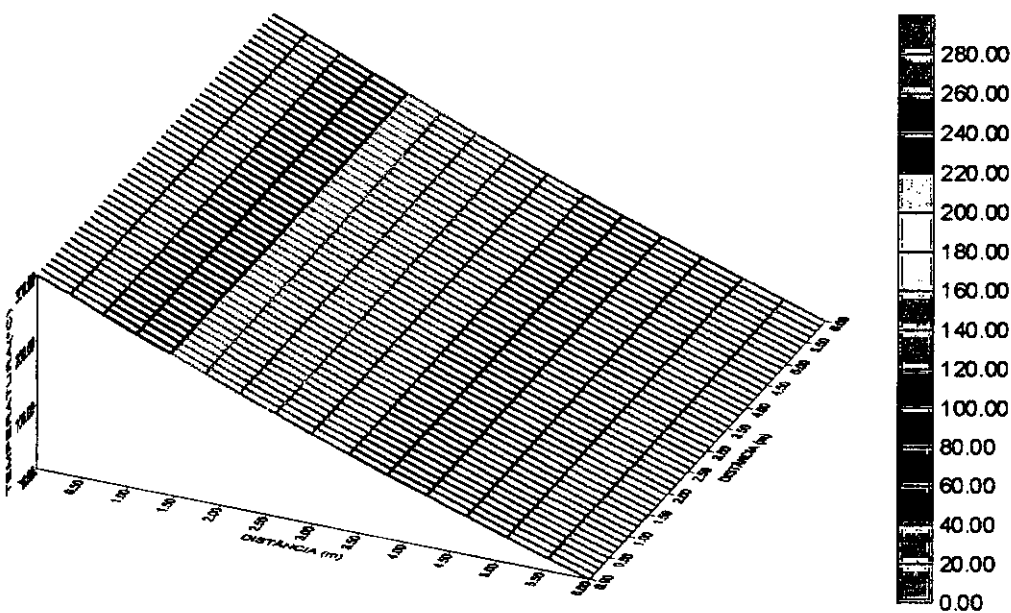


Figura 3.9.f. Superfície de potenciais de temperaturas em $t=10,0s$.
(72 elementos)

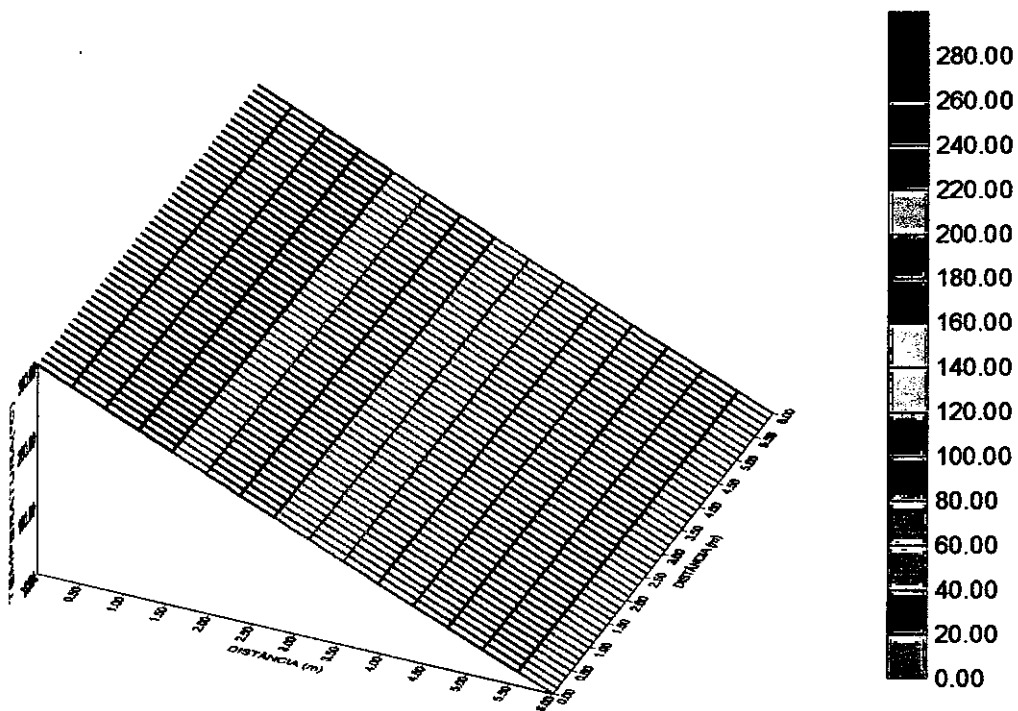


Figura 3.9.g Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 15,0s$.
(72 elementos)

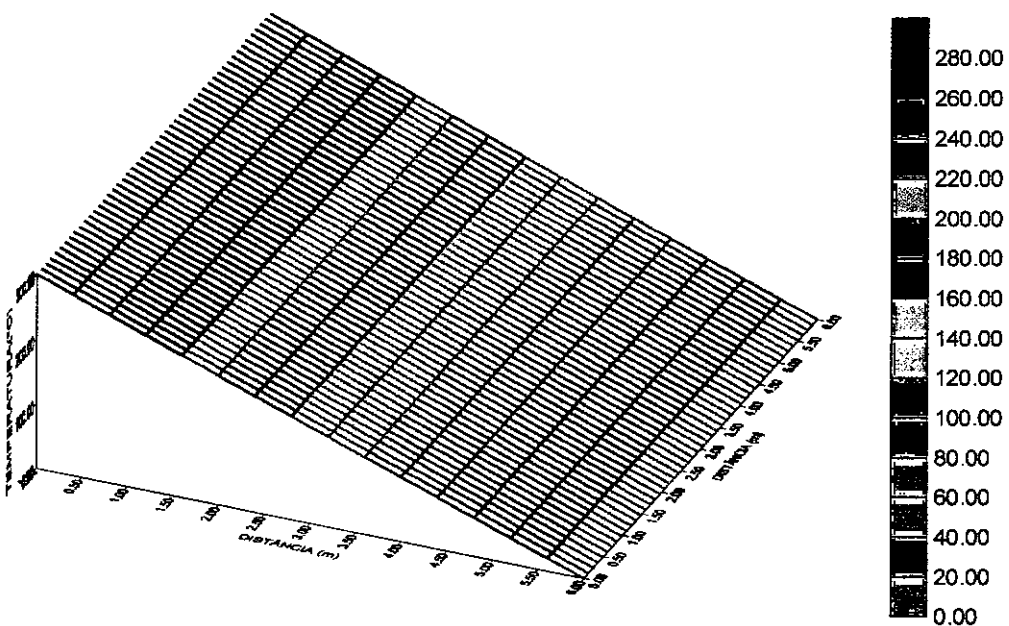


Figura 3.9.h. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 20,0s$.
(72 elementos)

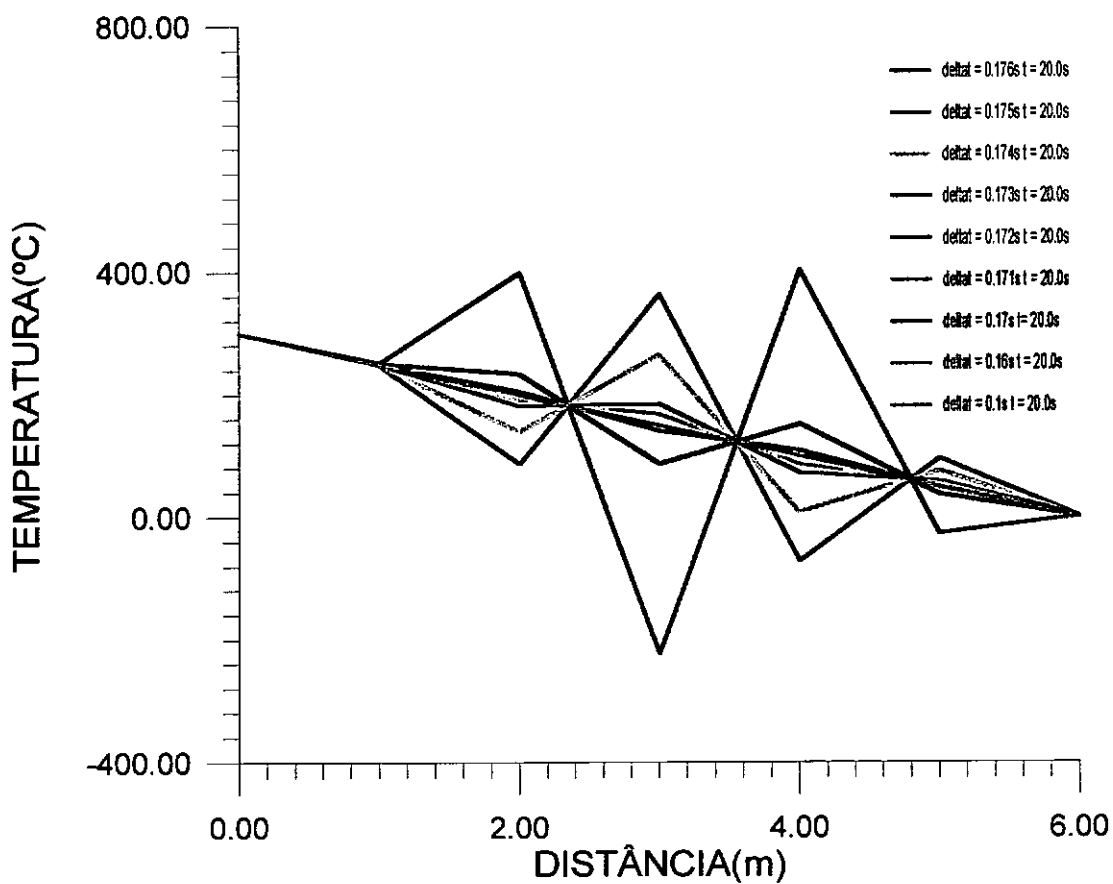


Figura 3.10. Distribuição de potenciais de temperaturas para a discretização da figura 3.2. usando um esquema condicionalmente estável $\tau = 1/4$.

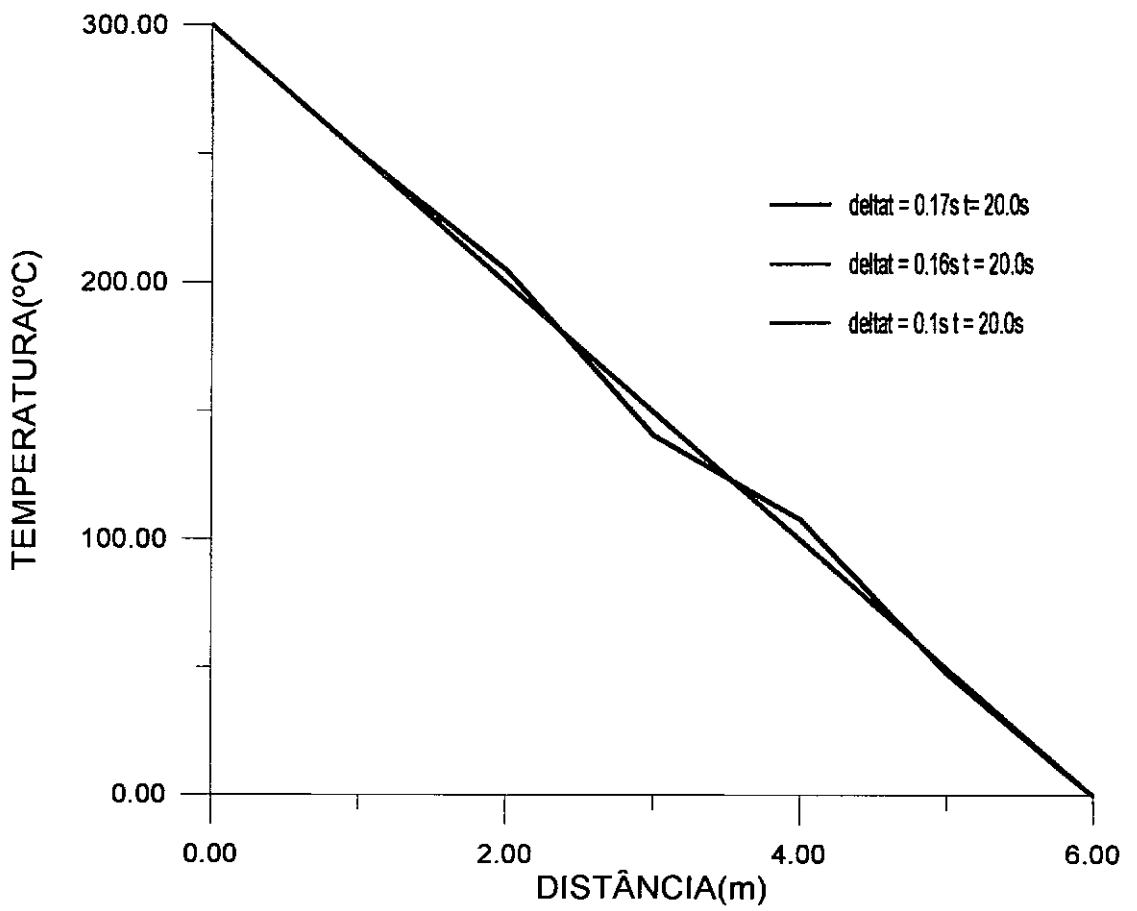


Figura 3.11. Distribuição de potenciais de temperaturas para a discretização da figura 3.2, usando um esquema condicionalmente estável $\theta = 1/4$.

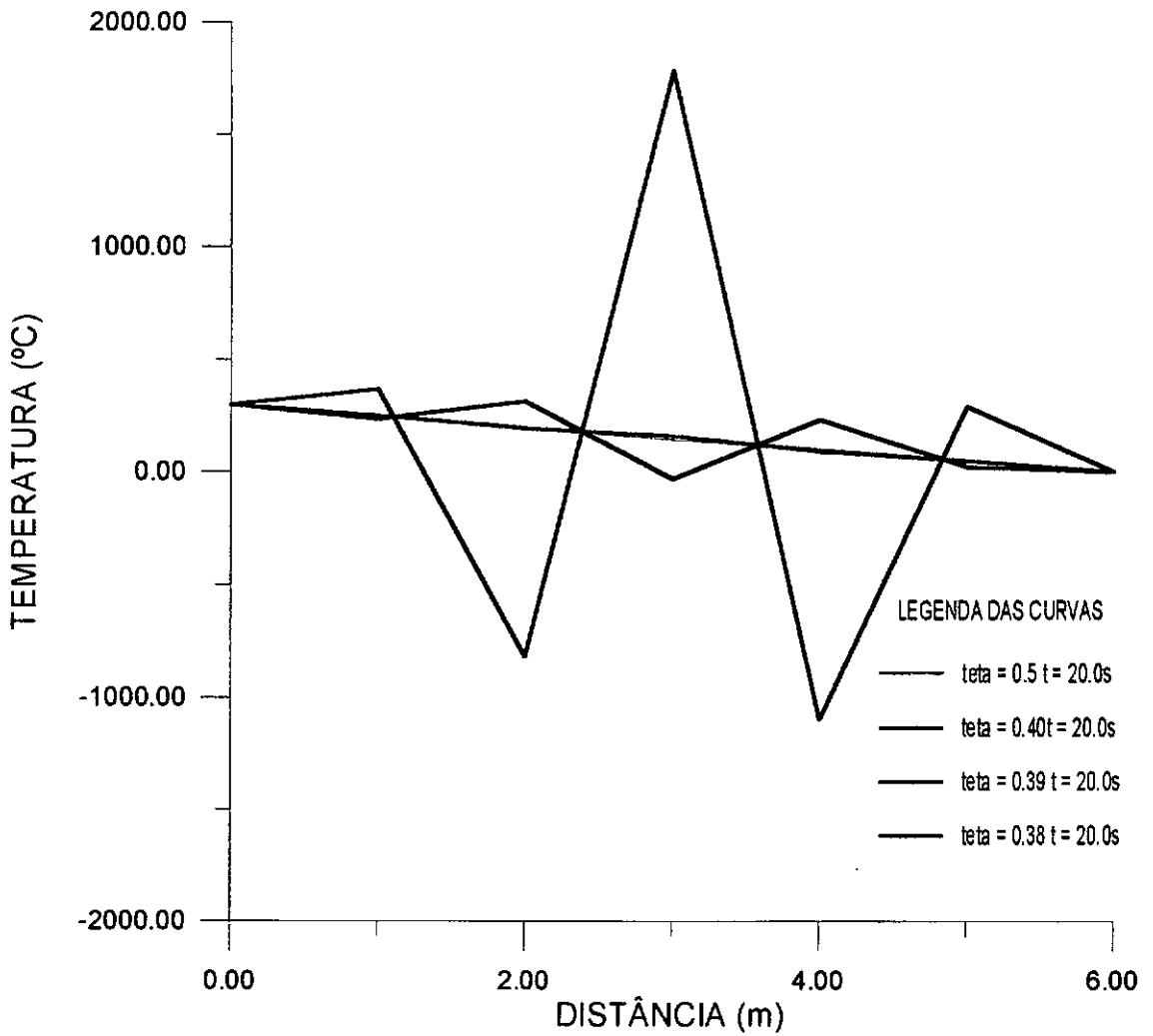


Figura 3.12. Variação de potenciais de temperaturas ao longo da distância em $t = 20,0s$ para diferentes valores do parâmetro do peso no tempo θ , $\Delta t = 0,5s$.

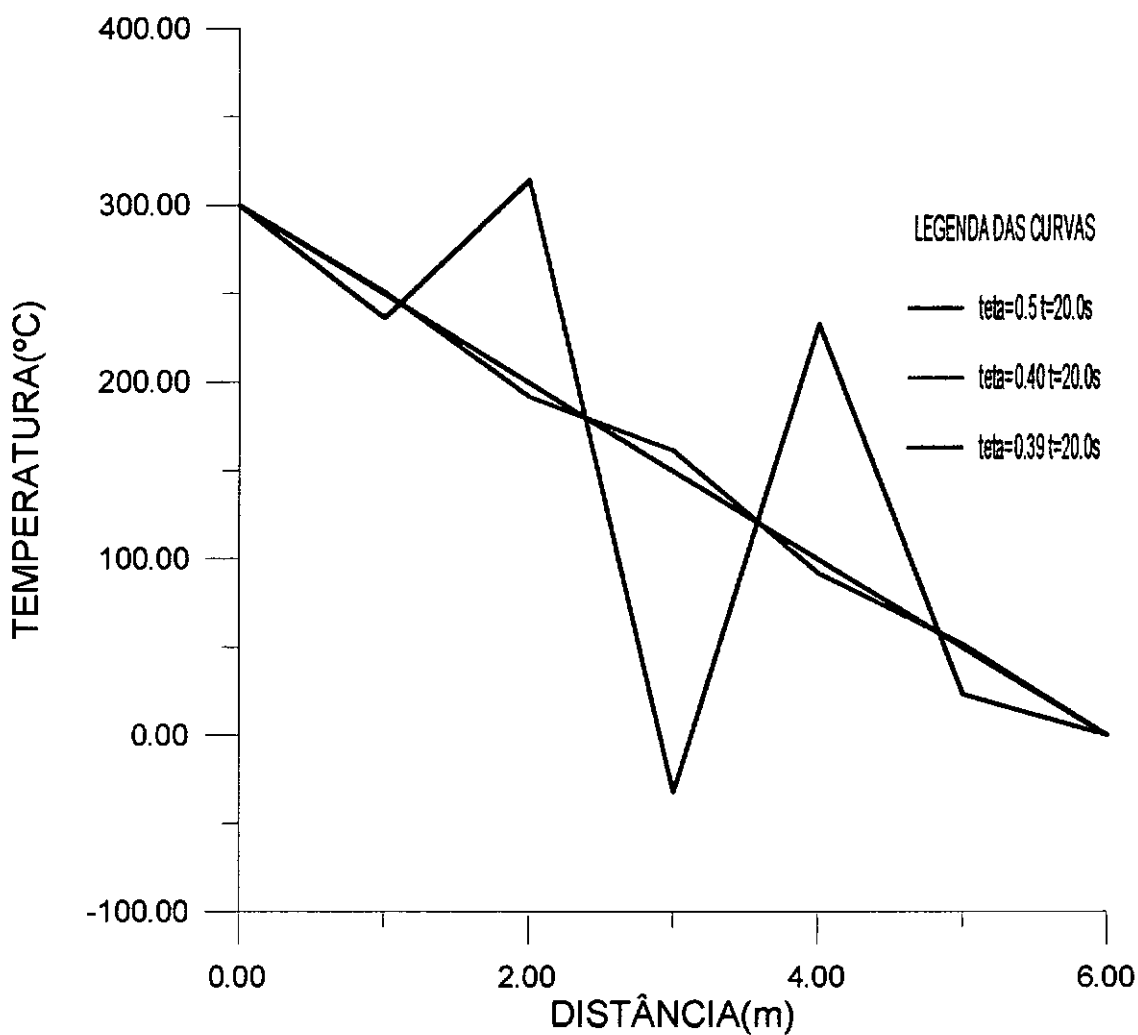


Figura 3.13. Variação de potenciais de temperaturas ao longo de nós para a discretização da fig. 3.2.(72 elementos) utilizando um $\Delta t = 0,5s$ e variando o fator de peso no tempo θ .

III.II.b CHOQUE GRADUAL

(Exemplo 2)

Neste segundo exemplo de difusão térmica unidimensional, analisamos uma região quadrada de lado $L = 6\text{m}$, isolada nas faces $y = 0$ e $y = 6$ estando inicialmente à temperatura de 0°C , submetida às condições de contorno variáveis com o tempo, e a discretização adotada é a mesma da figura 3.2.

Agora, experimentamos aplicar na face $x = 0$ um choque gradual de temperatura de 300°C fazendo-a variar linearmente no intervalo de tempo de $0,0\text{s}$ a $1,0\text{s}$, mantendo-se constante para tempos posteriores conforme figura 3.14; na face $x = 6$ a temperatura é mantida constante e igual a zero para todos os níveis de tempo.

Adotando-se um intervalo de tempo $\Delta t = 0,1\text{s}$, prescrevemos as condições de contorno essenciais e naturais para a nova simulação.

Assim, as temperaturas para as condições de contorno essenciais foram tomadas como $u = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300^\circ\text{C}$, para os dez primeiros segundos e constante e igual a 300°C para os tempos subsequentes. As condições de contorno naturais foram prescritas como $p = 0$ para todos os níveis de tempo.

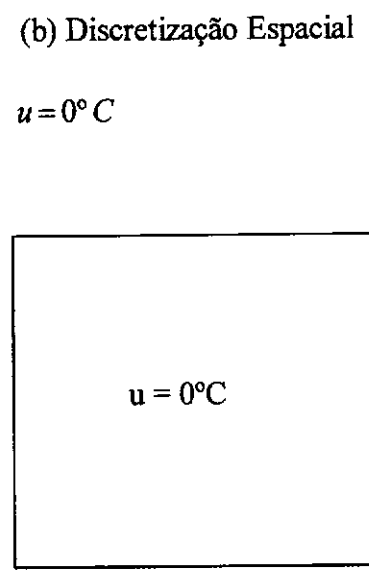
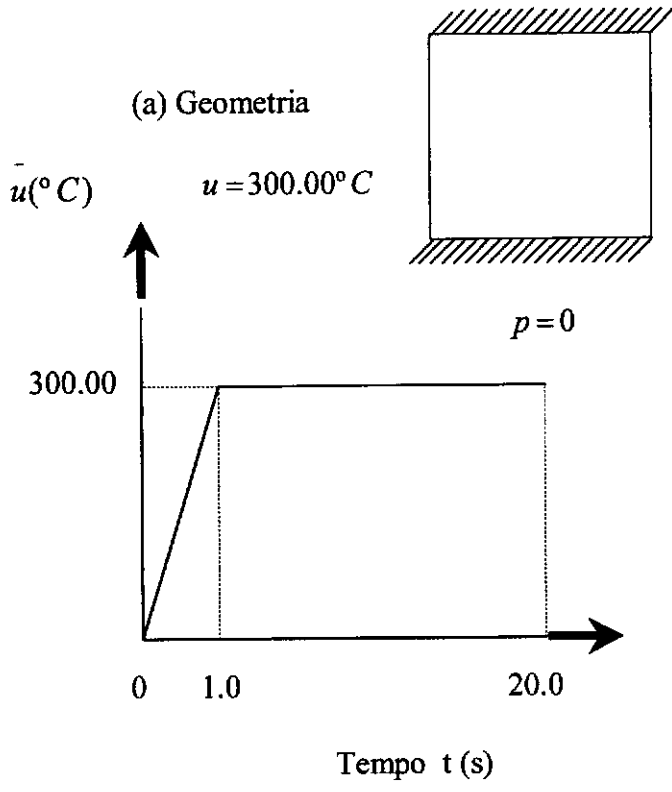
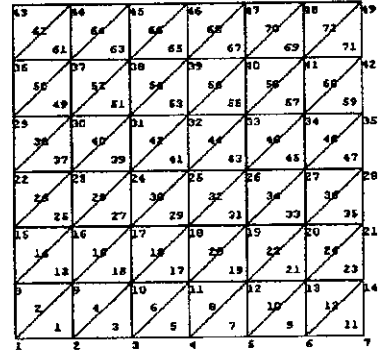
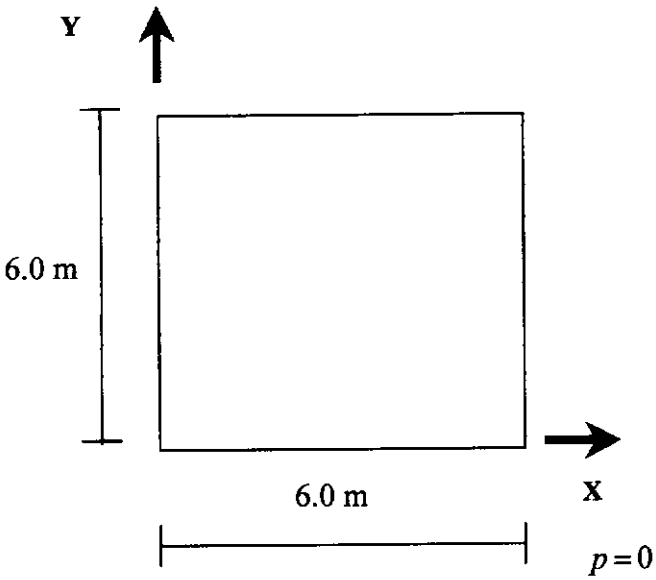
As figuras 3.15 e 3.16 apresentam os perfis das soluções numéricas ao longo da abscissa x para um intervalo de tempo $\Delta t = 0,1\text{s}$. Na figura 3.15, observamos que pequenas oscilações se fazem presentes, haja visto os diminutos pontos de potenciais de temperaturas negativos. Esses que deveriam ser zero e não o são, podem ser imputados à bem definida rigidez das respectivas curvas. Essa, por sua vez, pode ser atribuída ao fato de insuficiência de elementos na nossa malha de discretização de modo a melhor apreender o fenômeno difusivo térmico.

Notamos ainda que, por exemplo, na aplicação da temperatura de 60°C no contorno não é suficiente para produzir solicitação nos pontos mais distantes. Na realidade, se a malha fosse mais rica de elementos, existiriam mais pontos e os perfis

seriam curvos, e apresentariam um caimento mais suave de modo que não apareceriam as temperaturas negativas.

A figura 3.16 representa os perfis numéricos para a situação de choque gradual e analíticos para a situação de choque, correspondentes aos níveis de tempo de 2,0s a 20,0s. Observamos que por ocasião de $t = 5s$ os perfis numéricos já estão próximos aos analíticos e tendem a se superporem por ocasião de $t = 15s$. É evidente que se a malha fosse mais rica este encontro já teria acontecido num tempo anterior.

A evolução das superfícies de potenciais de temperaturas ao longo do tempo podem ser acompanhados pelas gráficos tridimensionais contidos nas figuras de 3.17.a a 3.17.q.



(c) Condições de Contorno

(d) Condições Iniciais

Figura 3.14 Difusão unidimensional transiente num choque gradual.

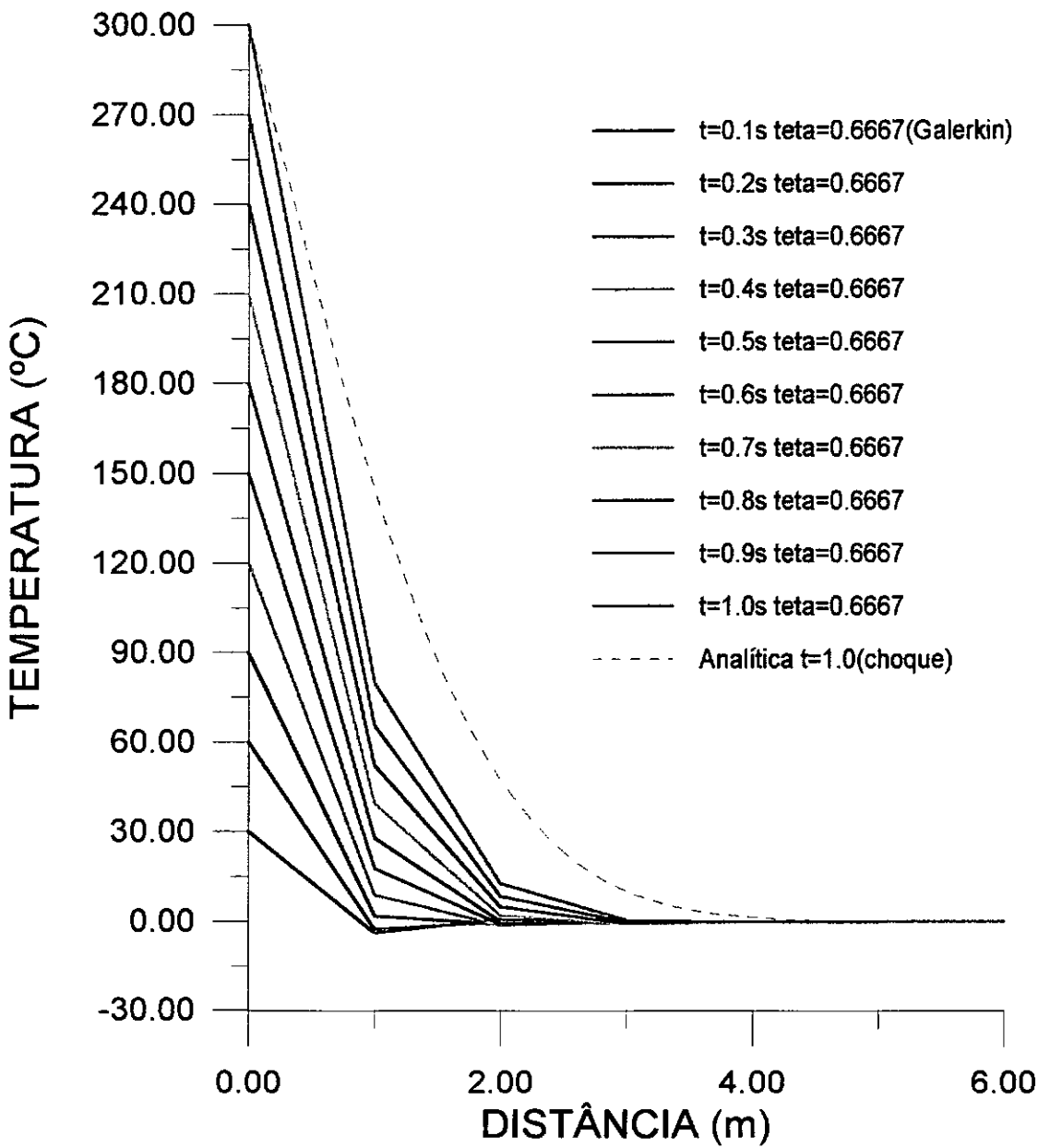


Figura 3.15 Distribuição de potenciais de temperaturas para a região discretizada da figura 3.2, aplicando-se um choque gradual durante um tempo $t = 1,0s$.

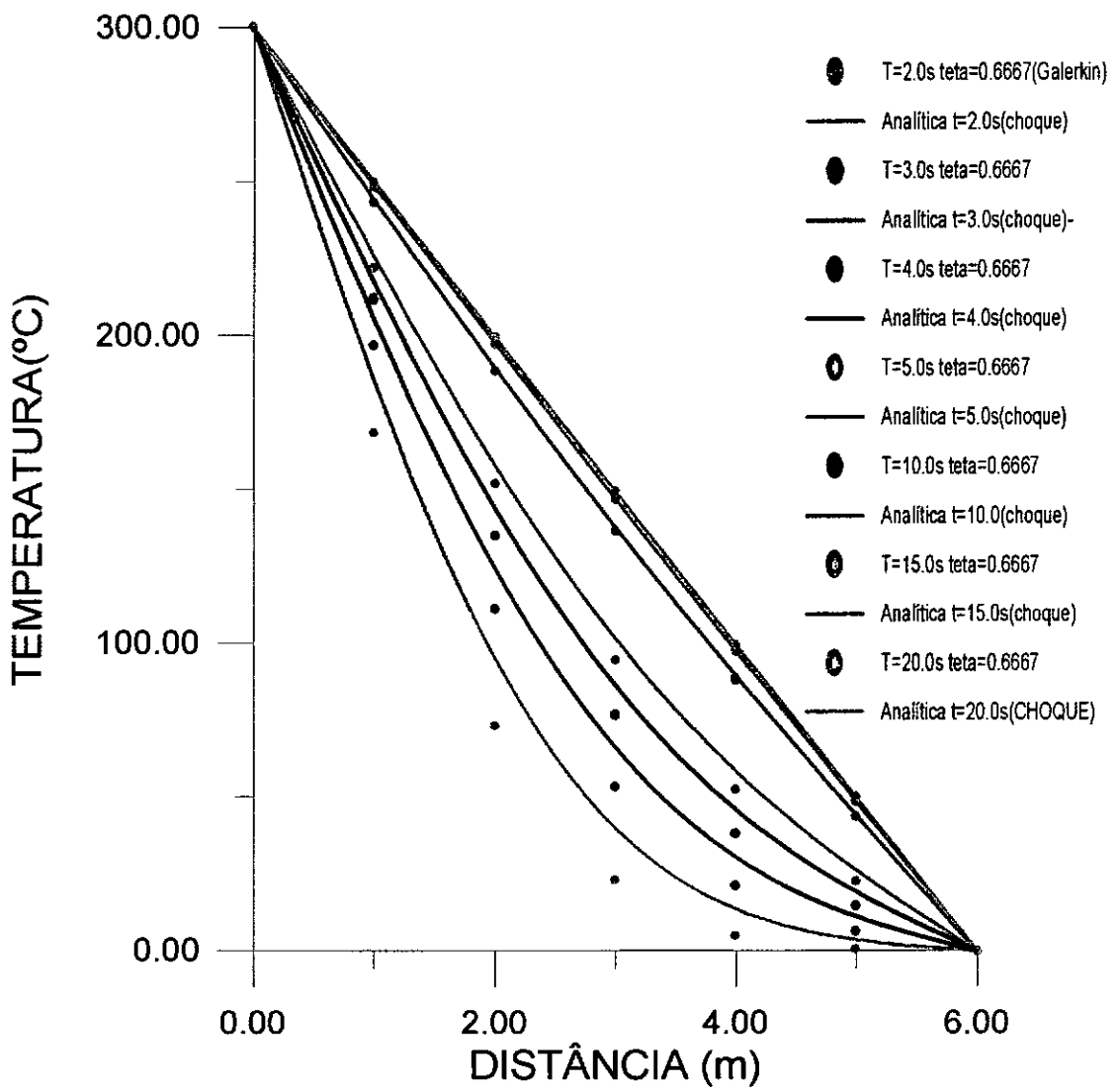


Figura 3.16 Distribuição de potenciais de temperaturas para a discretização da fig. 3.1.b(72 elementos), aplicando-se um choque gradual durante $t = 20,0s$.

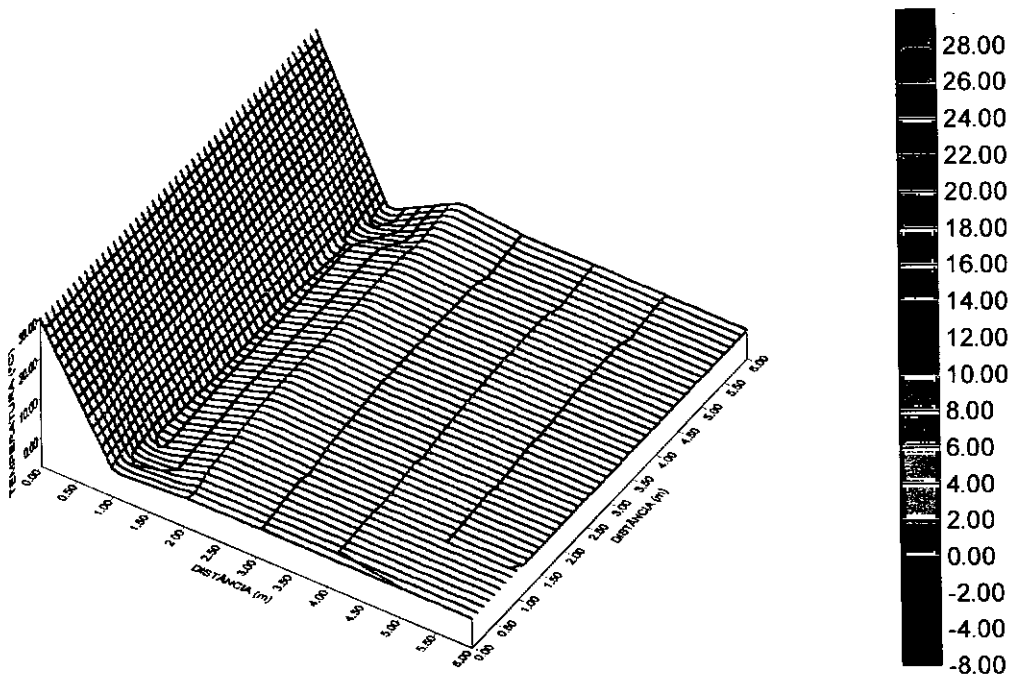


Fig.3.17.a Superfície de potenciais de temperaturas para a região discretizada da fig.3.2, aplicando-se um choque gradual em $t = 0,1s$.

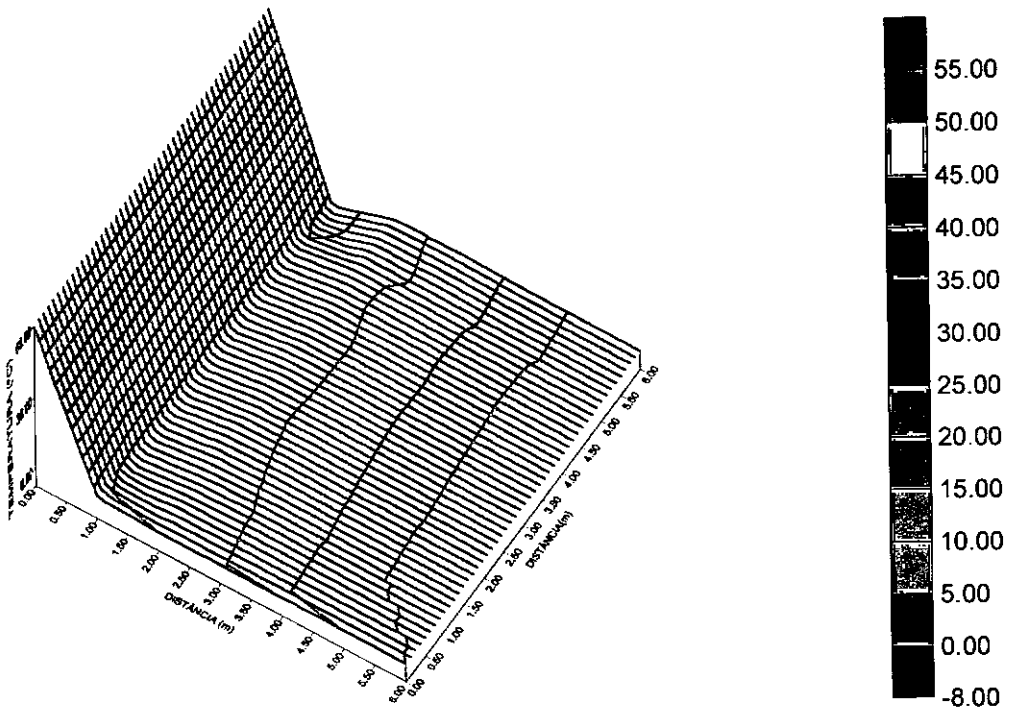


Figura 3.17.b Superfície de potenciais de temperatura, aplicando-se um choque gradual em $t = 0,2s$.

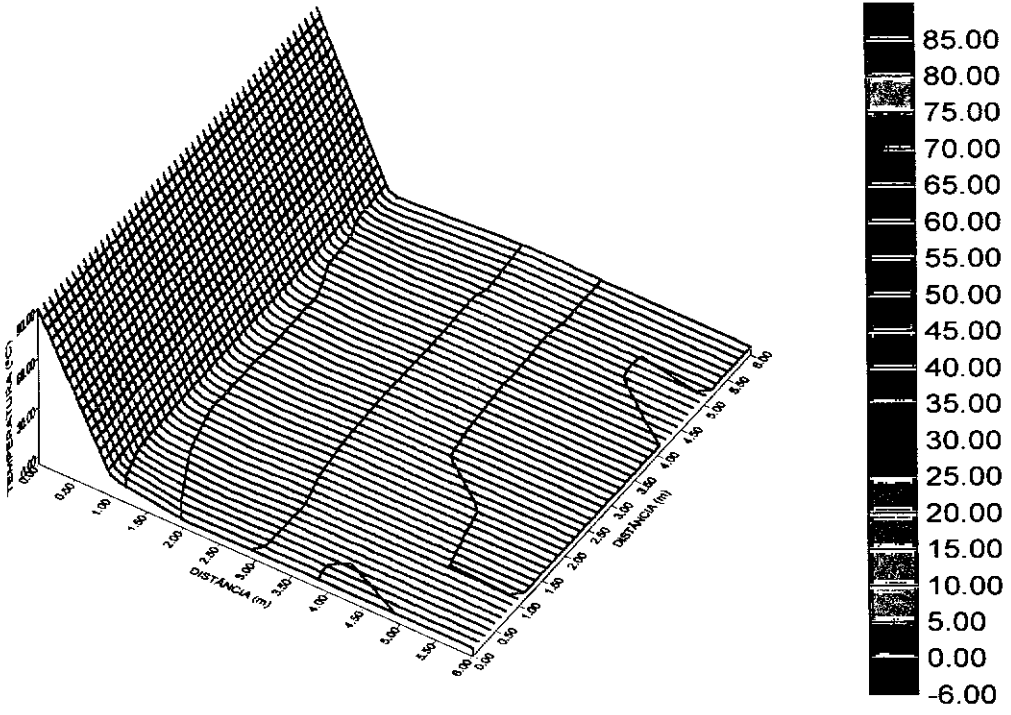


Fig.3.17.c Superfície de potenciais de temperaturas, aplicando-se um choque gradual em $t = 0,3s$.

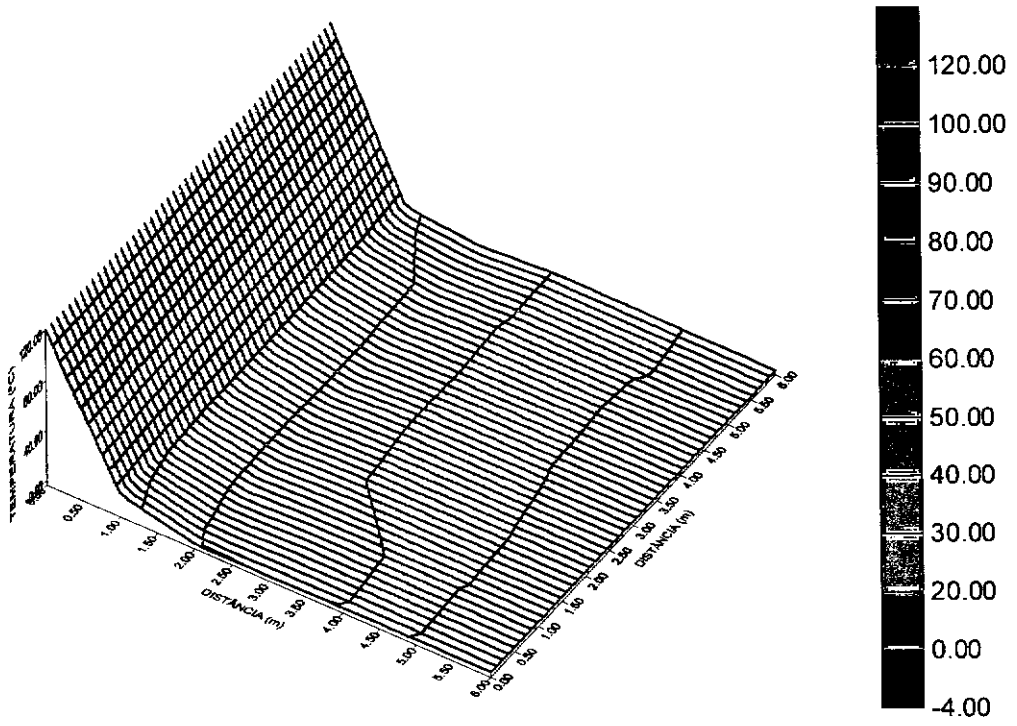


Figura 3.17.d. Superfície de potenciais de temperaturas, aplicando-se um choque gradual em $t = 0,4s$.

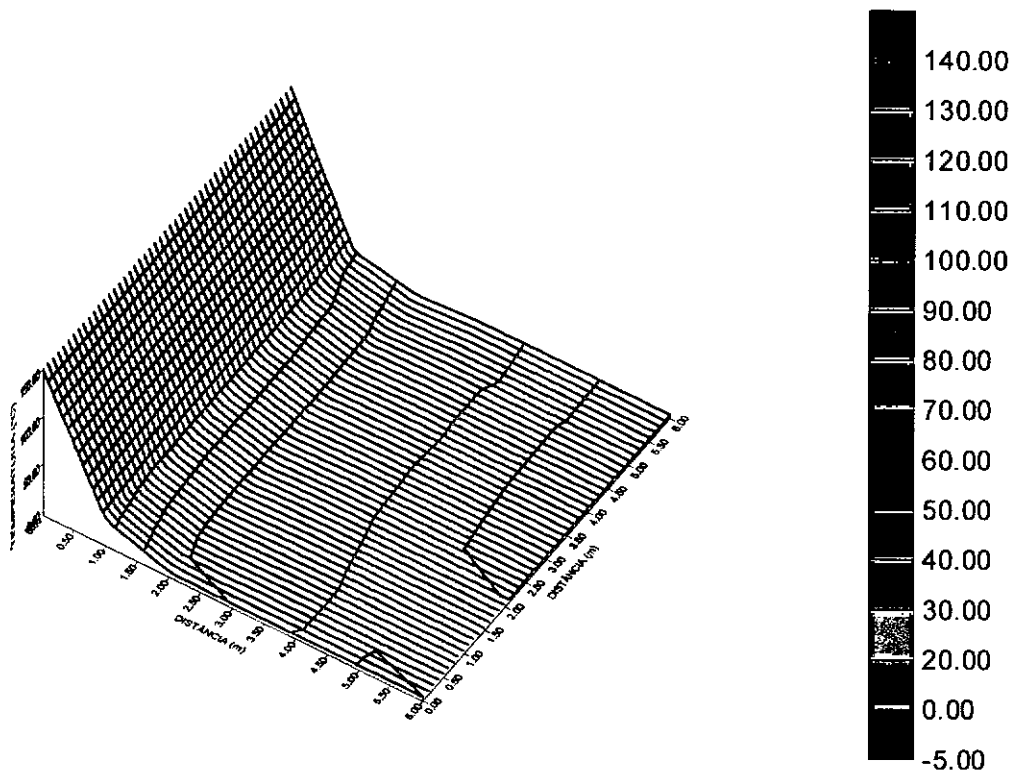


Fig.3.17.e. Superfície de potenciais de temperaturas, aplicando-se um choque gradual em $t = 0,5s$.

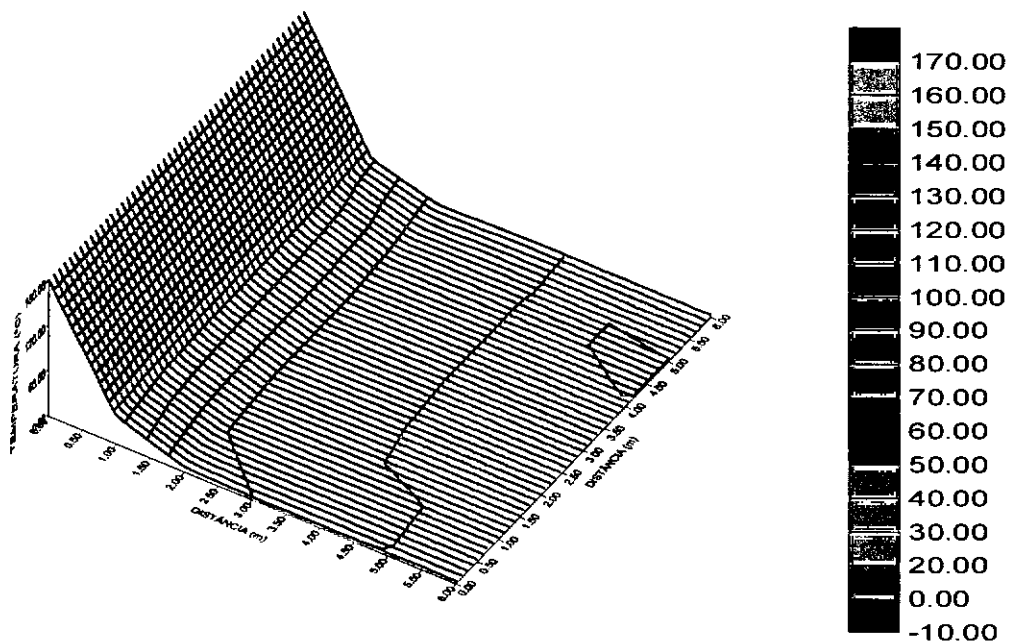


Figura 3.17.f. Superfície de potenciais de temperaturas, aplicando-se um choque gradual em $t = 0,6s$.

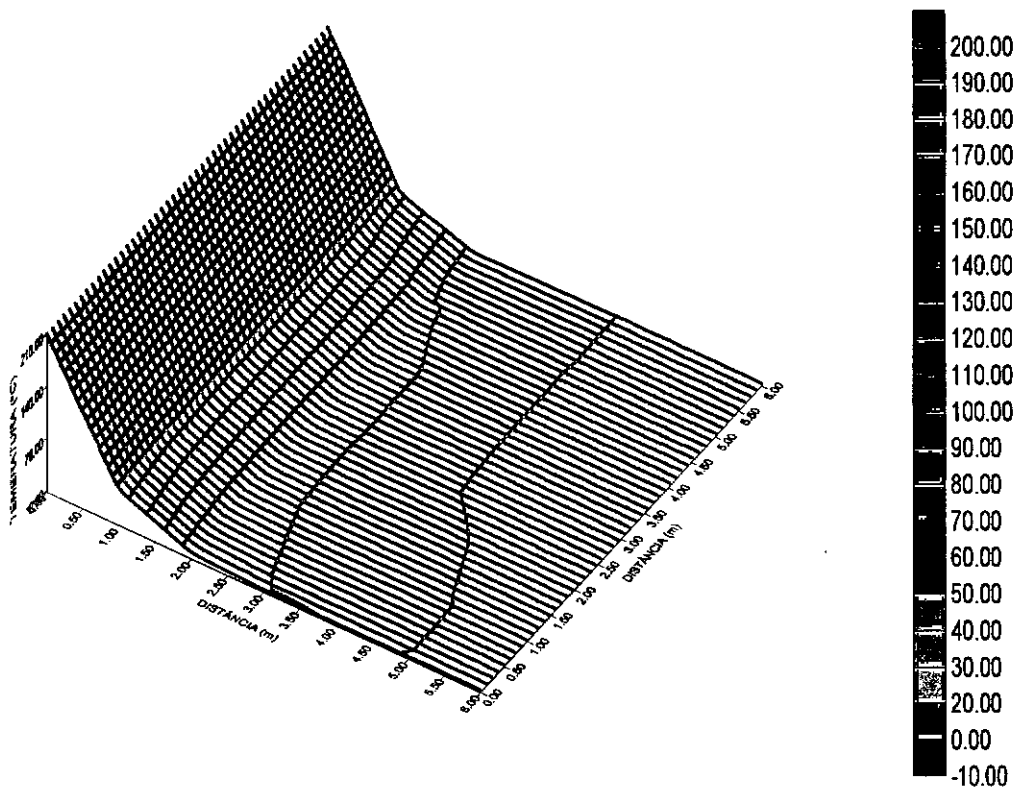


Figura 3.17.g. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,7s$.

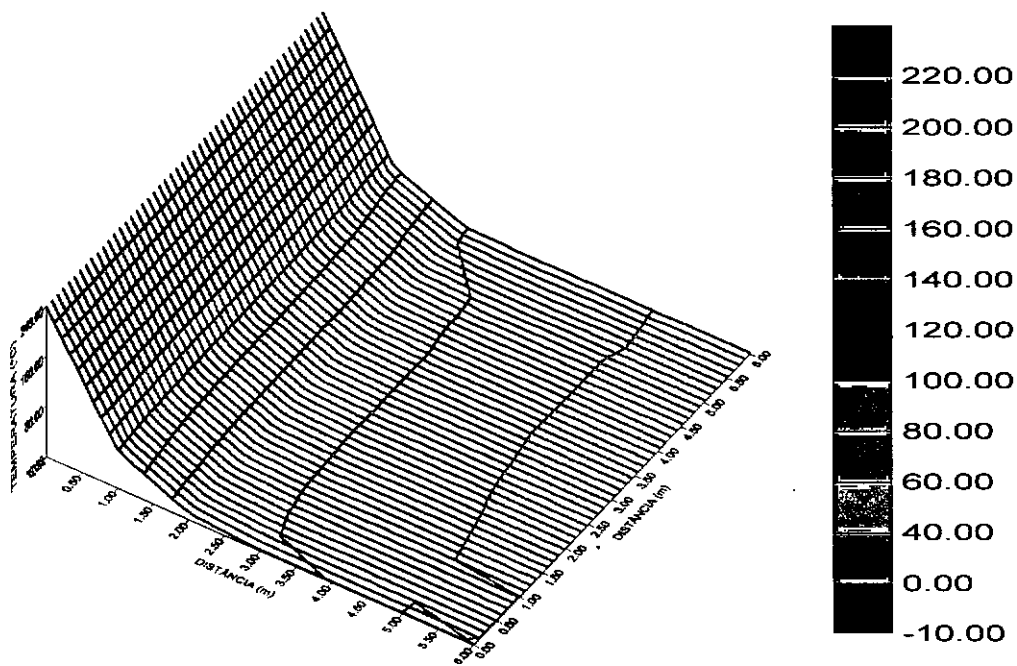


Figura 3.17.h. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,8s$.

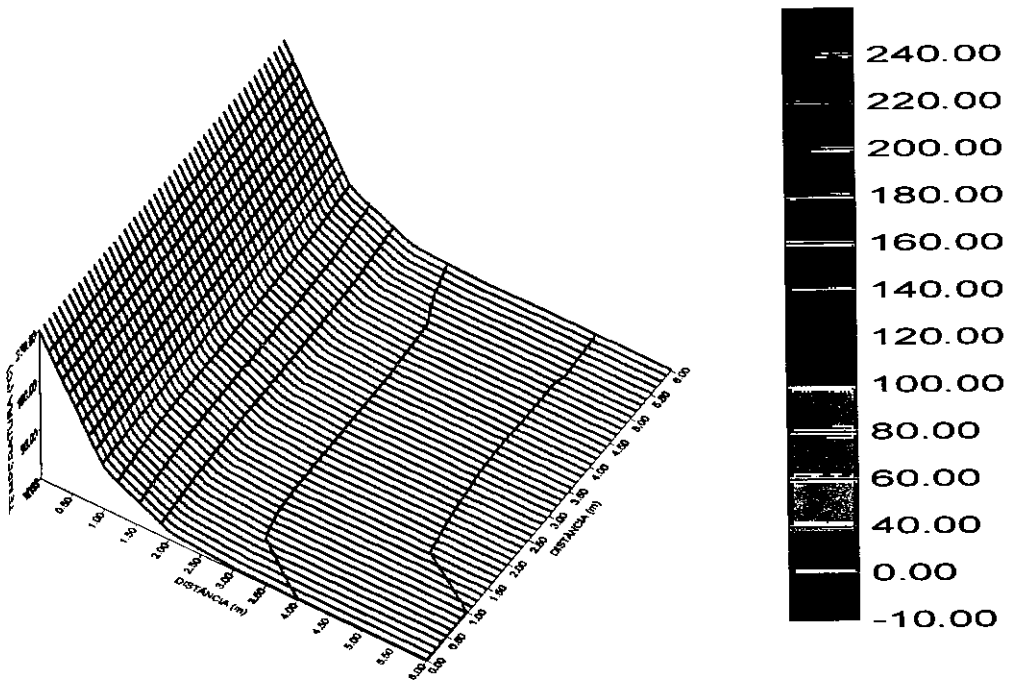


Figura 3.17.i. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 0,9s$.

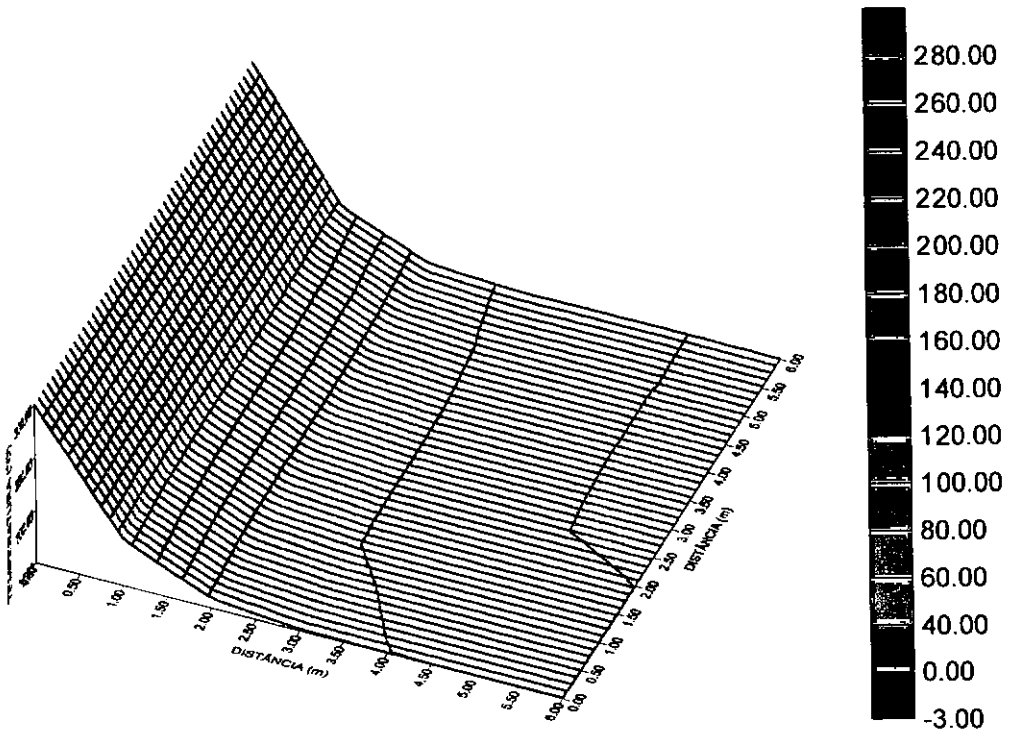


Figura 3.17.j. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 1,0s$.

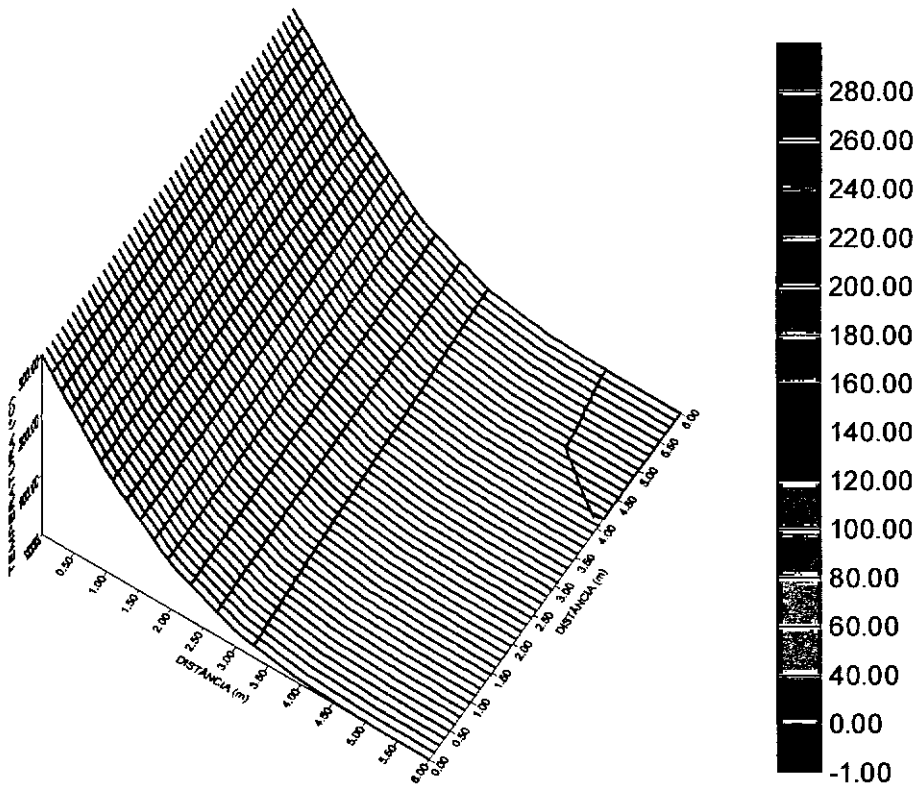


Figura 3.17.k Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 2,0$ s.

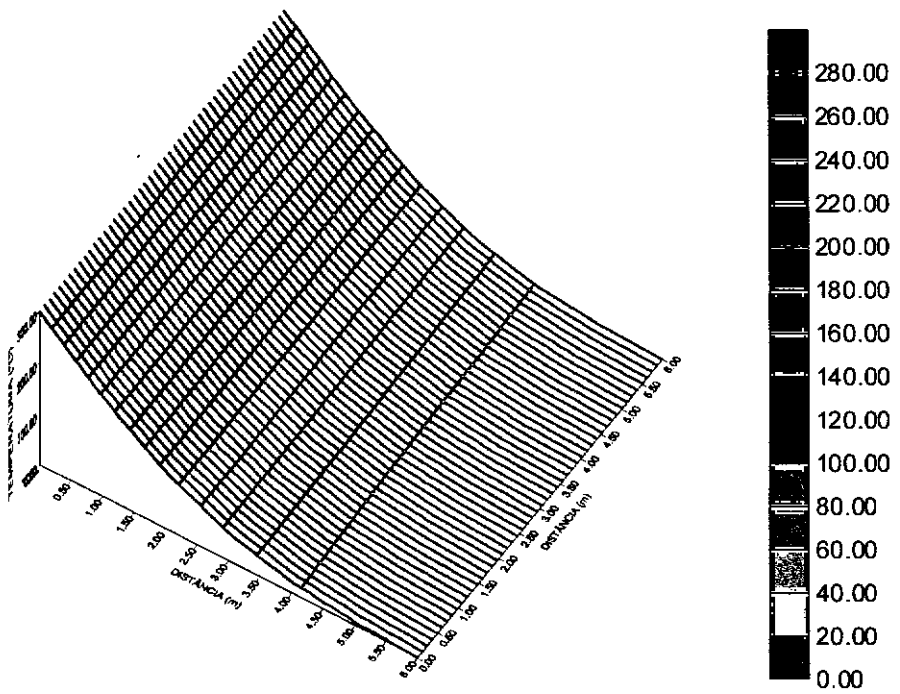


Figura 3.17.l Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 3,0$ s.

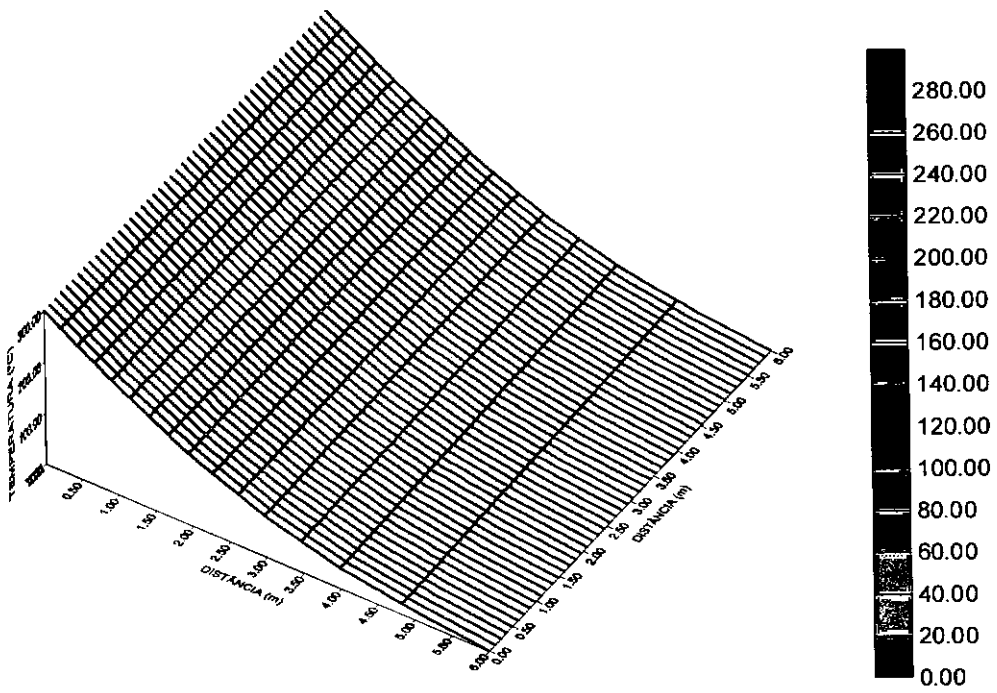


Figura 3.17.m Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 4,0s$.

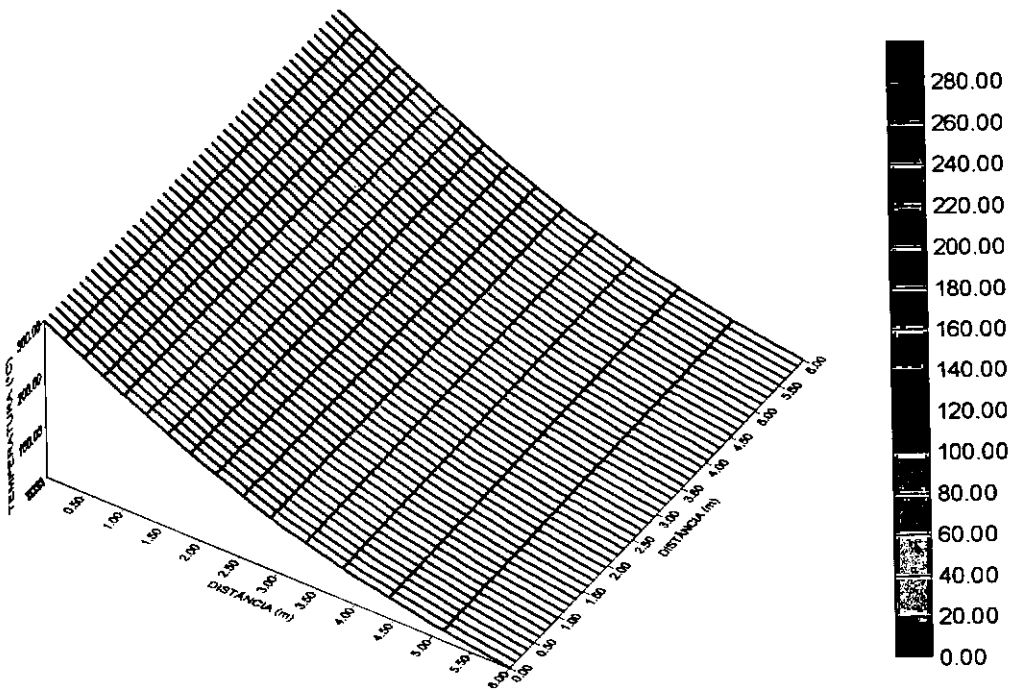


Figura 3.17.n. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 5,0s$.

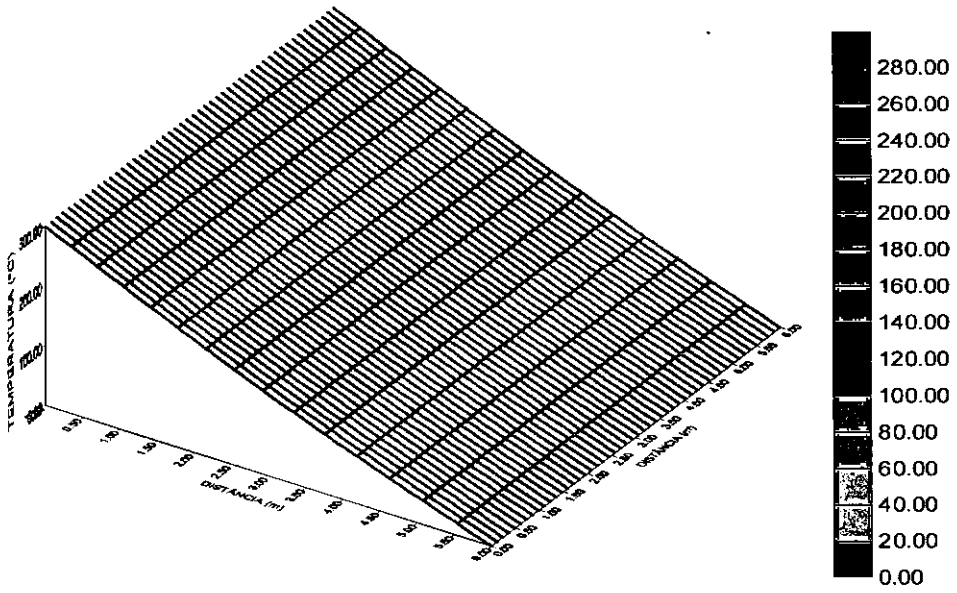


Figura 3.17.o Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 10,0s$.

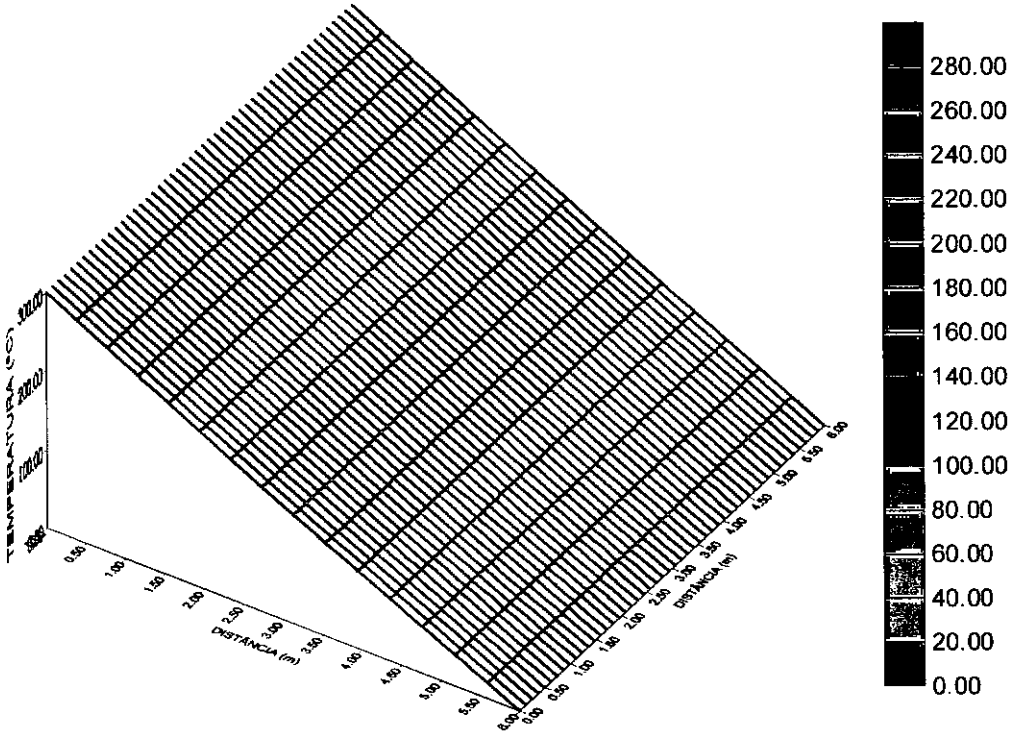


Figura 3.17.p Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 15,0s$.

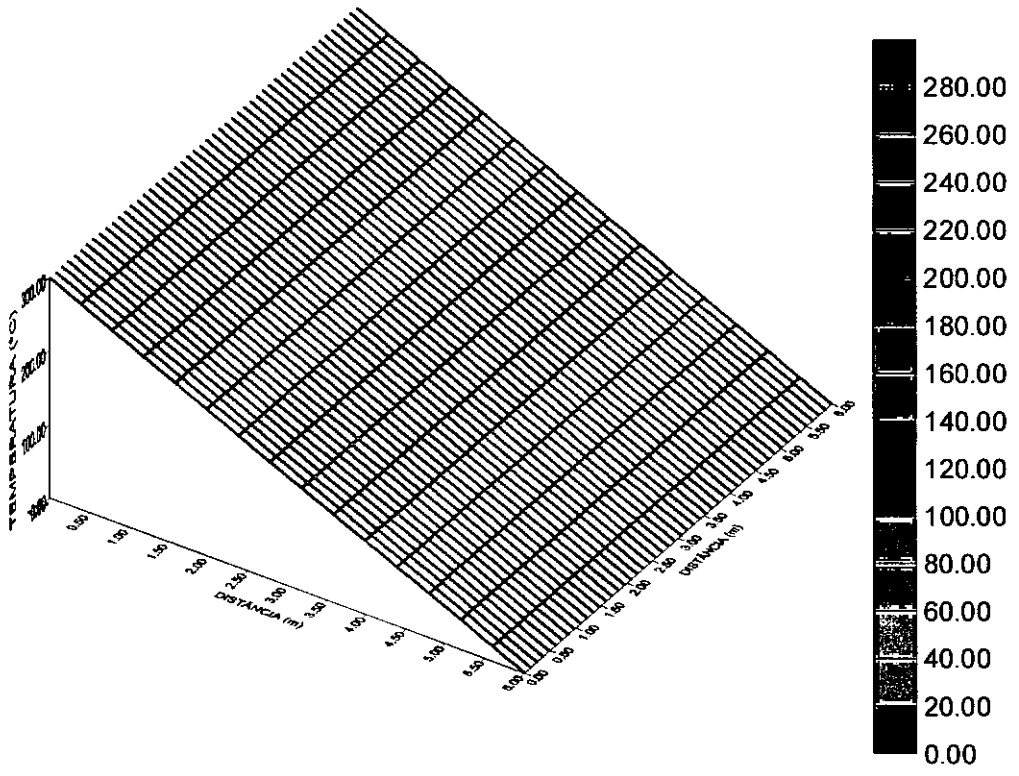


Figura 3.17.q. Superfície de potenciais de temperaturas em $t = 20,0s$.

III.III SIMULAÇÃO DE DIFUSÃO TRANSIENTE BIDIMENSIONAL EM REGIÃO RETANGULAR

(Exemplo 3)

III.III.a CHOQUE TÉRMICO EM TODO CONTORNO

Na figura 3.18 apresentamos uma chapa retangular, inicialmente à temperatura de 0°C , e é submetida a um choque térmico de 1°C em todo contorno. Desejamos acompanhar a distribuição de temperatura ao longo do tempo para um ponto $J(5,0;4,0)$.

Optamos por uma discretização espacial análoga à da região descrita na figura 3.2, ou seja com 72 elementos, que é apresentada na figura 3.18 conjuntamente com as condições de contorno e iniciais. Tomamos a discretização no tempo para esta simulação para intervalos $\Delta t = 0,25; 0,5$ e $1,0\text{s}$.

Os resultados obtidos foram plotados na figura 3.19 que mostra a comparação das curvas de distribuição de temperatura ao longo do tempo para o ponto $J(5,0;4,0)$, sob diferentes discretizações temporais, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Ainda nesta figura, inserimos a curva correspondente à solução analítica, cujos pontos foram obtidos de WROBEL (1981), conforme EFFREN(1997), e a solução para regime permanente $u = 1,0^{\circ}\text{C}$.

Podemos observar através do gráfico que os resultados obtidos estão próximos dos analíticos e que uma maior coincidência das curvas acontecem para as discretizações mais refinadas na grandeza tempo.

Aproveitamos este mesmo exemplo, com discretização temporal $\Delta t = 0,25\text{s}$ para simular a difusão transiente utilizando o Método dos Elementos de Contorno, objetivando obter uma comparação entre eles.

Os resultados obtidos estão contidos na tabela 3.1 e também foram plotados na figura 3.20 conjuntamente com a respectiva curva gerada pelo Método dos

Elementos Finitos.

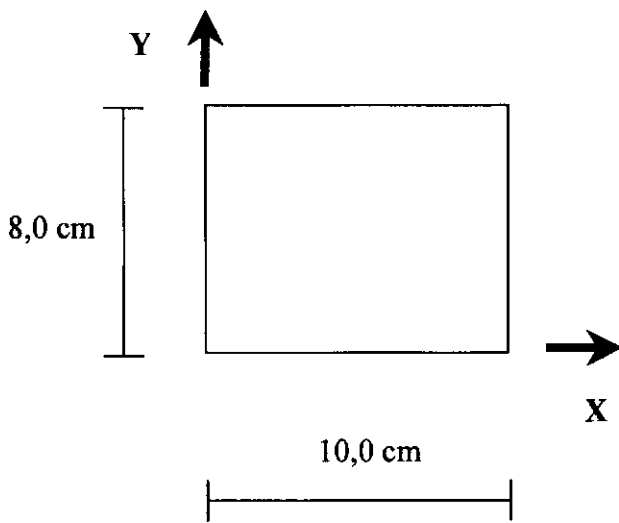
Observamos que as duas curvas estão bem próximas, o que confirma a boa adequação e performance dos métodos empregados para simular o respectivo fenômeno difusivo térmico.

Experimentamos utilizar como condição inicial nos pontos pertencentes ao contorno os valores prescritos para eles. Os resultados obtidos podem ser vistos através da figura 3.21. Comparando o resultado com o da fig. 3.19 (condição inicial zero tanto para os pontos do domínio como para os pontos do contorno), observamos que os resultados numéricos obtidos, embora não sejam muito diferentes do anterior, estão mais afastados dos analíticos.

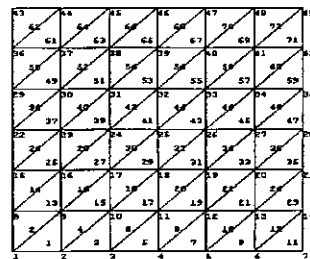
As figs. de 3.22 a 3.25 mostram a evolução da superfície de distribuição de temperaturas na região retangular ao longo do tempo.

Tabela 3.1. Potenciais de temperaturas para o ponto J(5,0;4,0) sobre o domínio discretizado da figura 3.18

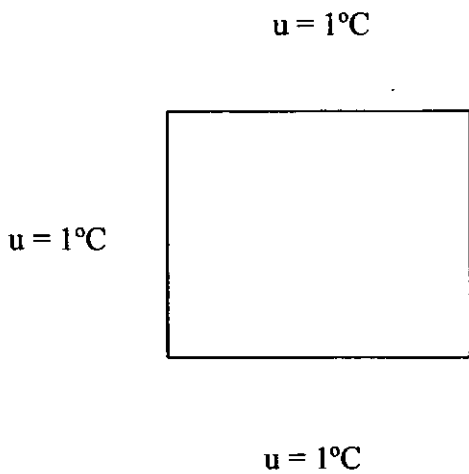
Tempo	Analítica	Sol. Numérica					
		$\Delta t=0,25s$		$\Delta t=0,50s$		$\Delta t=1,0s$	
		M.E.F.	M.E.C.	M.E.F.	M.E.C.	M.E.F.	M.E.C.
2,0	0,114	0,0616	0,1062	0,0518	0,1007	0,0541	0,0923
4,0	0,420	0,4111	0,4115	0,3923	0,4034	0,3532	0,3884
6,0	0,646	0,6525	0,6394	0,6388	0,6333	0,6104	0,6210
8,0	0,786	0,7963	0,7816	0,7870	0,7775	0,7681	0,7688
10,0	0,871	0,8807	0,8681	0,8746	0,8654	0,8622	0,8594
12,0	0,922	0,9301	0,9203	0,9262	0,9186	0,9181	0,9145
14,0	0,953	0,9591	0,9519	0,9565	0,9508	0,9513	0,9481
16,0	0,972	0,9760	0,971	0,9744	0,9702	0,9711	0,9685
18,0	0,983	0,9860	0,9825	0,9849	0,820	0,9828	0,9808
20,0	0,990	0,9918	0,9894	0,9911	0,9891	0,9898	0,9884



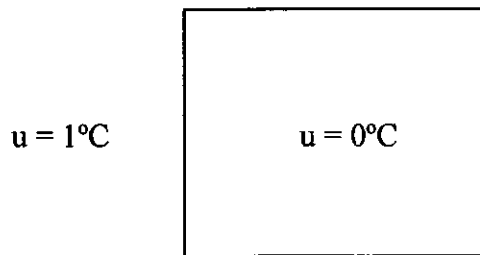
(a) Geometria



(b) Discretização Espacial



(c) Condições de Contorno



(d) Condições Iniciais

Figura. 3.18. Difusão transiente bidimensional em região retangular.

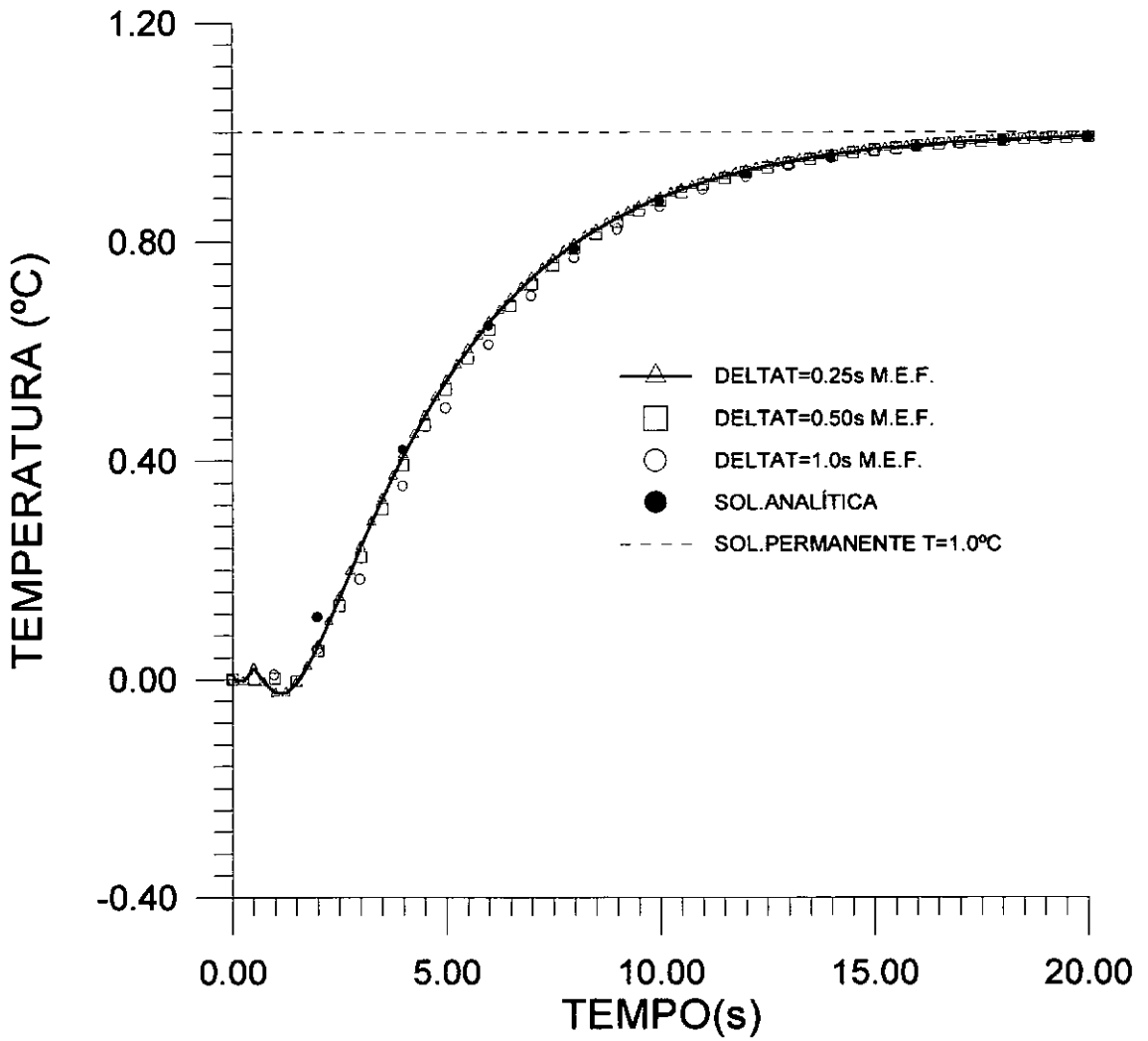


Figura 3.19 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto J(5,4) da região discretizada da figura 3.18, aplicando-se um choque térmico em todo o contorno, considerando condição inicial nula no domínio e no contorno.

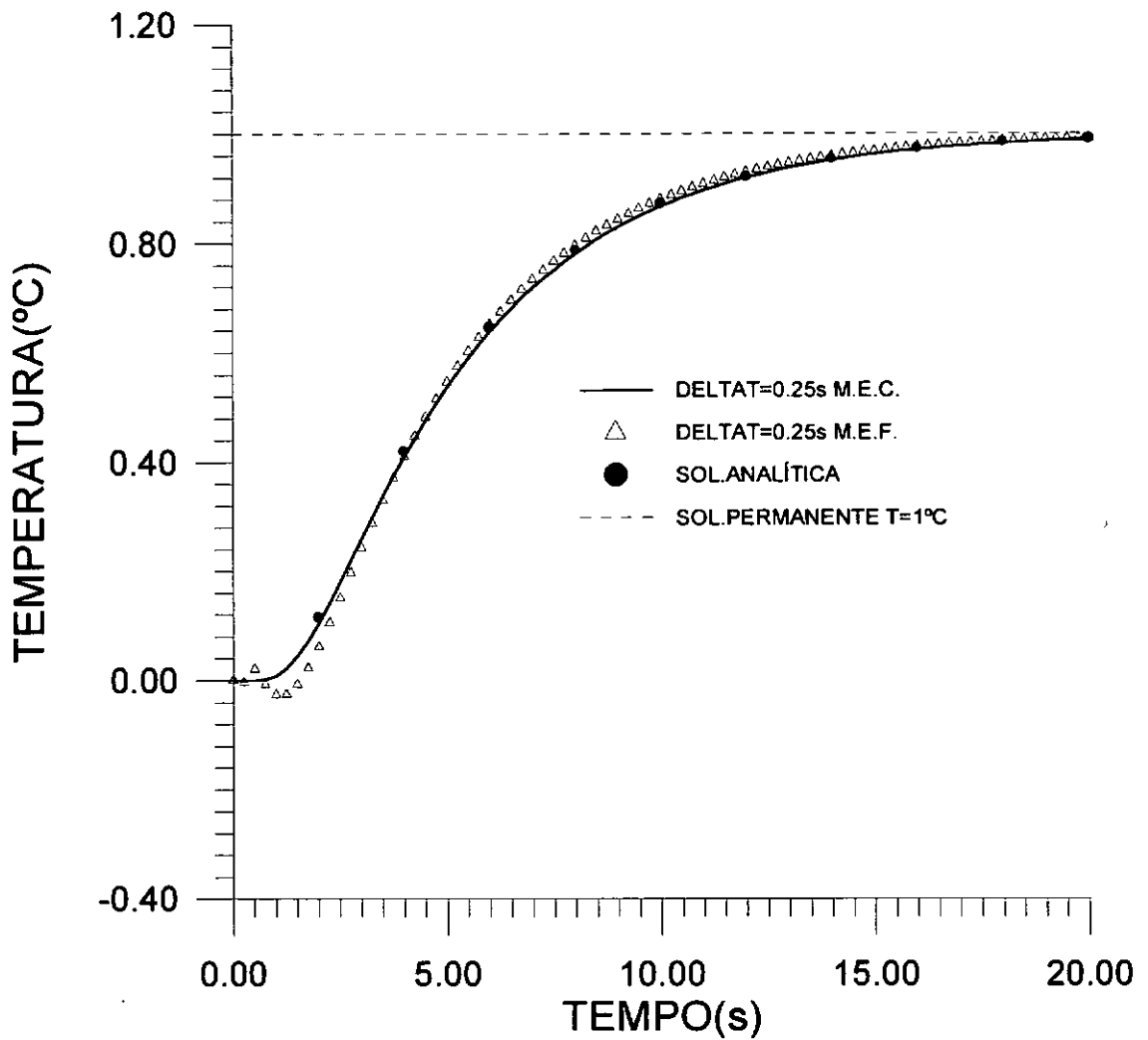


Figura 3.20 Comparação entre o M.E.F. e O M.E.C.(28 elementos) para potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto J(5;4) da região discretizada da figura 3.18, aplicando-se um choque térmico em todo contorno,

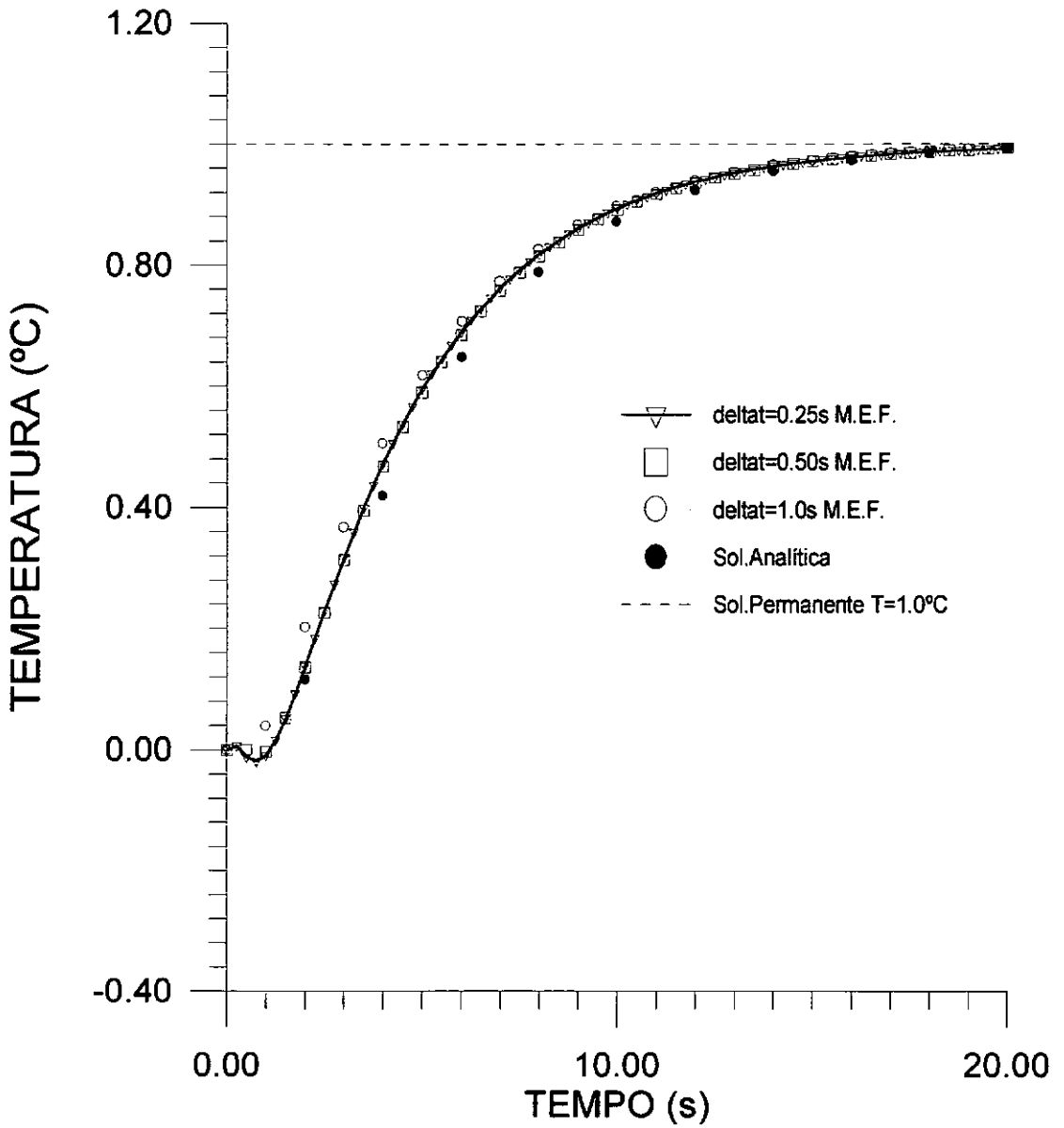


Figura 3.21 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto J(5;4) da região discretizada da fig. 3.18, aplicando-se um choque térmico ao longo de todo contorno, e usando como condição inicial nos nós do contorno os valores prescritos para eles.

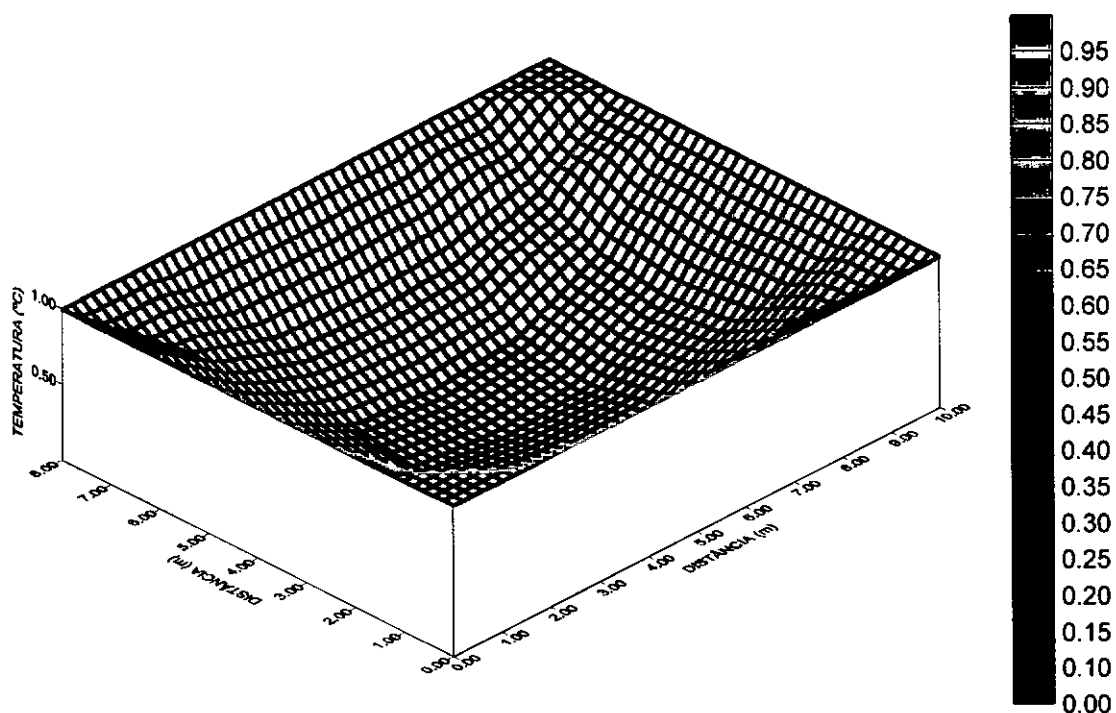


Figura 3.22. Superfície de distribuição de potenciais de temperaturas para o ponto J(5;4) sobre a região discretizada da fig. 3.18, aplicando-se um choque térmico ao longo de todo contorno em tempo $t = 1,5s$.

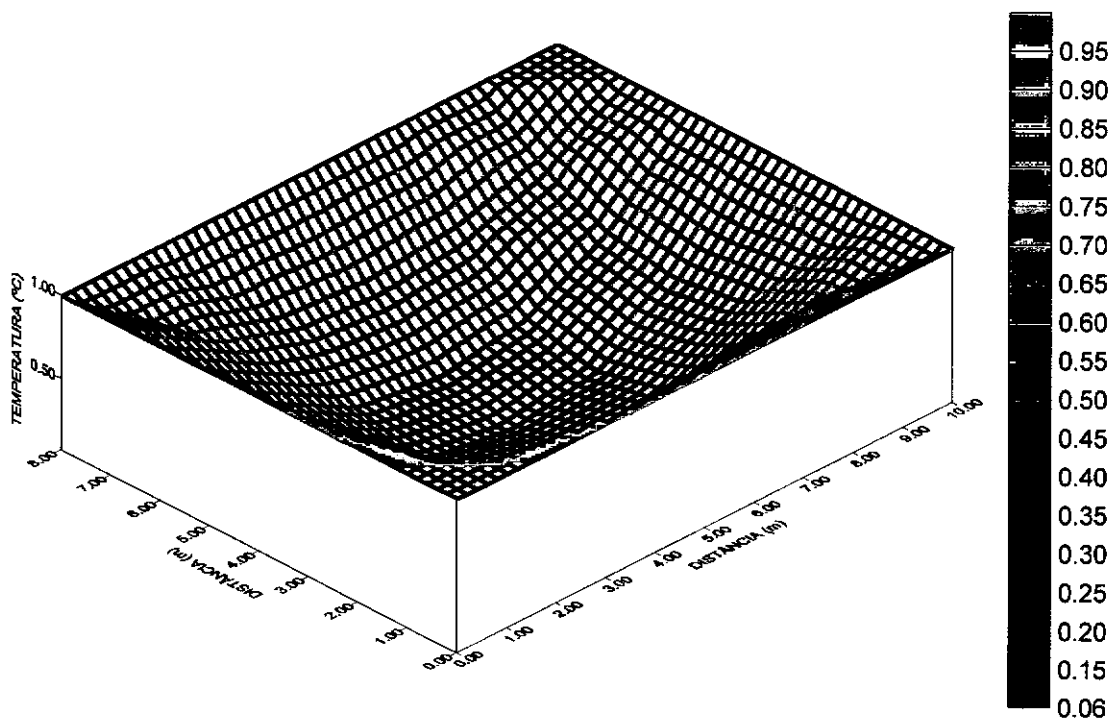


Figura 3.23 Superfície de distribuição de potenciais de temperaturas para um ponto J(5;4) sobre a região discretizada da fig. 3.18, aplicando-se um choque térmico ao longo de todo o contorno no tempo $t = 2,0s$.

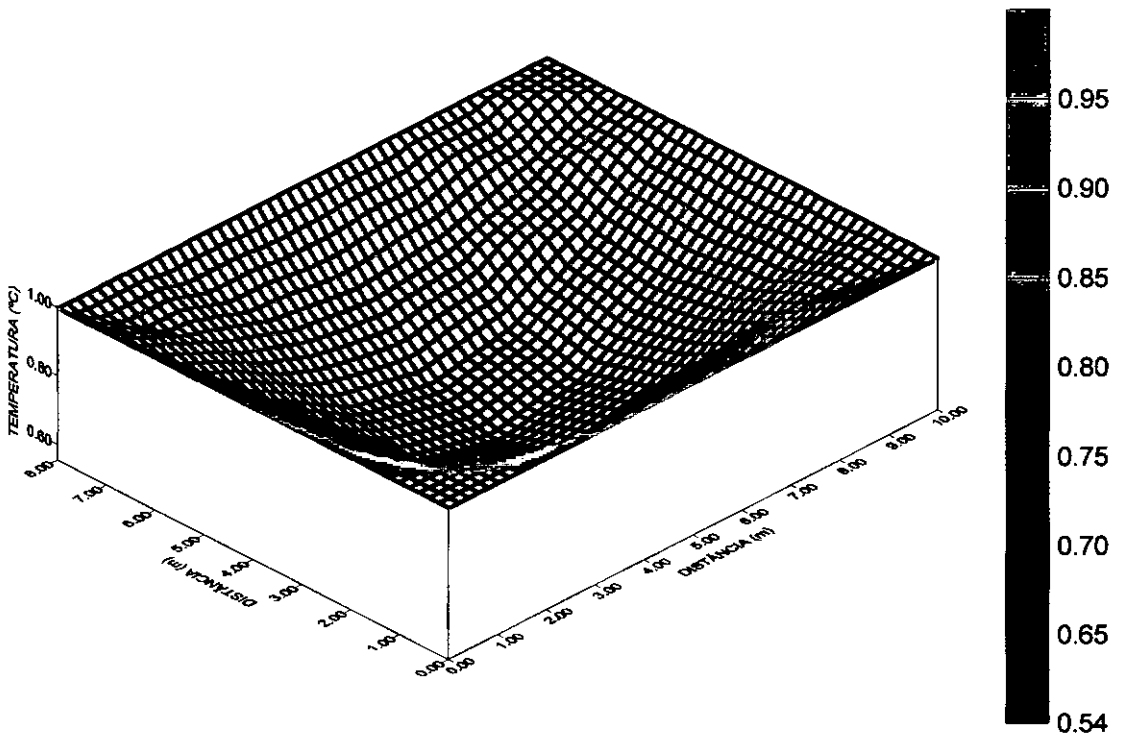


Figura 3.24 Superfície de distribuição de potenciais de temperaturas para um ponto $J(5;4)$ sobre a região discretizada da fig. 3.18, aplicando-se um choque térmico ao longo de todo o contorno no tempo $t = 5,0s$.

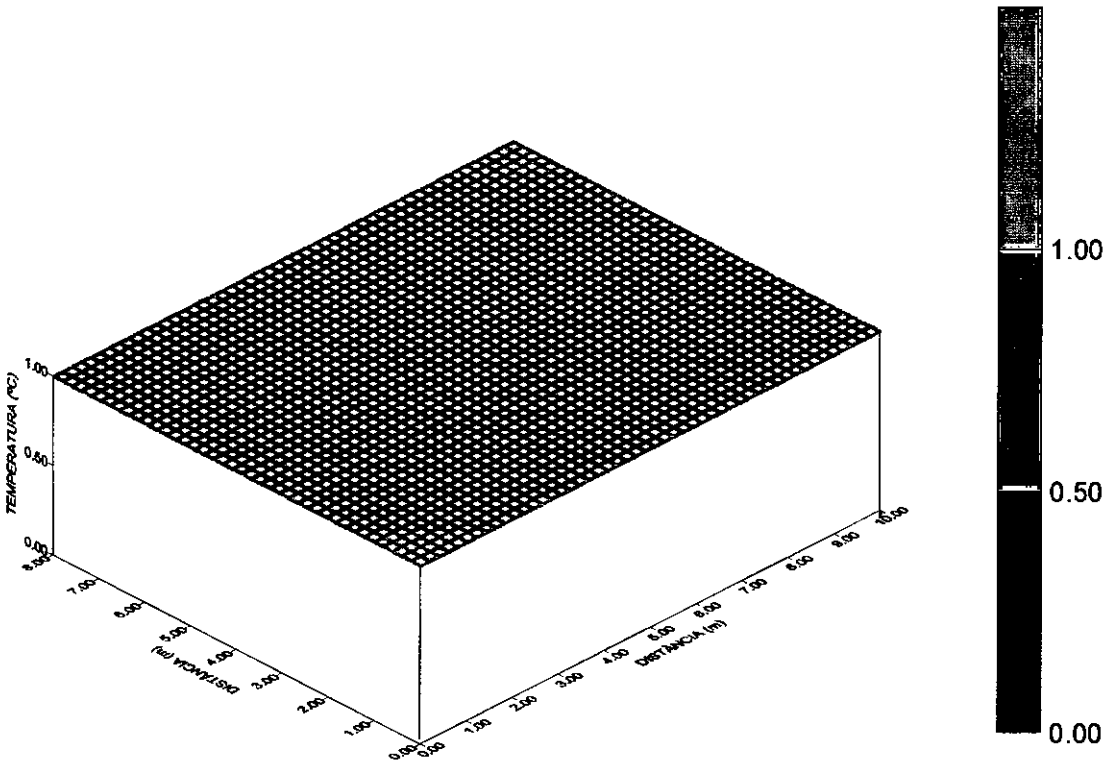


Figura 3.24 Superfície de distribuição de potenciais de temperaturas para um ponto J(5;4) sobre a região discretizada da fig. 3.18, aplicando-se um choque térmico ao longo de todo o contorno no tempo $t = 20,0s$.

III.III.b. CHOQUE TÉRMICO APENAS NA FACE $X = 0$

Tomamos a região retangular supra descrita e a submetemos a novas condições de contorno. Estando inicialmente na temperatura 0°C em toda a placa, subitamente a face $x = 0$ é elevada à temperatura de 1°C .

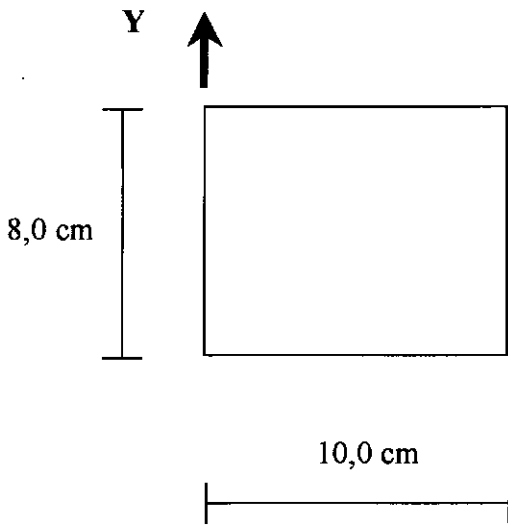
Para esta simulação, empregou-se a mesma discretização espacial do item anterior desta secção e as discretizações temporais foram tomadas com os intervalos de tempo $\Delta t = 1,0\text{s}$ e $\Delta t = 2,0\text{s}$.

A geometria, discretização, condições de contorno e condições iniciais são descritas pela figura 3.26.

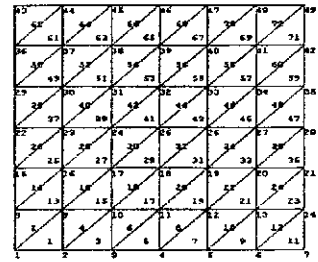
Procuramos acompanhar a evolução dos potenciais de temperaturas ao longo do tempo em dois pontos J(1,666;2,666) e K(5,0;2,666).

Os resultados obtidos são comparados com aqueles produzidos pela simulação em Métodos de Elementos de contorno (28 elementos), e são apresentados nas tabelas 3.2, 3.3 e também através de gráficos descritos pelas figuras 3.27 e 3.28. A propósito, notamos que os potenciais de temperaturas para todos os níveis de tempo à exceção de $t = 2,0\text{s}$ para os pontos K e J, respectivos às tabelas 3.2 e 3.3, apresentam boas aproximações.

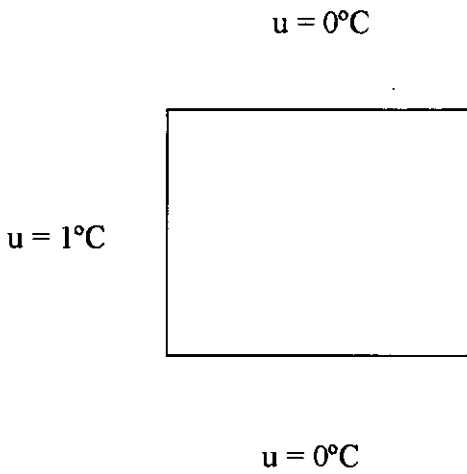
As figuras 3.27 e 3.28 apresentam as curvas da soluções numéricas obtidas aplicando-se os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno, para as diferentes discretizações temporais supra mencionadas. Observamos que as curvas estão bem próximas, confirmando a boa concordância dos dois métodos.



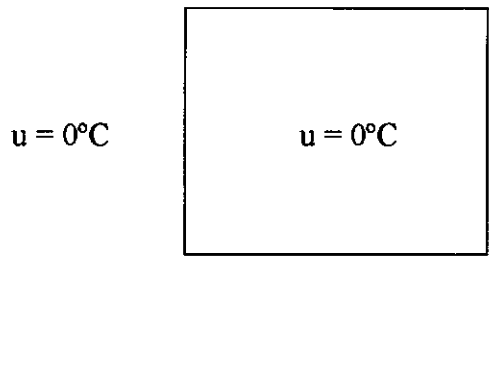
(a) Geometria



(b) Discretização Espacial



(c) Condições de Contorno



(d) Condições Iniciais

Figura. 3.26. Difusão transiente bidimensional em região retangular, aplicando-se um choque apenas na face $x = 0$.

Tabela 3.2. Potenciais de Temperaturas nos pontos J(1,666;2,666) e K(5,0;2,666) para $\Delta t = 1,0s$.

Tempo(s)	$\Delta t=1.0s$			
	J(MEF)	J(MEC)	K(MEF)	K(MEC)
2	0,3273	0,3527	0,0043	0,0082
4	0,4696	0,4779	0,0472	0,0500
6	0,5160	0,5226	0,0894	0,0878
8	0,5363	0,5426	0,1161	0,1126
10	0,5465	0,5528	0,1323	0,1279
12	0,5520	0,5583	0,1419	0,1372
14	0,5551	0,5615	0,1477	0,1429
16	0,5569	0,5633	0,1511	0,1463
18	0,5579	0,5644	0,1531	0,1484
20	0,5586	0,5650	0,1543	0,1497

Tabela 3.3. Potenciais de temperaturas para os pontos J(1,666;2,666) e K(5,0;2,666) para $\Delta t = 2,0s$.

Tempo(s)	$\Delta t=2.0s$			
	J(MEF)	J(MEC)	K(MEF)	K(MEC)
2	0,1875	0,3266	0,0071	0,0069
4	0,4569	0,4649	0,0357	0,0456
6	0,5057	0,5159	0,0780	0,0834
8	0,5316	0,5390	0,1096	0,1091
10	0,5438	0,5506	0,1277	0,1254
12	0,5503	0,5570	0,1390	0,1355
14	0,5541	0,5606	0,1458	0,1417
16	0,5563	0,5628	0,1499	0,1456
18	0,5575	0,5641	0,1524	0,1479
20	0,5583	0,5648	0,1539	0,1494

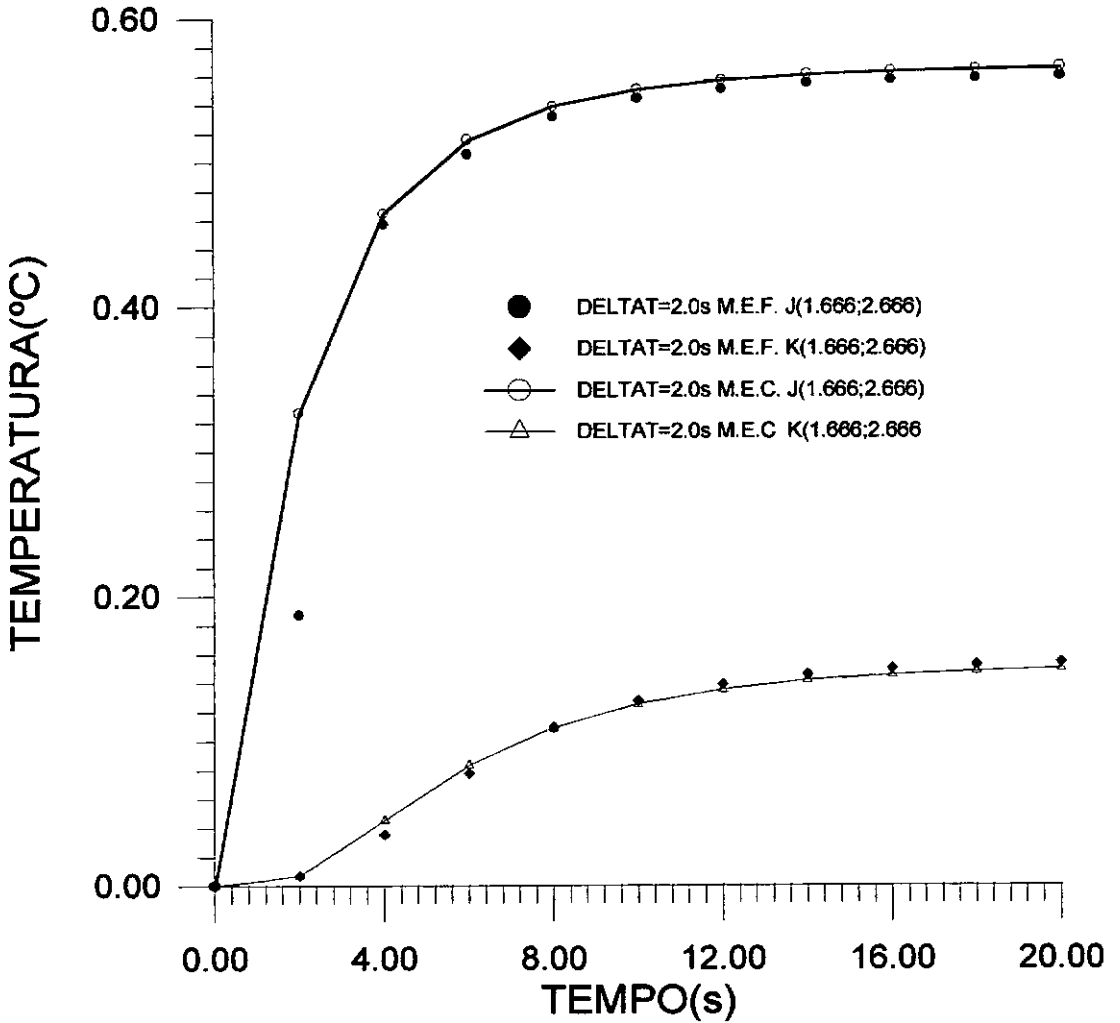


Figura 3.27. Comparação entre os M.E.F. e M.E.C.(28 elementos) para potenciais de temperaturas ao longo do tempo para os pontos J(1,666;2,666) e K(5,0;2,666) sobre a região discretizada da Figura 3.23 (retangular), aplicando-se um choque térmico apenas na face $x = 0$.

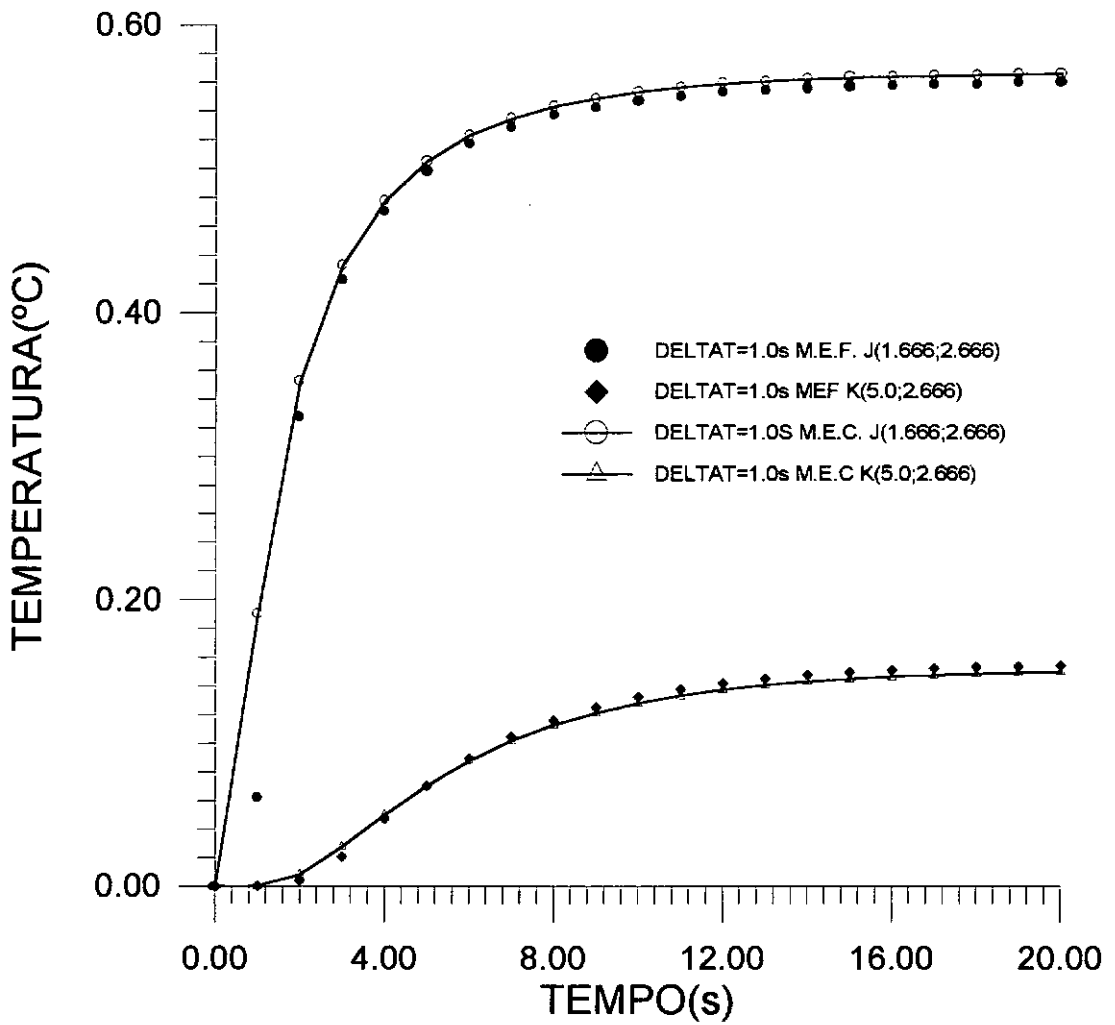


Figura 3.28. Comparação entre os M.E.F. e o M.E.C.(28 elementos) para potenciais de temperaturas ao longo do tempo para os pontos J(1,666;2,666) e K(5,0;2,666) sobre a região discretizada da figura 3.23 (retangular), aplicando-se um choque térmico apenas na face $x = 0$.

III.IV SIMULAÇÃO DE DIFUSÃO TRANSIENTE BIDIMENSIONAL EM REGIÃO QUADRADA COM FLUXO PRESCRITO NO CONTORNO

(Exemplo 4)

A figura 3.29 apresenta uma região com geometria quadrada de lado $L = 1,0\text{m}$, na qual queremos ensaiar o fenômeno difusivo térmico, mantida inicialmente à temperatura de 0°C , isolada apenas na face $y = 1,0$. A temperatura na face $x = 0$ é subitamente elevada para $1,0^\circ\text{C}$, enquanto a face $x = 1,0$ é mantida a 0°C , e na face $y = 0$ prescreve-se um fluxo $p = 1$.

Optamos por uma discretização espacial análoga à apresentada na figura 3.2(72 elementos). Empregaram-se na discretização temporal intervalos de tempo $\Delta t = 0,01$ e $0,1\text{s}$. Desejamos acompanhar a evolução da temperatura para os pontos $J(0,5;0,5)$ e $K(0,1666;0,5)$, sobre esta região. Este exemplo também foi simulado pelo Método dos Elementos de Contorno para as respectivas discretizações. Os resultados obtidos são descritos conforme a saber:

A figura 3.30 apresenta as curvas de distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto $J(0,5;0,5)$, $\Delta t = 0,01\text{s}$, até $t = 1,0\text{s}$. Notamos que os resultados obtidos expressos através de gráficos estão muito bons, tendo em vista a superposição das curvas, correspondentes ao dois métodos.

A figura 3.31 mostra uma comparação entre os métodos utilizados, para uma discretização com passo de tempo mais largo, $\Delta t = 0,1\text{s}$, até $t = 10,0\text{s}$.

Observando o diagrama, inferimos que as curvas correspondentes estão superpostas, o que confirma uma boa adequação e eficácia dos métodos na solução de problemas de difusão térmica. Notamos ainda que por ocasião do tempo igual a $1,0\text{s}$ é alcançado o regime permanente.

A figura 3.32 apresenta um gráfico tridimensional que representa a superfície de potenciais de temperaturas para a região discretizada na figura 3.29, $\Delta t = 0,01\text{s}$, no tempo $t = 2,0\text{s}$. Observando a perspectiva, notamos as curvas de níveis plotadas a cada

nível de temperatura $T = 0,05^{\circ}\text{C}$, conforme legenda, e os vetores gradientes com grafia de seus respectivos módulos, aplicados no centro de gravidade dos elementos da respectiva malha discretizada. Focando mais o olhar sobre o conjunto desses vetores, é possível perceber que eles balizam a trajetória das linhas de fluxo de temperaturas do fenômeno difusivo. Note o ligeiro e compulsório arqueamento da superfície na face $x = 1,0$, onde prescreve-se uma derivada normal $p = 1$.

Os resultados obtidos da simulação para o ponto $K(0,1667;0,5)$ foram plotados na figura 3.33, que apresenta as curvas de distribuição de temperaturas ao longo do tempo. Podemos observar através delas que a taxa de variação dos potenciais em relação ao tempo t são maiores que para o ponto $J(0,5;0,5)$, o que se traduz por uma curva mais íngreme, e por uma difusão de temperatura mais rápida.

Constatamos que as curvas pelos dois métodos também se superpõem, o que confirma a adequada aplicabilidade dos métodos empregados.

Experimentamos flexionar o parâmetro de peso no tempo θ para valores iguais a $\frac{1}{2}$ (Crank Nicholson) e $\frac{2}{3}$ (Galerkin), mantendo-se fixo o passos de tempo mais largo $\Delta t = 0,1\text{s}$. O resultado dessa simulação para os pontos $J(0,5;0,5)$ e $K(0,1666;0,5)$ sobre o domínio discretizado, pode ser acompanhado pelas figuras 3.34 e 3.35. Elas representam as distribuições de potenciais ao longo do tempo. Notamos que para esse passo de tempo largo $\Delta t = 0,1\text{s}$ e $\theta = \frac{1}{2}$ produz oscilações para o esquema de Crank Nicholson. Assim, buscando suavizar essas oscilações, experimentamos utilizar $\theta = \frac{2}{3}$, esquema de Galerkin. O resultado é que obtemos uma curva amortecida, sem oscilações para o ponto $J(0,5;0,5)$ (fig.3.34) e uma curva mais suave e com pequenas oscilações para o ponto $K(0,1666;0,5)$ (fig.3.35).

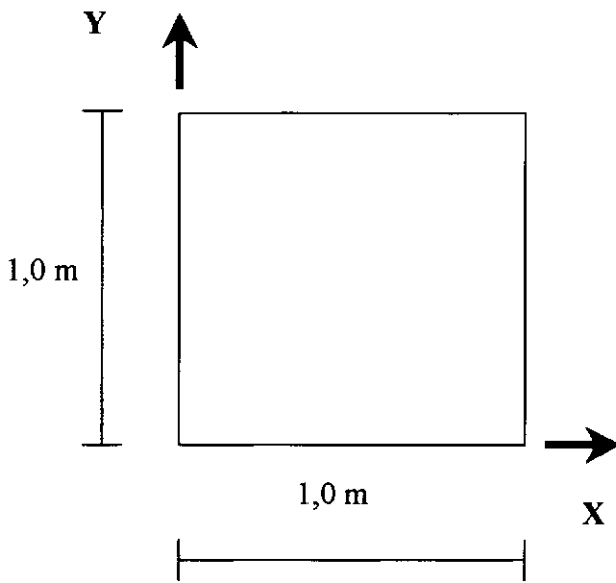
Ao tentarmos refinar mais a discretização da grandeza tempo, utilizando um passos de tempo $\Delta t = 0,01\text{s}$ e $\theta = 0,5$ (Crank Nicholson), obtemos uma curva suave, bem definida e sem oscilações.

As figuras 3.36 e 3.37 apresentam curvas de distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo, utilizando um intervalo de tempo $\Delta t = 0,1\text{s}$ e variando o parâmetro de peso no tempo θ para valores iguais a $0,5$, $0,6667$ e $0,48$,

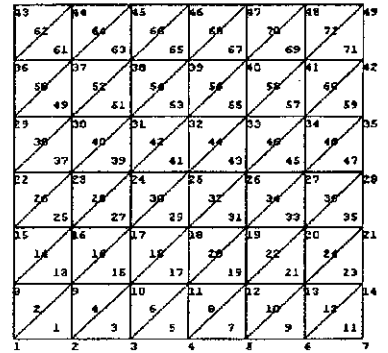
durante um tempo $t = 20,0s$.

Os resultados obtidos tanto para o ponto $J(0,5;0,5)$ e $K(0,1666;0,5)$, se traduz por uma curva com oscilações para $\theta = 0,5$ (Crank Nicholson), outra suave e amortecida para $\theta = 0.6667$ (Galerkin) e por fim uma curva de grandes oscilações, divergente e condicionalmente estável para $\theta = 0.48$.

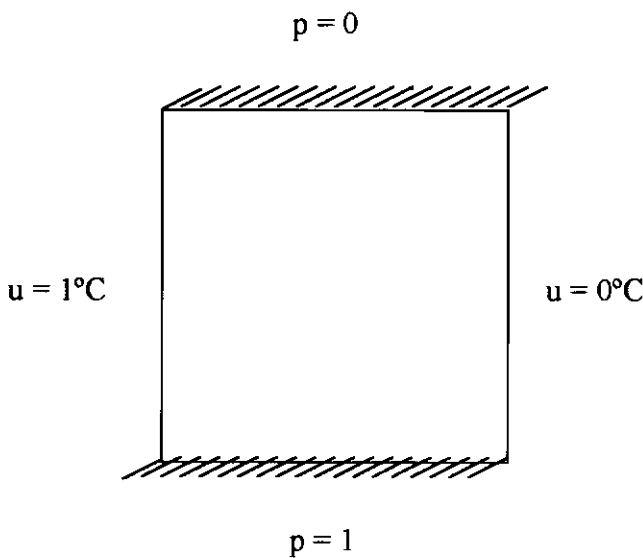
A figura 3.38 apresenta em detalhe uma ampliação na zona correspondente ao transiente da curva de Crank Nicholson para um $\Delta t = 0,1s$, no nível de tempo $t = 4,0s$.



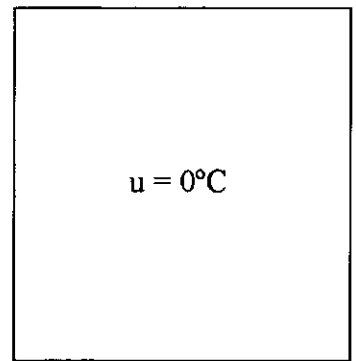
(a) Geometria



(b) Discretização Espacial



(c) Condições de Contorno



(d) Condições Iniciais

Figura. 3.29. Difusão transiente bidimensional em região quadrada com fluxo no contorno.

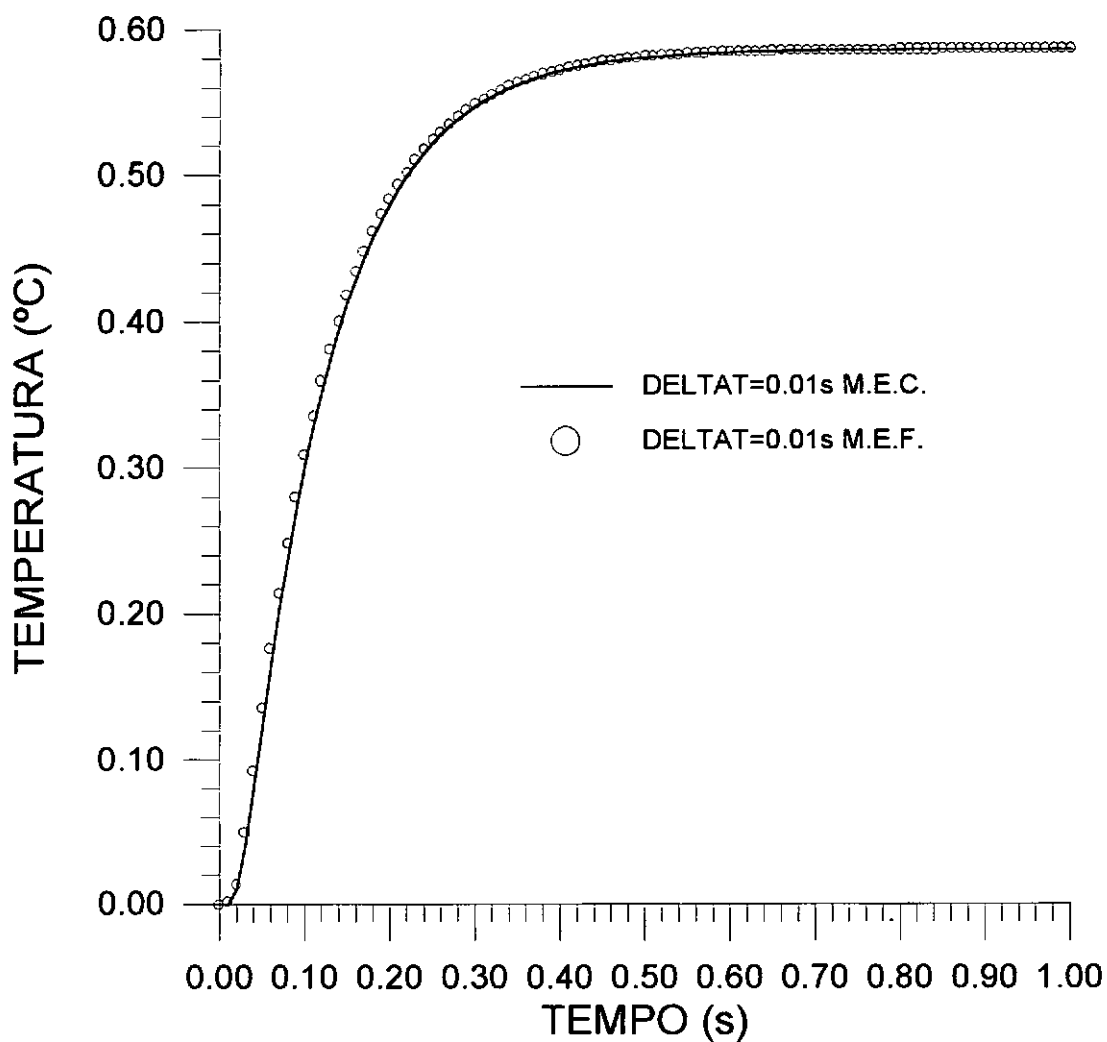


Figura 3.30 Comparação entre os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para a distribuição de potenciais ao longo do tempo para o ponto $J(0,5;0,5)$ sobre a região discretizada da fig. 3.29

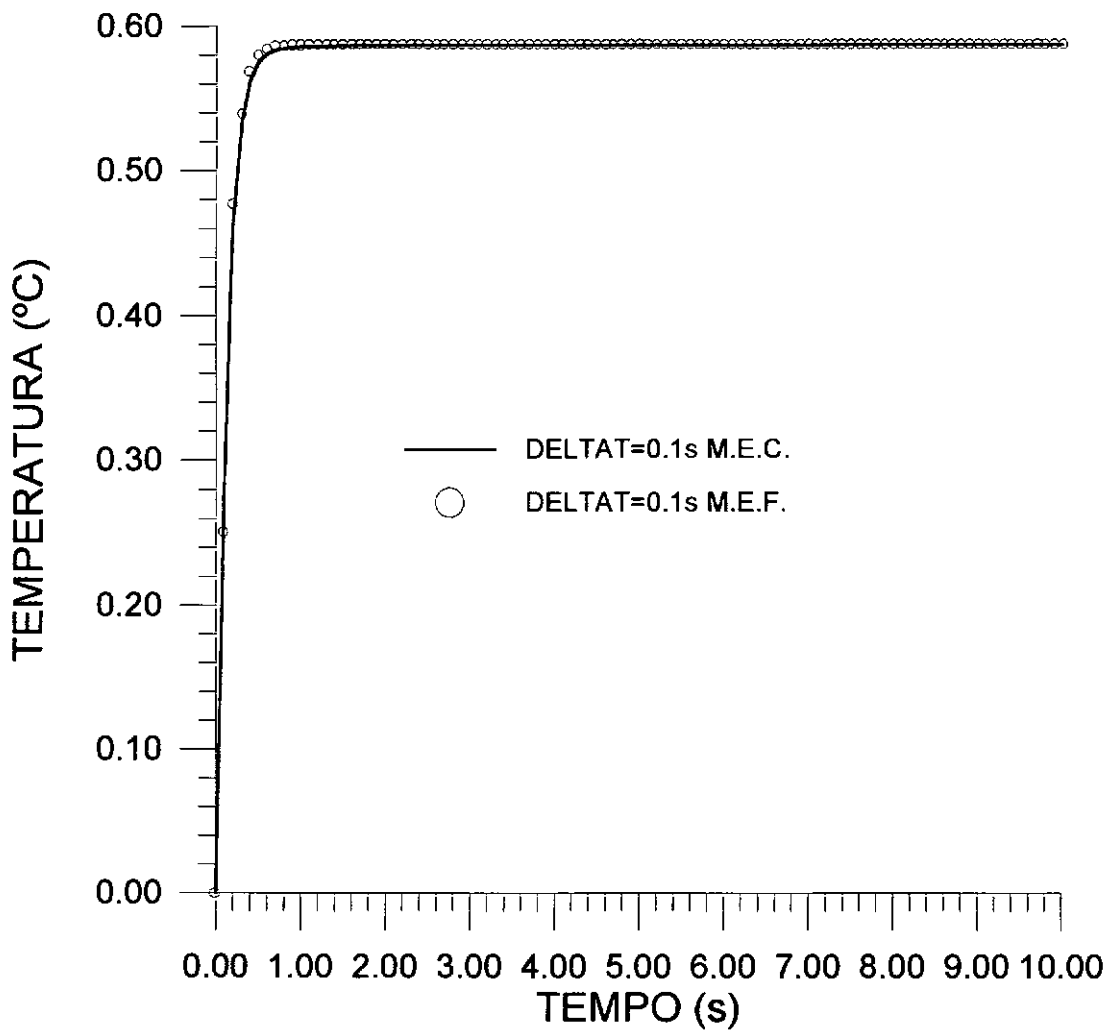


Figura 3.31 Comparação de distribuições de Temperaturas ao longo do tempo utilizando os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para um ponto $J(0,5;0,5)$ sobre a região discretizada da fig. 3.29, com passo de tempo largo, $\Delta t = 1,0s$.

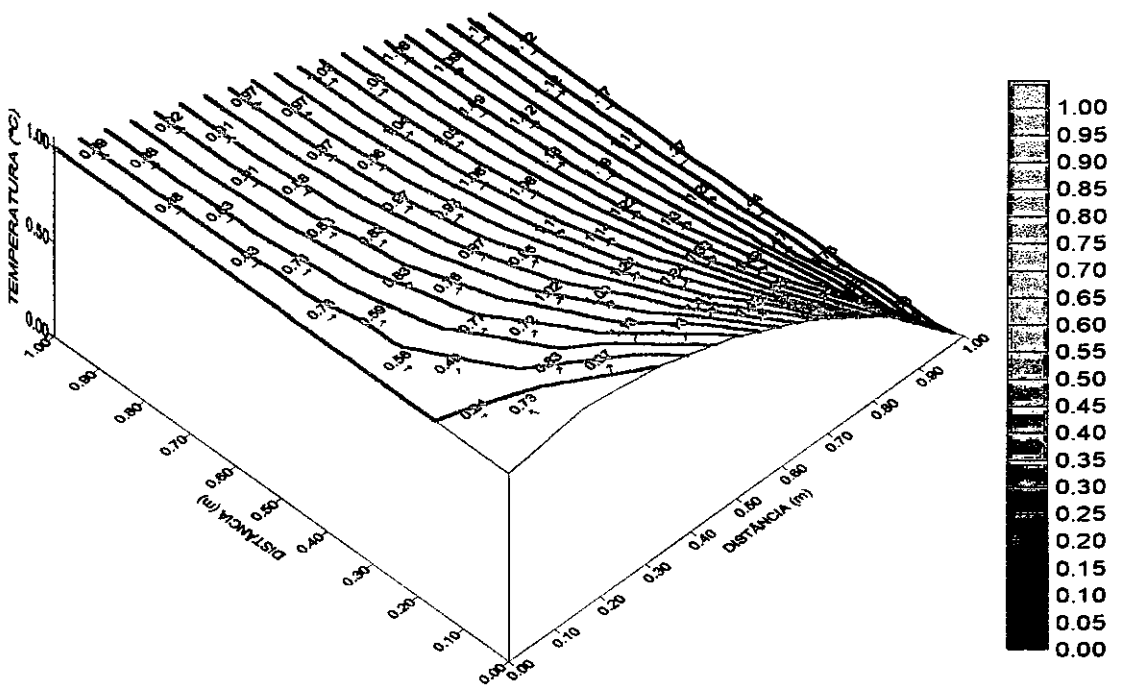


Figura 3.32 Superfície de potenciais de temperaturas para a região discretizada da fig.3.29, $\Delta t = 0,01s$, em $t = 2,0s$ pelo Método dos Elementos Finitos.

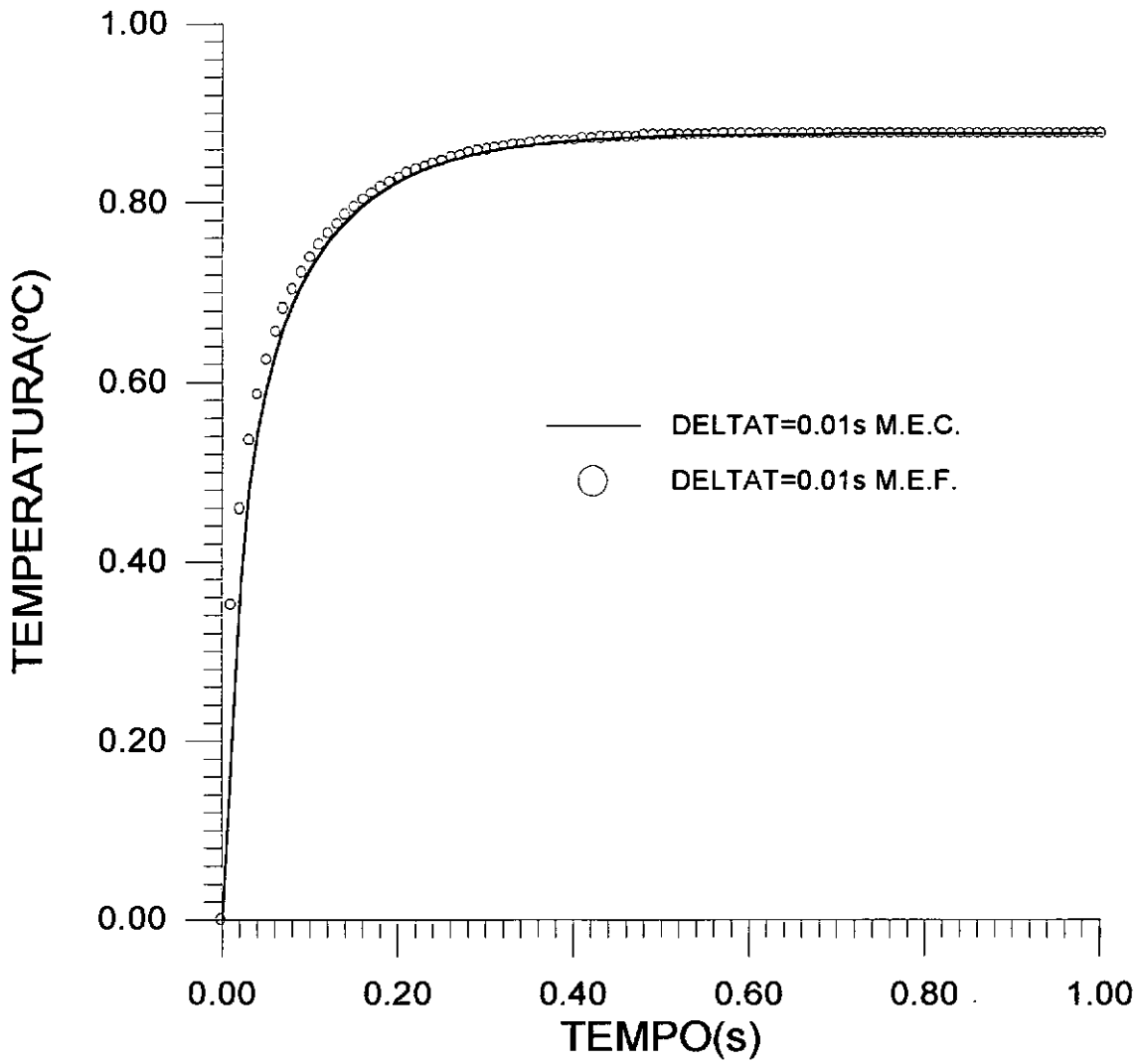


Figura 3.33 Comparação de Distribuição de potenciais de temperaturas entre os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para o ponto K(0,1666;0) sobre o domínio discretizado da fig. 3.29.

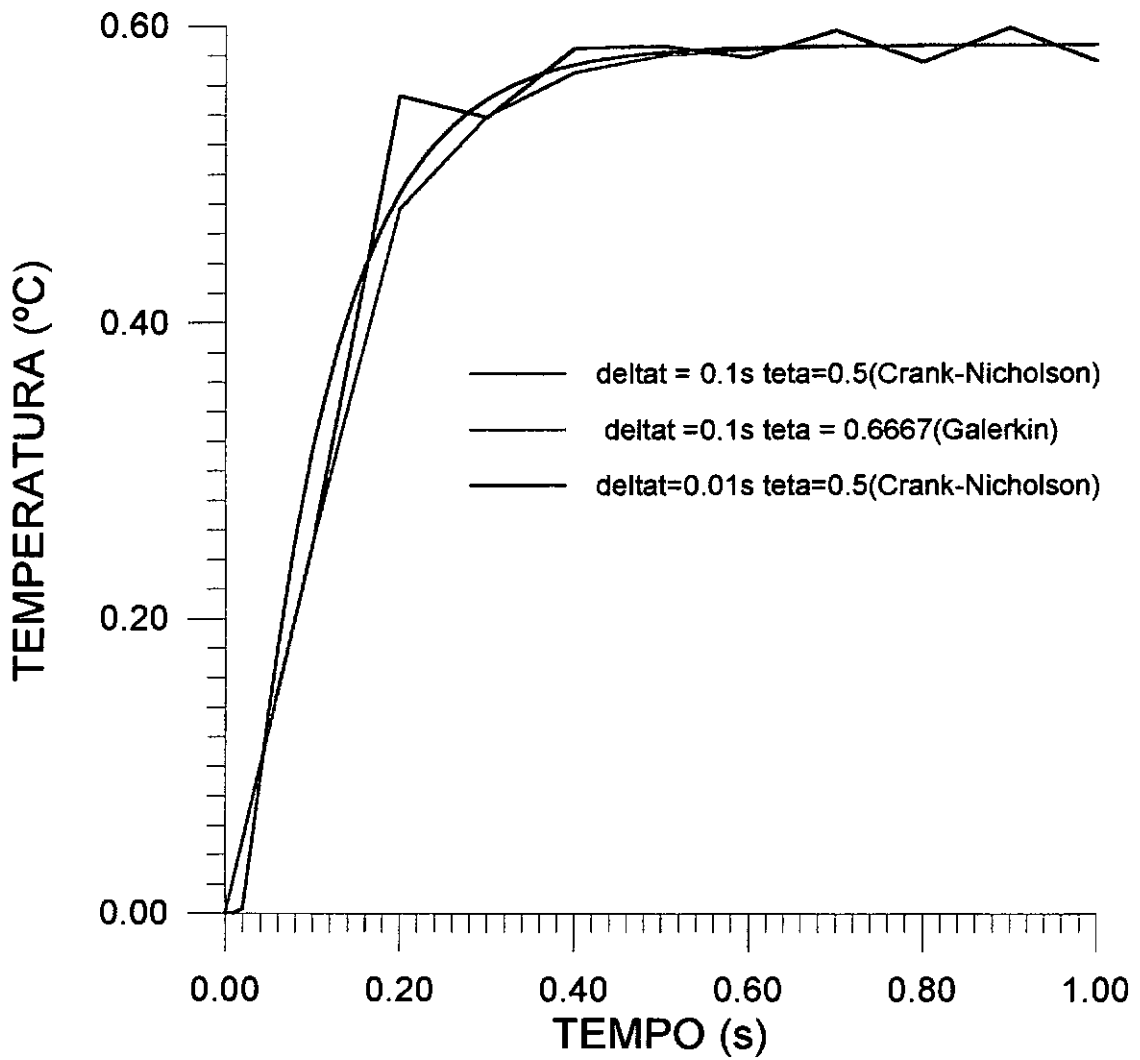


Figura 3.34 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto J(0,5;0,5) sobre a região discretizada da fig. 3.26, utilizando o Método dos Elementos Finitos.

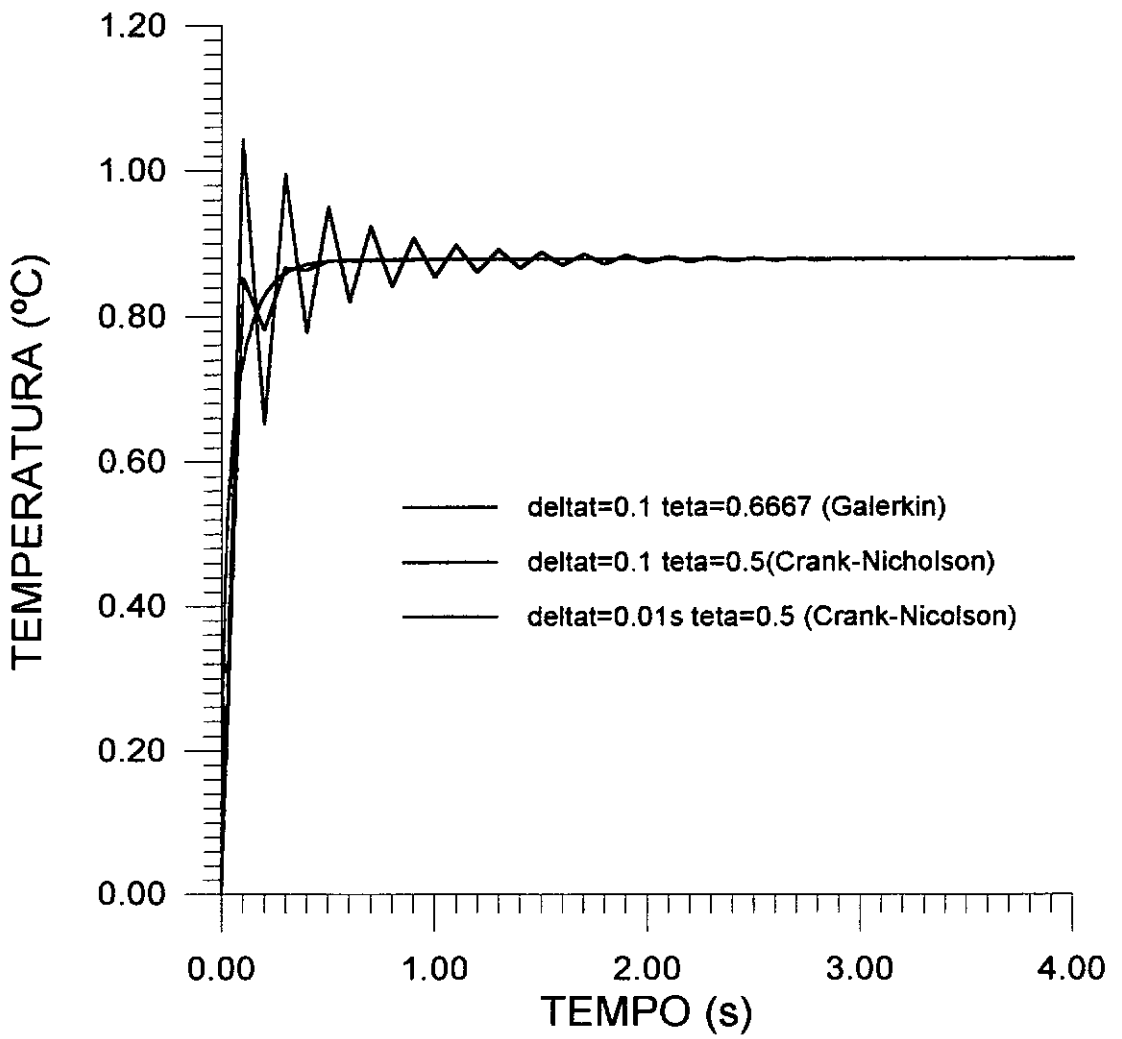


Figura 3.35 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para um ponto $K(0,1666;0.5)$ sobre o domínio discretizado da fig. 3.29, sob diferentes Δt e θ .

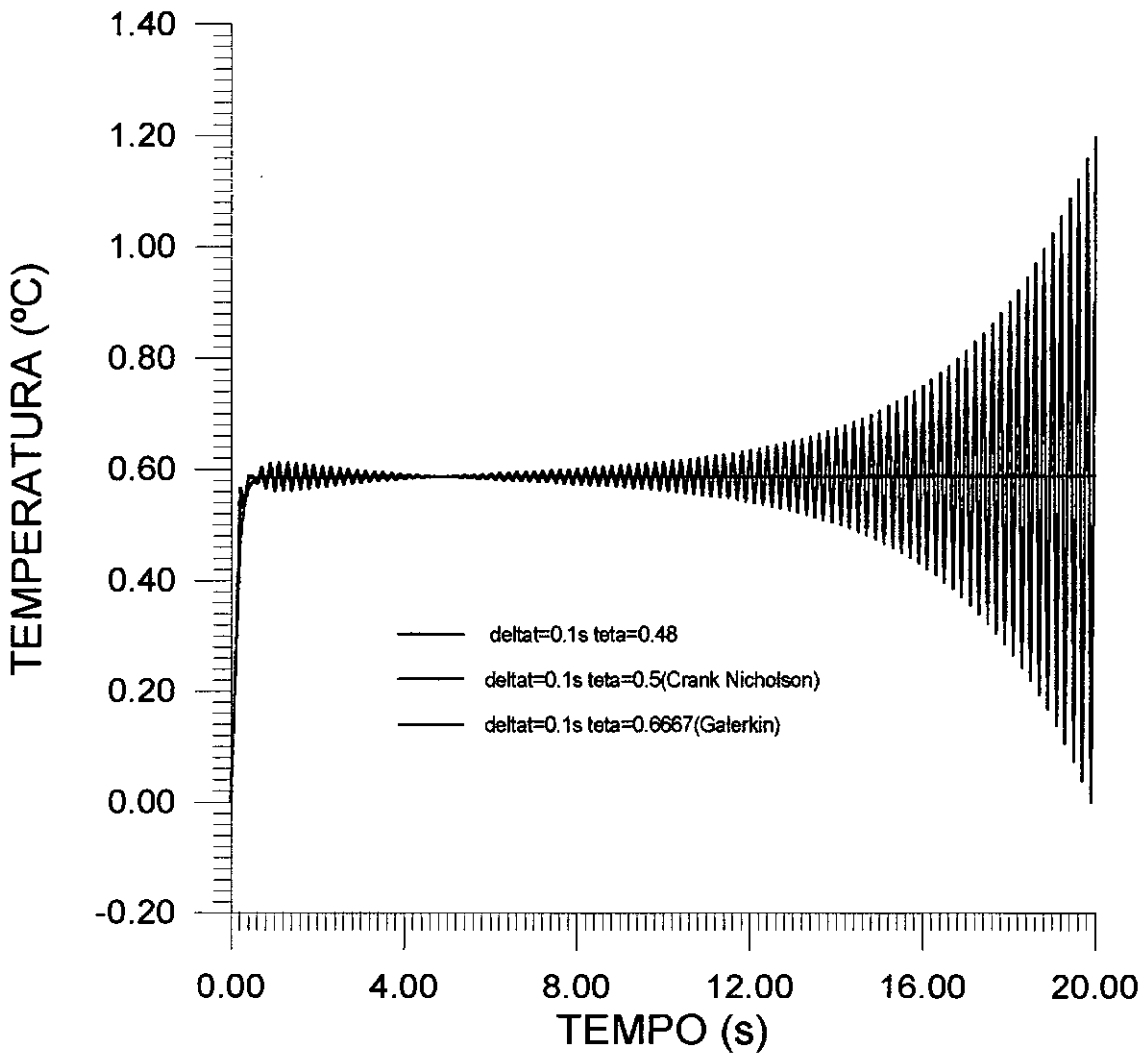


Figura 3.36 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto $J(0,5;0,5)$ sobre a região discretizada na fig. 3.29, para diferentes valores do parâmetro de peso no tempo θ .

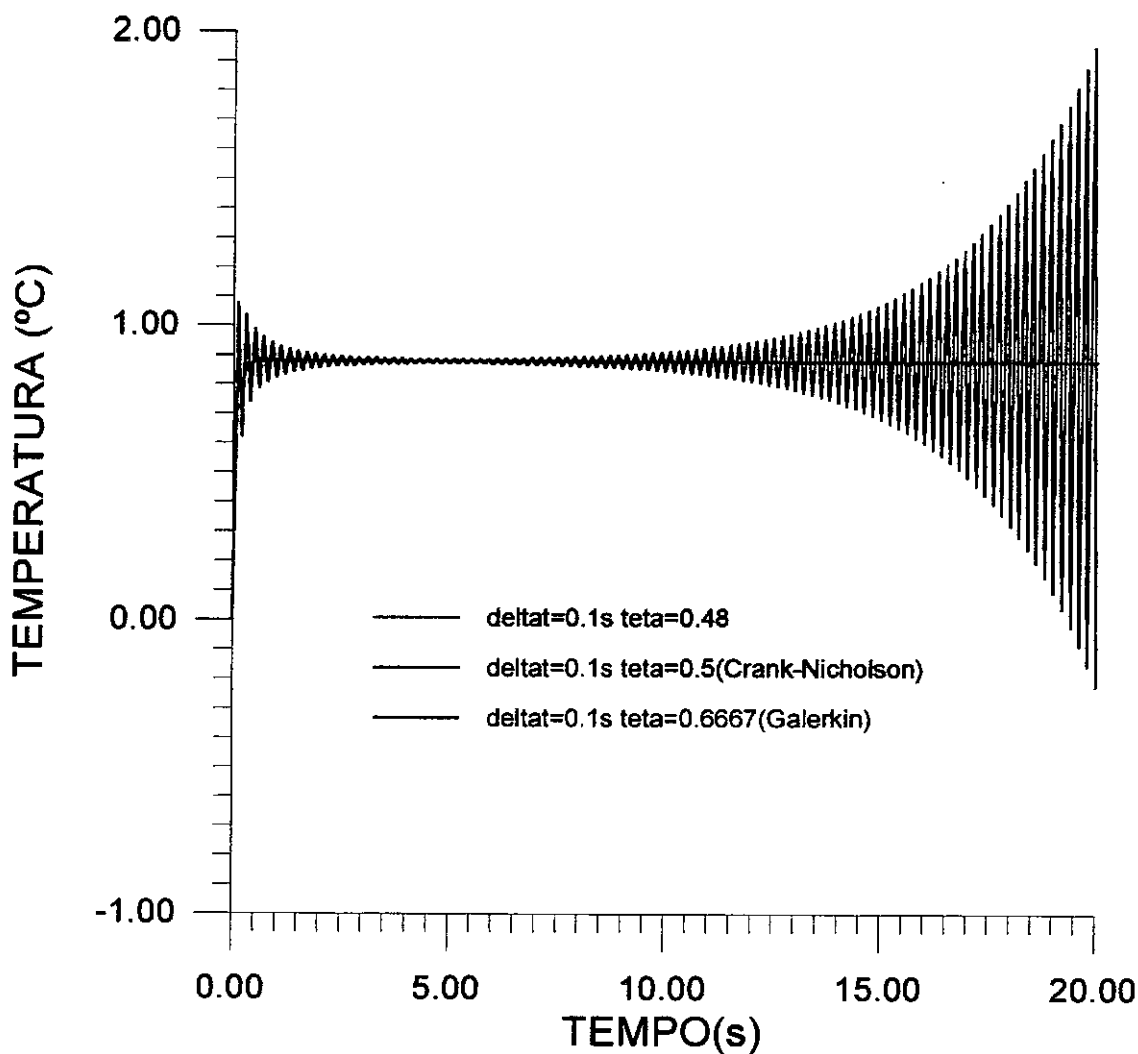


Figura 3.37 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para um ponto $K(0,1666;0,5)$ sobre o domínio discretizado da fig. 3.29, variando-se o parâmetro de peso no tempo θ .

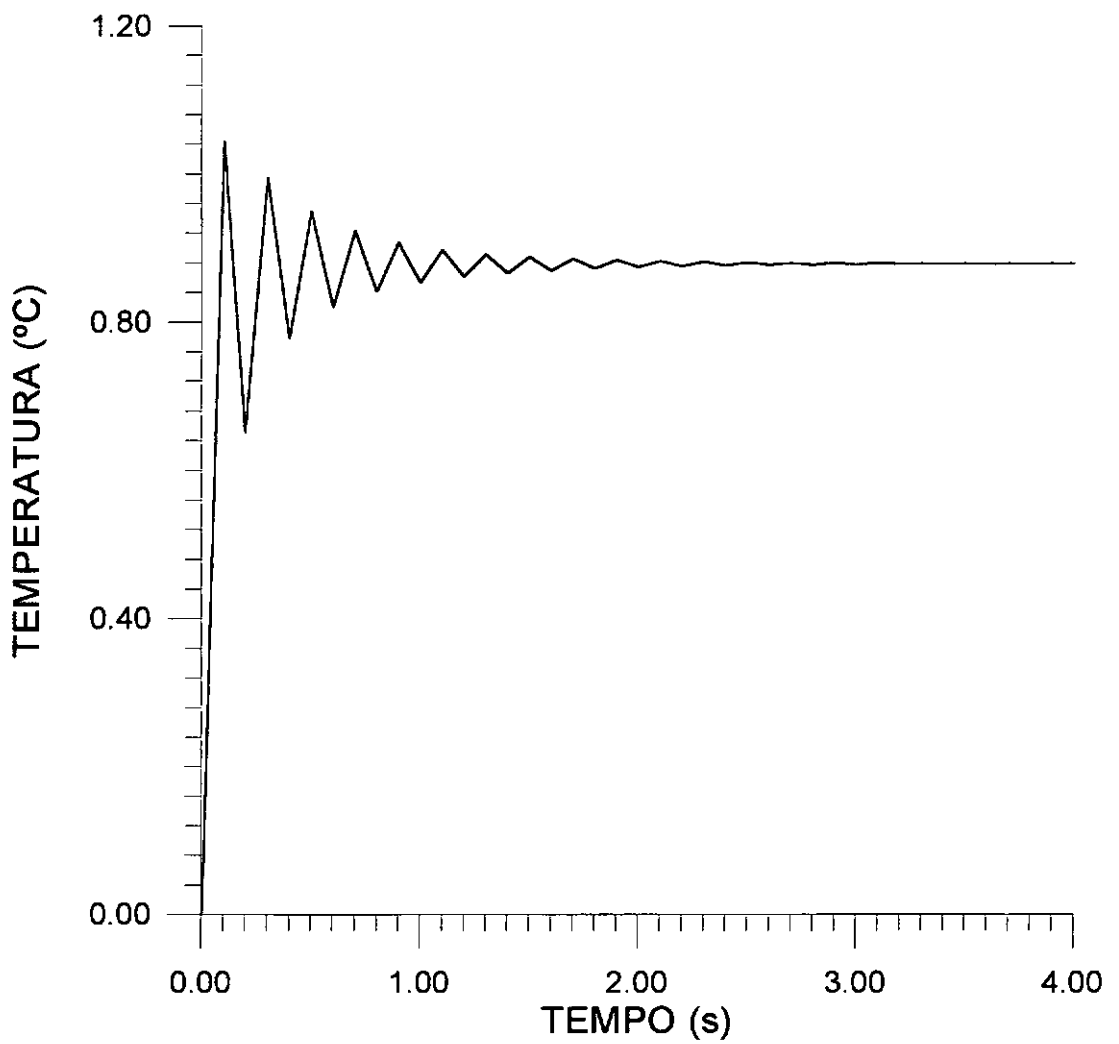


Figura 3.38 Distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para um ponto $K(0,1666;0,5)$ sobre o domínio discretizado da fig. 3.29, $\Delta t = 0,1s$, $\theta = 0,5$ (Crank Nicholson).

III.V DIFUSÃO EM REGIÃO CIRCULAR DEVIDO A CHOQUES TÉRMICOS SUCESSIVOS.

(Exemplo 5)

Para este exemplo, tomamos uma região circular de raio unitário, estando inicialmente na temperatura de 0°C e a submetemos a dois choques térmicos, em todo seu contorno, correspondentes aos instantes $t_0 = 0,0\text{s}$ e $t_1 = 1,0\text{s}$.

A figura 3.39 apresenta a geometria, discretização, condições de contorno e condições iniciais empregados nesta simulação.

O comportamento da temperatura em função do tempo é observada para dois pontos sobre a região: $J(0,0;0,875)$ e $K(0,0;0,0)$. Buscamos considerar três condições a saber:

- I) $t_0 = t_1 = 0,0\text{s}$ que corresponde a um choque repentino de temperatura de 0°C para 100°C .
- II) $t_0 = 0,0\text{s}$ e $t_1 = 0,5\text{s}$ que corresponde a um choque de temperatura de 50°C durante os primeiros $0,5\text{s}$ e de 100°C para tempos subsequentes.
- III) $t_0 = 0,0\text{s}$ e $t_1 = 1,0\text{s}$ que corresponde a um choque de temperatura de 50°C durante o primeiro segundo e de 100°C para tempos posteriores.

Os resultados obtidos são apresentados nas figuras de 3.40 a 3.46.

Plotamos na figura 3.40 as curvas obtidas das soluções numéricas, concernente a situação I, utilizando uma discretização temporal de $\Delta t = 0,05\text{s}$, através da aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para os pontos J e K respectivamente. Observamos que as curvas estão bem próximas, o que mostra uma boa concordância dos dois métodos.

A figura 3.41 apresenta uma comparação entre os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para um melhor refinamento da grandeza tempo, concernente

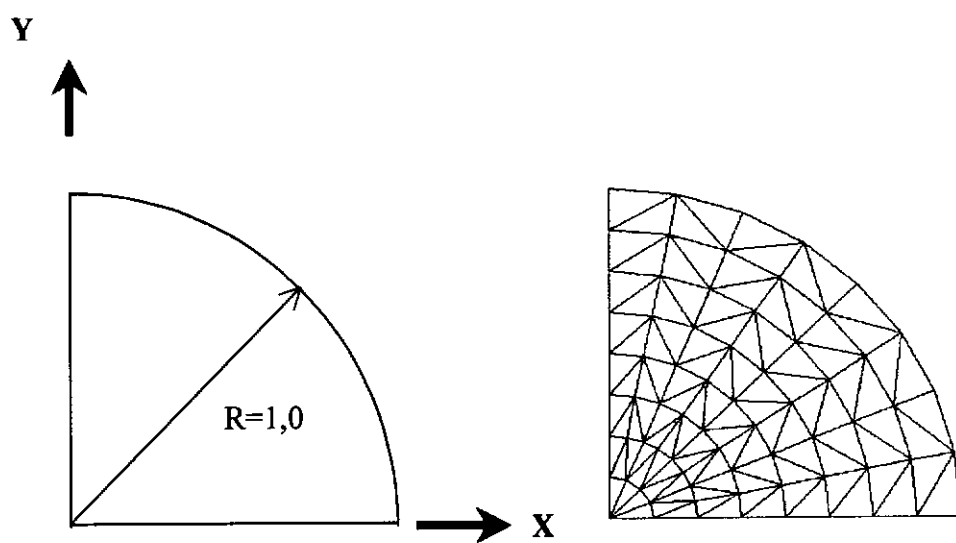
ao caso I. Percebemos que as curvas são suaves e superpostas.

A figura 3.42 apresenta uma comparação dos gráficos das soluções numéricas para as discretizações temporais $\Delta t = 0,05s$ e $\Delta t = 0,01s$ pelo Método dos Elementos Finitos.

As figuras 3.43 e 3.44 mostram os gráficos das soluções numéricas para as discretizações temporais $\Delta t = 0,05s$ e $\Delta t = 0,01s$ respectivamente, referentes à situação II e estabelecem uma comparação entre os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para os pontos J e K sobre o domínio discretizado. Notamos uma variação abrupta de temperatura por ocasião de $t = 0,5s$ quando se aplica o segundo choque; um bom estreitamento das curvas para $\Delta t = 0,05s$ e uma perfeita superposição para $\Delta t = 0,01s$.

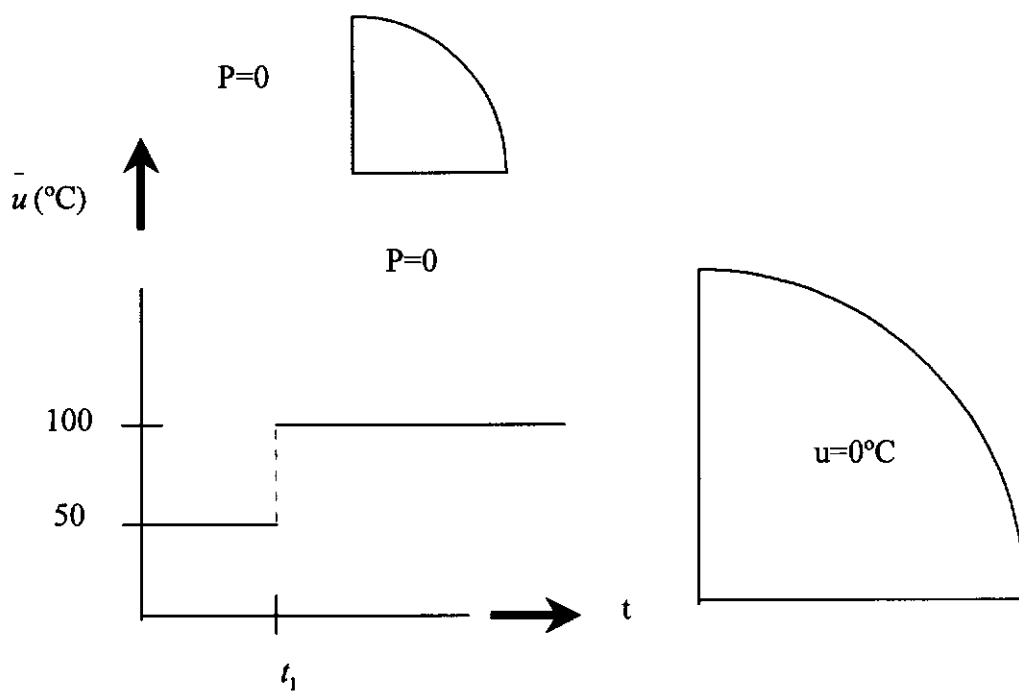
As figuras 3.45 e 3.46 descrevem uma simulação análoga a anterior para a situação III. Acusamos uma súbita descontinuidade por ocasião da aplicação do segundo choque em $t = 1,0s$, boa concordância das curvas para $\Delta t = 0,05s$ e uma virtual coincidência para $\Delta t = 0,01s$.

Inferimos, portanto, que os dois métodos são muito adequados e eficientes na simulação do fenômeno físico de difusão térmica.



(A) Geometria

(B) Discretização
(112 elementos)



(C) Condições de Contorno

(D) Condições Iniciais

Fig.3.39 - Simulação de choques térmicos sucessivos num processo difusivo em região circular.

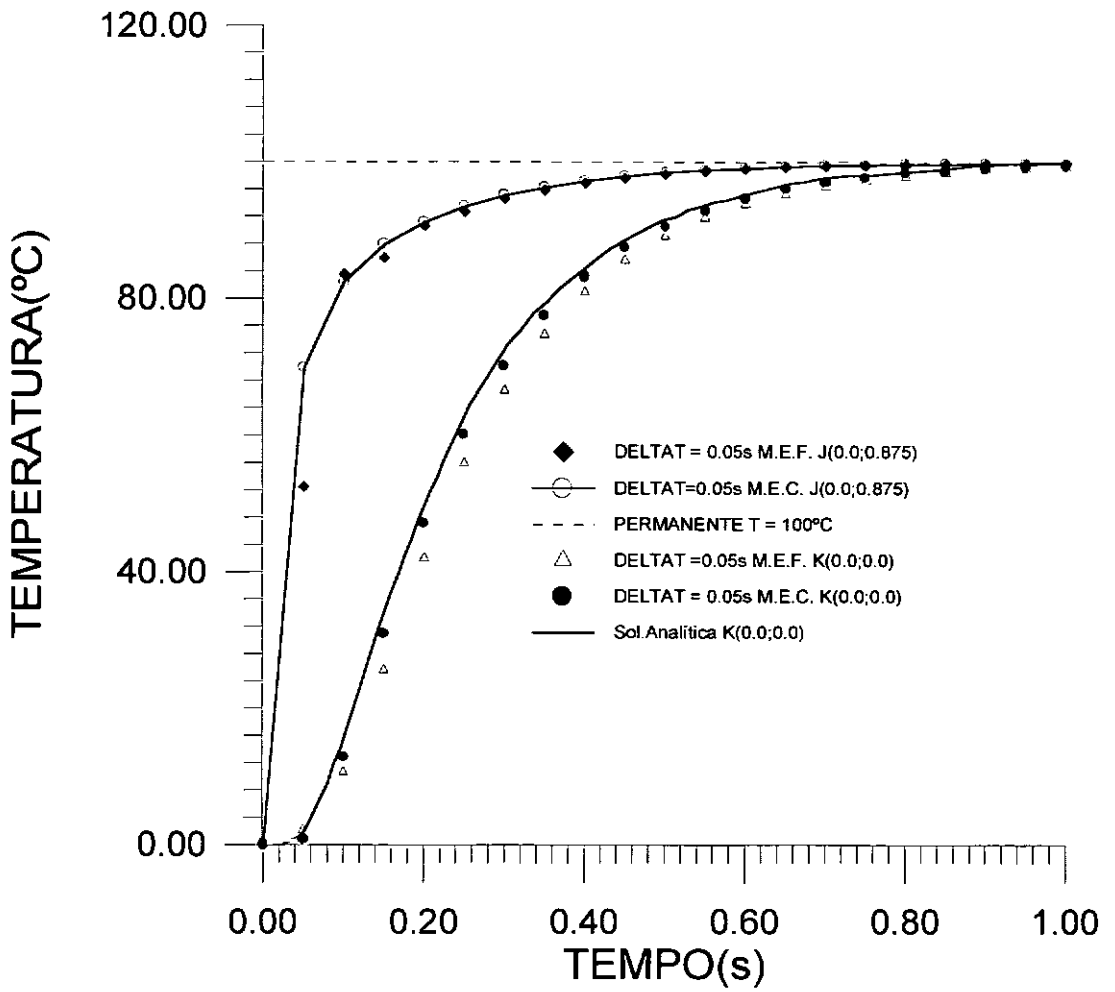


Figura 3.40 Comparação do M.E.F e do M.E.C.(28 elementos) para a distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para os pontos J(0,0; 0,875) e K(0,0;0,0) sobre a região circular discretizada da figura 3.39.

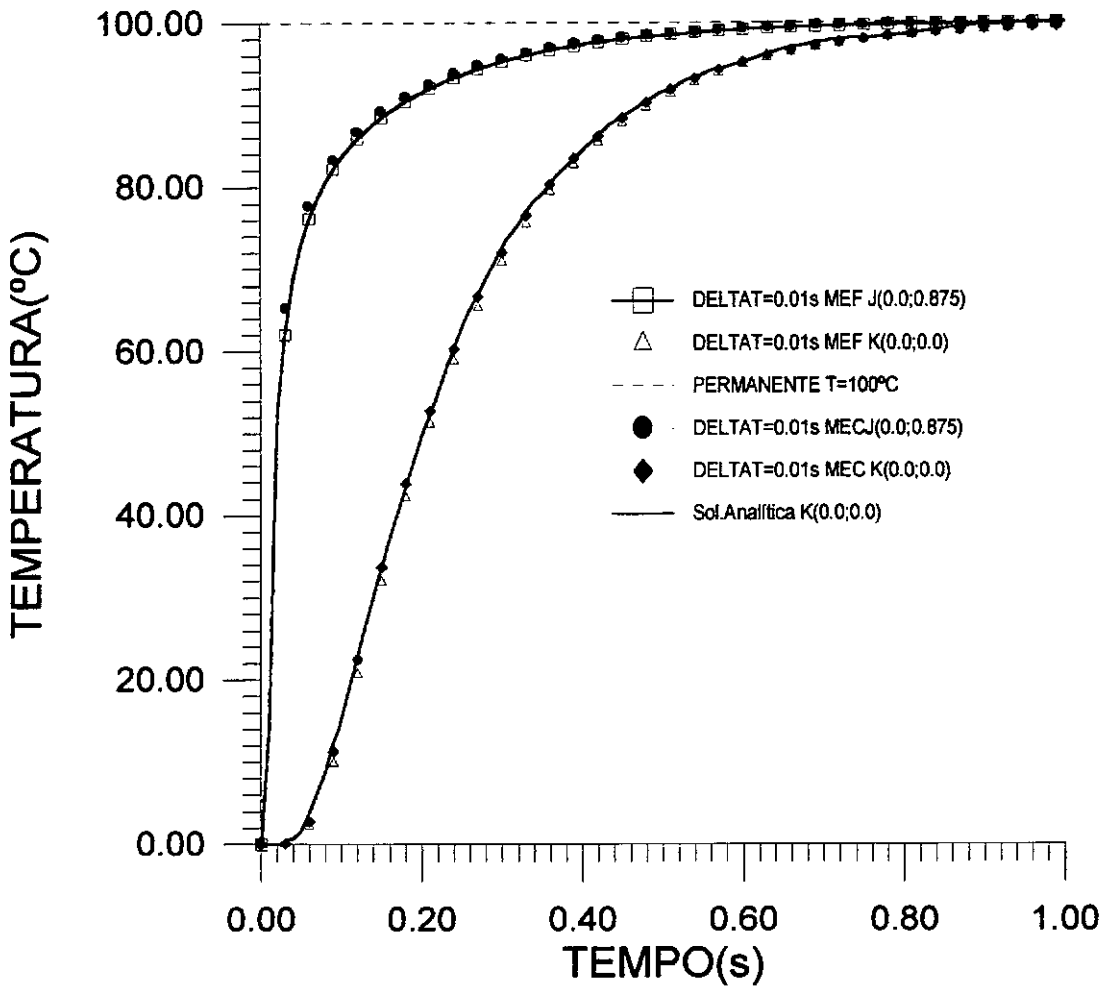


Figura 3.41 Comparação do M.E.F. e M.E.C.(24 elementos) para os pontos J(0,0;0,875) e K(0,0;0,0) sobre o domínio da fig. 3.39 para $\Delta t = 0,01s$, referente ao caso I.

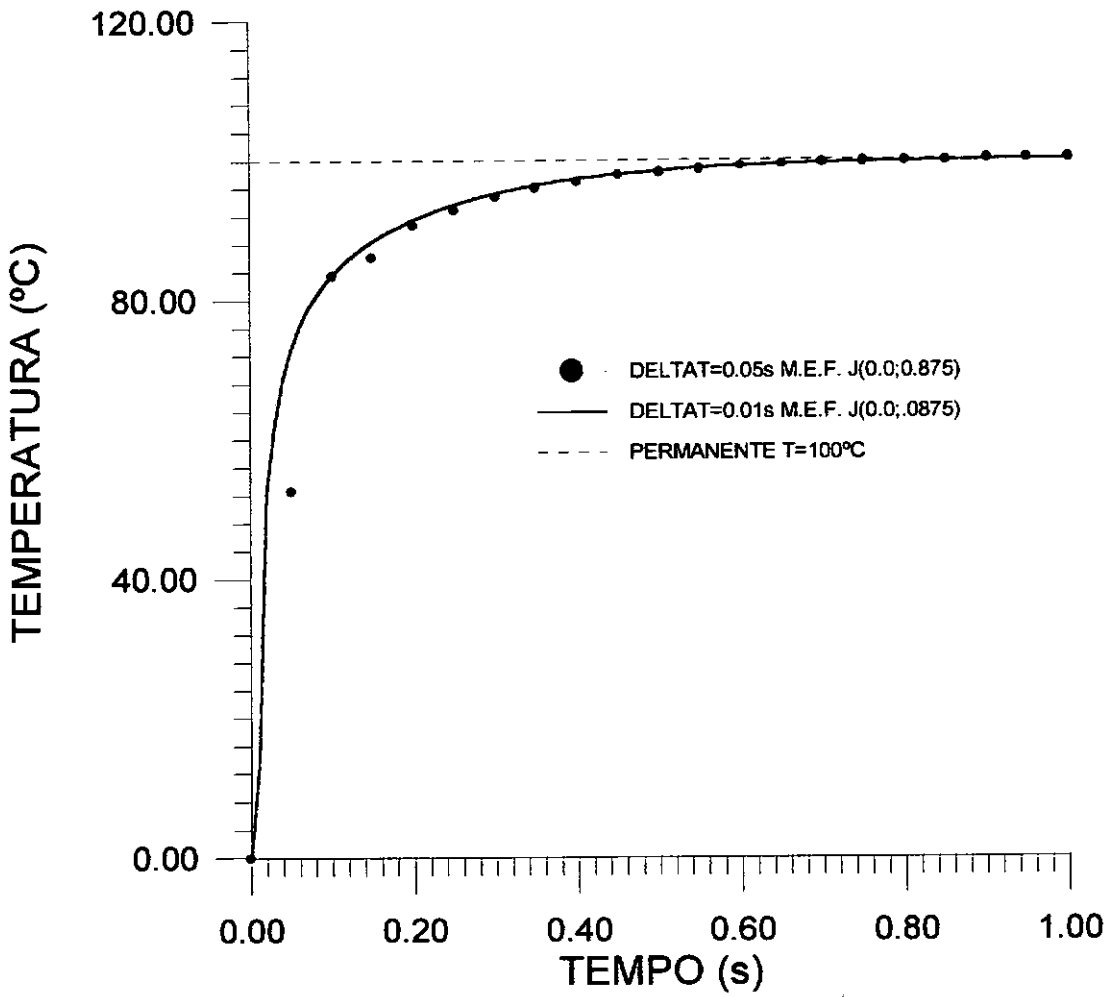


Figura 3.42 Variação de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para o ponto $J(0,0;0.875)$ sobre o domínio discretizado da fig. 3.39, pelo Método dos Elementos Finitos para a situação $t_0=t_1=0,0s$.

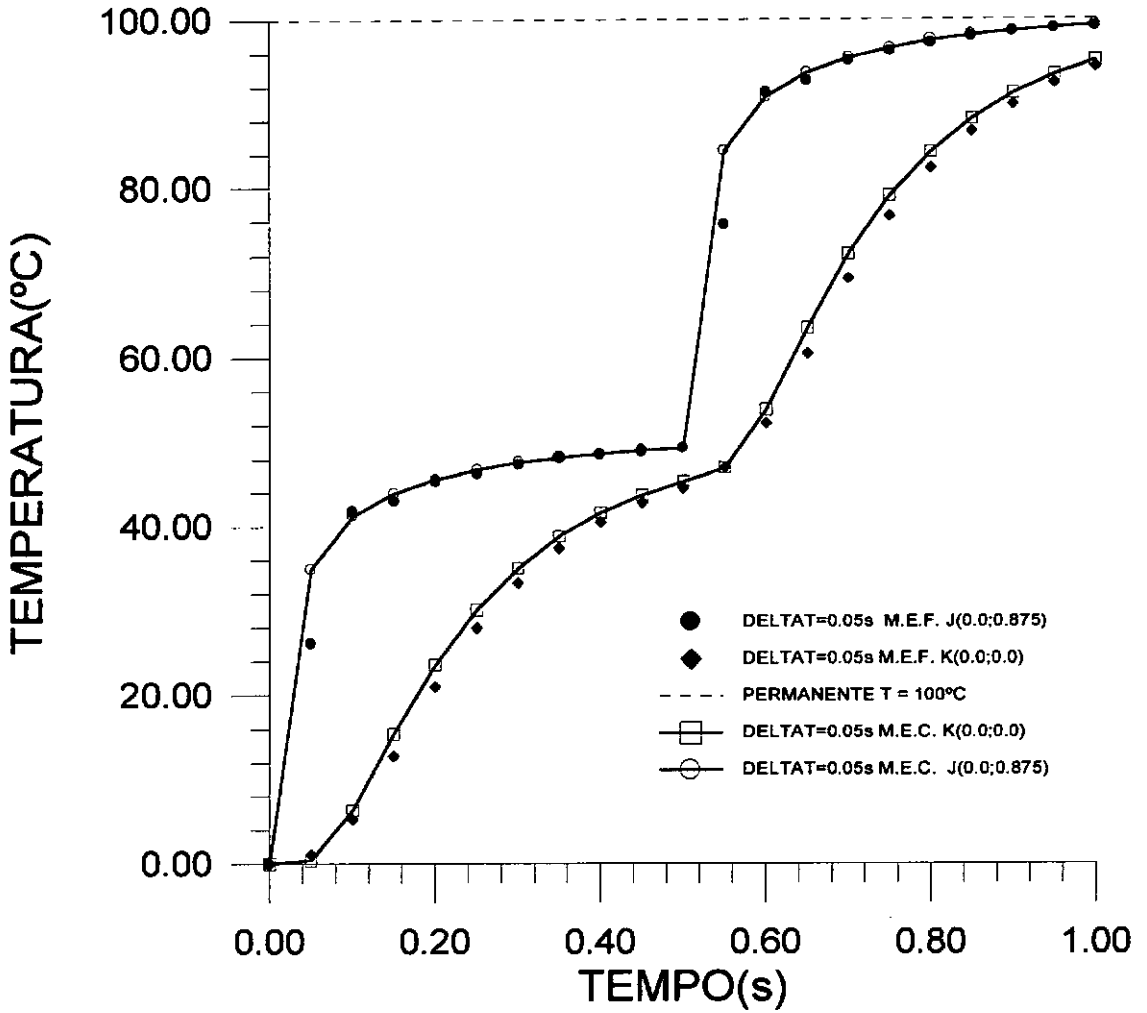


Figura 3.43 Comparação do M.E.F. e do M.E.C.(24 elementos) para a distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para os pontos J(0,0;0,875) e K(0,0;0,0) sobre o domínio circular discretizado da figura 3.39, para a situação $t_0=t_1=0,5s$.

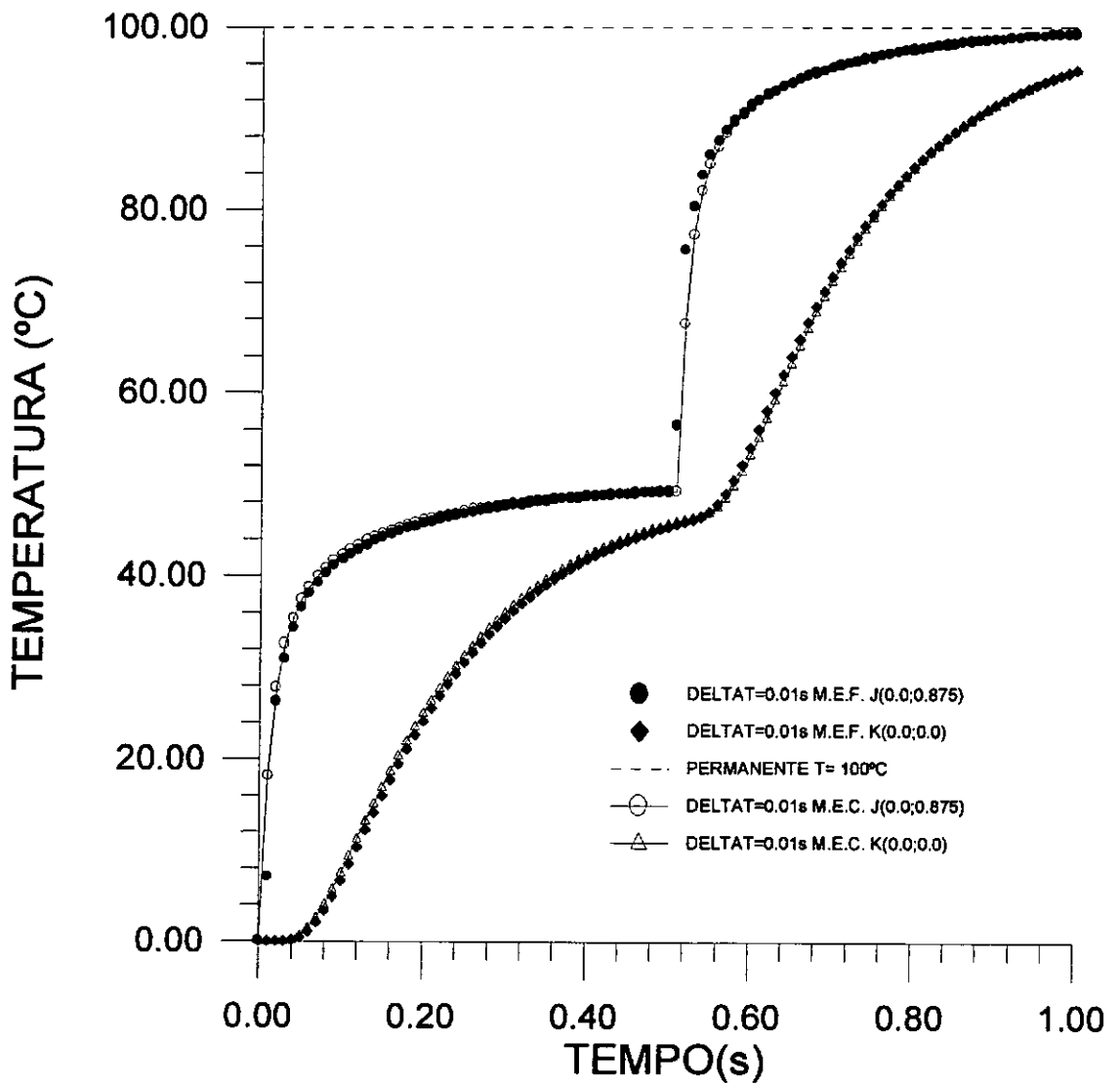


Figura 3.44. Comparação do M.E.F. e M.E.C.(24 elementos) para a distribuição de potenciais de temperaturas ao longo do tempo para os pontos J(0,0;0,875) e K(0,0;0,0) sobre o domínio circular discretizado da fig. 3.39, para a situação $t_0=t_1=0,5s$.

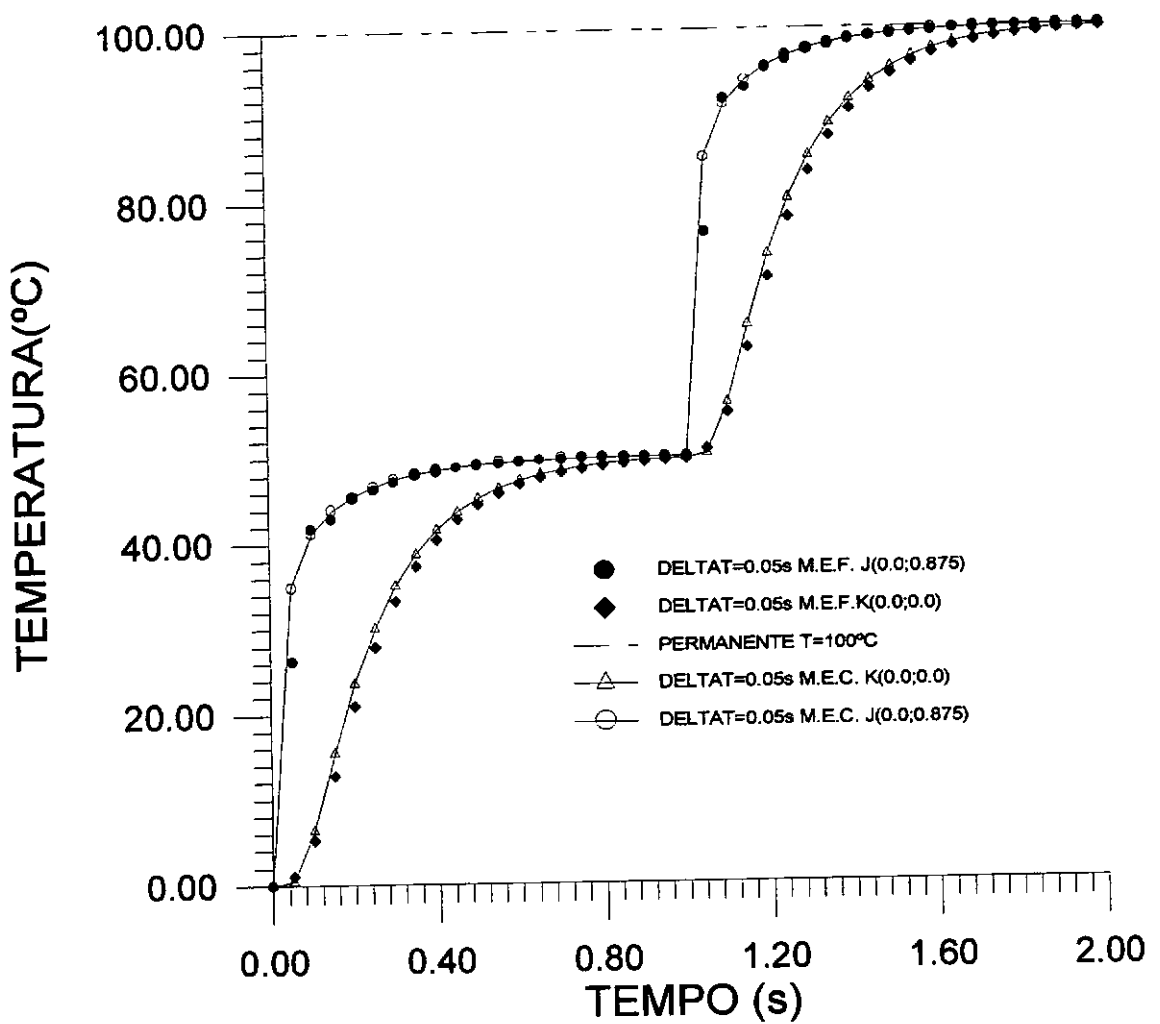


Figura 3.45 Comparação entre o M.E.F. e o M.E.C.(24 elementos) para as distribuições de potenciais ao longo do tempo para os pontos J(0,0;0,875) e K(0,0;0,0) sobre o domínio discretizado da fig. 3.39, para a situação $t_0=0,0s$ e $t_1=1,0s$.

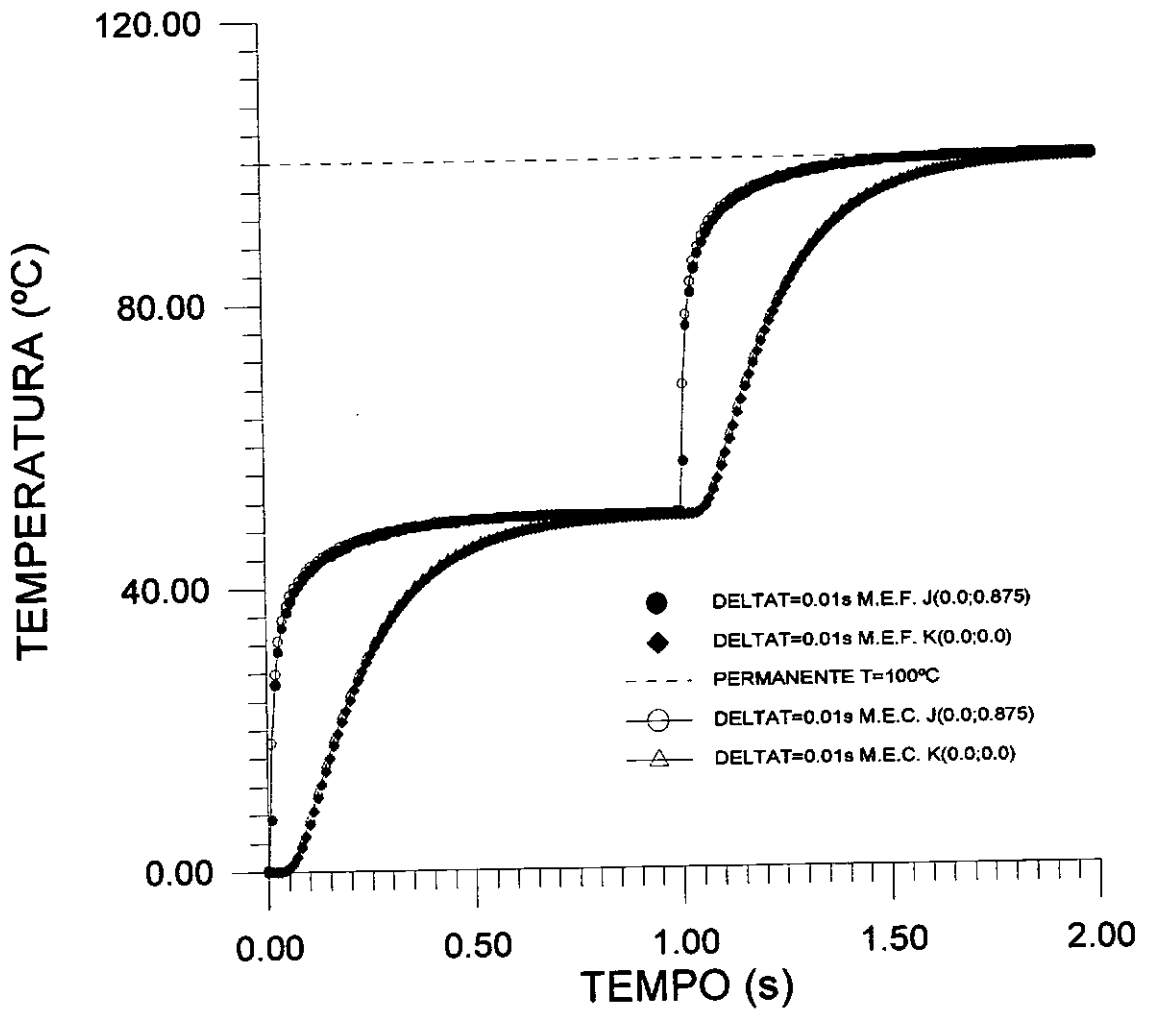


Figura 3.46. Comparação entre o M.E.F e M.E.C.(24 elementos) para as distribuições de potenciais ao longo do tempo para os pontos J(0,0;0,875) e K(0,0;0,0) sobre o domínio discretizado da fig. 3.39, para a situação $t_0=0,0$ e $t_1=1,0s$.

CAPÍTULO IV - CONCLUSÃO

CAPÍTULO IV - CONCLUSÃO

O trabalho ora desenvolvido teve sua ênfase no emprego do Método dos Elementos Finitos a problemas transientes, estabelecendo comparações com o Método dos Elementos de Contorno.

A implementação computacional do Método dos Elementos finitos exigiu um esquema de discretização do tempo, sendo sua aproximação feita em Diferenças Finitas. O processo de marcha no tempo partiu de um valor de potencial u conhecido num instante inicial $t=t_0$. Valores de u no tempo $t=t_0+\Delta t$ (instante seguinte) são então computados para serem usados como valor inicial para o próximo passo de tempo, e assim sucessivamente.

O Método dos Elementos de contorno utiliza soluções fundamentais dependentes do tempo. O esquema de avanço no tempo parte dos valores de u e p conhecidos, no tempo inicial $t=t_0$, obtidos da solução do Sistema Global em regime permanente. Esses, então, são incorporados ao cálculo das contribuições de u e p dos tempos passado, que por sua vez, são somados ao vetor independente $\{f\}$, gerando um novo sistema de equações, cuja solução fornece os novos valores de u e p no fim do passo de tempo, no tempo $t=t_0+\Delta t$, e assim progressivamente.

Percebemos através da metodologia dos Elementos Finitos a problemas difusivos unidimensionais que a escolha do valor ótimo do parâmetro de peso no tempo θ nem sempre é óbvia do ponto de vista de exatidão, e que a escolha do valor $\theta=1/2$ (Crank-Nicholson) pode produzir oscilações, e por esta razão utiliza-se $\theta=2/3$ que corresponde a aproximação padrão de (Galerkin) o qual é considerado suavizado.

Ao postularmos um valor do parâmetro de peso no tempo $\theta < 1/2$, podemos flexionar o intervalo de tempo Δt e encontrar seu valor máximo apropriado abaixo do qual o esquema é condicionalmente estável. No processo inverso, arbitrando um valor de Δt e variando o parâmetro θ , é possível encontrar um valor para o qual o esquema é incondicionalmente estável.

A iniciativa de utilizar como condição inicial nos pontos pertencentes ao contorno os valores prescritos para eles, conduziu a resultados não muito diferentes dos obtidos considerando nula a condição inicial tanto para os pontos do domínio como para os pontos do contorno, embora um pouco mais afastadas da solução analítica, conforme podemos ver através das figuras 3.19 e 3.21 contidas na seção III.III.a.

Quando da utilização de malhas simétricas, o modelo conduz a respostas de potenciais de temperaturas com disposição geométrica também simétrica.

Embora os Métodos dos Elementos Finitos e de contorno tenham formulações completamente diferentes, suas aplicações a problemas transientes descritos neste trabalho, através dos exemplos encontrados na literatura, mostraram um boa concordância.

Procuramos mostrar no apêndice a listagem do programa implementado pelo Método dos Elementos Finitos, tornando acessível a reprodução dos resultados gerados nesta tese e que pode ser usado para complementações futuras conforme sugestões a saber:

Sugestões para trabalhos futuros:

- Inclusão de termos advectivos
- Inclusão de Condições de Contorno não lineares.
- Inclusão de propriedades físicas dependentes da temperatura/concentração.
- Junção do MEF com MEC para problemas de difusão e difusão-advectação
- Inclusão de elementos lineares e quadráticos.
- Aplicações em exemplos de difusão de poluentes em Recursos Hídricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- AZEVEDO, J.P.S., 1985, *Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- BOYCE, W.E. e DIPRIMA, R.C., 1979, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- BREBBIA, C.A., 1978, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., 1984, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
- BREBBIA, C.A. and DOMINGUEZ, J., 1989, *Boundary Elements: an Introductory Course*, Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southampton.
- CABRAL, J.J.S, 1996, *Simulação Computacional de Água Subterrânea utilizando Métodos de Elementos de Contorno*, UFPE-Recife-PE
- CARSLAW, H.S. & JAEGER, J. C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, London.
- CIRILO, J.A. e CABRAL, J.P., 1989, "Modelos de Água Subterrânea". Em: Silva, R. C., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos I*, capítulo 5, Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- EFFREN, T.C., 1997, *Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno para Solução de Problemas de Difusão*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- KREYSZIG, E., 1979, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York.
- LOEFFLER NETO, C. F., 1988, *Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MANSUR, W. J., PRODANOFF, J.H.A. e AZEVEDO, J.P.S., 1996, "Métodos dos Elementos de Contorno". Em: Silva, R.V., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos II*, 2 ed., capítulo 1, Porto Alegre, Brasil, Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

- MOURA, J.G., 1997, *Métodos Numéricos para Solução de Modelos Simplificados de Circulação em Corpos d'água em Regime Permanente*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SMITH, I. M., 1982, *Programming the Finite Element Method with application to Geomechanics*, Great Britain, John Wiley & Sons.
- WROBEL, L. C., 1989, "Introdução aos Métodos Numéricos" . Em: Silva, R. C, *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, capítulo 1, Rio de Janeiro, Brasil, Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- ZIENKIEWICZ, O.C. and TAYLOR, R.L., 1991, *The Finite Element Method* , 4 ed., United King , Mc Graw Hill International Editions.

APÊNDICE – LISTAGEM DO PROGRAMA AGUIA10.FOR PARA SOLUÇÃO
DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO TRANSIENTE PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS

PROGRAM TRANSIENTE

```

C*****
C
C          PROGRAMA TRANSIENTE
C    (Tese de M.Sc. Defesa em Fev/99)
C
C*****
C
C  PROGRAMA PARA RESOLUCAO DE PROBLEMAS TRANSIENTES
C    EQUACAO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL
C
C          
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}$$

C
C  RESOLUCAO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
C*****
C
C  MESTRANDO: JULIO CESAR DE JESUS
C  ORIENTADOR: JOSÉ PAULO S. AZEVEDO, Ph.d
C
C*****

```

C LISTA DE VARIÁVEIS

```

C  A = ÁREA DO ELEMENTO
C  A1,A2,A3,B1,B2,B3 = COEFICIENTES P/CÁLCULO DA MATRIZ K
C  B = FONTE
C  C = CALOR ESPECÍFICO
C  CE = CONDIÇÕES ESSENCIAIS
C  CN = CONDICOES NATURAIS
C  COM = VETOR COM COMPRIMENTOS DOS ELEMENTOS
C  DELTAT = PASSO DE TEMPO
C  DIFKH = MATRIZ DIFERENÇA ENTRE AS MATRIZES K e H
C  ECARGA = VETOR COM ELEMENTOS QUE TÊM CARGA HH
C  F = VETOR DE TERMOS INDEPENDENTES DO SISTEMA
C  T*{U}to+deltat = R*{U}to +(1-TETA)*{Pf}to +
C  TETA*{Pf}to+deltat - PB = F

```

C $T*\{U\}_{to+deltat} = R*\{U\}_{to} +(1-TETA)*\{Pf\}_{to} +$
 C $TETA* \{ Pf\}_{to+deltat} = F$
 C HH = COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA
 C H11..H22 = COEFICIENTES DAS MATRIZES H DOS ELEMENTOS
 C I = CONTADOR
 C INC = MATRIZ DE CONECTIVIDADES
 C K = MATRIZ GLOBAL
 C K11..K22 = COEFICIENTES DAS MATRIZ
 C KX, KY = CONDUTIVIDADES NAS DIREÇÕES X e Y
 C NE = NUMERO DE ELEMENTOS
 C NN = NUMERO DE NOS
 C NNCE = NUMERO DE NOS COM CONDICAÇÃO ESSENCIAL
 C NLCN = NUMERO DE LADOS COM CONDICAÇÃO NATURAL
 C NLCH = NUMERO DE LADOS COM CARGA HH
 C NOI, NOF = NO INICIAL E FINAL DO LADO COM C.C. NATURAL
 C NEFD = NUMERO DE ELEMENTOS COM FONTES DISTRIBUIDAS
 C NLCH = NUMERO DE LADOS COM CARGA HH
 C NTEMPO = NÚMERO TOTAL DE PASSOS DE TEMPO
 C PB = VETOR COM CONTRIBUIÇÃO DE FONTES
 C S11..S22 = COEFICIENTES DAS MATRIZES S DOS ELEMENTOS
 C S = MATRIZ GLOBAL
 C TETA = NÍVEL DE TEMPO ONDE SE FAZ A COLOCAÇÃO
 C U = POTENCIAL PRESCRITO NO TEMPO INICIAL
 C V = VELOCIDADE
 C X = COORDENADAS X DOS NÓS
 C XLENGN = COMPRIMENTO DO LADO C/ CONDIÇÃO NATURAL
 C Y = COORDENADA Y DOS NÓS

REAL K(120,120),K11,K12,K13,K21,K22,K23,K31,K32,K33

REAL H11,H12,H13,H21,H22,H23,H31,H32,H33

REAL S11,S12,S13,S21,S22,S23,S31,S32,S33

REAL XX(120), YY(120),KX(120),KY(120),S(120,120),H(120,120),

```

#T(120,120),MAT(120)

REAL X(120),Y(120),R(120,120),B(120),PB(120),CE(120,201),

#V(120),DIR(120),DELTAT

INTEGER INC(120,3),INDX(120),NCE(120),NN,NTEMPO,IPOINTER

INTEGER NOI(120),NOF(120),ECARGA(120),ILINHA,KID,JTEMPO

REAL CN(120,201),A1(120),A2(120),A3(120),RO(120),C(120),

# U(120),PFT1(120),PFT2(120),XLENG(120),TK(120,120),HH(120,3)

REAL B1(120),B2(120),B3(120),A(120),VX(120),VY(120),

#DIFKH (120,120),F(120)

```

```

NMAX=120

```

```

    PI=2*ASIN(1.)

```

```

C  ABERTURA DOS ARQUIVOS DE TRABALHO

```

```

C  OPEN (1,FILE='PETKOVIC1.DAT',FORM='FORMATTED',STATUS='OLD')

```

```

C  LEITURA DAS VARIÁVEIS

```

```

    READ(1,'(30X,I3)')NN

```

```

    READ(1,'(30X,I3)')NE

```

```

    READ(1,'(30X,I3)')NNCE

```

```

    READ(1,'(30X,I3)')NLCN

```

```

    READ(1,'(30X,I3)')NEFD

```

```

    READ(1,'(30X,I3)')NECH

```

```

    READ(1,'(30X,I4)')NTEMPO

```

```

    READ(1,'(30X,F7.4)')TETA

```

```

    READ(1,'(30X,F7.4)')DELTAT

```

```

DO 4 I=1,NN

```

```

        READ(1,'(30X,2F7.4)') X(I),Y(I)
4  CONTINUE
    DO 5 I=1,NE
        READ(1,'(30X,F4.1)') B(I)
5  CONTINUE
    DO 6 I=1,NE
        READ(1,'(30X,2F4.1)')KX(I),KY(I)
6  CONTINUE
    DO 7 I=1,NE
        READ(1,'(30X,3I3)')INC(I,1),INC(I,2),INC(I,3)
7  CONTINUE
    DO 8 I=1,NE
        READ(1,'(30X,2F4.1)') RO(I), C(I)
8  CONTINUE
    DO 11 I=1,NECH
        READ(1,'(30X,I3,3F4.1)')ECARGA(I),HH(I,1),HH(I,2),HH(I,3)
11 CONTINUE
C  LEITURA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS E NATURAIS
    IF ((NTEMPO/36.).GT.1) THEN
C  CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS
        DO 84 I= 1,NNCE
            IPOINTER=0
            KID=INT(NTEMPO/36.)
            DO 82 ILINHA = 1,KID
                READ(1,'(30X,I3,36F6.1)')

```

```

#      NCE(I),(MAT(J),J=1,36)
      DO 81 J=1,36
          CE(I,J+IPointer)=MAT(J)
81     CONTINUE
          IPointer = IPointer+36
82     CONTINUE
          L = MOD(NTEMPO,36)
      READ (1,'(30X,I3,5F6.1)') NCE(I),(MAT(J),J=1,L)
          DO 83 J=1,L
              CE(I,J+IPointer)=MAT(J)
83         CONTINUE
84     CONTINUE
C     CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS
      DO 89 I= 1,NLCN
          IPointer=0
          KID=INT(NTEMPO/36)
      DO 87 ILINHA = 1,KID
          READ(1,'(27X,2I3,36F6.1)')
#      NOI(I),NOF(I),(MAT(J),J=1,36)
          DO 86 J=1,36
              CN(I,J+IPointer)=MAT(J)
86     CONTINUE
          IPointer = IPointer+36
87     CONTINUE
          L = MOD(NTEMPO,36)

```

```

      READ (1,'(27X,2I3,5F6.1)') NOI(I),NOF(I),(MAT(J),J=1,L)
      DO 88 J=1,L
          CN(I,J+IPointer)=MAT(J)
88          CONTINUE
89 CONTINUE
      ELSE
C   CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS
      READ(1,'(30X,I3,21F6.1)')(NCE(I),(CE(I,J),J=1,NTEMPO),I=1,NNCE)
C   CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS
      READ(1,'(27X,2I3,21F6.1)')
#   (NOI(I),NOF(I),(CN(I,J),J=1,NTEMPO),I=1,NLCN)
      END IF
C   CONDIÇÕES INICIAIS
      DO 13 I=1,NN
          READ(1,'(30X,F9.4)')U(I)
13 CONTINUE
      CLOSE(1)C
C   MONTAGEM DA MATRIZ K DE COEFICIENTES Kij
C   E DO VETOR DE CONTRIBUIÇÃO DE FONTESC
C   ZERANDO AS MATRIZES K, H, S, PB, DIFKH ,T e R
      DO 20 J=1,NN
          DO 10 I=1,NN
              K(I,J)=0
              H(I,J)=0
              S(I,J)=0
          
```

PB(J)=0

DIFKH(I,J)=0

T(I,J)=0

R(I,J)=0

10 CONTINUE

20 CONTINUE

DO 30 I=1,NE

NO1=INC(I,1)

NO2=INC(I,2)

NO3=INC(I,3)

A1(I)=X(NO3)-X(NO2)

A2(I)=X(NO1)-X(NO3)

A3(I)=X(NO2)-X(NO1)

B1(I)=Y(NO2)-Y(NO3)

B2(I)=Y(NO3)-Y(NO1)

B3(I)=Y(NO1)-Y(NO2)

A(I)=ABS(.5*(X(NO1)*(Y(NO2)-Y(NO3))+X(NO2)*(Y(NO3)-Y(NO1))

+X(NO3)*(Y(NO1)-Y(NO2))))

C CALCULO DA MATRIZ DO ELEMENTO

K11=.25/A(I)*(KX(I)*B1(I)**2+KY(I)*A1(I)**2)

K12=.25/A(I)*(KX(I)*B1(I)*B2(I)+KY(I)*A1(I)*A2(I))

K13=.25/A(I)*(KX(I)*B1(I)*B3(I)+KY(I)*A1(I)*A3(I))

K22=.25/A(I)*(KX(I)*B2(I)**2+KY(I)*A2(I)**2)

K23=.25/A(I)*(KX(I)*B2(I)*B3(I)+KY(I)*A2(I)*A3(I))

K33=.25/A(I)*(KX(I)*B3(I)**2+KY(I)*A3(I)**2)

$$K21=K12$$

$$K31=K13$$

$$K32=K23$$

C CÁLCULO PARCIAL DA MATRIZ GLOBAL DIFKH

$$DIFKH(NO1,NO1)=DIFKH(NO1,NO1)+K11$$

$$DIFKH(NO1,NO2)=DIFKH(NO1,NO2)+K12$$

$$DIFKH(NO1,NO3)=DIFKH(NO1,NO3)+K13$$

$$DIFKH(NO2,NO1)=DIFKH(NO2,NO1)+K21$$

$$DIFKH(NO2,NO2)=DIFKH(NO2,NO2)+K22$$

$$DIFKH(NO2,NO3)=DIFKH(NO2,NO3)+K23$$

$$DIFKH(NO3,NO1)=DIFKH(NO3,NO1)+K31$$

$$DIFKH(NO3,NO2)=DIFKH(NO3,NO2)+K32$$

$$DIFKH(NO3,NO3)=DIFKH(NO3,NO3)+K33$$

C VETOR PB DE CONTRIBUIÇÃO DE FONTES

$$FNODAL=B(I)*A(I)/3.$$

$$PB(NO1)=PB(NO1)+FNODAL$$

$$PB(NO2)=PB(NO2)+FNODAL$$

$$PB(NO3)=PB(NO3)+FNODAL$$

30 CONTINUE

C CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS-CÁLCULO COMPRIMENTO DOS LADOS

DO 40 I=1,NLCN

$$X1=X(NOI(I))$$

$$X2=X(NOF(I))$$

$$Y1=Y(NOI(I))$$

```

        Y2=Y(NOF(I))

        XLENGN(I)=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2)

40    CONTINUE

C     CÁLCULO DO VETOR CONDIÇÃO DE CONTORNO NATURAL

C     NA PARTIDA "PFT1"

        DO 200 I=1,NN

            PFT1(I)=0

200    CONTINUE

        DO 300 I=1,NLCN

            PFT1(NOI(I))=PFT1(NOI(I))+.5*CN(L,1)*XLENGN(I)

            PFT1(NOF(I))=PFT1(NOF(I))+.5*CN(L,1)*XLENGN(I)

300    CONTINUE

C     CALCULO DA MATRIZ H

        IF (NECH.EQ.0) THEN

            GO TO 79

        ELSE

            DO 41 I=1,NECH

                NO1=INC(ECARGA(I),1)

                NO2=INC(ECARGA(I),2)

                NO3=INC(ECARGA(I),3)

                X1=X(NO1)

                X2=X(NO2)

                X3=X(NO3)

                Y1=Y(NO1)

                Y2=Y(NO2)

```

$$Y3=Y(NO3)$$

C CALCULANDO OS COMPRIMENTOS DOS LADOS

$$COMPR1=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2)$$

$$COMPR2=SQRT((X3-X2)**2+(Y3-Y2)**2)$$

$$COMPR3=SQRT((X1-X3)**2+(Y1-Y3)**2)$$

$$H11=(HH(I,2)*COMPR2+HH(I,3)*COMPR3)/3.$$

$$H12=(HH(I,3)*COMPR3)/6.$$

$$H13=(HH(I,2)*COMPR2)/6.$$

$$H22=(HH(I,3)*COMPR3+HH(I,1)*COMPR1)/3.$$

$$H23=(HH(I,1)*COMPR1)/6.$$

$$H33=(HH(I,1)*COMPR1+HH(I,2)*COMPR2)/3.$$

$$H21=H12$$

$$H31=H13$$

$$H32=H23$$

C CÁLCULO FINAL DA MATRIZ GLOBAL DIFKH

$$DIFKH(NO1,NO1)=DIFKH(NO1,NO1)-H11$$

$$DIFKH(NO1,NO2)=DIFKH(NO1,NO2)-H12$$

$$DIFKH(NO1,NO3)=DIFKH(NO1,NO3)-H13$$

$$DIFKH(NO2,NO1)=DIFKH(NO2,NO1)-H21$$

$$DIFKH(NO2,NO2)=DIFKH(NO2,NO2)-H22$$

$$DIFKH(NO2,NO3)=DIFKH(NO2,NO3)-H23$$

$$DIFKH(NO3,NO1)=DIFKH(NO3,NO1)-H31$$

$$DIFKH(NO3,NO2)=DIFKH(NO3,NO2)-H32$$

$$DIFKH(NO3,NO3)=DIFKH(NO3,NO3)-H33$$

41 CONTINUE

END IF

C CÁLCULO DA MATRIZ S

```
79 DO 42 I=1,NE  
    NO1=INC(I,1)  
    NO2=INC(I,2)  
    NO3=INC(I,3)  
    S11=RO(I)*C(I)*A(I)/6.  
    S12=RO(I)*C(I)*A(I)/12.  
    S22=S11  
    S33=S11  
    S13=S12  
    S31=S13  
    S21=S12  
    S23=S12  
    S32=S23  
    S(NO1,NO1)=S(NO1,NO1)+S11  
    S(NO1,NO2)=S(NO1,NO2)+S12  
    S(NO1,NO3)=S(NO1,NO3)+S13  
    S(NO2,NO1)=S(NO2,NO1)+S21  
    S(NO2,NO2)=S(NO2,NO2)+S22  
    S(NO2,NO3)=S(NO2,NO3)+S23  
    S(NO3,NO1)=S(NO3,NO1)+S31  
    S(NO3,NO2)=S(NO3,NO2)+S32  
    S(NO3,NO3)=S(NO3,NO3)+S33
```

42 CONTINUE

```

C   MONTANDO A MATRIZ GLOBAL DO SISTEMA GLOBAL
C   CALCULO DAS MATRIZES T e R GLOBAL DO SISTEMA
C    $T\{U\}_{to+\Delta t} = R\{U\}_{to} + (1-TETA)*\{Pf\}_{to} + TETA*\{Pf\}_{to+\Delta t} - PB$ 
C    $T = (S/DELAT + TETA*DIFKH)$ 
DO 44 I=1,NN
    DO 43 J=1,NN
         $T(I,J) = T(I,J) + S(I,J)/DELAT + TETA*DIFKH(I,J)$ 
C   CÁLCULO DA MATRIZ  $R = 1/DELAT*S - (1-TETA)*DIFKH$ 
         $R(I,J) = R(I,J) + S(I,J)/DELAT - (1-TETA)*DIFKH(I,J)$ 
C   CÁLCULO DO VETOR PFT2 "CONDIÇÃO DE CONTORNO NATURAL
C           NO NÍVEL DE TEMPO POSTERIOR"
43   CONTINUE
44   CONTINUE
DO 900 J=2,NTEMPO
    DO 350 IW=1,NN
        F(IW)=0
350   CONTINUE
        DO 400 KJ=1,NN
            PFT2(KJ)=0
400   CONTINUE
            DO 500 I=1,NLCN
                 $PFT2(NOI(I)) = PFT2(NOI(I)) + .5*CN(I,J)*XLENGN(I)$ 
                 $PFT2(NOF(I)) = PFT2(NOF(I)) + .5*CN(I,J)*XLENGN(I)$ 
500   CONTINUE
        CALL MULT_MATRIZ (R,U,NN,F)

```

```

OPEN (6,FILE='SAIDA.DAT', STATUS='UNKNOWN')

WRITE (6,24)

24  FORMAT (33X,'J',2X,'F(I)SUBR'/)

WRITE (6,'(30X,I4,F10.4/')(J,F(I),I=1,NN)

DO 600 JB=1,NN

F(JB)=F(JB)+(1-TETA)*PFT1(JB)+ TETA*PFT2(JB)-PB(JB)

600  CONTINUE

DO 700 IS=1,NN

    DO 650 JS=1,NN

        TK(IS,JS)=T(IS,JS)

650  CONTINUE

700  CONTINUE

C  SISTEMA É ENTÃO REDUZIDO a  $T\{U\}_{to+\delta t} = F$ 

C  INCORPORANDO AS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS

    DO 60 KA=1,NNCE

        DO 50 LA=1,NN

            TK(NCE(KA),LA)=0

50  CONTINUE

            TK(NCE(KA),NCE(KA))=1

            F(NCE(KA))=CE(KA,J)

60  CONTINUE

CALL ludcmp (TK,NN,NMAX,INDX,D)

CALL lubksb (TK,NN,NMAX,INDX,F)

WRITE (6,25)

25  FORMAT (3X,'J',2X,'F(I)SOL',25X,'MATRIZ T = '/')

```

```

WRITE (6,'(I4,70F10.4/')(J,F(I),(T(I,JT),JT=1,NN),I=1,NN)
WRITE (6,26)
26  FORMAT (3X,'J',2X,'F(I)SOL',25X,'MATRIZ R = '/')
WRITE (6,'(I4,70F10.4/')(J,F(I),(R(I,JT),JT=1,NN),I=1,NN)
DO 800 IP=1,NN
U(IP)=F(IP)
PFT1(IP)=PFT2(IP)
800  CONTINUE
OPEN (8, FILE='XOQTEM.DAT',STATUS='UNKNOWN')
JTEMPO = J-1
WRITE(8,'(5X,I3,7X,2F10.4)') JTEMPO,F(10),F(17)
900  CONTINUE
CLOSE (6,STATUS='KEEP')
DO 70 I=1,NE
NO1=INC(I,1)
NO2=INC(I,2)
NO3=INC(I,3)
VX(I)=-((B1(I)*F(NO1)+B2(I)*F(NO2)+B3(I)*F(NO3)))/(2.*A(I))
VY(I)=-((A1(I)*F(NO1)+A2(I)*F(NO2)+A3(I)*F(NO3)))/(2.*A(I))
XX(I)=(X(NO1)+X(NO2)+X(NO3))/3
YY(I)=(Y(NO1)+Y(NO2)+Y(NO3))/3
V(I)=SQRT(VX(I)**2+VY(I)**2)
IF (ABS(VX(I)).GT.0.00000000001) THEN
DIR(I)=ATAN(ABS(VY(I))/ABS(VX(I)))*180./PI
IF ((VY(I).GT.0).AND.(VX(I).LT.0)) THEN

```

```

        DIR(I)=180-DIR(I)

    END IF

    IF ((VY(I).LE.0).AND.(VX(I).LT.0)) THEN

        DIR(I)=180+DIR(I)

    END IF

    IF ((VY(I).LE.0).AND.(VX(I).GT.0)) THEN

        DIR(I)=360-DIR(I)

    END IF

ELSE

    IF (VY(I).GE.0)THEN

        DIR(I)=90

    ELSE

        DIR(I)=270

    END IF

    END IF

70 CONTINUE

    OPEN
(7,FILE='SAIDA2.DAT',FORM='FORMATTED',STATUS='unknown')

    WRITE(7,'(7F10.4)')(X(I),Y(I),F(I),XX(I),YY(I),V(I),DIR(I),I=1,NN)

    CLOSE(7)

    STOP

    END

SUBROUTINE ludcmp(a,n,np,indx,d)

INTEGER n,np,indx(n),NMAX

REAL d,a(np,np),TINY

PARAMETER (NMAX=500,TINY=1.0e-20)

```

```

INTEGER i,imax,j,k
REAL aamax,dum,sum,vv(NMAX)

d=1.

do 12 i=1,n
    aamax=0.
    do 11 j=1,n
        if (abs(a(i,j)).gt.aamax) aamax=abs(a(i,j))
11    continue
        if (aamax.eq.0.) pause 'singular matrix in ludcmp'
        vv(i)=1./aamax
12    continue
    do 19 j=1,n
        do 14 i=1,j-1
            sum=a(i,j)
            do 13 k=1,i-1
                sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
13        continue
            a(i,j)=sum
14    continue
        aamax=0.
        do 16 i=j,n
            sum=a(i,j)
            do 15 k=1,j-1
                sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
15    continue

```

```
a(i,j)=sum
dum=vv(i)*abs(sum)
if (dum.ge.aamax) then
  imax=i
  aamax=dum
endif
```

16 continue

```
if (j.ne.imax)then
  do 17 k=1,n
    dum=a(imax,k)
    a(imax,k)=a(j,k)
    a(j,k)=dum
```

17 continue

```
d=-d
vv(imax)=vv(j)
endif
indx(j)=imax
if(a(j,j).eq.0.)a(j,j)=TINY
if(j.ne.n)then
  dum=1./a(j,j)
  do 18 i=j+1,n
    a(i,j)=a(i,j)*dum
```

18 continue

```
endif
```

19 continue

return

END

SUBROUTINE lubksb(a,n,np,indx,b)

INTEGER n,np,indx(n)

REAL a(np,np),b(n)

INTEGER i,ii,j,ll

REAL sum

ii=0

do 12 i=1,n

ll=indx(i)

sum=b(ll)

b(ll)=b(i)

if (ii.ne.0)then

do 11 j=ii,i-1

sum=sum-a(i,j)*b(j)

11 continue

else if (sum.ne.0.) then

ii=i

end if

b(i)=sum

12 continue

do 14 i=n,1,-1

sum=b(i)

do 13 j=i+1,n

sum=sum-a(i,j)*b(j)

13 continue

$b(i) = \text{sum}/a(i,i)$

14 continue

return

END

SUBROUTINE MULT_MATRIZ (M,Z,NN,F)

REAL M(120,120),Z(120),F(120)

DO 46 I=1,NN

 DO 45 J=1,NN

 F(I)= 0

45 CONTINUE

46 CONTINUE

DO 48 I=1,NN

 DO 47 J=1,NN

$F(I) = F(I) + M(I,J) * Z(J)$

47 CONTINUE

48 CONTINUE

RETURN

END