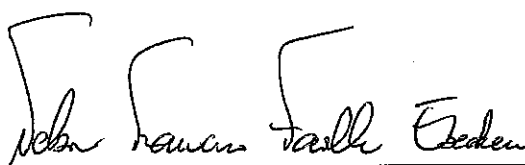


ANÁLISE DE TENSÕES E ESTABILIDADE DE POÇOS DE  
PETRÓLEO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

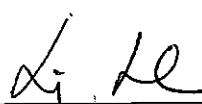
Andréa Nicolino de Sá

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL (M.Sc.)

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.  
(presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Adolfo Polillo Filho, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Luiz Landau, D.Sc.

Rio de Janeiro  
Estado do Rio de Janeiro - BRASIL  
ABRIL DE 1996

SÁ, ANDRÉA NICOLINO

ANÁLISE DE TENSÕES E ESTABILIDADE DE POÇOS DE  
PETRÓLEO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

VIII, 84p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COOPE

i. Mecânica das Rochas

ii. Estabilidade de Poços

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

À Carlos, Gabriela e Letícia  
pela sua compreensão e carinho.  
À minha mãe, meu pai  
(*in memoria*) e familiares pelo apoio.

## AGRADECIMENTOS

À Petróleo Brasileiro S.A. pela oportunidade de realizar este trabalho e permitir a utilização dos dados.

Ao Dr. Adolfo Polillo Filho pela amizade, apoio e pela orientação deste trabalho.

Ao Dr. Nelson Francisco Favilla Ebecken pela orientação e amizade.

Ao Eng. Rodolpho Tenório Viana pela amizade, apoio e sugestões.

A todos os demais companheiros da Petrobras e da COPPE, que em muito colaboraram para a elaboração deste trabalho.

O estudo da deformação de um meio poroso, assim como o conhecimento da distribuição de pressão durante perfuração e a vida produtiva do mesmo, é de fundamental importância na indústria do petróleo.

A instabilidade de formações produtoras inconsolidadas, pode acarretar a produção de grãos de areia concomitantemente com a produção de óleo ou gás, levando a um conseqüente aumento dos custos de produção, devido ao desgaste excessivo dos equipamentos, à redução da produtividade da formação e podendo, até mesmo, levar ao fechamento do poço.

A solução analítica desses problemas, na forma fechada, é ainda muito difícil, obrigando a uma série de hipóteses e considerações simplificadoras, as quais muitas vezes não correspondem a realidade.

A simulação de problemas de estabilidade de poços, pressupõe o estabelecimento de um modelo matemático, que trate adequadamente o meio poroso circundante, considerando sua deformação, durante o escoamento dos fluidos presentes no meio, freqüentemente assumindo-se que o sistema seja totalmente contínuo e homogêneo.

O uso de computadores na previsão do comportamento da rocha reservatório, quando sujeita a fluxo durante a vida produtiva do poço, vem sendo cada vez mais considerado fundamental para os estudos de viabilidade técnica e econômica do desenvolvimento de campos produtores. Particularmente, o seu uso possibilitou a análise de tensões e deformações de forma mais profunda, podendo até mesmo, incluir o comportamento não linear da fase sólida do meio poroso.

A complexidade crescente dos problemas, devido à necessidade de se considerar efeitos reais, como a solução do fluxo transiente totalmente acoplado com as soluções de deformação proposta por Biot, associado ao comportamento não linear da rocha, tornam os métodos numéricos de fundamental importância.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma ferramenta numérica, utilizando o Método dos Elementos Finitos, capaz de analisar o comportamento de uma rocha reservatório, e de prever a ocorrência e a extensão de uma zona de instabilidade, na região próxima à parede do poço, devido à sua perfuração e produção.

Foi adotado um método de solução totalmente acoplado para o sistema de equações que caracteriza o fluxo saturado de um fluido dentro de um meio poroso deformável, discretizando-se as equações no domínio físico e no domínio do tempo.

Os resultados obtidos pela simulação numérica, foram comparados com os resultados analíticos obtidos pela formulação teórica desenvolvida por Risnes, Bratli e Horsrud, que analisa as distribuições de tensão e pressão ao redor de uma cavidade cilíndrica, num meio poroso elastoplástico perfeito, sob condições de fluxo no regime permanente.

Finalmente são realizadas algumas simulações do estudo de estabilidade de casos práticos.

Palavras-chave:

- Método dos Elementos Finitos;
- Mecânica das Rochas;
- Estabilidade de Poços.

## ABSTRACT

*The study of porous medium deformation, as well as the knowledge of stress distribution affected by hydraulic unbalance due to drilling or through its productions operations, is fundamental for the oil industry.*

*The analytical solutions to these problems, in its closed form, is possible only when a series of hypothesis and considerations, which not always correspond to reality, are assumed.*

*The numerical simulation of such wellbore stability problems relies on the establishment of a math model in order to properly consider the surrounding porous medium also taking into account the flow of fluids and usually assuming it as a homogeneous and continuum one.*

*The use of computers to predict the reservoir rock behavior throughout the productive life of a well, has been fundamental when performing the more and more technical and economical feasibility analysis for the exploitation of a field.*

*Their use also enable a deepest stress strain analysis which includes the non-linear behavior of the porous media skeleton.*

*This work develops a numerical tool using the Finite Element Method, which is able to analyze the reservoir behavior and predict the existence and the extension of a zone of instability near the wellbore due to drilling and production.*

*A solution method fully coupled was adopted to solve the fluid flow equations of a saturated and deformable porous medium and have been discretized both in the time and physical domain.*

*Finally a few simulations of practical case were performed.*

**Keywords :**

*Finite Elements;  
Rock Mechanics;  
Wellbore Stability.*

|  |    |
|--|----|
| I- INTRODUÇÃO  | 01 |
| II- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA  | 04 |
| III- EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O FLUXO SATURADO EM UM MEIO POROSO DEFORMÁVEL                                       | 08 |
| III.1 - Comportamento Da Fase Sólida De Um Meio Poroso Deformável  | 08 |
| III.1.1- Tensão Total e Tensão Efetiva   | 09 |
| III.1.2- Tensões Principais  | 10 |
| III.1.3- Invariantes de Pressão  | 10 |
| III.1.4- Tensão hidroestática e tensão desviatória   | 12 |
| III.1.5- Modelos que definem a matriz constitutiva $D_r$   | 13 |
| III.1.5.1- Modelo Elastoplástico perfeito  | 13 |
| III.1.6- Equações de Equilíbrio  | 20 |
| III.2- Comportamento Da Fase Líquida Em Um Meio Poroso Deformável  | 22 |
| III.2.1- Equação da Continuidade   | 23 |
| IV- MÉTODO DE SOLUÇÃO ADOTADO  | 27 |
| IV.1-Discretização das equações  | 29 |
| VI.1.1- Discretização da Equação de Equilíbrio   | 30 |
| IV.1.2- Discretização da Continuidade  | 32 |
| IV.1.3- Discretização do sistema acoplado no domínio do tempo  | 33 |
| V- MODELO ANALÍTICO DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E PRESSÃO DE PORO EM UM POÇO PERFURADO EM ARENITO INCONSOLIDADO | 37 |
| V.1- Descrição do modelo teórico   | 37 |
| V.2- Tensões ao redor do poço não revestido em material elástico   | 39 |
| V.3- Tensões ao redor do poço não revestido em meio plástico   | 41 |

|  |        |
|--|--------|
| V.4- Influência do Revestimento no Comportamento do Estado de Tensões  | 45     |
| V.5- Análise Paramétrica da Influência das Propriedades Elásticas da Rocha e da Pressão de Poro nas Tensões ao Redor do Poço | 46     |
| VI- MODELAGEM COMPUTACIONAL ADOTADA  | 50     |
| VI.1- Discretização Geométrica do Contínuo   | 53     |
| VI.2- Características da Programação   | 53     |
| VI.3- Técnica De Solução Do Modelo Elasto-Plástico   | 54     |
| VI.4- Definição do Estado de Tensões Iniciais  | 55     |
| VI.5- Modelagem da Análise   | 55     |
| VI.5.1- Procedimento utilizado para simular a escavação do poço  | 56     |
| VI.5- Técnica de Solução do Sistema de Equações  | 57     |
| VII- EXEMPLOS NUMÉRICOS  | 58     |
| VII.1- Validação dos Resultados  | 58     |
| VII.2- Análise Comparativa dos Resultados Numéricos e Analíticos do Modelo Elasto-plástico                                   | 59     |
| VII.3-Análise de Casos Práticos  | 61     |
| VII.3.1-Exemplo 01 - Campo de Leste de Rio Urucu - AM  | 63     |
| VII.3.1.1- Fase de Perfuração  | 64     |
| VII.3.1.2- Fase de Produção  | 66     |
| VII.3.2- Exemplo 02 - Campo de Estreito -RN  | 68     |
| VII.3.2.1- Fase de Perfuração  | 69     |
| VII.3.2.2- Fase de Produção  | 70     |
| VII.3.3-Exemplo 01 - Campo de Buracica- BA   | 72     |
| VII.3.3.1- Fase de Perfuração  | 73     |
| VII.3.3.2- Fase de Produção  | 74     |
| VIII- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES   | 76     |
| <br>BIBLIOGRAFIA   | <br>80 |

## I- INTRODUÇÃO:

O estudo da deformação de um meio poroso assim como o conhecimento da distribuição de tensão resultante do desequilíbrio hidráulico devido a perfuração de um poço, ou durante a vida produtiva do mesmo, é de fundamental importância na indústria do petróleo.

A instabilidade de formações produtoras inconsolidadas pode acarretar a produção de grãos de seu arcabouço concomitantemente com a produção de óleo ou gás, levando a um conseqüente aumento dos custos de produção, devido ao desgaste excessivo dos equipamentos, à redução da produtividade da formação e podendo, até mesmo, levar ao fechamento do poço.

Sendo a mecânica das rochas inicialmente considerada uma disciplina empírica, devido principalmente à enorme complexidade encontrada na geologia, a solução analítica dos problemas de estabilidade, na forma fechada, é ainda muito difícil, o que obriga a uma série de hipóteses e considerações simplificadoras, as quais muitas vezes não correspondem a realidade.

As simulações de problemas de estabilidade de poços pressupõem o estabelecimento de um modelo matemático que trate adequadamente o meio poroso circundante, considerando sua deformação durante o escoamento dos fluidos presentes no meio, frequentemente assumindo-se que o sistema seja totalmente contínuo e homogêneo.

O trabalho pioneiro de Terzaghi (ref 36) sobre a teoria da consolidação unidimensional forneceu a base matemática para estas simulações. Posteriormente, a teoria tridimensional de Biot(ref 6,7), baseada nas relações constitutivas lineares entre tensão e deformação e no fluxo linear regido pela lei de Darcy, possibilitou o aprofundamento teórico efetuado por diversos autores.

A teoria usada para a validação deste trabalho foi a de Risnes, Bratli e Horsrud (ref. 31), que considera as distribuições de tensão e pressão de poro ao redor de uma cavidade cilíndrica, num meio poroso elastoplástico perfeito, sob condições de fluxo em regime permanente.

O uso de computadores na previsão do comportamento elastoplástico da rocha reservatório, vem tendo importância maior para os estudos de viabilidade técnica e econômica do desenvolvimento de campos produtores e particularmente, possibilitou a análise de tensões e deformações de forma mais profunda, permitindo a inclusão do comportamento não linear da fase sólida do meio poroso.

A complexidade crescente dos problemas devido a necessidade de se considerar efeitos reais, como a solução do fluxo transiente totalmente acoplado com as soluções de deformação proposta por Biot, associado ao comportamento não linear da rocha, tornam os métodos numéricos de fundamental importância.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma ferramenta numérica capaz de analisar o comportamento de uma rocha reservatório, e prever a ocorrência e extensão de uma zona de instabilidade na região próxima a parede do poço, devido à sua perfuração e produção.

No desenvolvimento desta ferramenta numérica foi utilizado o Método dos Elementos Finitos, o qual vem sendo utilizado em todas as áreas da engenharia para a solução aproximada de sistemas de equações diferenciais que descrevem problemas como: deformações de corpos rígidos, fluxo de fluidos em meio poroso e/ou quaisquer efeitos que possam ser descritos pelas leis clássicas da física.

Por tratar-se de uma solução aproximada, o técnico que estiver se utilizando desta ferramenta deve ter total controle das hipóteses consideradas no equacionamento do problema, bem como da influência de cada parâmetro envolvido na análise, para que seus resultados sejam avaliados da melhor forma possível.

O trabalho é apresentado em 8 capítulos. Depois desta introdução, mostra-se uma breve revisão de algumas publicações relevantes na área de estabilidade. No capítulo subsequente desenvolvem-se as equações que governam o fluxo em meio poroso deformável, considerando o comportamento da fase líquida e da fase sólida. Descreve-se, depois, o método de solução totalmente acoplado para o sistema de equações que caracteriza o fluxo saturado de um fluido dentro de um meio poroso deformável, discretizando-se as equações no domínio físico e no domínio do tempo. Apresentam-se a seguir, as considerações teóricas desenvolvidas por Risnes (ref 31), para a distribuição de tensão e pressão de poro ao redor de uma cavidade cilíndrica, a qual é utilizada na validação do programa utilizado.

Finalmente, descreve-se o programa desenvolvido, sua validação através da comparação entre resultados analíticos e numéricos, comentários pertinentes, conclusões e recomendações.

## II- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A partir do conceito de tensão efetiva e de que a rocha reservatório pode ser tratada como um meio poroso totalmente saturado, constituído de duas fases, uma líquida e outra sólida, o físico alemão Karl Terzaghi, em 1923, desenvolveu a teoria da consolidação unidimensional, a qual forneceu a base matemática para o desenvolvimento dos estudos da Mecânica das Rochas.

Terzaghi restringiu-se a problemas unidimensionais com carregamento constante, sendo necessário que se fizesse duas generalizações, o estudo tridimensional e o estabelecimento de equações válidas para cargas variáveis no tempo.

Um dos primeiros autores a estudar a distribuição de tensões em torno de um poço profundo foi Westergaard (ref 41), em 1940, que partindo da hipótese de pressão nula no interior do poço, estado hidrostático de tensões iniciais e efeito desprezível de fluxo de fluido, deduziu equações que comprovam a existência de uma região plastificada ao redor do poço, a qual segue o critério de Mohr-Coulomb.

Em 1940, Biot(ref. 6 e7) desenvolveu a teoria tridimensional da consolidação, baseando-se nas relações constitutivas lineares entre tensão e deformação e no fluxo linear regido pela lei de Darcy, assumindo incompressibilidade do fluido saturante, e isotropia do material. Em 1956, estendeu sua teoria considerando materiais anisotrópicos e relações constitutivas viscoelásticas lineares.

A teoria tridimensional de Biot, possibilitou o aprofundamento teórico efetuado por diversos autores, entre os quais se destacam, o de Paslay e Cheathan (ref.27) no qual é efetuado o estudo analítico do comportamento das tensões, em regime de fluxo permanente induzido pelo gradiente de pressão associado ao fluxo, considerando a rocha como um meio poroso elástico saturado com fluido incompressível. Sendo as propriedades do material e o carregamento simétricos em relação ao eixo do poço, primeiramente é

realizada uma análise onde a permeabilidade é uniforme na direção radial e em seguida considerando-se uma redução da permeabilidade na região adjacente ao poço, a qual leva a concluir que a consolidação da formação pode ter alteradas suas propriedades elásticas e permeabilidade na região adjacente ao poço, e que a estabilidade do poço é dependente da resistência da rocha, da espessura da região cuja permeabilidade foi reduzida e do estado inicial de tensão e pressão da formação.

Importante também o modelo proposto por Haimson e Fairhurst (ref. 17, 1967) para determinação da pressão de quebra em poços verticais levando-se em conta o estado de tensões ao redor do poço e a natureza do fluido em seu interior, considerando o comportamento elástico linear da rocha, formação isotrópica e homogênea e estado de tensões inicial não hidroestático, sendo o poço perfurado com o eixo paralelo a direção de uma das tensões principais. As tensões ao redor do poço são alteradas devido a redistribuição das tensões iniciais pelo efeito do furo propriamente dito, pelo diferencial de pressão poço-formação e pelo fluxo de fluidos no meio poroso.

Outro estudo importante é o de Gnirk (ref. 15), em 1972, o qual considerou a existência de uma zona plástica ao redor do poço, que obedece ao critério de plasticidade de Coulomb e, utilizando-se das teorias da elasticidade e plasticidade, desenvolveu equações analíticas que permitem calcular a pressão necessária na parede do poço a fim de prevenir o escoamento plástico em poços não revestidos e calcular as deformações plásticas associadas. Não foram considerados, porém, os efeitos devido ao fluxo.

Merece destaque também o trabalho de Geertsma (ref. 13,14), que estudou dois problemas específicos: influxo de partículas em poços de produção e fraturamento de formações em poços injetores. Geertsma analisou tensões e deformações, concluindo que a teoria da elasticidade era aplicável ao fraturamento de formações, sendo, entretanto, insuficiente para a caracterização do fenômeno de influxo de partículas, onde os efeitos da plasticidade na região adjacente a parede do poço deveriam ser considerados.

A formulação teórica utilizada como comparação deste trabalho foi desenvolvida por Risnes, Bratli e Horsrud, em 1982 (ref 31), e apresenta formulações para as tensões e

distribuição da pressão de poro ao redor de uma cavidade cilíndrica em um material elastoplástico perfeito sob condições de fluxo no regime permanente, levando em conta o desenvolvimento de uma zona plástica ao redor do poço. Risnes também desenvolve uma expressão de vazão crítica a qual induz à instabilidade da formação. A teoria sugere que a formação pode se manter estável, apesar do desenvolvimento da região plastificada até que a vazão atinja seu valor crítico. O trabalho desenvolvido por Risnes é apresentado com mais detalhes no capítulo 5.

A complexidade crescente dos problemas, devido à necessidade de se considerar efeitos reais, como a solução do fluxo transiente totalmente acoplado às soluções de deformação propostas por Biot, associado ao comportamento não linear da rocha, tornam os métodos numéricos de fundamental importância. e diversos autores passaram do estudo analítico desses problemas para as simulações numéricas com soluções aproximadas.

Diversos trabalhos têm sido elaborados com o objetivo de validar o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a avaliação da redistribuição de tensões em poços petrolíferos.

Dentre estes trabalhos, merece citação o realizado por Polillo (ref. 29), em 1987, que partindo de um programa de análise elastoplástica de escavações subterrâneas, adequou-o de forma a admitir pressão de poro em qualquer ponto do reservatório, além de gerar potenciais de fluxo através da resolução da equação de Laplace e introduzir corretamente o efeito das tensões iniciais gravitacionais em escavações. O método considera também os efeitos de fluido tanto penetrante como não penetrante.

Trabalho de fundamental importância foi o elaborado por Lewis e Schrefler(ref. 21), em 1989. Com o objetivo de estudar o fenômeno de subsidência ocorrido na cidade de Veneza, na Itália, eles desenvolveram um programa numérico bidimensional baseado na teoria de Biot considerando o comportamento plástico do meio poroso, em resposta ao fluxo de fluido e calor.

Outro simulador numérico foi desenvolvido por Vaziri e Byrne (ref 38), em 1990 que considera os mecanismos de ruptura da formação e a produção de areia em poços profundos perfurados em arenitos inconsolidados e a teoria de Biot na solução acoplada de fluxo e deformação, devidamente modificada para acomodar os efeitos do comportamento não linear da rocha e os efeitos da compressibilidade da fase fluida. A aplicação do modelo numérico indica que a desestabilização da formação está associada a um valor crítico de gradiente de pressão na parede do poço.

### **III-EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O FLUXO SATURADO EM MEIO POROSO DEFORMÁVEL**

As equações aqui desenvolvidas são consistentes com a teoria de Biot (ref. 6 e 7), assumindo-se um sistema contínuo e homogêneo, constituído de um meio poroso, que constitui a fase sólida, totalmente saturado de óleo, que constitui a fase líquida.

As tensões cisalhantes na fase líquida são muito pequenas, enquanto toda a pressão é distribuída pela fase sólida.

Considera-se também que o sistema segue a teoria das pequenas deformações, de tal forma que, sendo o fluido considerado totalmente incompressível, a lei de Darcy para o fluxo em meios porosos é válida para qualquer porção do sistema, a qualquer tempo.

Para tornar as equações mais realísticas, considerou-se o comportamento não-linear do meio poroso, apesar da teoria de Biot considerar comportamento linearmente elástico da fase sólida.

#### **III.1-Comportamento Da Fase Sólida De Um Meio Poroso Deformável**

A maior dificuldade de aplicar uma análise numérica para problemas de rocha reservatório, está na definição das relações constitutivas que representem, o mais realisticamente possível, as relações tensão - deformação.

Para isso, é de fundamental importância o domínio de alguns conceitos básicos, tais como:

### III.1.1 Tensão Total e Tensão Efetiva:

Assumindo-se que o meio poroso é completamente saturado, por um único fluido com pressão  $p$ , a tensão total, definida pelo vetor

$$\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}]^T$$

pode ser decomposta em duas parcelas, uma componente hidráulica, e outra chamada tensão efetiva, que atua somente no arcabouço da rocha, da seguinte forma:

$$\sigma = \sigma_{ef} + mp$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_{ef} &= \text{tensão efetiva;} \\ p &= \text{pressão de poro;} \\ m &= [1, 1, 1, 0, 0, 0]; \end{aligned} \quad \text{eq. 3.1.1}$$

Considerando o meio poroso homogêneo e isotrópico, o efeito da pressão de poro  $p$ , é introduzido pela deformação volumétrica  $\partial\varepsilon_p$ , causada pela compressão uniforme das partículas devido a pressão de poro.

$$\partial\varepsilon_p = m \cdot \frac{\partial p}{3k_s}$$

eq.3.1.2

sendo  $\frac{1}{k_s}$  a compressibilidade da rocha.

Desta forma, a tensão efetiva fica responsável pela maior parte da deformação total e a relação constitutiva pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\partial\sigma_{ef} = D_T (\partial\varepsilon - \partial\varepsilon_c - \partial\varepsilon_p - \partial\varepsilon_0)$$

eq.3.1.3

onde :

$\partial\varepsilon =$  deformação total;

$\partial\varepsilon_c = c dt$  parcela da deformação devido ao efeito de "creep";

$\partial\varepsilon_0 =$  deformação autigênica ;

$\partial\varepsilon_p =$  deformação volumétrica.

### III.1.2- Tensões principais:

Sendo  $S$  a matriz que define o estado de tensões em um ponto qualquer, em relação aos eixos ortogonais  $x,y,z$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} ;$$

definem-se como direções ou planos principais, aqueles em que não ocorrem tensões cisalhantes, mas somente tensões normais, as quais passam a ser chamadas de tensões principais  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , ortogonais entre si.

Neste caso, a matriz  $S_p$  que define o estado de tensões é:

$$S_p = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

### III.1.3- Invariantes de Tensão:

São combinações de tensões cujos valores são independentes da orientação do eixo de referência.

Os invariantes utilizados são:

- invariante da tensão principal :  $p'$

$$p' = -\frac{1}{3} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

eq. 3.1.4

- invariante do tensor desviador:  $q'$

$$q'^2 = \sigma_{xx} \cdot (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \sigma_{yy} \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) + \sigma_{zz} \cdot (\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) + 3 \cdot (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \quad \text{eq. 3.1.5}$$

- invariante de tensão angular :  $\theta'$

$$\theta' = \frac{1}{3} \cdot \text{sen}^{-1} \left[ \frac{-27 \cdot J_3}{2 \cdot q^3} \right] \quad \text{eq. 3.1.6}$$

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p' & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} + p' & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} + p' \end{bmatrix}$$

O terceiro invariante de tensão, introduzido por Nayak e Zienkiewicz (ref. 24), permite escrever a seguinte relação para as tensões principais:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p' \\ p' \\ p' \end{Bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot q \cdot \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta_0 - \frac{2}{3}\pi) \\ \text{sen} \theta_0 \\ \text{sen}(\theta_0 + \frac{2}{3}\pi) \end{Bmatrix} \quad \text{eq. 3.1.7}$$

onde  $\theta_0$  é um invariante de tensão angular, sendo que:

$$\theta' = \theta_0 + \frac{2}{3}\pi \cdot n$$

sendo  $n$  um número inteiro qualquer, o que leva ao seguinte limite:

$$\frac{\pi}{6} \geq \theta_0 \geq -\frac{\pi}{6}$$

Desta forma, os invariantes podem ser escritos em função das tensões principais,

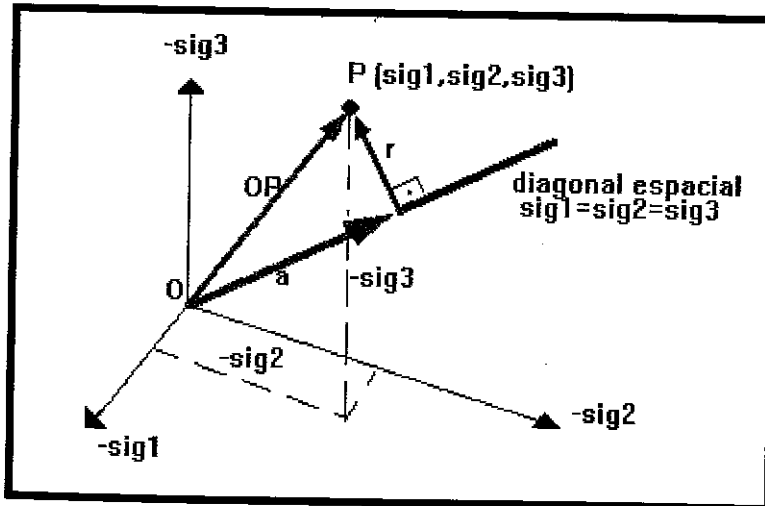
$$p' = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{eq. 3.1.8}$$

$$q'^2 = \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3(\sigma_3 - \sigma_1) \quad \text{eq. 3.1.9}$$

$$\theta_0 = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sqrt{3} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)} \right]; \quad \text{eq. 3.1.10}$$

### III.1.4- Tensão hidrostática e tensão desviatória:

Seja o espaço tridimensional no qual  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são os eixos ortogonais de referência e  $O$  a origem. A componente hidrostática  $a$  do estado de tensões de um ponto qualquer  $P$  é a projeção do vetor  $OP$  na diagonal espacial, ou seja, no eixo que passa na origem e é igualmente inclinado em relação aos eixos principais. Já a componente desviatória  $r$ , é a projeção do mesmo vetor no plano  $\pi$ , perpendicular a diagonal espacial, e que passa por  $P$ . (fig 3.1).



$$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) = \sqrt{3} \cdot p'$$

$$r^2 = (OP)^2 - a^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3 \cdot p'^2$$

$$r^2 = \frac{3}{2} q'^2$$

Fig 3.1 Estado De Tensões No Espaço Das Tensões Principais

### III.1.5- Modelos que definem a matriz constitutiva $D_T$

Muitos autores adotam o modelo elástico linear isotrópico, no qual o módulo de elasticidade ou módulo de Young  $E$ , e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , são duas constantes elásticas que definem a matriz  $D_T$ .

No caso de carregamentos simples, diversas simulações têm demonstrado que a análise linear propicia resultados bastantes aceitáveis, desde que os parâmetros  $E$  e  $\nu$  sejam cuidadosamente determinados.

Contudo, a maioria dos problemas de mecânica de rochas não pode ser resolvido dessa maneira. Daí o esforço de vários autores visando o desenvolvimento de modelos não-lineares. De fato, em situações que envolvam alguma complexidade como ruptura, deformações não recuperáveis, etc, os modelos elastoplásticos têm se mostrado mais representativos.

#### III.1.5.1- Modelo Elastoplástico Perfeito:

Em sua essência, o comportamento plástico caracteriza-se pela deformação irreversível, independente do tempo. No regime plástico, o material tende a se fragilizar, mas ainda é capaz de resistir a um determinado nível de tensão.

O objetivo da teoria matemática da plasticidade é estabelecer relações tensão-deformação para materiais plásticos que melhor caracterizem as observações experimentais.

Será apresentado um resumo da teoria genérica para análise do modelo elastoplástico, constante da referência 21, a qual considera o critério de ruptura de Mohr-Coulomb e superfície do estado crítico. Mais detalhes deste desenvolvimento pode ser encontrado nas referências 44,24,26,20.

Para se definir um critério de escoamento, é preciso conhecer o limite no qual o comportamento passa de elástico para plástico. Esse limite é calculado por meio de uma função da combinação das componentes do estado de tensão, chamada função de escoamento.

A função de escoamento define uma superfície e pode ser representada na forma:

$$F(\sigma_{ef}, \epsilon^p) = 0;$$

Deformações plásticas ocorrem, quando o valor da função ultrapassa a superfície de escoamento, ou seja, quando  $F > 0$ , já enquanto  $F < 0$ , o comportamento é dito elástico.

A direção da deformação plástica é definida pela superfície potencial plástica  $Q(\sigma_{ef})$ , sendo que a normal a esta superfície que passa pelo ponto de tensão, segue a regra de fluxo:

$$\boxed{d\epsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}} \quad \text{eq. 3.1.11}$$

Quando  $F \equiv Q$ , a regra de fluxo é dita associativa.

Diferenciando a função  $F$ , da forma:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot d\sigma_{ef} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \cdot d\epsilon^p = 0$$

e considerando a equação 3.11, obtém-se a condição de escoamento,

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot d\sigma_{ef} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} = 0$$

da qual pode-se explicitar o termo  $d\lambda$

$$d\lambda = - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot d\sigma_{ef}}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}} \quad \text{eq.3.1.12}$$

No modelo elastoplástico, uma vez que o limite de elasticidade foi atingido, a deformação total pode ser expressa como a soma de uma componente de deformação elástica  $d\varepsilon^e$ , com uma parcela plástica  $d\varepsilon^p$ , da forma:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = [D_e]^{-1} \cdot d\sigma_{ef} + d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} \quad \text{eq.3.1.13}$$

onde  $D_e$  é a matriz constitutiva elástica linear.

Multiplicando-se, ambos os lados da equação, por  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot D_e$ , têm-se:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot D_e \cdot d\varepsilon = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot D_e \cdot [D_e]^{-1} \cdot d\sigma_{ef} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot D_e \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}$$

Sabendo-se que :

$$D_e \cdot [D_e]^{-1} = I$$

e que ,

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot d\sigma_{ef} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \cdot d\varepsilon^p = 0$$

a equação toma a forma:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right\}^T \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} \cdot d\lambda$$
eq.3.1.14

sabendo-se que  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}$ , pode-se obter o valor de  $d\lambda$ .

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right\}^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}}$$
eq.3.1.15

substituindo-se, o valor de  $d\lambda$ , na equação 3.1.13, obtêm-se:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{D}_e]^{-1} \cdot d\sigma_{ef} + \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right\}^T \right] \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}$$
eq. 3.1.16

re-arrumando a equação acima, pode-se escrever

$$d\sigma_{ef} = \left[ \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e}{-\left\{ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right\}^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}} \right] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon};$$
(eq. 3.1.17)

Esta é chamada equação constitutiva elastoplástica, que simplificada pode ser representada pela expressão:

$$\boxed{d\sigma_{ef} = D_{ep} \cdot d\varepsilon}$$
eq. 3.1.18

onde  $D^{ep}$ , é a matriz constitutiva elastoplástica, construída em função dos vetores

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} \text{ e } \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \dots$$

A superfície de escoamento é calculada de acordo com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, cuja envoltória pode ser representada por uma linha reta, que relaciona tensão normal e cisalhante na ruptura, de acordo com a seguinte fórmula:

$$\boxed{\tau = c + \sigma_n \cdot \text{tg}\phi}$$
eq.3.1.19

- sendo
- $c =$  coesão aparente;
  - $\phi =$  ângulo de atrito interno;
  - $\tau =$  tensão cisalhante;
  - $\sigma_n =$  tensão normal

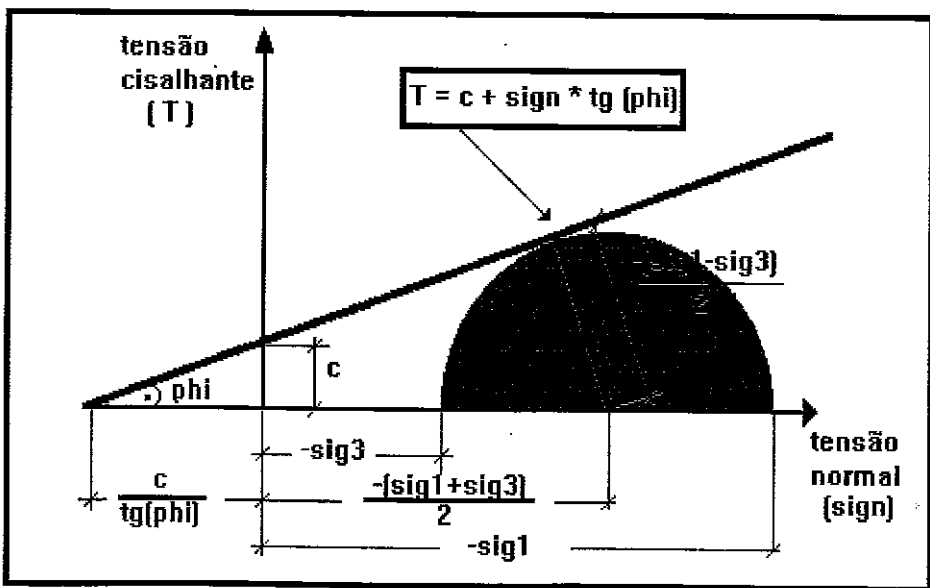


Fig 3.2-Envoltória De Ruptura De Mohr-Coulomb

da figura 3.2, tira-se que

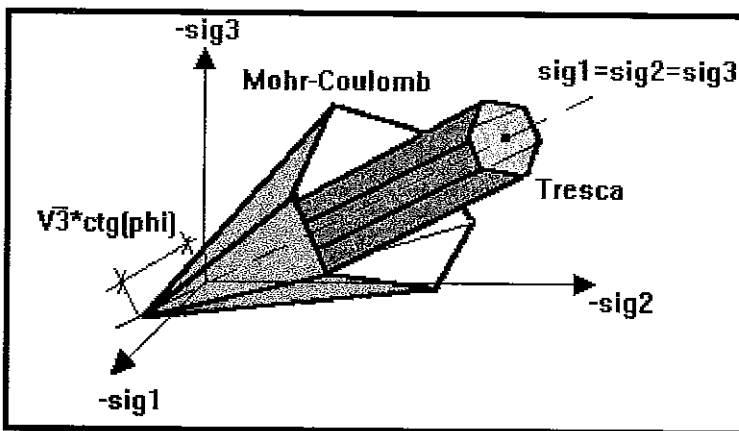
$$-(\sigma_1 - \sigma_3) = 2.c.\cos\phi - (\sigma_1 + \sigma_3)\text{sen}\phi ;$$

podendo-se observar que o critério de escoamento de Mohr-Coulomb, é independente da tensão principal intermediária.

Sendo  $\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}.q'.\cos\theta_0$  e  $\sigma_1 + \sigma_3 = 2.p' + \frac{2}{3}q'.\text{sen}\theta_0$ , a superfície de ruptura pode então ser expressa por:

$$\boxed{F = \left(\sqrt{3}.\cos\theta_0 - \text{sen}\theta_0.\text{sen}\phi\right)q' - 3.p'.\text{sen}\phi - 3.c.\cos\phi = 0} \quad \text{eq.3.1.20}$$

Em relação aos eixos principais de tensão, a superfície de escoamento representa uma pirâmide de base hexagonal, cujo eixo é a diagonal espacial (fig 3.3).



**Fig 3.3 - Superfície De Escoamento De Mohr Coulomb e de Tresca No Espaço Das Tensões Principais**

Sendo a superfície de escoamento, função dos invariantes  $p'$ ,  $q'$ ,  $\theta'$ , pode-se escrever que:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ef}} = \frac{\partial F}{\partial p'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial \sigma_{ef}} + \frac{\partial F}{\partial q'} \cdot \frac{\partial q'}{\partial \sigma_{ef}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta'}{\partial \sigma_{ef}}$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial p'} = -3 \cdot \text{sen } \phi;$$

$$\frac{\partial F'}{\partial q} = \sqrt{3} \cdot \cos \theta_0 - \text{sen } \theta_0 \cdot \text{sen } \phi;$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \sigma_{ef}} = - \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right\}^T;$$

$$\frac{\partial q'}{\partial \sigma_{ef}} = \frac{1}{2q'} \left\{ (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}), (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}), (2\sigma_{zz} - \sigma_{yy} - \sigma_{xx}), 6\sigma_{xy}, 6\sigma_{yz}, 6\sigma_{zx} \right\}^T;$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \sigma_{ef}} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \sigma_{ef}} = \frac{9}{3q'^3 \cos 3\theta_0} \left[ \frac{3J_3}{q'} - \frac{\partial q'}{\partial \sigma_{ef}} - \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ef}} \right]$$

Considerando-se apenas os casos de estado plano de tensão, plano de deformação e axissimétrico,  $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ , logo,

$$|J_3| = (\sigma_{zz} + p') \cdot \left\{ (\sigma_{xx} + p') \cdot (\sigma_{yy} + p') - \sigma_{xy}^2 \right\}$$

$$\frac{\partial |J_3|}{\partial \sigma_{ef}} = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{yy} + p')(\sigma_{zz} + p') \\ (\sigma_{xx} + p')(\sigma_{zz} + p') \\ (\sigma_{xx} + p')(\sigma_{yy} + p') - \sigma_{xy}^2 \\ -2 \cdot (\sigma_{zz} + p') \cdot \sigma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + \frac{1}{9} \cdot \left\{ \begin{array}{l} q'^2 \\ q'^2 \\ q'^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

eq. 3.1.21

Análise semelhante pode ser feita para a superfície potencial plástica, apenas substituindo  $\phi$  por  $\psi$ , nas equações acima, onde  $\psi$  é o ângulo de dilatação.

Sendo a coesão  $c$ , uma função da deformação volumétrica plástica  $d\epsilon_v^p$  da forma:

$$\boxed{\frac{dc}{d\epsilon_v^p} = \frac{c}{\chi} \quad \text{onde } \chi \text{ é constante;}} \quad \text{eq.3.1.22}$$

a parcela  $\frac{\partial F}{\partial \epsilon^p}$ , necessária para o cálculo da matriz constitutiva elastoplástica, é dada pela expressão:

$$\boxed{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ef}} = \frac{3c}{\chi} \cdot \cos \phi \cdot \frac{\partial Q}{\partial p'} = -\frac{qc}{\chi} \cdot \cos \phi \cdot \text{sen } \psi} \quad \text{eq. 3.1.23}$$

### III.1.6- Equação de equilíbrio:

Pelo princípio dos trabalhos virtuais aplicado a um corpo deformável em equilíbrio, o trabalho total realizado pelas forças internas é igual ao trabalho realizado pelas forças externas, durante o desenvolvimento de um grupo de deslocamentos virtuais, compatíveis com os vínculos externos e a continuidade do corpo.

$$\boxed{\bar{W}_{int} = \bar{W}_{ext}} \quad \text{eq. 3.1.24}$$

Considerando que as forças internas equivalem ao estado de tensões  $\sigma$ , presente em cada ponto do volume do corpo, que  $\bar{u}$  seja o campo de deslocamentos virtuais, e que  $\bar{\epsilon}$  seja o estado de deformações associado ao campo de deslocamentos virtuais, pode-se dizer que:

$$\boxed{\begin{aligned} d\bar{W}_{int} &= \bar{\epsilon}^T \cdot \sigma \cdot dv && \text{ou seja,} \\ \bar{W}_{int} &= \int_v \bar{\epsilon} \cdot \sigma \, dv \end{aligned}} \quad \text{eq. 3.1.25}$$

Incorporando o conceito de tensão efetiva obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot d\sigma_{ef} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot \mathbf{m} \cdot dp \, d\Omega - d\hat{f} = 0 \quad \text{onde}$$

$$d\hat{f} = \int_{\Omega} \delta u^T \cdot db \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u^T \cdot d\hat{t} \, d\Gamma$$

eq. 3.1.30

representa as variações das forças externas de volume e de contorno.

Substituindo-se ainda as equações,

$$d\sigma_{ef} = \mathbf{D}_T (d\varepsilon - d\varepsilon_c - d\varepsilon_p - d\varepsilon_0)$$

$$d\varepsilon_c = \mathbf{c} \cdot dt - \text{parcela de deformação devido ao efeito de } creep$$

$$d\varepsilon_p = \mathbf{m} \cdot \left( \frac{dp}{3k_s} \right)$$

e dividindo por  $dt$ , a equação de equilíbrio toma sua forma final:

$$\int \delta \varepsilon^T \cdot \mathbf{D}_T \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \, d\Omega + \int \delta \varepsilon^T \cdot \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \, d\Omega - \int \delta \varepsilon^T \cdot \mathbf{D}_T \cdot \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \cdot \frac{1}{3k_s} \, d\Omega -$$

$$- \int \delta \varepsilon^T \cdot \mathbf{D}_T \cdot \mathbf{c} \, d\Omega - \int \delta \varepsilon^T \cdot \mathbf{D}_T \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \, d\Omega - \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = 0$$

eq. 3.1.31

### III.2- Comportamento Da Fase Líquida Em Meio Poroso Deformável

A geometria complexa do caminho percorrido pelo fluido dentro do espaço poroso, torna praticamente impossível um tratamento analítico da velocidade de percolação do fluido no meio poroso.

Desta forma, adota-se uma velocidade de percolação, dita fictícia, a qual segue a lei de Darcy,

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla(p + \rho g h) \quad \text{eq. 3.2.1}$$

onde  $\mathbf{K}$  = permeabilidade absoluta;  
 $\mu$  = viscosidade do fluido;  
 $p$  = pressão de poro no fluido;  
 $\rho$  = densidade do fluido;  
 $g$  = aceleração da gravidade;  
 $h$  = altura hidrostática do fluido.

Deve ser ressaltado que, para considerar o fluxo multifásico simultâneo, vários outros conceitos como: saturação, permeabilidade relativa, fator volume de formação, solubilidade; deverão ser introduzidos, pois o comportamento de cada fase é alterado devido a interferência da outra.

### III.2.1-Equação da continuidade:

O comportamento da fase líquida saturada em um meio poroso deformável, é baseado na solução de um sistema que consiste da equação de equilíbrio do meio poroso e o princípio da conservação de massa, combinado com a lei de Darcy.

Sendo a equação da conservação da massa definida por:

$$\text{(taxa de acumulação de fluido)} + \nabla^T(\rho \mathbf{q})=0 \quad \text{eq. 3.2.2}$$

que quando combinada com a lei de Darcy (eq. 2.2.1), resulta em :

$$(\text{taxa de acumulação de fluido}) + \nabla^T \left[ -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \rho \nabla (p + \rho g h) \right] = 0 \quad \text{eq.3.2.3}$$

Diversos fatores contribuem para a taxa de acumulação de fluido, ou seja, para a variação do volume de poro:

- taxa de variação da deformação total:

$$\boxed{-m_T \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}} \quad \text{eq. 3.2.4}$$

- taxa de variação do volume do grão, com a variação da pressão:

$$\boxed{\frac{1 - \phi}{k_s} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}} \quad \text{eq. 3.2.5}$$

- taxa de variação da saturação:

$$\boxed{\phi \frac{\rho_o}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t}} \quad \text{eq. 3.2.6}$$

- taxa de variação da densidade do fluido:

$$\boxed{\phi \cdot S_o \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_o}{B_o} \right)} \quad \text{eq. 3.2.7}$$

- taxa de variação do tamanho do grão, com a variação da tensão efetiva  $\frac{\partial \sigma_{ef}}{\partial t}$ :

$$\boxed{\frac{1}{3k_s} \cdot m_T \cdot \frac{\partial \sigma_{ef}}{\partial t}} \quad \text{eq. 3.2.8}$$

considerando a eq. 2.1.3, obtêm-se que:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ef}}{\partial t} = \mathbf{D}_T \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} \right)}, \quad \text{eq. 3.2.9}$$

desta forma, a parcela da variação do tamanho do grão, devido a variação de tensão efetiva tem a seguinte expressão:

$$\boxed{\frac{1}{3k_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\mathbf{m}}{3k_s} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \mathbf{c} \right)} \quad \text{eq. 3.2.10}$$

Considerando-se as parcelas acima descritas para a taxa de acumulação de fluido, a equação da continuidade é escrita no forma:

$$\boxed{-\nabla^T \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu_o} \cdot \rho_o \cdot \nabla (\mathbf{p}_o + \rho_o \mathbf{g} \mathbf{h}) \right\} + \phi \frac{\rho_o}{\mathbf{B}_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} + \phi S_o \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_o}{\mathbf{B}_o} \right) + \rho_o \frac{S_o}{\mathbf{B}_o} \cdot \left\{ \left( -\mathbf{m}^T + \mathbf{m}^T \frac{\mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}_T \cdot \mathbf{c}}{3k_s} + \left[ \frac{(1-\phi)}{k_s} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \right\} = 0} \quad \text{eq. 3.2.11}$$

Considerando-se que no regime de fluxo multifásico, a pressão média  $\bar{p}$  é dada pela expressão :

$$\boxed{\bar{p} = S_o p_o + S_w p_w + S_g p_g} \quad \text{eq. 3.2.12}$$

e tratando-se de uma análise de fluxo saturado de óleo, isto é,  $S_o = 100\%$ ,  $S_w = 0$ , e  $S_g = 0$ , têm-se que:

$$\bar{p} = p_o \quad \text{e} \quad \frac{\partial S_o}{\partial t} = 0$$

Desconsiderando o efeito da variação do fator volume de formação  $\mathbf{B}_o$ , na parcela da variação da densidade do fluido, fica:

$$\boxed{\phi \cdot S_o \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_o}{B_o} \right) = \frac{\phi}{B_o} \cdot \frac{\partial \rho_o}{\partial t} = \frac{\phi}{B_o} \cdot \frac{\partial \rho_o}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \frac{\phi}{B_o} \cdot \frac{\partial \rho_o}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial t}} \quad \text{eq. 3.2.13}$$

Substituindo-se a parcela da variação da densidade de fluido (eq. 3.2.13), na equação da continuidade (eq. 3.2.11), multiplicando-se ambos os lados da equação por  $(1/\rho_o)$ , e considerando-se que, por definição:

$$\boxed{\frac{1}{k_o} = \frac{1}{\rho_o} \cdot \frac{\partial \rho_o}{\partial t}} \quad \text{eq. 3.2.14}$$

sendo  $1/k_o$  a compressibilidade do óleo, a equação da continuidade toma a forma,

$$\boxed{-\nabla^T \left\{ \frac{K}{\mu_o} \nabla (p_o + \rho_o gh) \right\} + \left( -m^T + \frac{1}{3k_s} m^T D_T \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{m^T D_T c}{3k_s} + \left[ \frac{(1-\phi)}{k_s} + \frac{\phi}{k_o} - \frac{1}{(3k_s)^2} m^T D_T m \right] \frac{\partial p_o}{\partial t} = 0} \quad \text{eq. 3.2.15}$$

Desde que este estudo considera o meio poroso totalmente saturado de óleo, a partir deste ponto, tem-se que:

$$p_o = p; \quad \rho_o = \rho; \quad \mu_o = \mu; \quad k_o = k_f$$

Assim, durante a análise, a equação da continuidade pode ser escrita na sua forma final:

$$\boxed{-\nabla^T \left\{ \frac{K}{\mu} \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left( -m^T + \frac{m^T D_T}{3k_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{m^T D_T c}{3k_s} + \left[ \frac{(1-\phi)}{k_s} + \frac{\phi}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} m^T D_T m \right] \frac{\partial p}{\partial t} = 0} \quad \text{eq. 3.2.16}$$

## IV- MÉTODO DE SOLUÇÃO ADOTADO

Para a análise do problema aqui considerado, foi adotada a solução do sistema de equações diferenciais que caracteriza o fluxo saturado de um fluido em meio poroso deformável, composto pelas seguintes equações:

**Equação de Equilíbrio:**

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{m} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{3k_s} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \mathbf{c} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} d\Omega - \frac{d\hat{f}}{dt} = 0$$

eq. 4.1

**Equação da continuidade:**

$$\bar{\alpha} \equiv -\nabla^T \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla (\mathbf{p} + \rho g \mathbf{h}) \right\} + \left( -\mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c}}{3k_s} + \left[ \frac{1-\phi}{k_s} + \frac{\phi}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

eq. 4.2

Estas equações devem ser satisfeitas em todo o domínio  $\Omega$  e ao mesmo tempo atender às condições de contorno prescritas.

A equação de equilíbrio é originada do princípio dos trabalhos virtuais portanto, as condições de contorno já estão embutidas na própria equação. Já o mesmo não ocorre com a equação da continuidade, a qual deverá atender às seguintes condições:

a) fluxo contínuo no contorno,

$$\boxed{\bar{\beta} \equiv -\mathbf{n}^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho \mathbf{g} \mathbf{h}) - \mathbf{q} = \mathbf{0}} \quad \text{eq. 4.3}$$

onde  $\mathbf{n}$  = vetor normal ao contorno  $\Gamma$ ;  
 $\mathbf{q}$  = fluxo / unidade de área do contorno.

b) pressão de poro

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{p}^b} \quad \text{eq. 4.4}$$

A equação da continuidade aplicada em todo o domínio e contorno, pode ser representada pela seguinte equação de resíduos ponderados:

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{a}^T \bar{\alpha} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{b}^T \bar{\beta} \, d\Gamma = \mathbf{0}} \quad \text{eq. 4.5}$$

Esta equação deve ser válida para qualquer valor arbitrário das funções  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , chamadas de funções de peso.

Reescrevendo a equação acima:

$$\boxed{\int_{\Omega} -\mathbf{a}^T \nabla^T \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho \mathbf{g} \mathbf{h}) \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left( -\mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3\mathbf{k}_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c}}{3\mathbf{k}_s} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left[ \frac{1-\phi}{\mathbf{k}_s} + \frac{\phi}{\mathbf{k}_f} - \frac{1}{(3\mathbf{k}_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ -\mathbf{b}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho \mathbf{g} \mathbf{h}) - \mathbf{b}^T \mathbf{q} \right\} d\Gamma = \mathbf{0}}$$

eq. 4.6

Levando-se em conta que a função  $[\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}]$  pertence ao conjunto das funções contínuas de primeira ordem no domínio  $\Omega$ , pode-se aplicar o teorema de Green à integral:

$$\int_{\Omega} -\mathbf{a}^T \nabla^T \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) \right\} d\Omega$$

que, em consequência, adquire a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) d\Gamma$$

Introduzindo esta expressão na equação de resíduos ponderados, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \left\{ \left[ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) + \mathbf{a}^T \left( -\mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \mathbf{a}^T \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c}}{3k_s} + \mathbf{a}^T \left[ \frac{1-\phi}{k_s} + \frac{\phi}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right] \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) + \mathbf{b}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) + \mathbf{b}^T \mathbf{q} \right\} d\Gamma = 0$$

eq. 4.8

Desde que a equação deve ser satisfeita para quaisquer funções  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , pode-se considerar que  $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ , recaindo-se na forma fraca da equação de resíduos ponderados para a equação da continuidade.

$$\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \left\{ \left[ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho\mathbf{gh}) + \mathbf{a}^T \left( -\mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \mathbf{a}^T \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c}}{3k_s} + \mathbf{a}^T \left[ \frac{1-\phi}{k_s} + \frac{\phi}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right] \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{q} \right\} d\Gamma = 0$$

eq. 4.9

#### IV.1- Discretização das Equações

Na discretização das equações de equilíbrio e da continuidade, utilizou-se o conceito de aproximação das funções de pressão de poro e deslocamento do MEF. Dessa

maneira, o domínio é subdividido em uma série de subdomínios fechados, de dimensão finita, chamados elementos, e cada elemento está ligado ao seu adjacente exclusivamente através de pontos discretos chamados de pontos nodais ou nós.

A aproximação do MEF fundamenta-se em que no interior do elemento o valor dos deslocamentos e da pressão de poro são interpolados apenas em função dos valores correspondentes aos pontos nodais que definem cada elemento. Matematicamente pode-se escrever:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}};$$

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{p}};$$

onde,  $\bar{\mathbf{u}}$  = deslocamentos nodais,  
 $\bar{\mathbf{p}}$  = pressão de poro nodal,  
 $\mathbf{N}$  e  $\bar{\mathbf{N}}$  = funções de interpolação e  
 $\mathbf{B}$  = matriz que relaciona as deformações com deslocamento nodal.

As funções de interpolação devem ser tais que assegurem a continuidade do campo de deslocamentos e pressão entre elementos adjacentes, de modo a garantir o não-surgimento de fendas ou interpenetrações entre os elementos, durante a deformação.

#### IV.1.1- Discretização da Equação de Equilíbrio

Adotando-se as mesmas aproximações anteriores para  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\mathbf{p}$ , pode-se escrever as parcelas da equação de equilíbrio (eq. 4.1) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \bar{\mathbf{N}} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \frac{1}{3k_s} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \bar{\mathbf{N}} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \frac{1}{3k_s} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \mathbf{c} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \mathbf{D}_T \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_T \frac{d\varepsilon_0}{dt} d\Omega$$

$$d\hat{\mathbf{f}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \delta \bar{\mathbf{u}}^T d\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \delta \bar{\mathbf{u}}^T d\hat{\mathbf{t}} d\Gamma$$

Como em todas as parcelas aparece o termo  $\delta \bar{\mathbf{u}}^T$ , a equação de equilíbrio discretizada toma sua forma final:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \bar{\mathbf{N}} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \bar{\mathbf{N}} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \frac{1}{3k_s} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c} d\Omega - \frac{1}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T d\varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T d\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T d\hat{\mathbf{t}} d\Gamma \right\} = \mathbf{0}$$

eq. 4.1.1

fazendo :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega;$$

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{m} \bar{\mathbf{N}} - \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3k_s} \bar{\mathbf{N}} \right) d\Omega;$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c} d\Omega;$$

$$d\hat{\mathbf{f}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T d\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T d\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T d\varepsilon_0 d\Omega;$$

obtem-se uma forma simplificada da equação de equilíbrio, válida para qualquer valor de deslocamento virtual  $\delta \mathbf{u}$

$$\boxed{K \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} + L \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} - C - \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{0}} \quad \text{eq. 4.1.2}$$

#### IV.1.2- Discretização Da Equação Da Continuidade

A forma fraca da equação da continuidade dada pela equação :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \left\{ \left[ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla (\mathbf{p} + \rho \mathbf{g} \mathbf{h}) + \mathbf{a}^T \left( -\mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \mathbf{a}^T \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c}}{3k_s} + \mathbf{a}^T \left[ \frac{1-\phi}{k_s} + \frac{\phi}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right] \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T \mathbf{q} d\Gamma = 0$$

considerando as mesmas aproximações feitas no caso anterior (item IV.1) para deslocamento, deformação e pressão, e fazendo  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{N}}$ , de acordo com a aproximação de Galerkin, que permite igualar  $\mathbf{a}$  a qualquer função, a equação da continuidade é reescrita na forma:

$$\boxed{\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \bar{\mathbf{N}})^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \bar{\mathbf{N}} d\Omega \bar{\mathbf{p}} + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \left( -\mathbf{m}^T + \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c}}{3k_s} d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \left[ \left( \frac{1-\phi}{k_s} \right) + \frac{\phi}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right] \mathbf{N} d\Omega \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{q} d\Gamma + \\ & \int_{\Omega} (\nabla \bar{\mathbf{N}}^T) \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \rho \mathbf{g} \mathbf{h} d\Omega = 0 \end{aligned}} \quad \text{eq. 4.1.3}$$

Fazendo:

$$H = \int_{\Omega} (\nabla \bar{\mathbf{N}})^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \bar{\mathbf{N}} d\Omega;$$

$$S = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left( \frac{1-\phi}{k_s} + \frac{\phi}{k_r} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \bar{\mathbf{N}} \, d\Omega$$

$$L^T = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \left( \mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{D}_T}{3k_s} \right) \mathbf{B} \, d\Omega$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\bar{\mathbf{N}}^T}{3k_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{c} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \bar{\mathbf{N}})^T \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \rho g h \, d\Omega$$

obtem-se a forma simplificada da equação da continuidade discretizada:

$$\boxed{-H\bar{\mathbf{p}} - S \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} + L^T \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} - \bar{\mathbf{f}} = 0}$$

eq. 4.1.4

#### IV.1.3- Discretização Do Sistema Acoplado No Domínio Do Tempo

Seja o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} + \mathbf{L} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} - \mathbf{C} - \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0 \\ -H\bar{\mathbf{p}} - S \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} + L^T \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} - \bar{\mathbf{f}} = 0 \end{cases}$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix}$$

Dividindo-se o domínio do tempo em elementos chamados passos de tempo, as integrais passo a passo, podem ser somadas a fim de se obter a variação total dos parâmetros envolvidos.

Sendo  $F = 0$ , então  $\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{F} \, dt = \mathbf{0}$ , onde  $\bar{\mathbf{g}}$  é uma função arbitrária do tempo.

Aplicando-se este procedimento ao sistema de equações, obtém-se:

$$\int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \bar{\mathbf{g}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} dt + \int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \bar{\mathbf{g}} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} dt = \int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \bar{\mathbf{g}} \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} dt$$

eq. 4.1.5

Adotando-se uma aproximação linear para  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{p}}$  no domínio do tempo da forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} & \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^t & \mathbf{N}_2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{t_k} & \bar{\mathbf{p}}^{t_k} \\ \bar{\mathbf{u}}^{t_k+\Delta t} & \bar{\mathbf{p}}^{t_k+\Delta t} \end{bmatrix}$$

onde :  $\mathbf{N}_1^t = \mathbf{1} - \alpha$  ;

$$\mathbf{N}_2^t = \alpha$$

e fazendo  $\alpha = \frac{t - t_k}{\Delta t_k}$ , o que caracteriza o método trapezoidal generalizado,

$$\mathbf{N}_1^t = \mathbf{1} - \frac{t - t_k}{\Delta t_k};$$

$$\mathbf{N}_2^t = \frac{t - t_k}{\Delta t_k},$$

logo,

$$\frac{dN_1^t}{dt} = -\frac{1}{\Delta t_k} \quad \text{e} \quad \frac{dN_2^t}{dt} = \frac{1}{\Delta t_k},$$

então,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N_1^t & N_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t_k} & \frac{1}{\Delta t_k} \end{bmatrix}}$$

eq. 4.1.6

Substituindo-se a eq. 4.1.6 na eq. 4.1.5, obtêm-se:

$$\boxed{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \bar{g} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -H \end{bmatrix} \left[ (1-\alpha) \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}_{t_k} + \alpha \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t} \right] dt + \int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \bar{g} \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & -S \end{bmatrix} \left[ -\frac{1}{\Delta t_k} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}_{t_k} + \frac{1}{\Delta t_k} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t} \right] dt = \int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \bar{g} \begin{Bmatrix} df/dt + C \\ \bar{f} \end{Bmatrix} dt}$$

eq. 4.1.7

Adotando-se o método da colocação pontual para efetuar a integração no tempo, tem-se que avaliar as matrizes  $H$ ,  $K$ ,  $L$  e  $S$  somente uma vez em cada passo de tempo, quando  $\alpha = \bar{\alpha}$ , sendo  $1 \geq \bar{\alpha} \geq 0$ , então o sistema discretizado no domínio do tempo se escreve da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K & L \\ L^T & -S - \bar{\alpha}H\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}_{t_k+\Delta t_k} = \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & -S + (1-\bar{\alpha})H\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}_{t_k} + \begin{Bmatrix} df/dt + C \\ \bar{f} \end{Bmatrix} \Delta t_k$$

Vários estudos de estabilidade dessa solução foram realizados e, de acordo com os trabalhos de Zienkiewicz (ref.42,43) a estabilidade da solução no domínio do tempo pode ser garantida para qualquer valor de  $\bar{\alpha} \geq 1/2$ .

Fazendo  $\bar{\alpha} = \mathbf{1}$ , o sistema passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & -\mathbf{S} - \mathbf{H}\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_{t_k + \Delta t_k} - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_{t_k} = \begin{Bmatrix} \mathbf{df}/\mathbf{dt} + \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \Delta t_k.$$

Considerando que,

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_{t_k + \Delta t_k} - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}_{t_k} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix},$$

este sistema pode ser resolvido pelo método puramente incremental na forma:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & -\mathbf{S} - \mathbf{H}\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{df}/\mathbf{dt} + \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} \cdot \Delta t_k}$$

eq. 4.1.8

## **V-MODELO ANALÍTICO DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E PRESSÃO DE PORO DE UM POÇO PERFURADO EM ARENITO INCONSOLIDADO**

A formulação analítica utilizada para comparação com os resultados obtidos nas simulações numéricas realizadas neste trabalho foi desenvolvida por Risnes, Bratli e Hosrud (ref. 31). Trata-se de uma solução analítica, a partir da qual se elaborou um programa, em linguagem FORTRAN, com o qual foi possível obter resultados analíticos para comparação com os resultados numéricos.

### **V.1.Descrição do modelo teórico**

Considerando uma cavidade cilíndrica vertical perfurada, com simetria axial, através de um meio poroso permeável, ( fig. 5.1), Risnes, Bratli e Horsrud (ref 31 ,1982), desenvolveram uma formulação analítica para o cálculo de tensões e pressão de poro ao redor de um poço.

O meio poroso é considerado isotrópico e homogêneo, e completamente saturado de fluido. As tensões a que está sujeito distribuem-se nas três direções principais: radial, tangencial e vertical. Risnes considera ainda que o material é elastoplástico perfeito, obedecendo ao critério de ruptura de Coulomb, nas condições de fluxo estacionário.

As hipóteses assumidas pelo modelo são bastante realistas, uma vez que, na prática, as deformações são pequenas e normais à parede do furo do poço.

Durante a vida produtiva do poço, as pressões de poro e tensões são grandezas dependentes do tempo. Risnes, entretanto, considerou-as estacionárias, admitindo que as tensões a serem analisadas são aquelas próximas à parede do poço, ou seja, que são de pequena magnitude e que sofrem variações desprezíveis. Admitiu também a existência de

uma fonte contínua de energia, como um aquífero, que no raio externo  $R_o$  mantém a pressão de poro constante e igual a  $P_o$ .

Os parâmetros envolvidos na solução de Risnes são os seguintes:

- raio do poço  $R_w$ ;
- espessura da zona produtora  $h$ ;
- ângulo de fricção  $\phi$ ;
- coesão  $S_o$ ;
- coeficiente de Poisson  $\nu$ ;
- permeabilidade  $K$ ;
- viscosidade do fluido  $\mu$ ;
- vazão de fluxo  $q$ ;
- pressão do fluido no poço  $P_w$ ;
- pressão no raio externo  $P_o$ ;
- tensão vertical *in situ*  $\sigma_z$ .

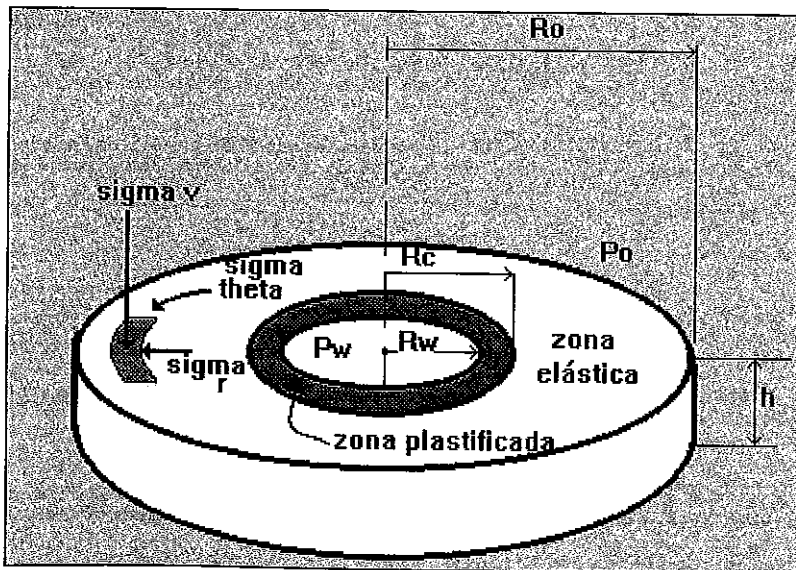


Fig 5.1- Configuração Do Problema

## V.2 - Tensões ao redor do poço não-revestido em material elástico

Em um material poroso, as relações das tensões são dependentes da pressão de fluido e das constantes elásticas de acordo com a teoria de Biot (ref. 1), sendo a solução dada pelas seguintes expressões:

$$\sigma_r = \sigma_m + (\sigma_m - \sigma_n) \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left[ 1 - \left( \frac{R_o}{r} \right)^2 \right] - (P_o - P_i) \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \cdot \beta \cdot \left\{ \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{R_o}{r} \right)^2 \right] + \frac{\ln(R_o/r)}{\ln(R_o/R_i)} \right\} \quad \text{eq. 5.2.1}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_m + (\sigma_m - \sigma_n) \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left[ 1 + \left( \frac{R_o}{r} \right)^2 \right] - (P_o - P_i) \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \cdot \beta \cdot \left\{ \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{R_o}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{\ln(R_o/R_i)} \cdot [\ln(R_o/r) - 1] \right\} \quad \text{eq. 5.2.2}$$

$$\sigma_z = \sigma_m + 2\nu(\sigma_m - \sigma_n) \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} - (P_o - P_i) \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \cdot \beta \cdot \left\{ \nu \cdot \frac{2R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{2}{\ln(R_o/R_i)} \cdot \left[ \ln(R_o/r) - \frac{\nu}{2} \right] \right\} \quad \text{eq. 5.2.3}$$

sendo  $\beta = 1 - \frac{C_r}{C_b}$  o fator de compressibilidade da rocha (quando  $\beta = 1$ , a rocha é considerada incompressível).

Pela típica distribuição de tensões ao redor do poço, na ausência de fluxo de fluidos (fig. 5.2), onde, portanto,  $P_i = P_o$ , pode-se observar que a diferença entre tensões terá máximo valor na parede do poço e que a tensão vertical se mantém constante.



A componente radial  $\sigma_r$  será sempre a menor das tensões, enquanto  $\sigma_\theta$  ou  $\sigma_z$  será a maior dependendo dos valores do coeficiente de Poisson, gradiente de pressão e compressibilidade.

O critério de ruptura de Coulomb para material poroso, é calculado pela expressão(ref. 26):

$$\sigma_1 - p = 2.S_0.tg \alpha + (\sigma_2 - p).tg^2 \alpha \quad \text{eq. 5.2.8}$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões principais máxima e mínima respectivamente,  $S_0$  é o coeficiente de coesão e  $\alpha$  é a função do ângulo de atrito interno dada pela expressão

$$\alpha = \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).$$

Na superfície do poço  $\sigma_n = P_0$  e, sendo  $\sigma_{n1}$  a tensão principal mínima, a expressão do critério de Coulomb toma a forma:

$$\sigma_1 - P_0 = 2.S_0.tg \alpha \quad \text{eq. 5.2.9}$$

### V.3 - Tensões Ao Redor Do Poço Não-Revestido Em Meio Plástico

O critério de ruptura de Coulomb (eq. 5.2.8) leva em consideração um enunciado fundamental: o de que, quando as tensões críticas são ultrapassadas, o material passa do estado elástico para o plástico. Pela análise elástica feita anteriormente, pode-se observar que existe uma região ao redor do poço na qual a rocha já atingiu seu limite elástico, sujeitando-se, portanto, a deformações plásticas dentro de um raio  $R_c$ .

A solução na região elástica, ou seja, quando  $r < R_c$  é obtida pela substituição nas equações 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3 de:  $R_1$  por  $R_c$ ,  $\sigma_n$  por  $\sigma_{n1}$  e  $P_1$  por  $P_c$ . Na fronteira entre as regiões plástica e elástica, ou seja, quando  $r = R_c$ , as tensões ainda devem obedecer ao critério de ruptura de Coulomb.

Como mostrado anteriormente, a tensão radial será sempre a mínima, sendo que a máxima pode ser tanto a tensão tangencial quanto a vertical, a depender dos parâmetros mecânicos da rocha.

Considerando o caso limite, quando as tensões vertical e tangencial nesta fronteira são iguais, chega-se à expressão limite com a seguinte forma:

$$v_{lim} = \frac{\left\{ (tg^2 \alpha + 1) \sigma_{z_0} - [tg^2 \alpha (2\beta - 1) + 1] P_0 - 2S_0 + tg \alpha \right\}}{\left\{ (3tg^2 \alpha + 1) \sigma_{z_0} - [tg^2 \alpha (4\beta - 1) + 1] P_0 - 2S_0 tg \alpha \right\}} \quad \text{eq. 5.3.1}$$

Comparando-se o valor do coeficiente de Poisson do meio poroso com este valor limite, pode-se definir a tensão máxima. Se  $v > v_{lim}$ , a tensão tangencial será a máxima na fronteira  $R_c$ , e se  $v < v_{lim}$ , a tensão vertical será a máxima.

Segundo Risnes, caso  $\sigma_r < \sigma_z < \sigma_\theta$  na fronteira da região plástica com a elástica, as tensões na região plástica são dadas pelas expressões:

$$\sigma_r = P_1 + \frac{\mu q}{2\pi Kh} \ln \frac{r}{R_1} + \frac{1}{t} \left( 2S_0 tg \alpha - \frac{\mu q}{2\pi Kh} \right) \cdot \left[ \left( \frac{r}{R_1} \right)^t - 1 \right] \quad \text{eq. 5.3.2}$$

$$\sigma_\theta = P_1 + \frac{\mu q}{2\pi Kh} \left( 1 + \ln \frac{r}{R_1} \right) + \frac{1}{t} \left( 2S_0 tg \alpha - \frac{\mu q}{2\pi Kh} \right) \cdot \left[ (t+1) \left( \frac{r}{R_1} \right)^t - 1 \right] \quad \text{eq. 5.3.3}$$

quando  $R_b > r > R_1$ , onde  $R_b$  é um raio interno qualquer da região plastificada,

$$\sigma_z = \sigma_\theta \quad \text{eq. 5.3.4}$$

e quando  $R_c > r > R_b$ ,

$$\sigma_z = \left[ 2\nu(1-\beta) + \beta \left( P_1 + \frac{\mu q}{2\pi K h} \cdot \ln \frac{r}{R_1} \right) + \nu \frac{\mu q}{2\pi K h} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \right] \cdot (\sigma_{z_0} - \beta P_0) + \frac{\nu}{t} \left[ 2S_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{\mu q}{2\pi K h} \right] \cdot \left[ (t+2) \left( \frac{r}{R_1} \right)^t - 2 \right]$$
eq. 5.3.5

onde  $t = \operatorname{tg}^2 \alpha - 1$ .

Para determinar-se os raios  $R_c$  e  $R_b$ , considera-se que quando  $r = R_b$ , as equações 5.3.4 e 5.3.5 são iguais.

Já na determinação do raio  $R_c$ , deve-se considerar que nesta fronteira as tensões obedecem o critério de ruptura de Coulomb e que as tensões radiais são contínuas.

No caso em que  $\sigma_r < \sigma_\theta < \sigma_z$ , na fronteira da região plástica/elástica, as equações foram desenvolvidas apenas considerando não haver fluxo, ou seja,  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , recaindo-se nas equações:

- para  $R_1 < r < R_b$ ,

$$\sigma_r = P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \left[ \left( \frac{r}{R_1} \right)^t - 1 \right]$$
eq. 5.3.6

$$\sigma_\theta = P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \left[ (t+1) \left( \frac{r}{R_1} \right)^t - 1 \right]$$
eq. 5.3.7

$$\sigma_z = \sigma_\theta$$
eq. 5.3.8

para  $R_b < r < R_c$ .

$$\sigma_r = P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \left\{ \left[ \left( \frac{\gamma + t + 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{R_b}{R_i} \right)^t - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left( \frac{r}{R_b} \right)^{\lambda-1} \right] + \left[ \left( \frac{\gamma - t - 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{R_b}{R_i} \right)^t - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left( \frac{r}{R_b} \right)^{-\gamma-1} \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\nu} \cdot \left[ (1 - 2\nu)(1 - \beta)P_0 + 2S_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \cdot (\sigma_{\infty} - \beta P_0) \right]$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{r}{R_b} \right)^{\gamma-1} - \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \left( \frac{r}{R_b} \right)^{-\gamma-1} \right]$$

eq. 5.3.9

$$\sigma_\theta = P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \left\{ \left[ \left( \frac{\gamma + t + 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{R_b}{R_i} \right)^t - \frac{\gamma + 1}{2} \left( \frac{r}{R_b} \right)^{\lambda-1} \right] - \left[ \left( \frac{\gamma - t - 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{R_b}{R_i} \right)^t - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{r}{R_b} \right)^{-\gamma-1} \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\nu} \cdot \left[ (1 - 2\nu)(1 - \beta)P_0 + 2S_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \cdot (\sigma_{\infty} - \beta P_0) \right]$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \left( \frac{r}{R_b} \right)^{\gamma-1} + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \left( \frac{r}{R_b} \right)^{-\gamma-1} \right]$$

eq. 5.3.10

$$\sigma_x = P_0 + 2S_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{t+1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \left\{ \left[ \left( \frac{\gamma + t + 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{R_b}{R_i} \right)^t - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left( \frac{r}{R_b} \right)^{\lambda-1} \right] + \left[ \left( \frac{\gamma - t - 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{R_b}{R_i} \right)^t - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left( \frac{r}{R_b} \right)^{-\gamma-1} \right] \right\}$$

$$- \frac{t+1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\nu} \cdot \left[ (1 - 2\nu)(1 - \beta)P_0 + 2S_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \cdot (\sigma_{\infty} - \beta P_0) \right]$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{r}{R_b} \right)^{\gamma-1} - \left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \left( \frac{r}{R_b} \right)^{-\gamma-1} \right]$$

eq. 5.3.11

Os raios  $R_b$  e  $R_c$  são então determinados aplicando-se o critério de Coulomb na fronteira plástico-elástica e ainda considerando a continuidade dos deslocamentos  $u$  em  $r = R_c$ .

#### V.4. Influência do Revestimento no Comportamento do Estado de Tensões

A simulação do efeito da cimentação do revestimento é representada por Risnes e seus colaboradores, como uma pressão atuando na direção radial contra a formação, o que equivale a introduzir no equacionamento anterior uma nova condição de contorno:

$$\sigma_r = \sigma_n \quad \text{quando } r = R_1;$$

isto irá gerar novas equações nas quais o fluxo não é considerado.

Para  $R_c > r > R_1$  :

$$\sigma_r = P_0 - \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha + \left( \sigma_n - P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot \left( \frac{r}{R_1} \right)^t \quad \text{eq. 5.4.1}$$

$$\sigma_\theta = P_0 - \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha + (t+1) \left( \sigma_n - P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot \left( \frac{r}{R_1} \right)^t \quad \text{eq. 5.4.2}$$

Já o valor da tensão vertical  $\sigma_z$  será idêntico ao valor de  $\sigma_\theta$  quando  $R_b > r > R_1$ , tendo, quando  $R_c > r > R_b$ , a seguinte expressão:

$$\sigma_z = \left[ 2\nu(1-\beta) + \beta \right] P_0 - \frac{2\nu}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \cdot (\sigma_{z_0} - \beta P_0) + \nu(t+2) \left( \sigma_n - P_0 + \frac{1}{t} 2S_0 \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot \left( \frac{r}{R_1} \right)^t \quad \text{eq. 5.4.3}$$

O valor de  $R_b$  é determinado também pela condição de que quando  $r = R_b$ , implica  $\sigma_\theta = \sigma_z$ . O valor de  $R_c$  é determinado inserindo-se o valor de  $\sigma_r$  da zona plastificada e o valor de  $\sigma_\theta$  da zona elástica no critério de Mohr Coulomb.

## V.5 - Análise Paramétrica da Influência das Propriedades Elásticas da Rocha e da Pressão de Poro nas Tensões ao Redor do Poço

No exemplo apresentado, observa-se que, após a perfuração, a formação estará em estado plástico de tensões na região ao redor do poço e que a extensão desta região é dependente dos parâmetros elastoplásticos da rocha e da pressão da formação.

Comparando-se os casos 1 e 2 (fig 5.3 e 5.4), analisou-se a influência do coeficiente de Poisson, mantendo-se os demais parâmetros constantes, observando-se que sua variação pouco influência no tamanho da zona plástica.

Mantendo-se um valor do coeficiente de Poisson suficientemente alto para assegurar que  $\sigma_x = \sigma_0$  na fronteira plástica/elástica, foi feita a análise do efeito do aumento da compressibilidade da rocha (fig.5.5), observando-se que, neste caso, a compressibilidade pode ser desprezada.

O parâmetro que mais influenciou na extensão da zona plástica foi a coesão. De fato, um aumento desse parâmetro acarreta uma redução significativa da zona plástica, que pode até mesmo não se desenvolver quando o aumento da coesão é muito elevado (fig.5.6).

Observou-se também que a amplitude da zona plástica depende fortemente da pressão de poro. Simulou-se caso de poço com pressão anormalmente alta, com significativa redução da zona plástica (fig.5.7).

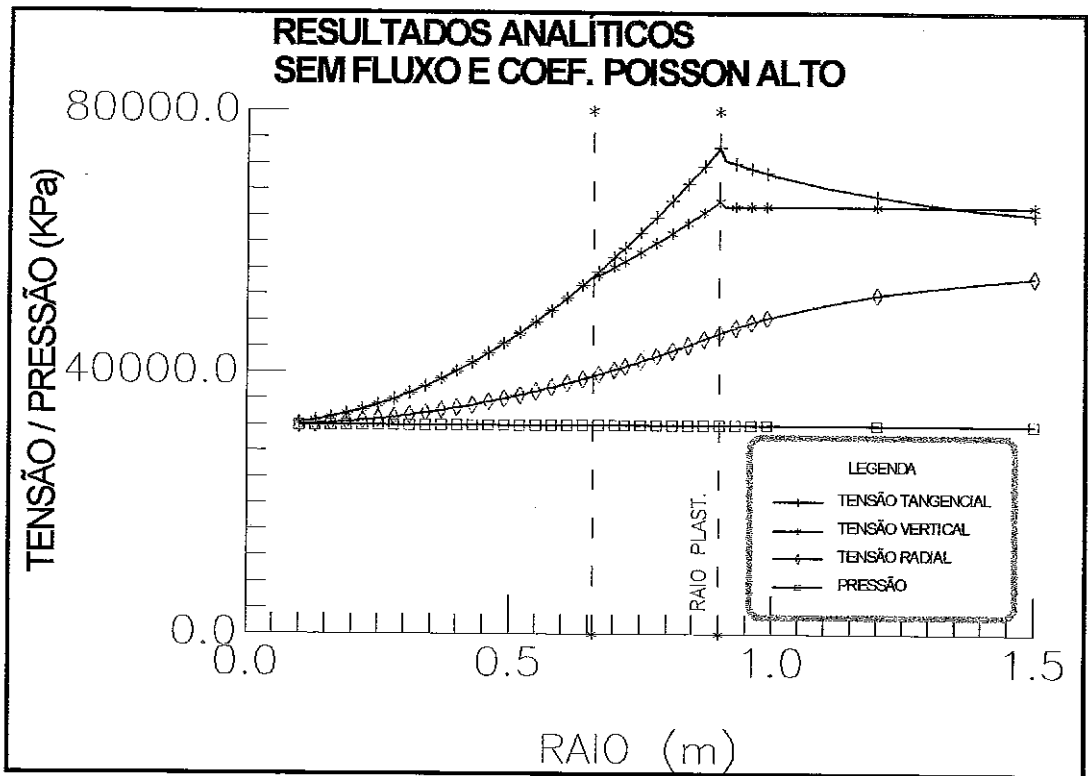


Fig 5.3

$P_0 = 32065 \text{ KPa}$   $\beta = 1.0$   
 $S_0 = 101.4 \text{ KPa}$   $\nu = 0.45$

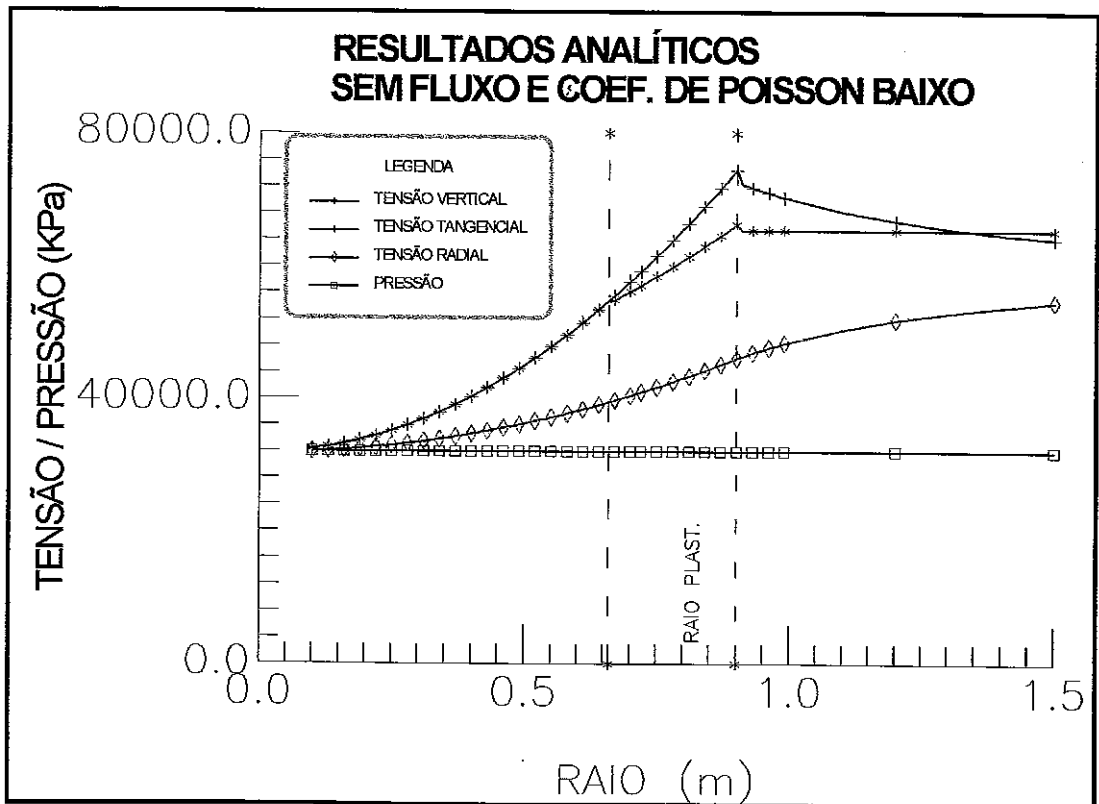


Fig 5.4

$P_0 = 32065 \text{ KPa}$   $\beta = 1.0$   
 $S_0 = 101.4 \text{ KPa}$   $\nu = 0.30$

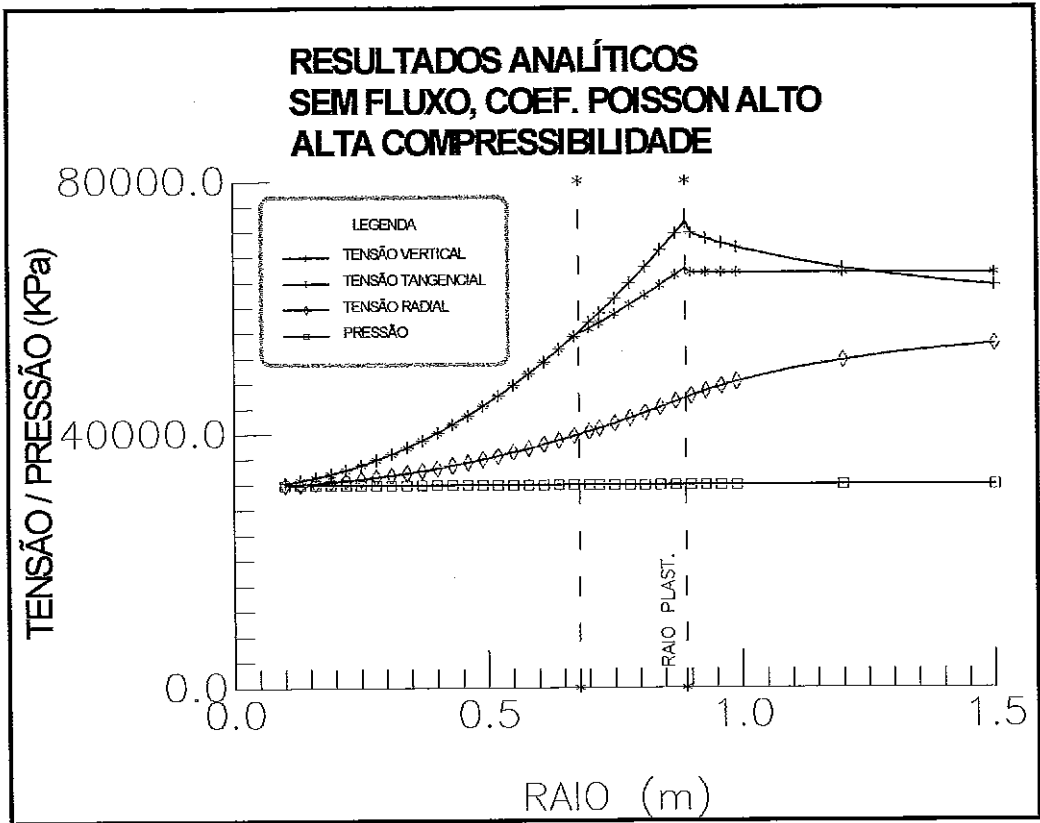


Fig 5.5

$P_0 = 32065 \text{KPa}$   $\beta = 1.0$   
 $S_0 = 101.4 \text{KPa}$   $\nu = 0.45$

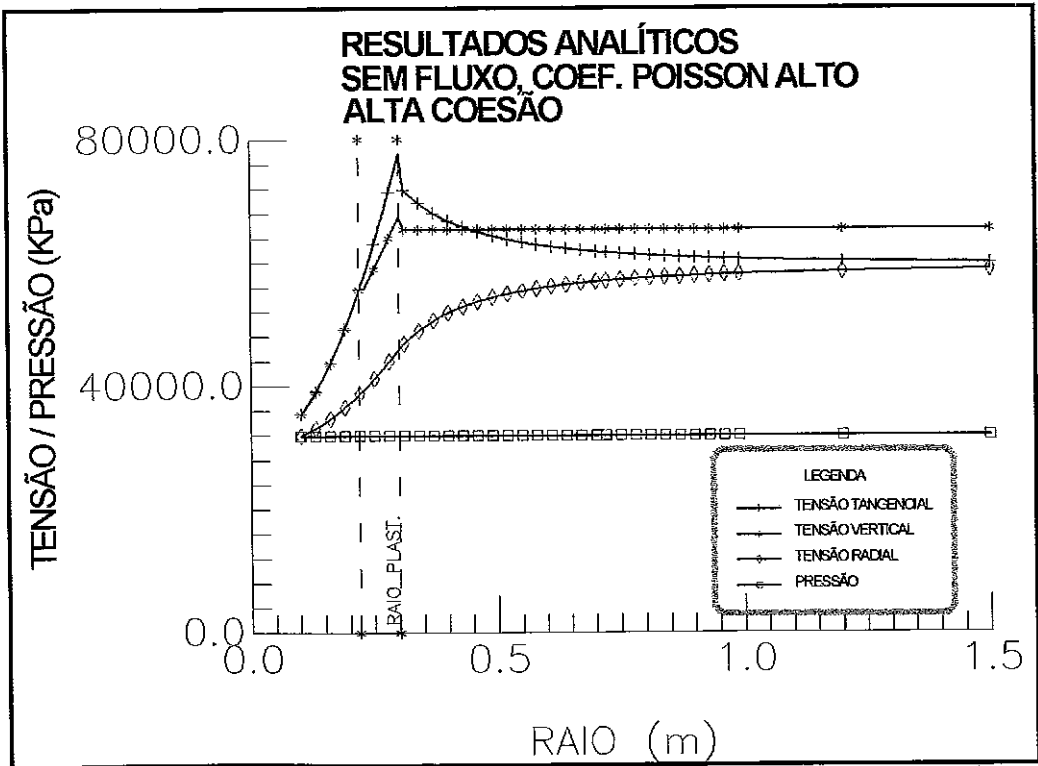


Fig 5.6

$P_0 = 32065 \text{KPa}$   $\beta = 1.0$   
 $S_0 = 1014. \text{KPa}$   $\nu = 0.45$

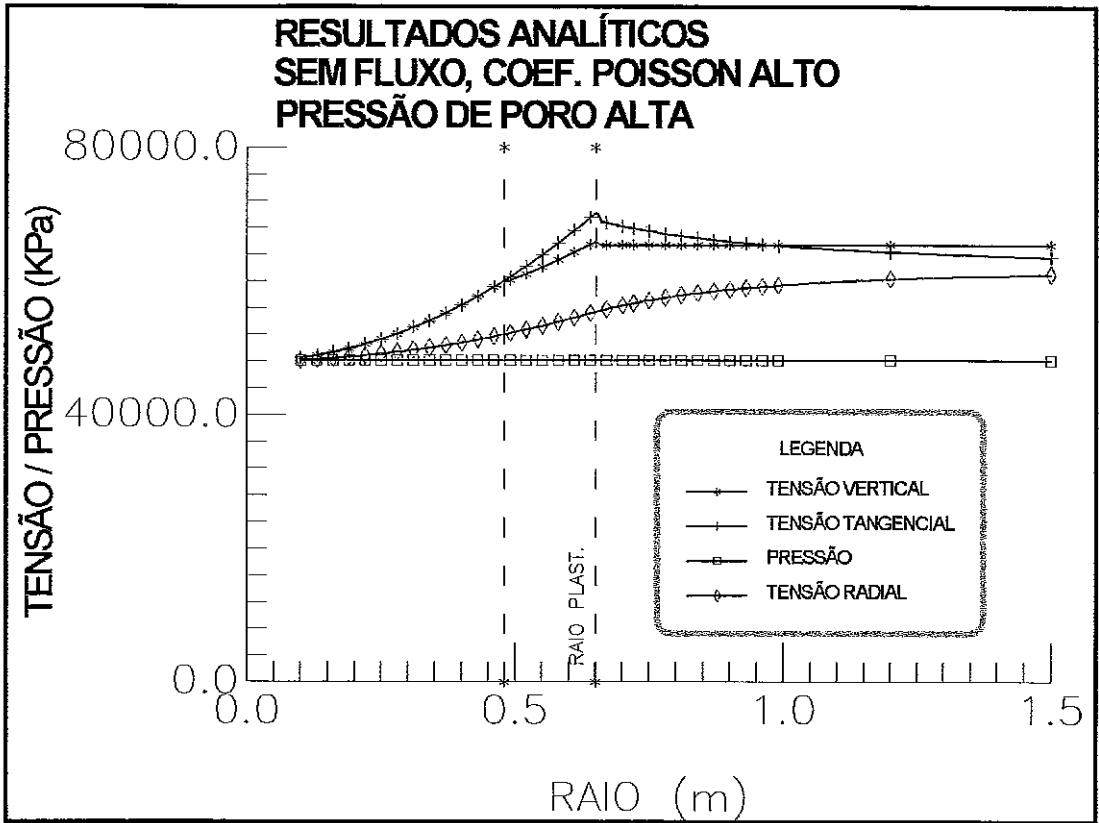


Fig 5.7

$P_0 = 48263 \text{KPa}$   $\beta = 1.0$   
 $S_0 = 101.4 \text{KPa}$   $\nu = 0.45$

## VI-MODELAGEM COMPUTACIONAL ADOTADA

O fato da espessura do reservatório ser, normalmente, muito pequena em relação às demais dimensões, levou alguns dos autores (ref.14,15,16,29,31,38) a considerar o estado de tensões na região próxima à parede do poço como um problema clássico da elasticidade que trata do efeito de furos circulares em placas infinitas. Já a redistribuição das tensões devido à pressão no interior do poço é determinada pela consideração de outro problema clássico da teoria da Elasticidade relacionada com a análise de tensões em um cilindro de paredes espessas, cuja solução é devida a Lamé, em 1852.

Da mesma forma, a maioria dos estudos numéricos considera o meio poroso como um cilindro de raio muito longo, cujo eixo coincide com o eixo do poço, e que a formação produtora está situada numa profundidade tal que qualquer seção transversal do cilindro é sujeita à mesma distribuição de tensão, caracterizando, portanto, o estado plano de deformação. O sistema de coordenadas normalmente adotado tem origem no centro do poço, cujo eixo vertical coincide com o eixo longitudinal do poço e utiliza-se das coordenadas polares em razão da simetria na distribuição dos esforços. Por considerar que o poço atravessa toda a espessura do reservatório e que este é homogêneo a lei de Darcy para fluxo radial monofásico é utilizada.

O fato de considerar o estado plano de tensões, pode levar a um gasto computacional muito grande no caso de se querer caracterizar as heterogeneidades verticais da formação, pois cada seção é analisada como um problema distinto. Outra hipótese restritiva, é o fato de considerar o efeito do fluxo somente no regime permanente.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma ferramenta numérica capaz de analisar a estabilidade da rocha reservatório de um poço vertical e os efeitos da

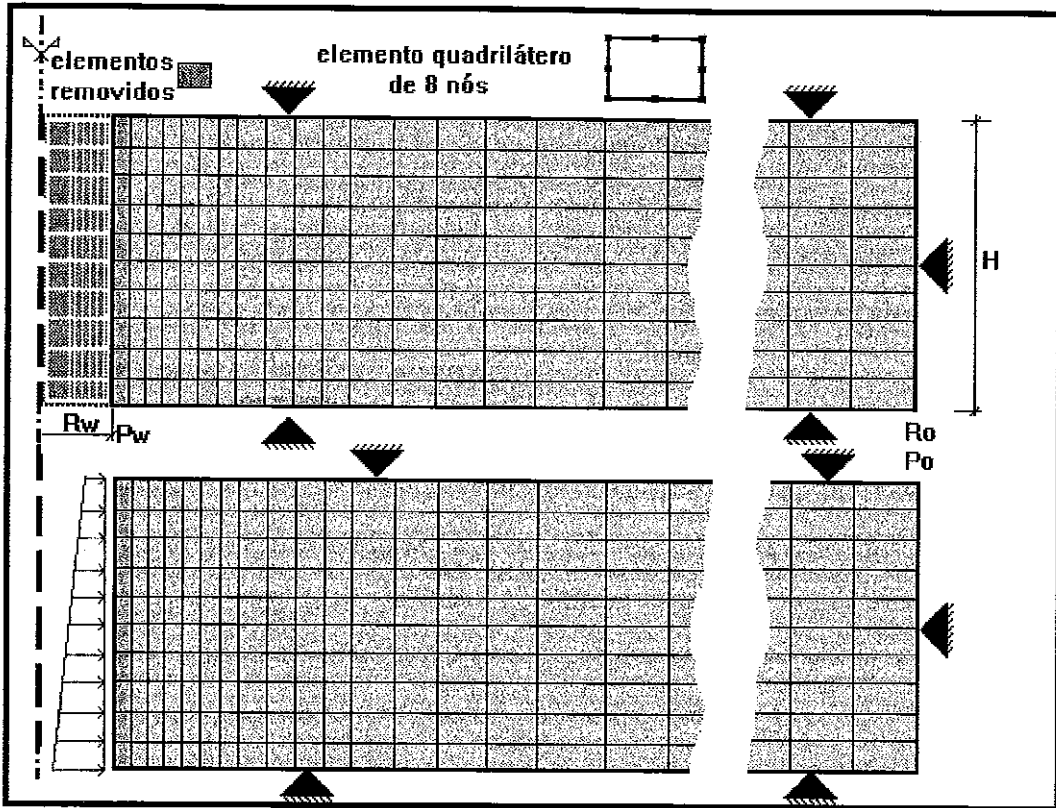
plastificação da mesma durante a fase de perfuração ou produção do poço levando em conta que em diversos campos petrolíferos a formação produtora pode ser considerada homogênea, mas a espessura não desprezível. Por exemplo, existem diversos campos, cuja formação produtora é formado por diversas intercalações de materiais de propriedades bastantes distintas, como é caso do Calcario Macaé do Campo de Bonito, na Bacia de Campos.

Para a análise do problema adotou-se um programa baseado no equacionamento dos capítulos 4 e 5 que soluciona as equações de fluxo e deformação. Como aquelas equações são dependentes do tempo, alguns dos mecanismos transientes relacionados com o comportamento da formação durante a fase de perfuração e produção podem ser analisados.

Dessa forma, a modelagem geométrica é feita considerando-se um cilindro axissimétrico, cujo eixo de simetria coincide com o eixo do poço perfurado na direção das tensões principais, com raio externo no mínimo 100 vezes maior que o raio do poço. Admite-se também um estado de tensões iniciais devido ao peso das camadas sobrejacentes à zona de interesse, estando esta saturada por um fluido sujeito a uma pressão inicial, chamada de pressão da formação. As condições de contorno consideradas no modelo consistem de deslocamento nulo tanto nas bordas superior e inferior, como no raio externo, além da variação de pressão nula no raio externo.

O modelo é então subdividido em elementos quadriláteros isoparamétricos definindo desta forma a malha inicial do problema a ser analisado.

A partir deste modelo inicial é simulada a escavação, removendo-se os elementos correspondentes ao diâmetro do poço, o que irá gerar as chamadas forças de escavação, sendo aplicação simultânea de força distribuída na parede do poço, correspondente ao peso do fluido de perfuração. Nesta fase é considerado também que o fluido de perfuração não percola para dentro da formação.



**Fig 6.1- Modelagem Geométrica**

O critério de estabilidade do poço na fase perfuração é um item bastante discutível, variando desde a consideração bem conservadora da determinação do peso de lama necessário a se garantir que em nenhum ponto da formação seja atingida a plastificação, até a análise do crescimento da região plastificada ao redor do poço que tende a reduzir a estabilidade da formação, considerando que o colapso ocorre quando a zona plastificada se propaga por toda a formação com a ocorrência de grandes deformações.

Já na fase correspondente à produção, se avalia a propagação da zona plastificada, devido ao decaimento de pressão na parede do poço.

## **VI.1 - Discretização Geométrica Do Contínuo**

Na discretização geométrica do contínuo é utilizado o conceito do MEF, através de elementos quadriláteros isoparamétricos de 8 nós, na análise das variáveis de deslocamento, e de 4 nós para a variação da pressão, com 9 pontos de integração, de forma que tanto a deformação quanto a variação de pressão de poro tenham a mesma ordem de grandeza dentro do elemento.

Trabalhos realizados por diversos autores (ref. 10, 21), tem demonstrado que este tipo de elemento se mostra bastante versátil na solução de problemas de consolidação e evita o emprego de grande número de elementos para representar satisfatoriamente a região do contínuo afetada pelas solicitações, diminuindo o esforço computacional e memória requeridos.

## **VI.2 - Características da programação**

O programa utilizado foi desenvolvido em linguagem Fortran, que tem como característica sua maior portabilidade entre as diversas máquinas e também uma grande quantidade de rotinas já elaboradas, as quais podem ser incluídas no programa a medida que sejam necessárias para análise de algum problema específico.

Como na maioria dos programas que utilizam o MEF, é aplicado o conceito de dimensionamento dinâmico dos arranjos que guardam as variáveis reais e inteiras a serem utilizadas durante o processamento, evitando desta forma, que grandes áreas de memória sejam reservadas sem serem utilizadas.

## **VI.3 - Técnica de solução do modelo elasto-plástico perfeito**

Existe uma série de técnicas para análise de problemas não lineares usando o MEF. Neste trabalho foi utilizada a técnica puramente incremental tangente, na qual o

carregamento é dividido em incrementos de carga que são aplicados gradativamente. A cada incremento são calculados os deslocamentos e pressões de poro e em seguida são calculados as deformações incrementais da seguinte forma:

$$\Delta \epsilon^i = \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{d}^i \quad \text{eq. 6.3.1}$$

sendo as deformações acumuladas então calculadas adicionando-se os incrementos de deformações.

As tensões incrementais são calculadas como função das deformações incrementais da seguinte forma:

$$\Delta \sigma_{ef}^i = \mathbf{D}_{ep} \cdot \Delta \epsilon^i \quad \text{eq. 6.3.2}$$

sendo a tensão total acumulada calculada adicionando-se os incrementos de tensão, da seguinte forma:

$$\sigma_{ef}^i = \sigma_{ef}^{i-1} + \Delta \sigma_{ef}^i; \quad \text{eq. 6.3.3}$$

onde  $i$  é o número do incremento.

No modelo elasto-plástico perfeito, se o estado de tensões calculado em um determinado ponto de integração fica fora da superfície de escoamento, a parcela de correção  $\Delta \sigma_{e1}$  (fig. 6.2), calculada para um ponto de integração é convertida em carga nodal equivalente  $\Delta \mathbf{P}_{e1}$  e adicionada ao incremento de carga seguinte.

Ao se adotar a técnica de solução puramente incremental é importante que toda a análise seja subdividida em incrementos de carga suficientemente pequenos para que a solução não se afaste da real. Para minimizar este efeito, ao final de cada incremento, a variação de deformação calculada é dividida em 10 parcelas iguais e o estado de tensões reavaliado para cada um destes subincrementos.

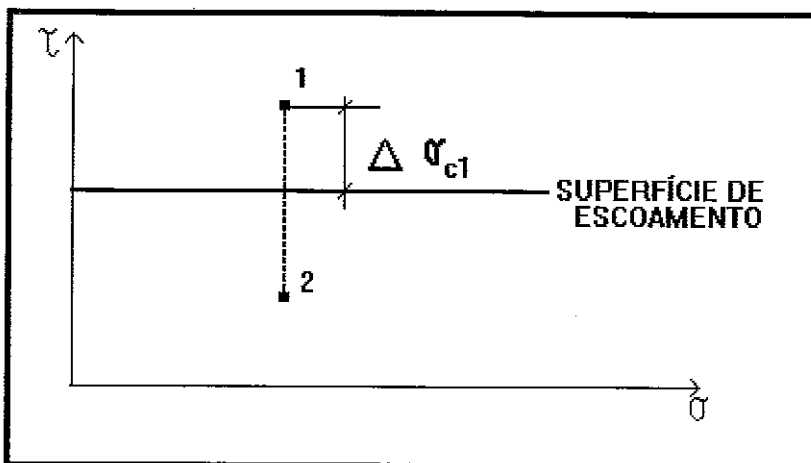


Fig. 6.2 - Correção da tensão para a superfície de escoamento

#### VI.4 - Definição do estado de tensões iniciais

Considerando-se que as tensões iniciais da análise são as denominadas tensões *in situ*, inicialmente deverão ser fornecidos também as condições de contorno., assim como as pressões e forças atuantes iniciais, que não devem ser confundidas com o carregamento a ser aplicado durante a análise, para verificar o equilíbrio do maciço ao início da análise

As tensões iniciais são transformadas em forças nodais equivalentes atuantes no maciço da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \sigma_0 \, d\Omega; \quad \text{eq. 6.3.4}$$

sendo  $\mathbf{F}_{ij}$ , a força equivalente atuante no nó  $i$  do elemento  $j$ .

#### VI.5 - Modelagem da análise

Após a definição do estado inicial de tensão, pressão e carregamento e as condições de contorno que definem o estado de equilíbrio inicial; a análise, propriamente dita, é realizada em blocos com a especificação das condições de contorno e a subdivisão em incrementos de carga e tempo, de forma a melhor caracterizar a evolução dos eventos que se deseja modelar.

Uma vez que o programa se baseia na aproximação pelo método puramente incremental, as variáveis calculadas são incrementos de deslocamento e incremento de variação de pressão. O valor acumulado dos deslocamentos ao final de um bloco de incrementos é o deslocamento absoluto, enquanto obtêm-se a variação total da pressão, logo, a pressão de poro absoluta no final da análise é calculada como a pressão inicial acrescida da variação total de pressão calculada.

### VI.5.1 - Procedimento utilizado para simular a escavação do poço

Na simulação da escavação do poço, os elementos a ela correspondentes são removidos, e segue-se a aplicação de uma força nodal equivalente às tensões atuantes no elemento, que é calculada da seguinte forma:

$$\boxed{F_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \tau \, d\Gamma} \quad \text{eq. 6.3.5}$$

onde

$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \sigma \, d\Omega$  calcula as forças equivalentes nodais devido às tensões atuantes no elemento removido;

$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{w} \, d\Omega$  calcula as forças equivalentes nodais devido ao peso próprio do elemento removido;

$\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \tau \, d\Gamma$  calcula as forças equivalentes nodais devido às cargas distribuídas na face do elemento.

## VI.6- Técnica de solução do sistema de equações

Na solução do sistema de equações é utilizado o método frontal para solução de sistemas simétricos, que utiliza um arranjo unidimensional particionado em quatro regiões diferentes.

Na primeira são acumulados os valores da matriz global e na segunda o vetor de cargas e variáveis prescritas, sendo as outras duas regiões utilizadas como área de transferência e análise do condicionamento da solução do sistema.

O uso de elementos de oito nós faz com que o método frontal de solução se torne mais atraente que o em banda. No método frontal a numeração dos nós se torna irrelevante, sendo a numeração dos elementos fundamental para a eficiência do método.

Desta forma, a geração da malha se torna bastante simplificada, sendo necessário apenas a definição das coordenadas dos nós dos vértices do quadrilátero, sendo os nós centrais gerados automaticamente.

A seqüência dos elementos dada pelo usuário é a adotada pelo programa, mas para se obter maior flexibilidade e eficiência na análise, foi colocada a opção de se ler , separadamente, uma ordenação mais eficiente para cada geometria objeto de análise.

## VII - EXEMPLOS NUMÉRICOS

### VII.1 - Validação dos resultados

A validação do programa desenvolvido foi realizada por dois testes clássicos de consolidação.

Primeiramente foi realizada a comparação dos resultados do caso analítico da Coluna Poroelástica Unidimensional proposta por Biot (ref 1 , 1941), exemplo clássico de consolidação que corresponde a uma coluna de material poroso cuja largura é muito menor que o comprimento (fig. 7.1).

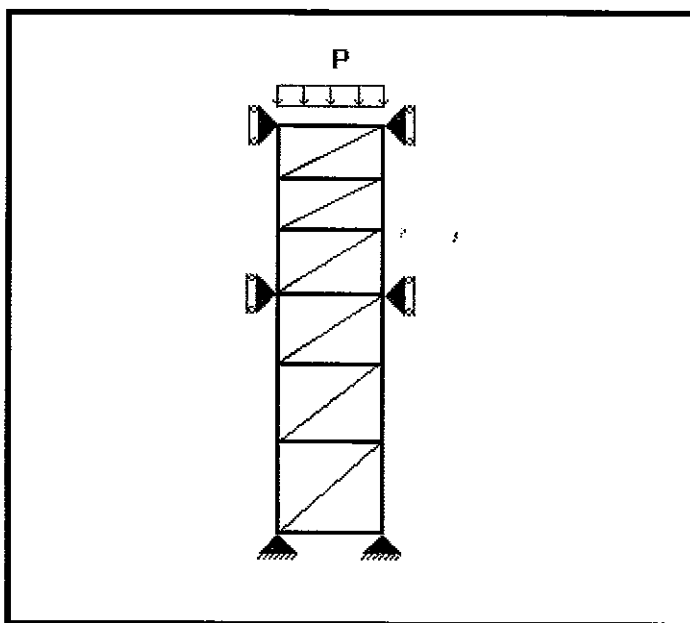


Fig. 7.1 - Coluna Poroelástica de Biot

O segundo teste realizado foi a simulação de uma carga circular aplicada em um meio poroso, exemplo clássico da mecânica dos solos de um carregamento distribuído  $P$ , aplicado sobre um meio elástico semi-infinito (fig 7.2).

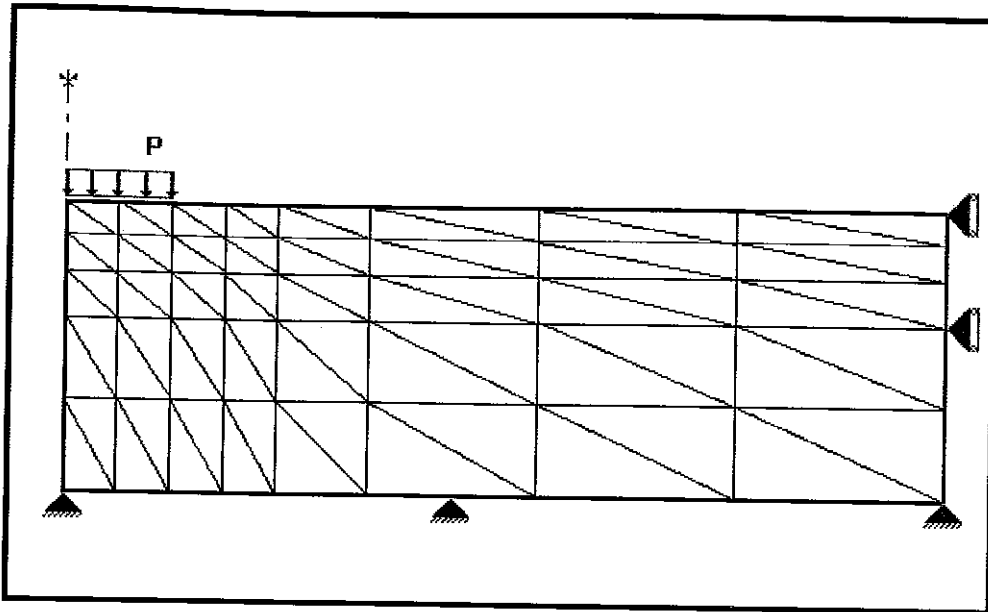


Fig. 7.2 - Carga Circular Aplicada a um Meio Poroso Semi-Infinito

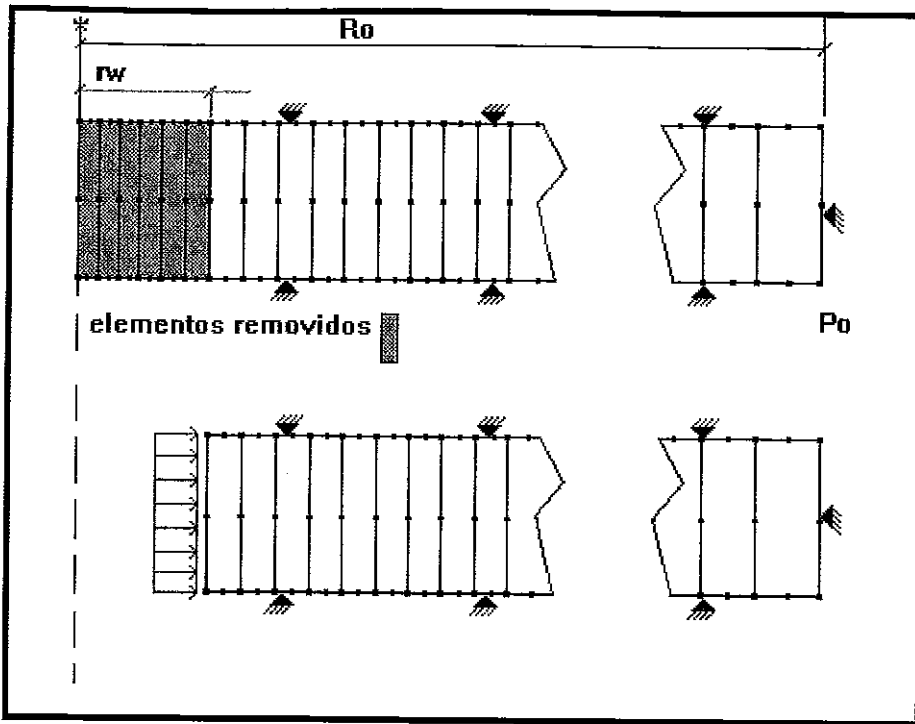
Booker e Randolph ( ref.. 8 ) apresentaram uma solução teórica para o caso, onde se determina o grau de consolidação em função do tempo.

Em ambos os exemplos foi realizada uma análise elástica linear e a comparação dos resultados numéricos e analíticos considerados bastante aceitáveis.

## **VII.2 - Análise comparativa dos resultados numéricos e analíticos do modelo elásto-plástico perfeito**

O mesmo exemplo descrito pelos autores da referência.26 e apresentado no capítulo 5 foi analisado numericamente adotando-se a modelagem geométrica da fig. 7.3.

Os resultados obtidos pelo modelo analítico para poço aberto se mostram bastante mais conservadores que aqueles obtidos pela simulação numérica.



**Fig 7.3 - Malha de Elementos Finitos Utilizada na Simulação**

Deve-se salientar que, no desenvolviménto das equações analíticas para poço não revestido, não foi considerada a pressão exercida pelo fluido de perfuração junto a formação, a qual tem importante papel na sustentação da parede do poço, evitando assim o seu colapso.

Desta forma, pode-se considerar que as equações que melhor modelam a fase de perfuração de um poço vertical, são aquelas desenvolvidas para poços revestidos e cimentados, cujas tensões são calculadas sem considerar o fluxo, o que corresponde a situação em que o poço foi perfurado e está amortecido (ref.26).

Esta discrepância de resultados foi considerada razoável e esperada, uma vez que o modelo analítico considera diversas hipóteses restritivas, além do modelo numérico adotado ser bastante mais representativo do problema real. (fig 7.4)

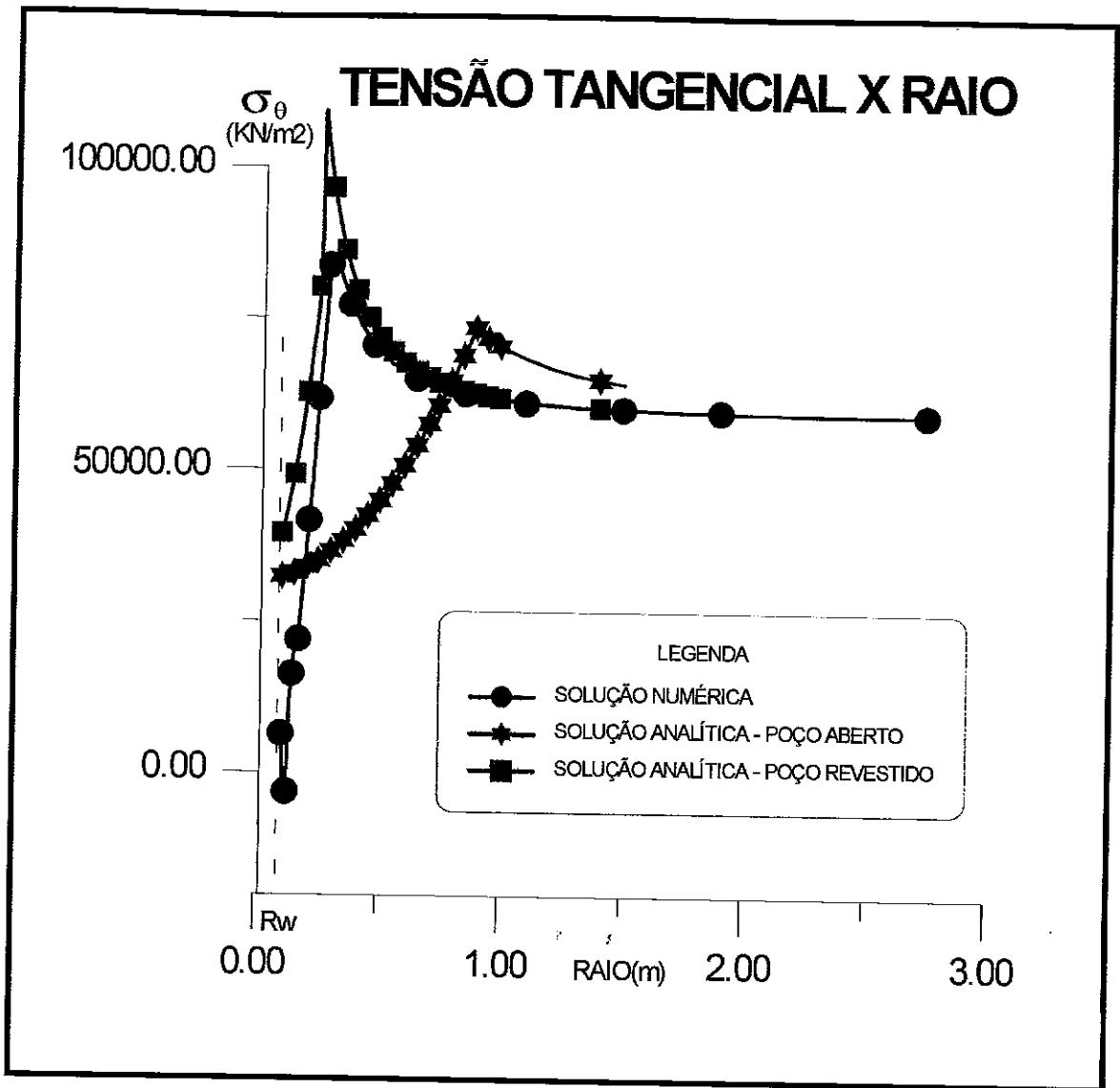


Fig 7.4 - Comparação da Solução Analítica com a Solução Numérica

### VII.3 - Análise de casos práticos

A determinação do peso de fluido de perfuração mínimo capaz de manter o poço aberto estável é talvez um dos pontos mais importantes no projeto de perfuração deste poço. A pressão transmitida pelo fluido de perfuração para a formação determina a concentração de tensões presente na parede do poço, estabelecendo a estabilidade desta formação.

A fim de modelar o problema de estabilidade do poço na fase de perfuração, inicia-se o processo com um fluido de perfuração cuja pressão na parede do poço tenda a restaurar o estado de tensões o mais próximo possível daquele existente antes da perfuração. Em seguida deve-se reduzir o peso deste fluido até um ponto limite onde a região próxima a parede do poço inicie sua plastificação.

Determinado este valor limite, deve-se considerar que, imediatamente após a perfuração do poço, a pressão de poro próxima a parede do poço é alterada até a formação de um reboco selante que previne a comunicação de pressão entre poço e formação.

Para formações de baixíssima permeabilidade o tempo que a formação leva para retornar à pressão original de reservatório pode ser significativo, e estando a pressão de poro e a deformação sofrida pela rocha intimamente relacionadas, este fato pode levar a alterações das tensões efetivas atuantes na rocha, e podendo, a ruptura na parede do poço ocorrer por efeito de poroelasticidade. Neste caso, torna-se importante determinar o tempo que esta formação pode ser mantida aberta, sem ser revestida e evitando a ocorrência de problemas de instabilidade.

Já para o caso de formações de permeabilidade média a alta, o retorno ao estado de pressão original de reservatório é quase que instantâneo sendo a estabilidade desta formação função principalmente do peso inadequado do fluido de perfuração e do gradiente de pressão induzido pela abertura deste poço na fase de produção.

Os exemplos a seguir apresentados representam casos reais cuja análise de estabilidade já havia sido realizada pelo programa de elementos finitos AEEPECD de análise estática elastoplástica de estruturas, cavidades e descontinuidades, desenvolvido por Costa (ref. 12) e devidamente adaptado por Pollilo (ref.29), de forma a admitir pressão de poro em qualquer ponto do reservatório, gerada pela equação de Laplace.

A modelagem geométrica adotada para os exemplos, a seguir apresentados, é a mesma adotada na figura 7.3, de forma a permitir que os resultados obtidos pudessem ser comparados com aqueles gerados pelo programa AEEPECD.

### VII.3.1 - Exemplo 01 - Campo de Leste de Rio Urucu - AM

A formação analisada fica a uma profundidade de 2400 m e a determinação do estado de tensões *in situ* neste horizonte foi realizada através de testes de microfraturamento, através do qual se determina a tensão horizontal mínima. A magnitude da tensão vertical foi definida considerando-se um gradiente de 1,1 psi/ft, a partir de um peso específico médio da coluna litoestática de  $25,0 \text{ KN/m}^3$ , e o coeficiente de empuxo no repouso adotado ( $K_0 = \text{tensão horizontal efetiva/tensão vertical efetiva}$ ) de 0,42.

Os parâmetros geomecânicos elásticos e de cisalhamento adotados basearam-se no ensaio de compressão uniaxial e triaxial realizados em testemunho do campo de Rio Urucu.

Por não se dispor de dados reais de compressibilidade da rocha e do fluido da formação o efeito destes foram desconsiderados na análise.

As propriedades da rocha e do fluido adotadas na análise estão apresentadas na tabela 7.1.

|   |                                  | VALOR     | UNIDADE |
|---|----------------------------------|-----------|---------|
| <b>PARÂMETROS<br/>GEOMECÂNICOS</b>          | Módulo de Young                  | 2850      | MPa     |
|   | Módulo de Poisson                | 0.36      |         |
|   | ângulo de atrito interno         | 38,44     | graus   |
|   | coesão                           | 4.99      | MPa     |
| <b>TENSÕES <i>IN SITU</i></b>               | Tensão vertical efetiva          | 35.50     | MPa     |
|   | Tensão horizontal mínima efetiva | 14.97     | MPa     |
| <b>PROPRIEDADES<br/>DO<br/>RESERVATÓRIO</b> | Permeabilidade                   | 1.62 E-08 | m/s     |
|   | Pressão estática                 | 25,4      | MPa     |
|   | Profundidade                     | 2400      | m       |
| <b>GEOMETRIA DO<br/>POÇO</b>                | Raio                             | 21,59     | pol     |

**Tab 01 - Propriedades de Rocha e Fluidos Adotadas na Análise do Exemplo 01**

### VII.3.1.1 - Fase de Perfuração

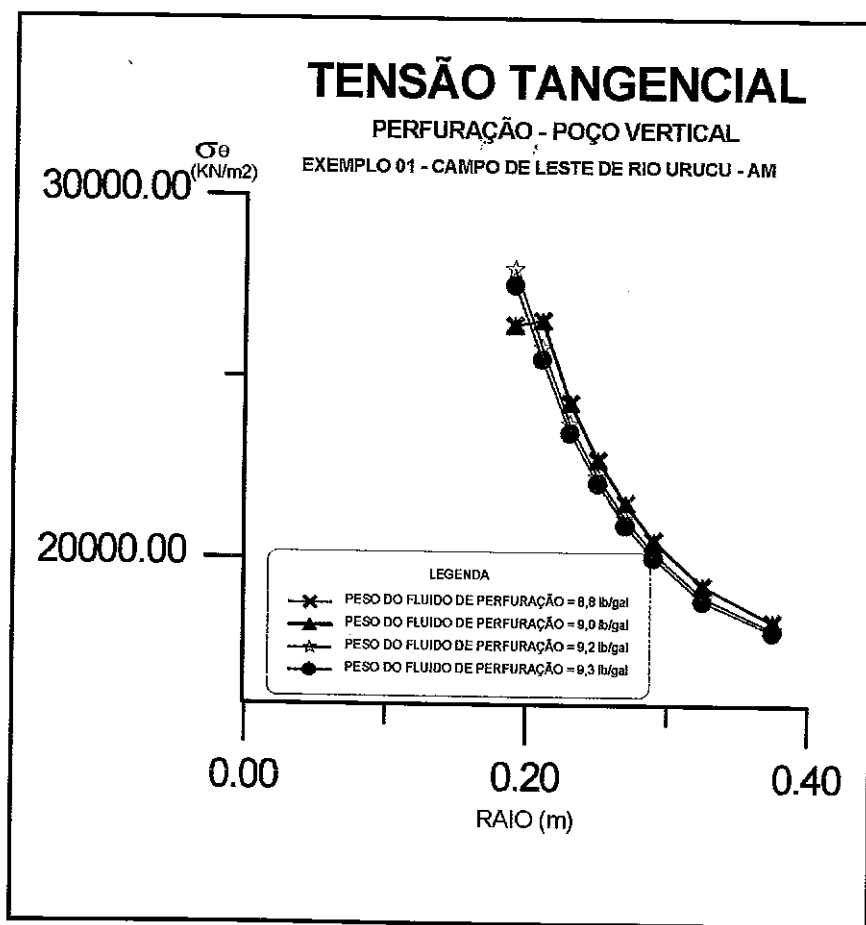
A primeira fase de estudo para este tipo de formação é a análise do peso do fluido de perfuração adequado que garanta a integridade do poço. Nesta fase de execução do poço, considera-se que o fluido de perfuração não percola para formação, não se estabelecendo fluxo, sendo analisada apenas o efeito da escavação de uma cavidade no maciço e aplicação simultânea de uma pressão correspondente ao peso do fluido de perfuração junto à parede do poço

Nesta fase considerou-se uma faixa de peso de fluido de perfuração e definiu-se que o critério de estabilidade do poço consistiria em se garantir que em nenhum ponto do maciço estivesse ocorrendo o comportamento plástico, ou seja o mesmo deveria se encontrar num estado de tensão inferior ao limite definido pela envoltória de ruptura.

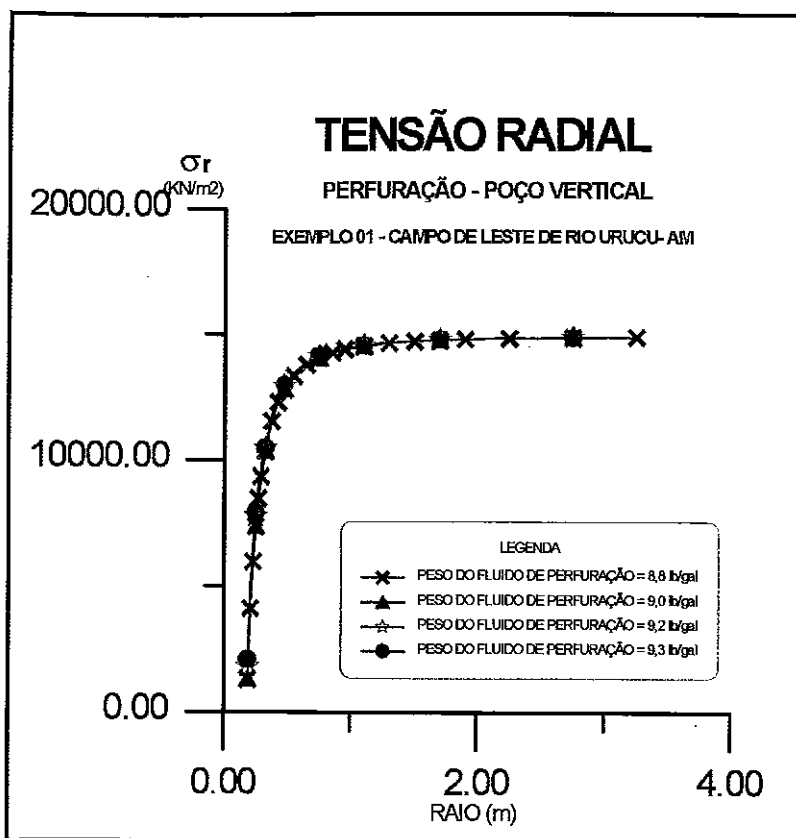
A partir das figuras 7.5 e 7.6 pode-se observar que com um peso de fluido de perfuração inferior a  $11,0 \text{ KN/m}^3$  ( $9,2 \text{ lb/gal}$ ) as tensões apresentam um comportamento plástico próximo a parede do poço.

Por esta análise recomendaria-se a perfuração de poços na área com peso de lama superior a este valor de forma a se garantir não ocorrer o colapso da formação. De fato, tradicionalmente utiliza-se na área para perfuração de poços verticais um peso de fluido de  $11,15$  a  $11,27 \text{ KN/m}^3$  ( $9,3$  a  $9,4 \text{ lb/gal}$ ) sem que se tenha registrado qualquer anormalidade.

Os resultados obtidos nesta análise são compatíveis com os anteriormente obtidos pelo programa AEEPECD, confirmando a qualidade dos resultados obtidos (ref 2).



**Fig. 7.5 -Comportamento da Tensão Tangencial para Diversos Fluidos de Peso Específico Distintos**



**Fig 7.6 Comportamento da Tensão Radial para Diversos Fluidos de Peso Específico Distintos**

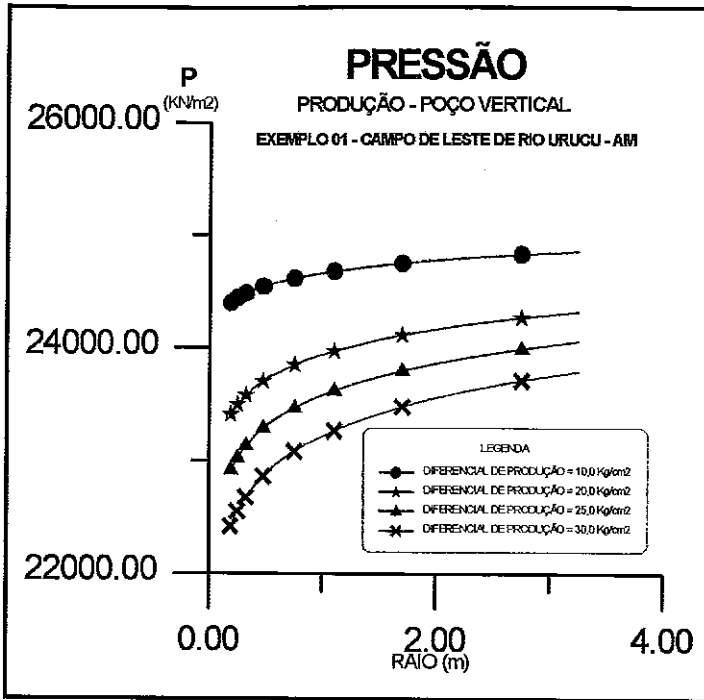
### VII.3.1.2 - Fase de Produção

A fase de produção é simulada por dois efeitos: a retirada do peso de fluido acima da pressão estática da formação mais a quantidade correspondente ao diferencial de produção a ser aplicado na formação assim como a variação da pressão na parede do poço.

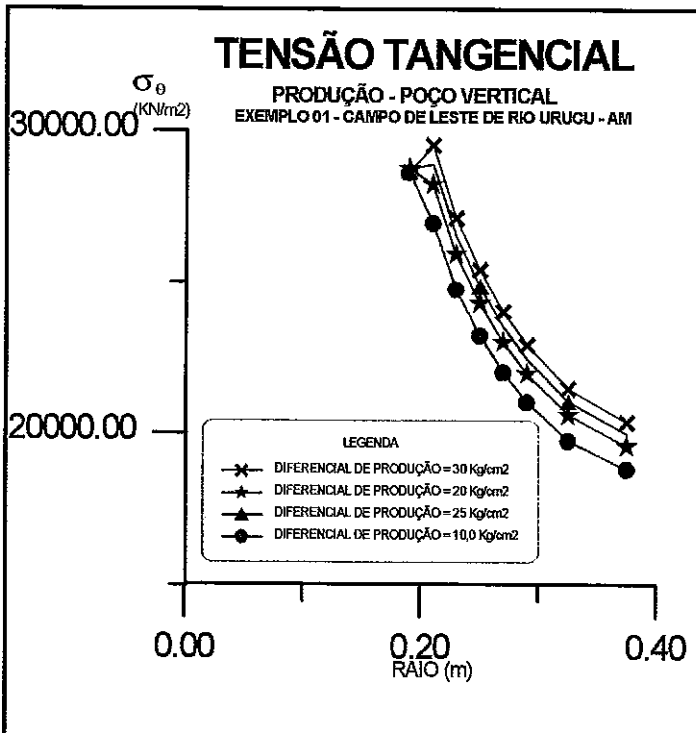
A análise foi realizada para diversos diferenciais de produção, considerando-se que o poço tivesse sido perfurado com um fluido de peso  $11,15 \text{ KN} / \text{m}^3$  (9,3 lb/gal) e adotando-se como critério de estabilidade do poço o mesmo da fase de perfuração. (fig. 7.7)

A partir da figura 7.8 pode-se observar que o colapso da formação durante a fase de produção somente irá ocorrer para diferenciais de produção superiores a  $20 \text{ Kg/cm}^2$ .

Este resultado é bastante coerente com o que se observa na prática, uma vez que este valor é bem superior ao adotado na área, onde de fato não se registra problemas de produção de areia, apesar de tratar-se de um arenito friável.



**Fig 7.7- Variação Da Pressão Com A Distância Ao Poço Para Diferenciais De Produção Distintos**



**Fig 7.8- Comportamento da Tensão Tangencial para Diferenciais de Produção Distintos**

### VII.3.2 - Exemplo 02 - Campo de Estreito - RN

A formação analisada está localizada em terra, a uma profundidade de 184 m e a determinação da magnitude da tensão vertical foi feita considerando-se um gradiente médio da coluna litoestática de 0,97 psi/pé.

O valor do coeficiente de empuxo no repouso,  $K_0$ , foi de 0.9, determinado através de ensaios ASR (Anelastic Strain Recovery) executados em amostras de testemunhos de poços da área.

Os parâmetros geomecânicos elásticos adotados nesta análise, basearam-se em ensaio de compressão uniaxial. Já os parâmetros de resistência ao cisalhamento considerados foram: coesão nula, devido a alta fragilidade do testemunho e ângulo de atrito obtido por retroanálise efetuada com o programa AEEPECD (ref. 3).

Por não se dispor de dados reais de compressibilidade da rocha e do fluido relativos a estas variáveis foram desconsiderados na análise.

As propriedades da rocha e do fluido adotadas na análise estão apresentadas na tabela 7.2

|   |                                  | VALOR    | UNIDADE |
|---|----------------------------------|----------|---------|
| <b>PARÂMETROS<br/>GEOMECÂNICOS</b>          | Módulo de Young                  | 540      | MPa     |
|   | Módulo de Poisson                | 0.37     |         |
|   | ângulo de atrito interno         | 37.00    | graus   |
|   | coesão                           | 0.0      | MPa     |
| <b>TENSÕES <i>IN SITU</i></b>               | Tensão vertical efetiva          | 2.65     | MPa     |
|   | Tensão horizontal mínima efetiva | 2.38     | MPa     |
| <b>PROPRIEDADES<br/>DO<br/>RESERVATÓRIO</b> | Permeabilidade                   | 2.5 E-06 | m/s     |
|   | Pressão estática                 | 1.259    | MPa     |
|   | Profundidade                     | 184      | m       |
| <b>GEOMETRIA DO<br/>POÇO</b>                | Raio                             | 21.59    | cm      |

Tab 02 - Propriedades de Rocha e Fluidos Adotadas na Análise do Exemplo 02

### VII.3.2.1 - Fase de Perfuração

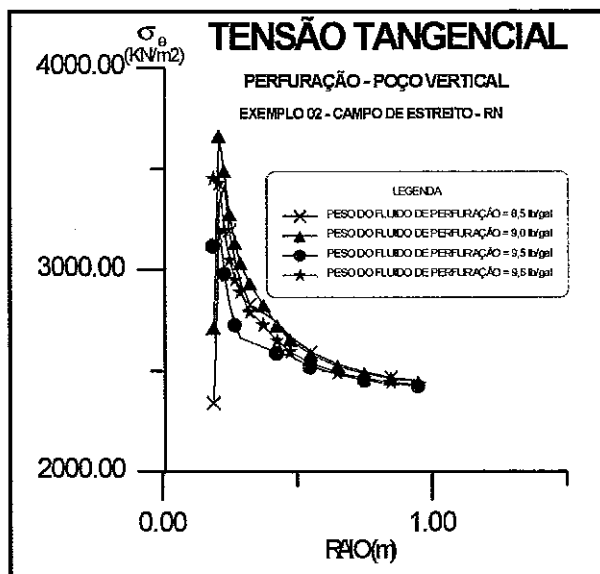
Novamente a primeira fase de estudo para este tipo de formação é a análise do peso do fluido de perfuração adequado que garanta a integridade do poço.

Nesta análise considerou-se uma faixa de peso de fluido de perfuração e empregou-se o mesmo critério de estabilidade anterior.

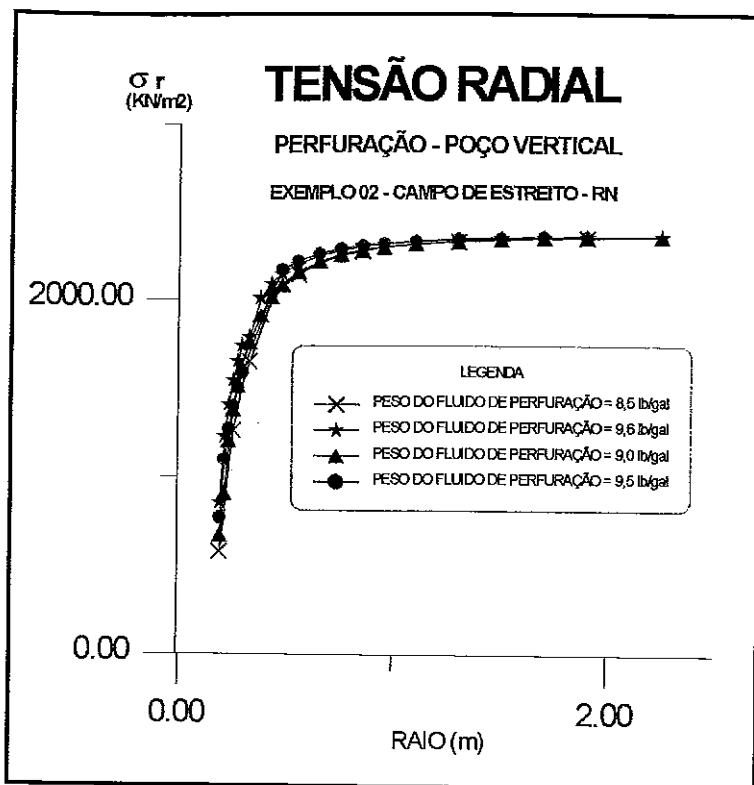
A partir das figuras 7.9 e 7.10 pode-se observar que para garantir a integridade do poço durante a a fase de perfuração é necessário que o fluido de perfuração tenha peso específico superior  $10,19 \text{ KN} / \text{m}^3$  ( $8,5 \text{ lb/gal}$ ).

Tradicionalmente os poços verticais desse campo são perfurados com fluido de peso de  $10,79$  a  $11,39 \text{ KN} / \text{m}^3$  ( $9,0$  a  $9,5 \text{ lb/gal}$ ), de forma a se garantir um diferencial de pressão, em relação a pressão estática da formação, superior a  $300 \text{ psi}$ , valor este recomendado por segurança.

Novamente os resultados obtidos nesta análise são compatíveis com os anteriormente obtidos pelo programa AEEPCD, o que confirma a qualidade dos resultados obtidos.



**Fig. 7.9 - Comportamento da Tensão Tangencial para Diversos Fluidos de Peso Específico Distintos**



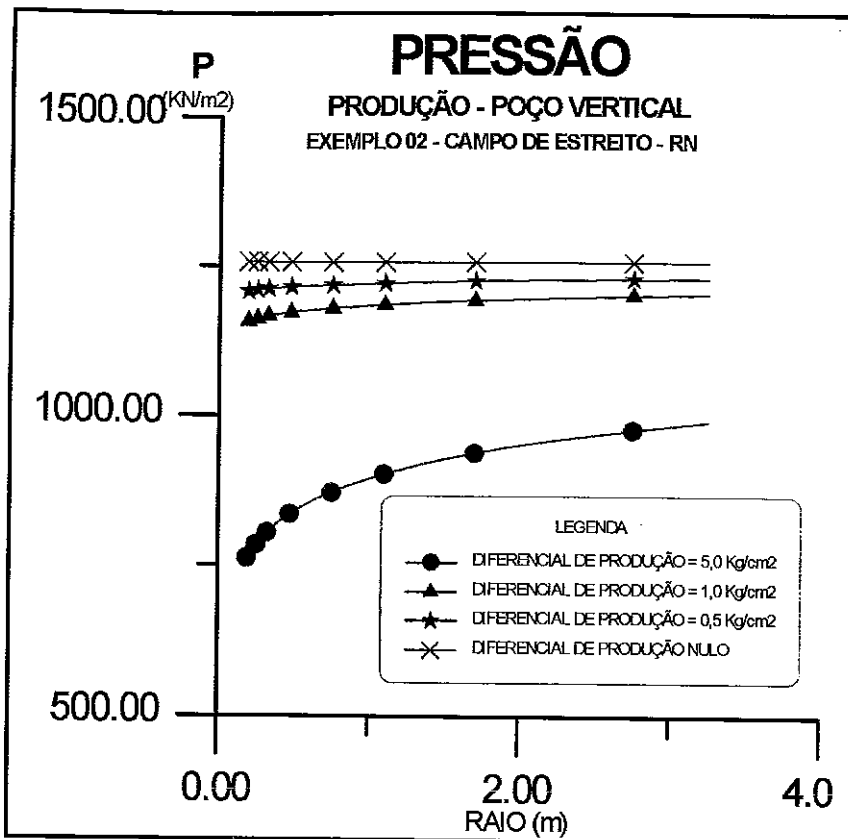
**Fig. 7.10 - Comportamento da Tensão Radial para Diversos Fluidos de Peso Específico Distintos**

### VII.3.2.2 - Fase de Produção

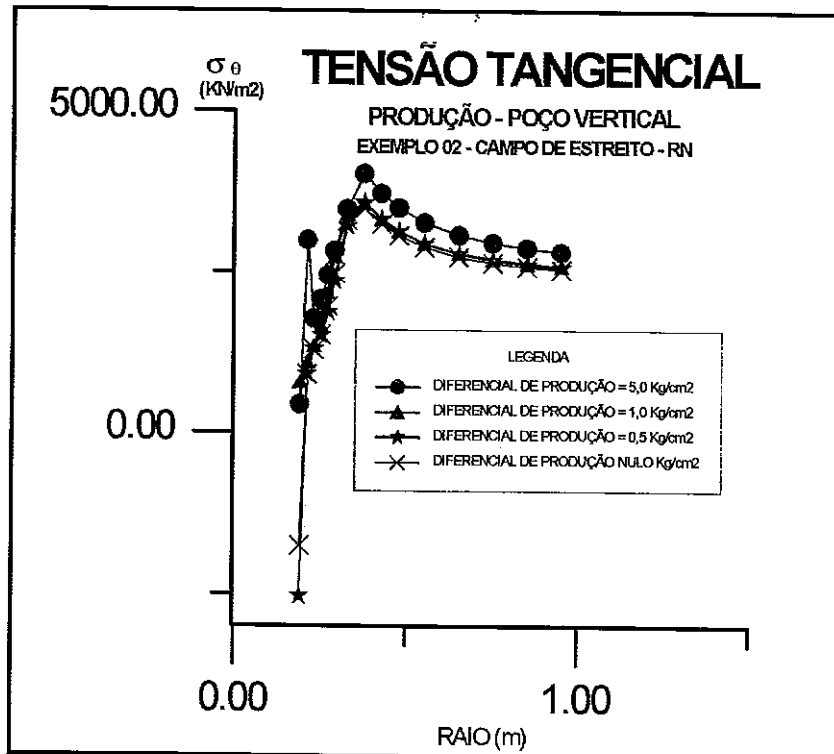
A fase de produção foi simulada da mesma forma que descrita para o exemplo 01, para diversos diferenciais de produção, considerando-se que o poço tivesse sido perfurado com um fluido de peso  $10,79 \text{ KN/m}^3$  (9,0 lb/gal) e adotando o mesmo critério de estabilidade do poço.(fig. 7.11)

A partir da figura 7.12 pode-se observar que o colapso da formação durante a fase de produção irá ocorrer para qualquer diferencial de produção aplicado para a formação.

Este resultado é bastante coerente com o que se observa na prática; uma vez que os poços da área, apesar das baixas vazões, apresentam problemas de produção de areia, sendo necessária intervenção periódica com sonda para limpeza de areia.



**Fig. 7.11 -Variação da Pressão com a Distância ao Poço para Diferenciais de Produção Distintos**



**Fig. 7.12 - Comportamento da Tensão Tangencial para Diferenciais de Produção Distintos**

### VII.3.3 - Exemplo 03 - Campo de Buracica - BA

A formação analisada fica localizada em terra, a uma profundidade de 650 m e a magnitude da tensão vertical foi definida considerando-se um peso específico médio de 1,0 psi/ft. Já para as tensões horizontais adotou-se o gradiente de fratura da área de 0.514 psi/ft, indicando um coeficiente de empuxo no repouso de 0,65.

Os parâmetros geomecânicos adotados na modelagem foram resultados de ensaios triaxiais realizados em amostras de testemunhos da área.

Por não se dispor de dados reais de compressibilidade da rocha e do fluido da formação os seus efeitos foram desconsiderados na análise.

As propriedades da rocha e do fluido adotadas na análise estão apresentadas na tabela 7.3

|   |                                  | VALOR         | UNIDADE |
|---|----------------------------------|---------------|---------|
| <b>PARÂMETROS<br/>GEOMECÂNICOS</b>          | Módulo de Young                  | 2660          | MPa     |
|   | Módulo de Poisson                | 0.35          |         |
|   | ângulo de atrito interno         | 38.7          | graus   |
|   | coesão                           | 1.93          | MPa     |
| <b>TENSÕES <i>IN SITU</i></b>               | Tensão vertical efetiva          | 11.45         | MPa     |
|   | Tensão horizontal mínima efetiva | 7.30          | MPa     |
| <b>PROPRIEDADES<br/>DO<br/>RESERVATÓRIO</b> | Permeabilidade                   | 1.7 E-07      | m/s     |
|   | Pressão estática                 | 3.000 @ -470m | MPa     |
|   | Profundidade                     | 650           | m       |
| <b>GEOMETRIA DO<br/>POÇO</b>                | Raio                             | 21,59         | cm      |

**Tab 03 - Propriedades de Rocha e Fluidos Adotadas na Análise do Exemplo 03**

### VII.3.3.1 - Fase de Perfuração

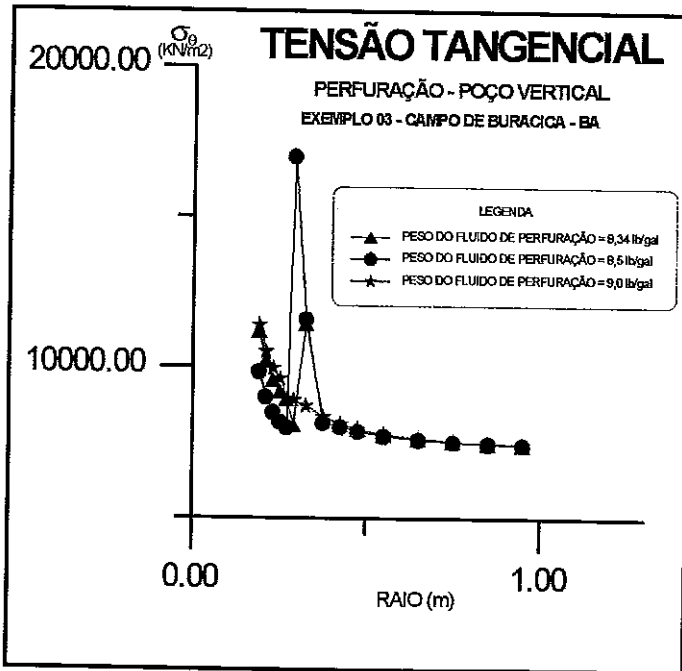
Novamente a primeira fase de estudo para este tipo de formação é a análise do peso do fluido de perfuração adequado que garanta a integridade do poço.

Nesta análise considerou-se uma faixa de peso de fluido de perfuração e utilizou-se o mesmo critério de estabilidade anteriormente definido.

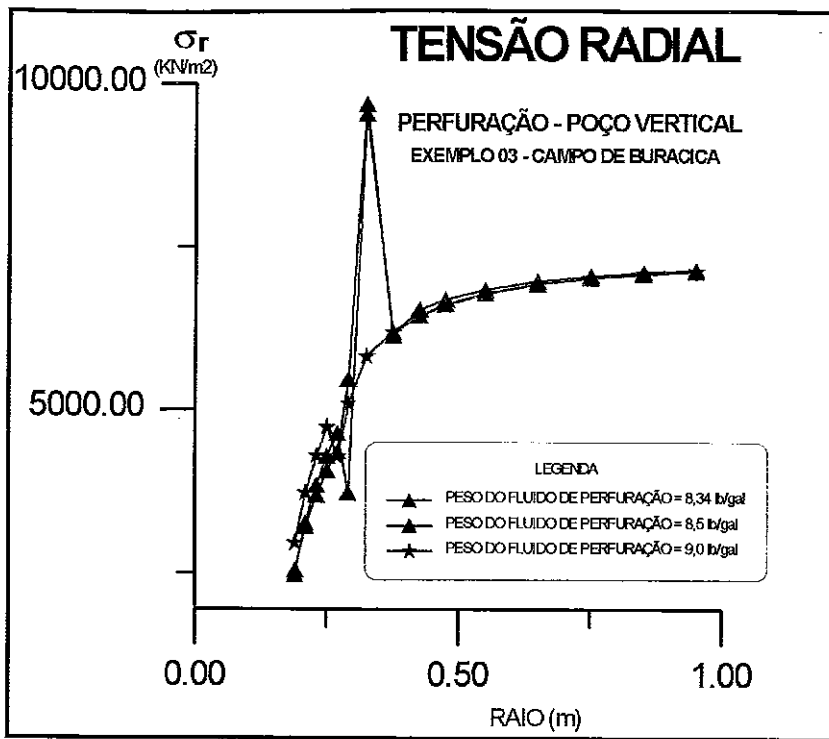
A partir das figuras 7.13 e 7.14 pode-se observar que com um peso de fluido de perfuração superior a  $10,79 \text{ KN/m}^3$  ( $9,0 \text{ lb/gal}$ ) teríamos garantida a integridade do poço durante a fase de perfuração.

De acordo com a experiência reportada na área, as perfurações de poços verticais apresentam sinais de instabilidade quando o fluido de perfuração utilizada se aproxima de  $10,19 \text{ KN/m}^3$  ( $8,5 \text{ lb/gal}$ ), valor este bastante compatível com os resultados obtidos pela simulação numérica.

Novamente os resultados obtidos nesta análise são compatíveis com os anteriormente obtidos pelo programa ÁEEPECD, confirmando a qualidade dos resultados obtidos (ref 1).



**Fig. 7.13 - Comportamento da Tensão Tangencial para Diversos Fluidos de Peso Específico Distintos**



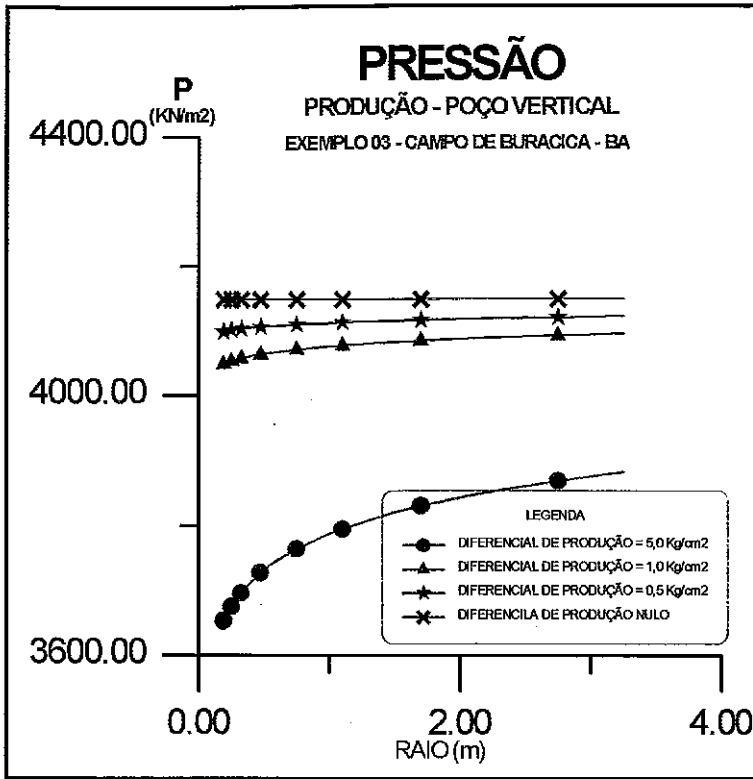
**Fig. 7.14 - Comportamento da Tensão Radial para Diversos Fluidos de Peso Específico Distintos**

### VII.3.3.2 - Fase de Produção

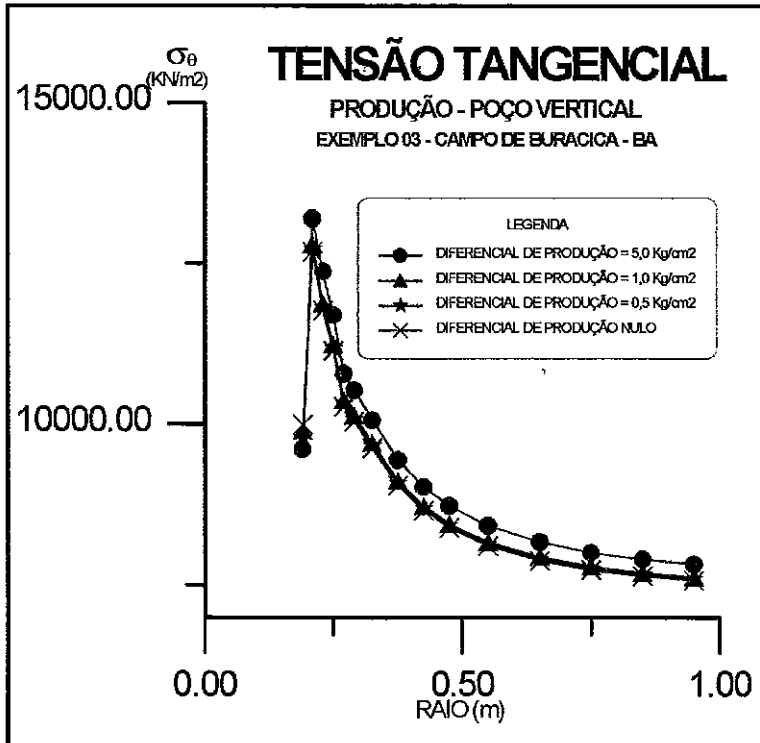
A fase de produção foi simulada da mesma forma que descrita para o exemplo 01, para diversos diferenciais de produção, considerando-se que o poço tenha sido perfurado com um fluido de peso  $10,79 \text{ KN/m}^3$  (9,0 lb/gal) e adotando-se o mesmo critério de estabilidade do poço.(fig. 7.15)

De forma similar ao observado para o Campo de Estreito, a partir da figura 7.16 verifica-se que o colapso da formação durante a fase de produção irá ocorrer para qualquer diferencial de produção aplicado para a formação.

Da mesma forma que para o exemplo 02, este resultado é bastante consistente com o que se observa na prática, uma vez que os poços da área apresentam problemas de produção de areia.



**Fig. 7.15 -Variação da Pressão com a Distância ao Poço para Diferenciais de Produção Distintos**



**Fig 7.16 -Comportamento da Tensão Tangencial para Diferenciais de Produção Distintos**

## VIII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O principal objetivo deste trabalho foi elaborar uma ferramenta que permitisse analisar o comportamento da rocha reservatório durante as fases de perfuração e produção e o de compreender os mecanismos de instabilidade de poços,, possibilitando a previsão de ocorrência e extensão de uma zona de instabilidade próxima a parede do poço.

As soluções analíticas existentes são bastante restritas, consideram uma série de hipóteses simplificadoras que por muitas vezes levam a resultados não representativos.

Com o desenvolvimento dos recursos computacionais, o problema pode ser tratado em nível maior de complexidade dando um impulso muito grande no desenvolvimento de simuladores numéricos.

As soluções numéricas, utilizando o Método dos Elementos Finitos, possibilitam introduzir considerações realistas como anisotropia e o comportamento não linear da rocha.

Desta forma, optou-se por desenvolver uma ferramenta numérica capaz de analisar o problema de instabilidade de um poço vertical, considerando o comportamento elasto-plástico perfeito da rocha acoplados aos efeitos de fluxo de fluido, adotando-se as formulações apresentadas nos capítulos 3 e 4.

O desenvolvimento de uma formulação de solução totalmente acoplada torna-se bastante importante na medida que se deseja utilizar métodos de solução iterativos, assim como considerar os efeitos da poroelasticidade durante o fluxo do fluido, incluindo os efeitos da variação da distribuição da pressão de poro com o tempo no cálculo das deformações e tensões efetivas.

Adotar um modelo de solução elastoplástico é bastante mais representativo que o modelo elástico linear, uma vez que estes são bastante mais conservativos quanto ao limite de resistência do material.

O critério de ruptura adotado foi o de Mohr-Coulomb, principalmente devido ao mesmo ser função apenas das tensões principais máxima e mínima, não considerando a tensão intermediária.

O técnico que utiliza uma ferramenta numérica deve ter total controle da influência de cada parâmetro envolvido na análise, para que, a partir dos resultados obtidos, tenha condições de realizar uma análise crítica dos mesmos e tomar decisões como sobre qual a extensão da zona plastificada é tolerável.

Existem diversas ferramentas analíticas e numéricas disponíveis para estudos de estabilidade de poços, mas é imprescindível que as mesmas sejam alimentadas com dados reais e representativos. Caso estes dados não sejam confiáveis, muitas vezes é preferível não considerar seu efeito optando pela utilização de ferramentas menos sofisticadas.

Na simulação realizada no exemplo 2 foi considerada que a coesão do material seria nula devido ao alto grau de inconsolidação da formação que não permite a obtenção de amostras representativas para serem analisadas. Esta é uma informação importante de se considerar ao se analisar os resultados obtidos pela simulação.

Imediatamente após a perfuração, a pressão de poro próxima a parede do poço é alterada até que a formação de um reboco selante que prevenirá a comunicação de pressão entre o poço e a formação. Para as formações de permeabilidade média a alta, o retorno ao estado de pressão original de reservatório é quase que instantâneo sendo a estabilidade desta formação função principalmente do peso de fluido de perfuração adequado.

Já para formações de baixíssima permeabilidade como os folhelhos, o tempo de reajustamento da pressão pode ser significativo, estando a pressão de poro e a deformação sofrida pela rocha intimamente acopladas. Este fato pode levar a alterações das tensões efetivas atuantes na rocha, e desta forma, a ruptura na parede do poço pode ocorrer por efeito de poroelasticidade.

Como primeira recomendação deste trabalho indica-se a utilização de simuladores similares a este, que considerem o efeito acoplado da poroelasticidade para análise de problemas de instabilidade de formações de baixíssima permeabilidade, de forma a se definir o tempo que a mesma poderá ser mantida aberta sem ser revestida.

A continuidade deste trabalho visando o desenvolvimento de simuladores numéricos mais completos é de interesse da indústria do petróleo em geral, sendo recomendados alguns pontos:

- O uso de interfaces gráficas de entrada de dados, assim como visualizadores gráficos dos resultados, explorando ao máximo as potencialidades das estações de trabalho e possibilitando análises mais completas.

- A implementação de método iterativo de solução, assim como da estratégia de refinamento de malha, principalmente nos instantes iniciais da simulação, em região , próximo à parede do poço, que geram resultados mais precisos e justificam o esforço da solução acoplada.

- Rever as equações adotadas, de forma a incluir o fluxo multifásico de fluidos o que possibilitará analisar o efeito da variação da saturação dos fluidos e das propriedades importantes como permeabilidade relativa.

- Incorporar às equações os efeitos da temperatura.

Dentre as diversas implementações aqui recomendadas aquela que representa o maior desafio na indústria do petróleo é o desenvolvimento de simuladores acoplados, multifásicos tridimensionais.

Simuladores deste tipo permitiriam a análise completada de estabilidade de poços inclinados e horizontais. Contudo, o esforço para tal realização deve ser considerado com bastante cautela. De fato, esses poderosos simuladores requerem uma quantidade de parâmetros muito grande e raramente disponíveis. Por outro lado, uma análise tão complexa do problema de estabilidade talvez não seja necessária para certos problemas, podendo ser analisado somente o ponto problemático ou serem utilizados modelos numéricos ou analíticos pseudo 3D.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Amaral C.S. & Costa A.M: Comunicação Técnica - Estudo de Estabilidade do Poço Horizontal de Buracica, Petrobras S.A., jun, 1995
- [2] Amaral C.S. & Costa A.M: Comunicação Técnica - Estudo de Estabilidade do Poço Horizontal do Campo de Leste de Rio Urucu , Petrobras S.A., set, 1995
- [3] Amaral C.S. & Costa A.M: Comunicação Técnica - Reavaliação da Estabilidade de um Poço Horizontal no Campo de Estreito, Petrobras S.A., nov, 1995
- [4] Atkinson J.H.: Foundations and Slopes- An Introduction to Applications of Critical State Soil Mechanis, McGraw-Hill Book Company, 1981
- [5] Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, 1982
- [6] Biot M. A. : Theory of Elasticity and Consolidation for Porous Anisotropic Solid, J.Appl. Physics, 26, 182 - 185, 1955
- [7] Biot, M.A. ."General theory of three dimensional consolidation", J.Appl. Physics, 12, 155-164, 1943
- [8] Booker, J.R. & Small, J.C.: Consolidation of a cross-anisotropic soil medium, Quaterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 37, 479-495, 1984
- [9] Bratli, R.K. & Risnes, R.: Stability and Failure of sand arches. SPEJ, 236-248, apr 1981
- [10] Britto, A.M. & Gunn M.J.: Critical State Soil Mechanics via Finite Element , Ellis Horwood Limited , 1987

- [11] Charlez P.A.: The Impact of Constitutive Laws on Wellbore Stability: A General Review, Eurorock'94 Rotterdam, 239 - 249, 1994.
- [12] Costa A.M.: Uma Aplicação de Métodos Computacionais e Princípios de Mecânica das Rochas no Projeto e Análise de Escavações Destinadas à Mineração Subterrânea, Tese de Doutorado - COPPE/UFRJ, 1984
- [13] Desai C.S. & Christian J.T.: Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill Book Company , 1977
- [14] Geerstma, J.: Problems of Rock Mechanics in Petroleum Production Engineering, presented at the First Cong. of International Soc. of rock Mechanics, Lisbon, 1, 585 - 594, 1966
- [15] Geertsma, J.: "Some rock mechanical aspects of oil and gas well completion", paper EUR 38, presented at the European Offshore Petroleum Conference and Exhibition, London, Oct 24-26, 1978
- [16] Gnirk, P.F.: "The mechanical behavior of uncased wellbores situated in elastic/plastic media under hydrostatic stress", Soc. Pet. Eng. J. , 49-59, 1972
- [17] Haimson B.C. & Fairhurst C.: Initiation and Extension of Hydraulic Fractures in Rocks - Transactions of AIME Sd 240, 310-317, 1967
- [18] Horshud, P., Holt, R.M., Sonstebo E., Svano, G., Bostrom B.: Time Dependent Borehole Stability, Eurorock'94 Rotterdam, 259 - 266, 1994.
- [19] Hughes T.J.R. : The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall Internation, Inc , 1987
- [20] Humpheson C.: Finite Element Analysis of Elasto-visco-plastic Soils - Ph.D. Thesis - University College os Swansea, 1976

- [21] Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., "The finite element method in deformation and consolidation of porous media", John Wiley, 1987
- [22] Maury V.: Rock Failure Mechanisms Identification: A key for Wellbore Stability and Reservoir Behaviour Problem, , Eurorock'94 Rotterdam, 175 - 182, 1994.
- [23] McLellan P.J. & Wang Y.: Predicting the Effects of Pore Pressure Penetration on the Extent of Wellbore Instability: Application of a Versatile Poro-elastoplastic Model, , Eurorock'94 Rotterdam, 205 - 214, 1994.
- [24] Nayak G.C. & Zienkiewicz O.C.: Convenient form of Stress Invariants for Plasticity - Proc. ASCE, 98(ST4)949-53, 1972
- [25] Naylor D.J., Pande G.N., Simpson B., Tabb R.: Finite Elements in Geotechnical Engineering, Pinerid Press, 1981
- [26] Naylor D.J.: Non-linear Finite Element Models for Soils - Ph.D. Thesis - University College of Swansea, 1975
- [27] Paslay, P.R. and Cheatham, J.B.: "Rock stresses induced by flow of fluids into boreholes", Soc. Pet. Eng. J., 85-94, 1963
- [28] Pellegrino A., Sullem J. & Barla G.: Nonlinear Effects in the Study of Borehole Stability, , Eurorock'94 Rotterdam, 231 - 238, 1994.
- [29] Polillo A.F., Ramos G.G. & Wilton B.S.: Usage and Applicability of Pseudo-3D Stress Analysis in Borehole Stability Problems in Petroleum Drilling and Production Operation, to be presented at NARMS, JUN 1996.
- [30] Polillo, A."Um procedimento para análise de estabilidade e fraturamento de poços de petróleo", MSc thesis, Ouro Preto Univ. , 1987

- [31] Risnes, R., Bratli R., and Horshud, P.: "Sand stress around a wellbore", Soc. Pet. Eng. J., 883-898, 1982
- [32] Siqueira, C.A.M., Soares A.C. & Freitas S.M.S.: Determinação do Estado de Tensão do poço 7-ET-670-RN, Utilizando o Equipamento ASR-3d, Petrobras S.A., Jan, 1996
- [33] Smith I.M. & Griffiths D.V.: Programing the Finite Element Method ,ed 2, John Wiley & Sons1988
- [34] Soares A.C *et alii.*: ComunicaçãoTécnica - Ensaio de Mecânica de Rochas para o Poço 7-LUC-27-Petrobras S. A., Set, 1995
- [35] Sukirman Y.B., Lewis.U.,:Three-Dimensional Fully Coupled Flow: Consolidation Modeling Using Finite Element Method.Soc. Pet. Eng. J. , 149- 155, Nov 1994.
- [36] Terzaghi, K. : "Theoretical soil mechanics", John Wiley, 1943
- [37] Timoshenko S. P., Goddier J. N.: Theory of Elasticity, Mc. Graw-Hill Book Company 1970
- [38] Vaziri, H.H. and Byrne, P.M.: "Analysis of stress, flow and stability around deep wells", Can Geotech, 1990
- [39] Wang, Y, Scott J.D., Dusseault, M.B.: Borehole Rupture from Plastic Yield to Hydraulic Fracture - A nonlinear model including elastoplasticity, Journal of Petroleum Science and Eng., 12, 94-111, 1994
- [40] Wang, Y.: The Effect of a nonlinear Mohr-Coulomb Criterion on Borehole stress and Damage Zone Estimate, Can Geotech, J. 31, 104-109 , 1994

- [41] Westergaarda H.M.: Plastic State of Stress Around a Deep Well, vol 27, 1-5, J. Boston Soc. of Civil Engineering, Jan 1940.
- [42] Zienkiewicz O.C. & Taylor R.L.: The Finite Element Method , ed 4, vol 1, McGraw-Hill Company, 1989
- [43] Zienkiewicz O.C. , Lewis R.W. & Stagg K.G.: Numerical Methods in Offshore Engineering, John Wiley & Sons, 1978
- [44] Zienkiewicz O.C.: The Finite Element Method, John Wiley & Sons, 1977