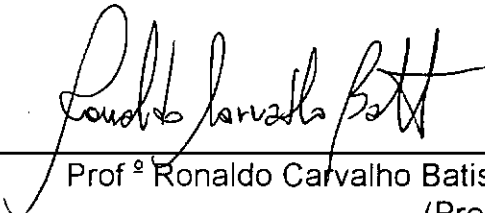


COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE MALHAS DE CABOS PROTENDIDOS NA FORMA DE PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Patricia Habib Hallak

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

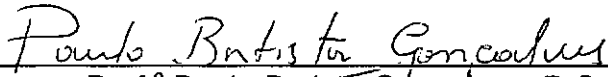
Tese aprovada por:



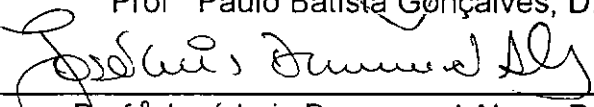
Prof.^o Ronaldo Carvalho Batista, PhD
(Presidente)



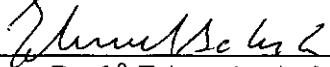
Prof.^o Michèle Schubert Pfeil, D.Sc.



Prof.^o Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.



Prof.^o José Luis Drummond Alves, D.Sc.



Prof.^o Eduardo de Miranda Batista, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 1996

HALLAK, Patricia Habib

COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE MALHAS DE CABOS
PROTENDIDOS NA FORMA DE PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO [RIO DE JANEIRO,
1996].

XIII, 131 P., 29,7 (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Malhas de Cabos,
2. Elementos Finitos,
3. Análise não Linear Estática,
4. Dinâmica

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciência (M.Sc.).

COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE MALHAS DE CABOS PROTENDIDOS NA FORMA DE PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Patricia Habib Hallak

(Outubro, 1996)

Orientadora: Prof^a Michèle Shubert Pfeil

Programa: Engenharia Civil

A tenso-estrutura, constituída por malha de cabos protendidos na forma de parabolóide hiperbólico, é um sistema estrutural cuja aplicação é dirigida a coberturas de grandes vãos dadas as suas características de leveza e versatilidade para a geometria de contorno. Sendo constituída por elementos flexíveis, a cobertura de malha de cabos pode apresentar comportamento estrutural não linear, além de características dinâmicas que a tornam suscetíveis aos efeitos dinâmicos da ação do vento.

Este trabalho tem por objetivo investigar o comportamento desse sistema estrutural com planta retangular e elíptica sob a influência de diversos fatores, tais como: o nível de protensão, as curvaturas da superfície abatida, a deformabilidade do contorno e o carregamento atuante. A solução das equações de equilíbrio da membrana equivalente à malha de cabos foi usada para idealizar uma estrutura, a qual serviu de exemplo-base para análises estáticas e de vibrações livres, realizadas via Método dos Elementos Finitos com os cabos discretizados por elementos de treliça espacial.

Os resultados dessa investigação envolveu aspectos práticos que conduzem a um projeto racional desse sistema estrutural.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the degree of Master of Science (M.Sc.).

**STRUCTURAL BEHAVIOR OF HYPERBOLIC PARABOLICAL
PRETENSIONED CABLE-NETS**

Patricia Habib Hallak

(October, 1996)

Thesis Supervisors: Prof^a Michèle Shubert Pfeil

Department: Civil Engineering

A pretensioned cable-net in hyperbolic paraboloidal shape has a straightforward application to long span roofs thanks to its lightness besides its versatility concerning the boundary geometry. The cable-net roof, being composed of flexible elements, may display a non-linear behavior and dynamic characteristics which may turn it vulnerable to dynamic wind effects.

The aim of this thesis is to investigate the behavior of this structural system with rectangular and elliptical boundary plan geometry under the influence of several factors such as: the pretension level, the surface curvature, the deformability of the boundary and the loading. Approximate solution of the equilibrium equations for the membrane equivalent to the cable-net was used primarily to idealize a structure which served as the basis-example for the static and free vibration analysis, performed via the Finite Element Method with the cables discretized in truss elements.

The outcome of this analysis brings practical aspects that lead to a rational design of this structural system.

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos, por todo o apoio e incentivo;

À minha orientadora, Michèle, pelo carinho, amizade e paciência ao longo desses meses de trabalho;

Às minhas amigas de república, Cleide e Cristiane;

Aos meus amigos da COPPE: Afonso, Beth, Carmen, Cláudia, Djalene, Luciene, Marcão, Marco Bahiano, Marcos 100%, Natália, Nilda, Norma;

Aos meus amigos de graduação: Flávio, Henriqhe Pizzo e Túlio;

A Jonny Fong, Thelmo, Célio, Sassá e Orlando;

A Zé Alves e Ronaldo Batista, por suas respectivas colaborações.

*É preciso amar as pessoas como se não houvesse
o amanhã'*

(Renato Russo)

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
I.1 Histórico	1
I.2 Tipos de sistemas estruturais	4
I.3 Evolução dos Métodos de Cálculo	7
I.4 Objetivos e Escopo do Trabalho	8
	10
CAPÍTULO II - A MALHA DE CABOS COMO UM CONTÍNUO	
II.1 Introdução	10
II.2 Cabos livremente suspensos sob ação do peso próprio	12
II.3 Descrição e deformação da superfície inicial	16
II.4 Equações de equilíbrio	20
II.4.1 Equações não lineares de equilíbrio	20
II.4.2 Relações geométricas e físicas	23
II.4.3 Equações diferenciais não-lineares de equilíbrio	25
II.4.4 Estado inicial de equilíbrio	25
II.4.5 Linearização das equações de equilíbrio	27
II.5 Solução das equações	29
II.5.1 Solução proposta por Otto	29
II.5.2 Solução proposta por Irvine	37
II.5.3 Solução analítica para vibrações livres	40
II.6 Estudo sobre a geometria do contorno e protensões iniciais	43
II.7 Estimativa da protensão inicial	45
CAPÍTULO III - ANÁLISE DA MALHAS DE CABOS VIA MEF	49
III.1 Introdução	49
III.2 Modelo numérico	50

III.2.1 Elementos Utilizados	50
III.2.1.1 Elemento de cabo treliça espacial para malhas de cabos	50
III.2.1.2 Elemento de pórtico espacial para anéis e vigas de contorno	53
III.2.1.3 Elementos de conexão para pilares de apoio	55
III.2.2 Introdução da protensão	56
III.2.3 Análise dinâmica	57
III.3 Programa GERA	58
CAPÍTULO IV - COMPORTAMENTO ESTÁTICO	61
IV.1 Considerações iniciais	61
IV.2 Apresentação do exemplo base e pré-dimensionamento	62
IV.3 Contorno rígido	68
IV.3.1 Comparação entre os resultados teóricos e do modelo numérico	68
IV.3.2 Estudo paramétrico	70
IV.3.2.1 Variação do carregamento externo	71
IV.3.2.2 Variação da força de protensão inicial	75
IV.3.2.3 Variação da rigidez axial dos cabos	79
IV.3.3 Distribuição de esforços na malha de cabos	81
IV.3.4 Malha não uniforme	86
IV.3.5 Estudo comparativo entre os vários níveis de simplificações na malha	89
IV.4 Contorno flexível	95
IV.4.1 Estudo da geometria e protensões iniciais ideais para a malha de cabos e características da viga de bordo	95
IV.4.2 Comportamento sob carga vertical crescente	97
IV.4.3 Distribuição de esforços na malha de cabos	101
IV.4.4 Distribuição de esforços na viga de bordo	104
IV.5 Contorno semi-rígido	108

IV.5.1	Considerações iniciais	108
IV.5.2	Comportamento sob carga vertical crescente	108
IV.5.3	Distribuição de esforços na malha de cabos e comparação entre os vários níveis de simplificação	111
IV.4.4	Distribuição de esforços na viga de bordo	114
CAPÍTULO V - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS		116
V.1	Introdução	116
V.2	Contorno rígido	117
V.2.1	Comparação entre os valores teóricos e os valores numéricos	117
V.2.2	Influência das cargas externas e das protensões iniciais nas frequências naturais	123
V.2.3	Simplificações na malha de cabos	120
V.3	Contornos semi-rígido e flexível elípticos	
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES		127
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		129

NOTAÇÕES

Letras romanas:

- A - Área da seção transversal.
- a e b - Dimensões dos semieixos maior e menor da elipse ou da metade da largura e metade da altura do retângulo.
- A e B - Pontos de suspensão do cabo isolado.
- d - Flecha máxima no cabo isolado.
- d_1 e d_2 - Flecha máxima dos cabos nas direções x e y respectivamente.
- d_{1r} e d_{2r} - Flecha nos cabos tensor e suspenso, respectivamente, devido à ação da carga q .
- D_x e D_y - Funções de rigidez da malha relativas às direções x e y .
- E - Módulo de elasticidade.
- e_1 e e_2 - Vetores unitários tangentes à superfície nas direções x e y respectivamente.
- $\overline{e_1}$ e $\overline{e_2}$ - Vetores unitários tangentes à superfície deformada nas direções x e y .
- e_3 - Vetor unitário normal à superfície.
- e_x , e_y , e_z - Vetores unitários nas direções x , y , z .
- f - Freqüências naturais em Hz.
- g - Aceleração da gravidade.
- g - Determinante do tensor métrico. Este tensor métrico é de ordem 2×2 .
- G - Módulo de elasticidade transversal da viga de bordo.
- $\overline{g_{11}}$ - Quadrado do módulo das derivadas do vetor \overline{r} na direção x .
- g_{11} - Quadrado do módulo das derivadas do vetor r na direção x .

- g_{12} - Produto das derivadas parciais da equação da superfície em relação a x e a y .
- $\overline{g_{22}}$ - Quadrado do módulo das derivadas do vetor \bar{r} na direção y .
- g_{22} - Quadrado do módulo das derivadas do vetor r na direção y .
- H - Componente horizontal da força nos cabos. Para o caso de uma rede de cabos ortogonais, $H = H_0 + H_p$.
- H_0 - Componente horizontal das forças nos cabos para o estado inicial de protensão, em que atuam somente as forças de protensões iniciais.
- h_1 e h_2 - Valor médio, constante, de H_{xp} e H_{yp} ao longo de x e y .
- H_{1r} - Força que surgirá nos cabos suspensos devido à ação dos cabos tensores.
- H_{2r} - Protensão inicial a ser aplicada aos cabos tensores.
- H_p - Acréscimo da força H nos cabos, causada pela ação do carregamento externo p .
- H_{x0} e H_{y0} - H_0 para as direções x e y .
- H_{xp} e H_{yp} - H_p para as direções x e y .
- I_x - Constante de torção.
- I_y e I_z - Momentos de inércia em relação aos eixos y e z , respectivamente.
- K - Matriz de rigidez.
- K_E - Matriz de rigidez elástica.
- K_G - Matriz de rigidez geométrica.
- k_x e k_y - Curvaturas nas direções x e y .
- K_x e K_y - Rigidez à translação das molas nas direções locais x e z .
- L - Comprimento do cabo isolado.
- L_i e L_r - Comprimento inicial e final dos cabos.
- M - Matriz de massa diagonalizada.

- M - Momento fletor na viga de bordo.
- N - Esforço normal na viga de bordo.
- P' - Ponto genérico da superfície.
- P - Ponto genérico da superfície na forma de parabolóide hiperbólico.
- \bar{P} - Corresponde ao ponto P na superfície deformada.
- p_s - Carga vertical uniforme por unidade de comprimento ao longo dos cabos ou ao longo da malha de cabos.
- p_x , p_y e p_z - Carga uniforme por unidade de comprimento nas direções x , y e z respectivamente..
- q - Carga uniformemente distribuída que representa a ação dos cabos tensores sobre os cabos suspensos e vice e versa.
- \mathbf{r} - Vetor posição do ponto P .
- $\bar{\mathbf{r}}$ - Vetor posição do ponto P' .
- s - Comprimento do cabo.
- S - Força nos cabos.
- S_0 - Força S nos cabos para o estado inicial de protensão, em que atuam somente as forças de protensões iniciais.
- S_1 e S_2 - Intensidade das forças, por unidade de comprimento nas direções x e y respectivamente.
- \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 - Vetor força nos cabos nas direções x e y respectivamente.
- S_p - Acréscimo da força S nos cabos, causada pela ação do carregamento externo p .
- T - Esforço normal ao longo do cabo isolado.
- $u(x,y), v(x,y), w(x,y)$ - Deslocamentos nas direções fixas x , y, z respectivamente.
- w_0 - Deslocamento no centro da malha (solução aproximada - Frei Otto).
- w_m - Média dos deslocamentos verticais da malha (solução aproximada - Frei Otto).

- X, Y, Z - Eixos globais.
- x, y, z - Eixos locais.
- z_0 - Equação da superfície inicial.

Letras gregas:

- α_1 e α_2 - Curvas diretriz e geratriz do parabolóide hiperbólico. As funções dessas curvas podem ser alteradas.
- ε_1 e ε_2 - Deformação específica nas direções x e y respectivamente.
- θ - Ângulo de inclinação do cabo em relação à horizontal.
- ϕ_x e ϕ_y - Função de rigidez, que está diretamente relacionada à função D_x e D_y .
- ρ - Constante que é a relação entre as curvaturas nas duas direções ortogonais da malha de cabos.
- φ - Constante que é a relação entre as propriedades do material (módulo de elasticidade e área) nas duas direções ortogonais.
- χ_x e χ_y - Frações parciais do carregamento.
- λ^2 - Constante que relaciona a geometria do parabolóide com o coeficiente de rigidez e as protensões.
- δ - Deslocamento dinâmico.
- ω_{mn} - Frequências naturais sendo m e n o número de meias ondas (inteiros) nas direções dos cabos tensores e suspensos respectivamente.
- $\sigma(x, y)$ - Resultante de esforços axiais em um elemento infinitesimal da viga de bordo.
- ζ - Vetor posição de um elemento infinitesimal da viga de bordo.
- α - Relação entre os lados de uma superfície plana.
- α_e - Relação entre os lados de uma superfície plana equivalente à superfície do parabolóide hiperbólico.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 HISTÓRICO

Tenso-estruturas são aquelas em que os principais elementos de sustentação são membros tracionados. Esses sistemas estruturais, que se aplicam a pontes, a coberturas e a outros fins, despertaram grande interesse em arquitetos e engenheiros por possuírem a capacidade de vencer grandes vãos a um custo viável, pois são mais leves e flexíveis que as estruturas convencionais. Além disso, devido a sua grande versatilidade quando associada à criatividade de seus construtores, têm, em geral, um aspecto arquitetônico extremamente atraente.

As primeiras construções a fazerem uso desses sistemas estruturais datam de antes da era cristã, tendo-se conhecimento da execução de pontes suspensas, na China, cujos membros tracionados de sustentação eram feitos em bambus e os tabuleiros em madeira [2,22]. As civilizações assírias, egípcias e romanas se utilizavam de grandes tendas e toldos feitos em peles de animais ou tecidos, como uma membrana tensionada [22].

Dessa época até os dias atuais, o estudo desses sistemas estruturais desenvolveu-se consideravelmente, devido à crescente demanda por estruturas mais leves, mais extensas e econômicas. A utilização de técnicas construtivas especiais de estruturas de cabos teve início e desenvolvimento a partir do século XIX, com a construção de pontes que já empregavam os cabos de aço como principal elemento estrutural. Neste contexto, situam-se, por exemplo, a ponte suspensa de Brooklin em Nova York com 486 m de vão (1883) e a recentemente inaugurada ponte estaiada da Normandia, na França, com 860 m de vão.

A utilização de cabos de aço em coberturas se deu em meados da década de 50 desse século, quando David Jawerth [22] patenteou o então chamado '*cabo treliça*', que

teve grande repercussão mundial. No ano de 1953 foi inaugurado o Raleigh Arena (figura I.1), na Carolina do Norte, Estados Unidos. Esta estrutura, projetada por Matthew Nowicki em 1950 [1,3,22] foi a primeira cobertura de dupla curvatura na forma de 'sela de cavalo'. Sua estrutura principal, que cobre uma área elíptica de 92 m x 97 m, consiste em vários cabos livremente suspensos ancorados em dois arcos de concreto, que se interceptam, formando um ângulo de 21° com a horizontal.

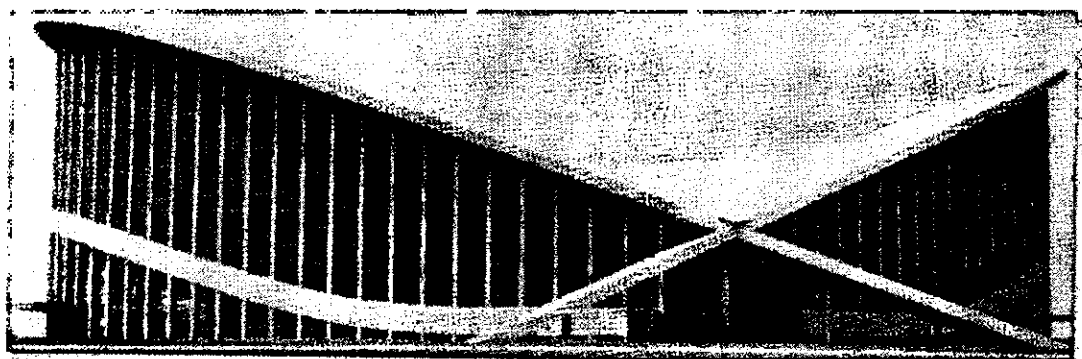


Figura I.1 Raleigh Arena, Carolina do Norte, Estados Unidos [1]

A partir de então, muitas outras coberturas foram construídas, não com a mesma forma, mas que utilizavam os mesmos princípios. Um importante exemplo de uma grande malha de cabos é o Pavilhão do Rio Grande do Sul, construído pelos engenheiros Aberto Borges e Ricardo Costa Alliana, em São Paulo, Brasil, no ano de 1954. Os cabos dessa malha, que tem dimensões livres em planta de 102 m x 60 m, também na forma de sela de cavalo, possuem uma curvatura maior do que a do Raleigh Arena e estão estirados entre arcos verticais, sustentados por tirantes inclinados que estão ancorados diretamente nas fundações [1].

Cita-se também no Brasil o Pavilhão de São Cristóvão (figura I.2), no Rio de Janeiro, projetado em 1958 pelo arquiteto Sérgio W. Bernardes e pelo engenheiro Paulo R. Fragoso para a Exposição Internacional de Indústria e Comércio. Essa notável estrutura, semelhante ao Raleigh Arena, com vãos de 250 m x 150 m aproximadamente, tem a malha de cabos também na forma de sela de cavalo ancorada em viga de concreto armado, cujos extremos transferem empuxo para encontros também em concreto armado com lastro.

Em 1990 esta cobertura sofreu um incêndio que levou ao rompimento de alguns de seus cabos. Poucos meses depois, sob a ação de forte chuva, sofreu colapso total. Lamentavelmente a cobertura ainda não foi reconstruída.

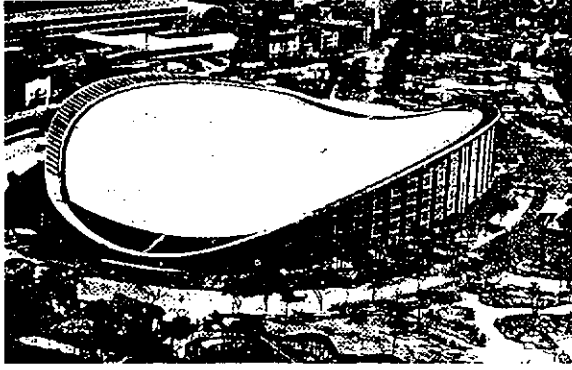


Figura I.2 Pavilhão de São Cristóvão, Rio de Janeiro, [18]

Um outro exemplo de cobertura por malha de cabos de aço é o Pavilhão Germânico construído por Frei Otto e Rolf Gutbrod (arquitetos) e Leonhardt e Andra (engenheiros), para a Montreal Expo, ocorrida em Montreal, Canadá, em 1967. Nessa cobertura, a malha de cabos de geometria irregular em planta é ancorada, em parte de seu contorno, em colunas de alturas e inclinações variadas e, em outra parte extrema, a cabos de contorno, dando à cobertura o aspecto de uma enorme *tenda*. O estádio olímpico de Munique, que cobre uma área de aproximadamente 75.000 m² (figura I.3) e que foi construído na Alemanha pelos arquitetos Günter Benisch e Frei Otto e pelos engenheiros Leonhardt e Andra para as olimpíadas de 1972, é um outro exemplo de cobertura com geometria não regradada construído com o mesmo formato do Pavilhão Germânico.

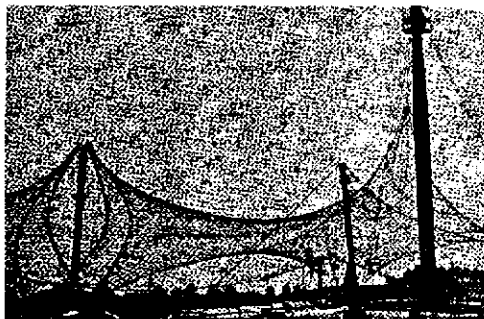


Figura I.3 Estádio Olímpico de Munique, Alemanha, [19]

Outras construções foram concebidas a partir do rearranjo dos cabos, formando geometrias das formas mais variadas possíveis.

I.2 TIPOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

Coberturas de cabos podem ser tipificadas de acordo com a maneira como o cabo ou o sistema de cabos atua como elemento estrutural. Esses tipos estruturais podem ser classificadas como [5]:

- Coberturas de cabos estaiadas;
- Coberturas de cabos suspensas;
- Coberturas de cabos e membrana inflável.

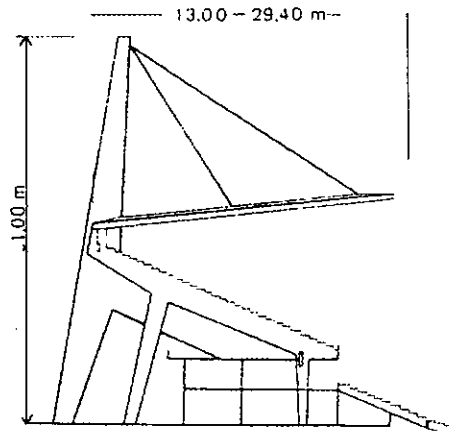


Figura II.4.a Coberturas de cabos estaiadas

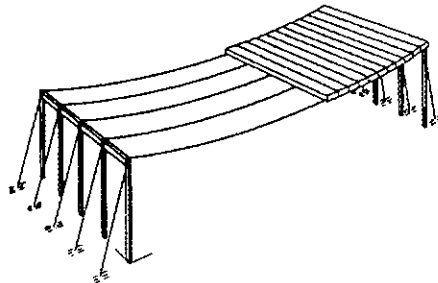


Figura I.4.b Coberturas de cabos suspensas

Nas coberturas de cabos estaiadas, da mesma forma que nas pontes estaiadas, os cabos (ou estais) possuem a função de prover suporte à cobertura. Um exemplo deste tipo de cobertura, cujo esquema estrutural está ilustrado na figura (I.4.a), é o estádio de NYA-ULLEVI (com balanço variável entre 13 e 29,4 m) construído em 1958, em Goteberg na Suécia.

Nas coberturas de cabos suspensas, sobre o sistema estrutural de cabos apóia-se diretamente o sistema vedante. O esquema estrutural dessa superfície está ilustrado na figura I.4.b. São exemplos clássicos desse tipo estrutural o Raleigh Arena e o Pavilhão de São Cristóvão.

Por último, da combinação de cabos e membrana inflável, surgem coberturas suportadas pela pressão do ar formando uma membrana tensionada, que, estando acoplada aos cabos, induz o aparecimento tensões nesses elementos também. A idéia do uso de princípios pneumáticos teve grande desenvolvimento durante a segunda guerra mundial e vem despertando interesse crescente em arquitetos e engenheiros. Um importante exemplo dessa aplicação é a cobertura do B.C. Place Stadium, em Vancouver, Canadá (figura I.5).



*Figura I.5 B.C. Place Stadium, Vancouver, Canadá
Vista da membrana sendo inflada, [26].*

Como a estrutura em estudo é uma cobertura de cabos suspensos enfatiza-se a seguir esse sistema estrutural que pode ser constituído por:

- cabos isolados, dando suspensão ao material de cobertura;
- cabos-treliça, formando componentes portantes principais da cobertura;
- malhas de cabos, formando a superfície da cobertura.

Nas coberturas formadas por cabos de aço livremente suspensos, os cabos são colocados paralela ou radialmente (figura I.4.b), formando um contorno retangular ou circular em planta e ancorados em elementos de contorno, não existindo a necessidade de protensão inicial.

Nos cabos treliça, dois cabos de curvaturas opostas são conectados por barras de modo a formar uma treliça plana. Alguns exemplo destes cabos estão mostrados na figura (I.6). Um estado de protensão é imposto ao cabo-treliça e esta protensão deve ser tal que assegure que ambos os cabos permaneçam tracionados, para qualquer tipo de combinação de carga.

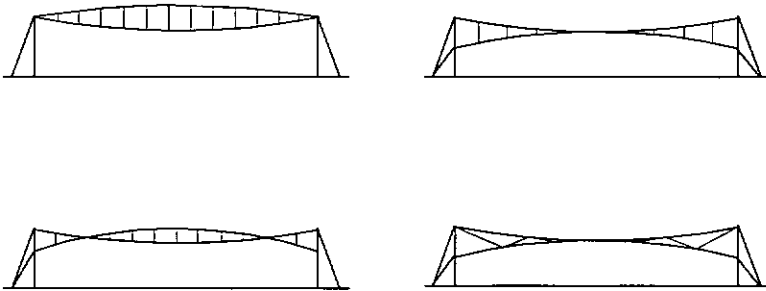


figura I.6 Tipos de cabos treliça, [3].

Os cabos treliça podem ser dispostos paralelamente ou radialmente, como mostrados nas figuras I.7.a e b. Uma outra disposição forma uma malha ortogonal de cabos-treliça (grelha), que, devido à geometria desses elementos, é limitado a coberturas circulares ou elípticas, como mostrado na figura I.7.c.

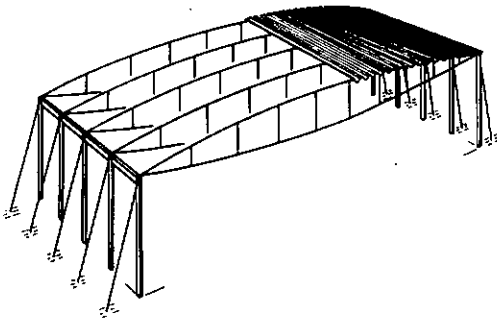


Figura I.7.a Cabos-treliça dispostos paralelamente

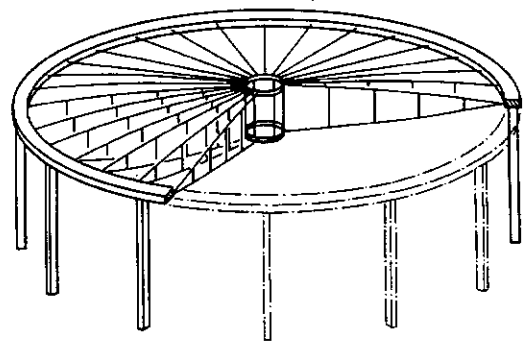


Figura I.7.b Cabos-treliça dispostos radialmente

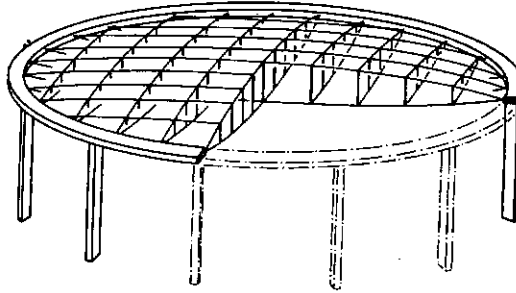


Figura I.7.c Cabos-treliça formando uma grelha circular

Quando os cabos formam uma malha, essas coberturas são classificadas de acordo com a sua geometria, a saber:

- superfícies com curvatura simples, que são aquelas em que pelo menos uma das direções é uma reta;
- superfícies com curvatura gaussiana positiva, que são aquelas em que as duas curvaturas nas direções principais são do mesmo sinal;
- superfícies com curvatura gaussiana negativa, que são aquelas em que as duas curvaturas nas direções principais são de sinais opostos.

As malhas formando superfícies com curvatura simples ou com curvatura gaussiana positiva (na forma de uma cesta) não requerem a aplicação de forças de tração inicial nos cabos para que seja mantida a sua geometria; sendo por isso, também conhecidas como malhas não protendidas [20]. Essas malhas não protendidas são

geradas pela adequada associação de um conjunto de cabos livremente suspensos e seu grande inconveniente consiste no fato de que, devido às suas características, tendem a sofrer grandes deslocamentos [20].

Nas malhas com dupla curvatura negativa, para que os cabos ortogonais trabalhem como malha, é necessária a aplicação de forças de pré-tração nos cabos para que seja mantida a geometria desejada da superfície. Em geral, essas malhas de cabos protendidas são ancoradas em vigas, arcos, anéis espaciais (que ficam submetidos a um esforço de compressão) ou até mesmo em colunas ou mastros.

Quando cada família de curvas ortogonais desenha uma curva parabólica, essas superfícies recebem o nome particular de '*parabolóide hiperbólico*', já que sua interseção com um plano horizontal forma uma hipérbole. As coberturas do Pavilhão de São Cristóvão e do Raleigh Arena são exemplos de malhas de cabos na forma de um parabolóide hiperbólico, ancorados em arcos de concreto armado.

I.3 EVOLUÇÃO DOS MÉTODOS DE CÁLCULO

Na abordagem clássica, a análise de estruturas de malhas de cabos protendidos pouco espaçados é feita considerando as malhas como uma superfície contínua. Assim, essas malhas são tratadas estruturalmente como uma fina membrana em que é desprezada a sua rigidez ao cisalhamento e, da mesma forma como ocorre nas malhas de cabos, essas membranas estão sujeitas exclusivamente a esforços de tração. Além disso, devido as suas características geométricas e de rigidez o comportamento dessas estruturas é analisado por processos não lineares.

Nas décadas de 50 e 60 foram desenvolvidas e refinadas as equações não lineares de equilíbrio de malhas de cabos tratadas como um contínuo e foram apresentadas soluções analíticas das equações linearizadas para casos particulares. A solução das equações para casos mais gerais era tratada numericamente com diferenças finitas.

Dentre os trabalhos surgidos nessa época, o mais importante foi o de Frei Otto, com seus modelos de superfície mínima formada por fina membrana de sabão. Esses modelos foram feitos com o objetivo de reproduzir, em tamanho reduzido, o comportamento de membranas de formas semelhantes às das superfícies de sabão.

Com o desenvolvimento dos métodos computacionais, essas estruturas são aproximadas por um modelo numérico adequado e analisadas mediante o emprego de métodos numéricos para sistemas não lineares.

Entretanto, dentre as principais dificuldades encontradas pelos arquitetos e engenheiros, está a de se definir a forma (geometria) [23] e as protensões iniciais a serem aplicadas, caso essas últimas sejam necessárias. No que diz respeito à análise dinâmica, existem incertezas na determinação das cargas de vento atuantes na superfície.

1.4 OBJETIVO E ESCOPO DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo investigar o comportamento estrutural estático e dinâmico de malhas de cabos ortogonais na forma de parabolóide hiperbólico a partir da influência dos diversos fatores que interferem no seu comportamento. Pretende-se pré-dimensionar uma estrutura a partir das soluções analíticas das equações da malha vista como um contínuo e utilizar o método dos elementos finitos nas análises posteriores.

No Capítulo II, a malha de cabos pouco espaçados é tratada como uma superfície contínua, sendo resumidas as formulações clássicas para a obtenção das equações de equilíbrio não lineares da malha. São apresentadas as soluções de Frei Otto [1] e Irvine [2] para as equações linearizadas de equilíbrio, visando a obtenção de esforços e deslocamentos da malha de cabos e a obtenção de suas frequências e modos naturais de vibração.

No Capítulo III, apresentam-se os elementos finitos utilizados na modelagem numérica, além dos aspectos relativos à introdução da protensão e das cargas externas. Descreve-se também alguns dos aspectos dos modelos computacionais empregados nesse trabalho.

Os resultados obtidos com a análise do comportamento não linear estático da estrutura via método dos elementos finitos estão apresentados no Capítulo IV. Os estudos são realizados a partir de um exemplo-base cujo pré-dimensionamento é feito utilizando-se a solução aproximada da teoria de 'membrana' para a determinação da protensão inicial e para a escolha dos cabos. São consideradas, então, as várias situações de deformabilidade do contorno, a influência das cargas externas, da protensão inicial e da rigidez axial dos cabos. Foram estudados os casos de malhas de cabos formando superfícies abatidas de contornos retangular e elíptico em planta. É ainda proposta neste capítulo uma distribuição não uniforme das propriedades da malha, visando a obtenção de uma malha mais econômica e de mesmo desempenho estrutural que a malha uniforme do exemplo-base.

No Capítulo V apresenta-se um estudo sobre as características dinâmicas da cobertura (frequências naturais e modos de vibração), analisando-se a influência dos diversos fatores que interferem nessas grandezas.

Finalmente, no Capítulo VI são reunidas as conclusões obtidas neste trabalho, bem como as sugestões para continuidade destes estudos.

CAPÍTULO II

A MALHA DE CABOS COMO UM CONTÍNUO

II.1 INTRODUÇÃO

Na estrutura em estudo, o elemento estrutural de maior importância é o cabo. Com dimensões transversais muito menores que seu comprimento, o cabo não é capaz de transmitir esforços de compressão e nem de suportar momentos fletores ou torsões, desenvolvendo apenas esforço de tração axial.

O cabo é uma estrutura flexível cujo comportamento pode envolver grandes deslocamentos e não linearidade geométrica. Sob ação de peso próprio, toma a forma de uma catenária mas, para a análise, pode ser aproximado por uma parábola ou por uma linha reta, quando estiver suficientemente tracionado.

A partir das equações de equilíbrio para o cabo isolado, obtém-se expressões para o estudo do cabo solicitado por cargas uniformemente distribuídas ao longo do vão (cabo parabólico) e ao longo do seu comprimento (cabo catenária). As equações diferenciais de equilíbrio do cabo isolado sob peso próprio encontram-se resumidas no item II.2.

Malhas de cabos ortogonais em planta são compostas por duas famílias de cabos posicionados em planos verticais paralelos formando superfícies. Por exemplo, a superfície do parabolóide hiperbólico é obtida através da translação de uma curva plana α_1 (geratriz), ao longo de outra curva plana α_2 (diretriz), conforme a figura II.1, sendo que as funções dessas curvas podem ser alternadas. Para o caso do parabolóide hiperbólico α_1 e α_2 são parábolas de concavidades invertidas, sendo a interseção dessa superfície com um plano horizontal uma hipérbole.

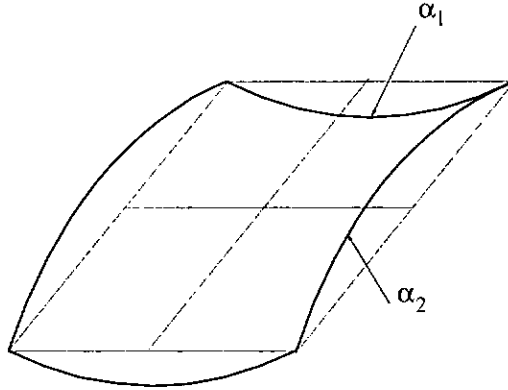


Figura II.1 - Superfície do parabolóide hiperbólico

Apesar de formarem superfícies, o comportamento estrutural das malhas de cabos não pode ser analisado com a teoria de membrana, devido a sua característica de rigidez a cisalhamento desprezível.

Em 1960 Frei Otto apresentou em seu livro [1] um método geral de análise de malhas de cabos ortogonais em planta de contorno qualquer. O método trata a malha de cabos como um contínuo e define **superfície inicial** como sendo a superfície formada pela malha de cabos solicitada apenas pela protensão. Todas as deformações devidas aos carregamentos externos são medidas a partir deste estado inicial.

Neste capítulo apresenta-se um resumo dos desenvolvimentos teóricos de Frei Otto incluindo equações não lineares de equilíbrio, sua linearização sob algumas hipóteses e solução.

As equações lineares de equilíbrio podem também ser obtidas através das equações de membrana, desprezando-se a rigidez ao cisalhamento da estrutura, sendo a malha assimilada a uma superfície contínua e flexível equivalente. Este é o procedimento apresentado por Irvine [2].

II.2 CABOS LIVREMENTE SUSPENSOS SOB AÇÃO DO PESO PRÓPRIO

Seja o cabo perfeitamente flexível livremente suspenso em equilíbrio da figura II.2:

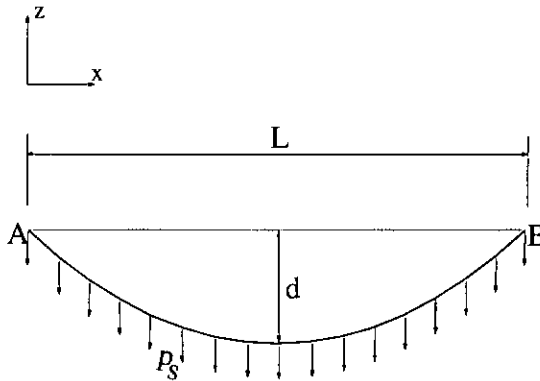


Figura II.2 - Cabo livremente suspenso

A figura II.3 ilustra o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal do mesmo cabo.

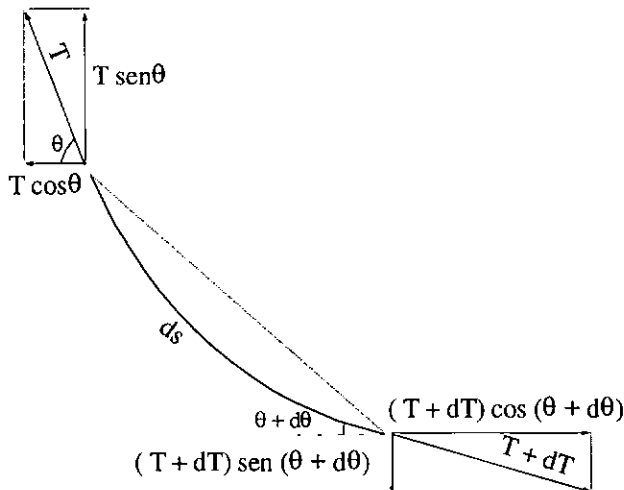


Figura II.3- Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de cabo

Este cabo, sujeito a uma carga vertical p_s distribuída uniformemente ao longo do mesmo toma a forma da curva denominada catenária. A equação diferencial da

catenária é obtida a partir das equações de equilíbrio de forças aplicadas a um trecho do cabo, considerado inextensível.

As condições de equilíbrio de forças verticais e horizontais fornecem as equações:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + p_s = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad (\text{II.2})$$

onde T é a força no cabo e dz/ds e dx/ds são respectivamente o seno e o coseno do ângulo entre a tangente ao cabo e a horizontal.

A integração da equação (II.2) fornece :

$$T\frac{dx}{ds} = H \quad (\text{II.3})$$

onde H é a componente horizontal da força T , a qual é constante já que não há forças horizontais aplicadas externamente ao cabo. Dessa forma a equação (II.1) se reduz à equação da catenária.

$$H\frac{d^2z}{dx^2} + p_s\frac{ds}{dx} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Se $p_s ds/dx$ é constante, tem-se uma carga uniforme por unidade de comprimento horizontal (p_x) e a geometria do cabo é uma parábola.

$$H\frac{d^2z}{dx^2} + p_x = 0 \quad (\text{II.5})$$

a - Equação do Cabo em Catenária

Pela geometria do cabo temos:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

e a equação diferencial da catenária (II.4) toma a forma:

$$H \frac{d^2z}{dx^2} = -p_s \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.6})$$

A solução da equação que satisfaz às condições de contorno da figura II.1 para pontos suspensos de mesma altura é:

$$z = \frac{H}{p_s} \left[\cosh\left(\frac{p_s L}{2H}\right) - \cosh\frac{p_s}{H}\left(\frac{L}{2} - x\right) \right] \quad (\text{II.7})$$

A expressão para o comprimento de um trecho do cabo é:

$$s = \int_0^x \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right]^{1/2} dx = \frac{H}{p_s} \left[\sinh\left(\frac{p_s L}{2H}\right) \right] - \left[\sinh\frac{p_s}{H}\left(\frac{L}{2} - x\right) \right]$$

Substituindo na equação (II.2) chega-se à força em qualquer ponto do cabo:

$$T = H \cosh\frac{p_s}{H}\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad (\text{II.8})$$

b - Equação do Cabo Parabólico

Em muitas aplicações de cabos em estruturas, a relação entre a flecha d e o vão L dos cabos (ver figura II.2) é suficientemente pequena. Nestes casos, assume-se que a distribuição horizontal do carregamento uniforme é aproximadamente igual à distribuição do mesmo ao longo do comprimento do cabo. A equação de equilíbrio do cabo é então dada pela equação (II.5) e o perfil do cabo pode ser aproximado por uma parábola.

Fazendo então $p_x = p$, a solução da equação (II.5) que satisfaz às condições de contorno de deslocamentos verticais nulos nos extremos será:

$$H.z = \frac{1}{2}p(L.x - x^2) \quad (\text{II.9})$$

Sendo a flecha máxima $z=d$ no meio do vão, a equação (II.9) fornece a expressão da componente horizontal da força no cabo:

$$H = \frac{pL^2}{8d} \quad (\text{II.10})$$

Substituindo a equação acima na equação (II.9) obtém-se o perfil parabólico do cabo.

$$z = \frac{4d}{L^2}(L.x - x^2) \quad (\text{II.11})$$

O comprimento de um trecho do cabo é dado por:

$$s = \int_0^x \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

A integração desta última equação ao longo do vão L , para extremos situados no mesmo nível, com a expressão de z da equação (II.11) e desprezando-se os termos de ordem superior resulta na expressão do comprimento total do cabo:

$$s = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{d}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{d}{L} \right)^4 \right] \quad (\text{II.13})$$

A força em qualquer ponto do cabo é obtida a partir da equação II.2.

$$T = H \left\{ 1 + \left[\frac{4d}{L^2} (L - 2x) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{II.14})$$

II.3 DESCRIÇÃO E DEFORMAÇÃO DA SUPERFÍCIE INICIAL

Uma superfície pode ser definida em termos de coordenadas curvilíneas α_1 e α_2 que definem duas famílias de curvas ortogonais, conforme a figura II.4:

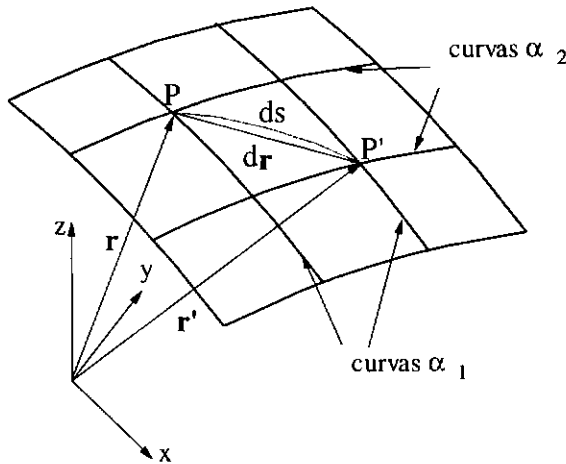


Figura II.4- Elemento infinitesimal de superfície

Dessa forma cada ponto P da superfície fica determinado pela interseção de duas curvas.

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = f_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_3 \quad (\text{II.15})$$

onde \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são os vetores unitários tangentes à superfície e \mathbf{e}_3 é o vetor unitário normal à superfície.

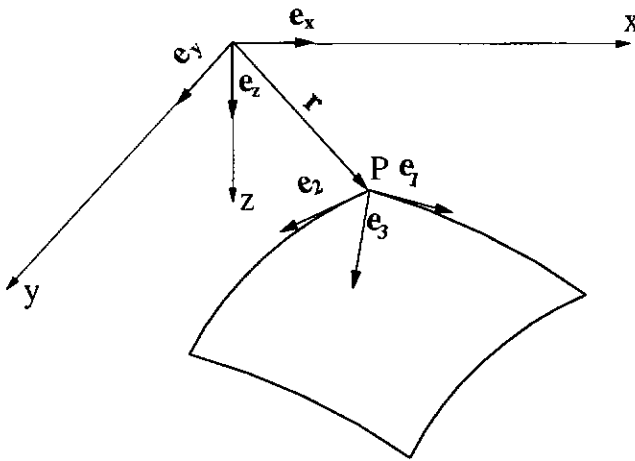


Figura II.5 - Vetores unitários tangentes de um elemento de superfície

O mesmo vetor posição \mathbf{r} expresso nas coordenadas fixas x, y, z é:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (\text{II.16})$$

sendo $z = z(x, y)$ a equação da superfície.

Ao se mover um ponto P definido por \mathbf{r} para um ponto P' na vizinhança de P , o incremento diferencial $d\mathbf{r}$ de \mathbf{r} é dado por:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy$$

$$\text{onde: } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{e}_x + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{e}_z$$

são os vetores derivadas de \mathbf{r} nas direções x e y e cujos módulos são :

$$\sqrt{g_{11}} = \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2} \quad (\text{II.17.a})$$

$$\sqrt{g_{22}} = \sqrt{1 + (\partial z / \partial y)^2} \quad (\text{II.17.b})$$

respectivamente.

Em uma malha ortogonal, os cabos são representados pelas duas famílias de curvas α_1 e α_2 que inicialmente (superfície inicial) se encontram em planos verticais paralelos. A malha forma uma grade ortogonal no plano xy .

Sendo as projeções das curvas α_1 e α_2 no plano xy retas paralelas à x e y respectivamente, pode-se escrever para os vetores unitários tangentes e normal à superfície:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \quad (\text{II.18.a})$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \quad (\text{II.18.b})$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.18.c})$$

onde $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \rightarrow$ determinante do tensor métrico;

$$g_{12} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Define-se curvatura Gaussiana como sendo :

$$K = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$$

Esta curvatura é arbitrária ao longo da superfície mas o seu sinal é constante [1]. Se $K > 0$, as curvaturas são do mesmo sentido e a interseção dessa superfície com uma plano horizontal é uma elipse. Se $K < 0$, as curvaturas são de sentidos opostos e a estrutura necessita de protensão para manter a sua geometria.

Após uma deformação da superfície o ponto P genérico passa para a posição \bar{P} definida pelo vetor $\bar{\mathbf{r}}$.

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \Delta$$

onde: $\Delta = u(x,y)\mathbf{e}_x + v(x,y)\mathbf{e}_y + w(x,y)\mathbf{e}_z$, sendo u, v, w os deslocamentos nas direções fixas x, y, z . Então, o vetor $\bar{\mathbf{r}}$ pode ser reescrito como:

$$\bar{\mathbf{r}} = (x + u)\mathbf{e}_x + (y + v)\mathbf{e}_y + (z + w)\mathbf{e}_z \quad (\text{II.19})$$

e suas derivadas são os vetores:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{II.20.a})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{II.20.b})$$

cujos módulos são $\sqrt{g_{11}}$ e $\sqrt{g_{22}}$

Os vetores unitários tangentes à superfície deformada são:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} \quad (\text{II.21.a})$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial y} \quad (\text{II.21.b})$$

Observa-se que após a deformação o elemento de área delimitado pelas curvas \bar{a}'_1 e \bar{a}'_2 sofre empenamento e os outros vetores unitários à superfície deformada $\bar{\mathbf{e}}_1$ e $\bar{\mathbf{e}}_2$ não são mais ortogonais.

II.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

II.4.1 Equações não Lineares de Equilíbrio

Na prática, grande parte das coberturas constituídas por redes de cabos ortogonais, inclusive na forma de parabolóide hiperbólico, são abatidas, ou seja, a deflexão nos cabos é razoavelmente pequena, com a relação flecha/vão inferior a 1/8. Esta propriedade da malha de cabos propicia várias simplificações no processo de obtenção das tensões e deslocamentos da malha.

A figura II.6 ilustra o diagrama de corpo livre de uma superfície deformada sob ação do carregamento externo \mathbf{p} . Nas 'arestas' do elemento de superfície atuam apenas forças de tração, já que despreza-se a rigidez à flexão dos cabos e também a rigidez ao cisalhamento da malha. As forças de tração e o carregamento externo estão referidos à área projetada $dx dy$ no plano xy .

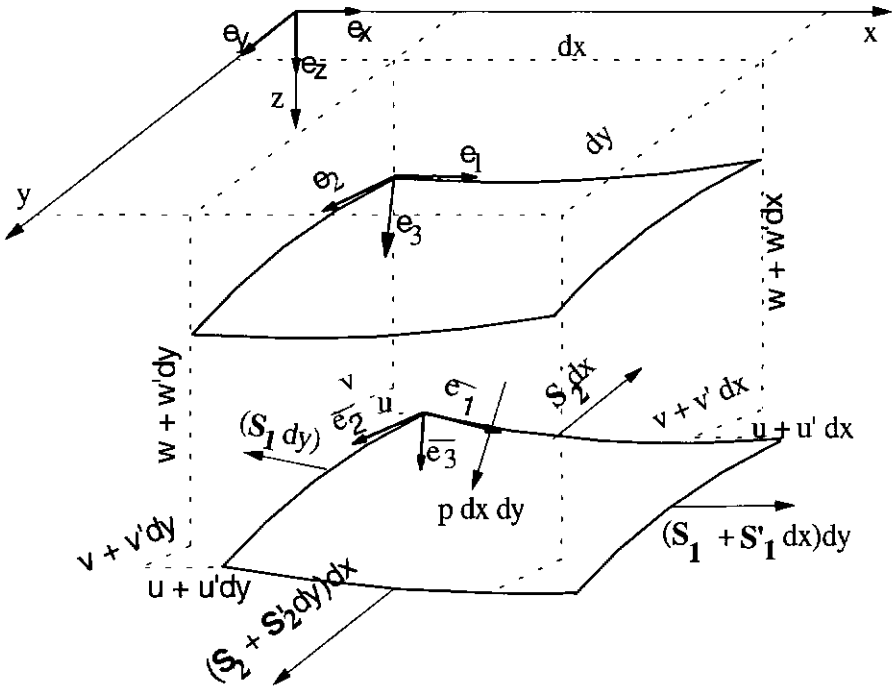


Figura II.6 - Diagrama de corpo livre da superfície deformada sob ação do carregamento p

As resultantes de forças nos cabos são:

$$\mathbf{S}_1 dy = S_1 dy \bar{\mathbf{e}}_1 \quad (\text{II.22a})$$

$$\mathbf{S}_2 dx = S_2 dx \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (\text{II.22b})$$

onde S_1 e S_2 são forças por unidade de comprimento no plano.

Em relação ao carregamento externo, admite-se que na superfície deformada atua a mesma carga \mathbf{p} que na superfície inicial. Na equação vetorial de equilíbrio de forças intervêm apenas os incrementos das forças nos cabos e o carregamento externo.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{S}_1 dy) dx + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{S}_2 dx) dy + \mathbf{p} dx dy = 0$$

ou ainda, dividindo por $dx dy$:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial y} + \mathbf{p} = 0 \quad (\text{II.23})$$

Substituindo-se na equação vetorial de equilíbrio as expressões para \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 (equações (II.22)) e também as expressões dos vetores unitários $\overline{\mathbf{e}}_1$ e $\overline{\mathbf{e}}_2$ em termos dos unitários \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z chega-se a um conjunto de 3 equações escalares, em termos das forças S_1 e S_2 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{S_1}{\sqrt{g_{11}}} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + p_x = 0 \quad (\text{II.24.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{S_2}{\sqrt{g_{22}}} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + p_y = 0 \quad (\text{II.24.b})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{S_1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{S_2}{\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + p_z = 0 \quad (\text{II.24.c})$$

Introduz-se as componentes horizontais das forças nos cabos:

$$H_x = \mathbf{S}_1 \bullet \mathbf{e}_x = \frac{S_1}{\sqrt{g_{11}}} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cong \frac{S_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{II.25.a})$$

$$H_y = \mathbf{S}_2 \bullet \mathbf{e}_y = \frac{S_2}{\sqrt{g_{22}}} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cong \frac{S_2}{\sqrt{g_{22}}} \quad (\text{II.25.b})$$

Nas equações (II.24) e (II.25) as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial y$ podem ser desprezadas em presença da unidade. Desta forma as equações não lineares de equilíbrio tomam a forma:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(H_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + p_x = 0 \quad (\text{II.26.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(H_x \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} + p_y = 0 \quad (\text{II.26.b})$$

(II.26.c)

$$\frac{\partial}{\partial x} H_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} H_y \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + p_z = 0$$

Nas equações (II.26) as componentes horizontais H das forças nos cabos podem ser decompostas em duas parcelas:

$$H = H_0 + H_p \quad (\text{II.27})$$

onde H_0 é a componente horizontal da força de protensão aplicada nos cabos (estado inicial) e H_p é o acréscimo de força devido à ação das cargas externas. Esta decomposição é feita com base na hipótese de pequena mudança de direção dos cabos entre o estado inicial e após a aplicação dos carregamentos.

Da mesma forma, as forças por unidade de comprimento S_1 e S_2 no plano podem ser decompostas em duas parcelas:

$$S = S_0 + S_p \quad (\text{II.28})$$

II.4.2 Relações Geométricas e Físicas

Relações deformação - deslocamento

As deformações nos cabos podem ser aproximadas por (vide Frei Otto [1]):

$$\varepsilon_1 \approx \frac{\partial u / \partial x + (\partial z / \partial x)(\partial w / \partial x)}{g_{11}} \quad (\text{II.29.a})$$

$$\varepsilon_2 \approx \frac{\partial v / \partial y + (\partial z / \partial y)(\partial w / \partial y)}{g_{22}} \quad (\text{II.29.b})$$

Pela Lei de Hooke, a relação deformação deslocamento assume a forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{1p}}{(EA)_x} \quad (\text{II.30.a})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{S_{2p}}{(EA)_y} \quad (\text{II.30.b})$$

onde $(EA)_x$ e $(EA)_y$ representam o produto, para as duas famílias de cabos, do módulo de elasticidade pela área da seção transversal, esta última referida por unidade de comprimento no plano.

Relações força-deslocamento

Combinando as equações (II.29.a) e (II.30.a) e levando-se em conta a equação (II.25.a), obtém-se, para a direção x:

$$H_{xp} = D_x(x, y) \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{II.31.a})$$

Da mesma forma para a direção y:

$$H_{yp} = D_y(x, y) \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{II.31.b})$$

onde :

$$D_x(x, y) = \frac{(EA)_x}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{II.32.a})$$

$$D_y(x, y) = \frac{(EA)_y}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (\text{II.32.b})$$

As funções $D_x(x, y)$ e $D_y(x, y)$ podem ser definidas como funções de rigidez, que dependem exclusivamente da geometria e das propriedades mecânicas da malha de cabos.

II.4.3 Equações Diferenciais Não-lineares de Equilíbrio

As equações diferenciais de equilíbrio podem ser obtidas substituindo-se as relações força-deslocamento (II.31) nas equações não lineares de equilíbrio (II.26).

II.4.4 Estado Inicial de Equilíbrio

Uma característica importante desta estrutura é que seu desempenho estrutural depende essencialmente da sua geometria inicial e da protensão inicial aplicada.

A equação da superfície mostrada na figura (II.1), para o estado inicial de equilíbrio, tem a forma:

$$z_0 = -\frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 \quad (\text{II.33})$$

onde k_x e k_y são as curvaturas nas direções x e y respectivamente, com:

$$k_x = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} \quad (\text{II.34.a})$$

$$k_y = \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \quad (\text{II.34.b})$$

O contorno dessa superfície, ou seja, sua projeção no plano xy pode ser qualquer (retangular, elíptico, etc).

Associando essa superfície a uma rede de cabos ortogonais, definem-se cabos tensores como sendo aqueles de curvatura negativa e cabos suspensos, ortogonais aos primeiros, como sendo aqueles de curvatura positiva, de acordo com a figura (II.7).

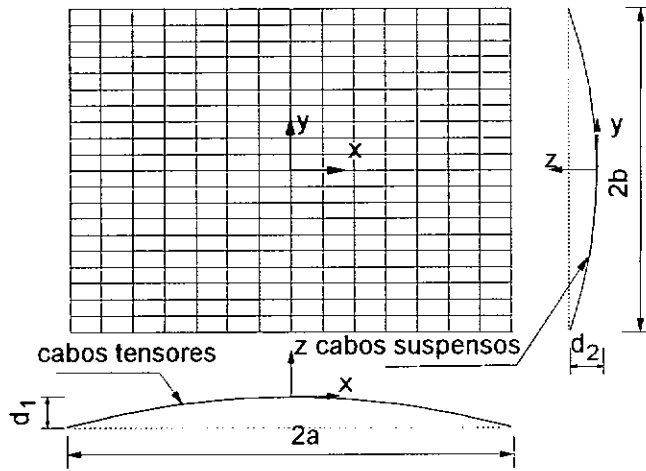


Figura II.7 - Projeção em planta de uma rede de cabos na forma de parabolóide hiperbólico

Com a notação da figura II.7, sendo d_1 e d_2 as flechas dos cabos tensores e suspensos respectivamente, a equação (II.33) da superfície inicial pode então ser reescrita da forma:

$$z_0 = -\frac{d_1}{a^2}x^2 + \frac{d_2}{b^2}y^2 \quad (\text{II.35})$$

No estado inicial atuam somente as forças de protensão iniciais. Assim sendo, com $H_x = H_{x0}$, $H_y = H_{y0}$ e $p_z = 0$, as equações (II.36) de equilíbrio para o estado inicial ($u = v = w = 0$), são:

$$\frac{\partial H_{x0}}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.36.a})$$

$$\frac{\partial H_{y0}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.36.b})$$

$$H_{x0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_{y0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.36.c})$$

Combinando a equação (II.36.c) com a equação (II.35), que define a superfície inicial, obtém-se a relação:

$$\frac{H_{x0}}{H_{y0}} = -\frac{d_2 a^2}{d_1 b^2} \quad (\text{II.37})$$

Esta equação estabelece uma relação entre a geometria inicial do parabolóide hiperbólico e as forças de protensão iniciais. Observa-se que a obtenção da superfície inicial não depende do valor das protensões H_{x0} e H_{y0} e sim da relação entre elas. Esta é uma característica positiva das malhas de cabos ortogonais. Se após uma análise conclui-se que a magnitude das forças de protensão deve ser aumentada por exemplo, isto pode se referido sem mudança de geometria inicial, desde que seja satisfeita a equação II.37 para o caso do parabolóide hiperbólico.

II.4.5 Linearização das Equações de Equilíbrio

As equações não lineares de equilíbrio (II.26) juntamente com as relações (II.31) descrevem o problema de uma malha abatida de cabos ortogonais qualquer.

Para facilitar a solução do problema, as seguintes simplificações podem ser feitas a partir das equações não lineares de equilíbrio (II.26):

- considera-se a superfície formada pela translação de duas parábolas;

- os cabos, em cada direção, possuem a mesma seção transversal e estão igualmente espaçados;
- o contorno é regular, por exemplo, retangular ou elíptico em planta;
- serão consideradas somente cargas verticais;
- os deslocamentos nos bordos serão desprezados, bem como os deslocamentos no plano horizontal.

Com isso, obtém-se as equações linearizadas de equilíbrio:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.38.a})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.38.b})$$

$$H_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -p_z \quad (\text{II.38.c})$$

Nestas equações:

$$z = z_0 + w; \quad (\text{II.38.d})$$

$$H_x = H_{x0} + H_{xp}; \quad (\text{II.38.e})$$

$$H_y = H_{y0} + H_{yp} \quad (\text{II.38.f})$$

Percebe-se então que, para as considerações feitas acima, as componentes horizontais H_x e H_y das forças nos cabos são constantes ao longo dos mesmos.

As mesmas equações (II.38) poderiam ter sido obtidas diretamente pelo equilíbrio de forças na superfície inicial indeformada de uma membrana equivalente, em que é desprezada a rigidez ao cisalhamento. Este procedimento foi desenvolvido por Irvine [2].

II.5 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

Na análise do comportamento estático e dinâmico para superfícies protendidas, assemelha-se uma estrutura constituída por elementos discretos (cabos) a uma superfície contínua equivalente no que respeita à rigidez, como já dito anteriormente.

Objetiva-se aqui a obtenção de esforços e deslocamentos para a malha de cabos, através da análise do meio contínuo e a obtenção de suas frequências e modos naturais de vibração, para posterior comparação com os resultados obtidos via MEF (métodos computacionais)

Apresenta-se, então, o método aproximado proposto por F.Otto [1], para determinação dos acréscimos das componentes horizontais da força nos cabos H_{xp} e H_{yp} e deslocamentos, além da solução proposta por Irvine [2], ambos a partir das equações de equilíbrio lineares (II.38).

II.5.1 Solução Proposta por OTTO

Frei Otto apresenta um **procedimento geral** para determinação das forças nos cabos e deslocamentos em malhas de cabos de superfície regrada para qualquer caso de carga e de geometria do contorno, inclusive considerando os deslocamentos do contorno. As equações integro-diferenciais não lineares resultantes são reescritas na forma discreta (somatórios e diferenças finitas) para serem resolvidas.

Para cálculos de pré-dimensionamento Frei Otto apresenta um **método aproximado** para determinação da ordem de grandeza dos esforços nos cabos e deslocamentos. Este método aplica-se ao caso de parabolóide hiperbólico, com contorno regrado e rígido, rigidezas constantes dos cabos $(EA)_x$ e $(EA)_y$ e carga vertical p_z uniformemente distribuída. Estas hipóteses são as mesmas que originaram as equações linearizadas (II.38).

Pelas equações (II.38.a) e (II.38.b), conclui-se que as componentes horizontais H_x e H_y das forças nos cabos são contantes ao longo de x e y respectivamente, ou seja, são constantes ao longo dos cabos em que atuam. Com isso, de acordo com a equação (II.27), sendo a protensão inicial nos cabos H_0 constante também, o mesmo ocorre para os acréscimos de força devidos à carga de peso, ou seja, essas forças adicionais são também constantes ao longo dos cabos em que atuam.

Desenvolvendo a equação de equilíbrio linearizada (II.38.c) levando em conta as equações (II.38.d,e,f) após simplificações, chega-se a:

$$H_{xp}k_x + H_{yp}k_y + p_z = 0$$

onde os termos $H_{xp}k_x$ e $H_{yp}k_y$ são as parcelas do carregamento p_z suportados pelos cabos tensores e suspensos respectivamente. Pode-se então escrever a equação anterior como:

$$\chi_x p_z + \chi_y p_z - p_z = 0$$

onde $\chi_x + \chi_y = 1$.

Com base em algumas simplificações pode-se obter valores de χ_x e χ_y em função das razões k_y/k_x e $(EA)_y/(EA)_x$. Com χ_x e χ_y obtêm-se os acréscimos de forças H_{xp} e H_{yp} nos cabos devidos ao carregamento p_z . A seguir faz-se um resumo dos desenvolvimentos para se chegar a este método aproximado apresentado por Otto.

Expressões para H_{xp} e H_{yp}

Integrando-se a equação (II.38.a) e (II.38.b) e levando-se em conta as equações (II.31) obtém-se:

$$H_{xp} = C_1(y) = D_x(x, y) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{II.39.a})$$

$$H_{yp} = C_2(x) = D_y(x, y) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{II.39.b})$$

Da equação (II.39.a), vem:

$$\int \frac{C_1(y)}{D_x(x, y)} dx = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

Sendo $C_1(y)$ uma função constante na direção x e estabelecendo os limites $[x_i, x_f]$ como sendo as coordenadas inicial e final na direção x da projeção em planta dos cabos, como mostrado na figura II.8, tem-se:

$$C_1(y) \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{D_x(x, y)} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} w dx \quad (\text{II.40})$$

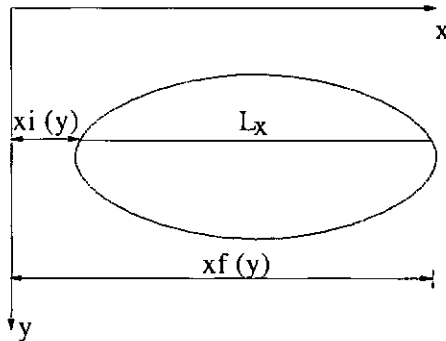


Figura II.8 Limites inferior e superior de um cabo da malha

Atendendo às simplificações feitas no ítem (II.4.5) deste capítulo, o primeiro termo da segunda parcela da equação (II.40) é nulo e esta toma a forma:

$$C_1(y) \int_{xi}^{xf} \frac{dx}{D_x(x, y)} = - \int_{xi}^{xf} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} w dx \quad (\text{II.41})$$

Define-se agora a função de rigidez ϕ_x como sendo:

$$\frac{1}{\phi_x} = \int_{xi}^{xf} \frac{dx}{D_x(x, y)} \quad (\text{II.42.a})$$

Aplicando à equação (II.41), obtem-se:

$$C_1(y) = \phi_x \left(- \int_{xi}^{xf} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} w dx \right) = H_{xp} \quad (\text{II.43.a})$$

Adotando procedimento análogo à equação (II.39.b) para a direção y e estabelecendo os limites $[y_i, y_f]$ como sendo as coordenadas inicial e final na direção y da projeção em planta dos cabos, tem-se:

$$C_2(x) = \phi_y \left(- \int_{yi}^{yf} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} w dy \right) = H_{yp} \quad (\text{II.43.b})$$

A função de rigidez ϕ_y fica definida como sendo:

$$\frac{1}{\phi_y} = \int_{yi}^{yf} \frac{dy}{D_y(x, y)} \quad (\text{II.42.b})$$

Cálculo das funções de rigidez ϕ para um parabolóide hiperbólico

Agrupando as equações (II.42) às equações (II.32), as funções ϕ_x e ϕ_y podem ser reescritas da forma:

$$\frac{1}{\phi_x} = \int_{xi}^{xf} \frac{[1 + (\partial z/\partial x)^2]^{3/2}}{(EA)_x} dx \quad (\text{II.44.a})$$

$$\frac{1}{\phi_y} = \int_{yi}^{yf} \frac{[1 + (\partial z/\partial y)^2]^{3/2}}{(EA)_y} dy \quad (\text{II.44.b})$$

Os valores dessas funções são obtidos de acordo com a equação da curva que define o cabo, cujos módulos de elasticidade e áreas são constantes.

De acordo com a equação (II.33) $\partial z/\partial x = k_x x$, sendo k_x a curvatura definida pela equação (II.34). Integrando a equação (II.44.a) obtém-se:

$$\frac{1}{\phi_x} = \frac{xi}{(EA)_x} \left[\frac{3 \operatorname{arcsinh}(k_x xi)}{8 k_x xi} + \frac{1}{8} (5 + 2k_x xi) \sqrt{1 + (k_x xi)^2} \right]$$

ou ainda, para contorno simétrico, sendo $L_x = xf - xi$:

$$\frac{1}{\phi_x} = \frac{L_x}{(EA)_x} \left[1 + \frac{1}{2} (k_x xi)^2 \right] \quad (\text{II.45.a})$$

Analogamente para a função ϕ_y , para $\partial z/\partial y = k_y y$:

$$\frac{1}{\phi_y} = \frac{L_y}{(EA)_y} \left[1 + \frac{1}{2} (k_y yi)^2 \right] \quad (\text{II.45.b})$$

Método aproximado para a obtenção de H_{xp} e H_{yp}

Desenvolvendo a equação de equilíbrio linearizada (II.38.c), em termos de z , H_x e H_y , desprezando os termos de ordem superior e levando em conta a equação (II.36.c), tem-se:

$$H_{xp} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{yp} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + H_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p_z = 0 \quad (\text{II.46})$$

Aplicando à equação acima as equações (II.43), que relacionam as forças adicionais H_{xp} e H_{yp} devidas às cargas externas com as funções de flexibilidade, vem:

$$\begin{aligned} \phi_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\int \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} w dx \right) + H_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(- \int \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} w dy \right) + \\ H_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} p_z = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Desprezando os termos $H_{x0}(\partial^2 w / \partial x^2)$ e $H_{y0}(\partial^2 w / \partial y^2)$, por serem pequenos comparados aos demais valores e fazendo $\partial^2 z_0 / \partial x^2 = k_x$, tem-se:

$$\phi_x k_x^2 \int_{xi}^{xf} w dx + \phi_y k_y^2 \int_{yi}^{yf} w dy = p_z \quad (\text{II.48})$$

Não se pode determinar o valor de w diretamente por esta última equação. Como definido anteriormente, $\chi_x p_z$ e $\chi_y p_z$ são frações parciais do carregamento vertical p_z , ou seja:

$$\frac{\chi_y}{\chi_x} = \frac{\phi_y k_y^2 \int_{yi}^{yf} w dy}{\phi_x k_x^2 \int_{xi}^{xf} w dx} \quad \text{e} \quad \chi_x + \chi_y = 1$$

Define-se também as constantes:

$$\rho = \frac{k_y}{k_x} \quad (\text{II.49.a})$$

$$\phi = \frac{(EA)_y}{(EA)_x} = \text{constante} \quad (\text{II.49.b})$$

Levando em conta as expressões de ϕ_x e ϕ_y (equações (II.45)) e fazendo as seguintes aproximações:

$$(a) \quad \frac{\int_{yi}^{yf} w dy}{\int_{xi}^{xf} w dx} \cong \frac{L_y}{L_x}, \text{ já que as deformadas das duas famílias de cabos são}$$

similares;

$$(b) \quad 1 + \frac{1}{2}(k_x xi)^2 \cong 1 + \frac{1}{2}(k_y yi)^2.$$

vem:

$$\frac{\chi_y}{\chi_x} = \frac{(EA)_y}{(EA)_x} \frac{k_y^2}{k_x^2} = \phi \rho^2$$

obtem-se então:

$$\chi_x = \frac{1}{1+\varphi\rho^2} \quad (\text{II.50.a})$$

$$\chi_y = \frac{\varphi\rho^2}{1+\varphi\rho^2} = 1 - \chi_x \quad (\text{II.50.b})$$

As forças adicionais devido ao carregamento p_z podem ser expressas da forma:

$$H_{xp} \equiv -\chi_x \frac{p_z}{k_x} \quad (\text{II.51.a})$$

$$H_{yp} \equiv \chi_y \frac{p_z}{k_y} \quad (\text{II.51.b})$$

Uma outra alternativa para obtenção de χ_x é através da figura (II.9), que mostra um ábaco de χ_x , função de φ e ρ .

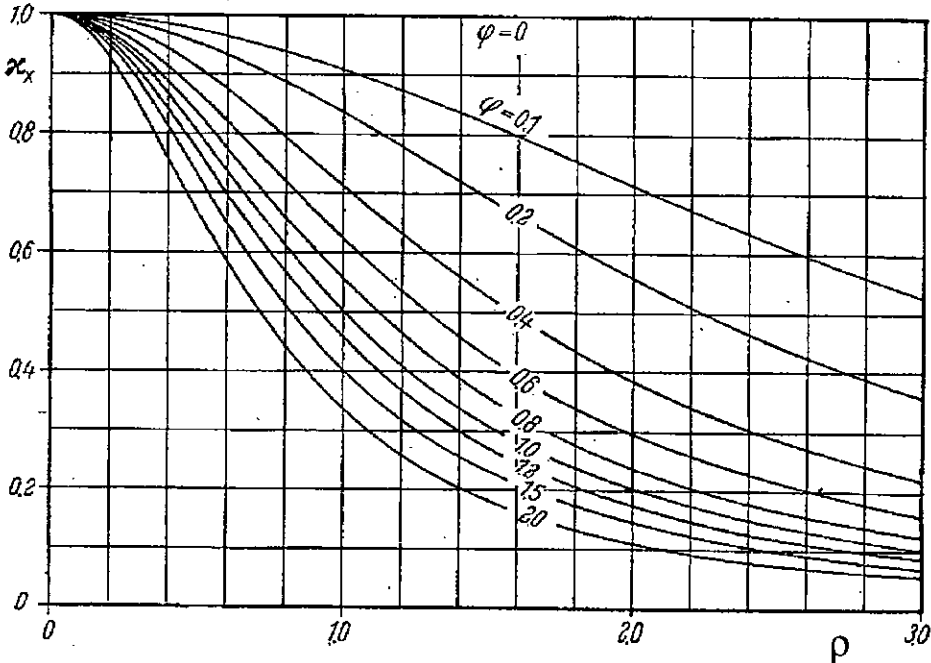


Figura II.9 - Fração parcial de carregamento χ_x como função de φ e ρ [1]

Fazendo-se a aproximação:

$$\int_{xi}^{xf} w \, dx = w_m L_x$$

sendo w_m média dos deslocamentos verticais na malha e pode ser obtido pela equação:

$$w_m = \frac{\chi_x P_z}{L_x \phi_x} \quad (\text{II.52})$$

Para carga vertical uniformemente distribuída, o deslocamento no centro da malha pode ser obtido pela aproximação:

$$1,1 \leq w_0/w_m \leq 1,25 \quad (\text{II.53})$$

II.5.2 Solução Proposta por Irvine

Em seu livro, Irvine [2] apresenta uma versão simplificada da solução analítica linearizada desenvolvida por *Mollman* para o caso particular de cobertura em parabolóide hiperbólico com protensões H_{x0} e H_{y0} iguais.

A equação (II.38.c), pode ser reescrita levando-se em conta a equação da superfície inicial definida no item (II.4.4), fazendo $H_{x0} = H_{y0} = H$ como:

$$H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -p_z - \frac{8d_1}{(2a)^2} H_{xp} + \frac{8d_2}{(2b)^2} H_{yp} \quad (\text{II.54})$$

Lembrando-se que H_{xp} e H_{yp} são os acréscimos de forças nas direções x e y respectivamente devido às cargas externas ou seja, H_{xp} é o acréscimo de força para os cabos tensores e H_{yp} é o acréscimo de força para os cabos suspensos.

A aproximação adicional feita aqui é que os acréscimos de tensões H_{xp} e H_{yp} serão substituídos por valores constantes equivalentes à média desses valores ao longo dos respectivos vãos, ou seja:

$$h_1 = \frac{1}{2b} \int_0^{2b} H_{xp}(y) dy \quad (\text{II.55.a})$$

$$h_2 = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} H_{yp}(x) dx \quad (\text{II.55.b})$$

A solução da equação (II.54) que satisfaz à condição de deslocamentos verticais nulos nos bordos é:

$$w(x, y) = \left[1 - \frac{1}{p}(h_2 - h_1) \right] \left\{ \frac{1}{2}x(1 - x) - \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{4}{n^3 \pi^3} \operatorname{sen} n\pi x \frac{\cosh[(1 - 2y)(n\pi/2\alpha)]}{\cosh(n\pi/2\alpha)} \right\} \quad (\text{II.56})$$

onde:

- $x = x/2a$; $y = y/2b$; $a = a/b$;
- $w = \left[8d_1 H / p(2a)^2 \right] w$;
- $p = \left[p(2a)^2 / 8d_1 H \right]$;
- $h_1 = h_1/H$;

- $h_2 = h_2/H$.

A solução da equação (II.54) poderia ser obtida através de uma série de Fourier, entretanto, a série da equação (II.56) converge mais rapidamente. A série de Fourier é mais usada quando o carregamento não é uniformemente distribuído.

Sendo $\lambda^2 = (8d_1/2a)^2 EA/H$, o cálculo dos acréscimos médios de forças é calculado com:

$$h_1 = -\lambda^2 p \int_0^1 \int_0^1 w dx dy \quad (\text{II.57.b})$$

$$h_2 = -\lambda^2 p \int_0^1 \int_0^1 w dx dy \quad (\text{II.57.b})$$

Essas forças adicionais médias podem ser corrigidas pelas expressões:

$$\frac{H_{xp}}{h_1} = \frac{1 - f(y)}{1 - f(\alpha)} \quad (\text{II.58.a})$$

$$\frac{H_{yp}}{h_2} = \frac{6x(1 - x) - \sum_{\text{n\acute{im}par}} \frac{48}{n^3 \pi^3} \text{sen} n\pi x \left[\frac{\text{tanh}(n\pi/2\alpha)}{(n\pi/2\alpha)} \right]}{1 - f(\alpha)} \quad (\text{II.58.b})$$

que fornecem os valores adimensionais de H_{xp} e H_{yp} , sendo :

$$f(y) = \sum_{\text{n\acute{im}par}} \left\{ \frac{\cosh[(1 - 2y)(n\pi/2\alpha)]}{\cosh(n\pi/2\alpha)} \frac{96}{(n\pi)^4} \right\}$$

$$f(\alpha) = \sum_{\text{n\acute{im}par}} \left[\frac{\text{tanh}(n\pi/2\alpha)}{(n\pi/2\alpha)} \frac{96}{(n\pi)^4} \right]$$

II.5.3 Solução Analítica para Vibrações Livres

Neste trabalho será apresentada a solução desenvolvida por Irvine [2] para o problema de vibração livre que assemelha a malha de cabos a um contínuo.

Coberturas de cabos protendidos são em geral leves e flexíveis, sendo mais resistentes às cargas de terremotos que as estruturas convencionais. Porém, são mais sensíveis às cargas de vento, uma vez que podem apresentar frequências naturais muito baixas. Normalmente, são estáveis às cargas dinâmicas e os problemas dinâmicos são causados por protensão insuficiente nos cabos.

Irvine [2] expõe o problema da vibração livre de uma ‘membrana’ de contorno retangular ($a \times b$) rígido, que inicialmente é plana ($z_0 = 0$) e que após a aplicação de uma carga estática p toma a forma de um perfil abatido descrito pelos deslocamentos $w(x, y)$. Admitindo que as dimensões a e b do contorno são aproximadamente iguais, a equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita com a hipótese de que as forças H e seus acréscimos $h(t)$ são os mesmos em toda a ‘membrana’ nas duas direções:

$$[H + h(t)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w + \delta) + [H + h(t)] \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w + \delta) = -p + \frac{p}{g} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} \quad (\text{II.59})$$

onde: $H = H_0 + H_p$;

$h(t)$ é a força adicional nos cabos devido à carga dinâmica;

δ são os deslocamentos dinâmicos na forma $\delta(x, y, t)$;

g é a aceleração da gravidade.

Dentre as aproximações adotadas pelo autor, uma delas é a de considerar as forças adicionais devido às cargas estáticas e dinâmicas constantes.

A expressão do acréscimo de força $h(t)$ é dada por:

$$\frac{2h(t)s}{EA} = \iint_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) dx dy$$

obtida a partir de relações de elasticidade.

Uma característica importante é que os modos antissimétricos não induzem o aparecimento de nenhuma força adicional $h(t)$. Sendo o contorno rígido, a solução para os **modos antissimétricos** é:

$$\bar{\delta}_{mn}(x, y) = \text{sen}(m\pi x) \text{sen}(n\pi y), \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{II.60})$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

onde: $\bar{\delta} = \frac{\delta_0(x, y, t) H}{p (2a)^2}$; $\delta(t) = \delta_0 e^{i\omega t}$;

$$x = x/2a ; y = y/2b.$$

com as seguintes frequências associadas:

$$\bar{\omega}_{mn} = \pi(m^2 + \alpha^2 n^2)^{1/2}, \quad \text{onde } \alpha = a/b \quad (\text{II.61})$$

$$\bar{\omega}_{mn}^2 = \frac{p}{gH} (2a)^2 \omega^2$$

Para os **modos simétricos** tem-se uma série:

$$\bar{\delta}(x, y) = 16\bar{h} \sum_{i,j} \sum_{\text{impar}} \frac{\text{sen}(i\pi x) \text{sen}(j\pi y)}{(i\pi)(j\pi) \left[\bar{\omega}^2 - (i\pi)^2 - \alpha^2 (j\pi)^2 \right]} \quad (\text{II.62})$$

onde: $\bar{h} = h_0/H$;

$$h(t) = h_0 e^{i\omega t};$$

$$\overline{\omega}_{mn}^2 = \frac{P}{gH} (2a)^2 \omega^2.$$

As frequências ω são obtidas a partir de:

$$\sum_{i,j} \sum_{\text{impar}} \frac{1}{(i\pi)(j\pi) \left[\overline{\omega}^2 - (i\pi)^2 - \alpha^2 (j\pi)^2 \right]} = \frac{1}{32\lambda_e^2} \quad (\text{II.63})$$

onde:
$$\frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda_1^2 + (a/b)^2 (H_y/H_x) \lambda_2^2}{1 + h_1}$$

De posse dessas expressões válidas para a 'membrana' aproximadamente quadrada e inicialmente plana, e escrevendo novas equações, agora para uma superfície de parabolóide hiperbólico, no mesmo formato das equações do caso anterior, Irvine propõe o uso das soluções dadas pelas expressões (II.60 a II.63), substituindo λ por λ_e e α por α_e .

$$\lambda^2 = \lambda_e^2 = 2 \frac{\lambda_x + \alpha_*^2 \lambda_y^2}{1 + h_x/H_x};$$

$$\alpha^2 = \alpha_e^2 = \frac{1 + h_y/H_y}{1 + h_x/H_x} \alpha_*.$$

onde:
$$\lambda_x^2 = \left(\frac{8 d_1}{2a} \right) \frac{(EA)_x}{H_x}; \quad \lambda_y^2 = \left(\frac{8 d_2}{2b} \right) \frac{(EA)_y}{H_y};$$

$$\alpha_*^2 = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{H_y}{H_x}.$$

II.6 ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA DO CONTORNO E PROTENSÕES INICIAIS

Em superfícies do tipo parabolóide hiperbólico, é comum se ter a malha de cabos ancorada em cabos de contorno, elementos submetidos à flexão ou em anéis. Portanto, é de grande interesse econômico a investigação da geometria do contorno ideal tal que induza o aparecimento de esforços de flexão suficientemente pequenos, ou até mesmo nulos, nesses elementos de contorno.

Para a determinação da projeção em planta da curva que define o contorno nessas condições, o elemento estrutural do bordo é considerado separadamente. Os esforços nele atuantes são oriundos dos esforços nos cabos da malha, como está mostrado na figura II.10.a para o elemento infinitesimal ds do contorno.

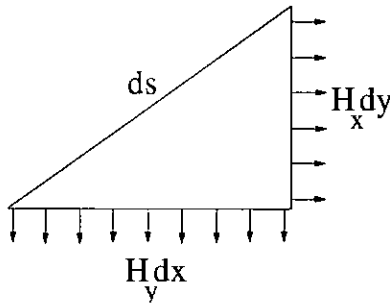


Figura II.10.a Forças dos cabos tensores e suspensos no elemento do contorno

O diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal do contorno está mostrado na figura II.10.b.

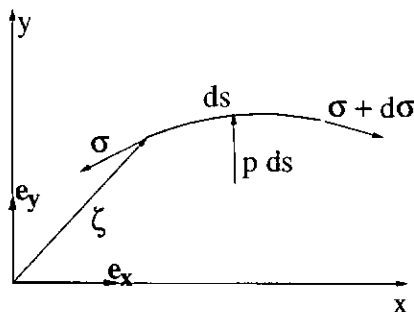


Figura II.10.b Elemento infinitesimal do elemento de contorno projetado no plano

Nesta última figura, $\mathbf{p}ds$ representa a resultante dos esforços $H_x(y)$ e $H_y(x)$, $\sigma(x,y)$ a resultante de todos os esforços axiais no elemento infinitesimal ds e ζ o vetor posição, ou seja:

$$\mathbf{p}ds = [H_x(y) dy, -H_y(x) dx];$$

$$\sigma(x,y) = [S_x(y), S_y(x)];$$

$$\zeta = (x, y).$$

Determina-se a equação da projeção horizontal da curva do contorno de tal maneira que ela forme uma linha de pressões das forças H_x e H_y a partir das equações de equilíbrio de esforço normal e da condição de ausência de momento para o elemento ds .

$$d\sigma + \mathbf{p}ds = 0;$$

$$d\zeta \times \sigma = 0.$$

Combinando as equações acima e integrando convenientemente, obtém-se a equação diferencial:

$$\iint H_x dy dy + \iint H_y dx dx = a_1 y + a_2 - b_1 x - b_2 \quad (\text{II.63})$$

As constantes de integração a_1, a_2, b_1, b_2 podem ser determinadas levando-se em conta 3 pontos da curva ou qualquer outra condição geométrica.

A equação (II.63) pode facilmente ser aplicada para a superfície inicial da malha de cabos sob ação somente dos esforços axiais de protensão. Assim sendo, fazendo $H_x = H_{x_0} = \text{constante}$ e $H_y = H_{y_0} = \text{constante}$, tem-se:

$$\frac{H_{y_0}}{2}x^2 + \frac{H_{x_0}}{2}y^2 + a_1y + b_1x + c_1 = 0 \quad (\text{II.63})$$

Esta última equação representa a equação de uma elipse, de semi-eixos maior (a) e menor (b) paralelos a x e y respectivamente. A equação dessa elipse pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{II.64})$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da elipse.

Fazendo coincidir as coordenadas do centro da elipse com a origem do sistema de eixos e igualando-se as equações (II.63) e (II.64), obtém-se outra relação entre as protensões iniciais e a geometria de parabolóide hiperbólico.

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{H_{x_0}}{H_{y_0}}} \quad (\text{II.65})$$

Com isso, pode-se definir a geometria do anel de bordo de maneira que esteja submetido apenas à compressão para o estado inicial.

II.7 ESTIMATIVA DA PROTENSÃO INICIAL

Superfícies na forma do parabolóide hiperbólico necessitam que sejam aplicadas forças de protensões nos cabos. A protensão, por sua vez, pode ser aplicada 'simultaneamente' aos cabos tensores e suspensos, ou somente aos cabos tensores, como geralmente é feito na prática. Este último procedimento é que justifica a denominação dada aos cabos tensores.

Quando a protensão é aplicada 'simultaneamente' nos dois sentidos, pode-se estimar as forças necessárias utilizando-se o método aproximado para a obtenção de H_{sp} e H_{tp} , exposto no item II.5.1. Pela teoria, obtem-se os valores das forças que surgem nos cabos devidas à ação das cargas externas verticais. O decréscimo de força nos cabos tensores é o valor mínimo da protensão a ser adotada de modo que eles não fiquem frouxos. A protensão nos cabos suspensos é então obtida de maneira a se manter a geometria de montagem com a equação (II.37).

Para o caso de protensão aplicada somente aos cabos tensores, desenvolve-se neste item um processo aproximado para a estimativa da protensão inicial, utilizando-se as equações do problema do cabo isolado. Deseja-se determinar a força protensão a ser aplicada nos cabos tensores de maneira a se obter uma determinada força nos cabos suspensos.

A ação dos cabos tensores, que são protendidos contra os cabos suspensos é aproximada por uma carga vertical uniformemente distribuída (q) ao longo do cabo suspenso, conforme ilustrado na figura II.11.a.

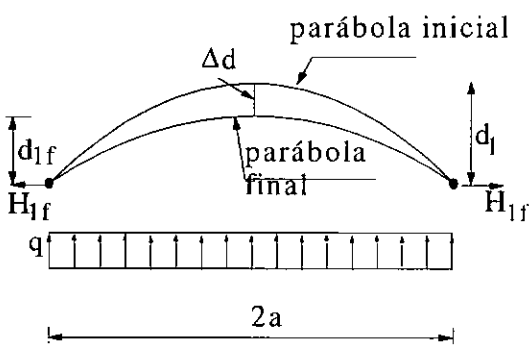


Figura II.11.a Reação dos cabos suspensos sobre um cabo tensor protendido

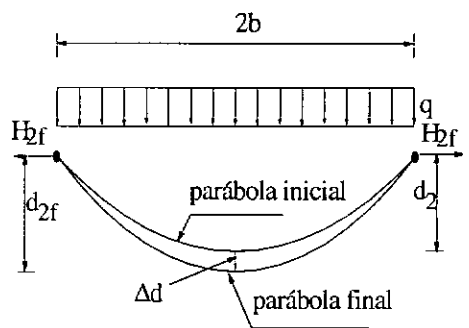


Figura II.11 b Cabo suspenso sob a ação dos cabos tensores protendidos

O erro cometido nesta aproximação está em se desprezar a condição de menor deslocabilidade vertical dos extremos dos cabos, ou seja, em se considerar a carga uniformemente distribuída ao longo de todo o vão, enquanto que na verdade, esta é constante apenas na região central do cabo, decrescendo em direção aos bordos.

Nas figuras IV.11, H_{1f} é a componente horizontal da protensão inicial a ser aplicada aos cabos tensores e é a incógnita do problema, d_{1f} e d_{2f} as flechas devidas a ação da carga q , d_1 e d_2 as flechas iniciais (conhecidas) e H_{2f} , também conhecida, a componente horizontal da força que surgirá nos cabos suspensos devida a ação dos cabos tensores.

Para efeito do cálculo do alongamento, considerando-se que a parábola é abatida, aproxima-se o esforço axial no cabo suspenso pelo valor H_{2f} . Assim sendo:

$$\frac{\Delta L_2}{2b} (EA)_y \cong H_{2f} \quad (\text{II.66})$$

sendo $\Delta L = L_f - L_i$ (comprimento final menos comprimento inicial).

Os valores dos comprimentos inicial e final são obtidos pela equação (II.13) e, quando substituídos na equação (II.66) resulta uma equação biquadrática cuja variável é a nova flecha d_{2f} , ou seja:

$$L_f = 2b \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{d_{2f}}{2b} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{d_{2f}}{2b} \right)^4 \right]$$

$$L_i = 2b \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{d_2}{2b} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{d_2}{2b} \right)^4 \right]$$

Conhecendo-se o valor de d_{2f} , obtém-se o valor do deslocamento central dos cabos:

$$\Delta d = d_{2f} - d_2$$

Usando a equação (II.10) para o cabo isolado, obtém-se o valor da carga q .

$$q = \frac{8 H_{2f} d_{2f}}{(2b)^2} \quad (\text{II.67})$$

Sabendo-se que os deslocamentos Δd dos cabos tensores e suspensos são iguais, tem-se:

$$d_{1f} = d_1 - \Delta d \quad (\text{II.68})$$

Usando a equação do cabo isolado para os cabos tensores, obtém-se o valor de força que surge neste cabo (H) devida à ação da carga q .

$$H = \frac{q(2a)^2}{8d_{1f}} \quad (\text{II.69})$$

O esforço axial, necessário ao encurtamento ΔL_1 , é obtido pela equação:

$$P = \frac{(EA)_x \Delta L_1}{2a} \quad (\text{perda de tração}) \quad (\text{II.70})$$

A força a ser aplicada ao cabo tensor (H_{1f}) é obtida pela combinação desses dois esforços (H e P), ou seja:

$$H_{1f} = H + P \quad (\text{II.71})$$

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE MALHAS DE CABOS VIA MEF

III.1 INTRODUÇÃO

Coberturas formadas por malhas de cabos, inclusive as do tipo parabolóide hiperbólico, podem ser analisadas através do processo do meio contínuo ou mediante a sua discretização em elementos finitos.

Na primeira abordagem, a malha de cabos protendidos pouco espaçados é assimilada a um contínuo e tratada estruturalmente como uma membrana em que é desprezada a rigidez ao cisalhamento (Otto [1] e Irvine [2]). Na outra abordagem, a malha de cabos é analisada como um sistema discreto de hastes articuladas com rigidez à tração apenas, levando-se em conta a sua não linearidade geométrica.

O processo empregado neste trabalho é o último acima citado, onde utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise da estrutura constituída por cabos, vigas e pilares de sustentação, convenientemente discretizados

Nos capítulos IV e V, relativos à análise do comportamento estático e dinâmico da cobertura, faz-se uma análise comparativa dos resultados obtidos pelos dois processos (contínuo e discreto) onde se compara os resultados fornecidos pelas soluções analíticas apresentadas no Capítulo II e os obtidos através da análise feita pelo Método dos Elementos Finitos (métodos computacionais).

Este capítulo apresenta os elementos finitos utilizados no modelo numérico, além dos aspectos relativos à introdução da protensão e das cargas externas.

Para proceder às análises propostas no trabalho de tese, cujos resultados estão expostos nos capítulos IV e V, houve necessidade de elaborar muitas malhas de elementos com diferentes espaçamentos entre os cabos. Para agilizar este trabalho, foi

desenvolvido o programa GERA, cuja apresentação e fluxograma encontram-se no item III.3.

III.2 MODELO NUMÉRICO

Os elementos estruturais de maior importância na cobertura em estudo são os elementos de cabos. Estes podem ser ancorados em cabos de contorno, em elementos submetidos à flexão ou em anéis. Estes últimos elementos, por sua vez, podem estar apoiados em pilares de alturas variadas.

Neste trabalho, o modelo estrutural empregado consistiu numa malha de cabos protendidos, com geometria regradada, ancorada a uma viga de contorno de concreto armado e seção transversal retangular e apoiada em pilares também em concreto e seção transversal retangular.

Utilizou-se o programa MEDIFEM [7] desenvolvido no laboratório de estruturas do PEC/COPPE a partir do código MINIFEM do Prof. Taylor [9].

III.2.1 Elementos Utilizados

III.2.1.1 *Elemento de Cabo Treliça Espacial para a Malha de Cabos*

Pesquisando a literatura para a análise numérica via MEF de sistemas de cabos percebe-se diversos enfoques para dois tipos de problemas:

a- aplicações em que a geometria inicial do cabo é aproximadamente conhecida, como ocorre em cabos pré-tensionados utilizados em torres estaiadas, coberturas de malhas de cabos e pontes estaiadas. Para estas estruturas, o cabo pode ser discretizado em uma série de elementos de treliça com não linearidade geométrica, como ilustrado nas figuras III.1.a e III.1.b.

b- aplicações em que o cabo tem grandes deslocamentos, com mudanças em sua geometria da ordem de grandeza das suas dimensões, como por exemplo cabos de transmissão de energia, cabos de ancoragem de estruturas flutuantes, como ilustrado na figura III.1.c.

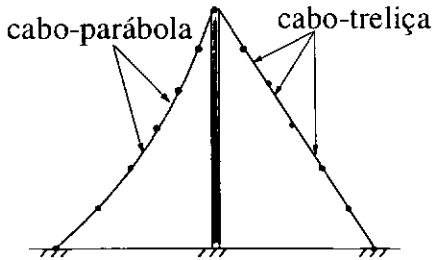


Figura III.1.a Torre estaiada

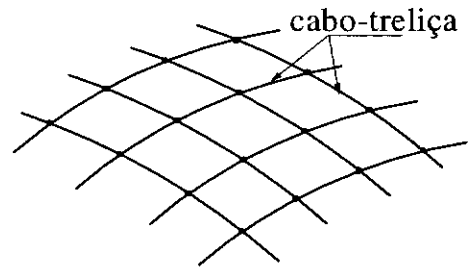
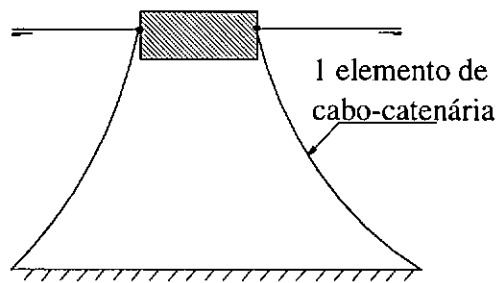


Figura III.1.b Malha de cabos



*Figura III.1.c Cabos de ancoragem
de um flutuante*

Para os problemas descritos em (b) destaca-se o elemento proposto por Peyrot e Goulois [14] no qual a determinação da geometria do cabo, as forças de extremidade e a matriz de rigidez do cabo são obtidos a partir das posições de suas extremidades, das cargas e do comprimento original do cabo. O procedimento é iterativo e baseado na solução da equação diferencial de equilíbrio de um cabo submetido a uma carga distribuída ao longo de seu comprimento - o perfil em catenária [12].

Para os problemas descritos em (a), como são necessários diversos elementos de treliça para modelar um cabo, diversos outros elementos tem sido propostos com intuito de reduzir esforço computacional, tais como:

- elemento isoparamétrico de 2 nós (perfil retilíneo) com módulo de deformação longitudinal equivalente para considerar a não linearidade do cabo devido a sua flecha [15];

- elemento isoparamétrico de 3 nós (perfil parabólico) com não linearidade elástica [16]. A geometria inicial do cabo (sob peso próprio + protensão) é obtida a priori por um procedimento iterativo baseado nas equações da catenária.

Para o caso de malhas de cabos, como em cada cruzamento de cabos é necessário um nó, não existe a questão da redução do número de elementos e o mais indicado é o uso do **elemento cabo-treliça** por ser o mais simples. Como estratégia de solução das equações utilizou-se o método de Newton-Raphson. O elemento de cabo-treliça é um elemento de treliça em que é desprezada a rigidez à compressão; se em alguma etapa do processo de solução algum elemento tiver encurtamento, sua rigidez será anulada.

A matriz de rigidez tangente desse elemento é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (\text{III.1})$$

onde \mathbf{K}_E é a matriz de rigidez elástica linear e \mathbf{K}_G é a matriz de rigidez geométrica.

Essas matrizes, as quais são montadas como matrizes 12 x 12 para compatibilização com o elemento de pórtico espacial, são definidas no sistema local por (vide figura III.2)[11]:

- \mathbf{K}_E : matriz [12x12], simétrica, com $K_{E^{1,1}} = -K_{E^{1,7}} = K_{E^{7,7}} = EA/L$ e os demais elementos não simétricos a esses nulos;

- \mathbf{K}_G : matriz [12x12], simétrica, com $K_{G^{2,2}} = K_{G^{3,3}} = K_{G^{8,8}} = K_{G^{9,9}} = -K_{G^{2,8}} = -K_{G^{3,9}} = F/L$ e os demais elementos não simétricos a esses nulos.

As grandezas E , A , L e F são, respectivamente, o módulo de elasticidade, a área da seção transversal, o comprimento do elemento e a força axial no elemento.

Para análise dinâmica utilizou-se matriz de massa discreta.

III.2.1.2 Elemento de Pórtico Espacial para Anéis e Vigas de Contorno

O elemento de pórtico espacial foi utilizado na modelagem da viga de contorno onde se ancoram os cabos e obedece à geometria elíptica em planta do parabolóide hiperbólico. A viga de contorno é então discretizada como uma sucessão de elementos retilíneos delimitados por dois pontos consecutivos de suspensão dos cabos. A numeração dos graus de liberdade está ilustrada na figura III.2.

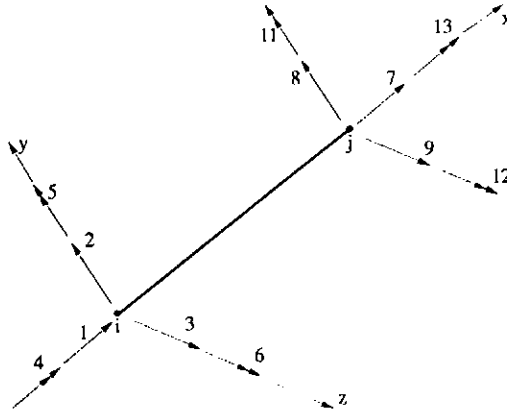


Figura III.2 Graus de liberdade dos elementos de pórtico espacial

A matriz de rigidez tangente do elemento da figura III.2 no sistema local é definida também pela equação (III.1), sendo novamente \mathbf{K}_E a matriz de rigidez elástica linear e \mathbf{K}_G a matriz de rigidez geométrica. Essas duas matrizes são simétricas de dimensão $[12 \times 12]$ e seus elementos não nulos ficam definidos da seguinte forma [11]:

- *Matriz elástica:*

$$K_{E^{1,1}} = -K_{E^{7,7}} = EA/L;$$

$$K_{E^{2,2}} = K_{E^{8,8}} = -K_{E^{2,8}} = 12 EI_z/L^3;$$

$$K_{E^{3,3}} = K_{E^{9,9}} = -K_{E^{3,9}} = 12 EI_y/L^3;$$

$$K_{E^{4,4}} = K_{E^{10,10}} = -K_{E^{4,10}} = GI_x/L;$$

$$K_{E^{5,5}} = K_{E^{11,11}} = 4 EI_y/L;$$

$$K_{E^{6,6}} = K_{E^{12,12}} = 4 EI_z/L;$$

$$K_{E^{2,6}} = K_{E^{2,12}} = -K_{E^{6,8}} = -K_{E^{8,12}} = 6 EI_z/L^2;$$

$$K_{E^{5,9}} = K_{E^{9,11}} = -K_{E^{3,5}} = -K_{E^{3,11}} = 6 EI_y/L^2;$$

$$K_{E^{5,11}} = 2 EI_y/L;$$

$$K_{E^{6,12}} = 2 EI_z/L.$$

• *Matriz geométrica:*

$$K_{G^{2,2}} = K_{G^{3,3}} = K_{G^{8,8}} = K_{G^{9,9}} = 6/5 PL;$$

$$K_{G^{5,5}} = K_{G^{6,6}} = K_{G^{11,11}} = K_{G^{12,12}} = 2/15 PL;$$

$$K_{G^{2,5}} = K_{G^{3,9}} = K_{G^{9,11}} = K_{G^{2,12}} = P/10;$$

$$K_{G^{3,5}} = K_{G^{6,8}} = K_{G^{3,11}} = K_{G^{8,12}} = -P/10;$$

$$K_{G^{2,8}} = K_{G^{3,9}} = -6/5 PL;$$

$$K_{G^{5,11}} = K_{G^{6,12}} = -PL/30.$$

Nessas matrizes tem-se:

E = módulo de elasticidade;

G = módulo de elasticidade transversal;

A = área da seção transversal;

L = comprimento do elemento;

I_x = constante de inércia à torção;

I_y e I_z = momentos de inércia em relação aos eixos y e z respectivamente.

II.2.1.3 Elementos de Conexão para Pilares de Apoio

A conexão da estrutura com os pilares de apoio foi discretizada por uma ligação elástica, que é um tipo de ligação que tem a propriedade de restringir parcialmente o movimento em uma ou mais direções no sistema local.

Foi utilizado o elemento de mola espacial. Este tipo de elemento tem comprimento desprezível, podendo inclusive ser nulo. O nó externo a ele (aquele que não estiver ligado à estrutura) deve ser totalmente impedido.

A figura III.3.a mostra a posição em planta dos pilares e a figura III.3.b a modelagem adotada para os pilares com seus respectivos eixos locais.

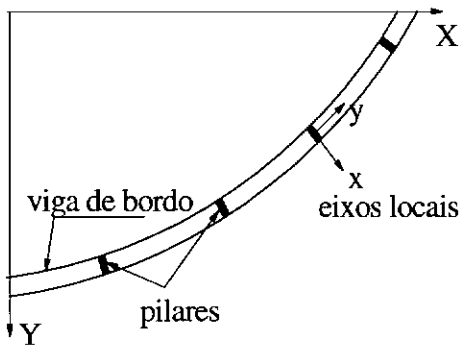


Figura III.3.a Posição em planta dos pilares (1/4 da malha)

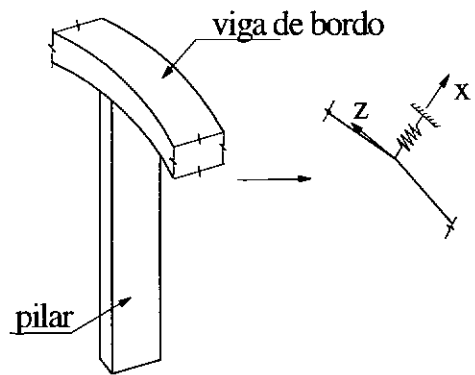


Figura III.3.b Modelagem adotada para os pilares

Nesta modelagem, os elementos de mola tem coeficientes de rigidez K_{θ_x} , K_{θ_y} e K_{θ_z} , relativos às rotações nas direções locais x,y,z nulos. O coeficiente de rigidez relativo à translação na direção vertical K_y é infinito, o que implica em se ter um apoio rígido nesta direção. Considerando cada pilar como engastado e livre, os coeficientes de rigidez equivalentes às direções x e z do plano da seção transversal do pilar foram obtidas pela fórmula:

$$K_x = \frac{3EI_z}{L^3} \quad (\text{III.2.a})$$

$$K_z = \frac{3EI_x}{L^3} \quad (\text{III.2.b})$$

onde K_x e K_z são os coeficientes de rigidez à translação nas direções locais x e z , E o módulo de elasticidade do pilar, I_x e I_z são os momentos de inércia e L a altura do pilar.

III.2.2 Introdução da Protensão e Cargas Externas

Malhas de cabos na forma de parabolóide hiperbólico, por possuírem curvatura Gaussiana negativa, necessitam que sejam instaladas pré-trações nos cabos, para que a malha tenha rigidez suficiente para manter a sua geometria espacial.

Na prática, encontram-se várias maneiras de se introduzir a protensão na malha de cabos, quer seja através da aplicação de deslocamentos impostos às extremidades dos cabos por meio de esticadores ou através de carga de gravidade provisória.

No modelo numérico, a protensão pode ser introduzida através de deslocamentos prescritos aplicados aos pontos de suspensão dos cabos, através de uma força interna de tração pré instalada no elemento ou através de variação de temperatura, que produz aumento no comprimento dos elementos de cabos e, conseqüentemente, instala-se um estado de pré-tração neste elemento.

Foram testados os procedimentos de aplicação de deslocamentos prescritos aos pontos de suspensão e de instalação de força interna diretamente à nível de elemento. Os procedimentos forneceram resultados semelhantes, sendo que no segundo caso a convergência foi mais rápida, sendo por isso adotado.

As cargas externas de peso próprio, bem como a introdução da massa dos elementos para análise de vibrações livres, são aplicadas somente nos nós, definidos

ligações entre os cabos ortogonais da malha, já que se adotou o modelo retilíneo entre dois nós.

O carregamento total (protensão inicial + peso próprio) foi aplicado em duas etapas distintas. Aplicou-se, primeiramente, sobre a superfície inicial isenta de qualquer esforço, as protensões iniciais, obtendo-se os esforços e deformações relativos ao estado inicial de protensão definido no item II.4.4 (equações (II.27) e (II.28)). A seguir, após o equilíbrio de forças internas devido à protensão, aplicou-se o carregamento de peso próprio, obtendo-se os esforços e deslocamentos totais da estrutura. Em cada etapa do carregamento total foi aplicado o processo não linear iterativo.

III.2.3 Análise Dinâmica

Na análise dinâmica, visando a obtenção das frequências naturais e modos de vibração, utilizou-se o método do sub-espaco para o cálculo dos autovalores, com auxílio da subrotina Jacobi para resolução do problema de autovalor.

Foi resolvido o problema de vibração livre sob tensão inicial, em torno da configuração deformada após a ação das cargas estáticas:

$$\mathbf{K}\delta - \omega^2\mathbf{M}\delta = 0 \quad (\text{III.3})$$

onde: **K**: matriz tangente na configuração deformada (após a aplicação do carregamento estático);

M: matriz de massa discreta;

δ : matriz dos modos de vibração;

ω^2 : matriz diagonal ($n \times n$ graus de liberdade) do quadrado das frequências naturais.

III.3 PROGRAMA GERA

Para geração rápida das malhas necessárias aos estudos propostos, foi desenvolvido o programa GERA, em linguagem FORTRAN 77. Este programa fornece, basicamente a numeração e coordenadas dos nós e a numeração e conectividades dos elementos, a partir da equação do parabolóide hiperbólico. A numeração dos nós é iniciada pelos nós internos seguida pela numeração dos nós externos, o que facilita a impressão dos nós internos e externos separadamente (isto é necessário pois, sobre os nós internos e externos são aplicados diferentes tipos de carregamento, além das condições de contorno).

O programa GERA foi desenvolvido primeiramente para gerar malhas completas, com todos os nós e elementos. A partir desta versão, criou-se uma outra para geração de somente $1/4$ da malha que foi utilizada para as análises estáticas, com as devidas condições de simetria. A primeira versão foi utilizada nos problema de vibração livre da estrutura, em que é necessária a malha completa para identificação dos modos antissimétricos.

Quanto à geometria do seu contorno, o programa gera malhas com contorno retangular e elíptico, desde que se coloque convenientemente no programa as equações que definem esses contornos no plano.

Os dados de entrada para o programa GERA são (vide figura III.4):

- distância do cabo tensor externo ao centro da malha (d_1);
- distância do cabo suspenso externo ao centro da malha (d_2);
- número total de cabos tensores;
- número total de cabos suspensos;
- valor do semi-eixo maior e do semi-eixo menor (a e b respectivamente), para o caso de contorno elíptico, ou metade das dimensões da base e metade da altura, para o caso de contorno retangular.

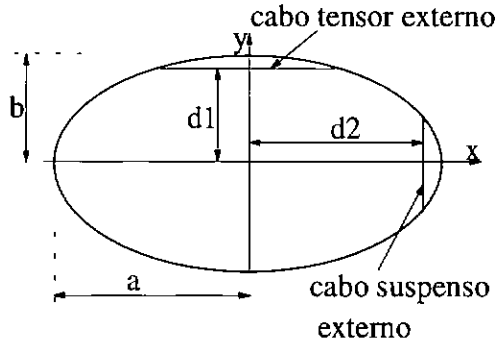


Figura III.4 Dados de entrada para o programa GERA

Para o caso de malhas com características não homogêneas, foi implementada uma subrotina para geração das propriedades dos materiais por faixa de incidência. Os dados necessários a esta subrotina são:

- número de faixas com propriedades diferentes para os cabos tensores;
- para cada faixa de cabos tensores de mesmas propriedades, a respectiva ordenada de início da faixa e as propriedades dos materiais;
- número de faixas com propriedades diferentes para os cabos suspensos;
- para cada faixa de cabos suspensos de mesmas propriedades, a respectiva ordenada de início da faixa e as propriedades dos materiais.

Foi ainda implementada a opção de geração dos elementos de contorno, caso seja necessário.

O algoritmo básico do programa GERA está ilustrado na figura II.5.

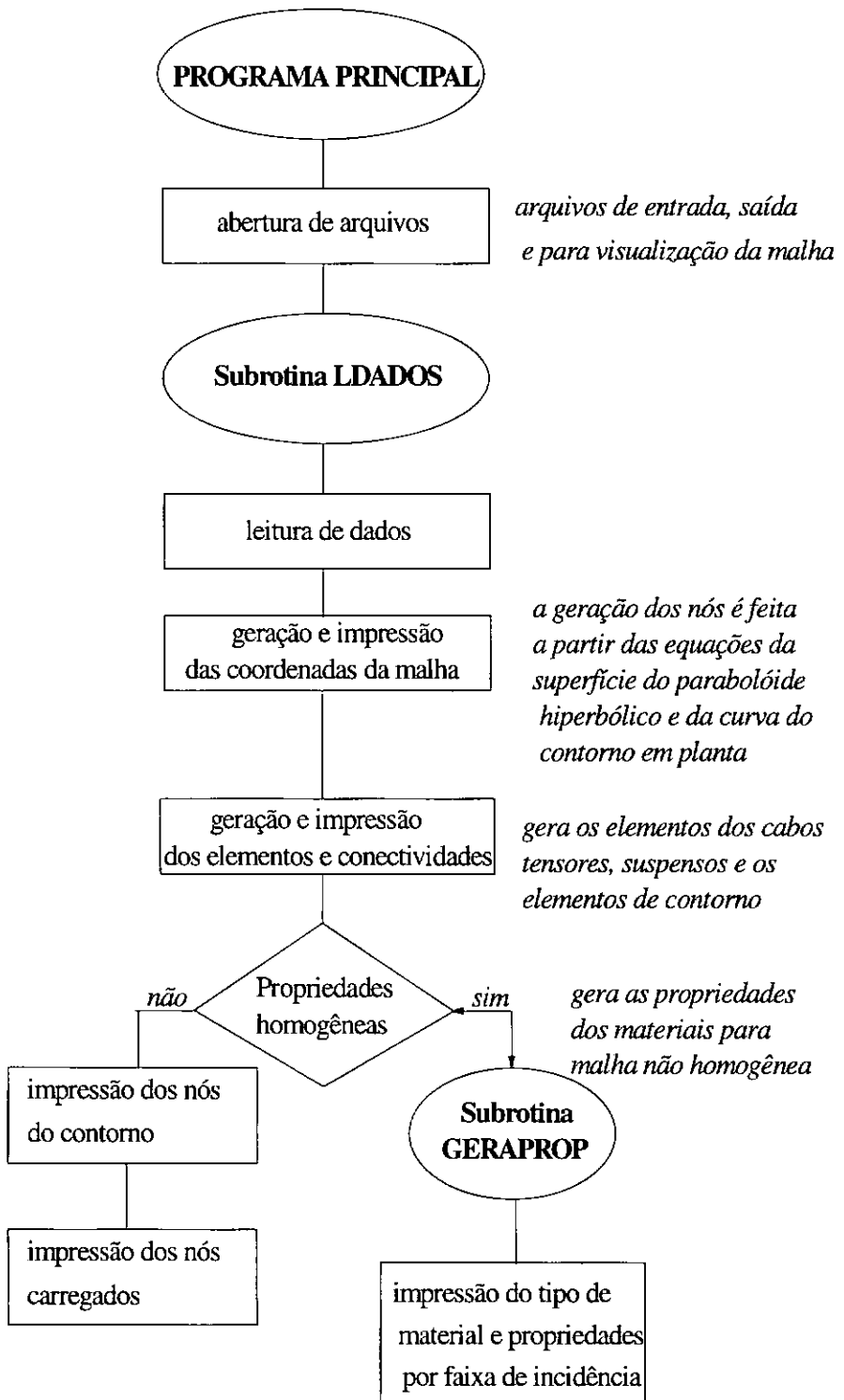


Figura III.5 Fluxograma da programa GERA

CAPITULO IV

COMPORTAMENTO ESTÁTICO

IV.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos da análise não linear, empregando-se o método dos elementos finitos, de uma malha de cabos protendidos ortogonais na forma de parabolóide hiperbólico.

Para analisar a influência isolada de cada elemento que compõe a estrutura (cabo, viga de bordo e pilar) e sabendo-se que a rigidez da malha de cabos é função, dentre outros fatores, da flexibilidade de seu contorno, foram considerados três diferentes situações de deformabilidade de seus bordos, a saber:

- *contorno rígido*: aquele em que os nós do contorno tem seus graus de liberdade totalmente impedidos. Objetiva-se, nesta análise, o estudo somente do comportamento da malha de cabos, que serão os únicos elementos a possuírem função estrutural.

- *contorno flexível*: neste contorno, analisou-se o comportamento da estrutura, cujos nós do contorno estão impedidos de transladar na direção vertical, constituída pela malha de cabos e pela viga de contorno. Nesta situação admite-se o caso extremo de pilares com rigidez lateral desprezível.

- *contorno semi - rígido*: é introduzido o elemento de conexão espacial que restringe, parcialmente, alguns dos graus de liberdade dos nós do contorno. A estrutura, neste caso, é analisada com todos os seus componentes estruturais.

Examinou-se também o efeito de procedimentos distintos de protensão inicial:

- aplicação de protensão ‘simultânea’ nas duas direções, isto é, tanto nos cabos tensores quanto nos cabos suspensos;
- aplicação de protensão numa única direção, isto é nos cabos tensores, conforme expressão proposta na seção II.7 desse trabalho.

Os resultados obtidos com a análise do comportamento não linear estático da estrutura via método dos elementos finitos estão apresentados no Capítulo IV. Os estudos são realizados a partir de um exemplo-base cujo pré-dimensionamento, apresentado no item IV.2, é feito utilizando-se a solução aproximada da teoria de ‘membrana’ para a determinação da protensão inicial e para a escolha dos cabos. São consideradas, então, as várias situações de deformabilidade do contorno, a influência das cargas externas, da protensão inicial e da rigidez axial dos cabos. Foram estudados os casos de malhas de cabos formando superfícies abatidas de contornos retangular e elíptico em planta. É ainda proposta neste capítulo uma distribuição não uniforme das propriedades da malha, visando a obtenção de uma malha mais econômica e de mesmo desempenho estrutural que a malha uniforme do exemplo-base.

IV.2 APRESENTAÇÃO DO EXEMPLO BASE E PRÉ-DIMENSIONAMENTO

Adotou-se um exemplo-base cujo pré-dimensionamento é feito neste item, utilizando-se a solução aproximada da teoria de ‘membrana’ exposta no item II.5.1. Na verdade o exemplo foi extraído da referência [2] mas a partir da geometria dada procedeu-se ao predimensionamento para obter os dados necessários, idealizando-se o carregamento, determinando a protensão e escolhendo os cabos.

Geometria

O exemplo a ser analisado é a cobertura em cabos na forma de parabolóide hiperbólico da figura IV.1, de contorno retangular em planta de dimensões $2a = 90$ m e $2b = 60$ m. Considera-se também o caso de contorno elíptico em planta tendo semi-eixos maior e menor as mesmas dimensões $2a$ e $2b$ do contorno retangular.

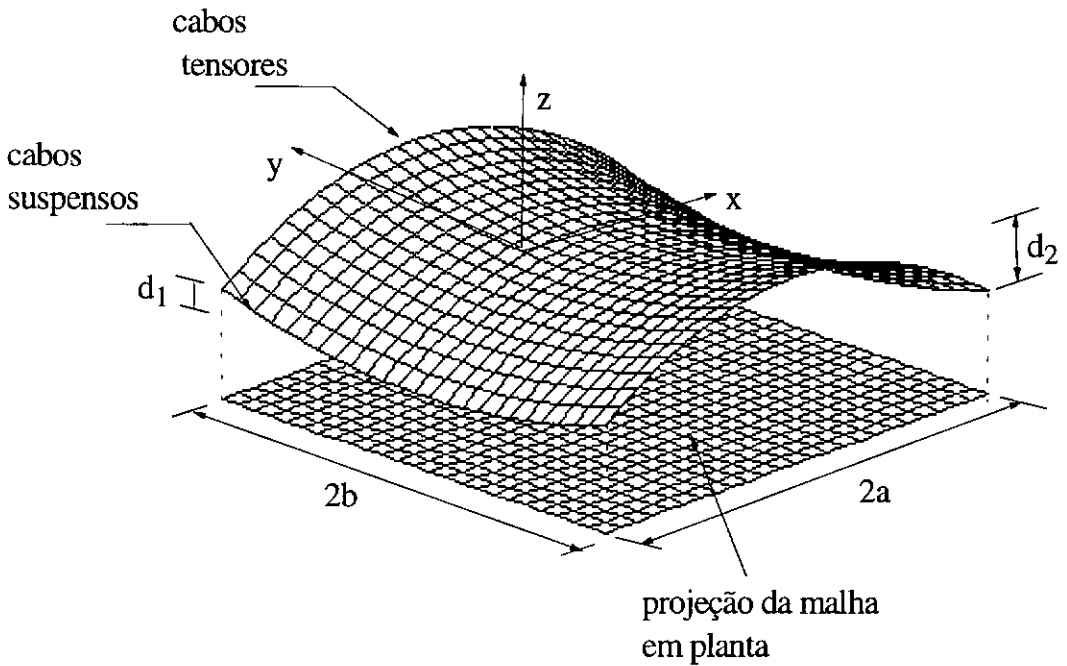


Figura IV.1.a- Ilustração da malha em forma de parabolóide hiperbólico e notações

A figura IV.1.b ilustra uma malha de cabos com pilares na forma de parabolóide hiperbólico de contorno elíptico e a figura IV.1.c a vista em planta.

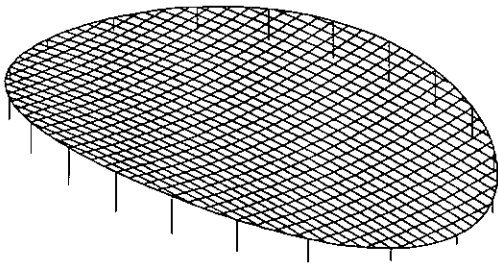


Figura IV.1.b Malha de cabos ancorados em anel de contorno em planta e pilares.

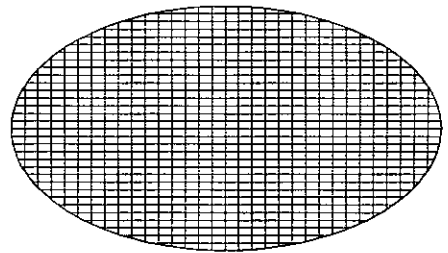


Figura IV.1.c Vista em planta do anel de contorno.

A equação que define o estado inicial é:

$$z = -\frac{8}{2025}x^2 + \frac{3,55}{900}y^2 \quad (\text{IV.1})$$

sendo $d_1 = 8$ m e $d_2 = 3,55$ m. Trata-se de uma superfície abatida com $d_1/2a = 9\%$ e $d_2/2b = 6\%$, menores que $1/8$ (item II.4).

As curvaturas são, pela equação (II.34): $k_x = -7,9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ e $k_y = 7,9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.

Cargas

Quanto à estimativa das cargas permanentes (verticais), serão considerados para o cálculo:

telha dupla termo acústica de alumínio	$2 \times 47 \text{ N/m}^2$
manta bidim (4 mantas por telha)	$4 \times 0,6 \text{ N/m}^2$
revestimento externo com camada de 20 mm de poliuretano com 35 kgf/m^3	7 N/m^2
sub-estrutura de apoio das telhas	5 N/m^2
peso próprio dos cabos + peso próprio dos grampos de ligação + peso próprio dos 'clips' para amarração dos cabos	150 N/m^2
total	$280 \text{ N/m}^2 \cong 300 \text{ N/m}^2$

A carga externa vertical uniformemente distribuída adotada pela associação das sobrecargas acima descritas mais o peso dos cabos e elementos de ligação, foi de 300 N/m^2 ou $0,3 \text{ kN/m}^2$.

A figura IV.1.d mostra o esquema do sistema de vedação que compõe a cobertura.

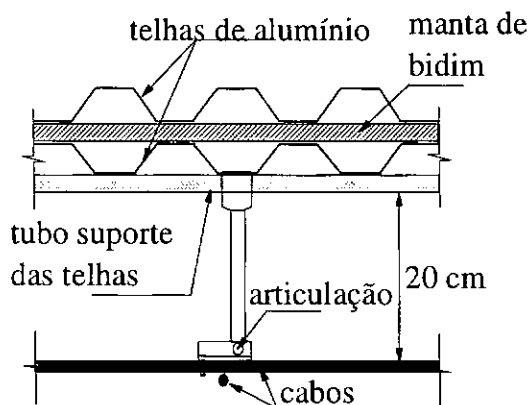


Figura IV.1.d Detalhe do revestimento da cobertura

Casos de carregamento

A protensão, aplicada como uma força interna pré-instalada no elemento e as cargas externas verticais, aplicadas nos nós, são consideradas para os 4 casos de carregamento analisados:

- *caso 1*: protensão somente nos cabos tensores, sem carga vertical externa;
- *caso 2*: protensão somente nos cabos tensores, com carga vertical externa;
- *caso 3*: protensão nos cabos tensores e suspensos, sem carga vertical externa;
- *caso 4*: protensão nos cabos tensores e suspensos, com carga vertical externa.

Protensão

O **caso 3** caracteriza o estado inicial conforme definido no item II.4.4, sendo a geometria aquela dada pela equação (IV.1). As forças de protensão aplicadas se equilibram de tal forma que a estrutura mantém sua geometria de montagem. Para a carga vertical de $0,3 \text{ kN/m}^2$, a protensão inicial mínima aplicada aos cabos, necessária para manter a cobertura na forma de parabolóide hiperbólico nos casos 3 e 4, será estimada com auxílio do método exposto no item II.5.1 para a obtenção dos valores de H_{xp} e H_{yp} .

Neste processo, os valores das constantes serão, pela equação (II.49):

$\rho = k_y/k_x = 1$, $\varphi = (EA)_y/(EA)_x$, tomado igual a 2, considerando-se que os cabos suspensos (y) terão acréscimo de força e os tensores decréscimo de força.

Pelas equações (II.50), ou com auxílio do gráfico da figura II.8, as frações parciais do carregamento são:

$$\chi_x = 0,33, \quad \chi_y = 0,67.$$

Assim sendo, os valores dos acréscimos de força, nas duas direções ortogonais, serão calculados utilizando-se as equações (II.51), sendo p_z a carga vertical de $0,3 \text{ kN/m}^2$.

$$H_{xp} = -12,5 \text{ kN / m}, \quad H_{yp} = 25 \text{ kN / m}.$$

O decréscimo de força dos cabos tensores H_{xp} para carga igual a $0,3 \text{ kN/m}^2$ representa a mínima força de protensão a ser aplicada de maneira a evitar que estes cabos fiquem frouxos sob este carregamento. Admitindo ainda a existência de outras cargas variáveis e carga de vento e para que exista uma folga de protensão para evitar afrouxamento dos cabos, foi adotado:

$$H_{xp} = H_{yp} = 120 \text{ kN / m}$$

Essas protensões iniciais satisfazem plenamente a equação (II.37), que relaciona as forças de protensão iniciais com a geometria do parabolóide hiperbólico. Para o exemplo tem-se que as forças de protensão devem ser iguais nas duas direções.

Nos **casos 1 e 2**, aplica-se a protensão nos cabos tensores contra os cabos suspensos, e estes últimos se alongam ficando também protendidos. Este é o procedimento adotado na prática para introduzir a protensão na malha de cabos. Entretanto, com este procedimento a malha já não satisfaz à geometria de montagem devido principalmente aos deslocamentos verticais de seus nós. Com objetivo de se obter uma configuração inicial de protensão equivalente ao caso 3 ($H_{xp} = H_{yp} = 120 \text{ kN / m}$), a força de protensão inicial a ser aplicada aos cabos tensores foi calculada pelo processo apresentado no item II.7.

Neste processo, utilizando as equações do problema do cabo isolado, a ação dos cabos tensores sobre os suspensos é aproximada por uma carga vertical uniformemente distribuída ao longo do vão. O valor da flecha d_{2f} , sob ação deste carregamento, para os cabos suspensos é obtida pela resolução de uma equação biquadrática resultante da

combinação das equações (II.13) e (II.66), que relacionam o alongamento do cabo com a força resultante nos cabos suspensos que se objetiva obter (120 kN/m). A variável desta equação biquadrática é a própria flecha d_{2f} , sendo $d_2 = 3,55$ m.

Seguindo a marcha indicada no item II.7, foram encontrados os seguintes dados:

$$d_{2f} = 3,78 \text{ m}$$

$$\Delta d = 0,23 \text{ m}$$

$$q = 1,00 \text{ kN / m}^2$$

$$\Delta L_1 = -0,10 \text{ m}$$

$$P = 55,66 \text{ kN / m}$$

$$H = 131,21 \text{ kN / m}$$

A força de protensão a ser aplicada a estes cabos é obtida pela combinação dos esforços P e H (equação (II.71)). Assim sendo foi aplicada uma força inicial de 187 kN/m para os cabos tensores que, após a redistribuição de forças deve resultar aproximadamente em 120 kN/m nas duas direções.

Cabos

Os cabos tensores são protendidos com 120 kN/m. Sob ação de cargas de gravidade há um decréscimo desta força. Admitindo que sob ação de sucção de vento possa ocorrer um acréscimo de força nestes cabos de 30% se chegaria a 156 kN/m. Admitindo ainda um espaçamento de 1,8 m entre os cabos tensores a máxima força de serviço seria: $156 \times 1,8 = 280$ kN.

O dimensionamento feito limitando-se a tensão de serviço a 45% da tensão de ruptura [3] conduziria à escolha do cabo pré esticado da classificação 6 x 25 Filler, com alma de aço independente (AACI), diâmetro nominal de $\phi 1 \frac{3}{4}$ " da CIMAF [24], com a seguinte propriedade:

$$(EA) = \frac{1,2 \times E \times A}{1,8} = \frac{1,2 \times 10^4 \times 920,23}{1,8} = 6,13 \times 10^6 \text{ kN/m}$$

A escolha dos cabos com alma de aço se baseou no fato de que estes garantem maior resistência aos amassamentos e aumentam a resistência à tração, e a composição 6 x 25 Filler garantem flexibilidade ao cabo de aço, pois a sua flexibilidade está na proporção inversa ao diâmetro dos arames [24].

Irvine [2] apresenta exemplo com a geometria da equação (IV.1) sob carga de $0,3 \text{ kN/m}^2$, protensão inicial de 120 kN/m e propriedade $(EA)_x = 5 \times 10^4 \text{ kN/m}$. Verifica-se, pelo dimensionamento efetuado que a propriedade $(EA)_x$ supera as necessidades do exemplo, o que conduzirá a uma malha bastante rígida. Com o intuito de se fazer um estudo comparativo de respostas analíticas e numéricas adotou-se para o exemplo-base $(EA)_y = 2(EA)_x$ conforme já mencionado no subitem **Protensão** ($j=2$).

Tem-se então:

$$(EA)_x = 5 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

$$(EA)_y = 10^5 \text{ kN/m}$$

A figura IV.1.e ilustra a seção dos cabos compatíveis com estas propriedades de acordo com o fabricante CIMAF [24].

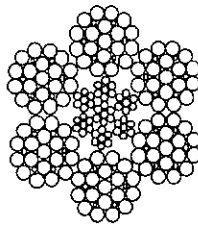


Figura IV.1.e Seção transversal dos cabos [24]

IV.3 CONTORNO RÍGIDO

Apresenta-se, nos itens subsequentes, um estudo paramétrico do comportamento estático da malha de cabos quando se faz variar seu peso próprio, o nível de protensão inicial e a rigidez dos cabos. Apresenta-se ainda a distribuição de esforços nos cabos para diversos níveis de simplificações na malha, além de uma comparação entre os resultados obtidos de modelos analíticos e modelo numérico adotado.

IV.3.1 Comparação entre os Resultados Teóricos e do Modelo Numérico

Neste item serão comparados os resultados obtidos pelas soluções analíticas de Frei Otto, Irvine e pela análise não linear com o método dos elementos finitos. Foi considerado somente o caso 4 de carregamento com:

$$p = 0,3 \text{ kN/m}^2;$$

$$(EA)_x = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2, (EA)_y = 10^5 \text{ kN/m}^2;$$

$$H_{x0} = H_{y0} = 120 \text{ kN/m}.$$

A tabela IV.1 mostra os valores obtidos pelas soluções aproximadas desenvolvidas por Frei Otto (equações (II.49) a (II.51)), e Irvine (equações (II.55) a (II.58)), além dos valores obtidos pelo modelo numérico para as grandezas H_{xp} , H_{yp} e w , onde H_{xp} e H_{yp} são os acréscimos das componentes horizontais H_x e H_y das forças nos cabos devidos à carga externa e w é o deslocamento vertical do nó central.

De acordo com a solução analítica de Frei Otto, o valor estimado de deslocamento médio no centro da malha, pela equação (II.52), é:

$$w_m = 0,033 \text{ m}.$$

E o valor corrigido, pela equação (II.53):

$$w_0 = 1,2 w_m = 0,04 \text{ m.}$$

O cálculo dos esforços H_{xp} e H_{yp} foi apresentado no item IV.2.

Os valores obtidos pela solução apresentada por Irvine foram extraídos da referência [2]. Nesta tabela são comparados os valores aproximados e corrigidos fornecidos pelo autor. As grandezas aproximadas são aquelas obtidas pela aproximação dos esforços adicionais, devido ao carregamento p , constantes ao longo do vão para cada direção considerada.

Os resultados obtidos utilizando-se o método dos elementos finitos, em termos de esforços são apresentados para os cabos tensor e suspenso centrais, e na forma de médias considerando os cabos situados entre o centro e o quarto do vão nas duas direções e também considerando a totalidade dos cabos em cada direção.

Nesta tabela os valores negativos de força indicam esforço de compressão e os valores negativos de deslocamento indicam que este é no sentido descendente (vide notação na figura IV.1).

Tabela IV.1 Comparação entre os valores obtidos pelas teorias de Frei Otto e Irvine e pelo método dos elementos finitos

		H_{xp} (kN / m) cabos tensores	H_{yp} (kN / m) cabos suspensos	w (m)
<i>Frei Otto</i>		-12,5	25	-0,04
<i>Irvine aproximado</i>		-15,0	25	-0,05
<i>Irvine corrigido</i>		-20,0	35	-0,05
<i>MEF</i>	<i>cabo central</i>	-13,2	24	-0,041
	<i>cabos até a/2 e b/2</i>	-12,91	24,26	
	<i>todos os cabos</i>	-10,77	22,38	

Verifica-se que em termos de deslocamentos os três resultados se comparam muito bem, assim como para acréscimo de esforços nos cabos suspensos H_{yp} . Já os valores de H_{xp} encontrados pela solução corrigida de Irvine são bem maiores que os outros dois resultados.

Em relação à ordem de grandeza os deslocamentos parecem bem pequenos considerando uma estrutura de cabos com vãos de 60 m e 90 m. Mas como já mencionado no item de predimensionamento, trata-se de uma malha cujos cabos têm rigidez EA bem superior à necessária para o carregamento considerado.

Para o caso 1, em que a protensão, igual a 187 kN/m, é aplicada somente aos cabos tensores, resultam esforços iguais a 125 kN/m nas duas direções, valor muito próximo ao desejado, igual a 120 kN/m e adotado no cálculo aproximado proposto no item II.7.

IV.3.2 Estudo Paramétrico

No estudo paramétrico do parabolóide hiperbólico, serão mostrados separadamente os resultados obtidos com a variação do carregamento vertical externo (p), da protensão inicial (H_0) e da rigidez axial (EA) para o contorno rígido e retangular e malha uniforme.

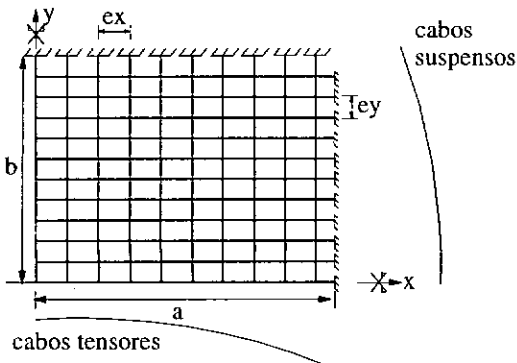


Figura IV.2.a Projeção em planta de $1/4$ da malha de cabos

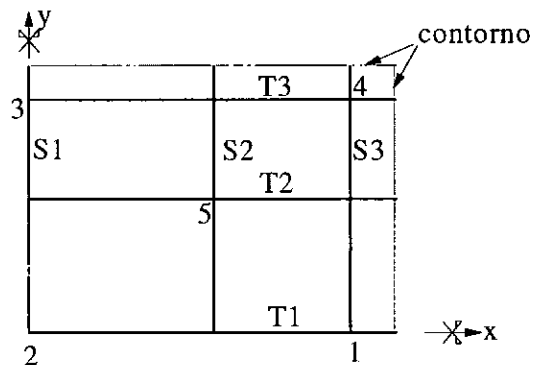


Figura IV.2.b Nós e cabos analisados

A malha analisada está mostrada na figura IV.2.a. Na figura IV.2.b estão mostrados a posição relativa de alguns nós e cabos da malha que serão utilizados para o estudo paramétrico. Foi feita a análise para $\frac{1}{4}$ da malha uma vez que esta é simétrica aos eixos x e y, tanto em relação à sua geometria quanto em relação aos carregamentos aplicados.

IV.3.2.1 *Variação do Carregamento Externo p*

Os resultados obtidos com a variação da carga externa p, sendo p uma carga vertical por unidade de área, estão mostrados nas figuras IV.3, para:

$$\text{caso 2: } H_{x0} = 187 \text{ kN/m};$$

$$\text{caso 4: } H_{x0} = H_{y0} = 120 \text{ kN/m};$$

$$(EA)_x = 5 \times 10^4 \text{ kN/m};$$

$$(EA)_y = 10^5 \text{ kN/m}.$$

Os resultados são apresentados na forma adimensional sendo as abcissas dos gráficos a relação $p \cdot 2a / (EA)_x \cdot 10^3$. As figuras IV.3.a e IV.3.c mostram a variação dos deslocamentos verticais em diversos pontos da estrutura com o carregamento, nos casos 2 e 4 respectivamente. Estes valores são mostrados na forma adimensional $w/2a$. As figuras IV.3.b e IV.3.d mostram a variação da razão nos cabos H/H_0 , onde $H = H_0 + H_p$, sendo H_0 a protensão inicial e H_p a força resultante nos cabos com aplicação do carregamento.

Uma característica importante desta superfície é a de que os cabos tensores perdem protensão após a aplicação da carga externa e o contrário ocorre para os cabos suspensos, que apresentam acréscimo de força axial. Isso se deve à própria geometria da superfície e que será mostrada com mais evidência mais adiante.

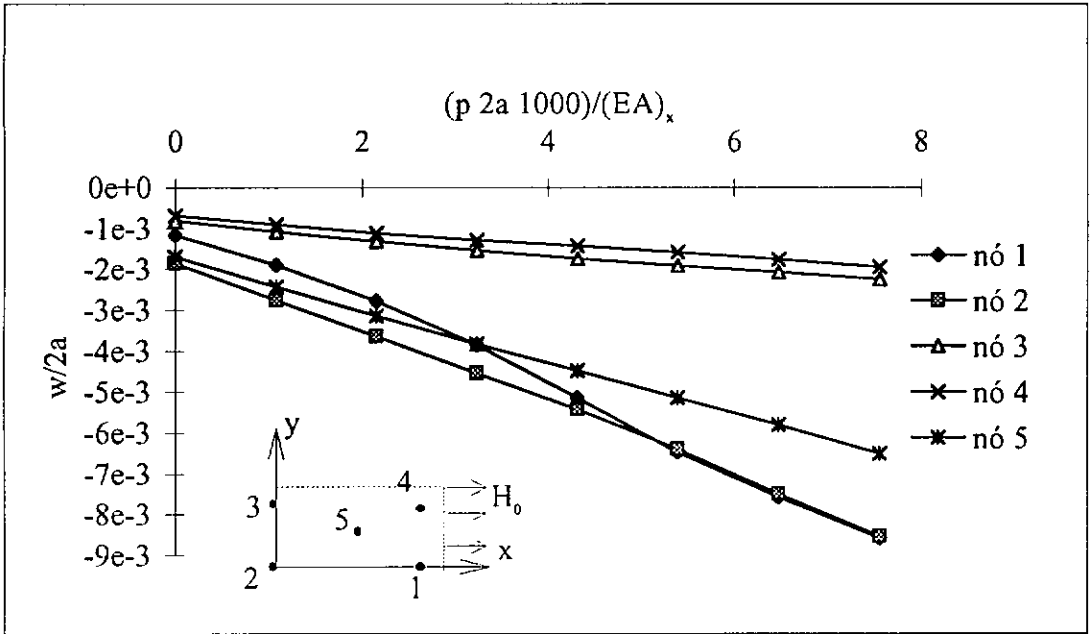


Figura IV.3.a Variação dos deslocamentos verticais em alguns nós da malha com a carga externa, caso 2

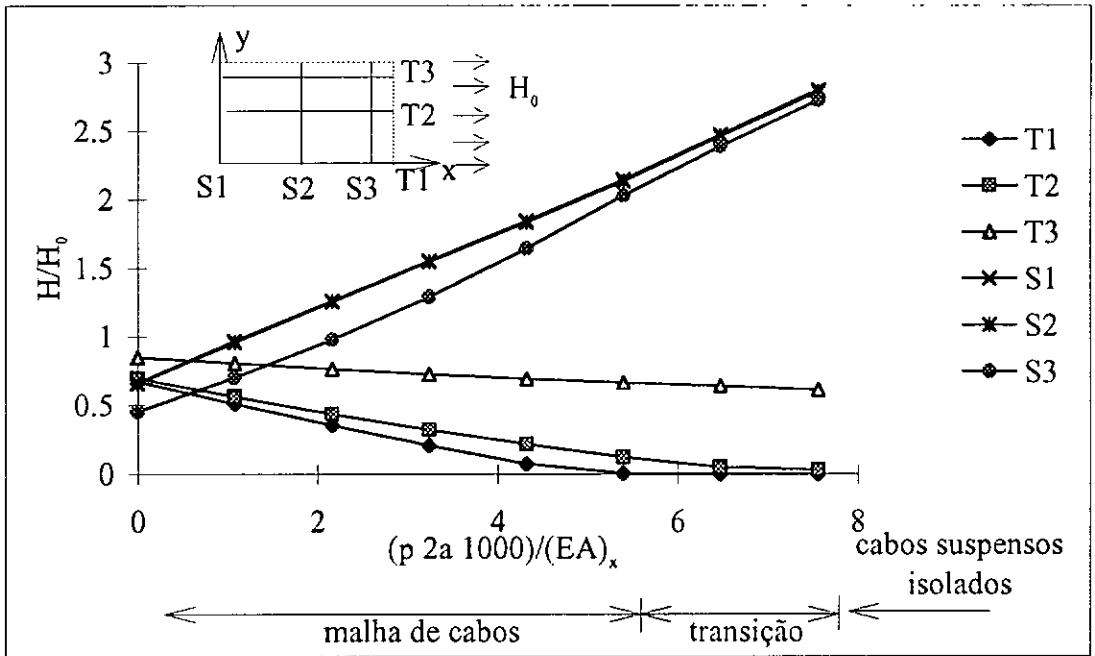


Figura IV.3.b Variação da força em alguns cabos da malha com a carga externa, caso 2

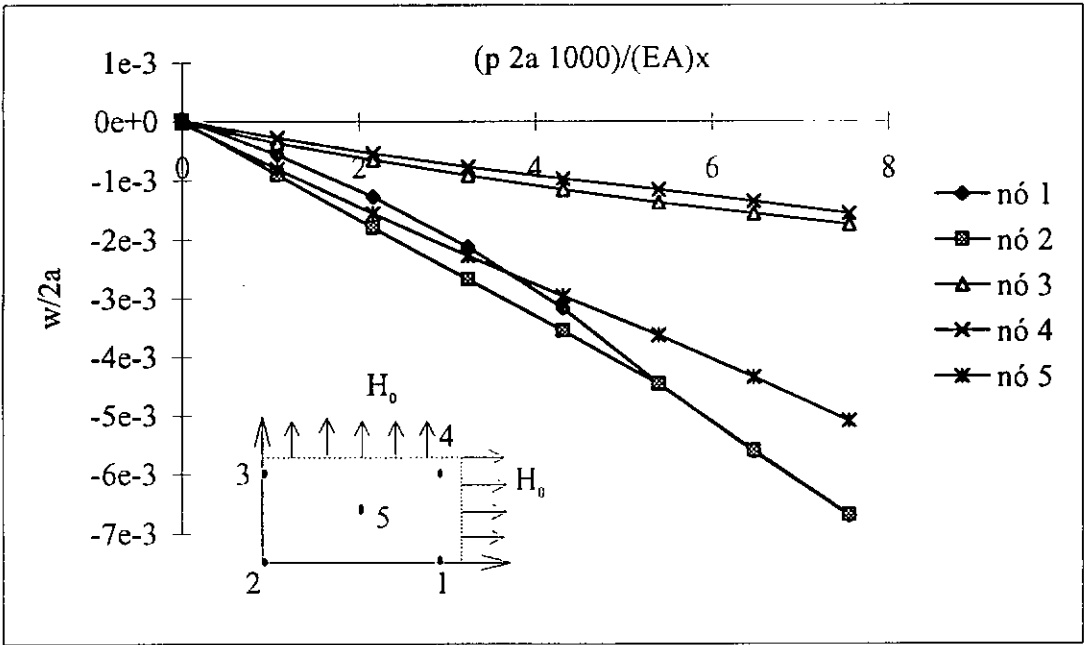


Figura IV.3.c Variação dos deslocamentos verticais em alguns nós da malha com a carga externa, caso 4

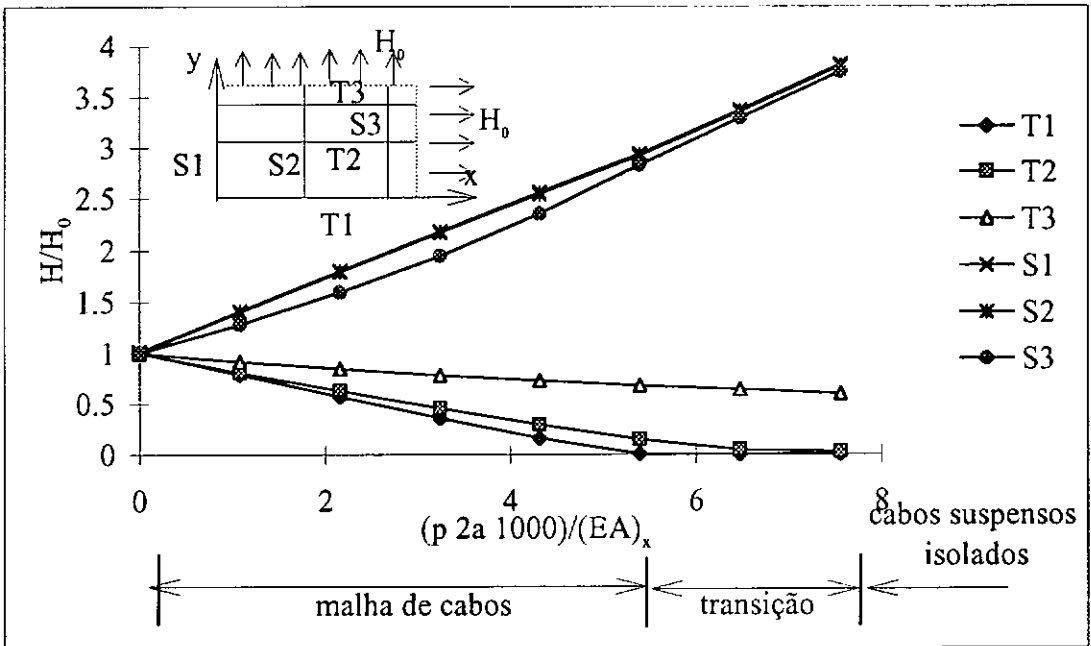


Figura IV.3.d Variação da força em alguns cabos da malha com a carga externa, caso 4

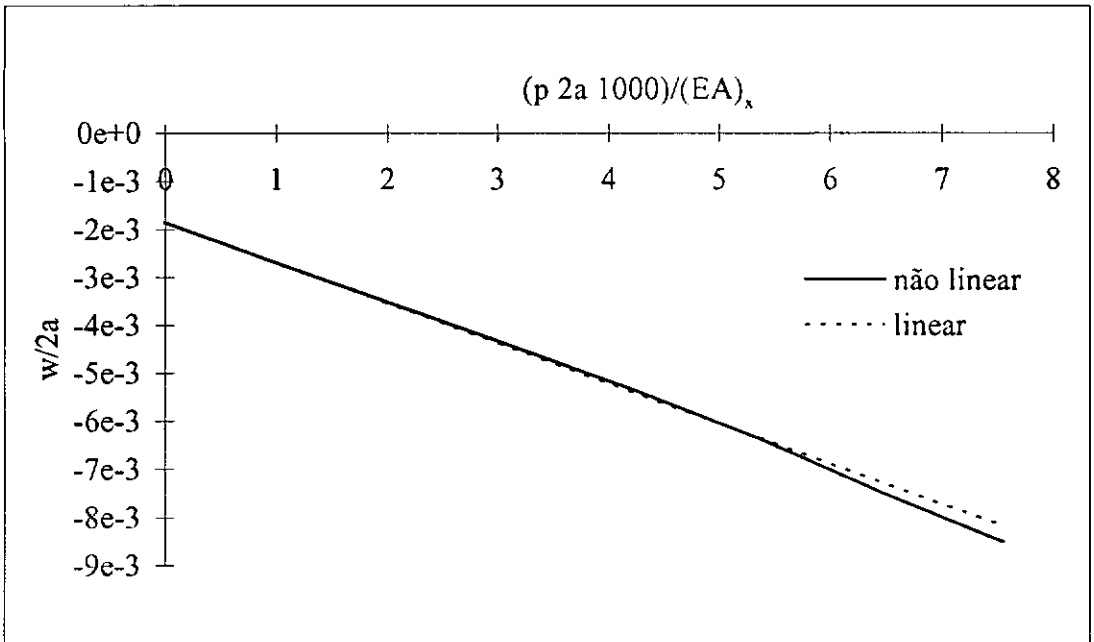


Figura IV.3.e Variação do deslocamento no centro da malha, caso 2

Na figura IV.3.a, para o caso 2, percebe-se que a estrutura, para a carga de peso nula, já possui deslocamentos iniciais devidos à protensão, o que não se verifica na figura IV.3.c, caso 4, em que para a carga de peso nula os deslocamentos são nulos. Porém, o acréscimo de deslocamento devido à aplicação das cargas é o mesmo para os dois casos e os comportamentos estruturais são semelhantes.

As figuras IV.3 podem ser analisadas em três etapas distintas de comportamento. A primeira é aquela em que todos os cabos (tensores e suspensos) se mantêm tracionados após a aplicação da carga externa e a estrutura se comporta como uma malha de cabos. A partir da abcissa 5,4 onde começa a segunda etapa, denominada transição, alguns cabos tensores ficam frouxos, começando pelos cabos tensores próximos ao centro seguindo-se os demais na direção do contorno. Quando um cabo fica frouxo, este tem sua rigidez anulada, não possuindo nenhuma função estrutural e os esforços são absorvidos pelos cabos suspensos. Observa-se que a medida que os cabos tensores ficam frouxos (etapa 2 nas figuras IV.3.b e IV.3.c) os valores dos esforços nos cabos suspensos se aproximam. A última etapa ocorre quando os cabos tensores da região central da malha estão frouxos, não tendo nenhuma função estrutural. Nesta condição, praticamente os cabos suspensos são os únicos a trabalharem efetivamente para manter o equilíbrio da estrutura.

Do gráfico de deslocamento do nó central x carga, figuras IV.3.e, observa-se, para carregamento uniformemente distribuído e contorno rígido que o comportamento é linear.

IV.3.2.2 Variação da Força de Protensão Inicial

Os resultados obtidos quando se varia a protensão inicial na malha estão mostrados nas figura IV.4, para:

$$p = 0,3 \text{ kN/m}^2; (EA)_x = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}; (EA)_y = 10^5 \text{ kN/m}.$$

Os resultados são mostrados na forma adimensional sendo as abcissas dos gráficos a relação $H_0/(EA)_x$. As figuras IV.4.a e IV.4.c mostram a variação dos deslocamentos verticais na forma adimensional $w/2a$.

Lembrando-se que o caso 2 refere-se à situação de protensão aplicada aos cabos tensores, em que não se mantem a geometria do parabolóide hiperbólico, observamos na figura IV.4.a que o acréscimo desta protensão produz deslocamentos verticais crescentes com discreta não linearidade para uma mesma carga vertical. Na verdade estes acréscimos de deslocamentos ocorrem na fase de protensão e são bem maiores que os deslocamentos causados pela aplicação do carregamento externo. Já no caso 4, em que a protensão é aplicada nas duas direções e há manutenção da geometria na protensão, a figura IV.4.c ilustra o enrijecimento da malha, com deslocamentos menores para valores crescentes de protensão (exceto para o nó central). Verifica-se entretanto, que para este caso de carga uniforme aumentar a protensão com objetivo de enrijecer a malha não parece uma medida eficiente já que os decréscimos de deslocamentos são proporcionalmente pequenos.

Os estudos aqui apresentados não levam em conta a influência das curvaturas da superfície. No estudo desenvolvido por Buchholdt [3], para uma malha circular em planta, mostra-se que para uma certa faixa de valores da curvatura, a protensão pode influir na rigidez da estrutura.

Uma característica interessante desta estrutura é que para baixas protensões iniciais o deslocamento no quarto do vão (nó 5) é maior que no centro da malha (nó 2) e o contrário ocorre para as protensões elevadas. Observa-se também que, para este caso, os deslocamentos do nó 5 para várias protensões é praticamente constante.

As figuras IV.4.b e IV.4.d mostram a variação do acréscimo de força nos cabos na forma adimensional H_p/H_0 , sendo H_0 a protensão inicial e H_p a força resultante nos cabos com aplicação do carregamento.

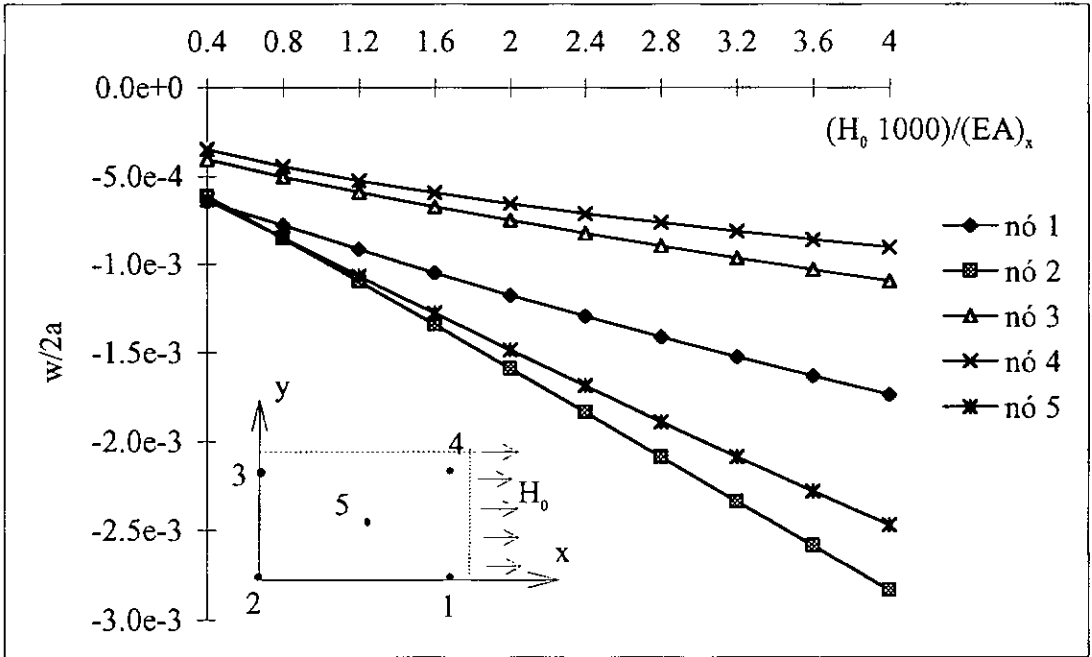


Figura IV.4.a Variação dos deslocamentos verticais totais em alguns nós da malha com a protensão inicial, caso 2

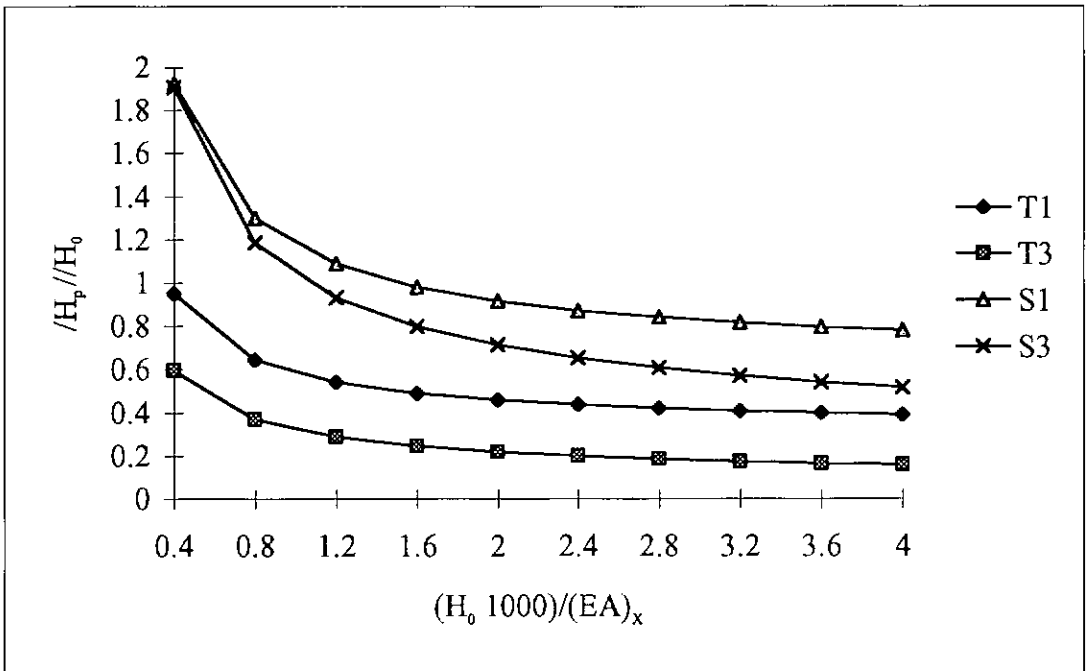


Figura IV.4.b Variação da força devido à ação da carga externa em alguns cabos da malha com a protensão inicial, caso 2

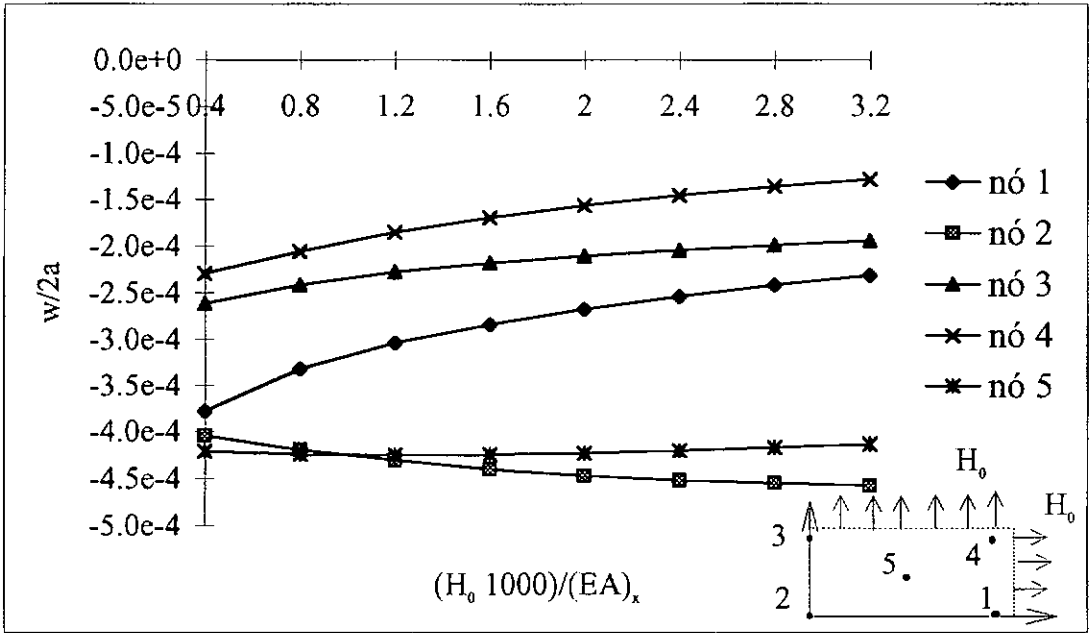


Figura IV.4.c Variação dos deslocamentos verticais em alguns nós da malha com a protensão inicial, caso 4

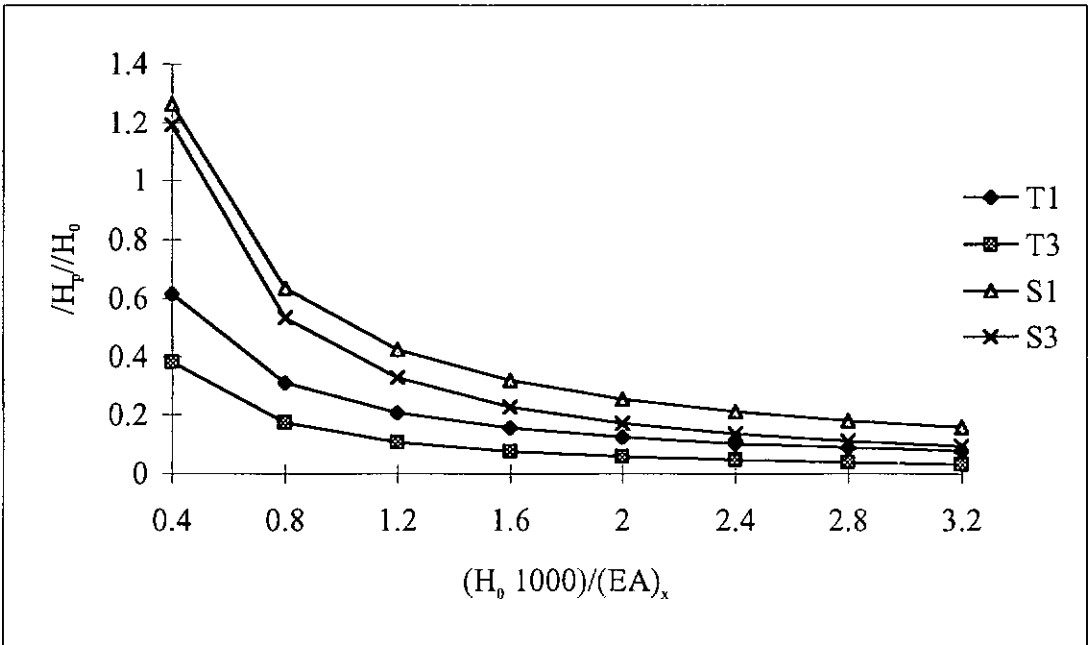


Figura IV.4.d Variação da força em alguns cabos da malha com a protensão inicial, caso 4

Por essas figuras, percebe-se que quanto maior a protensão inicial, menor é a influência das cargas externas sobre a estrutura pois a relação H_p/H_0 tende a um valor constante.

O valor mínimo da protensão inicial foi de 20 kN/m, para o qual todos os cabos tensores continuam tracionados sob ação de uma carga $p = 0,3 \text{ kN/m}^2$.

IV.3.2.4 *Variação da Rigidez dos Cabos*

As figuras IV.5 mostram o comportamento da estrutura quando se faz variar a rigidez dos cabos mantendo, constantes os valores de:

$$H_{x0} = H_{y0} = 120 \text{ kN/m}; p = 0,3 \text{ kN/m}^2;$$

Esta análise foi feita para o caso 4 onde as rigidezes axiais (EA) dos cabos tensores e suspensos foram variadas proporcionalmente. No eixo das abcissas estão os valores de $EA/EA_{original}$ onde EA é a nova rigidez adotada e $EA_{original}$ é a rigidez, já definida anteriormente, com valores para $(EA)_x = 5 \times 10^4 \text{ kN/m}$ e $(EA)_y = 10^5 \text{ kN/m}$.

A rigidez axial do cabos, ao contrário da protensão tem grande influência na rigidez da malha. Os deslocamentos variam de forma não linear com a rigidez, como é visto na figura IV.5.a, para o ponto no centro da malha, na forma adimensional $w/2a$, tendendo para um patamar, o que indica um limite na ganho de rigidez da malha a partir do acréscimo de rigidez axial dos cabos.

Este efeito aqui verificado possui relevância também para outras curvaturas, principalmente menores do que a deste exemplo.

Pela figura IV.5.b, onde está mostrada a variação da componente horizontal da força total nos cabos após aplicação da carga vertical (H) em relação à protensão inicial aplicada (H_0), na forma adimensional H/H_0 , verifica-se que H permanece constante com o acréscimo de EA.

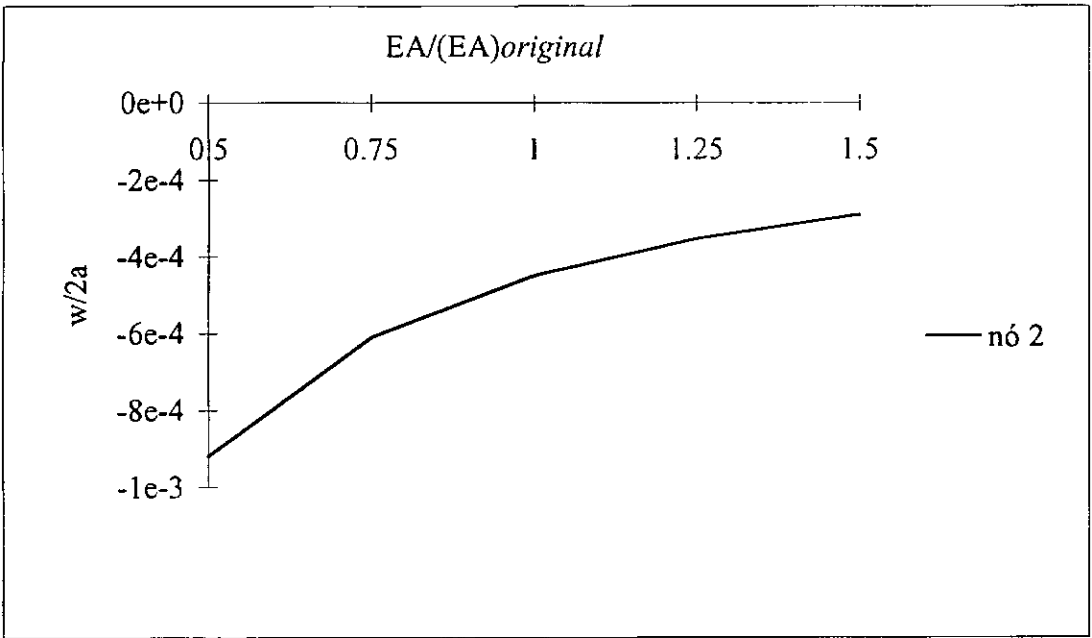


Figura IV.5.a Variação do deslocamento vertical do nó central com a rigidez (EA) da malha, caso 4

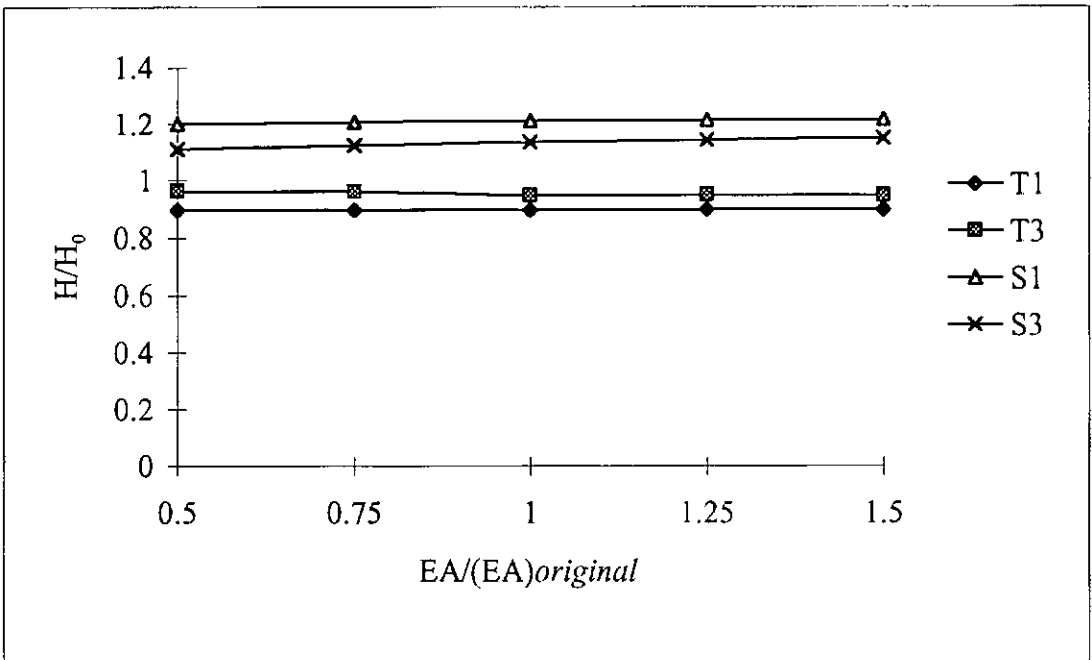


Figura IV.5.b Variação da força em alguns cabos da malha com a rigidez (EA) da malha, caso 4

IV.3.3 Distribuição de Esforços na Malha de Cabos

Esta análise tem por objetivo estudar a distribuição de esforços na malha nos casos de contornos retangular e elíptico, para os 4 casos de carregamento.

A figura IV.6 mostra a distribuição de esforços na malha de contorno retangular, onde estão superpostos os casos de carregamento 1 e 2, em que a protensão é aplicada somente aos cabos tensores, e 3 e 4, em que a protensão é aplicada nos dois sentidos. Os parâmetros considerados para esta análise foram:

$$\text{casos 1 e 2: } H_{x0} = 187 \text{ kN/m,}$$

$$\text{casos 3 e 4: } H_{x0} = H_{y0} = 120 \text{ kN/m}^2;$$

$$p = 0,3 \text{ kN/m}^2, (EA)_x = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m e } (EA)_y = 10^5 \text{ kN/m.}$$

Nestas figuras, as forças horizontais são mostradas por unidade de comprimento. Os resultados são mostrados na forma adimensional, sendo as ordenadas dos gráficos a relação entre as componentes horizontais da força final H e da força de protensão inicial H_0 . Essa relação H/H_0 é mostrada para os diversos cabos tensores ao longo da direção y (figuras a) e, para os cabos suspensos, ao longo da direção x (figuras b).

Nas figuras IV.6, percebe-se claramente que ocorre nos cabos tensores um decréscimo de força de protensão inicial quando se aplica as cargas externas, o contrário ocorrendo para os cabos suspensos, em que ocorre um acréscimo de força em relação à protensão inicial após aplicação das cargas externas.

Um outro aspecto importante a ser observado é que a distribuição de esforços na malha não é uniforme e essa característica é mais pronunciada para os casos 1 e 2. Essa característica só não é observada para o caso 3, onde são protendidos os cabos tensores e suspensos sem carga externa, pois este caso representa o estado inicial de protensão, em que a estrutura mantém a geometria inicial. A não uniformidade é verificada tanto para o contorno retangular quanto para o elíptico em planta (figuras IV.7).

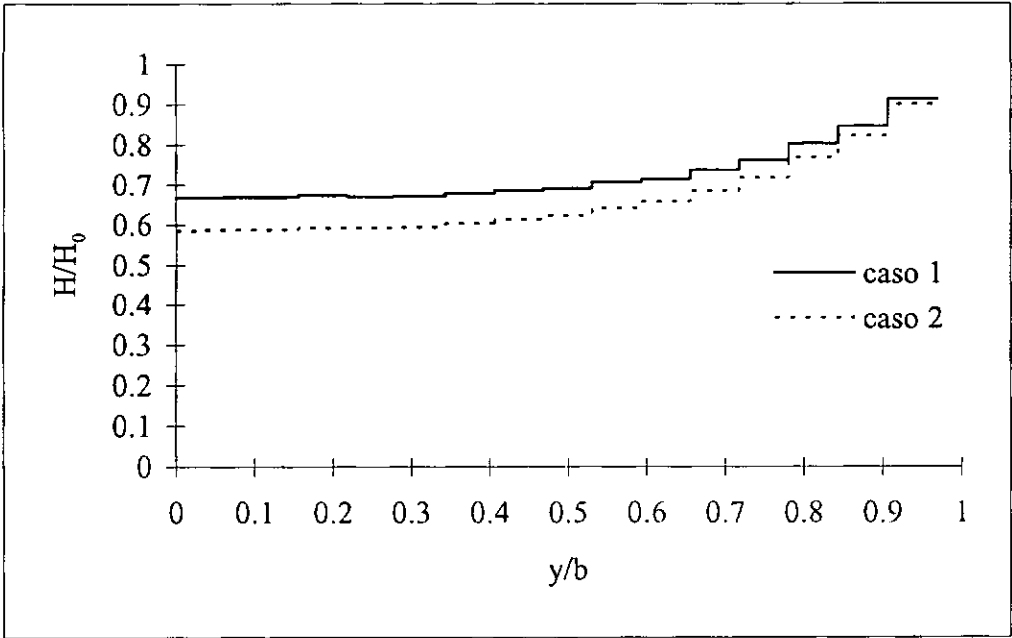


Figura IV.6.a Distribuição de esforços na malha de cabos para os cabos tensores e superposição dos casos de carregamento 1 e 2

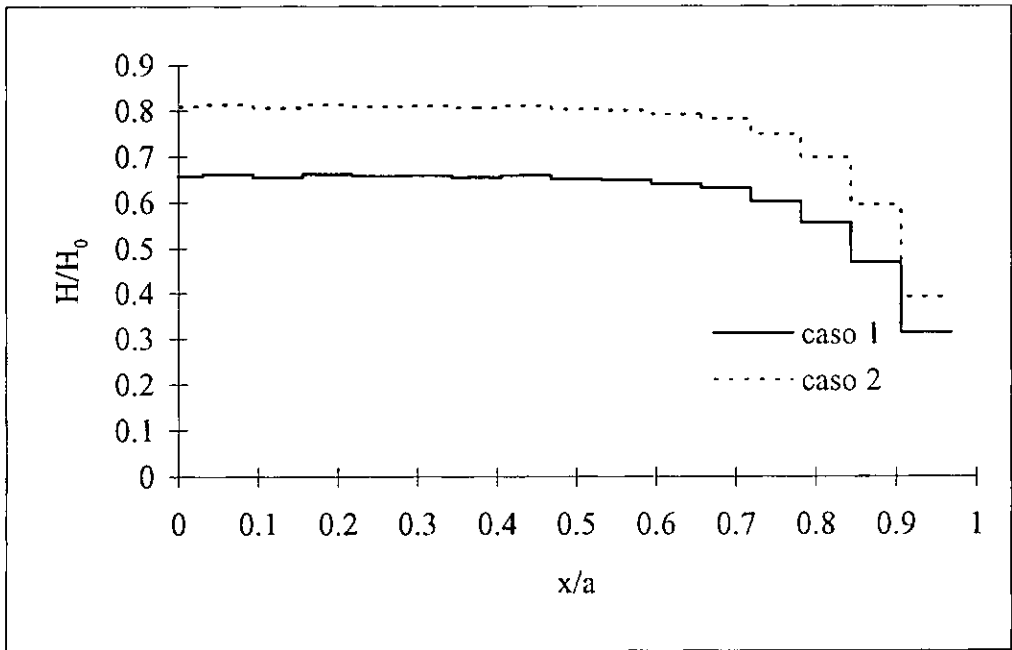


Figura IV.6.b Distribuição de esforços na malha de cabos para os cabos suspensos e superposição dos casos de carregamento 1 e 2

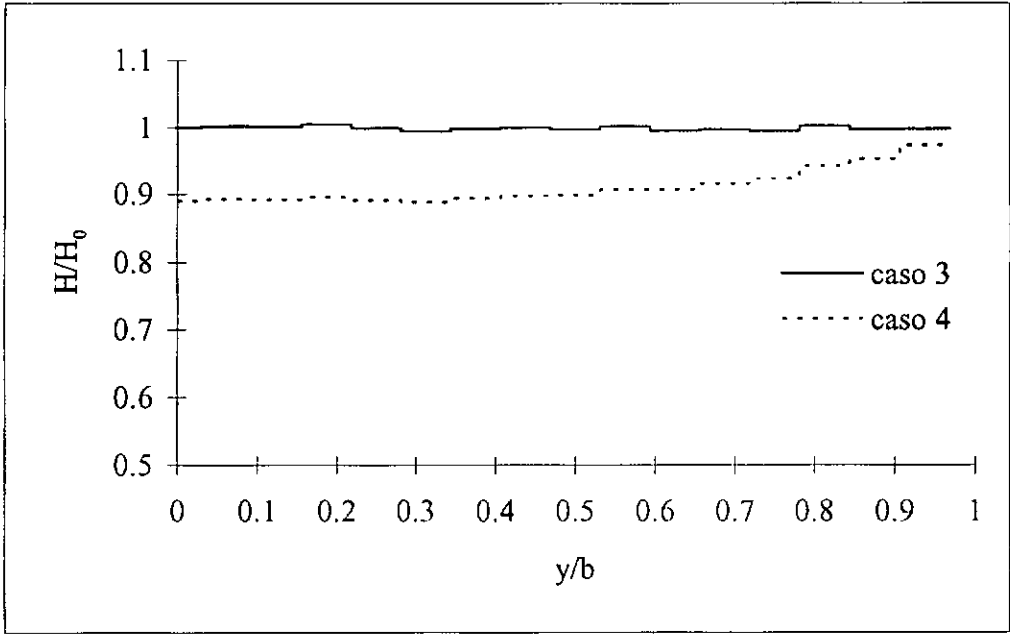


Figura IV.6.c Distribuição de esforços na malha de cabos para os cabos tensores e superposição dos casos de carregamento 3 e 4

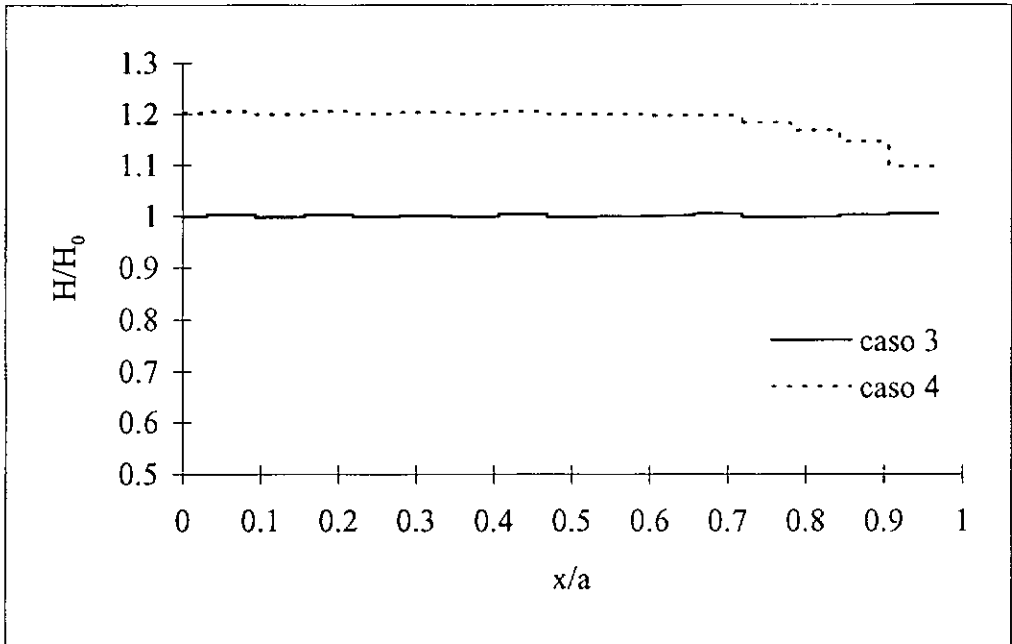


Figura IV.6.d Distribuição de esforços na malha de cabos para os cabos suspensos e superposição dos casos de carregamento 3 e 4

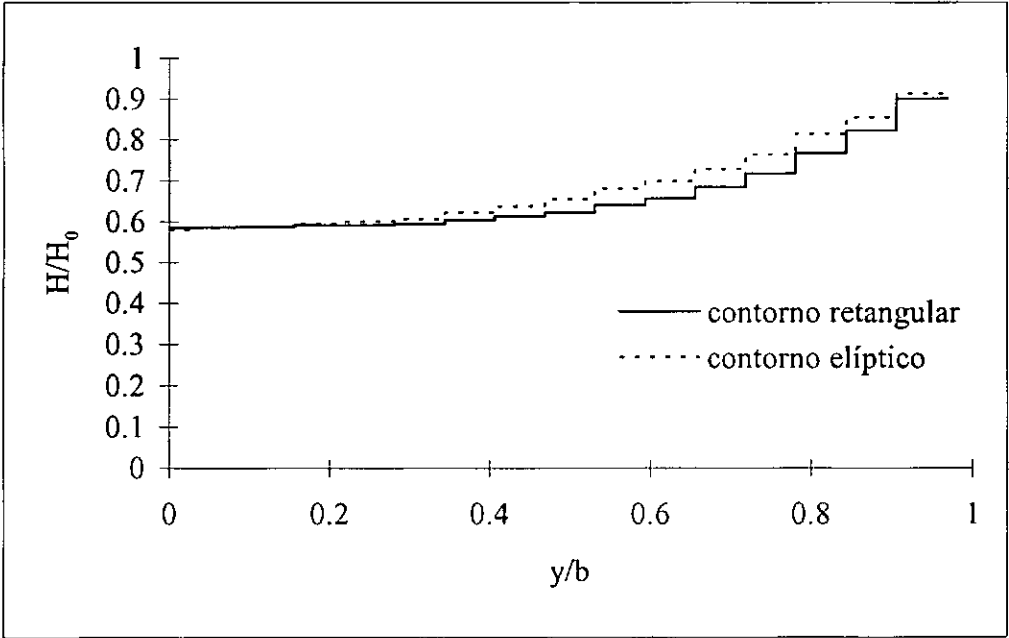


Figura IV.7.a Superposição da distribuição de esforços na malha de cabos, para os cabos tensores, nos contornos retangular e elíptico em planta, caso 2

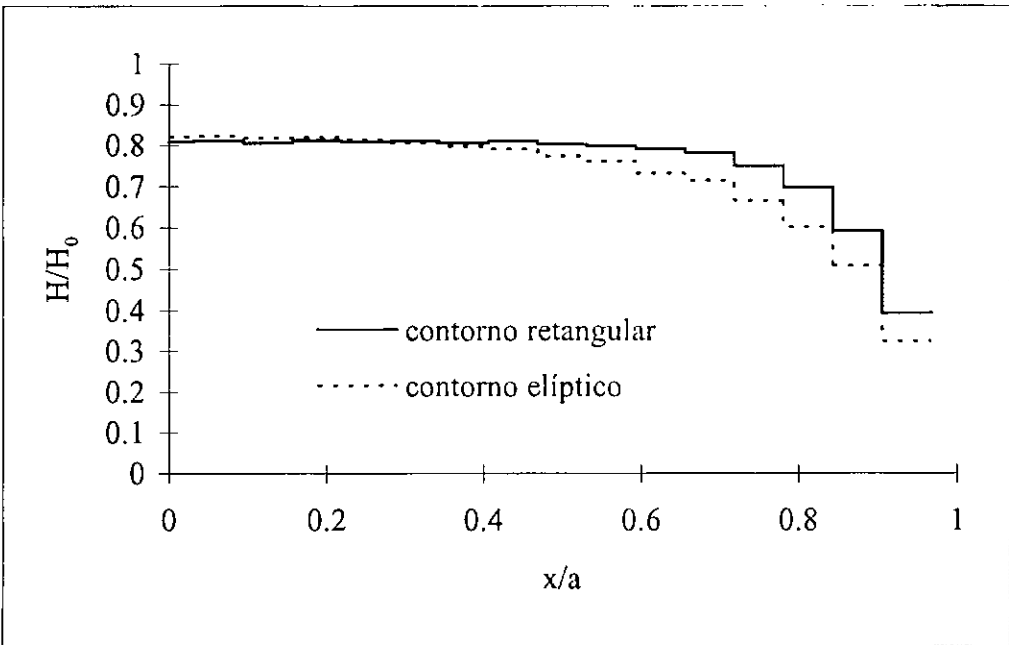


Figura IV.7.b Superposição da distribuição de esforços na malha de cabos, para os cabos suspensos, nos contornos retangular e elíptico em planta, caso 2

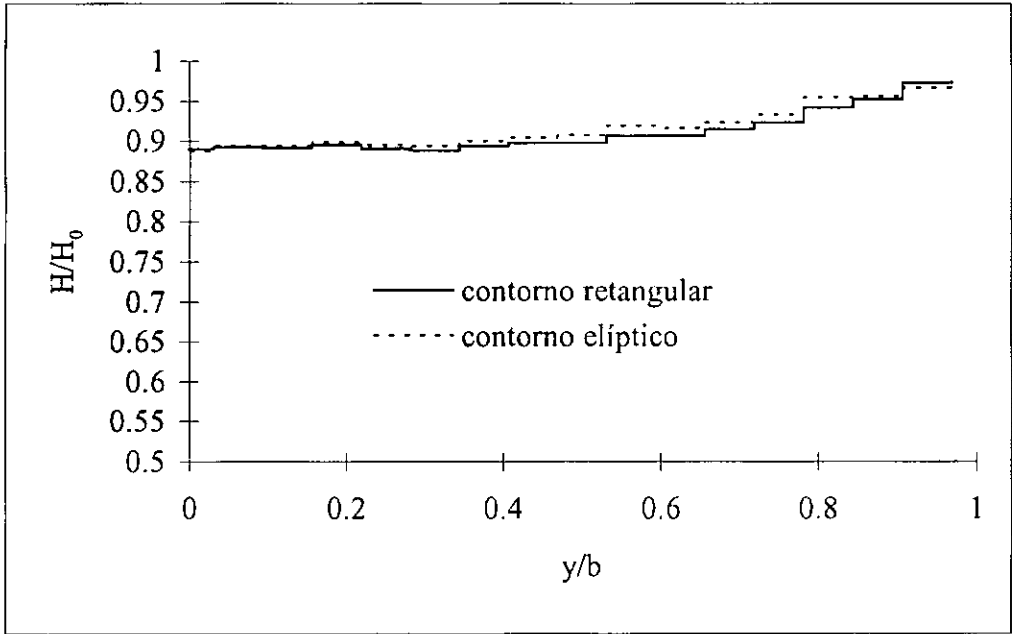


Figura IV.7.c Superposição da distribuição de esforços na malha de cabos, para os cabos tensores, nos contornos retangular e elíptico em planta, caso 4

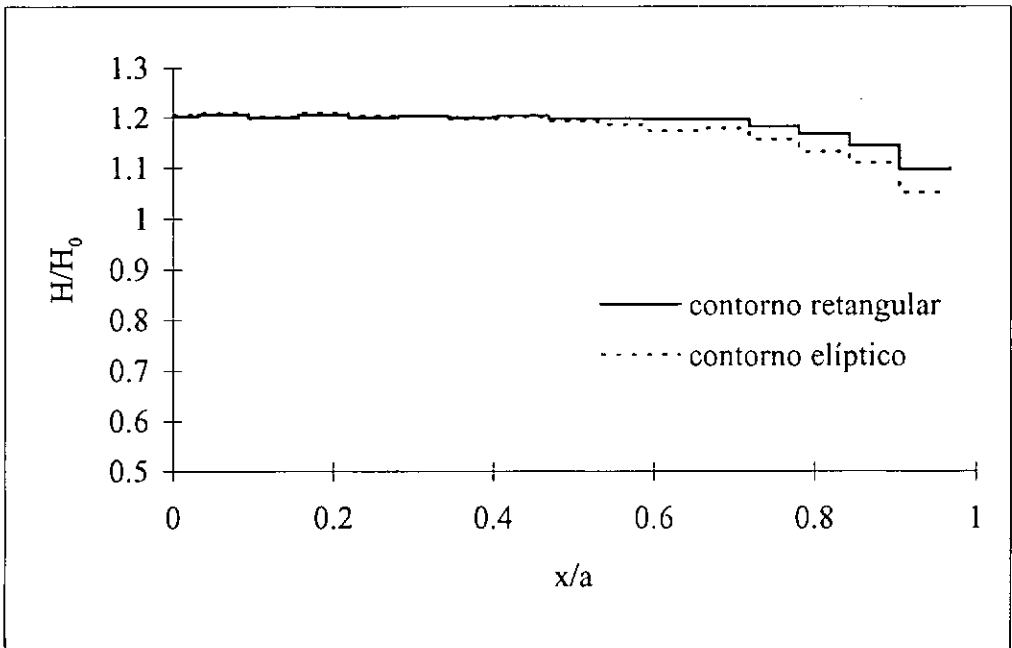


Figura IV.7.d Superposição da distribuição de esforços na malha de cabos, para os cabos suspensos, nos contornos retangular e elíptico em planta, caso 4

A variação de esforços é praticamente uniforme nos cabos próximos ao centro da malha ($y/b \leq 0,5$ e $x/a \leq 0,5$, para o contorno retangular), tanto nos cabos tensores (decréscimo de força) quanto nos cabos suspensos (acrécimo de força) e nos dois casos de geometria de contorno. Os cabos próximos ao contorno (y/b e x/a próximos de 1,0) têm uma pequena variação de força em relação ao estado inicial, o que indica que estes cabos contribuem pouco para a rigidez da malha. Esse comportamento é mais acentuado para o caso de contorno elíptico como é mostrado na figura IV.7, em que estão superpostas a variação de esforços na malha de cabos para os dois casos de geometria de contorno.

Através dessas análises, verifica-se que há interesse prático na adoção de malhas não uniformes com cabos próximos ao contorno com menor rigidez (seção transversal dos cabos menores) ou até mesmo menor esforço inicial em relação aos cabos da região central.

IV.3.4 Malha Não Uniforme

Propõe-se neste item uma malha de cabos com propriedades não uniformes, mais econômica e estruturalmente tão eficiente quanto a malha com características uniformes.

Neste item será proposta uma malha não uniforme para os casos de carregamento 1 e 2 e com o contorno elíptico. O comportamento dessa nova malha de cabos será comparado ao comportamento da malha uniforme.

A distribuição não uniforme das propriedades da nova malha proposta é:

- para os cabos tensores na faixa de 0 à 0,5 de y/b as propriedades são as mesmas adotadas anteriormente, para os casos 1 e 2. Os cabos tensores na faixa de 0,5 até 0,8 de y/b terão suas áreas reduzidas em 25% e a protensão inicial na mesma

proporção. Os cabos tensores situados na faixa de 0,8 até 1,0 de y/b terão suas áreas e a protensão inicial reduzidas em 50%;

- para os cabos suspensos na faixa de 0 à 0,8 de x/a as propriedades são as mesmas adotadas anteriormente para os casos 1 e 2. Os cabos suspensos na faixa de 0,8 à 0,9 de x/a tem suas áreas reduzidas em 25% e os situados na faixa 0,9 até 1,0 tem suas áreas reduzidas em 50%.

As figuras IV.8 referem-se ao estudo da malha não uniforme. Nestes gráficos está ilustrada a variação da relação H/H_0 para os cabos tensores e suspensos ao longo das direções y e x respectivamente.

Ao se comparar os gráficos das figuras IV.7.a e IV.7.b, para a malha com características uniformes, com os gráficos das figuras IV.8, para a malha não uniforme, percebe-se que a distribuição de esforços nos cabos tensores pouco varia com a alteração das propriedades da malha. Para os cabos suspensos, porém, a distribuição de esforços só é semelhante no centro e a contribuição dos cabos próximos ao contorno é muito pequena.

Na tabela IV.2 estão mostrados os resultados da comparação entre as malhas uniforme e não uniforme em termos de deslocamentos em 4 pontos da malha. Observa-se que os deslocamentos são praticamente iguais nos dois casos indicando que não houve alteração de rigidez com a economia, em termos de área de aço, feita na malha não uniforme. Os pontos considerados foram:

Tabela IV.2 Deslocamentos em 4 pontos da malha com contorno elíptico

	<i>deslocamentos ($w/2a$)% - caso 2</i>			
	nó 1 $x = 0, y = 0$	nó 2 $x = a/2, y = b/2$	nó 3 $x = a/2, y = 0$	nó 4 $x = 0, y = b/2$
<i>malha uniforme</i>	-0,2279	-0,2026	-0,2331	-0,2180
<i>malha não uniforme</i>	-0,2501	-0,1932	-0,2421	-0,2113

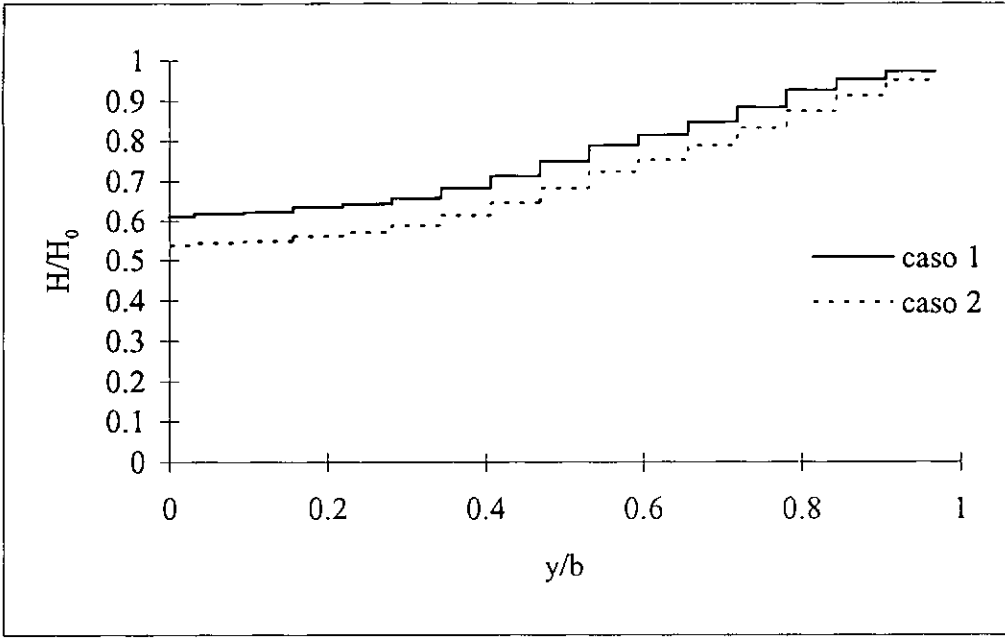


Figura IV.8.a Distribuição de forças nos cabos tensores da malha não uniforme com contorno elíptico

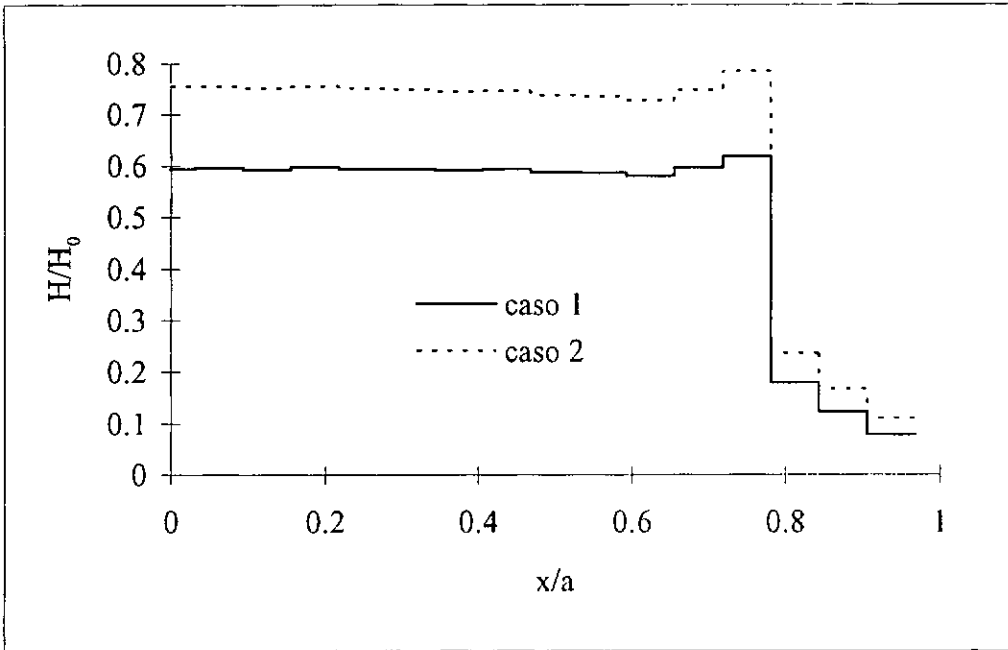


Figura IV.8.b Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha não uniforme com contorno elíptico

O comportamento estático da malha não uniforme, com decréscimo de rigidez axial nas regiões próximas aos bordos nas duas direções ortogonais, é quase semelhante ao da malha uniforme, com os cabos próximos aos bordos contribuindo pouco para a rigidez da estrutura. A malha não uniforme proposta, então, além de ser mais econômica é estruturalmente tão eficiente quanto a uniforme.

IV.3.5 Estudo Comparativo entre os Vários Níveis de Simplificações do Modelo

Com a grande capacidade dos processadores atuais não se discute a necessidade de simplificar o modelo numérico para um projeto. Entretanto, para efeito de concepção e pré-dimensionamento, pode haver conveniência nesta simplificação, visando reduzir esforço computacional, já que a análise dos resultados pode ser mais rápida.

Neste item será discutida a viabilidade de se adotar uma modelo simplificado para o estudo do seu comportamento estático. A malha simplificada é aquela em que se agrupam vários cabos em um único cabo e redistribuindo igualmente as propriedades entre os nós e elementos.

Empregando-se corretamente as propriedades geométricas e físicas, bem como as forças de protensão e carga vertical, analisou-se a malha, com as propriedades uniformes, para três níveis de simplificação do modelo numérico:

malha 1: 7 x 7 cabos;

malha 2: 15 x 15 cabos;

malha 3: 31 x 31 cabos.

Admite-se que a malha 3 representa todos os cabos da estrutura enquanto que as malhas 1 e 2 são modelagens simplificadas em que um ou mais cabos estão representados por uma linha de elementos.

As forças de protensão iniciais, carga externa, módulo de elasticidade dos cabos e a área da seção serão os mesmos adotados no item IV.3.3.

As figuras IV.9 mostram a variação dos esforços na malha para os três níveis de simplificação e todos os casos de carregamento. Os parâmetros dos eixos das ordenadas e abcissas são os mesmos do item IV.3.3.

Os esforços nos cabos obtidos com os três níveis de malha analisadas são semelhantes no centro, diferenciando-se em direção aos bordos, como se pode ver nas figuras IV.9. Conclui-se então que a utilização de uma malha simplificada só apresenta bons resultados no centro da malha e para a região próxima aos bordos os resultados não são satisfatórios. Este resultado se aplica aos casos 1 e 2, em que a protensão é aplicada aos cabos tensores. Para os casos 3 e 4 (figuras IV.9 e até h) a simplificação no modelo não altera significativamente os resultados neste caso de contorno rígido.

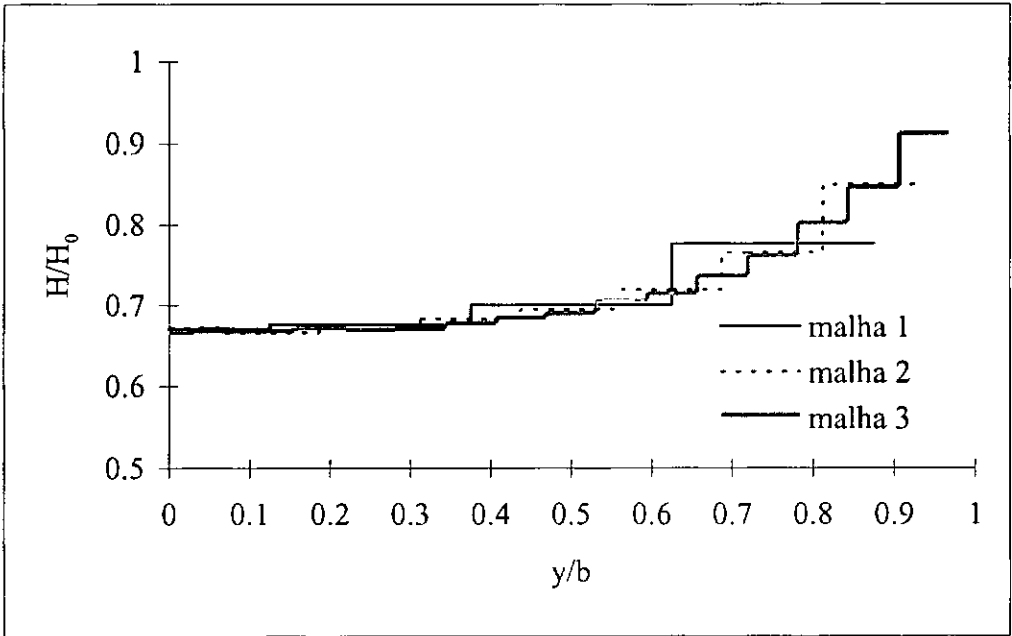


Figura IV.9.a - Distribuição de forças nos cabos tensores da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 1

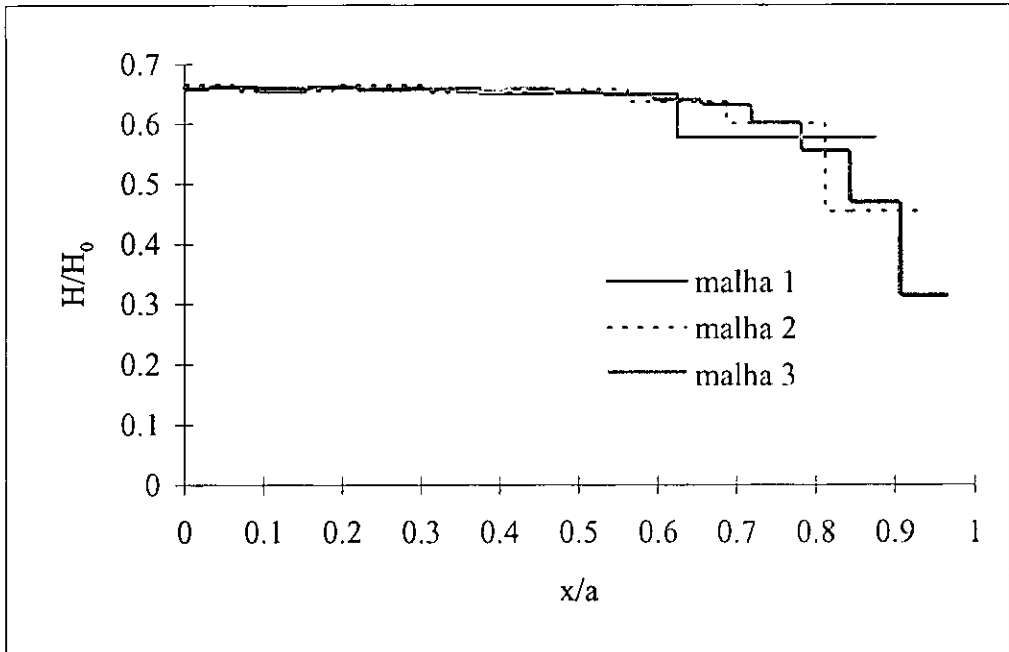


Figura IV.9.b - Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 1

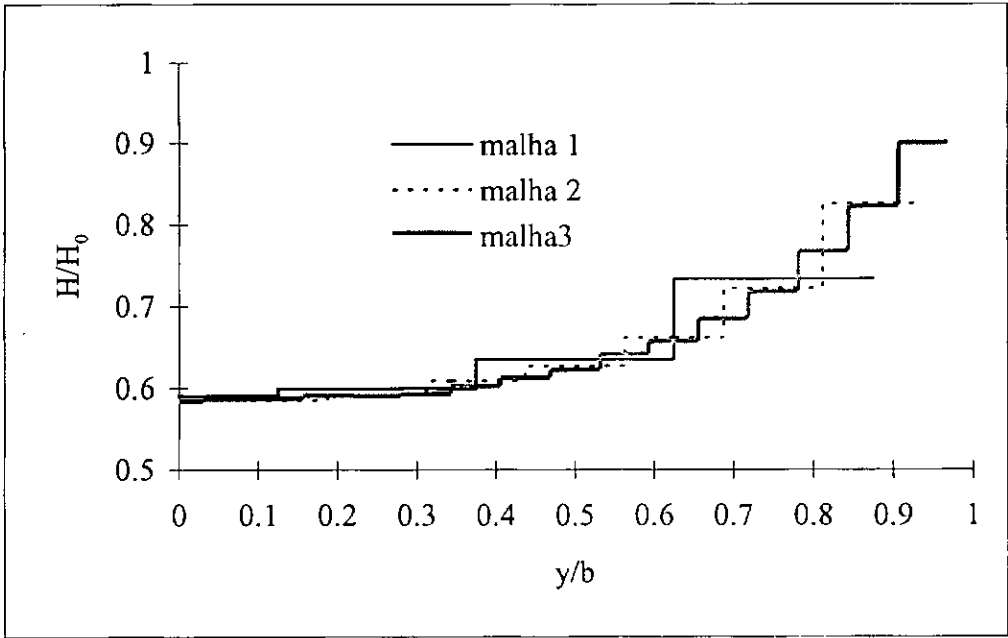


Figura IV.9.c - Distribuição de forças nos cabos tensores da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 2

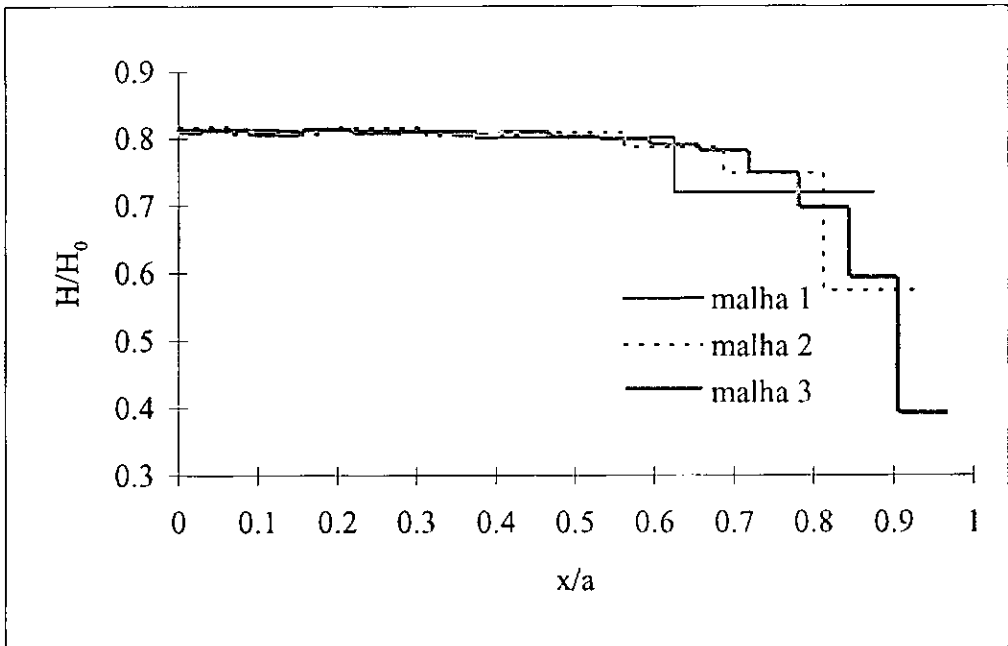


Figura IV.9.d - Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 2

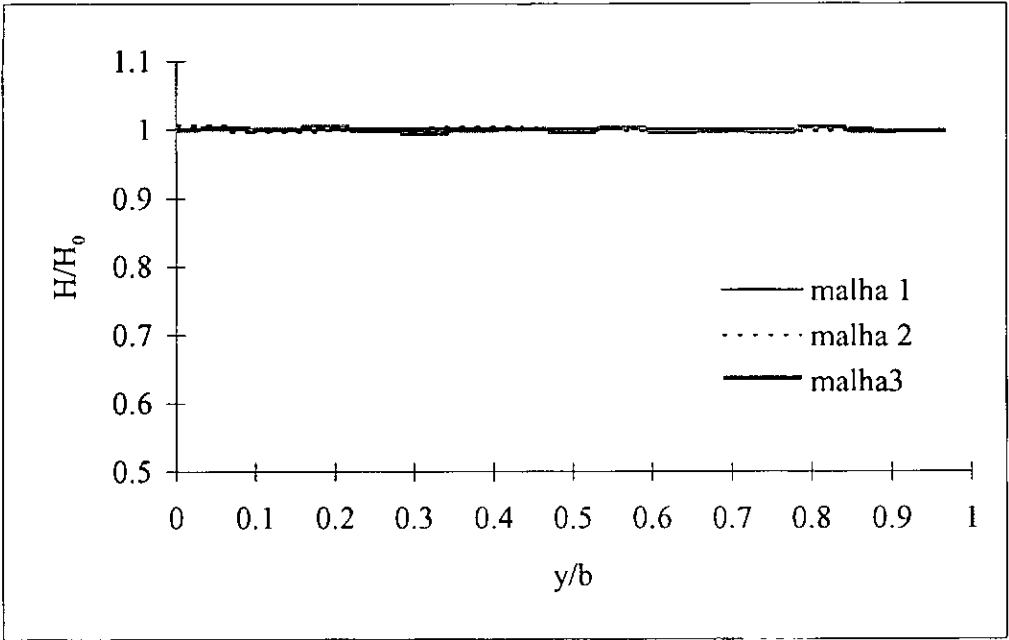


Figura IV.9.e - Distribuição de forças nos cabos tensores da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 3

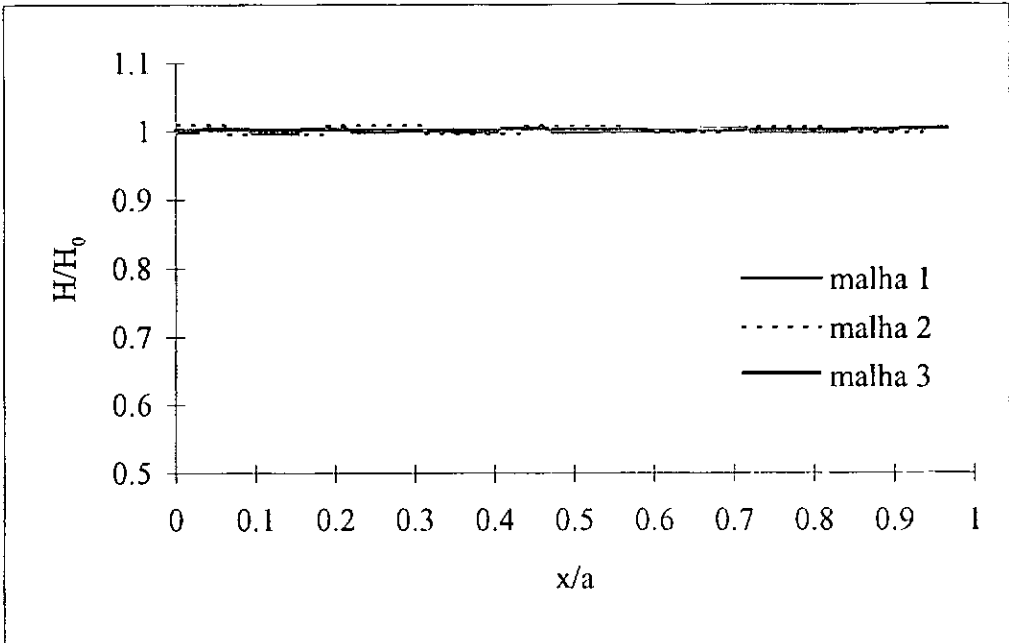


Figura IV.9.f - Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 3

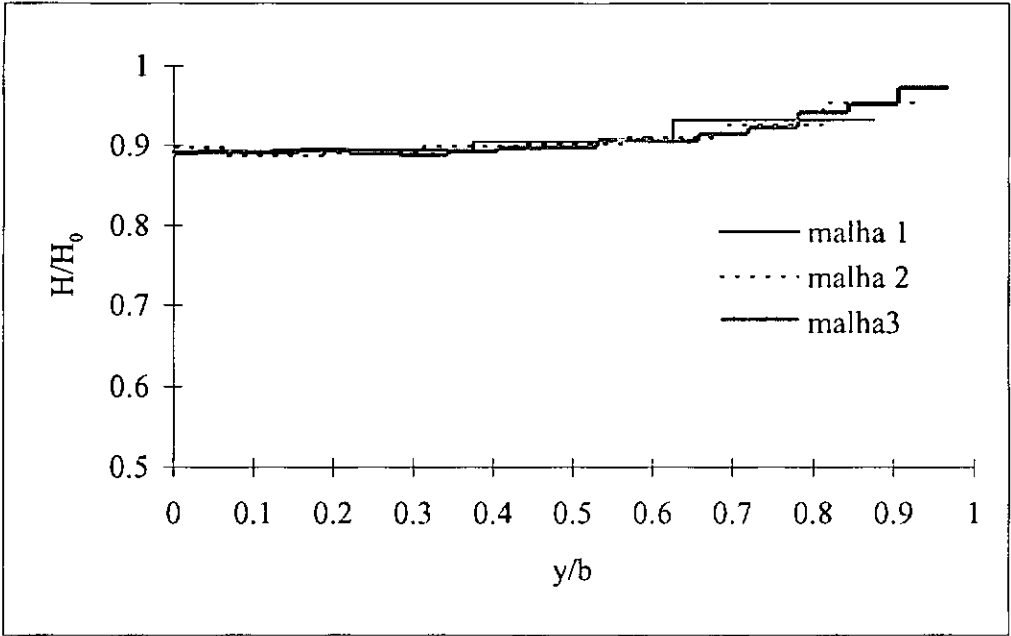


Figura IV.9.g - Distribuição de forças nos cabos tensores da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 4

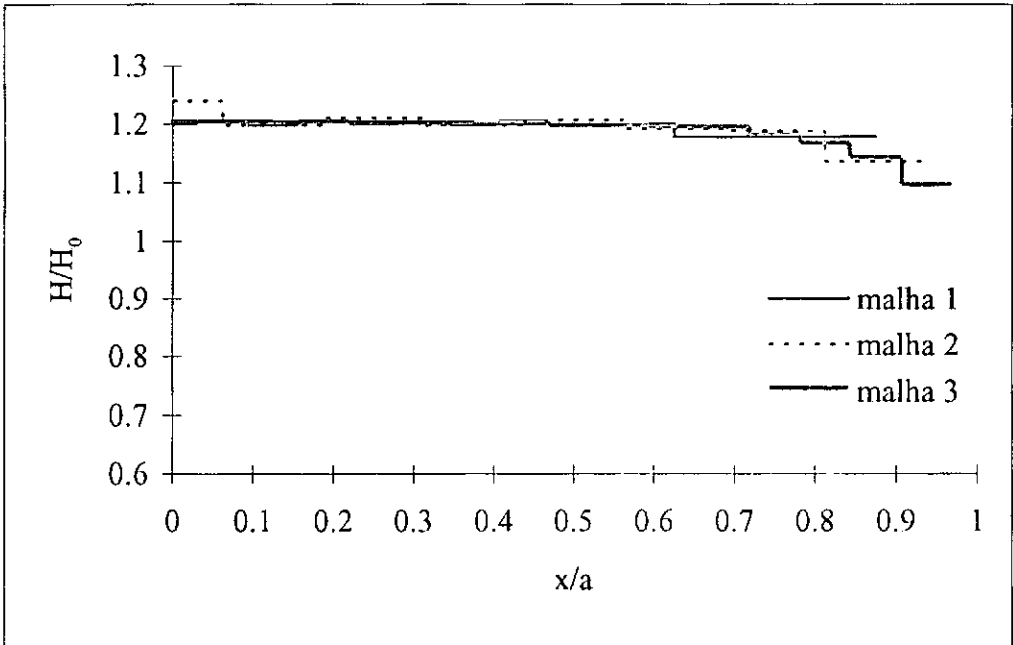


Figura IV.9.h - Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha uniforme com contorno retangular em planta, caso 4

IV.4 CONTORNO FLEXÍVEL

Este item tem por objetivo estudar a influência da flexibilidade do contorno no comportamento da cobertura.

Adota-se como exemplo uma malha de cabos de contorno elíptico em planta e ancorada em um arco espacial apoiado verticalmente sobre pilares os quais possuem rigidez à flexão desprezível e permitem, portanto, o movimento horizontal do arco (ver a figura IV.1.b).

Apresenta-se, nos itens subseqüentes, a distribuição de esforços na malha de cabos com o contorno flexível, a distribuição de esforços na viga de bordo, além de um estudo comparativo entre vários níveis de simplificação do modelo numérico da malha de cabos e da viga de contorno. O comportamento da estrutura sob ação de cargas externas crescentes é também avaliado.

Os casos de carregamento considerados foram os casos 3 e 4, em que a protensão é aplicada 'simultaneamente' aos cabos tensores e suspensos.

IV.4.1 Estudo da Geometria e Protensões Iniciais Ideais para a Malha de Cabos e Características da Viga de Bordo

As malhas de cabos formando superfícies com curvaturas opostas em duas direções podem estar ancoradas em cabos de contorno, elementos resistentes à flexão (vigas de bordos) ou ainda em um sistema combinando estas opções. No caso de cabos de bordo tem-se um contorno muito flexível, livre de momentos fletores em qualquer situação de carga. No caso de elementos rígidos é interessante se obter a geometria da curva de contorno para o qual não há momentos fletores no elemento de bordo para um certo carregamento, por exemplo para o estado inicial de protensão. No item II.6 foram apresentados os desenvolvimentos de Frei Otto para este problema. No caso de malha

na forma de um parabolóide hiperbólico o contorno deve ser elíptico com os semi-eixos a e b obedecendo à equação:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{H_{x0}}{H_{y0}}} \quad (\text{II.65})$$

Para manter constantes as dimensões do contorno elíptico do exemplo já estudado no item IV.3 foi alterada a geometria do parabolóide hiperbólico de forma a satisfazer a equação (II.65).

Mantendo-se constantes os parâmetros H_{x0} ($=120$ kN/m), os valores dos semi-eixos principal e secundário ($a = 45$ m e $b = 30$ m), bem como o valor da deflexão d_2 ($=3,55$ m), utilizados no exemplo com contorno rígido, o valor da protensão inicial H_{y0} a ser aplicada aos cabos suspensos será, pela equação (II,65):

$$H_{y0} = 53,3 \text{ kN / m}$$

Aplicando estes valores à equação (II.37), que relaciona as protensões iniciais com a geometria, o valor da deflexão d_1 será:

$$d_1 = 3,55 \text{ m}$$

E a nova geometria com $d_1/2a = 4\%$ e $d_2/2b = 6\%$ fica então definida:

$$z = -\frac{3,55}{2025}x^2 + \frac{3,55}{900}y^2 \quad (\text{II.66})$$

As propriedades físicas se mantêm constantes em relação ao exemplo com contorno rígido, bem como a carga vertical externa, ou seja:

$$p = 0,3 \text{ kN/m}^2;$$

$$(EA)_x = 5 \times 10^4 \text{ kN/m}^2;$$

$$(EA)_y = 10^5 \text{ kN/m}^2.$$

A viga de bordo é uma viga em concreto armado de dimensões $2 \times 0,5 \text{ m}$, com $f_{ck} = 200 \text{ kgf/cm}^2$, $f_{yk} = 2500 \text{ kgf/cm}^2$ (aço CA-25) e E (módulo de elasticidade) $= 3 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$. A dimensão maior da viga é paralela ao plano horizontal da malha.

IV.4.2 Comportamento sob Carga Vertical Crescente

Neste item, é feito um estudo sobre a influência da carga vertical externa sobre a malha de cabos com contorno flexível. Com exceção das cargas externas, os demais parâmetros definidos no item anterior foram mantidos constantes.

Aplicando-se convenientemente as condições de simetria, foi analisada $1/4$ da malha. A malha esta mostrada na figura IV.10.a e os nós e cabos analisados na figura IV.10.b.

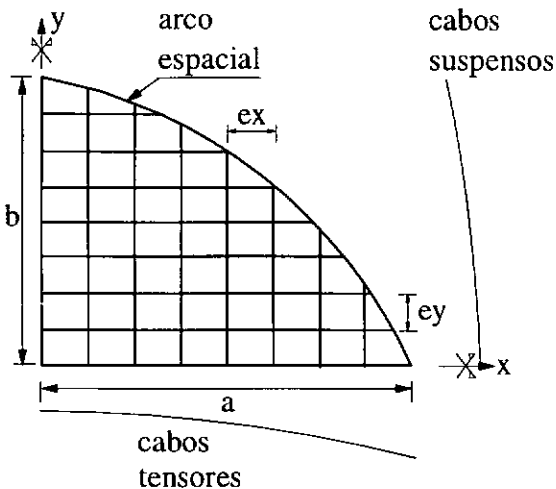


Figura IV.10.a Projeção em planta de $1/4$ da malha de cabos

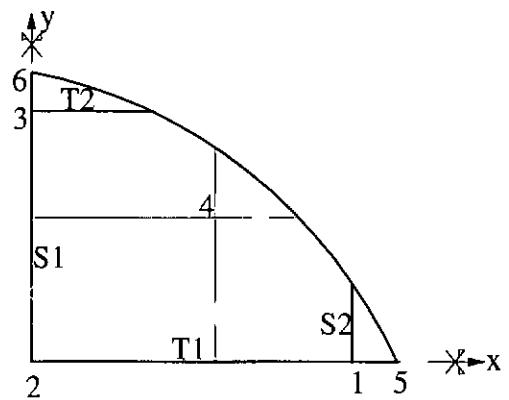


Figura IV.10.b Nós e cabos analisados

A figura IV.11.a mostra a variação dos deslocamentos verticais dos nós 1, 2, 3 e 4, na forma adimensional $w/2a$, como função da carga externa, na forma adimensional $(p 2a 1000)/(EA)_x$. Da mesma forma, a figura IV.11.b mostra os deslocamentos no plano horizontal dos nós 5 (que se desloca na direção x) e 6 (que se desloca na direção y).

Comparando-se a figura IV.11.a com a figura IV.3.c para o contorno rígido, percebe-se claramente que os deslocamentos para este contorno são bem maiores, já que a superfície é mais abatida e com contorno flexível. Ao contrário do contorno rígido, para o qual o comportamento é linear, observa-se, com o aumento de carga externa, um comportamento discretamente não linear com ganho de rigidez.

Um aspecto importante a ser observado é que, para carga vertical nula (estado inicial de protensão), a viga se encontra totalmente comprimida, ou seja, ocorre uma compressão radial na viga de bordo, pois o único esforço a atuar efetivamente é o esforço normal de compressão e os efeitos de flexão são desprezíveis. Isso pode ser visto na figura IV.11.b em que, para o estado inicial os deslocamentos dos nós 5 e 6 no plano horizontal, embora pequenos, são ambos negativos. Esse comportamento está de acordo com a teoria apresentada no item II.6. Com o acréscimo de carga p os deslocamentos variam com discreta não linearidade.

As figuras IV.12 mostram a deformada da estrutura para o estado inicial e para a estrutura na configuração final após a aplicação do peso próprio.

Por estas figuras, justifica-se a disposição dos cabos tensores no sentido do maior vão e dos cabos suspensos no sentido do menor vão no projeto do parabolóide hiperbólico. Percebe-se que, com a aplicação da carga, a elipse que delimita o contorno sofre alongamento na direção do maior eixo e encurtamento na direção oposta. Caso os cabos tensores, cuja tendência é sofrer perda de protensão, estivessem no sentido do eixo menor, este sofreria encurtamento e, conseqüentemente, ocorreria um decréscimo ainda maior de protensão. O contrário ocorreria para os cabos suspensos se dispostos no sentido do eixo menor.

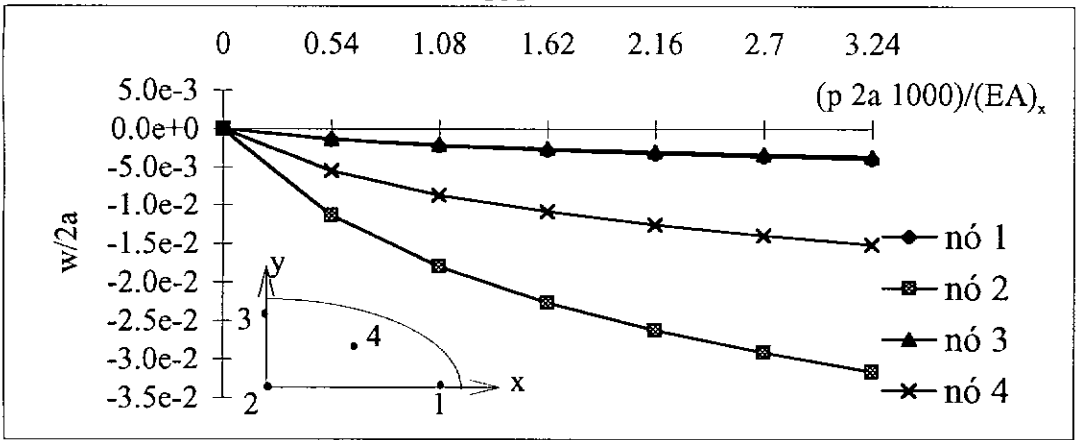


Figura IV.11.a Variação dos deslocamentos verticais em alguns nós da malha com a carga externa

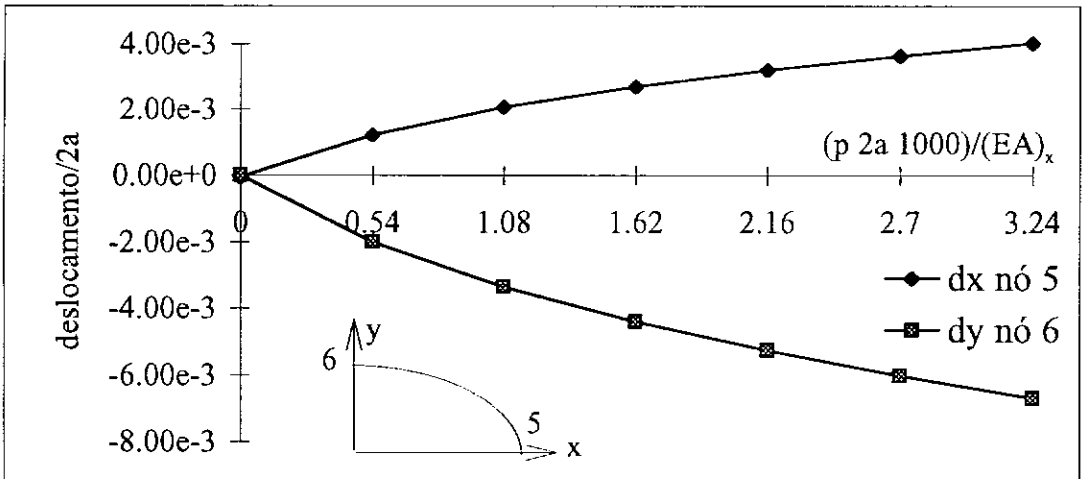


Figura IV.11.b Variação dos deslocamentos horizontais em alguns nós da malha com a carga externa

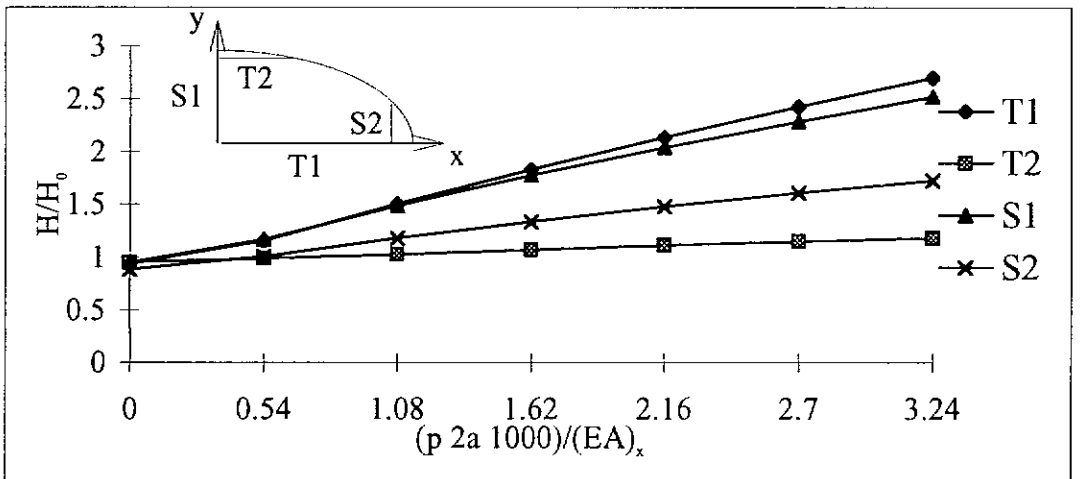


Figura IV.11.c Variação dos esforços em alguns cabos da malha com a carga externa

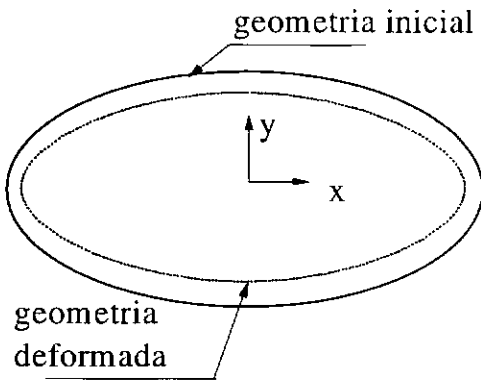


Figura IV.12.a Deformada em planta da viga de bordo para $p=0$.

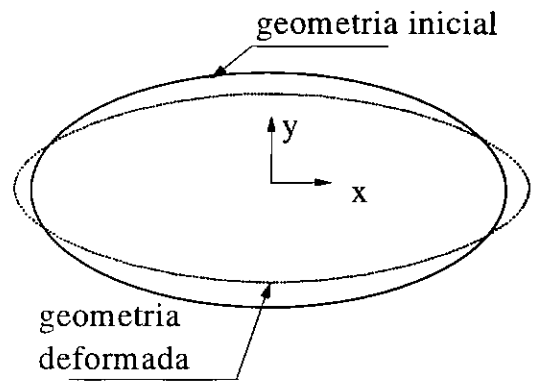


Figura IV.12.b Deformada em planta da viga de bordo para $p=0,3 \text{ kN/m}^2$.

A figura IV.11.c mostra a variação dos esforços em alguns cabos da malha, na forma adimensional H/H_0 , com a carga externa, também na forma adimensional $(p \text{ 2a } 1000)/(EA)_x$. Para o estado inicial todos os cabos sofrem uma perda de protensão devido ao encurtamento do anel do contorno. Percebe-se também que tanto os cabos suspensos quanto os tensores têm seus esforços aumentados com a carga externa. Esse tipo de comportamento não se verifica para o contorno rígido, em que os cabos tensores apresentam decréscimo e os cabos suspensos acréscimo de força em relação à protensão aplicada. O aumento de protensão para os cabos suspensos é maior para o contorno rígido do que para o contorno flexível. Essa diferença no comportamento é justificada pelo deslocamento do contorno, que provoca alongamento nos cabos tensores e encurtamento nos cabos suspensos após a aplicação da carga externa. Com isso, os cabos tensores são tracionados devido ao seu alongamento com o contorno, e este esforço é somado à protensão inicial.

Conclui-se, com este comportamento, que a razão ϕ de rigidezes axiais EA entre os cabos suspensos e tensores, tomada igual a 2, deveria ser reduzida e ficar próxima de 1.

IV.4.3 Distribuição de Esforços na Malha de Cabos

Nesta análise, estuda-se além da influência da viga de contorno na redistribuição de esforços na malha, o efeito causado por simplificações na malha de cabos. Os parâmetros utilizados nestes estudo são os mesmos apresentados no item IV.4.1.

A distribuição de esforços está mostrada nas figuras IV.13 com as forças horizontais, na forma adimensional H/H_0 , fornecidas por unidade de comprimento. Esta relação é mostrada para os diversos cabos tensores ao longo da direção y (figuras a) e para os diversos cabos suspensos ao longo da direção y (figuras b).

Percebe-se que, para o estado inicial de protensão (figuras IV.13.a e IV.13.b), ocorre uma redistribuição uniforme de esforços ao longo de toda a malha. Entretanto, ao contrário do que ocorre para a malha com contorno rígido em que os cabos absorvem integralmente a protensão inicial, há uma perda na protensão inicial nos cabos das duas direções (essa perda é de aproximadamente 5%) devido à deformabilidade do contorno em compressão (ver figuras IV.12). A estrutura, então, para o estado inicial de protensão, se equilibra em torno de uma nova configuração geométrica.

As figuras IV.13.c e IV.13.d referem-se ao caso de protensão mais carga vertical (caso 4). Percebe-se o acréscimo de esforços nos cabos tensores e suspensos, com exceção daqueles localizados junto ao contorno, os quais apresentam pequena variação de esforço em relação à protensão H_0 . Então pode-se dizer que no caso do contorno flexível também há interesse na adoção de malhas não uniformes.

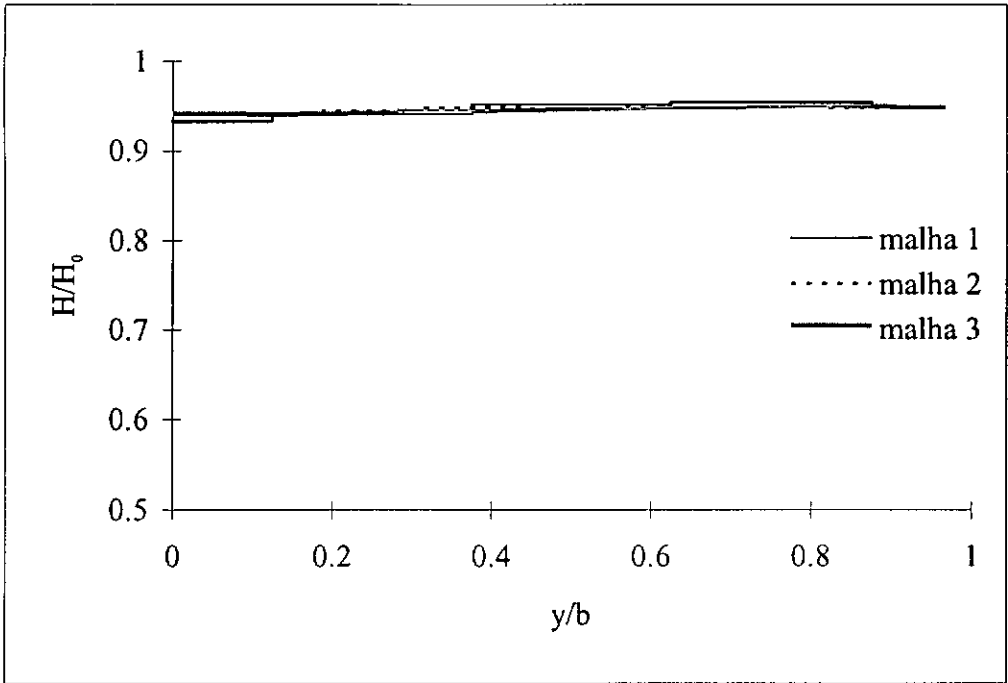


Figura IV.13.a Distribuição de forças nos cabos tensores da malha com contorno flexível, caso 3

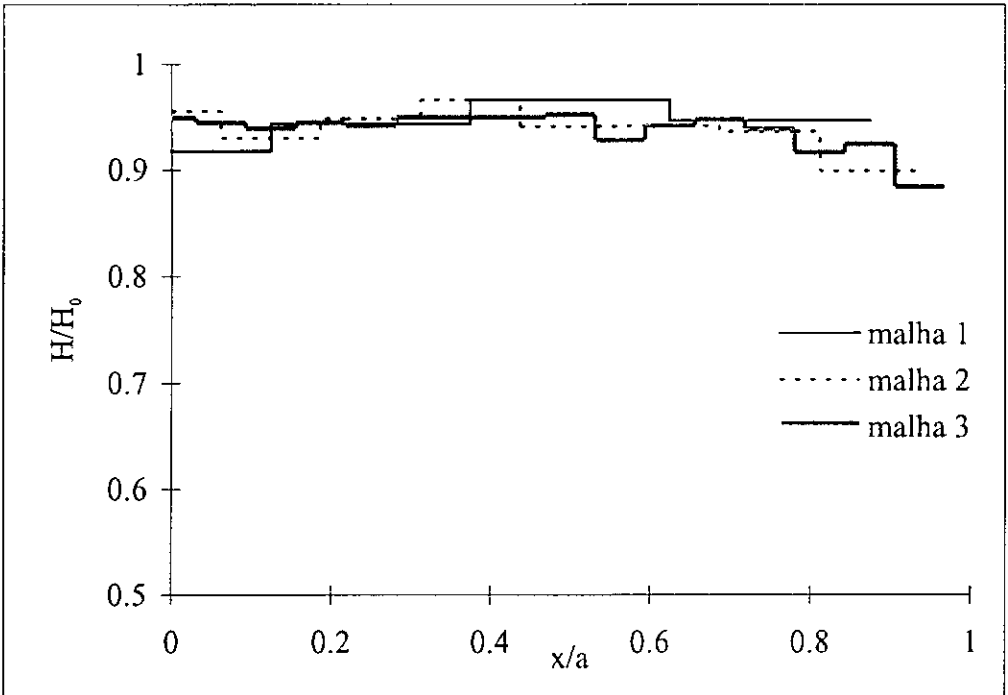


Figura IV.13.b Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha com contorno flexível, caso 3

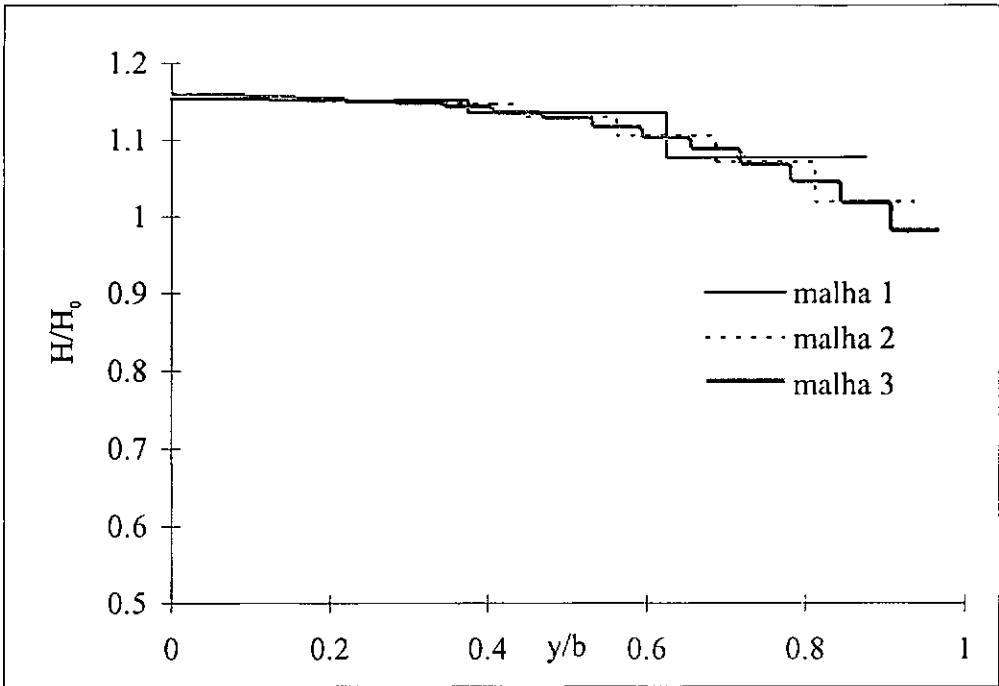


Figura IV.13.c Distribuição de forças nos cabos tensores da malha com contorno flexível, caso 4

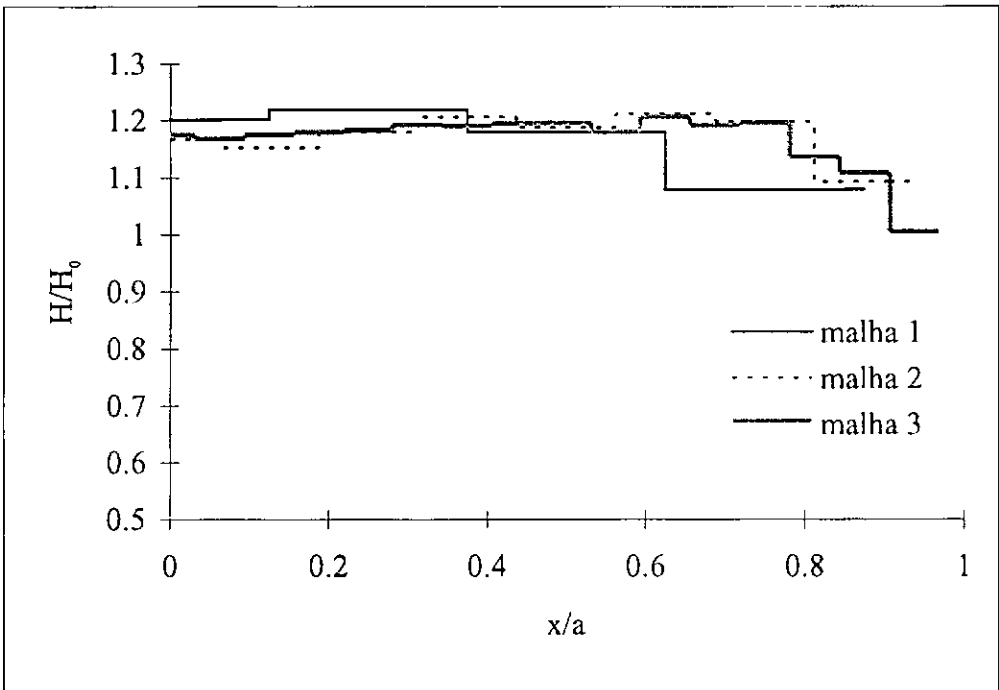


Figura IV.13.d Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha com contorno flexível, caso 4

As figura IV.13 mostram também um estudo comparativo entre os mesmos 3 níveis de simplificação no modelo da malha adotadas para o contorno rígido, a saber:

malha 1: 7 x 7 cabos;

malha 2: 15 x 15 cabos;

malha 3: 31 x 31 cabos.

Admite-se, novamente que a malha 3 representa todos os cabos da estrutura, e as malhas 1 e 2 são modelagens simplificadas.

Os resultados obtidos nesta última análise são semelhantes aos obtidos no contorno rígido, apresentando bons resultados no centro da malha. Novamente, a utilização de uma malha simplificada só apresenta bons resultados na região próxima ao centro.

IV.4.4 Distribuição de Esforços na Viga de Bordo

Na viga de contorno, os esforços predominantes são o esforço normal de compressão (N) e o momento fletor (M), que estão indicados na figura IV.14.

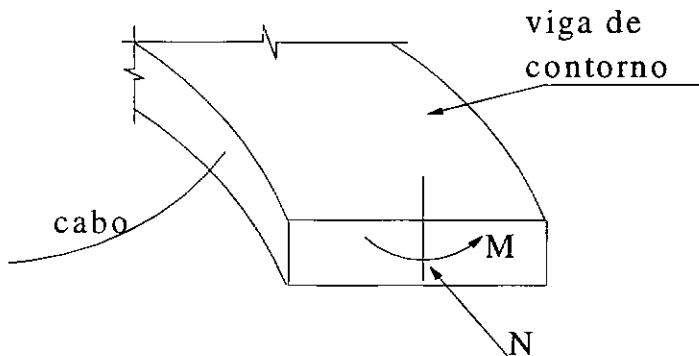


Figura IV.14 Esforços predominantes na viga de bordo

Nas figuras IV.15 estão mostradas as distribuições de esforços normal N (kN) e fletor M (kN m) ao longo da viga, vista em planta para os dois níveis de refinamento da malha. Foi estudado somente $1/4$ da malha, com as devidas condições de simetria. Os valores das protensões iniciais, carga externa bem como as propriedades geométricas são as mesmas definidas no item IV.4.1.

Na figura IV.15.a é mostrada a distribuição de esforço normal para a malha 1 (7 x 7 cabos) e para a malha 3 (31 x 31 cabos), após a aplicação da carga externa. A figura IV.15.b mostra a distribuição de momento para as mesmas malhas. Constata-se então que simplificações na malha de cabos não interfere na distribuição de esforço normal e fletor na viga de contorno flexível totalmente livre para se movimentar no plano horizontal.

Quando é aplicada a carga externa, ocorre aumento no esforço axial de compressão e este acréscimo de força é constante ao longo da viga. Essa característica está mostrada na figura IV.15.c, onde estão superpostos os diagramas de esforço normal para a estrutura no estado inicial de protensão e após a aplicação da carga.

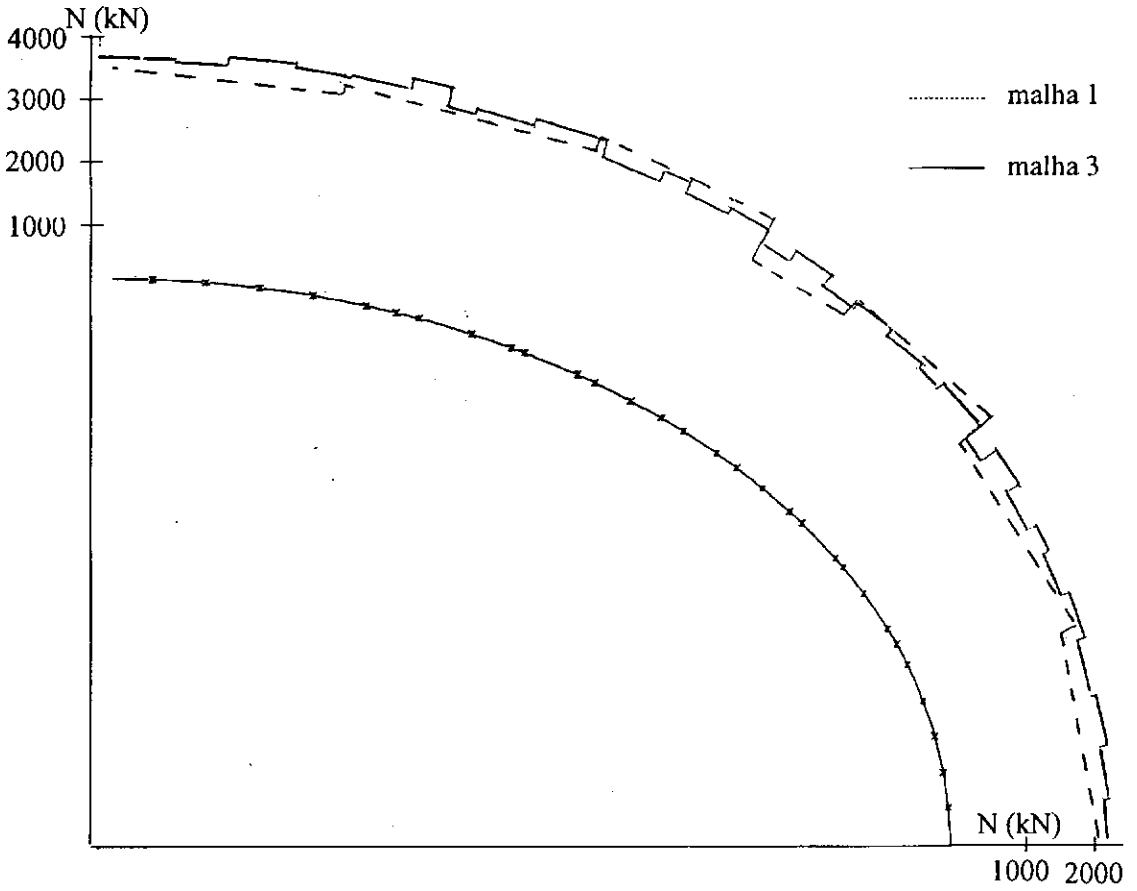


Figura IV.15.a Diagrama de esforço normal na viga de bordo para dois níveis de simplificação da malha com contorno flexível.

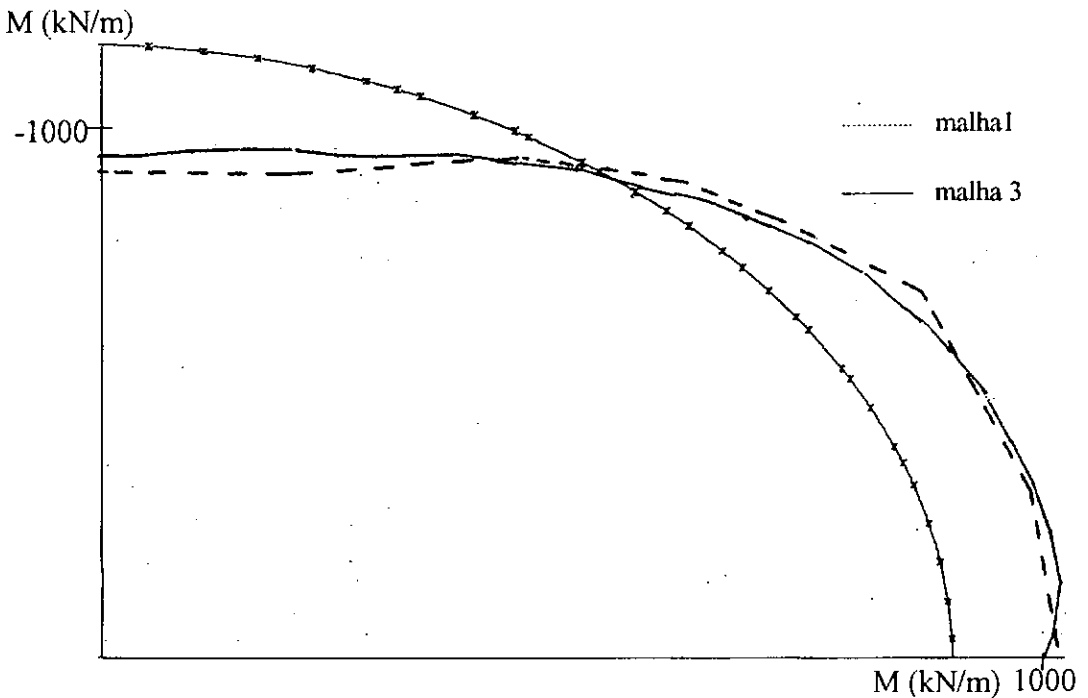


Figura IV.15.b Diagrama de momento fletor na viga de bordo para dois níveis de simplificação da malha com contorno flexível.

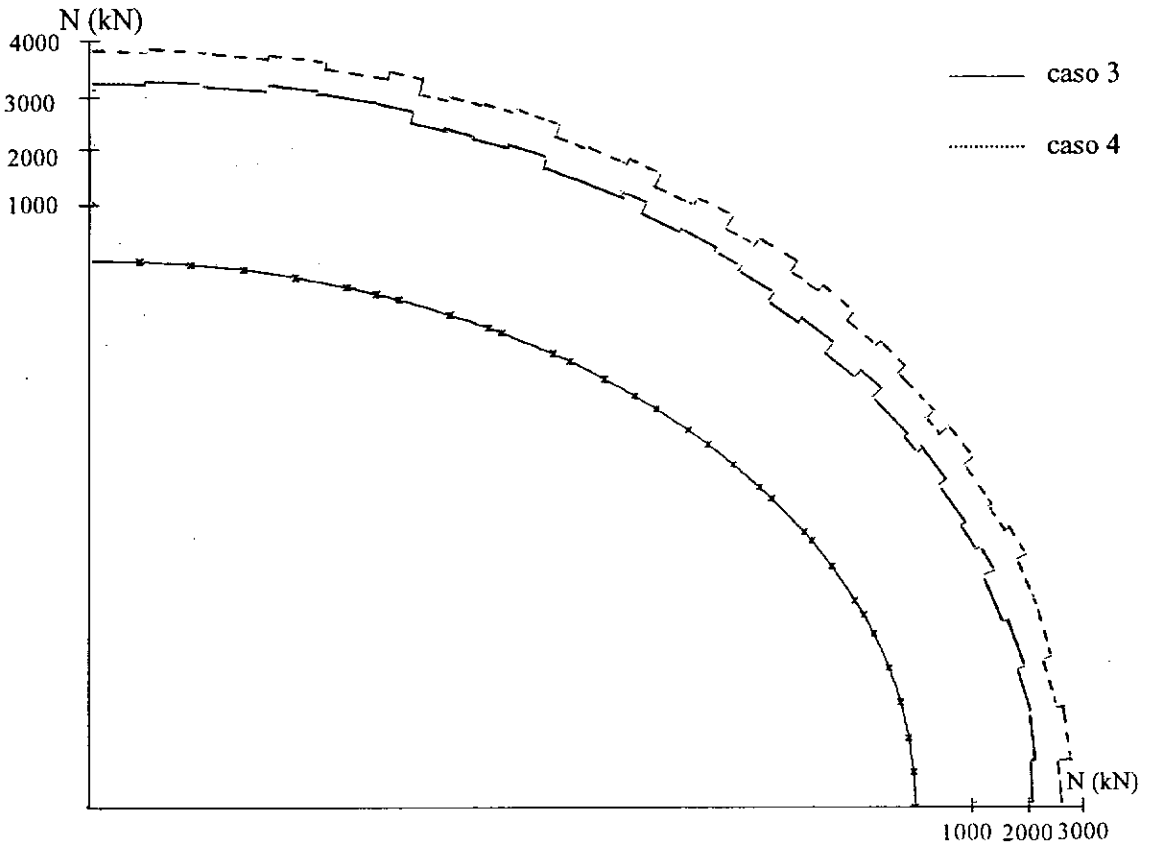


Figura IV.15.c Superposição dos diagramas de esforço normal para os casos 3 e 4 com contorno flexível

IV.5 CONTORNO SEMI-RÍGIDO

Nos itens IV.3 e IV.4 foram estudados os casos de malhas ancoradas em contornos rígido e flexível respectivamente, os quais se constituem em casos extremos das situações práticas. Neste item analisa-se o caso de um contorno semi-rígido, no qual o anel espacial de bordo apoiado sobre pilares tem seu movimento no plano horizontal elasticamente restringido.

Apresenta-se estudos sobre a influência das cargas externas na estrutura com todos os seus elementos estruturais (malha de cabos, viga de bordo e pilares), a distribuição de esforços na malha de cabos e na viga de bordo, para vários níveis de simplificação do modelo.

IV.5.1 Considerações Iniciais

Os casos de carregamento considerados nesta análise foram os casos 3 e 4. Quanto às características geométricas da malha de cabos e da viga de bordo, tais como protensões iniciais, cargas externas e propriedades físicas, serão adotados os valores definidos no item IV.4.1.

Os pilares, em concreto, possuem altura média de 5,50 m em relação ao centro da malha, de coordenadas (0,0,0). A seção transversal do pilar é de 1 x 0,5. Os coeficientes de rigidez para o elemento de mola foram obtidos com as equações III.2, sendo que a estrutura é impedida de se deslocar na direção vertical. O módulo de elasticidade adotado foi de 3×10^7 kN / m.

IV.5.2 Comportamento sob Carga Vertical Crescente

Apresenta-se novamente estudo sobre a influência da carga externa sobre a estrutura com o contorno semi-rígido. Para tanto, se fez variar a carga externa, mantendo-se constante os demais parâmetros.

A figura IV.16.a mostra a variação dos deslocamentos verticais dos nós 1,2,3 e 4 ($w/2a$), como função da carga externa $(p/2a \cdot 1000)/(EA)_x$. Da mesma forma, a figura IV.16.b mostra os deslocamentos no plano horizontal dos nós 5 (que se desloca na direção do eixo x) e 6 (que se desloca na direção do eixo y).

Comparando-se a figura IV.16.a com a figura IV.11.a, percebe-se que os comportamentos são semelhantes, apesar de os deslocamentos para este contorno serem de ordem inferior. Verifica-se que, para as dimensões de pilares adotados no exemplo o comportamento se aproxima mais do caso rígido, sendo praticamente linear.

Quanto a seu comportamento no plano horizontal (figura IV.16.b), percebe-se que o nó 5 quase não se desloca. Isso se deve ao fato de que, por ser um dos nós mais baixos da estrutura apoiado sobre pilar, ele possui coeficientes de rigidez muito grandes em comparação aos demais.

A figura IV.16.c mostra a variação de esforços (H/H_0) , por unidade de comprimento, como função da carga externa $((p/2a \cdot 1000)/(EA)_x)$.

Observa-se que, para o estado inicial de protensão ($p=0$) os cabos tensores e suspensos perdem uma pequena parcela da força de protensão inicial, devido à deformabilidade do seu contorno. Apesar disso, percebe-se que o comportamento deste contorno é semelhante ao do contorno rígido, com os cabos tensores perdendo força de protensão inicial e os cabos suspensos ganhando protensão após a aplicação do carregamento externo. O aumento e decréscimo de protensão para os cabos suspensos e tensores situados no centro da malha são maiores do que para os cabos da extremidade. De forma análoga, esta última característica também se verifica para o contorno rígido.

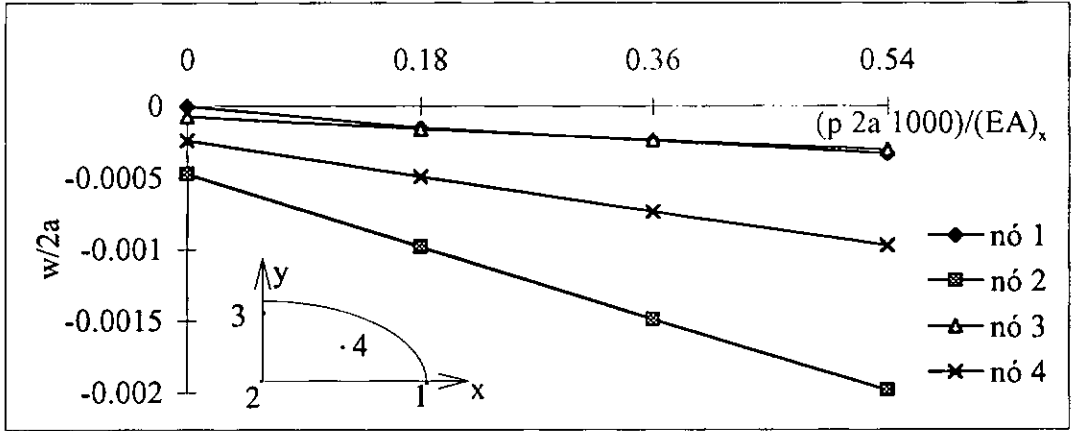


Figura IV.16.a Variação dos deslocamentos verticais em alguns nós da malha com a carga externa

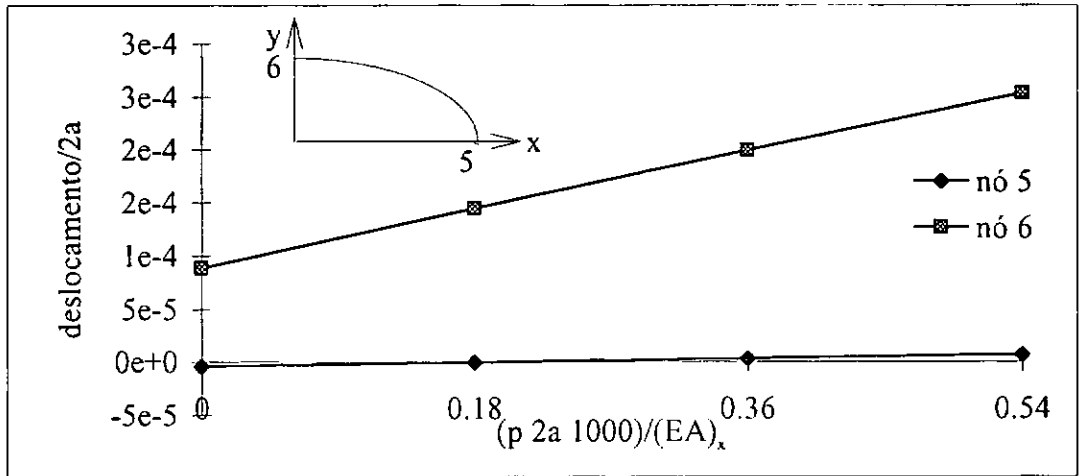


Figura IV.16.b Variação dos deslocamentos horizontais em alguns nós da malha com a carga externa

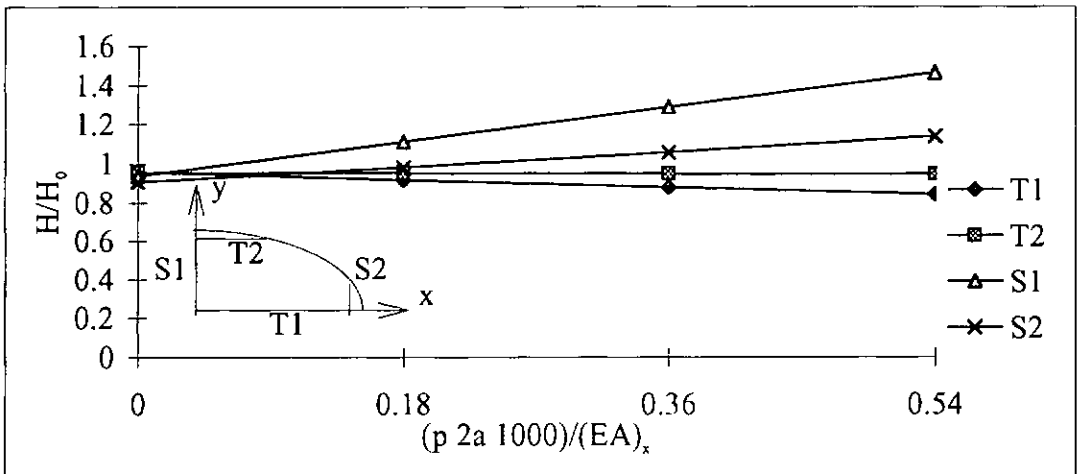


Figura IV.16.c Variação dos esforços em alguns cabos da malha com a carga externa

IV.5.3 Distribuição de Esforços na Malha de Cabos e Comparação entre os Vários Níveis de Simplificação do Modelo

Nas figuras IV.17 estão mostrados a distribuição de esforços na malha com contorno semi-rígido. Foi considerado o caso de carregamento em que a malha é protendida simultaneamente nas duas direções, para o estado inicial de protensão e após a aplicação da carga.

Quanto à redistribuição de esforços na malha de cabos, com o contorno semi-rígido, percebe-se que, para o caso em que somente atuam as protensões iniciais, a estrutura se equilibra em torno de uma nova configuração. Ocorre perda na protensão inicial de, aproximadamente, 5% nas duas direções. Essa mesma característica é verificada para o contorno flexível. Quando é considerada a ação das cargas externas, da mesma forma como ocorre para o contorno rígido, os cabos tensores perdem força de protensão e o contrário ocorre para os cabos suspensos. Além disso, percebe-se uma não uniformidade na distribuição de esforços quase tão parecida com a da malha com contorno rígido. Porém, para este caso, a não uniformidade é mais acentuada, principalmente para os cabos tensores.

Constata-se então que, para este contorno, também é válida a malha com propriedades não uniformes, que é uma malha mais econômica e estruturalmente eficiente.

Essas figuras mostram também uma comparação entre a distribuição de esforços para a malha 1 (7 x 7 cabos) e para a malha 3 (31 x 31 cabos). A malha 3 é adotada como sendo aquela que representa integralmente todas as características da malha.

Da mesma forma como ocorre para os outros contornos, a malha com simplificações (malha 1) só fornece bons resultados na região próxima ao centro, para o caso 4 de carregamento.

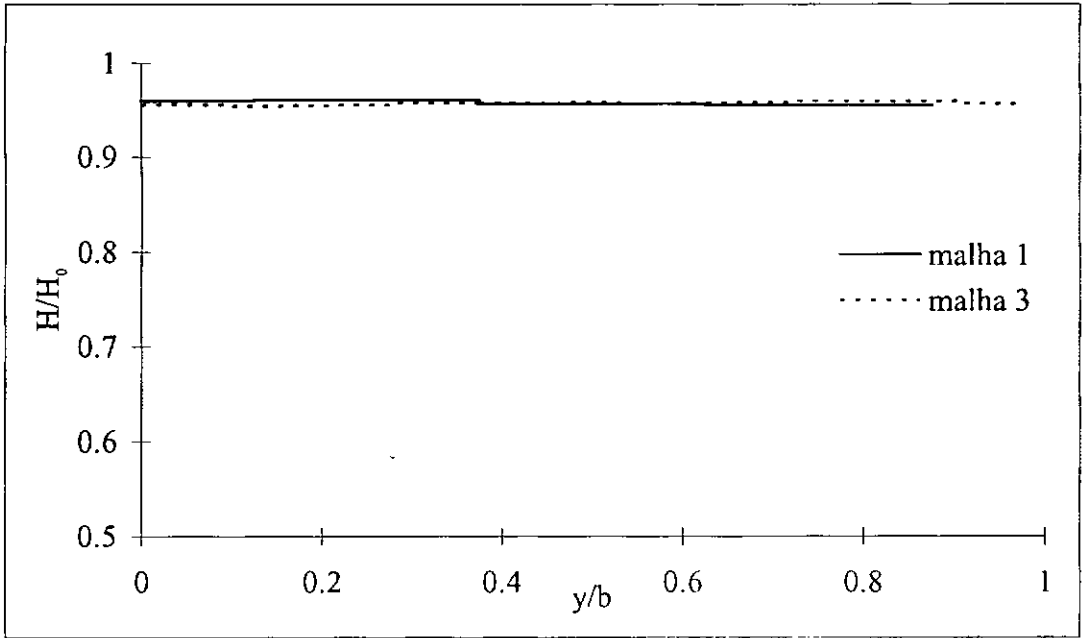


Figura IV.17.a Distribuição de forças nos cabos tensores da malha com contorno semirígido, caso 3

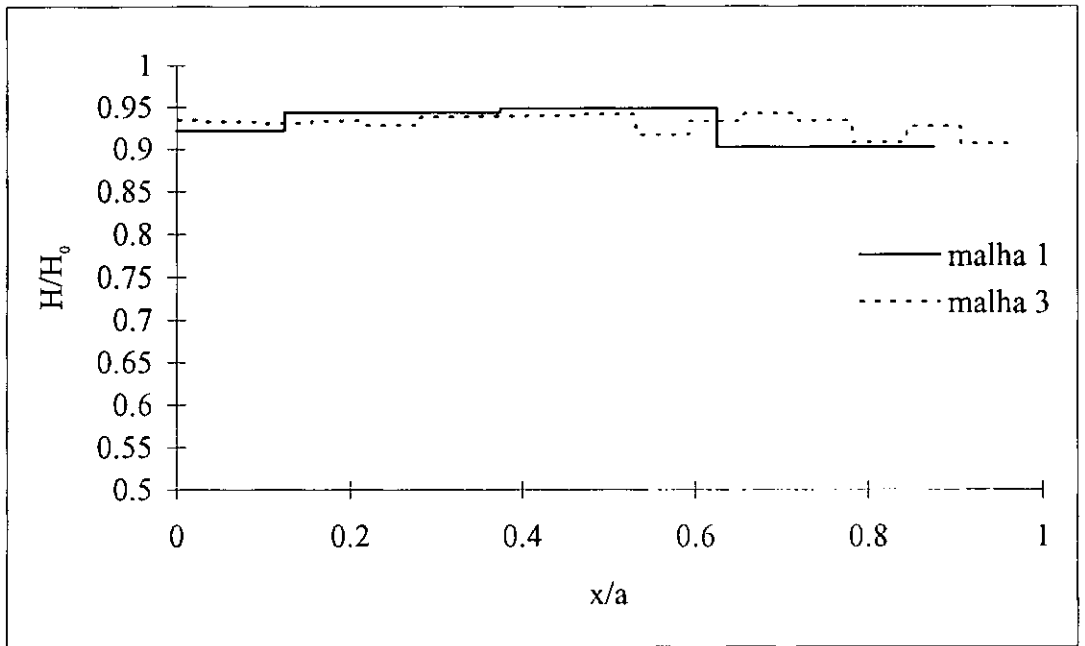


Figura IV.17.b Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha com contorno semirígido, caso 3

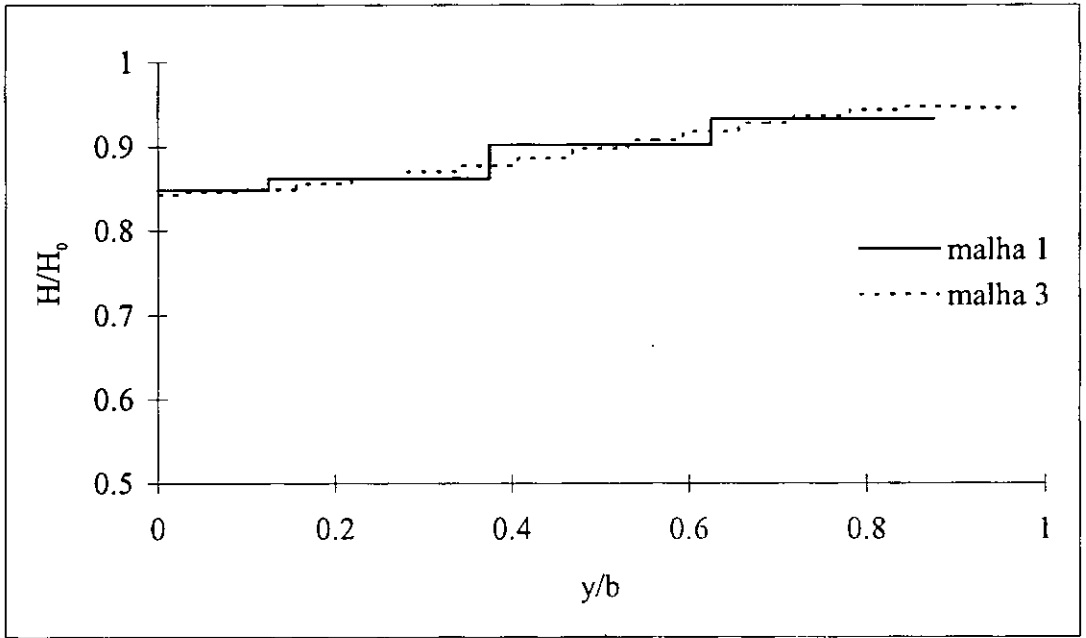


Figura IV.17.c Distribuição de forças nos cabos tensores da malha com contorno semirígido, caso 4

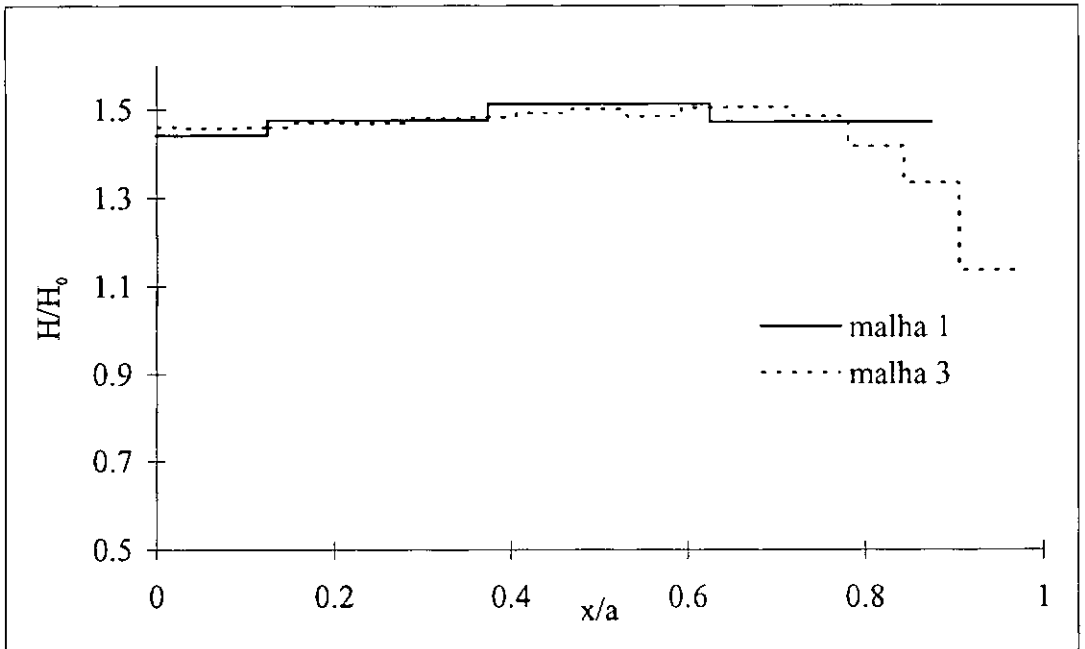


Figura IV.17.d Distribuição de forças nos cabos suspensos da malha com contorno semirígido, caso 4

IV.5.4 Distribuição de Esforços na Viga de Bordo

Nas figuras IV.18 estão mostrados a variação dos esforços normal N (kN) e momento fletor M (kN m) ao longo da viga de bordo. Estes esforços são os mesmos da figura IV.13. A distribuição desses esforços também é mostrada para as malhas 1 (7 x 7 cabos) e 3 (31 x 31) cabos.

A figura IV.18.a mostra a variação do esforço normal. Estão superpostos, nesta figura, a distribuição para o estado inicial (caso 3) e para a configuração final (caso 4). Comparando-se este diagrama com o diagrama de esforço normal para o contorno flexível (figura IV.15.c), percebe-se que este esforço pouco se altera na presença dos pilares. Uma outra semelhança é que o acréscimo desse esforço devido à carga externa é praticamente constante.

A figura IV.18.b mostra a variação do momento M para as malhas 1 e 3. Nos pontos de apoio dos pilares de maior rigidez à flexão (isto é os pilares mais curtos) ocorrem 'picos' na distribuição de momentos. Esse comportamento, evidentemente, não se verifica para o contorno flexível em que a curva de momentos é uma curva bem suave. Entretanto, os momentos que surgem na viga de bordo com contorno semirígido são bem menores.

Um outro aspecto importante a ser observado é que a distribuição de momentos para a malha mais pobre se afasta pontualmente da distribuição para malha mais refinada. Ao se agrupar as características de vários cabos em um único cabo equivalente, como é o caso da malha 1, transferem-se para a viga de bordo forças de ancoragem maiores, alterando a distribuição de momentos no contorno.

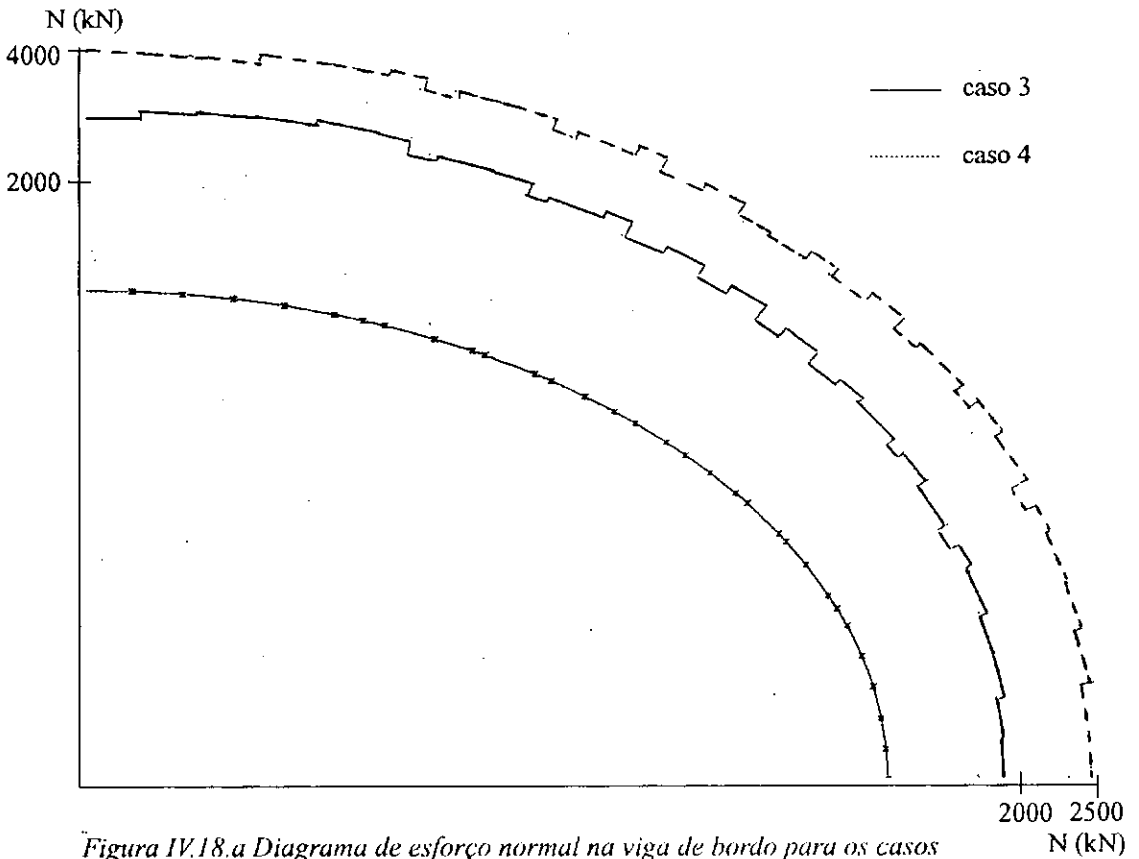


Figura IV.18.a Diagrama de esforço normal na viga de bordo para os casos de carregamento 3 e 4 com o contorno semirígido.

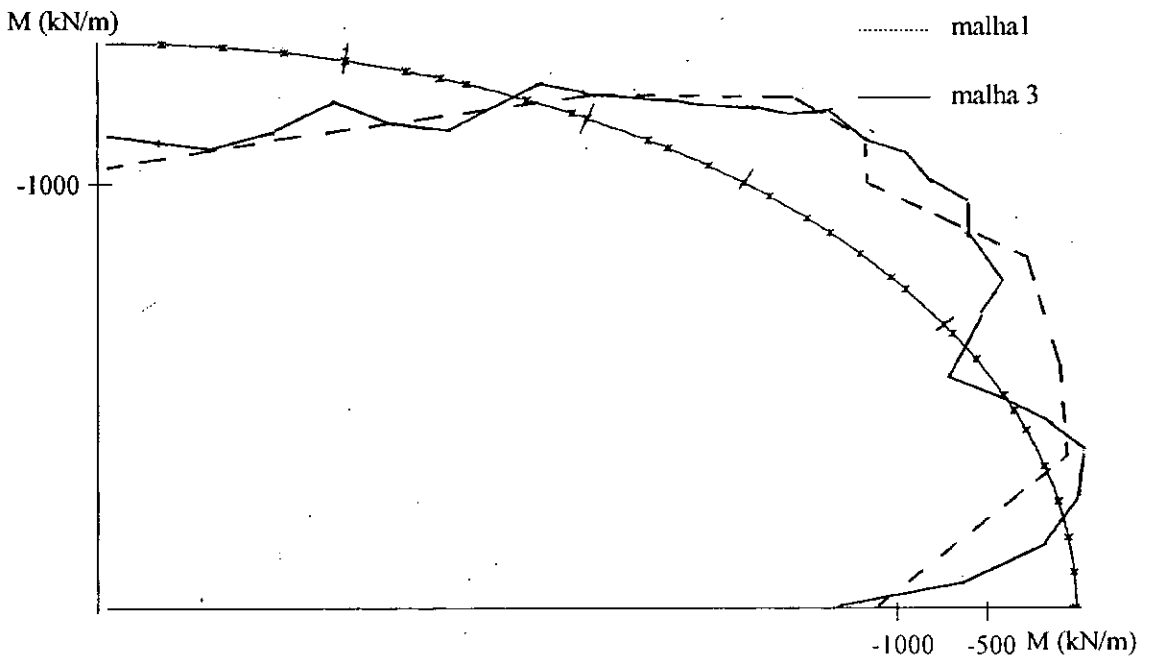


Figura IV.18.b Diagrama de momento fletor na viga de bordo para dois níveis de simplificação da malha com contorno semirígido.

CAPÍTULO V

CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS

V.1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes preocupações em relação a este tipo de estrutura é seu comportamento dinâmico sob ação de vento, já que sendo esbelta a tenso-estrutura pode apresentar oscilações indesejáveis. Alguns casos têm sido reportados na literatura tal como as vibrações induzidas pelo vento na cobertura do 'Raleigh Arena' (ver figura I.1) nos Estados Unidos.

As vibrações devidas ao vento apontam para outro problema: o de fadiga e fadiga sob corrosão dos cabos e principalmente de suas ancoragens que depende das amplitudes das forças dinâmicas nos cabos. Dessa forma o projeto destas estruturas deve envolver também a análise sob ação dinâmica do vento.

Como primeiro passo para a determinação da resposta sob ação de vento procede-se à análise de vibração livre com determinação de modos naturais de vibração e suas frequências. Este capítulo apresenta um estudo destas características dinâmicas para malhas de cabos na forma de parabolóide a partir do mesmo exemplo-base usado no capítulo anterior.

Foram consideradas as várias situações de deformabilidade do contorno: rígido, semi-rígido ou flexível e analisadas suas influências nas frequências naturais e nos modos de vibração.

Para o estudo que se desenvolve, foi considerado o caso 4 de carregamento. É importante salientar que os modos de vibração são referidos à configuração deformada devida à ação do carregamento estático.

V.2 CONTORNO RÍGIDO

Neste item, faz-se um estudo comparativo entre os valores teóricos e os obtidos da modelagem numérica, além de um estudo sobre a influência das cargas externas e das protensões iniciais no problema de vibração livre.

Faz-se, também, estudo sobre a viabilidade em se adotar uma malha simplificada na análise das frequências naturais e modos de vibração.

Para estes estudos, foi analisada uma malha de cabos com contorno rígido, retangular em planta. A equação dessa superfície, bem como as demais propriedades são as mesmas do item IV.2, para o caso 4 de carregamento.

V.2.1 Comparação entre os Resultados Teóricos e os Resultados do Modelo Numérico

As frequências naturais (f (Hz)) teóricas são obtidas com auxílio das equações (II.60) para os modos antissimétricos e (II.61) para os modos simétricos, para uma membrana retangular de características equivalentes, sendo $\alpha_e = 3$.

As citadas equações foram obtidas para ‘membranas’ quadradas e aplicadas para geometria retangular não alongada. No exemplo considerado a relação entre lados do contorno em planta é igual a 1,5.

Quanto à notação, que também será empregada nos demais itens deste capítulo, para $f_{(m,n)}$ e (m,n) (frequências naturais em Hz e modos de vibração) os índices m e n (inteiros, positivos) são o número de meias ondas que a malha faz na direção do seu maior e menor comprimento, respectivamente.

A tabela V.1 apresenta os valores das freqüências naturais (em Hz) dos 4 primeiros modos obtidos teoricamente e os obtidos empregando-se o método dos elementos finitos. Os modos de vibração estão mostrados nas figuras V.1.

Tabela V.1 Freqüências naturais teóricas e numéricas

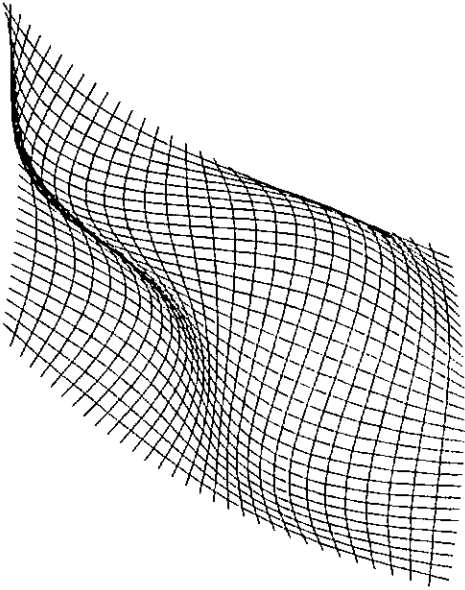
<i>modos</i>	<i>freqüências naturais (Hz)</i>	
	<i>teórico (Irvine)</i>	<i>numérico (MEF)</i>
(1,1)	0,83	***
(2,2)	1,39	1,31
(3,2)	1,59	1,47
(2,3)	1,93	1,68

A primeira observação a ser feita em relação à tabela V.1 diz respeito ao modo (1,1) obtido com as equações de membrana ‘quadrada’ e associado à freqüência igual a 0,83 Hz. Este modo não aparece no modelo numérico indicando que a relação 1:1,5 das dimensões do contorno está além do limite de validade da expressão (II.61). Apesar disso, Irvine [2] utiliza a citada equação para o exemplo em estudo.

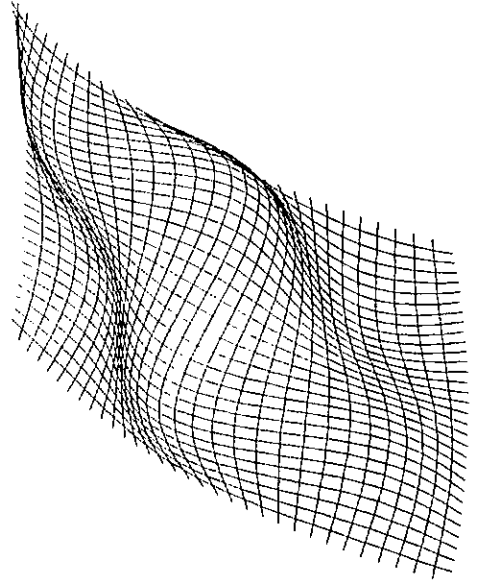
De acordo com o modelo numérico, o modo (2,2) é o primeiro modo antissimétrico e o modo (3,3) o primeiro simétrico. Como se vê nesta tabela, as freqüências teóricas e numéricas associadas aos modos antissimétricos se comparam relativamente bem apesar da hipótese de contorno ‘quadrado’ a que estão sujeitos os resultados teóricos.

Uma característica importante desta estrutura está mostrada nesta tabela: é a relativa proximidade das freqüências naturais.

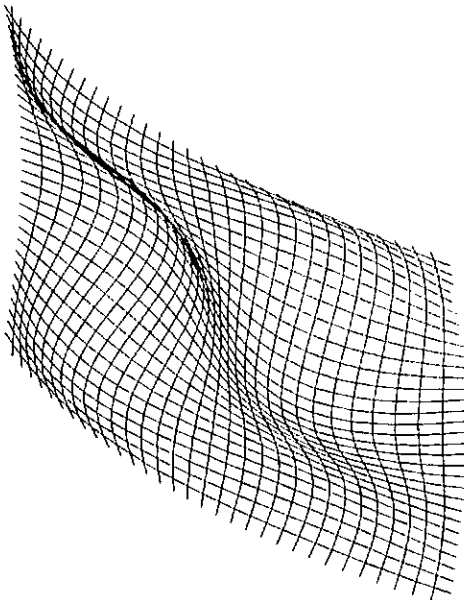
Em termos de ordem de grandeza das freqüências naturais observa-se neste exemplo que apesar de cobrir grandes vãos (90 m x 60 m) as freqüências não são tão baixas em função da alta protensão dada nos cabos. Para o exemplo considerado as vibrações devidas ao vento não seriam grandes já que o espectro de velocidade de vento tem pequenas amplitudes acima de 1 Hz [25].



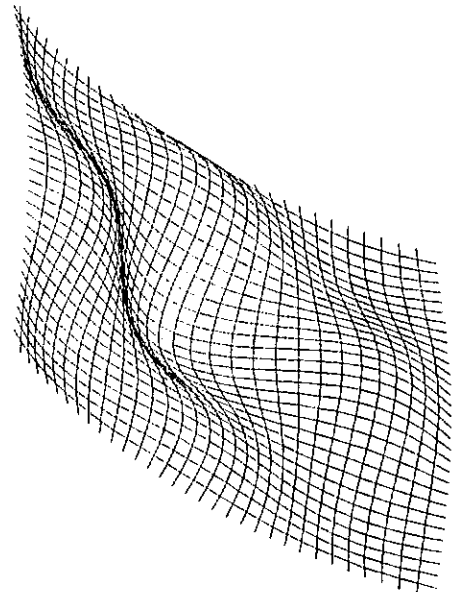
a. Modo (2,2); $f = 1,31$ Hz



b. Modo (3,2); $f = 1,47$ Hz



c. Modo (2,3); $f = 1,68$ Hz



d. Modo (3,3); $f = 1,81$ Hz

Figura V.1 Primeiros modos de vibração da malha de cabos com planta retangular

V.2.2 Influência das Cargas Externas e das Protensões Iniciais nas Freqüências Naturais

A figura V.2.a mostra a variação das freqüências naturais f em Hz, com a carga de gravidade, apresentadas na forma adimensional $(p/2a/1000)/(EA)_x$. Os demais parâmetros foram mantidos constantes.

Observa-se, nesta figura, que a medida que as cargas externas aumentam, as freqüências se tornam menores e mais próximas. Ou seja, coberturas pesadas ou com sobrecarga elevada tendem a sofrer maiores efeitos da ação dinâmica do vento.

Conclui-se então que para uma dada protensão inicial dos cabos o aumento das cargas externas, embora possa alterar um pouco a rigidez da estrutura e as forças resultantes nos cabos, tem efeito predominante o aumento de massa, que faz com que as freqüências naturais, pela equação (III.3) diminuam.

A figura V.2.b mostra a variação das freqüências naturais, em Hz, com a protensão inicial, na forma adimensional $H_0/(EA)_x$. Os demais parâmetros foram mantidos constantes.

Percebe-se que quanto mais tensionada é a estrutura, maiores e mais afastadas são as suas freqüências naturais, de acordo com o esperado da teoria de vibrações de cabos e malhas de cabos protendidas; vide equação (II.61). Aumentar a protensão constitui, então, um eficiente recurso para elevar as freqüências naturais.

Por outro lado, para uma dada protensão, o acréscimo de rigidez axial dos cabos em nada contribui para elevar as freqüências uma vez que as forças nos cabos permanecem iguais (ver figura IV.5.b).

Então, a estrutura ideal, sob o ponto de vista da análise dinâmica, seria aquela projetada com pouca sobrecarga e cabos leves sujeitos a uma protensão inicial elevada.

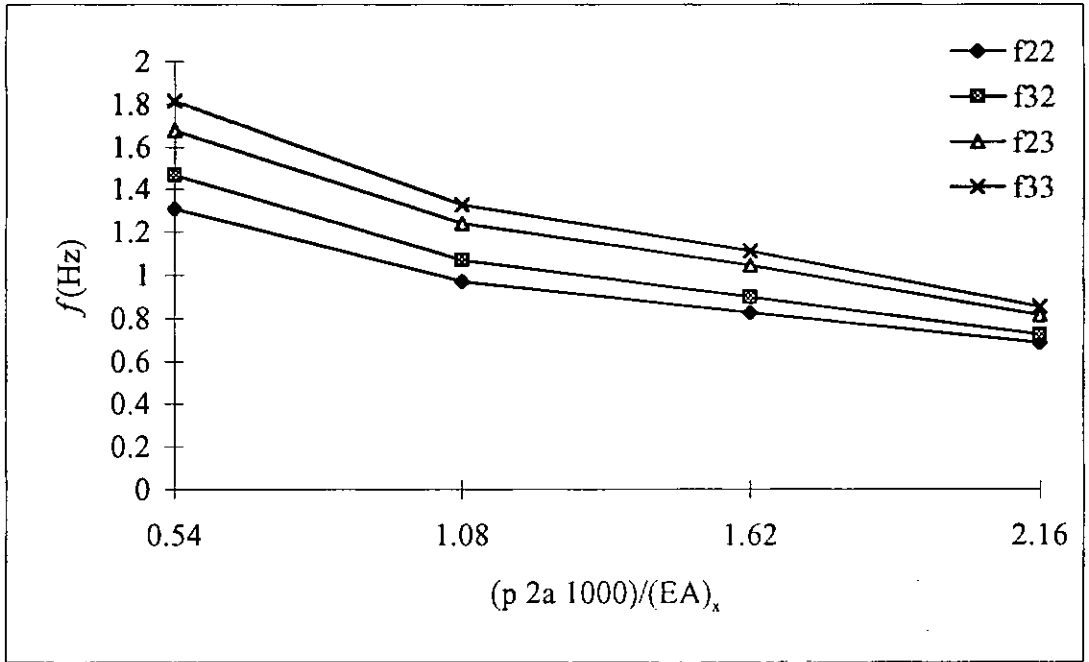


Figura V.2.a Variação das frequências naturais com o carregamento (caso 4, contorno retangular)

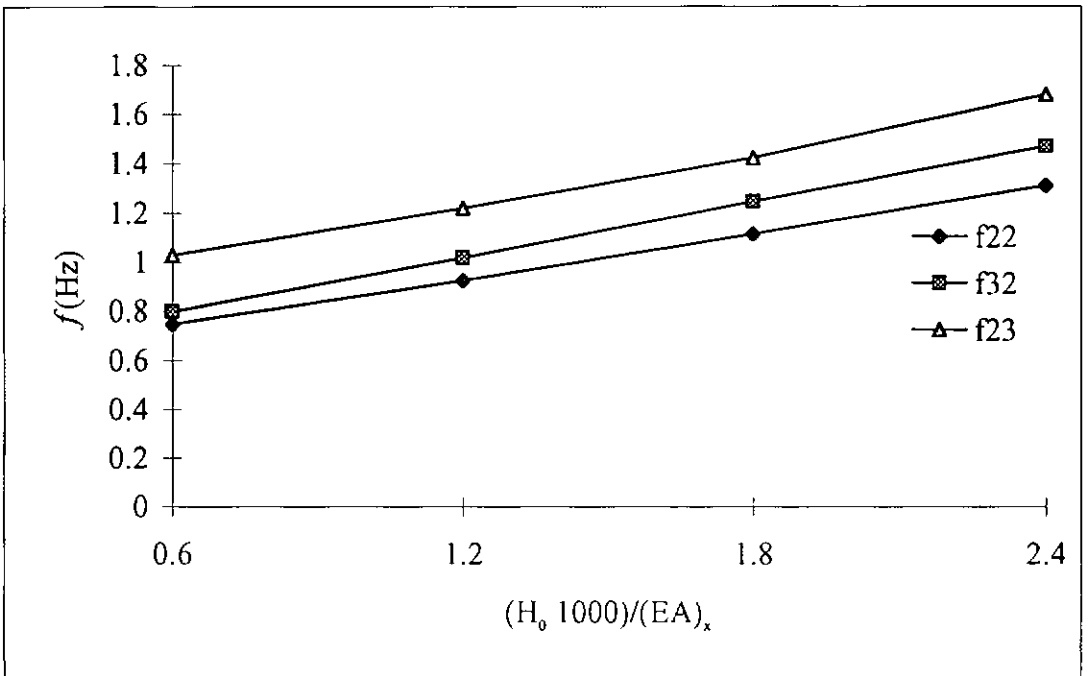


Figura V.2.b Variação das frequências naturais com a protensão inicial (caso 4, contorno retangular)

V.2.3 Simplificações na Malha de Cabos

A adoção de malhas simplificadas assume maior importância para a análise dinâmica ou estática para carga não simétrica, uma vez que a malha deve ser estudada integralmente, com todos os seus nós e elementos.

Foram consideradas 3 níveis de simplificação de modelo numérico:

malha 1: 7 x 7 cabos;

malha 2: 15 x 15 cabos;

malha 3: 31 x 31 cabos.

Mais uma vez, assume-se que a malha 3 representa as características reais da estrutura, as outras duas malhas representam simplificações da malha 3.

A tabela V.2 mostra os valores das frequências naturais encontrados para os 3 níveis de discretização considerando o contorno rígido.

Tabela V.2 Frequências naturais para as 3 malhas

<i>modos</i>	<i>frequências naturais (Hz)</i>		
	<i>malha 1</i>	<i>malha 2</i>	<i>malha 3</i>
(2,2)	1,27	1,30	1,31
(3,2)	1,42	1,46	1,47
(2,3)	1,63	1,67	1,68
(3,3)	1,75	1,80	1,81
(5,2)	1,76	1,82	1,84

Percebe-se por essa tabela que as simplificações de modelagem da malha não alteram significativamente as frequências naturais da estrutura.

Com isso, para estruturas com um número muito elevado de nós, se houver conveniência da redução do número de graus de liberdade, pode-se agrupar vários cabos

em um único cabo equivalente, redistribuindo igualmente as propriedades entre o nós e elementos.

V.3 CONTORNOS SEMI-RÍGIDO E FLEXÍVEL ELÍPTICOS

Nesta análise, é considerada a flexibilidade do contorno. As características geométricas e as propriedades da malha de cabos são as mesmas definidas no item IV.4.1 para o contorno flexível e elíptico em planta.

As frequências naturais foram associadas aos modos (m,n) de vibração e estão mostradas na tabela V.3, onde também são dados os valores das frequências naturais para o contorno rígido com as mesmas características.

A influência da viga de bordo também está mostrada nesta tabela, pois foram obtidos valores para uma viga de dimensões 2 m x 0,5 m e outra, mais flexível, de dimensões 1 m x 0,25 m.

As formas modais para o contorno flexível estão mostradas nas figuras V.3, juntamente com a sua vista em planta.

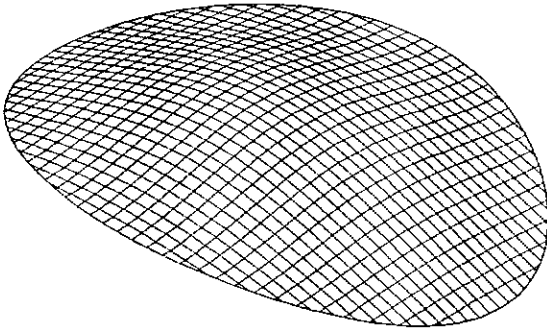
Tabela V.3 Frequências naturais para a estrutura com contorno elíptico rígido, semi-rígido e flexível

modos	frequências naturais (Hz)				
	rígido	semi rígido		flexível	
		viga (2x0,5)	viga (1x0,25)	viga (2x0,5)	viga (1x0,25)
(1,1)	***	***	***	0,62	0,63
(1,2)	1,17	1,09	1,01	0,98	0,88
(2,1)	***	1,48	1,31	1,25	0,90
(2,2)	1,28	1,25	1,15	1,22	1,16
(1,3)	1,47	1,53	1,39	1,33	1,18
(3,1)	***	1,23	1,09	1,54	1,38
(3,2)	1,58			1,64	1,46
(2,3)	1,59			1,65	1,50

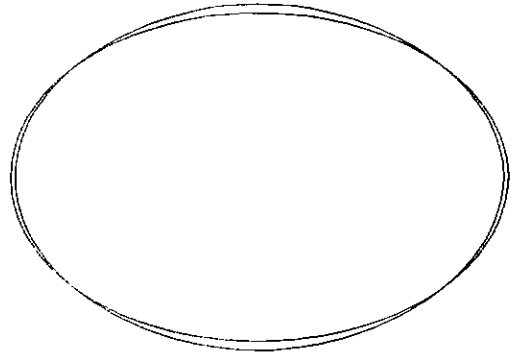
(***) A ausência de valores numéricos significa que estes não foram detectados na faixa

Verifica-se pela tabela V.3 que a viga de bordo exerce influência sobre as frequências naturais da cobertura, pois as frequências obtidas para a viga de bordo 2 x 0,5 para o contorno flexível e semi rígido são ligeiramente maiores do que as obtidas para a viga 1 x 0,25.

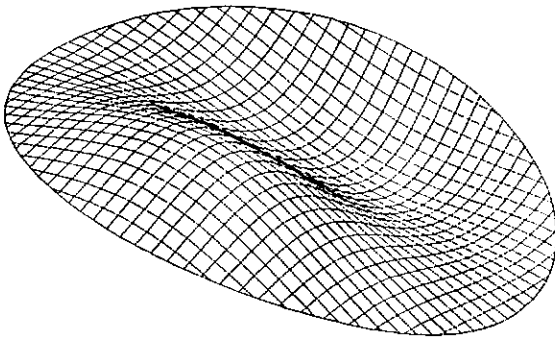
Outra característica é que a estrutura apresenta frequências naturais muito baixas e próximas, sendo por isso suscetível à ação de vento turbulento. Torna-se então necessária a colocação de um sistema de amortecimento capaz de atenuar essa situação, como, por exemplo a colocação de uma série de cabos (cabos espia) ancorados, em uma das extremidades, à cobertura e, na outra, em pontos fixos, fora da superfície. Estes cabos então amenizam a ação do vento e de outras cargas dinâmicas, pois diminuem as amplitudes dos deslocamentos.



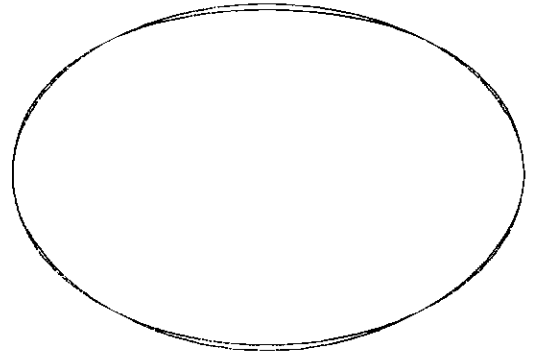
a. Modo (1,1); $f = 0,63$ Hz



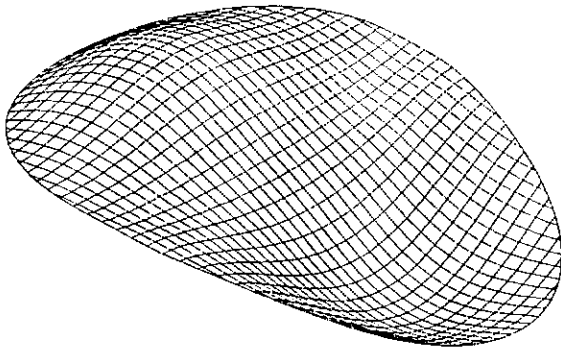
Vista em planta



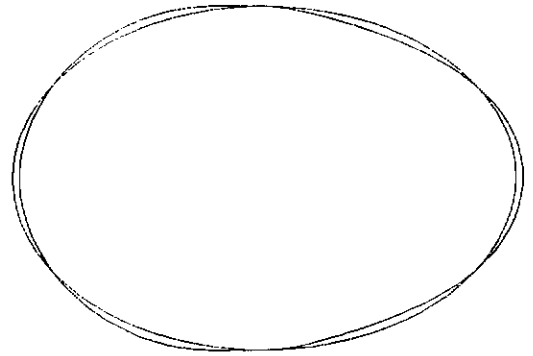
b. Modo (1,2); $f = 0,88$ Hz



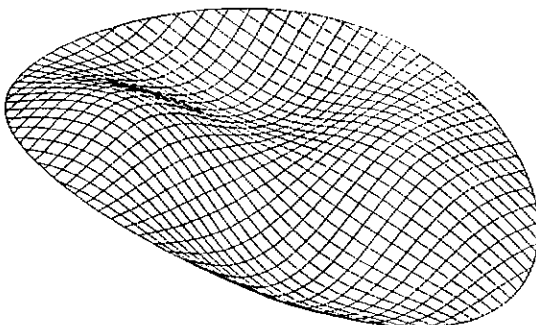
Vista em planta



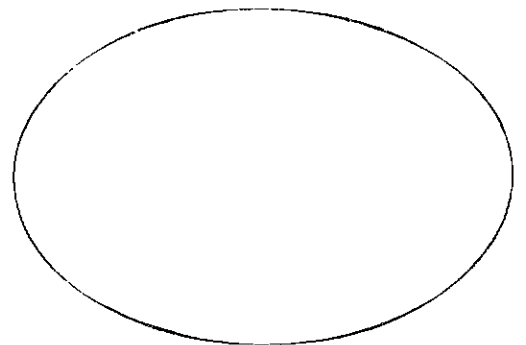
c. Modo (2,1); $f = 0,90$ Hz



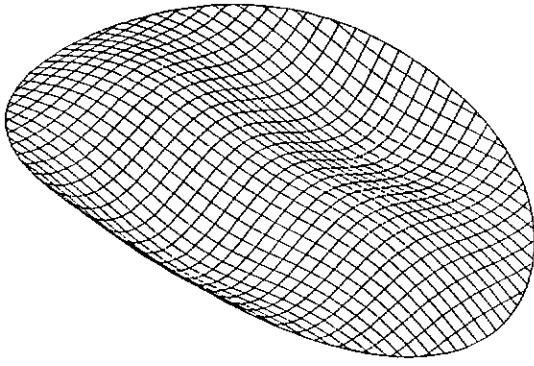
Vista em planta



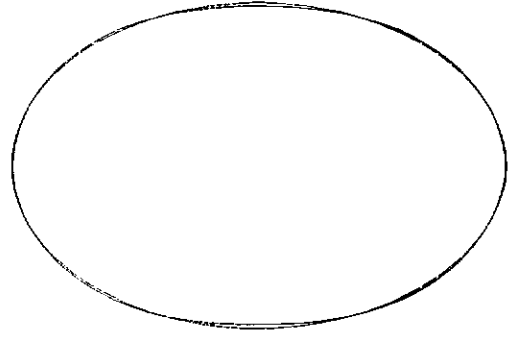
d. Modo (2,2); $f = 1,16$ Hz



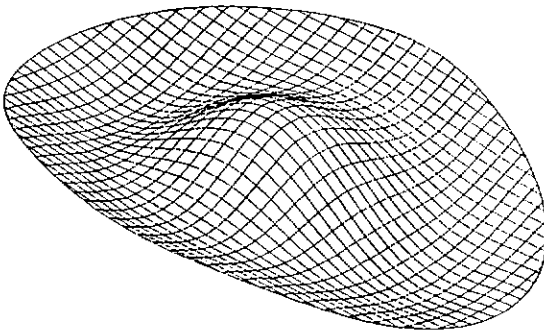
Vista em planta



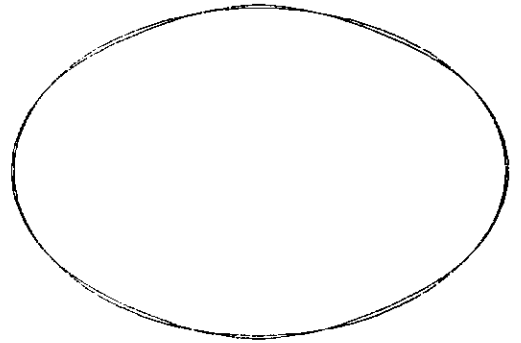
e. Modo (1,3); $f = 1,18$ Hz



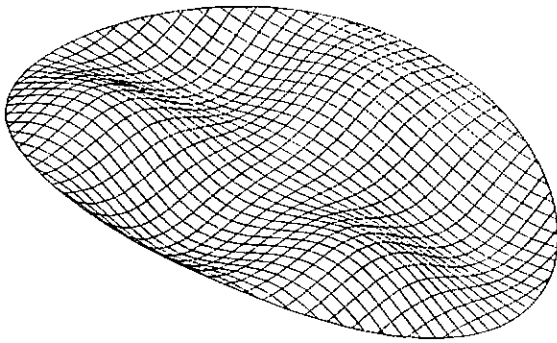
Vista em planta



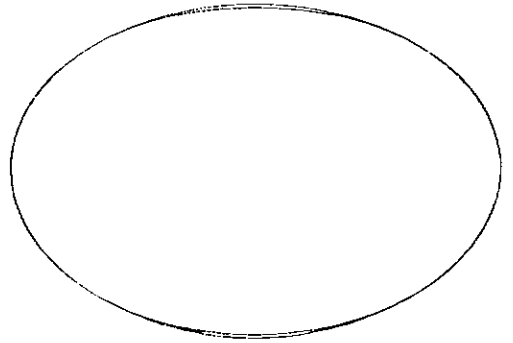
f. Modo (3,1); $f = 1,38$ Hz



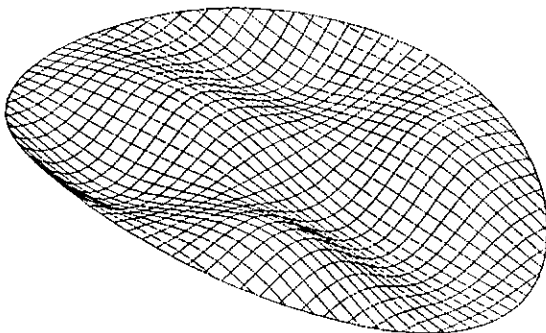
Vista em planta



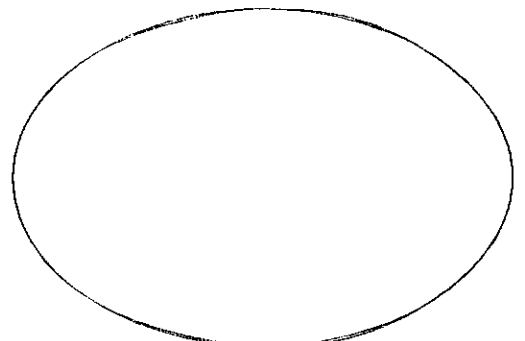
g. Modo (3,2); $f = 1,46$ Hz



Vista em planta



h. Modo (2,3); $f = 1,50$ Hz



Vista em planta

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um estudo sobre o comportamento de tenso-estruturas na forma de parabolóide hiperbólico. O exemplo que serviu de base aos estudos foi concebido a partir da abordagem clássica do problema com a malha de cabos vista como um contínuo.

A determinação do valor da protensão a ser aplicada aos cabos tensores apenas foi feita com um modelo aproximado proposto neste trabalho, e baseado nas equações de cabo isolado, o qual se comparou bem ao resultado numérico.

Da análise paramétrica referente ao comportamento estático, conclui-se que:

- A aplicação da protensão ‘simultaneamente’ aos cabos tensores e suspensos mantém a geometria de montagem, enquanto que a aplicação da protensão aos cabos tensores contra os cabos suspensos produz uma nova superfície inicial. Entretanto o carregamento uniforme produz deslocamentos adicionais similares nos dois casos de protensão. Já a distribuição de esforços nos cabos próximos ao contorno apresenta diferenças nos dois casos.

- O comportamento em termos de carga uniformemente distribuída versus deslocamento é linear para os casos analisados de malhas abatidas de contornos rígido e semi-rígido, seja retangular ou elíptico, enquanto todos os cabos estiverem tracionados. Por isso houve boa correlação entre os resultados do modelo numérico e os teóricos oriundos da teoria linear de membrana aplicada à malha de cabos. Para o contorno flexível observou-se um comportamento não linear com ganho de rigidez.

- O acréscimo da protensão, para o caso de contorno rígido e um dado valor de carga uniforme, com o objetivo de ‘enrijecer’ a malha a partir do seu esticamento, não é uma medida eficiente, já que os decréscimos de deslocamentos são proporcionalmente

pequenos em alguns pontos da malha e até nulos no centro. Por sua vez, a rigidez axial dos cabos, ao contrário da protensão, tem grande influência na rigidez da malha. A taxa de enrijecimento decai com o acréscimo da seção transversal dos cabos a partir de um certo valor. Esses resultados, entretanto, não são conclusivos já que não foi explorada a influência conjunta das curvaturas.

Quanto à variação dos esforços nos cabos verificou-se uma grande influência da flexibilidade do contorno:

- Para o contorno rígido e semi-rígido, a aplicação da carga externa de gravidade produz acréscimo de tração nos cabos suspensos e decréscimo de tração para os cabos tensores. Para o contorno flexível, percebe-se que tanto os cabos suspensos quanto os tensores têm seus esforços aumentados com a carga externa.

- A partir da distribuição de esforços nos cabos, verificou-se que há interesse prático na adoção de malhas não uniformes, com cabos próximos ao contorno com menor seção transversal que os cabos centrais. Essas malhas têm comportamento semelhante ao das malhas com propriedades uniformes, com a vantagem de serem mais econômicas.

- Com exceção da distribuição de momentos fletores no contorno semi-rígido e da distribuição de esforços nos cabos próximos ao contorno verificou-se que os modelos numéricos simplificados, agrupando-se vários cabos em um único cabo e redistribuindo igualmente as propriedades entre os elementos e nós, representam bem o comportamento da malha.

Da análise das características dinâmicas da cobertura, conclui-se que:

- A protensão tem bastante influência na magnitude das frequências naturais. Aumentar a protensão constitui um eficiente recurso para elevar as frequências, ao contrário do acréscimo de rigidez axial dos cabos que em nada contribui neste sentido.

Pode-se dizer que a estrutura ideal, sob o ponto de vista da análise dinâmica, seria aquela projetada com pouca sobrecarga e cabos sujeitos a uma protensão inicial elevada.

- A malha de cabos do exemplo-base associada a um contorno rígido não apresentou frequências muito baixas em função da alta protensão nos cabos. A mesma malha associada a um contorno flexível, além de apresentar um maior número de modos (relativamente próximos entre si) em uma mesma faixa de frequências, teve suas frequências bem reduzidas. Nesse último caso a estrutura fica suscetível à ação dinâmica do vento.

- As simplificações no modelo numérico nos casos analisados não alteraram significativamente as frequências naturais da estrutura.

Como sugestão para continuação desse trabalho os seguintes aspectos podem ser citados:

a - Investigação da influência das curvaturas da superfície no comportamento das malhas, utilizando exemplos com curvaturas muito acentuadas.

b - Análise de superfícies não regradadas, cujo aspecto mais difícil é a determinação da geometria da superfície a partir do procedimento de montagem, que em geral envolve a confecção da malha no solo e posterior elevação aos pontos de apoio tais como mastros ou arcos.

c - Análise dinâmica dessas estruturas sob ação de vento turbulento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] OTTO, F., *Tensile Structure*, Vols. 1 e 2 .Cambridge, Mass: The MIT Press, 1967.
- [2] IRVINE, H. H., *Cable Structures*, Cambridge, Mass: The MIT Press., 1981.
- [3] BUCHHOLDT, H. A., *An Introduction to Cable Roof Structures*, Cambridge, University Press, 1985.
- [4] FISCHER, LADISLAV, *Theory and Practice of Shell Structures*, publicado por Wilhelm Ernest & Sohn, Berlin - Munich, 1968.
- [5] KRISHNA, P., *Cable Suspended Roofs*, McGraw-Hill, 1978.
- [6] FLÜGGE, Wilhelm, *Stresses in Shells*, Springer - Verlag, 1966.
- [7] PFEIL, MICHÈLE, *MEDIFEM - Um Sistema Computacional para Análise de Estruturas em Micro-computador*, Seminário de doutorado, maio de 1991.
- [8] NEVES, FRANCISCO DE ASSIS DAS, *Vibrações de Estruturas Aperticadas Espaciais Estaiadas*, UFRJ COPPE-PEC, Rio de Janeiro, 1990.
- [9] ZIENKIEWICZ, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill.
- [10] MERIAM, J. L., *Estática*, LTC editora, 1985, Rio de Janeiro.
- [11] Notas de Aula do curso de 'Análise Estrutural I', professor Ronaldo Carvalho Batista, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[12] MÁRCIO, M. M., *Análise de Estruturas Marítimas e Sistemas Flexíveis Constituídos por Cabo*, UFRJ COPPE, Rio de Janeiro, 1984.

[13] SUBCOMITTEE ON CABLE-SUSPENDED STRUCTURES OF THE TASK COMMITTEE ON SPECIAL STRUCTURES, OF THE COMMITTEE ON METALS, OF THE STRUCTURAL DIVISION, *Cable-Suspended Roof Construction State-of-the-Art*, Proceeding of the American Society of Engineers, Journal of the Structural Division, junho 1971.

[14] PEYROT, A. H. e GOULOIS, A.M., *Analysis of Cable Structures*, *Computers & Structures* volume 10, páginas 805- 813, Pergamon Press Ltd, 1979.

[15] EKHANDI. SHANTARAM G. e MADAGULA, MURTY K.S., *Geometric Non-Linear Analysis of Three-Dimensional Guyed Towers*, *Computers & Structures* volume 29, nº 5, páginas 801-806, Pergamon Press Ltd, 1988.

[16] DESAI, Y. M., POPPLEWELL, N., SHAH, A. H. e BURAGOHAJAN, D. N., *Geometric Nonlinear Static Analysis of Cable Supported Structures*, *Computers & Structures*, volume 29, nº 6, páginas 1001-1002, 1988.

[17] MOENAERT, P., *Calcul Simplifiée de Toitures a Double Courbure Soutenus par des Cables*, *Shells Structures, Paduart Dutron*, Proceeding of the Colloquium on Simplified Calculation Methods, páginas 206 à 211, setembro, 1961.

[18] BERNARDES, S., FRAGOSO, P., *Projeto Arquitetônico e Estrutural do Pavilhão de São Cristóvão*, Rio de Janeiro, 1958.

[19] LEONHARDT, F. e SCHLAICH, J., *Structural Design of Roofs Over the Sports Arenas for the 1972 Olympic Games: some problems of prestressed cable net structures*, *Structural Engineers*, março 1972, nº 3, volume 50.

- [20] DAVID, RITA A. e BARBATO, R. L. ARUDA, *Análise Numérica de Cestas Protendidas*, XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, páginas 451-462, Tucúman, Argentina, 18 a 22 de setembro de 1995.
- [21] BARBATO, R. L. ARUDA, *Protensão de Cestas e de Cabos-Treliça*, XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, páginas 475-485, Tucúman, Argentina, 18 a 22 de setembro de 1995.
- [22] FORSTER, BRIAN, *Cable and Membrane Roofs - A Historical Survey*, *Structural Engineering Review*, volume 6, número 3-4, páginas 145-174, 1994.
- [23] BARNES, MICHAEL, *Form and Stress Engineering of Tension Structures*, *Structural Engineering Review*, volume 6, número 3-4, páginas 175-202, 1994.
- [24] CIMAF - CABOS DE AÇO, *Catálogo C-7*, novembro, 1982, Rio de Janeiro.
- [25] SIMIU, E., *Wind Effects on Structures*, McGraw-Hill, 1986.
- [26] MAJOWIECKI, M., *Tensostrutture: progetto e verifica*, CISIA, Milano, 1985.