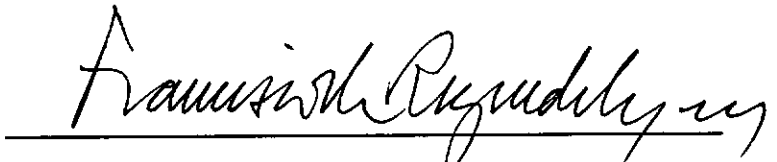


# APLICAÇÕES DE UM MODELO REOLÓGICO PARA SOLOS

**Leonardo José do Nascimento Guimarães**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Prof. Francisco de Rezende Lopes, Ph. D.

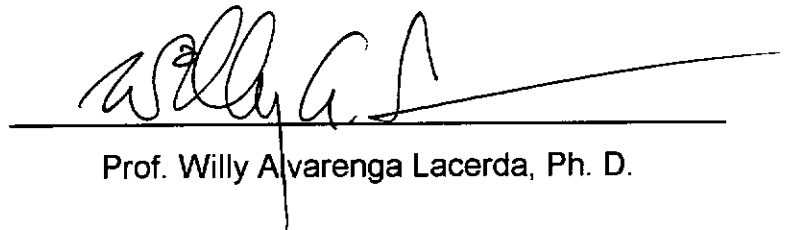
(Presidente)



Prof. Ian Schumann Marques Martins, D. Sc.



Prof. Ivaldo Dário da Silva Pontes Filho, D. Sc.



Prof. Willy Alvarenga Lacerda, Ph. D.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Outubro de 1996

**GUIMARÃES, LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO**

**APLICAÇÕES DE UM MODELO REOLÓGICO PARA SOLOS (Rio de Janeiro, 1996)**

viii , 169 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Deformação
2. Resistência ao Cisalhamento

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade e força de vontade para realizar este trabalho.

A meus tios Aluísio e Mirian, e meus primos Daniel e Mônica, por me receberem com toda boa vontade e atenção durante estes dois anos de mestrado.

A meus pais, Heraldo e Cristina, e irmãos, Gustavo e Cristiana, pelo apoio fundamental em minha vida.

Ao Professor Francisco Lopes, pela dedicada orientação e amizade demonstradas ao longo da tese.

Ao Professor Ian Martins, pelas contribuições e co-orientação deste trabalho.

Aos meus colegas de mestrado Sérgio Galvão e Jorge Campinho, pela amizade e companheirismo, que desde já deixa saudades.

Aos membros da banca examinadora, por lerem este trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

E à minha namorada Josilene, pelos meses de difícil espera e por seu amor durante todos estes anos, verdadeiro presente que Deus me deu.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

## APLICAÇÕES DE UM MODELO REOLÓGICO PARA SOLOS

Leonardo José do Nascimento Guimarães

Outubro de 1996

Discute-se o comportamento mecânico de natureza viscosa e friccional dos solos saturados e sem cimentação à luz do modelo proposto por Martins (1992). Inicialmente é feita uma revisão do referido modelo e sua aplicação ao fenômeno do creep (fluência) não-drenado. Apresenta-se um algoritmo para resolver a equação diferencial que rege o fenômeno baseado no método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem. Seguindo Martins (1992), examina-se a validade do modelo para a argila da Baía de San Francisco a partir dos ensaios triaxiais não-drenados convencionais (CIU) e de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) e obtém-se os parâmetros deste solo para o modelo, complementando o trabalho de Martins (1992). Com base no método de integração apresentado, reproduzem-se os ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. É realizado um ajuste dos parâmetros do modelo a partir de resultados de laboratório com técnicas de otimização. Os resultados mostraram que o modelo proposto por Martins (1992) reproduz de maneira bastante satisfatória os ensaios estudados. Formula-se o modelo para o estado multiaxial de tensão e deformação, diferente daquele de simetria axial para o qual foi inicialmente desenvolvido. Com isto, definiram-se as relações constitutivas do material utilizadas na aplicação Método dos Elementos Finitos ao problema de fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes) da Mecânica dos Fluidos. Esta aplicação mostrou-se coerente com as soluções do modelo para os ensaios de laboratório desenvolvidas por Martins (1992). Um caso fictício de campo, em que se admite um estado de tensão-deformação multiaxial, é analisado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## APPLICATIONS OF A RHEOLOGICAL MODEL FOR SOILS

Leonardo José do Nascimento Guimarães

October, 1996

The viscous and frictional nature of saturated soils is discussed in the light of a model proposed by Martins (1992). Firstly the model is reviewed together with its application to creep. An algorithm for the numerical solution of the differential equation that governs the phenomenon is presented. Following Martins (1992), the validity of the model for the prediction of the behaviour of the San Francisco Bay Mud is examined, and parameters for the model are obtained. With the numerical solution, creep tests performed by Lacerda (1976) are reproduced. A further adjustment of the parameters is carried out with an optimization technique. The results show that Martin's (1992) model predicts quite well the laboratory tests. The model is then formulated for the multi-axial condition which occurs in the field and implemented in a finite element solution. The problem is dealt with as the viscous behaviour of incompressible fluids (Stokes Problem). The applications made with the finite element solution show good agreement with laboratory test results. A field case is also presented.

## ÍNDICE

	PÁGINA
<b>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</b> _____	<b>1</b>
I.1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES _____	1
I.2 - OBJETIVOS DA TESE _____	2
I.3 - ORDENAÇÃO DOS CAPÍTULOS _____	2
 <b>CAPÍTULO II - REVISÃO DO MODELO PROPOSTO POR</b>	
<b>MARTINS (1992)</b> _____	<b>5</b>
II.1 - INTRODUÇÃO _____	5
II.2 - FUNDAMENTOS DO MODELO _____	5
II.2.1 - O Princípio das Tensões Efetivas _____	5
II.2.2 - O Fenômeno da Viscosidade _____	7
II.2.3 - O Fenômeno do Atrito _____	8
II.2.4 - O Atrito Interno numa Massa de Solo _____	10
II.2.5 - O Estado de Simetria Axial _____	12
II.2.6 - O Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb _____	14
II.3 - O MODELO _____	16
II.3.1 - Uma Visão Microscópica do Fenômeno _____	16
II.3.2 - O Princípio das Tensões Efetivas Expandido _____	21
II.3.3 - As Elipses de Coulomb e de Taylor _____	22
II.3.4 - Redefinição do Critério de Ruptura em Solos _____	24
II.3.5 - Direções dos Planos de Ruptura _____	26
II.4 - ENSAIOS TRIAXIAIS NÃO-DRENADOS	
CONVENCIONAIS _____	29
II.4.1 - Introdução _____	29
II.4.2 - Normalização das Curvas $p' \times q'$ , $q' \times \epsilon_1$ , e $u \times \epsilon_1$ _____	32
II.4.3 - O Efeito da Velocidade _____	36
II.4.4 - Normalização Global _____	41
II.4.5 - A Poro-Pressão _____	43

<b>CAPÍTULO III - APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO POR MARTINS (1992) AO FENÔMENO DO CREEP NÃO-DRENADO</b>	<b>46</b>
III.1 - INTRODUÇÃO	46
III.2 - A LEI DE TAYLOR	47
III.3 - O MECANISMO DO CREEP À LUZ DO MODELO	47
III.4 - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DO SOLO	50
III.5 - A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO CREEP SEGUNDO MARTINS (1992)	51
III.6 - APROXIMAÇÕES MATEMÁTICAS PARA AS CURVAS PROPRIEDADES DO SOLO	55
III.7 - A EQUAÇÃO DIFERENCIAL COMPLETA DO CREEP NÃO-DRENADO	58
III.8 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO CREEP	59
 <b>CAPÍTULO IV - ENSAIOS NA ARGILA DA BAÍA DE SAN FRANCISCO</b>	 <b>65</b>
IV.1 - INTRODUÇÃO	65
IV.2 - ENSAIOS NÃO-DRENADOS CONVENCIONAIS	66
IV.3 - ENSAIOS DE CREEP NÃO-DRENADO	69
IV.3.1 - Introdução	69
IV.3.2 - Reprodução e Análise dos Ensaios	72
IV.3.3 - A Técnica de Otimização na Obtenção de Parâmetros	88
 <b>CAPÍTULO V - FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	 <b>102</b>
V.1 - INTRODUÇÃO	102

V.2 - EXTENSÃO DO MODELO PROPOSTO POR MARTINS (1992) PARA O ESTADO DE TENSÃO- DEFORMAÇÃO MULTIAXIAL	103
V.2.1 - O Princípio das Tensões Efetivas Expandido	103
V.2.2 - Generalização do Conceito de Ângulo de Atrito Mobilizado e Estabelecimento das Relações Constitutivas do Material	109
V.3 - IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	117
V.3.1 - Alternativas de Abordagem	117
V.3.2 - As Equações que Regem o Problema de Stokes	120
V.3.3 - O Problema da Elasticidade Incompressível e sua Formulação Mista	123
V.4 - FORMULAÇÃO COMPLETA DO PROBLEMA	128
V.5 - CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS A RESPEITO DA IMPLEMENTAÇÃO	138
<b>CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES</b>	<b>141</b>
VI.1 - INTRODUÇÃO	141
VI.2 - CASOS DE SIMETRIA AXIAL	142
VI.2.1 - Ensaio de Creep Não-Drenado	143
VI.2.2 - Ensaio Convencionais	143
VI.3 - CASO MULTIAXIAL: ENSAIOS FICTÍCIOS DE PLACA	153
<b>CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS</b>	<b>161</b>
VII.1 - CONCLUSÕES	161
VII.2 - SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	166
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>168</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### I.1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Devido à grande influência do tempo ou da velocidade de carregamento no comportamento mecânico dos solos, o estudo dos fenômenos viscosos vêm atraindo cada vez mais a atenção dos pesquisadores e engenheiros ligados à Geotecnia. Infelizmente neste campo de estudos da Mecânica dos Solos ainda há uma grande carência de conhecimentos a respeito dos mecanismos responsáveis por este comportamento viscoso. Sem este entendimento é impossível chegar a um conjunto coerente de equações que represente matematicamente o comportamento dos solos.

Segundo Lacerda (1976), três são as linhas de estudo de comportamento dos solos dependente do tempo existentes: Teoria dos Processos Cinéticos, modelos reológicos e modelos empíricos. Em relação a estes dois últimos, fazendo-se uma análise crítica, sem no entanto menosprezar suas importâncias no desenvolvimento teórico do assunto e pela praticidade de aplicação em situações reais de Engenharia, há sérias limitações em suas concepções que não podem passar despercebidas.

Modelos empíricos, como o de Singh e Mitchell (1968), não explicam nem se preocupam como os fenômenos viscosos ocorrem fisicamente, sendo na realidade simples ajustes de curvas de expressões conhecidas aos pontos experimentais dos ensaios. Por outro lado, modelos reológicos de molas, amortecedores e elementos de atrito combinados baseiam-se em idealizações feitas para o material que muitas vezes não são justificadas experimentalmente.

Dentro deste universo de modelos existentes, foi escolhido para a realização deste trabalho o modelo proposto por Martins (1992) por ser considerado o mais consistente, tanto no entendimento físico dos fenômenos ligados ao comportamento viscoso e friccional dos solos como nas suas interpretações matemáticas.

## **I.2 - OBJETIVOS DA TESE**

O primeiro objetivo deste trabalho é reproduzir os ensaios de creep (fluência) não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco através do modelo proposto por Martins (1992). Para isto, resolveu-se numericamente a equação diferencial que rege o fenômeno pelo método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem.

O segundo objetivo é permitir que o modelo possa ser aplicado em situações mais genéricas de carregamentos e condições de contorno, diferentes daquelas de simetria axial de tensão e deformação para as quais foi inicialmente desenvolvido. Para isto, formula-se o modelo para o estado multiaxial de tensão e deformação, definindo assim as relações constitutivas do material que permitirão sua utilização no Método dos Elementos Finitos. Na análise do comportamento do solo, abordou-se o problema do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes) da Mecânica dos Fluidos. Esta abordagem, inicialmente utilizada na modelagem de óleos e polímeros, também é adotada em aplicações em materiais sólidos onde as deformações elásticas são desprezíveis frente às deformações irreversíveis, como no problema de conformação de peças metálicas.

## **I.3 - ORDENAÇÃO DOS CAPÍTULOS**

Este trabalho encontra-se dividido em sete capítulos, além das Referências Bibliográficas encontradas em seu final. No primeiro capítulo justifica-se a escolha do modelo adotado neste estudo e apresenta-se os objetivos da tese e as abordagens adotadas para atingí-los.

No segundo capítulo faz-se uma revisão do modelo apresentado por Martins (1992). São apresentados e discutidos seus principais conceitos, necessários para o entendimento dos capítulos subseqüentes deste trabalho.

O terceiro capítulo é totalmente dedicado ao fenômeno do creep não-drenado. Nele expõe-se e comenta-se a abordagem dada por Martins (1992) e é apresentado um algoritmo para resolver a equação diferencial que rege o fenômeno.

No quarto capítulo analisam-se os ensaios realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. Inicialmente faz-se um breve comentário sobre as evidências observadas por Martins (1992) a respeito da validade do modelo para este solo e obtém-se seus parâmetros para o modelo. Com base no algoritmo apresentado no terceiro capítulo são reproduzidos os ensaios de creep não-drenado. Finalmente é apresentada uma técnica de ajuste de parâmetros para o modelo baseada em técnicas de otimização.

No quinto capítulo propõe-se a extensão do modelo apresentado por Martins (1992) para o estado de tensão-deformação multiaxial, definindo-se assim as relações constitutivas do material necessárias para a implementação do Método dos Elementos Finitos. O problema abordado é o do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes), sendo resolvido utilizando-se a Formulação Mista dos elementos finitos, com funções de interpolação independentes para as velocidades e tensões octaédricas nos elementos.

No sexto capítulo são apresentadas algumas aplicações do problema formulado no quinto capítulo. São simulados alguns ensaios de laboratório e comparados com as soluções desenvolvidas por Martins (1992) e com os resultados dos ensaios realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. Também é apresentado um caso fictício de campo, onde são realizados ensaios de placa a diferentes velocidades de penetração num

depósito de argila com os mesmos parâmetros da argila da Baía de San Francisco.

Finalmente no sétimo capítulo são apresentadas as conclusões desde trabalho e as sugestões para futuras pesquisas.

## **CAPÍTULO II**

### **REVISÃO DO MODELO PROPOSTO POR MARTINS (1992)**

#### **II.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo apresenta-se resumidamente o modelo idealizado por Martins (1992) conforme foi concebido, porém dando ênfase àqueles pontos julgados importantes para o entendimento e aplicação do mesmo. Esta apresentação, indispensável para o desenvolvimento dos próximos capítulos, pode ser encontrada sob forma mais detalhada no trabalho que deu origem ao modelo (Martins, 1992).

Inicialmente são abordados alguns conceitos fundamentais como o Princípio das Tensões Efetivas (Terzaghi, 1936) e os fenômenos do atrito e da viscosidade. Com base em tais conceitos, parte-se para o estudo do modelo, desenvolvido inicialmente para o estado de simetria axial de tensão e deformação. Nos próximos capítulos tentar-se-á sua extensão para situações mais genéricas de estados de tensão e deformação visando a utilização do Método dos Elementos Finitos.

#### **II.2 - FUNDAMENTOS DO MODELO**

##### **II.2.1 - O Princípio das Tensões Efetivas**

Terzaghi (1936) foi quem pela primeira vez enunciou o Princípio das Tensões Efetivas, sobre o qual está fundamentada toda a Mecânica dos Solos moderna. Segue-se seu enunciado:

**1ª Parte:** " As tensões em qualquer ponto numa massa de solo podem ser computadas a partir das tensões principais totais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  que agem neste ponto. Se os vazios do solo estiverem preenchidos por água sob uma pressão  $u$ , as tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  consistem em duas parcelas. Uma parcela  $u$  que age na água e nos grãos sólidos em todas as direções e com igual intensidade, chamada de poro-pressão. E a outra parcela, as diferenças  $\sigma_1' = \sigma_1 - u$ ,  $\sigma_2' = \sigma_2 - u$  e  $\sigma_3' = \sigma_3 - u$  chamadas de tensões principais efetivas, representa um excesso das tensões principais totais sobre a poro-pressão. As tensões principais efetivas são suportadas exclusivamente pela fase sólida do solo."

Tomando-se um plano qualquer passando pelo ponto acima considerado, o enunciado tem sua tradução matemática, em termos de tensões normais ao plano, dada por:

$$\sigma = \sigma' + u \quad (II.1)$$

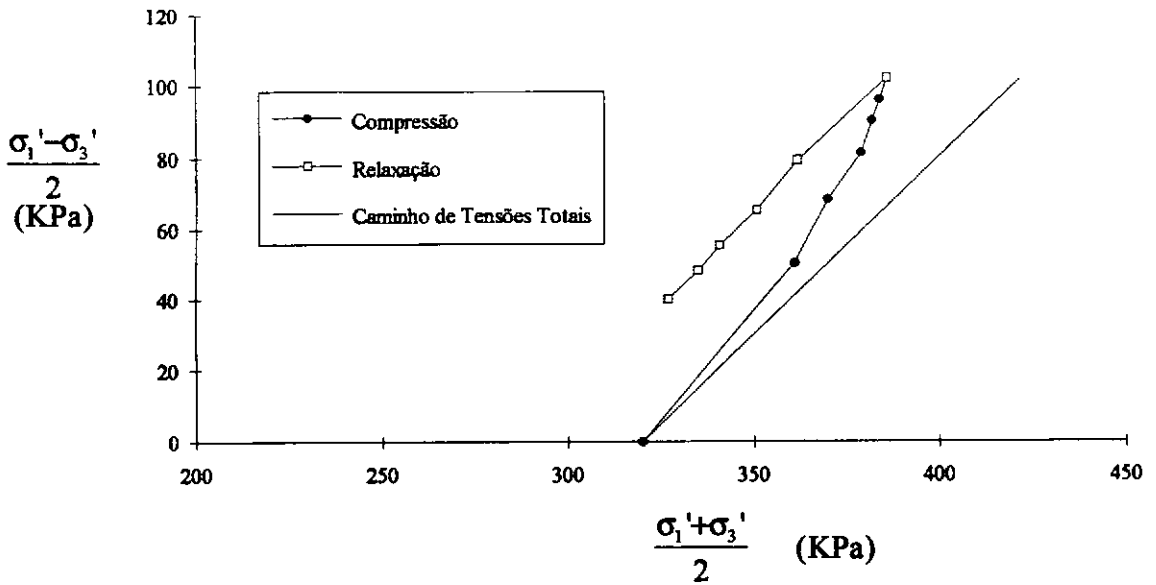
onde  $\sigma'$  é a tensão normal efetiva.

**2ª Parte:** " Todos os efeitos mensuráveis oriundos da variação de tensões, tais como compressão, distorção e mudança na resistência ao cisalhamento, são exclusivamente devidos às variações das tensões efetivas."

Discutindo o Princípio das Tensões Efetivas, Martins (1992) mostra que sua interpretação não é tão simples como parece, podendo mesmo facilmente levar a conclusões erradas.

Ocorre que não se pode lançar mão da recíproca da 2ª Parte do Princípio das Tensões Efetivas, ou seja, havendo variação no estado de tensão efetiva não necessariamente haverá variação de volume ou distorção.

Este fato pôde ser mostrado através, por exemplo, de ensaios de relaxação de tensões não-drenados realizados na argila da Baía de San Francisco por Lacerda (1976), onde na fase de relaxação não se verifica variação volumétrica (drenagem fechada) nem distorção (prensa desligada - não havendo deslocamento do pistão) e no entanto observou-se variação no estado de tensão efetiva (Figura II.1).



**Figura II.1 - Ensaio de relaxação SR-1-9 realizado por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco, onde  $\sigma_{3c}' = 320\text{KPa}$  e  $\dot{\epsilon}_s = 5,1\% / \text{min}$**

Esta discussão leva à conclusão que o Princípio das Tensões Efetivas deve ser usado apenas da maneira como foi escrito, ou seja, qualquer distorção, variação de volume ou de resistência ao cisalhamento é devido à variação do estado de tensão efetiva, porém a recíproca não é válida.

Como em Engenharia, ao se fazer uma obra é aplicado um estado de tensão ao maciço de solo e deseja-se obter como resposta as deformações, o Princípio das Tensões Efetivas, rigorosamente falando, tem validade restrita uma vez que a variação do estado de tensão efetiva não implica necessariamente em deformações.

Na realidade, Martins (1992) argumenta que falta ao Princípio das Tensões Efetivas (Terzaghi, 1936) o efeito da velocidade de carregamento ou o efeito do tempo, sugerindo assim que o solo, além de apresentar um comportamento de natureza friccional, devido ao atrito entre as partículas que o compõem, é também um material de natureza viscosa.

## II.2.2 - O Fenômeno da Viscosidade

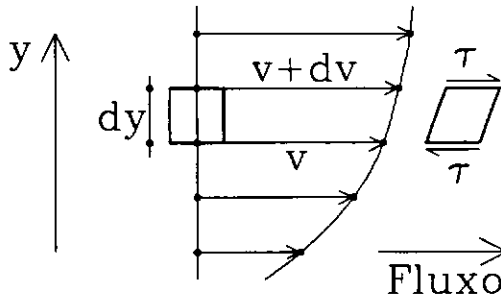
Se um material sólido elástico é submetido a uma força cisalhante, irá se deformar até quando sua resistência elástica for igual à força atuante. Por outro lado, se um fluido é submetido a uma força cisalhante, permanecerá se deformando enquanto a força estiver aplicada. Assim, é a velocidade (e não a magnitude) das deformações que governa a relação entre a resistência viscosa do fluido e a força atuante (Rouse e Howe, 1961).

Estudando o fenômeno da viscosidade nos fluidos, Isaac Newton argumentou que a tensão tangencial entre as camadas vizinhas de um fluido em escoamento uniforme é proporcional à razão  $\frac{dv}{dy}$  com a qual a velocidade  $v$  varia transversalmente à direção do fluxo.

Chamando de  $\mu$  o coeficiente de proporcionalidade, comumente conhecido como coeficiente de viscosidade, entre a tensão tangencial  $\tau$  e  $\frac{dv}{dy}$ , tem-se a Lei da Viscosidade de Newton dada por

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy} \quad (II.2)$$

que pode ser ilustrada pela Figura II.2.



**Figura II.2 - A Lei da Viscosidade de Newton**

### II.2.3 - O Fenômeno do Atrito

As leis de atrito entre corpos sólidos, também conhecidas como leis de Coulomb, são

**1ª Lei de Atrito:** “ A força tangencial necessária a vencer o atrito entre dois corpos é independente da área de contato aparente entre eles.”

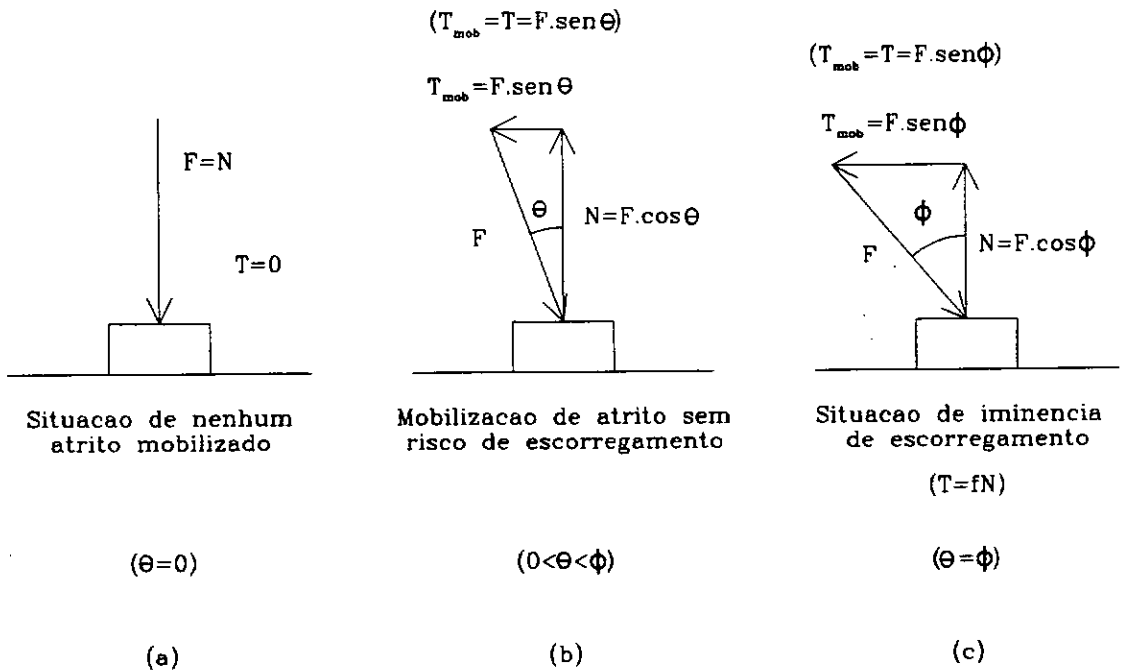
**2ª Lei de Atrito:** “ A força tangencial necessária a vencer o atrito entre dois corpos sólidos é proporcional à força normal entre eles.”

Matematicamente a 2ª lei de atrito é dada por

$$T_{\text{ult}} = f \cdot N \quad (\text{II.3})$$

onde o coeficiente de proporcionalidade  $f$  é o coeficiente de atrito.

Observa-se que para valores da força tangencial  $T$  menores que  $f \cdot N$  não há escorregamento. Neste caso, a força de atrito mobilizada  $T_{\text{mob}}$  na superfície de contato entre os dois corpos tem o mesmo módulo e sentido contrário à força tangencial aplicada  $T$ . Este conceito de atrito mobilizado pode ser ilustrado através da Figura II.3.



**Figura II.3 - Ilustração do conceito de atrito mobilizado entre corpos sólidos**

Na Figura II.3a tem-se uma força  $F$  aplicada verticalmente a um bloco apoiado sobre uma superfície horizontal, nesta situação não há atrito mobilizado uma vez que não há força tangencial aplicada. Na Figura II.3b inclina-se  $F$  de um ângulo  $\theta$  em relação à vertical de forma que não se atinja a situação de escorregamento iminente. Desta forma, a força tangencial de atrito mobilizada  $T_{\text{mob}}$  é igual a  $T = F \cdot \text{sen } \theta$  e é menor que a força tangencial mínima

necessária para promover o escorregamento entre os dois corpos, dada por  $f \cdot N = f \cdot F \cdot \text{sen } \theta$ .

Finalmente, ao inclinar a força  $F$  até se chegar à condição de iminência de escorregamento (Figura II.3c), tem-se que o ângulo de inclinação  $\theta$  atinge seu valor limite, sendo denotado por  $\phi$ .

Lembrando que nesta situação

$$T_{\text{mob}} = T_{\text{ult}} \quad \therefore \quad T = f \cdot N \quad (\text{II.4})$$

e sendo  $\phi$  a inclinação da força  $F$  em relação à vertical para esta condição, então

$$F \cdot \text{sen } \phi = f \cdot F \cdot \text{cos } \phi \quad (\text{II.5})$$

e assim

$$f = \tan \phi \quad (\text{II.6})$$

Baseado no exposto acima, o ângulo  $\theta$ , chamado de ângulo de obliquidade de  $F$ , é função apenas do sistema de forças que agem sobre o corpo e expressa a parcela do atrito disponível que foi mobilizada. Por outro lado, assim como o coeficiente de atrito  $f$ , o ângulo  $\phi$  é função apenas dos materiais em contato, sendo denominado ângulo de atrito.

O ângulo de atrito representa o ângulo de obliquidade limite da força  $F$ . Quando os ângulos de obliquidade  $\theta$  e de atrito  $\phi$  são iguais toda força disponível de atrito é mobilizada e o escorregamento é iminente.

#### II.2.4 - O Atrito Interno numa Massa de Solo

Numa massa de solo sem cimentação e com toda resistência ao escorregamento, neste caso denominada resistência ao cisalhamento, gerada exclusivamente pelo atrito entre as partículas sólidas, o fenômeno do atrito interno é analisado de forma similar ao atrito entre corpos sólidos.

A resistência ao cisalhamento, coerentemente com a 2ª Parte do Princípio das Tensões Efetivas, é proporcional à tensão normal efetiva atuante no plano considerado, ou seja

$$\tau_{ult} = \sigma' \cdot \tan \phi \quad (II.7)$$

sendo o coeficiente de atrito dado por  $f = \tan \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo de atrito interno do solo. Definida desta forma, a resistência ao cisalhamento dos solos nada mais é que a lei de Coulomb escrita em termos de tensões efetivas.

A equação (II.7) expressa uma condição limite. Se a tensão tangencial (cisalhante) aplicada numa determinada seção de um elemento de solo for igual a sua resistência ao cisalhamento, então, naquela seção, o elemento de solo considerado está na iminência de escorregamento, ou seja, ruptura. Porém, se numa dada seção passando por um elemento de solo a tensão cisalhante aplicada for menor que a resistência ao cisalhamento deste solo, dada por (II.7), então a tensão cisalhante resistente de atrito mobilizada nesta seção  $\tau_{mob}$  terá mesma intensidade e sentido contrário à tensão cisalhante aplicada  $\tau$  (Figura II.4).

Considerando que a tensão cisalhante de atrito mobilizada numa seção de um elemento de solo também pode ser definida através de um ângulo de obliquidade do vetor tensão efetiva aplicado  $\bar{T}$ , então

$$\tau_{mob} = \sigma' \cdot \tan \theta \quad (II.8)$$

que conforme ilustrado na Figura II.4, o  $\theta$  é o ângulo de inclinação de  $\bar{T}$  com a normal à seção considerada.

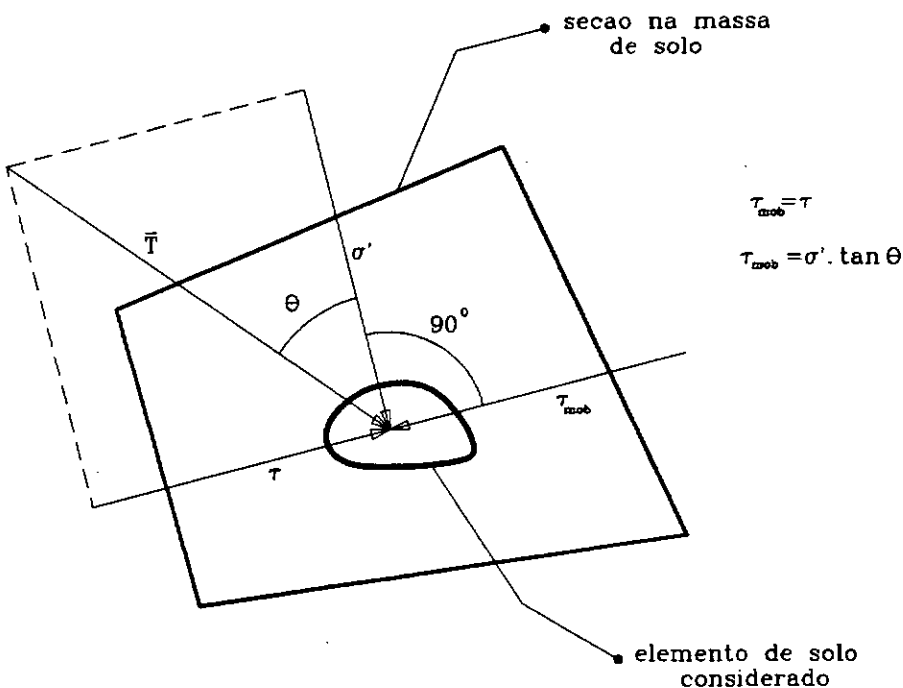


Figura II.4 - Mobilização do atrito numa massa de solo

O vetor tensão efetiva aplicado é obtido através da normal ao plano considerado e do tensor de tensões efetivas, que o Princípio das Tensões Efetivas (Terzaghi, 1936) define como

$$[\sigma'] = [\sigma] - u \cdot [I] \quad (II.9)$$

onde  $[\sigma]$  é o tensor de tensões totais,  $u$  é a poro-pressão e  $[I]$  a matriz identidade de 3ª ordem.

Para efeito de aplicação em Engenharia, o vetor tensão efetiva aplicado é decomposto em uma componente normal ao plano considerado ( $\sigma'$ ) e outra componente cisalhante ( $\tau$ ).

Quando numa seção de um dado elemento de solo o ângulo de obliquidade  $\theta$  for igual ao ângulo de atrito interno do solo  $\phi$ , então toda resistência disponível por atrito é mobilizada e a condição de ruptura é atingida.

## II.2.5 - O Estado de Simetria Axial

Define-se estado de simetria axial como o estado de tensão e deformação onde não há variação das tensões e deformações entre os planos passando pelo eixo de simetria, ou seja,  $\frac{d\sigma_{ij}}{d\phi} = 0$  e  $\frac{d\epsilon_{ij}}{d\phi} = 0$ , onde  $\phi$  dá a direção destes planos em relação a um plano referencial também passando pelo eixo de simetria.

O modelo exposto, conforme já dito antes, foi desenvolvido para o estado de tensão de simetria axial, onde aqui considera-se  $\sigma_1 = \sigma_v$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_H$  sendo  $\sigma_v$  e  $\sigma_H$  as tensões normais vertical e horizontal, respectivamente.

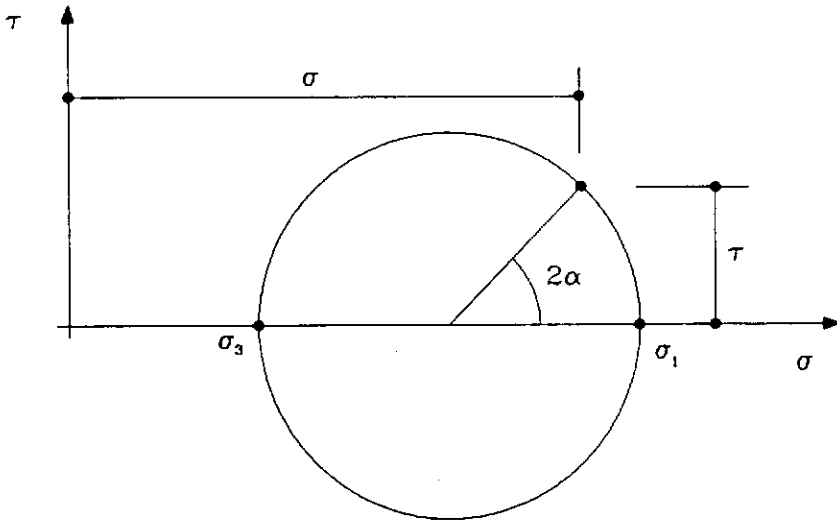
Para este caso particular de estado de tensão, as componentes normal  $\sigma$  e tangencial  $\tau$  do vetor tensão numa seção cuja normal faz um ângulo  $\alpha$  com a direção de  $\sigma_1$  são

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (II.10)$$

e

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha \quad (\text{II.11})$$

que são as equações paramétricas do círculo de Mohr das tensões no espaço  $\sigma \times \tau$ , cujo raio é  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  e centro em  $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ , conforme mostra a Figura II.5.



**Figura II.5 - O Círculo de Mohr das Tensões**

O estado de deformação de simetria axial aqui considerado é dado por  $\epsilon_1 = \epsilon_V$  e  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_H$  sendo  $\epsilon_V$  e  $\epsilon_H$  as deformações específicas vertical e horizontal, respectivamente.

As deformações específicas longitudinal  $\epsilon_L$  e transversal  $\epsilon_s$  de uma fibra cuja direção faz um ângulo  $\alpha$  com a direção de  $\epsilon_1$  são

$$\epsilon_L = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (\text{II.12})$$

e

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha \quad (\text{II.13})$$

que, analogamente ao estado de tensão de simetria axial, são as equações paramétricas do círculo de Mohr das deformações específicas no espaço  $\epsilon_L \times \epsilon_s$ .

Introduzindo o conceito de tensões efetivas, dados pela 1ª Parte do Princípio da Tensões Efetivas, cuja tradução matemática é

$$\sigma' = \sigma - u \quad (\text{II.14})$$

onde  $\sigma'$  é a tensão normal efetiva, tem-se como consequência que o estado de tensão numa massa de solo saturado é dado por dois círculos de Mohr. O primeiro, representando o estado de tensão total, conforme mostra a Figura II.5; e o segundo, de mesmo diâmetro e afastado em relação ao primeiro de um valor  $u$  igual à poro-pressão da água nos vazios do solo, representando o estado de tensão efetiva (ver Figura II.6).

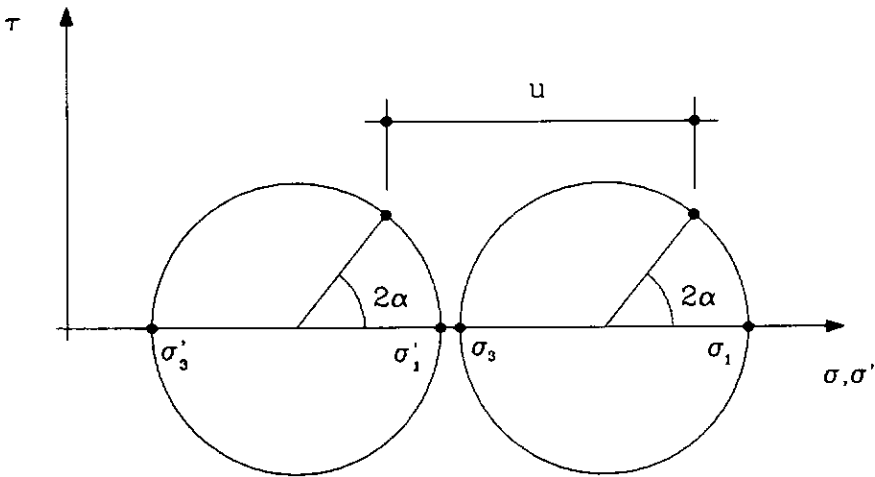


Figura II.6 - Os Círculos de Mohr das Tensões Totais e das Tensões Efetivas

## II.2.6 - O Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb

Baseado no que foi dito na seção anterior, para um estado de simetria axial, as tensões normal efetiva  $\sigma'$  e cisalhante  $\tau$  atuando num plano cuja normal faz um ângulo  $\alpha$  com a direção de  $\sigma_1'$  são

$$\sigma' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} + \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (\text{II.15})$$

e

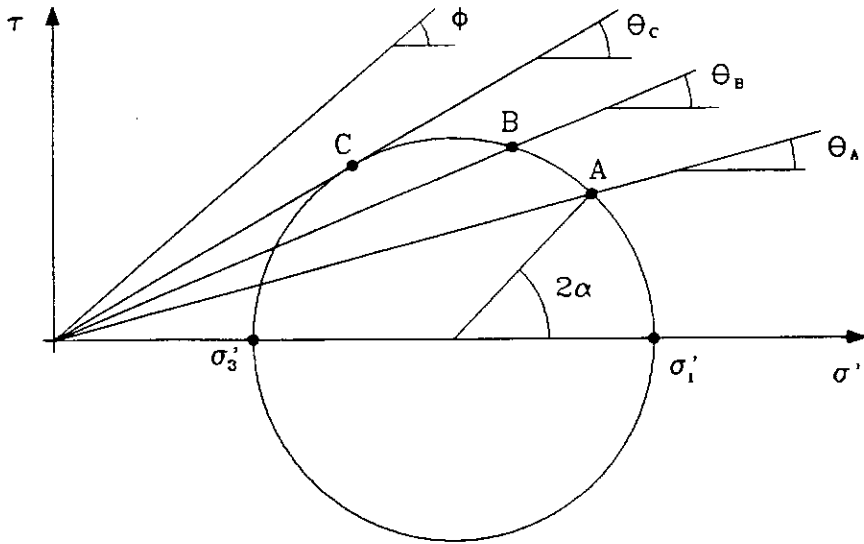
$$\tau = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (\text{II.16})$$

e como também já foi visto, num solo onde toda a resistência ao cisalhamento é devida ao atrito entre as partículas, a tensão cisalhante pode ser expressa por

$$\tau = \sigma' \cdot \tan \theta \quad (\text{II.17})$$

onde  $\theta$  é o ângulo de obliquidade do vetor tensão efetiva aplicada no plano.

Na Figura II.7 observa-se que este ângulo de obliquidade varia de plano para plano atingindo seu valor máximo no plano correspondente ao ponto C.

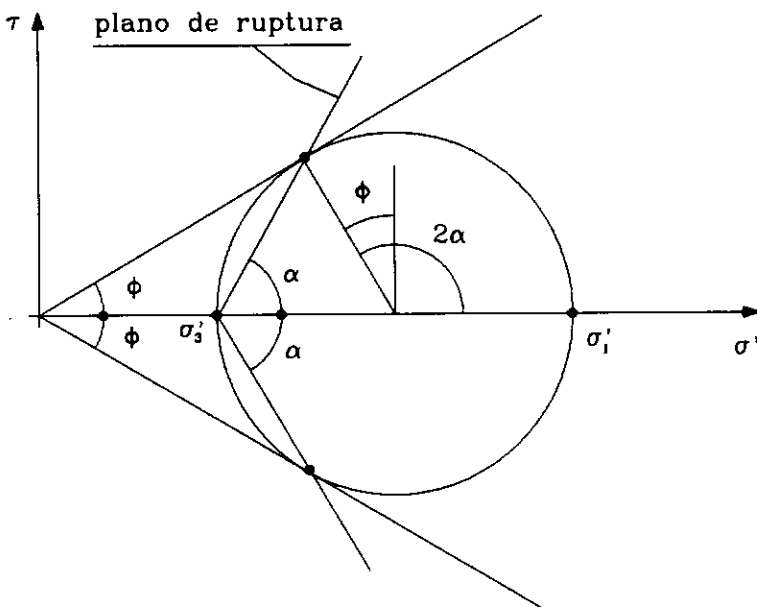


**Figura II.7 - Variação do ângulo de obliquidade (atrito mobilizado)**

Sendo a resistência ao cisalhamento do solo dada por

$$\tau_{\text{at}} = \sigma' \cdot \tan \phi \quad (\text{II.18})$$

onde  $\phi$  é o ângulo de atrito interno, então sua representação gráfica no espaço  $\sigma'\tau$  é uma reta passando pela origem e de coeficiente angular  $\tan \phi$ , denominada envoltória de resistência (Figura II.8).



**Figura II.8 - O Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb**

Só se atingirá a condição de ruptura quando o ângulo de máxima obliquidade dos pontos no círculo de Mohr das tensões efetivas for igual ao ângulo de atrito interno  $\phi$  do solo.

Por associar as leis de atrito de Coulomb com a representação dos estados de tensões de Mohr, o critério de ruptura apresentado acima é denominado Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb.

## **II.3 - O MODELO**

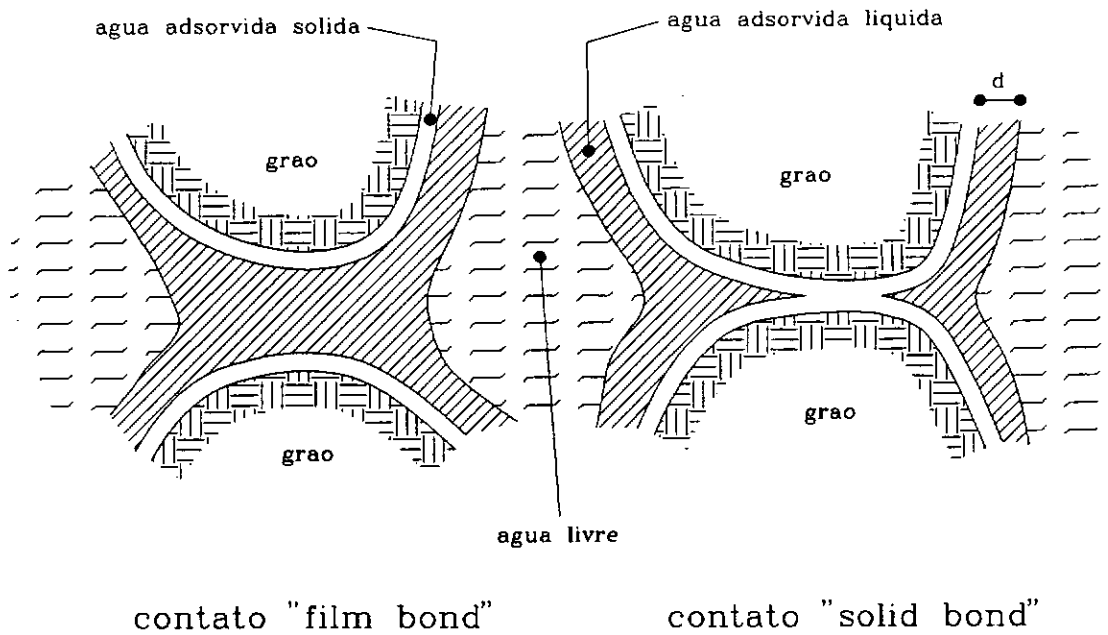
### **II.3.1 - Uma Visão Microscópica do Fenômeno**

Contudo, conforme foi visto inicialmente, o solo a ser estudado não é um material de característica exclusivamente friccional, onde toda resistência ao cisalhamento se deve unicamente ao atrito entre as partículas. Ele é também um material de natureza viscosa, com seu comportamento dependente do tempo ou da velocidade que se aplica o carregamento. Estas duas dependências, segundo Martins (1992), são na realidade as duas faces de uma mesma moeda.

Assim, para se montar um modelo coerente com estas duas naturezas (viscosa e friccional), é necessário que se tenha uma visão física do fenômeno a partir de pontos básicos, tais como a forma de interação entre as partículas e a água nos vazios do solo.

Tendo como objeto de estudo os solos saturados, sem cimentação e submetidos a estados de tensões com simetria axial, Martins (1992) iniciou o modelo descrito em sua tese de doutorado adotando a concepção de Terzaghi (1941) a respeito das argilas saturadas, considerando que as mesmas são compostas por um conjunto de grãos sólidos envoltos por uma película de água adsorvida sólida fortemente aderida aos grãos. À medida que se afasta da superfície do grão, a viscosidade da água adsorvida diminui até que, a

partir de uma determinada distância "d", as propriedades da água adsorvida são as da água comum (Figura II.9).



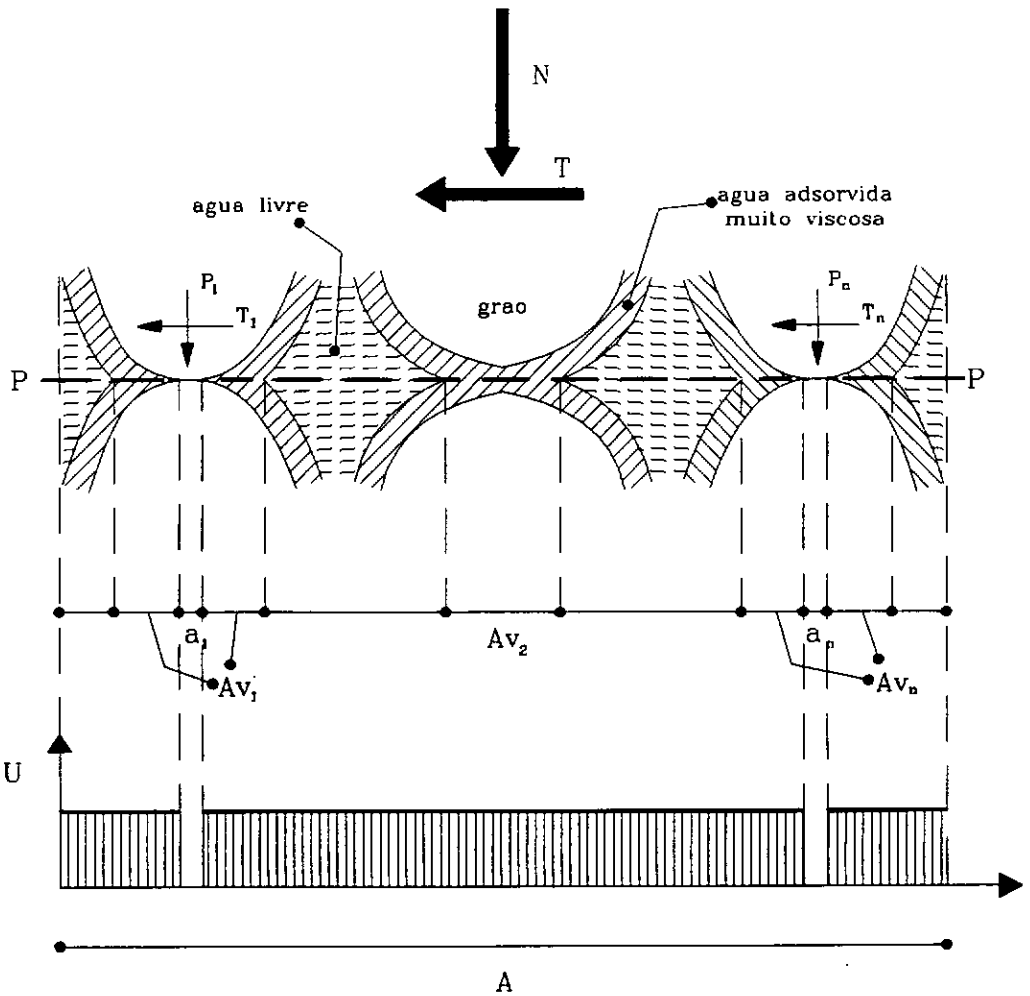
**Figura II.9 - Concepção de Terzaghi (1941) a respeito das argilas saturadas**

De acordo com esta visão, as ligações ou "contatos" grão a grão se fazem através da água adsorvida, que podem se dar através da água sólida ("solid bonds") ou do filme viscoso ("film bonds") e ambos os tipos de "contatos" transmitem tensões efetivas.

Além do mais, esta visão também está de acordo com a idéia de Taylor (1948) de que o efeito da velocidade de deformação sobre a resistência ao cisalhamento é provocado pela natureza viscosa do material nas zonas de adsorção na vizinhança dos pontos de contato ou "quase contato" das partículas de argila.

Seja agora um plano imaginário PP que secciona um elemento de solo no maciço. Este plano passa por pontos de contato sólido-sólido, por regiões de água viscosa e água comum e também cortará os grãos sólidos, que neste caso considerar-se-á que o plano contorna os grãos passando pelos pontos de contato sólido-sólido. (Figura II.10).

Na Figura II.10, tem-se que  $A$  é a área total do elemento considerado,  $a_i$  a área de contato sólido-sólido de ordem  $i$  e  $A_{v_i}$  a área do contato na água de alta viscosidade de ordem  $i$ .



**Figura II.10 - Equilíbrio numa seção de um elemento de solo**

O equilíbrio na direção normal se dá então

$$N = \sum_1^n P_i + u \cdot \left( A - \sum_1^n a_i \right) \quad (\text{II.19})$$

onde  $u$  é a pressão hidrostática na água dos vazios do solo saturado (poropressão), no elemento considerado.

Dividindo-se os termos de (II.19) por  $A$  e admitindo que  $\sum_1^n a_i$  é desprezível em relação a  $A$ , chega-se a :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\sum_1^n P_i}{A} + u \quad (\text{II.20})$$

ou

$$\sigma = \sigma' + u \quad (\text{II.21})$$

onde  $\sigma$  é por definição a tensão normal total e  $\sigma'$  é chamada de tensão normal efetiva.

Na realidade, deverá existir uma parcela da tensão normal efetiva mobilizada por viscosidade através do filme viscoso ("film bond"), não considerada por Martins (1992). Neste trabalho a mesma também será negligenciada, acreditando-se que, para fins de aplicações do modelo, sua relevância é pequena no comportamento real do solo.

Já o equilíbrio na direção tangencial se dá considerando-se a resistência por atrito mobilizado e a resistência viscosa mobilizada na água adsorvida líquida muito viscosa. Assim

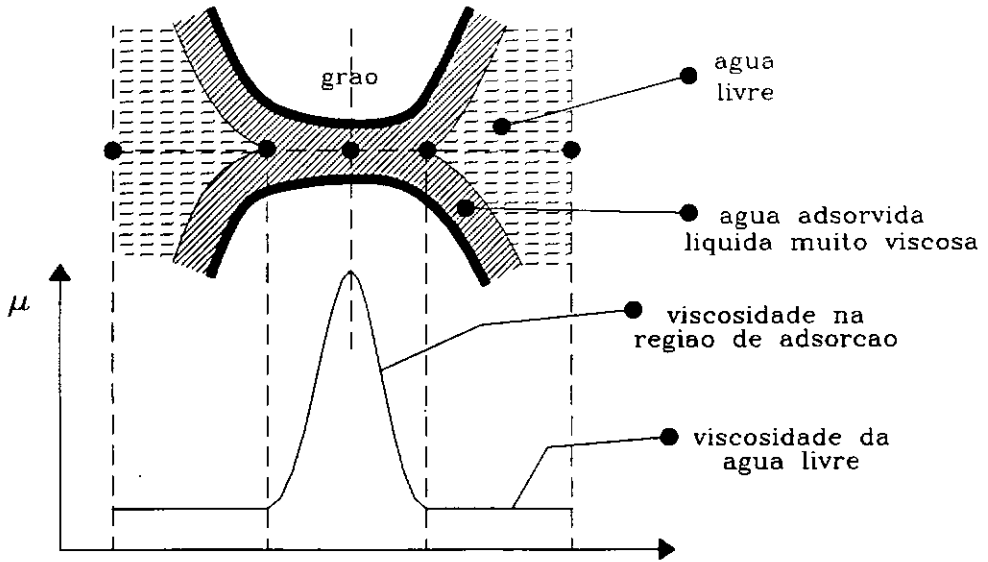
$$T = f \cdot \sum_1^n \lambda_i \cdot P_i + \sum_1^m \int_{AV_i} \mu \cdot \frac{d\epsilon_s}{dt} \cdot dAV_i \quad (II.22)$$

onde  $\lambda_i$  é a parcela da resistência por atrito mobilizada no contato sólido-sólido de ordem  $i$ ,  $f$  o coeficiente de atrito sólido-sólido,  $\mu$  o coeficiente de viscosidade na região da água adsorvida e  $\frac{d\epsilon_s}{dt}$  a velocidade com que são distorcidos os elementos de água altamente viscosa.

No seio da massa fluida viscosa não pode haver escorregamento ao longo da superfície entre duas camadas vizinhas do fluido ou entre um fluido viscoso e um contorno sólido. Isto levaria a um valor infinito para  $\frac{dv}{dy}$  (ou  $\frac{d\epsilon_s}{dt}$ ) e, segundo a lei da viscosidade de Newton, a um valor infinito da tensão cisalhante  $\tau$ .

Sendo assim, os contatos da água adsorvida viscosa com o grão sólido se deslocam com a mesma velocidade, sendo esta a velocidade do conjunto. Assim  $\frac{d\epsilon_s}{dt}$ , a partir daqui simbolizada por  $\dot{\epsilon}_s$ , é considerada constante ao longo de toda seção do elemento de solo considerado.

Além do mais, quanto mais próxima a partícula de água estiver do grão sólido maior será a atração entre ambos, então é de se esperar que a viscosidade da água adsorvida  $\mu$  seja função da distância da partícula de água ao grão, conforme ilustra a Figura II.11.



**Figura II.11 - Ilustração esquemática da distribuição de  $\mu$  ao longo de um "contato" entre grãos feito através da água adsorvida líquida muito viscosa**

Do acima exposto, conclui-se que

$$\sum_1^m \int_{Av_i} \mu \cdot \dot{\epsilon}_s \cdot dAv_i = \dot{\epsilon}_s \cdot \sum_1^m \int_{Av_i} \mu \cdot dAv_i = \dot{\epsilon}_s \cdot \bar{\mu} \cdot \sum_1^m Av_i \quad (II.23)$$

onde  $\bar{\mu}$  é o valor médio de  $\mu$  sobre todas as áreas.

Substituindo-se (II.23) em (II.22) e dividindo ambos os membros por  $A$ , obtém-se

$$\frac{T}{A} = f \cdot \sum_1^n \frac{\lambda_i \cdot P_i}{A} + \dot{\epsilon}_s \cdot \bar{\mu} \cdot \sum_1^m \frac{Av_i}{A} \quad (II.24)$$

onde o termo  $\frac{T}{A}$  é por definição a tensão cisalhante aplicada  $\tau$ .

O termo  $\sum_1^m \frac{Av_i}{A}$  para um determinado solo é função apenas do índice de vazios, podendo-se escrever

$$\bar{\mu} \cdot \sum_1^m \frac{Av_i}{A} = \bar{\mu} \cdot f(e) = \eta(e) \quad (II.25)$$

Sendo o coeficiente de atrito dado pelo ângulo de atrito interno do solo

$$f = \tan \phi \quad (II.26)$$

e considerando que

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_1^n \lambda_i \cdot P_i}{\sum_1^n P_i} = \frac{\tan \phi_{mob}}{\tan \phi} \quad (II.27)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é o coeficiente que dá a parcela de atrito mobilizado da resistência disponível por atrito, chega-se a

$$\tau = \frac{\tan \phi_{mob}}{\tan \phi} \cdot \tan \phi \cdot \sum_1^n \frac{P_i}{A} + \eta(\epsilon) \cdot \dot{\epsilon}_s \quad (II.28)$$

e sendo  $\sum_1^n \frac{P_i}{A}$  a própria tensão normal efetiva, então

$$\tau = \underbrace{\sigma \cdot \tan \phi_{mob}}_{\tau_f} + \underbrace{\eta(\epsilon) \cdot \dot{\epsilon}_s}_{\tau_v} \quad (II.29)$$

onde  $\tau_f$  é a parcela de atrito e  $\tau_v$  a parcela viscosa da tensão cisalhante  $\tau$ .

### II.3.2 - O Princípio das Tensões Efetivas Expandido

A partir das equações (II.21) e (II.29) pôde-se enunciar o Princípio das Tensões Efetivas Expandido (PTEE), que é dividido em duas partes:

**1ª Parte:** “ Em qualquer plano de um elemento de solo saturado no qual estejam atuando a tensão normal  $\sigma$  a e tensão cisalhante  $\tau$  estarão atuando internamente: como reação à  $\sigma$  a soma  $(\sigma+u)$  sendo  $\sigma'$  a tensão normal efetiva e  $u$  a poro-pressão; e como reação à  $\tau$  a soma das resistências por atrito e por viscosidade.”

Sua tradução matemática é

$$\sigma = \sigma' + u \quad (II.30)$$

e

$$\tau = \sigma' \cdot \tan \phi_{mob} + \eta \cdot \dot{\epsilon}_s \quad (II.31)$$

Considera-se aqui os solos saturados na ausência de acelerações, tomando-se assim a velocidade de deformação constante de forma a validar a aplicação da Lei da Viscosidade de Newton.

Em termos práticos, o modelo desenvolvido por Martins (1992) aplica-se a casos de carregamentos “quasi-estáticos”, onde as velocidades de aplicação de cargas são muito pequenas e as acelerações praticamente nulas.

**2ª Parte:** " Toda vez que houver variação da parcela de atrito mobilizado haverá deformações cisalhantes e reciprocamente toda vez que houver deformações cisalhantes haverá variação da parcela de atrito mobilizado (casos não-drenados)."

O significado deste enunciado será aos poucos desvendado à medida que se desenvolve o modelo.

### II.3.3 - As Elipses de Coulomb e de Taylor

Sejam as equações paramétricas do círculo de Mohr das tensões efetivas, dadas pelas expressões da tensões normal efetiva e cisalhante atuando no plano cuja normal faz um ângulo  $\alpha$  com a direção de  $\sigma_1'$

$$\sigma' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} + \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (II.32)$$

e

$$\tau = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (II.33)$$

além disso, o PTEE diz que  $\tau$  é resistido internamente por uma parcela de atrito  $\tau_f$  e outra viscosa  $\tau_v$  expressas por

$$\tau_f = \sigma' \cdot \tan \phi_{mob} \quad (II.34)$$

e

$$\tau_v = \eta \cdot \dot{\epsilon}_s \quad (II.35)$$

Lembrando agora que as deformações específicas normal e transversal de uma fibra que faz um ângulo  $\alpha$  com a direção de  $\epsilon_1$  são respectivamente

$$\epsilon_L = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (II.36)$$

e

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (II.37)$$

Para obter o  $\tau_v$  em um plano fixo faz-se

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{d\epsilon_s}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \right] \cdot \text{sen } 2\alpha \quad (\text{II.38})$$

e substituindo em (II.35) tem-se

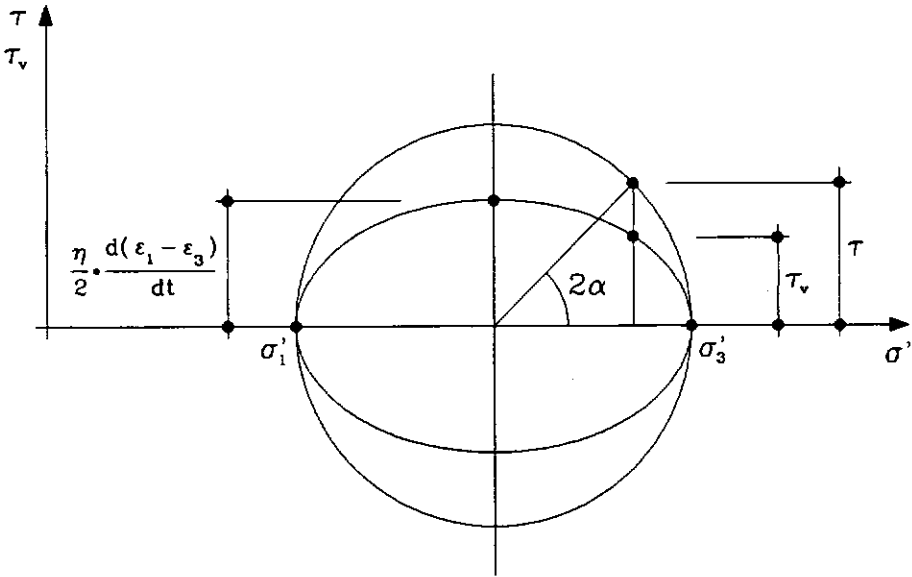
$$\tau_v = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \right] \cdot \text{sen } 2\alpha \quad (\text{II.39})$$

que juntamente com a equação de  $\sigma'$

$$\sigma' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} + \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (\text{II.40})$$

define instantaneamente o Estado de Viscosidade Mobilizada no ponto.

As equações (II.39) e (II.40) são as equações paramétricas de uma elipse de centro em  $\left( \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2}, 0 \right)$ , eixo maior igual a  $(\sigma_1' - \sigma_3')$  e eixo menor igual a  $\eta \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \right]$ , conforme mostra a Figura II.12.



**Figura II.12 - O Círculo de Mohr e a Elipse de Taylor**

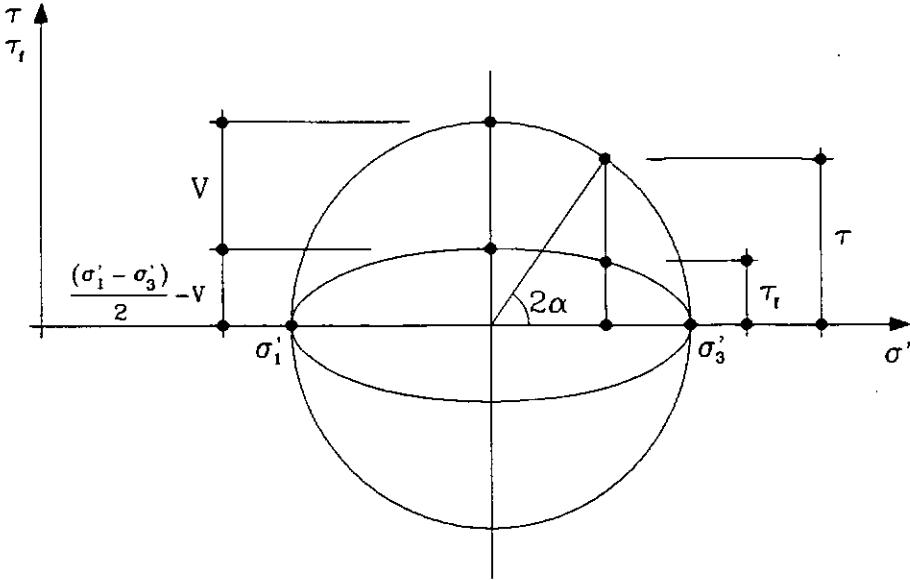
Para facilitar a notação, a ordenada máxima da resistência por viscosidade é denotada por  $V$ , onde

$$V = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \frac{d}{dt} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \quad (\text{II.41})$$

As tensões cisalhantes de atrito  $\tau_f$ , por sua vez, são obtidas pela diferença entre  $\tau$  e  $\tau_v$ , que dá

$$\tau_f = \tau - \tau_v = \left[ \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} - V \right] \cdot \text{sen } 2\alpha \quad (\text{II.42})$$

que juntamente com a equação (II.40) define o Estado de Atrito Mobilizado, representado por uma elipse de centro em  $\left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}, 0\right)$ , eixo maior igual a  $(\sigma'_1 - \sigma'_3)$  e eixo menor igual a  $[(\sigma'_1 - \sigma'_3) - 2V]$ , apresentada na Figura II.13.



**Figura II.13 - O Círculo de Mohr de a Elipse de Atrito**

Martins (1992), por considerar que todos estes conceitos, ainda que de uma forma bruta, estão expressos em muitos dos trabalhos do pesquisador norte-americano Donald Wood Taylor, chamou a elipse que representa o Estado de Viscosidade Mobilizada de Elipse de Taylor. A elipse que representa o Estado de Atrito Mobilizado foi denominada de Elipse de Atrito ou Elipse de Coulomb.

É claro que só quem satisfaz as equações de equilíbrio no ponto considerado é o círculo de Mohr das tensões, dado pela soma das elipses de Taylor e Coulomb.

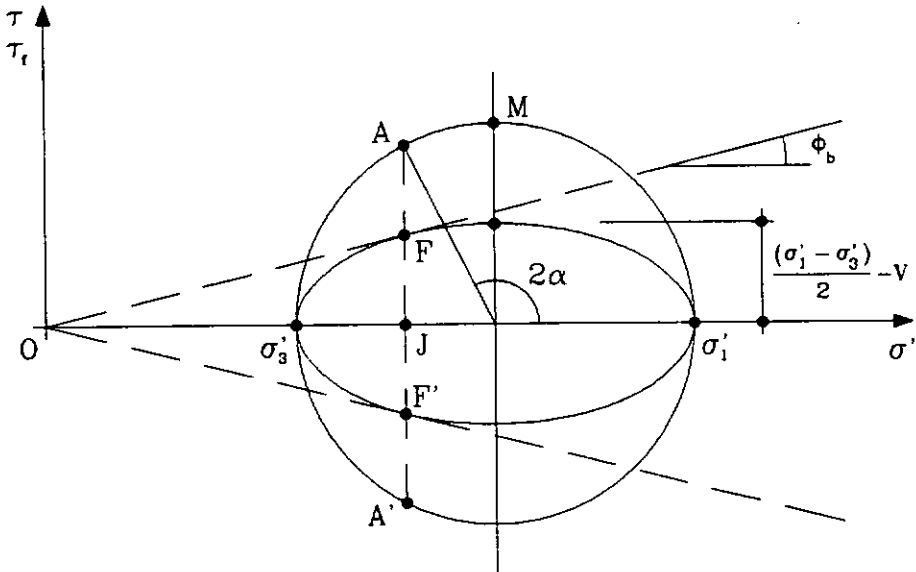
### II.3.4 - Redefinição do Critério de Ruptura em Solos

Seja uma amostra cilíndrica de solo, adensada isotropicamente até uma tensão de adensamento tal que seja considerada normalmente adensada. Realizando agora o ensaio de cisalhamento com equipamento triaxial e sob

condição não-drenada (drenagem fechada), ou seja, o ensaio CIU convencional, tem-se que a parcela da tensão cisalhante suportada pela viscosidade se mantém constante ao longo do ensaio. Isto porque o ensaio convencional é realizado com  $\dot{\epsilon}_s$  constante e como é não-drenado não há variação do índice de vazios, conseqüentemente  $\eta$  é constante (ver equações (II.25) e (II.35)).

Desta forma, ao se acionar a prensa, imediatamente mobiliza-se a resistência viscosa  $\tau_v$  que permanece constante até que a amostra atinja um valor limite de  $\sigma_1' - \sigma_3'$  que a partir daí não mais varia, caracterizando assim a condição de ruptura.

Considerando o acima exposto e tendo em mente a hipótese que a resistência do solo é por viscosidade e por atrito, então pode-se concluir que o que foi sendo mobilizada ao longo do ensaio foi a resistência por atrito  $\tau_f$ . Assim, quem comanda a ruptura é o atrito e a condição de ruptura deve-se dar quando a elipse de atrito tangencia a envoltória de resistência, conforme mostra a Figura II.14.



**Figura II.14 - Redefinição do critério de ruptura com a elipse de atrito**

Deve-se chamar a atenção que o mecanismo aqui abordado para explicar como ocorre o ensaio convencional ilustra bem a idéia que a 2ª Parte do PTEE tenta transmitir, sugerindo que as deformações cisalhantes ocorrem

concomitantes com a mobilização de atrito e que a resistência por viscosidade só se dá pela imposição de uma velocidade de cisalhamento.

Mais à frente se verá que devido à sua natureza viscosa, o solo sempre que possível procurará dissipar sua resistência por viscosidade, de forma que ao longo do tempo tenderá a resistir ao cisalhamento apenas por atrito.

### II.3.5 - Direções dos Planos de Ruptura

Voltando à Figura II.14, os pontos F e F' correspondem aos planos de máximo atrito mobilizado, sendo os pontos de máxima obliquidade na elipse de atrito. Por tangenciarem a envoltória de resistência, definida por uma obliquidade máxima limite  $\phi_b$ , os pontos F e F' também são pontos de ruptura. A inclinação dos planos de ruptura, representados pelos pontos A e A', faz um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, caso  $\sigma_1'$  seja vertical.

Antes de continuar, para facilitar a notação adota-se por

$$p' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} \quad (II.43)$$

e

$$q' = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \quad (II.44)$$

as coordenadas do ponto M que definem de maneira única o círculo de Mohr das tensões efetivas da Figura II.14. Assim como os parâmetros p e q dados por

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (II.45)$$

e

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (II.46)$$

definem de maneira única o círculo de Mohr das tensões totais.

A elipse de atrito fica automaticamente definida a partir do estado de tensão efetiva, que pode ser dado pelo ponto de coordenadas  $p'$  e  $q'$ , e da velocidade de cisalhamento  $\dot{\epsilon}_s$ .

Cabem agora duas importantes definições que são gerais, ou seja, independem se o estado do solo é de simetria axial ou não, onde a partir das mesmas se desenvolve toda matemática do modelo.

**Definição:** " Define-se por ângulo de atrito mobilizado e denota-se por  $\phi_{mob}$  o ângulo de obliquidade máxima tal que

$$\tan \phi_{mob} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{max} \quad (II.47)$$

sendo  $\tau_f$  a tensão cisalhante de atrito e  $\sigma'$  a tensão normal efetiva nos planos de obliquidade máxima."

**Definição:** " Chama-se de ângulo de atrito básico e denota-se por  $\phi_b$  ao ângulo de obliquidade máxima limite tal que

$$\tan \phi_b = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{max} \quad (II.48)$$

sendo  $\tau_f$  e  $\sigma'$  respectivamente a tensão cisalhante de atrito e a tensão normal efetiva atuantes no plano de ruptura na ruptura."

A condição de obliquidade máxima no estado de simetria axial de tensão e deformação em termos de atrito, estando na condição de ruptura ou não, obtém-se por

$$\frac{d\left(\frac{\tau_f}{\sigma'}\right)}{d\alpha} = 0 \quad (II.49)$$

Usando-se os parâmetros  $p'$  e  $q'$ ,  $\sigma'$  e  $\tau_f$  são escritos como

$$\sigma' = p' + q' \cdot \cos 2\alpha \quad (II.50)$$

e

$$\tau_f = (q' - V) \cdot \sen 2\alpha \quad (II.51)$$

e assim

$$\frac{\tau_f}{\sigma'} = \frac{(q' - V) \cdot \sen 2\alpha}{p' + q' \cdot \cos \alpha} \quad (II.52)$$

Substituindo-se (II.52) em (II.49) e resolvendo a equação chega-se à direção do plano de máxima obliquidade, dada por

$$\cos 2\alpha = -\frac{q'}{p'} = -\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + \sigma_3'} \quad (\text{II.53})$$

que substituindo o valor de  $\alpha$  em (II.52) obtém-se

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{\text{max}} = \frac{\left[ \left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right) - V \right]}{\sqrt{\sigma_1' \sigma_3'}} = \frac{q' - V}{\sqrt{p'^2 - q'^2}} \quad (\text{II.54})$$

e logicamente na ruptura

$$\tan \phi_b = \tan \phi_{\text{mob}} = \frac{q' - V}{\sqrt{p'^2 - q'^2}} \quad (\text{II.55})$$

Para determinar a inclinação dos planos de ruptura deve-se substituir  $\cos 2\alpha$  dado por (II.53) em (II.52) para a condição de ruptura, que neste caso pode ser reescrita como

$$\tan \phi_b = \frac{(q' - V) \cdot \text{sen } 2\alpha}{p' + q' \cdot \text{cos } \alpha} \quad (\text{II.56})$$

e assim obtém-se

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left[ \frac{-\sigma_1' \sigma_3' \cdot \tan \phi_b}{\left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} - V \right)} \right] \quad (\text{II.57})$$

levando à importante conclusão que a inclinação dos planos de ruptura depende do ângulo de atrito básico e da velocidade.

Quando  $V = 0$  a elipse de atrito se transforma no círculo de Mohr e neste caso

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\phi_b}{2} \quad (\text{II.58})$$

sendo este o resultado clássico da teoria de Mohr.

Observando que na Figura II.15 os pontos de tangência do círculo de Mohr e da elipse de atrito estão sobre a mesma vertical e definindo o ângulo entre a tangente ao círculo de Mohr e o eixo  $\sigma'$  como o ângulo de atrito aparente  $\phi_{\text{aparente}}$ , então os planos de ruptura terão inclinação

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\phi_{\text{aparente}}}{2} \quad (\text{II.59})$$

e pode-se mostrar que o  $\phi_{\text{aparente}}$  é função da velocidade, já que

$$\tan \phi_b = \frac{\left[ \left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right) - V \right]}{\sqrt{\sigma_1' \cdot \sigma_3'}} \quad (II.60)$$

e

$$\tan \phi_{\text{aparente}} = \frac{\left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right)}{\sqrt{\sigma_1' \cdot \sigma_3'}} \quad (II.61)$$

assim

$$\tan \phi_{\text{aparente}} = \frac{\left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right)}{\left[ \left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right) - V \right]} \cdot \tan \phi_b \quad (II.62)$$

provando que na realidade o  $\phi_{\text{aparente}}$ , ao contrário de  $\phi_b$ , não é propriedade física do solo.

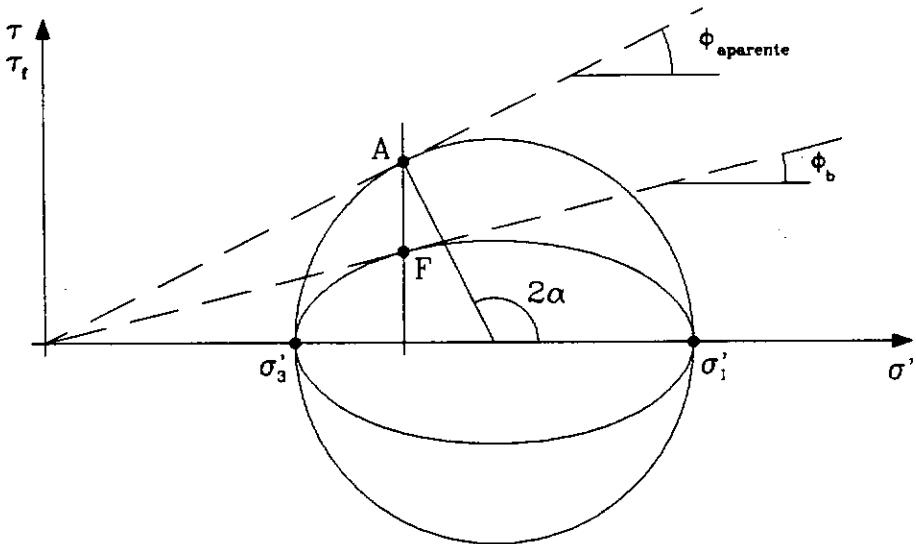


Figura II.15 - O Ângulo de Atrito Aparente

## II.4 - ENSAIOS TRIAXIAIS NÃO-DRENADOS CONVENCIONAIS

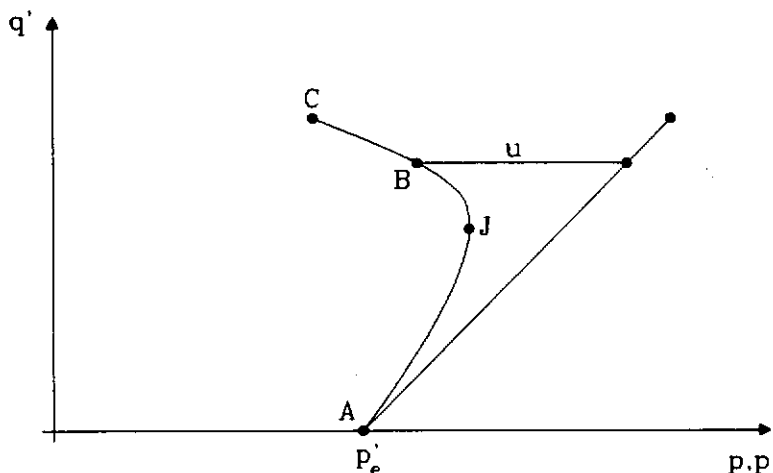
### II.4.1 - Introdução

Continuando o desenvolvimento do modelo, com base nas idéias até então expostas aborda-se nesta seção o comportamento de solos normalmente adensados sob um estado de tensão hidrostático submetidos a ensaios triaxiais não-drenados convencionais.

Nestes ensaios, após a fase de adensamento hidrostático, fecha-se a drenagem e inicia-se a fase de cisalhamento. Uma vez que a água nos vazios do solo e os grãos que o compõem são admitidos incompressíveis, e estando a água impedida de sair da amostra devido ao fechamento da drenagem, toda fase de cisalhamento se dá a volume constante.

Nesta fase, a tensão principal menor  $\sigma_3$  é mantida constante e a prensa é acionada a uma velocidade constante na direção do eixo da amostra cilíndrica de solo comprimindo-a, causando assim um aumento gradativo na tensão principal maior  $\sigma_1$ .

O caminho de tensões totais no espaço  $p \times q$  devido a este carregamento é uma reta de inclinação de  $45^\circ$  com o eixo  $p$  (ver Figura II.16).



**Figura II.16 - Caminhos de tensões totais e efetivas no ensaio convencional**

O caminho de tensões efetivas no espaço  $p' \times q'$  descrito por um elemento normalmente adensado hidrostaticamente sob a tensão  $p'_e$  e ensaiado a uma velocidade  $\dot{\epsilon}_s$  constante é também mostrado na Figura II.16.

Inicialmente o caminho de tensões efetivas tende a seguir o caminho de tensões totais, porém com a geração de poro-pressões devido ao fechamento da drenagem, o caminho de tensões efetivas se afasta do caminho de tensões totais até atingir a ruptura no ponto C.

Antes de continuar, é conveniente definir os parâmetros de tensão e deformação que se correspondem. Dois deles são  $q'$  e  $\epsilon_s$  no plano à  $45^\circ$  em relação aos planos principais maior e menor, denominado a partir de agora como  $\epsilon_t$ . Assim os parâmetros escolhidos são

$$q' = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \quad (II.63)$$

e

$$\epsilon_s(45^\circ) = \epsilon_t = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \quad (II.64)$$

Como no ensaio não-drenado a deformação volumétrica específica é nula, então

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 = 0 \therefore \epsilon_1 = -2\epsilon_3 \quad (II.65)$$

e assim

$$\epsilon_t = \frac{\epsilon_1 - \left(-\frac{\epsilon_1}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4} \cdot \epsilon_1 \quad (II.66)$$

Agora pode-se examinar os gráficos de tensão X deformação e poro-pressão X deformação e o caminho de tensões de um ensaio ideal realizado numa amostra normalmente adensada hidrostáticamente, conforme mostra a Figura II.17.

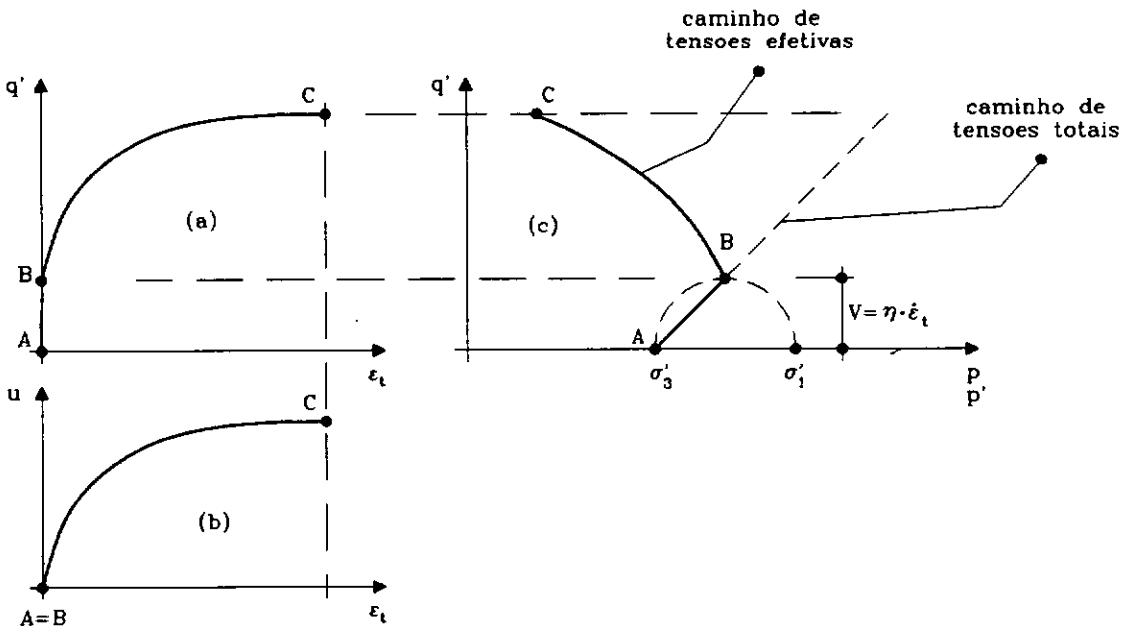


Figura II.17 - Ensaio não-drenado ideal em uma amostra normalmente adensada

Analisando a Figura II.17, nota-se um salto de A para B quando  $\varepsilon_t = 0$  e  $u = 0$ . Este salto dá pela imediata mobilização da resistência por viscosidade  $V$  devido ao acionamento da prensa. Neste instante, tanto a poro-pressão  $u$  como a deformação cisalhante  $\varepsilon_t$  são nulas. A partir do ponto B, sendo o ensaio realizado com um  $\dot{\varepsilon}_t = \text{cte}$ , esta resistência viscosa permanece constante durante todo o ensaio e a resistência por atrito é gradativamente mobilizada, a poro-pressão começa a se elevar e o corpo-de-prova começa a sofrer deformações cisalhantes até atingir a ruptura em C, onde toda resistência por atrito está mobilizada.

O mecanismo descrito no parágrafo anterior está rigorosamente de acordo com o PTEE, uma vez que as deformações cisalhantes só aparecem à medida em que a resistência por atrito é mobilizada. O mesmo ocorrendo com a poro-pressão, já que o ensaio é não-drenado.

No ponto C não há mais atrito a ser mobilizado e o corpo-de-prova chega ao que a Mecânica dos Solos dos Estados Críticos chama de estado crítico, matematicamente expresso por

$$\frac{dq'}{d\varepsilon_t} = \frac{du}{d\varepsilon_t} = 0 \quad (\text{II.67})$$

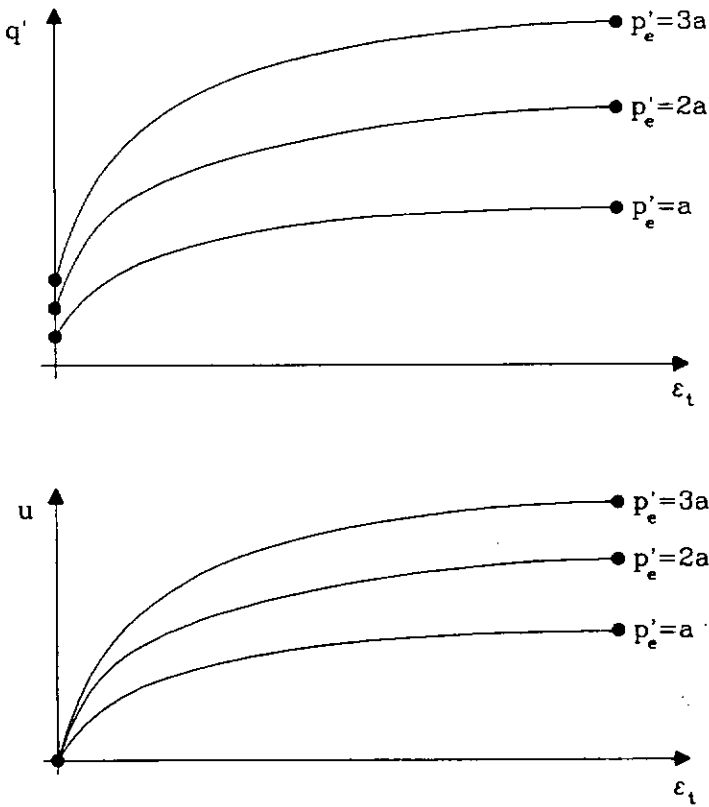
#### II.4.2 - Normalização das Curvas $p'_c \times q'$ , $q' \times \varepsilon_t$ , e $u \times \varepsilon_t$ ,

Sejam os resultados de uma família de ensaios não-drenados normalmente adensados hidrosticamente realizados com a mesma velocidade  $\dot{\varepsilon}_t$  constante, cada um deles partindo de uma tensão de adensamento  $p'_c$  igual à  $a$ ,  $2a$  e  $3a$ , mostrados na Figura II.18. Quanto maiores os valores das tensões de adensamento  $p'_c$ , mais elevados os valores de  $q'$  e  $u$  na ruptura, entretanto verifica-se que as curvas  $q' \times \varepsilon_t$  e  $u \times \varepsilon_t$  são semelhantes.

A Figura II.19a mostra que os caminhos de tensões no espaço  $p' \times q'$  desta família de ensaios são homotéticos com centro de homotetia na origem. Com

isso, as poro-pressões geradas também são figuras homotéticas com centro de homotetia na origem.

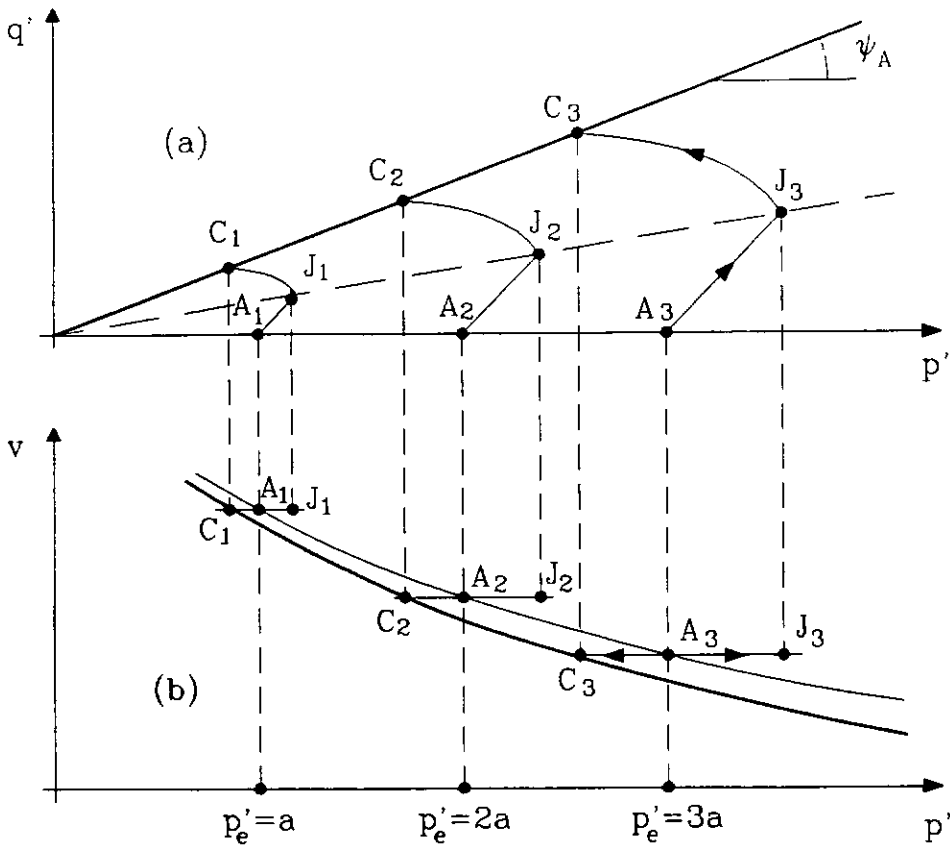
A Figura II.19b traz estes mesmos ensaios representados no espaço  $p' \times v$ , onde  $v$  é o volume específico do corpo-de-prova dado por  $v = 1 + e$ . Como os ensaios são não-drenados, cada um é realizado a um volume específico constante.



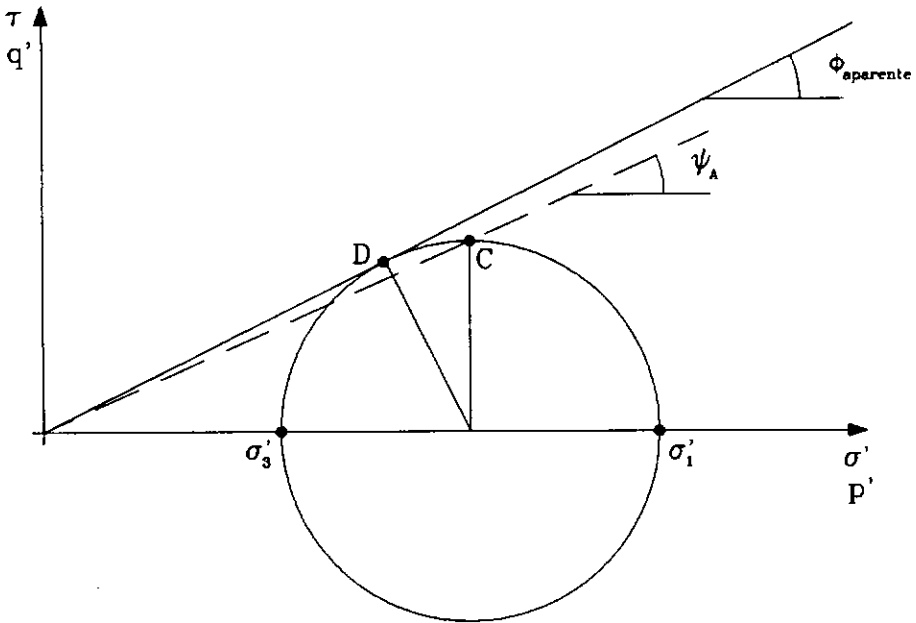
**Figura II.18 - Família de ensaios não-drenados ideais**

O ângulo  $\psi_A$  mostrado na Figura II.19a está relacionado com  $\phi_{\text{aparente}}$  através de  $\tan \psi_A = \text{sen } \phi_{\text{aparente}}$  conforme pode se ver na Figura II.20.

Este ângulo  $\psi_A$  juntamente com a curva passando pelos pontos de ruptura  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  no espaço  $p' \times v$  definem a linha de estados críticos no espaço  $p' \times q' \times v$ , que representa o lugar geométrico dos pontos de ruptura de corpos-de-prova normalmente adensados em ensaios não-drenados realizados com a velocidade  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$ .



**Figura II.19 - Caminhos de tensões efetivas de uma família de ensaios não-drenados**



**Figura II.20 - Relação entre os ângulos  $\psi_A$  e  $\phi_{aparente}$**

Antes de introduzir o conceito de normalização, deve-se ter em mente que o trabalho apresentado por Martins (1992) está apoiado sobre evidências experimentais e conceitos teóricos.

As evidências experimentais são:

(1) Dado um determinado solo normalmente adensado hidrostáticamente sob uma tensão efetiva  $p_e'$ , e ensaiado sob uma velocidade  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$ , os caminhos de tensões no espaço  $p \times q'$  são homotéticos com centro de homotetia na origem.

(2) Os termos ordenados  $(p', q', v)$  na ruptura, dada uma velocidade, definem no espaço  $p \times q \times v$  uma curva suave (derivável) denominada linha de estados críticos associada à velocidade  $\dot{\epsilon}_t$ .

(3) A projeção de uma linha de estados críticos sobre o espaço  $p \times q'$  é uma reta passando pela origem.

(4) Os gráficos  $q \times \epsilon_t$  e  $u \times \epsilon_t$  para qualquer valor de tensão hidrostática de adensamento são semelhantes (no sentido geométrico da palavra).

Quanto aos conceitos teóricos, admite-se o seguinte:

(1) Vale o PTEE.

(2) O processo de ruptura é comandado pelo fenômeno do atrito, o que equívale a dizer que a ruptura se dá quando a elipse de atrito tangencia a envoltória de Mohr-Coulomb cuja inclinação no plano  $\sigma \times \tau$  é  $\tan \phi_b$ , sendo  $\phi_b$  o ângulo de atrito básico.

Por hipótese, a resistência devida à viscosidade no plano inclinado de  $45^\circ$  vale

$$V = \eta \cdot \dot{\epsilon}_t \quad (\text{II.68})$$

Por outro lado, devido à homotetia dos caminhos de tensões efetivas,

$$V = C_o \cdot p_e' \quad (\text{II.69})$$

logo

$$\eta \cdot \dot{\epsilon}_t = C_o \cdot p_e' \quad (\text{II.70})$$

E como a homotetia só vale para cada  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$ , assim

$$\eta = \frac{C_o(\dot{\epsilon}_t)}{\dot{\epsilon}_t} \cdot p_e' \quad (\text{II.71})$$

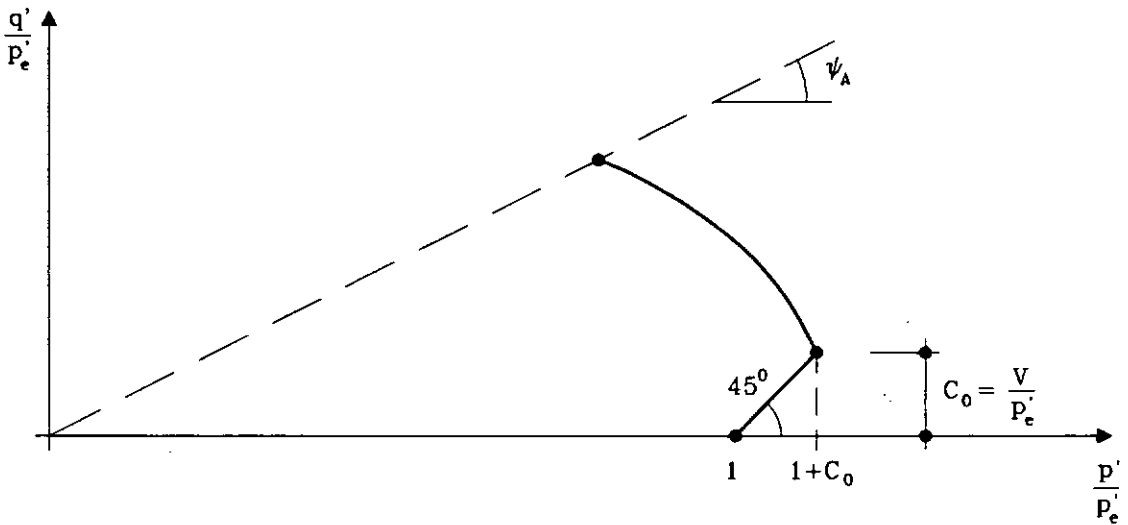
Este resultado vem a confirmar a hipótese feita na Seção II.3.1 segundo a qual, para um  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$ ,  $\eta$  é função exclusiva do índice de vazios ou do volume específico  $v$ . Isto porque o próprio volume específico  $v$  no adensamento

hidrostático é função exclusiva do  $p_e'$ , conforme mostrou Martins (1992) no Capítulo IV de sua tese de doutorado.

A conclusão de que a resistência por viscosidade é proporcional a  $p_e'$  já havia sido observada experimentalmente por Taylor (1948).

Considerando novamente a homotetia dos caminhos de tensões efetivas, pode-se normalizar, para uma dada velocidade  $\dot{\epsilon}_t$ , todos os caminhos de tensões efetivas da Figura II.19a e representá-los por uma só curva, dividindo-se as coordenadas  $p'$  e  $q'$  por  $p_e'$  (ver Figura II.21).

Normalizando-se também as curvas  $q \times \epsilon_t$  e  $u \times \epsilon_t$  por  $p_e'$  também obtém-se curvas únicas (ver Figura II.22), uma vez que estas curvas são semelhantes.



**Figura II.21 - Caminho de tensões efetivas normalizado**

### II.4.3 - O Efeito da Velocidade

Lacerda (1976) estudando a relaxação de tensões não-drenada em solos, realizou diversos ensaios utilizando diferentes velocidades  $\dot{\epsilon}_t$ . As evidências experimentais observadas, para corpos-de-prova adensados a uma mesma tensão  $p_e'$ , foram:

(1) Qualquer que seja a velocidade  $\dot{\epsilon}_t$  empregada, a curva  $u \times \epsilon_t$  é única.

(2) Para o mesmo valor de  $\varepsilon_t$ , os ensaios com maior velocidade apresentam um maior valor de  $q'$ .

(3) Como a curva  $u \times \varepsilon_t$  é única, decorre de (2) que o caminho de tensões efetivas de um ensaio com maior velocidade deve se situar à direita e acima de um com menor velocidade (ver Figura II.23).

Observa-se que as evidências experimentais acima estão de acordo com o PTEE e com as idéias desenvolvidas aqui.

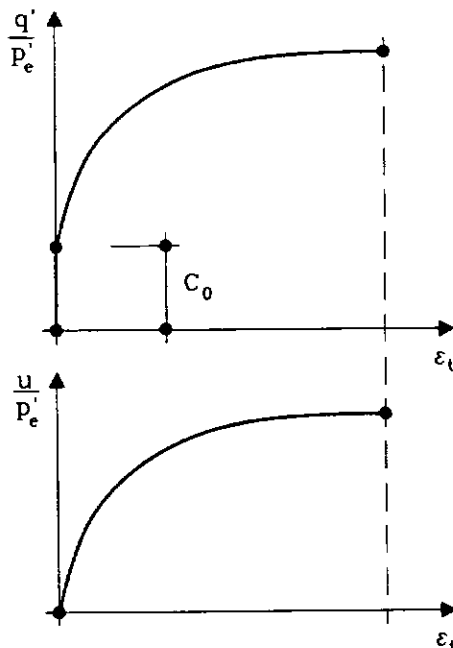


Figura II.22 - Normalização das curvas  $q' \times \varepsilon_t$  e  $u \times \varepsilon_t$

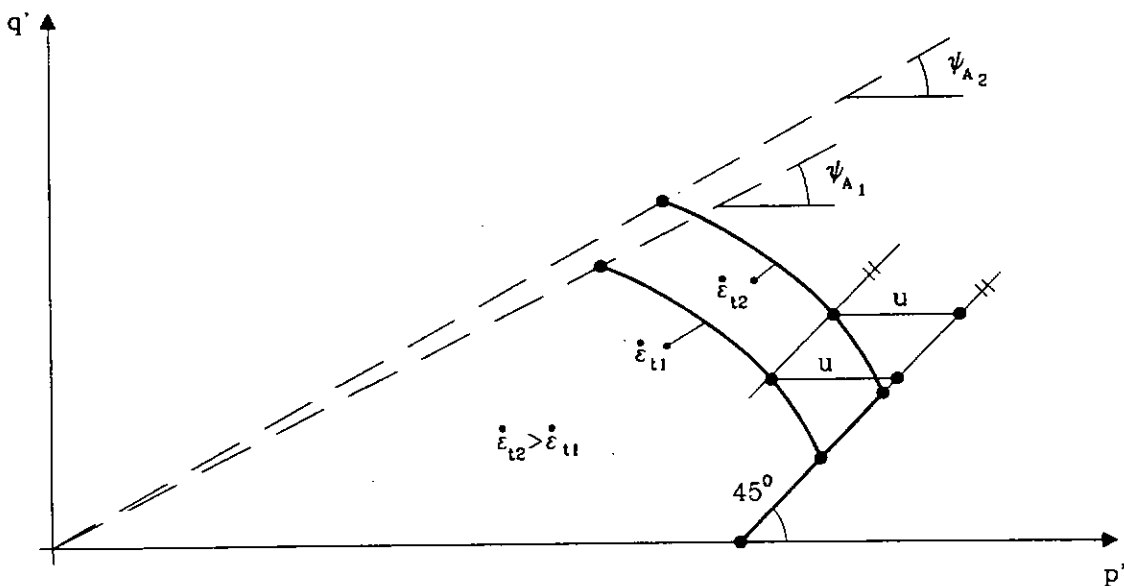


Figura II.23 - Caminho de tensões efetivas para ensaios ideais realizados a diferentes velocidades

Considere agora dois ensaios ideais adensados hidrostáticamente sob a mesma tensão  $p_c'$  e não-drenados, um realizado com  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$  e outro realizado com  $\dot{\epsilon}_t = 0$  (ver Figura II.24). Mesmo não sendo possível realizar este último, o caminho de tensões efetivas correspondente a  $\dot{\epsilon}_t = 0$  pode ser obtido via creep (fluência) ou relaxação de tensões.

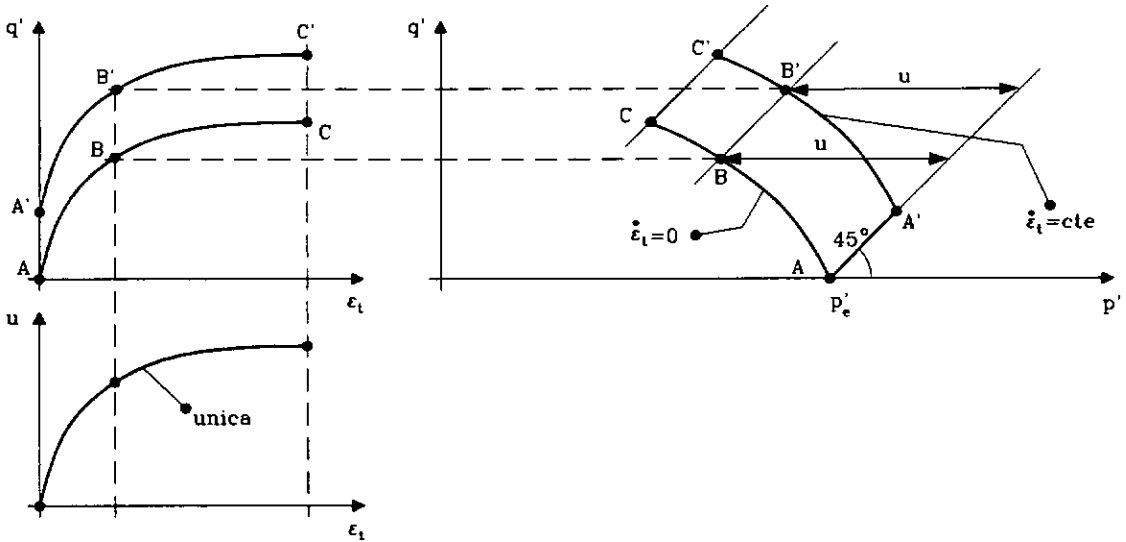


Figura II.24 - Ensaios realizados com  $\dot{\epsilon}_t = 0$  e  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$

Observando a Figura II.24, verifica-se que a mesma está de acordo com o PTEE e os resultados teóricos até aqui obtidos, e com todas as evidências experimentais descritas por Lacerda (1976).

O ensaio com  $\dot{\epsilon}_t = 0$  não apresenta salto viscoso inicial pois sua velocidade é zero.

Considerando a evidência experimental de que a poro-pressão para um dado  $\epsilon_t$  é única, independente de  $\dot{\epsilon}_t$ , e também considerando o PTEE chega-se à importante conclusão: dado qualquer caminho de tensões efetivas saindo do mesmo  $p_c'$ , todos os pontos pertencentes a qualquer reta inclinada de  $45^\circ$  terão o mesmo valor de  $\epsilon_t$  e o mesmo atrito mobilizado. Assim os pares de pontos A e A', B e B' e C e C' na Figura II.24 têm, cada um, o mesmo valor de  $\tan \phi_{\text{mob}}$  e um mesmo valor de  $\epsilon_t$ .

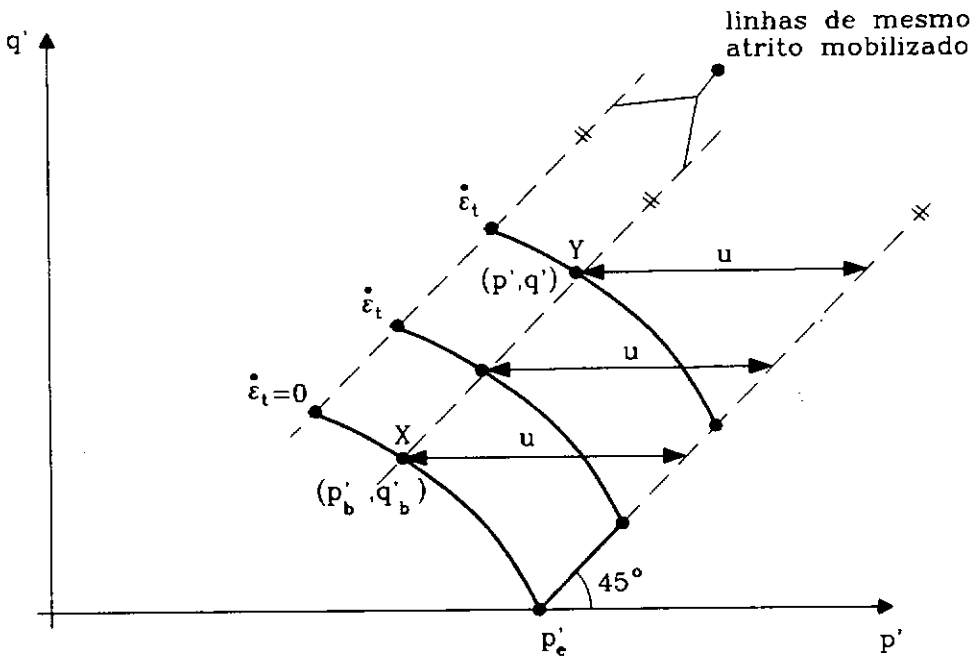
Em A e A' tem-se que  $\tan \phi_{\text{mob}} = 0$  e em C e C', por serem pontos na ruptura,  $\tan \phi_{\text{mob}} = \tan \phi_b$ .

Estas retas do espaço  $p' \times q'$  inclinadas de  $45^\circ$  são denominadas de linhas de mesmo atrito mobilizado, onde nelas o  $\epsilon_t$  e o  $\tan \phi_{\text{mob}}$  são constantes nos ensaios não-drenados.

Com base no que já foi visto até aqui, pode-se agora relacionar as coordenadas  $(p', q')$  do círculo de Mohr dos ensaios realizados a velocidades  $\dot{\epsilon}_t = 0$  e  $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$  correspondentes a um mesmo ângulo de atrito mobilizado  $\phi_{\text{mob}}$ .

Na Figura II.25 a diferença entre os pontos X e Y está no fato de que em X a resistência mobilizada é toda por atrito e em Y a resistência mobilizada é devida ao atrito e à viscosidade, conforme mostra a Figura II.26.

O ponto X tem coordenadas  $(p'_b, q'_b)$ , onde o índice b indica básico. Já as coordenadas do ponto Y são dadas simplesmente por  $(p', q')$ .



**Figura II.25 - Conceito de linhas de mesmo atrito mobilizado**

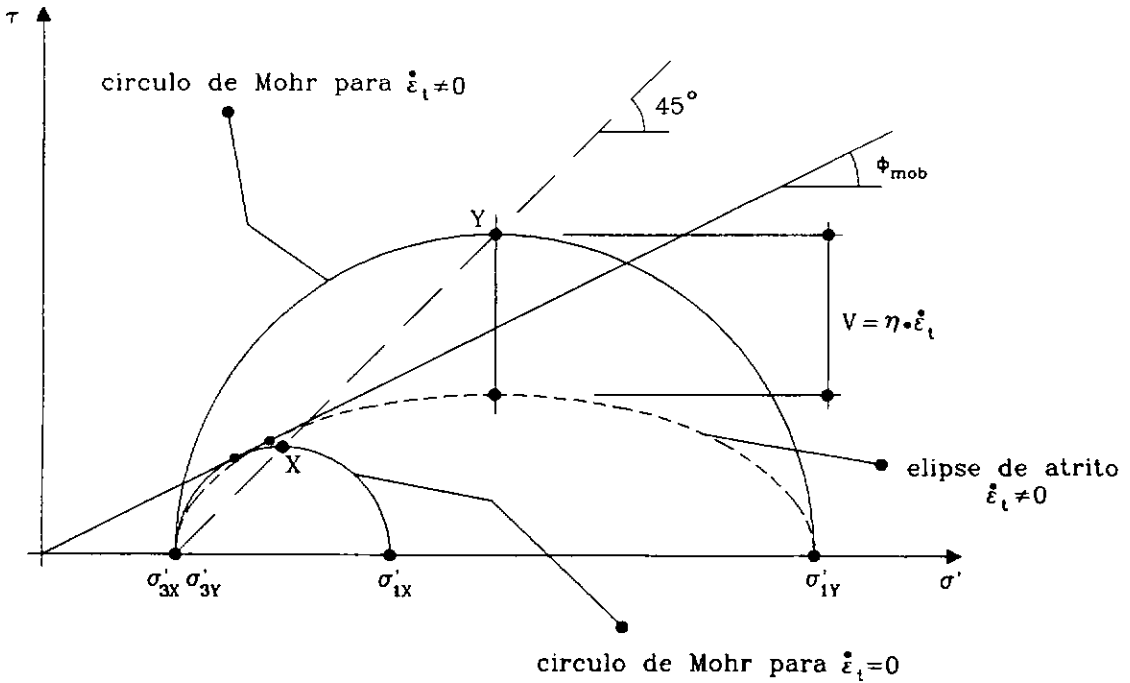
Devido ao fato dos pontos X e Y apresentarem o mesmo ângulo de atrito mobilizado, pode-se escrever que

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \frac{q'_b}{\sqrt{p_b'^2 - q_b'^2}} = \frac{q' - V}{\sqrt{p'^2 - q'^2}} \quad (\text{II.72})$$

onde no ponto X, relativo ao caminho de tensões efetivas básico, a elipse de atrito degenera no círculo de Mohr.

Do conceito das linhas de mesmo atrito mobilizado, escreve-se

$$\frac{q' - q_b'}{p' - p_b'} = 1 \quad (II.73)$$



**Figura II.26 - Condição de mesmo atrito mobilizado para os ensaios com  $\dot{\epsilon}_t = 0$  e  $\dot{\epsilon}_t = cte$**

Assim, com uma simples manipulação algébrica das equações (II.72) e (II.73), chega-se a

$$q' = V + \frac{q_b'^2}{p_b' + q_b'} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{(p_b' - q_b') + 2V}{(\tan \phi_{mob})^2 \cdot (p_b' - q_b')} \right]} \right\} \quad (II.74)$$

e

$$p' = V + (p_b' - q_b') + \frac{q_b'^2}{p_b' + q_b'} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{(p_b' - q_b') + 2V}{(\tan \phi_{mob})^2 \cdot (p_b' - q_b')} \right]} \right\} \quad (II.75)$$

Observa-se também, a partir das equações (II.72) e (II.73), que quando  $\phi_{mob} = 0$

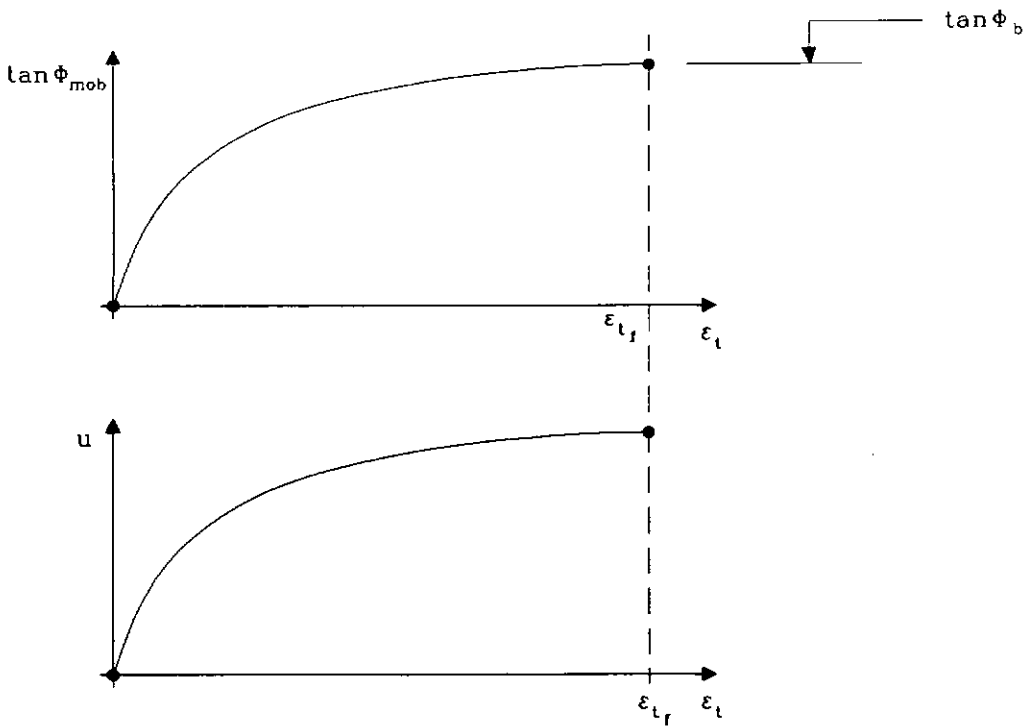
$$q' - V = 0 \quad (II.76)$$

e

$$p' = V + p_b' \quad (II.77)$$

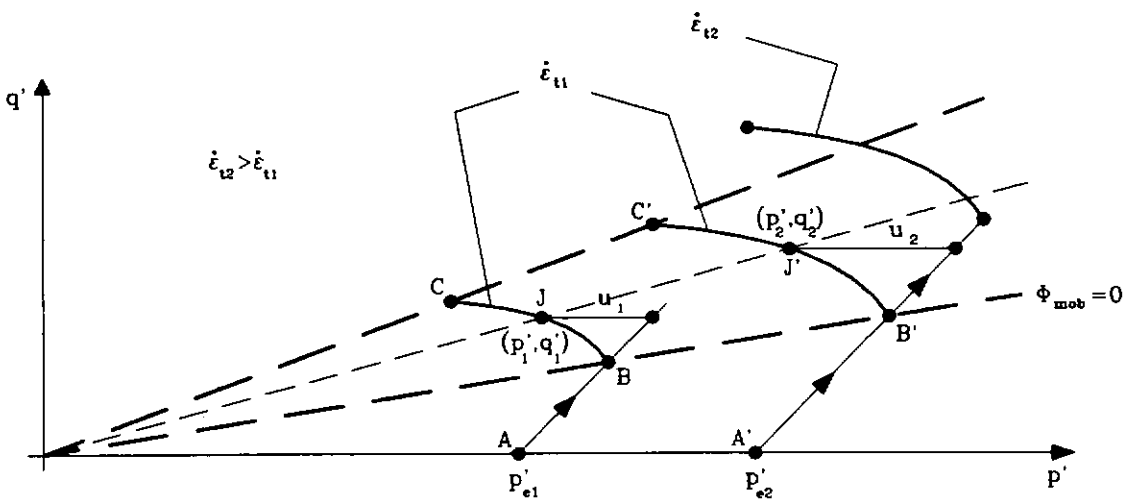
o que está de acordo com o que foi dito a respeito do salto viscoso do caminho de tensões efetivas de A para B (ver Figura II.27) quando se começa um ensaio com  $\dot{\epsilon}_t = cte$ .





**Figura II.28 - Curvas  $\tan \phi_{mob} \times \epsilon_t$  e  $u \times \epsilon_t$  para um dado  $p_e'$ , que independem da velocidade do ensaio**

A partir da homotetia dos caminhos de tensões efetivas de dois ensaios não-drenados realizados com mesmo  $\dot{\epsilon}_t$  e diferentes tensões de adensamento, pode-se mostrar que fixados os valores de  $q'$  e  $p_e'$ , o valor de  $p'$  estará automaticamente determinado. Isto significa dizer que o ângulo de atrito mobilizado dos pontos J e J' na Figura II.29 é o mesmo.



**Figura II.29 - Homotetia dos caminhos de tensões efetivas**

Sendo o gráfico  $\frac{q'}{p_e'} \times \varepsilon_t$  único para um valor fixado de  $\dot{\varepsilon}_t$  e dados  $q'$ ,  $p_e'$  e  $\dot{\varepsilon}_t$ , os valores de  $\tan\phi_{\text{mob}}$  e  $p'$  ficam automaticamente determinados, então o gráfico  $\tan\phi_{\text{mob}} \times \varepsilon_t$  associado aos caminhos de tensões efetivas ABC e A'B'C' na Figura II.29 é único.

Além do mais, o corolário da seção anterior garante que o gráfico  $\tan\phi_{\text{mob}} \times \varepsilon_t$  associado a qualquer caminho de tensões efetivas partindo do mesmo  $p_e'$  é único qualquer que seja o  $\dot{\varepsilon}_t$ .

Assim, pode-se enunciar o seguinte corolário:

**Corolário:** “ Supondo-se válido o PTEE, todo solo normalmente adensado hidrosticamente que apresentar caminhos de tensões efetivas homotéticos para um determinado valor de  $\dot{\varepsilon}_t$  e uma relação  $u \times \varepsilon_t$  única para qualquer que seja  $\dot{\varepsilon}_t$  apresentará, qualquer que seja  $\dot{\varepsilon}_t$  e qualquer que seja  $p_e'$ , uma curva única  $\tan\phi_{\text{mob}} \times \varepsilon_t$ .”

#### (II.4.5) A Poro-Pressão

De acordo com o que foi desenvolvido até aqui, e considerando a homotetia do caminho de tensões efetivas para ensaios realizados a um mesmo  $\dot{\varepsilon}_t$ , normalizando a poro-pressão em relação à  $p_e'$  obtém-se uma curva  $\frac{u}{p_e'} \times \varepsilon_t$  única (ver Figura II.30). Este resultado pode ser mostrado através da evidência experimental de que no ensaio convencional a poro-pressão é função única de  $p_e'$  e  $\varepsilon_t$ .

Para o caso de ensaios onde ambas as tensões principais ( $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ ) variam durante o carregamento, a Figura II.31 deve ser observada. Os caminhos de tensões totais até aqui analisados são como o AG mostrado na Figura II.31, onde  $\frac{\Delta q}{\Delta p} = 1$ . Neste caso só quem aumenta é  $\sigma_1$ , responsável pelo cisalhamento do solo, ao passo que  $\sigma_3$  é mantida constante. Desta forma, as

poro-pressões aqui geradas são devidas exclusivamente ao cisalhamento do solo, denotadas a partir de agora por  $u_s$ .

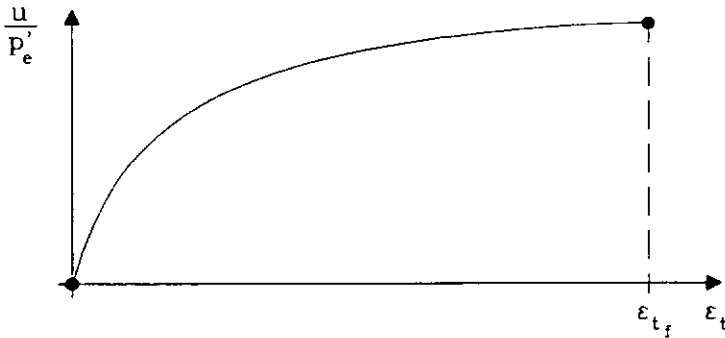


Figura II.30 - Curva  $\frac{u}{p'_e} \times \varepsilon_t$ , que é única para qualquer velocidade  $\dot{\varepsilon}_t$

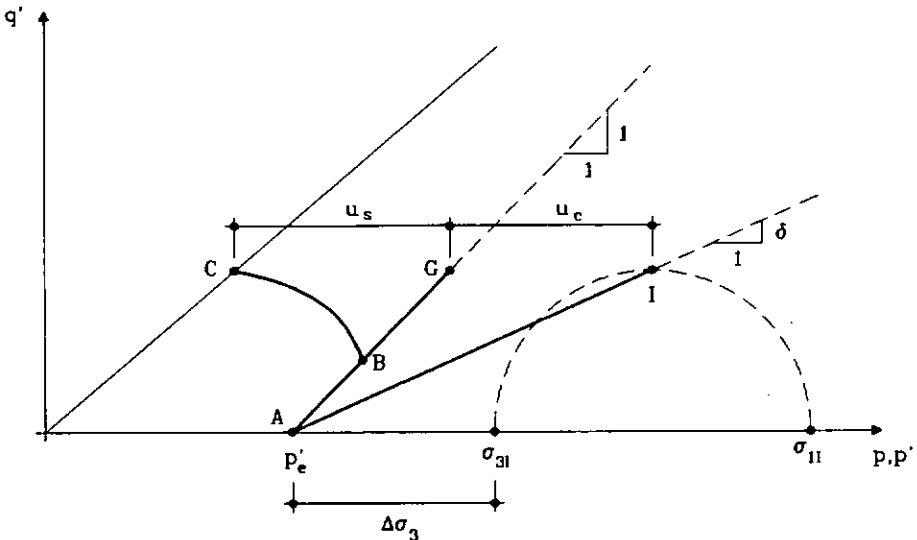


Figura II.31 - Ensaio com caminho de tensões não-convencional

Logo, conforme mostra a Figura II.30, a curva  $\frac{u_s}{p'_e} \times \varepsilon_t$  é única para qualquer  $\dot{\varepsilon}_t$ , sendo propriedade do solo, ou seja,

$$\frac{u_s}{p'_e} = f(\varepsilon_t) \quad (\text{II.79})$$

onde a função  $f$  deve ter sua forma determinada experimentalmente.

Ao se analisar um ensaio não-drenado realizado a uma mesma velocidade  $\dot{\varepsilon}_t$ , só que ao longo do caminho de tensões totais AI, para o qual

$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \delta$ , verifica-se experimentalmente que o caminho de tensões efetivas é o

mesmo do ensaio em que  $\frac{\Delta q}{\Delta p} = 1$ , ou seja, do ensaio de caminho de tensões totais dado por AG na Figura II.31.

É fácil mostrar que para o ensaio onde  $\frac{\Delta q}{\Delta p} = \delta$ , a poro-pressão é dada por

$$u = u_s + \Delta\sigma_3 \quad (\text{II.80})$$

e de acordo com a equação (II.79), a mesma pode ser escrita como

$$u = p_e' \cdot f(\epsilon_t) + \Delta\sigma_3 \quad (\text{II.81})$$

expressando a poro-pressão como função da tensão de adensamento  $p_e'$ , da deformação cisalhante  $\epsilon_t$  e do incremento de tensão principal menor  $\Delta\sigma_3$ .

## CAPÍTULO III

# APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO POR MARTINS (1992) AO FENÔMENO DO CREEP NÃO-DRENADO

### III.1 - INTRODUÇÃO

Antes de iniciar este capítulo, é interessante definir claramente o que vem a ser o fenômeno de creep (ou fluência). Ao submeter o corpo-de-prova a um estado de tensão total constante, constata-se que o mesmo se deforma ao longo do tempo. Este é o fenômeno do creep: prescreve-se um estado de tensão constante ao longo do tempo em um corpo-de-prova e analisa-se seu comportamento.

Já no campo, o comportamento de natureza viscosa e friccional do solo se manifesta de outras maneiras. Quando se prescreve um carregamento externo constante no tempo num maciço de solo e observa-se seu comportamento, o estado de tensão total no maciço não necessariamente permanecerá constante, uma vez que a cada instante e em cada ponto do maciço as equações de equilíbrio devem ser satisfeitas à medida que ocorrem deformações

O creep então seria um caso particular deste comportamento do solo, onde impõe-se que a única solução possível para as equações de equilíbrio é um estado de tensão total constante no tempo.

O fenômeno do creep não-drenado foi abordado por Martins (1992), que o explicou tanto qualitativamente como quantitativamente à luz do modelo aqui estudado.

Neste capítulo, esta abordagem é exposta e comentada. No final apresenta-se um algoritmo para resolver numericamente a equação diferencial que rege o fenômeno.

### III.2 - A LEI DE TAYLOR

Para completar as idéias aqui desenvolvidas a respeito da natureza viscosa e friccional dos solos e, assim, entender mais claramente os fenômenos a ela associados, como a fluência (e, é claro, o creep) e a relaxação de tensões, sejam estes drenados ou não-drenados, falta enunciar a **Lei de Taylor Generalizada**: " Um solo submetido a um estado de tensão onde as tensões cisalhantes sejam resistidas por viscosidade e por atrito procurará ao longo do tempo resistir internamente ao esforço cisalhante apenas por atrito."

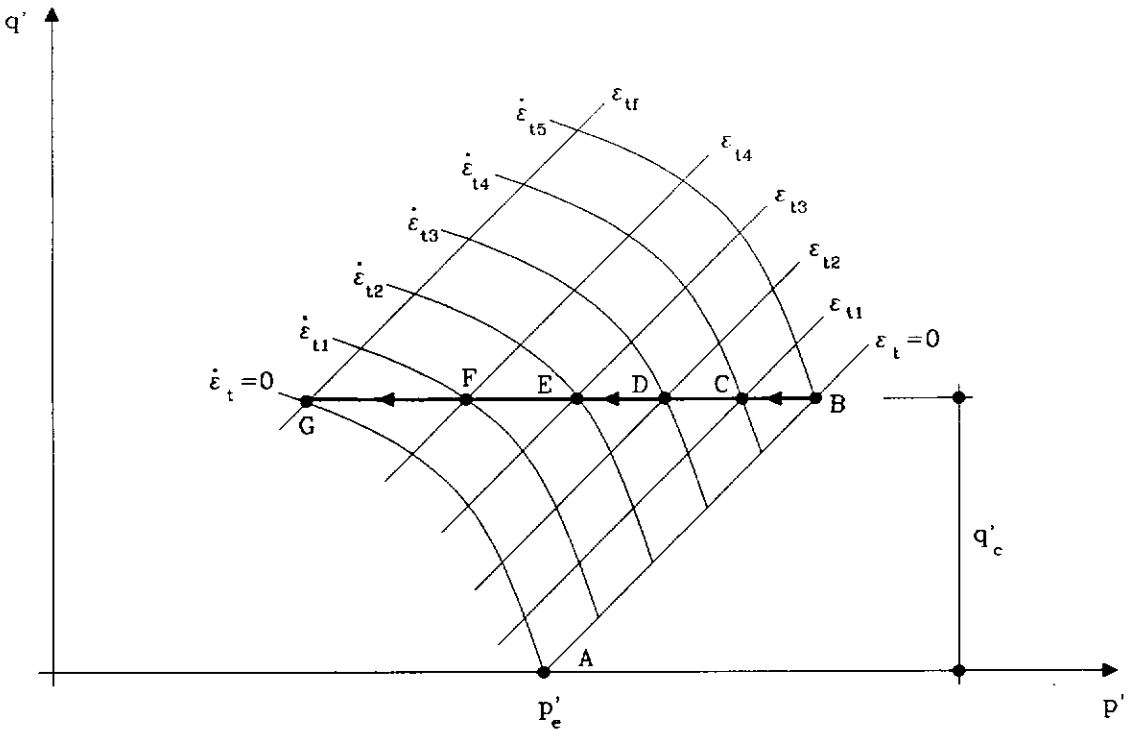
Nesta lei acima enunciada, Martins (1992) tenta reunir as idéias de Taylor a respeito da resistência por viscosidade e do efeito do tempo no comportamento dos solos.

### III.3 - O Mecanismo do Creep à Luz do Modelo

O creep não-drenado aqui considerado é então o fenômeno de deformação ao longo do tempo sob condições não-drenadas e estado de tensão total constante.

Na Figura III.1 são representados no espaço  $p' \times q'$  os caminhos de tensões efetivas de ensaios triaxiais não-drenados convencionais realizados a diferentes velocidades  $\dot{\epsilon}_t$ , cujos corpos-de-prova foram submetidos a uma mesma tensão de adensamento  $p_e'$ , no ramo normalmente adensado.

Também pode-se notar a presença de linhas de mesmo atrito mobilizado, correspondendo cada uma delas a valores únicos de  $\phi_{mob}$ ,  $\epsilon_t$  e  $u_s$ .

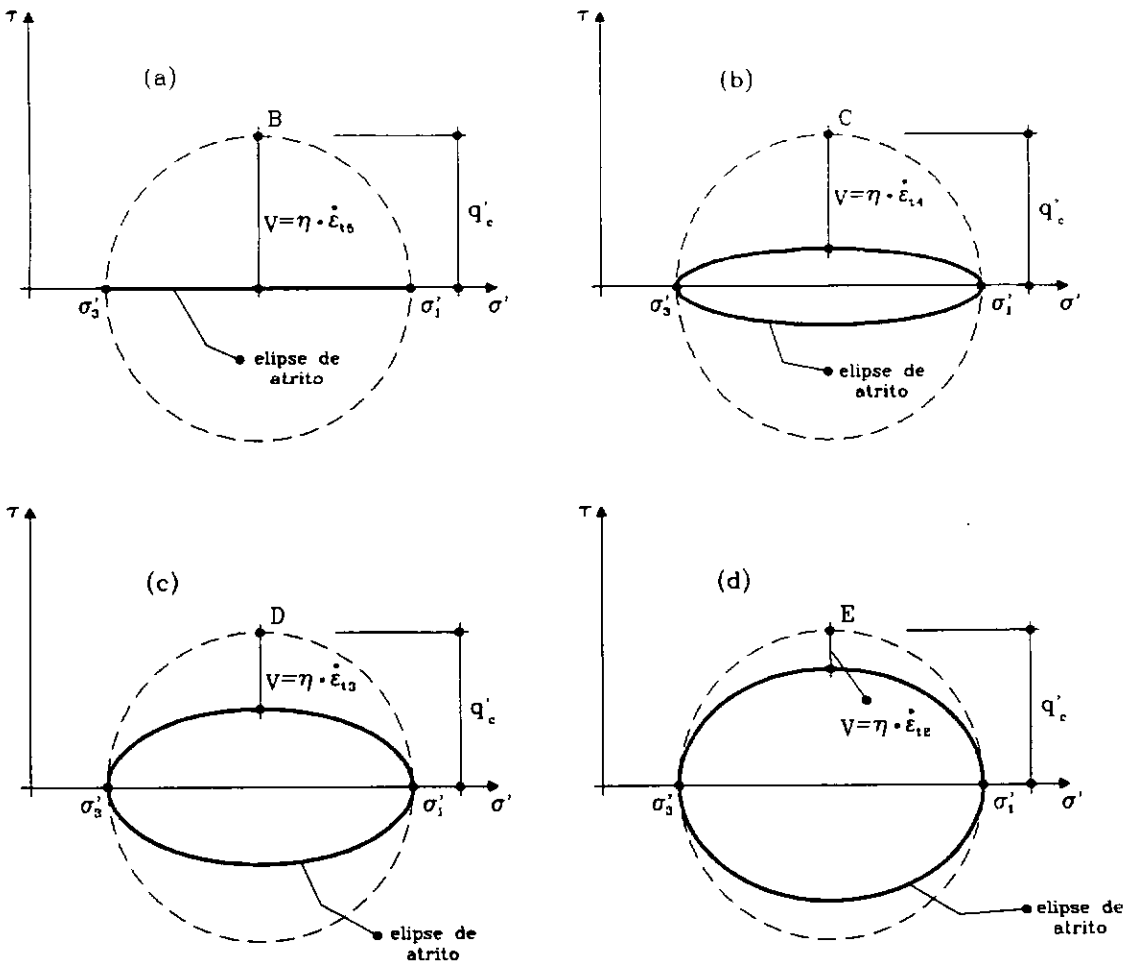


**Figura III.1 - Caminhos de tensões efetivas e linhas de mesmo atrito mobilizado**

Seja agora o seguinte ensaio hipotético: adensa-se o corpo de prova a uma tensão de adensamento  $p'_e$  e depois de fechada a drenagem, aplica-se instantaneamente uma tensão desviadora  $q'_c$ , sendo esta a tensão desviadora do creep (constante ao longo de todo ensaio). Imediatamente haverá o salto no caminho de tensões efetivas de A para B permanecendo com  $\epsilon_t = 0$ . Assim, considerando o PTEE, não há mobilização de atrito ( $\epsilon_t = 0$ ) e conseqüentemente toda resistência ao cisalhamento em B é de origem viscosa. Nesta situação, a elipse de viscosidade (de Taylor) é o próprio círculo de Mohr, e

$$q'_c = V_B = \eta \cdot \dot{\epsilon}_{t5} \quad (\text{III.1})$$

De acordo com a lei de Taylor, o solo procurará mobilizar ao longo do tempo a resistência por atrito conforme ilustra a Figura III.2. Com isso, de acordo com o PTEE, ocorrerão deformações cisalhantes e, com a conseqüente geração de poro-pressão, o caminho de tensões efetivas seguido será o BCDEFG na Figura III.1.



**Figura III.2 - Expansão ao longo do tempo da elipse de atrito num ensaio de creep não-drenado**

Este mecanismo, aqui qualitativamente descrito, mostra a transferência gradativa da resistência por viscosidade para a resistência por atrito, tendo grande importância para se interpretar a equação diferencial que será desenvolvida nas próximas seções.

Sendo  $q_f'$  e  $V$  as respectivas parcelas de atrito e viscosidade da tensão desviadora de creep  $q_c'$ , então

$$q_c' = q_f' + V \quad (\text{III.2})$$

e observa-se que há uma analogia entre o fenômeno de creep não-drenado e o fenômeno do adensamento. Onde neste último a tensão vertical total  $\sigma_v$  permanece constante e há gradativa transferência da poro-pressão  $u$  para a tensão vertical efetiva  $\sigma_v'$ , sendo

$$\sigma_v = \sigma_v' + u \quad (\text{III.3})$$

### III.4 - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DO SOLO

Antes de entrar no desenvolvimento matemático do fenômeno do creep, é interessante esclarecer quais são as funções consideradas como propriedades do solo, ou seja, que independem do carregamento aplicado. É a partir dessas funções fundamentais, convenientemente representadas por expressões matemáticas, que se chega às equações do modelo que relacionam suas variáveis.

A primeira delas, conforme visto antes, é a curva poro-pressão normalizada pela tensão de adensamento versus  $\varepsilon_t \left( \frac{u_s}{p_e'} \times \varepsilon_t \right)$ , sendo esta verificada através de evidências experimentais.

As curvas básicas, que são as relações entre as variáveis do solo correspondente a um ensaio convencional ideal realizado à  $\dot{\varepsilon}_t = 0$ , são livres do efeito da viscosidade, significando que também são propriedades do solo.

A partir das curvas básicas  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \varepsilon_t$  e  $\frac{u_s}{p_e'} \times \varepsilon_t$ , que são propriedades fundamentais do solo, pode-se definir o caminho de tensões efetivas básico, ou seja,  $\frac{p_b'}{p_e'} \times \frac{q_b'}{p_e'}$ , para ensaios não-drenados convencionais através do conceito de linhas de mesmo atrito mobilizado (mesmo  $u_s$ ), chegando-se a

$$\frac{p_b'}{p_e'} = 1 + \frac{q_b'}{p_e'} - \frac{u_s}{p_e'} \quad (\text{III.4})$$

As curvas básicas  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \varepsilon_t$  e  $\frac{p_b'}{p_e'} \times \frac{q_b'}{p_e'}$  podem ser obtidas através de ensaios triaxiais convencionais (CIU) descontando-se da tensão desviadora a parcela da resistência viscosa ou por intermédio de ensaios de creep e relaxação de tensões.

Por definição, a tangente do ângulo de atrito mobilizado é dada por

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \frac{q' - V}{\sqrt{p'^2 - q'^2}} \quad (\text{III.5})$$

para um ensaio com  $\dot{\epsilon}_t \neq 0$ . Normalizando (III.5) obtém-se

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \frac{\frac{q'}{p_e'} - C_0(\dot{\epsilon}_t)}{\sqrt{\left(\frac{p'}{p_e'}\right)^2 - \left(\frac{q'}{p_e'}\right)^2}} \quad (\text{III.6})$$

E de acordo com o PTEE, para a mesma deformação cisalhante  $\epsilon_t$ , tem-se o mesmo atrito mobilizado. Assim, para  $\dot{\epsilon}_t = 0$

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \frac{\frac{q_b'}{p_e'}}{\sqrt{\left(\frac{p_b'}{p_e'}\right)^2 - \left(\frac{q_b'}{p_e'}\right)^2}} \quad (\text{III.7})$$

Observa-se que a equação (III.7) mostra matematicamente que a curva  $\tan \phi_{\text{mob}} \times \epsilon_t$  é uma propriedade fundamental do solo, já que o ângulo de atrito mobilizado pôde ser colocado apenas como função das variáveis  $\frac{p_b'}{p_e'}$  e  $\frac{q_b'}{p_e'}$ , funções exclusivas de  $\epsilon_t$ .

Finalmente, a relação  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$  deve ser experimentalmente comprovada e matematicamente representada de forma que o modelo fique fechado. Uma maneira de calcular a cada instante o  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  seria fazendo uso da equação (III.6) e dos pontos experimentais de ensaios (convencionais, de creep ou relaxação de tensões), uma vez já determinada a função  $\tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_t)$ . Isolando o  $C_0$  de (III.6) obtém-se

$$C_0 = \frac{q'}{p_e'} - \tan \phi_{\text{mob}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p'}{p_e'}\right)^2 - \left(\frac{q'}{p_e'}\right)^2} \quad (\text{III.8})$$

### III.5 - A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO CREEP SEGUNDO MARTINS (1992)

A partir da equação (II.74) deduzida no capítulo anterior pode-se resolver matematicamente o fenômeno do creep. A equação fica

$$q_c' = V + \frac{q_b'^2}{p_b' + q_b'} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{(p_b' - q_b') + 2V}{(p_b' - q_b') \cdot (\tan \phi_{mob})^2} \right]} \right\} \quad (III.9)$$

onde  $q' = q_c'$ , já que no caso do ensaio de creep  $q'$  é constante. Dividindo ambos os membros de (III.9) por  $p_e'$  tem-se

$$\frac{q_c'}{p_e'} = C_0(\dot{\epsilon}_t) + \frac{\left(\frac{q_b'}{p_e'}\right)^2}{\frac{p_b' + q_b'}{p_e'}} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{\frac{p_b' - q_b'}{p_e'} + 2C_0(\dot{\epsilon}_t)}{\left(\frac{p_b' - q_b'}{p_e'}\right) \cdot (\tan \phi_{mob})^2} \right]} \right\} \quad (III.10)$$

Martins (1992) considerou que a parcela  $2C_0(\dot{\epsilon}_t)$  era pequena se comparada ao valor de  $\frac{p_b' - q_b'}{p_e'}$ . Esta simplificação, como se verificará no próximo capítulo, levará a um afastamento da previsão do modelo em relação aos pontos experimentais (ensaos de creep não-drenados realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco).

Como esta simplificação leva a uma equação para a representação do fenômeno do creep didaticamente melhor de se manipular sem maiores prejuízos ao modelo além dos já expostos, continuar-se-á então sua dedução.

Assim, a equação (III.10) se simplifica para

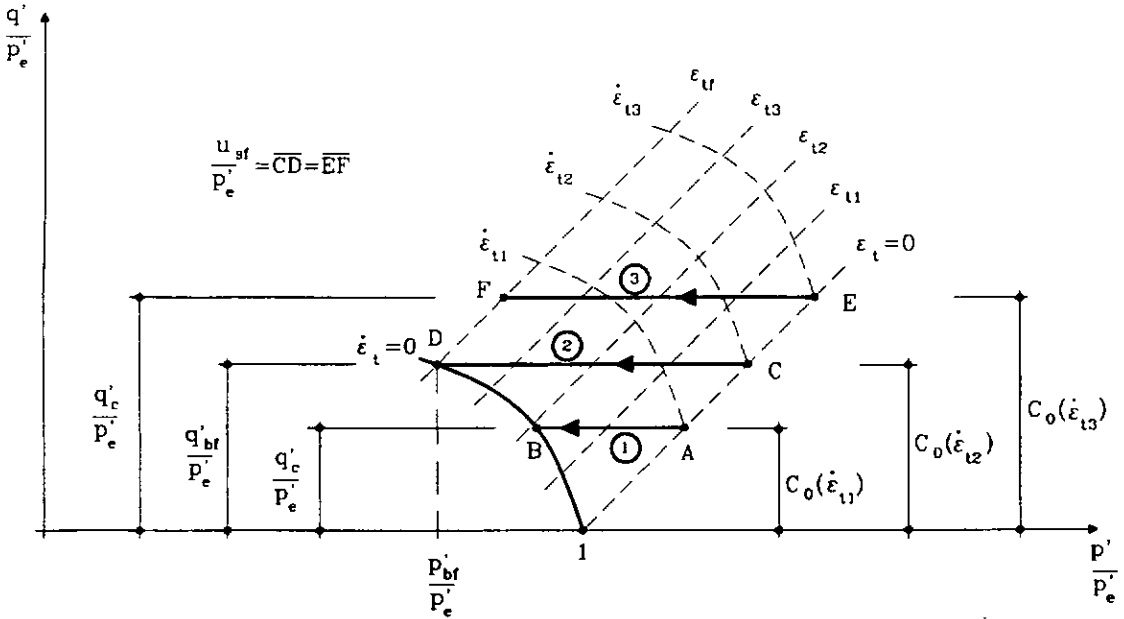
$$\frac{q_c'}{p_e'} = C_0(\dot{\epsilon}_t) + \frac{\left(\frac{q_b'}{p_e'}\right)^2}{\frac{p_b' + q_b'}{p_e'}} \cdot (1 + \csc \phi_{mob}) \quad (III.11)$$

e sendo  $\frac{q_b'}{p_b'} = \text{sen} \phi_{mob}$ , chega-se a

$$\frac{q_c'}{p_e'} = C_0(\dot{\epsilon}_t) + \frac{q_b'}{p_e'} (\epsilon_t) \quad (III.12)$$

Uma vez conhecendo-se as funções  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  e  $\frac{q_b'}{p_e'} (\epsilon_t)$ , a equação diferencial simplificada do creep (equação (III.12)) pode ser resolvida.

Antes de finalizar esta seção, seria interessante analisar os caminhos de tensões efetivas normalizados dos três casos de ensaios de creep não-drenados mostrados na Figura III.3.



**Figura III.3 - Os três casos de ensaios de creep não-drenado**

O caminho de tensões efetivas básico, correspondente ao ensaio convencional hipotético realizado a uma velocidade  $\dot{\epsilon}_t = 0$ , é constituído pelo conjunto de pares ordenados  $\left( \frac{p'_b}{p'_e}, \frac{q'_b}{p'_e} \right)$ . Na ruptura, representada pelo ponto D

na Figura III.3,  $\frac{p'_b}{p'_e}$  assume o valor de  $\frac{p'_{bf}}{p'_e}$  e  $\frac{q'_b}{p'_e}$  assume o valor de  $\frac{q'_{bf}}{p'_e}$ . O

símbolo  $\frac{u_{sf}}{p'_e}$  representa a poro-pressão normalizada na ruptura, sendo

independente de  $\dot{\epsilon}_t$ . Tanto  $\frac{u_{sf}}{p'_e}$  como  $\frac{p'_{bf}}{p'_e}$  e  $\frac{q'_{bf}}{p'_e}$  estão associados a valores únicos de  $\epsilon_t$  e  $\phi_{mob}$  na ruptura, dados respectivamente por  $\epsilon_{cr}$  e  $\phi_b$ .

Deve-se observar também na Figura III.3 que a função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  deverá ser crescente com o  $\dot{\epsilon}_t$ , já que  $C_0(\dot{\epsilon}_t1) < C_0(\dot{\epsilon}_t2)$  para  $\dot{\epsilon}_t1 < \dot{\epsilon}_t2$ , a função  $\frac{q'_b}{p'_e}(\epsilon_t)$  também deverá ser crescente com  $\epsilon_t$ , uma vez que  $\frac{q'_b}{p'_e}$  cresce à medida que

se passa de uma linha de mesmo  $\epsilon_t$  (mesmo atrito mobilizado) para outra de  $\epsilon_t$  maior, ou seja,  $\frac{q'_b}{p'_e}(\epsilon_t1) < \frac{q'_b}{p'_e}(\epsilon_t2)$  para  $\epsilon_t1 < \epsilon_t2$ .

Assim, sendo  $q_c'$  a tensão desviadora de creep e analisando a Figura III.3 juntamente com a equação (III.12), chega-se às seguintes conclusões a respeito dos ensaios de creep não-drenados:

(1) Se  $\frac{q_c'}{p_c'} < \frac{q_{br}'}{p_c'}$ , não haverá ruptura por creep e a deformação cisalhante  $\epsilon_t$ , tende para um valor bem determinado  $\epsilon_{t0}$  (matematicamente falando:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}_t = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_t = \epsilon_{t0}$ ). Este valor de  $\epsilon_{t0}$  é determinado entrando-se com  $\frac{q_b'}{p_c'} = \frac{q_c'}{p_c'}$  na

curva básica  $\frac{q_b'}{p_c'} \times \epsilon_t$  (caso do ensaio 1 na Figura III.3).

(2) Se  $\frac{q_c'}{p_c'} > \frac{q_{br}'}{p_c'}$  haverá ruptura por creep num tempo finito (caso do ensaio 3 na Figura III.3).

(3) Nos casos em que há ruptura o tempo para a ruptura será tanto menor quanto maior for o valor de  $\frac{q_c'}{p_c'}$ .

A conclusão (1) pode ser explicada através da equação (III.12), pois, inicialmente, quando se aplica a tensão desviadora  $\frac{q_c'}{p_c'}$ ,  $\epsilon_t = 0$  e conseqüentemente  $\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t) = 0$ . Devido à lei de Taylor,  $\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t)$  aumenta e  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  decresce já que  $\frac{q_c'}{p_c'}$  é constante. Sendo  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  crescente, então  $\dot{\epsilon}_t$  diminui. Como  $\frac{q_c'}{p_c'} < \frac{q_{br}'}{p_c'}$ , o processo evolui até  $\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_{t0}) = \frac{q_c'}{p_c'}$ . Nesta condição  $C_0(\dot{\epsilon}_t) = 0$ , o que implica  $\dot{\epsilon}_t = 0$  finalizando o processo de creep.

Para explicar a conclusão (2), toma-se a mesma explicação do caso anterior, só que como  $\frac{q_c'}{p_c'} > \frac{q_{br}'}{p_c'}$ , quando  $\frac{q_b'}{p_c'} = \frac{q_{br}'}{p_c'}$  toda resistência por atrito foi mobilizada, permanecendo constante ao longo do tempo. Assim, sendo  $\frac{q_c'}{p_c'}$  constante então  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  e conseqüentemente  $\dot{\epsilon}_t$  permanecem constantes ao longo do tempo, caracterizando a ruptura por creep.

É claro que quanto maior o  $\frac{q_c'}{p_e'}$ , para os ensaios em que  $\frac{q_c'}{p_e'} > \frac{q_{bf}'}{p_e'}$ , maior será a velocidade  $\dot{\epsilon}_t$ , já que ao longo do processo

$$C_o(\dot{\epsilon}_t) = \frac{q_c'}{p_e'} - \frac{q_{bf}'}{p_e'}(\epsilon_t) \quad (\text{III.13})$$

e assim menor será o tempo para a ruptura, conforme diz a conclusão (3).

No caso do ensaio 2 na Figura III.3, o mesmo irá atingir a ruptura em um tempo infinito.

Convém agora redefinir o conceito de ruptura em um corpo-de-prova:

(1) Num ensaio de deformação controlada ( $\dot{\epsilon}_t = \text{cte}$ ) a ruptura é atingida

quando  $\frac{dq'}{d\epsilon_t} = 0$

(2) Num ensaio de tensão controlada ( $q' = \text{cte}$ ) a ruptura é atingida quando

$\frac{d^2\epsilon_t}{dt^2} \geq 0$  e  $\dot{\epsilon}_t > 0$ .

## III.6 - APROXIMAÇÕES MATEMÁTICAS PARA AS CURVAS FUNDAMENTAIS DO SOLO

Aqui nesta seção, adianta-se o que rigorosamente deveria ser feito apenas no próximo capítulo, que trata dos ensaios realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. Isto porque a ordem "natural" de se ajustar pontos de curvas experimentais às equações matemáticas convenientemente escolhidas (de forma a não violar os mecanismos admitidos pelo modelo) é, em primeiro lugar, obter os pontos experimentais e só depois procurar equações que melhor se ajustem a eles. Porém, o autor considerou que seria mais didático discutir inicialmente os tipos de equações matemáticas que serviriam para exprimir o modelo, respeitando suas características, e posteriormente mostrar que tais equações se ajustam aos pontos experimentais (o que será visto no próximo capítulo).

Relembrando o que já foi visto na Seção III.4, quatro curvas são consideradas propriedades fundamentais do solo. São elas:  $\frac{u_s}{p_e'} \times \epsilon_t$ ,  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \epsilon_t$ ,

$$\frac{p_b'}{p_e'} \times \frac{q_b'}{p_e'} \text{ e } \tan \phi_{\text{mob}} \times \epsilon_t$$

Ambas as curvas  $\frac{u_s}{p_e'} \times \epsilon_t$  e  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \epsilon_t$  têm como características serem crescentes com  $\epsilon_t$  e, quando a ruptura (definida no final da seção anterior) é

atingida, apresentam a primeira derivada nula, ou seja,  $\frac{d \frac{u_s}{p_e'}}{d \epsilon_t} = \frac{d \frac{q_b'}{p_e'}}{d \epsilon_t} = 0$ .

A Figura III.4 ilustra de forma qualitativa as funções acima descritas.

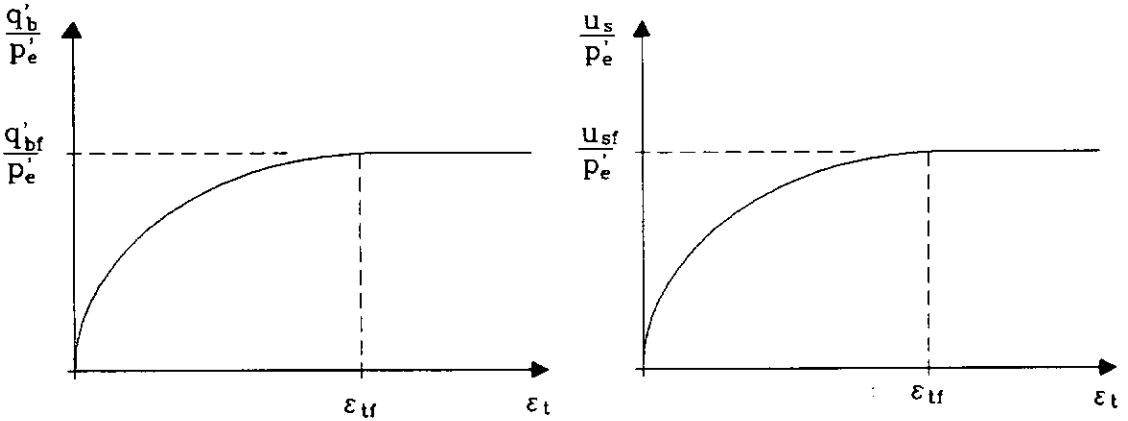


Figura III.4 - Possíveis formas para as funções  $\frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t)$  e  $\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t)$

Os parâmetros do solo  $\frac{q_{bf}'}{p_e'}$ ,  $\frac{u_{sf}'}{p_e'}$  e  $\epsilon_{tr}$  foram apresentados na Seção III.5 e aparecem ilustrados na Figura III.4.

Uma equação matemática que pode convenientemente representar estas curvas é a equação da elipse, proposta por Martins (1992) para ajustar a curva

$\frac{u_s}{p_e'} \times \epsilon_t$ , experimental.

Assim, as funções  $\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t)$  e  $\frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t)$  seriam dadas respectivamente por

$$\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t) = \begin{cases} \frac{u_{sf}'}{p_e'} \cdot \frac{1}{\epsilon_{tr}} \cdot \sqrt{\epsilon_t \cdot (2\epsilon_{tr} - \epsilon_t)} & \text{para } \epsilon_t < \epsilon_{tr} \\ \frac{u_{sf}'}{p_e'} & \text{para } \epsilon_t \geq \epsilon_{tr} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

e

$$\frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t) = \begin{cases} \frac{q_{bf}'}{p_e'} \cdot \frac{1}{\epsilon_{cf}} \cdot \sqrt{\epsilon_t \cdot (2\epsilon_{cf} - \epsilon_t)} & \text{para } \epsilon_t < \epsilon_{cf} \\ \frac{q_{bf}'}{p_e'} & \text{para } \epsilon_t \geq \epsilon_{cf} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

A partir destas funções, definidas pelos valores de ruptura  $\frac{q_{bf}'}{p_e'}$ ,  $\frac{u_{sf}'}{p_e'}$  e  $\epsilon_{cf}$ , pode-se obter as outras duas funções propriedades do solo  $\frac{p_b'}{p_e'}(\epsilon_t)$  e  $\tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_t)$ , dadas respectivamente por

$$\frac{p_b'}{p_e'}(\epsilon_t) = 1 + \frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t) - \frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t) \quad (\text{III.16})$$

e

$$\tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_t) = \frac{\frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t)}{\sqrt{\left(\frac{p_b'}{p_e'}(\epsilon_t)\right)^2 - \left(\frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t)\right)^2}} \quad (\text{III.17})$$

Para fechar o modelo, falta apenas definir a função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$ . Porém, a única informação que se tem até agora é que espera-se que ela seja uma função crescente de  $\dot{\epsilon}_t$ .

Tentando ajustar diversos tipos de expressões matemáticas aos pontos experimentais de ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco, Martins (1992) adotou para  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$ , embora verificando grande dispersão, uma função do tipo

$$C_0(\dot{\epsilon}_t) = \alpha \cdot \dot{\epsilon}_t^\beta \quad (\text{III.18})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  acima escritos na função de potência seriam parâmetros do solo.

Os ajustes das funções  $\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t)$ ,  $\frac{q_b'}{p_e'}(\epsilon_t)$  e, de maneira especial,  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  aos pontos experimentais dos ensaios realizados por Lacerda (1976) na "San Francisco Bay Mud", serão analisados, conforme dito antes, no próximo capítulo.

### III.7 - A EQUAÇÃO DIFERENCIAL COMPLETA DO CREEP NÃO-DRENADO

Para resolver matematicamente o problema do creep sem aproximações das equações do modelo, e conseqüentemente sem prejuízos às reproduções feitas dos ensaios reais, deve-se resolver a equação diferencial completa do creep, dada por (III.10) e reescrita como

$$\frac{q_{\varepsilon}'}{p_{\varepsilon}'} = C_0(\dot{\varepsilon}_t) + \frac{\left(\frac{q_b'}{p_c'}\right)^2}{\frac{p_b'}{p_c'} + \frac{q_b'}{p_c'}} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{\left[ \frac{p_b'}{p_c'} - \frac{q_b'}{p_c'} + 2C_0(\dot{\varepsilon}_t) \right]}{\left(\frac{p_b'}{p_c'} - \frac{q_b'}{p_c'}\right) (\tan \phi_{\text{mob}})^2}} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Adotando-se as aproximações elípticas para as curvas  $\frac{u_s}{p_c'} \times \varepsilon_t$  e  $\frac{q_b'}{p_c'} \times \varepsilon_t$ , e a aproximação da função de potência para a função  $C_0(\dot{\varepsilon}_t)$ , e sendo as demais funções propriedades do solo  $\frac{p_b'}{p_c'}(\varepsilon_t)$  e  $\tan \phi_{\text{mob}}(\varepsilon_t)$  dadas respectivamente por (III.16) e (III.17), então todos os termos da equação diferencial do creep (III.19) estão definidos, podendo-se resolvê-la a partir de uma dada condição inicial.

Uma solução analítica para tal equação é inviável. Assim, desenvolver-se-á a equação (III.19) de forma a facilitar sua implementação numérica, que será feita através do Método das Diferenças Finitas. Isolando-se algebricamente o termo  $C_0$  em (III.19) obtém-se a seguinte expressão

$$C_0 = F(\varepsilon_t) = \frac{2AB + D - \sqrt{(2AB + D)^2 - 4B^2(A^2 - C)}}{2B^2} \quad (\text{III.20})$$

onde

$$A(\varepsilon_t) = B(\varepsilon_t) \cdot \frac{q_c'}{p_c'} - 1 \quad (\text{III.21})$$

$$B(\varepsilon_t) = \frac{\frac{p_b'}{p_c'}(\varepsilon_t) + \frac{q_b'}{p_c'}(\varepsilon_t)}{\left(\frac{q_b'}{p_c'}(\varepsilon_t)\right)^2} \quad (\text{III.22})$$

$$C(\varepsilon_t) = 1 + \frac{1}{\left(\tan \phi_{\text{mob}}(\varepsilon_t)\right)^2} \quad (\text{III.23})$$

$$D(\epsilon_t) = \frac{2}{(\tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_t))^2 \cdot \left( \frac{p_b'}{p_c'}(\epsilon_t) - \frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t) \right)} \quad (\text{III.24})$$

Sendo agora a equação diferencial do creep escrita como

$$C_0(\dot{\epsilon}_t) = F(\epsilon_t) \quad (\text{III.25})$$

onde  $F(\epsilon_t)$  é dado por (III.20).

Observa-se que o mesmo pode ser feito para a equação simplificada do creep não-drenado apresentada na Seção III.5, onde a função  $F(\epsilon_t)$  agora seria obtida a partir de (III.12), chegando-se a

$$C_0 = F(\epsilon_t) = \frac{q_c'}{p_c'} - \frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t) \quad (\text{III.26})$$

### III.8 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO CREEP

Num problema de creep não-drenado, interessa encontrar os valores das variáveis  $\epsilon_t$  e  $\dot{\epsilon}_t$  em função do tempo, ou seja, as curvas  $\epsilon_t \times t$  e  $\dot{\epsilon}_t \times t$ , satisfazendo, é claro, a equação diferencial que rege o fenômeno.

Considerando que para a função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  é adotada a aproximação da função de potência apresentada na Seção III.6, a mesma será matematicamente expressa por

$$C_0(\dot{\epsilon}_t) = \alpha \cdot \dot{\epsilon}_t^\beta \quad (\text{III.27})$$

e, assim, a equação diferencial do fenômeno do creep não-drenado explicitada pela equação (III.25) evolui para

$$\dot{\epsilon}_t = \left[ \frac{1}{\alpha} \cdot F(\epsilon_t) \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{III.28})$$

bastando agora definir as condições iniciais do problema e, então, resolver numericamente esta equação diferencial ordinária não-linear.

As condições iniciais necessárias para a resolução da equação diferencial devem ser

$$\epsilon_t(t_0) = \epsilon_{t_0} \quad (\text{III.29})$$

e

$$\dot{\varepsilon}_t(t_0) = \dot{\varepsilon}_{t_0} \quad (\text{III.30})$$

sendo a deformação inicial  $\varepsilon_{t_0}$  e a velocidade inicial  $\dot{\varepsilon}_{t_0}$  para o tempo inicial  $t_0$  relacionadas pela equação (III.28), ou seja,

$$\dot{\varepsilon}_{t_0} = \left[ \frac{1}{\alpha} \cdot F(\varepsilon_{t_0}) \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{III.31})$$

Dito isto, dada a equação diferencial (III.28), submetida à condição inicial (III.29), deseja-se obter o valor da função  $\varepsilon_t(t)$  para o tempo  $t = T$ . Uma vez obtido o  $\varepsilon_t(T)$ , a velocidade em  $t = T$  fica automaticamente determinada através da própria equação diferencial

$$\dot{\varepsilon}_t(T) = \left[ \frac{1}{\alpha} \cdot F(\varepsilon_t(T)) \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{III.32})$$

Para resolver este problema utilizar-se-ão as soluções de diferenças finitas para equações diferenciais ordinárias, integrando-se numericamente  $\varepsilon_t$  em relação ao tempo  $t$ . Como todo método discreto, a integração numérica através de diferenças finitas consiste primeiramente em dividir o domínio do problema, ou seja, o intervalo  $t_0 \leq t \leq T$ , em  $n$  intervalos de tempo iguais, conforme ilustra a Figura III.5.

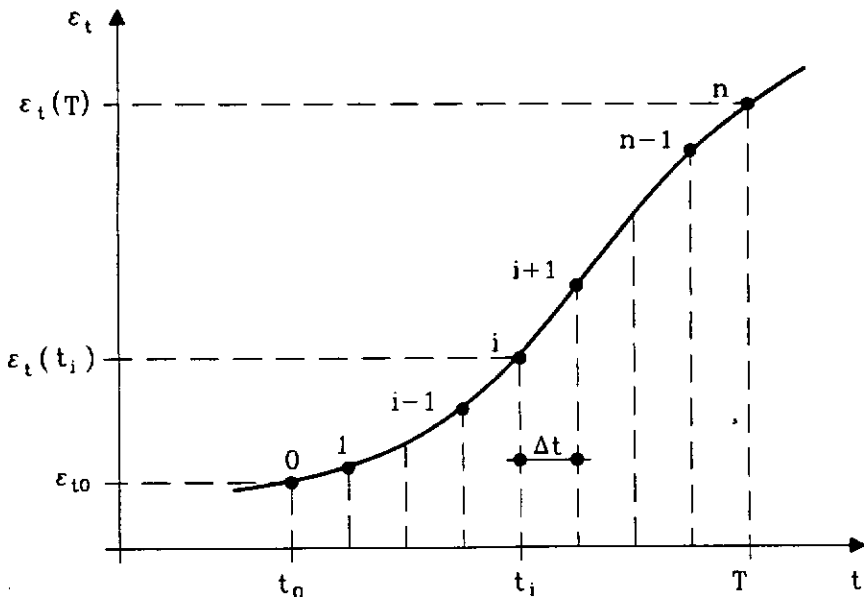


Figura III.5 - Discretização do domínio do problema

Estes  $n$  intervalos de tempo, expressos por  $\Delta t$ , são definidos como

$$\Delta t = \frac{T - t_0}{n} \quad (\text{III.33})$$

A aproximação em diferenças finitas de  $\dot{\epsilon}_t = \frac{d\epsilon_t}{dt}$  é

$$\bar{\dot{\epsilon}}_t = \frac{\Delta \epsilon_t}{\Delta t} \quad (\text{III.34})$$

onde  $\bar{\dot{\epsilon}}_t$  é o valor médio da velocidade  $\dot{\epsilon}_t$  no intervalo  $\Delta t$  considerado. Então, para  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ , tem-se

$$\bar{\dot{\epsilon}}_t = \frac{\epsilon_{t_{i+1}} - \epsilon_{t_i}}{\Delta t} \quad (\text{III.35})$$

e assim

$$\epsilon_{t_{i+1}} = \epsilon_{t_i} + \Delta t \cdot \bar{\dot{\epsilon}}_t \quad (\text{III.36})$$

Como primeira aproximação para  $\bar{\dot{\epsilon}}_t$ , pode-se adotar

$$\bar{\dot{\epsilon}}_t = \dot{\epsilon}_{t_i} = \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F(\epsilon_{t_i}) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{III.37})$$

que substituindo em (III.36) conduz a

$$\epsilon_{t_{i+1}} = \epsilon_{t_i} + \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F(\epsilon_{t_i}) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{III.38})$$

Conhecendo o valor  $\epsilon_t(t)$  para  $t=t_0$ , dado pela condição inicial  $\epsilon_t(t_0) = \epsilon_{t_0}$ , e fazendo  $i=0$  até  $i=n-1$ , obtém-se o  $\epsilon_t(T) = \epsilon_{t_n}$ .

É claro que quanto menor o  $\Delta t$ , ou seja, quanto maior o número  $n$  de divisões no intervalo  $t_0 \leq t \leq T$ , mais próximo o  $\epsilon_{t_n}$  (encontrado numericamente) estará do valor exato de  $\epsilon_t(T)$ . Esta situação pode ser matematicamente expressa por

$$\epsilon_t(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_{t_n} \quad (\text{III.39})$$

Assim, deve-se dividir sucessivamente o intervalo  $t_0 \leq t \leq T$  (fazendo  $n=4,8,16,32,\dots$ ) até  $\epsilon_{t_n}$  convergir numericamente para  $\epsilon_t(T)$ , fixando-se para isso um desvio admissível. Exemplificando, se o desvio do valor de  $\epsilon_{t_n}$  para  $n=64$  em relação ao  $\epsilon_{t_n}$  para  $n=32$  for menor ou igual ao desvio relativo admissível, ou seja, se

$$\frac{\|\epsilon_{t_{n=32}} - \epsilon_{t_{n=64}}\|}{\epsilon_{t_{n=64}}} \leq \text{DESVIO ADMISSÍVEL} \quad (\text{III.40})$$

então considera-se que o problema convergiu para  $n = 64$ .

O método de integração numérica mostrado aqui, cuja velocidade média  $\bar{\epsilon}_t$  no intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  é a velocidade  $\dot{\epsilon}_{t_i}$  no tempo  $t = t_i$ , é o chamado Método de Euler Explícito. O Método de Euler Implícito caracteriza-se por adotar, como velocidade média no intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ , a velocidade  $\dot{\epsilon}_{t_{i+1}}$  no tempo  $t = t_{i+1}$ . Devido a sua simples aproximação de  $\bar{\epsilon}_t$ , os métodos de Euler necessitam de um número muito grande de subdivisões no intervalo de  $t_0 \leq t \leq T$  (ou seja, um  $\Delta t$  pequeno) para que o desvio relativo seja menor que o admissível.

Há uma grande variedade de métodos mais acurados e estáveis que os métodos de Euler para resolver equações diferenciais ordinárias, e tais métodos atingem rapidamente a convergência sem precisarem de um número grande de divisões no intervalo  $t_0 \leq t \leq T$ . Dentre eles, os mais conhecidos e utilizados são os de Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordens. Estes caracterizam-se pelo fato de usarem pontos intermediários no interior do intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  para se chegar a uma aproximação mais acurada do valor da velocidade média  $\bar{\epsilon}_t$ .

No método de Runge-Kutta de 2ª ordem, a velocidade média  $\bar{\epsilon}_t$  no intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  é dada por

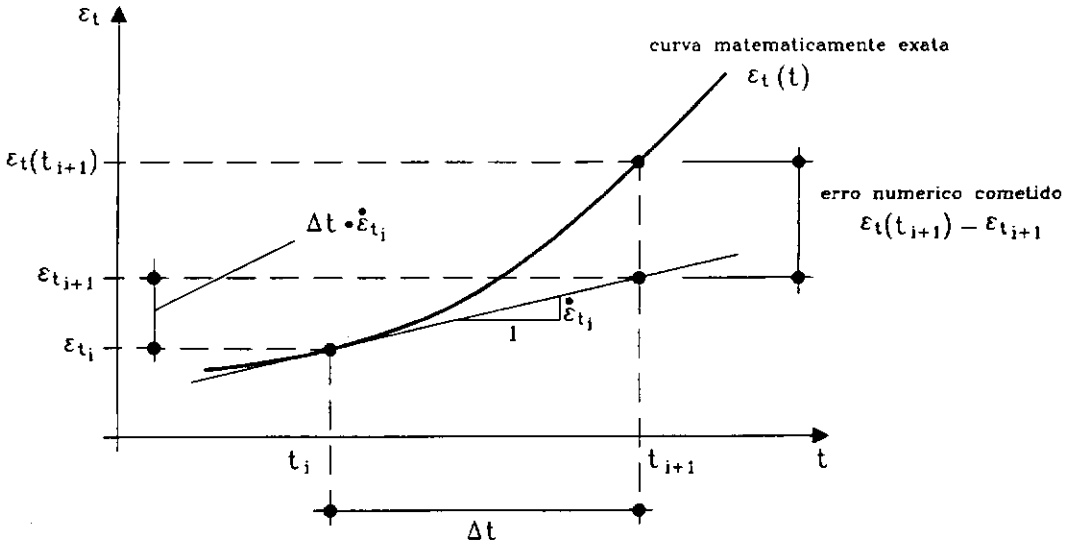
$$\bar{\epsilon}_t = \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F \left( \epsilon_{t_i} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \dot{\epsilon}_{t_i} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} = \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F \left( \epsilon_{t_i} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot (F(\epsilon_{t_i}))^{1/\beta} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{III.41})$$

que corresponderia aproximadamente à velocidade do ponto médio do intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  (e por isso este método é também chamado de "midpoint method").

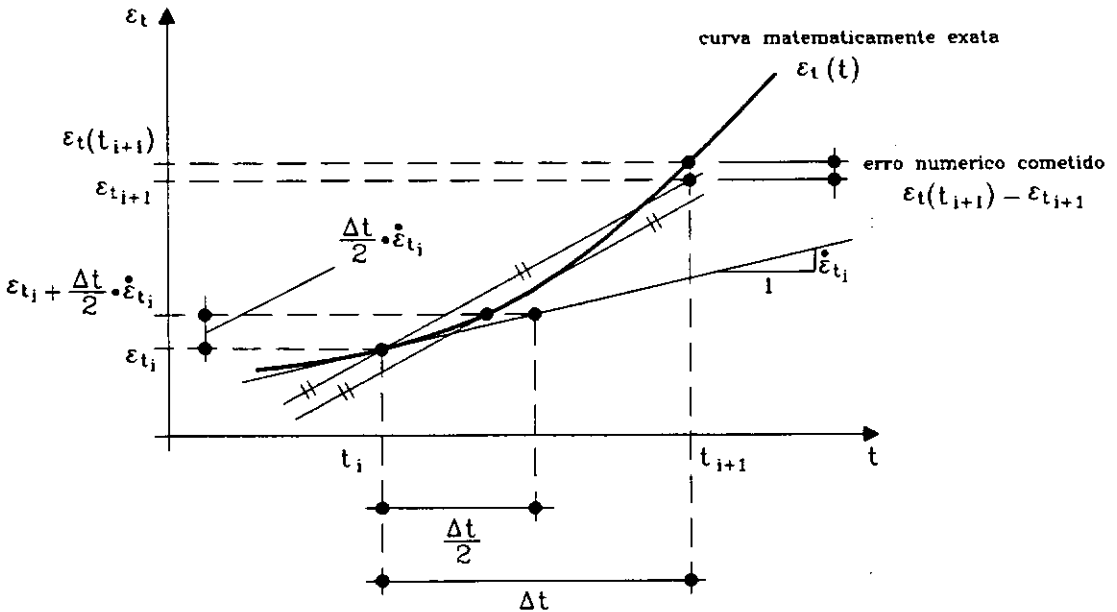
Assim, pelo método de Runge-Kutta de 2ª ordem, a equação (III.38) é reescrita da seguinte forma

$$\epsilon_{t_{i+1}} = \epsilon_{t_i} + \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F \left( \epsilon_{t_i} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F(\epsilon_{t_i}) \right)^{1/\beta} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{III.42})$$

A Figura III.6 mostra a representação gráfica dos métodos de Euler Explícito e Runge-Kutta de 2ª ordem.



(a) Método de Euler Explícito



(b) Método de Runge-Kutta de 2ª. ordem

**Figura III.6 - Representação gráfica dos métodos de integração numérica de (a) Euler Explícito e (b) Runge-Kutta de 2ª ordem**

Finalmente, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o que melhor aproxima o  $\bar{\varepsilon}_t$ , onde através da Série de Taylor (neste caso tratando-se do

conhecido matemático) utiliza quatro pontos do intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Assim, o valor de  $\varepsilon_{i+1}$  é numericamente obtido por

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i_i} + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \quad (\text{III.43})$$

onde

$$k_1 = \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F(\varepsilon_{i_i}) \right)^{1/\beta} \quad (\text{III.44})$$

$$k_2 = \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\varepsilon_{i_i} + \frac{1}{2} \cdot k_1\right) \right)^{1/\beta} \quad (\text{III.45})$$

$$k_3 = \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\varepsilon_{i_i} + \frac{1}{2} \cdot k_2\right) \right)^{1/\beta} \quad (\text{III.46})$$

$$k_4 = \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot F(\varepsilon_{i_i} + k_3) \right)^{1/\beta} \quad (\text{III.47})$$

Na realidade, a escolha entre os métodos de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens vai depender também da equação diferencial em questão. Para a equação diferencial do creep não-drenado, o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem mostrou-se mais eficiente, sendo o método adotado nesta tese.

O problema de valor inicial aplicado a equações diferenciais ordinárias (caso unidimensional) é vastamente encontrado na literatura de análise numérica (o autor indica Hoffman (1993) para aqueles que desejarem se aprofundar no assunto).

## CAPÍTULO IV

### ENSAIOS NA ARGILA DA BAÍA DE SAN FRANCISCO

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

Com o modelo já teoricamente apresentado para o caso de simetria axial de tensão e deformação, resta agora mostrar sua aplicação a ensaios triaxiais reais e finalmente partir para a extensão ao estado genérico de tensão e deformação, visando a utilização do modelo no Método dos Elementos Finitos, tarefa a ser realizada no próximo capítulo. Assim, neste capítulo analisam-se os ensaios realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco na Califórnia ("San Francisco Bay Mud").

Trata-se de uma argila normalmente adensada, saturada e composta principalmente por illita e clorita, com pequenas quantidades de montmorilonita, vermiculita e caulinita. Finas lentes de silte são encontradas ao longo de planos horizontais e pedaços de conchas são ocasionalmente encontrados, porém, as amostras são facilmente moldáveis (Lacerda, 1976). As amostras foram extraídas através de amostradores de pistão com 12,5cm (5 polegadas) de diâmetro e 30 a 45cm (12 a 18 polegadas) de comprimento a uma profundidade de 5,2 a 7,6m (17 a 25 pés). Tais amostras apresentam as seguintes características: LL=90%, IP=50%, fração argila 60% e atividade 0,83. Mais informações sobre este solo podem ser encontradas no próprio trabalho de Lacerda (1976).

Conforme considera Martins (1992), embora o programa de ensaios realizado por Lacerda (1976) não tenha sido planejado para estudar especificamente o presente modelo, ele é conveniente por apresentar, além dos ensaios triaxiais não-drenados convencionais, ensaios não-drenados de creep e relaxação de tensões.

Inicialmente será abordada a análise dos ensaios não-drenados convencionais, embora, neste caso, apenas serão rapidamente comentadas as evidências observadas por Martins (1992) a respeito da validade do modelo para a argila da Baía de San Francisco. Já na posterior análise dos ensaios de creep não-drenado, será dada uma ênfase maior por ser objeto específico de estudo desta tese. Conforme foi dito no capítulo anterior, serão reproduzidos alguns ensaios de creep não-drenado com base nas equações que regem o fenômeno e através do método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Finalmente, será mostrada uma técnica de ajuste de parâmetros do modelo baseada em técnicas de otimização, que pode ser de grande auxílio em trabalhos futuros.

## IV.2 - ENSAIOS NÃO-DRENADOS CONVENCIONAIS

A primeira verificação realizada por Martins (1992) foi a de que os ensaios realizados com mesma velocidade  $\dot{\epsilon}$ , tinham de fato uma única curva  $\frac{p'}{p_c'} \times \frac{q'}{p_c'}$ , confirmando a hipótese de que os caminhos de tensões efetivas no espaço  $p' \times q'$  são homotéticos com centro de homotetia na origem.

Os ensaios realizados com velocidades maiores realmente tiveram seus caminhos de tensões efetivas apresentando ordenadas superiores aos dos ensaios realizados com velocidades  $\dot{\epsilon}$ , menores.

O salto inicial viscoso devido ao acionamento imediato da resistência por viscosidade não foi verificado. Segundo Martins (1992), este é um problema de natureza operacional do ensaio, uma vez que, iniciada a fase de cisalhamento, a prensa parte de uma velocidade inicial zero, havendo uma aceleração até o instante em que atinge a velocidade selecionada. Além do mais, para se detectar este salto, os ensaios deveriam ser automatizados, o que não ocorreu com os realizados por Lacerda (1976). Com isso, a função  $C_o(\dot{\epsilon}_1)$  não pôde

ser satisfatoriamente determinada a partir dos ensaios convencionais (e conseqüentemente o  $\phi_b$  também ficou indeterminado).

Fazendo uso de ensaios de creep não-drenado, Martins (1992) pôde determinar de forma mais acurada a função  $C_o(\dot{\epsilon}_t)$  através da construção de linhas de mesmo  $\dot{\epsilon}_t$  (construção esta descrita em seu trabalho). Nos ensaios de creep não-drenado verificou-se o salto inicial viscoso devido à colocação instatânea da carga.

Com isso, através dos pontos experimentais  $(p', q')$  dos ensaios convencionais e da equação

$$\tan \phi_{mob} = \frac{\frac{q'}{p_e'} - C_o(\dot{\epsilon}_t)}{\sqrt{\left(\frac{p'}{p_e'}\right)^2 - \left(\frac{q'}{p_e'}\right)^2}} \quad (IV.1)$$

verificou-se a validade do conceito de linhas de mesmo atrito mobilizado introduzido no Capítulo II, uma vez que para os ensaios analisados, as linhas inclinadas de  $45^\circ$  no espaço  $p' \times q'$  apresentaram os mesmos valores de  $\epsilon_t$ ,  $\frac{u_s}{p_e'}$  e  $\tan \phi_{mob}$ . Esta verificação permitiu concluir que para a argila da Baía de San Francisco o Princípio das Tensões Efetivas Expandido (PTEE) é válido.

O ângulo de atrito básico  $\phi_b$  também pôde ser determinado a partir de (IV.1) e dos pontos experimentais  $(p', q')$  dos ensaios na ruptura. Partindo de ensaios com velocidades bastante diferentes, Martins (1992) conseguiu valores consistentes para o  $\phi_b$  (aproximadamente  $24^\circ$ ).

Ao plotar as curvas  $\frac{q'}{p_e'} \times \epsilon_t$  dos ensaios convencionais, Martins (1992) verificou que para os ensaios realizados com a mesma velocidade  $\dot{\epsilon}_t$  tais curvas coincidiram, consistente com o que foi admitido no Capítulo II. Foi observado também que a deformação específica na ruptura  $\epsilon_x$  é da ordem de 3%, onde a partir daí o  $\frac{q'}{p_e'}$  se mantém constante.

Ao plotar a curva propriedade fundamental do solo  $\frac{u_s}{p_c'} \times \varepsilon_t$ , Martins (1992) observou que de fato para os ensaios convencionais e de creep não-drenado estas curvas são bastantes próximas, a ponto de poderem ser consideradas como uma única.

Para se obter as curvas básicas, que também são propriedades do solo, por serem livres do efeito da viscosidade ( $\dot{\varepsilon}_t = 0$ ), plotou-se a curva também propriedade do solo  $\tan \phi_{mob} \times \varepsilon_t$ , a partir da equação (IV.1).

Assim, com os pontos experimentais das curvas  $\tan \phi_{mob} \times \varepsilon_t$  e  $\frac{u_s}{p_c'} \times \varepsilon_t$ , e através das equações

$$\tan \phi_{mob} = \frac{\frac{q_b'}{p_c'}}{\sqrt{\left(\frac{p_b'}{p_c'}\right)^2 - \left(\frac{q_b'}{p_c'}\right)^2}} \quad (IV.2)$$

e

$$\frac{p_b'}{p_c'} = 1 + \frac{q_b'}{p_c'} - \frac{u_s}{p_c'} \quad (IV.3)$$

que, substituindo (IV.3) em (IV.2), conduz a

$$\frac{q_b'}{p_c'} = \tan \phi_{mob} \cdot \left(1 - \frac{u_s}{p_c'}\right) \cdot (\tan \phi_{mob} + \sec \phi_{mob}) \quad (IV.4)$$

obteve-se a curva básica  $\frac{q_b'}{p_c'} \times \varepsilon_t$ .

A exemplo da curva  $\frac{u_s}{p_c'} \times \varepsilon_t$ , as curvas experimentais também propriedade do solo  $\frac{q_b'}{p_c'} \times \varepsilon_t$  e  $\tan \phi_{mob} \times \varepsilon_t$  se apresentaram como curvas únicas, coerentemente com as idéias até então desenvolvidas.

O autor ajustou as curvas experimentais  $\frac{u_s}{p_c'} \times \varepsilon_t$  e  $\frac{q_b'}{p_c'} \times \varepsilon_t$  obtidas por Martins (1992) às suas aproximações elípticas mostradas no capítulo anterior, obtendo os seguintes parâmetros do solo

$$\varepsilon_{cf} = 2,865\% \quad (IV.5)$$

$$\frac{u_{sf}}{p_e'} = 0,631 \quad (IV.6)$$

$$\frac{q_{bf}'}{p_e'} = 0,248 \quad (IV.7)$$

Considerando estes parâmetros do solo, o ângulo de atrito básico  $\phi_b$  é de

$$\phi_b = \phi_{mob} (\epsilon_t \geq \epsilon_{cr}) = 23,73^\circ \quad (IV.8)$$

sendo obtido a partir de (IV.2) juntamente com (IV.3).

### IV.3 - OS ENSAIOS DE CREEP NÃO-DRENADO

#### IV.3.1 - Introdução

Apesar de utilizar os ensaios de creep não-drenado como evidências experimentais da aplicabilidade do modelo na argila da Baía de San Francisco, Martins (1992) não chegou a resolver a equação diferencial do creep, estudando-a apenas qualitativamente. O motivo disto será visto a seguir.

Os ensaios de creep não-drenado utilizados neste trabalho estão listados na Tabela IV.1 juntamente com suas características.

**Tabela IV.1 - Ensaio de creep não-drenado na argila da Baía de San Francisco**

Ensaio	Tipo	$p_e'$ (KPa)	$\frac{q_c'}{p_e'}$	$t_0$ (min)	$\epsilon_{t_0}$ (%)
CR-I-1	$\sigma_3 = \text{cte}$	78,4	0,22	4	0,39
CR-I-2	$\sigma_3 = \text{cte}$	78,4	0,30	0,5	0,52
CR-71-1	$\sigma_3 = \text{cte}$	196	0,27	0,1	0,45
CR-I-ST-2: Estágio 1	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,017	0	0
CR-I-ST-2: Estágio 2	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,102	30	0,011
CR-I-ST-2: Estágio 3	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,172	60	0,136
CR-I-ST-2: Estágio 4	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,243	90	0,301
CR-I-ST-2: Estágio 5	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,312	120	0,690
CR-I-ST-2: Estágio 6	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,347	150	1,88
CR-I-ST-2: Estágio 7	$\sigma_3 = \text{cte}$	314	0,365	180	3,71

Os ensaios CR-I-1, CR-I-2 e CR-71-1 na Tabela IV.1 foram realizados seguindo-se o procedimento padrão, em que os corpos-de-prova são submetidos inicialmente a um adensamento hidrostático e, posteriormente, com a drenagem fechada, aplica-se uma tensão desviadora constante, observando as deformações e a geração de poro-pressão no corpo-de-prova com o tempo.

No ensaio CR-I-ST-2, após o adensamento hidrostático, aplicam-se vários incrementos de tensão desviadora durante intervalos de 30 min, até a ruptura ser atingida.

Na seção anterior foram obtidos os parâmetros do solo que definem matematicamente as curvas propriedades do solo  $\frac{u_s}{p_e'} \times \epsilon_t$  e  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \epsilon_t$ , através da equação da elipse. Assim, para que o modelo esteja matematicamente completo falta definir a curva experimental  $C_o \times \dot{\epsilon}_t$ , e então representá-la através de uma função conhecida. Martins (1992) realizou este trabalho utilizando os ensaios de creep não-drenado. A partir da equação (IV.1), onde considerando que nos ensaios de creep  $\frac{q'}{p_e'} = \frac{q_c'}{p_e'}$ , isolando-se o  $C_o(\dot{\epsilon}_t)$  tem-se

$$C_o(\dot{\epsilon}_t) = \frac{q_c'}{p_e'} - \tan \phi_{mob} \cdot \sqrt{\left(\frac{p'}{p_e'}\right)^2 - \left(\frac{q_c'}{p_e'}\right)^2} \quad (IV.9)$$

Com os valores  $p'$ ,  $q_c'$  e  $\tan \phi_{mob}$  dos ensaios para cada tempo  $t$ , que corresponde à medição de um  $\epsilon_t$  e conseqüente obtenção de um  $\dot{\epsilon}_t$ , chega-se à curva experimental  $C_o \times \dot{\epsilon}_t$ , mostrada na Figura IV.1.

Era de se esperar, segundo Martins (1992), a dispersão existente na curva experimental da função  $C_o(\dot{\epsilon}_t)$ . Isto porque a determinação de  $\dot{\epsilon}_t$  está sujeita a erros quando se usa um sistema de leituras não-automático, principalmente quando as deformações são muito pequenas ou os intervalos de leituras muito curtos.

Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados para funções linear, exponencial, logarítmica e de potência, Martins (1992) observou que a melhor

função que se ajusta aos pontos da Figura IV.1 era a função de potência, do tipo

$$C_0(\dot{\epsilon}_t) = \alpha \cdot (\dot{\epsilon}_t)^\beta \quad (\text{IV.10})$$

onde os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram determinados:

$$\alpha = 0,528 \quad (\text{IV.11})$$

$$\beta = 0,235 \quad (\text{IV.12})$$

Porém, pela falta de acurácia apresentada pela função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$ , Martins (1992) julgou mais prudente estudar apenas qualitativamente a equação diferencial do creep.

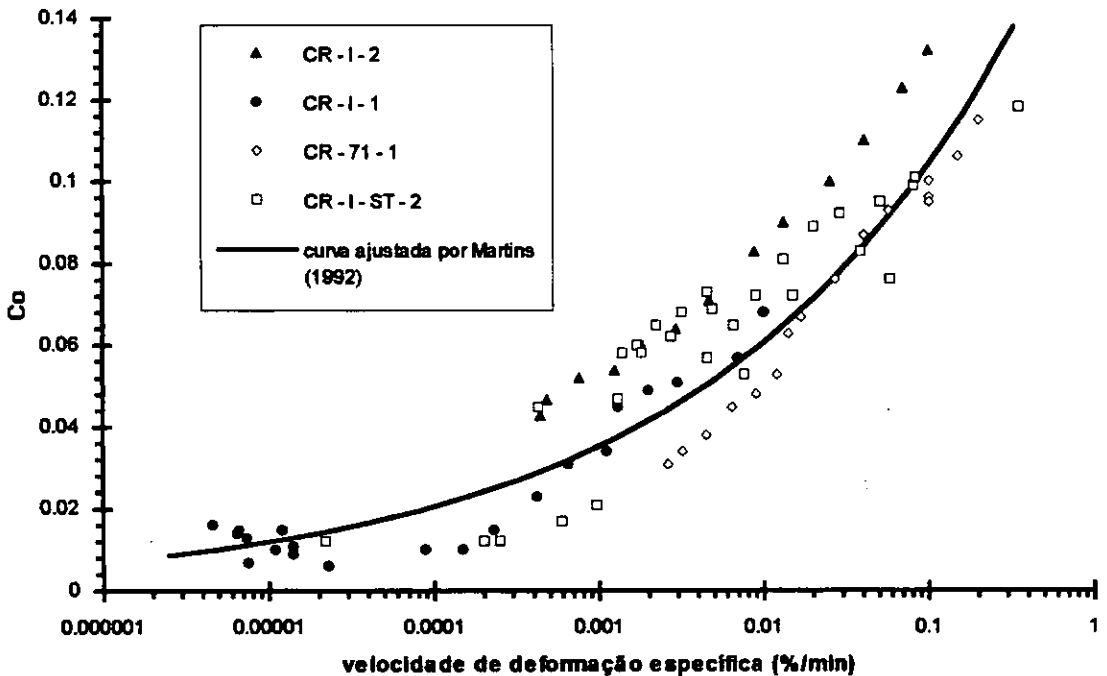


Figura IV.1 - Curva experimental  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$

No presente trabalho, tentar-se-á mostrar que é possível avançar mais um pouco no que se refere ao estudo da equação diferencial do creep.

Com as curvas propriedade do solo devidamente definidas, serão reproduzidos os ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. Serão comparados os resultados da equação simplificada do creep com os da equação completa e com as curvas experimentais obtidas dos ensaios. O método utilizado para resolver as equações diferenciais, conforme visto no capítulo anterior, é o método de

integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem, implementado em um programa computacional escrito na linguagem C.

Finalmente, no final deste capítulo será apresentada uma técnica de ajuste de parâmetros de modelos baseada em técnicas de otimização, que confirmará a coerência do modelo em estudo com os resultados experimentais.

### IV.3.2 - Reprodução e Análise dos Ensaio

As curvas  $\varepsilon_t \times t$  e  $\dot{\varepsilon}_t \times t$  dos ensaios realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco e listados na Tabela IV.1 podem ser vistas nas figuras IV.2 e IV.3 respectivamente. Observa-se que o ensaio CR-I-1,

realizado com  $\frac{q_c'}{p_c'} = 0,22$ , não atinge a condição de ruptura. Este fato está de acordo com o que foi discutido no capítulo anterior com base na equação simplificada do creep não-drenado, pois sendo  $\frac{q_{br}'}{p_c'} = 0,248$ , então neste ensaio

$\frac{q_c'}{p_c'} < \frac{q_{br}'}{p_c'}$ , significando que o mesmo tenderá a um valor bem determinado  $\varepsilon_{t1}$ ,

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = \varepsilon_{t1} \quad (IV.13)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}_t = 0 \quad (IV.14)$$

O valor de  $\varepsilon_{t1}$  pode ser obtido através da equação (III.15) (sendo esta a equação da elipse adotada para a função propriedade do solo  $\frac{q_b'}{p_c'}(\varepsilon_t)$ )

fixando-se a condição

$$\frac{q_b'}{p_c'}(\varepsilon_{t1}) = \frac{q_c'}{p_c'} \quad (IV.15)$$

Resolvendo (IV.15) para  $\varepsilon_{t1}$ , através da equação da elipse, chega-se a

$$\varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{cr} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left[ \frac{\left( \frac{q_c'}{p_c'} \right)^2}{\left( \frac{q_{bf}'}{p_c'} \right)} \right]} \right\} \quad (IV.16)$$

Lembrando que  $\varepsilon_{cr} = 2,865\%$ , então o ensaio CR-I-1 deve estabilizar a uma deformação específica de  $\varepsilon_{t_1} = 1,54\%$ . Isto de fato mostra-se coerente com a Figura IV.2 para o ensaio CR-I-1, onde aproximadamente a partir do tempo  $t = 10000\text{min}$  a curva  $\varepsilon_t \times t$  sofre uma mudança em sua concavidade, tendendo a ser assíntota à reta horizontal correspondente aproximadamente à deformação específica  $\varepsilon_t = 1,6\%$ .

As reproduções do ensaio CR-I-1 através de integração numérica baseada nas equações completa e simplificada do creep podem ser vistas nas figuras IV.4 e IV.5, que trazem respectivamente as curvas  $\varepsilon_t \times t$  e  $\dot{\varepsilon}_t \times t$  deste ensaio. Ambas as curvas obtidas via integração numérica se aproximam das curvas experimentais  $\varepsilon_t \times t$  e  $\dot{\varepsilon}_t \times t$ . Porém, verifica-se, principalmente através do gráfico  $\dot{\varepsilon}_t \times t$  da Figura IV.5, que a solução via equação completa do creep se aproxima mais da curva experimental que a solução via equação simplificada.

Não é demais repetir que estas reproduções dos ensaios reais foram feitas através da resolução das equações do creep não-drenado pelo método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem. Os parâmetros do solo usados no modelo para a argila da Baía de San Francisco são dados pelas equações (IV.5), (IV.6), (IV.7), (IV.11) e (IV.12).

Analisando nas figuras IV.2 e IV.3 as curvas  $\varepsilon_t \times t$  e  $\dot{\varepsilon}_t \times t$  para o ensaio CR-I-2, verifica-se que o mesmo atinge a ruptura, já que este é realizado com  $\frac{q_c'}{p_c'} = 0,30$  e, assim,  $\frac{q_c'}{p_c'} > \frac{q_{bf}'}{p_c'}$ . Pela Figura IV.2 observa-se que o corpo de prova atingiu a ruptura ( $\varepsilon_t = \varepsilon_{cr}$ ) em aproximadamente  $t = 3000\text{min}$ .

As reproduções das curvas  $\varepsilon_t \times t$  e  $\dot{\varepsilon}_t \times t$  para o ensaio CR-I-2 podem ser vistas respectivamente nas figuras IV.6 e IV.7. Em ambas as figuras verifica-se claramente que a solução numérica via equação completa do creep se

aproxima mais da curva experimental obtida por Lacerda (1976) em relação à curva obtida via equação simplificada.

É interessante observar que ambas as soluções numéricas apresentam após a ruptura uma velocidade de deformação específica constante. Este comportamento está de acordo com o conceito de ruptura em um corpo-de-prova definido na Seção III.5 para um ensaio de tensão controlada, onde considerou-se que a ruptura é atingida quando  $\frac{d^2\epsilon_t}{dt^2} \geq 0$  e  $\dot{\epsilon}_t > 0$ .

Por ser realizado com  $\frac{q_c'}{p_c'} = 0,27$ , com base na equação simplificada do creep, o ensaio CR-71-1 deveria romper, já que neste ensaio  $\frac{q_c'}{p_c'} > \frac{q_{br}'}{p_c'}$ . Porém, o mesmo foi interrompido antes de se chegar à ruptura, como se pode ver nas figuras IV.2 e IV.3.

Reproduzindo as curvas  $\epsilon_t \times t$  e  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-71-1 nas figuras IV.8 e IV.9, verifica-se, principalmente através da curva  $\epsilon_t \times t$ , que novamente a solução numérica via equação completa do creep se aproxima mais dos pontos da curva experimental.

Ao se levar à ruptura ( $\epsilon_t \geq \epsilon_{cr}$ ) o ensaio CR-71-1 através das soluções numéricas das equações diferenciais do creep não-drenado, verifica-se que pela equação simplificada esta situação se dá aproximadamente a um tempo  $t = 5000\text{min}$  e com uma velocidade de  $\dot{\epsilon}_t = 1 \cdot 10^{-4}\% / \text{min}$ . Pela equação completa do creep, a ruptura se dá aproximadamente em  $t = 20000\text{min}$  com o corpo-de-prova apresentando uma velocidade aproximada de  $\dot{\epsilon}_t = 3 \cdot 10^{-5}\% / \text{min}$ .

Finalmente, analisando-se o ensaio CR-I-ST-2 através das figuras IV.2 e IV.3, nota-se que o mesmo atinge rapidamente a ruptura ( $t \approx 160\text{min}$ ) devido às altas tensões desviadoras de creep nos últimos estágios de carregamento, conforme se pode ver na Tabela IV.1.

As reproduções das curvas  $\epsilon_t \times t$  e  $\dot{\epsilon}_t \times t$  para os sete estágios de carregamento do ensaio CR-I-ST-2 pela equação simplificada do creep e pela equação completa podem ser vistas nas figuras IV.10 e IV.11. Neste caso

ambas as equações simplificada e completa do creep se equivalem quanto à proximidade da curva experimental.

Depois da análise individual de cada um dos quatro ensaios apresentados nesta seção, pode-se concluir que o modelo se mostrou eficiente ao reproduzir os ensaios de creep não-drenado na argila da Baía de San Francisco, apesar da falta de acurácia na determinação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  devido à grande dispersão apresentada na curva experimental  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$ .

Ambas as soluções numéricas das equações diferenciais do creep não-drenado se mostraram próximas das curvas experimentais dos ensaios analisados e, na maioria deles, a solução numérica a partir da equação diferencial completa do creep reproduziu melhor os resultados experimentais que a solução a partir da equação simplificada. Este último fato, apesar do pequeno número de ensaios analisados, vem confirmar que a simplificação realizada por Martins (1992) na dedução da equação diferencial que rege o fenômeno do creep não-drenado afasta sua solução dos pontos experimentais do ensaio real, sendo a solução da equação completa do creep a mais acurada.

Na intenção de melhorar ainda mais as reproduções dos ensaios realizados por Lacerda (1976), e tendo em vista a considerável dispersão apresentada pela curva experimental  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$ , será introduzida na próxima seção uma técnica de otimização de parâmetros.

Com esta técnica tentar-se-á obter novos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para argila da Baía de San Francisco através das próprias curvas experimentais  $\epsilon_t \times t$  dos ensaios que se deseja reproduzir.

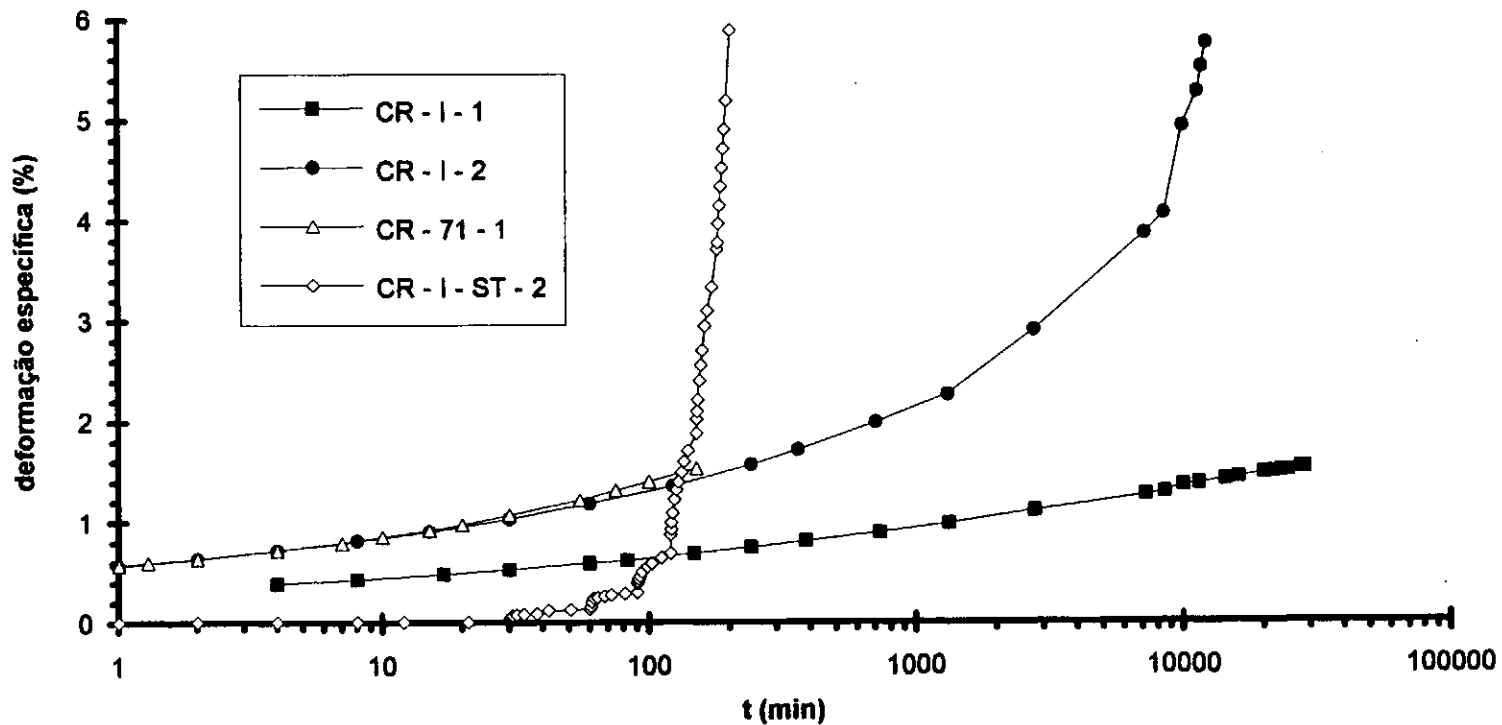


Figura IV.2 - Curvas  $\epsilon_t \times t$  dos ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco

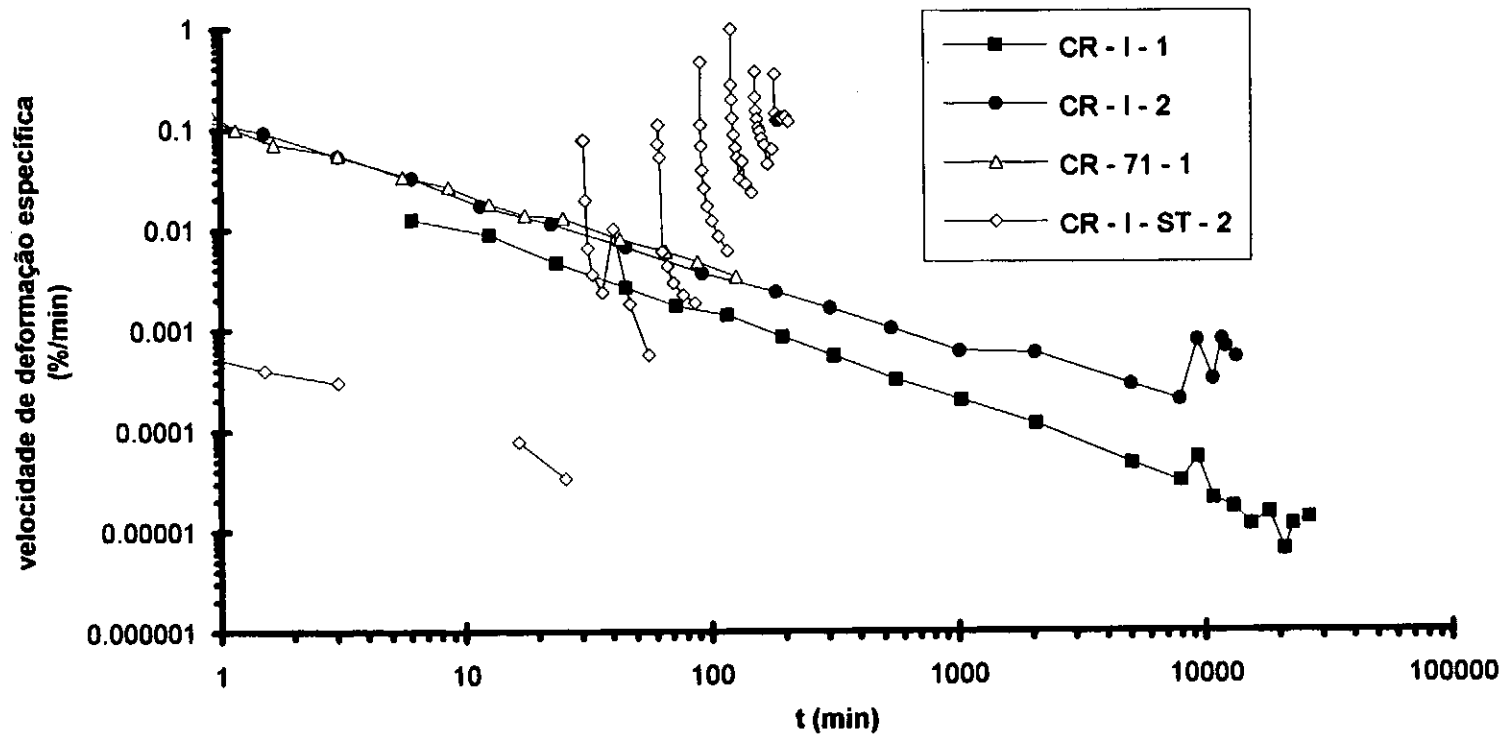


Figura IV.3 - Curvas  $\dot{\epsilon}_t \times t$  dos ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco

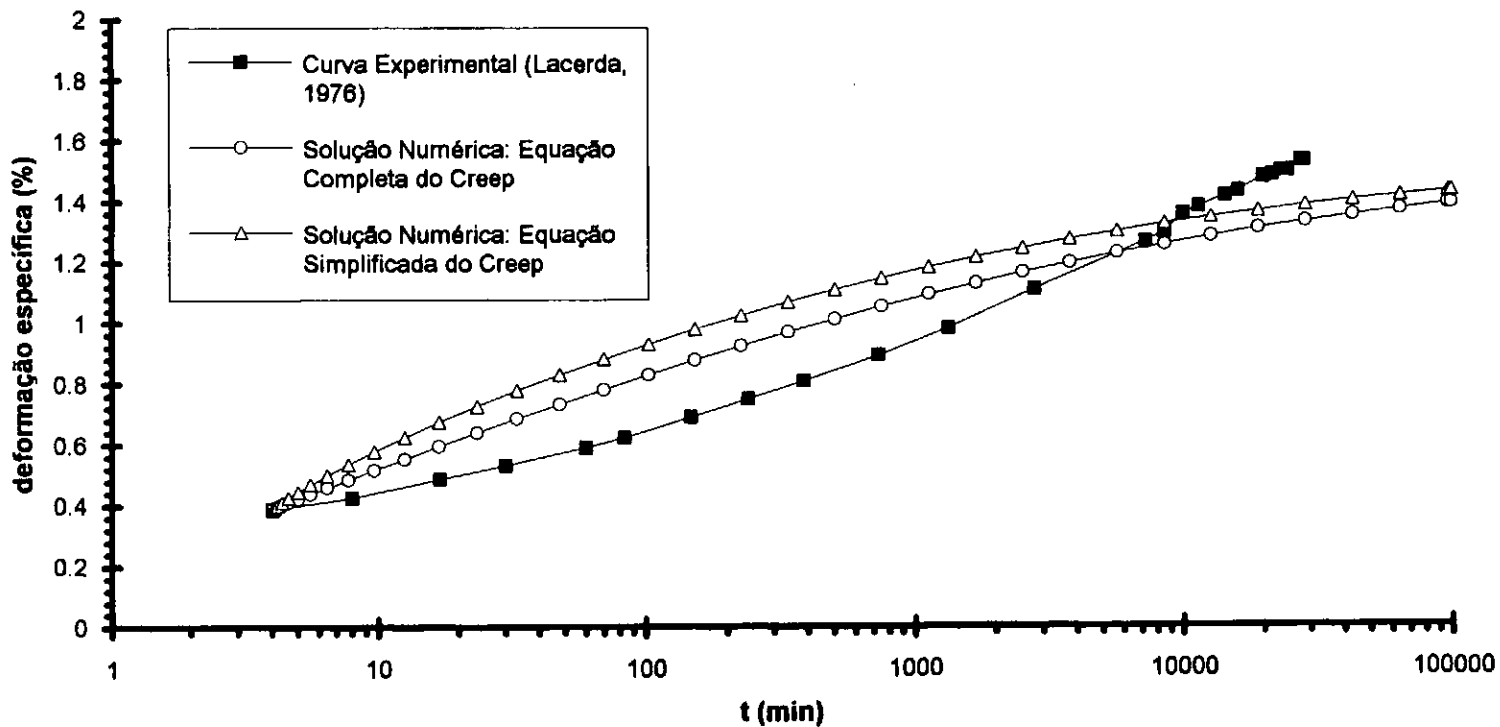


Figura IV.4 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-I-1

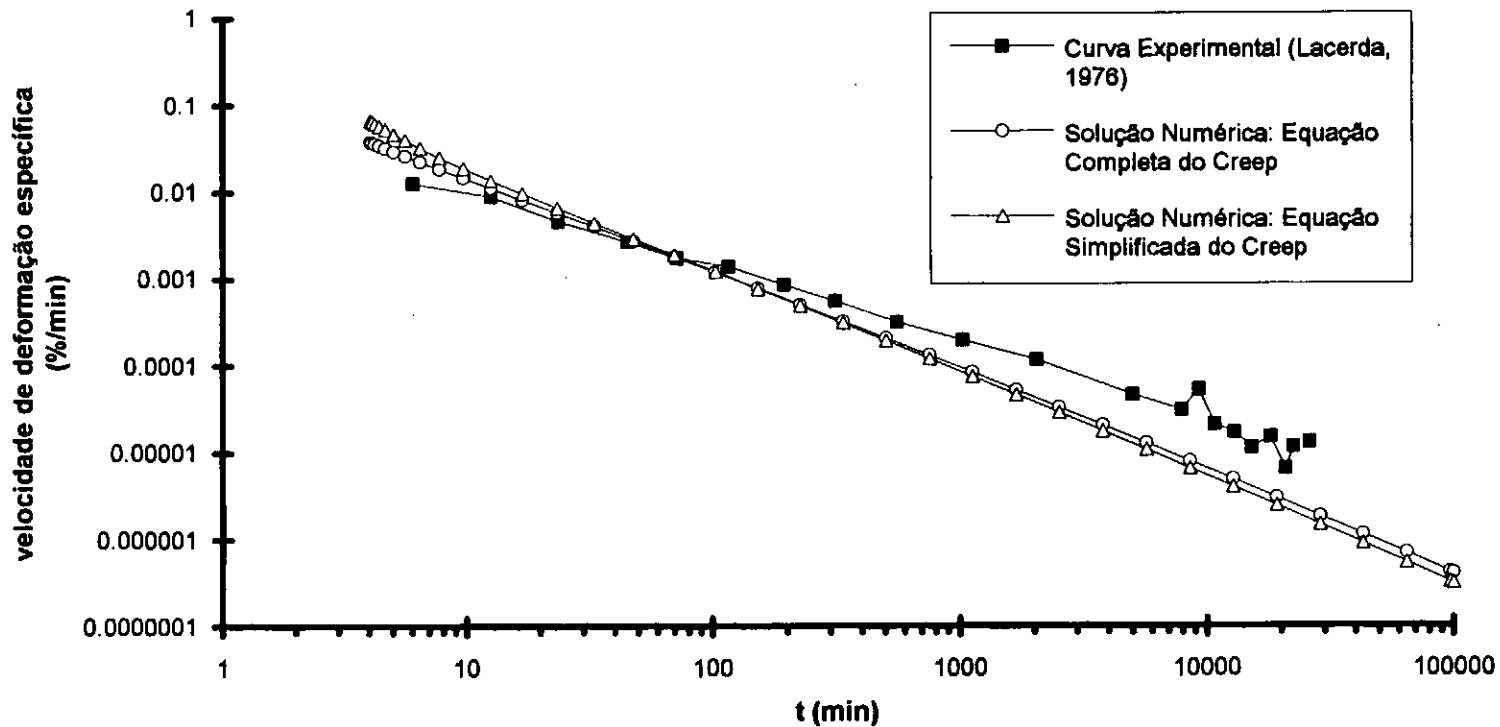


Figura IV.5 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-I-1

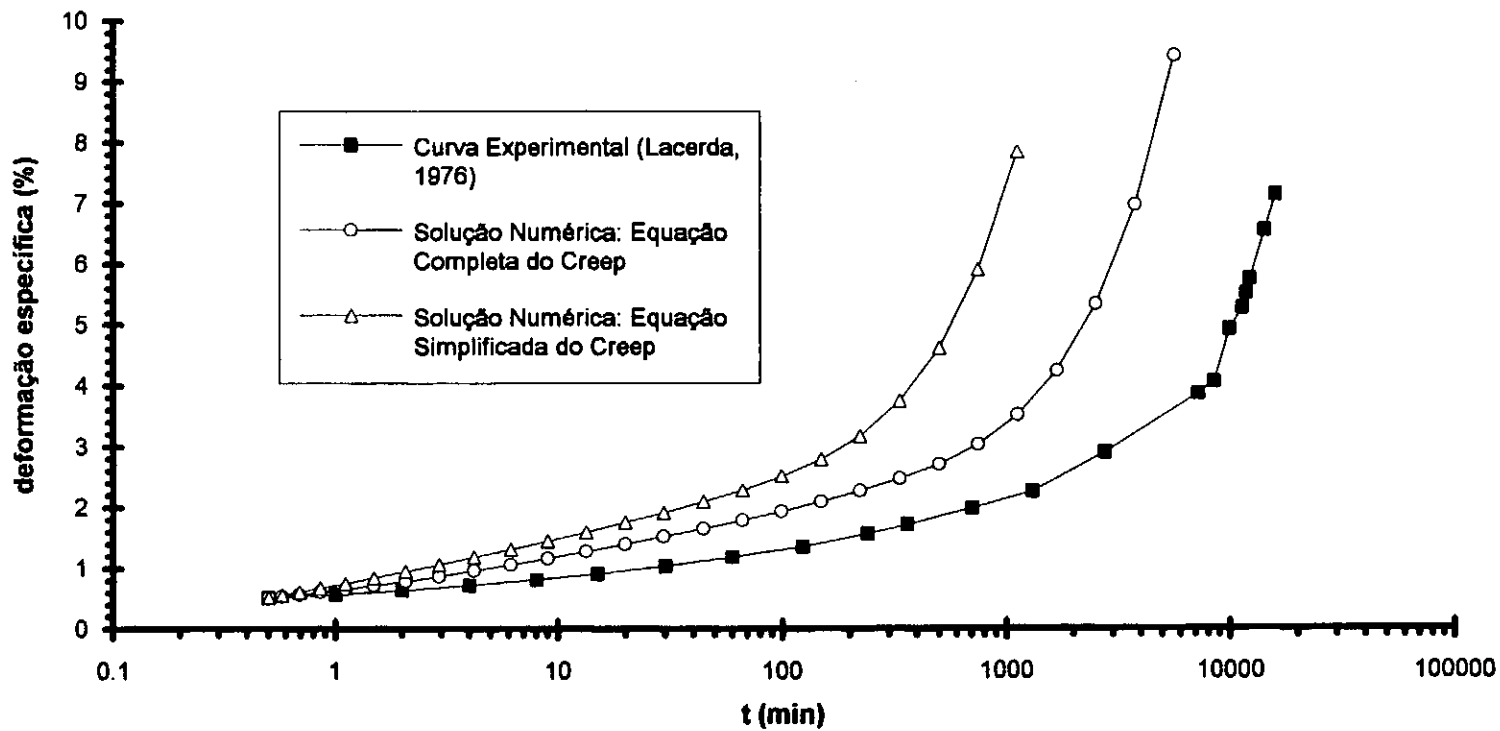


Figura IV.6 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-I-2

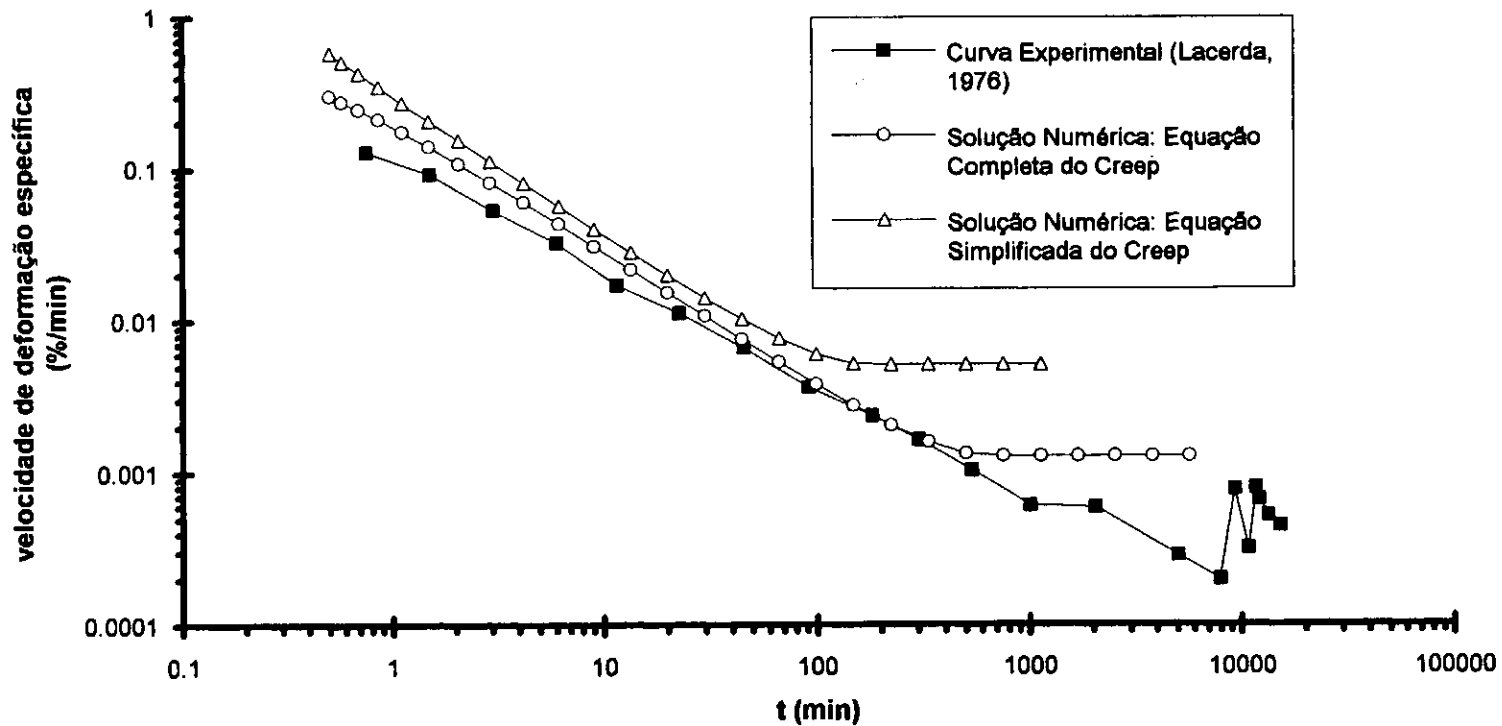


Figura IV.7 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_1 \times t$  do ensaio CR-I-2

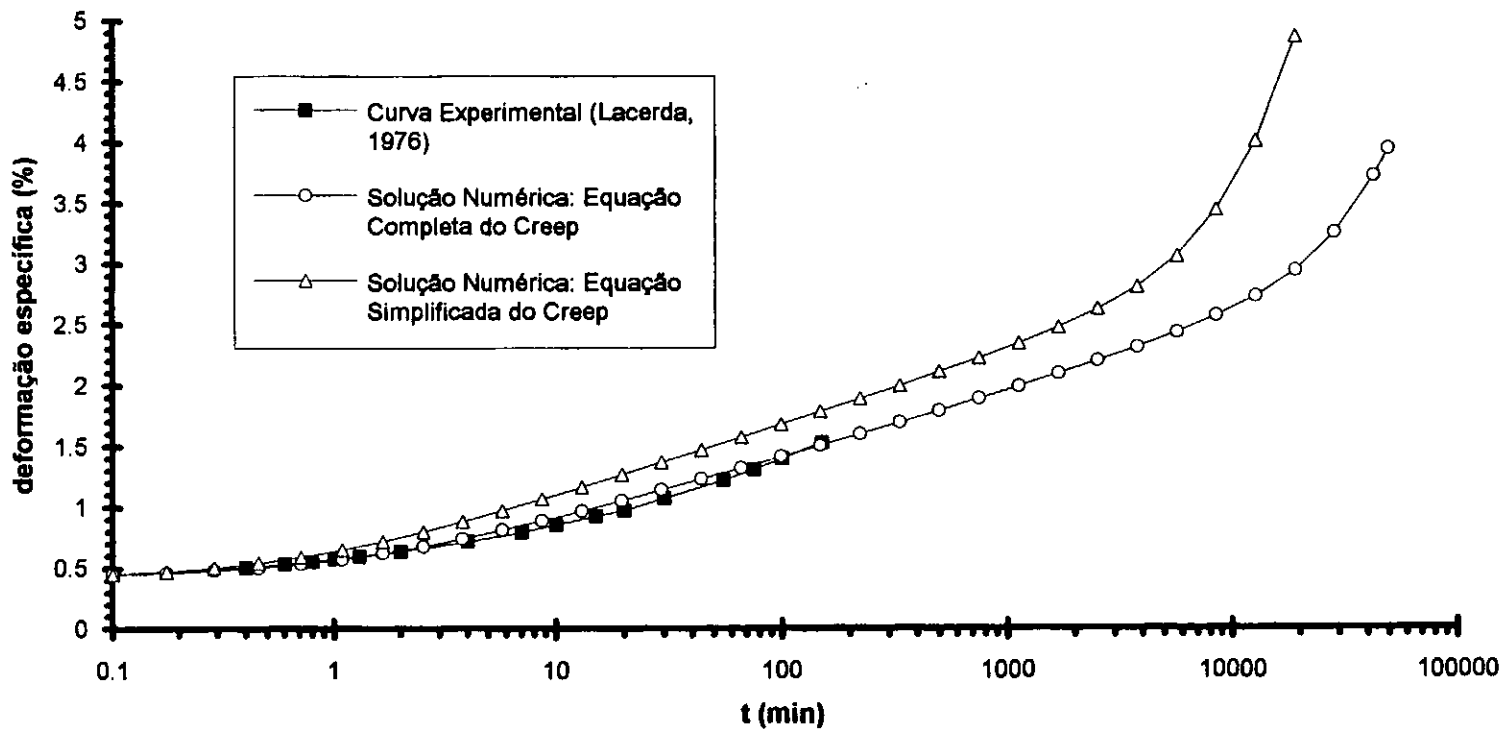


Figura IV.8 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-71-1

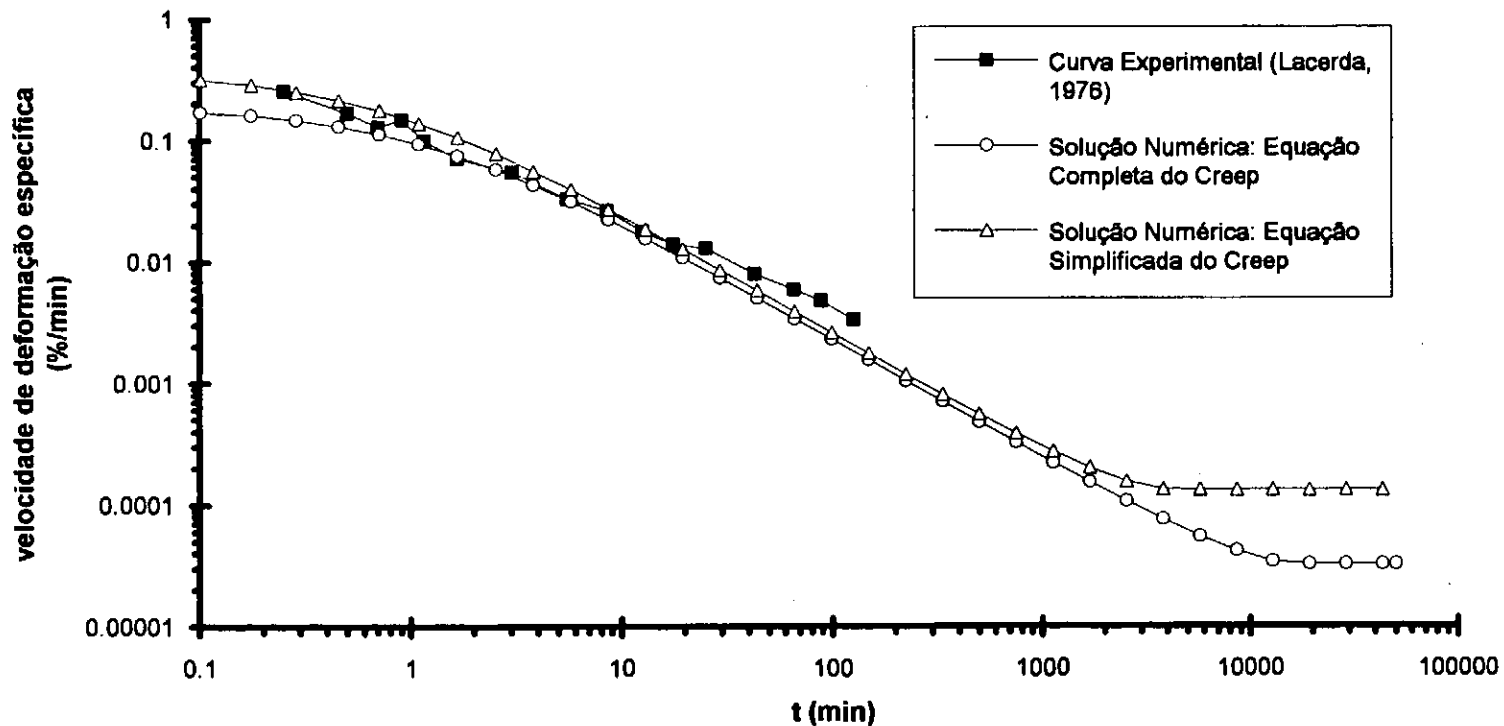


Figura IV.9 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-71-1

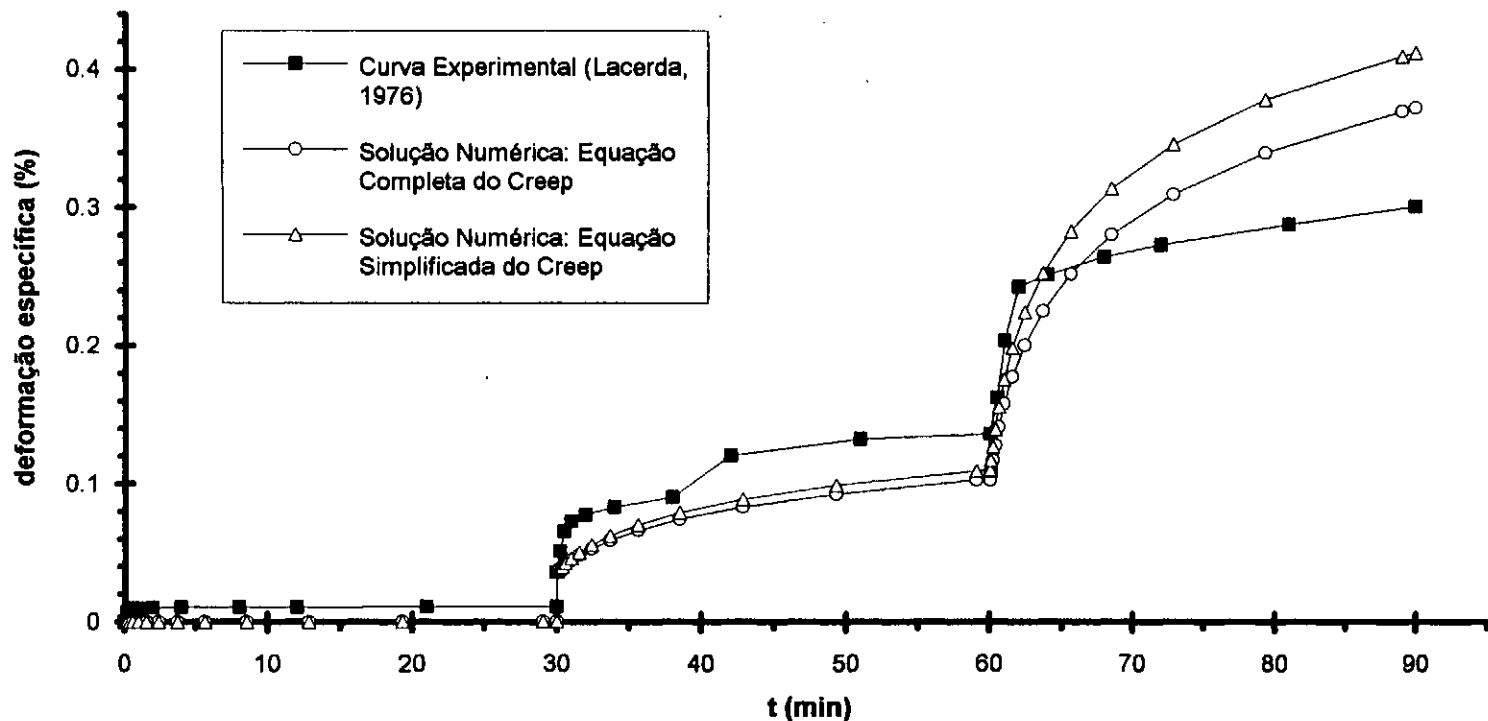


Figura IV.10a - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  dos estágios 1 a 3 do ensaio CR-I-ST-2

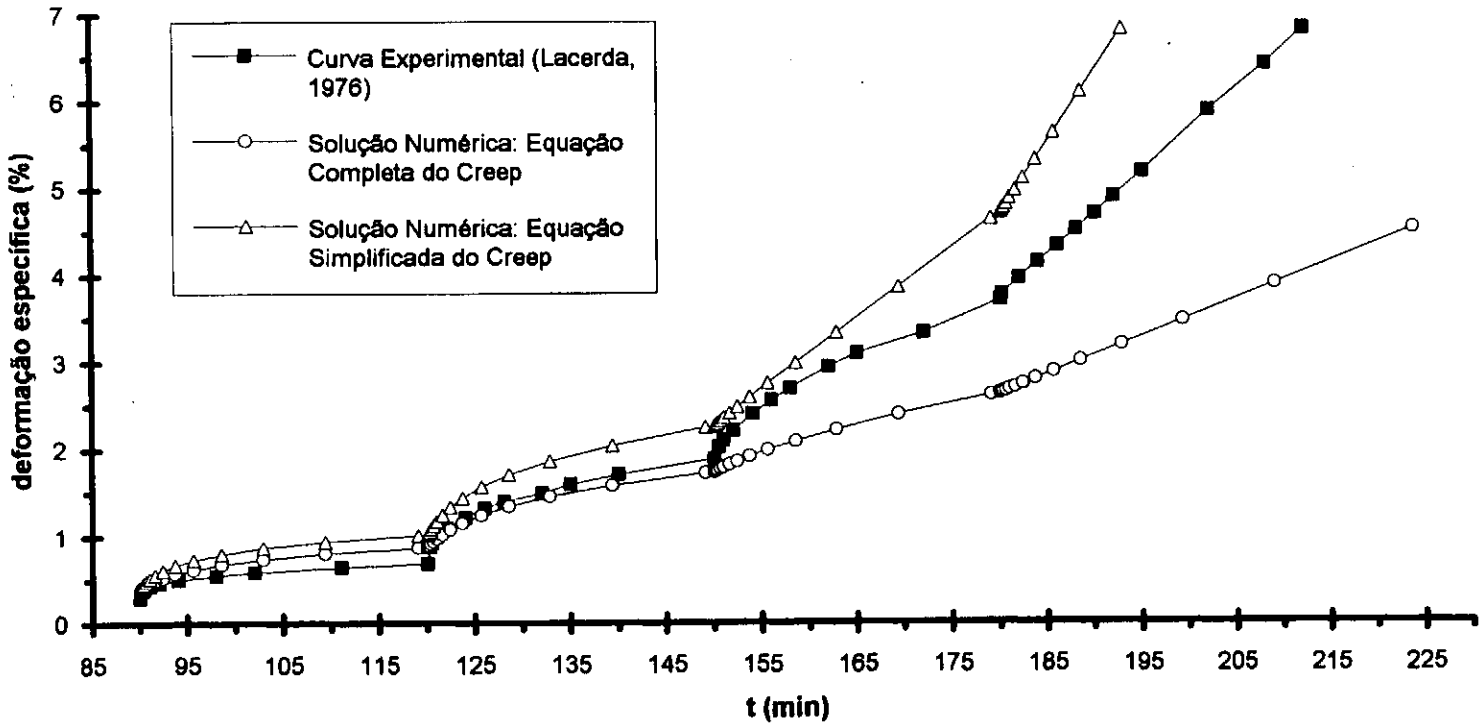


Figura IV.10b - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  dos estágios 4 a 7 do ensaio CR-I-ST-2

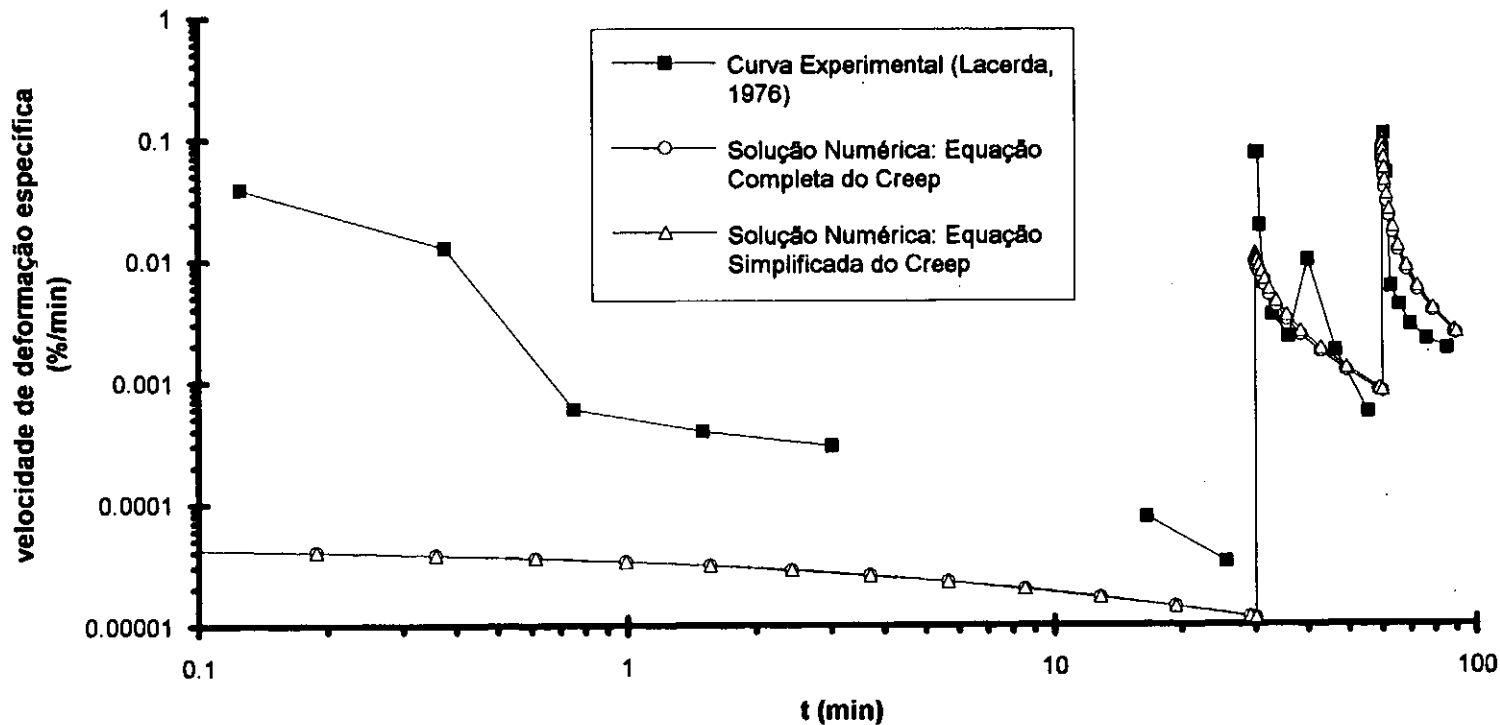


Figura IV.11a - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_1 \times t$  dos estágios 1 a 3 do ensaio CR-I-ST-2

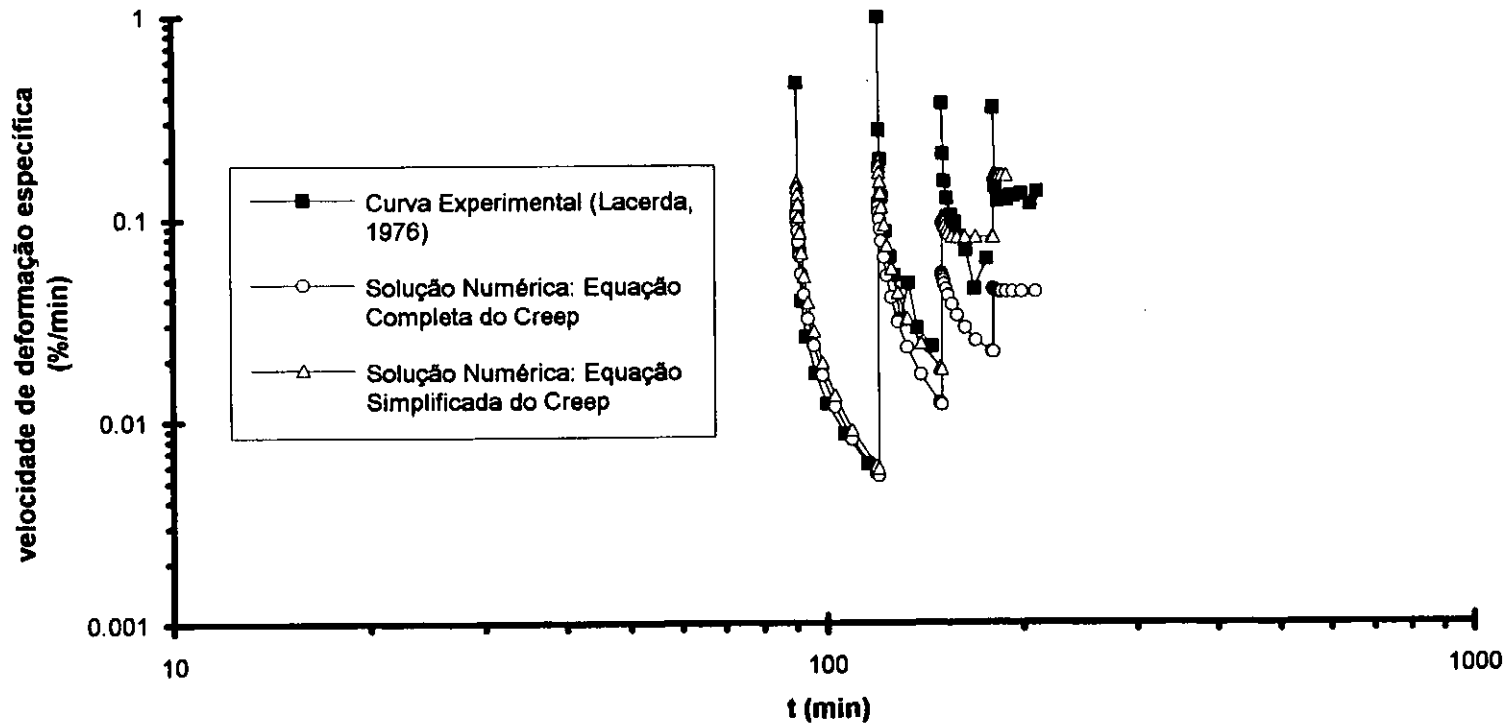


Figura IV.11b - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  dos estágios 4 a 7 do ensaio CR-I-ST-2

### IV.3.3 - A Técnica de Otimização na Obtenção de Parâmetros

Dos cinco parâmetros do modelo ( $\epsilon_{sf}$ ,  $\frac{q_{bf}'}{p_e'}$ ,  $\frac{u_{sf}}{p_e'}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ ) obtidos para a argila da Baía de San Francisco, dois deles, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , foram obtidos com pouca acurácia devido a problemas de natureza operacional dos ensaios, tais como nos ensaios convencionais a prensa partir de uma velocidade inicial nula, causando o não aparecimento do salto viscoso, ou o uso de um sistema de leitura não-automático nos ensaios de creep não-drenado, gerando imprecisões na determinação de  $\dot{\epsilon}_t$ .

Esta falta de acurácia provavelmente se refletiu na reprodução dos ensaios de creep através das equações do modelo. Assim, de posse dos parâmetros do solo  $\epsilon_{sf}$ ,  $\frac{q_{bf}'}{p_e'}$  e  $\frac{u_{sf}}{p_e'}$ , que foram bem determinados a partir das

curvas únicas  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \epsilon_t$  e  $\frac{u_s}{p_e'} \times \epsilon_t$ , e adotando-se a solução numérica da

equação completa do creep como aquela que melhor representa o fenômeno do creep não-drenado, tentar-se-á obter novos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que melhor ajustem o modelo aos ensaios reais de creep não-drenado.

Este ajuste pode ser formulado como um problema de otimização irrestrita da seguinte maneira:

(1) Seja um conjunto de  $n_e$  ensaios de creep não-drenado, tendo cada ensaio  $i$  (onde  $1 \leq i \leq n_e$ )  $n_{p_i}$  pontos  $[\epsilon_{i,j}, t_{i,j}]$ , de forma que fazendo-se  $j = 1, \dots, n_{p_i}$  compõe-se a curva experimental  $\epsilon_t \times t$  do ensaio  $i$ .

(2) Deseja-se então minimizar a função objetivo dada pelo somatório dos módulos das diferenças (resíduos) entre as deformações medidas nos ensaios e as deformações calculadas numericamente através da equação diferencial completa do creep, função das variáveis de otimização  $\alpha$  e  $\beta$ .

Conforme foi visto na Seção III.8 do capítulo anterior, para resolver a equação diferencial do creep necessita-se da condição inicial  $\epsilon_t(t_0) = \epsilon_{t_0}$ . Então para cada ensaio  $i$  tem-se a condição inicial  $\epsilon_t(t_{0i}) = \epsilon_{t_{0i}}$ .

O problema pode então ser escrito da seguinte forma

$$\underset{\alpha, \beta}{\text{minimize}} \sum_i^{n_e} \sum_j^{n_{p_i}} \left\| \epsilon_{i,j} - \epsilon_t(t_{i,j}, \alpha, \beta, \epsilon_{t_{0_i}}, t_{0_i}) \right\| \quad (\text{IV.17})$$

onde a função  $\epsilon_t(t, \alpha, \beta, \epsilon_{t_{0_i}}, t_{0_i})$  fornece o valor de  $\epsilon_t$  para o ensaio  $i$  em função do tempo  $t$  para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  quaisquer do modelo, fixados, é claro, os demais parâmetros  $\epsilon_{cf}$ ,  $\frac{q_{bf}'}{p_e'}$  e  $\frac{u_{sf}}{p_e'}$ .

Chama-se este problema de um *problema de otimização irrestrita* pois nenhuma restrição é imposta às variáveis de minimização  $\alpha$  e  $\beta$ , podendo elas variar livremente no espaço  $\alpha \times \beta$ .

O problema acima formulado foi implementado no programa computacional PRAXIS de minimização irrestrita de funções com  $n$ -variáveis. Este programa foi obtido via Internet (<http://www.jumbo.com>) e escrito em linguagem C por Karl Gegenfurtner da Universidade de Nova Iorque utilizando o algoritmo de minimização irrestrita sem derivadas originalmente escrito por Powell (1964) e modificado por Brent (1973).

Uma vez tendo formulado e implementado o problema, só resta aplicá-lo aos ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) e listados na Tabela IV.1.

Para isto, foram fixados os parâmetros da argila da Baía de San Francisco bem determinados na Seção IV.2 e dados por

$$\epsilon_{cf} = 2,865\% \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{u_{sf}}{p_e'} = 0,631 \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{q_{bf}'}{p_e'} = 0,248 \quad (\text{IV.20})$$

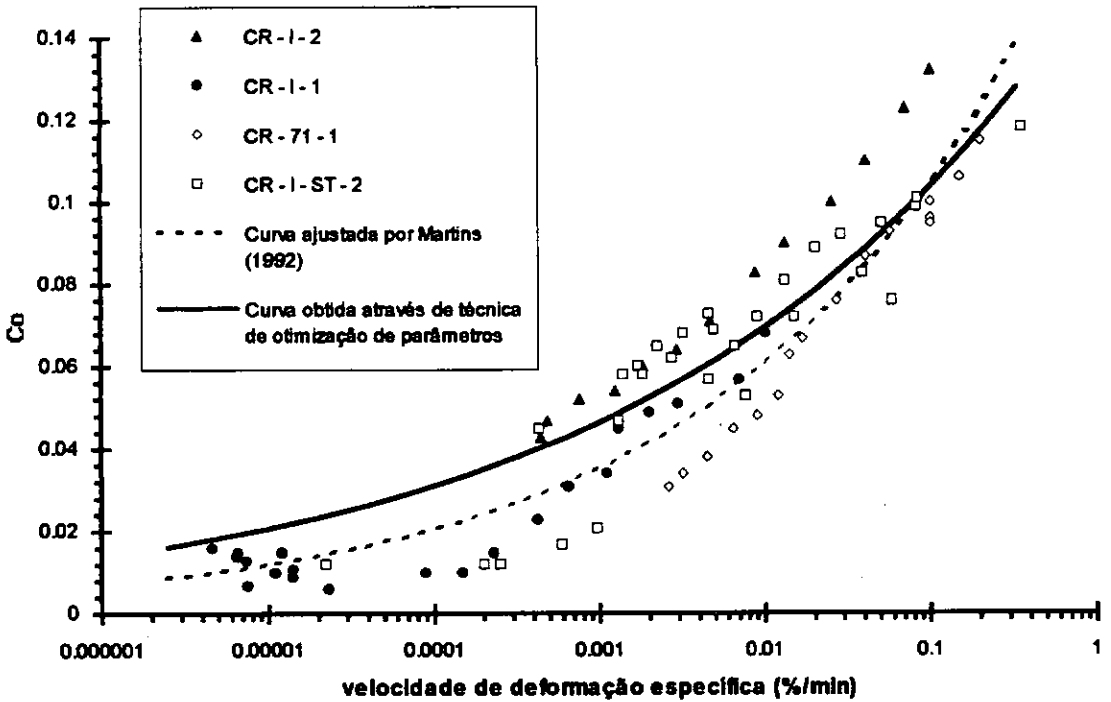
e utilizados os pontos experimentais dos ensaios desprezando-se aqueles que se situam além da condição de ruptura ( $\epsilon_t > \epsilon_{cf}$ ). Isto foi feito porque considerou-se que ao atingir a ruptura há a perda da uniformidade no estado de tensão-deformação do corpo-de-prova, originando zonas de concentração de tensões e assim fazendo com que as medições realizadas para  $\epsilon_t > \epsilon_{cf}$  não sejam confiáveis.

Dito isto, partindo-se de vários pontos iniciais  $(\alpha, \beta)$  no processo de otimização, verificou-se que o problema sempre convergia para os valores

$$\alpha = 0,347 \quad (IV.21)$$

$$\beta = 0,175 \quad (IV.22)$$

Como forma de verificar a consistência deste resultado na análise feita para os ensaios na argila da Baía de San Francisco, plotou-se a função de potência  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  otimizados, respectivamente dados por (IV.21) e (IV.22). Isto pode ser visto na Figura IV.12.



**Figura IV.12 - Curvas  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$  experimental, ajusta por Martins (1992) e obtida via técnica de otimização**

Observa-se na Figura IV.12 que a função de potência  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  obtida via técnica de otimização se encontra na região compreendida pela faixa de pontos que deveriam definir de maneira única a curva experimental  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$ . Este fato permite concluir que a aplicação da técnica de otimização irrestrita para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  no modelo obteve resultados consistentes com os experimentais.

Deve-se chamar atenção que, caso a função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  obtida via técnica de otimização se situasse fora da faixa de valores experimentais no gráfico  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$ , então o problema deveria ser resolvido impondo-se restrições às

variáveis de otimização  $\alpha$  e  $\beta$  de forma que a função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  ajustada se situasse dentro da faixa considerada.

Nas figuras IV.13 a IV.20 estão plotadas para os ensaios CR-I-1, CR-I-2, CR-71-1 e CR-I-ST-2 as curvas experimentais (Lacerda, 1976), as curvas calculadas via equação completa do creep com os parâmetros do solo dados por (IV.18), (IV.19), (IV.20), (IV.11) e (IV.12) e finalmente as curvas calculadas via equação completa do creep com os parâmetros obtidos pela técnica de otimização, dados por (IV.18), (IV.19), (IV.20), (IV.21) e (IV.22).

Analisando cuidadosamente estes resultados verifica-se que apenas no ensaio CR-I-2 se vê claramente os resultados da técnica de otimização aplicada ao modelo, pois em ambas as curvas  $\epsilon_t \times t$  (Figura IV.15) e  $\dot{\epsilon}_t \times t$  (Figura IV.16) a solução numérica da equação completa do creep com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  otimizados se aproximou mais das curvas experimentais comparando-se com a solução numérica utilizando os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  determinados por Martins (1992). Nos demais ensaios ambas as soluções numéricas aparentemente se equívalem em termos de proximidade com as curvas experimentais  $\epsilon_t \times t$  e  $\dot{\epsilon}_t \times t$  dos ensaios.

Infelizmente o número de ensaios de creep disponíveis não foi suficiente para se tirar mais conclusões sobre os resultados positivos e negativos da aplicação ao modelo deste ajuste de parâmetros através de técnicas de otimização; porém, serviu para mostrar que através de uma outra maneira de obtenção da função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  o modelo se apresentou consistente com os resultados experimentais (principalmente no que se refere à Figura IV.12).

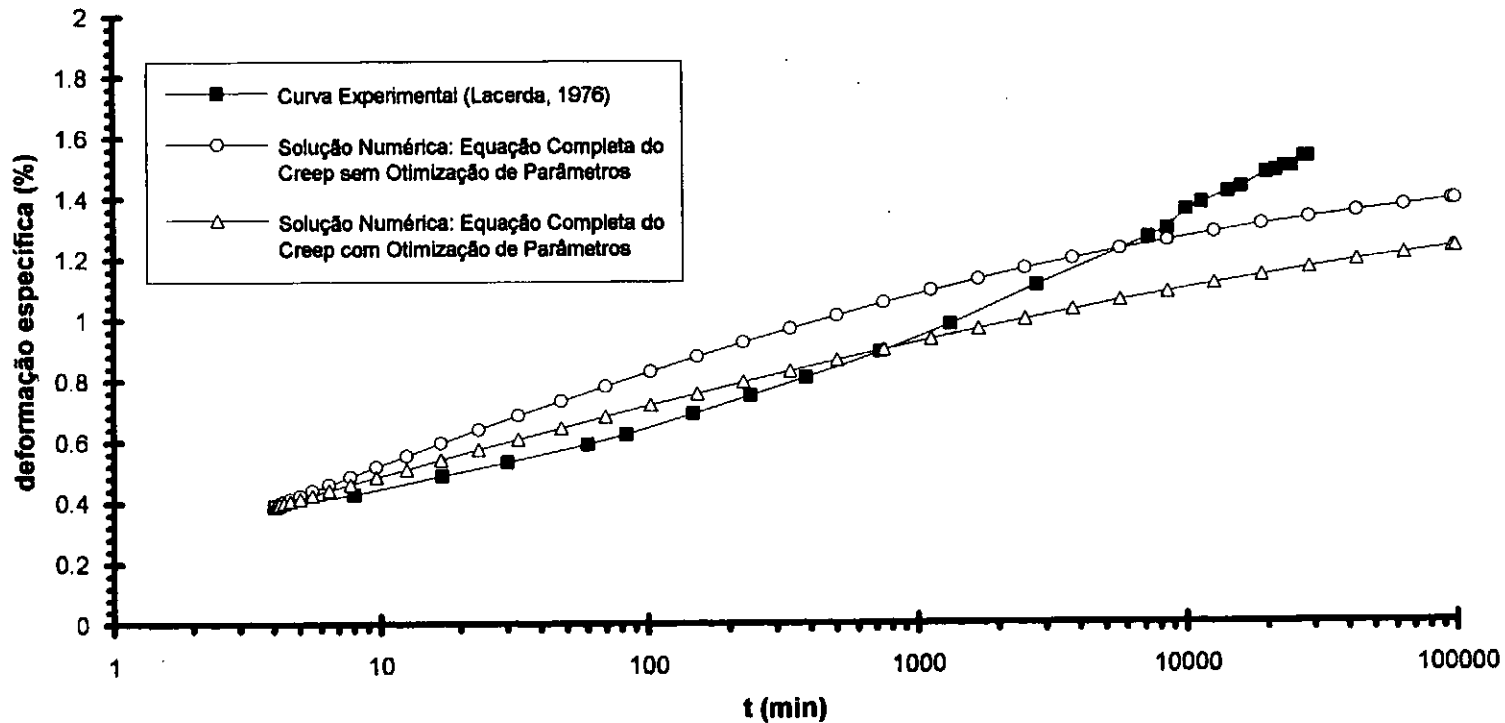


Figura IV.13 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-I-1

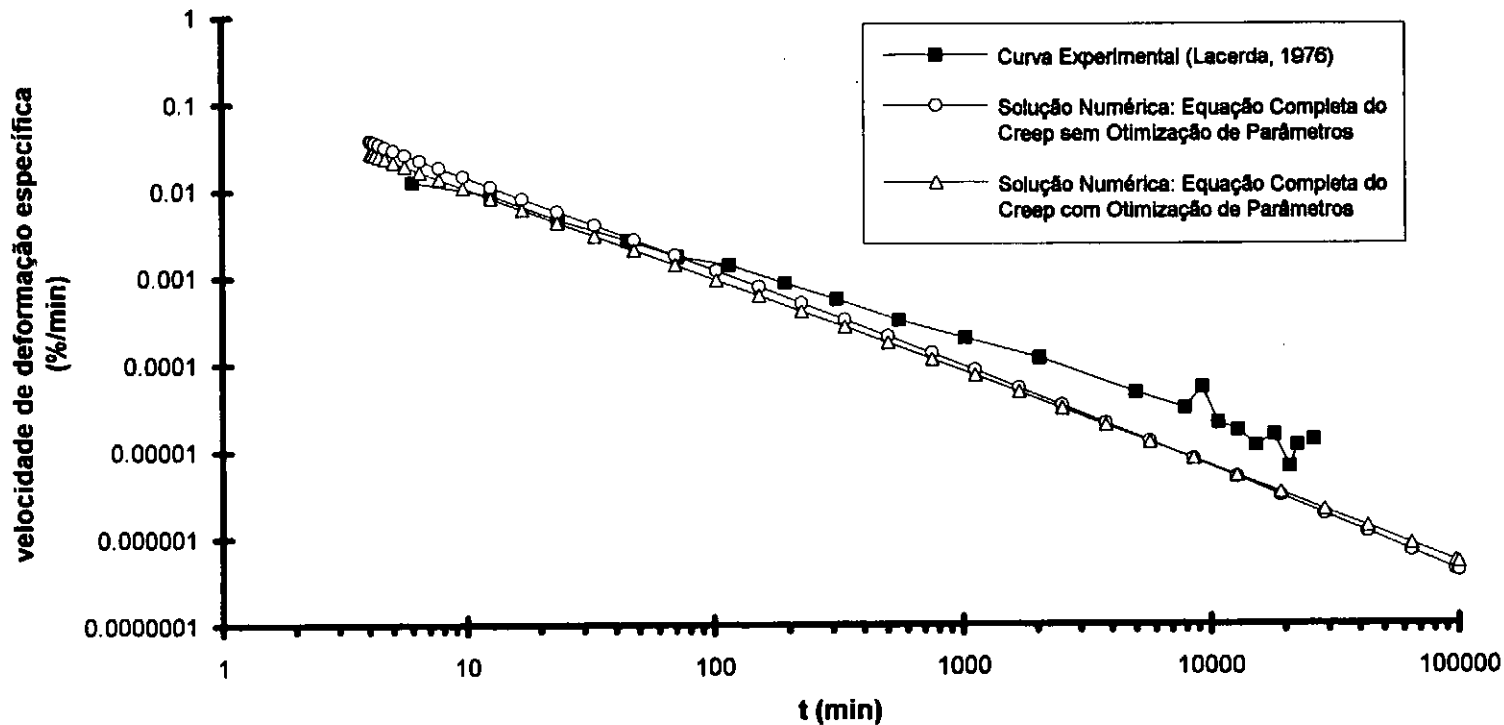


Figura IV.14 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-I-1

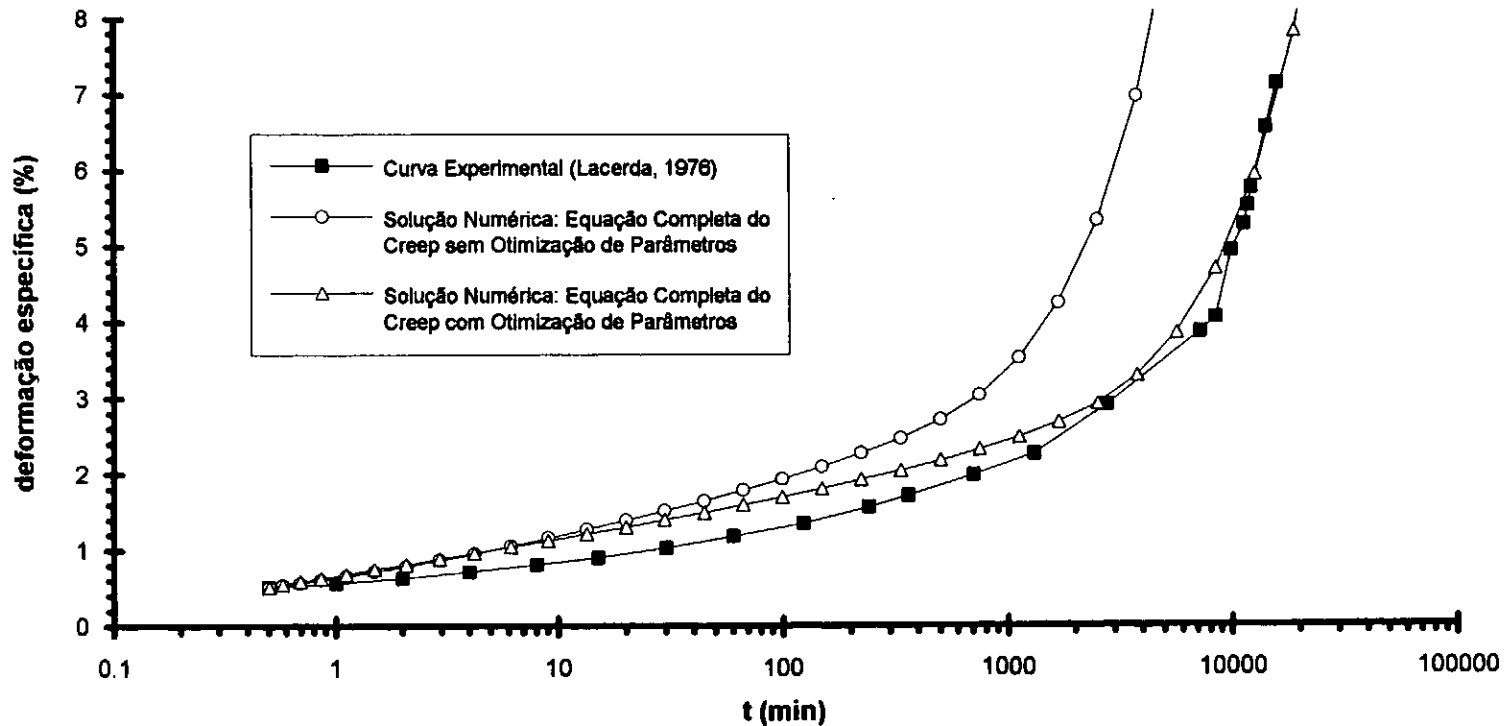


Figura IV.15 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-I-2

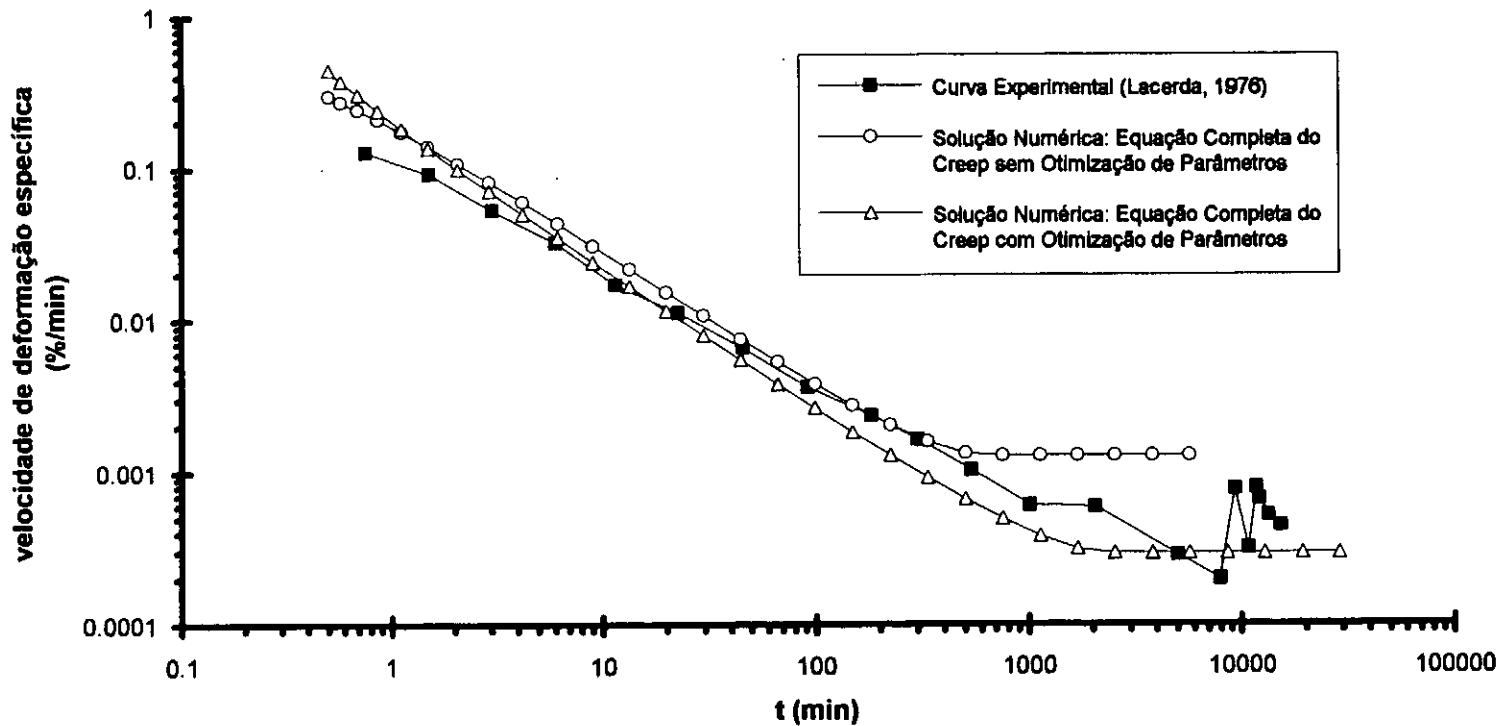


Figura IV.16 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-I-2

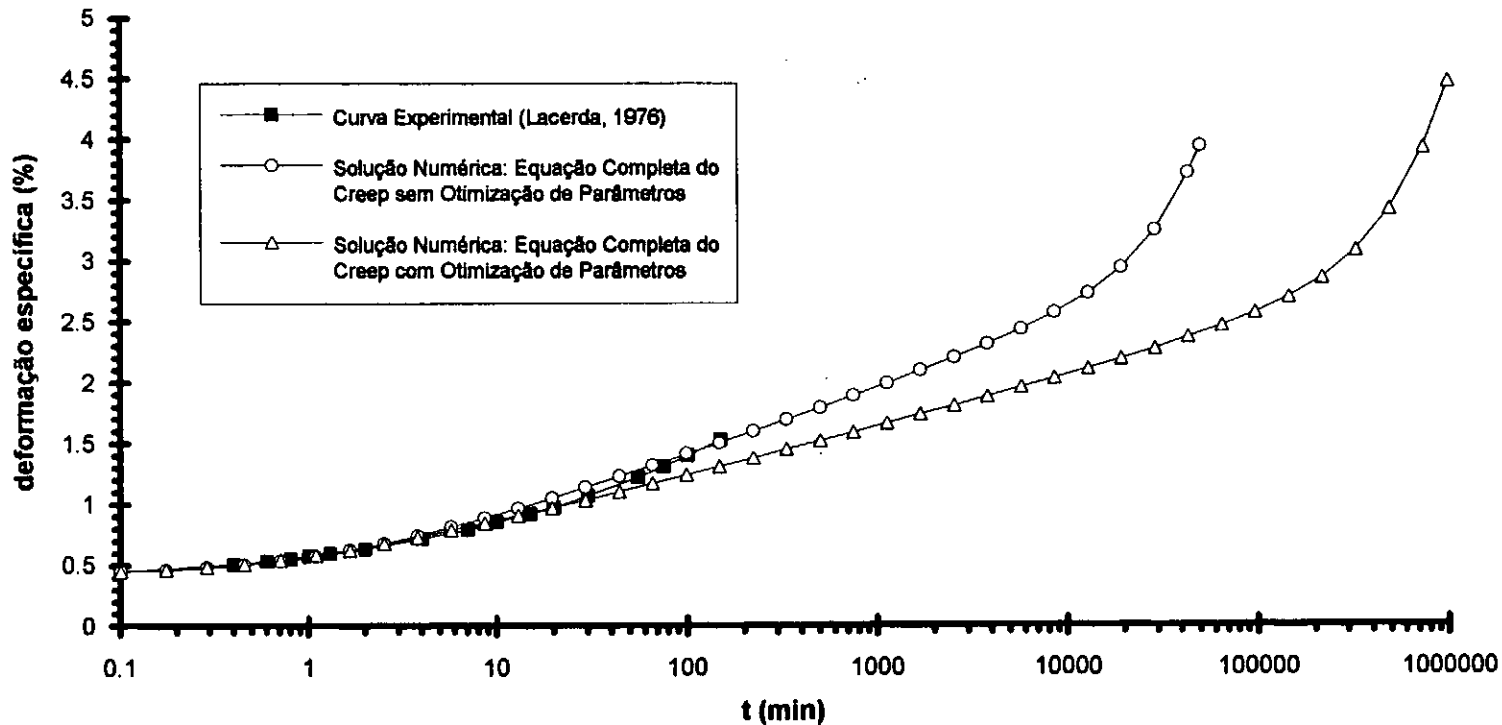


Figura IV.17 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-71-1

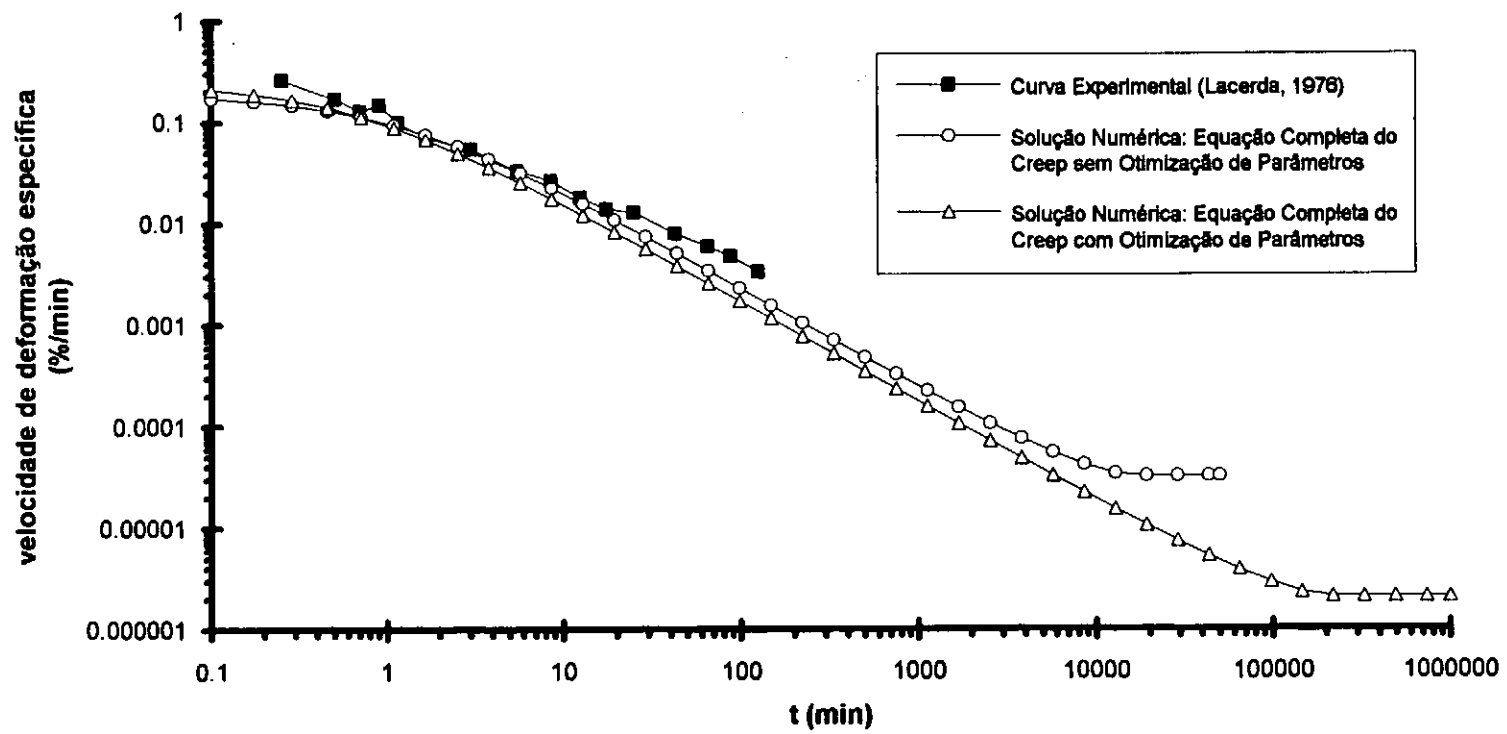


Figura IV.18 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-71-1

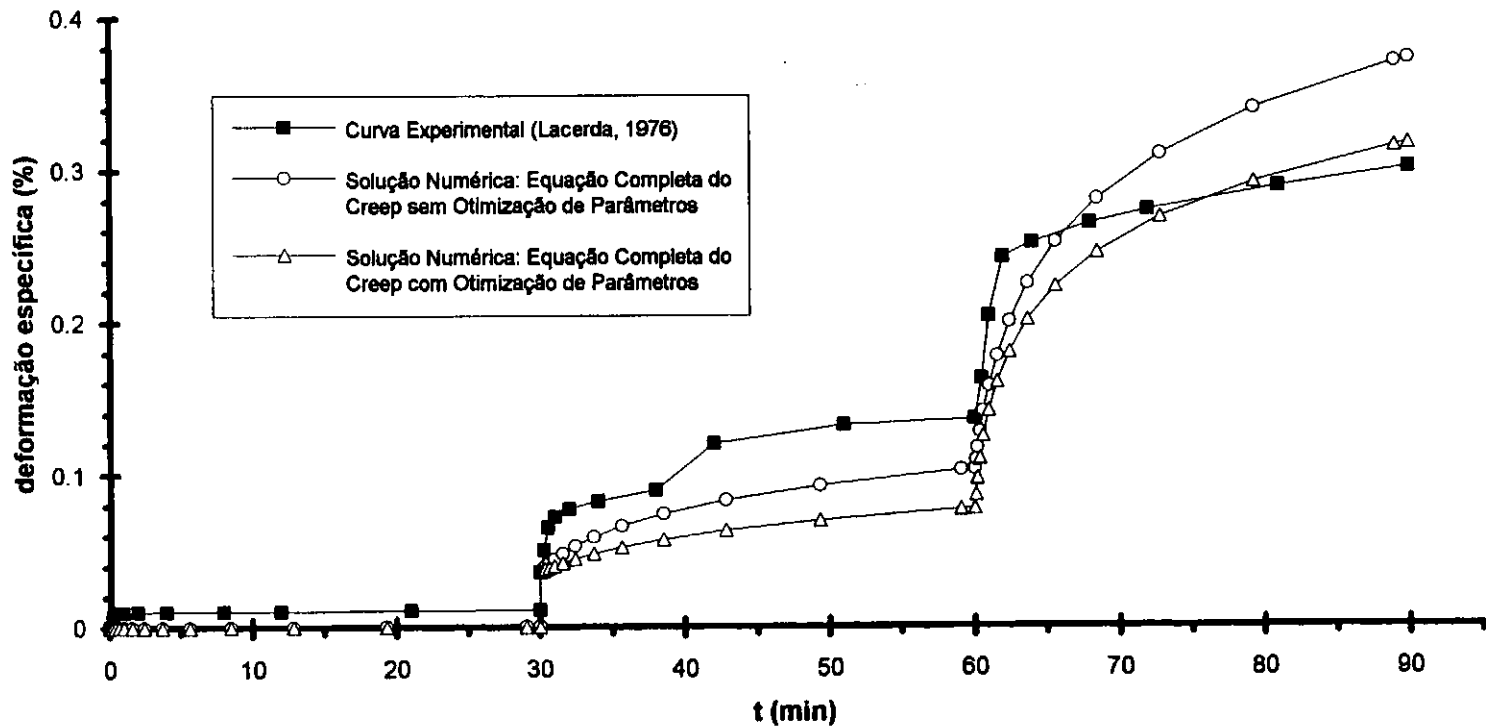


Figura IV.19a - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  dos estágios 1 a 3 do ensaio CR-I-ST-2

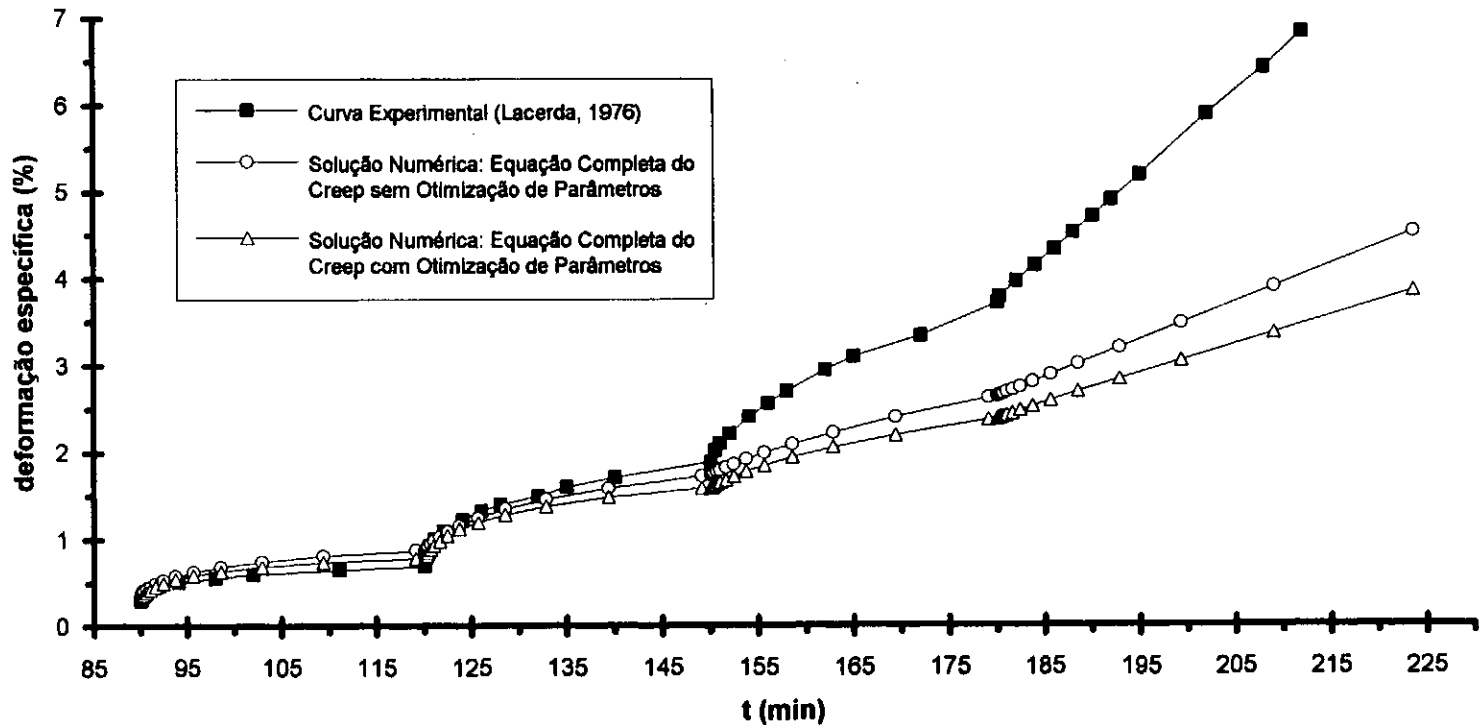


Figura IV.19b - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  dos estágios 4 a 7 do ensaio CR-I-ST-2

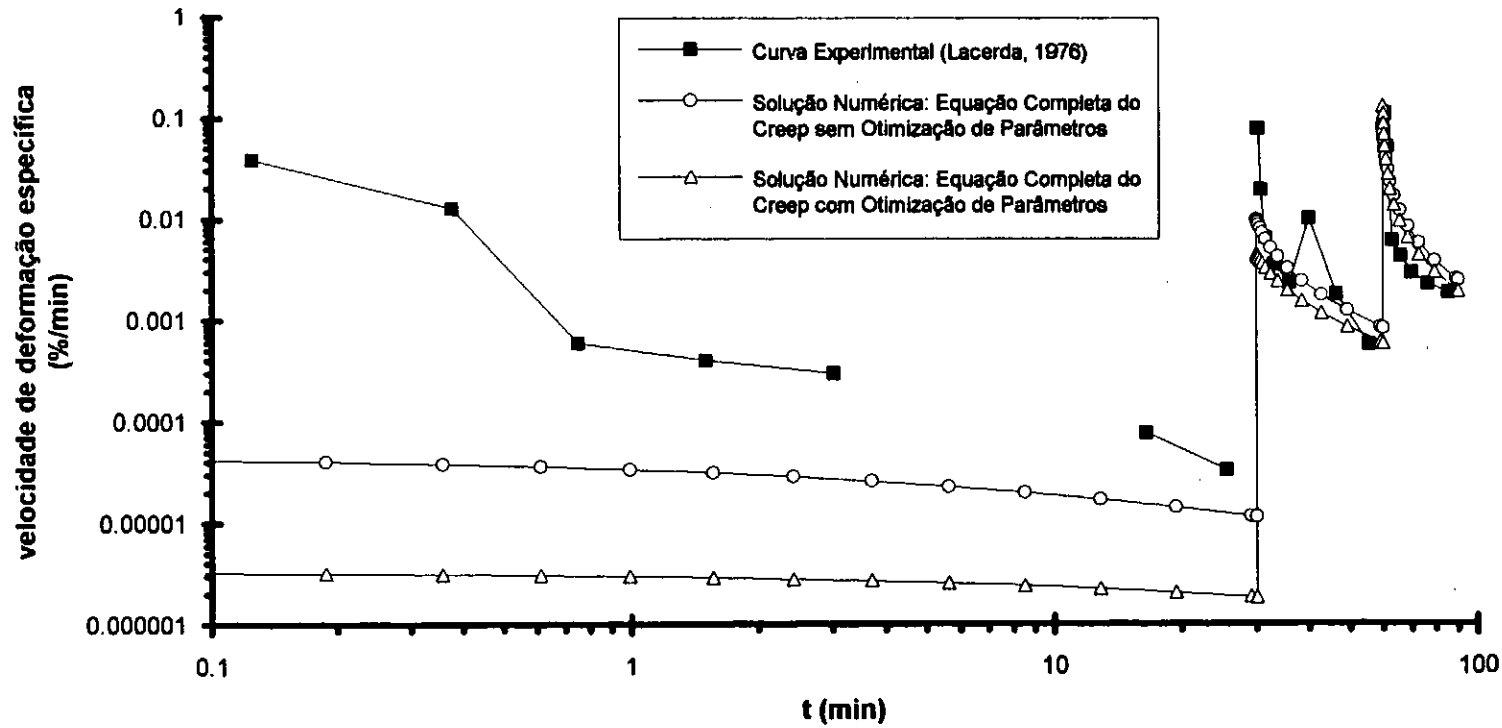


Figura IV.20a - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  dos estágios 1 a 3 do ensaio CR-1-ST-2

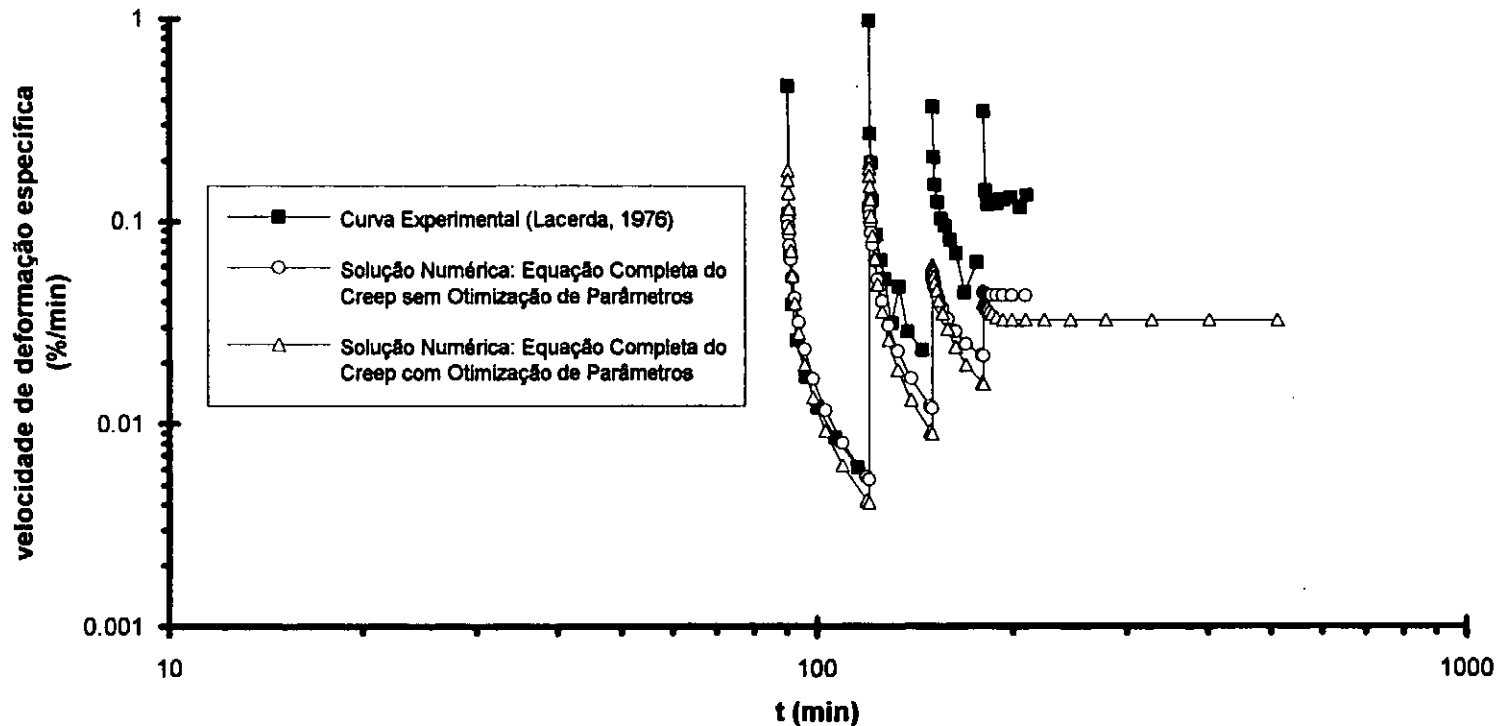


Figura IV.20b - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_i \times t$  dos estágios 4 a 7 do ensaio CR-I-ST-2

## CAPÍTULO V

### FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### V.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo generalizar o modelo proposto por Martins (1992) para permitir sua aplicação através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Desenvolvido inicialmente para a condição de simetria axial de tensão e deformação, pretende-se aqui estender sua utilização a situações mais complexas de carregamento e condições de contorno.

Com isto, dá-se um passo inicial no sentido de utilizar as idéias apresentadas por Martins (1992) a respeito do comportamento viscoso e friccional dos solos saturados em situações mais realísticas da Engenharia, tendo em mente que há ainda todo um caminho a ser seguido até se atingir tal objetivo.

Inicialmente tentar-se-á estender o Princípio das Tensões Efetivas Expandido (PTEE), apresentado no Capítulo II, para estados de tensão, deformação e velocidade de deformação genéricos, admitindo inclusive a rotação entre as direções dos planos principais de tensões e as velocidades de deformações principais. A partir daí e com base nos conceitos aqui desenvolvidos serão obtidas as relações constitutivas do material. Não sendo demais repetir que o material aqui considerado trata-se de uma argila saturada, normalmente adensada e sem cimentação. Adiciona-se a estas características a hipótese de isotropia, também admitida em Martins (1992).

Posteriormente é apresentada uma proposta para implementação do MEF tendo como base as equações da Mecânica dos Fluidos para o caso particular

do fluxo viscoso, lento (creeping) e totalmente incompressível, que será feita utilizando como relações constitutivas do material as equações do modelo em questão. Admite-se carregamentos “quasi-estáticos” (ausência de acelerações) e condição não-drenada (incompressibilidade), permitindo assim a aplicação do PTEE.

Através da analogia entre o fenômeno do fluxo viscoso lento e incompressível e a elasticidade incompressível, introduz-se a Formulação Mista para elementos finitos, sugerida por Zienkiewicz e Taylor (1991) como a mais adequada para resolver problemas em que há incompressibilidade.

Finalmente apresenta-se o algoritmo que, com base nas relações constitutivas do material e na Formulação Mista do MEF para o fluxo viscoso, lento e incompressível, conclui a formulação do problema proposto neste capítulo.

Com todo problema já formulado, foi feita sua implementação em um programa computacional e mostradas algumas aplicações, conforme se verá no próximo capítulo.

## **V.2 - EXTENSÃO DO MODELO PROPOSTO POR MARTINS (1992) PARA O ESTADO DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO MULTIAXIAL**

### **V.2.1 - O Princípio das Tensões Efetivas Expandido**

Na Seção II.3.2 do Capítulo II deste trabalho foi apresentado o Princípio das Tensões Efetivas Expandido, que trata da influência das naturezas viscosa e friccional no comportamento dos solos saturados, sem cimentação e submetidos ao estado de tensão de simetria axial. Neste ponto será estudado o mesmo tipo de solo, só que submetido a um estado de tensão-deformação genérico.

Quando se fala em estado de tensão-deformação genérico, refere-se ao estado compreendido pelos tensores de tensões efetivas, deformações específicas e velocidades de deformação específica, respectivamente dados por  $[\sigma]$ ,  $[\varepsilon]$  e  $[\dot{\varepsilon}]$ , admitindo que as direções dos planos principais de tensões, as direções das deformações e velocidades de deformações principais não necessariamente coincidam. Esta condição pode ocorrer, considerando as hipóteses de isotropia do material e estado inicial geostático de tensões, ao se aplicar um carregamento genérico no maciço que cause uma rotação nas direções das tensões principais dos pontos no seu interior.

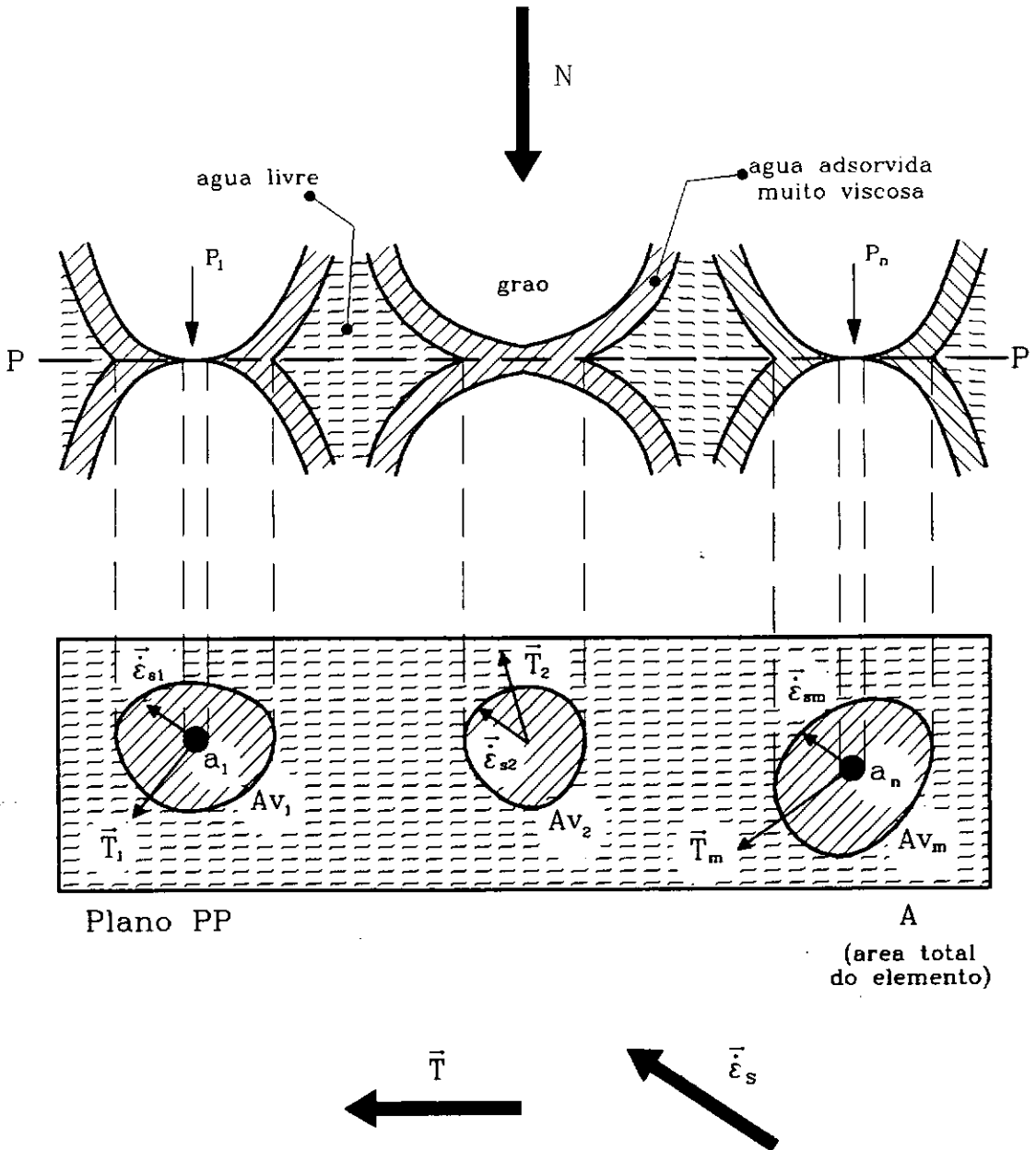
Sem se preocupar em repetir o que já foi dito no Capítulo II, o desenvolvimento desta análise começa adotando para o solo em estudo a concepção de Terzaghi (1941) a respeito das argilas saturadas. Sendo assim, o solo é composto por grãos sólidos envoltos por uma película de água adsorvida sólida fortemente aderida aos grãos. À medida que se afasta do grão, a viscosidade da água adsorvida diminui até uma determinada distância onde as propriedades da água adsorvida são de água comum.

Seja o plano imaginário PP na Figura V.1, que secciona a massa de solo. Este plano passa por pontos de contato sólido-sólido, por regiões de água viscosa e água comum e também cortando grãos sólidos, que neste caso se considera que o plano contorna os grãos passando pelos pontos de contato sólido-sólido.

Observa-se na Figura V.1 que , ao contrário do que se considerou na Figura II.10 do Capítulo II, a resultante das forças tangenciais  $\bar{T}$  e o vetor velocidade de deformação específica cisalhante  $\bar{\dot{\varepsilon}}_s$  (que no caso é a velocidade do conjunto) na seção considerada têm direções diferentes e são dados por

$$\bar{T} = \sum_1^m \bar{T}_i \quad (V.1)$$

$$\bar{\dot{\varepsilon}}_s = \bar{\dot{\varepsilon}}_{s_i} \quad (V.2)$$



**Figura V.1 - Equilíbrio na seção do elemento de solo de área  $A$**

Para se escrever as equações de equilíbrio, tem-se que a área  $A$  é a área total do elemento considerado,  $a_i$  a área de contato sólido-sólido de ordem  $i$  e  $Av_i$  a área de contato na água de alta viscosidade de ordem  $i$ .

O equilíbrio na direção normal se dá de maneira análoga ao visto no Capítulo II, onde

$$N = \sum_i P_i + u \cdot \left( A - \sum_i a_i \right) \quad (V.3)$$

Dividindo-se os termos de (V.3) por  $A$ , e admitindo que  $\sum_1^n a_i$  é desprezível em relação a  $A$ , chega-se a

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\sum_1^n P_i}{A} + u \quad (\text{V.4})$$

ou

$$\sigma = \sigma' + u \quad (\text{V.5})$$

onde  $\sigma$  é a tensão normal total e  $\sigma'$  a tensão normal efetiva.

O equilíbrio na direção tangencial se escreve levando-se em consideração não somente a resistência por atrito mobilizada como também a resistência viscosa mobilizada na água adsorvida líquida muito viscosa. Assim,

$$\bar{T} = \bar{T}_f + \bar{T}_v \quad (\text{V.6})$$

onde  $\bar{T}$  é a resultante das forças cisalhantes em um dado plano do elemento de solo considerado,  $\bar{T}_f$  a resultante das forças cisalhantes de resistência por atrito mobilizadas no dado plano e  $\bar{T}_v$  a resultante das forças cisalhantes de resistência por viscosidade.

A resultante das forças cisalhantes  $\bar{T}$  é função do tensor de tensões do elemento considerado e do plano seccionante adotado. Sendo assim é também função do equilíbrio externo de tensões em todo maciço de solo e de suas condições de contorno.

A resultante das forças cisalhantes de resistência por viscosidade  $\bar{T}_v$  é dada pela Lei da Viscosidade de Newton, que pode ser escrita como a soma vetorial:

$$\bar{T}_v = \sum_1^m \int_{Av_i} \mu \cdot \bar{\dot{\epsilon}}_{s_i} \cdot dAv_i \quad (\text{V.7})$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade da água adsorvida e  $\bar{\dot{\epsilon}}_{s_i}$  as velocidades com que são distorcidos os elementos de água altamente viscosa de ordem  $i$ .

Conforme foi visto no Capítulo II, os contatos fluido viscoso-sólido se deslocam com a mesma velocidade, que no caso é a velocidade do conjunto. Assim, o vetor velocidade de deformação específica cisalhante  $\bar{\dot{\epsilon}}_s$  pode ser considerado constante em toda seção ( $\bar{\dot{\epsilon}}_{s_i} = \bar{\dot{\epsilon}}_s$ ); logo

$$\bar{T}_v = \bar{\epsilon}_s \cdot \sum_1^m \int_{Av_i} \mu \cdot dAv_i \quad (V.8)$$

Conforme também visto no Capítulo II, o valor de  $\mu$  deve variar ao longo dos "contatos" na água altamente viscosa, pois se quanto mais próxima a partícula de água estiver do grão maior será a atração entre ambos, então é de se esperar que o valor da viscosidade da água adsorvida  $\mu$  seja função da distância da partícula d'água ao grão, conforme foi ilustrado na Figura II.11.

Tomando o valor médio de  $\mu$  sobre todas as áreas  $Av_i$ , pode-se escrever

$$\sum_1^m \int_{Av_i} \mu \cdot dAv_i = \bar{\mu} \cdot \sum_1^m Av_i \quad (V.9)$$

e assim

$$\bar{T}_v = \left( \bar{\mu} \cdot \sum_1^m Av_i \right) \cdot \bar{\epsilon}_s \quad (V.10)$$

que substituindo em (V.6) e dividindo-se pela área total  $A$  tem-se

$$\frac{\bar{T}}{A} = \frac{\bar{T}_f}{A} + \frac{\left( \bar{\mu} \cdot \sum_1^m Av_i \right)}{A} \cdot \bar{\epsilon}_s \quad (V.11)$$

Por definição o membro esquerdo de (V.11) é a tensão cisalhante

aplicada e, além disso, o termo  $\frac{\sum_1^m Av_i}{A}$  para um determinado solo é função apenas do índice de vazios; logo

$$\bar{\mu} \cdot \frac{\sum_1^m Av_i}{A} = \bar{\mu} \cdot f(e) = \eta(e) \quad (V.12)$$

e, desta forma, a equação (V.11) é reescrita como

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{T}}{A} = \frac{\bar{T}_f}{\frac{A}{\bar{\tau}_f}} + \overbrace{\eta(e) \cdot \bar{\epsilon}_s}^{\bar{\tau}_v} \quad (V.13)$$

ou

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_f + \bar{\tau}_v \quad (V.14)$$

onde  $\bar{\tau}$  é o vetor tensão cisalhante aplicada na seção,  $\bar{\tau}_f$  o vetor tensão cisalhante de resistência mobilizada por atrito e  $\bar{\tau}_v$  o vetor tensão cisalhante

de resistência mobilizada por viscosidade. A Figura V.2 ilustra o equilíbrio das tensões tangenciais  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\tau}_f$  e  $\vec{\tau}_v$  na seção considerada.

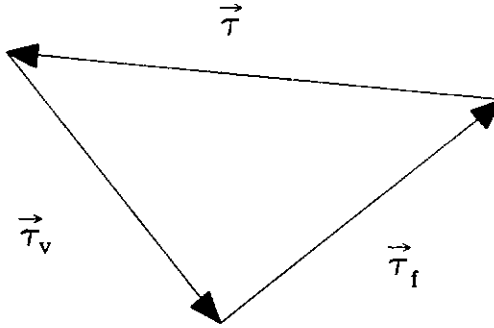


Figura V.2 - Equilíbrio das tensões na direção tangencial do plano PP

O módulo de  $\vec{\tau}_f$  (sendo  $\|\vec{\tau}_f\| = \tau_f$ ) pode ser obtido por

$$\tau_f = \frac{f \cdot \sum_1^n \lambda_i \cdot P_i}{A} \quad (\text{V.15})$$

onde  $\lambda_i$  é a parcela por atrito mobilizada no contato sólido-sólido de ordem  $i$  e  $f$  o coeficiente de atrito sólido-sólido, que pode ser escrito, conforme visto no Capítulo II, por

$$f = \tan \phi \quad (\text{V.16})$$

sendo  $\phi$  o ângulo de atrito interno do solo. Chamando agora de  $\bar{\lambda}$  o coeficiente que fornece a parcela mobilizada da resistência disponível por atrito, dada por

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_1^n \lambda_i \cdot P_i}{\sum_1^n P_i} = \frac{\tan \phi_{mob}}{\tan \phi} \quad (\text{V.17})$$

então (V.15) pode ser escrita como

$$\tau_f = \frac{\tan \phi_{mob}}{\tan \phi} \cdot \tan \phi \cdot \frac{\sum_1^n P_i}{A} = \sigma' \cdot \tan \phi_{mob} \quad (\text{V.18})$$

Assim, resumindo, para um plano qualquer passando em um ponto no interior do maciço de solo tem-se

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_v \quad (\text{V.19})$$

onde

$$\vec{\tau}_v = \eta(e) \cdot \vec{\dot{\epsilon}}_s \quad (V.20)$$

e

$$\tau_f = \sigma \cdot \tan \phi_{mob} \quad (V.21)$$

sendo  $\vec{\tau}$  e  $\sigma$  funções do tensor tensões efetivas [ $\sigma$ ] e do plano considerado e  $\vec{\dot{\epsilon}}_s$  função do tensor de velocidades de deformação específica [ $\dot{\epsilon}$ ] e do plano considerado.

Desta forma, pode-se reenunciar o Princípio das Tensões Efetivas Expandido (PTEE) com uma mudança na tradução matemática de sua 1ª Parte. Segue-se seu enunciado.

**1ª Parte do PTEE:** “ Em qualquer plano de um elemento de solo saturado no qual estejam atuando a tensão normal  $\sigma$  e a tensão cisalhante  $\vec{\tau}$  estarão atuando internamente: como reação à  $\sigma$  a soma ( $\sigma+u$ ) sendo  $\sigma$  a tensão normal efetiva e  $u$  a poro-pressão; e como reação à  $\vec{\tau}$  a soma (vetorial) das resistências por atrito e por viscosidade.”

Sua tradução matemática é

$$\sigma = \sigma + u \quad (V.22)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_v \quad (V.23)$$

onde

$$\vec{\tau}_v = \eta(e) \cdot \vec{\dot{\epsilon}}_s \quad (V.24)$$

$$\tau_f = \sigma \cdot \tan \phi_{mob} \quad (V.25)$$

Observa-se que o enunciado da 1ª Parte do PTEE tem seu sentido alterado uma vez que a soma das tensões cisalhantes agora é vetorial, e não escalar como antes.

**2ª Parte do PTEE:** “ Toda vez que houver variação da parcela de atrito mobilizado haverá deformações cisalhantes e reciprocamente toda vez que houver deformações cisalhantes haverá variação da parcela de atrito mobilizado (casos não-drenados).”

## V.2.2 - Generalização do Conceito de Ângulo de Atrito Mobilizado e Estabelecimento das Relações Constitutivas do Material

Convém agora lembrar duas definições feitas na Seção II.3.5 do Capítulo II que, conforme colocou o presente autor, são gerais, independem se o estado do solo é de simetria axial de tensão e deformação ou não. Ambas se originam da equação (V.25) e são reescritas abaixo

**Definição:** " Define-se por ângulo de atrito mobilizado e denota-se por  $\phi_{\text{mob}}$  o ângulo de obliquidade máxima tal que

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{\text{max}} \quad (\text{V.26})$$

sendo  $\tau_f$  a tensão cisalhante de atrito e  $\sigma'$  a tensão normal efetiva nos planos de obliquidade máxima"

**Definição:** " Chama-se de ângulo de atrito básico e denota-se por  $\phi_b$  ao ângulo de obliquidade máxima limite tal que

$$\tan \phi_b = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{\text{max}} \quad (\text{V.27})$$

sendo  $\tau_f$  e  $\sigma'$  respectivamente a tensão cisalhante de atrito e a tensão normal efetiva atuantes no plano de ruptura na ruptura."

No caso da simetria axial de tensão e deformação, para se encontrar o ângulo  $\phi_{\text{mob}}$  (ou o  $\phi_b$ ) e seu plano correspondente foi uma tarefa relativamente fácil, uma vez que as expressões de  $\tau_f$  e  $\sigma'$  eram conhecidas, sendo dadas por

$$\sigma' = \frac{(\sigma_1' + \sigma_3')}{2} + \frac{(\sigma_1' - \sigma_3')}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (\text{V.28})$$

e

$$\tau_f = \left[ \left( \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \right) - V \right] \cdot \sin 2\alpha \quad (\text{V.29})$$

onde  $V$  é a ordenada máxima da Elipse de Taylor (ver Seção II.3.3 no Capítulo II) e  $\alpha$  o ângulo entre a direção da normal ao plano considerado e a direção de  $\sigma_1'$ .

Assim, o problema de resolver a equação (V.26) (ou a equação (V.27)) se resumiu a um problema de otimização de apenas uma variável, sendo esta o

ângulo  $\alpha$ , que no caso pôde-se resolvê-lo algebricamente simplesmente fazendo

$$\frac{d\left(\frac{\tau_f}{\sigma'}\right)}{d\alpha} = 0 \quad (\text{V.30})$$

obtendo assim o plano cuja normal faz um ângulo  $\alpha$  com a direção de  $\sigma_1'$  tal que

$$\cos 2\alpha = -\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + \sigma_3'} \quad (\text{V.31})$$

e conseqüentemente chegando-se à expressão do ângulo de atrito mobilizado, dada por

$$\tan \phi_{\text{mob}} = \frac{\left(\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} - V\right)}{\sqrt{\sigma_1' \sigma_3'}} \quad (\text{V.32})$$

Num estado de tensão-deformação genérico, ou seja, no caso multiaxial, o estado de tensão do solo não é mais representado simplesmente pelo círculo de Mohr das tensões nem o estado de deformação do solo representado pelo círculo de Mohr das deformações. Também o Estado de Viscosidade Mobilizada e o Estado de Atrito Mobilizado não são mais representados pelas respectivas elipses de Taylor e Coulomb.

Seja, então, o estado de tensão efetiva num ponto no interior do maciço dado pelo tensor de segunda ordem  $[\sigma']$  chamado de tensor de tensões efetivas, que de acordo com o PTEE, deve ser definido como

$$[\sigma'] = [\sigma] - u \cdot [I] \quad (\text{V.33})$$

onde  $[\sigma]$  é o tensor de tensões totais,  $u$  é a poro-pressão e  $[I]$  a matriz de identidade. O estado de velocidade de deformação específica neste mesmo ponto é dado pelo tensor de segunda ordem  $[\dot{\epsilon}]$ , chamado de tensor de velocidades de deformação específica.

Imaginando agora um plano cortando o maciço e passando pelo ponto considerado, sendo este plano caracterizado pela sua normal unitária  $\bar{n}$  ( $\|\bar{n}\| = 1$ ) e utilizando a notação tensorial para tensores e vetores, onde neste caso o vetor  $\bar{n}$  é representado pela matriz coluna  $\{n\}$ , então a tensão normal

efetiva  $\sigma_n'$  e o vetor tensão cisalhante  $\{\tau\}^n$  neste ponto para o dado plano de normal unitária  $\{n\}$  serão

$$\sigma_n' = \{n\}^T \cdot [\sigma']^T \cdot \{n\} \quad (V.34)$$

e

$$\{\tau\}^n = [\sigma'] \cdot \{n\} - \sigma_n' \cdot \{n\} = ([\sigma'] - \sigma_n' [I]) \cdot \{n\} \quad (V.35)$$

Por outro lado, a velocidade de deformação específica longitudinal  $\dot{\epsilon}_{L_n}$  e o vetor velocidade de deformação específica cisalhante  $\{\dot{\epsilon}_s\}^n$  da fibra passando pelo ponto considerado e de direção dada pelo vetor unitário  $\{n\}$  são

$$\dot{\epsilon}_{L_n} = \{n\}^T \cdot [\dot{\epsilon}]^T \cdot \{n\} \quad (V.36)$$

e

$$\{\dot{\epsilon}_s\}^n = [\dot{\epsilon}] \cdot \{n\} - \dot{\epsilon}_{L_n} \cdot \{n\} = ([\dot{\epsilon}] - \dot{\epsilon}_{L_n} [I]) \cdot \{n\} \quad (V.37)$$

De acordo com a equação (V.23) desenvolvida na seção anterior,

$$\{\tau\}^n = \{\tau_f\}^n + \{\tau_v\}^n \quad (V.38)$$

onde  $\{\tau_f\}^n$  é a tensão cisalhante de resistência por atrito e  $\{\tau_v\}^n$  é a tensão cisalhante de resistência por viscosidade para a seção caracterizada pela normal unitária  $\{n\}$ .

Sendo  $\{\tau_v\}^n$  dada pela equação (V.24), ou seja,

$$\{\tau_v\}^n = \eta \cdot \{\dot{\epsilon}_s\}^n \quad (V.39)$$

então, a substituição de (V.39) em (V.38) conduz a

$$\{\tau_f\}^n = \{\tau\}^n - \eta \cdot \{\dot{\epsilon}_s\}^n \quad (V.40)$$

e assim

$$\{\tau_f\}^n = ([\sigma'] - \sigma_n' [I]) \cdot \{n\} - \eta \cdot ([\dot{\epsilon}] - \dot{\epsilon}_{L_n} [I]) \cdot \{n\} \quad (V.41)$$

ou

$$\{\tau_f\}^n = \left[ ([\sigma'] - \eta \cdot [\dot{\epsilon}]) - (\sigma_n' - \eta \cdot \dot{\epsilon}_{L_n}) \cdot [I] \right] \cdot \{n\} \quad (V.42)$$

O termo  $\eta$ , conforme já visto anteriormente, para uma dada velocidade de deformação cisalhante é função exclusiva do índice de vazios ou da tensão de adensamento, ou seja, na realidade  $\eta = \eta(\dot{\epsilon}_i, p_e')$ , onde a velocidade  $\dot{\epsilon}_i$  aqui

considerada será aquela da fibra a  $45^\circ$  em relação às fibras de velocidades de deformação específica principais maior e menor, dada por

$$\dot{\epsilon}_t = \dot{\epsilon}_{s_{\max}} = \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2} \quad (\text{V.43})$$

que corresponde à fibra de velocidade de deformação específica cisalhante máxima no ponto considerado. As velocidades de deformações principais  $\dot{\epsilon}_1$  e  $\dot{\epsilon}_3$  são obtidas a partir do tensor  $[\dot{\epsilon}]$ .

Baseando-se nos conceitos de normalização e homotetia dos caminhos de tensões efetivas dos ensaios triaxiais convencionais, introduzidos Capítulo II, extrapola-se para o caso de tensão-deformação multiaxial a expressão (II.71), reescrita como

$$\eta = \frac{C_o(\dot{\epsilon}_t)}{\dot{\epsilon}_t} \cdot p_o' \quad (\text{V.44})$$

onde o  $\dot{\epsilon}_t$  é obtido por (V.43), a função propriedade do solo  $C_o(\dot{\epsilon}_t)$  é conhecida e a tensão de adensamento  $p_o'$  para o estado multiaxial de tensão, por coerência aos demais parâmetros do modelo, trata-se da tensão normal efetiva atuante no plano a  $45^\circ$  em relação aos planos das tensões principais maior e menor, dada por

$$p_o' = \frac{\sigma_{o1}' + \sigma_{o3}'}{2} \quad (\text{V.45})$$

sendo as tensões efetivas principais  $\sigma_{o1}'$  e  $\sigma_{o3}'$  obtidas a partir do tensor de tensões efetivas iniciais  $[\sigma_o']$ , correspondendo ao estado de tensão antes da aplicação do carregamento.

Adotando para a função  $C_o(\dot{\epsilon}_t)$  a aproximação da função de potência já vista nos capítulos anteriores

$$C_o(\dot{\epsilon}_t) = \alpha \cdot (\dot{\epsilon}_t)^\beta \quad (\text{V.46})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do solo, o  $\eta$  será dado por

$$\eta = \alpha \cdot (\dot{\epsilon}_t)^{\beta-1} \cdot p_o' \quad (\text{V.47})$$

e assim o problema para obtenção o  $\phi_{\text{mob}}$  e seu plano correspondente para um estado de tensão-deformação genérico (multiaxial) já pode ser totalmente formulado.

Trata-se de um problema de otimização, onde a função objetivo a ser

maximizada é a razão  $\frac{\|\{\tau_f\}^n\|}{\sigma_n'}$ , com  $\sigma_n'$  e  $\|\{\tau_f\}^n\|$  obtidos através das respectivas equações (V.34) e (V.42), e as variáveis de otimização são as componentes do vetor  $\{n\}$  submetidas à restrição  $\|\{n\}\| = 1$ , já que trata-se de um vetor unitário.

Portanto, dados os tensores  $[\sigma']$  e  $[\dot{\epsilon}]$  atuando em um ponto do maciço considerado, os parâmetros do solo  $\alpha$  e  $\beta$  e a tensão de adensamento  $p_e'$ , o ângulo  $\phi_{mob}$  e seu correspondente plano podem ser obtidos através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \frac{\|\{\tau_f\}^n\|}{\sigma_n'} && \text{(V.48)} \\ & \{n\} && && \\ & \text{restrito a} && \|\{n\}\| = 1 && \end{aligned}$$

onde

$$\{\tau_f\}^n = \left[ ([\sigma'] - \eta \cdot [\dot{\epsilon}]) - (\sigma_n' - \eta \cdot \dot{\epsilon}_{L_n}) \cdot [I] \right] \cdot \{n\} \quad \text{(V.49)}$$

$$\sigma_n' = \{n\}^T \cdot [\sigma']^T \cdot \{n\} \quad \text{(V.50)}$$

$$\dot{\epsilon}_{L_n} = \{n\}^T \cdot [\dot{\epsilon}]^T \cdot \{n\} \quad \text{(V.51)}$$

$$\eta = \alpha \cdot (\dot{\epsilon}_t)^{\beta-1} \cdot p_e' \quad \text{(V.52)}$$

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2} \quad \text{(V.53)}$$

que resolvido, fornecerá o  $\tan \phi_{mob} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{max}$  e seu plano correspondente, caracterizado pela normal unitária  $\{n_{mob}\}$ .

Ao implementar este problema de otimização em um programa computacional, verificou-se que entrando com os tensores  $[\sigma']$  e  $[\dot{\epsilon}]$  relativos ao estado de simetria axial, o ângulo de atrito mobilizado, dado por  $\tan \phi_{mob} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{max}$ , e seu correspondente plano, dado pela normal unitária  $\{n_{mob}\}$ , estavam de acordo com os obtidos através das respectivas equações

(V.32) e (V.31) desenvolvidas por Martins (1992), conforme já era de se esperar.

As equações (V.48) a (V.53) que formulam o problema de otimização acima compõem, juntamente com a condição de isotropia, parte das relações constitutivas do material que serão utilizadas nas próximas seções para a implementação do modelo apresentado por Martins (1992) ao MEF.

Para completar o conjunto de equações que definem as relações constitutivas do solo em estudo deve-se extrapolar duas funções propriedades do solo, inicialmente definidas para caso de simetria axial, para o caso genérico multiaxial de tensão e deformação, conforme foi feito com a função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$ . São elas a poro-pressão de cisalhamento normalizada pela tensão de adensamento em função da deformação específica cisalhante,  $\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t)$ , e a tangente do ângulo de atrito mobilizado em função também da deformação específica cisalhante,  $\tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_t)$ .

A deformação específica  $\epsilon_t$ , aqui considerada, analogamente à velocidade de deformação específica  $\dot{\epsilon}_t$ , redefinida nesta seção, é aquela da fibra a  $45^\circ$  em relação às fibras de deformações específicas principais maior e menor, dada por

$$\epsilon_t = \epsilon_{s_{\text{max}}} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \quad (\text{V.54})$$

que corresponde à fibra de máxima deformação específica cisalhante no ponto considerado, sendo as deformações principais  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_3$  obtidas a partir do tensor de deformações  $[\epsilon]$ .

A função propriedade do solo  $\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t)$  pode ser obtida, conforme visto primeiramente na Seção III.6, a partir de sua aproximação à elipse, sendo dada por

$$\frac{u_s}{p_e'}(\epsilon_t) = \begin{cases} \frac{u_{sf}}{p_e'} \cdot \frac{1}{\epsilon_{cf}} \cdot \sqrt{\epsilon_t \cdot (2\epsilon_{cf} - \epsilon_t)} & \text{para } \epsilon_t < \epsilon_{cf} \\ \frac{u_{sf}}{p_e'} & \text{para } \epsilon_t \geq \epsilon_{cf} \end{cases} \quad (\text{V.55})$$

onde  $\frac{u_{sf}}{p_c'}$  e  $\epsilon_{cr}$  são parâmetros do solo.

A função  $\tan\phi_{mob}(\epsilon_t)$  pode ser obtida pela mesma aproximação à elipse adotada para  $\frac{u_s}{p_c'}(\epsilon_t)$ , utilizando os pontos da curva experimental  $\tan\phi_{mob} \times \epsilon_t$ , que para a argila da Baía de San Francisco, Martins (1992) constatou que realmente tratava-se de uma curva única.

Na ruptura, ocorrendo quando  $\epsilon_t \geq \epsilon_{cr}$ , a função  $\tan\phi_{mob}(\epsilon_t)$  assume o valor constante  $\tan\phi_b$ , onde  $\phi_b$  é o ângulo de atrito básico do solo. Assim, a expressão de  $\tan\phi_{mob}(\epsilon_t)$  considerando a aproximação à elipse seria

$$\tan\phi_{mob}(\epsilon_t) = \begin{cases} \frac{\tan\phi_b}{\epsilon_{cr}} \cdot \sqrt{\epsilon_t \cdot (2\epsilon_{cr} - \epsilon_t)} & \text{para } \epsilon_t < \epsilon_{cr} \\ \tan\phi_b & \text{para } \epsilon_t \geq \epsilon_{cr} \end{cases} \quad (V.56)$$

Alternativamente, conforme foi feito nos capítulos III e IV, a função  $\tan\phi_{mob}(\epsilon_t)$  pode ser obtida a partir da equação

$$\tan\phi_{mob}(\epsilon_t) = \frac{\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t)}{\sqrt{\left(\frac{p_b'}{p_c'}(\epsilon_t)\right)^2 - \left(\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t)\right)^2}} \quad (V.57)$$

onde

$$\frac{p_b'}{p_c'}(\epsilon_t) = 1 + \frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t) - \frac{u_s}{p_c'}(\epsilon_t) \quad (V.58)$$

e a função  $\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t)$ , também propriedade do solo, é obtida pela mesma

aproximação à elipse adotada para as funções  $\frac{u_s}{p_c'}(\epsilon_t)$  e  $\tan\phi_{mob}(\epsilon_t)$  vistas aqui,

onde através dos parâmetros do solo  $\epsilon_{cr}$  e  $\frac{q_{bf}'}{p_c'}$  tem-se sua expressão a seguir

$$\frac{q_b'}{p_c'}(\epsilon_t) = \begin{cases} \frac{q_{bf}'}{p_c'} \cdot \frac{1}{\epsilon_{cr}} \cdot \sqrt{\epsilon_t \cdot (2\epsilon_{cr} - \epsilon_t)} & \text{para } \epsilon_t < \epsilon_{cr} \\ \frac{q_{bf}'}{p_c'} & \text{para } \epsilon_t \geq \epsilon_{cr} \end{cases} \quad (V.59)$$

Mantendo a coerência com os capítulos III e IV, adotar-se-á na presente implementação do modelo as aproximações à elipse das funções propriedades

do solo  $\frac{u_s}{p_e}(\epsilon_t)$  e  $\frac{q_b}{p_e}(\epsilon_t)$ , onde a função  $\tan\phi_{mob}(\epsilon_t)$  será obtida a partir de (V.57). Assim, os parâmetros do solo aqui considerados continuam sendo  $\alpha$  e  $\beta$  para a função  $C_0(\epsilon_t)$  e  $\frac{u_{sf}}{p_e}$ ,  $\frac{q_{bf}}{p_e}$ , e  $\epsilon_{cr}$  para as funções  $\frac{u_s}{p_e}(\epsilon_t)$  e  $\frac{q_b}{p_e}(\epsilon_t)$ . O também parâmetro do solo  $\phi_b$  pode ser calculado através de (V.57) fazendo-se  $\epsilon_t \geq \epsilon_{cr}$ .

### V.3 - IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

#### V.3.1 - Alternativas de Abordagem

Para utilizar o modelo proposto por Martins (1992) através do Método dos Elementos Finitos (MEF), dentre as várias alternativas de se abordar o problema, deve-se escolher aquela que melhor atenda às características do material a ser modelado. Assim, neste momento é conveniente discutir as características do solo em questão, que conforme foi visto no Capítulo II, trata-se de uma argila saturada, normalmente adensada e sem cimentação.

O solo é composto por um conjunto de grãos sólidos envoltos por uma película de água sólida fortemente aderida aos grãos que, à medida que se afasta do grão sua viscosidade diminui até uma distância em que as propriedades da água adsorvida são as da água comum (Terzaghi, 1941).

Segundo esta visão, as ligações ou "contatos" grão a grão se fazem através da água adsorvida, que podem se dar pela água sólida ("solid bonds") ou pelo filme viscoso ("film bonds") e ambos os tipos de "contatos" transmitem tensões efetivas. Esta é a razão pela qual o solo em estudo é um material de natureza friccional (devido ao contato sólido-sólido) e de natureza viscosa (devido ao filme viscoso).

Comumente se classifica os materiais em função dos tipos de deformações que os mesmos apresentam quando solicitados. Alguns materiais apresentam comportamentos independentes do tempo, podendo ser idealizados como perfeitamente elásticos, perfeitamente plásticos ou elasto-plásticos (Ramos, 1995). As deformações elásticas surgem logo após a aplicação das cargas, permanecendo constantes até que, com a remoção do carregamento, desaparecem instantaneamente. Se com a remoção instantânea das cargas permanecer um resíduo de deformação, estas deformações permanentes são as deformações plásticas. As deformações plásticas, assim como as elásticas, são definidas como independentes do tempo.

Deformações dependentes do tempo são chamadas de deformações viscosas, que podem ser recuperáveis ou irre recuperáveis. Logo, é de se esperar que o material em estudo no presente trabalho não apresente comportamento elástico nem comportamento plástico instantâneos quando solicitados, ou seja, imediatamente após a aplicação de cargas não há deformações. Na realidade, conforme já comentado anteriormente, há um salto no estado de tensão com a aplicação instantânea de cargas, suscitando um estado de velocidade de deformação.

A respeito do comportamento do solo aqui considerado em relação às deformações recuperáveis, devido ao fato do modelo no seu atual estágio de desenvolvimento apenas abordar as argilas normalmente adensadas, solicitações em que há remoção de cargas (efeito de sobre-adensamento) serão desconsideradas. Assim, todas as deformações aqui consideradas são dependentes do tempo, ou seja, viscosas, e por simplificação irre recuperáveis.

Para possibilitar a aplicação do PTEE, base teórica do modelo em questão, as solicitações no solo em estudo devem ser sob condição não-drenada e realizadas a pequenas velocidades e acelerações praticamente nulas (carregamento "quasi-estático"), negligenciando-se assim as forças dinâmicas.

Sendo os grão que compõem o solo e a água que preenche seus vazios considerados incompressíveis, então o material em questão é incompressível,

uma vez que quando carregado a água livre não pode sair dos vazios do solo devido à condição não-drenada imposta.

Resumindo as características essenciais do solo em questão, trata-se de um material que não admite deformações instantâneas, apenas viscosas (dependentes do tempo), só se considera carregamentos “quasi-estático” e, por fim, é um material incompressível.

Analisando tais características do material em estudo, conclui-se que o problema de sua modelagem pode ser enquadrado no domínio da Mecânica dos Fluidos, mais especificamente no caso de fluxo viscoso, totalmente incompressível e lento (creeping), também conhecido como Problema de Stokes. Este problema se encontra descrito em Zienkiewicz e Taylor (1991), Volume II, Capítulo 13.

No problema de fluxo viscoso, lento e incompressível aqui considerado, todo processo é isotérmico e a variação da densidade do “fluido” é negligenciada, sendo todas as forças dinâmicas (devidas a acelerações) também negligenciadas. As deformações existentes são dependentes do tempo (viscosas) e irreversíveis após a remoção das cargas. Verifica-se que todas estas características estão em concordância com as propriedades admitidas para o material em questão.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (1991), este tipo de abordagem aplicada ao MEF foi utilizada nos anos 70 em aplicações a fluxos realizados a baixas velocidades ou fluidos altamente viscosos, tais como óleos, sangue em aplicações biomecânicas, etc. Com o subsequente desenvolvimento desses procedimentos, foram estendidas as aplicações a análises que requeriam uma solução transiente (propriedades dos materiais ou condições contorno do corpo variáveis com o tempo), tais como fluxos em fluidos não-newtonianos (viscosidade função de outras variáveis de estado, como no caso dos polímeros e metais quentes) ou o problema de conformação de metais. Os referidos autores argumentam que, no problema de conformação de metais, mesmo sendo difícil visualizar aço e alumínio comportando-se como fluidos, deve-se chamar atenção que durante o processo de conformação as deformações elásticas nestes materiais são da ordem de  $10^{-6}$  enquanto as

deformações viscosas passam da unidade, sendo justificável negligenciar as deformações elásticas frente às deformações viscosas.

Na próxima seção introduzir-se-á as equações que regem o fenômeno do fluxo viscoso, lento e incompressível, e verificar-se-á que tais equações são análogas às da elasticidade incompressível.

### V.3.2 - As Equações que Regem o Problema de Stokes

O conjunto de equações que governam a Mecânica dos Fluidos Geral é chamado de Equações de Navier-Stokes, que se deriva das equações de tensões nos fluidos, conservação de massa, conservação do momento e conservação de energia (Zienkiewicz e Taylor, 1991).

Lembrando que na Mecânica dos Fluidos toda análise se baseia nos movimentos, assim a variável independente essencial é a velocidade  $\{\dot{u}\}$ , ou, adotando a notação indicial (com os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  referidos como  $x_i$ ,  $i = 1,2,3$ ):

$$\dot{u}_i \quad (V.60)$$

Isto substitui a variável deslocamento que era de principal importância na Mecânica dos Sólidos. Logo, as velocidades de deformação são definidas de maneira análoga às deformações infinitesimais

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}}{2} \quad (V.61)$$

Levando em conta agora as simplificações introduzidas pelo caso particular de fluxo viscoso, incompressível e lento e considerando que índices repetidos na notação indicial significa soma, as Equações de Navier-Stokes se reduzem a

$$\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} \equiv \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (V.62)$$

e

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial \tau_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{1,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{1,3}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho f_1 &= 0 \\
 \left( \frac{\partial \tau_{2,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{2,3}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho f_2 &= 0 \\
 \left( \frac{\partial \tau_{3,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{3,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3,3}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho f_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{V.63}$$

onde os termos  $\rho f_i$  são as forças de corpo e  $\tau_{i,j}$  é a tensão desviadora, dada por

$$\tau_{i,j} = \sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \cdot \frac{\sigma_{i,i}}{3} \tag{V.64}$$

sendo  $\sigma_{i,j}$  as componentes do tensor de tensões totais  $[\sigma]$  no elemento infinitesimal de solo considerado,  $\delta_{i,j}$  o delta de Kroneker e finalmente o termo  $p$  é a tensão média (octaédrica) agindo no elemento infinitesimal de solo, expressa por

$$p = \frac{\sigma_{i,i}}{3} \tag{V.65}$$

As equações acima são completadas pelas relações constitutivas do material. No caso de um fluido linear (newtoniano) e isotrópico, a relação que liga a tensão desviadora  $\tau_{i,j}$  com a velocidade de deformação desviadora é

$$\tau_{i,j} = 2\mu \cdot \left( \dot{\epsilon}_{i,j} - \delta_{i,j} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{i,i}}{3} \right) \tag{V.66}$$

onde o coeficiente  $\mu$  é conhecido como coeficiente de viscosidade cisalhante ou simplesmente coeficiente de viscosidade.

Assim, as equações (V.61) a (V.66) definem o Problema de Stokes (um caso particular do Problema de Navier-Stokes) e é análogo ao problema de elasticidade incompressível, tomando deslocamentos por velocidades e módulo cisalhante  $G$  por coeficiente de viscosidade  $\mu$ .

É claro que o solo estudado no modelo inicialmente desenvolvido por Martins (1992) não é um fluido newtoniano. Porém, a equação (V.66) é de fundamental importância por introduzir a condição de isotropia para o material, hipótese esta feita no início deste capítulo. É importante esclarecer também que o valor numérico do coeficiente de viscosidade  $\mu$  não terá nenhum

significado físico para o modelo; na realidade sua função é possibilitar que as equações do fluxo viscoso, lento e incompressível sejam satisfeitas juntamente com as relações constitutivas do material isotrópico em questão, conforme se verá mais adiante.

Finalizando esta seção, pode-se também escrever as equações do Problema de Stokes utilizando a notação vetorial para tensões e deformações em coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  (com as velocidades  $\dot{u}_i$ ,  $i=1,2,3$  representadas respectivamente por  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  e  $\dot{w}$ ). Desta forma, a equação (V.61) pode ser reescrita como

$$\{\dot{\epsilon}\} = [S] \cdot \{\dot{u}\} \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ 2 \cdot \dot{\epsilon}_{xy} \\ 2 \cdot \dot{\epsilon}_{yz} \\ 2 \cdot \dot{\epsilon}_{zx} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{array} \right\} \quad (\text{V.67})$$

no lugar da equação (V.62) tem-se

$$[m]^T \cdot [S] \cdot \{\dot{u}\} = 0 \quad (\text{V.68})$$

onde o operador  $[m]$  é dado por

$$[m]^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{V.69})$$

As equações (V.63) e (V.66), por sua vez, podem ser reescritas como

$$[S]^T \cdot \left( \mu \cdot \left[ [D_0] - \frac{2}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right] \right) \cdot [S] \cdot \{\dot{u}\} + \nabla p - \rho \{f\} = 0 \quad (\text{V.70})$$

sendo o operador  $[D_0]$  dado por

$$[D_0] = \left[ \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{V.71})$$

e os vetores  $\nabla p$  e  $\{f\}$  dados por

$$\nabla p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (V.72)$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (V.73)$$

### V.3.3 - O Problema da Elasticidade Incompressível e sua Formulação Mista

Nesta seção apresenta-se a Formulação Mista do MEF, indicada por Zienkiewicz e Taylor (1994) como a mais adequada para resolver o problema da elasticidade incompressível, e conseqüentemente seu problema análogo da Mecânica dos Fluidos, o do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes).

Tendo em vista a maior familiarização por parte dos engenheiros geotécnicos ao uso da Mecânica dos Sólidos, ou mais especificamente, da elasticidade na formulação de seus problemas, o presente autor considerou que seria mais didático apresentar a Formulação Mista do MEF aplicada ao problema da elasticidade incompressível. Uma vez resolvido o problema para a elasticidade incompressível, a transposição para o Problema de Stokes é imediata.

A razão pela qual se faz necessária uma formulação especial para o MEF nas aplicações em elasticidade incompressível (ou aproximadamente incompressível) se dá pelo fato da formulação padrão, onde os deslocamentos são as únicas variáveis independentes ("standard displacement formulation"), se apresentar numericamente instável quando o coeficiente de Poisson  $\nu$  se aproxima de 0,5 e sendo incapaz de resolver o problema quando o material se torna totalmente incompressível. Para a simples aproximação linear de

elementos triangulares, quando o material é próximo de incompressível (apresentando um  $\nu > 0,4$ ) verifica-se resultados altamente oscilatórios. A aplicação da formulação mista nestes casos elimina tais dificuldades e é de grande interesse prático em aplicações reais da engenharia, desde a Mecânica dos Solos à Engenharia Aeroespacial (Zienkiewicz e Taylor, 1994).

O principal problema na aplicação da formulação padrão ("standard displacement formulation") aos problemas de incompressibilidade (ou próximos da incompressibilidade) está na determinação da tensão média (octaédrica)  $p$ , que está relacionada com a componente volumétrica da deformação. Por essa razão é conveniente separá-la da tensão total e tratá-la como uma variável independente (Zienkiewicz e Taylor, 1994).

Usando a notação vetorial e as coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a tensão média  $p$ , definida na seção anterior pela equação (V.65), é reescrita:

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\{\sigma\}^T \cdot [m]}{3} \quad (\text{V.74})$$

onde o operador  $[m]$  é o mesmo definido na seção anterior e o vetor de tensões  $\{\sigma\}$  é definido como

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.75})$$

Considerando o comportamento isotrópico, a tensão  $p$  é relacionada à deformação volumétrica  $\epsilon_v$  através do módulo volumétrico do material  $K$ .

Assim

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = [m]^T \cdot \{\epsilon\} \quad (\text{V.76})$$

$$\epsilon_v = \frac{p}{K} \quad (\text{V.77})$$

Para um material incompressível,  $K \rightarrow \infty$  e a deformação volumétrica é simplesmente zero.

O vetor deformação desviatória  $\{\epsilon_d\}$  definido por

$$\{\epsilon_d\} = \{\epsilon\} - \frac{[m] \cdot \epsilon_v}{3} = \left( [I] - \frac{1}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right) \cdot \{\epsilon\} \quad (\text{V.78})$$

é relacionado através da elasticidade isotrópica ao vetor tensão desviatória  $\{\tau\}$  pelo módulo cisalhante  $G$  da seguinte maneira

$$\{\tau\} = \{\sigma\} - [m] \cdot p = G \cdot [D_0] \cdot \{\epsilon_d\} = G \cdot \left( [D_0] - \frac{2}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right) \cdot \{\epsilon\} \quad (\text{V.79})$$

onde o operador  $[D_0]$  foi definido na seção anterior.

As equações acima constituem uma maneira alternativa de estabelecer as relações tensão-deformação da elasticidade isotrópica. O módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , que são os parâmetros elásticos do material utilizados na formulação padrão do MEF, estão relacionados com o módulo cisalhante  $G$  e o módulo volumétrico  $K$  por

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{V.80})$$

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$$

Na forma mista aqui considerada, as variáveis independentes do problema serão os deslocamentos  $\{u\}$  e a tensão média  $p$ .

Seja então o elemento finito ocupando no espaço euclidiano tridimensional o volume  $\Omega$  cuja fronteira é definida pela superfície  $\Gamma$ . As equações de equilíbrio no elemento são escritas usando (V.79), tratando como variáveis independentes o vetor  $\{u\}$  e o escalar  $p$ , como

$$\int_{\Omega} \left\{ \{\delta\epsilon\}^T \cdot \left[ G \cdot \left( [D_0] - \frac{2}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right) \cdot \{\epsilon\} + [m] \cdot p \right] \right\} d\Omega \quad (\text{V.81})$$

$$- \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \cdot \rho \{f\} \cdot d\Omega - \int_{\Gamma} \{\delta u\}^T \cdot \{t\} \cdot d\Gamma = 0$$

sendo  $\rho \{f\}$  o vetor das forças de corpo agindo no volume do elemento e  $\{t\}$  o vetor das forças de superfície atuando na fronteira do mesmo.

Uma condição adicional é imposta originada de (V.77), tomando o problema matematicamente possível de ser solucionado; tal condição é dada por

$$\int_{\Omega} \left\{ \delta p^T \cdot \left[ [m]^T \cdot \{\epsilon\} - \frac{p}{K} \right] \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{V.82})$$

e é claro que  $\{\epsilon\} = [S] \cdot \{u\}$ .

Assim, utilizando funções de interpolação independentes para as variáveis  $\{u\}$  e  $p$  (respectivamente dadas por  $[N_u]$  e  $[N_p]$ ) no elemento finito tais que

$$\{u\} \equiv [N_u] \cdot \{u\}^e, \quad p \equiv [N_p] \cdot \{p\}^e \quad (\text{V.83})$$

se formula a aproximação mista para o elemento finito em questão, pelas equações a seguir

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C]^T & -[V] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u\}^e \\ \{p\}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b_1\} \\ \{b_2\} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.84})$$

onde

$$[A] = \int_{\Omega} \left\{ [B]^T \cdot G \cdot \left( [D_0] - \frac{2}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right) \cdot [B] \right\} d\Omega \quad (\text{V.85})$$

$$[B] = [S] \cdot [N_u] \quad (\text{V.86})$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left\{ [B]^T \cdot [m] \cdot [N_p] \right\} d\Omega \quad (\text{V.87})$$

$$[V] = \int_{\Omega} \left( [N_p]^T \cdot [N_p] \cdot \frac{d\Omega}{K} \right) \quad (\text{V.88})$$

$$\{b_1\} = \int_{\Omega} [N_u]^T \cdot \rho \{f\} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} [N_u]^T \cdot \{t\} \cdot d\Gamma \quad (\text{V.89})$$

$$\{b_2\} = \{0\} \quad (\text{V.90})$$

Observa-se que para situações incompressíveis tem-se  $[V] = [0]$ , uma vez que  $K \rightarrow \infty$ , eliminando os problemas de instabilidade ou singularidade que havia na formulação padrão ("displacement approach") para materiais incompressíveis (ou aproximadamente incompressíveis).

Comparando-se a equação de equilíbrio do elemento finito para o problema da elasticidade incompressível, dada por (V.81), com a equação que rege o problema do fluxo viscoso, lento e incompressível, dada por (V.70), verifica-se que as mesmas são análogas. A analogia entre estes dois fenômenos se dá trocando respectivamente os deslocamentos e o módulo cisalhante  $G$  na elasticidade incompressível pelas velocidades e o coeficiente de viscosidade  $\mu$  no problema do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes).

Dito isto, a Formulação Mista do MEF aplicada ao fenômeno de fluxo viscoso, lento e incompressível é apresentada a seguir. Deve-se notar que neste caso, por se considerar incompressibilidade total, a matriz  $[V]$  da equação (V.88) se anula, assim

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C]^T & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\}^\circ \\ \{p\}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.91})$$

onde

$$[A] = \int_{\Omega} \left\{ [B]^T \cdot \mu \cdot \left( [D_0] - \frac{2}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right) \cdot [B] \right\} d\Omega \quad (\text{V.92})$$

$$[B] = [S] \cdot [N_u] \quad (\text{V.93})$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left\{ [B]^T \cdot [m] \cdot [N_p] \right\} d\Omega \quad (\text{V.94})$$

$$\{b\} = \int_{\Omega} [N_u]^T \cdot \rho \{f\} \cdot d\Omega + \int_T [N_u]^T \cdot \{t\} \cdot d\Gamma \quad (\text{V.95})$$

Deve-se chamar a atenção que para evitar problemas numéricos na resolução do sistema global do MEF, onde são considerados todos os elementos da malha, deve-se adotar um parâmetro de penalidade para o vetor de tensões médias do elemento  $\{p\}^\circ$ , na equação (V.91), de forma que os elementos da matriz do sistema tenham a mesma ordem de grandeza. Este artifício numérico, que estabiliza o sistema evitando que sua matriz se aproxime da singularidade, se encontra discutido em Zienkiewicz e Taylor (1991).

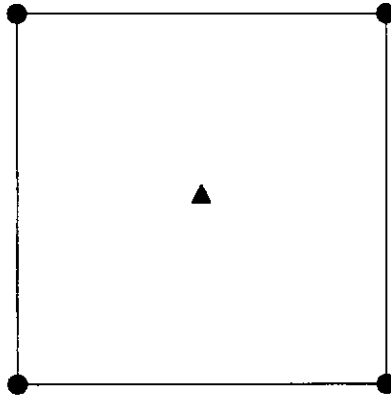
Para finalizar esta seção, apresenta-se o tipo de elemento implementado com a formulação aqui exposta. Trata-se de um elemento bidimensional, retangular de quatro nós, com funções interpolação lineares para as velocidades e funções constantes para as tensões médias (ou seja,  $p$  é constante no elemento). O elemento aqui considerado é esquematicamente mostrado na Figura V.3.

Este elemento apresentou resultados satisfatórios quando submetido a testes de convergência, tendo em vista sua simplicidade. Zienkiewicz e Taylor (1991) apresentam vários outros elementos que atendem à formulação mista de maneira eficiente, melhores que o elemento aqui adotado. Porém, o principal objetivo deste capítulo é a formulação do modelo apresentado por

Martins (1992) para a aplicação do Método dos Elementos Finitos e, por isso, a sofisticação do elemento no momento não é tão importante.

● variáveis  $\dot{u}$

▲ variáveis  $p$



**Figura V.3 - Elemento adotado utilizando a Formulação Mista: aproximações independentes para as variáveis  $\{\dot{u}\}$  e  $p$**

#### **V.4 - FORMULAÇÃO COMPLETA DO PROBLEMA**

Seja um maciço de solo tipicamente sedimentar, cuja superfície é horizontal e sua natureza não varia segundo esta direção, de forma a possibilitar o aparecimento do estado de tensão geostático. Neste caso, os planos horizontais e verticais são principais de tensões e, devido à simetria em relação a qualquer vertical, não há deformações horizontais, sendo a compressão imposta ao maciço por seu peso próprio unidimensional.

A partir de um tempo  $t = t_0$ , este maciço é sujeito a um carregamento composto pelas forças de corpo  $p\{f\}$  e de superfície  $\{t\}$ . Admite-se para o material que compõe o maciço e para o carregamento que o solicita as características definidas para ambos nas seções anteriores deste capítulo.

O problema de determinação do estado de tensão-deformação no maciço de solo considerado para o intervalo de tempo fechado  $[t_0, t_f]$  consiste em achar os campos de tensões  $[\sigma]$ , de velocidades de deformação específica  $[\dot{\epsilon}]$

e velocidades  $\{\dot{u}\}$  tais que sejam satisfeitas em cada um de seus pontos e a cada instante as equações que regem o fenômeno do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes), vistas na Seção V.3.2, e as equações constitutivas do material, vistas na Seção V.2.2.

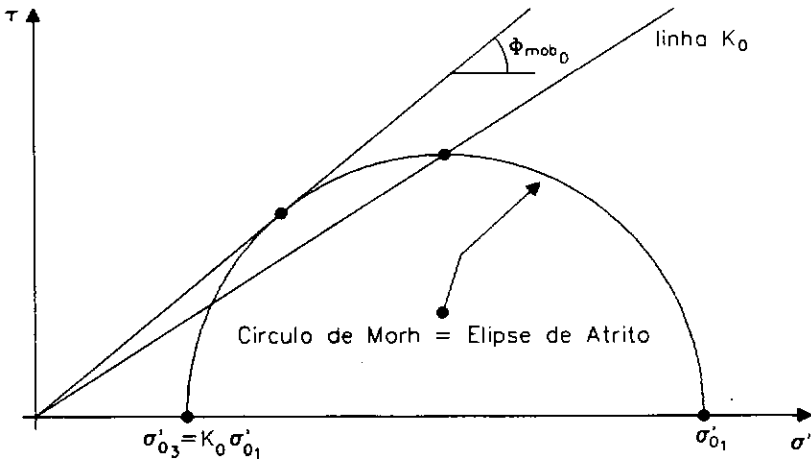
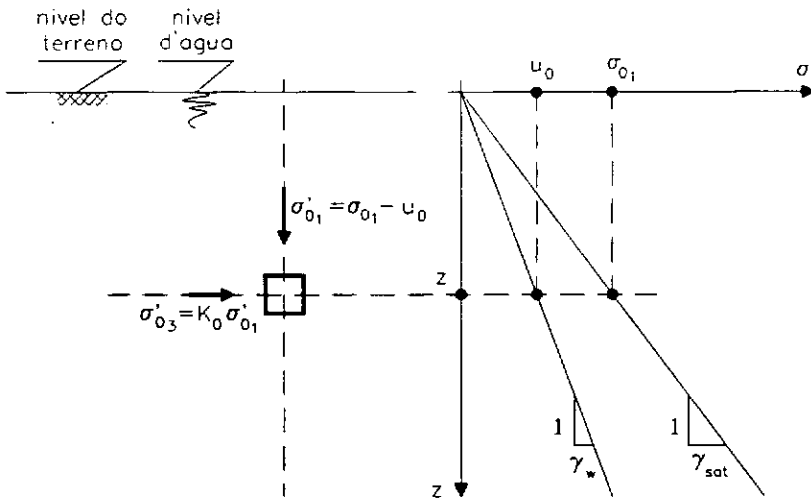
O estado de tensão inicial geostático imediatamente antes da aplicação do carregamento externo ( $t = t_0$ ) é caracterizado por um coeficiente de empuxo no repouso  $K_0$ , dado pela relação entre as tensões efetivas horizontal e vertical quando as deformações horizontais são nulas,

$$K_0 = \frac{\sigma_h'}{\sigma_v'} = \frac{\sigma_{03}'}{\sigma_{01}'} \quad (V.96)$$

sendo este também um estado de simetria axial de tensão, onde  $\sigma_{01}' = \sigma_v'$  e  $\sigma_{02}' = \sigma_{03}' = \sigma_h'$  quando  $K_0 \leq 1$ . A partir das tensões efetivas principais  $\sigma_{01}'$ ,  $\sigma_{02}'$  e  $\sigma_{03}'$  obtém-se o tensor das tensões efetivas geostáticas iniciais  $[\sigma_0']$  para os pontos no interior do maciço.

Por simplificação, admite-se para o estado inicial geostático que toda tensão cisalhante atuante é resistida exclusivamente por atrito, o que implica em velocidades de deformação específica cisalhantes nulas. Assim, por se tratar de um estado de simetria axial, a elipse de atrito coincide com o círculo de Mörh das tensões efetivas iniciais, conforme ilustra a Figura V.4.

Esta hipótese simplificadora de que toda resistência ao cisalhamento do solo inicialmente se dá exclusivamente por atrito aparentemente vem a contrariar a hipótese que considera o solo em questão uma argila normalmente adensada. Isto porque segundo Garcia (1996), a primeira hipótese corresponde ao estado do solo no final do adensamento secundário, devendo-se portanto, rigorosamente falando, considerá-lo como um solo sobre-adensado. No entanto, este fato provém da deficiência do conceito de sobre-adensamento adotado na Mecânica dos Solos, que leva em conta apenas a tensão efetiva vertical. Sendo assim, considerar-se-á que este efeito de sobre-adensamento devido ao adensamento secundário não invalida a aplicação do modelo ao problema aqui descrito.



**Figura V.4 - Estado inicial do solo: geostático e de mobilização total da resistência ao cisalhamento por atrito**

Logo, conhecendo-se o estado de tensão inicial dos pontos no interior do maciço, pode-se calcular a tensão de adensamento  $p_e'$  a partir de

$$p_e' = \frac{\sigma_{01}' + \sigma_{03}'}{2} = \frac{\sigma_{01}'}{2} \cdot (1 + K_0) \quad (\text{V.97})$$

que, por coerência aos demais parâmetros do modelo, trata-se da tensão normal efetiva atuante no plano a  $45^\circ$  em relação aos planos das tensões principais maior e menor.

Também pode-se obter a tangente do ângulo de atrito mobilizado inicial  $\tan \phi_{\text{mob}_0}$  através da equação (V.32), tomando-se neste caso  $V = 0$ , já que não há velocidade de deformação cisalhante atuando neste instante nos pontos do maciço, ou seja,  $[\dot{\epsilon}] = 0$ . Assim

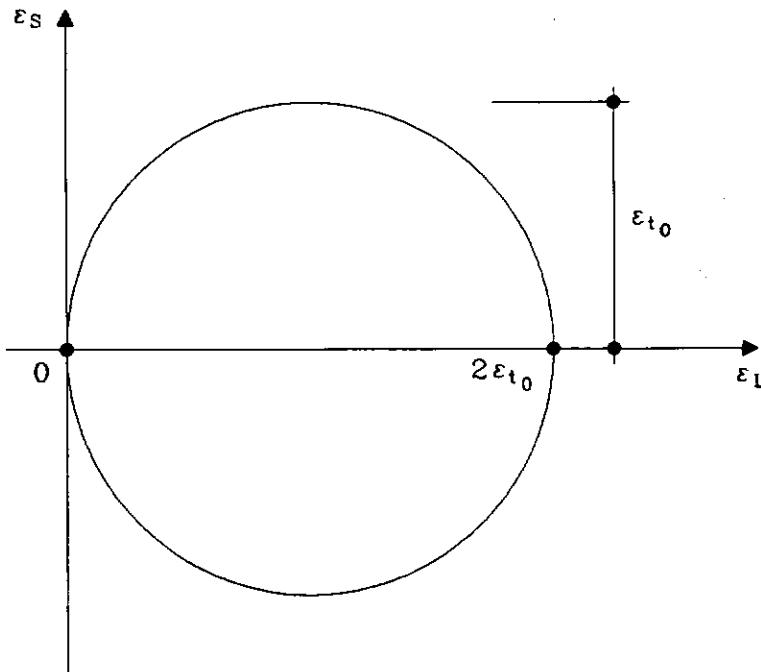
$$\tan \phi_{\text{mob}_0} = \frac{\frac{\sigma_{01}' - \sigma_{03}'}{2}}{\sqrt{\sigma_{01}' \cdot \sigma_{03}'}} = \frac{1 - K_0}{2\sqrt{K_0}} \quad (\text{V.98})$$

Este valor de ângulo de atrito mobilizado inicial  $\phi_{\text{mob}_0}$  está relacionado com uma deformação específica inicial  $\varepsilon_{t_0}$  através da função propriedade do solo  $\tan \phi_{\text{mob}}(\varepsilon_t)$  de forma que

$$\tan \phi_{\text{mob}}(\varepsilon_{t_0}) = \tan \phi_{\text{mob}_0} \quad (\text{V.99})$$

sendo esta deformação específica inicial  $\varepsilon_{t_0}$  fruto da história de formação desse maciço para  $t < t_0$ .

Lembrando que nas condições geostáticas sob as quais se formou o maciço nenhuma deformação horizontal é permitida, então o estado de deformação específica inicial dos pontos deste maciço só pode ser aquele representado pelo círculo de Mohr das deformações específicas da Figura V.5.



**Figura V.5 - Representação de Mohr no espaço  $\varepsilon_L \times \varepsilon_S$  para o estado de deformação específica inicial.**

O círculo de Mohr das deformações específicas da Figura V.5 é relativo a um estado de simetria axial onde  $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{\text{vertical}} = 2\varepsilon_{t_0}$  e  $\varepsilon_{02} = \varepsilon_{03} = \varepsilon_{\text{horizontal}} = 0$ . A partir das deformações específicas principais  $\varepsilon_{01}$ ,  $\varepsilon_{02}$  e  $\varepsilon_{03}$  obtém-se o tensor das deformações específicas  $[\varepsilon_0]$  correspondente ao estado geostático inicial.

É interessante observar que quando o estado inicial de tensão for hidrostático (como nos ensaios triaxiais de laboratório), basta tomar  $K_0 = 1$  e assim  $p_e' = \sigma_{01}' = \sigma_{02}' = \sigma_{03}'$ ,  $\tan \phi_{\text{mob}_0} = 0$  e  $\epsilon_{t_0} = 0$ .

Ao se aplicar instantaneamente em  $t = t_0$  o carregamento externo, surgirão no maciço um campo de velocidades  $\{\dot{u}\}$  e conseqüentemente um campo de velocidades de deformação específica  $[\dot{\epsilon}]$ . Assim como também haverá um salto no estado de tensão nos pontos no interior do maciço, dado por  $[\Delta\sigma]$ . O estado de tensão total acumulado imediatamente após a aplicação do carregamento é dado então por

$$[\sigma] = [\sigma_0'] + u_0 \cdot [I] + [\Delta\sigma] \quad (\text{V.100})$$

onde  $u_0$  é a poro-pressão inicial para o estado geostático de tensão e  $[I]$  a matriz identidade.

Para obter os tensores  $[\Delta\sigma]$  e  $[\dot{\epsilon}]$  e o vetor  $\{\dot{u}\}$  nos pontos no interior do maciço, dois conjuntos de equações devem ser satisfeitos.

O primeiro é o conjunto das equações que regem o fenômeno do fluxo viscoso, lento e incompressível para um material isotrópico, que, utilizando a notação indicial, pode-se resumir como:

$$\dot{\epsilon}_{i,j} = \frac{\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}}{2} \quad (\text{V.101})$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} \equiv \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (\text{V.102})$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tau_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{1,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{1,3}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \Delta p}{\partial x_1} - \rho f_1 &= 0 \\ \left( \frac{\partial \tau_{2,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{2,3}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2} - \rho f_2 &= 0 \\ \left( \frac{\partial \tau_{3,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{3,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3,3}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \Delta p}{\partial x_3} - \rho f_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.103})$$

$$\tau_{i,j} = \Delta\sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \cdot \frac{\Delta\sigma_{i,i}}{3} \quad (\text{V.104})$$

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_{i,i}}{3} \quad (\text{V.105})$$

$$\tau_{i,j} = 2\mu \cdot \left( \dot{\epsilon}_{i,j} - \delta_{i,j} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{i,i}}{3} \right) \quad (\text{V.106})$$

Pela Formulação Mista do MEF, as equações acima para o Problema de Stokes, considerando um elemento finito de volume  $\Omega$  e fronteira  $\Gamma$  e utilizando a notação vetorial, são resolvidas com

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C]^T & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\}^e \\ \{p\}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.107})$$

onde

$$[A] = \int_{\Omega} \left\{ [B]^T \cdot \mu \cdot \left( [D_0] - \frac{2}{3} \cdot [m] \cdot [m]^T \right) \cdot [B] \right\} d\Omega \quad (\text{V.108})$$

$$[B] = [S] \cdot [N_s] \quad (\text{V.109})$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left\{ [B]^T \cdot [m] \cdot [N_p] \right\} d\Omega \quad (\text{V.110})$$

$$\{b\} = \int_{\Omega} [N_s]^T \cdot p\{f\} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} [N_s]^T \cdot \{t\} \cdot d\Gamma \quad (\text{V.111})$$

O segundo conjunto de equações a ser satisfeito é o das relações constitutivas do material.

Voltando agora à notação tensorial e chamando de  $\Delta\sigma_3$  o incremento de tensão principal menor obtido do tensor  $[\Delta\sigma]$ , o acréscimo de poro-pressão aqui considerado é dado por  $\Delta u = \Delta\sigma_3$ , e o tensor de tensões efetivas é dado por

$$[\sigma'] = [\sigma] - (u_0 + \Delta u) \cdot [I] \quad (\text{V.112})$$

que considerando (V.100) conduz a

$$[\sigma'] = [\sigma_0'] + [\Delta\sigma] - \Delta\sigma_3 \cdot [I] \quad (\text{V.113})$$

Assim, as relações constitutivas do material estarão satisfeitas quando ao resolver o problema de otimização (formulado na Seção V.2.2):

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \frac{\| \begin{matrix} n \\ \{\tau_f\} \end{matrix} \|}{\sigma_n'} \\ \{n\} & \end{array} \quad (\text{V.114})$$

$$\text{restrito a} \quad \|\{n\}\| = 1$$

onde

$$\{\tau_f\}^n = \left[ ([\sigma'] - \eta \cdot [\dot{\epsilon}]) - (\sigma_n' - \eta \cdot \dot{\epsilon}_{L_n}) \cdot [I] \right] \cdot \{n\} \quad (V.115)$$

$$\sigma_n' = \{n\}^T \cdot [\sigma']^T \cdot \{n\} \quad (V.116)$$

$$\dot{\epsilon}_{L_n} = \{n\}^T \cdot [\dot{\epsilon}]^T \cdot \{n\} \quad (V.117)$$

$$\eta = \alpha \cdot (\dot{\epsilon}_t)^{\beta-1} \cdot p_c' \quad (V.118)$$

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2} \quad (V.119)$$

for verificado que

$$\left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{\max} = \tan \phi_{\text{mob}_0} \quad (V.120)$$

Na realidade, este é um problema iterativo que deve ser resolvido ajustando-se o coeficiente de viscosidade  $\mu$  em cada ponto no maciço (que aqui só foi introduzido para garantir a condição de isotropia entre os tensores  $[\Delta\sigma]$  e  $[\dot{\epsilon}]$ ) de forma que (V.120) seja satisfeita para todos seus pontos.

Admite-se agora que o maciço em estudo está adequadamente representado por uma malha de elementos finitos, onde suas condições de contorno (velocidades prescritas) estejam respeitadas e os elementos finitos que a compõem obedeçam à Formulação Mista do MEF aplicada ao Problema de Stokes, dada pelas equações (V.107) a (V.111).

Adotando como plano de referência aquele onde foi obtido  $\left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{\max}$  e caracterizado pela normal unitária  $\{n_{\text{mob}}\}$ , uma maneira de ajustar o coeficiente de viscosidade  $\mu$  para cada ponto de integração de cada elemento finito da referida malha de forma a conseguir rapidamente a convergência é utilizando as relações constitutivas do material dadas por (V.23), (V.24) e (V.25):

$$\{\tau\} = \{\tau_f\} + \{\tau_v\} \quad (V.121)$$

$$\{\tau_v\} = \eta \cdot \{\dot{\epsilon}_s\} \quad (V.122)$$

$$\|\{\tau_f\}\| = \sigma_n' \cdot \tan \phi_{\text{mob}_0} \quad (V.123)$$

sendo  $\sigma_n'$  e  $\{\dot{\epsilon}_s\}$  dados por

$$\sigma_n' = \{n_{\text{mob}}\}^T \cdot [\sigma']^T \cdot \{n_{\text{mob}}\} \quad (V.124)$$

$$\{\dot{\epsilon}_s\} = ([\dot{\epsilon}] - \{n_{\text{mob}}\}^T \cdot [\dot{\epsilon}]^T \cdot \{n_{\text{mob}}\}) \cdot [I] \cdot \{n_{\text{mob}}\} \quad (V.125)$$

Considere-se que o vetor tensão cisalhante  $\{\tau\}$  no plano de normal unitária  $\{n_{mob}\}$  é obtido por

$$\{\tau\} = \{\tau_0\} + \{\Delta\tau\} \quad (V.126)$$

onde  $\{\tau_0\}$  é o vetor tensão cisalhante devido ao estado inicial de tensões obtido através do tensor de tensões efetivas iniciais  $[\sigma_0']$  e da equação (V.35) dado por

$$\{\tau_0\} = ([\sigma_0'] - \{n_{mob}\}^T \cdot [\sigma_0']^T \cdot \{n_{mob}\} \cdot [I]) \cdot \{n_{mob}\} \quad (V.127)$$

e  $\{\Delta\tau\}$  é o vetor acréscimo de tensão cisalhante devido ao carregamento externo aplicado, que pela condição de isotropia imposta é dado por

$$\{\Delta\tau\} = 2\mu \cdot \{\dot{\epsilon}_s\} \quad (V.128)$$

Então, substituindo (V.126) em (V.121) tem-se

$$\{\tau_0\} + 2\mu \cdot \{\dot{\epsilon}_s\} = \{\tau_f\} + \eta \cdot \{\dot{\epsilon}_s\} \quad (V.129)$$

ou

$$\{\tau_f\} = \{\tau_0\} + (2\mu - \eta) \cdot \{\dot{\epsilon}_s\} \quad (V.130)$$

que tirando o módulo dos dois membros de (V.130) chega-se à seguinte equação em função do coeficiente  $\mu$

$$\sigma_n' \cdot \tan \phi_{mob_0} = \left\| \{\tau_0\} + (2\mu - \eta) \cdot \{\dot{\epsilon}_s\} \right\| \quad (V.131)$$

Iniciando o processo com valores arbitrários de  $\mu$  para os pontos de integração de todos os elementos da malha, através das equações (V.107) a (V.111), obtém-se os campos de tensões  $[\sigma]$ , de velocidades de deformação específica  $[\dot{\epsilon}]$  e velocidades  $\{\dot{u}\}$  para este campo de valores de  $\mu$  inicialmente estimado no maciço. Depois de resolvido o problema de otimização relativo às equações constitutivas do material, recalcula-se o campo de valores de  $\mu$  no maciço através de (V.131). Este procedimento é repetido até o problema convergir, ou seja, que a equação (V.120) seja satisfeita para todos os pontos de integração de todos os elementos da malha de elementos finitos.

Resolvido o problema para  $t = t_0$ , pode-se agora partir para o instante seguinte. Para isto, dá-se um incremento de tempo  $\Delta t_1$  de forma que o tempo corrente seja

$$t_1 = t_0 + \Delta t_1 \quad (V.132)$$

A partir do tensor de velocidades de deformação específica  $[\dot{\epsilon}_0]$  obtido para cada ponto no interior do maciço de solo para o tempo  $t = t_0$ , calcula-se o tensor das deformações específicas acumuladas  $[\epsilon_1]$  para  $t = t_1$  conforme a seguir

$$[\epsilon_1] = [\epsilon_0] + \Delta t_1 \cdot [\dot{\epsilon}_0] \quad (\text{V.133})$$

Desta forma, com o tensor  $[\epsilon_1]$  e através da equação (V.54) obtém-se a deformação específica  $\epsilon_{11}$ , podendo-se então calcular para os pontos no interior do maciço seus novos ângulos de atrito mobilizado através da função propriedade do solo  $\tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_1)$ , ou seja,

$$\tan \phi_{\text{mob}_1} = \tan \phi_{\text{mob}}(\epsilon_{t_1}) \quad (\text{V.134})$$

De maneira semelhante, o incremento de poro-pressão devido à ocorrência das deformações cisalhantes é obtido a partir da função propriedade do solo

$$\frac{u_s}{p_c'}(\epsilon_t):$$

$$\Delta u_s = \left( \frac{u_s}{p_c'}(\epsilon_{t_1}) - \frac{u_s}{p_c'}(\epsilon_{t_0}) \right) \cdot p_o' \quad (\text{V.135})$$

O problema para  $t = t_1$  é resolvido de maneira idêntica ao apresentado para  $t = t_0$ , só que adicionando-se no cálculo do tensor de tensões efetivas, inicialmente obtido por (V.113), a poro-pressão devida ao cisalhamento de forma que

$$[\sigma'] = [\sigma_0'] + [\Delta \sigma] - (\Delta \sigma_s + \Delta u_s) \cdot [\mathbf{I}] \quad (\text{V.136})$$

No problema de otimização, a nova condição de convergência a ser verificada no lugar daquela dada pela equação (V.120) é

$$\left( \frac{\tau_f}{\sigma'} \right)_{\text{max}} = \tan \phi_{\text{mob}_1} \quad (\text{V.137})$$

e o cálculo iterativo do  $\mu$  para os pontos no interior do maciço (pontos de integração de todos os elementos da malha de elementos finitos) realizado anteriormente por (V.131) é feito considerando-se o novo ângulo de atrito mobilizado, ou seja,

$$\sigma_n' \cdot \tan \phi_{\text{mob}_1} = \left\| \{ \tau_o \} + (2\mu - \eta) \cdot \{ \dot{\epsilon}_s \} \right\| \quad (\text{V.138})$$

Desta forma, mais uma vez, pode-se partir para um novo incremento de tempo  $\Delta t_2$  e assim sucessivamente.

Este algoritmo deve ser repetido até um determinado tempo  $t = t_k$  que exceda o tempo final  $t_f$ .

Para um ponto no interior do maciço a um determinado tempo  $t = t_k$ , o tensor de deformações específicas acumuladas  $[\epsilon_k]$  no intervalo de tempo  $[t_0, t_k]$  é

$$[\epsilon_k] = [\epsilon_0] + \sum_{i=1}^k \Delta t_i \cdot [\dot{\epsilon}_{i-1}] \quad (\text{V.139})$$

onde  $[\dot{\epsilon}_{i-1}]$  é o tensor de velocidades de deformação específica calculado em  $t = t_{i-1}$ . Da mesma forma, para o ponto considerado e neste mesmo instante  $t = t_k$ , os deslocamentos acumulados  $\{u_k\}$  no intervalo de tempo  $[t_0, t_k]$  são

$$\{u_k\} = \sum_{i=1}^k \Delta t_i \cdot \{\dot{u}_{i-1}\} \quad (\text{V.140})$$

onde  $\{\dot{u}_{i-1}\}$  são as velocidades calculadas para o ponto considerado em  $t = t_{i-1}$ .

Este método de integração no tempo corresponde ao Método de Euler Explícito, visto no Capítulo III, Seção III.8. Outros métodos mais sofisticados podem ser implementados para este problema, conforme discutido no Capítulo III. Porém, o presente autor julga que o Método de Euler Explícito é didaticamente mais indicado para se apresentar o problema, além de ser de fácil implementação computacional.

O cálculo do incremento de tempo  $\Delta t_{k+1}$ , estando o problema já resolvido para  $t = t_k$  e dados os fatores de controle do tempo  $\vartheta$  e  $\lambda$ , é feito de acordo com os seguintes critérios:

(1) Calcular o menor incremento de tempo  $\Delta t_{\min}$  para todos os pontos de integração de todos os elementos da malha de elementos finitos de acordo com

$$\Delta t_{\min} = \min (\Delta t, \Delta t \cdot \dot{\epsilon}_{i_k} = \vartheta \cdot \epsilon_{i_k}) \quad (\text{V.141})$$

(2) Se  $\Delta t_{\min} \leq \lambda \cdot \Delta t_k$  então

$$\Delta t_{k+1} = \Delta t_{\min} \quad (\text{V.142})$$

(3) Se  $\Delta t_{\min} > \lambda \cdot \Delta t_k$  então

$$\Delta t_{k+1} = \lambda \cdot \Delta t_k \quad (\text{V.143})$$

O critério (1) garante-se que o incremento de deformação  $\Delta t_{\min} \cdot \dot{\epsilon}_{t_k}$  não exceda  $\vartheta$  vezes a deformação acumulada naquele tempo. Os critérios (2) e (3) impedem que o novo incremento de tempo ( $\Delta t_{k+1}$ ) seja maior que o incremento anterior ( $\Delta t_k$ ) multiplicado por um fator  $\lambda$ .

Este algoritmo para o cálculo do incremento de tempo no Método de Euler Explícito foi adotado por Lopes e Feijoo (1982) na formulação e implementação em elementos finitos de um modelo visco-elástico para solos. Neste referido trabalho, foram adotados em suas aplicações os valores de 0,2 e 1,5 para os fatores  $\vartheta$  e  $\lambda$  respectivamente.

## V.5 - CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS A RESPEITO DA IMPLEMENTAÇÃO

Em algumas aplicações práticas da Engenharia Geotécnica, a abordagem da Mecânica dos Fluidos aqui adotada apresenta uma grande vantagem sobre a da Mecânica dos Sólidos por não requerer nenhum tratamento especial para os problemas de grandes deformações. Isto porque na Mecânica dos Fluidos as variáveis independentes principais da análise são as velocidades, não havendo a não-linearidade geométrica existente em tais problemas quando formulados através da Mecânica dos Sólidos.

Na implementação aqui realizada para o MEF, para se levar em conta o problema de grandes deformações basta atualizar a cada instante as coordenadas dos pontos nodais dos elementos da malha de elementos finitos. Assim, o ponto de coordenadas  $\{x_0\}$  em  $t = t_0$ , terá num tempo  $t = t_k$  as coordenadas nodais

$$\{x_k\} = \{x_0\} + \sum_{i=1}^k \Delta t_i \cdot \{\dot{u}_{i-1}\} \quad (\text{V.144})$$

onde  $\{\dot{u}_{i-1}\}$  são as velocidades calculadas para o ponto considerado em  $t = t_{i-1}$ .

Deve-se chamar atenção que a correção contínua das coordenadas dos pontos nodais da malha de elementos finitos pode levar a malhas inaceitáveis, apresentando elementos finitos demasiadamente distorcidos. Para resolver este problema, Zienkiewicz e Taylor (1994) sugerem a aplicação de técnicas de adaptação de malhas. Estas técnicas consistem em recriar uma nova malha com elementos regulares (pouco distorcidos) através da interpolação de todos os parâmetros de estado da antiga malha, buscando sempre diminuir os erros de discretização.

Uma outra observação a ser feita a respeito da formulação aqui desenvolvida é sobre a geração de poro-pressão no maciço. Como no caso geral de carregamento as tensões e deformações cisalhantes resultantes são diferentes de ponto para ponto, então haverá geração desuniforme de poro-pressão no maciço, originando gradientes hidráulicos entre seus pontos. Isto significa que deve existir um fluxo hidráulico da água livre dos vazios do solo, a ser resolvido acoplado com o problema de tensão deformação. A ocorrência deste fluxo será desconsiderada nesta análise, admitindo-se que a permeabilidade do solo do maciço em questão é extremamente baixa, de forma a permitir a existência da condição não-drenada (deformações volumétricas nulas).

Finalmente, é interessante notar que o algoritmo aqui apresentado está de acordo com a Lei de Taylor enunciada na Seção III.2 no Capítulo III e reescrita a seguir

**Lei de Taylor Generalizada:** " Um solo submetido a um estado de tensões onde as tensões cisalhantes sejam resistidas por viscosidade e por atrito procurará ao longo do tempo resistir internamente ao esforço cisalhante apenas por atrito."

Isto porque à medida que o tempo passa e ocorrem as deformações cisalhantes no maciço, cresce a mobilização de atrito em seus pontos (conseqüência do PTEE), ou seja, a razão  $\left(\frac{\tau_f}{\sigma}\right)_{\max}$  cresce ao longo do tempo.

Sendo assim, o ângulo de atrito mobilizado  $\phi_{\text{mob}}$ , dado por  $\tan \phi_{\text{mob}} = \left(\frac{\tau_f}{\sigma}\right)_{\max}$ ,

em um ponto no interior do maciço irá aumentar até quando toda resistência ao cisalhamento seja exclusivamente por atrito ou quando a ruptura for atingida, onde a partir daí  $\phi_{mob}$  assume o valor constante igual ao ângulo de atrito básico  $\phi_b$ .

## CAPÍTULO VI

### APLICAÇÕES

#### VI.1 - INTRODUÇÃO

Com todo problema já formulado no capítulo anterior, foi feita sua implementação em um programa computacional e mostradas algumas aplicações. A primeira aplicação foi a reprodução de ensaios de laboratório. São comparados os resultados da análise via o Método dos Elementos Finitos (MEF) com os obtidos através das equações desenvolvidas por Martins (1992) e com os ensaios realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. Depois analisa-se um caso fictício de campo, onde são realizados ensaios de placa num depósito de argila com os mesmos parâmetros da argila da Baía de San Francisco.

Os parâmetros do solo utilizados nesta análise são os da argila da Baía de San Francisco obtidos no Capítulo IV, com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  do modelo dados segundo Martins (1992). São eles:

$$\varepsilon_{ff} = 2,865\% \quad (\text{VI.1})$$

$$\frac{u_{sf}}{p_o'} = 0,631 \quad (\text{VI.2})$$

$$\frac{q_{bf}'}{p_o'} = 0,248 \quad (\text{VI.3})$$

$$\alpha = 0,528 \quad (\text{VI.4})$$

$$\beta = 0,235 \quad (\text{VI.5})$$

Considerando estes parâmetros, o ângulo de atrito básico  $\phi_b$  é de

$$\phi_b = 23,73^\circ \quad (\text{VI.6})$$

Em relação aos fatores controladores de incremento de tempo  $\vartheta$  e  $\lambda$  definidos na Seção V.4 do capítulo anterior, seguindo Lopes e Feijoo (1982), foram adotados os respectivos valores de 0,2 e 1,5.

## VI.2 - CASOS DE SIMETRIA AXIAL

Em concordância com as equações do modelo inicialmente desenvolvido por Martins (1992), os ensaios de laboratório (casos de simetria axial) serão tratados dentro do domínio das pequenas deformações. Para isto não serão realizadas as correções das coordenadas dos nós da malha de elementos finitos com o passar do tempo (ver Seção V.5 do capítulo anterior).

A Figura VI.1 mostra a malha de elementos finitos utilizada para representar o corpo-de-prova. No seu topo aplica-se o carregamento, que no caso de ensaios de creep são forças prescritas e, no caso de ensaios convencionais, velocidades prescritas. Nesta condição de simetria axial, só se faz necessário modelar um quarto do corpo-de-prova.

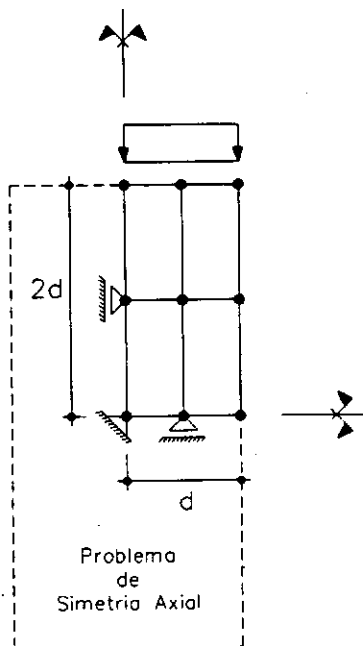


Figura VI.1 - Malha de elementos finitos utilizada nos casos de simetria axial

## VI.2.1 - Ensaio de Creep Não-Drenado

Nas figuras VI.2 a VI.5 estão plotadas as curvas  $\varepsilon_t \times t$  e  $\dot{\varepsilon}_t \times t$  dos ensaios CR-I-1 e CR-I-2 realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco juntamente com suas reproduções numéricas via MEF e equação diferencial completa do creep (Martins, 1992). Ambos os ensaios foram analisados no Capítulo IV deste trabalho. O ensaio CR-I-1 não atinge a ruptura e, segundo o modelo, deve estabilizar a uma deformação específica de  $\varepsilon_t = 1,54\%$ . O ensaio CR-I-2 rompe.

É claro que deve-se esperar que a solução via MEF desenvolvida no capítulo anterior se apresente próxima da solução numérica via equação diferencial completa do creep não-drenado (Martins, 1992) desenvolvida no Capítulo III. Esta última deve ser considerada a mais acurada por utilizar o método de integração numérica no tempo de Runge-Kutta de 4ª ordem, ao contrário da primeira (MEF) que utiliza o método de integração de Euler explícito.

## VI.2.2 - Ensaio Convencionais

Nas figuras VI.6 e VI.7 são plotadas as curvas  $q' \times \varepsilon_t$  e  $u \times \varepsilon_t$  dos ensaios convencionais BM-CU-61 e BM-CU-62 realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco. Ambos foram adensados a uma tensão  $p_e' = 314 \text{KPa}$ , sendo o ensaio BM-CU-61 realizado a  $\dot{\varepsilon}_t = 0,07125\% / \text{min}$  e o BM-CU-62 a  $\dot{\varepsilon}_t = 0,009\% / \text{min}$ . Como prevê o modelo descrito no Capítulo II, as ordenadas do ensaio BM-CU-61 no gráfico  $q' \times \varepsilon_t$  situam-se acima das ordenadas do ensaio BM-CU-62, realizado a uma velocidade menor. A curva  $u \times \varepsilon_t$  para este par de ensaios mostra-se única.

Nas figuras VI.8 a VI.13 estão as curvas experimentais  $q' \times \epsilon$ ,  $u \times \epsilon$ , e  $q' \times p'$  para os referidos ensaios juntamente com suas reproduções através das equações (II.74) e (II.75) desenvolvidas por Martins (1992) e através da solução via MEF formulada no capítulo anterior.

Como os ensaios convencionais são teoricamente realizados a velocidade de deformação constante, então a solução numérica via MEF é igual àqueia desenvolvida por Martins (1992). Isto porque, para este caso particular de velocidade constante, o método de integração numérica no tempo de Euler utilizado na formulação via MEF é exato.

Apesar de não terem sido realizados objetivando-se o estudo do modelo apresentado por Martins (1992), os ensaios BM-CU-61 e BM-CU-62 foram satisfatoriamente reproduzidos.

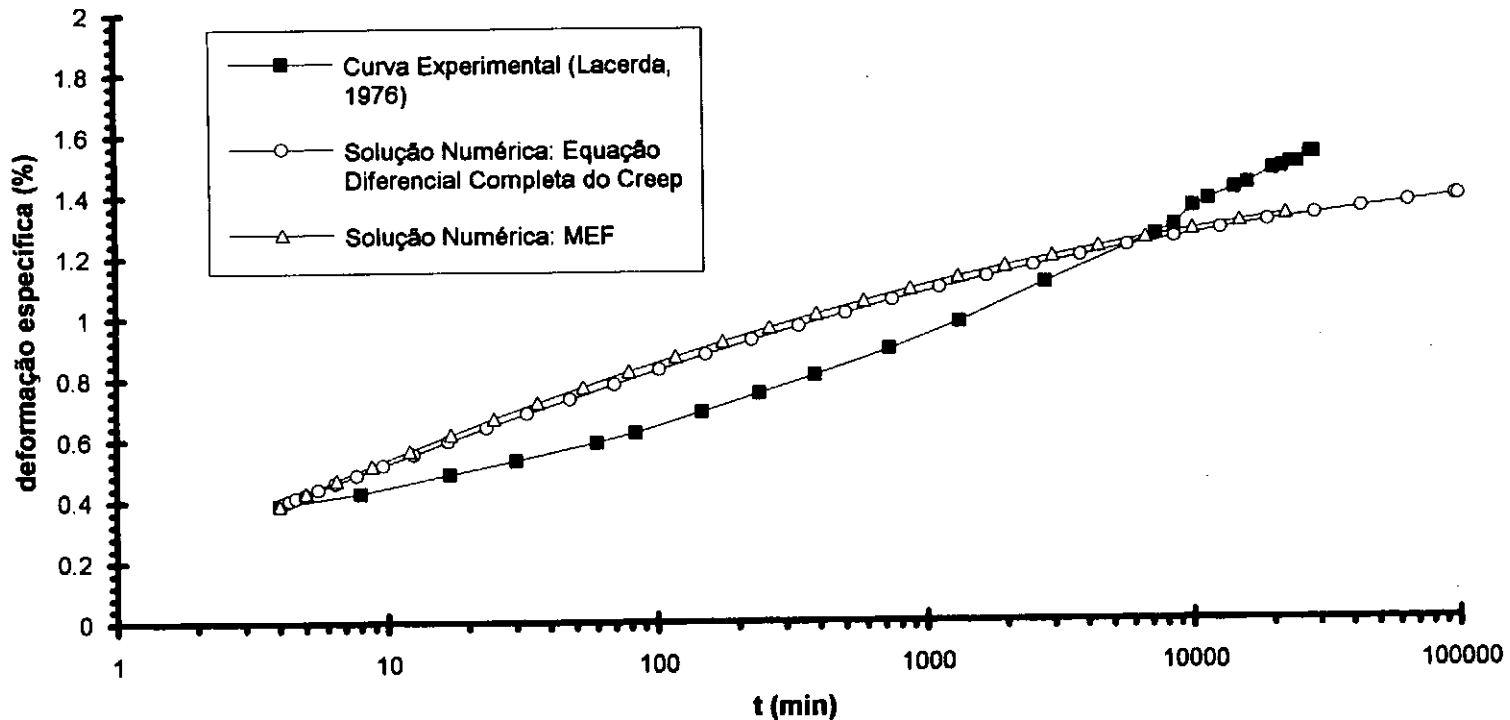


Figura VI.2 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-I-1

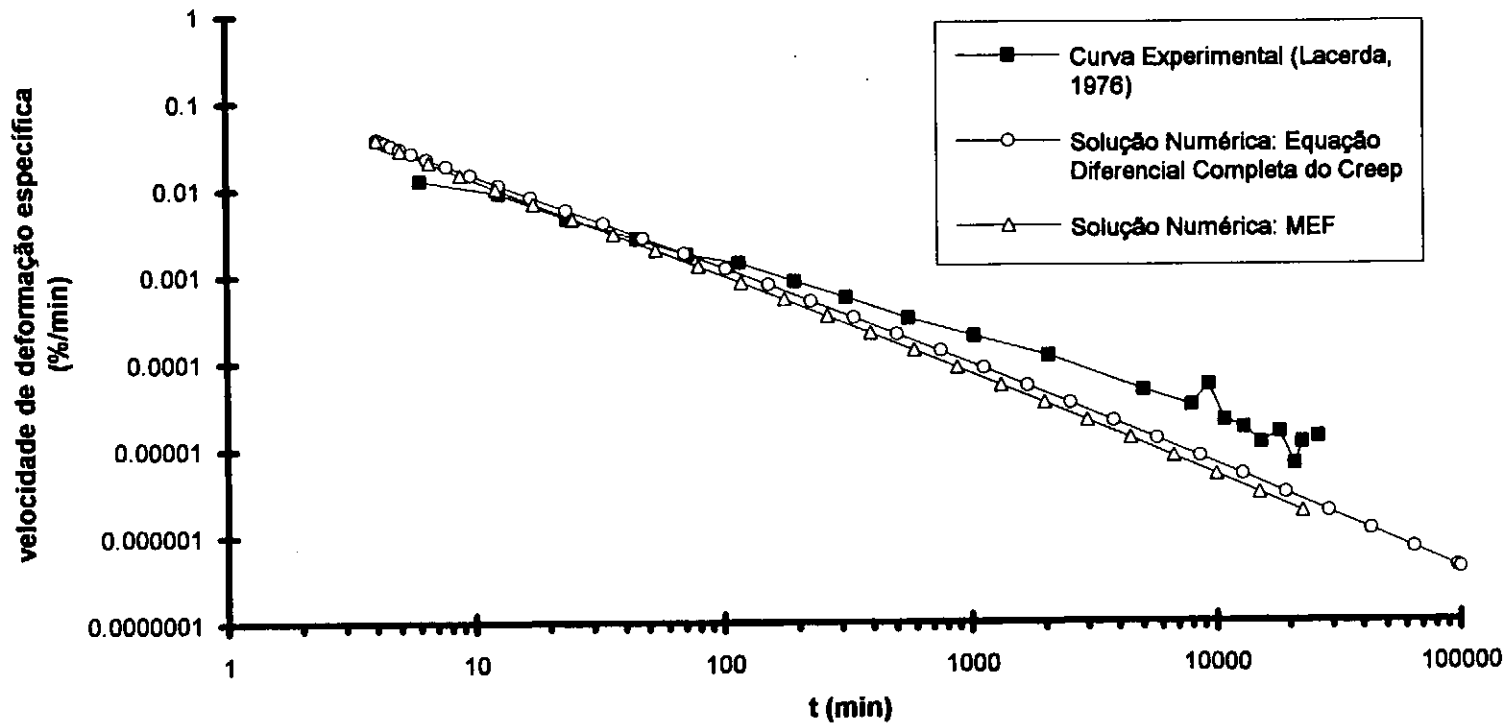


Figura VI.3 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-I-1

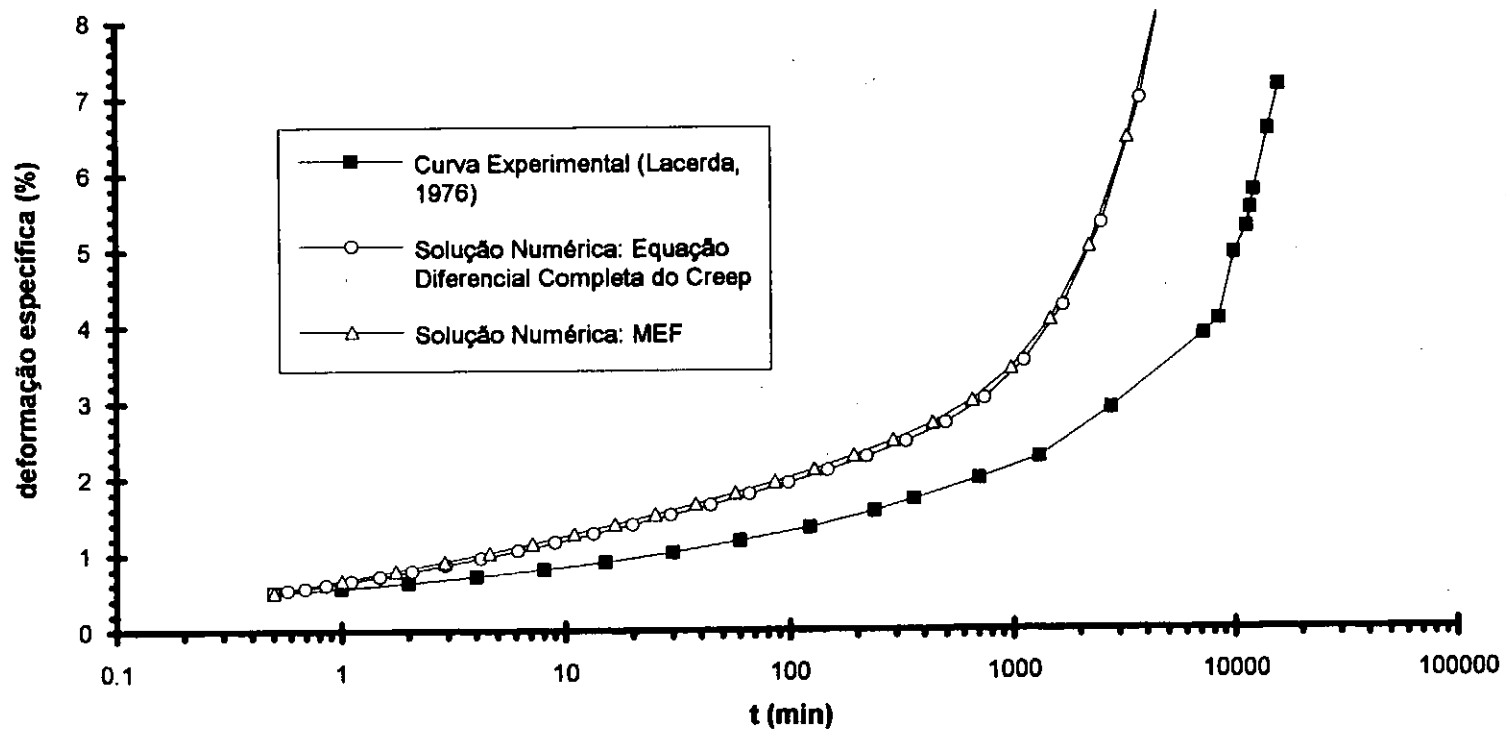


Figura VI.4 - Reproduções da curva  $\epsilon_t \times t$  do ensaio CR-I-2

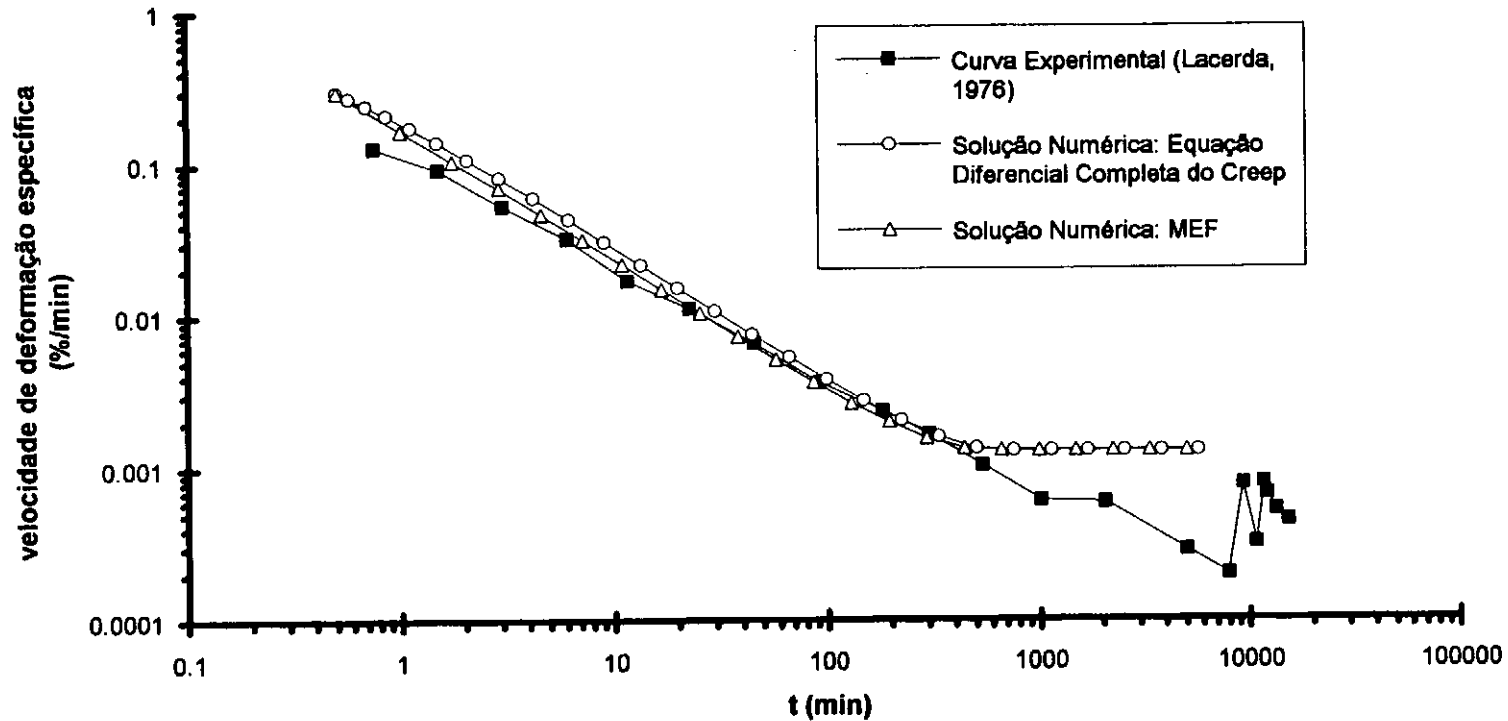
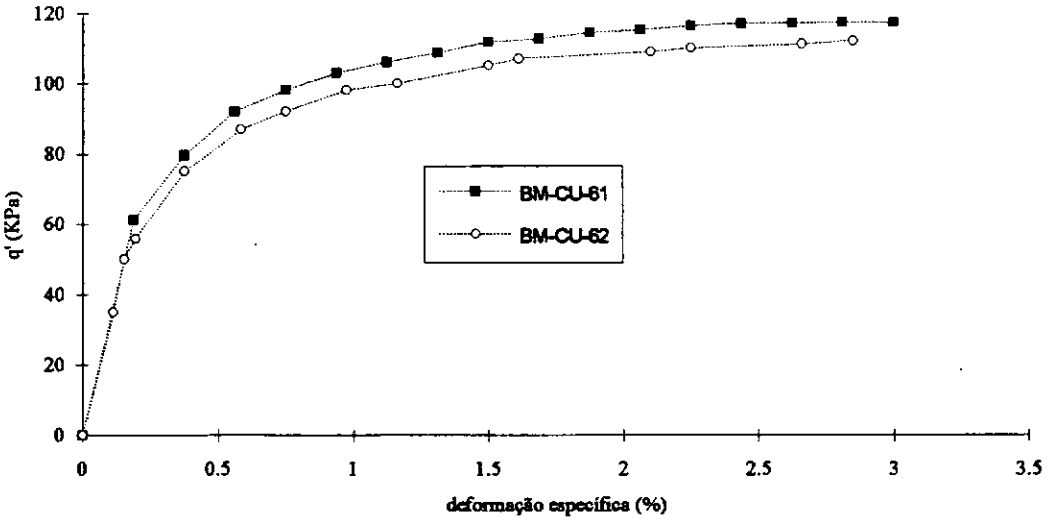
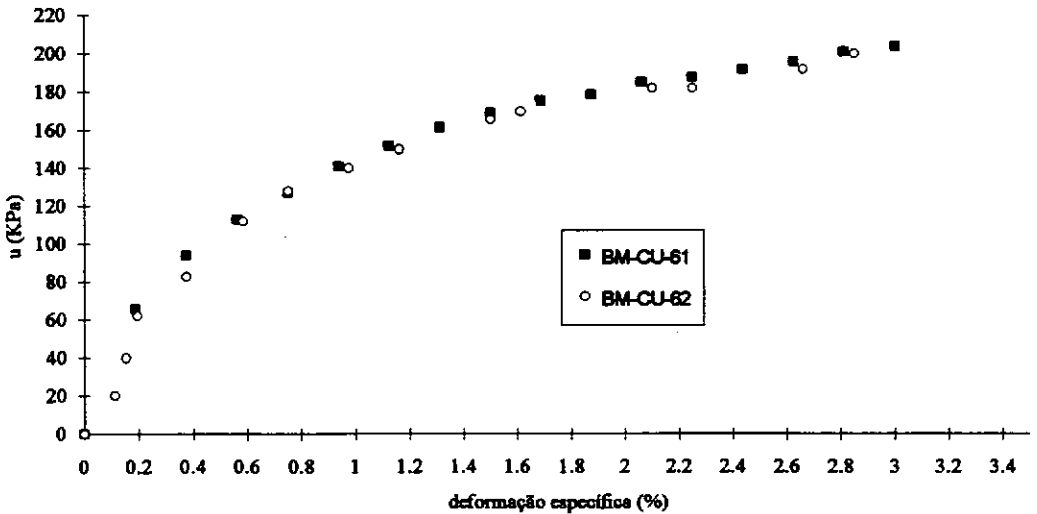


Figura VI.5 - Reproduções da curva  $\dot{\epsilon}_t \times t$  do ensaio CR-I-2



**Figura VI.6 - Curvas  $q' \times \epsilon_t$  dos ensaios convencionais BM-CU-61 e BM-CU-62 realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco**



**Figura VI.7 - Curvas  $u \times \epsilon_t$  dos ensaios convencionais BM-CU-61 e BM-CU-62 realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco**

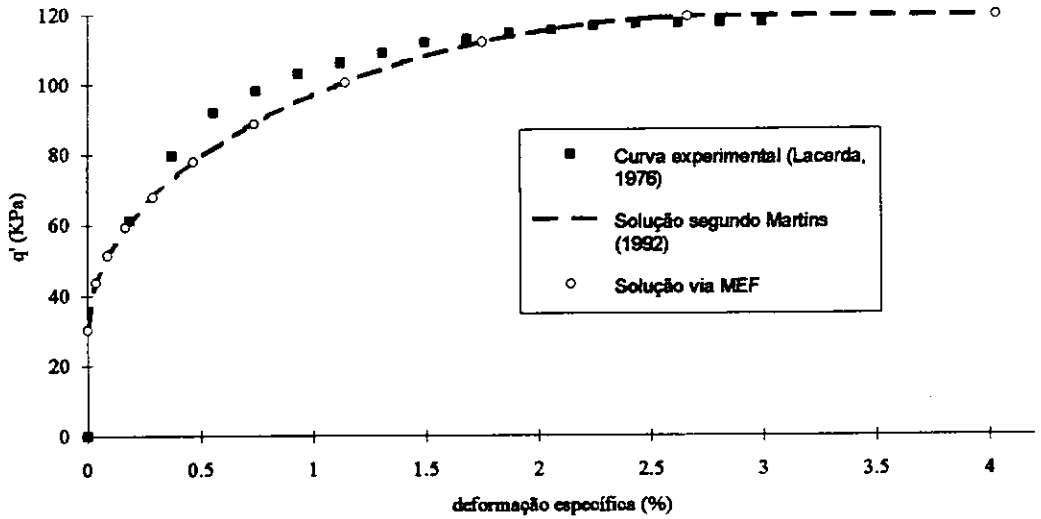


Figura VI.8 - Reproduções da curva  $q' \times \epsilon_t$  do ensaio BM-CU-61

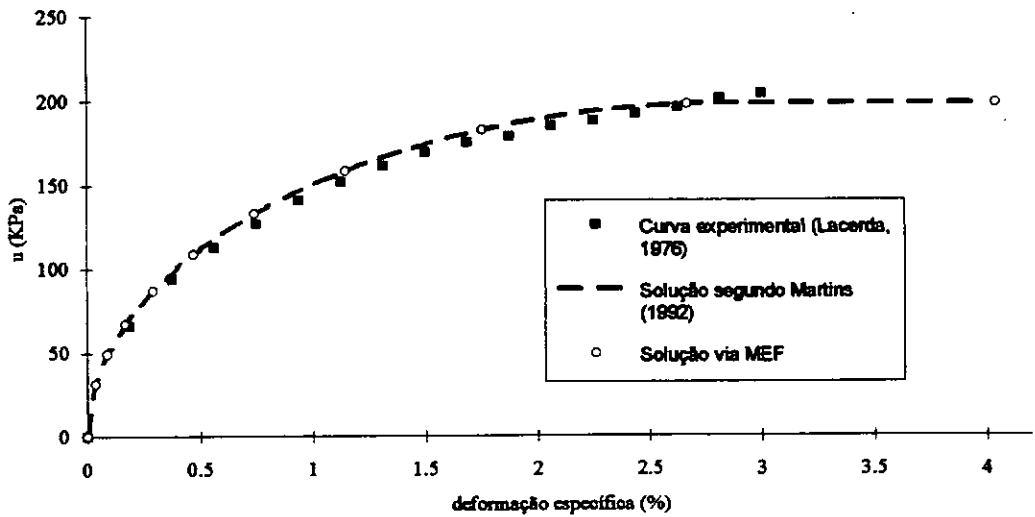
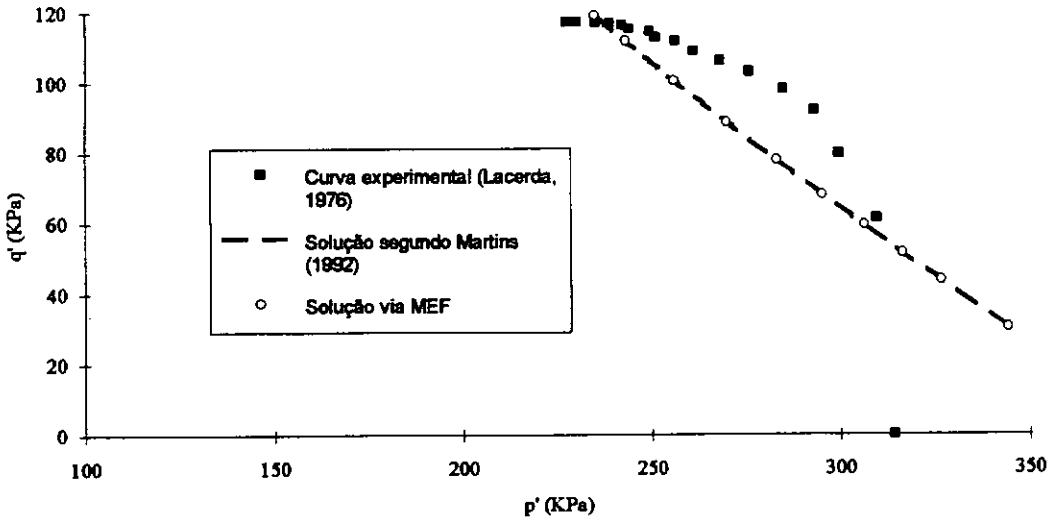
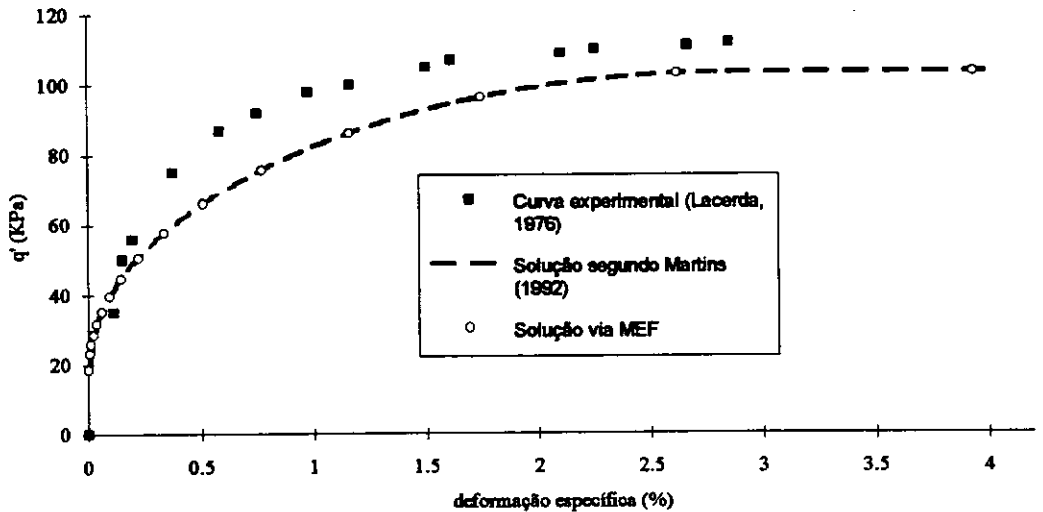


Figura VI.9 - Reproduções da curva  $u \times \epsilon_t$  do ensaio BM-CU-61



**Figura VI.10 - Reproduções da curva  $q' \times p'$  do ensaio BM-CU-61**



**Figura VI.11 - Reproduções da curva  $q' \times \varepsilon_1$  do ensaio BM-CU-62**

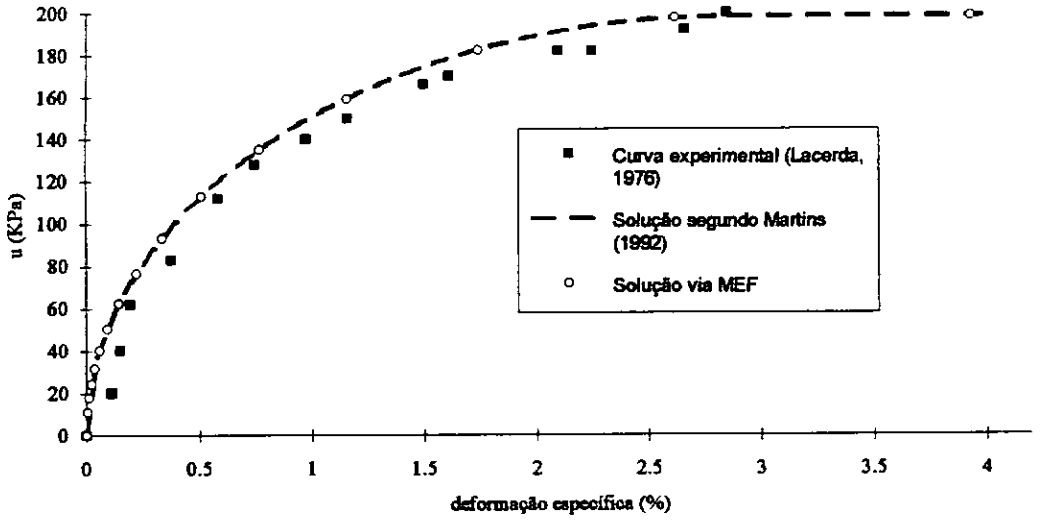


Figura VI.12 - Reproduções da curva  $u \times \epsilon_t$  do ensaio BM-CU-62

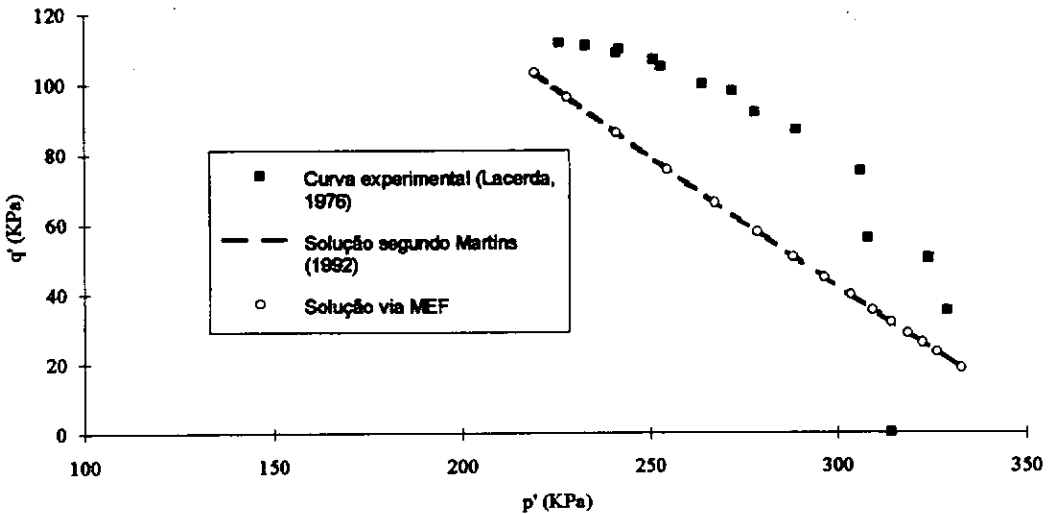


Figura VI.13 - Reproduções da curva  $q' \times p'$  do ensaio BM-CU-62

### VI.3 - CASO MULTIAXIAL: ENSAIOS FICTÍCIOS DE PLACA

São realizados dois ensaios de placa do tipo CRP ("constant rate of penetration") num depósito de argila com os mesmos parâmetros da argila da Baía de San Francisco. No ensaio aqui idealizado uma placa rígida de comprimento infinito (problema de deformação plana) é colocada na superfície do terreno, comprimindo-o a uma velocidade constante. Esta análise foi realizada no domínio das grandes deformações (não-linearidade geométrica), onde a cada incremento de tempo eram feitas as correções das coordenadas dos nós da malha de elementos finitos (ver Seção V.5 do capítulo anterior).

Na Figura VI.14 é definida a geometria do problema e é mostrada a malha de elementos finitos utilizada para resolvê-lo. O primeiro ensaio é realizado a uma velocidade de penetração de 0,005m/min (0,111%B/min) e o segundo é realizado a 0,0005 m/min (0,011%B/min). O tempo inicial da análise é  $t_0 = 1,0\text{min}$ .

Para ilustrar o problema a ser analisado, mostra-se na Figura VI.15 a configuração do maciço num determinado tempo (ensaio realizado à velocidade de 0,0005m/min, tempo  $t=1134\text{min}$ , penetração da placa  $\delta = 0,57\text{m}$ ).

Seguindo a formulação do problema descrita no capítulo anterior, inicialmente tem-se a condição geostática e toda resistência ao cisalhamento é mobilizada exclusivamente por atrito. Adota-se para todo maciço um coeficiente de empuxo no repouso de  $K_0 = 0,8$ , assim como um índice de vazios inicial de  $e = 2,0$ .

Sendo o valor da densidade dos grão da argila da Baía de San Francisco  $G = 2,75$  (Lacerda, 1976), pode-se, então, calcular o peso específico submerso  $\gamma_{\text{SUB}}$  deste solo a partir de

$$\gamma_{\text{SUB}} = \frac{G-1}{1+e} \cdot \gamma_w = \frac{2,75-1}{1+2,0} \cdot 10,0 \approx 6\text{KN} / \text{m}^3 \quad (\text{VI.7})$$

onde  $\gamma_w$  é o peso específico da água.

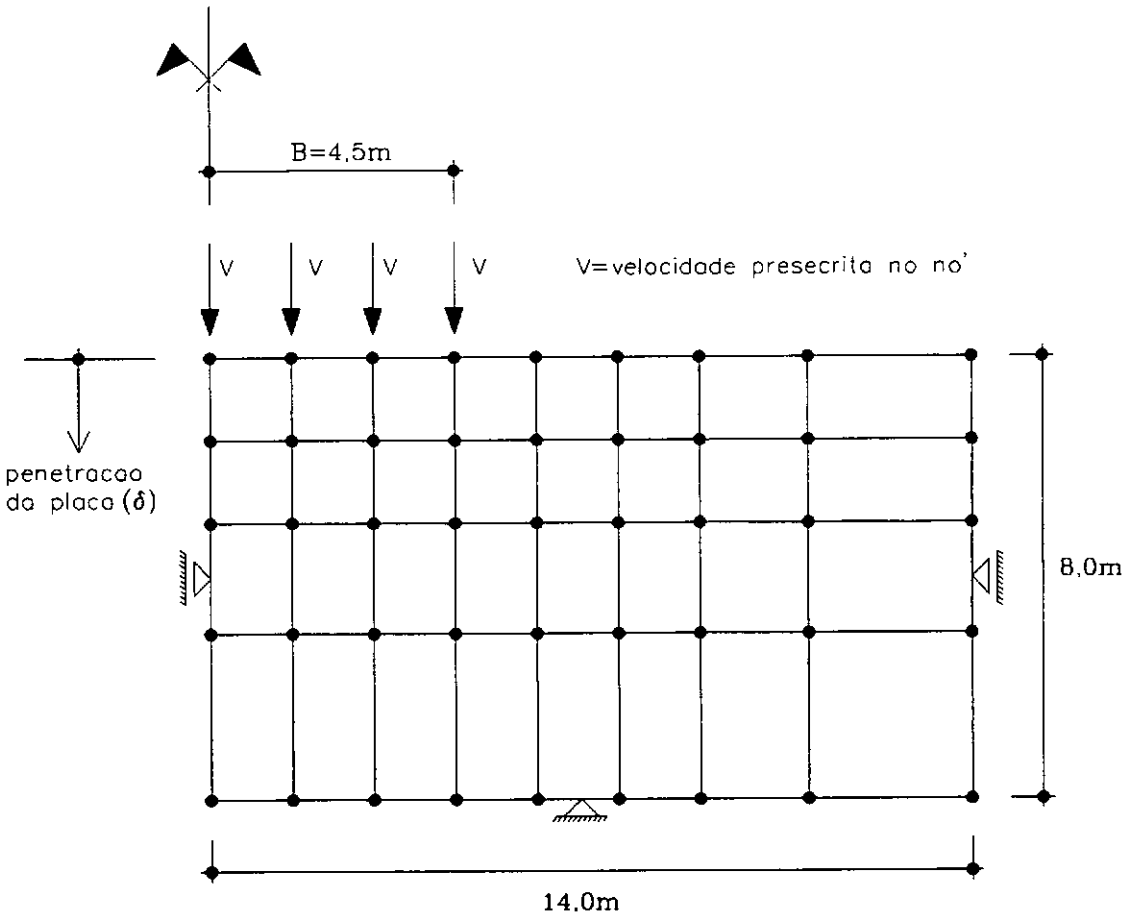


Figura VI.14 - Geometria do problema e malha de elementos finitos utilizada para resolvê-lo

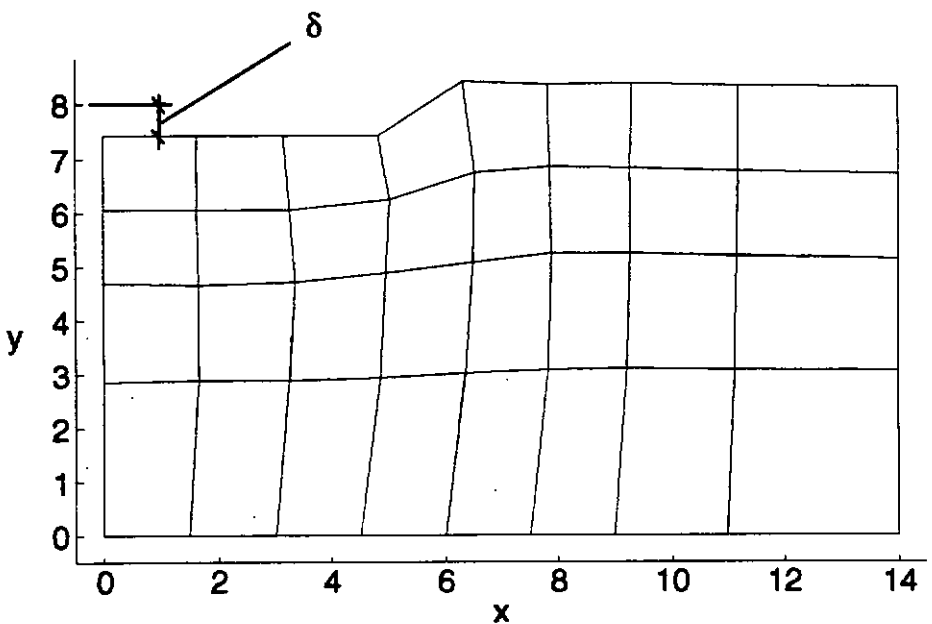


Figura VI.15 - Configuração do maciço para o ensaio de  $0,0005\text{m/min}$  no tempo  $t=1134\text{min}$ , onde  $\delta = 0,57\text{m}$

Na análise realizada, admitiu-se que o terreno era constituído de uma argila homogênea com a tensão de adensamento  $p_e'$  constante em todo maciço, correspondente ao seu valor no meio da camada (profundidade de 4,0m). Assim, através da equação (V.97) obtém-se uma tensão de adensamento de  $p_e' = 21,6 \text{KN} / \text{m}^2$ .

A partir da equação (V.98) obtém-se o valor do ângulo de atrito mobilizado inicial no maciço, que para  $K_0 = 0,8$  tem-se  $\phi_{\text{mob}_0} = 6,38^\circ$ . Através de (V.99) chega-se à deformação específica inicial  $\epsilon_{t_0} = 0,2177\%$  relativa a este ângulo de atrito mobilizado inicial.

Definidas as condições iniciais do problema, foram realizados os ensaios de placa. Nas figuras VI.16 a VI.19 estão as curvas de contorno do ângulo de atrito mobilizado, acréscimo de poro-pressão e nível de tensão cisalhante para o ensaio realizado a 0,005 m/min nos tempos 1min, 9,125min, 33,172min e 50,258min, que correspondem às respectivas penetrações  $\delta$  de 0m, 0,0406m, 0,1609m e 0,2463m.

O nível de tensão cisalhante é dado pela razão

$$R = \frac{q'}{p_e'} \quad (\text{VI.8})$$

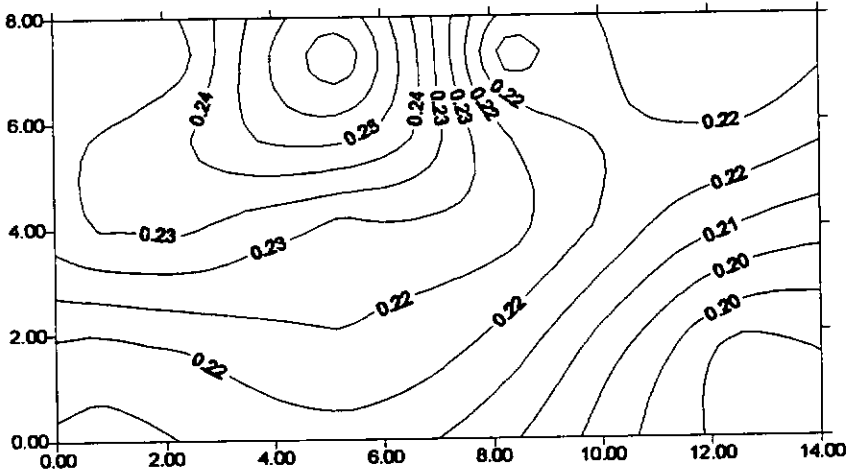
sendo  $q'$  a máxima tensão cisalhante no ponto considerado, que para o caso particular da deformação plana e condição não-drenada (incompressibilidade), é calculada por

$$q' = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (\text{VI.9})$$

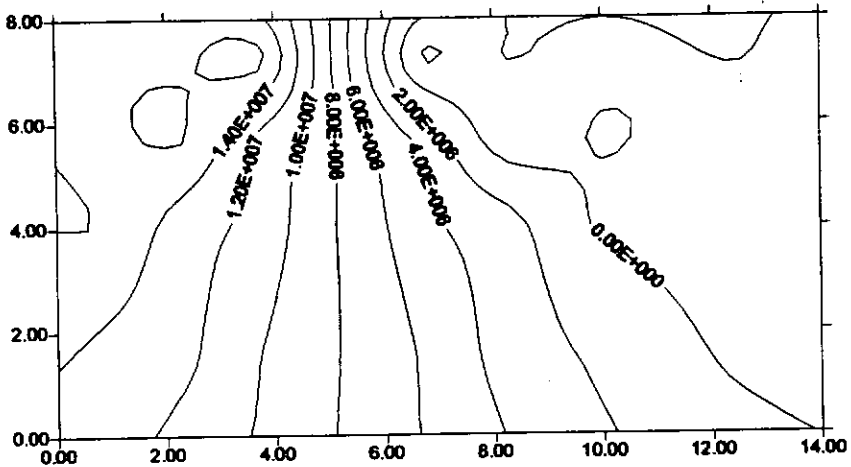
Deve-se observar que no tempo inicial de 1min, o ângulo de atrito mobilizado em todo maciço é  $\phi_{\text{mob}_0} = 6,38^\circ$ , por isso não se plotou curvas de contorno para  $\phi_{\text{mob}}$ . Nas figuras VI.18c e VI.19c, a área hachuriada corresponde à região dos pontos que atingiram a ruptura, caracterizada por  $\phi_{\text{mob}} = \phi_b = 23,73^\circ$ .

Finalmente na Figura VI.20 plota-se as curvas tensão-deslocamento para ambos os ensaios. Conforme já era de se esperar do modelo, o ensaio com velocidade maior (0,005m/min) apresentou cargas superiores para as mesmas

deformações que o realizado à velocidade menor (0,0005m/min). Nesta figura, observa-se também que as curvas começam fora da origem, indicando uma mobilização instantânea de resistência por viscosidade e por atrito.



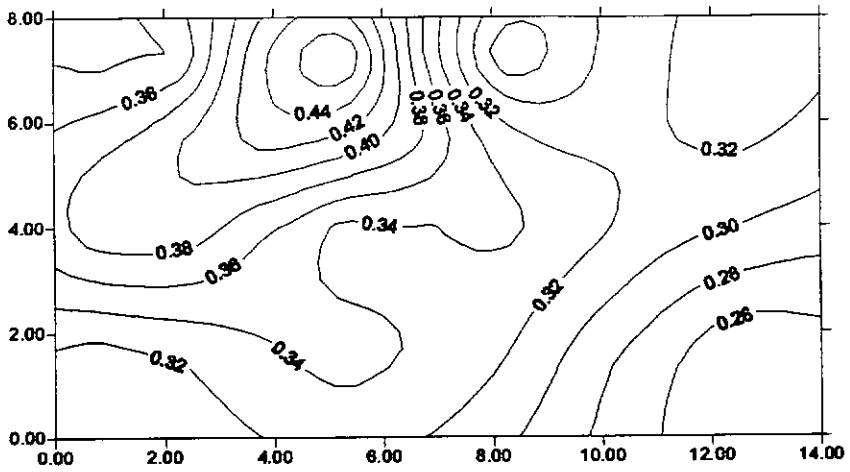
(a)



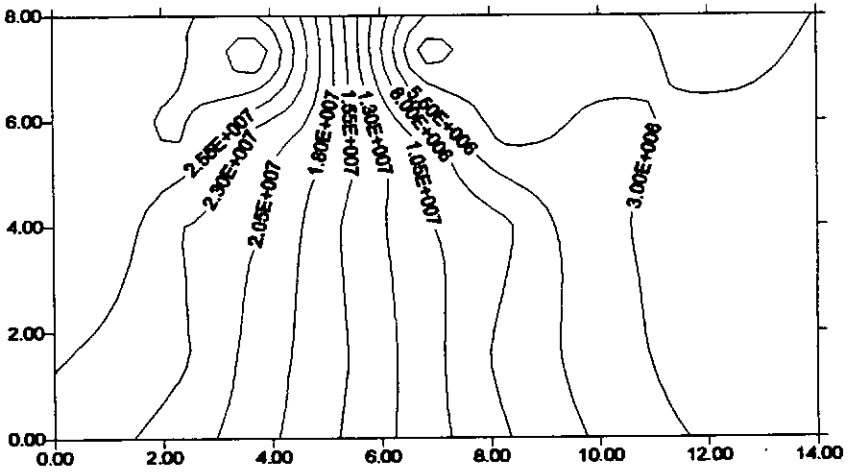
(b)

Figura VI.16 - Contornos para o ensaio realizado a 0,005m/min em  $t=1$ min:  
 (a) nível de tensão cisalhante e (b) acréscimo de poro-pressão ( $10^{-6}$ kpa).

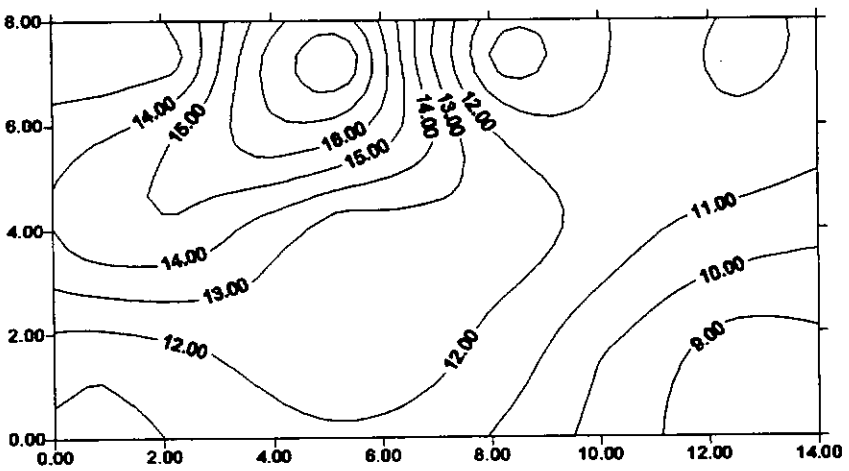
Ângulo de atrito mobilizado constante no maciço ( $\phi_{mob_0} = 6,38^\circ$ ).



(a)

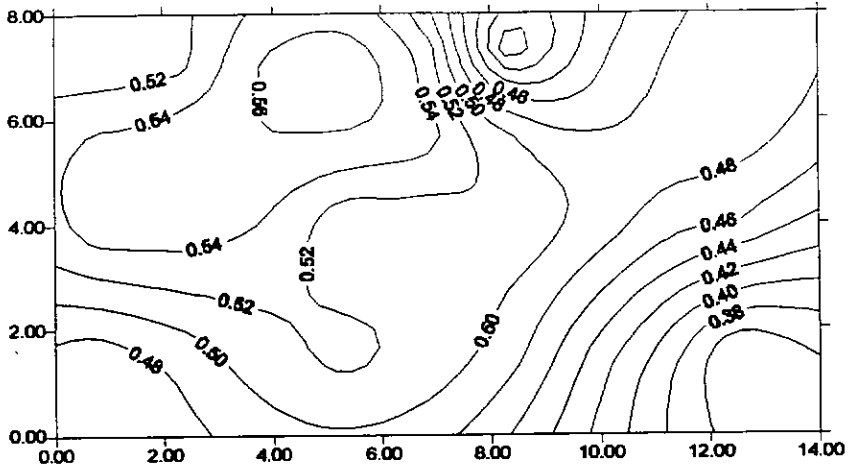


(b)

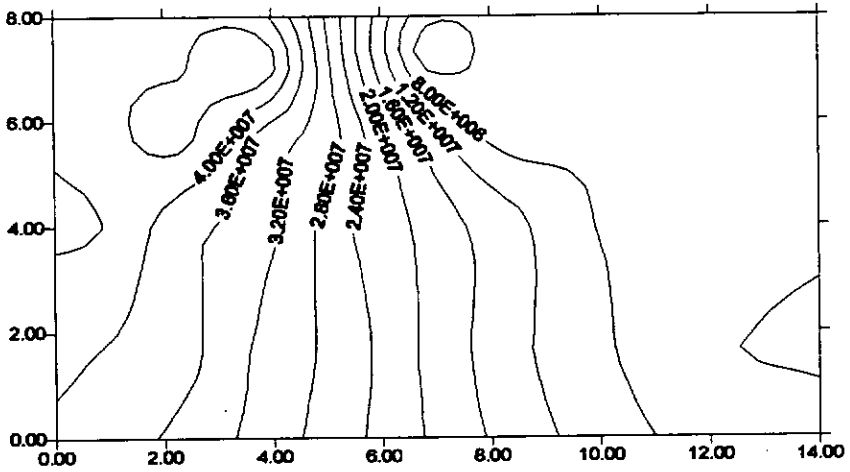


(c)

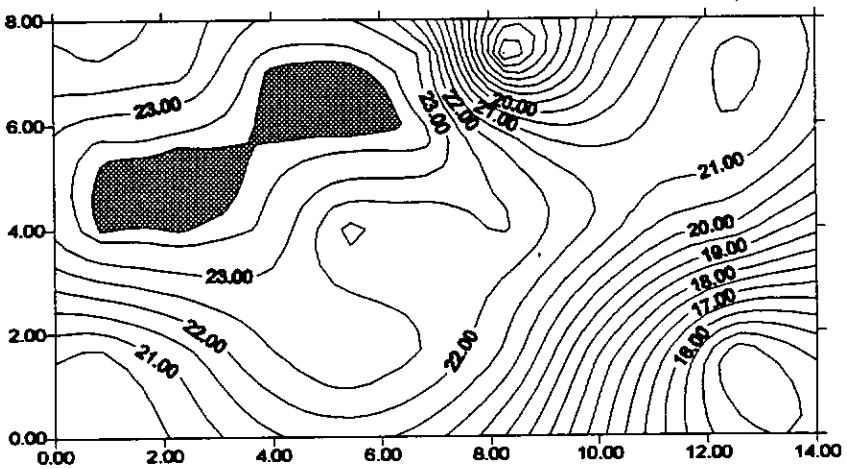
**Figura VI.17 - Contornos para o ensaio a 0,005m/min em t=9,125min:**  
**(a) nível de tensão cisalhante,**  
**(b) acréscimo de poro-pressão ( $10^{-6}$ KPa) e**  
**(c) ângulo de atrito mobilizado (graus)**



(a)



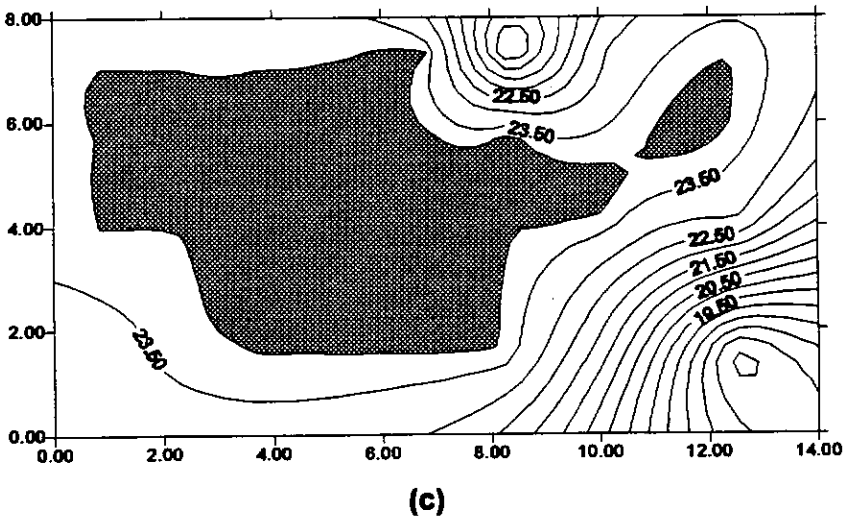
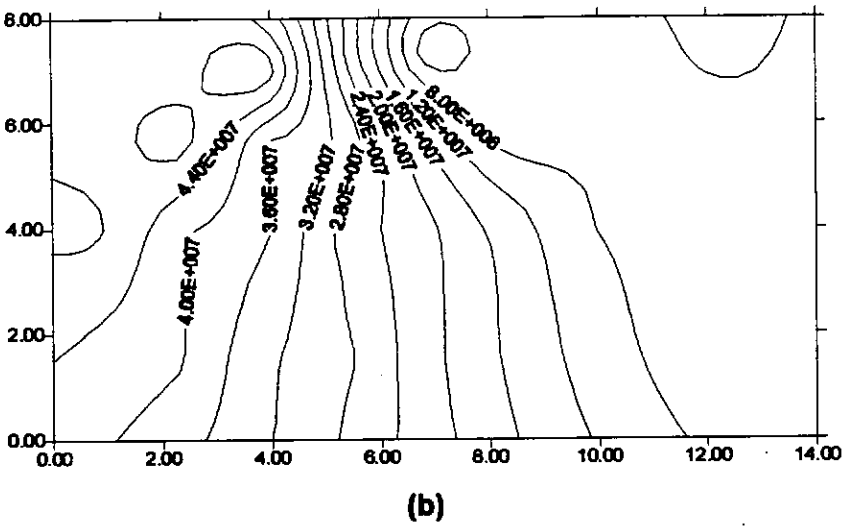
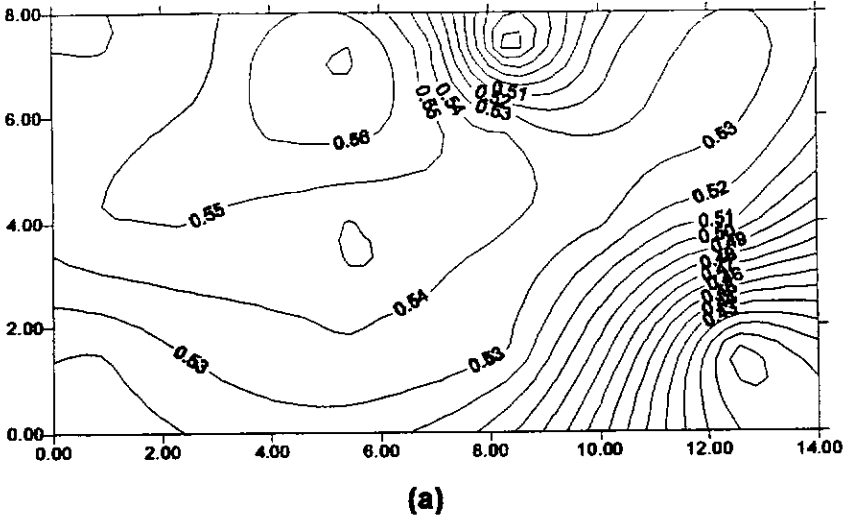
(b)



(c)

Figura VI.18 - Contornos para o ensaio a 0,005m/min em  $t=33,172\text{min}$ :

(a) nível de tensão cisalhante,  
 (b) acréscimo de poro-pressão ( $10^{-6}\text{KPa}$ ) e  
 (c) ângulo de atrito mobilizado (graus)



**Figura VI.19 - Contornos para o ensaio a 0,005m/min em  $t=50,258$ min:**  
**(a) nível de tensão cisalhante,**  
**(b) acréscimo de poro-pressão ( $10^{-6}$ KPa) e**  
**(c) ângulo de atrito mobilizado (graus)**

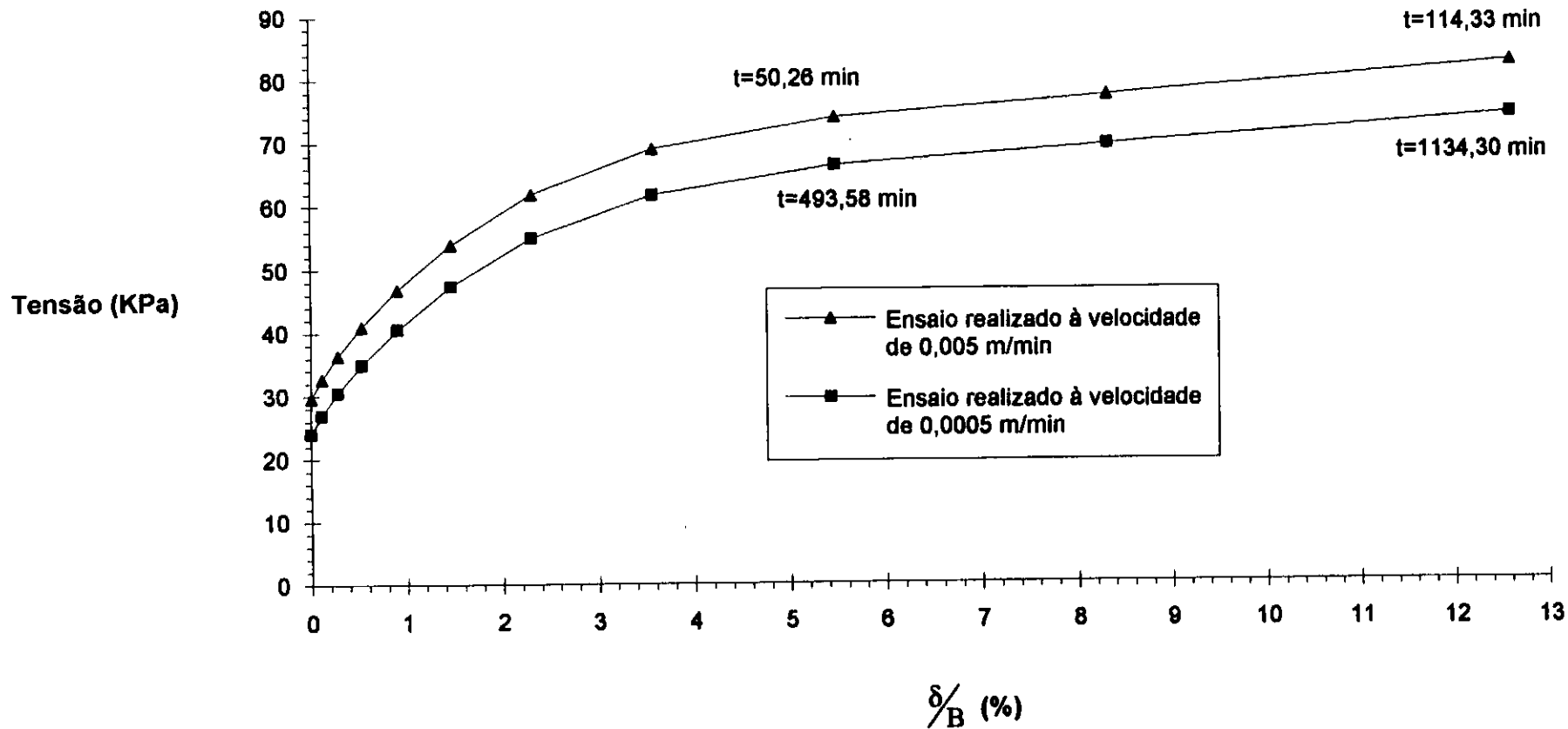


Figura VI.20 - Curvas tensão-deslocamento dos ensaios

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

#### VII.1 - CONCLUSÕES

A seguir são apresentadas por capítulo as conclusões deste trabalho:

##### Capítulo II:

Neste capítulo foi feita a revisão do trabalho de Martins (1992). Assim não são tiradas conclusões uma vez que o capítulo se propõe a ser um resumo geral do modelo originalmente apresentado.

##### Capítulo III:

É apresentado um algoritmo para a solução das equações simplificada e completa do creep não-drenado. O método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem se mostrou mais eficiente que os métodos de Euler e Runge-Kutta de 2ª ordem quando implementado no referido algoritmo.

##### Capítulo IV:

O modelo proposto por Martins (1992) se mostrou eficiente ao reproduzir os ensaios de creep não-drenado realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco, apesar da falta de acurácia na determinação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  devido à grande dispersão apresentada na curva experimental  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$ .

Ambas as soluções numéricas das equações diferenciais completa e simplificada do creep não-drenado se mostraram próximas das curvas experimentais dos ensaios analisados e, com exceção do ensaio de "step

creep" CR-I-ST-2, a solução numérica a partir da equação diferencial completa do creep reproduziu melhor os resultados experimentais que a da equação simplificada. Este último fato, apesar do pequeno número de ensaios analisados, vem confirmar que a simplificação realizada por Martins (1992) na dedução da equação diferencial que rege o fenômeno do creep não-drenado afasta sua solução dos pontos experimentais do ensaio real, sendo a solução da equação completa do creep a mais acurada.

O fato da função potência  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$ , com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  obtidos via técnica de otimização, se encontrar na região compreendida pela faixa de pontos que deveriam definir de maneira única a curva experimental  $C_0 \times \dot{\epsilon}_t$  (ver Figura IV.12) mostra que o modelo se apresentou consistente com os resultados experimentais.

Apenas no ensaio CR-I-2 verificou-se claramente que a técnica de otimização de parâmetros aplicada ao modelo aproximou as curvas reproduzidas das experimentais (ver figuras IV.15 e IV.16). Nos demais ensaios ambas as soluções numéricas, com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  determinados por Martins (1992) e via técnica de otimização, aparentemente se equívalem em termos de proximidade com as curvas experimentais  $\epsilon_t \times t$  e  $\dot{\epsilon}_t \times t$  dos ensaios.

Infelizmente o número de ensaios de creep disponíveis não foi suficiente para se tirar mais conclusões sobre os resultados positivos e negativos da aplicação ao modelo deste ajuste de parâmetros por técnicas de otimização; porém, serviu para mostrar que através de uma outra maneira de obtenção da função  $C_0(\dot{\epsilon}_t)$  o modelo se apresentou consistente com os resultados experimentais (principalmente no que se refere à Figura IV.12).

## Capítulo V:

Partindo-se da concepção de Terzaghi (1941) a respeito das argilas saturadas, onde os grãos sólidos são envoltos por uma camada de água adsorvida altamente viscosa, e considerando que para deformar um elemento deste solo é necessário mobilizar as resistências por atrito e por viscosidade, chega-se através das equações de equilíbrio aos seguintes resultados

$$\sigma = \sigma' + u \quad (\text{VII.1})$$

$$e \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}_f + \bar{\tau}_v \quad (\text{VII.2})$$

onde

$$\bar{\tau}_v = \eta(e) \cdot \bar{\dot{\epsilon}}_s \quad (\text{VII.3})$$

$$e \quad \tau_f = \|\bar{\tau}_f\| = \sigma' \cdot \tan \phi_{\text{mob}} \quad (\text{VII.4})$$

Esta colocação difere da de Martins (1992) por considerar um estado de tensão-deformação multiaxial, o que permite a rotação das direções principais de tensão e velocidade de deformação. Isto permite reencuniar o Princípio das Tensões Efetivas Expandido (PTEE), embora com o mesmo texto de Martins (1992), com uma mudança na tradução matemática de sua 1ª Parte devido à consideração dos vetores resultante das forças tangenciais  $\bar{\tau}$  e velocidade de deformação específica cisalhante  $\bar{\dot{\epsilon}}_s$  na seção considerada do elemento de solo terem direções diferentes.

Também as definições dos ângulos de atrito mobilizado e de atrito básico, apresentadas por Martins (1992) e rerepresentadas na Seção V.2.2, foram aqui consideradas gerais, independentemente se o estado do solo é de simetria axial de tensão e deformação ou não.

Portanto, dados os tensores de tensões efetivas  $[\sigma']$  e de velocidades de deformação específica  $[\dot{\epsilon}]$  atuando em um ponto do maciço de solo, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  deste solo e a tensão de adensamento  $p_e'$ , o ângulo de atrito mobilizado  $\phi_{\text{mob}}$  e seu correspondente plano podem ser obtidos através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{l} \text{maximize} \\ \{n\} \end{array} \quad \frac{\|\bar{n}\| \cdot \|\{\tau_f\}\|}{\sigma_n'} \quad (\text{VII.5})$$

$$\text{restrito a} \quad \|\{n\}\| = 1$$

onde

$$\bar{n} = \left[ \left( [\sigma'] - \eta \cdot [\dot{\epsilon}] \right) - \left( \sigma_n' - \eta \cdot \dot{\epsilon}_{L,n} \right) \cdot [I] \right] \cdot \{n\} \quad (\text{VII.6})$$

$$\sigma_n' = \{n\}^T \cdot [\sigma']^T \cdot \{n\} \quad (\text{VII.7})$$

$$\dot{\epsilon}_{L_n} = \{n\}^T \cdot [\dot{\epsilon}]^T \cdot \{n\} \quad (\text{VII.8})$$

$$\eta = \alpha \cdot (\dot{\epsilon}_t)^{\beta-1} \cdot p_e' \quad (\text{VII.9})$$

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{2} \quad (\text{VII.10})$$

que, resolvido, fornecerá  $\tan \phi_{\text{mob}} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma} \right)_{\text{max}}$  e seu plano correspondente, caracterizado pela normal unitária  $\{n_{\text{mob}}\}$ . É claro que na condição de ruptura

$$\tan \phi_b = \tan \phi_{\text{mob}} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma} \right)_{\text{max}}.$$

Ao implementar este problema de otimização em um programa computacional, verificou-se que entrando com os tensores  $[\sigma]$  e  $[\dot{\epsilon}]$  relativos ao estado de simetria axial, o ângulo de atrito mobilizado, dado por  $\tan \phi_{\text{mob}} = \left( \frac{\tau_f}{\sigma} \right)_{\text{max}}$ , e seu correspondente plano, dado pela normal unitária  $\{n_{\text{mob}}\}$ , estavam de acordo com os obtidos através das respectivas equações (V.32) e (V.31) desenvolvidas por Martins (1992), conforme já era esperado.

Resumindo as características essenciais do solo em estudo, trata-se de um material que não admite deformações instantâneas, apenas viscosas (dependentes do tempo), está submetido a carregamentos "quasi-estáticos" e, por fim, é incompressível. Ao se analisar tais características, concluiu-se que o problema de sua modelagem se enquadra no domínio da Mecânica dos Fluidos, mais especificamente no caso de fluxo viscoso, incompressível e lento (creeping), também conhecido como Problema de Stokes.

No problema de fluxo viscoso, lento e incompressível aqui considerado, todo processo é isotérmico e a variação da densidade do "fluido" é negligenciada, sendo todas as forças dinâmicas (devidas às acelerações) também negligenciadas. As deformações existentes são dependentes do tempo (viscosas) e irreversíveis após a remoção das cargas. Verifica-se que todas estas características estão em concordância com as propriedades admitidas para o material em questão.

Já foi estabelecido que as equações que regem o fenômeno do fluxo viscoso, lento e incompressível são análogas às da elasticidade

incompressível. A analogia entre estes dois fenômenos se dá trocando respectivamente os deslocamentos e o módulo cisalhante  $G$  na elasticidade incompressível pelas velocidades e o coeficiente de viscosidade  $\mu$  no problema do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes).

Faz-se necessária uma formulação especial para o Método dos Elementos Finitos (MEF) nas aplicações em elasticidade incompressível (ou aproximadamente incompressível). Isto se dá pelo fato da formulação padrão, onde os deslocamentos são as únicas variáveis independentes ("standard displacement formulation"), se apresentar numericamente instável quando o coeficiente de Poisson se aproxima de 0,5 e incapaz de resolver o problema quando o material se torna totalmente incompressível.

Zienkiewicz e Taylor (1994) indicam a Formulação Mista do MEF como a mais adequada para resolver o problema da elasticidade incompressível, e conseqüentemente seu problema análogo da Mecânica dos Fluidos, o do fluxo viscoso, lento e incompressível (Problema de Stokes).

Em relação à formulação completa do problema, apresentada na Seção V.4, listam-se as seguintes conclusões:

- (1) A abordagem da Mecânica dos Fluidos adotada apresenta uma grande vantagem sobre a da Mecânica dos Sólidos por não requerer nenhum tratamento especial para os problemas de grandes deformações. Isto porque na Mecânica dos Fluidos as variáveis independentes principais da análise são as velocidades, não havendo a não-linearidade geométrica existente em tais problemas quando formulados através da Mecânica dos Sólidos.
- (2) O algoritmo apresentado está de acordo com a Lei de Taylor enunciada primeiramente na Seção III.2 do Capítulo III.
- (3) Como a cada instante e em cada ponto no interior do maciço as equações que regem o Problema de Stokes e as relações constitutas do material devem ser simultaneamente satisfeitas, então o estado de tensão total no maciço não necessariamente permanecerá constante, uma vez que as relações constitutivas do material dependem da deformação específica total  $\epsilon$ , que cresce no decorrer do tempo. No caso do ensaio de creep não-drenado,

devido às condições de contorno impostas ao corpo-de-prova, a única solução possível é um estado de tensão total constante ao longo do tempo.

(4) O solo aqui estudado nunca romperá no momento da aplicação da carga, a ruptura sempre se dará ao longo do tempo. Isto porque com a aplicação do carregamento externo não haverá instantaneamente variação da mobilização de atrito no maciço nem ocorrerão deformações, havendo na realidade um salto no estado de tensão e o surgimento de um campo de velocidades no maciço. Com o passar do tempo, ou seja, com a evolução das deformações é que o atrito vai sendo gradativamente mobilizado (consequência do PTEE).

### **Capítulo VI:**

A formulação desenvolvida e implementada no MEF no Capítulo V mostrou-se coincidente com as soluções do modelo proposto por Martins (1992) para os ensaios de laboratório.

Apesar de não terem sido realizados objetivando-se o estudo do modelo apresentado por Martins (1992), os ensaios triaxiais convencionais não-drenados BM-CU-61 e BM-CU-62 realizados por Lacerda (1976) na argila da Baía de San Francisco foram satisfatoriamente reproduzidos.

Verificou-se, através da formulação desenvolvida no Capítulo V, que realizando dois ensaios de placa num depósito de argila mole com diferentes velocidades de penetração, o ensaio com velocidade maior apresenta uma curva tensão-deformação com maiores valores de tensões para as mesmas deformações que o ensaio realizado a uma velocidade menor. Observou-se também que as curvas começavam fora da origem, indicando uma mobilização instantânea de resistência por viscosidade e por atrito.

## **VII.2 - SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS**

Pesquisar outras expressões para as curvas propriedades do solo, de forma a melhorar a reprodução de ensaios através do modelo. Principalmente no que se refere às curvas  $\frac{q_b'}{p_e'} \times \varepsilon_1$  e  $\frac{u_s'}{p_e'} \times \varepsilon_1$ , adotadas como arcos de elipse na Seção III.6. Martins (1996) sugere que as mesmas possam ser representadas mais adequadamente através de linha poligonal obtida diretamente dos pontos experimentais.

Esclarecer pontos em que ficaram dúvidas e solidificar o modelo apresentado por Martins (1992) através de um programa detalhado de ensaios para um outro solo normalmente adensado bem conhecido (de preferência brasileiro) ou artificial (produzido em laboratório). Este programa deve ser composto de ensaios convencionais, de creep não-drenado e de relaxação de tensões seguindo as recomendações feitas por Martins (1992). Dentre elas, algumas devem ser lembradas, como as utilizações de um sistema automático de aquisição de dados e da técnica de "free ends" para minimizar os efeitos de restrição de topo e base. Nos ensaios convencionais, para se detectar o salto no estado de tensão devido à mobilização imediata da resistência por viscosidade, deve-se ligar a prensa com o pistão afastado do corpo de prova de forma que a velocidade selecionada seja a mesma durante todo ensaio.

Comparar através da formulação desenvolvida no Capítulo V utilizando o MEF as análises para ensaios de laboratório considerando os problemas de pequenas e grandes deformações (não-linearidade geométrica).

Verificar a formulação desenvolvida no Capítulo V utilizando o MEF para casos reais de campo (admitindo-se as limitações da formulação) ou ensaios de laboratório que reproduzam um estado de tensão-deformação multiaxial.

Iniciar estudos visando a implementação numérica do modelo para a condição drenada (admitindo-se variação volumétrica) a partir do trabalho de Garcia (1996), onde é enunciado o PTEE para o caso drenado. Esta implementação do problema de tensão-deformação pode ser feita acoplada com o problema de fluxo hidráulico através do MEF.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRENT, R. P., (1973), "Algorithms for Minimization without Derivatives", Prentice Hall, Englewood Cliffs;
- GARCIA, S. G. F., (1996), "Relação entre o Adensamento Secundário e a Relaxação de Tensões de uma Argila Mole Submetida à Compressão Edométrica", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil;
- HOFFMAN, J. D., (1993), "Numerical Methods for Engineers and Scientists", McGraw-Hill;
- LACERDA, W. A., (1976), "Stress-Relaxation and Creep Effects on Soil Deformation", Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, USA;
- LOPES, F. R. e FEIJOO, R., (1982), "An Approach to Soil Creep Modelling", Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, pp. 189-195;
- MARTINS, I. S. M., (1992), "Fundamentos de um Modelo de Comportamento de Solos Argilosos Saturados", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil;
- MARTINS, I. S. M., (1996), Comunicação pessoal;
- POWELL, M. J. D., (1964), "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function in Several Variables without Calculating Derivatives", Computer Journal, 7, pp. 155-162;
- RAMOS, V. C. L., (1995), "Implementação Numérica de Modelos Viscoelásticos para Análise do Comportamento dos Solos", 1º Seminário

para Exame de Qualificação Acadêmica para Doutorado, COPPE/UFRJ,  
Rio de Janeiro, Brasil;

**ROUSE, H. e HOWE, J. W., (1961), "Basic Mechanics of Fluids", John Wiley & Sons, New York;**

**SINGH, A. e MITCHELL, J. K., (1968), "General Stress-Strain-Time Function for Soils", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., Vol. 94, N° SM1, pp. 21-46;**

**TAYLOR, D. W., (1948), "Fundamentals of Soil Mechanics", John Wiley & Sons, New York;**

**TERZAGHI, K. (1936), "The Shearing Resistance of Saturated Soils and the Angle between the Planes of Shear", Proceedings of the 1<sup>st</sup> ICSMFE, Cambridge, pp. d-7;**

**TERZAGHI, K. (1941), "Undisturbed Clay Samples and Undisturbed Clays", Contributions to Soil Mechanics, 1941-1953, pp. 45-65;**

**ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR R. L., (1991), "The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity", Fourth Edition, Volume 2, McGraw-Hill;**

**ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR R. L., (1994), "The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems", Fourth Edition, Volume 1, McGraw-Hill;**