ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM LAJES NERVURADAS DE PISO EM CONCRETO ARMADO

Raimundo Pereira de Vasconcelos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUESITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D.
(Presidente)

Carlos Magluta, D.Sc.

Michèle Schubert Pfeil, D.Sc.

Vicente Custódio Moreira de Souza, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 1998

VASCONCELOS, RAIMUNDO PEREIRA DE

Atenuação de vibrações em laje nervurada de piso em concreto armado [Rio de Janeiro] 1998

XXI, 181 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1998)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Absorsores de Vibração 2. Análise Dinâmica
3. Estruturas Civis

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais, Raimundo e Maria.

À minha esposa Elisete pela sua dedicação e carinho, e aos meus dois filhos Fabíola e Rodrigo.

Agradecimentos:

Ao Ronaldo Batista, pela orientação, paciência, respeito e apoio dedicados em todos os momentos,

À CAPES pelo apoio financeiro,

A todos os colegas da COPPE,

A Henrique Frederico Bucher, por sua amizade e apoio durante todo o curso.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM LAJES NERVURADAS DE PISO EM CONCRETO ARMADO

Raimundo Pereira de Vasconcelos

Fevereiro de 1998

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

Estruturas leves e flexíveis, sob a ação de cargas dinâmicas, podem experimentar níveis de vibrações excessivas que as tornam inseguras ou desconfortáveis para seus usuários. Dentre os tipos mais correntes dessas estruturas, as que mais comumente apresentam problemas devido a vibrações são as lajes de piso destinadas a algum tipo de atividade humana que envolva pulos e/ou dança.

Neste trabalho é apresentado um modelo teórico-numérico e computacional baseado no método dos elementos finitos, desenvolvido para análise de lajes nervuradas e/ou mistas, que permite a introdução de sistemas passivos de redução de vibrações, otimizados segundo uma técnica de programação linear com multi-objetivos. Com este modelo faz-se uma análise de uma laje de piso nervurada de concreto armado com grandes dimensões, destinada a utilização como salão de festas para bailes e shows. A estrutura é submetida a um carregamento gerado por pessoas em movimento sincronizado, tal como pulos ou dança. Um sistema passivo de absorção de vibrações é introduzido para atenuar os efeitos causados pelo nível excessivo de vibração induzida à laje por este tipo de carregamento. Através de resultados numéricos, verifica-se a eficiência desse sistema auxiliar como medida corretiva, de baixo custo e grande simplicidade, para os problemas de vibração em estruturas existentes. Além disso, propõe-se a incorporação de um sistema de absorção de vibrações como elemento de projeto, por se constituir numa boa alternativa para concepção de estruturas mais leves e flexíveis.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

VIBRATION REDUTION IN REINFORCED CONCRETE FLOORS

Raimundo Pereira de Vasconcelos

February/1998

Advisor: Ronaldo Carvalho Batista

Departament: Civil Engineering

Ligth-weight and flexible structures, under action of dynamic loads, can experience excessive vibration levels that render them unsafe and uncomfortable to their users. Among the most current types of these structures the one that is more commonly prone to vibrations problems is a floor slab intended to any kind of human activity involving jumps and dances.

In this work it is presented a theoretical-numerical and computational model, based on the Finite Element Method (MEF), developed to analyse stiffened and/or composite slabs that enable the introdution of a system of tuned vibration absorbers, optimized in accordance with a multiple objective linear programming technique. With this model it is done an analysis of a reinforced concrete stiffened floor slab of great dimensions, subjected to human loading produced by activities like jumping and dancing in syncronized movements. A tuned vibration absorber system is introduced to reduce the effects caused by excessive vibration level. Through numerical results, one verifies that this auxiliary system is in fact effective as a remedial measure of low cost and great simplicity. Moreover, a tuned vibration absorber system is here in proposed to be incorporated as a design component, since it has been shown to be a good alternative for the conception of ligther and more slender structures.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS INICIAIS 7

II.1. SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE 8

II.2. SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE 9

II.3. AMORTECIMENTO PROPORCIONAL 11

II.4. AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL 14

II.5. SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA 16

II.6. PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO 19

CAPÍTULO III -MODELO NUMÉRICO 24

III.1. ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL 24

III.2. ELEMENTO DE PLACA REISSNER-MINDLIN 36

III.3. ELEMENTO DE MEMBRANA 51

III.4. SISTEMA COMPUTACIONAL PEFAV 54

CAPÍTULO IV - CONCEITOS BÁSICOS DE PROJETO 60

IV.1. CARREGAMENTO DINÂMICO 60

IV.2. CRITÉRIOS DE PROJETO 65

IV.2.1. Critérios quanto a Segurança e utilização 66

IV.2.2. Critérios quanto ao conforto 68

CAPÍTULO V - ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS NUMÉRICOS.....77
V.1. LAJE SIMPLESMENTE APOIADA.....78
V.1.1. Solução analítica.....78
V.1.1.1. Carregamento uniformemente distribuído.....78
V.1.1.2. Freqüências naturais de vibração.....82
V.1.2. Modelo Numérico.....83
V.1.3. Análise dos resultados.....84
V.2. LAJE ENRIGECIDA POR VIGAS.....99
V.2.1. Modelagem em grelha equivalente a laje nervurada.....103
V.2.1.1. Modelagem em grelha simples.....104
V.2.1.2. Modelagem em grelha com propriedades da placa ortotrópica.....105
V.2.2. Análise dos resultados.....107
CAPÍTULO VI - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....122
VI.1. INTRODUÇÃO.....122
VI.2. PROJETO DE ACORDO COM A NBR-6118 E NBR-6120.....124
VI.2.1. Verificação quanto aos Critérios de Segurança e Utilização.....127
VI.2.2. Verificação para o Carregamento Humano Dinâmico.....131
VI.2.2.1. Análise da Estrutura Original.....133
VI.2.2.2. Medidas corretivas.....137
VI.2.2.3. Análise da Estrutura Original com absorsores passivos de vibração.....139
VI.2.2.4. Análise da Estrutura com absorsores passivos de vibrações e acréscimo do amortecimento global.....150
VI.3. PROJETO SEGUNDO CRITÉRIOS DINÂMICOS.....156
VI.3.1. PROJETO I.....156
VI.3.2. PROJETO II.....165
CAPÍTULO VII - RESUMO E CONCLUSÕES.....168
BIBLIOGRAFIA.....173
APÊNDICE A - LARGURA EFETIVA DA MESA SEGUNDO A NBR-6118.....177
APÊNDICE B. - EXEMPLO COMPARATIVO PARA ELEMENTO DE MEMBRANA.....179

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura II.1. Representação de um absorsor de vibrações em um trecho de uma laje nervurada.....7

Figura II.2. (a) Sistema estrutural dinâmico com um grau de liberdade, representado por (b) um sistema mecânico equivalente.....8

Figura II.3. (a) Sistema estrutural dinâmico com dois graus de liberdade, representado por (b) um sistema mecânico equivalente.....10

Figura II.4. Nós internos e externos em uma malha de elementos finitos.....17

Figura III.1. Elemento de pórtico espacial.....24

Figura III.2. Orientação dos eixos locais de um elemento de pórtico "i", de comprimento L_i , em relação aos eixos globais da estrutura.....29

Figura III.3. Representação da orientação dos eixos principais de inércia de área em relação aos eixos locais, para duas seções transversais diferentes.....31

Figura III.4. Rotação de eixos para um elemento de pórtico espacial vertical.....32

Figura III.5. Associação entre elementos de placa com elemento de pórtico espacial....34

Figura III.6. Graus de liberdade do elemento de pórtico espacial relativo ao seu eixo e o plano médio da laje.....34

Figura III.7. Elemento de placa com forças e momento atuando na superfície média....37

Figura III.8. Componentes de tensão para um elemento infinitesimal de placa.....38

Figura III.9. Elemento de placa com os sentidos positivos de deslocamentos e rotações.....41

Figura III.10. Elemento isoparamétrico bi-linear.....46

Figura III.11.a. Localização dos pontos de Gauss para elemento quadrilátero, com n = p = 2.....49

Figura III.11.b. Localização dos pontos de Gauss para elemento quadrilátero, com n = p = 1 49
Figura III.12. Elemento de placa com o sentido positivo dos deslocamentos em cada um dos nós 50
Figura III.13. Elemento de placa considerando-se somente o efeito membrana 51
Figura III.14. Organograma do sistema PEFAV 59
Figura IV.1. Sinal característico, no domínio do tempo, da força de excitação gerada por uma pessoa pulando na freqüência de 2.0 Hz 62
Figura IV.2. Sinal característico, no domínio da freqüência, da força de excitação gerada por uma pessoa pulando na freqüência de 2.0 Hz 62
Figura IV.3. Direções do sistema de eixos coordenados definidos pelo ISO 2631 72
Figura IV.4. Curvas de acelerações efetivas para o limite de queda de eficiência, segundo a ISO 2631/1 [32] 73
Figura IV.5. Curva de aceleração vertical perceptível ao ser humano, segundo a ISO 2632/2 [33] 73
Figura V.1. Placa sob ação de um carregamento qualquer $p_z(x,y)$ normal ao seu plano médio 79
Figura V.2.a. Placa discretizada em malha de 4x4, com 25 nós e 16 elementos 84
Figura V.2.b. Elemento típico com quatro nós 84
Figura V.3. Deslocamento no centro de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas 90
Figura V.4. Momento Mx no centro de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas 91
Figura V.5. Momento My no centro de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas 92
Figura V.6. Momento Mxy nos cantos de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas 93
Figura V.7. Esforço cortante Qx nas bordas de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas 94
Figura V.8. Esforço cortante Qy nas bordas de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas 95
Figura V.9. Primeira freqüência de vibração para uma placa simplesmente apoiada considerando diversas malhas 96

Figura V.10. Segunda freqüência de vibração para uma placa simplesmente apoiada considerando diversas malhas....97
Figura V.11. Quinta freqüência de vibração para uma placa simplesmente apoiada considerando diversas malhas....98
Figura V.12.a. Esquema de locação da estrutura analisada no exemplo 02....100
Figura V.12.b. Laje de piso nervurada, exemplo 02....101
Figura V.13. Discretização da laje nervurada do exemplo 02, com malha de 8x8 elementos para cada painel de laje....102
Figura V.14. Ligação típica entre os elementos de laje e pórtico espacial empregado na análise pelo PEFAV e SAP90....102
Figura V.15. Ligação entre os elementos de pórtico e placa levando-se em conta a excentricidade real existente entre ambos....103
Figura V.16. Elementos de pórtico espacial para modelagem em grelha equivalente simples a laje do exemplo 02....105
Figura V.17. Laje modelada como grelha equivalente com propriedades da placa ortotrópica....107
Figura V.18. Deslocamentos verticais ao longo da transversina central....112
Figura V.19. Deslocamentos verticais ao longo da longarina central....113
Figura V.20. Momento fletor ao longo da transversina central....114
Figura V.21. Momento fletor ao longo da longarina central....115
Figura V.22. Deslocamentos verticais ao longo da seção A-A....116
Figura V.23. Rotações na direção "x" ao longo da seção A-A....117
Figura V.24. Rotações na direção "y" ao longo da seção A-A....118
Figura V.25. Momento Mx ao longo da seção A-A....119
Figura V.26. Momento My ao longo da seção A-A....120
Figura V.27. Freqüências de vibração para laje nervurada do exemplo 02....121
Figura VI.1. Fluxograma representativo dos exemplos apresentados no capítulo VI...122
Figura VI.2. Distribuição do carregamento humano para o tipo de ocupação para o qual a laje se destina....123
Figura VI.3a. Armadura relativa ao momento fletor positivo....127
Figura VI.3b. Armadura relativa ao momento fletor negativo....127
Figura VI.4. Formas modais de vibração associadas as três primeiras freqüências da Estrutura Original....134

Figura VI.5.a. Sistema de absorção com um absorsor central.....140
Figura VI.5.b. Sistema de absorção com cinco absorsores de mesma massa.....140
Figura VI.5.c. Sistema de absorção com absorsores periféricos e centrais com 1/10 e 1/20 da massa do sistema respectivamente.....140
Figura VI.6. Deslocamento vertical no ponto central da laje para a estrutura com e sem sistema de absorção, composto por um absorsor central com 5% da massa modal fundamental da estrutura.....149
Figura VI.7.a. Armadura relativa ao momento fletor positivo. Projeto I.....159
Figura VI.7.b. Armadura relativa ao momento fletor negativo. Projeto I.....159
Figura VI.8. Representação da mísula empregada nos apoios a fim de se ter uma inércia maior para o momento de flexão negativo.....159
Figura A.1. Viga central "T" equivalente segundo a NBR-6118 [39].....177
Figura B.1. Elemento estrutural engastado com tensão cisalhante "τ" atuando na extremidade livre 179
Figura B.2. Discretização do elemento, mostrado na figura B.1 empregado no exemplo comparativo.....180

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela IV.1. Faixa de freqüências fundamentais para algumas atividades, e coeficiente de Fourier para os três primeiros harmônicos do carregamento humano [5] 63

Tabela IV.2. Recomendações do CEB de limite inferior para a primeira freqüência natural para os tipos mais comuns de estruturas 63

Tabela IV.3. Faixa de freqüências fundamentais para algumas atividades, e coeficiente de Fourier referente aos três primeiros harmônicos, segundo Batista e Magluta [5] 64

Tabela IV.4. Faixas de valores (usados em diversos países) multiplicativos das acelerações obtidas da curva básica apresentada na figura IV.5 conforme a ISO 2631/2 75

Tabela V.1. Valores teóricos para a placa simplesmente apoiada do exemplo 01 84

Tabela V.2. Freqüências naturais para a placa simplesmente apoiada do exemplo 02 ... 85

Tabela V.3. Resultados da análise estática para a placa simplesmente apoiada considerando-se uma malha de 8x8 elementos 88

Tabela V.4. Valores das dez primeiras freqüências para a placa simplesmente apoiada considerando-se uma malha de 8x8 elementos 89

Tabela VI.1. Freqüências naturais para a estrutura original 133

Tabela VI.2. Valores para carga de pulos 133

Tabela VI.3. Valores para carga de dança 133

Tabela VI.4. Deslocamento e momentos máximos de flexão para a laje nervurada, considerando sistemas de absorção com massa iguais a uma fração da massa modal (MM) 142

Tabela VI.5. Acelerações para a laje nervurada sem e com a introdução de um sistema composto por doze absorsores e de massa igual a 10% da massa modal.....145
Tabela VI.6. Momentos de flexão máximos para a laje nervurada considerando um sistema com doze absorsores de massa total 10% MM.....151
Tabela VI.7. Deslocamentos no centro da laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% MM.....152
Tabela VI.8. Momento de flexão positivo máximo para a laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa modal.....152
Tabela VI.9. Momento de flexão negativo máximo para a laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa modal.....153
Tabela VI.10. Acelerações para a laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa modal, para carga de pulos....154
Tabela VI.11. Acelerações para a laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa modal, para carga de dança....154
Tabela VI.12. Freqüências naturais de vibração da estrutura original. Projeto I com vigas de 0.40 x 0.80 m.....157
Tabela VI.13. Deslocamentos máximos no centro da laje, estrutura original e com sistema de absorção, considerando-se cargas de pulo, projeto I.....161
Tabela VI.14. Momento de flexão positivo máximo, estrutura original e com sistema de absorção, considerando-se cargas de pulo, projeto I.....161
Tabela VI.15. Momento de flexão negativo máximo, estrutura original e com sistema de absorção, considerando-se cargas de pulo, projeto I.....161
Tabela VI.16. Acelerações para a estrutura com e sem sistema de absorção, projeto I, considerando-se cargas de pulos.....163

Tabela VI.17. Acelerações para a estrutura com e sem sistema de absorção, projeto I, considerando-se cargas de dança.....163
Tabela VI.18. Freqüências naturais de vibração da estrutura original. Projeto II com vigas de 0.40 x 1.00 m.....166
Tabela B.1. Valores obtidos para a análise estática e dinâmica do elemento mostrado na figura B.1, empregando-se o PEFAV e de acordo com Reddy [26].....180

NOMENCLATURA

Letras Maiúsculas

A^*, B^* - matrizes oriundas da mudança de base

A - área da seção transversal de um elemento de pórtico

A_s - área de aço da viga

A_{cr} - seção transversal da viga de concreto sujeita a fissuração

B - matriz diferencial das funções de interpolação

C - matriz de amortecimento do sistema de dinâmico

C_a, C_p - amortecimentos relativos ao sistema de absorção e ao sistema principal

C_n, K_n, M_n - amortecimento, rigidez e massa relativos ao n-ésimo modo

C_o, K_o, M_o - amortecimento, rigidez e massa da estrutura original

C_p, K_p, M_p - amortecimento, rigidez e massa do sistema principal

C_x, C_y, C_z - cossenos diretores dos eixos x, y e z.

CE - matriz constitutiva elementar

D - rigidez flexural da placa

DB, DS - matrizes auxiliares para flexão e cisalhamento da placa

DE, GE - matrizes de propriedades do material da placa à flexão e ao cisalhamento, respectivamente

E - módulo de elasticidade longitudinal do material

E_s - módulo de elasticidade longitudinal do aço

E(e) - matriz de excentricidades

F - vetor de forças dinâmicas

F_n - força atuante no n-ésimo modo

F_p - força atuante no sistema principal

$F(t)$ - força em função do tempo

F^e - força atuante relativa aos graus de liberdade segundo os eixos locais do elemento de pórtico

$\overline{F}^e$ - força atuante relativa aos graus de liberdade segundo o plano médio da laje.

F^* - função objetivo da otimização

G - módulo de elasticidade transversal do material

$G_{est.}$ - peso estimado de uma pessoa

G_{st} - densidade de carga

G^* - objetivo da função de otimização

I - matriz identidade

I_x, I_y, I_z - segundo momento de área em relação aos eixos x, y e z

J - número de modos de vibração

K, M - matrizes de rigidez e de massa do sistema dinâmico ou dos elementos de pórtico ou placa em relação aos eixos globais

K_a, K_p - rigidezes relativas ao sistema de absorção e ao sistema principal

$\overline{K}$ - matriz de rigidez do elemento de pórtico referente aos graus de liberdade segundo o plano médio da laje

Kx, Ky - fatores de correção de cisalhamento transversal

L - vão teórico da viga

$\overline{\overline{M}}$ - massa por unidade de volume

M_a, M_p - massas relativas ao sistema de absorção e ao sistema principal

M_b - vetor de momentos à flexão e volvente

M_d - momento majorado de cálculo

M_{din} - momento dinâmico

$M_{est.}$ - momento estático

$M_{est.eq.}$ - momento estático equivalente

M_{total} - momento total atuante na seção (estático + dinâmico)

M_x, M_y - momentos de flexão segundo as direções x e y

M_{xy} - momento volvente

MM - massa relativa ao primeiro modo de vibração da estrutura (massa modal)

N - matriz de funções de interpolação

P_k - prioridade da função objetivo na otimização

Q - vetor de esforços cortante

R - matriz geral de rotação de um elemento de pórtico

$S_{din.}$ - esforço dinâmico máximo solicitante

$S_{est.}$ - esforço estático máximo solicitante

$S_{res.}$ - esforço interno máximo resistente da seção

$S_{s.a.}$ - esforço estático devido ao peso do sistema de absorção

T - matriz transformação

$T_{est.eq.}$ - momento de torção resultante da análise estática equivalente

U, $\dot{U}$ - variáveis auxiliares para mudança de base

U_b, U_s - parcela da energia de deformação relativa à flexão e ao cisalhamento

$V_{est.eq.}$ - esforço cortante resultante da análise estática equivalente

W - fator de ponderação da quadratura de Gauss

Y, $\dot{Y}$, $\ddot{Y}$ - vetores de deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura com absorsores

$\overline{Y}$ - vetor de amplitudes máximas de deslocamento para a estrutura com ab sorsores

X, $\dot{X}$, $\ddot{X}$ - vetores de deslocamento, velocidade e aceleração do sistema subestruturado

X_a, X_e - componentes do vetor deslocamento do sistema subestruturado

X_S, Y_S, Z_S - eixos globais da estrutura

Z, $\dot{Z}$, $\ddot{Z}$ - vetores de deslocamento, velocidade e aceleração em coordenadas generalizadas

Z_e, Z_i - componentes do vetor deslocamento em coordenadas generalizadas

Letras Minúsculas

a, p - índices relativos ao amortecedor e ao sistema principal

a, b - dimensões laterais de uma placa

a_{ij} - coeficiente de sensibilidade de projeto

a_m - aceleração máxima admissível

a_{mn} - coeficiente da série de Navier

a_{rms} - aceleração em RMS

b, s - índice relativo à flexão e ao cisalhamento

b^* - limites da otimização

b_f - largura efetiva da mesa

b_v - largura da viga

c - matriz auxiliar de massa por unidade de área

d - vetor graus de liberdade do elemento pórtico

d_i^-, d_i^+ - variáveis de desvio por limites inferiores e superiores na otimização

$d_{max.perm.}$ - deslocamento máximo devido a cargas permanentes

$d_{max.acid.}$ - deslocamento máximo devido a cargas acidentais

e, i - índices dos nós externos ou internos, na subestruturação

e - excentricidade

f_{ck} - resistência característica do concreto à tração

f_{tk} - resistência característica do concreto à compressão

f_T - freqüência de excitação da força

$g_j(x^*)$ - objetivos da otimização

h, h_f - altura da laje

$h_{eq.}$ - altura equivalente da laje maciça

$h_k(x^*)$ - restrições da otimização

k, m - matrizes de rigidez e de massa elementares

m, n - número de termos da série de Navier

n, p - número de pontos da quadratura de Gauss segundo as direções ξ e η

p_z - carregamento de forças perpendiculares ao plano médio da placa

$p.p._{equiv.}$ - peso próprio equivalente

r - sub-matriz de rotação

t - tempo

t_c - tempo de carregamento

t_p - tempo onde não há contato entre a pessoa e a estrutura

u - vetor de deslocamentos nodais

u, v, w - deslocamentos nodais segundo as direções x, y e z

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ - deslocamentos segundo as direções x, y e z, no plano médio da laje

$y_p, \dot{y}_p, \ddot{y}_p$ - vetores de deslocamento, velocidade e aceleração do sistema principal

$y_a, \dot{y}_a, \ddot{y}_a$ - vetores de deslocamento, velocidade e aceleração do sistema auxiliar

x^* - variável de projeto

x, y, z - eixos locais

x_{pi}, y_{pi}, z_{pi} - eixos principais de inércia

$x^*_{jadm.}, \ddot{x}^*_{jadm}$ - valores de deslocamento e aceleração admissíveis para a otimização

Letras Gregas

α, β, γ - ângulos de rotação de eixos

$\alpha(\omega)$ - função de resposta em freqüência, receptância (deslocamento/força)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - três primeiros coeficientes de Fourier

χ - vetor de curvatura

ε - vetor de deformações

ε_b - vetor de deformação à flexão

ϕ - fase relativa da força de excitação

Φ - matriz de auto-vetores ou de modos naturais de vibração

Φ_m, Φ_n - m-ésimo e n-ésimo modos de vibração

Φ_s - modos de vibração associados aos nós internos

Φ_{st} - modos restritos associados aos graus de liberdade dos nós externos

Φ_b - diâmetro das barras longitudinais

Γ - constante para os limites de conforto humano

γ - relação entre os momentos resistente e de cálculo

γ_c - coeficiente de majoração de carga

γ_f - coeficiente de segurança

γ_{mat} - peso específico do material

η , ξ - coordenadas naturais

η_b - coeficiente de conformação superficial das barras de armadura

Λ - constante que converte o valor em RMS para o valor de pico

λ - autovalor complexo resultante da mudança de base

ν - coeficiente de Poisson do material

θ_x , θ_y , θ_z - rotações segundo as direções x, y e z

$\bar{\theta}_x$, $\bar{\theta}_y$, $\bar{\theta}_z$ - rotações segundo as direções x, y e z no plano médio da laje

ρ - massa por unidade de volume do material

ρ_r - taxa geométrica da armadura

σ - vetor de tensão à flexão

$\sigma_{máx}$ - tensão normal máxima

σ_s - tensão normal da tração na armadura

ζ - taxa de amortecimento

τ - vetor de tensão ao cisalhamento

ω - freqüência de excitação

ω_{mn} - freqüência natural de vibração para uma laje

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Com o contínuo melhoramento das propriedades mecânicas dos materiais convencionais, e com o desenvolvimento de novos materiais, de técnicas construtivas mais eficientes e de modelos de cálculo numérico mais precisos, os engenheiros passaram a projetar e executar estruturas cada vez mais esbeltas e arrojadas, do ponto de vista de suas dimensões. Mesmos as estruturas civis mais convencionais passaram a ser mais leves e flexíveis e, por conseguinte, mais sensíveis a cargas dinâmicas. Em edificações convencionais aquelas cargas produzidas pela ação de ventos e as geradas por alguma atividade humana podem induzir vibrações à estrutura que a tornam insegura ou desconfortável para os seus usuários. Portanto, é importante para o engenheiro civil ter o conhecimento do comportamento de uma estrutura sob a ação de cargas dinâmicas e, principalmente, dos processos pelos quais pode-se atenuar os efeitos causados pelas mesmas. Um desses processos que pode ser utilizado é o que emprega um sistema passivo de absorção dinâmica de vibrações, que, por sua simplicidade, fácil instalação, custo e manutenção econômica, torna-se uma medida corretiva de baixo custo e grande eficiência. A idéia de absorsores dinâmicos de vibração não é recente. Os primeiros estudos e aplicações na atenuação do movimento de "roll" de um navio datam de 1902 a 1911 e devem-se a Frahm[1]. Em 1928, Ormondrya e Den Hartog[2], e mais tarde Den Hartog, em 1934[3], desenvolveram o modelo matemático linear clássico, os princípios do comportamento e a técnica de afinamento dos absorsores dinâmicos de vibração(ADV), para aplicações a sistemas mecânicos e máquinas.

Somente a partir de 1966 surgiram as primeiras aplicações no campo da Engenharia Civil com Lenzen[4], que analisou diversas lajes de piso de prédios residenciais e comerciais constituídas por estruturas mistas de aço e concreto (lajes de concreto sobre vigas-treliças de aço).

Em 1991, no boletim nº 209 do CEB[5], os sistemas de absorção passaram a ser indicados como uma possível medida corretiva a ser tomada para redução dos níveis de vibração indesejáveis em estruturas de concreto armado.

Um pouco anterior a isso, em 1990, no Brasil, o Grupo de Dinâmica do Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ foi solicitado a fazer a análise estrutural do estádio Mário Filho (Maracanã) [6], na cidade do Rio de Janeiro. Foram realizados diversos testes necessários ao estudo do comportamento estrutural do estádio sob a ação de carregamentos dinâmicos, resultantes da utilização, tanto para jogos de futebol, que é sua principal finalidade, quanto para a realização de shows de "rock" ou música "pop". A conclusão após as análises feitas foi de que a estrutura apresentava problemas de utilização em serviço, fissuração por vibrações excessivas e desconforto humano, quando da utilização por platéias de shows das arquibancadas em balanço. Foram sugeridas medidas corretivas pelo Prof. Ronaldo Batista [7], que incluíam a utilização de absorsores de vibração. A instalação de absorsores não foi adotada pelos órgãos responsáveis pela administração do estádio, uma vez que era considerada pelos engenheiros civis encarregados da recuperação estrutural do estádio uma medida corretiva bastante incomum e na época desconhecida no pais.

Motivados pelo estudo realizado no estádio do Maracanã e pelo pouco que se conhecia a respeito da aplicação de absorsores em estruturas, o Grupo de Dinâmica do Laboratório de Estruturas, sob a orientação do Prof. Batista, passou a desenvolver uma nova linha de pesquisas na Redução e Controle de Vibrações em Estruturas, através de

desenvolvimento de métodos numéricos que possibilitem a modelagem e a análise de estruturas com sistemas de controle passivo e ativo, bem como o estudo experimental do comportamento das mesmas sob ação de carregamentos dinâmicos induzidos por vento, máquinas, veículos e também por pessoas. Dentro desta linha, em 1993, o pesquisador Carlos Magluta [8] apresentou sua tese de Doutorado, onde analisou diversos tipos de absorsores de vibração (massa, mola e amortecedor), além de um estudo de cargas dinâmicas induzidas pelo movimento de pessoas em atividades de pulos e danças em estádios de futebol, utilizando para isso um programa de análise estrutural de pórticos planos com sistemas auxiliares de absorção de vibrações.

Em janeiro de 1993 foi solicitado ao Grupo de Dinâmica do Laboratório de estruturas que fizesse um análise na ponte de acesso ao Porto de Sepetiba no Estado do Rio de Janeiro [9], por onde passavam caminhões com pneus de borracha maciça carregados com minério de ferro. Constatando que as vibrações provocadas pelo tráfego desses veículos pesados produziam fissuras nas vigas de concreto armado em diversos vãos da ponte, e após estudos feitos, o Prof. Batista [10] projetou absorsores, que, após serem instalados nos vãos da ponte, reduziram os níveis de vibração a uma faixa segura, eliminando o problema causado pelo tráfego.

Um outro estudo realizado, em fins de 1993 e depois em 1995/96 por Batista e Pfeil [11], o qual é interessante fazer menção, diz respeito, ao estudo do vão central da Ponte Rio-Niterói, no Estado do Rio de Janeiro. Embora a ponte tenha sido construída em concreto protendido, os três vãos centrais da ponte são em estrutura metálica em vigas caixão germinadas e contínuas, que em virtude do seu projeto, sob determinadas condições de velocidade do vento, passa a vibrar por efeito de vorticidade, tendo deslocamentos perceptíveis, que podem provocar pânico entre os motoristas que a utilizam. Para que isso não aconteça a ponte é interditada ao tráfego, como medida de

segurança, sempre que a velocidade do vento atinge cerca de 50 km/h. Para a atenuação destas vibrações, o Prof. Ronaldo Batista tem proposto a instalação de absorsores de vibração que reduzirão as vibrações a níveis mais seguros, que evitarão a interdição do tráfego e trarão melhoria do conforto dos usuários. Esta solução definitiva está atualmente (desde Junho de 1997) em estudos, juntamente com outros problemas correlatos oriundos da interação veículos-estrutura, sob a coordenação do Prof. Batista.

É também notório o estudo realizado em 1995 por Batista e Alves [12] sobre a aplicação de sistemas ativo e passivo para controle e redução das amplitudes de movimento vertical ("heave") do casco de plataformas offshore do tipo TLP, para lâminas d'água em torno de 1000 metros. A tese de doutorado de Alves [12], recentemente apresentada, traz uma resenha completa dos resultados mais relevantes desse estudo e da nova proposição técnica para os futuros projetos e construção de TLP's.

Esses e outros estudos fizeram com que a linha de pesquisa em Controle e Redução de Vibrações em Estruturas produzisse várias teses e inúmeros estudos experimentais e teóricos, além do desenvolvimento e aperfeiçoamento de ferramentas numéricas que propiciam um conhecimento maior desta área pouco explorada na Engenharia Estrutural. Seguindo este pensamento, o presente trabalho busca dar uma contribuição a esta linha de pesquisa, com o desenvolvimento de um algoritmo numérico, denominado P.E.F.A.V.(Programa em Elementos Finitos com Atenuação de Vibrações), que possibilita o estudo de lajes nervuradas com sistemas de absorção sob a ação de carregamentos dinâmicos, utilizando elementos finitos de pórtico espacial e de casca plana. A necessidade do desenvolvimento deste algoritmo deve-se ao fato de que os programas disponíveis não permitem a introdução ou consideração de sistemas auxiliares dinâmicos para controle passivo e redução de vibrações estruturais.

São apresentados alguns exemplos que mostram a eficiência do algoritmo e, ainda, um exemplo de uma laje nervurada sujeita a um carregamento induzido por atividades humanas.

Este trabalho de pesquisa é organizado conforme os capítulos apresentados a seguir:

Capítulo II . São feitas algumas considerações teóricas sobre a teoria clássica de absorsores, apresentando as equações básicas que regem o problema estrutural dinâmico e as soluções do problema de auto-valor para sistemas com amortecimento proporcional e também não-proporcional. A técnica de subestruturação dinâmica é utilizada para a redução das matrizes empregadas pelo algoritmo PEFAV, proporcionando um tempo de processamento, bem como um espaço de memória necessário, bem menores. É apresentado, ainda, um processo de otimização baseado na técnica do Goal Programming, de modo a se obter a melhor calibração do sistema de absorsores de vibrações.

Capítulo III . Aborda uma descrição dos elementos utilizados pelo algoritmo PEFAV, ressaltando principalmente o elemento de placa Mindlin, onde, utilizando integração seletiva, procura-se minimizar os efeitos do cortante, evitando-se o chamado trancamento por cortante em placas delgadas. Em seguida mostra-se a organização do Sistema Computacional PEFAV, onde são apresentados os diversos blocos que o compõe.

Capítulo IV . Apresenta um resumo dos resultados de um estudo, realizado pelo Grupo de Dinâmica do Laboratório de Estruturas (PEC/COPPE/UFRJ) sobre o carregamento dinâmico aplicado gerado por algumas atividades humanas. São apresentados, ainda, alguns critérios de projeto recomendados pelas normas brasileiras e internacionais para aplicação desse carregamento sobre estruturas.

Capítulo V . Dois exemplos, um de laje simplesmente apoiada e outro de laje nervurada, são analisados, tanto em termos de tensões no caso estático, como em termos de amplitudes de vibração livre no caso dinâmico. Os resultados obtidos para a laje simplesmente apoiada são comparados com os do SAP90 [14], com a solução analítica de Navier, utilizando séries trigonométricas, para o caso estático e a solução analítica utilizando o problema de autovalor para o caso dinâmico. No segundo exemplo, laje nervurada, os resultados além de serem comparados com os do SAP90 [13], são comparados com dois tipos diferentes de modelagem (laje como grelha), o primeiro apresentado por Alves [14] e o segundo por Faria [15], ambos em suas respectivas tese de mestrado

Capítulo VI . Uma análise de laje nervurada de concreto armado destinada ao piso de um edifício, sujeito a cargas humanas dinâmicas, é feita neste capítulo. A análise feita, considerando-se os critérios estabelecidos pelas normas, mostra as deficiências de projeto que surgem quando são utilizados tais critérios. São introduzidos, ainda, absorsores, de modo a se obter uma solução satisfatória tanto no critério de segurança, quanto no de conforto.

Capítulo VII . Neste capítulo são apresentadas as conclusões finais deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Embora a teoria clássica de absorsores de vibração, bem como de análise dinâmica de sistemas mecânicos, estejam amplamente desenvolvidas na literatura técnica [3,16,17], faz-se a seguir uma breve explanação dos conceitos mais relevantes envolvidos neste trabalho, de modo a propiciar um bom entendimento do mesmo. A Figura II.2. ilustra de forma esquemática um absorsor de vibrações instalado em um trecho de uma laje nervurada.

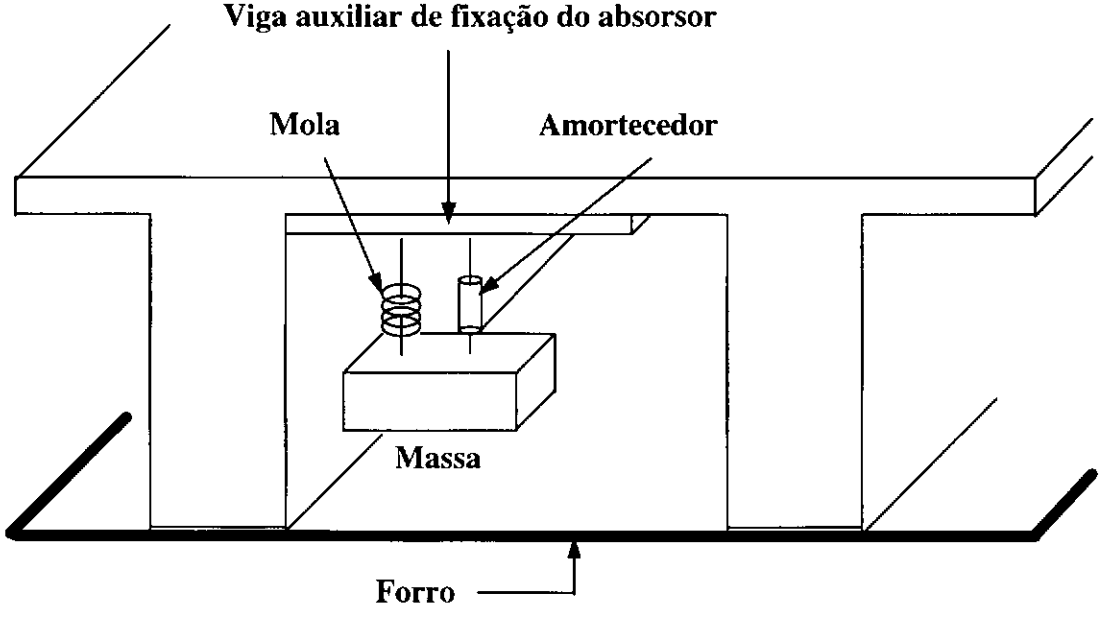


Figura II.1. Representação de um absorsor de vibrações em um trecho de uma laje nervurada

II.1. SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

A importância de analisar-se um sistema de um grau de liberdade reside no fato de que uma estrutura qualquer, mesmo complexa, mas de comportamento linear elástico e geométrico, pode ser analisada resolvendo-se "n" sistemas de um grau de liberdade generalizado. Além do mais, uma estrutura simples ou que possua um comportamento dinâmico dominado por um certo modo característico de vibração, pode também ser representada como um sistema de um grau de liberdade, tal como mostrado nas figuras II.1.a e b;

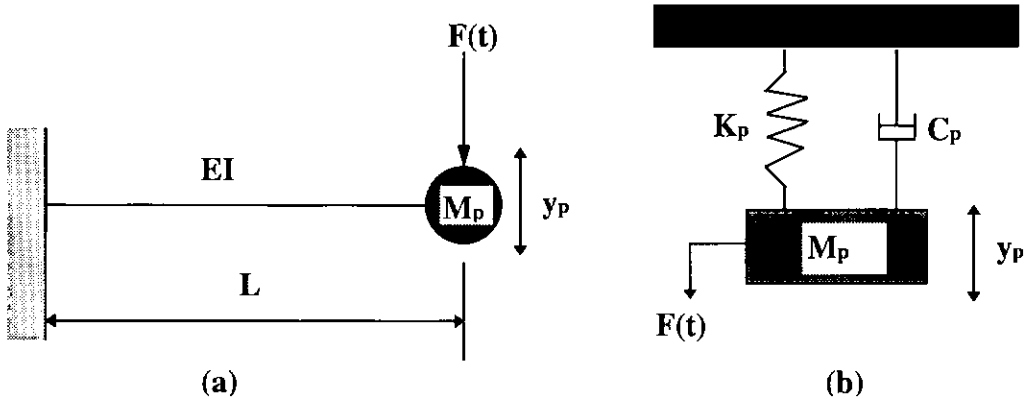


Figura II.2. (a) Sistema estrutural dinâmico com um grau de liberdade, representado por (b) um sistema mecânico equivalente.

onde M_p, K_p, e C_p, representam respectivamente a massa, a rigidez e o amortecimento da estrutura referente ao modo dominante .

Considerando-se que o sistema é excitado por uma força variável no tempo, F(t), e que o amortecimento seja do tipo viscoso, isto é, proporcional à velocidade, a equação que representa o movimento do sistema da Fig. II.1.b é dada por:

$$M_p \ddot{y}_p + C_p \dot{y}_p + K_p y_p = F(t), \qquad \text{(eq.II.1)}$$

sendo a força F(t) definida por

$$F(t) = F_o e^{i\omega t}, \qquad \text{(eq.II.2)}$$

onde F_o é a amplitude máxima da força, e a solução da equação homogênea associada à eq.II.1 é da forma

$$y_p(t) = y_o e^{i\omega t} , \qquad \text{(eq.II.3)}$$

onde y_o é a amplitude máxima de deslocamento. Pode-se rescrever a eq.II.1. como,

$$(-Mp\omega^2 + Cp\omega \cdot i + Kp) \cdot y_o e^{i\omega t} = F_o e^{i\omega t} , \qquad \text{(eq.II.4)}$$

donde obtém-se a expressão

$$\alpha(\omega) = \frac{y_o}{F_o} = \frac{y(t)}{F(t)} = \frac{1}{(Kp - Mp\omega^2) + (Cp\omega^2) \cdot i} . \qquad \text{(eq.II.5)}$$

A expressão acima é definida como receptância ou função de resposta em frequência (FRF), que representa a maneira da estrutura de responder dinamicamente a uma determinada força solicitante. Por se tratar de uma forma complexa, contém duas informações importantes. A primeira diz respeito à amplitude e é definida como

$$|\alpha(\omega)| = \frac{|y(t)|}{|F(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(Kp - Mp\omega^2)^2 + (Cp\omega)^2}} ; \qquad \text{(eq.II.6)}$$

e, a segunda, referente à fase, ou seja, o quanto o movimento está defasado em relação à força de excitação, é expressa da forma

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{Cp\omega}{Kp - Mp\omega^2}\right) . \qquad \text{(eq.II.7)}$$

Pode-se acrescentar ainda, observando a eq. II.5, que a FRF de uma estrutura independe da força de excitação, sendo somente função de suas características.

II.2. SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Com a adição de um sistema de absorção, por exemplo do tipo massa, mola e amortecedor, ao sistema principal, cria-se mais um grau de liberdade, conforme mostrado na figura II.2.

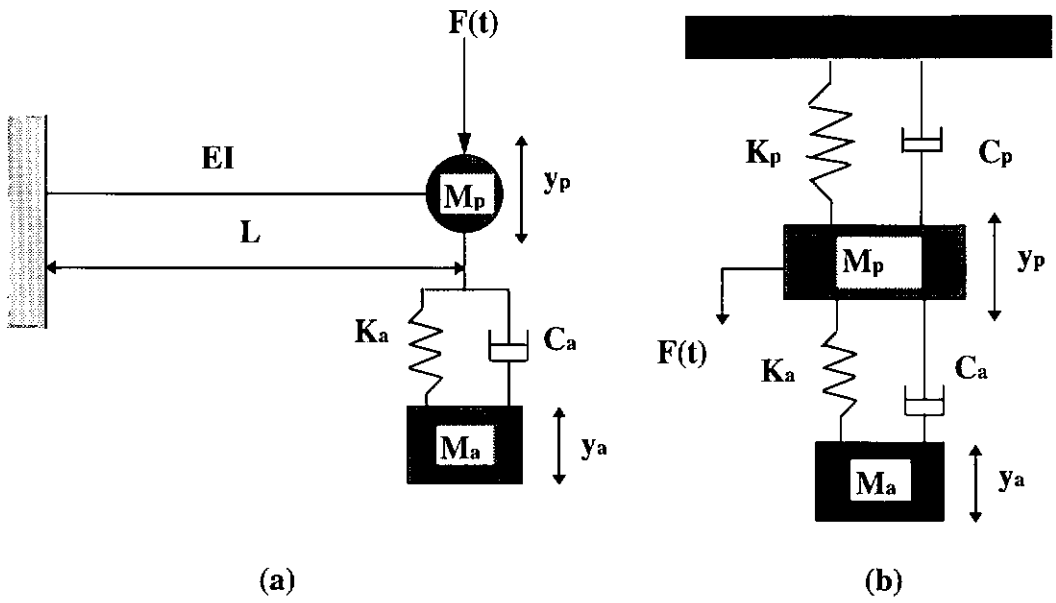


Figura II.3. (a) Sistema estrutural dinâmico com dois graus de liberdade, representado por um (b) sistema mecânico equivalente.

As equações que representam o movimento do novo sistema, é escrita na forma matricial como

$$[M]\cdot\ddot{Y}+[C]\cdot\dot{Y}+[K]\cdot Y=F \qquad \text{(eq.II.8)}$$

onde,

$$[M]=\begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & M_a \end{bmatrix} \quad Y=\begin{bmatrix} y_p \\ y_a \end{bmatrix} \quad \dot{Y}=\begin{bmatrix} \dot{y}_p \\ \dot{y}_a \end{bmatrix} \quad \ddot{Y}=\begin{bmatrix} \ddot{y}_p \\ \ddot{y}_a \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} C_p+C_a & -C_a \\ -C_a & C_a \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} F_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} K_p+K_a & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix}$$

sendo,

p - índice relativo ao sistema principal;

a - índice relativo ao sistema de absorção;

M_p, M_a - massas;

C_p, C_a - coeficientes de amortecimento

K_p, K_a - coeficientes de rigidez

y_p, y_a - deslocamentos;

$\dot{y}_p, \dot{y}_a$ - velocidades;

$\ddot{y}_p, \ddot{y}_a$ - acelerações;

F_p -amplitude da força que atua no sistema principal.

II.3. AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

Por simplicidade, considera-se, inicialmente, um sistema no qual a matriz de amortecimento pode ser expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, isto é,

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]; \qquad \text{(eq.II.9)}$$

onde, α e β são constantes. Este tipo de amortecimento é conhecido como amortecimento proporcional. No caso de vibração livre, para uma estrutura sem amortecimento, a eq.II.8. assume a forma

$$[M] \cdot \ddot{Y} + [K] \cdot Y = \varnothing; \qquad \text{(eq.II.10)}$$

cujo vetor solução pode ser expresso como uma combinação linear do da matriz de auto-vetores, ou de modos naturais de vibração"Φ", com o vetor de coordenadas generalizadas "Z". Portanto,

$$Y = \Phi \cdot Z. \qquad \text{(eq.II.11)}$$

Assim, substituído Y na eq. II.10, os modos naturais de vibração da estrutura podem ser encontrados simplesmente resolvendo o problema de autovalor

$$\left([K] - \omega^2[M]\right) \cdot \Phi = \varnothing. \qquad \text{(eq.II.12)}$$

Utilizando-se, novamente o vetor solução Y, agora na eq. II.8, e pre-multiplicando todos os termos pela transposta do n-ésimo modo, obtém-se

$$\Phi_n^T \cdot [M] \cdot \Phi \cdot \ddot{Z} + \Phi_n^T \cdot [C] \cdot \Phi \cdot \dot{Z} + \Phi_n^T \cdot [K] \cdot \Phi \cdot Z = \Phi_n^T \cdot F \,. \qquad \text{(eq.II.13)}$$

Das condições de ortogonalidade em relação aos modos de vibração,

$$\Phi_n^T \cdot [M] \cdot \Phi_m = \varnothing \,; \qquad \text{(eq.II.14.a)}$$

$$\Phi_n^T \cdot [K] \cdot \Phi_m = \varnothing \,; \qquad m \neq n \qquad \text{(eq.II.14.b)}$$

$$\Phi_n^T \cdot [C] \cdot \Phi_m = \varnothing \,; \qquad \text{(eq.II.14.c)}$$

e lembrando das definições das propriedades modais

$$\Phi_n^T \cdot [M] \cdot \Phi_m = M_n \,, \text{ massa modal;} \qquad \text{(eq.II.14.d)}$$

$$\Phi_n^T \cdot [C] \cdot \Phi_m = C_n \,, \text{ amortecimento modal; } m = n \qquad \text{(eq.II.14.e)}$$

$$\Phi_n^T \cdot [K] \cdot \Phi_m = K_n \,, \text{ rigidez modal;} \qquad \text{(eq.II.14.f)}$$

$$\Phi_n^T \cdot F = F_n \text{ - força associada ao n-ésimo modo;} \qquad \text{(eq.II.14.g)}$$

a eq. II.13 agora pode ser reescrita como

$$M_n \cdot \ddot{Z}_n(t) + C_n \cdot \dot{Z}_n(t) + K_n \cdot Z_n(t) = F_n(t) \,. \qquad \text{(eq.II.15)}$$

Fazendo-se uma analogia com a solução do problema para um grau de liberdade, a coordenada generalizada do n-ésimo termo fica definida como sendo

$$Z_n(t) = \frac{F_n(t)}{\left(K_n - \omega_n^2 M_n\right) + (\omega_n C_n) \cdot i} \,. \qquad \text{(eq.II.16)}$$

Uma vez que todos os modos e freqüências naturais forem determinados através da equação II.12, pode-se adotar como coordenadas generalizadas as amplitudes das componentes modais da resposta global do sistema dinâmico. Para um sistema contínuo existe um número infinito de modos naturais de vibração e freqüências associadas. Pode-se, entretanto, de acordo com cada caso analisado, utilizar somente alguns desses modos, os quais melhor representam a resposta da estrutura sob a ação de um

determinado carregamento dinâmico. A resposta portanto é obtida na forma resultante de uma superposição de um certo número "J" de modos naturais de vibração. A esta superposição dar-se o nome de superposição modal e consequentemente a resposta denomina-se resposta modal. Assim, a solução da equação II.8. na forma modal será

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{J} \Phi_n \cdot Z_n \ ; \qquad \text{(eq.II.17)}$$

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{J} \frac{\Phi_n{}^T \Phi_n \cdot F}{\left(K_n - \omega_n^2 M_n\right) + \left(\omega_n C_n\right) \cdot i} \ . \qquad \text{(eq.II.18)}$$

A receptância ou FRF, portanto, é expressa por:

$$\alpha(\omega) = \sum_{n=1}^{J} \frac{\Phi_n{}^T \Phi_n}{\left(K_n - \omega_n^2 M_n\right) + \left(\omega_n C_n\right) \cdot i} \qquad \text{(eq.II.19)}$$

Uma outra forma para a eq.II.15, aproveitando-se a definição de amortecimento proporcional e utilizando-se também as equações II.9, II.12 e II.14, é expressa do seguinte modo:

$$C_n = {}^T\Phi_n \cdot [C] \cdot \Phi_n = \alpha \cdot {}^T\Phi_n \cdot [M] \cdot \Phi_n + \beta \cdot {}^T\Phi_n \cdot [K] \cdot \Phi_n = \alpha M_n + \beta K_n ;$$

$$C_n = \left(\frac{\alpha}{\omega_n} + \beta \omega_n \right) \cdot \omega_n \cdot M_n ;$$

$$\ddot{Z}_n(t) + \left(\frac{\alpha}{\omega_n} + \beta \omega_n \right) \cdot \omega_n \cdot \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 \cdot Z_n(t) = \frac{F_n}{M_n} ;$$

$$\ddot{Z}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 \cdot Z_n(t) = \frac{F_n}{M_n} \ . \qquad \text{(eq.II.20)}$$

Esta, portanto, é a equação modal do movimento para o n-ésimo modo de um sistema estrutural qualquer excitado por uma força dinâmica. A grandeza ζ_n é definida como taxa de amortecimento relativa ao n-ésimo modo de vibração, e é expressa na forma

$$\zeta_n = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \qquad \text{(eq.II.21)}$$

Assim, para determinação da taxa de amortecimento em qualquer modo é necessário o conhecimento do valor em dois modos distintos. Estes valores podem ser obtidos de forma experimental quando a estrutura existe, ou através de estimativas baseadas em experiências prévias e dados disponíveis para estruturas similares, quando da fase de projeto.

II.4. AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL

Em geral o amortecimento em estruturas civis é proporcional à massa e/ou à rigidez, porém a adição de um sistema de absorção destroi a proporcionalidade da matriz de amortecimento e, portanto, o desenvolvimento anterior deve ser refeito para este caso. Considerando-se a equação de movimento de um sistema estrutural com amortecimento e sem forças aplicadas,

$$M \cdot \ddot{Y} + C \cdot \dot{Y} + K \cdot Y = \varnothing\,, \qquad \text{(eq.II.22)}$$

onde,

$M = M_p + M_a$, massa;

$C = C_p + C_a$, amortecimento;

$K = K_p + K_a$, rigidez;

p = índice relativo ao sistema principal original (sem absorsor);

a = índice relativo ao sistema de absorção.

A solução desta equação pode ser colocada na forma

$$Y = \overline{Y} \cdot e^{\lambda t}$$

sendo,

$\overline{Y}$ - amplitudes máximas;

λ - um numero complexo.

Substituindo-se na eq.II.22, tem-se,

$$\left(\lambda^2 M + \lambda C + K\right) \cdot \overline{Y} = \varnothing \; ; \qquad \text{(eq.II.23)}$$

a qual tem solução não-trivial para $\overline{Y}$, com a equação característica

$$\left|\lambda^2 \cdot M + \lambda \cdot C + K\right| = \varnothing \; . \qquad \text{(eq.II.24)}$$

Para um sistema estrutural com muitos graus de liberdade é mais conveniente reduzir a eq.II.24, à forma convencional do problema de autovalor, utilizando-se a identidade

$$M \cdot \dot{Y} - M \cdot \dot{Y} \equiv \varnothing \; .$$

Portanto,

$$M \cdot \ddot{Y} + (M - M + C) \cdot \dot{Y} + K \cdot Y = \varnothing \; ; \qquad \text{(eq.II.25.a)}$$

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & \varnothing \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & \varnothing \\ \varnothing & -M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing \\ \varnothing \end{bmatrix} ; \qquad \text{(eq.II.25.b)}$$

a qual pode ser reescrita como

$$A^* \cdot \dot{U} + B^* \cdot U = \varnothing \qquad \text{(eq.II.26)}$$

onde,

$$A^* = \begin{bmatrix} C & M \\ M & \varnothing \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} K & \varnothing \\ \varnothing & -M \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \qquad \dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} .$$

Considerando $U = \overline{U} \cdot e^{\lambda t}$, pode-se ainda reescrevê-la finalmente na forma convencional

$$(A \cdot \lambda + B) \cdot \overline{U} = \varnothing \,. \qquad \text{(eq.II.27)}$$

A solução numérica do problema de autovalor complexo não pode ser obtida através dos métodos mais simples. Assim, para solução deste tipo de problema emprega-se o algoritmo QZ [18].

II.5. SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA

A solução do problema de autovalor, tanto para o caso de amortecimento proporcional quanto de não-proporcional, envolve a montagem das matrizes de rigidez e de massa de todos os elementos que compõem o sistema estrutural. Imaginando-se a discretização deste sistema em elementos finitos, compostos de elementos de pórtico espacial e elementos de placa, que serão utilizados neste trabalho, pode-se ver que as matrizes globais terão dimensões muito grandes, exigindo um esforço computacional e um espaço de memória consideráveis. Logo, é de suma importância a redução do problema dinâmico sem a perda das informações da estrutura necessárias à análise.

A utilização da técnica de subestruturação para redução do problema dinâmico também é necessária para redução do tempo de processamento dos dados, uma vez que, durante o processo de otimização, a solução do problema é obtida diversas vezes.

A técnica consiste em dividir o modelo estrutural em varias partes ou subestruturas, definidas a partir de contorno naturais ou regiões distintas. Em cada uma destas partes são definidos dois tipos de pontos nodais: (a) nós externos (mestres) e (b) nós internos, conforme ilustrado na Figura II.3.

A necessidade desta separação reside no fato de que os nós externos deverão existir após a transformação de coordenadas que irá reduzir o tamanho do problema dinâmico, uma vez que através deles o sistema original é remontado. Vale ressaltar que

a introdução do sistema de absorção dar-se-á através destes nós; portanto, é necessário definir os nós onde os absorsores serão colocados como nós externos.

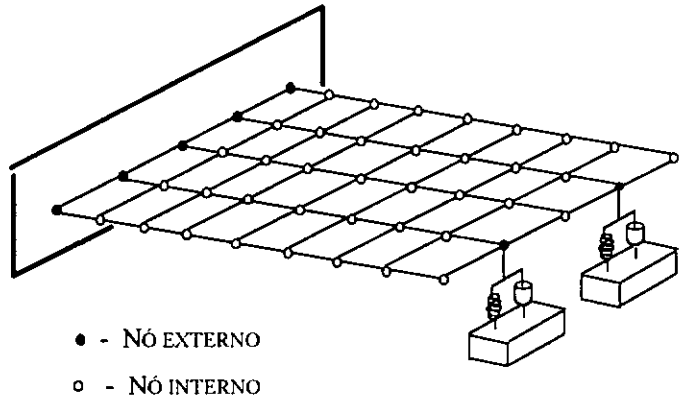


Figura II.4. Nós internos e externos em uma malha de elementos finitos

Utilizando-se o vetor de deslocamentos em coordenadas generalizadas e indicando os nós externos e os nós internos respectivamente pelos sub-índices "e" e "i", pode-se separar os graus de liberdade associados aos nós externos daqueles associados aos nós internos. Assim,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_i \\ Z_e \end{bmatrix}. \qquad \text{(eq.II.28)}$$

Reduz-se então os graus de liberdade, aplicando-se uma transformação de coordenadas do tipo[8,19-21]:

$$Z = T \cdot X \qquad \text{(eq.II.29)}$$

onde,

$$X = \begin{bmatrix} X_a \\ X_c \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \Phi_s & \Phi_{st} \\ \varnothing & I \end{bmatrix}$$

sendo,

X - vetor de deslocamentos do sistema subestruturado;

X_a - vetor de deslocamentos auxiliar, que representa a contribuição dos nós internos ao sistema subestruturado;

X_e - vetor de deslocamentos dos nós externos;

Φ_s - modos de vibração normais, associados somente aos nós internos;

Φ_{st} - modos restritos, obtidos impondo-se deslocamentos unitários aos graus de liberdade associados aos nós externos;

I - matriz identidade.

Para o sistema original, sem absorsor, com a aplicação da transformação, definida acima, na equação diferencial de movimento e pré-multiplicando-se por T^T, tem-se

$$\left(T^T \cdot M_o \cdot T\right)\ddot{X} + \left(T^T \cdot C_o \cdot T\right)\dot{X} + \left(T^T \cdot K_o \cdot T\right)X = T^T \cdot F \qquad \text{(eq.II.30)}$$

onde, M_o, C_o e K_o são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura original; e F é o vetor de forças dinâmicas. Como já foi observado anteriormente, as características dos sistemas de absorção são introduzidas através dos nós externos, sendo estes mantidos inalterados nas matrizes subestruturadas. A eq.II.30, após a introdução dos sistemas de absorção, assume a forma

$$\left(T^T \cdot M_o \cdot T + M_a\right)\ddot{X} + \left(T^T \cdot C_o \cdot T + C_a\right)\dot{X} + \left(T^T \cdot K_o \cdot T + K_a\right)X = T^T \cdot F \quad \text{(eq.II.31)}$$

onde, M_a, C_a e K_a são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez dos sistemas de absorção. A necessidade de definição prévia dos pontos onde serão introduzidos os absorsores como nós externos fica evidente, e resume-se simplesmente em somar as características do absorsor às respectivas matrizes transformadas no correspondente grau de liberdade.

Outro fato interessante de ser observado quanto à transformação em questão, diz respeito ao número de auto-vetores normais (Φ_s) utilizados na matriz de transformação **T**. Como utiliza-se somente parte do número de auto-vetores, a redução necessariamente implicará em aproximações nos resultados e o erro resultante será tão menor quanto for maior o número de auto-vetores utilizados na transformação ou desde que a seleção dos modos de vibração seja feita tomando-se aqueles mais representativos para cada caso [15,20].

Deve-se salientar ainda que, devido a aproximações introduzidas pela transformação **T**, os resultados em termos de esforços internos e consequentemente de tensões são pobres para os nós internos. Assim os nós que definem o elemento em que deseja-se calcular os esforços internos precisam também ser definidos como nós externos.

II.6. PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

Quando utiliza-se um sistema de absorsores deve-se buscar as melhores características (massa, rigidez e amortecimento) destes, de modo a alcançar a redução e o controle de vibração em uma estrutura o mais eficientemente possível. Para isto deve-se lançar mão de um processo que conduza aos valores ótimos procurados, processo este que pode ser definido como processo de otimização de sistemas de absorção.

O processo de otimização de sistemas de absorção foi desenvolvido a partir do que foi apresentado por Magluta [8] e posteriomente por Faria [15], utilizando-se um algoritmo de programação linear de multi-objetivos, desenvolvido e apresentado por Ignizio [22], sendo denominado como "Goal Programming".

A formulação convencional da programação não-linear de multi-objetivos está baseada na minimização de uma função escalar de desvios descritos a partir de variáveis

de projeto $\overline{x}^*$, variáveis as quais o projetista utiliza para controle do modelo estrutural. Assim deve-se minimizar a função

$$f(\overline{x}^*); \qquad \overline{x}^* \in \Re^n \tag{eq.II.32}$$

sujeita a um conjunto de objetivos (g) e restrições (h),

$$g_j(\overline{x}^*) \geq 0; \quad j = 1,....,J \tag{eq.II.33}$$

$$h_k(\overline{x}^*) = 0; \quad k = 1,....,K \tag{eq.II.34}$$

e a limites superiores (u) e inferiores (l) para as variáveis $\overline{x}$

$$x_i^{*l} \leq \overline{x}_i^* \leq x_i^{*u}; \qquad i = 1,....,N \tag{eq.II.35}$$

A proposta da otimização, portanto, é buscar os valores ótimos destas variáveis de modo a atender a todas as restrições e objetivos predeterminados. A seleção destas variáveis, bem como da definição das restrições e objetivos, constitui a base do modelo de otimização. Os objetivos podem ser fixados a partir das aspirações do projetista (diminuição de esforços internos, melhoria de conforto, etc...), enquanto as restrições estão relacionadas a qualquer tipo de limitação, tais como: de naturezas física, geométrica, econômica, etc...

Nas formulações convencionais de programação não-linear a função objetivo tem que ser escrita de forma explícita. Entretanto, na programação linearizada em que desenvolveu-se o "Goal Programming" não há esta necessidade; pode-se muito bem formular um problema específico através de uma subrotina, sendo esta acoplada ao algoritmo que irá gerenciar toda a análise.

Além disto, no "Goal Programming" tanto as restrições como os objetivos são considerados do mesmo modo e escritos na forma:

$$G^* \geq b^*; \qquad \sum a_{ij} x_j^* + d_i^- = b_i^* \tag{eq.II.36}$$

$$G^* \leq b^*; \qquad \sum a_{ij} x_j^* + d_i^+ = b_i^* \tag{eq.II.37}$$

onde,

d_i^-, d_i^+ - variáveis de desvios para os limites inferiores e superiores, respectivamente, associadas a cada um dos valores buscados b_i

a_{ij} - são os coeficientes de sensibilidade do projeto.

Tem-se, ainda, associado a cada função objetivo uma prioridade P_k, que para um número "I" de metas resulta numa função objetivo definida por:

$$\text{minimizar} \qquad F^*\left[d\left(\overline{x}^*\right)\right] = \sum_{i=1}^{I} P_k \cdot \left(d_i^- + d_i^+\right); k=1,...,K \qquad \text{(eq.II.38)}$$

onde as variáveis de projeto $\overline{x}_j$ estão indiretamente incluídas, uma vez que as variáveis de desvios (d_i^-, d_i^+) são obtidas através dos valores prescritos de busca (b_i) nas equações II.36 e II.37.

Para a linearização do problema de programação não linear trunca-se os termos não lineares de cada uma das expressões em série de Taylor que representam cada objetivo e aplica-se sucessivamente a programação linear, resolvendo-se deste modo o problema não linear.

O problema de redução de níveis de vibração, empregando-se absorsores de vibração, pode ser equacionado, segundo a programação linear de objetivos, como um problema cujo principal objetivo é o projeto de sistemas de absorção, localizados em determinados pontos, para redução de deslocamentos e/ou acelerações resultantes da aplicação de forças dinâmicas em uma determinada estrutura.

As variáveis de projeto são: massa (M_a), amortecimento (C_a) e rigidez (K_a) dos sistemas de absorção. Baseados nos resultados encontrados por Magluta [8], a massa será considerada como um dado, uma vez que quanto maior for o seu valor, maior será a eficiência do sistema de absorção. Portanto, se a massa for utilizada como variável, há sempre a tendência dela alcançar o limite superior fixado na restrição. Sendo assim, a

massa do sistema de absorção deverá ser fixada como um pequeno percentual da massa modal em função do nível de redução desejado e pelos limites práticos que possibilitem a sua instalação na estrutura.

As restrições impostas e os objetivos da análise, no presente trabalho, foram definidos como:

1. Restrições impostas às variáveis C_a e K_a,

$$K_a > 0 \rightarrow K_a + d_1^- = (1{,}0 \cdot 10^{-n}) \; ; \qquad \text{(eq.II.39)}$$

$$C_a > 0 \rightarrow C_a + d_2^- = (1{,}0 \cdot 10^{-n}) \; ; \qquad \text{(eq.II.40)}$$

$$C_a \leq \overline{C}_a \rightarrow C_a - d_3^+ = \overline{C}_a \; ; \qquad \text{(eq.II.41)}$$

onde, o valor de "n" depende da tolerância do computador utilizado e $\overline{C}_a$ é um valor prático.

2. Restrições impostas à taxa de amortecimento da estrutura,

$$\zeta_i > 0 \rightarrow \zeta_i + d_4^- = (1{,}0 \cdot 10^{-n}) \; ; \qquad \text{(eq.II.42)}$$

$$\zeta_i < 1 \rightarrow \zeta_i - d_5^+ = (1{,}0 \cdot 10^{-n}) \; ; \qquad \text{(eq.II.43)}$$

sendo estas restrições necessárias para manter a estabilidade do problema dinâmico.

3. Objetivo da análise.

Redução dos deslocamentos e acelerações,

$$x_j^* \leq x_{jadm.}^* \rightarrow x_j^* - d_6^+ = x_{jadm.}^* \; ; \qquad \text{(eq.II.44)}$$

$$\ddot{x}_j^* \leq \ddot{x}_{jadm.}^* \geq \ddot{x}_j^* - d_7^+ = \ddot{x}_{jadm.}^* \; ; \qquad \text{(eq.II.45)}$$

onde os valores admissíveis de x_j^* e $\ddot{x}_j^*$ são aqueles prescritos pelas normas de projetos, ou, ainda, de acordo com as aspirações do projetista.

Assim, com os desvios definidos acima e de acordo com a prioridade dada à solução do problema de otimização, a função objetivo assume a forma:

$$F^* = (d_1^- + d_2^- + d_3^-) + (d_4^- + d_5^+) + (d_6^+) + (d_7^+) \qquad \text{(eq.II.46)}$$

A solução do problema de otimização dependerá do tipo de controle que se deseja impor à estrutura. Dois tipos de controles são desejáveis: deslocamentos e acelerações. O primeiro está associado às tensões internas, uma vez que estas são proporcionais aos deslocamentos. O segundo, por sua vez, está associado às sensações de mal-estar que determinados níveis de acelerações podem provocar ao homem. Portanto, se a questão principal é segurança, o usual é o controle dos deslocamentos; caso contrário, se é o conforto, o controle deve ser feito em cima das acelerações. Deve-se buscar sempre uma situação intermediária: satisfazer os critérios de segurança, com um certo nível de conforto.

CAPÍTULO III

MODELO NUMÉRICO

Neste capítulo faz-se o desenvolvimento do modelo numérico baseado em elementos finitos do tipo pórtico espacial e placa, bem como a apresentação do sistema P.E.F.A.V. (Programa em Elementos Finitos com Atenuação de Vibrações), o qual permitirá a análise de lajes nervuradas, objetivo do presente trabalho.

III.1. ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

Apesar do elemento de pórtico ser um elemento bastante conhecido e com desenvolvimento teórico apresentado em um grande número de livros sobre elementos finitos [23-27], será feito aqui um resumo da formulação teórica deste elemento.

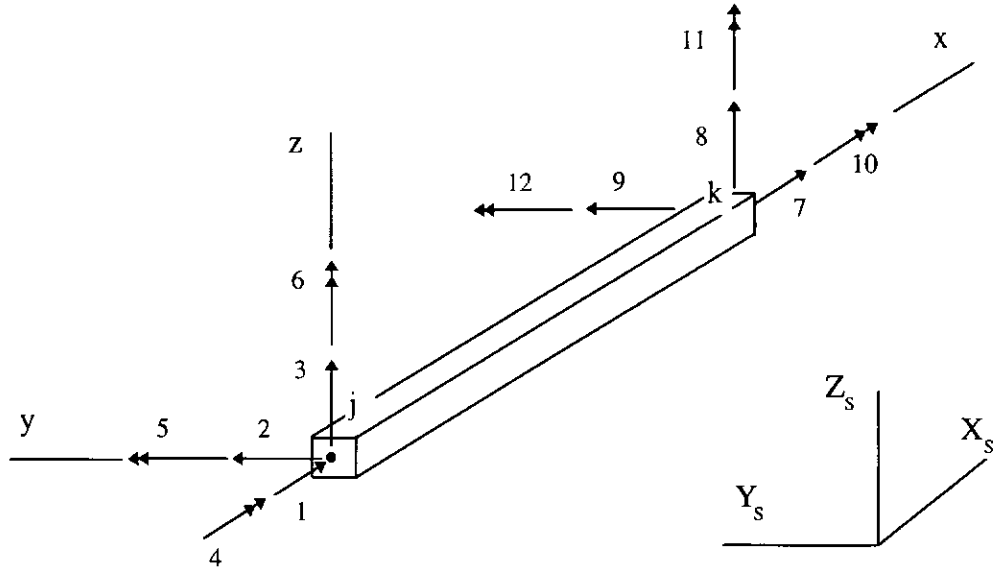


Figura III.1. Elemento de pórtico espacial.

Entende-se por elemento de pórtico espacial, o elemento tridimensional definido por dois pontos nodais, com seis graus de liberdade em cada nó (três deslocamentos e três rotações) e cujo comprimento (L) é relativamente maior do que as dimensões da sua seção transversal (A), conforme mostrado na figura III.1

Considerando que o campo de deslocamentos para o elemento mostrado é definido por

$$\{u\} = [N] \cdot \{d\} \; ; \qquad \text{(eq.III.1)}$$

onde [N] é a matriz de interpolação e {d} os graus de liberdade do elemento, o campo de deformações pode ser escrito da seguinte forma,

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \cdot \{u\} = [\partial] \cdot [N] \cdot \{d\} \; ;$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{d\} \; ;$$

onde $[B] = [\partial] \cdot [N]$, e $[\partial]$ é o operador diferencial definido como

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T .$$

Como a matriz de rigidez para o elemento de pórtico espacial pode ser obtida através da integral de volume

$$[k] = \int_{Ve} [B]^T [CE][B] \cdot dV \; ; \qquad \text{(eq.III.3)}$$

sendo [CE] a matriz constitutiva elementar, tem-se:

1. Para os deslocamentos segundo o eixo axial.

$$\{u\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_7 \end{Bmatrix} \; ; \qquad \text{(eq.III.4)}$$

onde

$$[N]=\left[\frac{L-x}{L} \quad \frac{x}{L}\right];$$

donde,

$$[B]=\frac{1}{L}\cdot[-1 \quad 1];$$

cujos valores para rigidez serão

$$[k]=\frac{AE}{L}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix};$$

considerando-se a área (A) e o módulo de elasticidade longitudinal (E) constantes.

2. Para as rotações segundo a direção axial

$$\{\theta_x\}=[N]\cdot\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_7\end{Bmatrix}; \qquad \text{(eq.III.5)}$$

sendo [N] definido da mesma forma que na eq.III.4, obtém-se os coeficientes de rigidez relativos a estes graus de liberdade:

$$[k]=\frac{GI_x}{L}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix};$$

onde o módulo de elasticidade transversal (G) e o momento de área à torção (I_x) em relação ao eixo "x", são constantes.

3. Para os demais deslocamentos lineares e rotações (admitindo-se que tenham ordem de grandeza bem pequena) pode-se definir o campo de deslocamentos como

$$\{d^*\}=[N]\cdot[u_2 \quad u_3 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad u_8 \quad u_9 \quad \theta_{11} \quad \theta_{12}]^T \qquad \text{(eq.III.6)}$$

onde,

$$N_i=1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\rightarrow i=2,\ 3\ , \qquad N_i=x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\rightarrow i=5,\ 6\ ;$$

$$N_i=\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}\rightarrow i=8,\ 9\ , \qquad N_i=-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\rightarrow i=11,\ 12\ ;$$

obtendo-se, portanto, através da definição de [B] e da eq.III.3, os coeficientes de rigidez

$$[k] = \frac{E}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12I_z & 0 & 0 & 6I_zL & -12I_z & 0 & 0 & 6I_zL \\ 0 & 12I_y & -6I_yL & 0 & 0 & -12I_Y & -6I_yL & 0 \\ 0 & -6I_yL & 4I_yL^2 & 0 & 0 & 6I_YL & 2I_yL & 0 \\ 6I_zL & 0 & 0 & 4I_zL^2 & -6I_zL & 0 & 0 & 2I_zL^2 \\ -12I_z & 0 & 0 & -6I_zL & 12I_z & 0 & 0 & -6I_zL \\ 0 & -12I_y & 6I_yL & 0 & 0 & 12I_Y & 6I_yL & 0 \\ 0 & -6I_yL & 2I_yL & 0 & 0 & 6I_YL & 4I_yL^2 & 0 \\ 6I_zL & 0 & 0 & 2I_zL^2 & -6I_zL & 0 & 0 & 4I_zL^2 \end{bmatrix};$$

onde, I_y e I_z , segundos momentos de área da seção transversal em relação a "y" e "z" respectivamente, são constantes.

Logo a matriz de rigidez do elemento será uma matriz de 12 x 12, resultante da superposição das matrizes de rigidez obtidas nos três casos anteriores. Portanto,

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GIx}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix};$$

A matriz de massa, por sua vez, pode ser determinada a partir da seguinte integral de volume:

$$[m] = \int_{Ve} \rho [N]^t [N] \cdot dV \; ; \qquad \text{(eq.III.7)}$$

sendo ρ a massa específica (massa por unidade de volume) do elemento.

Quando se utiliza a mesma matriz de funções de interpolação [N] empregada para obtenção da matriz de rigidez, a matriz de massa é dita "consistente". Portanto, para se determinar a matriz de massa consistente para o elemento de pórtico espacial, basta utilizar as funções de interpolação definidas nas equações III.4 e III.6.

Assim, considerando-se a massa específica constante, obtém-se a matriz simétrica de massa consistente para o pórtico espacial da figura III.1,

$$[c] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{13}{35}+\frac{6I_z}{5AL^2} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{13}{35}+\frac{6I_y}{5AL^2} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{3A} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-11L}{210}-\frac{I_y}{10AL} & 0 & \frac{L^2}{105}+\frac{2I_y}{15A} & & & & & & & \\
0 & \frac{11L}{210}+\frac{I_z}{10AL} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105}+\frac{2I_z}{15A} & & & & & & \\
\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & & \\
0 & \frac{9}{70}-\frac{6I_z}{5AL^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420}-\frac{I_z}{10AL} & 0 & \frac{13}{35}+\frac{6I_z}{5AL^2} & & & & \\
0 & 0 & \frac{9}{70}-\frac{6I_y}{5AL^2} & 0 & \frac{-13L}{420}+\frac{I_y}{10AL} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35}+\frac{6I_y}{5AL^2} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{3A} & & \\
0 & 0 & \frac{13L}{420}-\frac{I_y}{10AL} & 0 & \frac{-L^2}{140}-\frac{I_y}{30A} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210}+\frac{I_y}{5AL^2} & 0 & \frac{L^2}{105}+\frac{2I_y}{15A} & \\
0 & \frac{-13L}{420}+\frac{I_z}{10AL} & 0 & 0 & & \frac{-L^2}{140}-\frac{I_z}{30A} & 0 & \frac{-11L}{210}-\frac{I_z}{10AL} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105}+\frac{2I_z}{15A}
\end{bmatrix};$$

$$[m] = \rho AL[c] .$$

Como as matrizes de rigidez e de massa foram definidas segundo os eixos locais "x", "y" e "z", conforme a orientação mostrada na figura III.1, surge a necessidade de efetuar-se uma rotação de eixos, de modo que estes possam estar orientados de acordo com os eixos globais da estrutura "X_S","Y_S" e "Z_S". Desse modo, as novas matrizes de rigidez e de massa, agora definidas segundo os eixos globais, podem ser determinadas através das expressões

$$[K] = [R]^T \cdot [k] \cdot [R] \; ; \qquad \text{(eq.III.8)}$$

$$[M] = [R]^T \cdot [m] \cdot [R] \; ; \qquad \text{(eq.III.9)}$$

onde [R] é a matriz de rotação, definida como

$$[R] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix};$$

sendo r a matriz de rotação dos eixos locais para os globais, determinada a partir das relações trigonométricas obtidas de acordo com a Figura III.2, onde é mostrado um elemento de pórtico espacial, componente de uma estrutura, com seus eixos locais orientados de acordo com os eixos globais dessa estrutura (X_s, Y_s e Z_s, com Z_s sempre na direção vertical).

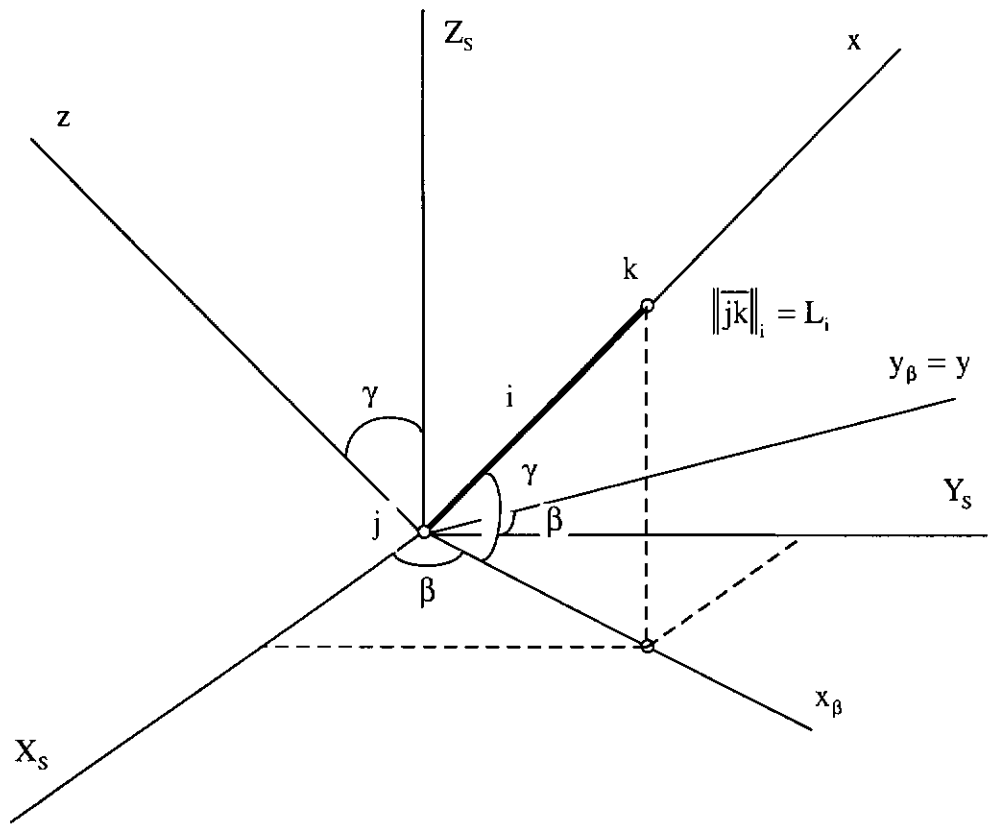


Figura III.2. Orientação dos eixos locais de um elemento de pórtico "i",de comprimento L_i, em relação aos eixos globais da estrutura.

Uma vez que o eixo local "x" já foi selecionado como eixo do elemento "i', resta somente estabelecer as direções para os outros dois eixos locais "y" e "z". Muitas são as opções para a escolha das direções de "y" e "z", mas, por conveniência e simplicidade, toma-se o eixo "y" como sendo horizontal, no plano "$X_S - Y_S$" . A fim de haver concordância entre os eixos locais e globais deve-se efetuar três rotações consecutivas dos eixos globais; sendo a primeira, um giro de ângulo β em torno do eixo "Z_S". Este giro coloca o eixo "X_S" na posição denominada "x_β", que é a interseção do plano "$X_S - Y_S$" com o plano "$x - Z_S$". Também este giro coloca o eixo "Y_S" em sua posição final "y_β".

Esta transformação, de acordo com a figura III.2, pode ser expressa na forma matricial como:

$$r_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & \text{sen}\,\beta & 0 \\ -\text{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

conforme as relações trigonométricas

$$\text{sen}\,\beta = \frac{Cy_i \cdot L_i}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2} \cdot L_i} = \frac{Cy_i}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} \quad ;$$

$$\cos\beta = \frac{Cx_i \cdot L_i}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2} \cdot L_i} = \frac{Cx_i}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} \quad ;$$

onde, L_i é o comprimento do elemento de pórtico "i", enquanto Cx_i, Cy_i e Cz_i são os seus cosenos diretores em relação aos eixos globais.

A segunda rotação consiste de um giro de um ângulo γ em torno do eixo "y_β". Este giro coloca os eixo "X_S" e "Z_S" em suas posições finais, conforme mostrado na Figura III.2. A transformação para este caso é definida como

$$r_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix};$$

conforme as relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{Cz_i \cdot L_i}{L_i} = Cz_i \ ;$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2} \cdot L_i}{L_i} = \sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2} \ .$$

A terceira rotação é efetuada de modo que os eixos locais "y" e "z" coincidam com os eixo principais de inércia, uma vez que a seção transversal do elemento pode estar girada de um ângulo α em relação a estes eixos, conforme é mostrado na Figura III.3.

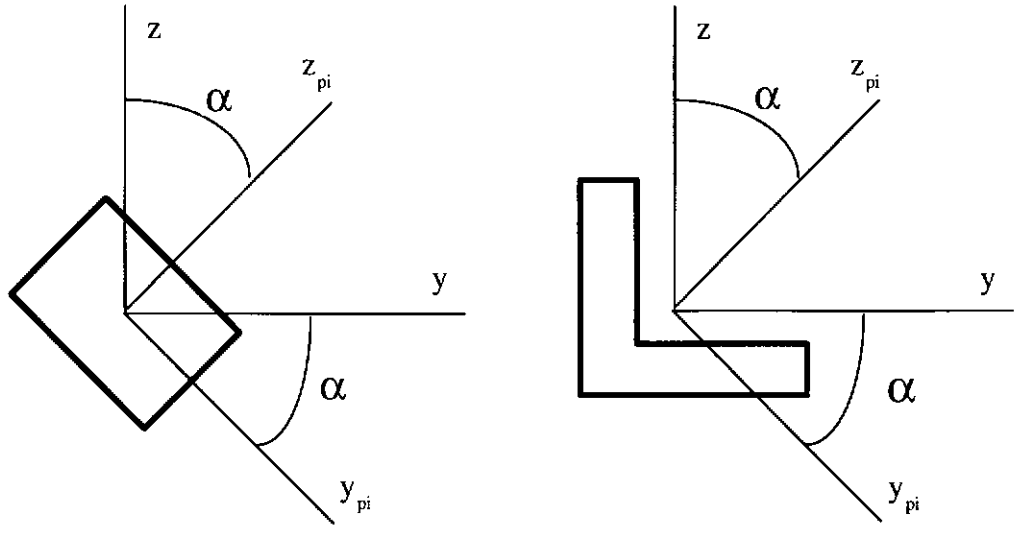


Figura III.3. Representação da orientação dos eixos principais de inércia de área em relação aos eixos locais para duas seções transversais diferentes.

A transformação que representa a rotação mostrada na Figura III.3 é definida simplesmente por

$$r_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de rotação r, resultado do produto das três rotações definidas anteriormente, é dada por

$$r = r_\alpha \cdot r_\gamma \cdot r_\beta$$

$$r = \begin{bmatrix} \dfrac{Cx_i}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} & \dfrac{Cy_i}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} & Cz_i \\ \dfrac{-Cy_i\cos\alpha + Cx_i Cz_i \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} & \dfrac{Cx_i\cos\alpha + Cy_i Cz_i \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} & -\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}\operatorname{sen}\alpha \\ -\dfrac{Cy_i\operatorname{sen}\alpha + Cx_i Cz_i\cos\alpha}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} & \dfrac{Cx_i\operatorname{sen}\alpha - Cy_i Cz_i\cos\alpha}{\sqrt{Cx_i^2 + Cy_i^2}} & \sqrt{Cx_i^2 + Cy_j^2}\cos\alpha \end{bmatrix}$$

A discussão anterior tratou de um elemento que não era vertical. Um elemento vertical é sempre um caso especial, que deve ser tratado separadamente. Num caso mais geral de um membro vertical, os eixos principais da seção transversal serão girados em torno do eixo "x' para que estes formem um ângulo "α" com as direções dos eixos globais. A orientação de tal membro é mostrado na Fig. III.4.

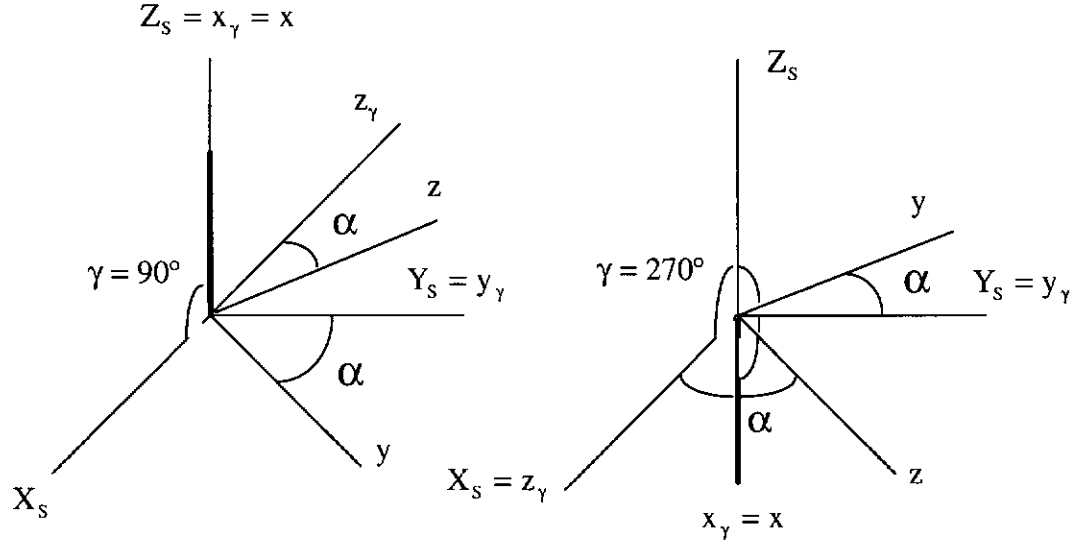


Figura III.4. Rotação de eixos para um elemento de pórtico espacial vertical

Inicialmente os eixos globais serão girados em torno do eixo "Y_S", de modo que o eixo "X_S" coincida com eixo "x", através do ângulo "γ", que pode ser ou de 90° ou de 270°. Em seguida, efetua-se um segundo giro através do ângulo "α" em torno do eixo "x".

A matriz de rotação obtida para este caso especial, de acordo com a Figura III.4, é definida como:

$$r = r_\alpha \cdot r_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Cz_i \\ -Cz_i \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ Cz_i \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \end{bmatrix};$$

onde, Cz_i é igual a +1 quando o elemento está na mesma orientação do eixo Z_S e -1 caso contrário.

Como estruturalmente uma laje nervurada é formada com a associação de uma placa, situada em um determinado plano, a uma grelha constituída por longarinas e transversinas, cujos eixos se situam em um ou mais planos diferentes, afastado do primeiro, pode-se introduzir mais uma transformação de modo que seja considerado o efeito produzido por esta diferença de eixos. A Figura III.5 mostra esquematicamente esta associação.

A abordagem no presente trabalho irá seguir de forma análoga ao que foi apresentado por Alves [14]. Inicialmente, considera-se que as excentricidades (e), distâncias entre os eixos dos elementos de pórtico ao plano médio da laje, existem apenas na direção vertical, correspondente ao eixo "z" do elemento. Tal situação é apresentada na Figura III.6.

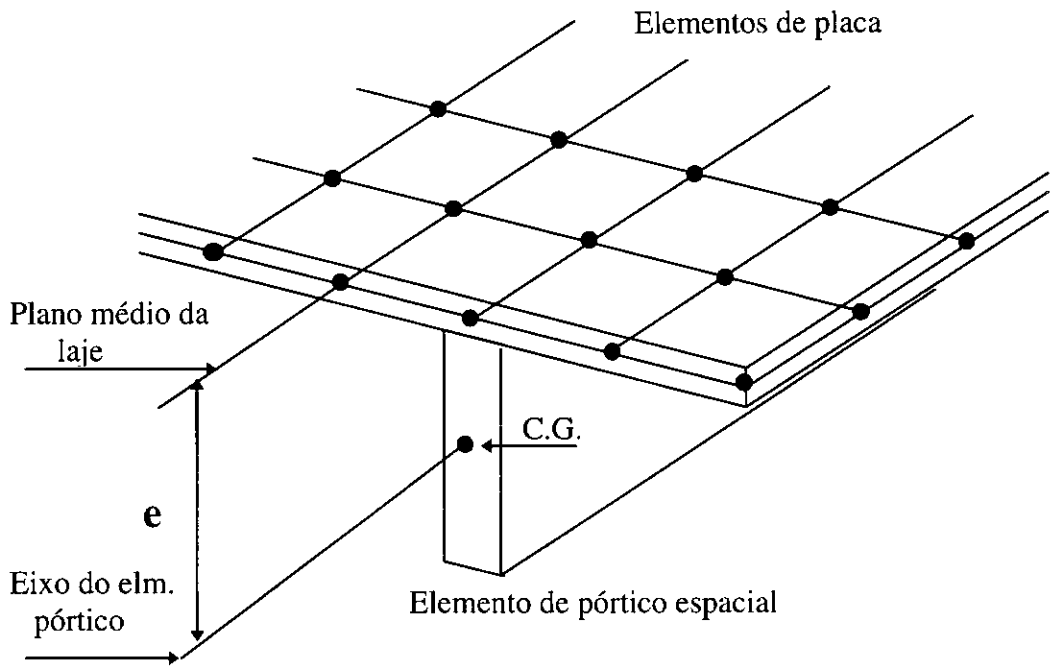


Figura III.5. Associação entre elementos de placa com elemento de pórtico espacial

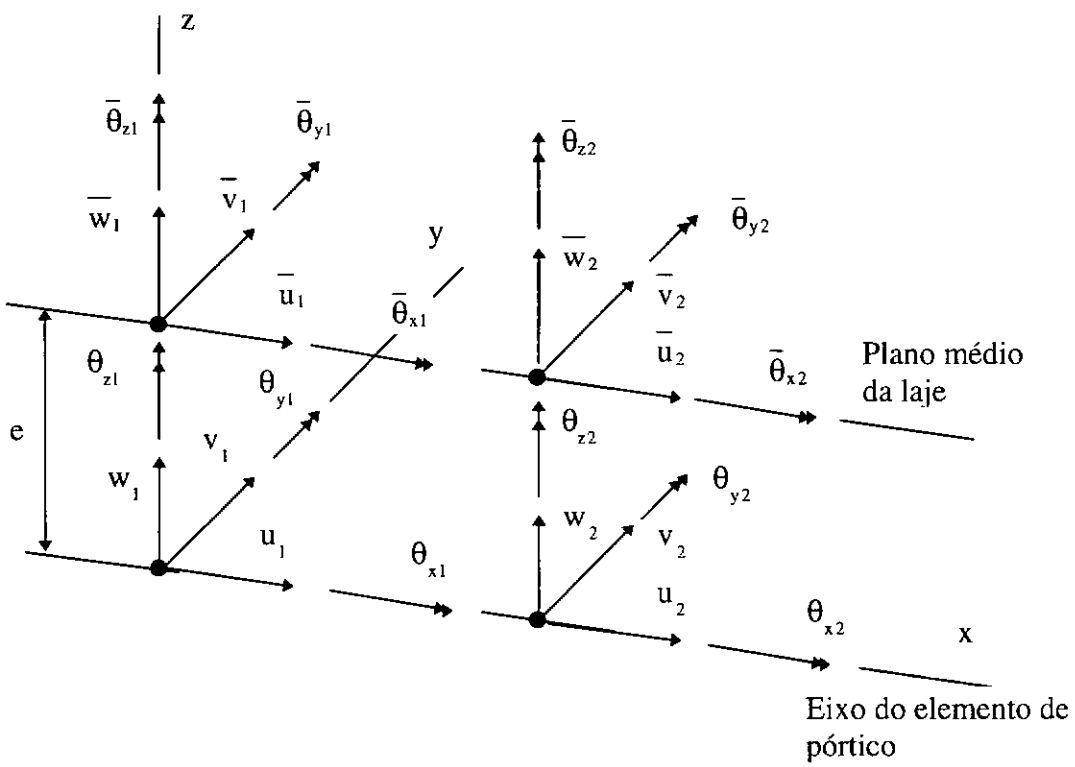


Figura III.6. Graus de liberdade do elemento de pórtico espacial relativo ao seu eixo e o plano médio da laje.

Para o nó inicial, elemento de pórtico, podem ser estabelecidas as seguintes relações:

$$u = \bar{u} - e \cdot \bar{\theta}_{y1} \qquad \text{(eq.III.10.a)}$$

$$v_1 = \bar{v}_1 + e \cdot \bar{\theta}_{x1} \qquad \text{(eq.III.10.b)}$$

$$w_1 = \bar{w}_1 \qquad \text{(eq.III.10.c)}$$

$$\theta_{x1} = \bar{\theta}_{x1} \qquad \text{(eq.III.10.d)}$$

$$\theta_{y1} = \bar{\theta}_{y1} \qquad \text{(eq.III.10.e)}$$

$$\theta_{z1} = \bar{\theta}_{z1} \qquad \text{(eq.III.10.f)}$$

As relações para os graus de liberdade do nó final podem ser definidas de forma semelhante. O vetor de deslocamento para o elemento pode ser escrito em função dos correspondentes deslocamentos no plano médio como:

$$u^e = T \cdot \bar{u}^e \; ; \qquad \text{(eq.III.11)}$$

sendo,

$$u^e = \left[u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}\right] ; \qquad \text{(eq.III.12.a)}$$

$$\bar{u}^e = \left[\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{\theta}_{x1}, \bar{\theta}_{y1}, \bar{\theta}_{z1}, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, \bar{\theta}_{x2}, \bar{\theta}_{y2}, \bar{\theta}_{z2}\right] . \qquad \text{(eq.III.12.b)}$$

A relação entre os vetores deslocamentos é expressa através da matriz de transformação,

$$T = \begin{bmatrix} [E(e)]_{6x6} & 0_{6x6} \\ 0_{6x6} & [E(e)]_{6x6} \end{bmatrix} ;$$

onde a submatriz E, função da excentricidade "e", é definida por:

$$E(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando a equivalência do trabalho realizado pelas forças nodais F^e e $\overline{F}^e$, pode-se concluir, utilizando a eq. III.11, que

$$\overline{F}^e = T^T \cdot F^e \; ; \qquad \text{(eq.III.13)}$$

onde,

$$F^e = [K] \cdot u^e \; ; \qquad \text{(eq.III.14)}$$

sendo [K] a matriz de rigidez do elemento definida na eq. III.8.

Substituindo-se a eq.III.11 na eq.III.14 e observando-se em III.11, obtém-se:

$$\overline{F}^e = T^T \cdot [K] \cdot T \cdot \overline{u}^e \; ; \qquad \text{(eq.III.15.a)}$$

ou ainda,

$$\overline{F}^e = \left[\overline{K}\right] \cdot \overline{u}^e \; ; \qquad \text{(eq.III.15.b)}$$

onde $\left[\overline{K}\right]$ é a matriz de rigidez referente aos graus de liberdade situados no plano da laje.

Portanto,

$$\left[\overline{K}\right] = T^T \cdot [K] \cdot T \; . \qquad \text{(eq.III.16)}$$

III.2. ELEMENTO DE PLACA REISSNER-MINDLIN

Um elemento de placa pode ser definido como um elemento plano cuja superfície é relativamente maior do que a sua espessura, capaz de suportar a ação de forças normais ao seu plano médio, e de momentos nele contidos, conforme mostra a Figura III.7.

Apesar da solução do problema de placa através do Método dos Elementos Finitos ter sido abordada inicialmente na década de 60, ainda hoje envolve um certo volume de pesquisa. O que se procura é uma solução numérica capaz de fornecer respostas satisfatórias e confiáveis para estruturas de placas submetidas a diversas condições de carregamento. As abordagens iniciais utilizaram a Teoria de Kirchhoff de

forma direta, interpolando apenas o deslocamento transversal w e obtendo as rotações a partir de suas derivadas. A expressão da energia de deformação daí resultante envolve derivadas de segunda ordem de w, e a abordagem esbarra na dificuldade para satisfazer a continuidade C^1 exigida pelo Método dos Elementos Finitos, além de não permitir que as deformações de cisalhamento transversal sejam consideradas.

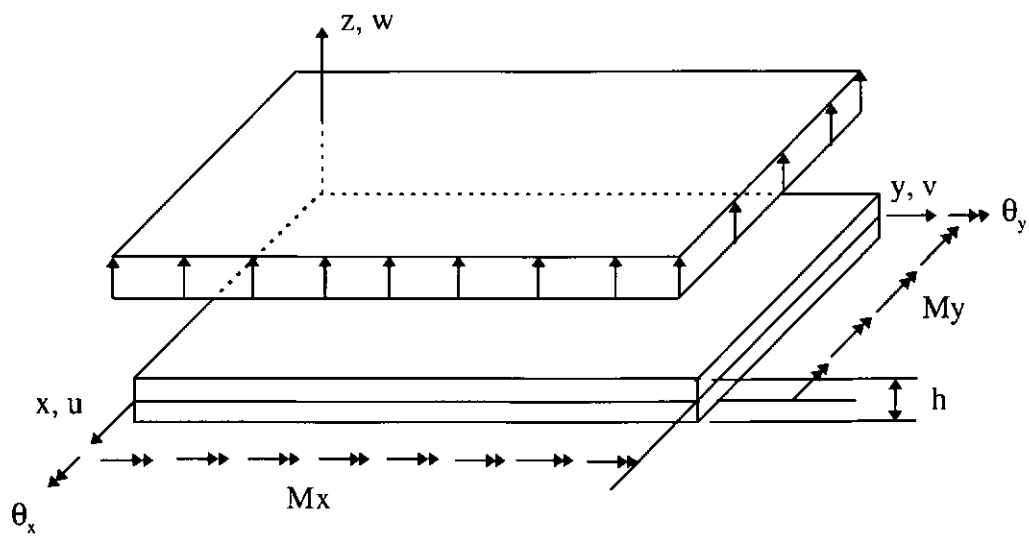


Figura III.7. Elemento de placa com forças e momentos atuando na sua superfície média.

A teoria de Reissner-Mindlin proporcionou meios para que este problema fosse contornado, interpolando independentemente o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y , obtendo assim as deformações de cisalhamento através do campo de deslocamento aproximado.

Porém, os elementos derivados desta teoria não apresentaram bons resultados no caso de placas de pequena espessura, uma vez que representavam a estrutura de forma demasiadamente rígida. Este fenômeno ficou conhecido como trancamento por cortante. Para evitar este efeito surgiram diversas propostas. A que será adotada no presente texto é conhecida como Técnica de Integração Seletiva Reduzida, e consiste em estimar a

energia de deformação de flexão e de cisalhamento através de uma integração numérica, utilizando um número reduzido de pontos de integração [24,28].

Antes de se abordar a Teoria de Reissner-Mindlin, alguns conceitos e hipóteses básicas devem ser lembradas.

1. A componente de tensão normal σ_z é muito menor que as demais, podendo-se adotar:

$$\sigma_z = 0 \qquad \text{(eq.III.17)}$$

2. Os pontos contidos na superfície média não sofrem deslocamentos nas direções dos eixos "x" e "y", ou seja :

$$u(x,y,0) = v(x,y,0) = 0 \qquad \text{(eq.III.18)}$$

3. Tendo em vista a eq.III.17, as componentes de tensão atuantes passam a ser aquelas mostradas na Figura III.8., que podem ser divididas em tensões de flexão $\{\sigma\}$ e de cisalhamento $\{\tau\}$ de acordo com as componentes:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(eq.III.19.a)}$$

$$\{\tau\} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \qquad \text{(eq.III.19.b)}$$

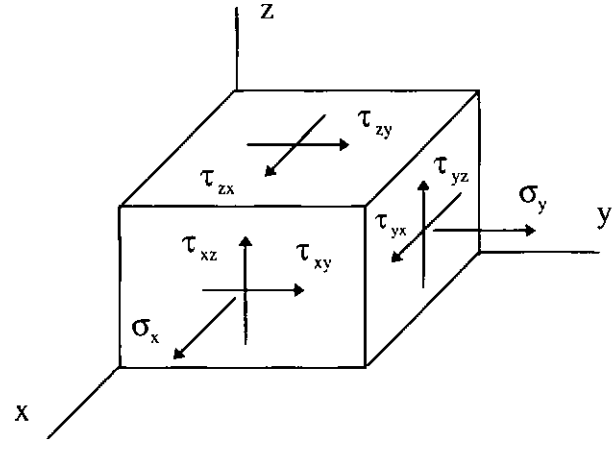


Figura III.8. Componentes de tensão para um elemento infinitesimal de placa.

4. A hipótese de tensão σ_z nula permite que a componente de deformação ε_x seja obtida diretamente a partir das relações constitutivas e das demais componentes de deformação. Entretanto, a parcela de energia relativa a ε_z é dada pela integral do produto

$$U_{bz} = \int_{Ve} \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \, \varepsilon_z \cdot dv \; ; \qquad \text{(eq.III.20)}$$

sendo portanto nula. Assim, não há interesse na estimativa dessa componente de deformação. Considera-se então, apenas as componentes de deformações de flexão $\{\varepsilon_b\}$e de cisalhamento$\{\gamma\}$:

$$\{\varepsilon_b\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{(eq.III.21.a)}$$

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \qquad \text{(eq.III.21.b)}$$

5. No caso de materiais isotrópicos ou ortótropicos, os efeitos de flexão e de cisalhamento são desacoplados. Os coeficientes que determinam as propriedades do material podem ser acondicionados nas matrizes [DE] e [GE]. Logo,

$$\{\sigma_b\} = [DE] \cdot \{\varepsilon_b\} \; ; \qquad \text{(eq.III.22.a)}$$

$$\{\gamma\} = [GE] \cdot \{\gamma\} \; ; \qquad \text{(eq.III.22.b)}$$

onde [DE] e [GE] são as matrizes de propriedades do material da placa à flexão e ao cisalhamento.

6. As deformações podem ser obtidas a partir do campo de deslocamentos através das expressões:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(eq.III.23.a)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{(eq.III.23.b)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{(eq.III.23.c)}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{(eq.III.23.d)}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \text{(eq.III.23.e)}$$

7. O vetor de momento e de forças cortantes podem ser respectivamente obtidos através das integrais:

$$\{M_b\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \{\sigma_b\} \cdot dz \qquad \text{(eq.III.24.a)}$$

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \{\tau\} \cdot dz \qquad \text{(eq.III.24.b)}$$

8. Considerando que, para materiais isotrópicos e ortotrópicos, os efeitos de flexão e de cisalhamento são desacoplados, pode-se dividir a energia de deformação em duas parcelas, definidas nas formas:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{Ve} \{\varepsilon_b\}^T \cdot \{\sigma_b\} \cdot dv = \frac{1}{2} \int_{Ve} \{\varepsilon_b\}^T \cdot [DE] \cdot \{\varepsilon\} \cdot dV; \qquad \text{(eq.III.25.a)}$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{Ve} \{\gamma\}^T \cdot \{\tau\} \cdot dv = \frac{1}{2} \int_{Ve} \{\gamma\}^T \cdot [GE] \cdot \{\gamma\} \cdot dV \; ; \qquad \text{(eq.III.25.b)}$$

sendo U_b a parcela referente à energia de flexão e U_s devido ao cisalhamento transversal.

A hipótese básica característica da Teoria de Reissner-Mindlin é de que, antes da deformação, os pontos pertencentes à placa que estão alinhados segundo uma reta normal à superfície média permanecem alinhados segundo uma reta, não

necessariamente normal à superfície média, após a deformação. Supõe-se, ainda, pequenas rotações, de modo que as mesmas se confundem com suas tangentes.

Considerando as hipóteses estabelecidas anteriormente, pode-se representar o campo de deslocamentos, de acordo com a Figura III.9, como:

$$w = w(x,y) \qquad \text{(eq.III.26.a)}$$

$$u = z \cdot \theta_y(x,y) \qquad \text{(eq.III.26.b)}$$

$$v = -z \cdot \theta_x(x,y) \qquad \text{(eq.III.26.c)}$$

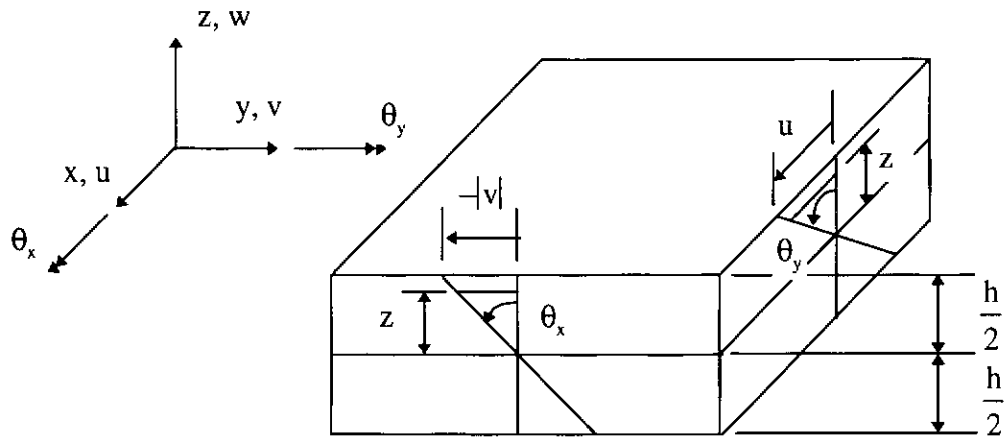


Figura III.9. Elemento de placa com os sentidos positivos de deslocamentos e rotações.

Das expressões III.23 e III.26, escreve-se o campo de deformações como sendo

$$\{\varepsilon_b\} = z \cdot \{\chi\} \ ; \qquad \text{(eq.III.27.a)}$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \ ; \qquad \text{(eq.III.27.b)}$$

onde $\{\chi\}$ é o vetor de curvatura, sendo definido por

$$\{\chi\} = [\nabla_1]\{\theta\} \ ; \qquad \text{(eq.III.28)}$$

e ainda,

$$\left[\nabla_1\right] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} ;$$

$$\{\theta\} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} .$$

É importante observar que as deformações de cisalhamento $\{\gamma\}$ e a curvatura $\{\chi\}$ são constantes na direção da espessura.

As tensões de flexão e de cisalhamento são escritas a partir das equações III.22 e III.27. Assim,

$$\left\{\sigma_b\right\} = z \cdot [DE] \cdot \{\chi\} \ ; \qquad \text{(eq.III.29.a)}$$

$$\{\tau\} = [GE] \cdot \{\gamma\} \quad . \qquad \text{(eq.III.29.b)}$$

Com as equações III.24.a. e III.29.a, pode-se escrever o vetor de momento do seguinte modo:

$$\left\{M_b\right\} = [DB] \cdot \{\chi\} \ ; \qquad \text{(eq.III.30.a)}$$

onde, considerando materiais homogêneos, tem-se,

$$[DB] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot [DE] \cdot dz = \frac{h^3}{12} \cdot [DE] \quad . \qquad \text{(eq.III.30.b)}$$

Com relação aos esforços cortantes, deve-se observar que as deformações de cisalhamento definidas pela eq.III.27.b. conduzem a tensões de cisalhamento constantes ao longo da espessura, porém da Teoria das Placas [29] sabe-se, na realidade, que tais tensões variam quadraticamente. A fim de corrigir o erro na estimativa da energia de deformação de cisalhamento decorrente dessa má distribuição de tensões, são

introduzidos fatores de correção de cisalhamento transversal Kx e Ky, que permitem considerar as tensões de cisalhamento como uma correção das tensões médias. Portanto,

$$\{\tau\} = \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{Kx} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ky} \end{bmatrix} \cdot \{Q\} \ ; \qquad \text{(eq.III.31)}$$

à qual, junto com a eq. III.29.b. resulta em

$$\{Q\} = [DS] \cdot \{\gamma\} \ ; \qquad \text{(eq.III.32)}$$

onde,

$$[DS] = h \cdot \begin{bmatrix} kx & 0 \\ 0 & ky \end{bmatrix} \cdot [GE]$$

A parcela da energia de deformação devida à flexão, utilizando-se as equações III.25.a. e III.27a, pode ser escrita como:

$$U_b = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ve} z^2 \cdot \{\chi\}^T \cdot [DE] \cdot \{\chi\} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ae} \{\chi\} \cdot [DB] \cdot \{\chi\} \cdot dA \qquad \text{(eq.III.33)}$$

Para a parcela da energia de deformação devida ao cisallhamento, no caso de materiais isotrópicos ou ortotrópicos, a matriz dos módulos de cisalhamento [G] é diagonal, permitindo que se escreva:

$$\tau_{xz} = Gxz \cdot \gamma_{xz} \ ; \qquad \text{(eq.III.34.a)}$$

$$\tau_{xz} = Gxz \cdot \gamma_{xz} \ ; \qquad \text{(eq.III.34.b)}$$

que, pela teoria de Reissner-Mindlin, com tensões de cisalhamento corrigidas, fornece a energia de deformação, para este caso, através da soma

$$\overline{Us} = \overline{Us}_x + \overline{Us}_y \ ; \qquad \text{(eq.III.35.a)}$$

onde as parcelas da $\overline{Us}_x$ e $\overline{Us}_y$ podem ser obtidas das equações III.25.b., III.31 e III.34, e colocadas na forma

$$\overline{Us}_x = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ve} \frac{\tau_{xz}^2}{Gxz} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h \cdot Gxz \cdot Kx^2} \cdot \int_{Ae} Qx^2 \cdot dA \ ; \qquad \text{(eq.III.35.b)}$$

$$\overline{Us}_y = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ve} \frac{\tau_{yz}^2}{Gyz} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h \cdot Gyz \cdot Ky^2} \cdot \int_{Ae} Qy^2 \cdot dA \quad . \qquad \text{(eq.III.35.c)}$$

A distribuição de tensões $\{\tau\}$ na direção da espessura, regida pelo equilíbrio entre tensões cisalhantes e de flexão, é obtida a partir da equação

$$\frac{\partial\{\tau\}}{\partial z} = -\left[\nabla_2\right] \cdot \left\{\sigma_b\right\} \; ; \qquad \text{(eq.III.36)}$$

onde,

$$\left[\nabla_2\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} .$$

Assim, utilizando também as equações III.29.a e III.30 para escrever as tensões de cisalhamento em função dos momentos, obtém-se:

$$\{\tau\} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{z} \left[\nabla_2\right] \cdot \left\{\sigma_b\right\} \cdot dz = \frac{-12}{h^3} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{z} z \cdot \left[\nabla_2\right] \cdot \left\{M_b\right\} \cdot dz = \frac{6}{h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \cdot \left[\nabla_2\right] \cdot \left\{M_b\right\}$$

(eq.III.37)

Deve-se notar que as tensões de cisalhamento definidas pela eq.III.37 podem facilmente ser escritas, em função dos esforços cortantes, através das equações de equilíbrio entre momentos e cortantes [30]. Sendo assim, a energia de deformação ao cisalhamento, fornecida pela teoria da elasticidade, como na eq.III.35, pode ser escrita de forma semelhante. Portanto,

$$Us_x = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ve} \frac{\tau_{xz}^2}{Gxz} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5 \cdot h \cdot Gxz} \cdot \int_{Ae} Qx^2 \cdot dA \; ; \qquad \text{(eq.III.38.a)}$$

$$Us_y = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ve} \frac{\tau_{yz}^2}{Gyz} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5 \cdot h \cdot Gyz} \cdot \int_{Ae} Qy^2 \cdot dA \; ; \qquad \text{(eq.III.38.b)}$$

e os fatores de correção de cisalhamento transversal são definidos como:

$$Kx = \frac{Us_x}{\overline{Us}_x} = \frac{5}{6} \qquad \text{(eq.III.39.a)}$$

$$Ky = \frac{Us_y}{\overline{Us}_y} = \frac{5}{6} \qquad \text{(eq.III.39.b)}$$

Finalmente, a energia de deformação devida ao cisalhamento corrigida pode ser determinada a partir do campo de cisalhamento resultante da teoria de Reissner-Mindlin através das equações III.32, III.35 e III.39. Obtém-se, portanto, a expressão:

$$Us = \frac{1}{2} \cdot \int_{Ae} \{\gamma\}^T \cdot [DS] \cdot \{\gamma\} \cdot dA \qquad \text{(eq.III.40)}$$

As equações III.23, III.26 e III.32, fornecem a seguinte relação:

$$\frac{U_s}{U_b} = \frac{\int_{Ae} \{\gamma\}^T \cdot [DS] \cdot \{\gamma\} \cdot dA}{\int_{Ae} \{\chi\}^T \cdot [DB] \cdot \{\chi\} \cdot dA} = \frac{12}{h^2} \cdot K \cdot \frac{\int_{Ae} \{\gamma\}^T \cdot [GE] \cdot \{\gamma\} \cdot dA}{\int_{Ae} \{\chi\}^T \cdot [DE] \cdot \{\chi\} \cdot dA} \quad ; \qquad \text{(eq.III.41)}$$

onde $K = \frac{5}{6}$.

À medida que a espessura h tende a zero, os efeitos do cisalhamento transversal tornam-se desprezíveis, e a relação U_s/U_b deve também tender a zero. Porém, na eq.III.41 tem-se no denominador o quadrado da espessura. Logo, para que esta condição seja válida é necessário que o quociente das integrais do lado direito tenda rapidamente para zero no caso de placas delgadas, espessuras menores que um décimo da menor dimensão lateral. Caso isto não ocorra, a rigidez de cisalhamento torna-se superestimada, levando a deslocamentos demasiadamente pequenos em caso de placas finas. Este efeito, como já foi dito, ficou conhecido como trancamento por cortante e a técnica utilizada no presente trabalho para contornar este problema é a mesma utilizada por Owen [28], denominada Técnica de Integração Seletiva Reduzida.

A Técnica de Integração Seletiva Reduzida monta a matriz de rigidez do elemento de placa através de uma integração numérica, empregando para isso um elemento isoparamétrico bi-linear com quatro nós, conforme mostrado na Figura III.10.

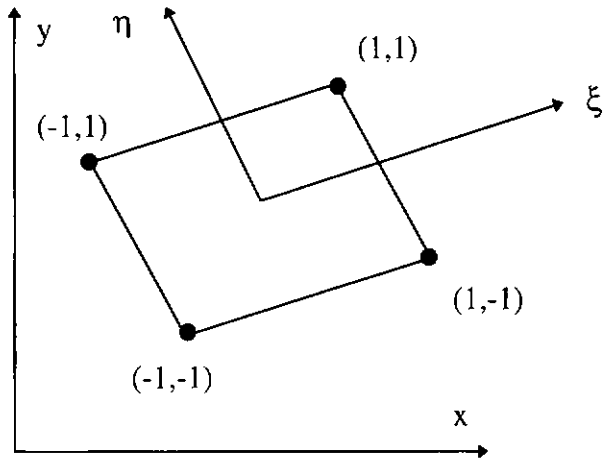


Figura III.10. Elemento isoparamétrico bi-linear

O campo de deslocamentos para este elemento pode ser definido em termos das funções interpolações (N_i) e dos deslocamentos (d_i) em cada nó relativo aos eixos naturais ξ e η. Assim,

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i \cdot d_i \quad ; \qquad \text{(eq.III.42.a)}$$

ou ainda,

$$\{u\} = [N]_{3X12} \cdot \{d\} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{Bmatrix} \quad ; \qquad \text{(eq.III.42.b)}$$

onde a função interpolação para cada nó é definida por:

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \qquad \text{(eq.III.43.a)}$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \qquad \text{(eq.III.43.b)}$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \qquad \text{(eq.III.43.c)}$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \qquad \text{(eq.III.43.d)}$$

As derivadas das funções interpolação em relação aos eixos "x" e "y", para este elemento, são definidas através da expressão

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} ; \qquad \text{(eq.III.44)}$$

sendo [J] a matriz jacobiana da transformação definida na eq.III.42, e onde:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e . \qquad \text{(eq.III.45)}$$

Empregando-se as relações,

$$\{\chi\} = \left[B_b\right]_{3X12} \cdot \{d\} ; \qquad \text{(eq.III.46.a)}$$

$$\{\gamma\} = \left[B_s\right]_{2x12} \cdot \{d\} ; \qquad \text{(eq.III.46.b)}$$

e utilizando-se as equações III.27, III.33, III.40 e III.42, finalmente pode-se escrever a energia de deformação, tanto à flexão quanto ao cisalhamento, na forma,

$$U_b = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot \left[K_b\right] \cdot \{d\} ; \qquad \text{(eq.III.47.a)}$$

$$U_s = \frac{1}{2} \cdot \{d\}^T \cdot \left[K_s\right] \cdot \{d\} ; \qquad \text{(eq.III.47.b)}$$

onde,

$$\left[K_b\right] = \int_{Ae} \left[B_b\right]^T \cdot [DB] \cdot \left[B_b\right] \cdot dA \qquad \text{(eq.III.48.a)}$$

$$\left[K_s\right] = \int_{Ae} \left[B_s\right]^T \cdot [DS] \cdot \left[B_s\right] \cdot dA \qquad \text{(eq.III.48.b)}$$

sendo,

$$\left[B_b\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}\cdot[N] \quad ; \qquad \text{(eq.III.49.a)}$$

$$\left[B_s\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot[N] \quad . \qquad \text{(eq.III.49.b)}$$

Para a integração numérica, lembrando-se que $dA = \det[J]\cdot d\xi\cdot d\eta$, as equações III.48 tomam a forma,

$$\left[K_b\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B_b\right]^T\cdot[DB]\cdot\left[B_b\right]\cdot d\xi\cdot d\eta \quad ; \qquad \text{(eq.III.50.a)}$$

$$\left[K_s\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B_s\right]^T\cdot[DS]\cdot\left[B_s\right]\cdot d\xi\cdot d\eta \quad ; \qquad \text{(eq.III.50.b)}$$

ou ainda,

$$\left[K_b\right]\cong\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left[B_b\right]^T\cdot[DB]\cdot\left[B_b\right]\cdot W_i\cdot W_j \quad ; \qquad \text{(eq.III.51.a)}$$

$$\left[K_s\right]\cong\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left[B_s\right]^T\cdot[DS]\cdot\left[B_s\right]\cdot W_i\cdot W_j \quad ; \qquad \text{(eq.III.51.b)}$$

onde, "n" e "p" são os números de pontos de quadratura nas direções ξ e η, também chamados de pontos de Gauss, e W_j são os correspondentes fatores de ponderação.

A Técnica de Integração Seletiva Reduzida utiliza para a montagem da matriz de rigidez referente à flexão os quatro pontos exigidos pela regra da quadratura de Gauss, ou seja, n = p = 2, enquanto para a matriz de rigidez ao cisalhamento, de modo a minimizar o efeito devido ao cortante, utiliza-se somente um ponto, n = p =1, conforme mostrado na Figura III.11.

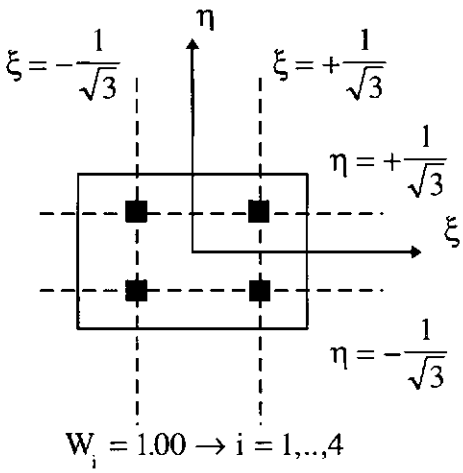


Figura III.11.a. Localização dos pontos de Gauss para elemento quadrilátero, com n = p = 2.

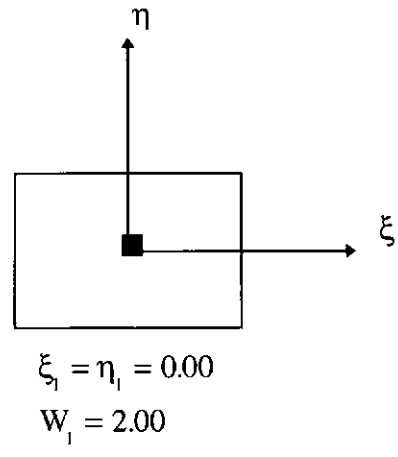


Figura III.11.b. Localização dos pontos de Gauss para elemento quadrilátero, com n = p = 1.

Para a montagem da matriz de massa, emprega-se a equação:

$$[M] = \int_{Ve} \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot dV \qquad \text{(eq.III.52)}$$

onde, conforme os deslocamentos apresentados na figura III.12, considerando-se um elemento de placa retangular hermítico cúbico, com funções de interpolação de não-conformidade, isto é, que não garantem a continuidade da inclinação ao longo do contorno do elemento [26],

$$N_i \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot(\xi_0+1)\cdot(\eta_0+1)\cdot(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2) \Rightarrow \text{variável u} \\ \frac{1}{2}\cdot\xi_i\cdot(\xi_0+1)^2\cdot(\xi_0-1)\cdot(\eta_0+1) \Rightarrow \text{derivada } \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{1}{2}\cdot\eta_i(\xi_0+1)\cdot(\eta_0+1)^2\cdot(\eta_0-1) \Rightarrow \text{derivada } \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \xi_0 = \xi\cdot\xi_i \qquad \eta_0 = \eta\cdot\eta_i \end{cases}$$

$$i \rightarrow 1,..,4 \qquad \text{(eq.III.53)}$$

$$(\xi_i, \eta_i) \rightarrow \text{coordenadas naturais do } i-\text{ésimo nó}$$

Daí, obtém-se a matriz simétrica de massa para um elemento de placa [31]:

$$[c] = \begin{bmatrix}
3454 & & & & & & & & & & & \\
461a & 80a^2 & & & & & & & & & & \\
-461b & -63ab & 80b^2 & & & & & & & & & \\
1226 & 274a & -199b & 3454 & & & & & & & & \\
-274a & -60a^2 & 42ab & -461a & 80a^2 & & & & & & & \\
-199b & -42ab & 40b^2 & 461b & 63ab & 80b^2 & & & & & & \\
394 & 116a & -116b & 1226 & -199a & -274b & 3454 & & & & & \\
-116a & -30a^2 & 28ab & -199a & 40a^2 & 42ab & -461a & 80a^2 & & & & \\
116b & 28ab & -30b^2 & 274b & -42ab & -60b^2 & 461b & -63ab & 80b^2 & & & \\
1226 & 199a & -274b & 394 & -116a & -116b & 1226 & -274a & 199b & 3454 & & \\
199a & 40a^2 & -42ab & 116a & -30a^2 & -28ab & 274a & -60a^2 & 42ab & 461a & 80a^2 & \\
274b & 42ab & -60b^2 & 116b & -28ab & -30b^2 & 199b & -42ab & 40b^2 & 461b & 63ab & 80b^2
\end{bmatrix}$$

$$[M] = \frac{\rho \cdot h \cdot a \cdot b}{25200} \cdot [c] \ . \qquad \text{(eq.III.54)}$$

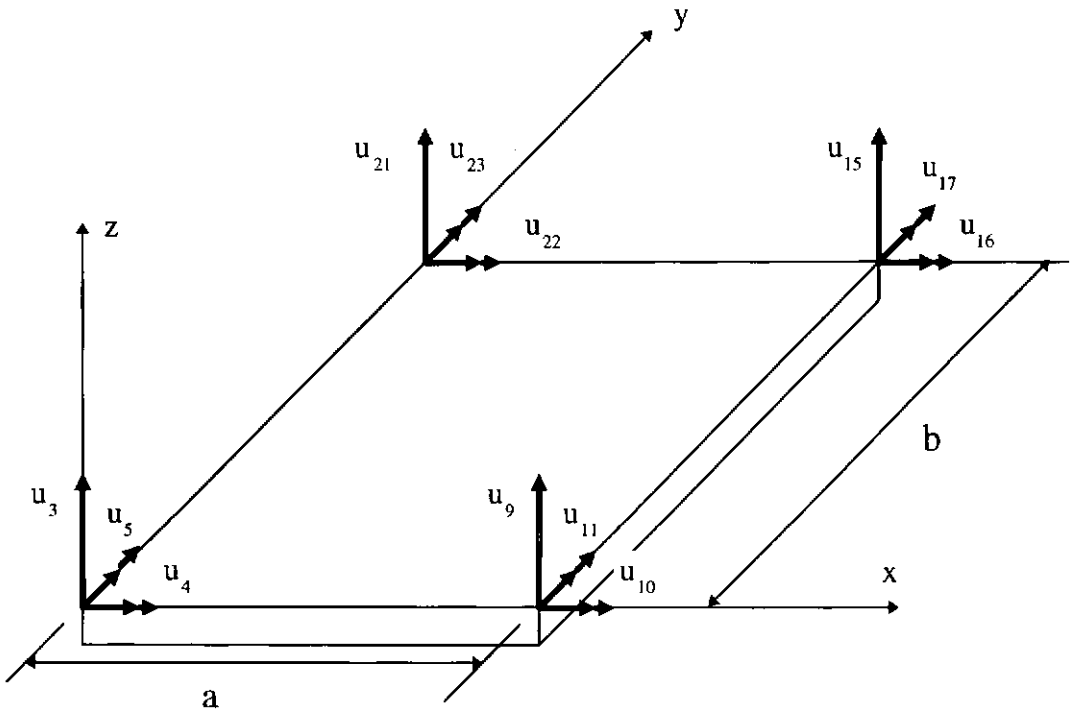


Figura III.12. Elemento de placa com o sentido positivo dos deslocamentos em cada um dos nós.

III.3. ELEMENTO DE MEMBRANA

Muito embora o presente trabalho não tenha por objetivo analisar casos em que esteja envolvido o efeito de membrana em lajes, o PEFAV inclui também um elemento de membrana, de modo a se obter o caso mais geral para um elemento de placa, considerando tanto o efeito a flexão quanto o resultante do estado plano de tensões, isto é, membrana.

Entende-se por elemento de membrana aquele elemento cujas dimensões laterais são relativamente maiores do que a sua espessura "h" e cujas forças atuantes estão no mesmo plano de sua superfície média.

Por se tratar de um elemento de formulação muito simples, serão feitas somente algumas considerações teóricas. Inicialmente, baseado no elemento de placa mostrado na Figura III.13, com os respectivos deslocamentos referentes somente à consideração da membrana, pode-se adotar como modelo, em elementos finitos, o mesmo elemento isoparamétrico bilinear adotado para a placa à flexão; por conseguinte, também as mesmas funções de interpolação definidas na eq.III.43 podem ser adotadas.

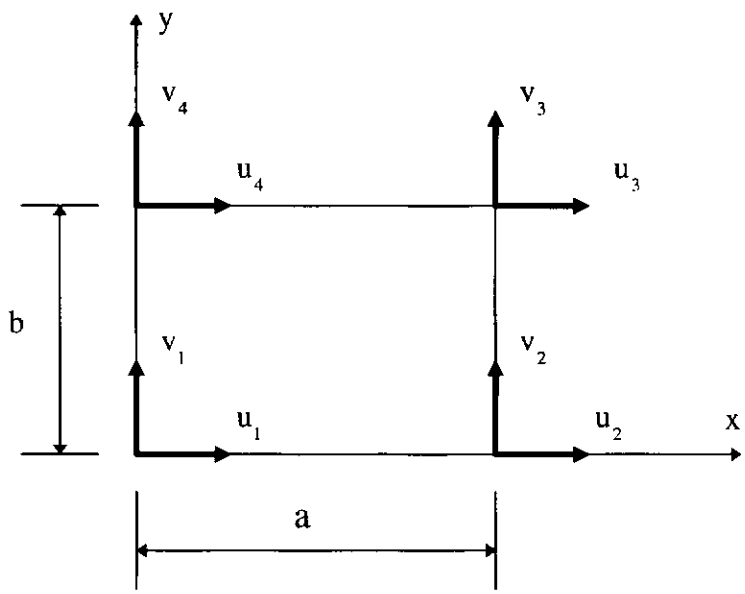


Figura III.13. Elemento de placa considerando-se somente o efeito de membrana.

Lembrando-se que o campo de deslocamento para este caso pode ser definido por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} ; \qquad \text{(eq.III.55)}$$

e que a relação deformação-deslocamento expressa na forma matricial é dada por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} ; \qquad \text{(eq.III.56.a)}$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [J]_{2x2}^{-1} & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & [J]_{2x2}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} ; \qquad \text{(eq.III.56.b)}$$

e ainda,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} ; \qquad \text{(eq.III.56.c)}$$

a matriz de rigidez pode então ser definida na forma:

$$[K] = \int_{Ve} [B]^T \cdot [CE] \cdot [B] \cdot dV ; \qquad \text{(eq.III.57)}$$

$$[K]_{8x8} = \int_{Ae} [B]^T_{8x3} \cdot [CE]_{3x3} \cdot [B]_{3x8} \cdot h \cdot dA \ ;$$

$$[K]_{8x8} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T \cdot [CE] \cdot [B] \cdot h \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \ ; \qquad \text{(eq.III.58.a)}$$

ou ainda, empregando-se a regra da quadratura de Gauss para integração numérica, obtém-se uma equação semelhante à equação III.51.:

$$[K] \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} [B]^T \cdot [CE] \cdot [B] \cdot W_i \cdot W_j \ ; \qquad \text{(eq.III.58.b)}$$

onde considera-se quatro pontos de integração, ou seja, n = p = 2, sendo [CE] a matriz constitutiva do elemento. Assim, também para o elemento de membrana, a matriz de rigidez elementar será montada empregando-se integração numérica para a eq.III.58.b.

Para a obtenção da matriz de massa utiliza-se também a equação III.52 e as mesmas funções de interpolação empregadas na montagem da matriz de rigidez. Assim, obtém-se a matriz simétrica de massa para este elemento na forma:

$$[M] = \int_{Ve} \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot dV \ ; \qquad \text{(eq.III.52)}$$

$$[M] = \frac{\rho \cdot h \cdot a \cdot b}{36} \cdot \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & \\ 2 & 0 & 4 & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 4 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(eq.III.59)}$$

É bom ressaltar, ainda, que ambos, elemento de placa e de membrana, são definidos, neste presente trabalho, em termos de suas coordenadas globais. Portanto, as matrizes de rigidez e de massa obtidas para estes elementos já são as matrizes referentes aos eixos globais, não havendo a necessidade de utilização de qualquer matriz de rotação, como foi feito para o elemento de pórtico.

III.4. SISTEMA COMPUTACIONAL PEFAV

O Programa em Elementos Finitos com Atenuação de Vibrações (P.E.F.A.V) foi escrito em Fortran e sua organização computacional segue o mesmo padrão apresentado por Magluta [8] e posteriormente por Faria [15], ou seja, é dividido em diversos blocos de modo a facilitar a análise, bem como diminuir o esforço computacional. A seguir é feito um resumo de cada um destes blocos, e em seguida é apresentado um organograma de modo a facilitar a visualização da interligação entre eles. É bom frisar que a finalidade principal deste trabalho não é criar nenhum sistema novo de cálculo estrutural, mas tão somente criar uma ferramenta que possibilite a análise de estruturas, principalmente lajes nervuradas, sob a ação de cargas dinâmicas com atenuação das vibrações causadas pelas mesmas, empregando para isso, absorsores passivos.

• PRÉ-PROCESSADOR

O módulo pré-processador gera um arquivo de entrada de dados que será empregado pelo módulo PEFAV_1 ou PEFAV_2, conforme o caso. Para isto, faz geração de malha, tanto dos elementos quadriláteros como placa e membrana, quanto para os elementos de barra, pórtico plano e espacial. Muito embora seja um gerador de malhas de relativa simplicidade, atende satisfatoriamente às necessidades dos módulos PEFAV_1 e PEFAV_2. Destaca-se ainda que o arquivo gerado por este módulo é do tipo texto, de modo que o usuário pode alterar qualquer dado sem necessidade de ter que executar tudo de novo, fazendo a alteração diretamente no arquivo. Assim, para um determinado modelo estrutural, o usuário pode ir variando qualquer característica física ou determinada força, fazendo-o diretamente no arquivo, tendo que utilizar o pré-processador obrigatoriamente apenas uma vez.

• **PEFAV_1**

O PEFAV_1 é o módulo que faz a análise estática com os dados do arquivo gerado pelo pre-processador, monta a matriz de rigidez da estrutura e, de acordo com as forças que atuam sobre a mesma, gera um arquivo com todos os deslocamentos ou apenas aqueles previamente escolhidos, de acordo com os graus de liberdade da estrutura. Este módulo ainda gera mais dois arquivos principais, um com os esforços no elemento de pórtico e o outro nos elementos de placa, incluindo neste o elemento de membrana. Também tem-se a opção de impressão de todos os esforços ou somente de alguns previamente selecionados. Apesar da análise deste trabalho estar mais intimamente ligada aos efeitos provocados por cargas dinâmicas, a análise estática também se faz necessária, uma vez que no estudo ou projeto de estruturas reais sempre atuam as cargas ditas permanentes como peso próprio, de utilização, etc. Assim, o módulo PEFAV_1 faz-se necessário no PEFAV

• **PEFAV_2**

Este é o módulo principal do sistema, que determina todas as características dinâmicas da estrutura. Empregando elementos de pórtico, membrana e placa, o PEFAV_2 monta as matrizes de rigidez e de massa da estrutura e determina as freqüências e modos de vibrações através da solução do problema de autovalor; para isso utiliza o arquivo de dados previamente montado pelo pré-processador. Em seguida, empregando a técnica da subestruturação, monta um arquivo de dados de modo a guardar de uma forma bem compacta todas as características da estrutura que serão de suma importância em toda a análise dinâmica que se pretende fazer. O arquivo de saída principal será utilizado, tanto durante o processo de otimização realizado pelo PEFAV_3, quanto da montagem das matrizes de rigidez, massa e amortecimento com a

inclusão dos sistemas de absorção efetuado pelo PEFAV_4. É o módulo mais demorado e o que ocupa mais espaço de memória, mas só é necessário executá-lo apenas uma vez.

- **PEFAV_3**

Baseado na técnica de otimização do Goal Programming, este módulo busca os parâmetros ótimos de rigidez e de massa para um ou mais sistemas de absorção, empregando o arquivo de dados gerado pelo módulo PEFAV_2, de acordo com as restrições impostas e aspirações desejadas pelo usuário. A partir dos dados estabelecidos, o PEFAV_3 faz a busca dos parâmetros ótimos que propiciem a redução desejada da aceleração e/ou do deslocamento. Quando tais valores não podem ser atingidos, pelas próprias limitações físicas do problema, o módulo determina os valores mais próximos possíveis da solução desejada. É um processo que não conduz a uma única solução, ficando dependente dos valores iniciais que lhe são fornecidos, sendo portanto necessário um bom conhecimento do comportamento dinâmico da estrutura e uma boa noção sobre o tipo de absorsor utilizado na atenuação das vibrações, de modo a se conseguir uma solução muito mais rápida. À medida que o programa fornece uma solução, pode-se tomá-la como novo ponto de partida da busca, num processo de realimentação de dados, de modo a obter-se resultados cada vez mais refinados, até que estes possam convergir para uma solução satisfatória. Portanto, observa-se que o processo de otimização realizado pelo módulo PEFAV_3 é um processo de iteração com o próprio usuário, uma vez que este, através de sua experiência, determina quando a solução é realmente satisfatória.

• **PEFAV_4**

Com os resultados de otimização obtidos através do PEFAV_3 e do arquivo gerado pelo PEFAV_2, este módulo monta as novas matrizes de rigidez, massa e amortecimento, com a adição dos sistemas de absorção já otimizados e em suas posições definitivas. Calcula as novas freqüências e modos de vibrações e gera um arquivo onde as informações da estrutura original sem absorsores e da estrutura após a introdução dos mesmos são guardadas, e que serão posteriormente utilizadas pelos demais módulos.

• **PEFAV_5**

O módulo PEFAV_5 calcula a FRF (Função de Resposta em Frequência) da estrutura original sem absorsores e da estrutura com a introdução dos mesmos. Com o arquivo gerado pode-se ajustar o modelo numérico, possibilitando dessa forma a maximização da eficiência dos absorsores. Através dos dados deste arquivo, pode-se também ter uma boa idéia do comportamento da estrutura quando são introduzidos os absorsores.

• **PEFAV_6**

Este módulo calcula, para os pontos previamente selecionados, os valores de deslocamentos no domínio do tempo, utilizando o método de integração Runge-Kuta com os modos de vibração calculados empregando-se o modelo "pseudo-proporcional", e considerando-se um dos dois casos: estrutura com ou sem absorsores.

• **PEFAV_7**

O módulo PEFAV_7 é semelhante ao módulo anterior, sendo que neste os valores são calculados para o domínio da freqüência nos dois casos previstos.

• **PEFAV_8**

Calcula os esforços nos elementos previamente selecionados, no domínio do tempo, utilizando o método de integração Runge-Kuta com os modos de vibração calculados empregando-se o modelo "pseudo-proporcional", para ambos os casos: estrutura com e sem absorsores. É bom lembrar do que foi mencionado no Capítulo II, no qual destacou-se que, para os elementos onde deseja-se obter os esforços, os nós devem ser definidos como externos, pois como estes continuam existindo após a transformação imposta ao sistema durante a subestruturação, as informações referentes a eles permanecem inalteradas, enquanto para os nós internos sofrem aproximações.

• **PEFAV_9**

Assim como o módulo anterior, o PEFAV_9 também calcula os esforços elementares, mas no domínio da freqüência. A mesma observação feita para o módulo anterior é valida para o PEFAV_9

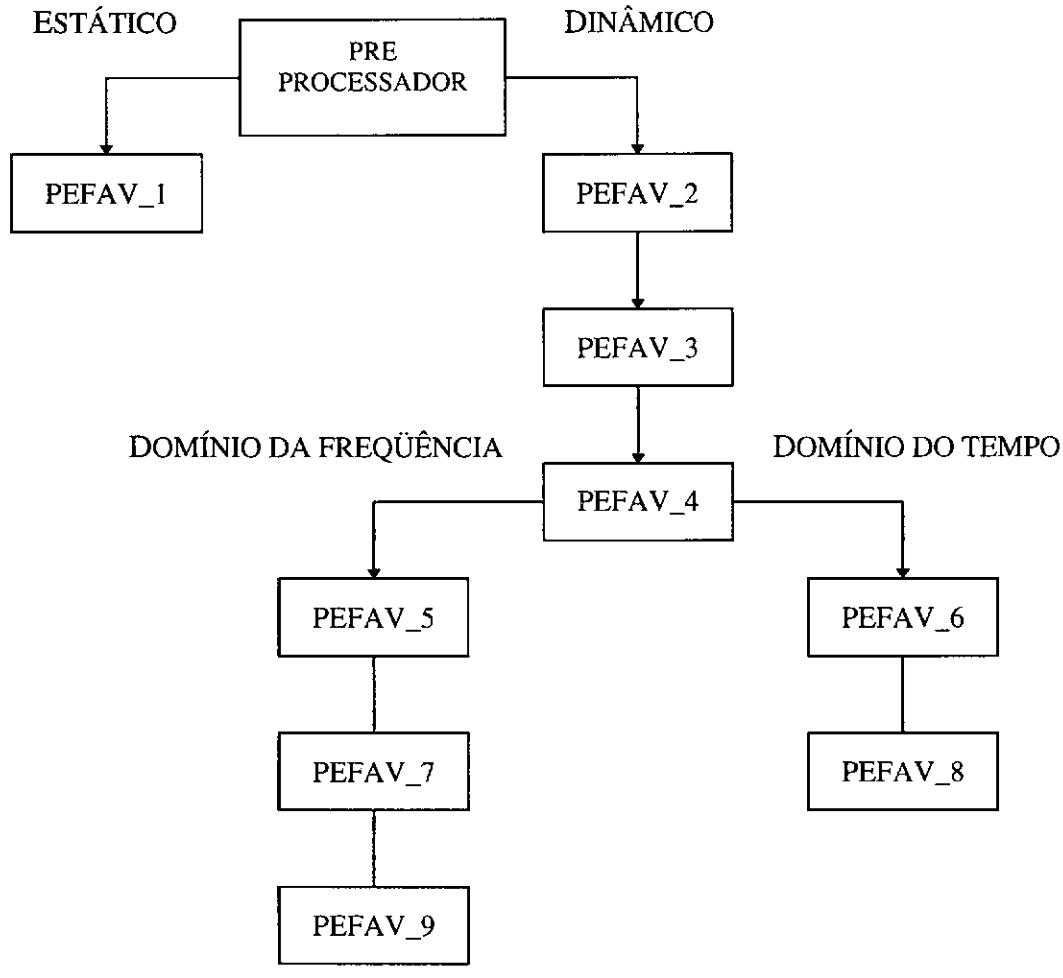


Figura III.14. Organograma do Sistema PEFAV.

CAPÍTULO IV

CONCEITOS BÁSICOS DE PROJETO

Quando projeta-se uma nova estrutura, ou reanalisa-se uma estrutura existente, há sempre a necessidade de verificação dos estados limite de utilização e de segurança, respectivamente para as deformações e para os esforços resultantes do carregamento imposto, conforme a destinação proposta para a estrutura. Para isso basta consultar o que estabelecem as normas de projeto estrutural da ABNT. Mas o que fazer quando este carregamento é variável no tempo (i.e., quando as solicitações na estrutura são de natureza dinâmica) se estas normas são, em geral, ainda omissas quanto a vários aspectos resultantes. A única alternativa para obter-se alguns parâmetros necessários à análise é, em certos casos, recorrer às Normas e Recomendações Internacionais, como por exemplo a ISO 2631/1[32] e a 2631/2 [33] no que diz respeito ao conforto humano. Para estruturas destinadas a edificações comerciais e residenciais, algumas considerações iniciais a respeito das cargas geradas por atividades humanas devem ser feitas antes de se observar estas recomendações técnicas.

IV.1. CARREGAMENTO DINÂMICO

Uma diversidade de tipos de carregamentos dinâmicos podem atuar sobre uma estrutura de um edifício, como, por exemplo, os oriundos das ações ambientais como vento e sismos. Mas, para o presente estudo é de interesse somente o carregamento dinâmico gerado sobre os pisos das edificações por algumas atividades humanas[34-37]. Embora sejam muitas as atividades humanas, as que envolvem pulos e/ou dança num movimento sincronizado entre pessoas, podem ser consideradas as mais importantes

para a presente análise, isto tendo em vista que, para as características usuais das estruturas das lajes de piso de edifícios residenciais ou comerciais, o movimento aleatório das pessoas em outras atividades, tal como andar, não provocariam, em geral, deslocamentos dinâmicos ou acelerações consideráveis que infrinjam os estados limites de utilização (deformação e fissuração excessivas, desconforto dos usuários, etc) e de segurança.

O carregamento em função do tempo para atividades que envolvam pulos (vide Fig. IV.1), pode ser simulado por uma seqüência de forças impulsivas com um certo intervalo de duração t_c (duração do contato) seguido por intervalo t_p em que a força é zero, quando os pés deixam de estar em contato com o piso. Propõe-se [15] que a função para este tipo de carregamento possa ser expressa por uma seqüência de pulsos semi-senoidais, conforme mostrado nas Figuras IV.1. e IV.2.

A função de carregamento para estes tipos de atividades pode ser descrita através de uma serie de Fourier de "n" harmônicos na forma [7]

$$F(t) = G_{st} + \sum_{i=1}^{n} G_{st} \cdot \alpha_i \cdot \text{sen}(2\pi \cdot i \cdot f_T \cdot t - \phi_i) \; ; \qquad \text{(eq.IV.1)}$$

onde,

G_{st} - Densidade de carga (Força por unidade de área);

f_T - Freqüência de excitação da força (i.e., freqüência fundamental da atividade humana);

ϕ_i - Fase relativa da força de excitação;

α_i - Coeficientes da série.

Os coeficientes de Fourier α_i para a função da equação IV.1. são determinados a partir de medições experimentais considerando um caso específico de atividade

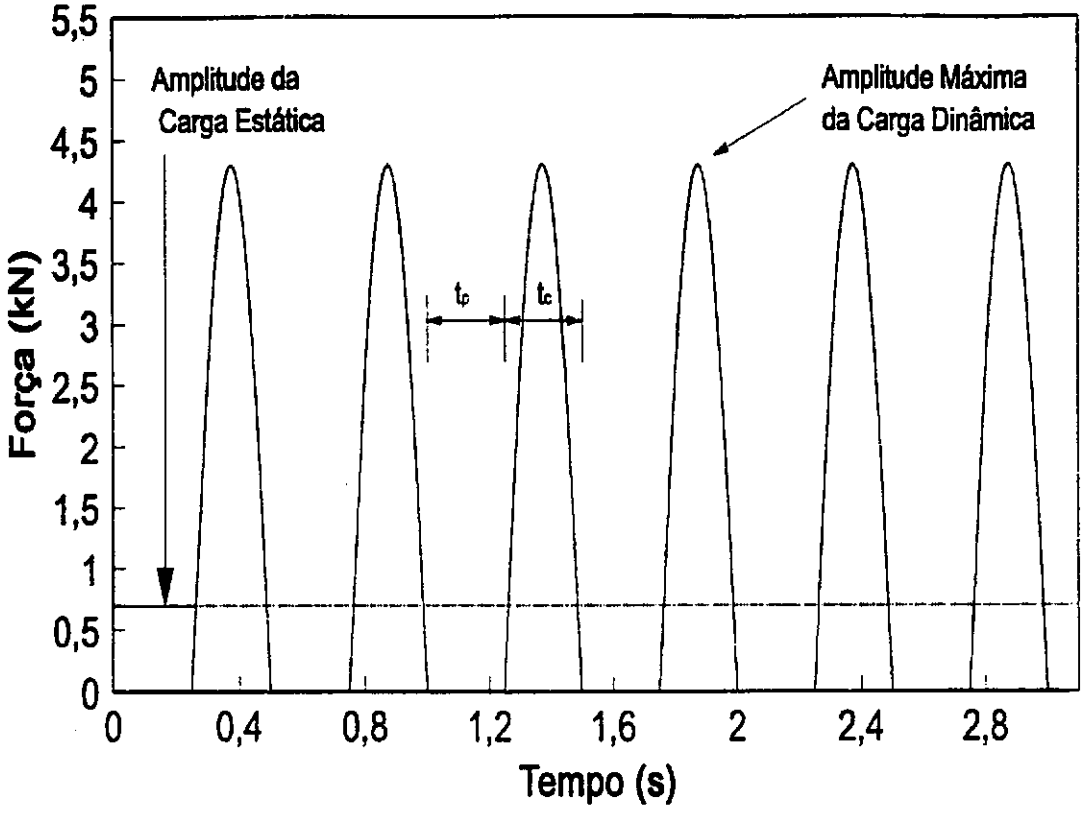


Figura IV.1. Sinal característico, no domínio do tempo, da força de excitação gerada por uma pessoa pulando na freqüência de 2.0 Hz.

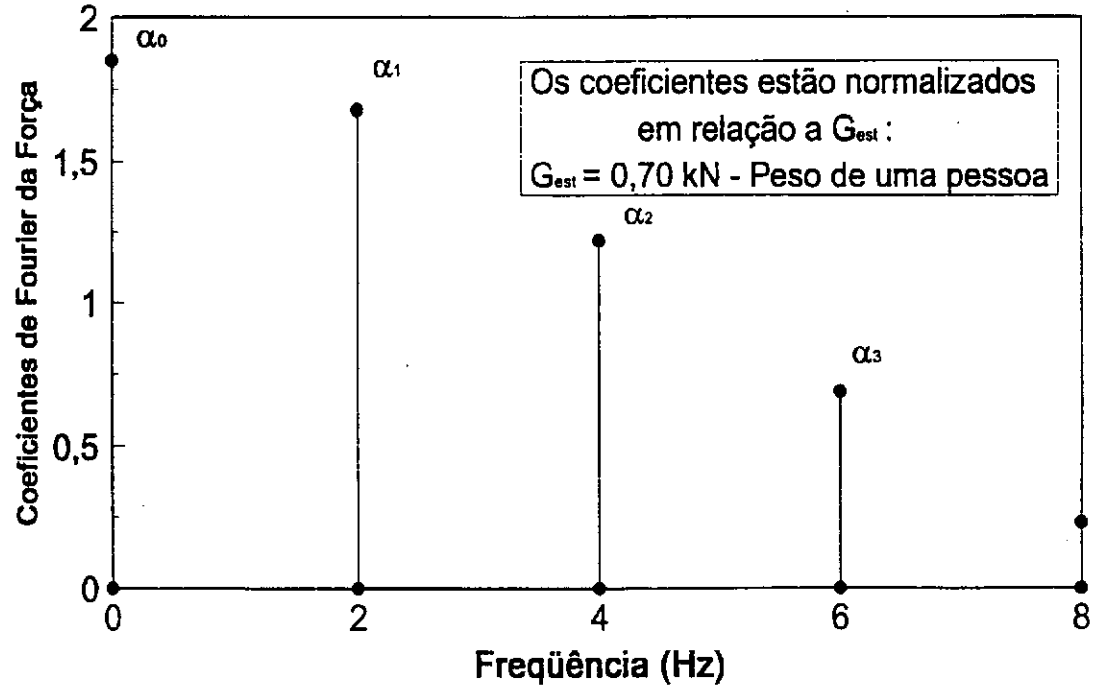


Figura IV.2. Sinal característico, no domínio da freqüência, da força de excitação gerada por uma pessoa pulando na freqüência de 2.0 Hz.

desenvolvida. Apresenta-se na Tabela IV.1. (Boletim nº 209 do CEB [5]) as faixas de freqüências fundamentais de várias atividades, associadas ao primeiro harmônico da força, bem como os três primeiros coeficientes desta série, sendo os demais coeficientes desprezados, pois apresentam valores bem inferiores aos três primeiros.

Observando-se as amplitudes dos três primeiros harmônicos para as atividades apresentadas na Tabela IV.1, percebe-se a razão pela qual o CEB [5] recomenda os limites inferiores para a primeira freqüência natural da estrutura, apresentados na Tabela IV.2., para projetos de obras civis sujeitas a carregamentos de natureza humana. Obedecendo tais recomendações, somente o terceiro harmônico dos carregamentos, de menor amplitude, excitaria a estrutura.

Tabela IV.1. - Faixa de frequências fundamentais para algumas atividades, e coeficiente de Fourier para os três primeiros harmônicos do carregamento humano [5].

Atividade	Freqüência [Hz]	α_1	α_2	α_3
andar	1,6 - 2,4	0,4	0,1	0,1
correr	2,0 - 3,5	1,6	0,7	0,2
pular	1,8 - 3,4	1,8	1,3	0,7
dançar	1,5 - 3,0	0,5	0,15	0,1

Tabela IV.2. Recomendações do CEB de limite inferior para a primeira freqüência natural para os tipos mais comuns de estruturas

	Utilização	
Tipo de Estrutura	Esportes	Dança
Concreto Armado	7,5 Hz	6,5 Hz
Concreto protendido	8,0 Hz	7,0 Hz
Estruturas Compostas	8,5 Hz	7,5 Hz
Estruturas de Aço	9,0 Hz	8,0 Hz

Observando-se que existe uma variedade grande de danças e ritmos, que estão intimamente ligados à cultura de um determinado povo, surge então uma questão, quanto aos valores recomendados pelo CEB, na Tabela IV.1. Poderiam ser estes aplicados diretamente na análise de estruturas aqui no Brasil? Evidentemente que existe uma grande diferença entre o comportamento europeu e o brasileiro durante festas, jogos ou comemorações. Mas até que ponto esta diferença afeta as freqüências de dança e principalmente as amplitudes dos três primeiros harmônicos? Estas e outras questões foram investigadas por Batista e Magluta[7], que após vários ensaios experimentais realizados no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ concluíram que estes apontavam para os valores apresentados na Tabela IV.3. Mais recentemente, outros valores foram obtidos por Alves [38] em sua tese de mestrado.

Tabela IV.3. Faixa de freqüências fundamentais para algumas atividades e coef. de Fourier referentes aos três primeiros harmônicos, segundo Batista e Magluta [7].

Atividade	Freqüência [Hz]	α_1	α_2	α_3
pulos	1,8 - 3,4	1,8	1,0	0,3
dança - tipo1*	1,5 - 3,0	0,5	0,15	0,1
dança - tipo 2**	1,5 - 3,0	1,4	0,6	0,01

* As pessoas envolvidas estão sempre em contato com o piso.

** Dança que envolve pulos, quando o contato é perdido durante intervalos intermitentes de tempo.

Pode-se dizer, observando os valores da Tabela IV.3., que muito embora a faixa de freqüência do primeiro harmônico seja igual à apresentada na Tabela IV.1, as amplitudes, principalmente do segundo e terceiro harmônico são bem menores. Para o presente trabalho serão empregados, portanto, os valores obtidos dos ensaios realizados

no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ [7], tendo em vista que estes representam melhor o comportamento dos brasileiros.

É bom salientar, ainda, que o carregamento na análise da estrutura deve ser aplicado fazendo-se uma varredura na faixa de freqüência fundamental, ou do primeiro harmônico, considerando o segundo e o terceiro superharmônicos em freqüências iguais ao dobro e ao triplo do primeiro.

A fim de se poder determinar a resposta de uma estrutura sob algum tipo de atividade no qual pulos estão envolvidos, é necessário conhecer que carga é produzida. Deve ser feita inicialmente uma estimativa do número e o peso característicos das pessoas nesta atividade em uma determinada área, ou seja, estimar a densidade e a distribuição de carga. Observa-se também que existem muitos diferentes tipos de danças e ritmos, mas as frequências fundamentais para dança tendem a estar numa faixa de 1,5 Hz à 3,5 Hz [34]. Pode-se, ainda, separar os tipos de dança em duas categorias. A primeira é quando a pessoa envolvida na dança está sempre em contato com o piso (tipo 1) e o segundo envolve pulos, quando o contato com o piso é perdido durante intervalos intermitentes de tempo (tipo2).

IV.2. CRITÉRIOS DE PROJETO

Quando se analisa uma estrutura, duas condições devem ser sempre levadas em consideração. A primeira diz respeito ao estado limite último, no qual a segurança da estrutura e de seus componentes é verificada para os esforços solicitantes resultantes das combinações mais desfavoráveis dos carregamentos que lhe são impostos. A segunda diz respeito ao estado limite de utilização, no qual os aspectos relativos, por exemplo, às deformações, à fissuração, a vibrações excessivas, etc, são verificados segundo certos valores prescritos nas normas de projeto. O estado limite de utilização, naquilo que diz

respeito ao conforto dos usuários, está intrinsicamente relacionado à percepção do ser humano das deformações permanentes, dos deslocamentos e acelerações sofridas ao longo do tempo em contato com a estrutura. O segundo critério no seu aspecto dinâmico, torna-se extremamente importante na análise quando estão envolvidos carregamentos dinâmicos com faixas de freqüências próximas às freqüências naturais de vibração da estrutura, uma vez que estes podem causar acelerações acima de certos valores que induzem sensações de mau estar as pessoas.

IV.2.1. Critérios quanto à segurança e à utilização

Para o critério de segurança seguem-se as prescrições das normas da ABNT [39,40] ou estrangeiras para projeto e execução de estruturas de concreto armado, de aço ou mistas, verificando-se a estabilidade global e a margem de segurança nas seções em que ocorrem os maiores esforços solicitantes na estrutura. Por falta de prescrições claras quanto aos aspectos dinâmicos, adota-se neste trabalho uma simplificação para a verificação do estado limite último: a razão entre o esforço máximo resistente da seção e os esforços máximos solicitantes é verificada, considerando a combinação de todos os carregamentos atuantes sobre a estrutura majorados por um único fator γ_c (= 1.4). Com isto, pode-se escrever esta razão na forma

$$\frac{S_{res}}{S_{est} + S_{s.a.} + S_{din}} \geq \gamma_s \qquad \text{(eq.IV.1)}$$

onde,

γ_s - coeficiente de segurança (adotado como γ_s = 1.4);

S_{res} - valor do esforço máximo resistente da seção, calculado segundo as prescrições da norma;

S_{est} - valor do esforço estático máximo solicitante, considerando todas as cargas permanentes;

$S_{s.a.}$ - valor do esforço estático solicitante devido ao peso próprio do sistema de absorção de vibrações, eventualmente existente;

S_{din} - valor do esforço máximo solicitante produzido pelas cargas dinâmicas.

Para o estado limite de utilização deve ser observado o estado de deformação excessiva, no qual, para estruturas de edifícios, o deslocamento causado por cargas acidentais não deve ser superior ao valor

$$d_{max.acid.} \leq \frac{L}{500} \qquad \text{(eq.IV.2)}$$

onde,

L - é o menor vão teórico da viga ou laje.

É interessante lembrar que a norma prevê um equivalente estático para o carregamento dinâmico típico da ocupação de um salão de bailes, com valor igual a 5,0 kN/m^2. O deslocamento total, resultante da combinação deste carregamento com o permanente, não deve, para o estado de deformação excessiva, ser superior ao valor

$$d_{max.perm.} + d_{max.acid.} \leq \frac{L}{300} \qquad \text{(eq.IV.3)}$$

onde,

$d_{max.perm}$ - deslocamento máximo devido ao peso próprio mais sobrecarga permanente de piso;

$d_{max.acid.}$ - deslocamento máximo devido à carga acidental estática equivalente;

L - é o menor vão teórico da viga ou laje.

Para estruturas de concreto armado e mistas (aço e concreto armado), uma outra verificação que deve ser feita diz respeito ao estado de formação de fissuras inaceitáveis em peças protegidas, de acordo com a NBR-6118 [39], a qual prescreve duas inequações, onde pelo menos uma deve ser atendida:

$$\frac{\Phi_b}{(2\eta_b - 0{,}75)} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left(\frac{4}{\rho_r} + 45\right) \leq 3 \qquad \text{(eq.IV.4)}$$

$$\frac{\Phi_b}{(2\eta_b - 0{,}75)} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot 3 \cdot \frac{\sigma_s}{f_{tk}} \leq 3 \qquad \text{(eq.IV.5)}$$

onde,

Φ_b - diâmetro das barras longitudinais (mm);

$\eta_b \leq 1{,}8$

σ_s - tensão na armadura longitudinal de tração;

E_s - módulo de elasticidade longitudinal do aço;

ρ_r - taxa geométrica de armadura localizada na seção transversal de concreto A_{cr} sujeita a fissuração, definida por:

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{cr}} \; ;$$

f_{tk} - tensão característica de ruptura à tração do concreto, definida por:

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} \; .$$

IV.2.2. Critérios quanto ao conforto

Como estabelecer a noção de desconforto humano quando acelerações estão envolvidas? O que pode ser aceitável para alguns, para outros torna-se desagradável. Vários são os fatores, por vezes subjetivos, que podem influenciar na noção de conforto,

como, por exemplo: o contexto cultural em que vive a pessoa, o seu estado emocional e psicológico no momento do evento, e o tipo de atividade desenvolvida no instante em que sofre aceleração. Imaginando-se um salão de baile, onde um determinado nível de aceleração vertical é imposto à estrutura da laje de piso por pessoas que estão dançando, pode-se dizer que para estas pessoas em atividade, envolvidas emocionalmente com a música e a dança, a percepção das vibrações e a sensação de desconforto é, em geral, num nível muito baixo ou inexistente. Contrariamente, para as pessoas em repouso, observadoras em pé ou sentadas, a percepção é grande e a sensação de desconforto pode ser aguda, especialmente se estas não gostarem do ritmo da dança ou da música que estão ouvindo, ou ainda, se não estiverem se sentido bem no ambiente em que se encontram.

Portanto, com toda essa ampla variedade de influências e efeitos torna-se bastante difícil quantificar de modo objetivo para que níveis de aceleração uma pessoa experimenta a sensação de desconforto. Logo, a noção de conforto ou desconforto de uma ou mais pessoas submetidas a acelerações em certas direções passa a ser uma questão muito mais subjetiva, gerando uma série de controvérsias quanto aos valores aceitáveis das acelerações impostas. Há apenas um ponto de indiscutível concordância: o limite em que o ser humano passa a perceber as acelerações induzidas na estrutura sobre a qual ele se encontra. Para procurar caracterizar as faixas de parâmetros de conforto humano surgiu a ISO 2631/1, a qual define três limites ligados à sensação humana, relacionadas ao tempo de exposição e nível de aceleração a que uma pessoa fica exposta.

I - Limite do conforto reduzido - está relacionado com o nível de aceleração vertical a partir do qual as pessoas sentem-se incomodadas pela vibração, tendo mais

dificuldades para executar tarefas que exigem certa concentração, tais como comer, ler e escrever.

II - Limite de queda de eficiência - define o limite além do qual a exposição prolongada à vibração pode trazer um significativo risco de queda de eficiência na atividade desenvolvida pela pessoa exposta, particularmente fadiga, quando tal exposição é demasiadamente prolongada. O limite associado à queda de eficiência é definido pela ISO 2631/1 como sendo três vezes maior que o limite associado ao conforto reduzido.

III - Limite de tolerância - é o limite em termos de valores de máximos de aceleração que uma pessoa pode ficar exposta de modo seguro, para qualquer condição de freqüência, duração e direção, estimado em duas vezes superior ao limite de queda de eficiência.

São apresentadas algumas curvas da ISO 2631/1 na Figura IV.4 relacionadas ao limite de queda de eficiência para acelerações verticais, conforme as direções definidas na Figura IV.3, sendo todas elas função do tempo de exposição e o do nível de aceleração. Os valores do gráfico se referem à raiz da média quadrática - RMS (root mean square), e podem ser convertidos em valores de pico utilizando a expressão:

$$a_m = \frac{\Gamma \cdot a_{rms}}{\Lambda} \; ; \qquad \text{(eq.IV.6)}$$

onde,

a_m - pico máximo de aceleração admissível;

a_{rms} - RMS admissível da aceleração obtida através das curvas da ISO;

Γ - constante que depende do caso analisado, sendo definida para cada limite:

$\Gamma = \frac{1}{3}$ - limite I ;

$\Gamma = 1$ - limite II ;

$\Gamma = 2$ - limite III ;

Λ - constante para conversão do valor RMS para o valor de pico para um harmônico simples, sendo:

$$\Lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Como a ISO 2631/1 não faz uma clara referência à forma correta de utilização dos gráficos apresentados, quando o carregamento é composto por vários harmônicos, principalmente o humano, adotam-se no presente trabalho as hipóteses:

1. Havendo uma nítida predominância de algum modo de vibração na resposta dinâmica, utiliza-se a freqüência natural deste modo como o valor de entrada do gráfico.

2. Não ocorrendo a predominância de um único modo na resposta, utiliza-se as freqüências dos modos que originam as maiores componentes de aceleração vertical, escolhendo-se aquele que fornece a menor aceleração limite.

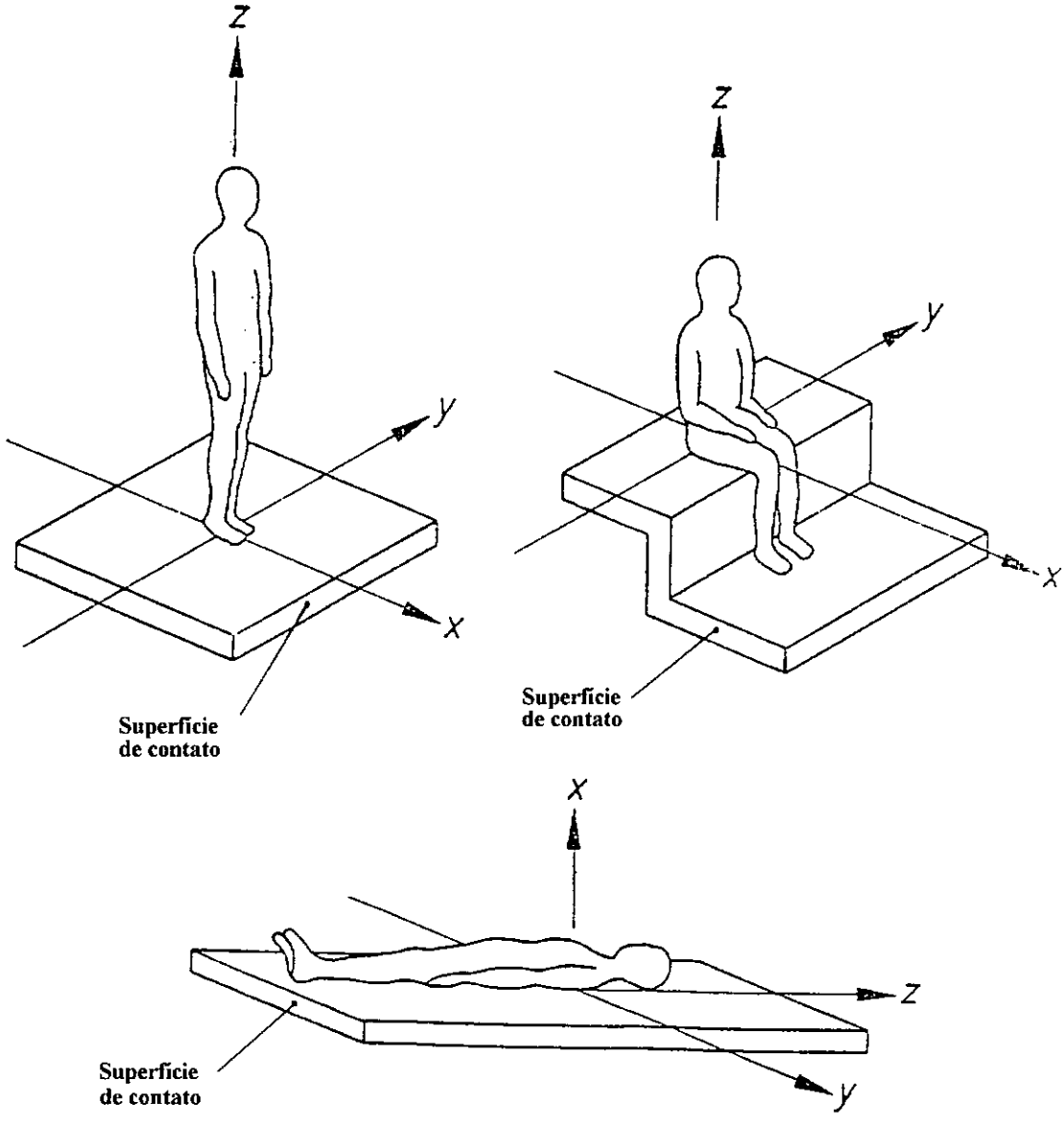


Figura IV.3. Direções do sistema de eixos coordenados definidos pela ISO 2631.

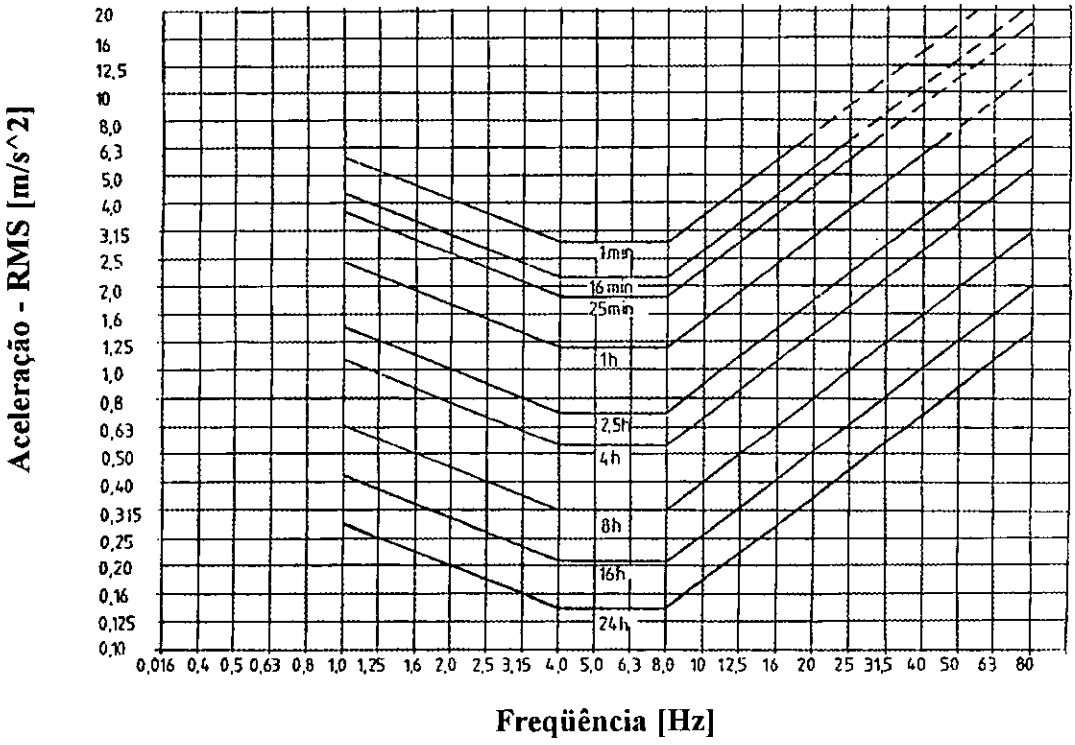


Figura IV.4. Curvas de acelerações efetivas para o limite de queda de eficiência, segundo a ISO 2631/1 [32].

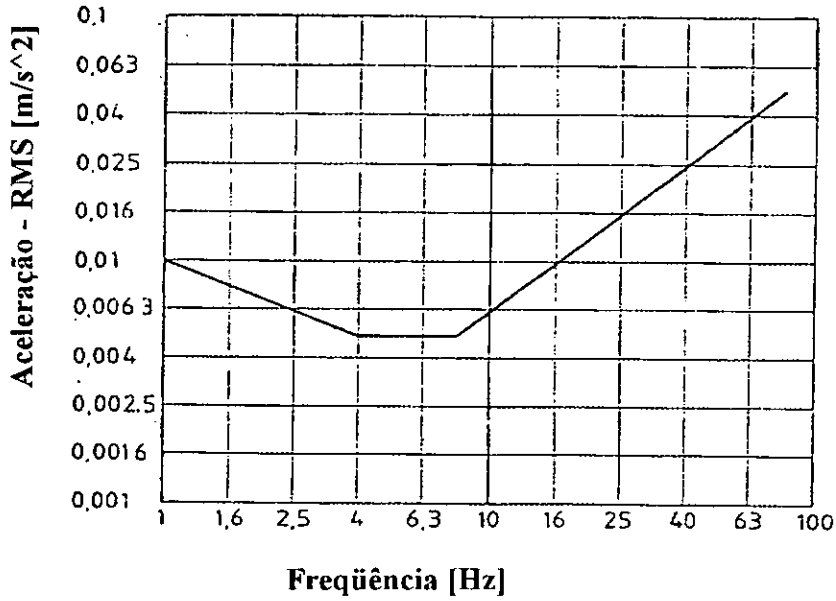


Figura IV.5. Curva de aceleração vertical perceptível ao ser humano, segundo a ISO 2631/2 [33].

Muito embora a ISO 2631/1 apresente parâmetros necessários à avaliação do conforto humano sob certos níveis de vibração e intervalos de tempo de exposição a essas vibrações, ainda assim utiliza critérios muito subjetivos. O caso comentado anteriormente serve como exemplo. Nele as pessoas em atividade, envolvidas emocionalmente com o ambiente, suportariam níveis de aceleração e um tempo de exposição maiores do que aquelas que estivessem paradas e sem qualquer motivação para o evento. Assim, para este caso, que limite e que tempo total de exposição devem ser adotados na análise? É evidente que uma pessoa que não estivesse se sentido bem no ambiente não permaneceria muito tempo neste. Deste modo, para apresentar parâmetros mais racionais, a ISO 2631/2 recuperou noções já anteriormente discutidas na literatura [3,16,17] que consideram três tipos de vibração a que as pessoas podem estar sujeitas em edifícios: vibração continua, intermitente ou transiente.

O primeiro tipo é definido pela ISO 2631/2 como sendo uma vibração que permanece ininterrupta durante do todo o tempo de consideração da análise, como, por exemplo, as produzidas por máquinas operando continuamente.

Apesar da difícil distinção entre vibração intermitente e transiente, a ISO propõe que a vibração transiente seja definida como a resultante de um impulso rápido envolvendo ou não diversos ciclos de vibração, dependendo do amortecimento. Pode, ainda, consistir de diversos ciclos de aproximadamente mesma amplitude, em intervalos curtos de tempo, isto é menores do que 2 s. Já a vibração intermitente é definida por uma série de vibrações incidentes, separadas por intervalos de tempo onde há grande redução das amplitudes de vibração.

A ISO 2361/2 fornece, entre outras, a curva básica que representa o limite para o qual as acelerações verticais axiais (i.e., segundo o eixo Z na Fig. IV.3) passam a ser perceptíveis ao ser humano. Esta curva de percepção, representada na Figura IV.5.,

mostra a variação dos valores limite da aceleração axial dada em termos de RMS em função da freqüência de vibração experimentada pela pessoa. As acelerações fornecidas em termos de RMS podem ser convertidas para valores de pico, multiplicando-se estas por $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Fatores multiplicativos da aceleração obtida da curva básica (associada ao limiar da percepção humana às vibrações) são usados para elevar estes valores a limiares de tolerância humana, de acordo com os dados coletados em diversos países. Faixas de valores destes fatores também são mostradas pela ISO 2631/2 em seu Anexo A, para os tipos de vibração definidos anteriormente, sendo resumidos na Tabela IV.4.

Tabela IV.4. Faixas de valores (usados em diversos países) multiplicativos das acelerações obtidas da curva básica apresentada na Figura IV.5. conforme a ISO 2631/2.

Locais	Horário de utilização	Vibração continua ou intermitente	Vibração transiente com diversas ocorrências por dia
Áreas críticas de trabalho (hospitais, laboratórios de precisão, etc.)	Diurno Noturno	1	1
Residência	Diurno	2 - 4	30 - 90
	Noturno	1,4	1,4 - 20
Escritório	Diurno Noturno	4	60 - 128
Oficinas	Diurno Noturno	8	90 - 128

Observando-se a tabela acima, vê-se que a ISO 2631/2 não faz nenhuma referência a áreas destinadas a atividades humanas sócio-culturais, tais como ginásios, espaços musicais, teatros, salões de baile...etc, onde são desenvolvidas atividades

ligadas a danças e pulos. Para estas atividades faz-se necessário a utilização da ISO 2631/1, i.e., as curvas da Fig.IV.4.

Outra observação feita pela ISO é de que para áreas residenciais existe uma ampla variação da tolerância de vibração, onde valores específicos são dependentes dos fatores sociais, culturais e da influência psicológica causada pela interferência da vibração na privacidade dos usuários da edificação. Assim, mesmo a ISO 2631/2 definindo parâmetros mais rígidos, ainda deixa margem para aplicação de critérios subjetivos quando sugere a Tabela IV.4. o que evidência o quão difícil é quantificar a sensação de desconforto do ser humano submetido a vibrações e estabelecer limites em termos de aceleração de forma a possibilitar a utilização da estrutura sujeita a vibração sem desconforto para os usuários.

CAPÍTULO V

ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS NUMÉRICOS

O objetivo principal desse capítulo é testar o modelo teórico-numérico e computacional, desenvolvido neste trabalho, para resolver os problemas de redução de vibrações em lajes nervuradas ou mistas, permitindo o projeto otimizado de sistemas dinâmicos do tipo absorsores de vibração, para controle passivo e redução das amplitudes das respostas destas estruturas a carregamentos dinâmicos.

Deve-se enfatizar aqui a necessidade do desenvolvimento deste modelo, já que os programas comerciais disponíveis não permitem a introdução ou consideração de sistemas auxiliares dinâmicos para controle passivo e redução das vibrações estruturais.

Dois exemplos são utilizados aqui para se fazer uma análise do desempenho do PEFAV, através da comparação de seus resultados com os obtidos com outras formas de modelagem de lajes nervuradas. O primeiro é um exemplo clássico de uma laje simplesmente apoiada, onde para o caso estático obtém-se as respostas em termos de deslocamentos e esforços considerando um carregamento uniformemente distribuído sobre a mesma, enquanto para o caso dinâmico são obtidas as freqüências naturais de vibração livre. A escolha de uma laje simplesmente apoiada deve-se ao fato de que as soluções tanto estática quanto dinâmica para placas de pequena espessura são bem conhecidas. A comparação dos resultados obtidos pelo PEFAV para este caso é feita com relação à solução teórica e aos resultados obtidos empregando-se o SAP90 [13], que é um programa de análise estrutural muito conhecido e testado.

O segundo exemplo está relacionado com o tipo de estrutura objeto de estudo deste trabalho: lajes nervuradas ou mistas. Uma laje nervurada é analisada estaticamente

considerando-se uma carga distribuída em toda sua superfície. A análise dinâmica é aqui reduzida à obtenção das freqüências e modos naturais de vibração. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos através do SAP90 [13], empregando-se a mesma modelagem de vigas com placas e a mesma malha em elementos finitos. Outras análises comparativas são feitas com duas modelagens aproximadas tipo grelha: uma utilizada no trabalho de Alves [14], dirigido à análise estática de tabuleiros de pontes ou vigas múltiplas protendidas, e a outra utilizada por Faria [15], numa análise similar à presente.

V.1. LAJE SIMPLESMENTE APOIADA

V.1.1. Solução analítica

V.1.1.1. Carregamento uniformemente distribuído

Como a solução de uma placa isotrópica delgada, ou seja, de pequena espessura, simplesmente apoiada, é bastante conhecida [29,31], será feito portanto neste trabalho um breve resumo desta, de modo a utilizá-la nas comparações dos resultados do PEFAV.

Seja inicialmente a placa mostrada na Figura V.1. Utilizando-se a teoria de Kirchoff, a equação diferencial para o deslocamento à flexão "w" de um ponto qualquer do plano médio da placa na direção perpendicular, devido a forças atuantes segundo esta direção, é dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x,y)}{D} \qquad \text{(eq.V.1.)}$$

onde,

$p_z(x,y)$ - carregamento de forças atuantes perpendicular ao plano médio da placa;

D - rigidez flexural da placa, definida como:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} ;$$

sendo as características da placa isotrópica,

E - módulo de elasticidade longitudinal do material;

ν - coeficiente de Poisson do material;

h - espessura;

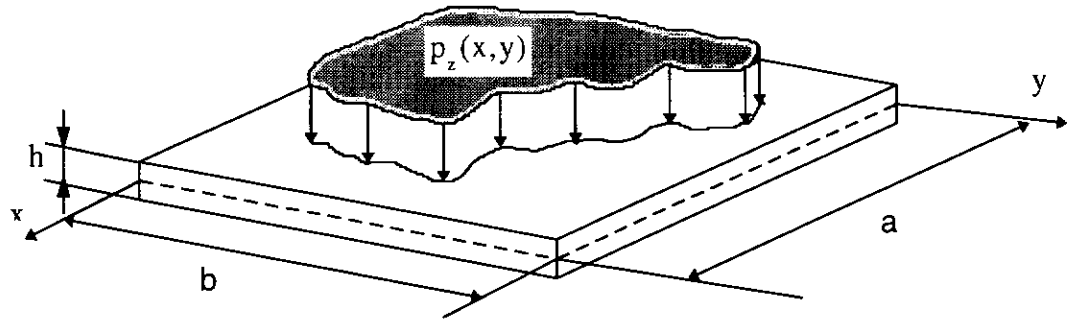


Figura V.1. Placa sob ação de um carregamento qualquer $p_z(x,y)$ normal ao seu plano médio

A solução da equação V.1. para uma placa simplesmente apoiada, empregando-se séries duplas trigonométricas, também conhecida como solução de Navier, supondo-se que o carregamento possa ser descrito na forma

$$p_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} ; \qquad \text{(eq.V.2)}$$

é dada por:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(eq.V.3)}$$

onde o termo a_{mn} é obtido utilizando-se a integral dupla

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p_z(x,y)\cdot \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\cdot dx\cdot dy\ . \qquad \text{(eq.V.4)}$$

Para um carregamento uniformemente distribuído ao longo do plano médio da placa, isto é,

$$p_z(x,y) = p_0\ ; \qquad \text{(eq.V.5)}$$

tem-se,

$$a_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}\ . \qquad \text{(eq.V.6)}$$

Portanto, o deslocamento "w" para este caso é obtido da expressão:

$$w(x,y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cdot \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(eq.V.7)}$$

Tendo em vista que o carregamento uniformemente distribuído provoca uma deflexão simétrica da placa em relação aos eixos que cortam o centro da mesma, x = a/2 e y = b/2, observa-se naturalmente que todos os termos pares da série dupla desaparecem, ficando a variação de "m" e "n" somente em função dos termos impares, ou seja, m = n = 1,3,5,...,∞.

Os esforços internos definidos a partir das equações

$$M_x = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \qquad \text{(eq.V.8a)}$$

$$M_y = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \qquad \text{(eq.V.8b)}$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)\cdot D\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\ ; \qquad \text{(eq.V.8c)}$$

$$Q_x = -D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \qquad \text{(eq.V.8d)}$$

$$Q_y = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \qquad \text{(eq.V.8e)}$$

assumem a forma:

$$M_x = \frac{16p_0}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu\frac{n^2}{b^2}\right)}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}; \qquad \text{(eq.V.9.a)}$$

$$M_y = \frac{16p_0}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\nu\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}; \qquad \text{(eq.V.9.b)}$$

$$M_{xy} = -\frac{16p_0(1-\nu)}{\pi^4 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}; \qquad \text{(eq.V.9.c)}$$

$$Q_x = \frac{16p_0}{\pi^3 a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}; \qquad \text{(eq.V.9.d)}$$

$$Q_y = \frac{16p_0}{\pi^3 b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}; \qquad \text{(eq.V.9.e)}$$

$$m = n = 1,3,5,...$$

A série definida na equação V.7 converge rapidamente: a consideração de dois termos já fornece uma resposta com suficiente exatidão; porém as séries definidas nas equações V.8. necessitam de mais termos. Por exemplo, as equações V.8.a. e V.8.b. com a consideração de quatro termos fornece valores suficientemente exatos. Como, para os valores nas bordas, principalmente para o esforço cortante, necessitam de um numero maior de termos,serão adotados neste trabalho os termos até $m = n = 9$.

V.1.1.2. Freqüências naturais de vibração

A equação de movimento não-amortecido para a placa mostrada na Figura V.1. pode ser expressa, empregando-se a equação V.1 mais o termo relativo à inércia, da seguinte forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p_z(x,y,t)}{D}-\frac{\overline{M}}{D}\cdot\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}\ ; \qquad \text{(eq.V.10)}$$

onde o termo $\overline{M}$ da parcela de força inercial é definido como a massa por unidade de área.

Para o caso de vibração livre, o carregamento externo é zero, e a equação V.10. torna-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\overline{M}}{D}\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(eq.V.11)}$$

Como a vibração livre de uma placa retangular é basicamente um problema de valor de contorno, a solução da equação V.12, utilizando-se separação de variáveis, assume a forma:

$$w(x,y,t)=\Phi(x,y)\cdot Z(t)\ ; \qquad \text{(eq.V.12.a)}$$

onde,

$$\Phi(x,y)=X(x).Y(y)\ ; \qquad \text{(eq.V.12.b)}$$

são os modos naturais de vibração, enquanto Z(t) é a coordenada generalizada a qual pode assumir a forma harmônica:

$$Z(t)=Z_0\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \text{ou} \qquad Z(t)=Z_0\cos\omega t \qquad \text{(eq.V.12.c)}$$

Substituindo-se a equação V.13.a. em V.10 e diferenciando-se, obtém-se:

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4}Y(y)Z(t)+2\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}Z(t)+X(x)\frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4}Z(t)+\frac{\overline{M}}{D}X(x)Y(y)\ddot{Z}(t)=0$$

(eq.V.13.a)

ou ainda, empregando-se a equação V.13.c.,

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} Y(y) + 2\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)\frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} - \frac{\overline{M}\,\omega^2}{D} X(x)Y(y) = 0 \ . \quad \text{(eq.V.13.b)}$$

Para uma placa simplesmente apoiada, os modos naturais de vibração podem ser representados por séries duplas trigonométricas que corresponde à solução de Navier:

$$\Phi(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\frac{m\pi x}{a}\cdot \text{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(eq.V.14)}$$

A substituição da equação V.15 na equação V.14.b. conduz a:

$$\frac{m^4\cdot\pi^4}{a^4} + 2\frac{m^2\cdot\pi^2}{a^2}\frac{n^2\cdot\pi^2}{b^2} + \frac{n^4\cdot\pi^4}{b^4} - \frac{\overline{M}\cdot\omega^2}{D} = 0 \qquad \text{(eq.V.15)}$$

Assim, a equação que define as freqüências naturais de vibração para uma placa simplesmente apoiada é dada por

$$\omega_{mn} = \pi^2 \cdot \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\overline{M}}} \qquad m = 1,2,3,\ldots \text{ e } n = 1,2,3,\ldots \qquad \text{(eq.V.16)}$$

V.1.2. Modelo numérico

Para a análise do primeiro exemplo considera-se a placa mostrada na Figura V.1. simplesmente apoiada, sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído, com as seguintes características:

Dimensões: a = 10,00 m e b = 8,00 m

Características físicas: E = 25 GPa; ν = 0,20; h = 0,10 m e ρ= 2500 kg / m^3

Carregamento: p_0 = 400 N / m^2

A discretização em elementos finitos foi feita utilizando-se elementos de placa com quatro nós em malha de 4x4, 6x6, 8x8, 10x10 e 12x12. A Figura V.2. mostra a discretização para uma malha de 4x4.

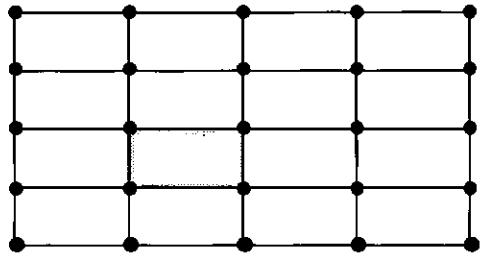


Figura V.2.a. Placa discretizada em malha de 4x4, com 25 nós e 16 elementos

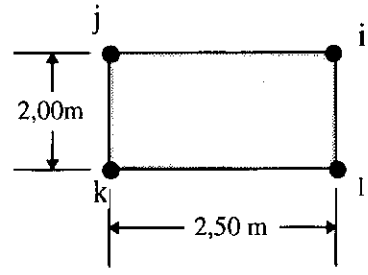


Figura V.2.b. Elemento típico com quatro nós

Tal modelagem foi empregada tanto na análise usando-se o PEFAV. quanto utilizando-se o SAP90 [13].

V.1.3. Análise dos resultados

Para a análise estática, utilizando-se as equações V.7. e V.9. e empregando-se os termos impares até m = n = 9, foram obtidos valores teóricos apresentados na Tabela V.1., enquanto que as freqüências obtidas através da equação V.17. são apresentadas na Tabela V.2.

Tabela V.1. Valores teóricos para a placa simplesmente apoiada do exemplo 01

		Valores Teóricos
Centro :	Deslocamento	0,004550 m
	M_x	1146,00 N.m/m
	M_y	1608,62 N.m/m
Cantos :	Mxy	1134,88 N.m/m
Bordas :	Q_x	1059,68 N/m
	Q_y	1181,96 N/m

Tabela V.2. Freqüências naturais para a placa simplesmente apoiada do exemplo 01

	Freqüência [Hz]
1ª	3,75
2ª	8,14
3ª	10,61
4ª	15,00
5ª	15,46
6ª	22,04
7ª	22,32
8ª	25,70
9ª	26,43
10ª	32,56

Os resultados obtidos empregando-se o PEFAV e o SAP90 [13] foram plotados nos gráficos comparativos com os valores teóricos, conforme mostrado nas figuras V.3 a V.11. Algumas observações podem ser obtidas examinando estes gráficos.

Com relação à parte estática:

1. Os valores obtidos através do PEFAV, tanto em termos de deslocamentos quanto de esforços, são menores do que aqueles obtidos empregando-se o SAP90 [13]. Isto se deve ao fato da utilização da aproximação para representar o efeito do cortante no elemento de Mindlin adotado no PEFAV., o que torna o elemento mais rígido em relação ao elemento de Kirchoff adotado pelo SAP90 [13].

2. Os valores obtidos para o deslocamento no centro da placa, conforme mostrado na Figura V.3., usando-se o SAP90 [13], convergem mais rapidamente para a solução teórica do que os obtidos pelo PEFAV. Isto novamente se deve à modelagem do elemento, tendo em vista que elemento de Kirchoff é especificamente baseado em placas delgadas, de pequena espessura, enquanto o elemento de Mindlin utiliza o

artifício da integração seletiva para adaptar-se a este tipo de placa, isto é, utiliza uma aproximação que traduz-se em uma convergência mais lenta, já que para uma solução satisfatória o PEFAV necessita de uma malha mais refinada do que aquela necessária para o SAP90 [13].

3. Ainda para o deslocamento no centro da placa, pode-se observar que uma malha de 4x4 para o PEFAV já conduz a um bom resultado com uma diferença de 2,29% em relação ao valor teórico, com uma convergência rápida quando se emprega uma malha mais refinada.

4. A variação do momento M_x no centro da placa em função do refinamento da malha é apresentada na Figura V.4. Observa-se que o resultado obtido com o PEFAV apresenta uma convergência mais rápida do que o obtido empregando o SAP90 [13], convergindo para a solução teórica a partir da malha 8x8. Assim como para o deslocamento, aqui também uma malha de 4x4 já conduz a valores satisfatórios para M_x, com uma diferença de 1,48% em relação ao teórico.

5. Observa-se também com o gráfico da variação do momento M_y, mostrado na Figura V.5, que a convergência é mais rápida empregando-se o PEFAV do que o SAP90 [13], ficando a diferença em relação ao resultado teórico em torno de 2,03% para uma malha de 4x4 elementos.

6. Ao contrário dos resultados para os momentos M_x e M_y, os valores máximos do momento volvente M_{xy} nos cantos da placa não alcançaram bons resultados para malhas mais pobres, tal como pode ser observado pela Figura V.6., tanto para o PEFAV quanto pelo SAP90 [13]. Assim, para uma malha de 8x8 elementos ter-se-ia somente uma diferença razoável de 6,07%, e para uma resposta bem melhor seria necessária uma malha de pelo menos de 12x12 elementos.

7. Observação semelhante à anterior pode ser feita com relação aos esforços Q_x e Q_y, sendo necessária uma malha ainda mais refinada para que os resultados obtidos com o PEFAV se aproximem dos resultados teóricos do modelo analítico. Isto pode ser observado através dos gráficos das figuras V.7 e V.8, onde vê-se que somente a partir de uma malha de 16x16 se obtém uma boa resposta, com erro relativo um pouco acima dos 3%. Como o SAP90 [13] não determina os esforços cortantes para elemento de placa, a comparação de tais esforços foi feita somente em relação à solução teórica.

Com relação às freqüências:

1. Muito embora tenham sido determinadas as dez primeiras freqüências para a placa simplesmente apoiada, serão apresentados somente os gráficos referentes às primeira, segunda e quinta freqüências, tendo em vista que as conclusões obtidas para estas podem ser estendidas as demais.

2. De acordo com os gráficos das figuras V.9., V.10. e V.11. observa-se que empregando-se o PEFAV a convergência dos valores das freqüências para os valores teóricos se dá por valores superiores, ou seja, os valores obtidos estão sempre acima dos valores teóricos, enquanto para o SAP90 [13] dá-se ao contrário, i.e., as freqüências estão sempre abaixo do valor teórico. Segundo Szilard [31], quando se utiliza funções de conformidade tanto na formulação da matriz de rigidez quanto na de massa, as freqüências obtidas estão sempre acima dos valores teóricos exatos, enquanto que para o emprego de funções de não-conformidade as soluções estão sempre inferiores a estes. Embora tenha sido empregada uma função de não-conformidade para definir a matriz de massa, deve-se lembrar que o elemento de placa utilizado pelo PEFAV é bem mais rígido que o do SAP90 [13], justificando-se assim as freqüências com valores acima da solução teórica obtidas com o PEFAV.

3. Empregando-se uma matriz de massa consistente, definida pela eq.III.53, obtém-se valores próximos aos teóricos para as freqüências mais baixas, enquanto para as freqüências mais altas obtém-se valores mais distantes. Isto explica por que quando se quer obter freqüências mais altas com valores satisfatórios deve-se refinar cada vez mais a malha de elementos na discretização da estrutura. Assim, para a primeira freqüência uma malha de 4x4 elementos já seria suficiente (erro relativo de 3,81%), enquanto que para a segunda freqüência uma discretização mais refinada teria que ser utilizada: uma malha no mínimo de 8x8 elementos , resultando num erro relativo de 3,98%.

As tabelas V.3. e V.4. mostram as comparações entre os valores obtidos empregando-se o PEFAV e os valores teóricos para uma malha de 8x8 elementos, tanto para a análise estática em termos dos resultados para deslocamentos e esforços quanto para a dinâmica em termos dos resultados para freqüências.

Tabela V.3. Resultados da análise estática para a placa simplesmente apoiada considerando-se uma malha de 8x8 elementos.

	PEFAV.	Solução teórica	Diferença(%)
Centro: Desloc.	0,004528 m	0,004550	0,49
M_x	1148,00 N.m/m	1146,00 N.m/m	0,17
M_y	1601,00 N.m/m	1608,62 N.m/m	0,47
Canto: M_{xy}	1066,00 N.m/m	1134,88 N.m/m	6,07
Borda: Q_x	912,40 N/m	1059,68 N/m	13,90
Q_y	1053,00 N/m	1181,96 N/m	10,91

Tabela V.4. Valores das dez primeiras freqüências para a placa simplesmente apoiada considerando-se uma malha de 8x8 elementos.

Freqüências	PEFAV.	Solução teórica	Diferença (%)
1ª	3,79	3,75	1,02
2ª	8,46	8,14	3,98
3ª	11,14	10,61	5,04
4ª	15,46	15,00	3,10
5ª	17,45	15,46	12,89
6ª	23,61	22,043	7,09
7ª	25,05	22,32	12,25
8ª	29,11	25,70	13,28
9ª	32,73	26,43	23,81
10ª	34,55	32,56	6,10

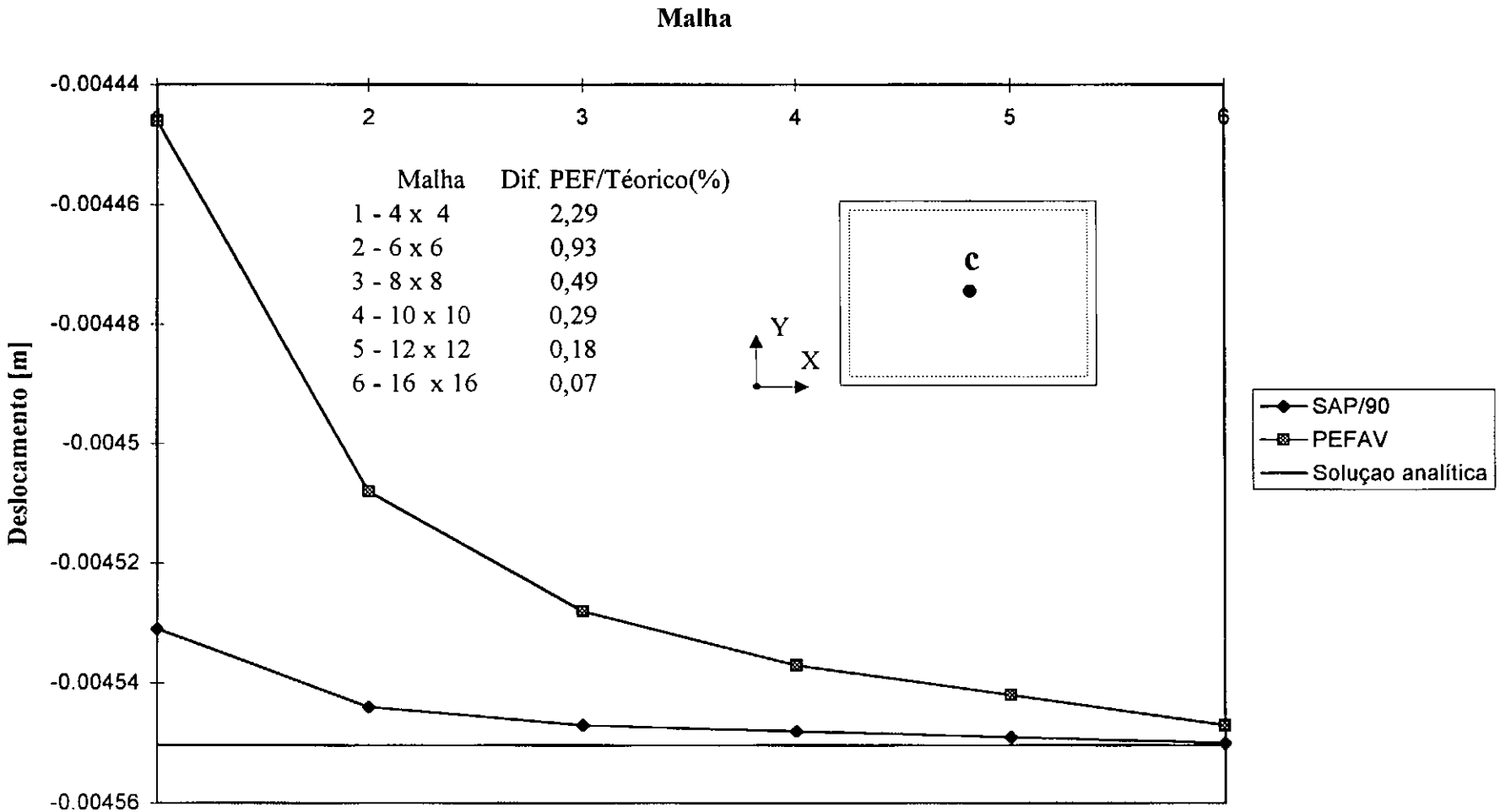


Figura V.3. Deslocamento no centro de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas

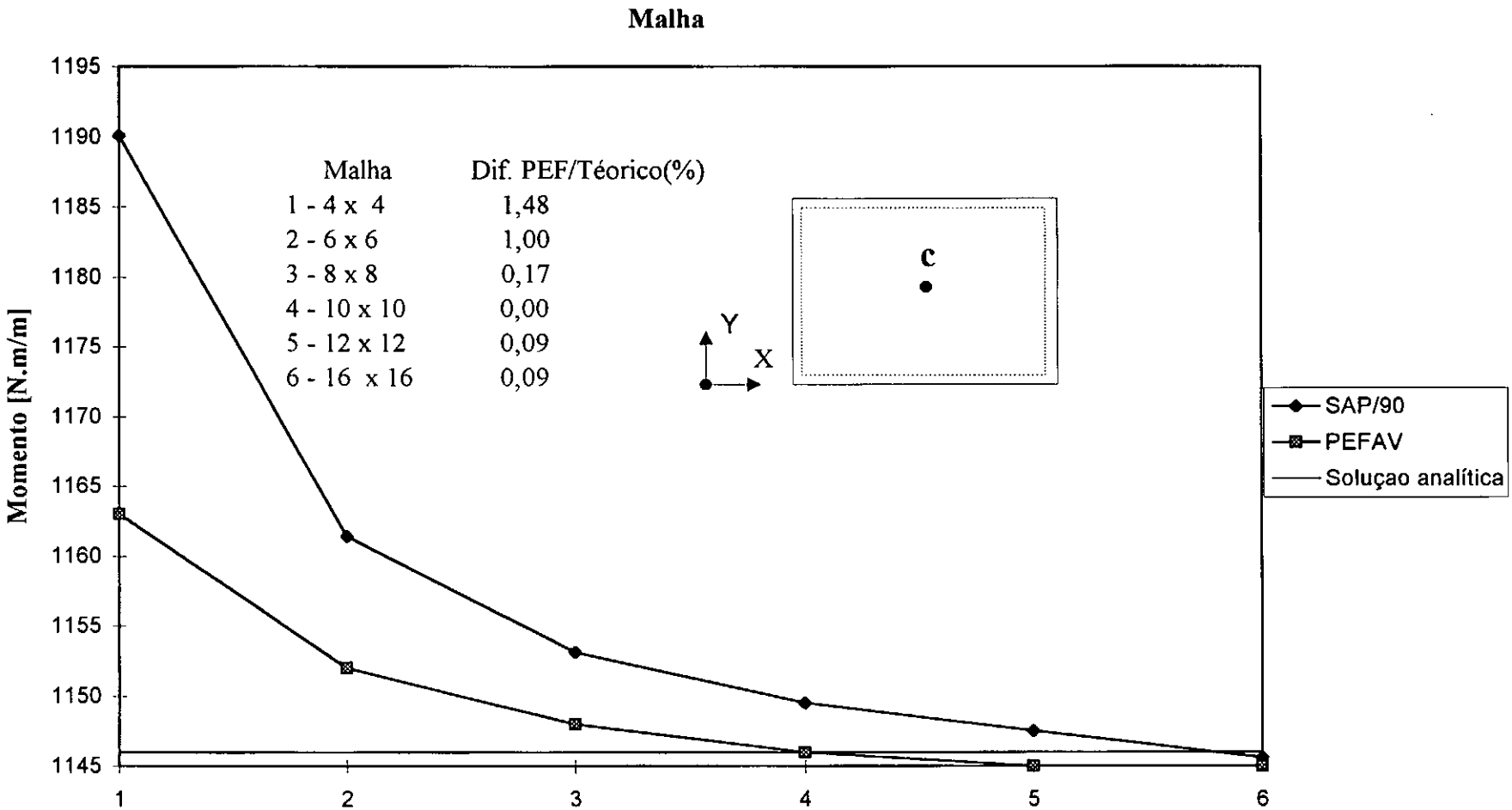


Figura V.4. Momento Mx no centro de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas

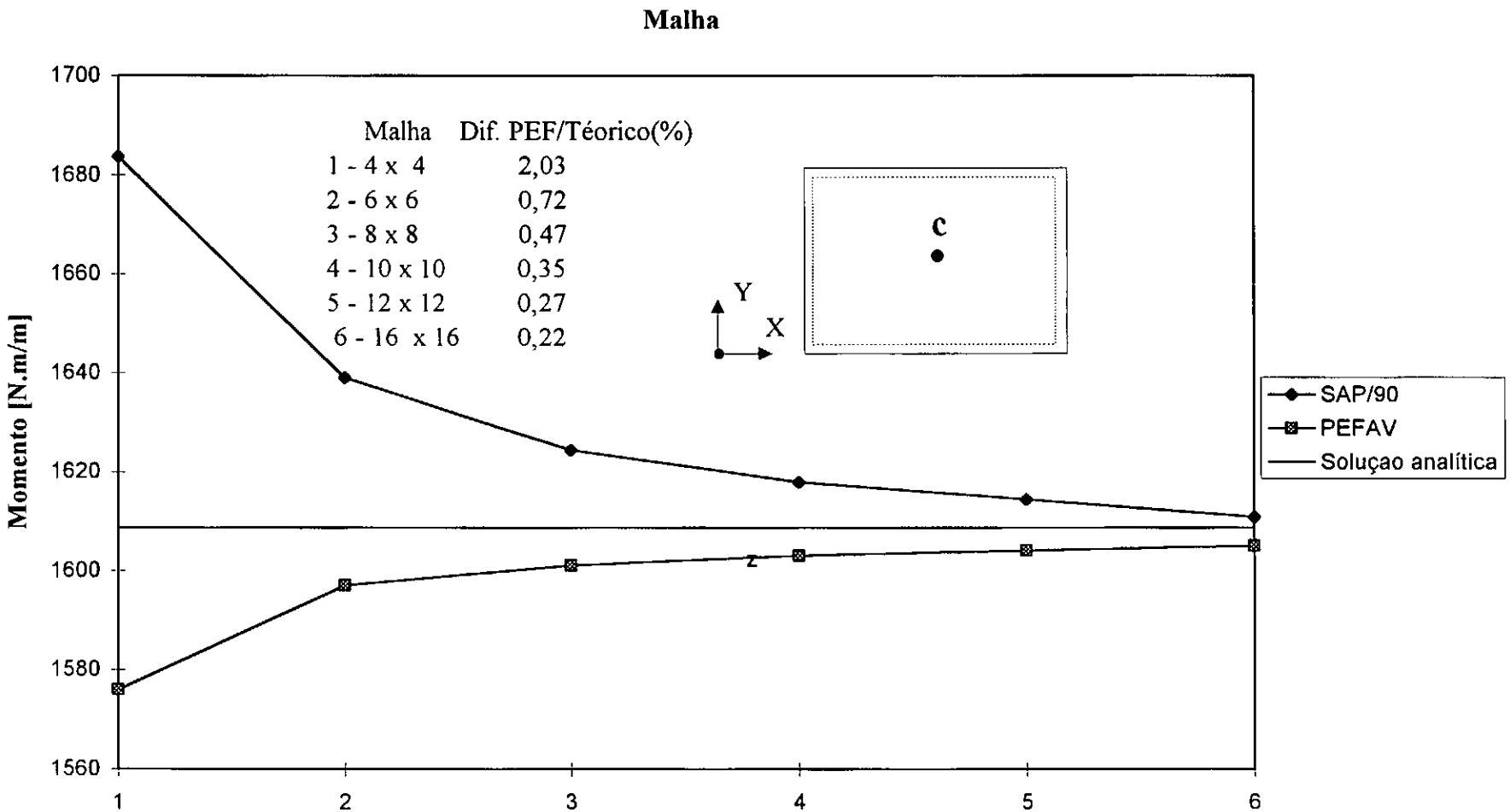


Figura V.5. Momento My no centro de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas

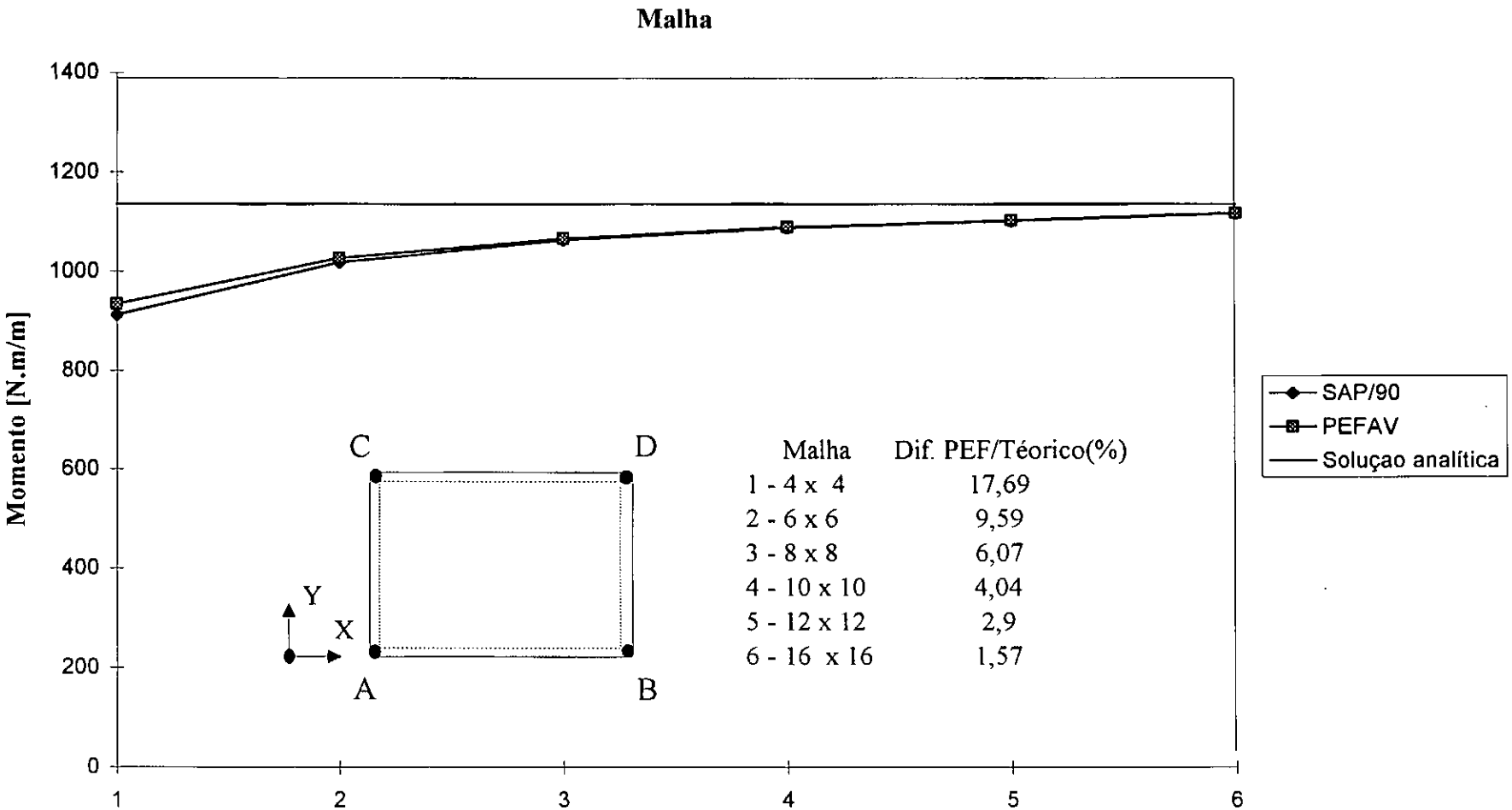


Figura V.6. Momento Mxy nos cantos de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas

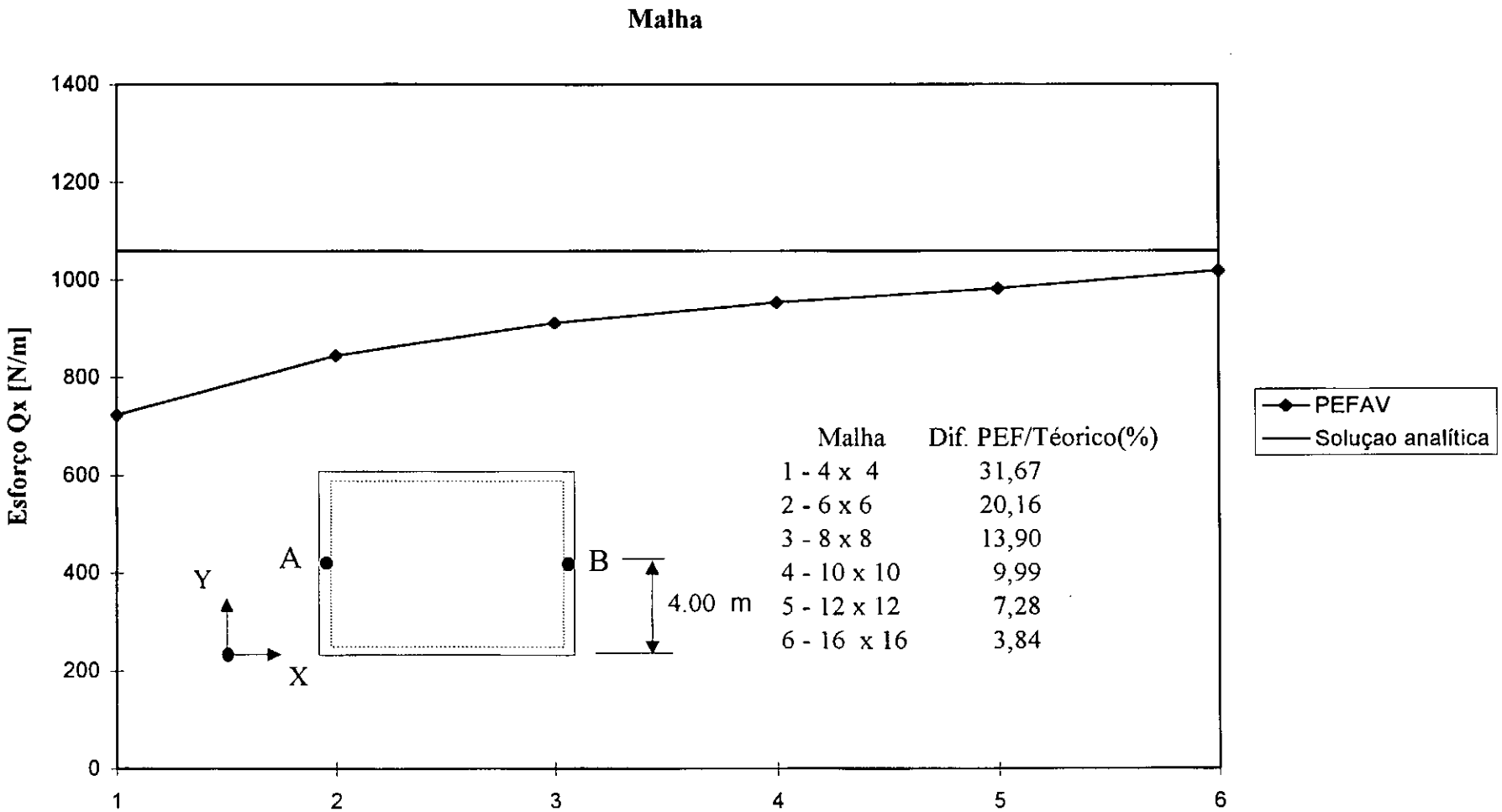


Figura V.7. Esforço cortante Qx nas bordas de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas

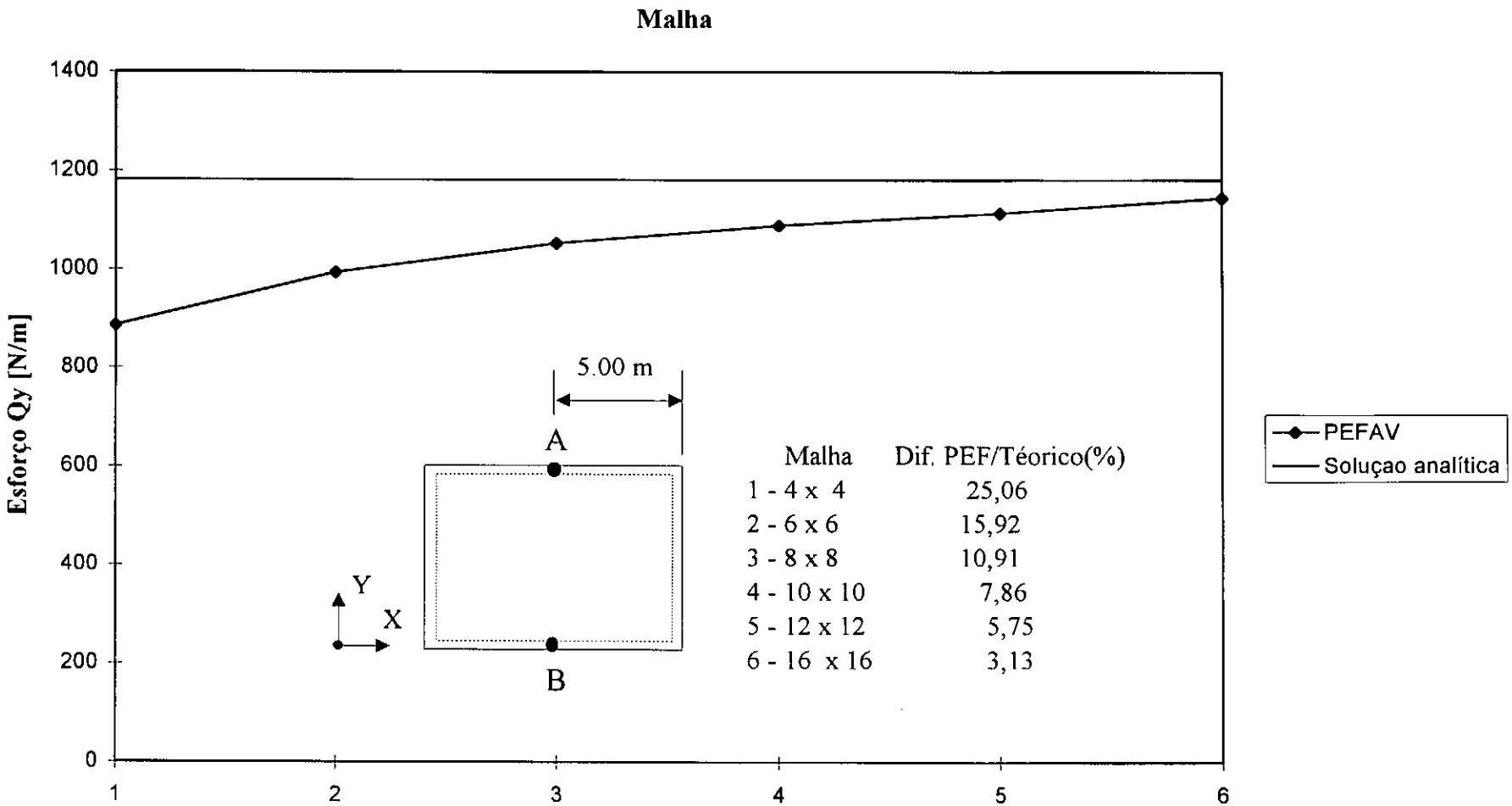


Figura V.8. Esforço cortante Qy nos bordos de uma placa simplesmente apoiada para diversas malhas

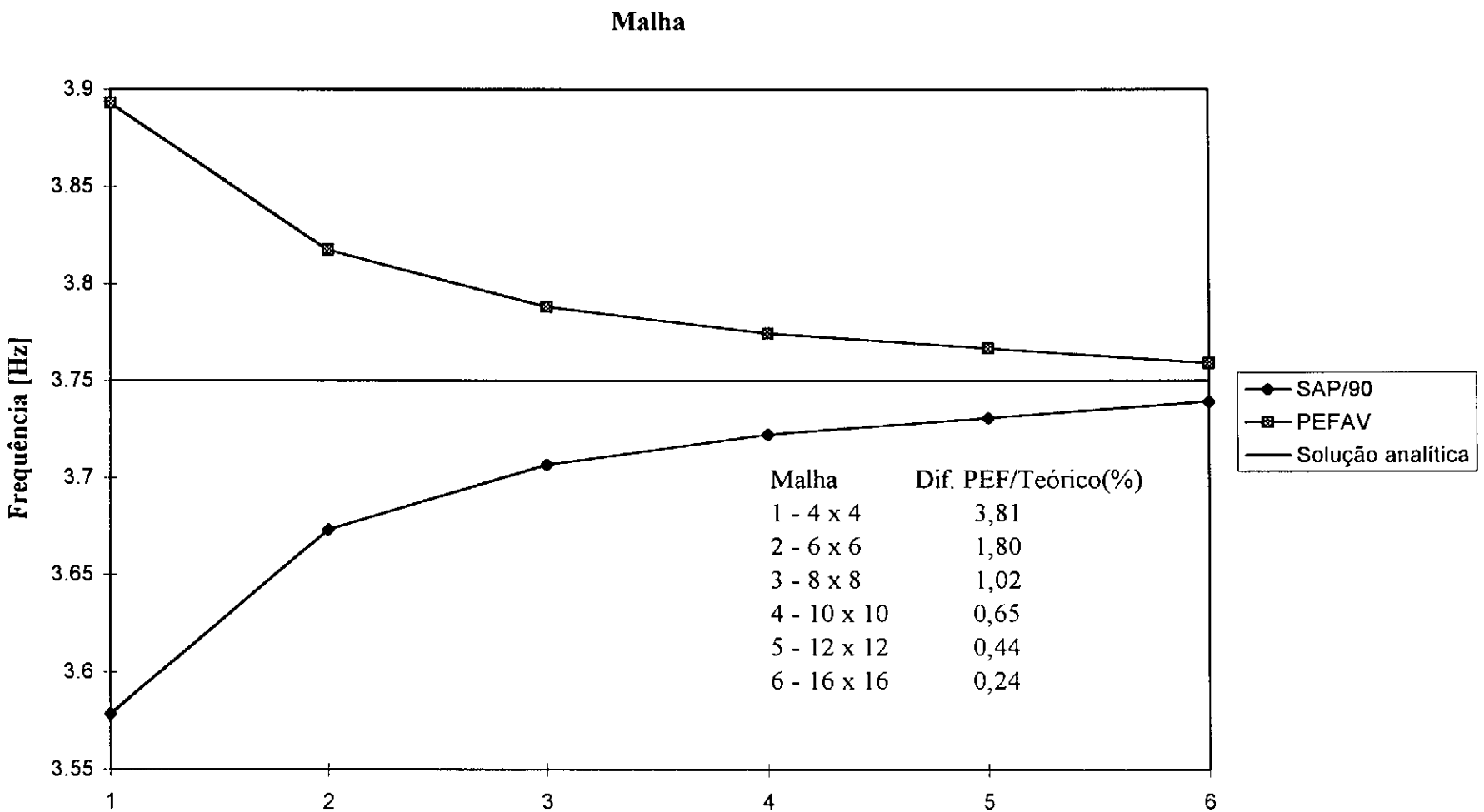


Figura V.9. Primeira freqüência de vibração para uma placa simplesmente apoiada considerando diversas malhas

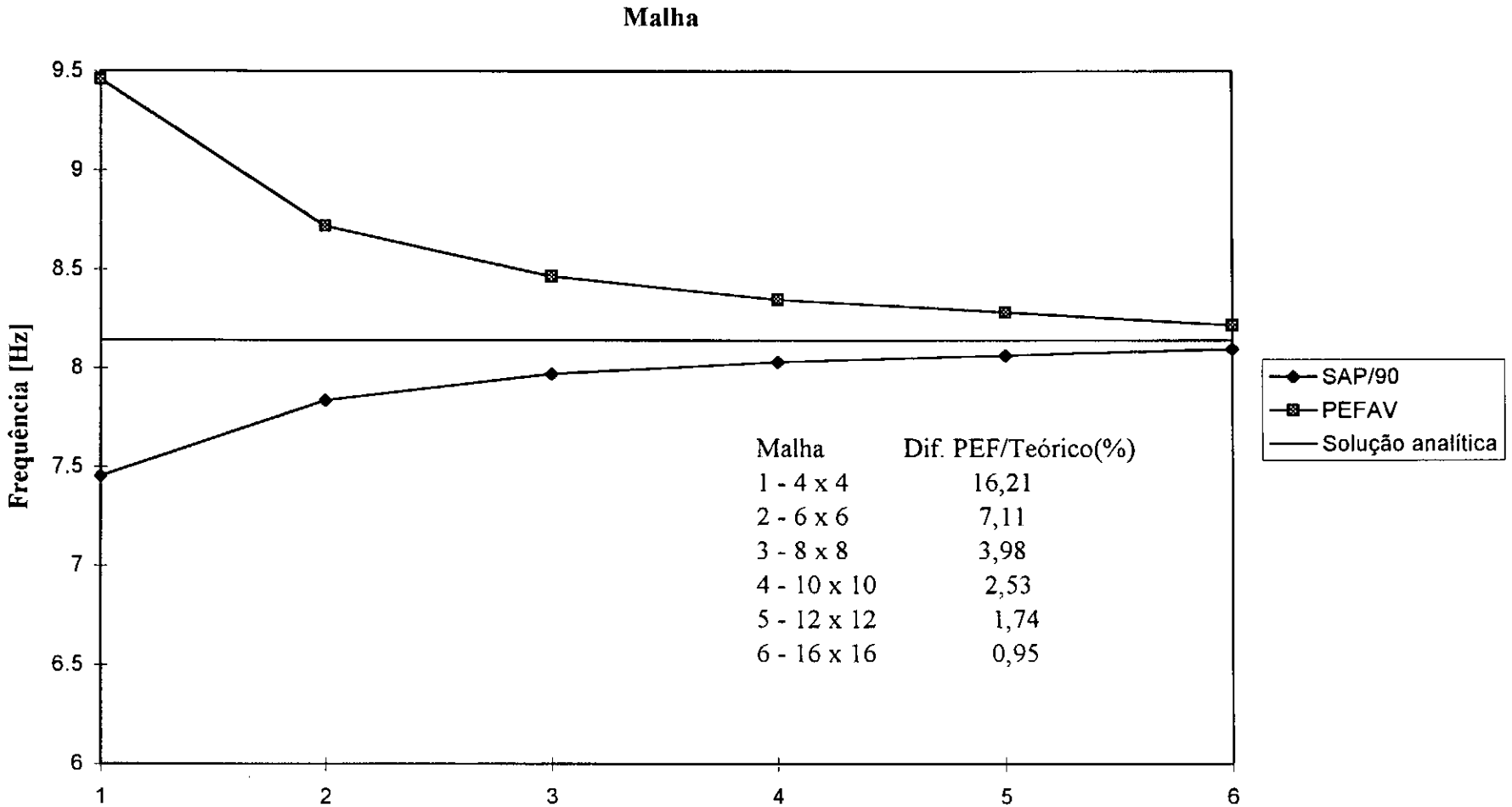


Figura V.10. Segunda freqüência de vibração para uma placa simplesmente apoiada considerando diversas malhas

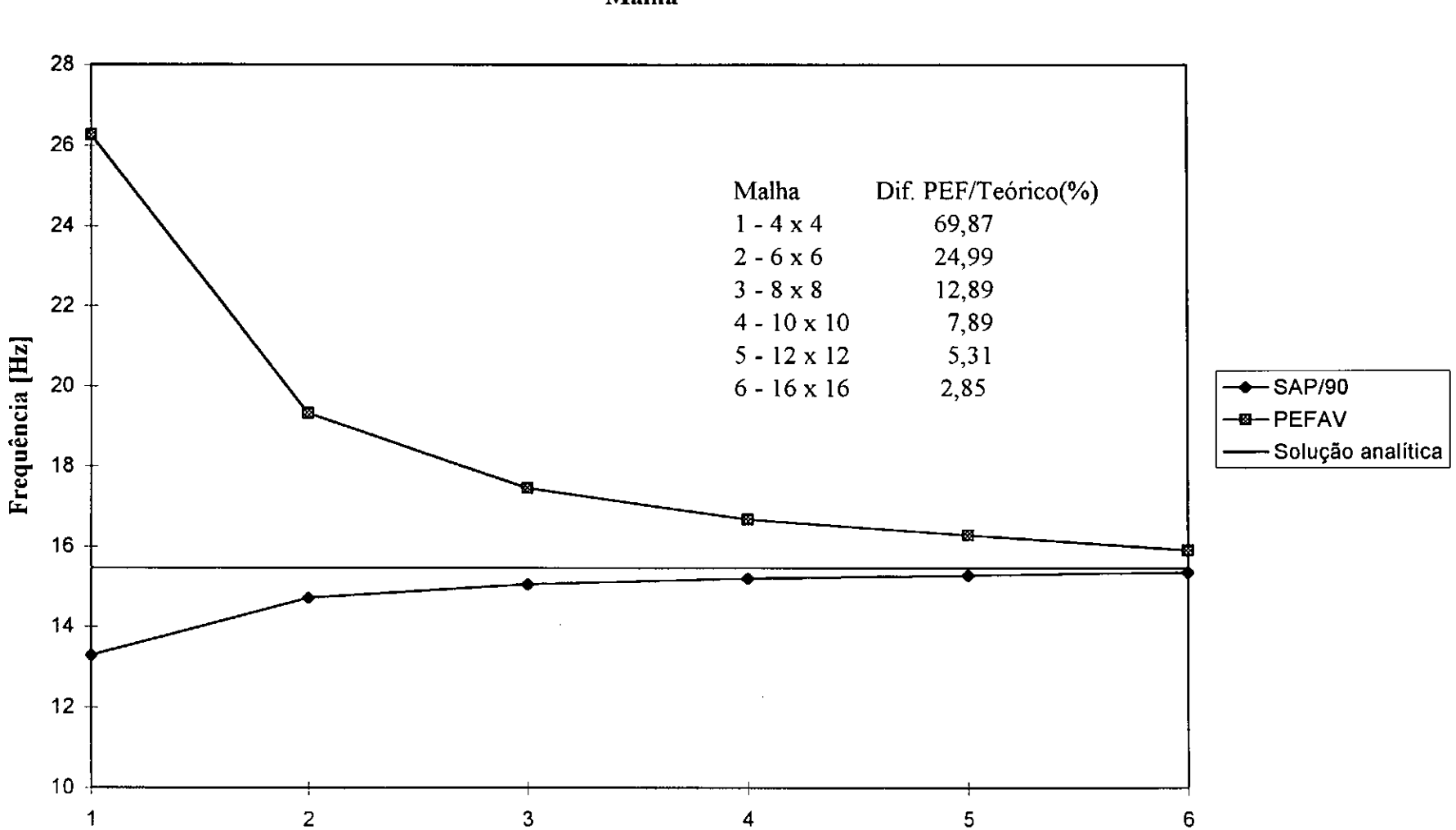


Figura V.11. Quinta freqüência de vibração para uma placa simplesmente apoiada considerando diversas malhas

V.2. LAJE ENRIJECIDA POR VIGAS

Seja a laje enrijecida por vigas mostrada nas Figuras V.12.a-b com as seguintes características:

E = 25 GPa; ν = 0,20; h = 0,10 m e ρ= 2500 kg/m^3, submetida ao carregamento $p_0 = 4000\ N/m^2$.

Uma análise comparativa tanto dos resultados estáticos quanto dinâmicos (freqüências) será feita com relação aos resultados obtidos pelo PEFAV, SAP90 [13] e duas modelagens em grelha do problema, a primeira empregada por Faria [15] e a segunda por Alves [14] em suas respectivas teses de mestrado.

Tanto para o PEFAV quanto para o SAP90 [13] foram utilizadas na presente análise a mesma discretização em elementos finitos, considerando elementos de placa e de pórtico espacial com uma malha de 8x8 elementos para cada painel de laje, conforme a Figura V.13., e com o tipo de ligação entre elementos apresentado na Figura V.14. A discretização neste caso tem as seguintes características:

1. 1089 nós

2. 1024 elementos de placa com dimensão de 0,50 x 0,625 x 0,10 m

3. 320 elementos de pórtico, tendo as dimensões da seção transversal de 0,40 x 1,00 m

Com a finalidade de comparar resultados, também foi analisado o caso em que a excentricidade entre os elementos de placa e pórtico é levada em consideração, como mostrado na Figura V.15., através do PEFAV, utilizando a transformação definida no Item III.1. Para diferenciar os dois casos analisados pelo PEFAV, neste exemplo, serão adotados os seguintes índices:

• PEFAV1 - Correspondendo ao caso em que a excentricidade não é levada em consideração;

• PEFAV2 - A análise é feita levando em consideração a excentricidade existente entre os elementos de placa e pórtico.

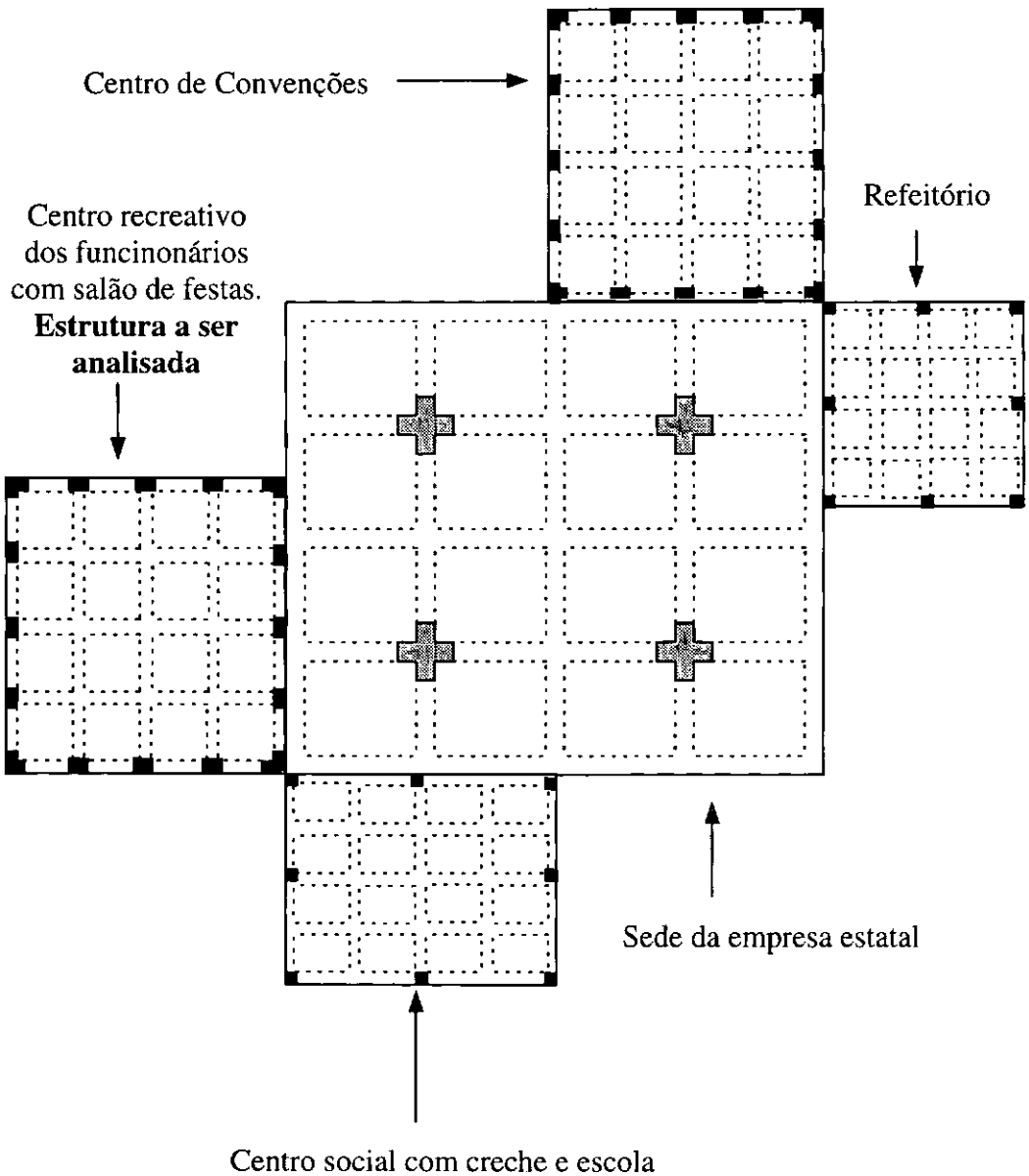


Figura V.12.a. Esquema de locação da estrutura analisada no exemplo 02.

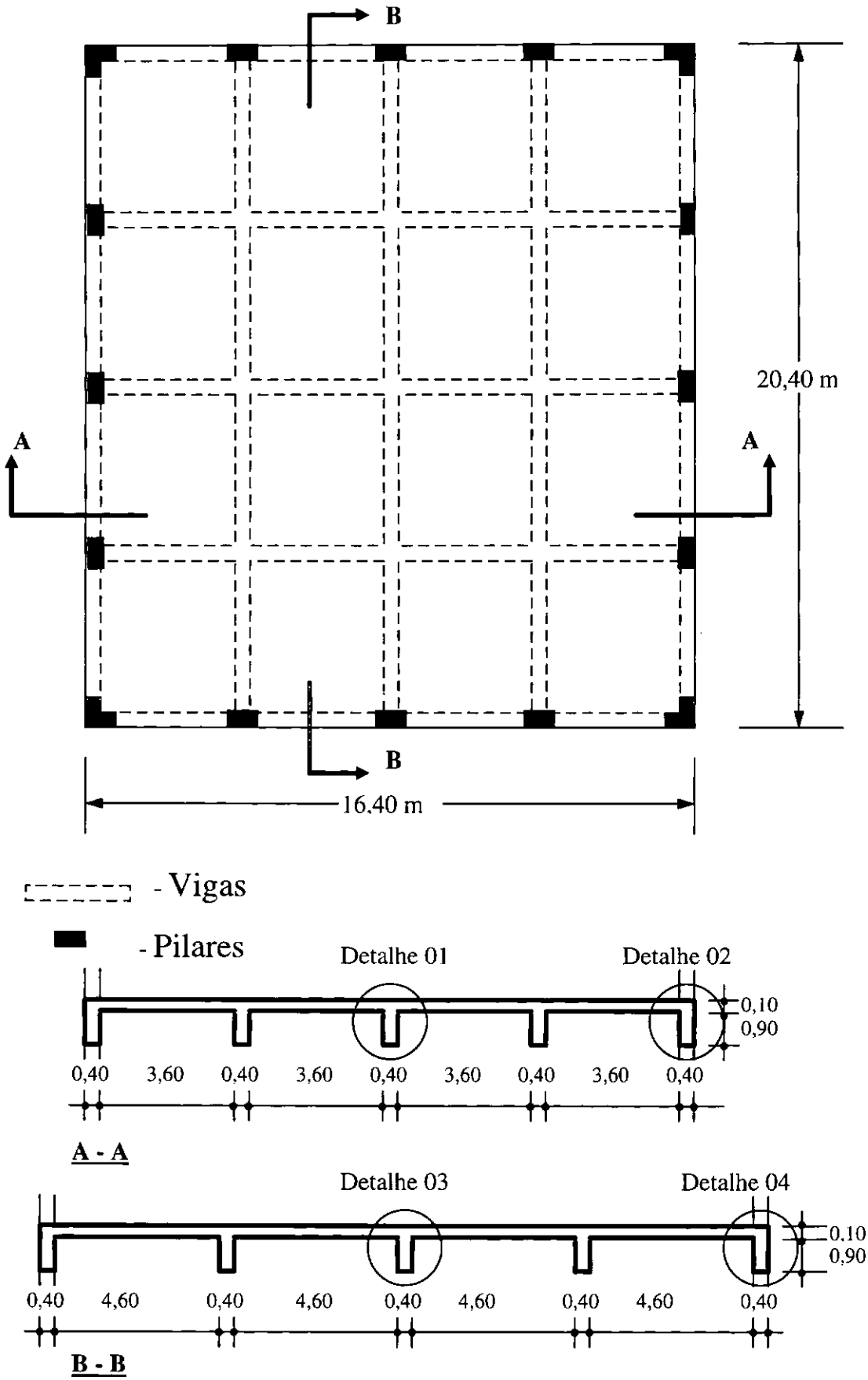


Figura V.12.b. Laje de piso nervurada, exemplo 02.

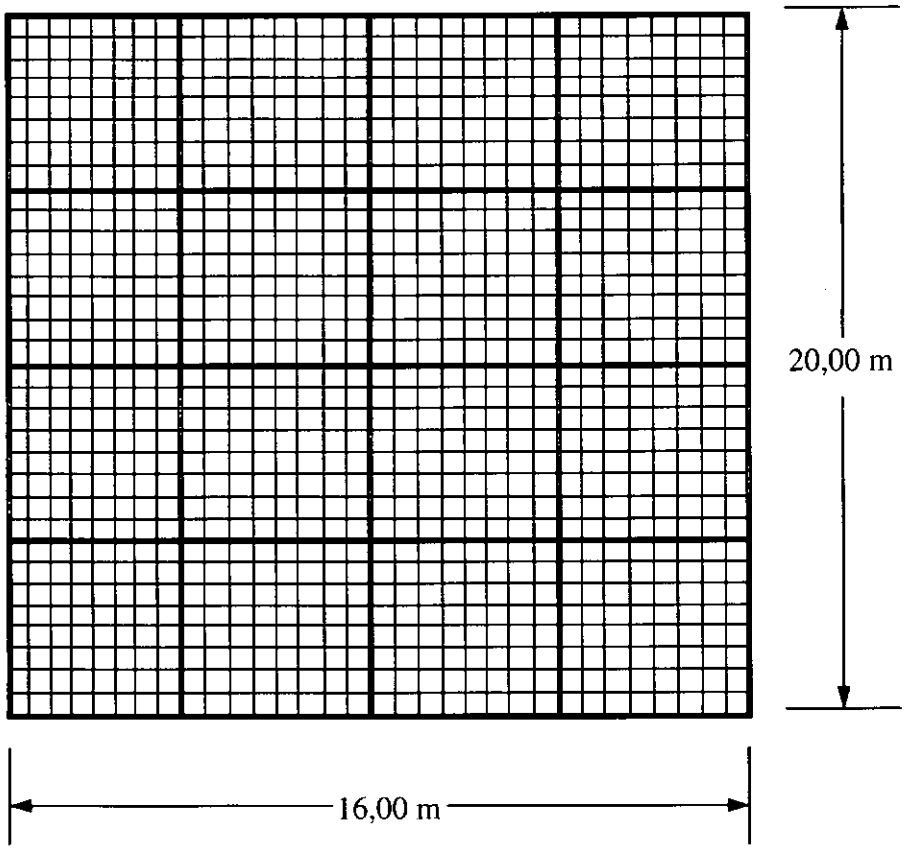


Figura V.13. Discretização da laje nervura do exemplo 02, com malha de 8x8 elementos para cada painel de laje.

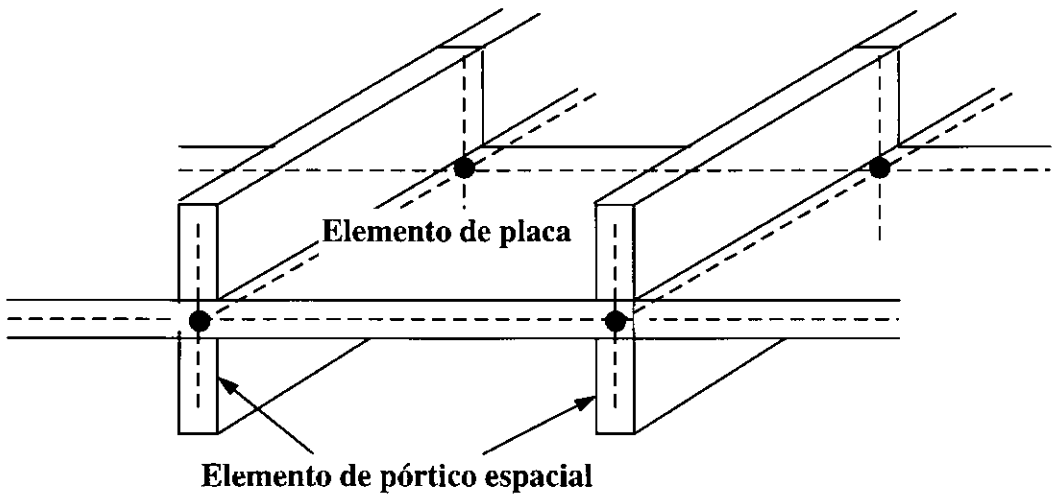


Figura V.14. Ligação típica entre os elementos de laje e pórtico espacial empregado na análise pelo PEFAV e SAP90.

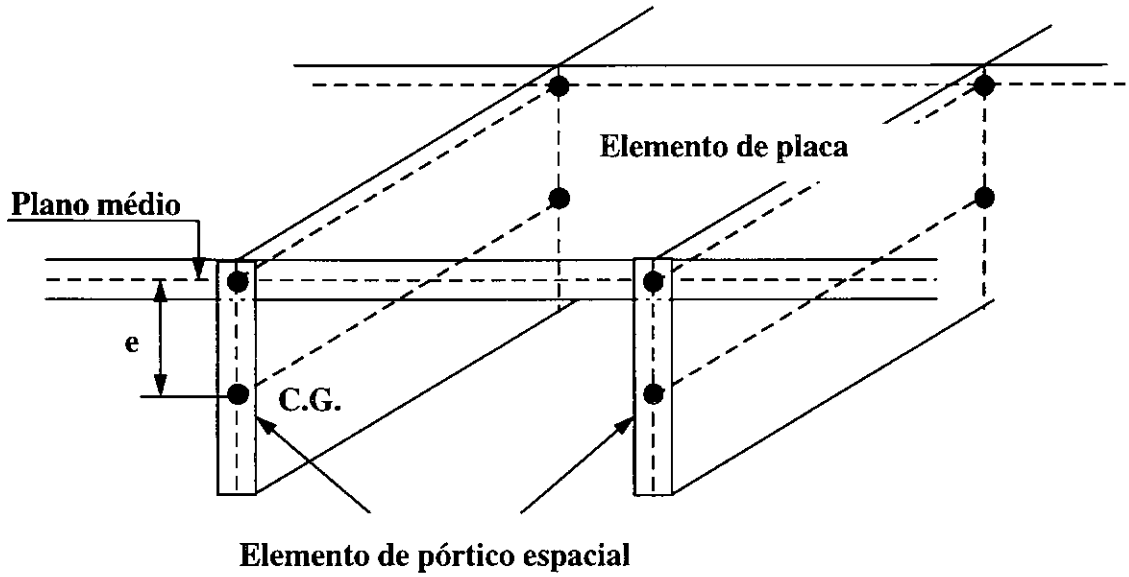


Figura V.15. Ligação entre os elementos de pórtico e placa levando-se em conta a excentricidade real existente entre ambos.

V.2.1. Modelagem em grelha equivalente a laje nervurada

V.2.1.1. Modelagem em grelha simples

Este tipo de discretização é a mais comumente utilizada, e emprega somente elementos de pórtico espacial, considerando o conjunto painéis de laje e vigas equivalente a uma grelha formada pela associação de vigas "T" e "L" invertido, onde a laje passa a ser parte integrante de um elemento de viga. Algumas considerações foram feitas para esta modelagem.

1. A contribuição dos painéis de laje para a rigidez cisalhante da estrutura foi desprezada.

2. Com a modelagem inicial de placa e pórtico observou-se que a distribuição de tensões normais à seção transversal, no plano médio da laje, é uniforme. Assim, as larguras efetivas das mesas das vigas "T" internas foram tomadas como iguais aos espaçamentos entre as faces dessas vigas paralelas, em cada direção. Para as vigas externas, as larguras foram tomadas da face externa da viga "L" até a metade da

distância entre sua face interna e a face da primeira viga interna "T" paralela, como mostra a Figura V.16. Muito embora, no dimensionamento, a NBR-6118 [39] estabeleça critérios para obtenção da largura efetiva de vigas "T"que conduzem a valores diferentes dos obtidos acima, conforme mostrado no apêndice "A".

3. Para a distribuição de massa, deve-se observar que este tipo de discretização resulta em modelagem bem diferente do caso real. Deve-se, portanto, efetuar uma alteração no valor da massa específica "ρ" de modo a se obter a distribuição de massa para esta discretização igual à situação real. Portanto, igualando-se a massa obtida pela discretização em grelha equivalente simples à massa real do problema obtém-se:

$$\text{Massa}_{\text{G.E.S.}} = \text{Massa}_{\text{REAL}};$$

$$\rho_{\text{CORRIGIDO}} \cdot \text{Volume}_{\text{G.E.S.}} = \rho_{\text{REAL}} \cdot \text{Volume}_{\text{REAL}};$$

$$\rho_{\text{CORRIGIDO}} = \rho_{\text{REAL}} \cdot \frac{\text{Volume}_{\text{REAL}}}{\text{Volume}_{\text{G.E.S.}}}; \qquad \text{(eq.V.17)}$$

onde, o sub-índice G.E.S. se refere a grelha equivalente simples.

Assim, a discretização resume-se a:

• 305 nós

•. 320 elementos de pórtico espacial divididos entre os quatro tipos de seção transversal, definidos conforme a Figura V.16 em:

Sentido transversal:

elemento "L1" - Detalhe 01

elemento "T1" - Detalhe 02

Sentido longitudinal:

elemento "L2" - Detalhe 03

elemento "T2" - Detalhe 04

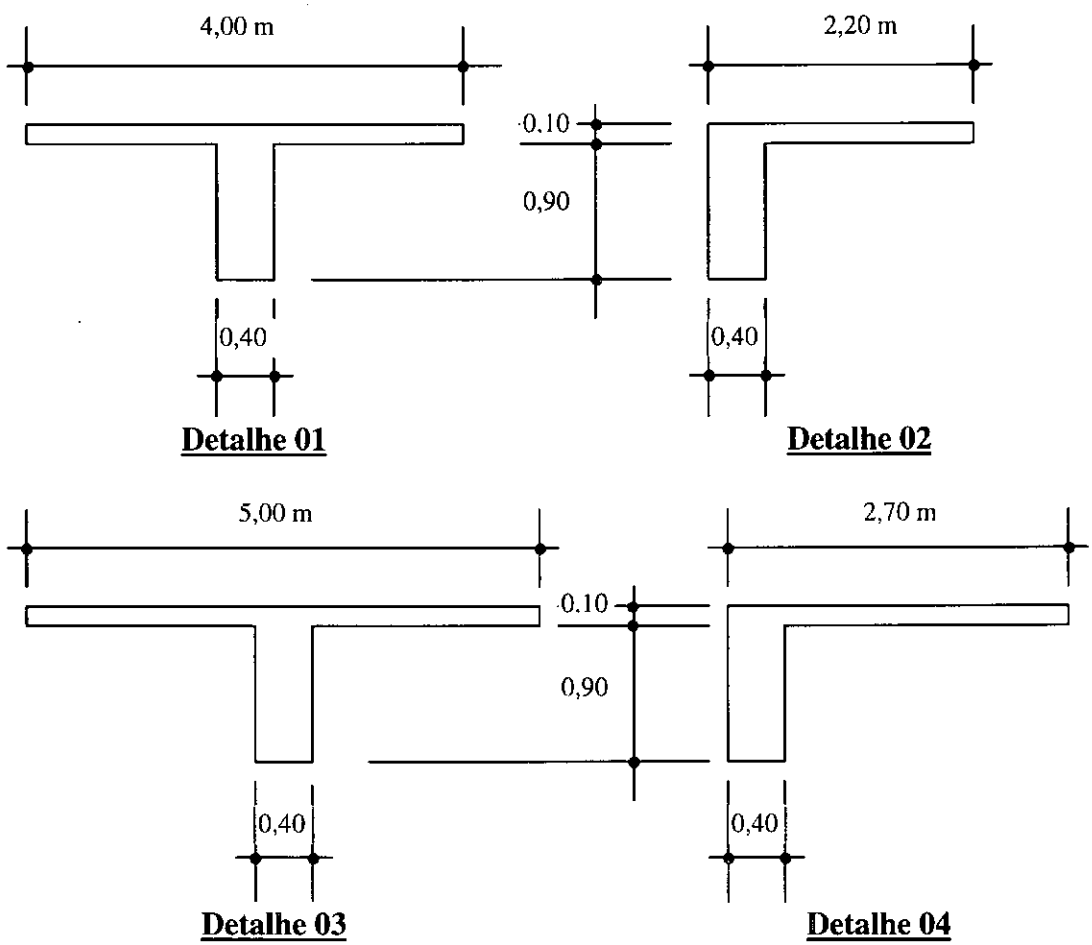


Figura V.16 . Elementos de pórtico espacial para modelagem em grelha equivalente simples da laje do exemplo 02.

V.2.1.2. Modelagem em grelha com propriedades da placa ortotrópica

Este tipo de modelagem utiliza as características de rigidez para uma laje ortotrópica equivalente à laje original, transformando-a em uma grelha equivalente. Este processo é baseado na Teoria Linear de Placas Delgadas, considerando o coeficiente de Poisson nulo.

Representa-se, então, a laje através de uma malha retangular formando uma grelha equivalente, conforme mostrado na Figura V.17.

Fazendo-se a correspondência entre os elementos de placa e de grelha, verifica-se que estes últimos terão as seguintes características:

Direção X:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} ; \qquad \text{(eq.V.18.a)}$$

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} ; \qquad \text{(eq.V.18.b)}$$

$$J = \frac{b \cdot h^3}{6} ; \qquad \text{(eq.V.18.c)}$$

$$A = b \cdot h \qquad \text{(eq.V.18.d)}$$

Direção Y:

$$I_z = \frac{a \cdot h^3}{12} ; \qquad \text{(eq.V.18.e)}$$

$$I_y = \frac{a^3 \cdot h}{12} ; \qquad \text{(eq.V.18.f)}$$

$$J = \frac{a \cdot h^3}{6} ; \qquad \text{(eq.V.18.g)}$$

$$A = a \cdot h \qquad \text{(eq.V.18.h)}$$

Assim, para esta modelagem serão adotados dois elementos de pórtico espacial: o primeiro referente às vigas do modelo estrutural e o segundo em conformidade com as características definidas pelas equações V.18 para a grelha equivalente à laje nevurada. A discretização para este caso possui, portanto, as seguintes características:

- 305 nós
- 640 elementos de pórtico espacial divididos em dois tipos, o primeiro considerando as vigas do problema real e o segundo considerando as vigas da grelha equivalente à laje.

Uma observação semelhante à do Item V.2.1.1. deve ser feita com relação à massa para a discretização segundo a modelagem utilizada por Alves [14]. Mas a

correção do valor da massa específica deve ser considerada somente para os elementos de grelha equivalente à laje, ou seja, os elementos do tipo 2. Assim, o valor obtido será:

$$\rho_{CORRIGIDO} = \rho_{REAL} \cdot \frac{Volumereal_{LAJE}}{Volume_{G.E.P.P.O.}} \qquad \text{(eq.V.20)}$$

onde, o sub-índice G.E.P.P.O. se refere à grelha equivalente com propriedades da placa ortotrópica.

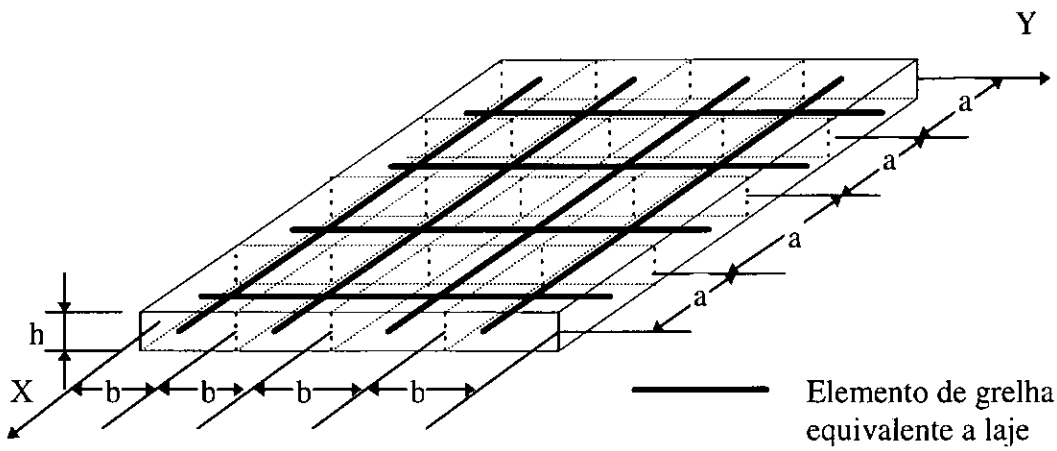


Figura V.17. Laje modelada como grelha equivalente com propriedades da placa ortotrópica

V.2.2. Análise dos resultados

Com os resultados obtidos através das modelagens definidas anteriormente, foram montados os gráficos apresentados nas figuras V.18 à V.27, dos quais algumas observações podem ser feitas.

Com relação à análise estática, podem ser feitos os seguintes comentários e observações:

E.1. Para o elemento de pórtico espacial.

E.1.1. Tanto para a longarina central quanto para a transversina central, figuras V.18. e V.19., observa-se que a modelagem em grelha equivalente simples apresentou resultados para deslocamentos que são muito menores do que os das demais

modelagens. Este resultado já era esperado, uma vez que este tipo de modelagem torna a grelha equivalente muito mais rígida do que a laje nervurada original, tendo em vista que as áreas de influência de dois elementos quaisquer sempre se sobrepõem.

E.1.2. Muito embora haja uma grande diferenciação com relação aos deslocamentos, observada no item anterior entre a modelagem em grelha equivalente simples e as demais, o mesmo não se observa com relação aos esforços, principalmente o momento fletor, de acordo com os gráficos das figuras V.20. e V.21, o que sugere um comportamento estrutural aproximado à de uma estrutura isostática.

E.1.3. É interessante notar que a utilização da excentricidade não provocou nenhuma mudança considerável em termos de deslocamentos ou esforços obtidos pelo PEFAV2. Deve-se notar também que os coeficientes de rigidez, com exceção da rigidez axial, são função do momento de inércia de área da seção transversal, e que esta grandeza pode ser definida aproximadamente como sendo:

$$I = \bar{I} + A.e^2 \qquad \text{(eq.V.21)}$$

onde,

I - Momento de inércia de área em relação ao eixo que passa pelo plano médio da laje;

$\bar{I}$ - Momento de inércia de área em relação ao eixo que passa pelo C.G. da viga retangular;

A - Área da seção transversal da viga retangular;

e - distância entre o eixo da viga e o plano médio da laje, que corresponde a excentricidade.

Como a excentricidade para o exemplo analisado é de 0,45 m e a área do elemento de 0,40 m^2, observa-se que este acréscimo (0,081 m^4) é da mesma ordem de

grandeza em relação a $I_y = \frac{bh^3}{12} = 0{,}033 \cdot m^4$. Portanto, era de se esperar resultados mais diferenciados em termos de deslocamento e esforços. Se conclui então que o modelo considerando a excentricidade não está representando perfeitamente a ligação existente entre o elemento de laje e o de pórtico.

E.1.4. Dos dois tipos de modelos equivalentes em grelha, observa-se que o utilizado por Alves [14] é o que apresenta resultados mais próximos ao PEFAV e ao SAP90 [13]. Isto acontece porque o elemento de pórtico emprega as características de rigidez de uma laje ortotrópica equivalente, o que conduz a valores mais próximos do modelo completo.

E.2. Elemento de placa.

E.2.1. Para este tipo de elemento foram feitas apenas as comparações entre o PEFAV1 e o SAP90 [13], tendo em vista que os outros dois modelos em grelha equivalente empregam somente elementos de pórtico e o PEFAV2 não representa bem a ligação entre os elementos de pórtico e de placa, conforme análise do item E.1.3.

E.2.2. Analisando-se os deslocamentos e rotações em uma seção A-A que intercepta o centro dos painéis próximos ao centro da laje, conforme as figuras V.22 à V.24, observa-se o quanto em termos de deslocamentos os resultados obtidos pelo PEFAV1 e pelo SAP90 [13] se aproximam. Apresentam, porém, uma grande diferença em termos de esforços no contorno de cada painel, como pode ser visto nas figuras V.25 e V.26.

E.2.3. Tomando-se um painel mais próximo do centro da laje, pode-se considerá-lo como sendo similar a uma a placa de 5,00 x 4,00 m^2, engastada nos quatro lados. Para este tipo de placa, e de acordo com as características do problema, que segundo as expressões de Timoshenko [30] fornece os valores para M_x no centro e nos bordos

como sendo respectivamente iguais a 1920 N.m/m e 4240 N.m/m. Portanto, apesar de ambos os programas apresentarem valores mais próximos do momento no centro do painel, somente o SAP90 [13] apresentou uma boa aproximação nas bordas do mesmo. O que se observa, e é confirmado também pelos resultados obtidos no exemplo 01, é que o elemento empregado pelo PEFAV1 não apresenta bons resultados no contorno da placa, sendo necessário a implementação de um elemento de no mínimo oito nós, o que contornaria o problema. Como para a presente análise o que interessa em termos de esforços são aqueles nos elementos de vigas, pode-se considerar que o modelo PEFAV1 fornece resultados satisfatórios para a análise estática de lajes nervuradas.

Com relação aos resultados dinâmicos em termos das freqüências naturais de vibração, pode-se fazer os seguintes comentários:

D.1. Apesar dos resultados para análise estática em grelha equivalente com propriedades ortotrópicas apresentar em geral resultados satisfatórios, o que se observa através da Figura V.27 é que, em termos de vibração livre, e conseqüentemente para a análise dinâmica, as modelagens em grelhas equivalentes não são adequadas, apresentando diferenças grosseiras para frequências cada vez mais altas. A modelagem empregada por Alves [14] apresenta resultados satisfatórios para as primeiras freqüências, mas apresenta diferenças consideráveis para as demais. A modelagem utilizada por Faria [15], tendo em vista o elemento ser muito rígido, apresenta para todas as freqüências valores bem superiores aos obtidos com o PEFAV1, PEFAV2 e com o SAP90 [13]. Sendo assim, a utilização destes dois tipos de modelagem não é indicada para a análise dinâmica. A utilização destes modelos mais simples fica na dependência do uso de artifícios para a correção das aproximações adotadas nas suas formulações teóricas, o que não é objeto de estudo deste trabalho.

2. Os resultados obtidos com o PEFAV1 e com o SAP90[13], tanto em termos de freqüências quanto das formas dos modos de vibração (não ilustrados aqui), apresentam pequena diferença relativa, ficando em torno de 2% para as freqüências mais altas.

Vale ressaltar ainda que utilizando, na modelagem empregada por Faria [15] a largura efetiva da mesa para os elementos de viga de acordo a NBR-6118 [39] (vide apêndice A), observou-se que, agora com a largura efetiva reduzida consideravelmente em relação à anterior, os deslocamentos resultaram maiores, mas os esforços não apresentaram nenhuma diferença considerável em relação aos anteriormente obtidos considerando-se a largura efetiva conforme a Figura V.16.

Considerando os resultados obtidos com o modelo computacional aqui apresentado para as análises estática e dinâmica (vibrações livre) de lajes nervuradas ou mistas, conclui-se que para o tipo de análise a que este trabalho se propõe o PEFAV tem desempenho e precisão suficientes, podendo, portanto, ser utilizado como ferramenta computacional para o estudo dessas lajes.

Um exemplo ilustrativo é ainda mostrado no apêndice B, empregando elemento de membrana. Tal exemplo foi apresentado por Reddy [26] e serve como um teste comparativo para o elemento membrana empregado pelo PEFAV.

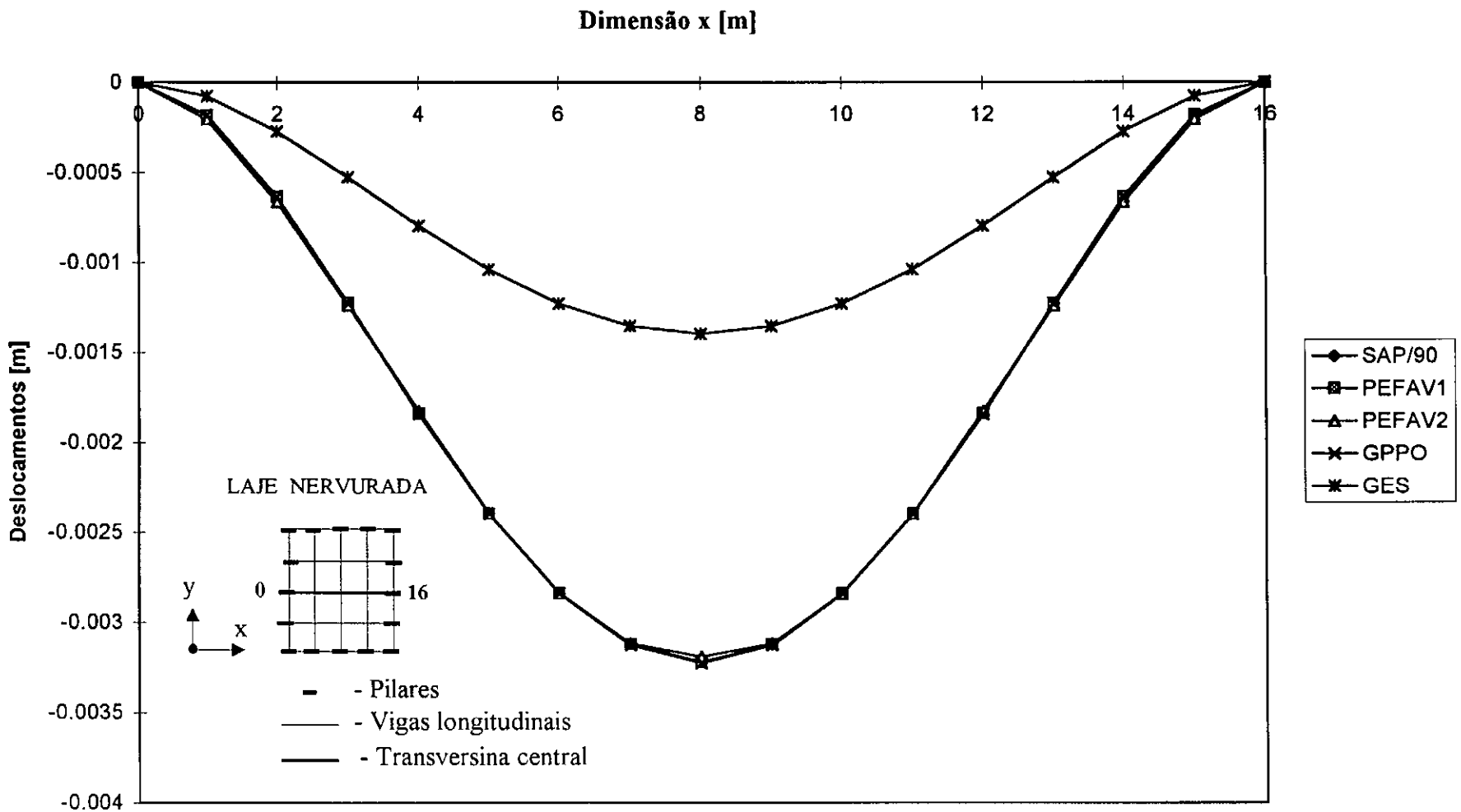


Figura V.18. Deslocamentos verticais ao longo da transversina central

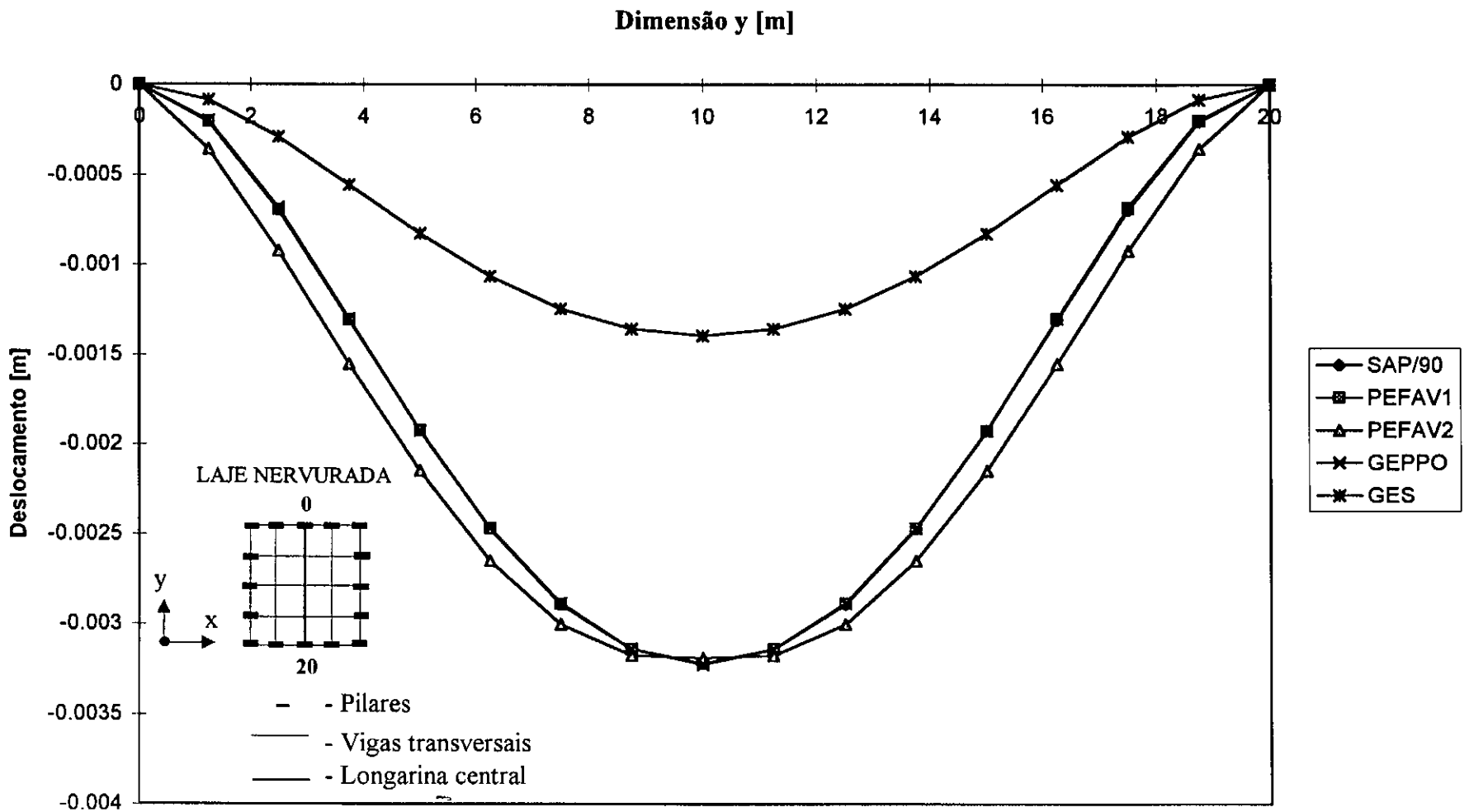


Figura V.19. Deslocamentos ao longo da longarina central

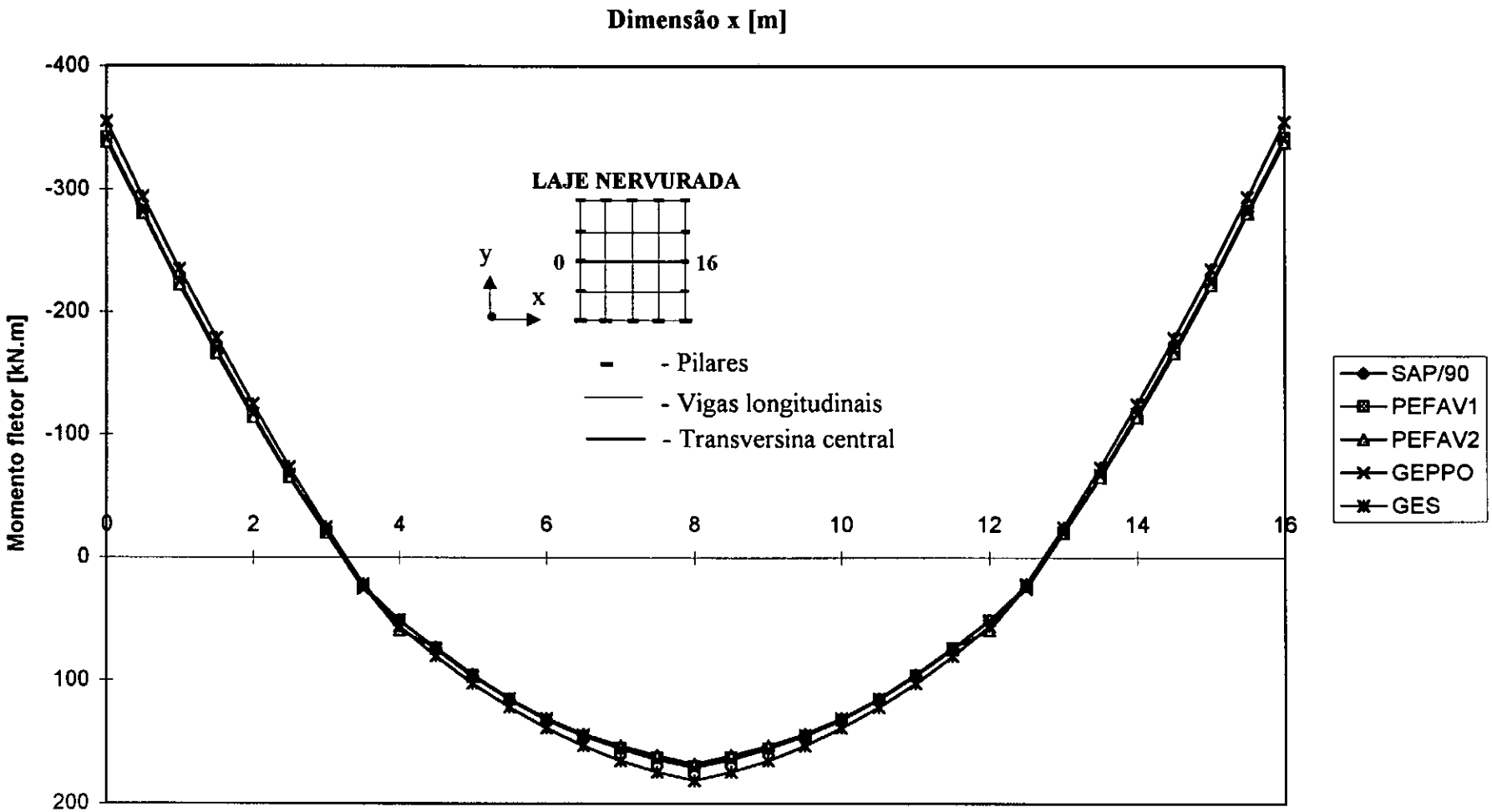


Figura V.20. Momento fletor ao longo da transversina central

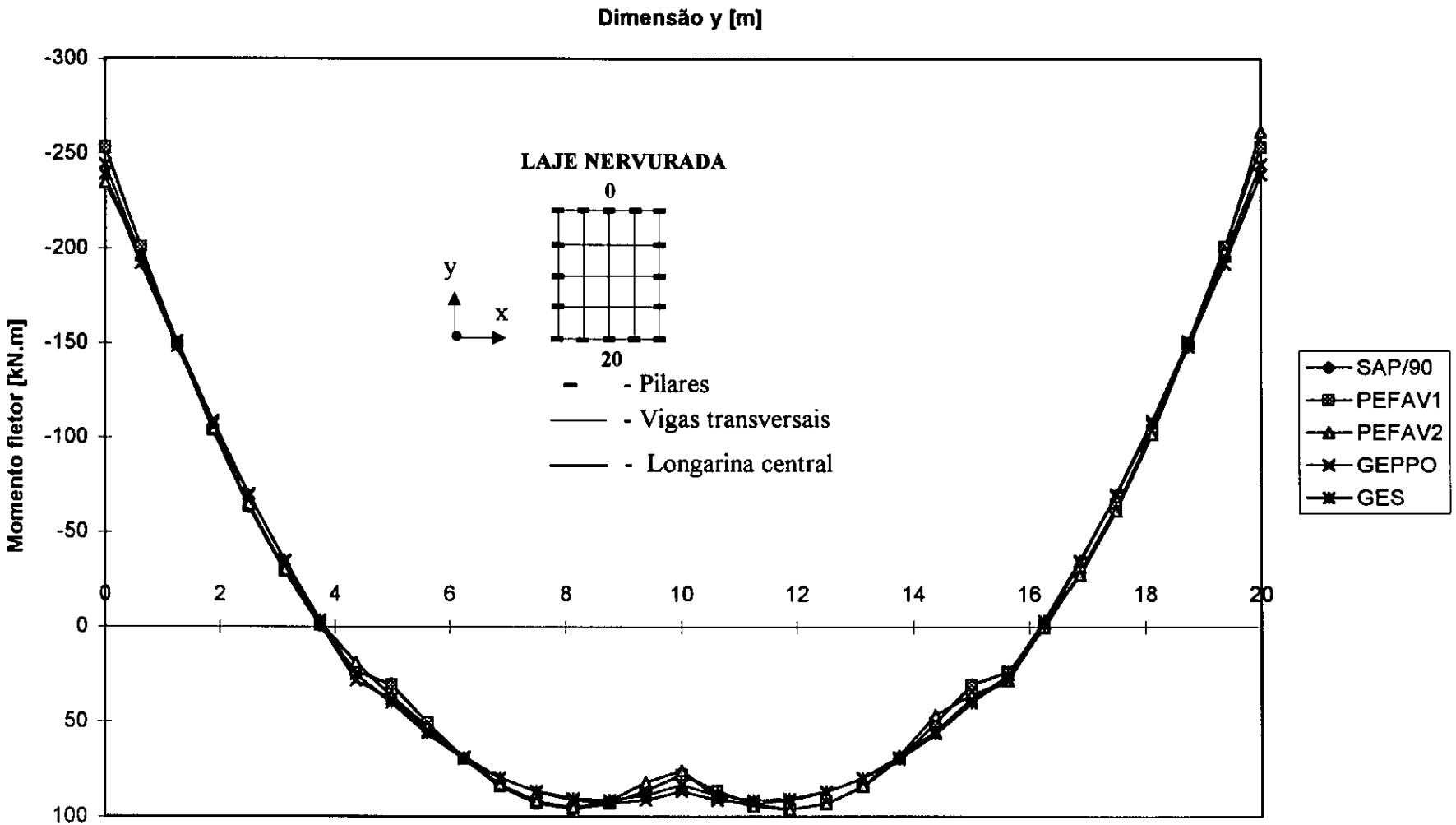


Figura V.21. Momento fletor ao longo da longarina central

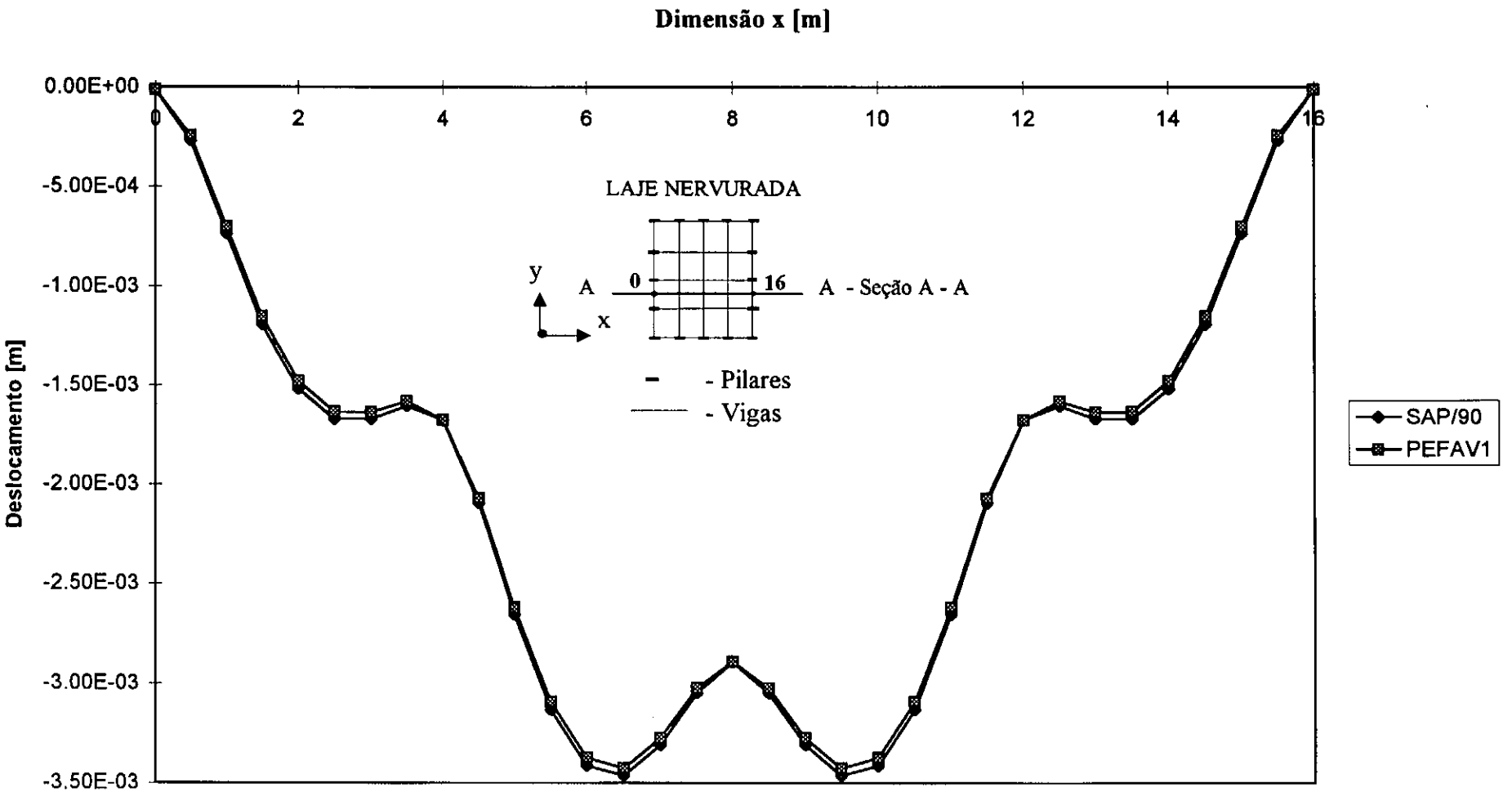


Figura V.22. Deslocamentos verticais ao longo da seção A-A

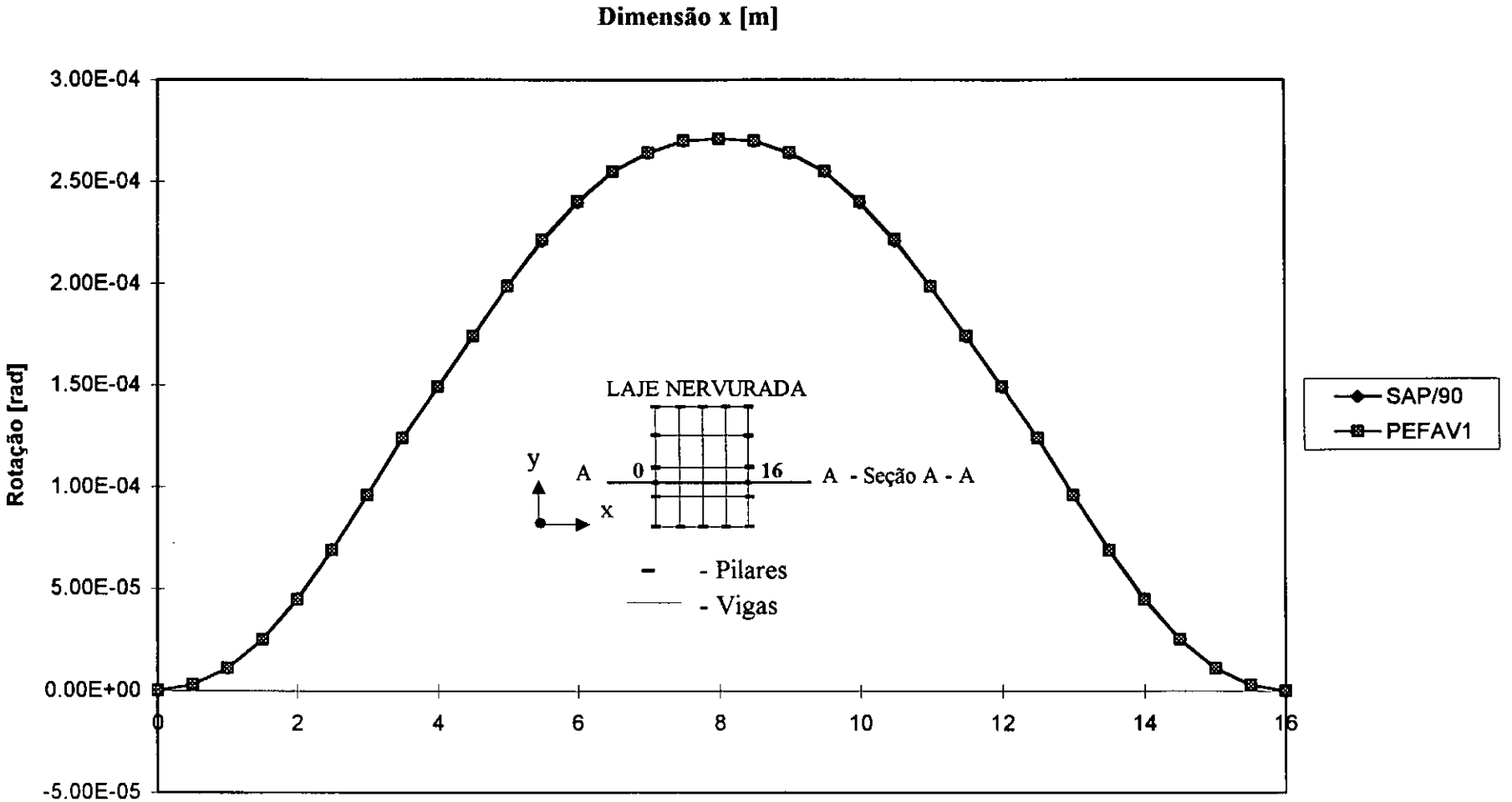


Figura V.23. Rotações na direção "x" ao longo da seção A-A

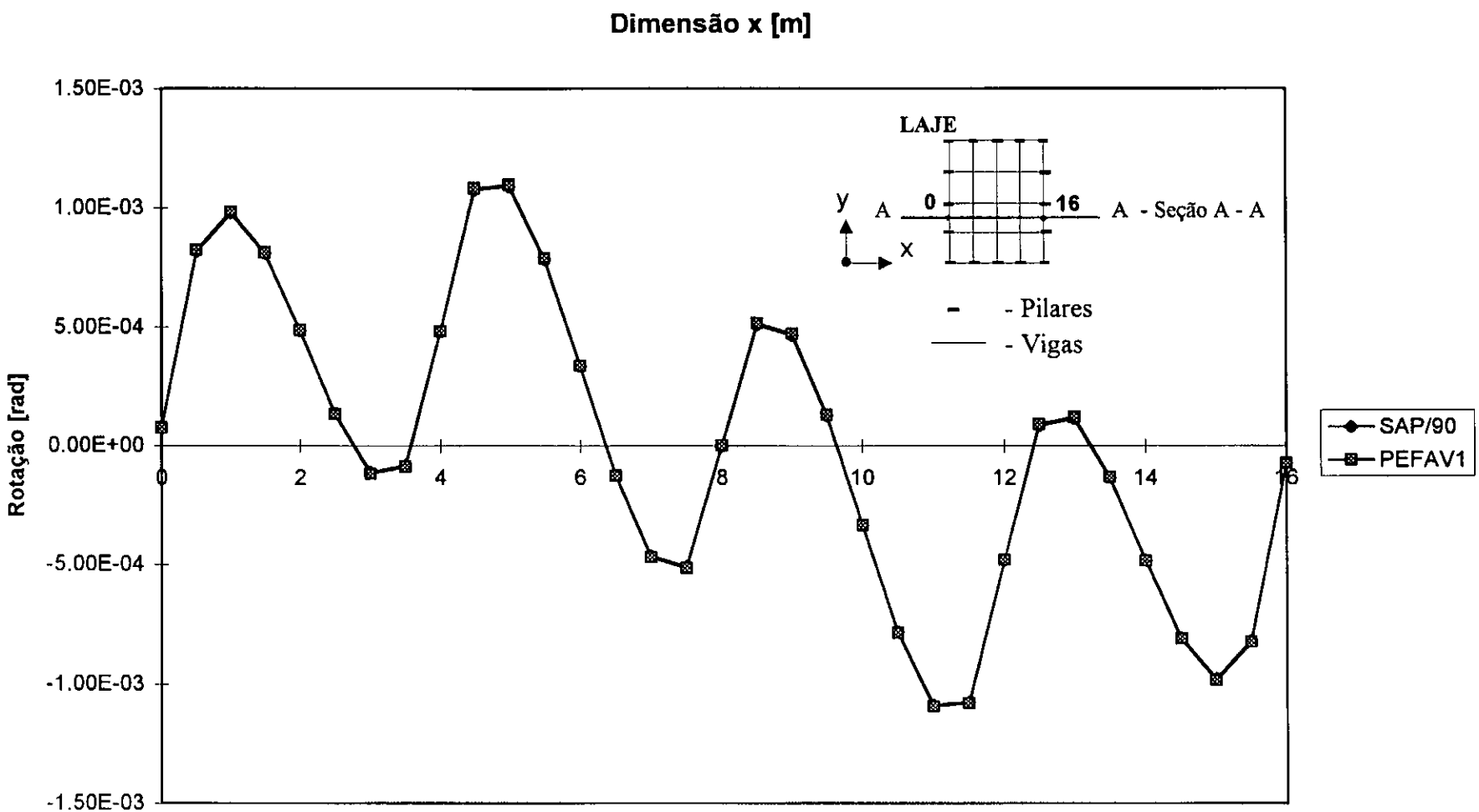


Figura V.24. Rotações na direção "y" ao longo da seção A-A

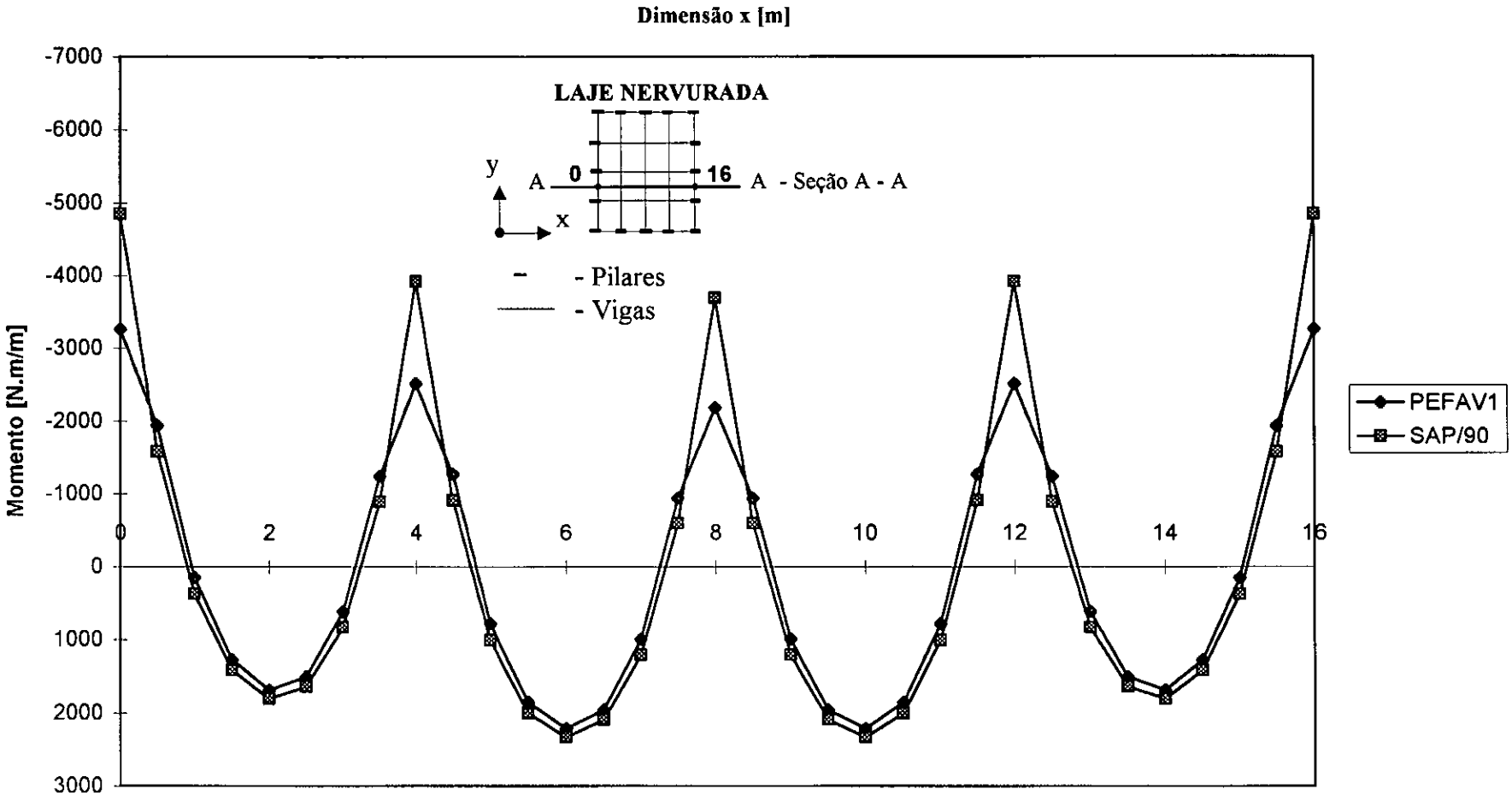


Figura V.25. Momento Mx ao longo da seção A - A

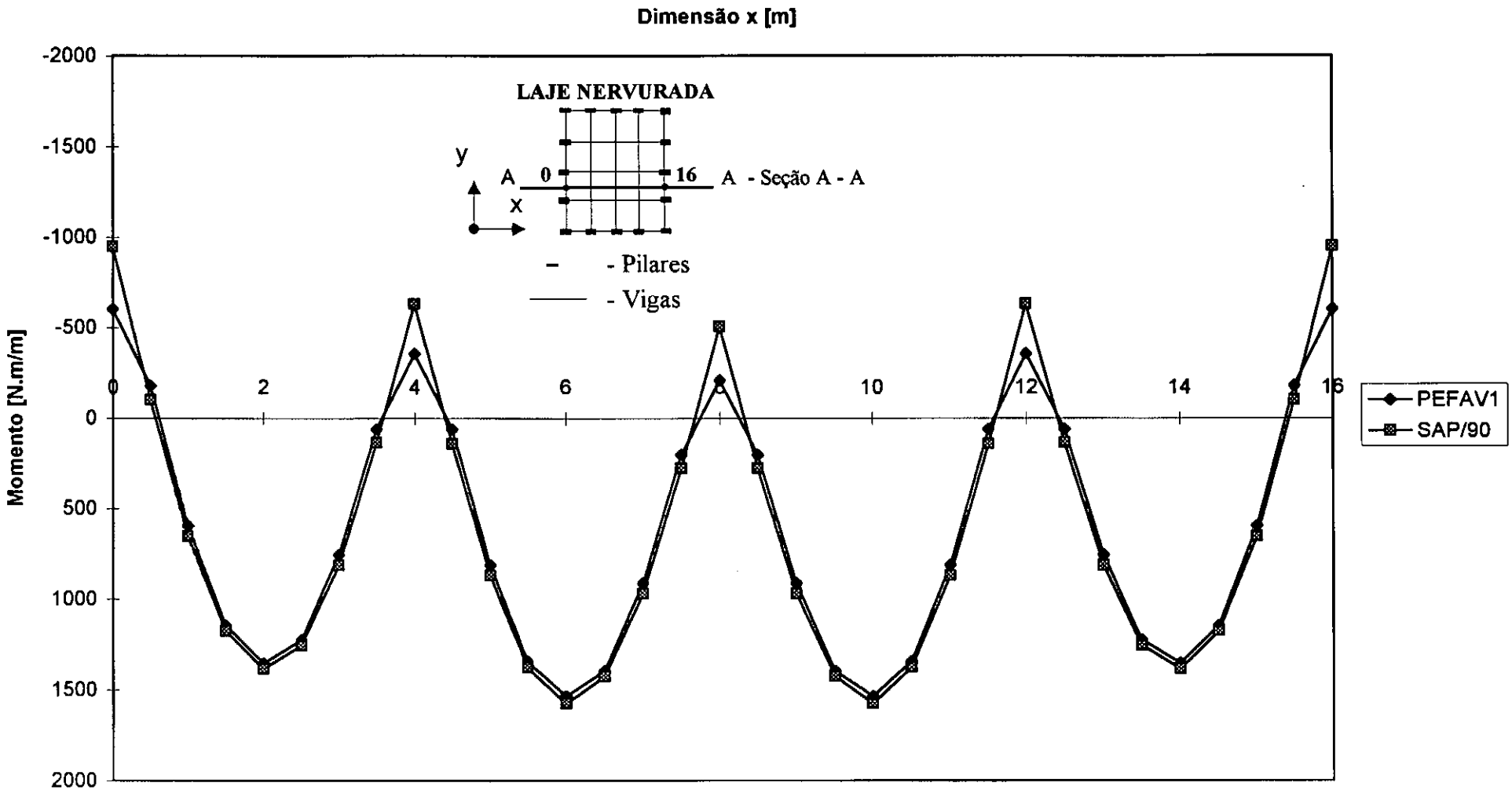


Figura V.26. Momento My ao longo da seção A-A

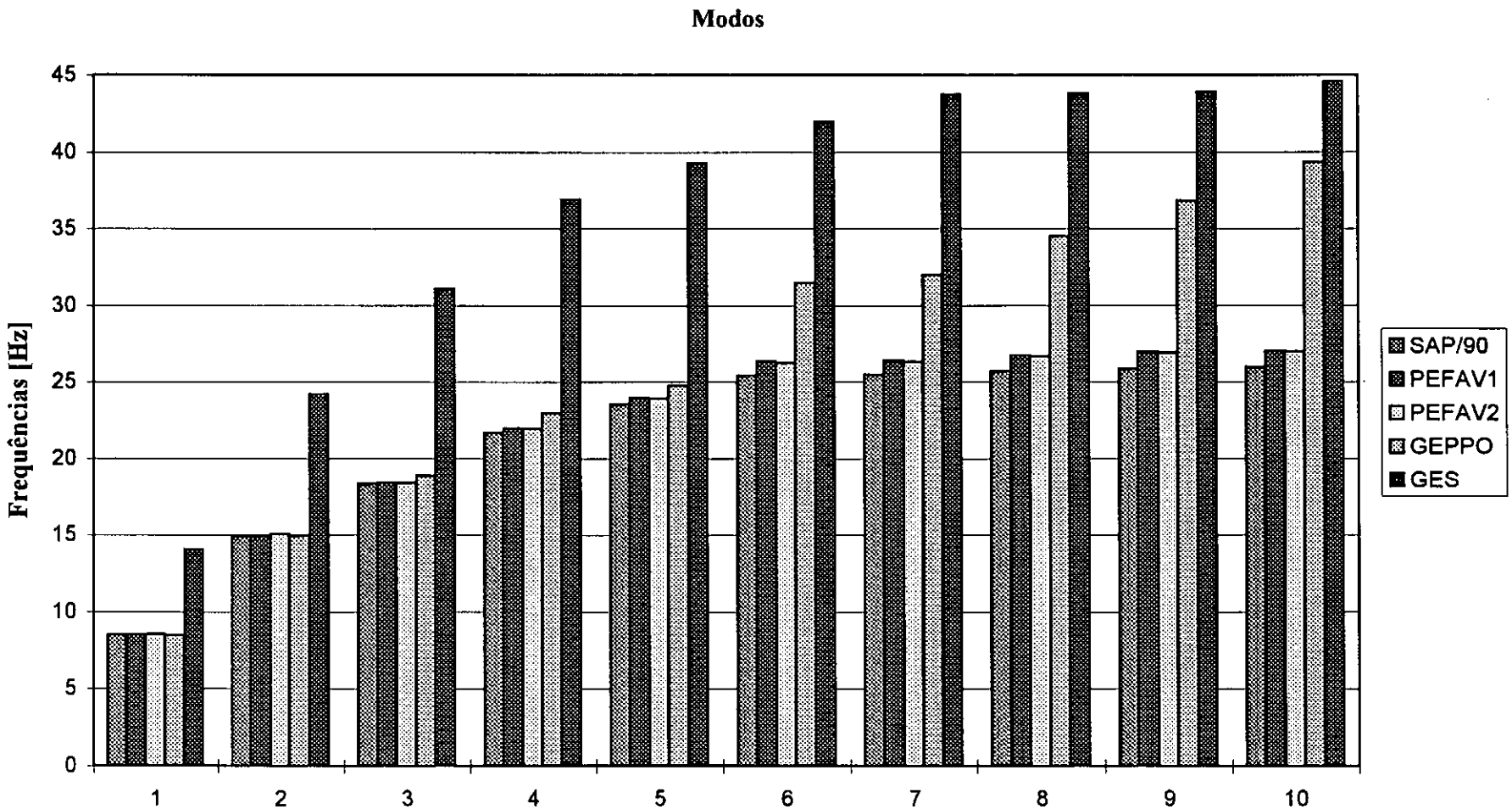


Figura V.27. Freqüências de vibração para laje nervurada do exemplo 02

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

VI.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo uma laje nervurada é analisada considerando-se duas situações distintas. A primeira, a de uma estrutura construída de acordo com o projeto baseado nas prescrições das normas NBR-6118 [39] e NBR-6120 [40]. Para sanar ou pelo menos amenizar os problemas que surgem quando um carregamento humano é aplicado sobre a laje, buscam-se medidas corretivas, utilizando-se para isso absorsores passivos de vibração. A segunda situação diz respeito à consideração da estrutura ainda na fase de projeto, buscando também com o auxílio de absorsores projetá-la dentro dos critérios de segurança e conforto. No contexto destas duas alternativas são analisados alguns exemplos, conforme mostrado no fluxograma apresentado na Figura VI.1.

Para a primeira situação, projetam-se os elementos de viga que compõem a estrutura tendo em vista que sobre estes atuam os esforços mais significativos, utilizando para isso as prescrições das normas citadas anteriormente. Com base neste projeto é introduzido sobre a estrutura um carregamento dinâmico de pulos e um outro de dança (tipo 1), conforme definido no Item IV.1. Analisam-se então as respostas obtidas para estes casos sem qualquer alteração do projeto original (estrutura original). Em seguida são propostas duas medidas corretivas: a primeira, introduzindo um sistema de absorção composto por absorsores do tipo massa, mola e amortecedor; e a segunda, empregando-se o mesmo sistema de absorção da primeira associado com outra medida que aumente o amortecimento global da estrutura.

Na segunda situação procura-se projetar a estrutura segundo critérios dinâmicos, empregando os mesmos tipos de carregamento. Um sistema de absorção é empregado como elemento de projeto, de modo a evitar os problemas surgidos quando da atuação destes. Dois casos são analisados para esta situação: o primeiro considerando-se o projeto com vigas de altura iguais a 0,80 m (projeto I) e o segundo com vigas de altura iguais a 1,00m (projeto II).

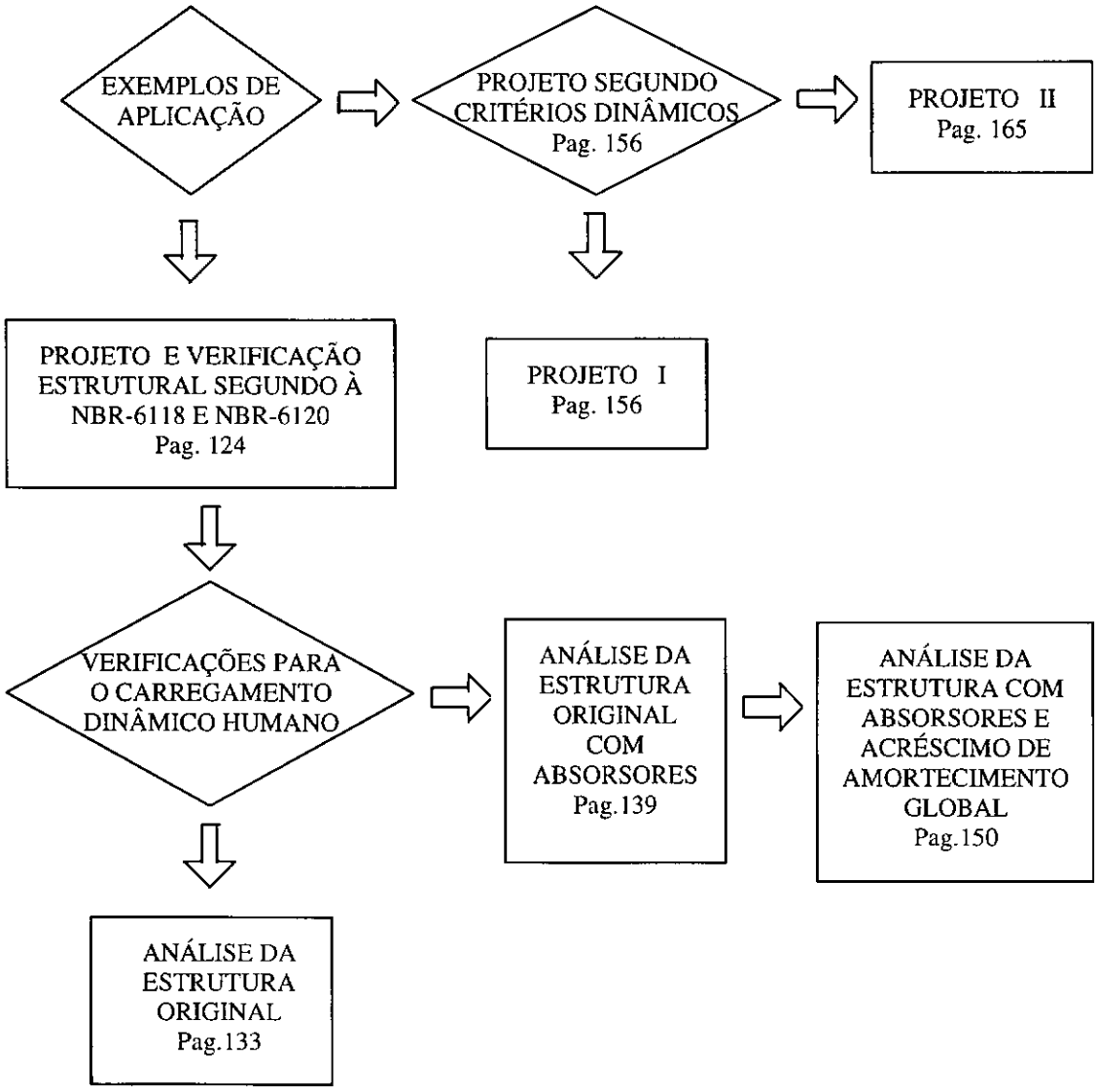


Figura VI.1. Fluxograma representativo dos exemplos apresentados no Capítulo VI.

VI.2. PROJETO DE ACORDO COM A NBR-6118 E NBR-6120

Considera-se a laje nervurada da Figura V.12., sendo as vigas projetadas com 0,60m de altura ao invés de 1,00m, mantendo-se as demais características inalteradas. A destinação desta laje é para salão de bailes, tradicionais e carnavalescos, podendo ainda ser utilizado para apresentação de grupos folclóricos. A área central desta laje de piso é destinada a danças e apresentações, ficando a área ao redor destinada à platéia e/ou às mesas, onde pessoas sentadas são supostas não contribuir para excitação dinâmica da estrutura. A ocupação da laje é mostrada na Figura VI.2. A discretização utilizada é a do exemplo 02, mostrado na Figura V.13.

Muito embora a NBR-6118 [39], subitem 6.1.1.3.a., estabeleça para lajes nervuradas que a distância livre entre nervuras não deva ultrapassar 100 cm, emprega-se neste trabalho a expressão "laje nervurada" também para a laje enrijecida por vigas cuja distância livre entre elas é maior do que estabelece a norma.

Com base nos valores prescritos na norma NBR-6120 da ABNT [40], foram obtidos os seguintes carregamentos:

1. Carga Permanente:

Laje nervurada em concreto armado

$$h_{eq.}(m) \cdot \gamma_{mat.}(kN/m^3) = Carga(kN/m^2)$$

$p.p._{equiv.}$	0,24	.	25,0	=	6,00

Piso com argamassa (cimento e areia) e lajota cerâmica

$$e_{piso}(m) \cdot \gamma_{mat.}(kN/m^3) = Carga(kN/m^2)$$

$p.p._{equiv.}$	0,05	.	21,0	=	1,05
Total				=	7,05 kN/m^2

2. Sobrecarga acidental de ocupação humana:

Salões de danças e de esportes em clubes

Total = 5,0 kN / m^2

Empregando-se os valores de carga discriminados acima e o PEFAV, os seguintes valores para os esforços solicitantes máximos foram obtidos:

Momento de flexão:

Positivo: $M^{+}_{est.eq.} = 457,44$ kN.m

Negativo: $M^{-}_{est.eq.} = 965,70$ kN.m

Momento de torção: $T_{est.eq.} = 74,53$ kN.m

Cortante: $V_{est.eq.} = 348,93$ kN

O momento de flexão foi o esforço mais importante para o dimensionamento e este ocorreu para o momento positivo na viga transversal central, exatamente no nó central (ponto A, Figura VI.2). O momento negativo máximo ocorreu na mesma viga no engastamento com o pilar (ponto D, Figura VI.2). O momento de torção máximo ocorreu na segunda viga longitudinal, no nó de interseção desta com a segunda viga transversal (ponto E, Figura VI.2). O esforço cortante máximo, por sua vez, ocorreu na viga transversal central, no engastamento com pilar (ponto D, Figura VI.2).

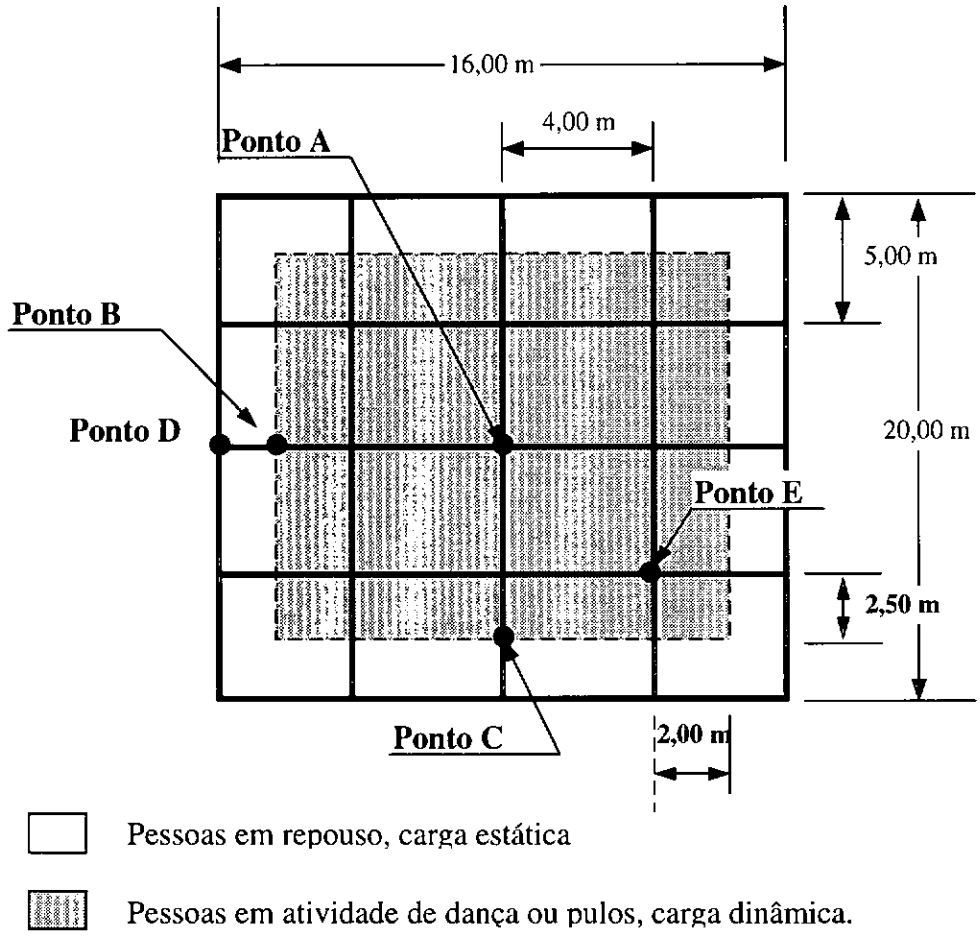


Figura VI.2. Distribuição do carregamento humano para o tipo de ocupação a qual laje se destina.

Com os valores obtidos, foram dimensionadas as armaduras longitudinais de aço CA-50, distribuídas conforme mostram as figuras VI.3.a. e VI.3.b., com área de 30,40 cm^2 para a seção de momento positivo e de 65,89 cm^2 (superior) e 45,91 cm^2 (inferior) para o momento negativo. Observa-se que o emprego de armadura dupla na seção retangular com momento negativo foi uma alternativa ao emprego de uma mísula no encontro das vigas com os pilares, já que a armadura simples obtida neste último caso era sempre para uma seção superarmada, pelo menos para as dimensões práticas e econômicas. A armadura para o momento positivo foi determinada considerando-se uma viga "T" com largura efetiva de mesa igual a 2,00 m, de acordo com que estabelece a NBR-6118 [39] (vide apêndice A).

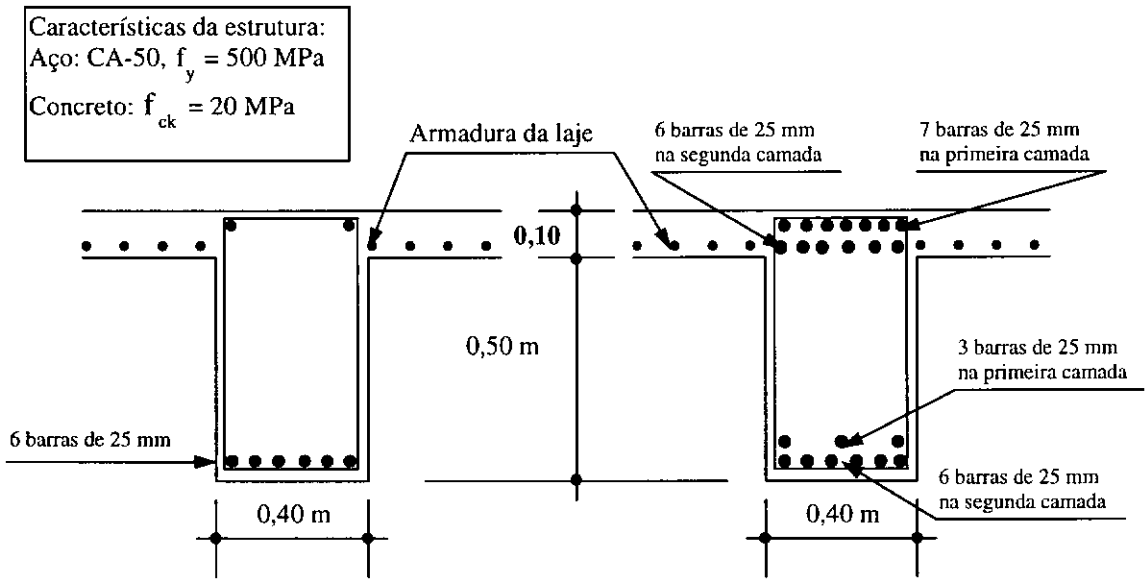


Figura VI.3.a. Armadura relativa ao momento fletor positivo

Figura VI.3.b. Armadura relativa ao momento fletor negativo

VI.2.1. Verificação quanto aos Critérios de Segurança e Utilização

 # <u>verificação quanto à segurança</u>

Os momentos de flexão resistentes obtidos considerando os valores característicos f_{ck} = 20 MPa e f_y = 500 MPa e as seções armadas, conforme as figuras VI.3.a. e VI.3.b., são, respectivamente:

$$M^{+}_{res.} = 703.50 \text{ kN.m}$$

$$M^{-}_{res.} = 1419.40 \text{ kN.m}$$

Para estes valores e considerando os momentos de flexão solicitantes obtidos para as cargas estáticas permanente mais a acidental, obtém-se os seguintes "coeficientes de majoração das cargas disponível":

$$\gamma^{+} = \frac{M^{+}_{res.}}{M^{+}_{est.eq.}} = \frac{703,50}{457,44} = 1,54$$

$$\gamma^{-} = \frac{M^{-}_{res.}}{M^{-}_{est.eq.}} = \frac{1419,40}{965,70} = 1,47$$

Como a NBR-6118 estabelece um coeficiente de majoração de carga permanente igual a 1,40, e de acordo com o que foi exposto no Item IV.2.1., pode-se concluir, com base nos valores das relações γ dadas acima, que as vigas foram adequadamente dimensionadas e estão com uma certa na folga na segurança.

 # <u>Deformação excessiva</u>

O máximo deslocamento fornecido pelo PEFAV para o caso analisado deu-se no nó central da laje (ponto A, Figura VI.2) apresentando os seguintes valores:

1. Considerando-se somente a carga estática acidental:

$$d_{max.acid.} = -1,45 \text{ cm}$$

2. Considerando-se a atuação conjunta das cargas estáticas permanente e acidental.

$$d_{max.} = d_{max.perm.} + d_{max.acid.} = -3,52 \text{ cm}$$

Observando-se que os valores máximos admissíveis prescritos na norma são expressos pelas equações IV.2. e IV.3.,

$$d_{max.acid.} \leq \frac{L}{500} \quad ; \qquad \text{(eq.IV.2)}$$

$$d_{max.perm.} + d_{max.acid.} \leq \frac{L}{300} \quad ; \qquad \text{(eq.IV.3)}$$

obtém-se,

$$d_{max.acid.} \leq \frac{16}{500} = 3,20 \text{ cm};$$

$$d_{max.perm.} + d_{max.acid.} \leq \frac{16}{300} = 5{,}30 \text{ cm};$$

e como as deformações máximas da estrutura em valores absolutos, tanto para o carregamento acidental quanto para o permanente, são menores do que os obtidos pelas equações IV.2 e IV.3, conclui-se que estas deformações estão dentro dos limites que a norma prescreve.

 # Formação de fissuras inaceitáveis

Para que não ocorra formação de fissuras com aberturas inaceitáveis, uma das seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$\frac{\Phi_b}{(2\eta_b - 0{,}75)} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left(\frac{4}{\rho_r} + 45\right) \leq 3 \qquad \text{(eq.IV.4)}$$

$$\frac{\Phi_b}{(2\eta_b - 0{,}75)} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot 3 \cdot \frac{\sigma_s}{f_{tk}} \leq 3 \qquad \text{(eq.IV.5)}$$

Considerando-se, inicialmente, as seguintes características do material:

$$E_s = 210 \text{ GPa}; \; f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} = \frac{20}{10} = 2{,}0 \cdot \text{MPa}; \; \eta_b = 1{,}5 \text{ (aço CA-50B) e}$$

$$A_{cr.} = 0{,}25 \cdot 40 \cdot 60 = 600 \text{ cm}^2$$

Para o momento de flexão positivo:

$$\Phi_b = 25{,}4 \text{ mm}; \; \rho_r = 0{,}051 \text{ e} \quad \sigma_s = 277{,}2 \text{ MPa}$$

Obtém-se:

$1{,}84 \leq 3$	(eq.IV.4)	Satisfeita.
$6{,}20 \leq 3$	(eq.IV.5)	Não Satisfeita.

Para o momento negativo:

$\Phi_b = 25{,}4$ mm; $\rho_r = 0{,}11$ e $\sigma_s = 309{,}57$ MPa

Obtém-se:

$1{,}34 \leq 3$	(eq.IV.4)	Satisfeita.
$7{,}62 \leq 3$	(eq.IV.5)	Não Satisfeita.

Como em ambos os casos, pelo menos uma das inequações foi satisfeita, é pequena a probabilidade da formação de fissuras indesejáveis que possam vir a comprometer a vida útil em serviço da estrutura.

VI.2.2. Verificação para o Carregamento Humano Dinâmico

Considerando-se agora que a estrutura foi executada conforme as dimensões e as armaduras determinadas pelo projeto, conforme o item anterior, e admitindo-se que a mesma possua uma taxa de amortecimento para o primeiro e o último (décimo) modos de vibração igual a 3% (três porcento), sendo as taxas para os demais modos calculadas a partir da eq.II.21; introduz-se o carregamento dinâmico definido no Capítulo IV, considerando duas situações distintas: a primeira para o caso de pulos ritmados, onde estariam representados os bailes de carnaval e ginástica do tipo aeróbica, quando utilizado para academia; a segunda representa o caso de dança que não envolve pulos acentuados, ou seja, um tipo de dança mais suave em relação ao caso anterior. Como o primeiro tipo é o mais crítico, tendo em vista que a energia desenvolvida durante os pulos é muito maior, será dada especial atenção a este caso na presente análise.

Foi utilizada nesta análise uma taxa de ocupação de 2 pessoas/m^2, ou, aproximadamente, 1,5 kN/m^2, tanto na área central quanto nas áreas periféricas. Deve-se observar que, para as áreas periféricas, além das pessoas, poderiam estar distribuídas mesas (bailes), sendo portanto nestas áreas o valor adotado para carga distribuída bastante conservador. Além do mais, estas pessoas distribuídas nestas áreas foram consideradas, para a análise dinâmica, por estarem em repouso, como massa adicionada à laje.

Considerou-se que as pessoas na área central estão em movimento sincronizado, ou seja, na mesma freqüência fundamental de atividade e sem diferença de fase entre os seus movimentos.

Os pontos considerados mais importantes para análise (Figura VI.2) foram:

Ponto A - é o ponto central da laje onde ocorrem os maiores deslocamentos e as maiores acelerações verticais e onde são obtidos os valores para máximos momentos de flexão positivos.

Pontos B e C - são os pontos que ficam no limite, entre a área central e a área periférica, onde ocorrem as maiores acelerações verticais para as pessoas que estão em repouso. São importantes para verificação do desconforto experimentado por estas pessoas.

Ponto D - muito embora para este ponto não ocorram deslocamentos ou acelerações verticais, é necessário incluí-lo na análise, uma vez que neste ponto são obtidos os valores máximos para o momento de flexão negativo.

V1.2.2.1. Análise da estrutura original

Utilizando-se o PEFAV foram obtidas, para a estrutura original projetada segundo as normas, as dez primeiras freqüências de vibração livre apresentadas na Tabela VI.1. As três primeiras formas modais de vibração associadas a essas freqüências são mostradas nas figuras VI.4.a-c. Conforme os tipos de cargas definidos anteriormente, foram obtidos os valores para deslocamentos, acelerações e esforços, apresentados nas Tabelas VI.2. e VI.3., referentes somente à parcela dinâmica da força.

Tabela VI.1. Freqüências naturais para a estrutura original.

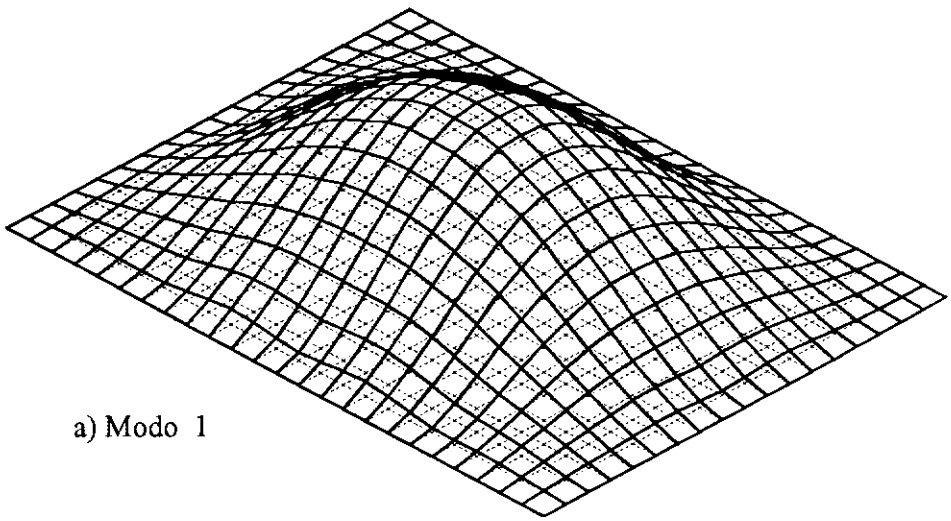
	Freqüências [Hz]
1	4,84
2	8,61
3	10,71
4	13,32
5	14,30
6	17,91
7	17,97
8	19,38
9	20,75
10	20,99

Tabela VI.2. Valores para carga de pulos.

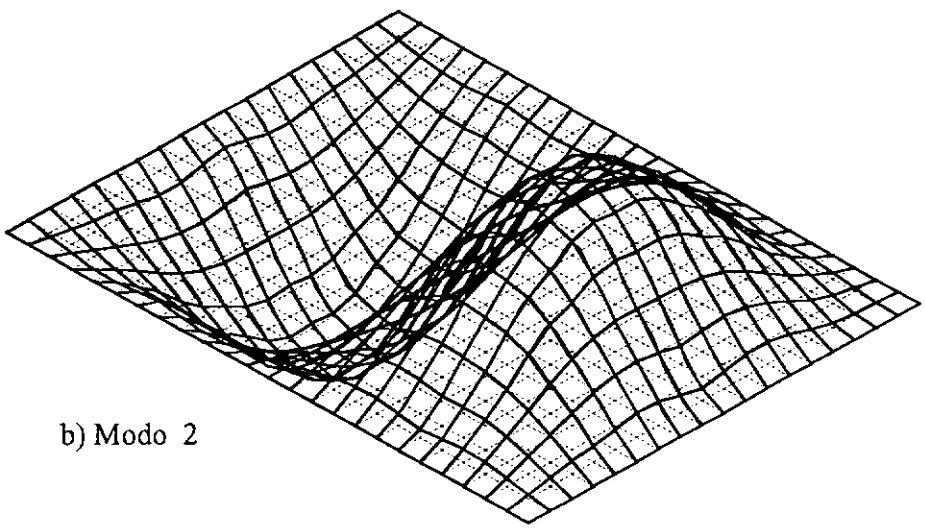
Pontos	Deslocamento [cm]	Aceleração $[m/s^2]$	Momento [kN.m]
A	±4,56	40,25	∓645,70
B	-	7,60	-
C	-	7,36	-
D	-	-	±1093,00

Tabela VI.3. Valores para carga de dança.

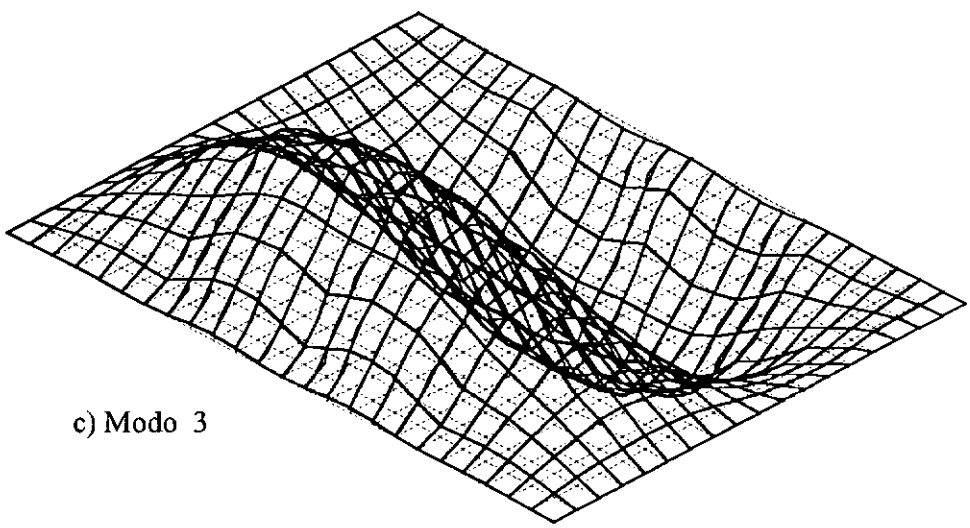
Pontos	Deslocamento [cm]	Aceleração $[m/s^2]$	Momento [kN.m]
A	±0,74	6,12	∓104,20
B	-	1,15	-
C	-	1,12	-
D	-	-	±184,70



a) Modo 1



b) Modo 2



c) Modo 3

Figura VI.4. - Formas modais de vibração associadas às três primeiras freqüências da Estrutura Original

Para a combinação de carregamentos estáticos dados pela carga permanente (peso próprio e sobrecarga do piso) mais o peso próprio das pessoas, obtém-se os seguintes valores:

Ponto A:

Deslocamento: $d = -2,51$ cm

Momento: $M^- = 324,6$ kN.m

Ponto B:

Momento: $M^- = -685,2$

 # Verificação quanto à segurança e utilização

Os valores máximos obtidos para os deslocamentos e os momentos resultantes da superposição do carregamento estático e do dinâmico para a carga de pulos, são:

$d_A = -2,51 + 4,56 = 2,05$ cm $\qquad d_A = -2,51 - 4,56 = -7,07$ cm

$M_A^- = 324,6 - 645,7 = -321,1$ kN.m $\qquad M_A^+ = 324,6 + 645,7 = 970,3$ kN.m

$M_B^+ = -685,2 + 1093,0 = 407,8$ kN.m $\qquad M_B^- = -685,2 - 1093,0 = -1778,2$ kN.m

Considerando-se os momentos resistentes determinados no Item VI.1.1.1., pode-se fazer uma comparação com os valores máximos obtidos através da análise dinâmica, para o caso de pulos.

$$\frac{M_{res.}^+}{M_A^+} = \frac{703,5}{970,3} = 0,72, \text{ e} \qquad \frac{M_{res.}^-}{M_B^-} = \frac{-1419,4}{-1778,2} = 0,80;$$

Observa-se que os momentos solicitantes para a carga de pulos são bem superiores aos momentos resistentes. Portanto, se este tipo de carregamento for aplicado à estrutura nas condições estabelecidas anteriormente, a segurança ficará seriamente

comprometida, além de produzir um deslocamento excessivo no centro da laje e acelerações elevadas no centro e nas áreas periféricas. Outro fato a observar diz respeito aos momentos de flexão obtidos quando o deslocamento resultante no centro da laje é positivo. Há uma inversão no sentido dos momentos, que conduzirá a um colapso da estrutura, tendo em vista que a seção localizada no ponto "A" não foi dimensionada para resistir a um momento negativo.

No segundo caso, carga de danças, os valores obtidos são:

$d_A = -2{,}51 + 0{,}74 = -1{,}77$ cm $\qquad d_A = -2{,}51 - 0{,}74 = -3{,}25$ cm

$M_A^+ = 324{,}6 - 104{,}2 = 220.4$ kN.m $\qquad M_A^+ = 324{,}6 + 104{,}2 = 428.8$ kN.m

$M_B^- = -685{,}2 + 184{,}7 = -500.5$ kN.m $\qquad M_B^- = -685.2 - 184{,}7 = -869{,}9$ kN.m

Fazendo-se a mesma comparação que foi feita para carga de pulos, tem-se

$$\frac{M^+_{res.}}{M^+_A} = \frac{703{,}5}{428{,}8} = 1.64, \text{ e} \qquad \frac{M^-_{res.}}{M^-_B} = \frac{-419{,}4}{-869{,}9} = 1{,}63;$$

portanto, os momentos obtidos para o segundo caso estão dentro dos limites de segurança. Com relação à utilização, verifica-se que o deslocamento máximo provocado pela carga acidental do tipo dança está abaixo dos 3,2 cm, que é valor máximo admissível segundo prescrição da norma (ver Item VI.1.1.2.).

 # <u>Verificação quanto ao conforto</u>

Como os critérios de segurança e utilização não foram satisfeitos, para o caso de pulos, a análise do conforto torna-se sem sentido para este caso. Assim, a verificação quanto ao conforto será feita somente em relação ao carregamento do tipo dança.

Do gráfico de curvas para acelerações verticais, segundo a ISO 2631/1 [32], Figura IV.4, considerando o limite de tolerância e um tempo de exposição de quatro horas, obtém-se o pico de aceleração máxima admissível:

$$a_m = \frac{0{,}53}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 2 = 1{,}50 \cdot m/s^2$$

Observa-se que o valor máximo para aceleração nas áreas periféricas obtido das respostas dinâmicas da estrutura é de 1,12 m/s^2, valor este inferior a a_m. Assim, supondo que estariam envolvidas emocionalmente com a dança, as pessoas suportariam acelerações maiores e por mais tempo. Portanto, neste ambiente, as pessoas poderiam passar horas sem qualquer desconforto maior, podendo-se então concluir que, para o caso de dança, a estrutura não apresentaria problemas de segurança e conforto.

VI.2.2.2. Medidas corretivas

Para sanar ou amenizar os problemas surgidos quando da utilização da laje por atividades que envolvem pulos, deve-se adotar alguma medida corretiva. Várias são as alternativas possíveis, e, entre as mais comuns, estão aquelas que procuram alterar as características físicas originais da estrutura:

1. uma é o enrijecimento da estrutura, elevando-se as freqüências naturais de vibração para uma faixa acima das freqüências de excitação, e deste modo evitando-se que a mesma entre em ressonância. Tal medida, quando aplicada, não deve alterar de forma radical o comportamento estrutural;

2. outra é o acréscimo de massa concentradas em pontos específicos da laje, de modo a alterar a forma dos modos de vibração e/ou reduzir as freqüências naturais de vibração associadas a estes;

3. a alteração geométrica da estrutura com a adição de componentes estruturais tem sido bastante utilizada no país. Deve-se salientar, entretanto, que a adição de novos apoios para redução de vãos livres ou ainda de vigas auxiliares com a finalidade de aumentar a rigidez da estrutura, podem alterar significativamente o comportamento dinâmico estrutural, levando a uma indesejável redistribuição de esforços internos na estrutura.

Além das que foram citadas acima, uma outra alternativa que pode ser adotada é a restrição na utilização da estrutura. Neste caso, procura-se evitar carregamentos dinâmicos que possam vir a comprometer a segurança estrutural e/ou o conforto dos usuários. Para o caso em análise, esta medida seria evitar que a estrutura fosse utilizada para bailes carnavalescos e como academia de ginástica.

Todas estas medidas na prática são onerosas e de difícil execução, nem sempre apresentando resultados compensadores e eficientes. Torna-se, portanto, atrativo a adoção de outras técnicas de redução de vibrações, mais eficientes e de baixo custo. Surge então a idéia de empregar-se sistemas de absorção passivo de vibrações, que tenham dimensões pequenas, comportamento mecânico simples e principalmente com custos de instalação e manutenção baixos.

VI. 2.2.3. Análise da estrutura original com absorsores passivos de vibrações

No presente trabalho o absorsor empregado é um sistema composto por massa, mola e amortecedor, atuando na direção vertical, segundo um certo grau de liberdade. Foram analisadas as respostas da estrutura com os absorsores, considerando-se diferentes massas, sendo estas uma fração da massa relativa ao primeiro modo de vibração da estrutura original, tendo em vista que este é o modo dominante na resposta da mesma à excitação da carga de pulos. Deste modo, considerando que a massa relativa ao primeiro modo obtida foi de 27350 kg , as massas adotadas para o sistema de absorção foram:

1. 5% da massa modal (5% MM) = 1367,50 kg
2. 10% da massa modal (10% MM) = 2735 kg
3. 15% da massa modal (15% MM) = 4102,50 kg
4. 20% da massa modal (20% MM) = 5470 kg

Para valores da massa dos absorsores acima de 20% da massa modal da estrutura, a resposta em termos de deslocamentos e esforços, considerando a parcela estática mais a dinâmica, não sofre redução significativa, deixando de apresentar resultados compensadores. Este resultado já esperado pela teoria clássica, e foi observado através dos resultados numéricos obtidos por Magluta [8] e Faria [15].

Outra análise feita diz respeito à colocação de um sistema de pequenos absorsores em pontos específicos da laje, sendo a soma de suas massas igual à massa total, definida acima para o sistema de absorção. Neste trabalho é feito apenas um estudo comparativo, levando em conta as locações do sistema de absorção apresentadas nas Figuras VI.5. A escolha destas são baseadas no estudo apresentado por Faria[15] , o qual analisou a locação e a parcela de massa para alguns sistemas de absorsores compostos por massa, mola e amortecedor.

O primeiro tipo de sistema de absorção é o mais simples (figura VI.5.b) e consiste de um único absorsor localizado no centro da laje e de massa igual à massa do sistema de absorção (5%, 10%,15% ou 20% da massa modal).

O segundo tipo emprega cinco absorsores, sendo um central e quatro distribuídos simetricamente em relação a este, com massas iguais a 1/5 da massa do sistema de absorção, conforme mostrado na figura VI.5.b.

O terceiro utiliza doze absorsores, tal como mostra a figura VI.5.c, sendo quatro centrais com massas iguais 1/20 da massa do sistema de absorção, e os oito absorsores restantes periféricos, distribuídos em pares, localizados simetricamente em relação ao centro da laje e possuindo massa de 1/10 da massa do sistema.

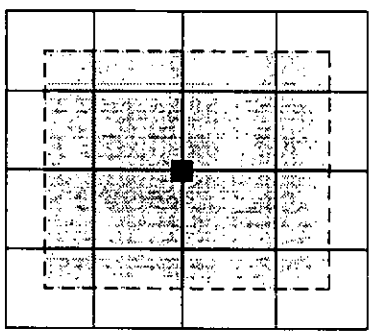


Figura VI.5.a. Sistema de absorção com um absorsor central.

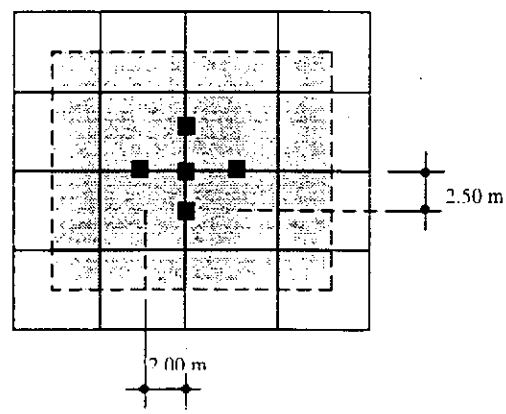


Figura VI.5.b. Sistema de absorção com cinco absorsores de mesma massa

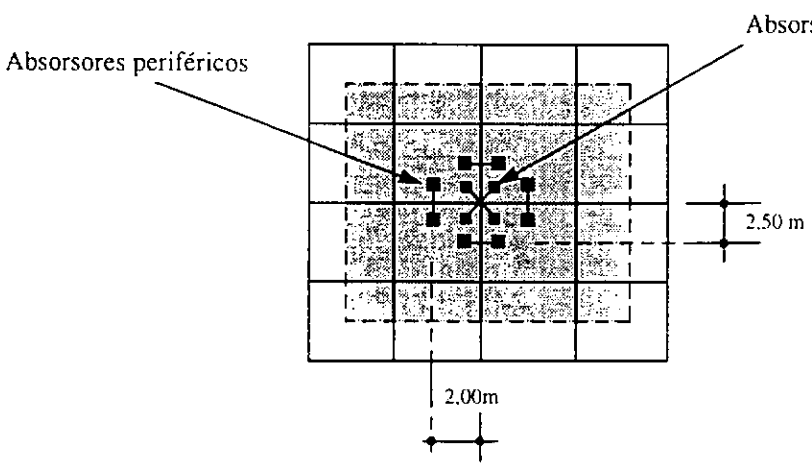


Figura VI.5.c. Sistema de absorção com absorsores periféricos e centrais com 1/10 e 1/20 da massa do sistema respectivamente

Para efeito de verificação estrutural considera-se que as dimensões de projeto foram rigorosamente cumpridas na execução da laje nervurada, não havendo, portanto, qualquer variação sensível nas peças que compõem o sistema estrutural. Assim, pode-se considerar o coeficiente de majoração da carga permanente igual a 1,0, enquanto para a carga acidental deve-se manter γ_c = 1,40. Desta forma o momento de flexão majorado pode ser definido como:

$$M_d = M_{est.} + 1{,}40 \cdot M_{din.} \quad ; \qquad \text{(eq.VI.1)}$$

onde,

$M_{est.}$ - Momento estático resultante da superposição dos momentos de flexão obtidos para carga permanente, a carga de ocupação (02 pessoas/m^2) e devido ao sistema de absorção.

$M_{din.}$ - Momento dinâmico obtido após a introdução do sistema de absorção na estrutura.

Deve-se salientar que, por estarem as pessoas distribuídas em uma faixa periférica da laje, pequena em relação a sua área total, a contribuição desta carga de ocupação, em termos de esforços, é pequena e, portanto, pode-se considerar um coeficiente de majoração igual ao das outras cargas permanentes (γ_c = 1,0).

 # <u>verificação quanto à segurança</u>

Considerando-se todas as observações feitas e os momentos resistentes determinados anteriormente, os resultados obtidos para os sistemas de absorção podem ser colocados na forma de uma tabela comparativa (TabelaVI.4).

De acordo com esta tabela algumas considerações podem ser feitas:

Tabela VI.4. Deslocamentos e momentos de flexão máximos para a laje nervurada, considerando sistemas de absorção com massas iguais a uma fração da Massa Modal (MM).

Sistema de absorcão	Deslocamentos máx.[cm]			Momento de flexão máximo [kN.m]							
				Positivo			Negativo			$M_{res.}$ / M_d	
	Est.	Din.	Total	Est.	Din.	M_d	Est.	Din.	M_d	Pos.(+)	Neg.(-)
Um absorsor:											
5% MM	-2,560	-2,238	-4,798	337,25	320,10	785,39	694,72	563,94	1484,24	0,896	0,956
10% MM	-2,610	-1,966	-4,576	349,90	279,70	741,48	704,23	501,28	1406,02	0,950	1,009
15% MM	-2,660	-1,893	-4,553	362,54	264,90	733,40	713,72	482,46	1389,16	0,960	1,022
20% MM	-2,720	-1,844	-4,564	375,22	250,90	726,48	723,25	471,82	1383,80	0,968	1,026
Cinco absorsores:											
5% MM	-2,552	-2,336	-4,888	332,35	324,20	786,23	694,24	580,16	1506,46	0,895	0,942
10% MM	-2,597	-1,953	-4,550	340,11	271,80	720,63	703,19	497,64	1399,89	0,976	1,014
Doze absorsores:											
5% MM	-2,552	-2,322	-4,884	332,35	323,60	785,39	694,24	579,00	1504,84	0,896	0,943
10% MM	-2,597	-1,950	-4,547	340,11	269,85	717,90	703,19	494,07	1394,89	0,980	1,018

1. o aumento na massa do sistema de absorção melhora as respostas em termos de deslocamentos e esforços. Porém, para valores da massa total dos absorsores acima de 10% da massa modal da estrutura, esta melhora deixa de ser significativa, ou seja, a taxa de redução das amplitudes de deslocamentos e esforços é bastante diminuída. Qualquer excesso de massa além desse valor (M = 10%) traduz-se em uma carga estática considerável, que torna os resultados finais (estático mais dinâmico) bem piores, confirmando o que foi observado por Magluta [8] e também por Faria[15] em suas respectivas teses;

2. para os resultados obtidos considerando-se somente um absorsor central, figura VI.5.a., observa-se que a redução em termos de esforços quando da utilização do absorsor com 5% da massa modal é bem significativa, mas ainda não suficiente para se considerar dentro dos limites aceitáveis. Estes resultados apresentam boa melhora quando considera-se uma massa de 10%, porém, como foi mencionado anteriormente, com um aumento de 50% (absorsor de 15% MM) e 100% (absorsor de 20% MM) na massa os resultados obtidos não apresentam uma melhora considerável. Sendo assim, para utilização prática, os sistemas com 15% e 20% da massa modal não devem ser empregados, tendo em vista os problemas técnicos de instalação de tais sistemas sem um ganho em termos de resultados compensador;

3. como a introdução de um absorsor constituído por uma única massa com 5% ou 10% da massa modal é de difícil execução, bem como os resultados obtidos não são ainda satisfatórios em termos de coeficientes de segurança, os sistemas de absorção constituídos por somente um absorsor não representam a melhor opção em termos de medida corretiva a ser tomada. Deve-se adotar, portanto, um sistema que empregue vários absorsores.

Analisando-se os resultados obtidos, quando são empregados sistemas de absorção compostos por cinco ou por doze absorsores, figuras VI.5.b. e VI.5.c respectivamente, observa-se que o sistema constituído por doze absorsores é a melhor opção, tendo o sistema com massa de 10% apresentado as melhores respostas.

4. muito embora a razão entre o momento resistente $M_{res.}$ e o momento solicitante de cálculo M_d positivo ainda seja menor que 1,0, pode-se considerar, já que a diferença é muito pequena (2%), que os esforços obtidos para estrutura com um sistema de 12 absorsores locados de acordo com a figura VI.5.c. e massa total igual a 10% da massa modal estão dentro dos limites de segurança prescritos pelas normas.

 # formação de fissuras inaceitáveis

Os momentos máximos de serviço positivo e negativo para a estrutura com um sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa relativa ao primeiro modo, considerado a melhor opção, são definidos respectivamente por:

$$M^{-}_{serv.} = M^{-}_{est.} + M^{-}_{din.} = 340,11 + 269,85 = 609,95 \text{ kN.m}$$

$$M^{-}_{serv.} = M^{-}_{est.} + M^{-}_{din.} = -703,19 - 494,07 = -1197,26 \text{ kN.m}$$

As equações IV.4. e IV.5., que definem se há ou não formação de fissuras inaceitáveis, apresentam os valores:

Para o momento de flexão positivo:

$$\Phi_b = 25,40 \text{ mm};\ \rho_r = 0,051 \text{ e } \sigma_s = 369,64 \text{ MPa}$$

Obtém-se:

$2,45 < 3$ Com a eq.IV.4 satisfeita.

$11,02 > 3$ Com a eq.IV.5 não Satisfeita.

Para o momento negativo:

Φ_b = 25,40 mm; ρ_s = 0,1098 e σ_s = 383.80 MPa

Obtém-se:

1,66 < 3 Com a eq.IV.4 satisfeita.

11,71 > 3 Com a eq.IV.5 não Satisfeita.

Uma vez que tanto para o momento positivo com para o negativo a eq.IV.4 foi satisfeita, segundo a NBR-6118 [39] não haverá a formação de fissuras inaceitáveis.

 # .verificação quanto ao conforto

Para o sistema de absorção de massa 10%MM e composto por doze absorsores. foram obtidos os valores das acelerações nos pontos mais significativos (centro e periferia da laje) mostrados na Tabela VI.5.

Tabela VI.5. Acelerações para a laje nervurada sem e com a introdução de um sistema composto por doze absorsores e de massa igual a 10% da massa modal.

	Acelerações [m/s^2]	
Pontos	Estrutura sem absorsor	Estrutura com absorsor
A	40,25	18,79
B	7,60	3,67
C	7,36	3,50

Muito embora a aceleração no centro da laje ainda seja alta, quase 2g (duas vezes a aceleração da gravidade), as pessoas localizadas neste ponto estão em movimento e emocionalmente envolvidas e, portanto, poderiam suportar tal nível de aceleração por um bom tempo. As pessoas que estivessem paradas na periferia, em especial nos pontos "B" e "C", de acordo com os gráficos da Figura IV.4, definidos pela ISO 2631/1 [32],

poderiam suportar, por um período de tempo em torno de uma hora, os níveis de aceleração a que estão submetidas, tendo em vista que o pico de aceleração máxima admissível para o limite de tolerância para este tempo de exposição, segundo a ISO 2631/1 [32], é de:

$$a_m = \frac{1{,}25}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 2 = 3{,}54 m/s^2$$

Vale ressaltar que, para este tempo de exposição, uma pessoa que não estivesse envolvida no clima da festa, por exemplo, um baile de carnaval, possivelmente já teria abandonado o recinto, restando apenas aquelas pessoas emocionalmente envolvidas com o evento. Sendo assim, admite-se que todas as pessoas no salão poderiam suportar muito bem os níveis de aceleração apresentados na Tabela VI.5 para a estrutura com absorsores.

<u>observações complementares</u>

A introdução de um sistema de absorção com massa igual a 10% da massa relativa ao primeiro modo da estrutura distribuído em doze absorsores locados segundo a figura VI.5.c. reduz sensivelmente os níveis de vibração, solucionando os problemas que surgem quando a laje é utilizada para alguma atividade que envolva pulos.

Outras observações complementares podem ser feitas, de acordo com a resposta em termos de deslocamentos no domínio da freqüência, para carga de pulos, através dos gráficos da Figura VI.6., onde são apresentadas três curvas distintas. A primeira representa a resposta da estrutura sem sistema de absorção, a segunda considerando a introdução de um absorsor central e admitindo-se que a matriz de amortecimento permanece proporcional à massa e/ou à rigidez (problema "pseudo-proporcional", vide Item II.3) e a terceira também com a introdução de um absorsor central, mas

considerando a matriz de amortecimento não-proporcional (vide Item II.4). A força de excitação está representada através dos valores da abcissa do gráfico, que indica a variação da freqüência associada ao primeiro harmônico da carga de pulo, aplicada com uma varredura da freqüência fundamental da atividade: 1,8 Hz à 3,4 Hz). As respostas em freqüência, mostradas nessa Figura VI.6., levam em conta a contribuição do primeiro harmônico e do segundo e terceiro superharmônico da função carga humana para a atividade pular.

Da resposta para a estrutura sem absorsor observa-se que o deslocamento máximo dá-se exatamente quando a freqüência do primeiro harmônico da força de excitação fica igual a 2,4 Hz. Como os deslocamentos máximos ocorrem quando o primeiro harmônico ou um dos dois superhamônicos que descrevem a função força entram em ressonância com uma das freqüências naturais da estrutura. conclui-se desse resultado que quando as freqüências do primeiro e do segundo harmônico alcançam os valores 2,4 e 4,8 Hz, o segundo entra, por um instante de tempo, em ressonância com a primeira freqüência natural da estrutura, tendo em vista que o segundo harmônico da carga tem sempre o dobro da freqüência do primeiro e que a primeira freqüência natural é 4,8 Hz (vide Tabela VI.1). Além deste, outro pico significativo não aparece no gráfico. Chega-se à conclusão que o modo dominante da resposta dinâmica da estrutura é o primeiro modo de vibração e que o segundo harmônico da carga é o que excita mais a estrutura. Portanto, os absorsores devem ser regulados com relação à primeira freqüência natural da estrutura, e massa com valor igual a uma fração da massa modal relativa ao primeiro modo, tal como foi feito no presente trabalho.

Quando analisa-se a resposta da estrutura após a introdução do sistema de absorção (vide Fig. VI.6), observa-se que esta apresenta dois picos de deslocamentos máximos. tendo em vista que o emprego de um sistema de absorção introduz um novo

grau de liberdade no sistema estrutural, representado pelas características do modo dominante (figuras. II.1 e II.2).

Verificou-se durante o processo de otimização que, partindo de valores iniciais diferentes (rigidez e amortecimento), os picos "P" e "Q" sempre convergiam para os valores apresentados na Figura VI.6., indicando que estes são os valores ótimos.

Outra observação diz respeito ao gráfico obtido considerando-se o problema "pseudo-proporcional", o qual apresenta valores bem inferiores do que aqueles obtidos considerando-se o problema real não-proporcional, demonstrando a necessidade do uso desta última formulação.

Muito embora o gráfico apresentado na Figura VI.4. corresponda a um único absorsor central com 5% da massa relativa ao primeiro modo, pode-se obter gráficos semelhantes para qualquer um dos sistemas de absorção definidos anteriormente.

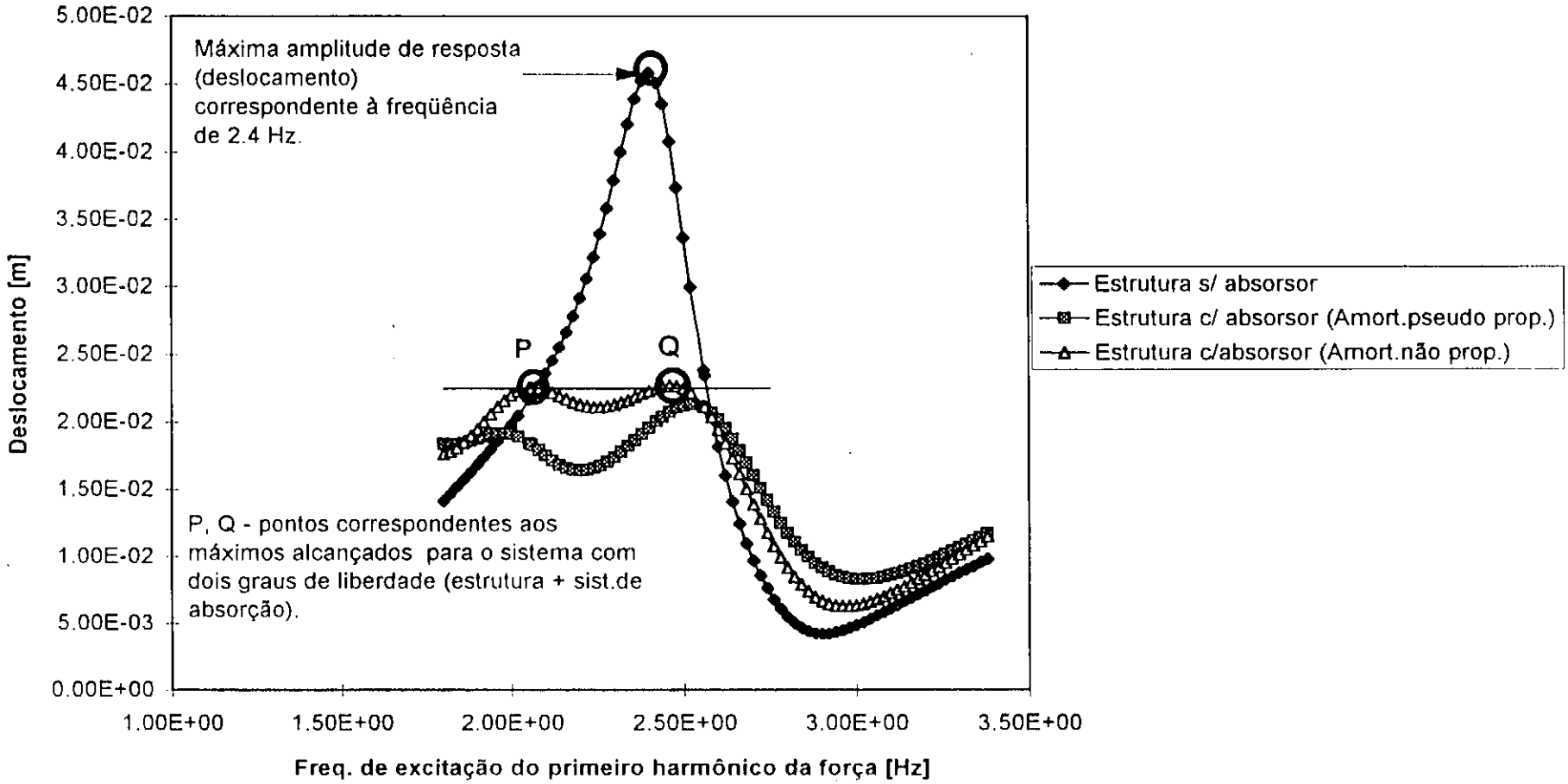


Figura VI.6. Deslocamento vertical no ponto central da laje para a estrutura com e sem sistema de absorção, composto por um absorsor central com 5% da massa modal fundamental da estrutura.

VI. 2.2.4. Análise da estrutura com absorsores de vibrações e acréscimo do amortecimento global

No caso anterior, considerando-se a estrutura com absorsores de vibrações, para verificação dos estados limites de segurança e utilização, adotou-se um coeficiente de majoração da carga permanente igual a 1,0, ou seja, admitiu-se que a estrutura foi construída rigorosamente de acordo com o seu projeto, não apresentando qualquer variação significativa nas dimensões de qualquer elemento estrutural. Na prática é em geral difícil de ter-se tal situação ideal, mesmo sob um controle rigoroso de execução. Sendo assim, admite-se um variação em torno de 5% em volume de material, o que significa dizer que, por exemplo, as vigas poderiam apresentar em média uma variação de 2 cm na sua base e 3 cm em sua altura e a laje, por sua vez, uma variação de 0,5 cm, o que é bastante razoável. Para esta nova situação, admitindo-se um coeficiente de majoração da carga permanente igual a 1,05 e permanecendo o da acidental em 1,4, observa-se, através da Tabela VI.6, que as respostas obtidas ainda são satisfatórias tendo em vista que a diferença máxima entre M_d e $M_{res.}$ é pequena (4%). Mesmo obtendo-se respostas satisfatórias, considerando-se uma variação de até 5% em volume de material, um engenheiro estrutural que fizesse a mesma análise poderia considerar estes valores ainda não suficientes em termos de segurança, uma vez que a razão $M_d/M_{res.}$ é menor do que 1,0. Assim, para trazer os esforços para valores que tornem essa razão maior ou igual 1,0, somente o uso de um sistema de absorção de vibrações não é suficiente. Portanto, uma outra medida deve ser adotada em conjunto com a introdução dos absorsores, de modo a se obter as respostas desejadas.

Tabela VI.6. Momentos de flexão máximos para a laje nervurada considerando um sistema com doze absorsores de massa total 10%MM.

	Momentos de flexão máximos [kN.m]				
	Est.	Din.	M_d	M_{res}	M_{res} / M_d
Positivo	340,11	269,85	734,90	703,50	0,96
Negativo	703,19	494,07	1430,05	1419,40	0,99

Uma primeira alternativa que surge seria a colocação de um contra-piso de concreto de 5 cm, aumentando-se a altura da laje para 15 cm e consequentemente a rigidez e a massa da estrutura. Tal alternativa não se mostrou muito boa, já que embora as freqüências naturais obtidas tenham sido maiores do que as da estrutura original, a influência do segundo harmônico carga ainda é significativa neste caso. Como os resultados obtidos tanto para os critérios de segurança e utilização, quanto para o de conforto humano, mesmo com a introdução de absorsores, não apresentaram significativas melhoras, esta medida corretiva, de acréscimo da espessura da laje, não será empregada.

A alternativa que apresentou melhores resultados foi aquela em que a taxa de amortecimento da estrutura foi incrementada para um valor igual a 10%. As medidas a serem tomadas para a obtenção de uma taxa de amortecimento desta magnitude para a estrutura em questão não fazem parte do escopo deste trabalho. Estudos com materiais viscoelásticos realizados pelo Laboratório de Dinâmica de Estruturas da COPPE/UFRJ apontam para alternativas nas quais é possível chegar a esses valores. Desta forma, considerando-se uma medida corretiva que aumente a taxa de amortecimento da estrutura para 10%, aliada à introdução do mesmo sistema de redução com 12 absorsores com massa total igual a 10% da massa relativa ao primeiro modo, foram obtidas as respostas dadas a seguir e analisadas segundo os critérios de normas.

 # coeficiente global de segurança

O momento majorado considerado para esta nova situação é definido de forma semelhante à eq.VI.1. como sendo:

$$M_d = 1{,}05 \cdot M_{est.} + 1{,}40 \cdot M_{din.} \qquad \text{(eq.VI.2)}$$

Os valores máximos obtidos em termos de deslocamento e momentos de flexão são apresentados nas tabelas VI.7, VI.8. e VI.9. Destas tabelas. observa-se que o aumento na taxa de amortecimento já melhora consideravelmente a resposta, trazendo os esforços para valores bem mais seguros do que os obtidos para a estrutura original. Porém, a introdução de um sistema passivo de absorção de vibrações reduz bem mais as respostas, de modo que tanto os deslocamentos como os esforços sejam trazidos para dentro dos limites desejáveis de segurança e utilização.

Tabela VI.7. Deslocamentos máximos no centro da laje nervurada, apresentando uma taxa amortecimento de 10 %, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% MM.

	Deslocamentos [cm]		
Estrutura	Estático	Dinâmico	Total
sem absorsor	-2.506	-3,061	-5.567
com absorsor	-2.597	-2.095	-4.692

Tabela VI.8. Momento de flexão positivo máximo para a laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%. sem e com sistema de absorção de doze absorsores e possuindo uma massa igual a 10% da massa modal.

	Momento positivo [kN.m]			
Estrutura	Estático	Dinâmico	Md	
sem absorsor	324,59	370,40	859,38	0,82
com absorsor	340,11	248,10	704,45	1.0

Tabela VI.9. Momento de flexão negativo máximo para a laje nervurada, apresentando uma taxa de amortecimento de 10%, sem e com sistema de absorção de doze absorsores e possuindo uma massa igual a 10% da massa modal.

	Momento negativo [kN.m]			
Estrutura	Estático	Dinâmico	Md	$M_{est.}/M_d$
sem absorsor	685,20	662,00	1646,26	0,86
com absorsor	703,19	462,30	1385,70	1,02

 # formação de fissuras inaceitáveis

Quanto ao critério de formação de fissuras, observa-se que os momentos de serviço

$$M^{+}_{serv.} = M^{+}_{est.} + M^{+}_{din.} = 340.11 + 248.10 = 588.10 \text{ kN.m} ;$$

$$M^{-}_{serv.} = M^{-}_{est.} + M^{-}_{din.} = 703.19 + 462.30 = 1165.49 \text{ kN.m} ;$$

são agora menores do que os momentos de serviço para a estrutura somente com absorsores. Conclui-se assim que também neste caso não haverá formação de fissuras inaceitáveis.

 # verificação quanto ao conforto

Os valores obtidos para as acelerações nos pontos definidos anteriormente na Fig.VI.2, considerando a carga de pulos, que é a mais crítica, estão apresentados na Tabela VI.10. A título ilustrativo é apresentada ainda a Tabela VI.11, que mostra as acelerações com relação a carga de dança.

Tabela VI.10. Acelerações para laje nervurada, apresentando uma taxa amortecimento de 10 %, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa modal, para carga de pulos.

	Acelerações [m/s^2]	
Pontos	Estrutura sem absorsor	Estrutura com absorsor
A	21,24	13,87
B	4,03	2,69
C	3,89	2,56

Tabela VI.11. Acelerações para laje nervurada, apresentando uma taxa amortecimento de 10 %, sem e com sistema de absorção composto por doze absorsores e massa de 10% da massa modal, para carga de dança.

	Acelerações [m/s^2]	
Pontos	Estrutura sem absorsor	Estrutura com absorsor
A	3,32	2,23
B	0,63	0,44
C	0,61	0,41

Novamente, observa-se o quanto de redução foi obtido somente com o acréscimo da taxa de amortecimento. Mas a introdução do sistema de absorção com doze absorsores proporcionam valores bem melhores para as acelerações.

O pico de aceleração máxima admissível para o limite de tolerância à exposição de vibrações num período de tempo de noventa (90) minutos é, segundo a ISO 2631/1 [32] :

$$a_m = \frac{0,93}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 2 = 2,63 \text{ m/s}^2;$$

De acordo com o que já foi discutido para o caso da estrutura somente com absorsores, pode-se inferir, com base no valor de a_m e nos valores das acelerações dadas

nas tabelas VI.10 e VI.11, que todas as pessoas no salão de bailes suportariam bem os níveis de vibração para atividades que envolvam pulos ou dança.

Assim, para a laje nervurada projetada de acordo com a NBR-6118 [39] e a NBR-6120 [40], pode-se dizer que a introdução de um sistema de absorção com doze absorsores e o aumento da taxa global de amortecimento da estrutura para 10% representam, em conjunto, a melhor medida corretiva a ser empregada para redução dos efeitos causados pela excitação da estrutura devida a atividades humanas envolvendo pulos. Isto tanto em termos de segurança quanto de conforto dos usuários.

VI.3. PROJETO SEGUNDO CRITÉRIOS DINÂMICOS

Nesta segunda situação a análise é feita para a mesma estrutura de laje nervurada de piso, projetada segundo critérios dinâmicos para a excitação causada por atividades que envolvam pulos. Procura-se, com a introdução de um sistema de absorção, manter deslocamentos, acelerações e esforços dentro de valores aceitáveis, como na situação anterior. As seções e armaduras são agora dimensionadas levando-se em consideração os valores destas amplitudes de resposta dinâmica.

VI.3.1. PROJETO I

• Estrutura original

Considerando-se a mesma laje nervurada dos exemplos anteriores, adotando-se um projeto com vigas de altura igual a 0.80m ao invés de 0.60m e empregando-se os valores prescritos na NBR-6118 [39] e NBR-6120 [40] para um pré-dimensionamento inicial, são adotados os seguintes novos carregamentos:

1. Carga Permanente:

Laje nervurada em concreto armado

$$h_{eq}\,(m)\cdot\gamma_{mat}\,(kN/m^3) = Carga(kN/m^2)$$

$p.p._{equiv.}$ 0,285 . 25,0 = 7,125

Piso com argamassa (cimento e areia) e lajota cerâmica

$$e_{piso}\,(m)\cdot\gamma_{mat.}\,(kN/m^3) = Carga(kN/m^2)$$

$p.p._{equiv.}$ 0,05 . 21,0 = 1,05

Total = 8,175 kN/m^2

2. Sobrecarga acidental de ocupação humana:

Salões de danças e de esportes em clubes

Total = 5,0 kN / m^2

Empregando-se os valores de carga discriminados acima e o PEFAV, foram obtidos os seguintes esforços solicitantes máximos:

Momento de flexão:

Positivo: $M^{+}_{est.eq.} = 538.07$ kN.m

Negativo: $M^{-}_{est.eq.} = -1104.41$ kN.m

Para esta estrutura, foram obtidas as dez primeiras freqüências naturais da estrutura apresentadas na Tabela VI.12.

Tabela VI.12. Freqüências naturais de vibração da estrutura original.

Projeto I com vigas de 0,40x0,80 m.

	Freqüências [Hz]
1	6.24
2	9,33
3	14,45
4	14,67
5	16,51
6	19,86
7	20,87
8	21,29
9	21,34
10	21,37

Observa-se com a tabela acima que a primeira freqüência natural de vibração da estrutura está dentro da faixa de variação do segundo (3,6 - 6,8 Hz) e do terceiro harmônicos (5,4 - 10,2) da carga de pulos, sendo a influência do segundo maior do que o

terceiro, já que os coeficientes de Fourier para este caso são 1.0 e 0.30 respectivamente (vide Item IV.1).

Quando o carregamento de pulos é aplicado, os esforços solicitantes excedem os limites de segurança para a armadura dimensionada para a carga acidental recomendada pela norma. Assim, a aplicação de um sistema de absorção já na fase de projeto é interessante, pois pode-se dimensionar as armaduras levando-se em conta a redução proporcionada por este sistema. Além do mais, seria evitada a adoção de uma outra medida corretiva adicional, caso o sistema de absorção não fosse suficiente, como também foi mostrado no exemplo anterior, de modo a corrigir os problemas provenientes de falhas e desvios do projeto.

Com base em tudo o que foi discutido no Item VI.2.2.3., adotou-se um sistema de absorção para redução da resposta da estrutura, para uma carga de pulos, composto de doze absorsores locados conforme a figura VI.5.c. e com massa igual a 10% da massa relativa ao primeiro modo (10%MM = 2982,9 kg), regulado para a primeira freqüência natural de vibração da estrutura que é de 6.24 Hz.

• Estrutura com absorsores

Fazendo-se sucessivos pré-dimensionamentos a partir dos momentos obtidos para estrutura original, e empregando-se também um sistema de doze absorsores como definido anteriormente, chegou-se às armaduras mostradas na figura VI.7., sendo a seção de aço para o momento positivo de 33,18 cm^2 e de 47,50 cm^2 para o negativo. Adotou-se uma mísula de 0.40 m de base, comprimento 80 cm e inclinação de 30° com relação a horizontal, conforme mostrado na Figura VI.8, de modo a evitar-se a utilização da armadura dupla para o momento negativo.

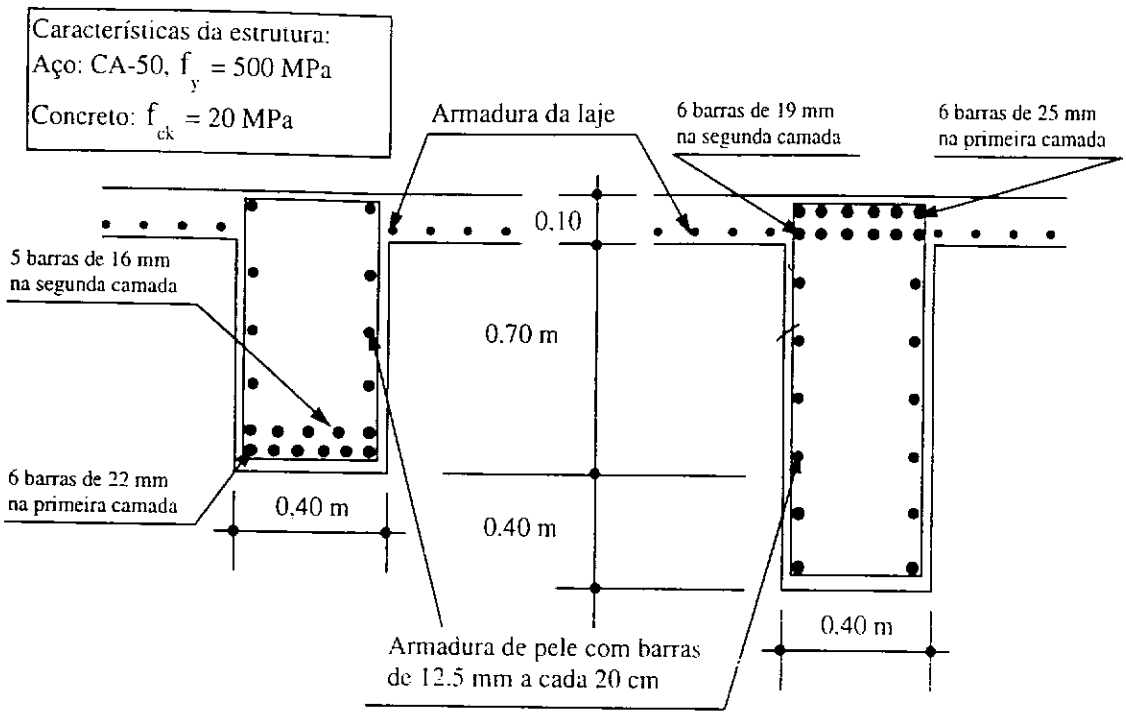


Figura VI.7.a. Armadura relativa ao momento fletor positivo. Projeto I.

Figura VI.7.b. Armadura relativa ao momento fletor negativo Projeto I.

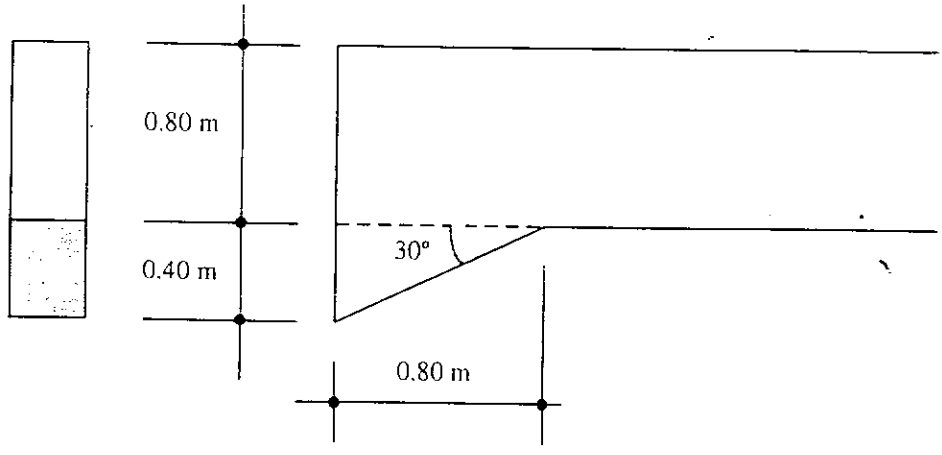


Figura VI.8. Representação da mísula empregada nos apoios a fim de se ter uma inércia maior para o momento de flexão negativo.

Evidentemente que as armaduras estão dimensionadas acima do que seria obtido considerando-se somente o equivalente estático previsto pela norma. Isto deve-se ao fato de que os absorsores não conseguiram reduzir os esforços até o nível do equivalente estático, ficando o momento excedente a ser absorvido por este acréscimo de armadura.

 # verificação para o carregamento estático equivalente

Os momentos resistentes obtidos para as armaduras definidas conforme a Figura VI.8. são respectivamente:

$$M^{+}_{res.} = 1033,51 \text{ kN.m}$$

$$M^{-}_{res.} = -1919,50 \text{ kN.m}$$

Comparando-se estes momentos resistentes com os solicitantes, obtidos considerando o carregamento sugerido pela norma (equivalente estático), tem-se:

$$\gamma^{+} = \frac{M^{+}_{res.}}{M^{+}_{est.eq.}} = \frac{1033,51}{538,07} = 1,92 > 1,40$$

$$\gamma^{-} = \frac{M^{-}_{res.}}{M^{-}_{est.eq.}} = \frac{-1919,50}{-1104,41} = 1,74 > 1,40$$

Com os coeficientes obtidos acima observa-se o quanto as armaduras estão superdimensionadas em relação aos esforços solicitantes obtidos conforme a norma. Mas, como será observado mais adiante, quando da aplicação da carga tipo pulos, estas na realidade não estão superdimensionadas.

 # verificação para o carregamento dinâmico

Com os resultados obtidos através do PEFAV, considerando a carga de pulos e o sistema de absorção, montou-se as tabelas VI.13.,VI.14 e VI.15.

Tabela VI.13. Deslocamentos máximos no centro da laje, estrutura original e com sistema de absorção, considerando-se carga de pulos, projeto I.

	Deslocamentos [cm]		
Estrutura	Estático	Dinâmico	Total
sem absorsor	-1,467	-2,112	-3,579
com absorsor	-1,518	-0,917	-2,435

Tabela VI.14. Momento de flexão positivo máximo, estrutura original e com sistema de absorção, considerando-se carga de pulos, projeto I.

	Momento positivo [kN.m]			
Estrutura	Estático	Dinâmico	Mtotal	$M_{res.} / M_{total}$
sem absorsor	395,12	718,60	1113,72	0,93
com absorsor	411,24	308,68	719,92	1,44

Tabela VI.15. Momento de flexão negativo máximo, estrutura original e com sistema de absorção, considerando-se carga de pulos, projeto I.

	Momento negativo [kN.m]			
Estrutura	Estático	Dinâmico	Mtotal	$M_{res.} / M_{total}$
sem absorsor	-811,01	-1194,00	-2005,01	0,96
com absorsor	-828,84	-530,02	-1358,86	1,41

Observa-se através da Tabela VI.13. que o deslocamento máximo, no centro da laje, está bem abaixo do limite permitido pela norma para a carga acidental, que é de 3,20 cm. Entretanto, nas tabelas seguintes, observa-se que ambos os momentos de flexão, obtidos sem a introdução do sistema de absorção de vibrações, resultam em esforços solicitantes maiores do que os resistentes, podendo levar a estrutura à ruptura. Isto tudo para as armaduras superdimensionadas para os esforços solicitantes segundo o carregamento sugerido pela norma.

Com a introdução do sistema de absorção obtém-se uma boa redução nas respostas, principalmente em termos de esforços, trazendo os momentos de flexão para dentro dos limites de segurança, ou seja, o coeficiente de segurança maior do que 1,40.

 # formação de fissuras inaceitáveis

Quanto ao critério de formação de fissuras inaceitáveis, com as equações IV.4. e IV.5 e os momentos de serviço, obtém-se respectivamente:

Para o momento de flexão positivo:

$M^{+}_{serv.} = M^{+}_{est.} + M^{+}_{din.} = 719{,}92$ kN.m

$\Phi_b = 22{,}22$ mm; $\rho_r = 0{,}0415$ e $\sigma_s = 297{,}10$ MPa

Verificando-se que:

$1{,}98 < 3$ Com a eq.IV.4 satisfeita.

$6{,}23 > 3$ Com a eq.IV.5 não satisfeita.

Para o momento negativo:

$M^{-}_{serv.} = M^{-}_{est.} + M^{-}_{din.} = 1165{,}49$N.m

$\Phi_b = 25{,}40$ mm; $\rho_r = 0{,}040$ e $\sigma_s = 301{,}96$ MPa

Verificando-se que:

$2{,}35 < 3$ Com a eq.IV.4 satisfeita.

$7{,}32 > 3$ Com a eq.IV.5 satisfeita.

Uma vez que tanto para o momento positivo com para o negativo a eq.V.4 foi satisfeita, segundo a NBR-6118 [39] não haverá a formação de fissuras inaceitáveis.

Conforme estabelece a norma, a verificação acima deveria ter sido feita considerando-se o estádio II. Entretanto, a mesma foi feita considerando-se a peça na ruptura, resultando em valores mais conservadores do que os que teriam sido obtidos para o estádio II. Assim, considera-se o critério de verificação de fissuração inaceitável satisfeito.

verificação quanto ao conforto

Com os valores obtidos para as acelerações verticais, os quais são apresentados na Tabela VI.16., analisou-se o conforto humano segundo a ISO 2681/1 [32] para os pontos definidos anteriormente (pontos "A", "B" e "C" Figura VI.1), considerando-se a carga de pulos.

Também a título ilustrativo são apresentados na Tabela VI.17 os valores para as acelerações verticais, considerando a carga de dança.

Tabela VI.16. Acelerações para a estrutura sem e com sistema de absorção, projeto I, considerando-se carga de pulos.

	Acelerações [m/s^2]	
Pontos	Estrutura sem absorsor	Estrutura com absorsor
A	30,04	12,04
B	5,67	2,27
C	5,56	2,17

Tabela VI.17. Acelerações para a estrutura sem e com sistema de absorção, projeto I; considerando-se carga de dança.

	Acelerações [m/s^2]	
Pontos	Estrutura sem absorsor	Estrutura com absorsor
A	3,63	1,70
B	0,67	0,33
C	0,65	0,31

A aceleração vertical máxima deu-se, como nos casos anteriores, no centro da laje, embora ela tenha ficado acima de 1g (9,81 m/s^2). Como já mencionado, as pessoas em plena atividade nesta área, além de estarem emocionalmente envolvidas com a dança, permanecem pouco tempo em contato com o piso, e portanto não teriam a percepção do nível de vibração a que estão submetidas.

Com relação às pessoas paradas, ponto "B" da periferia, verifica-se que a aceleração vertical de 2,275 m/s^2 está abaixo do limite de tolerância para um tempo de exposição de duas horas, conforme o valor obtido segundo a ISO 2631/1 [32]:

$$a_m = \frac{0{,}81}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 2 = 2{,}29 \text{ m/s}^2 \text{ ; vide gráfico da Figura VI.4.}$$

Novamente, de acordo com que já foi discutido anteriormente, todas as pessoas envolvidas no evento suportariam bem os níveis de vibração devido à carga do tipo pulos.

No caso da utilização do salão somente para danças, não haveria qualquer problema, pois os níveis de aceleração experimentados estão bem abaixo do que aqueles apresentados por atividades que envolvam pulos.

VI.3.2. PROJETO II

Considerando-se a mesma laje nervurada apresentada na Figura V.12., com vigas de h = 1,00m, e o que prescrevem as normas NBR-6118 [39] e NBR-6120 [40], para um pré-dimensionamento inicial, tem-se o seguinte carregamento estático equivalente:

1. Carga Permanente:

Laje nervurada em concreto armado

$$h_{eq.}(m) \cdot \gamma_{mat.}(kN/m^3) = Carga(kN/m^2)$$

$p.p._{equiv.}$ 0,33 . 25,0 = 9,30

Piso com argamassa (cimento e areia) e lajota cerâmica

$$e_{piso}(m) \cdot \gamma_{mat.}(kN/m^3) = Carga(kN/m^2)$$

$p.p._{equiv.}$ 0,05 . 21,0 = 1,05

Total = 7,05 kN / m^2

2. Sobrecarga acidental de ocupação humana:

Salões de danças e de esportes em clubes

Total = 5,0 kN / m^2

Empregando-se os valores de carga discriminados acima e o PEFAV, obtém-se os seguintes valores máximos para os momentos de flexão:

Momento de flexão:

Positivo: $M^{+}_{est.eq.} = 605,12$ kN.m

Negativo: $M^{-}_{est.eq.} = -1223,40$ kN.m

Supondo-se que as armaduras tanto positiva quanto negativa estivessem superestimadas em relação ao valores obtidos empregando os carregamentos definidos acima, de tal modo que a relação entre os momentos resistentes e os solicitantes de

cálculo, estaticamente equivalentes, resultassem em valores, por exemplo, que fossem algo em torno de 1,92 para o positivo e 1,74 para o negativo, iguais à análise anterior, então,

$$M^{+}_{res.} = 1.92 \cdot M^{+}_{est.eq.} = 1149{,}73 \text{ kN.m}$$

$$M^{-}_{res.} = 1.74 \cdot M^{-}_{est.eq.} = -2128{,}72 \text{ kN.m}$$

As freqüências naturais de vibração obtidas para o exemplo em questão estão apresentadas na Tabela VI.18.

Tabela VI.18. Freqüências naturais de vibração da estrutura original.

Projeto II com vigas de 0,40x1,00 m.

	Freqüências [Hz]
1	8,51
2	14,89
3	18,21
4	21,04
5	22,17
6	22,45
7	22,48
8	22,57
9	22,60
10	23,25

Considerando-se o carregamento do tipo pulos, obtém-se empregando-se o PEFAV, os momentos de flexão:

$$M^{+}_{total} = M^{+}_{est.} + M^{+}_{din.} = 457{,}01 + 383{,}37 = 840{,}58 \text{ kN.m}$$

$$M^{-}_{total} = M^{-}_{est.} + M^{-}_{din.} = -923{,}97 - 627{,}00 = -1550{,}97 \text{ kN.m}$$

Tem-se, então, os seguintes "coeficientes disponíveis de majoração de cargas":

$$\gamma^{+} = \frac{M^{+}_{res.}}{M^{+}_{total.}} = \frac{1161{,}83}{840{,}58} = 1{,}38 < 1{,}40$$

$$\gamma^{-} = \frac{M^{-}_{res.}}{M^{-}_{total}} = \frac{-2128{,}72}{-1550{,}97} = 1{,}37 < 1{,}40$$

Observa-se então que mesmo para vigas de maior altura e superdimensionando as armaduras em relação aos esforços obtidos considerando a carga acidental estabelecida pela norma, tal como feito no exemplo anterior, não se conseguiu restabelecer por completo os coeficientes de segurança, ficando ambos um pouco abaixo do que prescreve a norma. Portanto, também para este caso, o uso de um sistema passivo de absorção se justificaria, de modo a restituir os coeficientes de segurança, para uma armadura melhor dimensionada.

É interessante salientar ainda que mesmo o enrijecimento da estrutura, de modo a aumentar as freqüências naturais de vibração, não foi suficiente para evitar-se problemas provenientes da excitação causada pela carga de pulos. Muito embora a primeira freqüência esteja somente na faixa de variação do terceiro harmônico carga (5,4 - 10,2 Hz), que apresenta a menor amplitude, há uma certa influência do segundo harmônico na resposta final, tendo em vista que a freqüência extrema da faixa de variação, 6,8 Hz, encontra-se ainda próxima da primeira freqüência natural da estrutura.

Observa-se, ainda, que mesmo seguindo as recomendações do CEB [5], Tabela IV.2., o qual estabelece, considerando estruturas de concreto armado, um limite inferior para a primeira freqüência natural de vibração de 7,5 Hz quando da utilização para esportes e 6,5 Hz para o caso de dança, problemas surgirão quando alguma atividade que envolva pulos é desenvolvida sobre o piso. Portanto, para escapar de tais problemas poder-se-ia seguir uma recomendação feita pela norma canadense [35], de que a primeira freqüência natural para estruturas sujeitas a este tipo de carregamento seja maior do que 10 Hz. Isto levaria porém a uma estrutura extremamente embrutecida o que seria antieconômico. Sendo assim, a melhor opção seria mesmo a adoção de um sistema de absorção de vibração, pois trata-se de uma medida corretiva simples e econômica.

CAPÍTULO VII

RESUMO E CONCLUSÕES

Uma estrutura qualquer, tal como a laje analisada nos exemplos do capítulo anterior, sob a ação de carregamentos dinâmicos, principalmente aqueles oriundos de alguma atividade humana, pode experimentar níveis de vibrações que a tornem insegura, ou que a ponham fora de serviço pleno e/ou causem algum desconforto aos seus usuários. Várias são as medidas que podem ser empregadas para amenizar ou até mesmo sanar os problemas que surgem devido às excessivas vibrações às quais uma estrutura pode estar exposta. Dentre elas a que se destaca, por ser uma medida eficiente, econômica e de fácil execução e manutenção, é aquela que emprega um sistema passivo de absorção de vibração, do tipo massa, mola e amortecedor. Muitos estudos experimentais e aplicações práticas desenvolvidos nos últimos anos demonstram a eficácia da utilização deste sistema como medida corretiva em estruturas sujeitas a um elevado nível de vibração. Mas, como muitos programas comerciais disponíveis não permitem o projeto otimizado de sistemas auxiliares dinâmicos, para controle passivo das vibrações estruturais, surge a necessidade do desenvolvimento de modelos numéricos que possibilitem o estudo de estruturas com estes sistemas. A esta linha de pesquisa este trabalho procurou dar uma contribuição, desenvolvendo e aqui apresentando um modelo teórico-numérico e computacional, em elementos finitos, que possibilita resolver os problemas de redução de vibrações em lajes nervuradas ou mistas. Além disso, o modelo permite projeto otimizado de sistemas dinâmicos do tipo absorsores de vibração, para controle passivo e redução das amplitudes das respostas

destas estruturas a carregamentos dinâmicos determinísticos e aleatórios, empregando para isso elementos de placa e pórtico espacial.

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho, P.E.F.A.V.(Programa em Elementos Finitos com Atenuação de Vibrações), mostrou-se eficiente, principalmente quando comparado com outro muito conhecido e testado, o SAP90 [13], conforme os resultados comparativos do Capítulo V. Deve-se salientar que embora algumas modelagens de laje nervurada em grelha equivalente, como a utilizada por Alves [14], sejam eficientes na análise estática estrutural, elas apresentam resultados grosseiros quando empregadas para a análise dinâmica, conforme demonstrado também no Capítulo V. Portanto, deve-se evitar este tipo de modelagem na análise dinâmica de lajes nervuradas.

O que se pode concluir de imediato com a análise dos resultados numéricos obtidos no Capítulo VI é que, muito embora a NBR-6120 [40] recomende para carga acidental de ocupação do tipo salão de bailes um valor aparentemente bem majorado (5,0 kN/m^2) em relação, por exemplo, à carga de ocupação plena de 04 pessoas/m^2, a estrutura resultante do dimensionamento com este valor revela-se insuficiente quando uma análise dinâmica mais criteriosa é empregada, principalmente quando sobre a laje de piso desenvolvem-se atividades que envolvam pulos. Neste caso, verificou-se que se tal atividade for desenvolvida sobre a laje projetada considerando-se o carregamento estático recomendado pela norma, esta poderá sofrer sérios danos estruturais.

As recomendações restritivas em termos dos valores da primeira freqüência de vibração levam a estruturas mais rígidas e pesadas e não resolvem o problema. O CEB [5] recomenda para a primeira freqüência natural de vibração de estruturas em concreto armado valores nunca inferiores à 6,5 Hz, quando da utilização da mesma como salão de dança, ou a 7,5 Hz, para prática de esportes. Mas, observando-se, por

exemplo, que a primeira freqüência obtida para o exemplo 02 projeto I foi 6,24 Hz e de 8,51 Hz no projeto II, verifica-se que, mesmo seguindo estas recomendações, a estrutura analisada neste trabalho apresentou problemas quanto à própria segurança e quanto ao conforto dos usuários. Sendo assim, deve-se sempre fazer uma análise dinâmica para estruturas cuja freqüência natural mínima seja menor que 10 Hz e estejam submetidas a atividades repetitivas, tais como dança e pulos. Isto está em conformidade com uma das recomendações da norma canadense [35].

As reduções obtidas com um sistema de absorção simples do tipo massa, mola e amortecedor são bastante significativas, conforme pode-se observar pelos resultados obtidos no primeiro exemplo do Capítulo VI. Porém, em alguns casos, esta redução pode ainda não ser suficiente em termos de segurança e, portanto, a adoção de um sistema de absorção em conjunto com outras medidas corretivas pode levar a resultados bem mais satisfatórios, tal como observado no Capítulo VI, Item VI.2.2.4.

Um sistema de absorção composto por doze absorsores, instalados conforme mostrado na Figura VI.5.c., com massa total de 10% da massa modal relativa ao primeiro modo de vibração da estrutura, revelou-se a melhor opção para os exemplos analisados no presente trabalho, pois além de manter a redução das respostas dinâmicas da estrutura no nível do obtido para um único absorsor central, Figura VI.5.a., são mais fáceis de instalar e, principalmente, são de fácil construção. Os resultados obtidos nas análises feitas no Capítulo VI, corroboram os resultados clássicos de Den Hartog [3] e várias observações feitas por Faria [15] e por Magluta [8]. Dentre elas pode-se citar que o aumento da massa do sistema de absorção melhora os resultados obtidos em termos de resposta da estrutura; mas, para uma relação de massa muito grande, esta melhora deixa de ser compensadora, tendo em vista o problema estrutural localizado que a introdução de uma massa muito grande pode trazer à estrutura.

Deve-se salientar aqui que a utilização de um sistema passivo de absorção de vibrações não é somente uma medida corretiva que deva ser empregada para estruturas existentes que apresentem problemas provenientes de um algum carregamento humano. Pode-se empregar um sistema de absorção como parte de uma estrutura projetada a ser construída, ou seja, como elemento de um projeto estrutural, a fim de prevenir futuros problemas provenientes da utilização da estrutura. Assim, poder-se-ia evitar alguma limitação de projeto ou até mesmo evitar-se o embrutecimento demasiado da estrutura. A utilização de absorsores como parte integrante de um projeto é muito interessante e merece um estudo mais cuidadoso do que ainda hoje é dedicado.

Muito embora, como já foi dito anteriormente, o PEFAV seja apenas uma ferramenta numérica que possibilita o estudo dinâmico de estruturas empregando-se elementos de placa e pórtico espacial, algumas sugestões podem ser dadas de modo a melhorar a sua eficiência:

1. melhoria no modelo de placa, fazendo-se modificações no modelo de quatro nós ou implementado-se um elemento de oito nós, de modo a possibilitar a melhoria da resposta em termos de esforços internos ao nível deste elemento;

2. verificar se a implementação de um modelo de placa com oito nós compensa em termos de custo computacional, tendo em vista o considerável aumento das matrizes de massa e rigidez;

3. implementar e verificar a utilização de matrizes de massa concentrada equivalente no lugar da matriz de massa consistente empregada pelo PEFAV de modo a proporcionar redução no custo computacional.

Com relação à linha de pesquisa desenvolvida neste trabalho, pode-se fazer as seguintes sugestões:

1. refazer a análise da estrutura considerando o espectro de carga de atividade humana obtido por Alves [38] mais recentemente;

2. fazer a implementação da otimização de absorsores com mais graus de liberdade, tendo em vista que o PEFAV. emprega um modelo computacional que só permite absorsores com um grau de liberdade linear, ou seja, absorsores compostos por uma massa suspensa por uma mola e um amortecedor ligados à estrutura;

3. desenvolver outras medidas corretivas que possam ser aplicadas em conjunto com um sistema passivo de absorção de vibrações, de modo a proporcionar um nível de redução ainda maior do que aquele obtido empregando-se somente absorsores passivos. Um aspecto a ser explorado é o da utilização de materiais visco-elásticos numa laje mista.

BIBLIOGRAFIA

[1] FRAHM, **Device for Damping Vibration**, U.S. Patente nº. 989,958 , 1911.

[2] ORMONDROYD, J., DEN HARTOG, J.P. "The Theory of Dinamic Vibrations Absorser", **Trans. American Society of Mech. Engineers, APM**, Vol.50,nº 7, pp. 9-22, 1928.

[3] DEN HARTOG, J.P., **Mechanical Vibration**, 1st ed., New York, McGraw-Hill Book Co., 1934.

[4] LENZEN, K.H. "Vibration of Steel Joinst - Concrete Slab Floors, **Engineering Journal**, Vol.3, nº 3, pp. 133-136, 1966.

[5] Bulletim d'information nº 209, **Vibration Problems in Structures - Practical Guidelines**, CEB - Comité Euro-Internacional du Beton.

[6] BATISTA, R.C., ROITMAN, N., **Análise dinâmica Estrutural do Estádio do Maracanã**, Relatório Técnico COPPETEC ET-159425, COPPE/UFRJ, 1990.

[7] BATISTA, R.C., MAGLUTA, C., **Spectator-induced vibration of Maracanã football stadium**. In: Proceedings of the Second European Conference on Structural Dynamics: Eurodyn 93, pp. 985-992, Rotterdam, Jun. 1993.

[8] MAGLUTA, C., **Sistemas Dinâmicos Passivos para Absorção de Vibrações Estruturais**, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.

[9] BATISTA, R.C., ROITMAN, N., **Avaliação Dinâmica da Ponte de Acesso ao Porto de Sepetiba**, Relatórios Técnicos I e II COPPETEC ET 150434, COPPE/UFRJ, 1993.

[10] BATISTA, R.C., ROITMAN, N., **Redução de Vibrações da Ponte de Acesso ao Porto de Sepetiba**, Relatório Complementar ao ET 150434, COPPETEC, COPPE/UFRJ, 1993.

[11] BATISTA, R.C., PFEIL, M.S. **Passive Damping of Vortex-Induced Oscillations of Rio-Niterói Bridge**. In: Proceedings of Smart Structures and Materials, vol. 2445, pp. 252-263, San Diego, California, USA, 1995.

[12] ALVES, R.M., **Controle Dinâmico Ótimo do Movimento Vertical de Plataformas Offshore Tipo "TLP"**, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.

[13] SAP90 - **A General Structural Analysis Program**, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, 1992.

[14] ALVES, E.V., **Análise Estrutural de Pontes em vigas Múltiplas de Concreto Protendido**, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1994.

[15] FARIA, M.T., **Redução de Vibrações Induzidas por Pessoas em Lajes de Grandes Vãos**, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.

[16] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**, 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1993.

[17] RAO, S., **Mechanical Vibrations**, 3rd ed., U.S.A., Addison Wesley Publishing Company inc., 1995.

[18] MOLER, C.B., STEWART, G.W. "An Algorithm for Generelalized Matrix Eigenvalue Problems", **SIAM Journal of Numerical Analysis**, vol.10, pp. 241-256, 1973.

[19] GOUVÊIA, A.M.C., **Soluções de Sistemas Estruturais Dinâmicos Não-Lineares com Amortecimento Não-proporcional e dependente da Freqüência**, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.

[20] AKERMAN, G.A.P., **A Técnica de Subestruturação na Análise Dinâmica de Estruturas**, tese de M.Sc., IME - Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.

[21] CRAIG, R.R., BAMPTON, M.M.C. "Coupling of Structures for Dynamic Analysis", **AIAA Journal**, vol.6, nº 7, pp. 1313-1319, 1968.

[22] IGNIZIO, J.P., **Goal Programming and Extensions**, 1st ed., USA, Lexington Books, 1976.

[23] BATHE,K., **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, 1st ed., USA, Prentice-Hall Inc., 1982.

[24] COOK, R.D., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3rd ed., USA, John Wiley & Sons,1989.

[25] PRZEMIENIECKI, J.S., **Theory of Matrix Structural Analysis**, 1st ed., USA, McGraw-Hill, 1968.

[26] REDDY, J.N., **An Introdction To The Finite Element Method**, 2nd ed., USA, McGraw-Hill, 1993.

[27] ZIENKIEWICZ, O.C., **The Finite Element Method in Engineering Science**, 2nd ed., London, McGraw-Hill, 1971.

[28] OWEN, D.R.J., HINTON, E., **Finite Element Software for Plate and Shells**, 1st. ed., Swansea, U.K., Pineridge Press ltd, 1984.

[29] TIMOSHENKO, S.P.,WOINOWSKY-KREIGER, S., **Theory of Plate and Shells**, 2nd ed., Tokio, McGraw-Hill, 1959.

[30] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., **Theory of Elasticity**, 3rd ed., Tokio, McGraw-Hill, 1970.

[31] SZILARD, R., **Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods**, 1st ed., New Jersey, USA, Prentice-Hall Inc.,1974.

[32] ISO 2631/1 - **Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration: General Requiremente**, International Standards Organization, 1985.

[33] ISO 2631/2 - **Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration: Part 2**, International Standards Organization, 1989.

[34] ELLIS, B.R. "Floor Vibration Induced by Dance-Type Loads: Theory", **The Structural Engineer**, vol. 72, nº 3, pp. 37-44, 1994.

[35] ALLEN, D.E. "Vibration Criteria for Assembly Occupancies", **Canadian Journal of Civil Engineering**, vol. 12, nº 3, pp. 617-623, 1985.

[36] ALLEN, D.E. "Building Vibrations From Human Activities", **ACI, Concrete International**, vol. 6, pp. 66-73, 1990.

[37] ALLEN, D.E. "Floor Vibration from Aerobics", **Canadian Journal of Civil Engineering**, vol. 17, nº 5, pp. 771-779, 1990.

[38] ALVES, N.K. C., **Cargas Dinâmicas devidas a Pessoas em movimento**, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.

[39] NBR-6118 (NB-1) - **Projeto de Estruturas de Concreto**, CB-2 - Comitê Brasileiro de Construção Civil, ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas.

[40] NBR-6120 (NB-5) - **Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações**, CB-2 - Comitê Brasileiro de Construção Civil, ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas.

APÊNDICE A

LARGURA EFETIVA DA MESA SEGUNDO A NBR-6118

Uma viga, mesmo tendo sido projetada com seção retangular, carrega uma parte da laje durante sua deformação e, conseqüentemente, na absorção dos esforços de flexão positivo que surgem devido a isso. A NBR-6118 [39] na análise de vigas em lajes nervuradas sugere que, para o esforços de flexão positivos, a viga pode ser considerada como de seção "T" com a largura de mesa igual a uma largura efetiva "b_f", conforme mostra a Figura A.1.

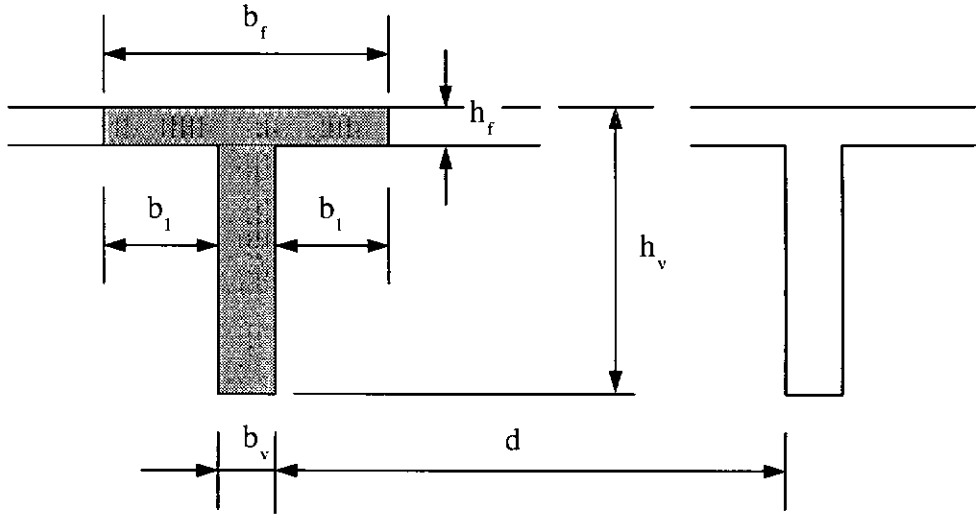


Figura A.1. Viga central "T" equivalente segundo a NBR-6118 [39].

b_1 deve ser igual ao valor que satisfaça a seguinte inequação:

$$b_1 \leq \begin{cases} 0{,}10 \cdot a \\ 8 \cdot h_f \\ 0{,}50 \cdot b_2 \end{cases}$$

Onde,

$a = \frac{3}{5} \cdot L$ - Caso em que a viga apresenta momentos nas extremidades;

L - Comprimento da viga;

b_2 - distância entre as faces de duas nervuras consecutivas;

h_f - espessura da laje.

Considerando-se a laje mostrada na Figura V.12. e em todos os exemplos analisados no Capítulo VI, obtém-se os seguintes valores:

$h_f = 0{,}10$ m; $b_v = 0{,}40$ m

$a = \frac{3}{5} \cdot 16 = 9{,}60$ m

$b_2 = d - b_v = 5{,}00 - 0{,}40 = 4{,}60$ m

obtendo-se segundo a inequação apresentada anteriormente o valor de b_1 como sendo:

$b_1 = 0{,}80$m

Logo a largura efetiva b_f obtida de acordo com a Figura A.1. será:

$b_f = 0{,}80 + 0{,}40 + 0{,}80 = 2.00$ m.

Portanto, segundo o que estabelece a norma, para o dimensionamento devido ao momento de flexão positivo, pode-se adotar uma viga "T" equivalente com dimensões iguais às definidas acima. Para a análise de laje nervurada como grelha equivalente pode-se também adotar as dimensões obtidas anteriormente.

APÊNDICE B

EXEMPLO COMPARATIVO PARA ELEMENTO DE MEMBRANA

Um exemplo de membrana é apresentado neste apêndice de modo a se comparar os resultados obtidos através do PEFAV com outros já previamente conhecidos.

Como exemplo comparativo considera-se um elemento estrutural engastado em uma de suas extremidades e livre na outra, conforme mostrado na Figura B.1. Admitindo-se, para a análise estática, uma tensão de cisalhamento de intensidade 150 Psi aplicada na seção de extremidade livre com sentido contrário à orientação do eixo positivo "y", deseja-se encontrar o deslocamento segundo a direção "y" do ponto B. Deseja-se, ainda, para o caso dinâmico, determinar as sete primeiras freqüências naturais de vibração livre para a mesma estrutura.

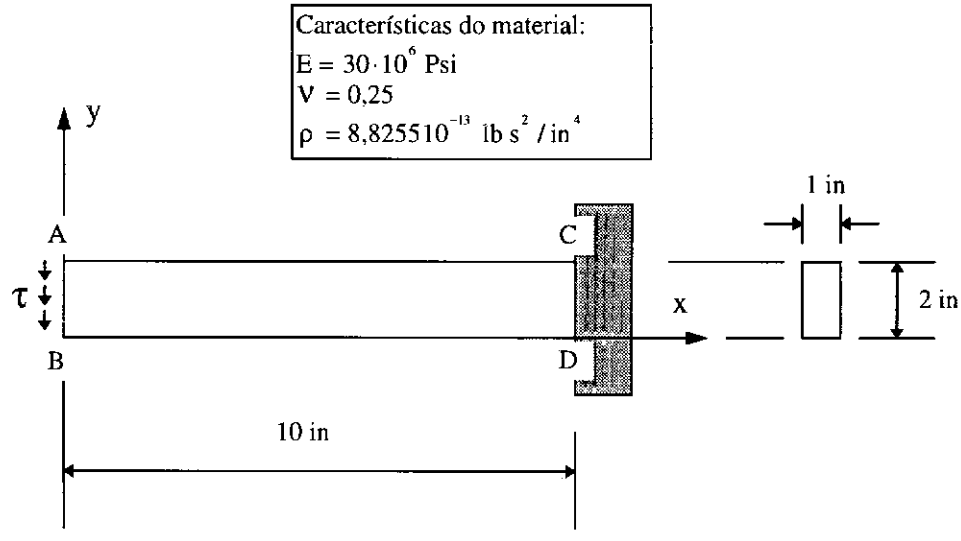


Figura B.1. Elemento estrutural engastado com tensão cisalhante "τ" atuando na extremidade livre.

Este exemplo foi apresentado por Reddy [26], o qual empregou uma malha de oito elementos, Figura B.2., para o caso estático e duas malhas distintas, uma com quatro e outra com oito elementos, Figura B.2., na análise dinâmica. Os resultados obtidos por ele e aqueles obtidos pelo PEFAV segundo estas discretizações são apresentados na Tabela B.1.

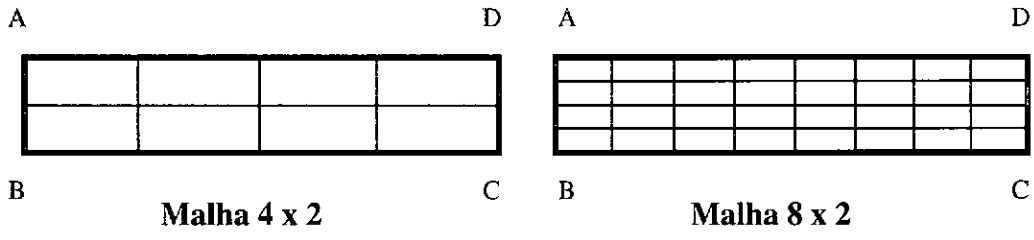


Figura B.2. Discretizações do elemento, mostrado na figura B.1, empregadas no exemplo comparativo.

Tabela B.1. Valores obtidos para a análise estática e dinâmica do elemento mostrado na figura B.1, empregando-se o PEFAV. e de acordo com Reddy [26].

	Malha 4 x 2			Malha 8 x 2		
Caso Dinâmico - Freqüências [rad/s]						
Freqüências	PEFAV	REDDY	dif.(%)	PEFAV	REDDY	dif.(%)
1	233,24	233,24	-	197,72	197,72	-
2	1346,13	1360,44	1,05	1089,54	1089,54	-
3	1467,15	1467,15	-	1459,72	1459,72	-
4	3554,57	3554,57	-	2687,76	2687,76	-
5	4633,52	4633,53	-	4430,37	4430,36	-
6	6415,48	6415,49	-	4684,50	4684,50	-
7	8433,92	8433,92	-	7039,60	7039,60	-
Caso Estático - Deslocamento [in]						
Deslocamento	PEFAV	REDDY	dif(%)	PEFAV	REDDY	dif(%)
y_B	-0,005031	-0,005093	1,22	-	-	-

Pode-se então observar através da Tabela B.1., que os resultados obtidos empregando-se o PEFAV e os apresentados por Reddy [26] são iguais, excetuando-se o valor obtido para a segunda freqüência, caso dinâmico e o deslocamento segundo a direção "y" do ponto B, mas para ambos os valores a diferença ficou em torno de 1%, portanto, uma diferença muito pequena. Logo, para o caso analisado, os modelos de elemento membrana empregados pelo PEFAV fornecem valores que convergem para o mesmo resultado.