

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS APORTICADAS - ESCOLHA DE UM
MÉTODO ADAPTADO A ESTRUTURAS EM CONCRETO

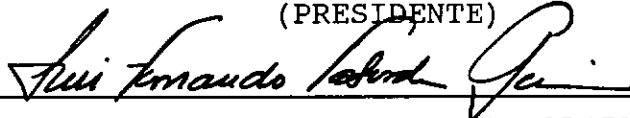
MARIA LINA FALCÃO CASOTTI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

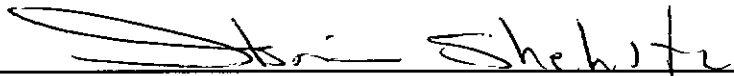
APROVADA POR :



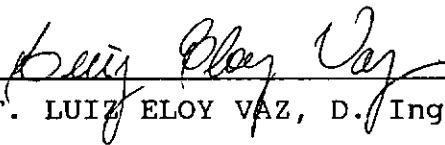
PROF. PAULO CHAVÉS DE REZENDE MARTINS, D.ECP
(PRESIDENTE)



PROF. LUIZ FERNANDO TABORDA GARCIA, D.Sc.



PROF. IBRAHIM ABD EL MALIK SHEHATA, Ph.D.



PROF. LUIZ ELOY VAZ, D. Ing.

RIO DE JANEIRO, R.J. - BRASIL

MAIO DE 1994

CASOTTI, MARIA LINA FALCÃO

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS APORTICADAS - ESCOLHA DE UM
MÉTODO ADAPTADO A ESTRUTURAS EM CONCRETO (Rio de Janeiro)
1994.

viii, 106 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia
Civil, 1994).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise não-linear
2. Concreto

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paulo Chaves de Rezende Martins, por sua valiosa orientação.

Aos colegas da COPPE: Sandra Regina, Sandra Isabel, Natália, Nahri, Assis, Rafa (in memoriam), Sônia, Clevi; pelo apoio prestado durante todos esses anos de estudos.

Ao Jean Marie, Cláudio Jouglard, Willlliam e Paulinho, que além de sua amizade, contribuíram com valiosas sugestões na elaboração deste trabalho.

À minha família, que muito me incentivou no decorrer desta tese.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Civil

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS APORTICADAS - ESCOLHA DE UM MÉTODO ADAPTADO A ESTRUTURAS EM CONCRETO

Maria Lina Falcão Casotti

Maior de 1994

Orientador : Paulo Chaves de Rezende Martins

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho apresenta um levantamento bibliográfico de algumas propostas para análise não-linear de estruturas, com vistas a escolha de uma proposta para utilização em estudos teóricos de ensaios realizados no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil.

A proposta escolhida é apresentada de maneira mais detalhada, já tendo sido implementada sob a forma do sistema SNOB. Esse sistema, desenvolvido no CEBTP, foi aqui implantado e teve sua aplicabilidade testada em estruturas de concreto armado, simulando satisfatoriamente resultados experimentais.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering

NONLINEAR ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES - CHOOSE OF A METHOD ADAPTED TO CONCRETE STRUCTURES

Chairman : Paulo Chaves de Rezende Martins

Department : Civil Engineering

This work presents a bibliografic survey of proposals for non-linear analysis of concrete framed structures, with the objective to choose one of them to be used in theoretical studies of experimental results performed in the Structural Laboratory of the COPPE/UFRJ, Department of Civil Engineering.

The choosed proposal is presented in a more detailed manner, and had been implemented as a system called SNOB. This system, developped in CEBTP, was installed here and had his aplicability tested in reinforced concrete structures, simulating good agreement with experimental results.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II - EVOLUÇÃO RECENTE DE DIVERSAS PROPOSTAS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR ESTÁTICA DE ESTRUTURAS	3
II.1 - As propostas pesquisadas.....	3
II.1.1 - Deformações Controladas.....	3
II.1.2 - Superposição Modal.....	6
II.1.3 - Formulação da Pseudo-Carga.....	8
II.1.4 - Elemento Finito com Deflexão Inicial.....	15
II.1.5 - Elemento Finito com Modelo de Tensão Axial Média.....	19
II.1.6 - Método do Comprimento de Arco.....	22
II.1.7 - Método do Comprimento de Arco para determinação do 1º Ponto Limite.....	25
II.1.8 - Formulação Co-rotacional de Crisfield....	26
II.1.9 - Formulação para Análise de Estruturas Enrijecidas.....	26
II.1.10 - Formulação de Nait-Rabah.....	28
II.1.11 - Elemento Finito de Pórtico Espacial com Referencial Móvel Para Análise com Não Linearidade Geométrica.....	31
II.2 - Comparação crítica e aplicabilidade das propostas apresentadas.....	32
CAPÍTULO III - MÉTODO DE CÁLCULO E HIPÓTESES BÁSICAS.....	34
III.1 - Características das estruturas analisadas e leis de comportamento dos materiais.....	34
III.2 - Estudo da protensão.....	35
III.3 - Comportamento dos materiais.....	36
III.3.1 - Comportamento do concreto comprimido....	36

III.3.2 - Comportamento do concreto tracionado....	38
III.3.3 - Comportamento dos aços passivos.....	41
III.3.4 - Comportamento dos aços ativos.....	44
III.4 - Esforços solicitantes e deformações na seção plana.....	44
III.4.1 -Solicitações internas relativas ao concreto e aos perfis metálicos.....	47
III.4.2 - Solicitações internas relativas às armaduras passivas.....	49
III.4.3 - Solicitações internas relativas às armaduras de protensão.....	50
III.4.4 - Seção deformada a equilibrar.....	51
III.4.5 - Método iterativo de equilíbrio da seção.....	54
III.5 - Equilíbrio global da estrutura.....	58
III.5.1 - Matriz de rigidez do elemento no referencial móvel.....	58
III.5.1.1 - Relação entre os esforços nodais no elemento e as solicitações em uma seção.....	65
III.5.1.2 - Relação entre as deformações nas seções e os deslocamentos nodais do elemento...	66
III.5.1.3 - Relação entre os deslocamentos e os esforços nos nós do elemento.....	67
III.5.2 - Matriz de rigidez do elemento no referencial local.....	69
III.5.2.1 - Relação entre deslocamentos nodais do elemento no referencial móvel e no referencial local.....	69

III.5.2.2 - Relação entre deslocamentos e esforços nodais do elemento no referencial local.....	70
III.5.3 - Matriz de rigidez do elemento no referencial global.....	74
III.5.4 - Método incremental - iterativo de equilíbrio da estrutura.....	77
III.5.4.1 - Algoritmo de resolução.....	77
III.5.4.2 - Sequência de cálculo.....	78
CAPÍTULO IV - O SISTEMA SNOB - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	84
IV.1 - Exemplo 1.....	84
IV.2 - Exemplo 2.....	88
IV.3 - Exemplo 3.....	91
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES.....	97
BIBLIOGRAFIA.....	99
ANEXO A.....	103

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Uma estrutura pode ser estudada através de uma análise linear desde que obedeça a duas hipóteses básicas:

a) pequenos deslocamentos (em relação às dimensões globais da estrutura, e de forma tal que possam ser consideradas relações deformação-deslocamento lineares e equações de equilíbrio na geometria inicial) e, b) o material se comporta de acordo com a lei de Hooke generalizada. Caso alguma dessas hipóteses não se verifique , deve-se realizar uma análise não linear.

Nos últimos anos, diversas propostas para análise não linear física e geométrica de estruturas vêm sendo desenvolvidas. Dentro desse quadro, o presente trabalho buscou determinar uma formulação para análise não linear de estruturas aperticadas em concreto armado e/ou protendido que exigisse um mínimo de adaptação em sua forma inicial disponível a fim de dotar o Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ de um programa que verificasse os resultados dos ensaios realizados. Ela também deverá servir como embrião de um sistema mais completo de análise de estruturas, sobretudo pontes.

A formulação a ser escolhida deveria possuir como características, tanto eficiência computacional e comprovação experimental de resultados, como flexibilidade para inclusão de efeitos como o de protensão interna e externa e de diferentes leis de comportamento dos materiais.

Uma formulação para análise não linear consiste

basicamente em um conjunto de operações que visam simular o comportamento real de uma estrutura, captando os efeitos de não linearidade física e geométrica. De uma forma geral essas operações consistem na escolha de um modelo de elemento, um sistema de coordenadas e um método de resolução do sistema de equações não-lineares.

As mais recentes propostas para análise não linear de estruturas apresentadas se diferenciam basicamente na forma de realização das operações acima citadas. Dentro desse contexto, após pesquisa bibliográfica, foram selecionadas 11 propostas que mereceram maior atenção com vistas a escolha das que melhor se adequariam aos objetivos citados. Estas propostas são apresentadas no capítulo II.

Vale salientar que os princípios gerais das propostas são analisados, havendo um maior aprofundamento quando necessário para discutir sua aplicabilidade a estruturas de concreto. No capítulo II, item II.2, as propostas que a princípio se adequariam ao tipo de análise desejado são comparadas entre si com maiores detalhes.

O capítulo III apresenta a formulação escolhida, cuja implementação computacional é testada no capítulo IV. Conclusões e sugestões para continuação deste trabalho estão contidas no capítulo V.

CAPÍTULO II

EVOLUÇÃO RECENTE DE DIVERSAS PROPOSTAS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR ESTÁTICA DE ESTRUTURAS

Neste capítulo serão apresentados os princípios gerais de 11 propostas selecionadas entre diversas propostas para análise não linear estática de estruturas, que foram objeto de pesquisa bibliográfica no presente trabalho.

II.1 - AS PROPOSTAS PESQUISADAS

II.1.1 - Deformações Controladas

O Método de Deformações Controladas utilizando a Técnica de Incremento de Curvatura, desenvolvido por CAMPBELL E KODUR (1990), aplica o Método dos Elementos Finitos (ZIENKIEWICS (1982)) à análise de vigas contínuas de concreto protendido.

Nessa aplicação, a viga é dividida em segmentos com dois nós em cada um. Cada nó possui dois graus de liberdade, quais sejam rotação e deslocamento transversal. É realizada inicialmente uma análise linear, a fim de se estabelecer o efeito da protensão; a partir daí a relação momento fletor .vs. curvatura é estabelecida para todos os segmentos. Um segmento chave, localizado na região provável de colapso, tem sua curvatura incrementada passo a passo e, a cada incremento, é realizada uma análise linear com o propósito de se determinar o momento fletor e a curvatura em cada segmento. Através de relações de equilíbrio, o carregamento

real é determinado, assim como as deflexões e esforços nodais. O incremento continua até que um dos segmentos alcance sua capacidade última, expressa em termos de uma curvatura última, quando se diz que houve colapso.

São apresentadas duas opções da relação tensão-deformação do concreto comprimido: uma para concreto confinado e outra para concreto não confinado.

A relação momento fletor .vs. curvatura para uma seção em concreto protendido (ver figura II.1) é gerada para a seção central do segmento e considerada válida para todo seu comprimento. Isto impõe, já na concepção da estrutura, o uso de elementos suficientemente curtos para que esta hipótese seja realista.

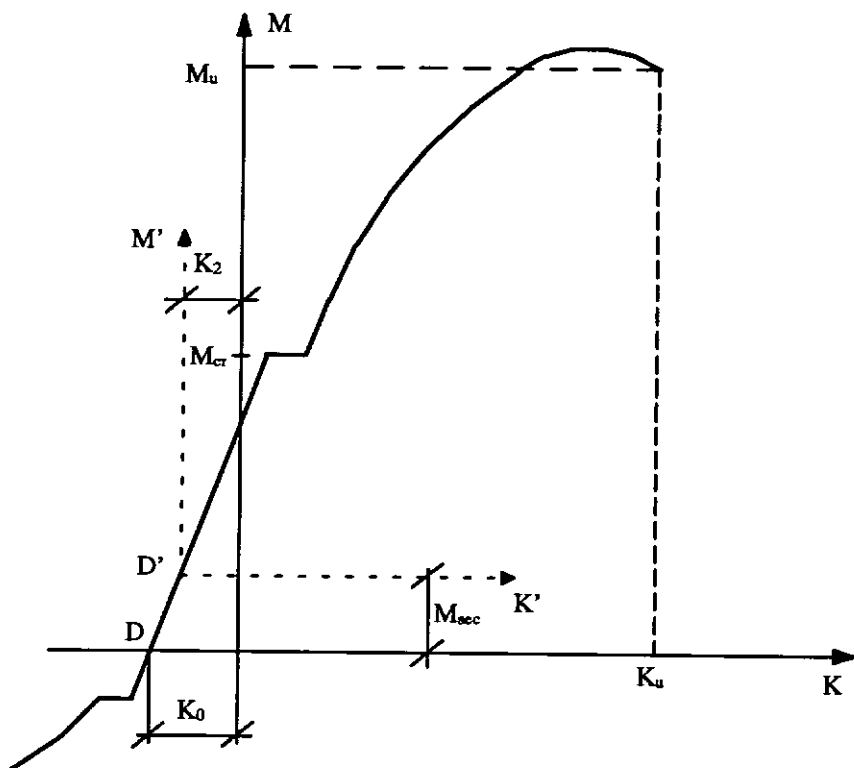


Fig. II.1 - Sistema de eixos para a relação momento-curvatura

Conforme mostra a figura II.1, há uma mudança de origem para os eixos $M'-K'$ a fim de evitar problemas computacionais como a não convergência. Na figura II.1, M_{sec} e K_0 denotam respectivamente o momento atuante na seção transversal e sua curvatura inicial, devidos à ação da protensão. A curvatura última K_u é aquela correspondente a uma deformação máxima na compressão do concreto, ϵ_{MAX} , ou a uma deformação última do aço tracionado existente na seção.

Subsequente à fissuração do concreto, o diagrama de momentos fletores para uma viga contínua protendida aproxima-se do diagrama obtido de uma análise de colapso plástico. A carga de colapso será atingida se as rótulas formarem um mecanismo na viga. Uma modelagem apropriada das regiões da viga onde o colapso ocorre é um aspecto importante, uma vez que a carga de colapso é governada pela deformação dessas regiões.

O método acima descrito apresentou erros de aproximadamente 15% , para menos, na estimativa da carga de colapso de vigas com dois e três vãos, em relação a resultados experimentais. Note-se que o modelo não considera o enrijecimento provocado pelo aço passivo. Como uma última e mais importante crítica observa-se que o refinamento da malha nas proximidades de onde se formam rótulas plásticas tem uma importância fundamental para os resultados. Isso contra-indica o uso prático do método agora discutido, especialmente se considerarmos uma distribuição complexa de carregamento e aplicações a pórticos espaciais, pois exige que se conheça de antemão o mecanismo de ruptura que se formará na estrutura antes mesmo de se efetuar a análise ou

então que se altere o modelo ao longo da análise após identificados os pontos de plastificação.

II.1.2 - Superposição Modal

O Método de Superposição Modal (BATHE (1982)), é uma opção de análise estática da não linearidade geométrica de estruturas esbeltas com comportamento pré-crítico fracamente não-linear. Essas estruturas apresentam a curva carga x deformação suavemente não linear até que o ponto crítico seja atingido. De forma geral, até esse ponto, seu carregamento causa predominantemente deformações axiais e pouca deformação por flexão. Para esse tipo de análise as equações de equilíbrio são deduzidas considerando a estrutura sujeita a pequenas deformações, em regime elástico-linear e a deslocamentos moderados (ou seja, deslocamentos ainda pequenos em relação às dimensões globais da estrutura, porém já se tornando necessária a consideração de alguns termos não-lineares nas relações deformação - deslocamento e equações de equilíbrio). Para chegar a essas equações, o princípio da extremização da energia potencial total é utilizado.

O método em questão tem como hipótese que o vetor de deformações é formado pela soma de dois outros vetores: o vetor de deformações solução da análise linear (eq. II.1) e o vetor de deformações que contém a não linearidade do problema. É na determinação dessa segunda parcela do vetor de deformações onde ocorre uma mudança de coordenadas para a base modal, constituída pelos primeiros autovetores

correspondentes ao estado linear de deformações, com o vetor de tensões dado por

$$\{\sigma_L\} = \{E\} \{B^0\} \{K_e\} [P]^{-1} \quad [\text{II.1}]$$

onde :

- $\{E\}$ matriz de elasticidade do material
- $\{B^0\}$ matriz somente de funções de forma
- $\{K_e\}$ matriz de rigidez elástica
- $[P]$ vetor de carregamentos.

Portanto, torna-se necessário solucionar o problema de autovalor a fim de se determinar a base modal (NAGY E KÖNIG, 1979). Surge porém uma dificuldade nesse processo, pois a solução do problema de autovalor exige frequentemente um grande esforço computacional para estruturas de uso corrente.

Para contornar essa dificuldade surgiu como opção o uso de uma base de transformação de coordenadas obtida através de uma análise de Rayleigh-Ritz com base de Ritz gerada pelo procedimento proposto por Lanczos, substituindo a base modal (MEDEIROS, 1985). Dessa forma reduz-se o esforço computacional significativamente.

O procedimento de Lanczos consiste em construir, a partir de um vetor de partida , um conjunto de vetores ortogonais obtidos da sequência de Krilov, ortogonalizando cada um deles em relação ao anterior, utilizando a técnica de Gram-Schmidt (BATHE, 1982).

Pode-se afirmar que o Método de Superposição Modal não se adequa ao propósito inicial deste trabalho devido a

dificuldade de se incluir uma análise não linear física. Nesse caso, tornar-se-ia desvantajoso o uso do mesmo devido à necessidade de resolver um problema de autovalor a cada mudança de rigidez da estrutura.

Existe um método conhecido como Método de Autovetores Dominantes, apresentado em NAPOLEÃO ET AL. (1991), voltado para problemas de não linearidade do material. Uma recente aplicação dessa técnica foi realizada por PAIVA (1993) durante a finalização da presente tese.

II.1.3 - Formulação da Pseudo-Carga

A formulação da Pseudo Carga, LUI (1988) e LUI ET AL. (1990), foi desenvolvido explorando as similaridades entre as equações diferenciais de uma viga-coluna e de uma viga.

Considere-se uma viga-coluna, conforme mostra a figura II.2, que possua rigidez à flexão EI. Sua equação diferencial tem a seguinte forma :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = \omega \quad [\text{II.2}]$$

onde v é o deslocamento transversal, ω é o carregamento lateral e P é a força axial.

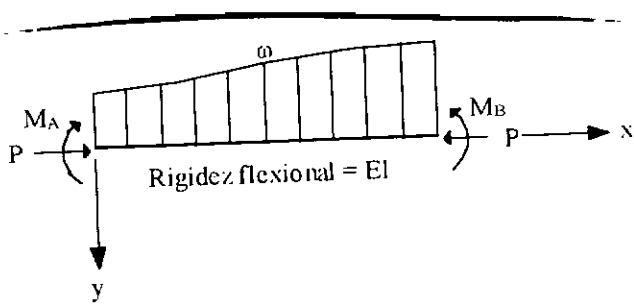


Fig. II.2 - Viga-coluna

A equação [II.2] pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = \bar{\omega} \quad [\text{II.3}]$$

onde

$$\bar{\omega} = \omega - P \frac{d^2 v}{dx^2} \quad [\text{II.4}]$$

Pode-se escrever:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M}{EI} \quad [\text{II.5}]$$

Daí vem que

$$\bar{\omega} = \omega + P \frac{M}{EI} \quad [\text{II.6}]$$

onde \$M\$ é o momento fletor ao longo da viga-coluna.

Dessa maneira conclui-se que o efeito da não linearidade geométrica pode ser simulado através da aplicação de uma pseudo-carga de magnitude PM/EI , obtida através da multiplicação do diagrama de momentos do elemento pelo fator P/EI . O novo diagrama de momentos assim obtido pode ser utilizado para formar um novo pseudo-carregamento transversal. Para manter o equilíbrio, também são aplicados pseudo-cortantes nas extremidades do elemento.

Como ilustração, a viga-coluna mostrada na figura II.3 será analisada usando a formulação da pseudo-carga. O momento máximo teórico ocorre no meio do vão e vale:

$$M_{\max} = M_0 \left(\frac{1}{\cos \kappa L/2} \right) \quad [\text{II.7}]$$

onde $\kappa = \sqrt{P / EI}$

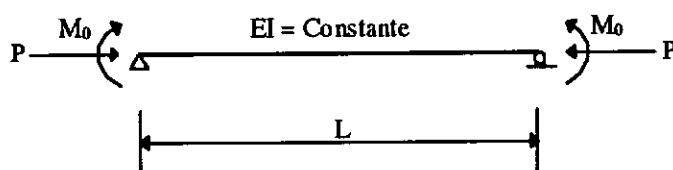


Fig. II.3 - Viga-coluna submetida a momentos iguais nas extremidades

Após três ciclos de análise, como mostrado na figura II.4, o momento máximo obtido vale :

$$M_{\max} = M_0 + \frac{1}{8} P \frac{M_0 L^2}{EI} + \frac{5}{384} \frac{P^2 M_0 L^4}{(EI)^2}$$

$$= M_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa L}{2} \right)^2 + \frac{5}{24} \left(\frac{\kappa L}{2} \right)^4 \right] \quad [\text{II.8}]$$

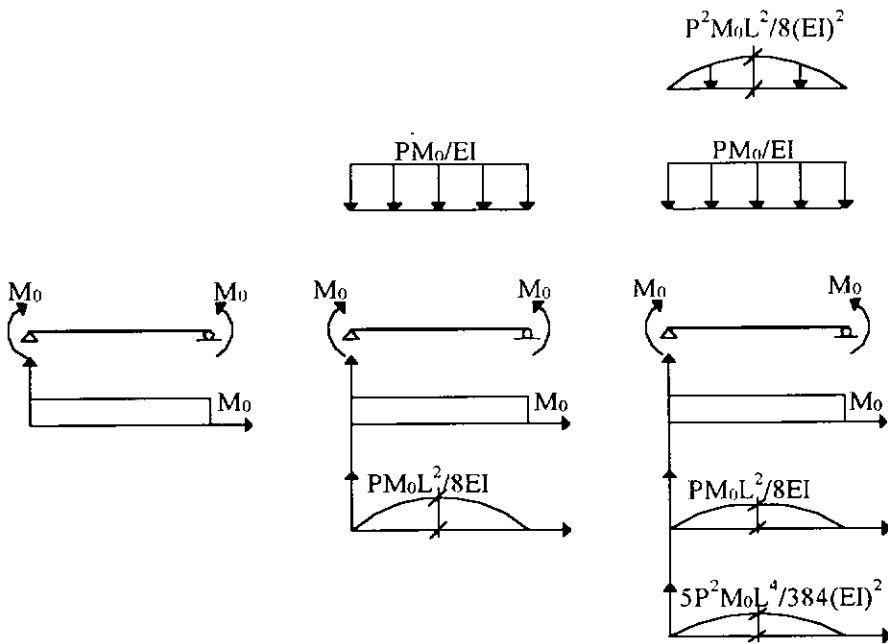


Fig. II.4 - Exemplo do método da pseudo-carga

Verifica-se que a equação [II.7] nada mais é que os três primeiros termos da expansão em série de Taylor da equação [II.18]. Conclui-se que, para cada ciclo de análise, um termo adicional da expansão em série de Taylor da solução teórica será adicionado. Assim a solução teórica pode ser alcançada.

O procedimento descrito pode ser estendido para pórticos. Neste caso torna-se necessário para a manutenção

do equilíbrio dos nós que os pseudo-cortantes dos elementos que concorrem em um mesmo nó sejam somados e suas forças resultantes sejam aplicadas aos nós. Essas forças resultantes são então chamadas de pseudo-cargas de nó.

Deve-se ressaltar que o efeito da não linearidade geométrica é considerado através das pseudo-cargas, portanto apenas o vetor de cargas deve ser atualizado a cada ciclo, permanecendo inalterada a matriz de rigidez.

Para efetuar uma análise não linear física, Lui considera um material que apresenta um comportamento perfeitamente elasto-plástico. O espreiamento da plastificação na seção transversal e ao longo do comprimento do elemento são modelados, sendo adotada a hipótese básica de que à medida que as fibras de uma seção transversal se plastificam, apenas a porção não plastificada da seção transversal será efetiva na resistência ao momento fletor. Para levar em conta a plastificação da seção são apresentadas as relações momento-curvatura-esforço normal em seções retangulares e em "I". Para um dado momento M em uma seção, uma curvatura Φ pode ser calculada. A pseudo-carga é então obtida como o produto $P \cdot \Phi$.

Para levar em consideração a plastificação do elemento, considera-se um elemento com rigidez variável do qual se analisa um elemento infinitesimal, que tem sua matriz de flexibilidade determinada conforme descrito a seguir.

Considere-se um elemento infinitesimal i , de comprimento dx , área de seção transversal A_i e momento de inércia I_i , retirado de um elemento com rigidez variável, conforme figura II.5.

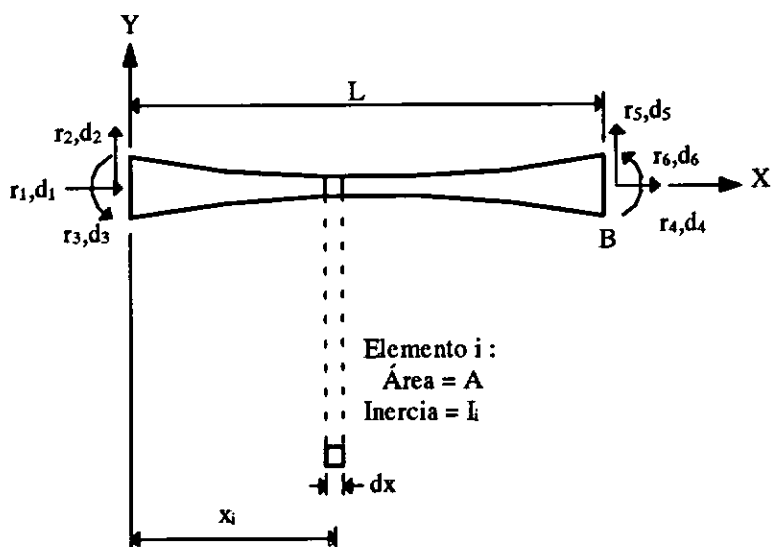


Fig. II.5 - Elemento com rigidez variável

Como o elemento é infinitesimal, A_i e I_i podem ser considerados constantes. A matriz de flexibilidade desse elemento, que relaciona a deformação axial à força axial, a deformação por cortante ao esforço cortante e a curvatura ao momento fletor, com relação ao seu ponto médio, é dada por:

$$\{f'_S\} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{EA}_i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(dx)^3}{12EI}_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dx}{EI}_i \end{bmatrix} \quad [\text{II.9}]$$

A matriz de flexibilidade desse elemento infinitesimal, considerando uma extremidade do elemento, é dada por:

$$\{f_S\} = \{H_S\} \{f'_S\} \{H_S\}^t \quad [\text{II.10}]$$

onde

$$\{H_S\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{II.11}]$$

e x_i é a distância entre a extremidade do elemento e o ponto médio do elemento infinitesimal.

Considera-se que a matriz de flexibilidade do elemento é então dada por um somatório:

$$\{f_m\} = \sum_{i=1}^n \{f_S\} \quad [\text{II.12}]$$

onde n é o número de elementos (não mais infinitesimais) usados; os autores sugerem $n = 100$. O somatório é feito considerando sempre a rigidez efetiva $(EI)_e$, definida como a secante da curva M- Φ -P. Dessa forma a plastificação do elemento pode ser computada.

Uma vez que a matriz de flexibilidade do elemento é estabelecida, a matriz 6×6 que relaciona o vetor de forças e o vetor de deslocamentos é obtida pela relação:

$$\{S_m\} = \{H_m\}^t \{f_m\}^{-1} \{H_m\} \quad [\text{II.13}]$$

onde

$$\{H_m\}^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{II.14}]$$

Considerando uma análise da não linearidade geométrica apenas, o método da pseudo-carga apresenta diversas vantagens, entre as quais a de que só o vetor de cargas precisa ser atualizado a cada ciclo, pois o efeito não linear (geométrico) é considerado através das pseudo-cargas. Outra vantagem do método é que o resultado da análise independe da forma como o elemento é discretizado pois seu diagrama de momentos independe da discretização. A convergência é alcançada quando o vetor de incremento de deslocamentos, obtido como resultado da aplicação de um novo conjunto de pseudo cargas, é desprezível.

Já para uma análise com não linearidade física e geométrica torna-se necessário atualizar a matriz de rigidez, mas em ambos os tipos de análise não é necessário calcular o vetor de cargas não balanceado. A carga total pode ser aplicada em qualquer instante e o uso de incrementos de carga não é necessário.

Uma limitação dessa formulação é que ela não pode ser aplicada em estruturas de concreto na forma em que foi apresentado, necessitando que sejam realizadas algumas adaptações, conforme descrito no item II.2.

II.1.4 - Elemento Finito com Deflexão Inicial

JETTEUR ET AL.(1983), apresentaram uma formulação de um elemento finito que permite que sejam introduzidas deflexões iniciais no modelo, de forma a simular numericamente imperfeições tais como perfis empenados, placas não planas, tensões residuais, etc. Essa formulação utiliza coordenadas

lagrangeanas em conjunto com a teoria de Maquerre, conforme explicado a seguir.

O uso de coordenadas lagrangeanas requer uma configuração de referência do corpo, a fim de que sejam formuladas as equações de equilíbrio do problema. Considere a figura II.6, onde diversas configurações são mostradas.

A descrição total lagrangeana (TLD - total lagrangean description) utiliza como configuração de referência a configuração inicial indeformada γ_0 . A descrição lagrangeana atualizada (ULD - updated lagrangean description) utiliza como configuração de referência a configuração deformada corrente γ_n . Entretanto, qualquer configuração intermediária γ_R pode ser usada como configuração de referência, como é o caso da descrição lagrangeana geral (GLD - general lagrangean description), cujas configurações limites coincidem com γ_0 ou γ_n .

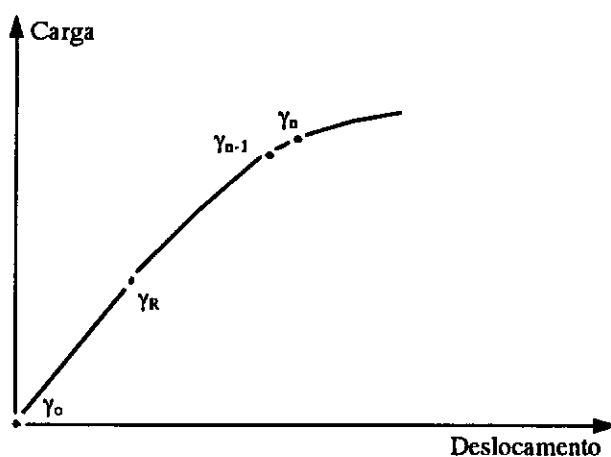


Fig. II.6 - Configurações de equilíbrio de uma estrutura

Sejam, portanto :

γ_0 - configuração inicial indeformada

γ_n - configuração corrente deformada

γ_{n-1} - configuração vizinha à γ_n

$\bar{\gamma}_{n-1}$ - configuração quase coincidente à γ_{n-1} , indeformada

γ_R - configuração intermediária deformada

Considerando γ_{n-1} uma configuração vizinha à γ_n , existe ainda uma configuração de referência $\bar{\gamma}_{n-1}$, bem próxima de γ_{n-1} , obtida de um deslocamento de corpo rígido do corpo indeformado γ_0 . Essa configuração ($\bar{\gamma}_{n-1}$) serve como referência para a PULD (partially updated lagrangean description). Na PULD assume-se que as equações de equilíbrio da ULD mantêm sua validade, devido à proximidade entre as configurações de referência de ambas as descrições. Isso significa que as integrações existentes nas equações de equilíbrio são realizadas sobre o volume do corpo indeformado, mas também significa que para manter a validade da PULD deve-se adotar pequenos elementos finitos, aumentando assim o número de graus de liberdade da estrutura discretizada.

A teoria de Maguerre permite considerar uma deflexão inicial \bar{w} de uma placa, modificando a parte linear do tensor de deformações. Para uma placa, as componentes de deformações são então dadas por (ver figura II.7):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{II.15}$$

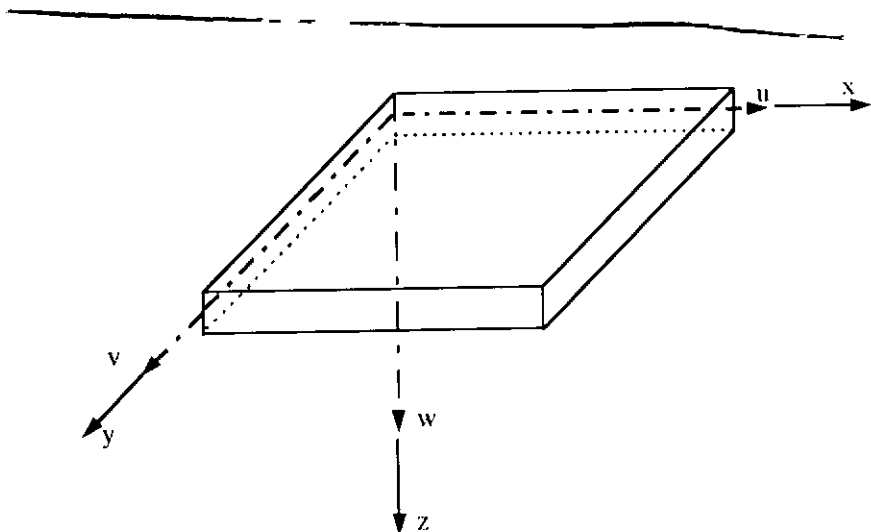


Fig. II.7 - Sistema de coordenadas de uma placa

A teoria de Maguerre pode ser usada apenas quando :

$$\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \ll 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \ll 1
 \tag{II.16}$$

Para usar a teoria de Maguerre com a PULD, a diferença entre as configurações γ_{n-1} e $\bar{\gamma}_{n-1}$ é considerada como uma deflexão inicial de $\bar{\gamma}_{n-1}$.

Quanto à possibilidade de se aplicar a teoria de Maguerre, em conjunto com coordenadas Lagrangeanas, à elementos de viga, podem ser citados dois trabalhos que

tratam do assunto. No primeiro BELYTSCHKO ET AL (1985) desenvolveram um elemento curvo de viga em um trabalho que trata de elementos de casca curva. Mais recentemente, CRISFIELD (1991), aplicou a mesma técnica mas dessa vez para um elemento de viga de eixo reto.

O método em questão permite modelar numericamente imperfeições estruturais através da introdução de uma deflexão inicial do elemento de placa. De qualquer forma são elementos voltados para aplicações em casos especiais onde seria necessário simular alguma imperfeição estrutural. Dentro dos objetivos dessa pesquisa, torna-se inadequado, pois procura-se um elemento para análise de estruturas que, a priori, não precisa conter imperfeições. Estas podem ser geralmente introduzidas na geometria da estrutura indeformada.

II.1.5 - Elemento Finito com Modelo de Tensão Axial Média

WEN E RAHIMZADEH (1983) propuseram uma formulação para análise com não linearidade geométrica de pórticos planos e espaciais através do uso do M.E.F. Nela admite-se que existam grandes rotações e translações e pequenas deformações.

Grandes rotações em pórticos trazem a necessidade de lidar com o problema da geometria dos eixos dos elemento sem a aproximação de pequenas rotações. Essa dificuldade é contornada com o uso da PULD; entre sucessivas atualizações, assume-se que as rotações incrementais dos eixos são

pequenas.

O sistema de coordenadas é fixo desde que as rotações do eixo do elemento sejam pequenas (\ominus na figura II.8). Do contrário as coordenadas são atualizadas e, a cada estágio, os deslocamentos iniciais são nulos mas as tensões não são, levando a uma matriz de tensões iniciais.

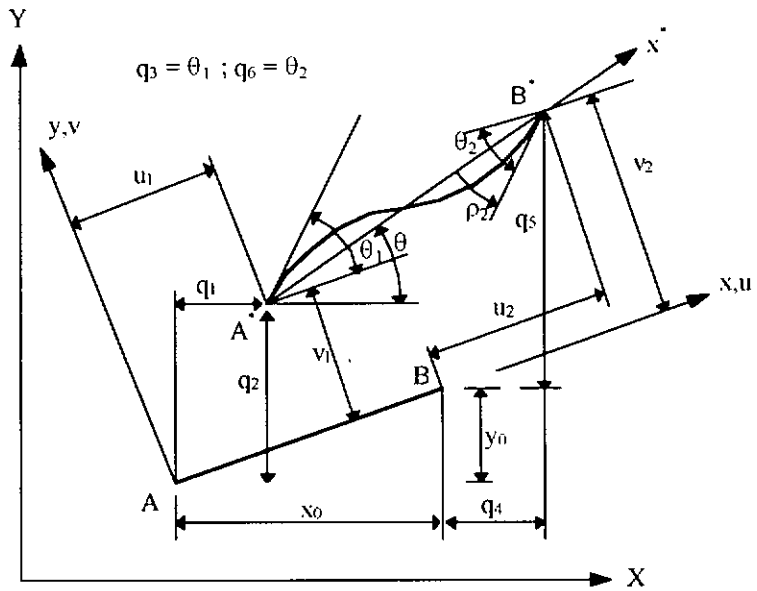


Fig. II.8 - Geometria de um elemento de viga em coordenadas Lagrangeanas $(u_1, v_1, \dots, \theta_2)$ e coordenadas globais

Na análise por Elementos Finitos foi utilizado um modelo de tensão axial média, em conjunto com a PULD (usando coordenadas fixas ou não).

Para a análise por elementos finitos, são usadas as funções de interpolação usuais do 1^o e do 3^o grau para os deslocamentos u e v respectivamente. Essas funções de interpolação são soluções exatas da equação diferencial

[II.17], com $\varepsilon(x, \eta)$ linear em η , que fornece a deformação axial em um ponto a uma distância x da extremidade do elemento e η da linha neutra:

$$\varepsilon(x, \eta) = \frac{du}{dx} + \eta \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad [\text{II.17}]$$

A equação [II.28] é aplicável para casos de pequenos deslocamentos. Para grandes deslocamentos, a equação [II.17] deve ser substituída por:

$$\varepsilon(x, \eta) = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \eta \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad [\text{II.18}]$$

Em se tratando de deslocamentos moderados, o termo quadrático $(du/dx)^2$ pode ser desprezado (uma vez que o termo (du/dx) é pequeno em relação à unidade). Utilizando-se as mesmas funções de interpolação que são solução de [II.17] na equação [II.18], chega-se à uma expressão para $\varepsilon(x, \eta)$ que leva a maiores tensões axiais que aquelas dadas pela solução exata de [II.18]. Isso é resultado do uso das funções de interpolação que são solução da equação [II.17], e tem como consequência um elemento mais rígido do que deveria ser, devido ao aparecimento de esforços axiais de tração. Isso motivou a substituição do termo $\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$ por sua média sobre o comprimento do elemento:

$$\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad [\text{II.19}]$$

Dessa forma a energia de deformação diminui e consequentemente também diminui a rigidez do modelo.

II.1.6 - Método do Comprimento de Arco

Para alguns problemas de análise não linear de estruturas, pode parecer ser necessário apenas que se atinja um determinado nível de carregamento no primeiro ponto limite, como o ponto A, mostrado na figura II.9. Entretanto, quando se deseja ultrapassar esses pontos limites, onde a estrutura tem um equilíbrio instável, a determinação do caminho de equilíbrio pode não estar correta, ocasionando em "cargas de colapso" que estão na realidade associadas à uma divergência numérica da solução iterativa.

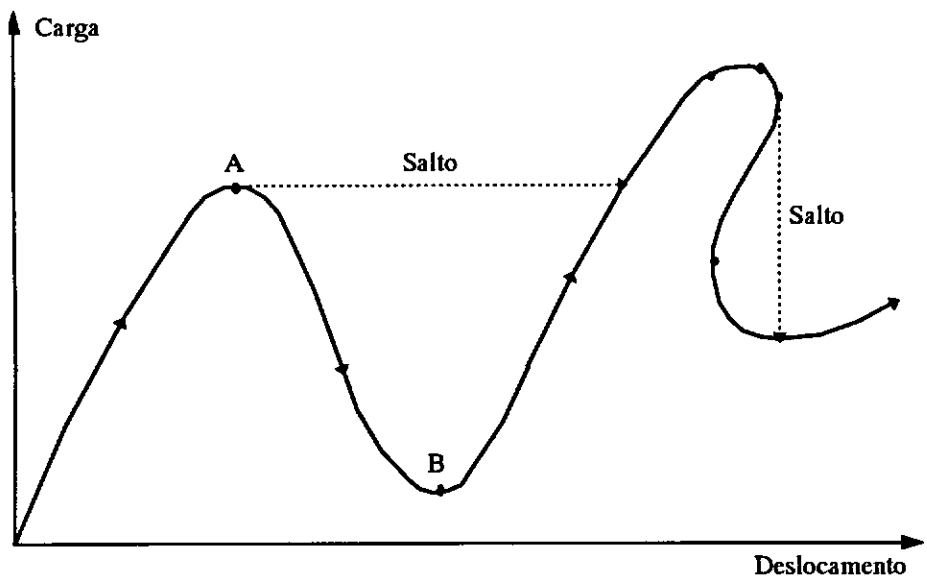


Fig. II.9 - Caminho de equilíbrio de uma estrutura com grandes deslocamentos

Tendo isso em vista, RIKS (1979) desenvolveu um método para ultrapassar pontos limites, conforme ilustrado na figura II.10, em um problema unidimensional.

O método de Riks consiste em adicionar às N equações de equilíbrio de um determinado problema, uma equação

equilíbrio. Finalmente, Crisfield utilizou o método de Newton-Raphson modificado, em ambas as formas, padrão e de convergência acelerada, para solucionar as equações de equilíbrio da estrutura.

MEEK E LOGANATHAN (1988) utilizaram o método do comprimento de arco em uma formulação voltada para aplicações em estruturas com grandes deslocamentos onde se desejava determinar todo seu caminho de equilíbrio. Eles concluíram que o método ora em questão precisaria sofrer modificações para atingir tal objetivo.

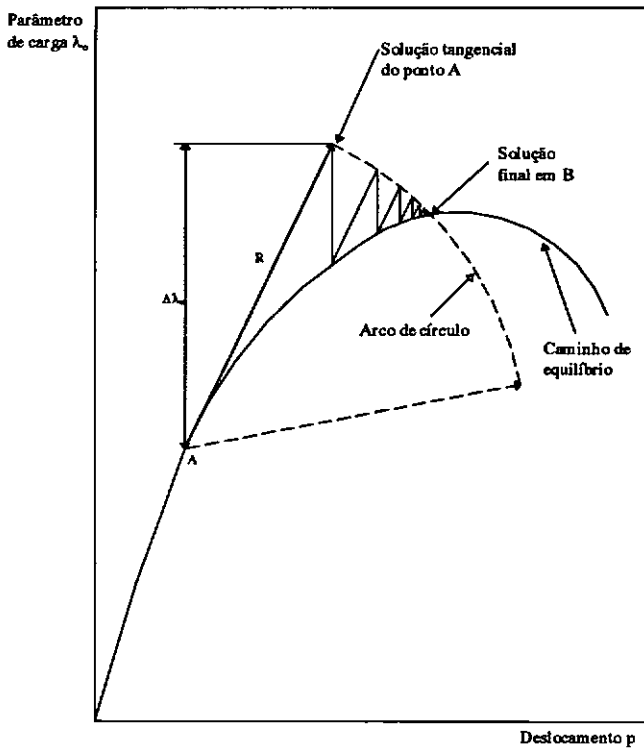


Fig. II.11 - Método de Riks utilizando a técnica de Newton-Raphson modificada

O método do comprimento de arco parece ser bastante eficiente, seja para aplicações em estruturas com comportamento semelhante ao mostrado na figura II.9, seja

para estruturas que não apresentam tal deslocamento, para as quais o método poderia trazer melhorias na solução das equações de equilíbrio.

II.1.7 - Método do Comprimento de Arco Para Determinação do 1º Ponto Limite

Em um trabalho que trata da análise da não linearidade geométrica de estruturas aperticadas, WONG E TIN-LOI (1990) desenvolveram um método capaz de fornecer soluções até o 1º ponto limite do caminho de equilíbrio de uma estrutura, se ele existir.

A fim de produzir uma formulação para análise de grandes deslocamentos, dentro do contexto da teoria elástica utiliza-se um elemento de viga-coluna. As equações de equilíbrio da estrutura são desenvolvidas utilizando o Princípio da Energia Potencial Total Estacionária e a descrição lagrangeana parcialmente atualizada (PULD).

A estratégia de solução utiliza o método de Newton-Raphson nos estágios iniciais da análise e o Método Modificado do Comprimento de Arco é chamado automaticamente quando há uma deterioração severa da rigidez da estrutura, possivelmente causada pela aproximação de um ponto limite.

A variação proposta tem por objetivo obter a solução em um ponto limite e utiliza o Método Modificado do Comprimento de Arco com comprimentos de arcos continuamente reduzidos, ao contrário do que propôs Crisfield onde o comprimento de arco é constante. Dessa forma evita-se "ultrapassar" um ponto limite, determinando-o de forma acurada. Para

estruturas que não possuem pontos limites, a análise é finalizada se é alcançado um componente máximo de deslocamento ou de carga, fixados a priori.

Pode ser interessante o uso dessa variante do método modificado do comprimento de arco como um critério para limitar a análise até o 1º ponto limite, no qual a estrutura apresenta um equilíbrio instável. Dessa forma se evita determinar todo o caminho de equilíbrio da estrutura e ao mesmo tempo também se evita uma interrupção precoce da análise, antes que o 1º ponto limite tenha sido atingido.

II.1.8 - Formulação Co-rotacional de Crisfield

CRISFIELD (1990) desenvolveu uma formulação co-rotacional, incluindo o efeito da não linearidade geométrica, para vigas espaciais. Dentro do contexto de seu trabalho, o termo co-rotacional é utilizado para se referir a um sistema referencial local ao elemento de pórtico, que rotaciona continuamente com o elemento de pórtico. Esse tipo de elemento é mais voltado para aplicações onde ocorrem grandes deslocamentos de corpo rígido

ORAN (1973-a), (1973-b), foi o primeiro que considerou corretamente o efeito de grandes deslocamentos de corpo rígido e desenvolveu uma formulação de matriz de rigidez tangente consistente, bi-dimensional. Por formulação consistente entende-se como aquela que utiliza como base os princípios variacionais da mecânica dos sólidos.

II.1.9 - Formulação para Análise de Estruturas Enrijecidas

A análise limite de estruturas enrijecidas sob tensões iniciais foi abordada no trabalho de OCHOA LOPEZ (1990). Nele, um elemento de pórtico espacial e um elemento de casca triangular facetado, ambos com não linearidade física e sob tensões iniciais, foram implementados.

O elemento de pórtico foi desenvolvido com base na teoria plástica de vigas e utiliza um critério de escoamento nodal dependente dos esforços internos. O efeito das excentricidades dos elementos também é estudado.

A matriz de tensões iniciais foi desenvolvida formulando as equações de equilíbrio em relação à estrutura indeformada, pois são considerados pequenos deslocamentos. Essa matriz representa a contribuição das tensões existentes no início do incremento; como as tensões são mantidas constantes durante o incremento não é possível a realização de iterações, visando considerar o efeito da não linearidade geométrica, situação contornada apenas com o uso de pequenos incrementos.

A introdução de uma matriz de tensões iniciais tem por objetivo considerar as mudanças de geometria da estrutura, sendo dependente do estado de tensões do elemento. Para estruturas onde não há esforços axiais a matriz de tensões iniciais deixa de ter esse efeito, ou seja, deixa de corrigir as mudanças de geometria, uma vez que ela é uma função do esforço axial.

Os elementos utilizados por Ochoa Lopez trariam grandes

problemas para definição de leis de comportamento de materiais como o concreto.

II.1.10 - Formulação de Nait-Rabah

NAIT-RABAH (1990) desenvolveu uma formulação para análise da não linearidade física e geométrica de pórticos espaciais em concreto armado, protendido e estruturas mixtas. Nesse trabalho os efeitos da não linearidade geométrica são introduzidos, dentro da hipótese de pequenas rotações e pequenos deslocamentos, quando da passagem de um referencial móvel, ligado ao elemento deformado, para um referencial fixo, conforme método desenvolvido por JENNINGS (1968).

A não linearidade física é considerada através da integração, ao longo do elemento, das deformações das seções. Dessa maneira obtem-se a matriz de flexibilidade reduzida do elemento, que, invertida, fornece a correspondente matriz de rigidez. Para avaliar a rigidez das seções transversais, as mesmas são discretizadas em trapézios, cuja rigidez é posteriormente integrada através do método de Simpson, para totalizar a rigidez da seção transversal.

Os efeitos da interação esforço normal-flexão biaxial, assim como o efeito de torção, são considerados, sendo o último determinado de acordo com o modelo de treliça espacial do C.E.B. 78.

A matriz de rigidez é do tipo secante e a resolução do problema não linear é feita pelo procedimento de iteração

direta , também conhecido como matrizes "corda".

O método de cálculo inclui, como já mencionado, a não linearidade dos materiais e a não linearidade geométrica, dentro da hipótese de pequenas rotações e de pequenos deslocamentos; além disso, inclui a representação dos efeitos da protensão, ainda sem considerar os efeitos diferidos no tempo.

As partes indeformáveis da estrutura, particularmente as zonas de junção de vigas e pilares, são idealizadas através de elementos caracterizados por uma rigidez infinita.

Cada elemento é caracterizado por uma seção tipo, geometricamente idêntica sobre todo o elemento. Uma seção tipo é definida dentro de um sistema referencial cartesiano para determinação de um contorno exterior poligonal e, eventualmente , de um ou mais contornos interiores poligonais. Por decomposição automática de cada seção tipo, integram-se numericamente as rigidezes da seção. Os aços passivos e os cabos de protensão são supostos concentrados em seus c. g.'s, distribuídos em tantas camadas quantas se queira.

Quanto à protensão, o trabalho se limita à protensão interna, definida geometricamente cabo a cabo. As áreas das bainhas não são consideradas para o cálculo da rigidez da seção de concreto. O traçado do cabo é representado por funções cúbicas. Apenas as perdas instantâneas são consideradas.

A resistência do concreto tracionado é considerada através de dois modelos: o de Grelat e o de Espion/Quast.

As leis de tensão-deformação para os aços são supostas idênticas na tração e na compressão, e dependem da natureza do aço .

A análise não linear refere-se apenas às solicitações normais (esforço normal, momentos fletores na flexão biaxial), sendo as deformações correspondentes calculadas respeitando o princípio de Saint-Venant. As deformações relativas ao esforço cortante e ao momento torsor seguem uma lei linear.

O problema não linear é resolvido utilizando um método iterativo, baseado no método dos deslocamentos, dentro de uma formulação incremental com rigidez variável. Para cada acréscimo de carga $[\Delta P]$ feito constrói-se a matriz $\{ K \}$ da estrutura e o vetor $[\Delta A]$ devido à ação eventual da protensão. Para cada etapa de carregamento, o problema consiste em procurar o acréscimo de deslocamento nodal $[\Delta U]$, solução do sistema não linear:

$$[\Delta P] + [\Delta A] = \{ K \} \cdot [\Delta U] \quad [\text{II.20}]$$

Dentro da hipótese de pequenos deslocamentos e deformações, os efeitos de segunda ordem são introduzidos na matriz de rigidez ao passar de um referencial local para um dito intrínseco, ligado ao elemento deformado.

A matriz de rigidez é não explícita. Aplicando-se o teorema do Trabalho Virtual Complementar obtém-se uma expressão para a matriz de flexibilidade reduzida do elemento, que, invertida, conduz a sua matriz de rigidez reduzida.

II.1.11 - Elemento Finito de Pórtico Espacial Com Referencial Móvel, Para Análise com Não Linearidade Geométrica

Em BENJAMIN (1982) e BENJAMIN E EBECKEN (1986), foram apresentadas duas formulações consistentes, em elementos finitos, voltadas para análise com não linearidade geométrica de pórticos espaciais. Ambas as formulações utilizam o mesmo sistema de referencial móvel que Nait-Rabah utilizou, que é ligado ao elemento deformado, conforme desenvolvido por JENNINGS (1968). Além disso consideram que o material tem comportamento elástico. Na 1ª formulação, a discretização é feita através de um elemento de eixo reto e seção transversal constante, que interpola os deslocamentos segundo as funções convencionais de pórtico. Na 2ª formulação, o elemento, de eixo reto e seção transversal variável, é resultante da degeneração do elemento isoparamétrico tridimensional.

A 1ª formulação apresentou um menor custo computacional que a 2ª, e levou a bons resultados. Já a 2ª formulação, que possui as vantagens dos elementos isoparamétricos, indica sua aplicação a elementos estruturais com geometria curva e/ou seção transversal variável. Obviamente ambas formulações são restritas, se compararmos com outras formulações como a de Nait-Rabah por exemplo, por não considerarem a não linearidade dos materiais.

II.2 - Comparação crítica e aplicabilidade das propostas apresentadas

De todas as propostas apresentadas, apenas três ainda necessitam de uma discussão mais detalhada sobre sua aplicabilidade: A formulação da pseudo-carga, o elemento com modelo de tensão axial média e a formulação de Nait-Rabah.

A formulação da pseudo-carga encontra certas limitações para imediata aplicação por ter sido desenvolvida para pórticos planos. Além disso adota a hipótese de que o material é homogêneo e limita-se a considerar seções transversais retangulares ou em " I ". Outra limitação da formulação é devida à hipótese de que apenas a parte não plastificada da seção é efetiva na resistência ao momento fletor. Ainda, a formulação obriga a estocagem de uma família de curvas relacionando momento-curvatura-esforço normal para cada tipo de seção.

Aparentemente essas dificuldades podem ser contornadas, e até o efeito de protensão pode ser incluído. Porém, uma vez que a matriz de rigidez, em uma análise com não linearidade geométrica e física realizada pela formulação da pseudo-carga, precisa ser atualizada em todos os ciclos de cálculo, parece desestimulante o uso da formulação nesses tipos de análise.

Foram apresentados apenas três exemplos de aplicação da formulação da pseudo-carga, bastante simplificados, que não permitem analisar com segurança a sua aplicabilidade. Espera-se que essa lacuna seja preenchida brevemente com uma bibliografia complementar que venha a ser publicada pelos

autores.

O dado mais importante no trabalho de Wen e Rahimzadeh (ver II.1.5) é o uso do modelo de tensão axial média. O uso desse modelo com o objetivo de diminuir a rigidez do elemento é uma técnica válida. Porém, independentemente disso, o método exige que o número de graus de liberdade da estrutura seja aumentado consideravelmente, para manter sua validade, devido ao uso da PULD.

O trabalho de Nait-Rabah é, comprovadamente, o que mais se adequa ao objetivo dessa pesquisa, pois já permite a inclusão de efeitos de protensão (externa ou não) e considera diversos tipos de materiais, incluindo leis de comportamento para representar a resistência à tração do concreto. O autor teve como objetivos o melhoramento de normas através de estudos paramétricos que permitissem alargar o campo de conclusões das pesquisas experimentais, e, a nível de projetos, para justificação de estruturas no estado limite último. Além disso o trabalho foi feito de forma a permitir o cálculo de obras de arte, e prevendo a integração de módulos para o cálculo de obras contruídas por fases.

Foi observado que o método do comprimento de arco poderia ser incorporado à formulação de Nait-Rabah, podendo trazer melhorias nos resultados aproximando a curva carga x deslocamento da curva real.

Uma descrição mais detalhada da formulação de Nait-Rabah, suas hipóteses básicas, domínio de aplicação e método de cálculo, é realizada no capítulo III.

CAPÍTULO III

MÉTODO DE CÁLCULO E HIPÓTESES BÁSICAS

Na formulação usada por Nait-Rabah, a estrutura é idealizada como um conjunto de elementos de pórtico espacial.

A consideração dos efeitos de não-linearidade física e geométrica levam ao problema não-linear. A discretização através de elementos conduz então a um sistema não-linear de equações, resolvido através de um processo iterativo, onde cada etapa baseia-se no método dos deslocamentos, dentro de uma formulação incremental com rigidez variável.

Para cada acréscimo de carga externa $\{ \Delta P \}$, é construída a matriz $[K]$ da estrutura e o vetor $\{ \Delta A \}$ devido a ação eventual da protensão.

Em cada etapa de carga, pesquisa-se o acréscimo de deslocamentos nodais correspondente $\{ \Delta U \}$, que seja solução do sistema não-linear abaixo:

$$\{ \Delta P \} + \{ \Delta A \} = [K] \cdot \{ \Delta U \} \quad [III.1]$$

A matriz de rigidez $[K]$ e o vetor $\{ \Delta A \}$ são formados a partir das matrizes e vetores $[K_x]$ e $\{ \Delta A_x \}$ respectivamente, dos elementos da estrutura.

III.1 - Características das estruturas analisadas e leis de comportamento dos materiais

O método de cálculo é voltado para análise não-linear de estruturas tridimensionais em concreto estrutural. Estruturas metálicas e estruturas mistas em aço-concreto e

em concreto-concreto também são tratadas, dentro da hipótese de aderência perfeita entre os materiais.

A estrutura é subdividida em elementos com dois nós nas extremidades, cada um com 6 graus de liberdade. O elemento se caracteriza por uma seção tipo constante em todo seu comprimento. Essa seção tipo é definida dentro de um referencial genérico OYZ, onde o contorno poligonal exterior da seção, e eventualmente o interior, são definidos.

Para representar bem a não-linearidade física, cada elemento é discretizado longitudinalmente por várias seções transversais (de 3 a 5 em geral).

Supõe-se que a estrutura é submetida a um carregamento instantâneo, onde as cargas são conservativas e aplicadas aos nós dos elementos. O sistema de cargas inclui:

- Cargas $\{ P_{01} \}$ e $\{ P_{02} \}$, aplicadas respectivamente antes e após a protensão, de intensidades fixas.
- Cargas $\alpha \cdot \{ P_v \}$, proporcionais a um parâmetro α , de intensidades variáveis.

III.2 - Estudo da protensão

A formulação ora apresentada se limitou à protensão interna aderente. Dentro desse caso, os cabos são definidos um a um, por meio de "splines" cúbicas, garantindo assim a continuidade de seu traçado.

As perdas de tensão consideradas resumem-se às perdas instantâneas, devidas ao atrito cabo-bainha e ao recuo da ancoragem.

O efeito da protensão é introduzido considerando que a

seção é submetida a um esforço de compressão de igual valor e sentido oposto ao esforço de tração do cabo. Esse esforço é aplicado sobre a tangente à linha média do cabo no ponto onde o mesmo atravessa a seção transversal.

Sob ação da protensão e de eventuais ações externas, a seção entra em um estado de deformação, a partir do qual os cabos são considerados perfeitamente solidários ao concreto.

III.3 - Comportamento dos materiais

Admite-se que as leis de comportamento dos materiais são idênticas tanto para o carregamento como para o descarregamento, e portanto não estão envolvidas deformações residuais.

III.3.1 - Comportamento do concreto comprimido

A lei de comportamento do concreto comprimido é descrita de uma forma geral pela lei de Sargin dada por:

$$\sigma'_b = \sigma'_j \cdot \frac{k \cdot \left(\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_{b0}} \right) + (k'-1) \cdot \left(\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_{b0}} \right)^2}{1 + (k-2) \cdot \left(\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_{b0}} \right) + k' \cdot \left(\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_{b0}} \right)^2} \quad [\text{III.2}]$$

onde:

σ'_j = resistência à compressão do concreto.

ε'_{b0} = deformação correspondente a σ'_j

k e k' = parâmetros adimensionais

Essa lei tem o aspecto mostrado na figura III.1

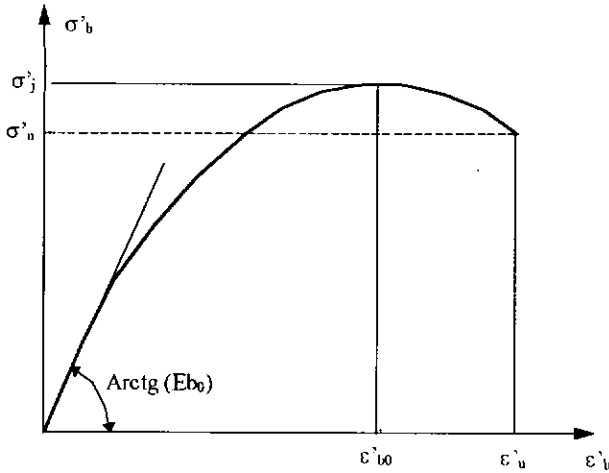


Fig. III.1 - Lei de comportamento uniaxial do concreto comprimido

Os parâmetros k e k' são dados por:

$$k = E_{b0} \cdot \left(\frac{\varepsilon'_{b0}}{\sigma'_j} \right)$$

[III.3]

$$k' = \begin{cases} k - 1 & \text{para } \sigma'_j < 30 \text{ MPa} \\ (k-1) \cdot (55 - \sigma'_j) / 25 & \text{para } 30 \text{ MPa} < \sigma'_j < 55 \text{ MPa} \\ 0 & \text{para } \sigma'_j > 55 \text{ MPa} \end{cases}$$

onde E_{b0} é o módulo de elasticidade do concreto na origem.

Em cálculos no estado limite de resistência, o ramo descendente da curva de Sargin é substituído por um segmento de reta, conforme mostra a figura III.2.

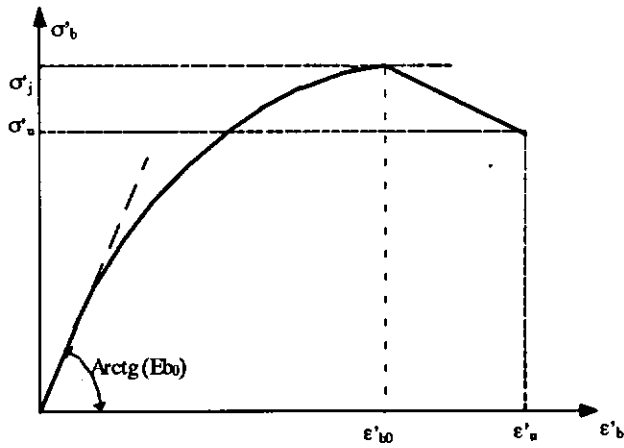


Fig. III.2 - Idealização da lei de Sargin

Para uma deformação ε'_b localizada entre ε'_{b0} e ε'_u , a equação da reta é dada por:

$$\sigma'_b = \sigma'_j \cdot \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\sigma'_u}{\sigma'_j}\right) \left(\frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon'_{b0}} - 1\right)}{\left(\frac{\varepsilon'_u}{\varepsilon'_{b0}} - 1\right)} \right] \quad \varepsilon'_{b0} < \varepsilon'_b < \varepsilon'_u \quad [\text{III.4}]$$

onde σ'_u representa a tensão de ruptura do concreto comprimido e ε'_u a deformação correspondente.

III.3.2 - Comportamento do concreto tracionado

O comportamento do concreto tracionado é descrito através de dois modelos: o de Grelat e o de Espion/Quast. Ambos os modelos consideram que o concreto tracionado, situado entre duas fissuras, também participa da rigidez do elemento. Dessa forma o comportamento médio entre duas

fissuras, e não o comportamento no local da fissura, é considerado.

O modelo de Grelat consiste em atribuir ao concreto tracionado fissurado de uma seção qualquer, um diagrama de deformações fictício, triangular a partir da linha neutra, onde (figura III.3)

$$\sigma_t = (\sigma_{ft} / \varepsilon_{ft}) \cdot \varepsilon_t \quad [III.5]$$

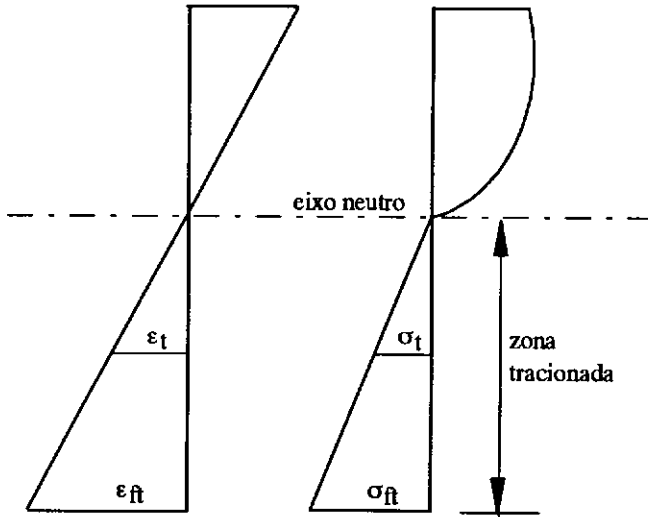


Fig. III.3 - Diagrama fictício do concreto tracionado

A deformação de tração σ_{ft} da fibra mais tracionada cresce proporcionalmente em função da deformação correspondente ε_{ft} , até o ponto $(\sigma_{ct}, \varepsilon_{ct})$, a partir do qual ela decresce de forma parabólica até o ponto de tensão nula correspondente à deformação limite de elasticidade do aço mais tracionado (figura III.4):

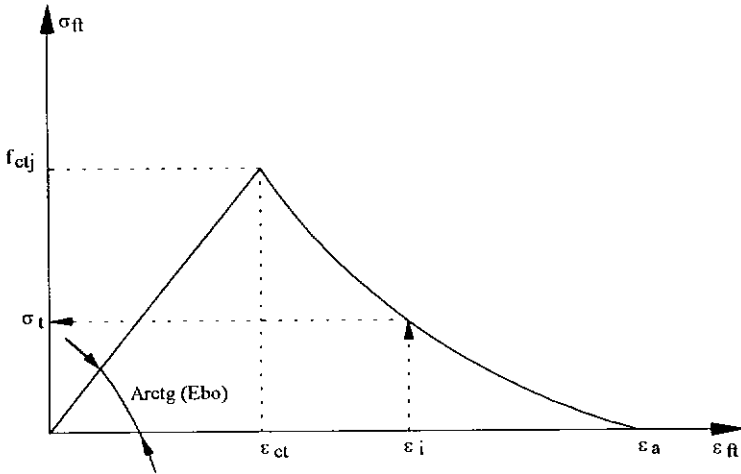


Fig. III.4 - Diagrama tensão-deformação da fibra mais tracionada

$$\sigma_{ft} = E_{bo} \cdot \varepsilon_{ft} \quad \text{para } 0 < \varepsilon_{ft} < \varepsilon_{ct}$$

$$\sigma_{ft} = \sigma_j \cdot \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_{ft})^2}{(\varepsilon_a - \varepsilon_{ct})} \quad \text{para } \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{ft} < \varepsilon_a \quad [\text{III.6}]$$

$$\sigma_{ft} = 0 \quad \text{para } \varepsilon_{ft} > \varepsilon_a$$

onde :

E_{bo} : módulo de elasticidade do concreto

σ_j : resistência à tração do concreto

ε_{ct} : deformação de tração correspondente à σ_j

ε_a : deformação limite do aço mais tracionado

O modelo de Espion/Quast consiste em considerar um diagrama de tensões fictício, representado por uma lei crescente até a resistência à tração, considerada como uma característica variável em função da deformação do aço mais tracionado (figura III.5).

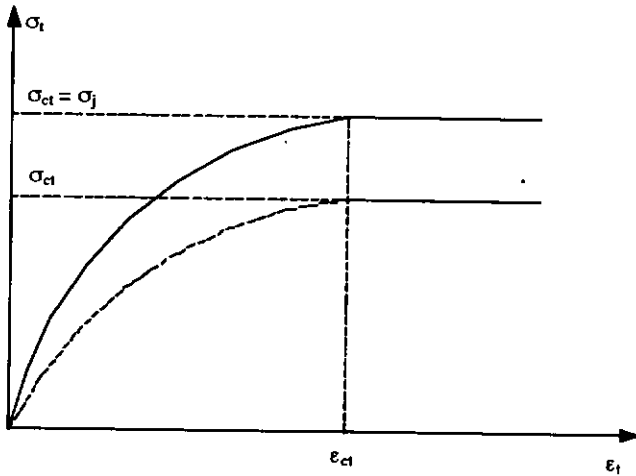


Fig. III.5 - Diagrama tensão-deformação do concreto tracionado

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_{ct}} = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon_t}{\epsilon_{ct}}\right)^n$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_{ct} &= \sigma_j && \text{para } \epsilon_s < \epsilon_a \\ \sigma_{ct} &= \sigma_j \cdot \frac{(\epsilon_a - \epsilon_s)}{\epsilon_a - \epsilon_{ct}} && \text{para } \epsilon_s > \epsilon_a \end{aligned} \quad [\text{III.7}]$$

σ_{ct} : resistência à tração do concreto, tornada função da deformação ϵ_s do aço mais tracionado.

n : coeficiente de forma da curva ($n = 1$, lei linear; $n = 2$ lei parabólica).

III.3.3 - Comportamento dos aços passivos

Os aços ditos naturais são caracterizados por uma lei de comportamento elasto-plástica com retomada de rigidez,

conforme figura III.6, onde:

σ_r : tensão de ruptura

σ_e : limite de elasticidade à 2%

E_a : módulo de elasticidade longitudinal

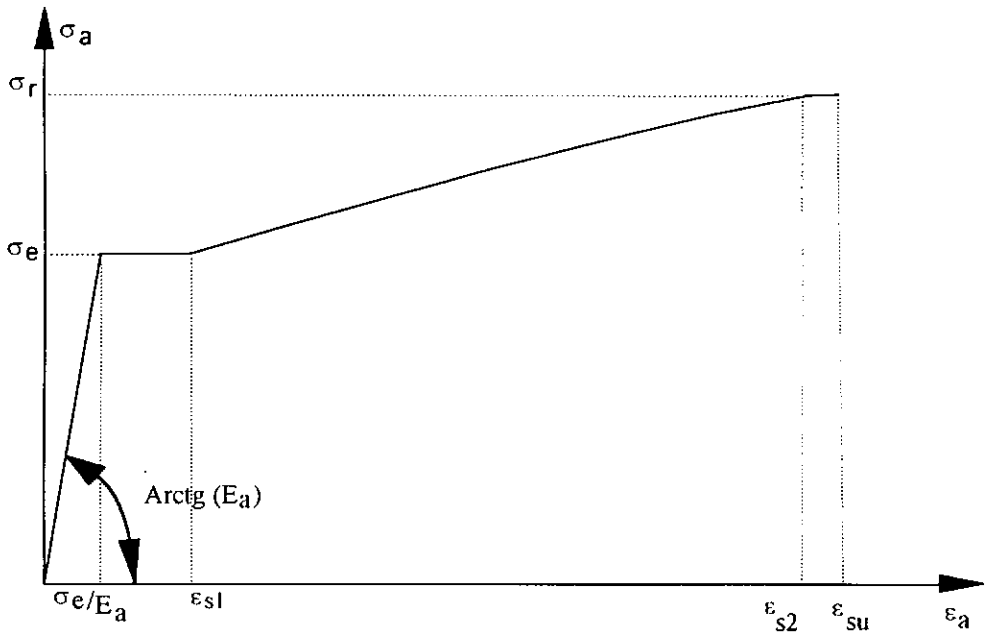


Fig. III.6 - Diagrama tensão-deformação de um aço natural (Lei elasto-plástica com enrijecimento)

$$\sigma_s = E_a \cdot \varepsilon_s \quad \text{para} \quad 0 < \varepsilon_s < \sigma_e/E_a$$

$$\sigma_s = \sigma_e \quad \text{para} \quad \sigma_e/E_a < \varepsilon_s < \varepsilon_{s1}$$

$$\sigma_s = \sigma_e + (\sigma_r - \sigma_e) \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \left[2 - \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \right] \quad \text{[III.8]}$$

$$\dots \quad \text{para} \quad \varepsilon_{s1} < \varepsilon_s < \varepsilon_{s2}$$

$$\sigma_s = \sigma_r \quad \text{para} \quad \varepsilon_s > \varepsilon_{s2}$$

onde ε_{s1} é a deformação correspondente ao fim do patamar de escoamento, ε_{s2} é a deformação correspondente ao fim do aumento de ductilidade e ε_{su} a deformação de ruptura.

Para o cálculo no estado limite de resistência, onde se

necessita apenas das características do material na ruptura e, portanto, a determinação precisa das deformações não é necessária, é adotada uma lei elasto-plástica perfeita, conforme figura III.7

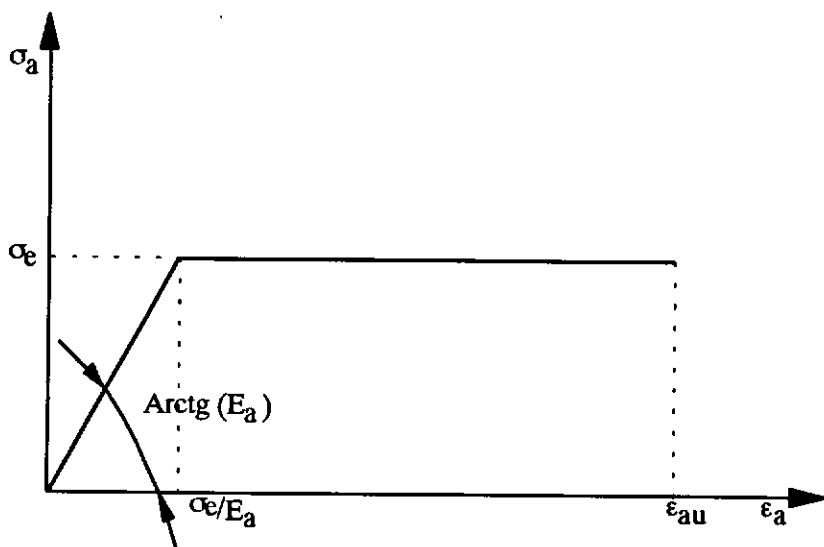


Fig. III.7 - Diagrama tensão-deformação de um aço natural (Lei elasto-plástica perfeita)

Para os aços encruados é adotada uma lei que apresenta um comportamento elástico-linear até σ_L (que vale em geral 70% do limite elástico σ_e). Para tensões maiores que σ_L é adotada uma função de quinto grau, conforme figura III.8 onde:

$$\sigma_s = E_a \cdot \epsilon_s \quad \text{para } 0 < \sigma_s < \sigma_L = 0.7\sigma_e$$

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0.70 \right)^5 \quad \text{para } \sigma_s > \sigma_L \quad [\text{III.9}]$$

Para $\sigma_s > \sigma_L$, um procedimento numérico do tipo Newton-Raphson é utilizado internamente ao programa, a fim de calcular a tensão em função da deformação.

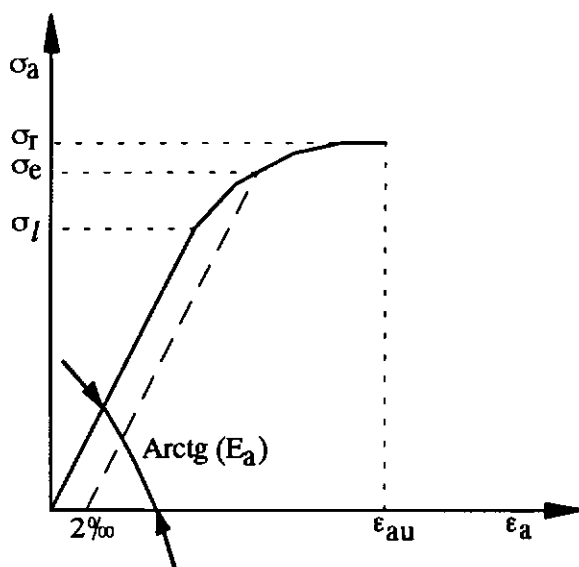


Fig. III.8 - Diagrama tensão-deformação de um aço encruado

III.3.4 - Comportamento dos aços ativos

O comportamento da armadura de protensão é representado por uma lei do mesmo tipo que aquela para aços encruados:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= E_a \cdot \epsilon_p && \text{para } 0 < \sigma_p < \sigma_L = 0.9\sigma_e \\ \epsilon_p &= \frac{\sigma_p}{E_a} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_e} - 0.9 \right)^5 && \text{para } \sigma_p > \sigma_L \end{aligned} \quad [\text{III.10}]$$

III.4 - Esforços solicitantes e deformações na seção plana

A seção é estudada obedecendo à hipótese de que o comportamento é elástico não-linear e de que as deformações são pequenas. Ela é descrita em um sistema referencial principal $Gxyz$, onde o eixo Gx é normal à seção plana e de mesma orientação que a fibra média do elemento.

As deformações tangenciais relativas ao esforço

cortante T_y (respectivamente T_z) no plano xy (resp. xz) e ao momento de torção M_C no centro de torção, são calculadas supondo que as rigidezes correspondentes são constantes e iguais aquelas obtidas em elasticidade linear. O momento de torção em C, função do momento de torção M_x em G, , é dado por (ver figura III.9):

$$M_C = M_x - y_C \cdot T_z + z_C \cdot T_y \quad [\text{III.11}]$$

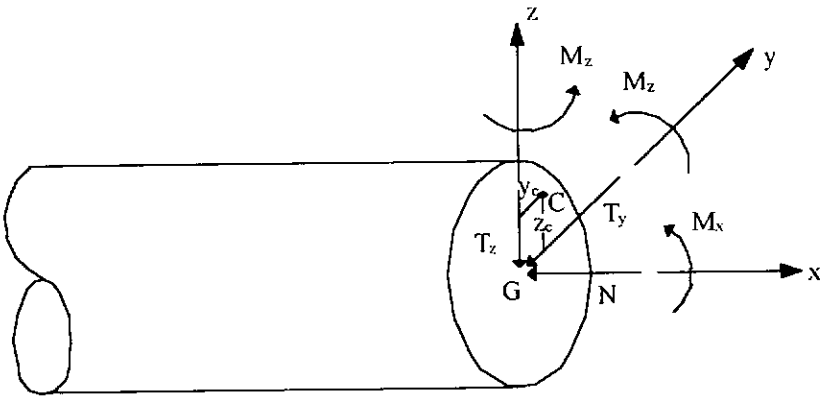


Fig. III.9 - Solicitações em uma seção plana

Considerando a hipótese de seções planas e aderência perfeita entre os materiais, a deformação longitudinal ϵ é dada por:

$$\epsilon = \epsilon_g + z \cdot \phi_y + y \cdot \phi_z \quad [\text{III.12}]$$

onde ε_g é a deformação unitária ao nível do centro geométrico G, ϕ_y a rotação unitária de flexão em torno do eixo Gy e ϕ_z a rotação unitária de flexão em torno do eixo Gz.

As deformações normais, $(\varepsilon_g, \phi_y, \phi_z)$, são escritas em um vetor $\{\delta_n\}$, definido por:

$$\{\delta_n\} = (\varepsilon_g, \phi_y, \phi_z)^t \quad [\text{III.13}]$$

As deformações tangenciais, $(\gamma_y, \gamma_z, \phi_x)$, são escritas em um vetor $\{\delta_t\}$, definido por:

$$\{\delta_t\} = (\gamma_y, \gamma_z, \phi_x)^t \quad [\text{III.14}]$$

onde γ_y (resp. γ_z) é a deformação fictícia de cisalhamento da seção no plano xy (resp. xz) e ϕ_x a rotação unitária de torção da seção em torno do centro de torção C.

Considera-se $\{\Delta\delta_n\}$ e $\{\Delta\delta_t\}$ matrizes-coluna 3 x 1 contendo o acréscimo de deformações normais e tangenciais, respectivamente.

Considere-se a pré-deformação do cabo ε_p^* , correspondente ao estado descomprimido da seção. A deformação da armadura de protensão de ordem i é dada por:

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2 \alpha_i \cdot (1, z_{pi}, y_{pi}) \cdot \{\delta_n\} + \dots \\ \dots \text{sen} \alpha_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \{R_{pi}\}^t \{\delta_t\} + \varepsilon_{pi}^* \quad [\text{III.15}]$$

onde $\{R_{pi}\}$ é uma matriz coluna, α_i o ângulo que faz a

linha média do cabo i com o eixo Gx normal à seção e β o ângulo de projeção do cabo i no plano da seção com o eixo Gy, dada por:

$$\left[R_{pi} \right] = \begin{bmatrix} \cos\beta_i \\ \text{sen}\beta_i \\ (z_p - z_c) \cdot \cos\beta_i - (y_p - y_c) \cdot \text{sen}\beta_i \end{bmatrix} \quad \text{[III.16]}$$

III.4.1 - Solicitações internas relativas ao concreto e aos perfis metálicos

As solicitações normais à seção plana, relativas ao concreto e aos perfis metálicos, são armazenadas em um vetor $\{ F_{mn} \}$, definido em Gxyz :

$$\{ F_{mn} \} = \begin{bmatrix} N_m & M_{ym} & M_{zm} \end{bmatrix}^t = \int_{(\Sigma_b + \Sigma_p)} \sigma_M \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{bmatrix} d(\Sigma_b + \Sigma_p) \quad \text{[III.17]}$$

onde σ_M representa a tensão normal num ponto genérico da seção do concreto ou de um perfil metálico, Σ_b a seção líquida do concreto e Σ_p a seção do perfil ou dos perfis metálicos contidos na seção reta.

A variação de deformações normais $\{ \Delta\delta_n \}$ da seção plana leva a uma variação nas parcelas de solicitações normais $\{ \Delta F_{mn} \}$ associadas ao concreto ou aos perfis metálicos. Considerando-se as relações III.12 e III.17, pode-se escrever:

GJ a rigidez da seção à torção.

Como a rigidez ao esforço cortante e à torção são constantes temos que

$$\{\Delta F_{mt}\} = [K_{2m}] \cdot \{\Delta \delta_t\} \quad \text{[III.23]}$$

Considerando as relações III.18 e III.23, pode-se escrever, de forma matricial, a relação entre os acréscimos de deformações em uma seção plana e os acréscimos de solicitações internas relativas ao concreto e aos perfis metálicos

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{mn}\} \\ \{\Delta F_{mt}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{1m}] & [0] \\ [0] & [K_{2m}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{bmatrix} \quad \text{[III.24]}$$

III.4.2 - Solicitações internas relativas às armaduras passivas

As solicitações normais relativas às armaduras passivas são armazenadas em um vetor $\{F_{an}\}$, definido no referencial Gxyz:

$$\{F_{an}\} = \begin{bmatrix} N_a & M_{ya} & M_{za} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_a} \sigma_{ai} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{ai} \\ y_{ai} \end{bmatrix} A_{ai} \quad \text{[III.25]}$$

onde σ_{ai} é a tensão normal ao nível da armadura passiva de ordem i , A_{ai} a seção de armadura e N_a o número de armaduras passivas.

Considerando as relações III.12 e III.25, pode-se

escrever matricialmente:

$$\{\Delta F_{an}\} = [K_{1a}] \cdot \{\Delta \delta_n\} \quad [III.26]$$

onde $\{\Delta F_{an}\}$ é a variação de solicitações normais referentes às armaduras passivas, produzida pela variação de deformações normais $\{\Delta \delta_n\}$, e $[K_{1a}]$ uma matriz simétrica, de ordem 3 x 3:

$$[K_{1a}] = \sum_{i=1}^{N_a} E_{ai} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{ai} & y_{ai} \\ z_{ai} & z_{ai}^2 & y_{ai} \cdot z_{ai} \\ y_{ai} & y_{ai} \cdot z_{ai} & y_{ai}^2 \end{bmatrix} \cdot A_{ai} \quad [III.27]$$

E_{ai} representa o módulo de elasticidade ao nível da armadura passiva de ordem i . Ele liga o acréscimo de tensão normal $\Delta \sigma_{ai}$ ao acréscimo de deformações normais $\Delta \epsilon_{ai}$ correspondente ao nível da armadura.

Desprezando as solicitações tangenciais relativas às armaduras passivas, pode-se escrever, de forma matricial, a relação entre os acréscimos de deformações em uma seção plana e os correspondentes acréscimos de solicitações internas associados às armaduras passivas:

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{an}\} \\ \{\Delta F_{at}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{1a}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{bmatrix} \quad [III.28]$$

III.4.3 - Solicitações internas relativas às armaduras de protensão

A contribuição para as solicitações normais associada às armaduras de protensão aderentes são armazenadas em um vetor $\{F_{pn}\}$, definido no referencial Gxyz:

$$\{F_{pn}\} = \begin{bmatrix} N_p & M_{yp} & M_{zp} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_{p1}} \sigma_{pi} \cos \alpha_i \begin{bmatrix} 1 \\ z_{pi} \\ y_{pi} \end{bmatrix} A_{pi} \quad [\text{III.29}]$$

onde σ_{pi} é a tensão normal no cabo de ordem i , N_{p1} é o n.º de armaduras de protensão aderentes ao concreto na seção plana e α_i o ângulo que faz a linha média do cabo i com o eixo G_x .

De forma semelhante, define-se o vetor $\{F_{pt}\}$ de solicitações tangenciais relativas às armaduras de protensão:

$$\{F_{pt}\} = \begin{bmatrix} T_{yp} & T_{zp} & M_{cp} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_{p1}} \sigma_{pi} \cdot \text{sen} \alpha_i \cdot A_{pi} \cdot [R_{pi}] \quad [\text{III.30}]$$

A variação de deformações $\{\Delta\delta_n\}$ e $\{\Delta\delta_t\}$ da seção plana provoca uma variação de solicitações internas $\{\Delta F_{pn}\}$ e $\{\Delta F_{tn}\}$, ligadas matricialmente através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{pn}\} \\ \{\Delta F_{pt}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{1p}] & [K_{12p}] \\ [K_{12p}]^t & [K_{2p}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\Delta\delta_n\} \\ \{\Delta\delta_t\} \end{bmatrix} \quad [\text{III.31}]$$

As matrizes $[K_{1p}]$, $[K_{12p}]$ e $[K_{2p}]$ são mostradas no anexo A.

III.4.4 - Seção deformada a equilibrar

A seção é suposta submetida aos acréscimos de esforços solicitantes devidos ao incremento das forças externas e à uma eventual adição de novos cabos de protensão durante o processo de carga.

A ação da protensão é escrita na forma de um vetor $\{ \Delta A_{sn} \}$, contendo solicitações normais, e de um vetor $\{ \Delta A_{st} \}$ contendo as solicitações tangenciais. Considerando a convenção de sinais da figura III.8 :

$$\{ \Delta A_{sn} \} = - \sum_{i=1}^{N_{pa}} \sigma_{oi} \cdot \cos \alpha_i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z_{pi} \\ y_{pi} \end{bmatrix} \cdot A_{pi} \quad [III.32]$$

$$\{ \Delta A_{st} \} = - \sum_{i=1}^{N_{pa}} \sigma_{oi} \cdot \sen \alpha_i \begin{bmatrix} R_{pi} \end{bmatrix} \cdot A_{pi} \quad [III.33]$$

onde σ_{oi} representa a tensão inicial, após perdas instantâneas, num cabo de ordem i , e N_{pa} o n.º de cabos de protensão adicionais que atravessam a seção.

O acréscimo de esforços solicitantes devidos às forças externas é escrito sob a forma de dois vetores:

$$\{ \Delta F_{sn} \} = (\Delta N \quad \Delta M_y \quad \Delta M_z)^t \quad [III.34]$$

$$\{ \Delta F_{st} \} = (\Delta T_y \quad \Delta T_z \quad \Delta M_c)^t \quad [III.35]$$

onde $\{ \Delta F_{sn} \}$ e $\{ \Delta F_{st} \}$ são os vetores que contêm os acréscimos de solicitações normais e tangenciais respectivamente.

A igualdade dos acréscimos de esforços solicitantes devidos às forças externas e internas significa o equilíbrio da seção:

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta A_{sn}\} \\ \{\Delta A_{st}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{mn}\} \\ \{\Delta F_{mt}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_{an}\} \\ \{\Delta F_{at}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_{pn}\} \\ \{\Delta F_{pt}\} \end{bmatrix} \quad \text{[III.36]}$$

Através das relações III.32, III.33, III.34 e III.35 pode-se exprimir matricialmente a relação entre os acréscimos de esforços solicitantes e os acréscimos de deformações em uma seção plana em concreto armado, protendido ou mista:

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta A_{sn}\} \\ \{\Delta A_{st}\} \end{bmatrix} = [K_s] \cdot \begin{bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{bmatrix} \quad \text{[III.37]}$$

onde a matriz $[K_s]$ é a matriz de rigidez simétrica da seção, dada por:

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{1m}] + [K_{1a}] + [K_{1p}] & [K_{12p}] \\ [K_{12p}]^t & [K_{2m}] + [K_{2p}] \end{bmatrix} \quad \text{[III.38]}$$

A resolução da equação III.30 é iterativa. Com a seção equilibrada, o acréscimo de deformações $\{\Delta \delta\}$ é dado por:

$$\{\Delta \delta\} = [S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{\Delta G_s\} \quad \text{[III.39]}$$

onde:

$$\{\Delta \delta\} = \begin{bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{bmatrix}, \quad \{\Delta F_s\} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} \quad \text{[III.40]}$$

$$\{\Delta G_s\} = [S_s] \cdot \{\Delta A_s\}, \quad \{\Delta A_s\} = \begin{bmatrix} \{\Delta A_{sn}\} \\ \{\Delta A_{st}\} \end{bmatrix}$$

$[S_S]$ é a matriz de flexibilidade da seção, dada por:

$$[S_S] = [K_S]^{-1} \quad \text{[III.41]}$$

III.4.5 - Método iterativo de equilíbrio da seção

Seja $\{F_S\}$ o vetor que contém as solicitações na seção transversal equilibrada, decorrentes das forças externas, dado por:

$$\{F_S\} = \left(N \quad M_Y \quad M_Z \quad T_Y \quad T_Z \quad M_C \right)^t \quad \text{[III.42]}$$

Seja $\{\delta_S\}$ o vetor de deformações dessa mesma seção, dado por:

$$\{\delta_S\} = \left(\varepsilon_g \quad \phi_Y \quad \phi_Z \quad \gamma_Y \quad \gamma_Z \quad \phi_X \right)^t \quad \text{[III.43]}$$

Para uma variação $\{\Delta F_S\}$ de solicitações, o acréscimo de deformações $\{\Delta \delta_S\}$ da seção é determinado utilizando o método das "matrizes-corda", conforme ilustrado pela figura III.10

O método de resolução consiste em construir um conjunto de soluções $\{\Delta \delta\}_0$, $\{\Delta \delta\}_1$, ..., $\{\Delta \delta\}_i$; onde $\{\Delta \delta\}_i$ é calculado a partir de $\{\Delta \delta\}_{i-1}$, resolvendo-se o sistema linear:

$$\{\Delta F_S\} + \{\Delta A_S\} = [R_S]_{i-1} \cdot \{\Delta \delta\}_i \quad \text{[III.44]}$$

onde $[R_S]_{i-1}$ é a matriz de rigidez "corda" da seção, na iteração $i-1$.

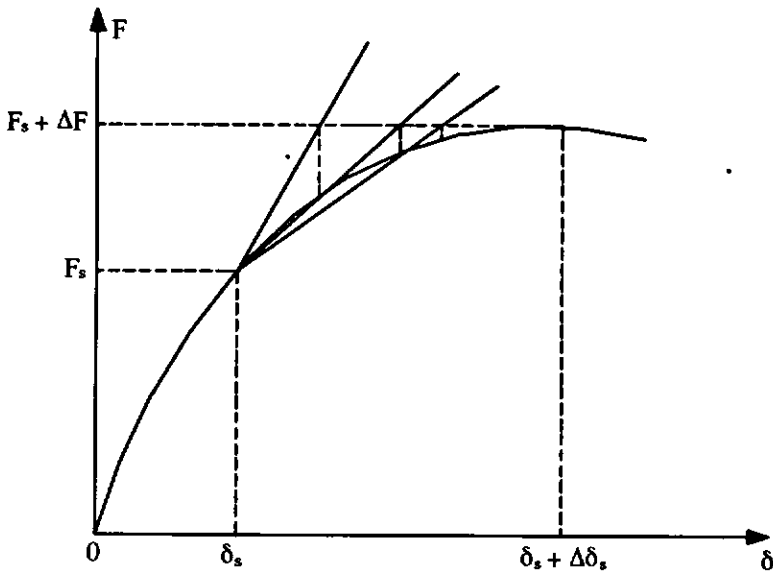


Fig. III.10 - Esquema de solução utilizando matrizes corda

Parte-se da iteração inicial $\{\Delta\delta\}_0 = \{0\}$. Daí:

$$\{\Delta\delta\}_i = [S_S]_{i-1} \cdot \{\Delta F_S\} + \{\Delta G_S\}_{i-1} \quad [\text{III.45}]$$

onde $[S_S]_{i-1}$ é a matriz de flexibilidade, inversa de $[R_S]_{i-1}$, na iteração $i-1$, e $\{\Delta G_S\}_{i-1}$ uma matriz coluna dada pela relação III.40.

O equilíbrio da seção é considerado atingido quando a norma Euclidiana n de deformações, entre duas iterações sucessivas, for inferior a uma tolerância T .

$$n = \left[\frac{\langle \{\Delta\delta\}_i - \{\Delta\delta\}_{i-1} \rangle \cdot \{ \{\Delta\delta\}_i - \{\Delta\delta\}_{i-1} \}}{\langle \{\delta_s\} + \{\Delta\delta\}_i \rangle \cdot \{ \{\delta_s\} + \{\Delta\delta\}_i \}} \right]^{1/2} < T \quad [\text{III.46}]$$

A notação $\langle \rangle$ refere-se a um vetor linha.

Considerando que podem ocorrer certos problemas numéricos (quando o determinante da matriz de rigidez se aproxima de zero) foi acoplado um método de substituição que utiliza as matrizes secantes (ver figura III.11).

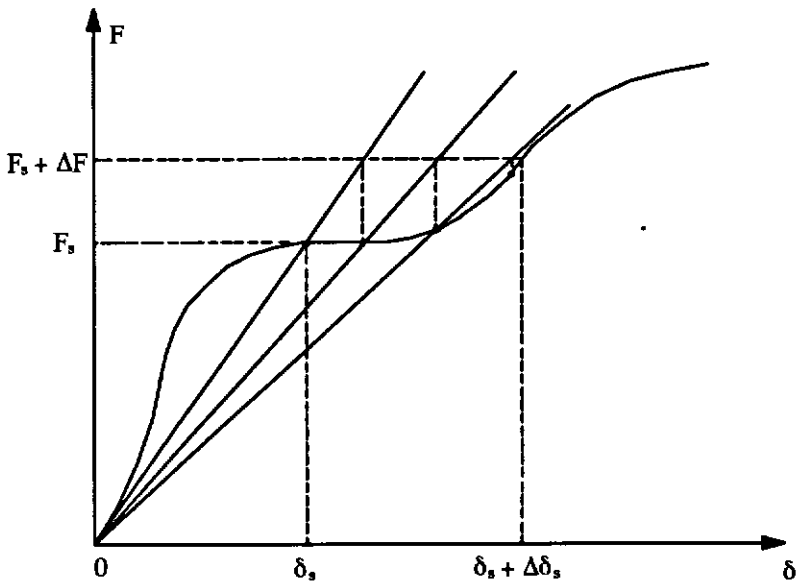


Fig. III.11 - Esquema de solução utilizando matrizes secantes

Além do critério de convergência dado por III.46 emprega-se outro limitando o número máximo de iterações.

A figura III.12 mostra um fluxograma da pesquisa do estado de equilíbrio de uma seção transversal.

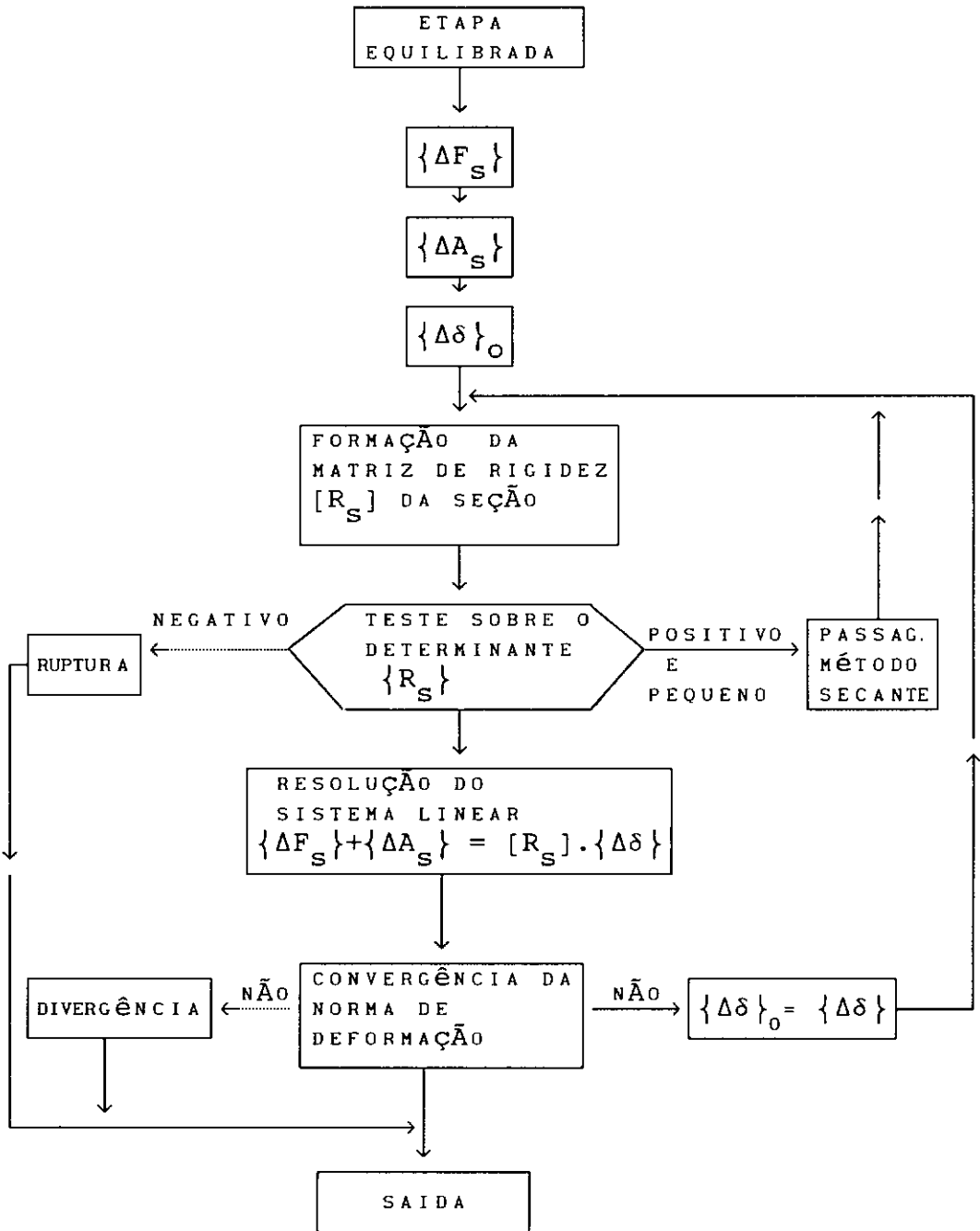


Fig. III.12 - Fluxograma da pesquisa do estado de equilíbrio de uma seção

III.5 - Equilíbrio global da estrutura

III.5.1 - Matriz de rigidez do elemento no referencial móvel

O referencial local é ligado à posição inicial do elemento (figura III.13).

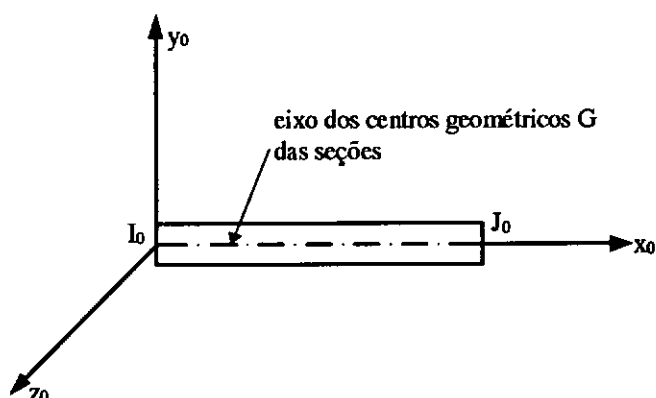


Fig. III.13 - Referencial local ligado a posição inicial do elemento

I_0 e J_0 são respectivamente os nós inicial e final do elemento e definem a orientação do referencial.

Após o elemento deformar-se, os nós I_0 e J_0 deslocam-se para os pontos I e J (figura III.14).

Sejam u_i, v_i, w_i (resp. u_j, v_j, w_j) as componentes, no referencial local $x_0y_0z_0$, do vetor deslocamento I_0I (resp. J_0J).

Sejam $\theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}$ e θ_{iz_0} (resp. $\theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}$ e θ_{jz_0}) as rotações no nó I (resp. J), em torno dos eixos x_0, y_0 e z_0 .

Chama-se de $\{F_L\}$ (resp. $\{S_L\}$) a matriz coluna 12×1 que contém as solicitações (resp. deslocamentos) nas

extremidades do elemento, no referencial local $x_0 y_0 z_0$.

$$\{F_L\} = \{F_{ix_0}, F_{iy_0}, F_{iz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, \dots \\ \dots, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0}\}^t$$

$$\{S_L\} = \{u_i, v_i, w_i, \ominus_{ix_0}, \ominus_{iy_0}, \ominus_{iz_0}, u_j, v_j, w_j, \\ \dots, \ominus_{jx_0}, \ominus_{jy_0}, \ominus_{jz_0}\}^t \quad [III.47]$$

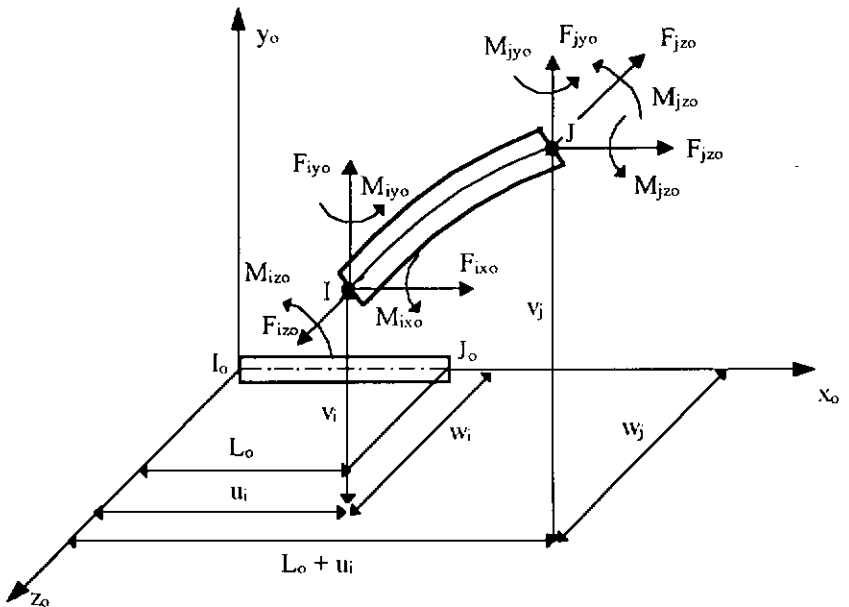


Fig. III.14 - Posição e geometria do elemento deformado

Considerando as relações abaixo, podem-se determinar os vetores $\{F_u\}$ e $\{S_u\}$ de esforços e de deslocamentos independentes

$$\{F_u\} = (F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad [III.48]$$

$$\{S_u\} = (u, v, w, \ominus_{ix_0}, \ominus_{iy_0}, \ominus_{iz_0}, \ominus_{jx_0}, \ominus_{jy_0}, \ominus_{jz_0})^T \quad [III.49]$$

onde:

$$\begin{cases} F_{jx_0} = -F_{ix_0} \\ F_{jy_0} = -F_{iy_0} \\ F_{jz_0} = -F_{iz_0} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u = u_j - u_i \\ v = v_j - v_i \\ w = w_j - w_i \end{cases} \quad \text{[III.50]}$$

As matrizes $\{S_u\}$ e $\{S_L\}$ relacionam-se através de:

$$\{S_u\} = [T_0] \cdot \{S_L\} \quad \text{[III.51]}$$

onde $[T_0]$ é mostrada no Anexo A, equação A.4. De forma semelhante:

$$\{F_L\} = [T_0]^t \cdot \{F_u\} \quad \text{[III.52]}$$

Após a deformação do elemento, as direções dos eixos principais das seções planas variam de uma extremidade à outra. Seja e_{ix}, e_{iy}, e_{iz} (resp. e_{jx}, e_{jy}, e_{jz}) o referencial ortonormal direto, ligado ao nó I (resp. J), conforme mostra a figura III.15

Na análise de grandes deslocamentos de pórticos, o vetor I_0I (resp. J_0J), de componentes u_i, v_i, w_i (resp. u_j, v_j, w_j) representa o estado deformado do elemento, no referencial local $x_0y_0z_0$, juntamente com a matriz $[\Gamma_{0i}]$ (resp. $[\Gamma_{0j}]$) dos cossenos diretores dos eixos e_{ix}, e_{iy}, e_{iz} (resp. e_{jx}, e_{jy}, e_{jz}). $[\Gamma_{0i}]$ e $[\Gamma_{0j}]$ são matrizes 3×3 ortogonais.

No caso de pequenas rotações, os termos da matriz $[\Gamma_{0i}]$, (resp. $[\Gamma_{0j}]$) só dependem das componentes θ_{ix_0} , θ_{iy_0} , θ_{iz_0} (resp. θ_{jx_0} , θ_{jy_0} , θ_{jz_0}) do vetor de rotação do

nó I, (resp. J). Então:

$$[\Gamma_{oi}] = \begin{bmatrix} 1 & \ominus_{izo} & -\ominus_{iyo} \\ -\ominus_{izo} & 1 & \ominus_{ixo} \\ \ominus_{iy0} & -\ominus_{ixo} & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{III.53}]$$

$$[\Gamma_{oj}] = \begin{bmatrix} 1 & \ominus_{jzo} & -\ominus_{jyo} \\ -\ominus_{jzo} & 1 & \ominus_{jxo} \\ \ominus_{jy0} & -\ominus_{jxo} & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{III.54}]$$

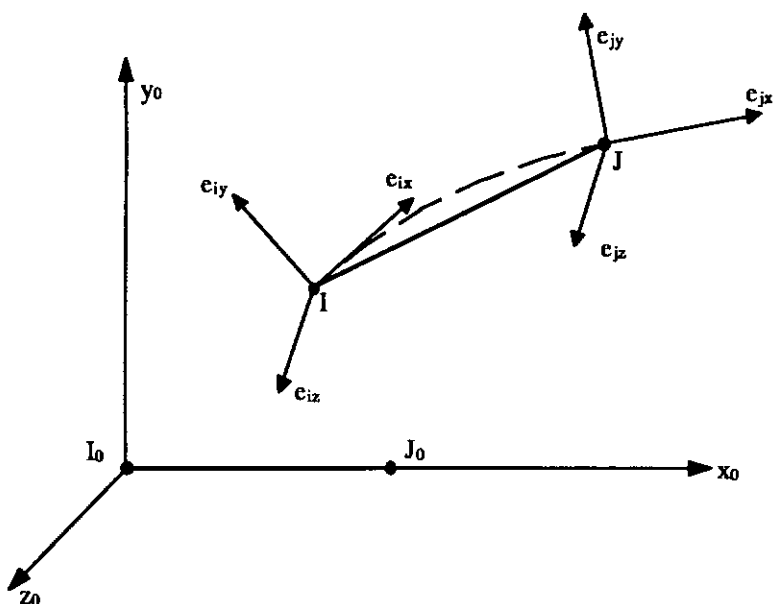


Fig. III.15 - Referenciais ligados aos nós do elemento

Para realizar uma análise não-linear física e geométrica, o estado de deformação do elemento é definido em um referencial móvel xyz , ligado à sua posição deformada, dentro da hipótese de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Nesse referencial, a origem dos eixos localiza-se no nó I e o eixo x aponta para o nó J. Para defini-lo são utilizados os ângulos de Euler α e β , função dos deslocamentos relativos de translação dos nós I e J (ver

figura III.16).

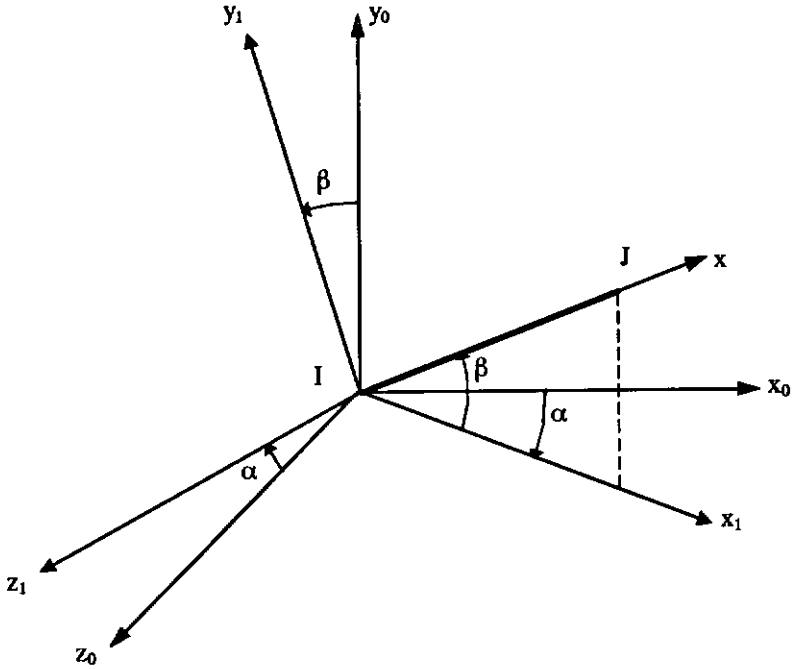


Fig. III.16 - Posição do eixo do referencial intrínseco em relação ao referencial (x_0, y_0, z_0)

A orientação do referencial móvel é definida considerando agora uma rotação γ em torno do eixo x (ver figura III.17).

A passagem do referencial local $x_0y_0z_0$ ao referencial móvel se dá por meio de uma matriz $[r]$, de transformação geométrica, matriz essa ortonormal direta, definida por (ver anexo A, eqs. A.5 a A.11):

$$[r] = [r_\gamma] \cdot [r_{\alpha\beta}] \quad \text{[III.55]}$$

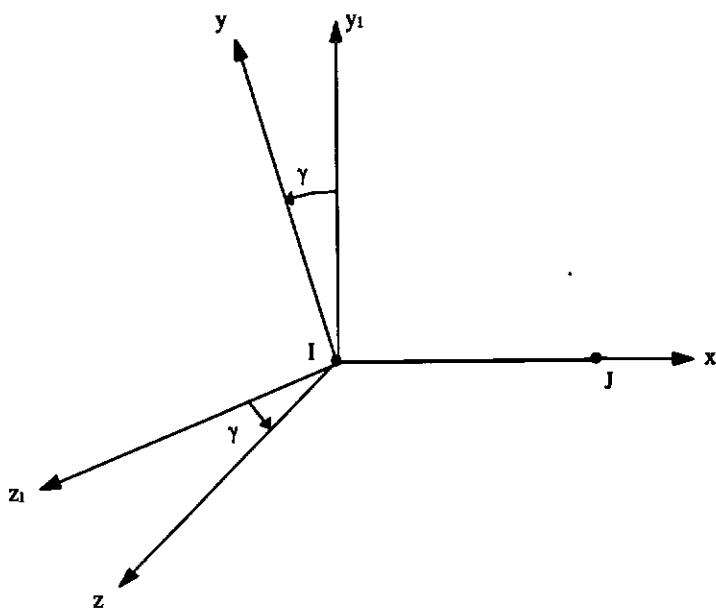


Fig. III.17 - Orientação do referencial intrínseco em relação ao referencial (x, y_1, z_1)

Considere a figura III.18 onde é mostrada a geometria da fibra média deformada nos planos xy e xz , no referencial móvel. Chamamos de $\{F_x\}$ a matriz coluna 12×1 que contém os esforços aplicados aos nós do elemento no referencial móvel xyz e de $\{F_n\}$ a matriz (de ordem 6×1) dos esforços independentes:

$$\begin{aligned} \{F_x\} &= \{N_i, T_{iy}, T_{iz}, M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}, N_j, T_{jy}, T_{jz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}\}^t \\ \{F_n\} &= \{N_j, M_{iy}, M_{iz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}\}^t \end{aligned} \quad [III.56]$$

As matrizes $\{F_x\}$ e $\{F_n\}$ relacionam-se através de:

$$\{F_x\} = [T] \cdot \{F_n\} \quad [III.57]$$

A matriz $[T]$ é dada no anexo A, equação A.12.

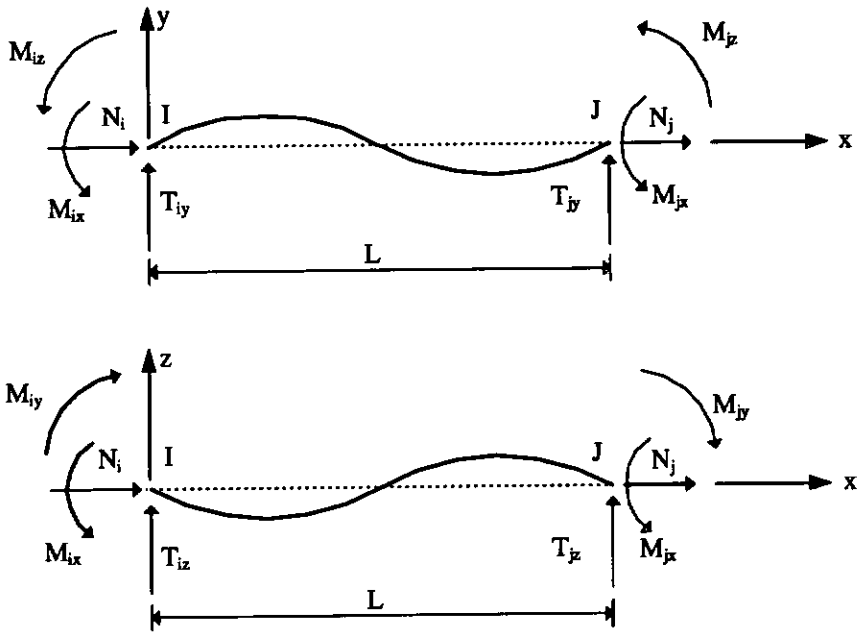


Fig. III.18 - Projeção do elemento nos planos xy e xz

Considere a matriz $\{S_n\}$, de ordem 6×1 , dos deslocamentos considerados no referencial móvel xyz :

$$\{S_n\} = \{e, \ominus_{iy}, \ominus_{iz}, \ominus_x, \ominus_{jy}, \ominus_{jz}\}^t \quad [\text{III.58}]$$

onde

$$e = L - L_0 \quad [\text{III.59}]$$

representa a variação de comprimento do elemento e

$$\ominus_x = \ominus_{jx} - \ominus_{ix} \quad [\text{III.60}]$$

representa a rotação relativa de torção nos nós I e J.

$\ominus_{ix}, \ominus_{iy}$ e \ominus_{iz} (resp. $\ominus_{jx}, \ominus_{jy}$ e \ominus_{jz}) representam as

rotações no nó I (resp. J), em torno dos eixos x, y e z.

Finalmente chamamos de $[\Gamma_i]$ e $[\Gamma_j]$ as matrizes, de ordem 3×3 , ortogonais, dos cossenos diretores dos eixos e_{ix}, e_{iy}, e_{iz} (resp. e_{jx}, e_{jy}, e_{jz}):

$$[\Gamma_i] = \begin{bmatrix} 1 & \ominus_{iz} & -\ominus_{iy} \\ -\ominus_{iz} & 1 & \ominus_{ix} \\ \ominus_{iy} & -\ominus_{ix} & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{III.61}]$$

$$[\Gamma_j] = \begin{bmatrix} 1 & \ominus_{jz} & -\ominus_{jy} \\ -\ominus_{jz} & 1 & \ominus_{jx} \\ \ominus_{jy} & -\ominus_{jx} & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{III.62}]$$

III.5.1.1 - Relação entre os esforços nodais no elemento e as solicitações em uma seção

A variação das solicitações entre seções transversais de abcissa x é linear, uma vez que no referencial móvel os efeitos de segunda ordem são desprezados. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} N(x) &= -N_j \\ M_Y(x) &= (1 - x/L) M_{iY} - x/L \cdot M_{jY} \\ M_Z(x) &= -(1 - x/L) M_{iZ} + x/L \cdot M_{jZ} \\ T_Y(x) &= (M_{iZ} + M_{jZ}) / L \\ T_Z(x) &= -(M_{iY} + M_{jY}) / L \\ M_X(x) &= -M_{jX} \end{aligned} \quad [\text{III.63}]$$

Considerando as equações III.11 e III.63 pode-se escrever sob forma matricial a relação entre os esforços nodais do elemento e as solicitações na seção, no

referencial móvel, conforme a equação abaixo (ver A.13):

$$\{F_s\} = [L(x)] \cdot \{F_n\} \quad [\text{III.64}]$$

onde $\{F_s\}$ é dado por:

$$\{F_s\} = \{N(x), M_y(x), M_z(x), T_y(x), T_z(x), M_c(x)\}^t \quad [\text{III.65}]$$

Como é desprezada a variação de comprimento do elemento no cálculo da variação de sollicitações chega-se a

$$\{\Delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\Delta F_n\} \quad [\text{III.66}]$$

III.5.1.2 - Relação entre as deformações nas seções e os deslocamentos nodais do elemento

Para uma variação de esforços $\{\Delta F_n\}$ nas extremidades do elemento tem-se como consequência

a) um trabalho virtual complementar externo :

$$\delta w_e = \{\Delta F_n\}^t \cdot \{S_n\} \quad [\text{III.67}]$$

b) um trabalho virtual complementar interno :

$$\delta w_i = \int_0^L \{\Delta F_s\} \cdot \{\delta(x)\} dx \quad [\text{III.68}]$$

onde $\{\delta(x)\}$ é uma matriz 6×1 que contém as deformações em uma seção transversal com abscissa x .

$$\{\delta(x)\} = \left(\varepsilon_g(x), \phi_y(x), \phi_z(x), \gamma_y(x), \gamma_z(x), \phi_x(x) \right)^t \quad [\text{III.69}]$$

Conforme o teorema do trabalho virtual complementar :

$$\delta w_i = \delta w_e \quad [\text{III.70}]$$

Considerando as relações III.66 a III.68 chega-se a:

$$\{S_n\} = \int_0^L [L(x)]^t \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad [\text{III.71}]$$

Conseqüentemente:

$$\{\Delta S_n\} = \int_0^L [L(x)]^t \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad [\text{III.72}]$$

III.5.1.3 - Relação entre os deslocamentos e os esforços nos nós do elemento

Considerando as relações III.39 e III.72 chega-se a seguinte relação:

$$\{\Delta S_n\} = \int_0^L [L(x)]^t \cdot \left([S_s] \{\Delta F_s\} + \{\Delta G_s\} \right) dx \quad [\text{III.73}]$$

Aplicando a equação III.66 à equação III.73 temos o seguinte:

$$\{\Delta S_n\} = [K_n]^{-1} \cdot \{\Delta F_n\} + \{\Delta G_n\} \quad [\text{III.74}]$$

onde $[K_n]^{-1}$ representa a matriz de flexibilidade reduzida do elemento, no referencial móvel xyz dada por:

$$[K_n]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [S_S] \cdot [L(x)] \cdot dx \quad [\text{III.75}]$$

e $\{\Delta G_n\}$ uma matriz coluna de ordem 6×1 :

$$\{\Delta G_n\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\Delta G_S\} \cdot dx \quad [\text{III.76}]$$

Da equação III.74 chega-se à relação entre os acréscimos de esforços e os acréscimos de deslocamentos nodais do elemento, no referencial xyz :

$$\{\Delta F_n\} + \{\Delta A_n\} = [K_n] \cdot \{\Delta S_n\} \quad [\text{III.77}]$$

onde $[K_n]$ é a matriz de rigidez reduzida (6×6) do elemento e

$$\{\Delta A_n\} = [K_n] \cdot \{\Delta G_n\} \quad [\text{III.78}]$$

uma matriz coluna de ordem 6×1 .

III.5.2 - Matriz de rigidez do elemento no referencial local

III.5.2.1 - Relação entre deslocamentos nodais do elemento no referencial móvel e no referencial local

Através das relações III.53, III.54, A.11, III.61 e III.62 pode-se chegar às seguintes relações, limitando-se aos termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 \ominus_{ix} &= \ominus_{ix0} - \gamma & \ominus_{jx} &= \ominus_{jx0} - \gamma \\
 \ominus_{iy} &= \ominus_{iy0} + \alpha & \ominus_{jy} &= \ominus_{jy0} + \alpha \\
 \ominus_{iz} &= \ominus_{iz0} - \beta & \ominus_{jz} &= \ominus_{jz0} - \beta
 \end{aligned}
 \quad [III.79]$$

O deslocamento axial e do nó J é função dos deslocamentos relativos u, v e w dos nós I e J expressos no referencial local :

$$e = \left[(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2 \right]^{1/2} - L_0 \quad [III.80]$$

sendo u, v, e w dados pela equação III.50.

Considerando as equações III.79 e III.60 pode-se expressar a rotação relativa de torção \ominus_x , no referencial móvel, em função das rotações de torção dos nós I e J, expressas no referencial local :

$$\ominus_x = \ominus_{jx0} - \ominus_{ix0} \quad [III.81]$$

A diferenciação das funções e , $\ominus_{iy'}$, $\ominus_{iz'}$, $\ominus_{x'}$, \ominus_{jy} e \ominus_{jz} nos leva a escrever de forma matricial a relação entre os acréscimos de deslocamentos dos nós $\{ \Delta S_u \}$, no referencial local, e os acréscimos de deslocamentos dos nós $\{ \Delta S_n \}$ no referencial móvel :

$$\{ \Delta S_n \} = [B] \cdot \{ \Delta S_u \} \quad \text{[III.82]}$$

onde $[B]$ representa uma matriz 6×9 , de transformação geométrica (ver anexo A, eqs A.14 e A.15).

III.5.2.2 - Relação entre os deslocamentos e os esforços nodais do elemento no referencial local

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais temos:

$$\{ F_n \}^t \cdot \{ \delta S_n \} = \{ F_u \}^t \cdot \{ \delta S_u \} \quad \text{[III.83]}$$

onde $\{ \delta S_n \}$ é a matriz de deslocamento virtual, no referencial móvel, e $\{ \delta S_u \}$ é a matriz de deslocamento virtual, no referencial local.

Através da relação III.82 pode-se escrever :

$$\{ F_n \}^t \cdot [B] \{ \delta S_u \} = \{ F_u \}^t \cdot \{ \delta S_u \} \quad \text{[III.84]}$$

Daí vem que :

$$\{ F_u \} = [B]^t \{ F_n \} \quad \text{[III.85]}$$

Diferenciando a equação III.85 chega-se a :

$$\{\Delta F_u\} = [B]^t \cdot \{\Delta F_n\} + [\Delta B]^t \cdot \{F_n\} \quad \text{[III.86]}$$

Considerando as equações III.77 e III.82, a equação anterior transforma-se em :

$$\{\Delta F_u\} + \{\Delta A_u\} = [B]^t [K_n] [B] \cdot \{\Delta S_u\} + [\Delta B]^t \cdot \{F_n\} \quad \text{[III.87]}$$

onde $\{\Delta A_u\}$ é uma matriz-coluna 9×1 definida por:

$$\{\Delta A_u\} = [B]^t \cdot \{\Delta A_n\} \quad \text{[III.88]}$$

A matriz $[B]$ depende dos deslocamentos relativos u , v e w dos nós I e J . Portanto, exprime-se o termo $[\Delta B]$ como se segue :

$$[\Delta B] = [B, u]^t \cdot \Delta u + [B, v]^t \cdot \Delta v + [B, w]^t \cdot \Delta w \quad \text{[III.89]}$$

ou ainda :

$$[\Delta B]^t \cdot \{F_n\} = [D] \cdot \{\Delta S_u\} \quad \text{[III.90]}$$

onde $[D]$ é uma matriz 9×9 definida por :

$$[D] = \left\{ [B, u]^t \cdot \{F_n\} ; [B, v]^t \cdot \{F_n\} ; [B, w]^t \cdot \{F_n\} ; \{0\} \right\} \quad \text{[III.91]}$$

onde $\{0\}$ é uma matriz nula de ordem 9×6 e

$[B, u]^t \{F_n\}$, $[B, v]^t \{F_n\}$ e $[B, w]^t \{F_n\}$ são matrizes-coluna de ordem 9×1 , dadas por :

$$\begin{aligned} [B, u]^t \{F_n\} &= (D11, D21, D31, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ [B, v]^t \{F_n\} &= (D12, D22, D32, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ [B, w]^t \{F_n\} &= (D13, D23, D33, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad [III.92]$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem das derivadas segundas das funções e, α e β e tendo em conta a relação III.56, chega-se a :

$$\begin{aligned} D11 &= -2v(M_{iz} + M_{jz})/L_0^3 + 2w(M_{iy} + M_{jy})/L_0^3 \\ D12 &= D21 = -v.N_j/L_0^2 + (M_{iz} + M_{jz})/L_0^2 \\ D13 &= D31 = -w.N_j/L_0^2 - (M_{iy} + M_{jy})/L_0^2 \\ D22 &= N_j/L_0 + 2v(M_{iz} + M_{jz})/L_0^3 \\ D23 &= D32 = 0 \\ D33 &= N_j/L_0 - 2w(M_{iy} + M_{jy})/L_0^3 \end{aligned} \quad [III.93]$$

Podem-se substituir os esforços nodais no referencial móvel pelos esforços nodais no referencial local, na relação III.93. Levando em conta a equação III.85 temos que :

$$\begin{bmatrix} F_{jx0} \\ F_{jy0} \\ F_{jz0} \end{bmatrix} = [C] \cdot \begin{bmatrix} N_j \\ -(M_{iz} + M_{jz})/L_0 \\ (M_{iy} + M_{jy})/L_0 \end{bmatrix} \quad [III.94]$$

onde $[C]$ é uma matriz 3×3 ortogonal dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -v/L_0 & -w/L_0 \\ v/L_0 & 1 & 0 \\ w/L_0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [III.95]$$

Agora podem-se escrever os termos da matriz [D] em função dos esforços aplicados ao nó J, expressos no referencial local. Em se limitando aos termos de primeira ordem, temos que :

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2(v.F_{jy_0} + w.F_{jz_0})/L_0^2 \\ D_{12} &= D_{21} = -F_{jy_0}/L_0 \\ D_{13} &= D_{31} = -F_{jz_0}/L_0 \\ D_{22} &= F_{jx_0}/L_0 - (v.F_{jy_0} - w.F_{jz_0})/L_0^2 \\ D_{23} &= D_{32} = 0 \\ D_{33} &= F_{jx_0}/L_0 + (v.F_{jy_0} - w.F_{jz_0})/L_0^2 \end{aligned} \quad [III.96]$$

A equação III.87 agora pode ser escrita como :

$$\{\Delta F_u\} + \{\Delta A_u\} = \left([B]^t \cdot [K_n] \cdot [B] + [D] \right) \cdot \{\Delta S_u\} \quad [III.97]$$

Em virtude das relações III.51 e III.52 chega-se à relação que liga os acréscimos de deslocamentos aos acréscimos de esforços do elemento, no referencial local :

$$\{\Delta F_L\} + \{\Delta A_L\} = [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad [III.98]$$

onde $[K_L]$ é a matriz de rigidez simétrica 12 x 12 do elemento no referencial local. Ela é definida por :

$$[K_L] = [T_0]^t \cdot \left([B]^t \cdot [K_n] \cdot [B] + [D] \right) \cdot [T_0] \quad [\text{III.99}]$$

A matriz-coluna $\{ \Delta A_L \}$, de ordem 9×1 , é dada por:

$$\{ \Delta A_L \} = [T_0]^t \{ \Delta A_u \} \quad [\text{III.100}]$$

III.5.3 - Matriz de rigidez do elemento no referencial global

A estrutura estudada é definida em um referencial global OXYZ ortonormal direto.

Seja $\{ F_X \}$ a matriz coluna 12×1 que contém os esforços nodais, no referencial global :

$$\{ F_X \} = \{ F_{iX}, F_{iY}, F_{iZ}, M_{iX}, M_{iY}, M_{iZ}, F_{jX}, F_{jY}, F_{jZ}, \dots, M_{jX}, M_{jY}, M_{jZ} \}^t \quad [\text{III.101}]$$

De forma semelhante considere a matriz-coluna $\{ S_X \}$, de ordem 12×1 , que contém os deslocamentos nodais, no referencial global OXYZ:

$$\{ S_X \} = \left(U_i, V_i, W_i, \theta_{iX}, \theta_{iY}, \theta_{iZ}, U_j, V_j, W_j, \theta_{jX}, \theta_{jY}, \theta_{jZ} \right)^t \quad [\text{III.102}]$$

A relação que liga as grandezas no referencial local às grandezas no referencial global (ver figura III.19) é função da matriz de rotação $[r_0]$, composta por 3 matrizes ortogonais diretas (ver eqs. A.16 a A.18).

$$[r_0] = [r_{\gamma_0}] \cdot [r_{\beta_0}] \cdot [r_{\alpha_0}] \quad [\text{III.103}]$$

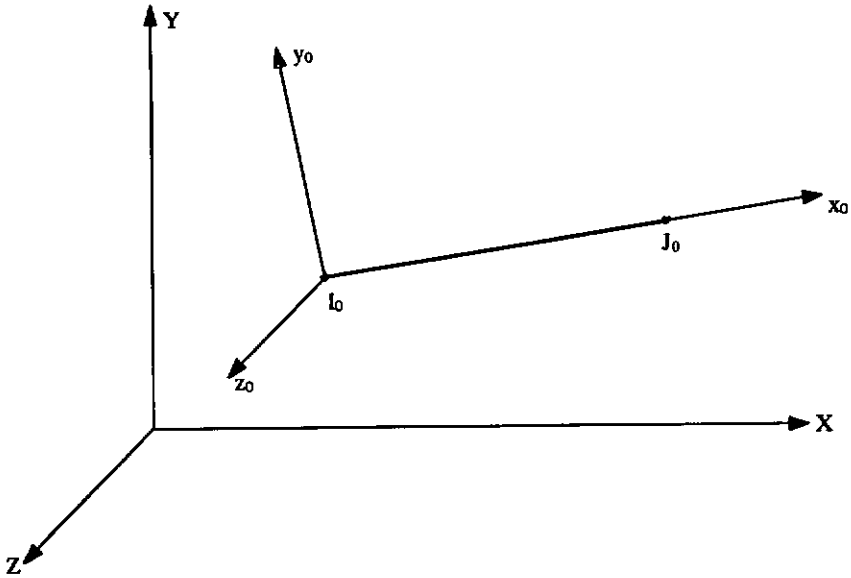


Fig. III.19 - Orientação inicial do elemento em relação ao referencial absoluto

A relação matricial entre os deslocamentos nodais $\{S_L\}$, no referencial local, e os deslocamentos nodais $\{S_X\}$, no referencial global, é dada por :

$$\{S_L\} = [R_0] \cdot \{S_X\} \quad \text{[III.104]}$$

onde $[R_0]$ é uma matriz ortogonal, função de $[r_0]$ (vide anexo A, eq. A.19).

De forma semelhante, pode-se escrever :

$$\{F_X\} = [R_0]^t \cdot \{F_L\} \quad \text{[III.105]}$$

Diferenciando a equação III.105:

$$\{\Delta F_X\} = [R_0]^t \cdot \{\Delta F_L\} \quad \text{[III.106]}$$

Substituindo a equação anterior na equação III.98 :

$$\{\Delta F_X\} + \{\Delta A_X\} = [R_0]^t \cdot [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad [\text{III.107}]$$

onde $\{\Delta A_X\}$ é uma matriz coluna 12×1 dada por :

$$\{\Delta A_X\} = [R_0]^t \cdot \{\Delta A_L\} \quad [\text{III.108}]$$

Diferenciando agora a equação III.104 temos que :

$$\{\Delta S_L\} = [R_0] \cdot \{\Delta S_X\} \quad [\text{III.109}]$$

Substituindo a equação anterior na equação III.107 chega-se à relação matricial entre os acréscimos de deslocamentos aos acréscimos de esforços nos nós do elemento, no referencial global OXYZ :

$$\{\Delta F_X\} + \{\Delta A_X\} = [K_X] \cdot \{\Delta S_X\} \quad [\text{III.110}]$$

onde $[K_X]$ é a matriz de rigidez simétrica do elemento no referencial global OXYZ, dada por :

$$[K_X] = [R_0]^t \cdot [K_L] \cdot [R_0] \quad [\text{III.111}]$$

III.5.4 - Método incremental - iterativo de equilíbrio da estrutura

III.5.4.1 - Algoritmo de resolução

A cada acréscimo de carga $\{ \Delta P \}$ realizado, utilizam-se as matrizes "corda", que ligam os acréscimos de esforços nodais aos acréscimos de deslocamentos nodais, como base do método de substituições sucessivas, conforme mostrado na figura III.20 .

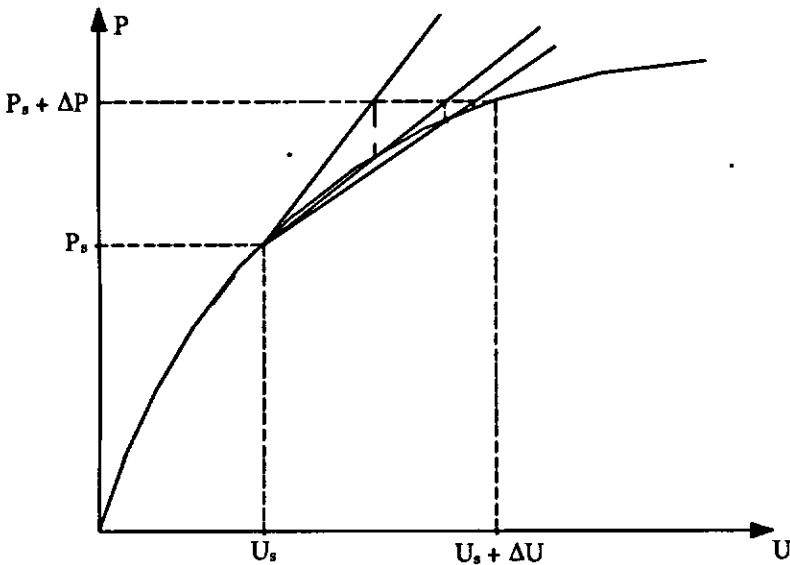


Fig. III.20 - Método de substituição utilizando matrizes corda

O problema não-linear é determinar, para um acréscimo de carga $\{ \Delta P \}$, o acréscimo de deslocamentos correspondente.

O método consiste em construir um conjunto de soluções $\{ \Delta U \}_0$, $\{ \Delta U \}_1$, ..., $\{ \Delta U \}_i$, onde cada solução é

obtida em função da solução anterior, conforme a equação III.112.

$$\{\Delta P\} + \{\Delta A\}_{i-1} = [K]_{i-1} \cdot \{\Delta U\}_i \quad [\text{III.112}]$$

A solução, expressa em deslocamentos, é alcançada quando entre duas iterações sucessivas a norma Euclidiana n_u da variação de deslocamentos for inferior ou igual à uma tolerância T_u :

$$n_u = \left[\frac{\langle \{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1} \rangle \cdot \{ \{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1} \}}{\langle \{U_s\} + \{\Delta U\}_i \rangle \cdot \{ \{U_s\} + \{\Delta U\}_i \}} \right]^{1/2} < T_u \quad [\text{III.113}]$$

onde $\{U_s\}$ representa o vetor de deslocamentos da estrutura, correspondente à última etapa estável.

Se após um certo número de iterações o critério dado por III.97 não for satisfeito, considera-se que ocorreu uma divergência e o processo iterativo é reiniciado, dessa vez com um passo de carga igual à metade do antecedente.

A instabilidade da estrutura, matematicamente, é alcançada quando sua matriz de rigidez deixa de ser positiva definida, sendo esse um critério de divergência adotado, a fim de se evitar iterações desnecessárias.

III.5.4.2 - Sequência de cálculo

A análise da estrutura é realizada em se incrementando o parâmetro de carregamento α .

Seja a etapa e onde é conhecida a configuração da

estrutura : deformações, deslocamentos e solicitações; onde o parâmetro α apresenta o valor α_e . Considere agora o vetor de acréscimo de cargas externas nodais $\{ \Delta P \}$, de forma que o parâmetro α_e passa a α_{e+1} , onde $\alpha_{e+1} = \alpha_e + \Delta\alpha$.

Os passos a serem realizados, visando a determinação da resposta da estrutura a esse acréscimo de cargas são os seguintes :

a) Supõe-se conhecido o valor do acréscimo de deslocamentos nodais $\{ \Delta U \}_0$, inicialmente tornado nulo;

b) O valor do acréscimo de esforços nodais no referencial móvel $\{ \Delta F_n \}$ é determinado, para todos os elementos da estrutura, através da relação abaixo :

$$\{ \Delta F_n \} = [K_n] \cdot \{ \Delta S_n \} - \{ \Delta A_n \} \quad \text{[III.114]}$$

Os valores das matrizes $[K_n]$ e $\{ \Delta A_n \}$ são obtidos da iteração precedente. O vetor do acréscimo de deslocamentos nodais $\{ \Delta S_n \}$ é determinado utilizando o vetor $\{ \Delta U_0 \}$ e as relações III.109, III.50 e III.82. A matriz $[B]$ é obtida da etapa precedente.

Se existirem deslocamentos liberados em um elemento, altera-se o vetor $\{ \Delta S_L \}$ através da relação III.109;

c) Estando os vetores $\{ \Delta F_n \}$ e $\{ \delta \}$ (vetor de deformações da etapa anterior) determinados, procede-se ao equilíbrio das seções. O acréscimo de solicitações em uma seção de cálculo $\{ \Delta F_s \}$ é determinado através da relação III.66.

Para o incremento eventual de protensão sobre a seção são utilizadas as relações III.32 e III.33. A seção é equilibrada resolvendo-se o sistema não-linear de III.37. Se o equilíbrio da seção não for atingido isso significa que houve ruptura da seção ou que o número de iterações fixado *a priori* não foi suficiente. Dentro desse último caso o cálculo é feito com um passo de carga $\Delta\alpha$ menor;

d) Com o equilíbrio da seção atingido, é conhecido o acréscimo de deformações $\{ \Delta\delta \}$. A matriz de rigidez $[K_n]$ de cada elemento, assim como o vetor $\{ \Delta A_n \}$, são determinados segundo o método apresentado nos itens III.5.1.2 e III.5.1.3.

e) A matriz $[K_L]$ e o vetor $\{ \Delta A_L \}$, no referencial local, são determinados através das equações III.99 e III.100. A matriz $[K_L]$ é modificada para levar em conta as eventuais liberações de deslocamentos;

f) A matriz $[K_X]$ e o vetor $\{ \Delta A_X \}$, no referencial absoluto são determinados por meio da matriz de rotação $[R_0]$ e das relações III.108 e III.111;

g) A matriz de rigidez da estrutura $[K]$ e o vetor devido à ação eventual da protensão $\{ \Delta A \}$, são então formados;

h) Os acréscimos de deslocamentos nodais da estrutura $\{ \Delta U \}$, correspondentes à iteração em curso, são obtidos resolvendo-se o sistema III.112;

i) Procede-se agora à verificação da convergência, através da relação III.113. Se o teste de convergência não for satisfeito, o cálculo é repetido com o novo valor de $\{ \Delta U \}$. Entretanto, a não convergência pode se dever à instabilidade do conjunto ou à um número insuficiente de iterações que assegurasse a convergência; dentro desse caso, o cálculo é refeito com um passo de carga menor.

j) Ao fim de cada etapa, são calculados os deslocamentos nodais totais $\{ S_L \}$ e os esforços nodais totais $\{ F_L \}$, no referencial local, assim como os deslocamentos nodais totais $\{ U \}$ e as cargas externas totais $\{ P \}$, no referencial global, acumulando, dessa forma, os acréscimos de cada etapa aos valores da etapa anterior;

l) Antes de passar à uma nova etapa de carregamento, as matrizes $[B]$ e $[D]$ têm seus valores corrigidos em função dos deslocamentos obtidos $\{ U \}$. Essas matrizes exprimem a não-linearidade geométrica do problema e são mantidas constantes durante cada etapa levando à uma sub-estimação dos deslocamentos devidos aos efeitos de segunda ordem.

Para contornar esse problema, dentro da etapa em curso, é efetuada uma correção através da introdução de um carregamento fictício $\{ \Delta P^* \}$, obtido através de :

$$\{ \Delta P^* \} = \{ P \} - \{ P^* \} \quad \text{[III.115]}$$

onde o vetor de cargas $\{ P^* \}$ é obtido dos esforços nodais $\{ F_X \}$, somando os esforços que os nós exercem sobre os

elementos que a eles estão ligados. As reações de apoio, que resultam do equilíbrio dos nós, não são consideradas no vetor $\{ P^* \}$. A figura III.21 ilustra o método de correção.

O algoritmo é dispensado dessa etapa de correção se a norma Euclidiana n_f dos esforços for inferior ou igual à uma certa tolerância T_f

$$n_f = \left(\frac{\langle \Delta P^* \rangle \cdot \{ \Delta P \}}{\langle P \rangle \cdot \{ P \}} \right)^{1/2} < T_f \quad [\text{III.116}]$$

m) A carga de ruína é obtida quando o algoritmo de resolução diverge para um acréscimo de carga inferior ou igual à uma precisão fixada *a priori*.

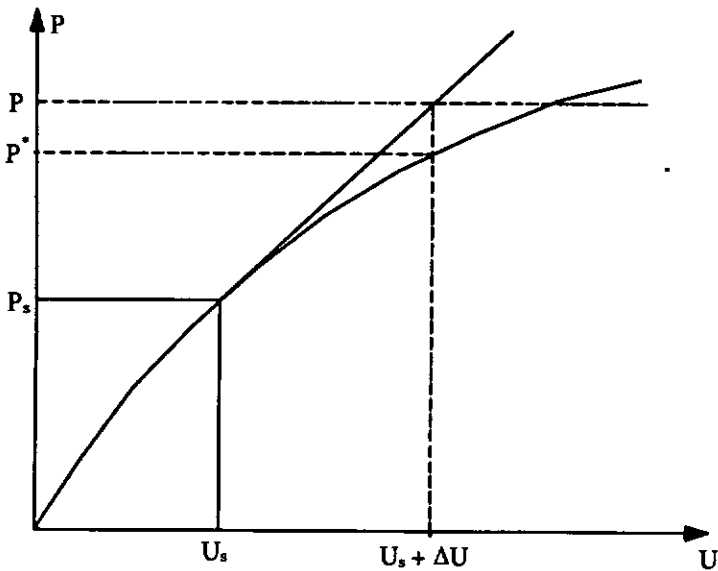


Fig. III.21 - Estado de equilíbrio da estrutura antes da etapa de correção

Um fluxograma da sequência de cálculo apresentada é mostrado na fig III.22

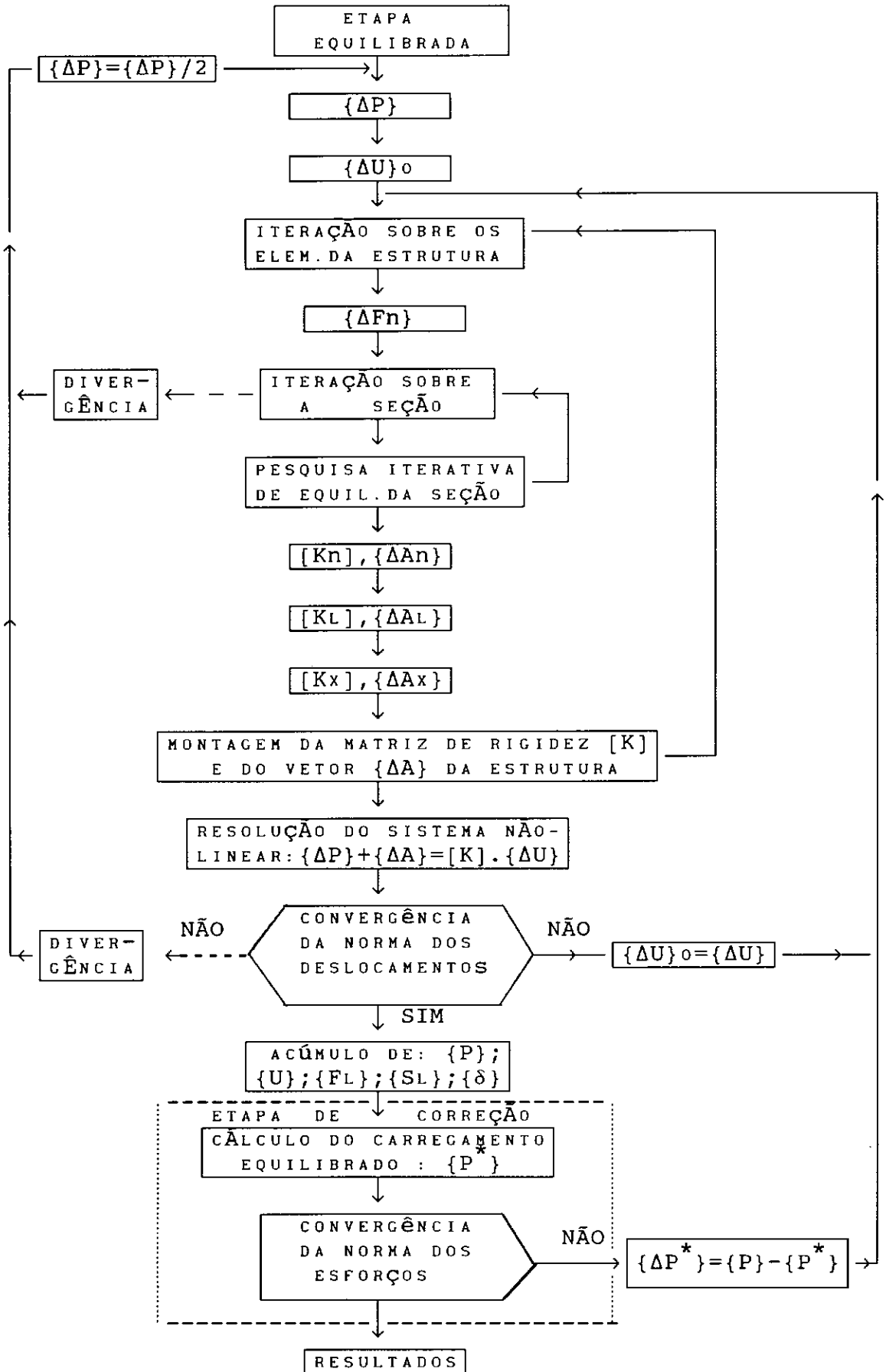


Fig. III.22 - Fluxograma simplificado de uma etapa

CAPÍTULO IV

O SISTEMA SNOB - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O sistema SNOB consiste em um sistema para análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado, protendido e estruturas mistas. Ele foi adaptado a partir do sistema SNOT apresentado em NAIT-RABAH (1990), voltado para pórticos espaciais e que tem como base a formulação apresentada no capítulo anterior.

O sistema SNOB é composto de três grandes programas, ligados entre si através de arquivos binários. Os programas são os seguintes:

- ANALYSE, para a análise da estrutura
- RESULT2, para a edição dos resultados desejados
- GRAPH2, para saídas gráficas de alguns resultados

Os módulos ANALYSE e RESULT2 já estão instalados e funcionando, faltando apenas instalar o módulo GRAPH2. Esse módulo não foi ainda instalado pois utiliza diversas subrotinas da biblioteca do sistema MODULEF (desenvolvido na França), das quais diversas são não-portáteis.

A fim de verificar se o método de cálculo exposto no capítulo III é adequado para aplicação em estruturas em concreto armado, são apresentados alguns exemplos que foram objeto de estudo experimental.

IV.1 - Exemplo 1

O pórtico a seguir foi ensaiado em Austin por Fergusson e Breen e estudado numericamente por Nait-Rabah, ESPION

(1986) e MARTINS (1979), entre outros. Sua geometria e seção transversal são apresentadas na fig.IV.1.

Como indica a figura IV.1, o pórtico é carregado por duas cargas H e P onde é mantida constante a razão de $H/P=0.01$. As cargas são aplicadas instantaneamente, crescendo até a ruína. A discretização do pórtico foi realizada de forma semelhante àquelas feitas por Espion e Nait-Rabah, utilizando 16 elementos de igual comprimento. A discretização de Martins consistiu em três elementos de igual comprimento por membro, totalizando 12 elementos.

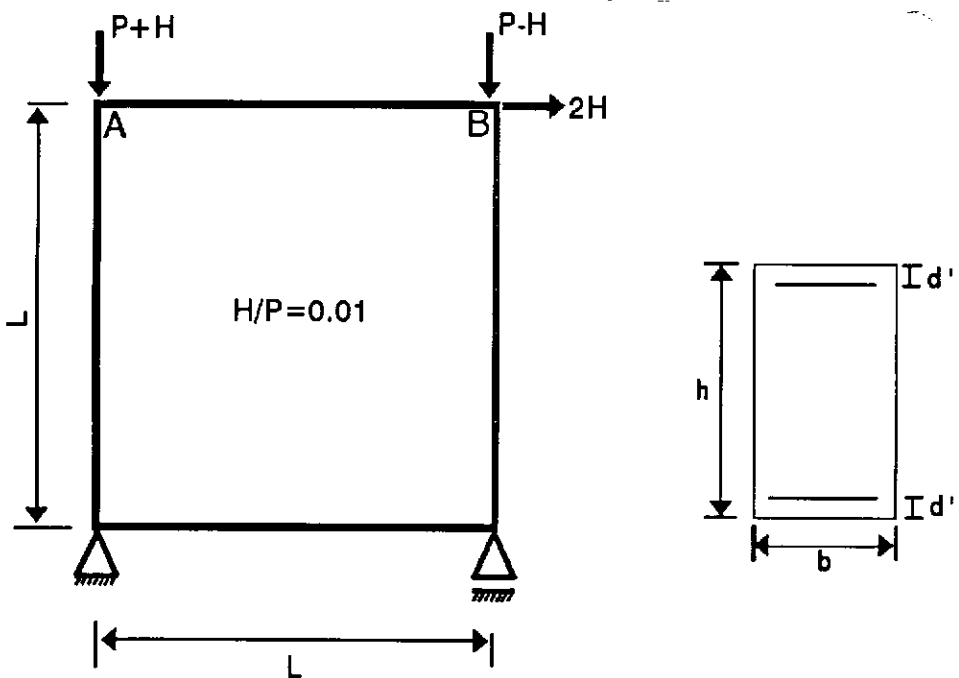


Fig. IV.1 - Geometria do pórtico de Fergusson e Breen

DIMENSÕES (mm)	VIGAS	COLUNAS
h	81	101.6
b	152.4	152.4
d'	21.2	18.2

Quadro IV.1 - Dimensões do pórtico de Fergusson e Breen

As vigas são simetricamente armadas com taxa de armadura de 8% . As colunas também são simetricamente armadas, só que com uma taxa de armadura de 1.9% .O limite de elasticidade do aço utilizado nas vigas é de 410 MPa e nas colunas é de 400 MPa, apresentando em ambos os casos um comportamento igual para tração e compressão, idealizado através de um diagrama tensão-deformação elasto-plástico perfeito com módulo de elasticidade igual a 206 GPa.

O concreto tem resistência máxima à compressão, σ'_j , igual a 22.5 Mpa. Assim como Espion e Nait-Rabah, adotou-se a lei parábola-retângulo com a deformação de pico, ε'_0 , correspondente a σ'_j , igual a $2^0/_{00}$. O módulo de elasticidade na origem é igual a 22.5 GPa. Em nossa análise, assim como nas outras, a resistência à tração do concreto é desprezada.

A curva deslocamento do canto superior direito (ponto B) x carga P (fig. IV.2), obtida através do sistema SNOB, apresenta uma boa concordância com as curvas dos outros autores citados e com a curva obtida do resultado experimental (a curva experimental foi levantada em ESPION (1986)).

A carga máxima experimental obtida foi de $P = 141$ kN,

de acordo com Espion. A carga crítica obtida por Nait-Rabah e Espion foi de $P = 145$ kN, enquanto que através do SNOB chegou-se a $P = 151.9$ kN. Martins obteve $P = 139.7$ kN. O quadro a seguir resume os resultados obtidos.

RESULTADO	EXPERIM	SNOB	SNOT	ESPION	MARTINS	$\frac{\text{SNOB}}{\text{EXPER.}}$
P (kN)	141.0	151.9	145.0	145.0	139.7	1.08
δ (mm)	61.0 *	53.0	56.4 **	49.4 **	55.1	0.87

* valores obtidos em MARTINS

** valores obtidos graficamente em ESPION e NAIT-RABAH

Quadro IV.2 - Resultados do pórtico de Fergusson e Breen

Não temos os parâmetros utilizados por Nait-Rabah neste exemplo, portanto não podemos afirmar termos repetido a simulação por ele adotada. Além disso, as pequenas diferenças de resultados entre o SNOT e o SNOB podem se dever a resíduos numéricos acumulados no SNOB devidos à adaptação do sistema de aplicações tri para bi-dimensionais. Nesta hipótese, ao serem realizadas integrações pelo SNOB nesta terceira direção, onde as deformações e solicitações deveriam ser nulas para uma estrutura bi-dimensional, acumular-se-iam resíduos que causariam tais diferenças. Isso seria causado por uma utilização de matrizes e vetores originais do SNOT, adaptados apenas através da anulação numérica das deformações e solicitações correspondentes à direção eliminada e que poderia não corresponder a um zero absoluto. Vale salientar que o SNOT foi desenvolvido antes do SNOB, sendo este desenvolvido para utilização no laboratório de estruturas do CEBTP, uma vez que a maioria

das estruturas lá ensaiadas eram bi-dimensionais.

Outra possível fonte de diferenças de resultados entre SNOB e SNOT pode se dever ao fato de que o SNOT, ao analisar estruturas bi-dimensionais, não estaria zerando as deformações e esforços na direção cabível, causando um acúmulo numérico de erros.

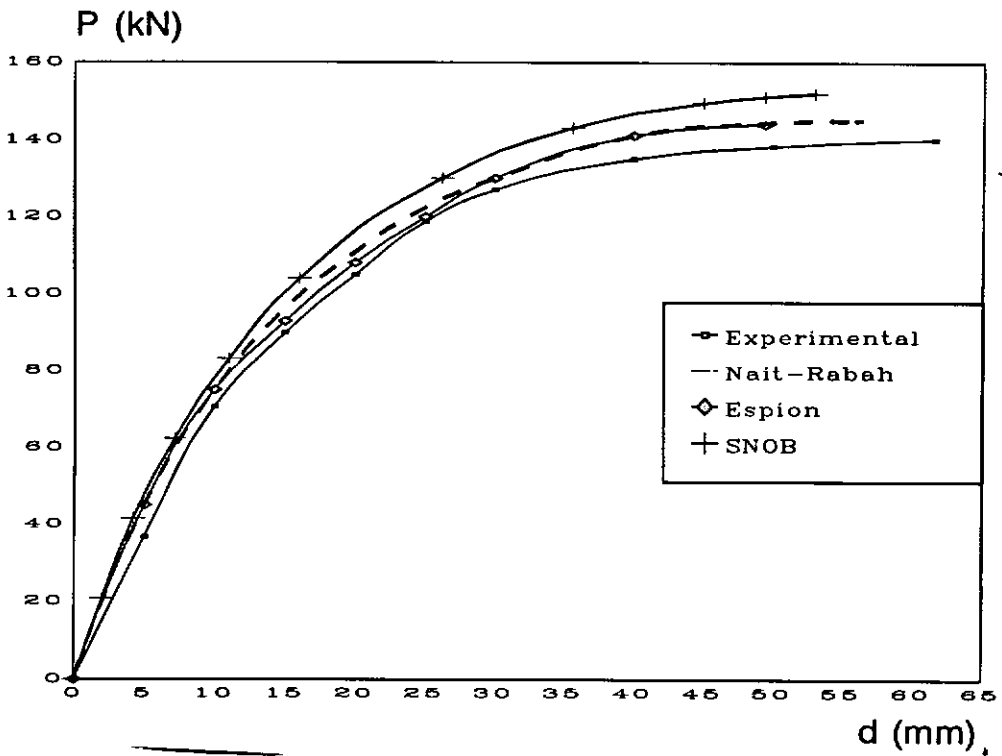


Fig. IV.2 - Curva desl. horizontal do ponto B x carga

IV.2 - Exemplo 2

Com o objetivo de investigar o efeito de um carregamento ciclicamente alternado no comportamento de pórticos em concreto armado, BERTERO E McCLURE (1964) ensaiaram cinco pórticos, dos quais dois foram submetidos a um carregamento instantâneo, crescente até a ruína. Desses

dois pórticos, o pórtico número 1 sofreu descarregamento durante o ensaio, devido a problemas técnicos, sendo então aqui analisado apenas o pórtico número 4. Esse pórtico, assim como o de número 1, também foi estudado por ESPION (1986).

A figura IV.3 mostra a geometria e carregamento do pórtico. Sua seção transversal é simetricamente armada e constante ao longo das colunas e da viga.

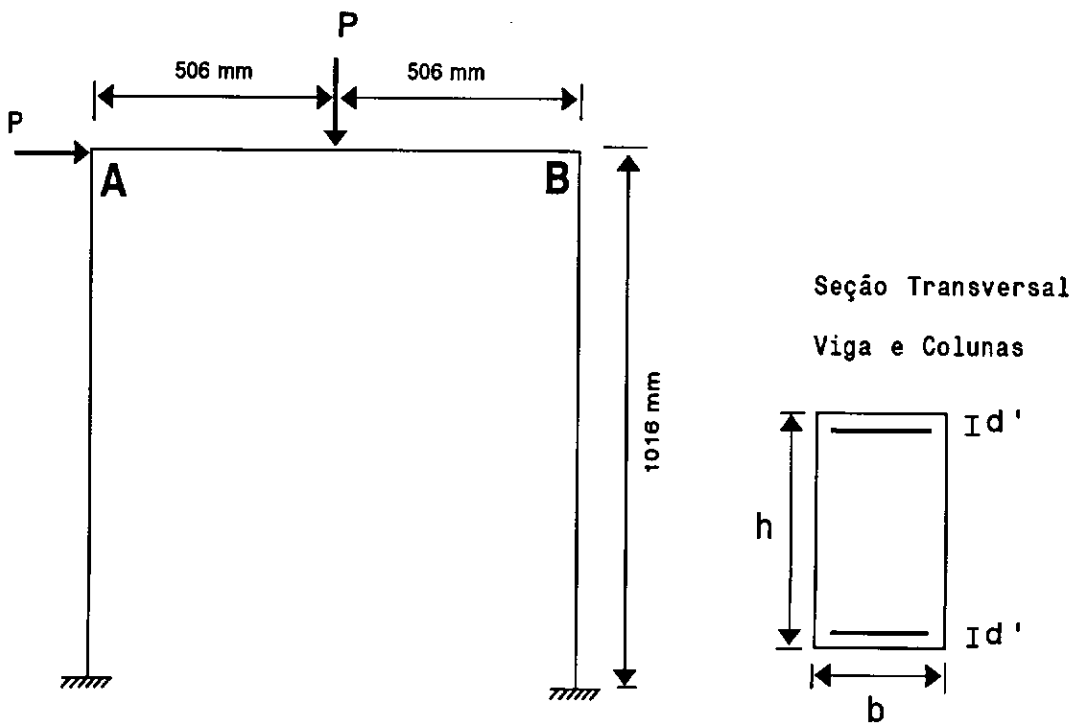


Fig. IV.3 - Geometria do pórtico de Bertero e McClure

DIMENSÕES	
h	101.5 mm
b	73.0 mm
d'	17.5 mm
$A_s = A'_s$	129.0 mm ²

Quadro IV.3 - Dados da seção transversal do pórtico de Bertero e McClure

O aço é do tipo encruado e tem as seguintes características:

$$\begin{array}{ll} \sigma_e = 332.3 \text{ MPa} & \sigma_r = 457.1 \text{ MPa} \\ \epsilon_{s1} = 0.028 & E_s = 206.9 \text{ GPa} \\ \epsilon_y = 0.00161 & \epsilon_{su} = 0.180 \end{array}$$

A tensão máxima de compressão do concreto, σ'_j , vale 23.1 MPa. Todos os outros dados a respeito das propriedades do concreto foram obtidos em Espion, uma vez que na referência BERTERO E McCLURE (1964) não há nenhuma menção sobre tais propriedades. Sendo assim, adotou-se, como Espion, um módulo de elasticidade na origem $E = 23.0 \text{ GPa}$, com deformação máxima do concreto tracionado igual a $\epsilon_{ct} = 0.10 \text{ }^\circ/\text{oo}$ e do concreto comprimido igual a $\epsilon_c = 2 \text{ }^\circ/\text{oo}$.

Conforme mostra a figura IV.4, a curva deslocamento horizontal do ponto B (canto superior direito) x carga, obtida pelo sistema SNOB, apresentou uma boa concordância com a curva experimental e com a curva de Espion até o final da parte linear, quando então a análise era interrompida pelo SNOB. Até o momento do fechamento da

presente tese não foi possível identificar o por quê do problema. Admite-se que seja provavelmente causado por erros numéricos devidos talvez à adaptação do sistema para aplicações em estruturas bi-dimensionais, e que, acumulados ao longo das diversas e repetidas integrações realizadas durante a análise, assumiram maiores proporções neste caso. Os trabalhos de desenvolvimento ora em curso cuidam de eliminar esse inconveniente.

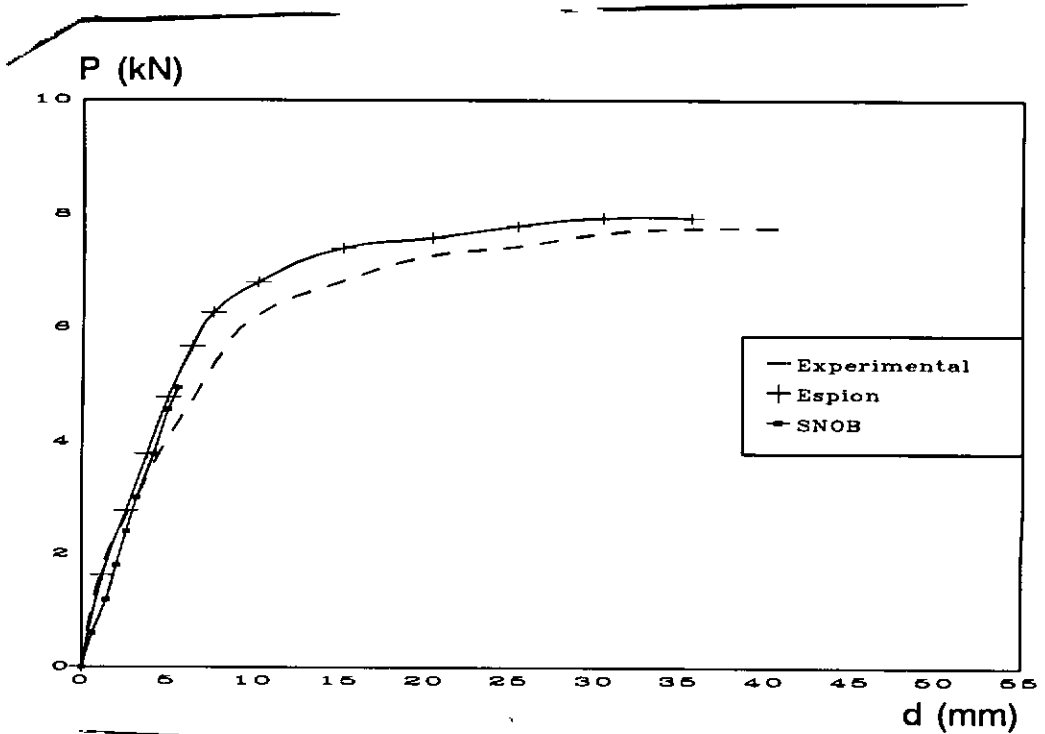


Fig. IV.4 - Curva desl. horizontal do ponto B x carga

IV.3 - Exemplo 3

RODRIGUES (1985) realizou ensaios de flambagem em diversos pórticos em concreto armado, dos quais apresentaremos dois pórticos, o P2A e o P3B. Seus resultados foram comparados com os resultados obtidos do programa

PORT2, que é uma versão modificada do programa PORT (vide GARCIA (1974)), adaptada a uma melhor simulação teórica das condições de ensaio, inclusive com a previsão de grandes deslocamentos e rotações.

A geometria dos pórticos encontra-se na fig. IV.5. A inclinação das colunas, de cerca de $1.5/250$, foi introduzida intencionalmente, com o propósito de obrigar que o deslocamento lateral do pórtico se desse no sentido mostrado na figura, devido ao esquema de montagem do ensaio. A excentricidade da carga em relação ao eixo do pilar, e , vale 80 mm e o recobrimento das armaduras vale 15 mm. As vigas e colunas de ambos os pórticos têm armadura simétrica.

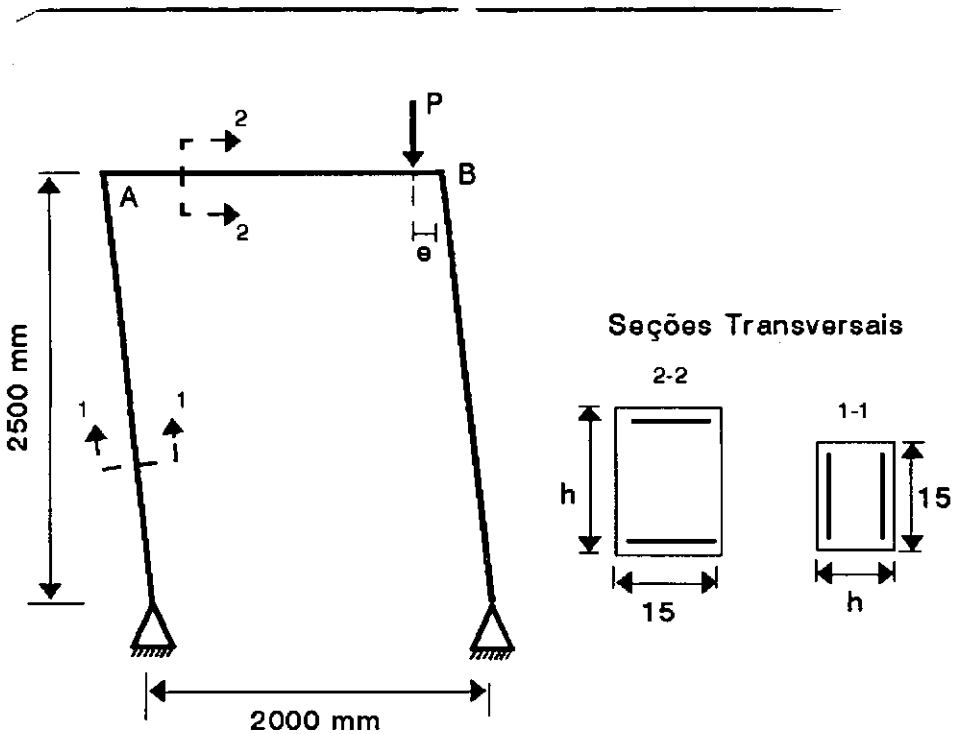


Fig. IV.5 - Geometria dos pórticos P2A e P3B

DIMENSÕES	P2A		P3B	
	VIGAS	COLUNAS	VIGAS	COLUNAS
h (mm)	200	100	250	100
$A_s = A'_s$	4 ϕ 6.3	8 ϕ 6.3	3 ϕ 6.3	8 ϕ 6.3

Quadro IV.4 - Dados da seção transversal dos pórticos P2A e P3B

As características físicas do concreto e do aço são apresentadas nos quadros IV.5 e IV.6.

PÓRTICO	σ_c (MPa)	σ_t (MPa)	E_c (GPa)
P2A	22.0	2.3	23.0
P3B	21.5	2.5	23.6

Quadro IV.5 - Características físicas do concreto

PÓRTICO	σ_e (MPa)	σ_y (MPa)	σ_r (MPa)	E_a (GPa)
P2A	405	545	665	208
P3B	365	535	705	199

Quadro IV.6 - Características físicas do aço

As figuras IV.6 e IV.7 contêm as curvas carga x deslocamento horizontal do ponto B e mostram uma boa concordância entre os resultados experimentais, os resultados fornecidos pelo PORT2 (até certo ponto) e os resultados fornecidos pelo SNOB. As curvas dos resultados experimentais e dos resultados do PORT2 foram traçadas apenas até o ponto de carga máxima, para efeito de comparação com os resultados do SNOB, uma vez que os ensaios

e aquele programa utilizaram controle de deslocamentos, ao contrário do SNOB, que utiliza controle de carga. As curvas dos resultados do PORT2 foram obtidas graficamente.

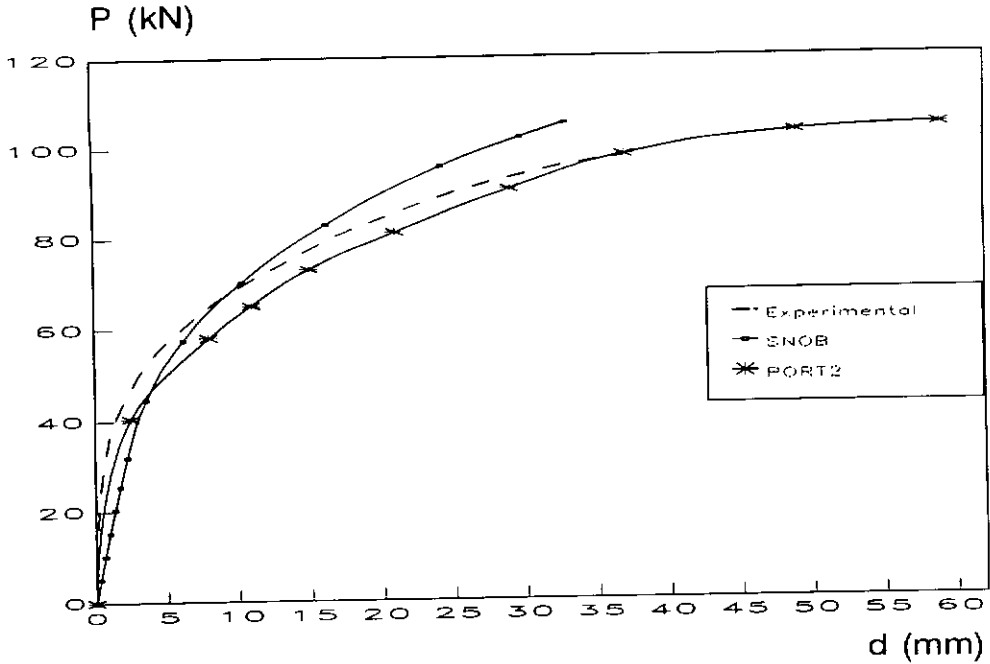


Fig. IV.6 - Desl. horizontal do ponto B x carga P - P2A

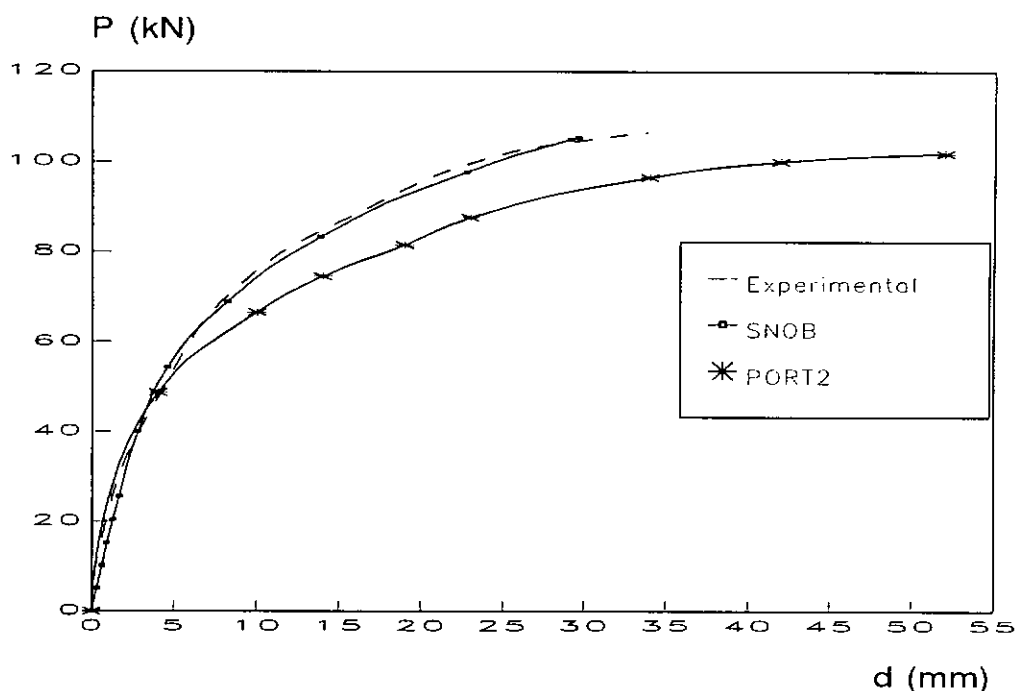


Fig. IV.7 - Desl. horizontal do ponto B x carga P - P3B

Os quadros IV.7 E IV.8 resumem os resultados obtidos para a carga máxima e deslocamento horizontal do ponto B. Rodrigues comparou seus resultados com os resultados obtidos através do programa PORT2, que forneceu uma carga máxima de 104.2 kN para o pórtico P2A e 101.8 kN para o pórtico P3B.

RESULTADO	δ_B (mm)	P_{max} (kN)	δ / δ_{EXP}	P / P_{EXP}
EXPERIMENTAL	37	97.6	1.00	1.00
SNOB	32.9	105.2	0.89	1.08
PORT2	58.0*	104.2	1.57	1.07

* valor retirado de grafico

Quadro IV.7 - Resultados para o pórtico P2A

RESULTADO	δ_B (mm)	P_{max} (kN)	δ / δ_{EXP}	P / P_{EXP}
EXPERIMENTAL	33.8	106.5	1.00	1.00
SNOB	29.6	105.4	0.88	0.99
PORT2	52.0*	101.8	1.54	0.96

* valor retirado de grafico

Quadro IV.8 - Resultados para o pórtico P3B

Conforme é mostrado pelos quadros IV.7 e IV.8, os resultados obtidos pelo SNOB se apresentam bastante satisfatórios, em relação aos experimentais, com pequena margem de erro. Como se observa, os erros cometidos em relação aos deslocamentos são maiores que os erros cometidos em relação à carga máxima, o que não surpreende pelo aspecto das curvas deslocamento \times carga (com fracas declividades) junto a esse ponto limite. Note-se, inclusive, em relação ao programa PORT2, como tais discrepâncias mostraram-se bem mais acentuadas.

Observa-se que as diferenças de rigidez entre modelo e ensaio, como indicam as curvas do pórtico P2A, podem ser atribuídas a variações de características da estrutura real que não foram reproduzidas no modelo matemático, seja por não terem sido relatadas no ensaio, seja pela impossibilidade do modelo adotado de incorporá-las.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Foram apresentadas diversas propostas para análise não linear física e geométrica de estruturas. Tendo em vista aplicações específicas para estruturas em concreto armado, concreto protendido e estruturas mistas e, procurando uma solução que tivesse um mínimo de exigência para adaptação, foi proposta a formulação apresentada no capítulo III e a utilização do sistema SNOB.

Os exemplos apresentados no capítulo anterior, com exceção do exemplo 2, apresentaram boa concordância com resultados experimentais e com resultados apresentados por outros autores.

O sistema SNOB ainda não se encontra completo para plena utilização, faltando ainda a instalação do módulo GRAPH2. Outra tese, que se encontra em desenvolvimento, completará o sistema.

Os problemas apresentados no exemplo 2 do capítulo anterior ficaram pendentes de justificativa e de solução, o que de forma alguma invalida a formulação ou o sistema. Quanto à protensão, apesar do módulo ANALYSE estar preparado para análise deste tipo de estruturas, devido a dificuldades iniciais para implantação do sistema, não houve tempo para um maior aprofundamento nesse assunto, que fica como sugestão de objeto de estudo para a continuidade do presente trabalho, assim como a solução dos problemas apresentados no exemplo 2.

Como continuidade ao presente trabalho, sugere-se que o sistema seja levado para outras plataformas tais como

ambiente Unix e MS/DOS, onde poderá ter uma melhor interface com o usuário e mais ferramentas para apresentação gráfica dos resultados.

Além disso, pode-se citar também, como sugestão, a incorporação do método do comprimento de arco à formulação de Nait-Rabah, visando melhorias nos resultados numéricos. Outra sugestão seria o retorno do sistema às aplicações em estruturas tridimensionais.

A incorporação da influência dos métodos construtivos no equilíbrio da estrutura poderá ser uma contribuição importante ao alargamento do alcance do sistema ora em desenvolvimento.

BIBLIOGRAFIA

- BATHE, K. J. (1982) - Finite element procedures in engineering analysis; Prentice-Hall.
- BELYTSCHKO, T. AND HENRYK, S. (1985) - Stress Projection for Membran in Shear Locking in Shell Finite Element; Comp. Meth. in Appl. Mech., Vol. 51, pp 221-258.
- BENJAMIN, A. C. (1982) - Análise não linear geométrica de pórticos tridimensionais pelo método dos elementos finitos; tese de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- BENJAMIM, A. C. E EBECKEN, N. F. F. (1986) - Formulação de um elemento finito de pórtico elasto-plástico não-linear com matriz de rigidez determinada explicitamente; Revista Brasileira de Engenharia, Cadernos de Engenharia Estrutural, vol.4, no.2, pp. 45-73.
- BERTERO, V. V. AND MCCLURE, G. (1964) - Behaviour of Reinforced Concrete Frames Subjected to Repeated Reversible Loads; Journal of the ACI, vol. 61, n^o 10, pp. 1305-1330.
- CAMPBELL, T. I. E KODUR, V. K. R. (1990)- Deformation controlled nonlinear analysis of prestressed concrete continuous beams; PCI journal, vol. 35, n^o 5, september-october, pp. 42-55.
- CRISFIELD, M. A. (1981)- A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"; Computer & Structures, vol.13, pp. 55-62.
- CRISFIELD, M. A. (1990)- A consistent co-rotational formulation for non-linear, three dimensional, beam-elements; Comp. Meth. in Applied Mech., vol.81, pp. 131-150.

- ESPION, B. (1986) - Contribution a l'Analyse Non Lineaire des Ossatures Planes - Aplication aux Estruturas en Beton Arme; tese de doutorado.
- GARCIA, L. F. T. (1974) - Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- GLOWINSKI, R. ET AL. (1979)- Energy methods in finite elements analysis, John Wiley & Sons, New York.
- JENNINGS, A. (1968) - Frame Analysis Including Change of Geometry, Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 94, pp.672-643.
- JETTEUR, PH.; CESCOTTO, S.; DE GOYET, V. E FREY, F. (1983) - Improved nonlinear finite elements for oriented bodies using an extension of Maguerre's theory; Computer & Structures, vol.17, pp. 129-137.
- LUI, E. M. (1988) - A practical P-Delta analysis method for type FR and PR frames; Engineering Journal, AISC, vol.25, pp. 85-98.
- LUI, E.M. E ZHANG, C.(1990) - Nonlinear frame analysis by the pseudo-load method; Computer & Structures, vol. 37, n^o 5, pp. 707-716.
- MARTINS, P. C. R. (1979) - Análise não-linear de estruturas reticuladas espaciais de concreto armado; Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- MEDEIROS, S. R. P. (1985) - Análise estática não linear geométrica de estruturas pelo método de superposição modal com base Lanczos-Ritz; tese de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

- MEEK, J. L. E LOGANATHAN, S. (1989)- Geometrically non-linear behaviour of space frame structures; Computer & Structures, vol.31, n^o 1, pp. 35-45.
- NAGY, D. A. E KÖNIG, M. (1979)- Geometrically nonlinear finite element behaviour using buckling mode superposition; Comp. Meth. in Appl. Mech., vol.19, pp. 447-484.
- NAIT-RABAH, O. (1990)- Simulation numerique du comportement non-lineaire des ossatures spatiales; tese de doutorado, Ecole Centrale Paris.
- NAPOLEÃO FO, J. , ELWI, A. E. AND MURRAY, D. W. (1991)- Eigenmode Dominance and Its Applications to Structures With Non-Linear Materials; Computers and Structures, Vol. 41, pp 281-292.
- OCHOA LOPEZ, R. A. (1991) - Análise limite de estruturas enrijecidas sob tensões iniciais; tese de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- ORAN, C. (1973-a) - Tangent Stifness in Plane Frames; Journal of Structural Division, ASCE, vol.99, pp. 973-985.
- ORAN, C. (1973-b) - Tangent Stifness in Space Frames; Journal of Structural Division, ASCE, vol.99, pp. 987-1001.
- PAIVA, A. C. (1993) - Análise de Vigas de Concreto Armado Suscetíveis à Ruptura por Cisalhamento; Tese de Mestrado, PUC/RS.
- RIKS, E. (1979) - An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems; International Journal of Solids Structures, vol. 15, pp. 524-551.
- RODRIGUES, F. C. (1985) - Comportamento Teórico-Experimental de Pórticos Planos de Concreto Armado com Pilares Esbeltos, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro

WEN, R. K. E RAHIMZADEH, J. (1983)- Nonlinear elastic frame analysis by finite elements; Journal of the Structural Engineering, ASCE, vol. 109, pp. 1952-1971.

WONG, M. B. E TIN-LOI, F. (1990)- Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures; Computer & Structures, vol.34, no.4, pp. 633-640.

ZIENKIEWICS, O. C. (1982) - The finite element method; McGraw-Hill.

ANEXO A

Neste anexo serão apresentadas equações complementares ao método de cálculo mostrado no capítulo III.

- Matrizes $[K_{1p}]$, $[K_{12p}]$ e $[K_{2p}]$:

$$[K_{1p}] = \sum_{i=1}^{N_{p1}} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \cos^3 \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & z_{pi} & Y_{pi} \\ z_{pi} & z_{pi}^2 & Y_{pi} \cdot z_{pi} \\ Y_{pi} & Y_{pi} \cdot z_{pi} & Y_{pi}^2 \end{bmatrix} \quad [A.1]$$

$$[K_{12p}] = \sum_{i=1}^{N_{p1}} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{bmatrix} 1 \\ z_{pi} \\ Y_{pi} \end{bmatrix} \cdot [R_{pi}] \quad [A.2]$$

$$[K_{2p}] = \sum_{i=1}^{N_{p1}} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i \cdot [R_{pi}] [R_{pi}]^t \quad [A.3]$$

- Matriz $[T_0]$:

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A.4]$$

- Matriz $[r_{\alpha\beta}]$ devida aos deslocamentos de translação dos nós I e J:

$$[r_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ -\cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \cdot \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad [A.5]$$

onde α representa a rotação (negativa) em torno do eixo y_0 , dada por:

$$\alpha = \arcsen(w/L_x) \quad [A.6]$$

com,

$$L_x = [(L_0+u)^2 + w^2]^{1/2} \quad [A.7]$$

e β a rotação em torno de z_1 :

$$\beta = \text{Arcsen}(v/L) \quad [A.8]$$

com o comprimento L do elemento, após deformado, dado por:

$$L = [(L_0+u)^2 + v^2 + w^2]^{1/2} \quad [A.9]$$

- Matriz de transformação $[r_\gamma]$, que leva em conta a rotação em torno do eixo x e tem como colunas os cossenos diretores dos eixos xyz no referencial xy_1z_1 (conforme está mostrado na figura III.15)

$$[r_\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \text{sen}\gamma \\ 0 & -\text{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad [A.10]$$

Em virtude da hipótese das pequenas rotações em presença da unidade, e conforme as relações A.5 a A.10, a matriz $[r]$ é dada por:

$$[r] = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ -\beta & 1 & \gamma \\ -\alpha & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \quad [A.11]$$

- Matriz que liga os esforços nodais no referencial móvel aos esforços nodais independentes:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A.12]$$

- Matriz que liga os esforços nodais no elemento e as solicitações na seção, no referencial móvel :

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x/L) & 0 & 0 & -x/L & 0 \\ 0 & 0 & -(1-x/L) & 0 & 0 & x/L \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & y_c/L & z_c/L & -1 & y_c/L & z_c/L \end{bmatrix} \quad [A.13]$$

- Matriz [B] de transformação geométrica, onde a notação $A_{,k}$ indica a derivada parcial de A em relação a k :

$$[B] = \begin{bmatrix} e_{,u} & e_{,v} & e_{,w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{,u} & 0 & \alpha_{,w} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{,u} & -\beta_{,v} & -\beta_{,w} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{,u} & 0 & \alpha_{,w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_{,u} & -\beta_{,v} & -\beta_{,w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A.14]$$

Na hipótese de pequenas rotações e pequenos deslocamentos, é suficiente tomar os termos de primeira ordem no desenvolvimento de séries das derivadas parciais das funções α e β . Neste caso a matriz [B] se escreve:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & v/L_0 & w/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A.15]$$

- Matrizes $[r_{\alpha_0}]$, $[r_{\beta_0}]$ e $[r_{\gamma_0}]$:

$$[r_{\alpha_0}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & 0 & \text{sen}\alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\alpha_0 & 0 & \cos\alpha_0 \end{bmatrix} \quad [A.16]$$

$$[r_{\beta_0}] = \begin{bmatrix} \cos\beta_0 & \text{sen}\beta_0 & 0 \\ -\text{sen}\beta_0 & \cos\beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A.17]$$

$$[r_{\gamma_0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_0 & \text{sen}\gamma_0 \\ 0 & -\text{sen}\gamma_0 & \cos\gamma_0 \end{bmatrix} \quad [A.18]$$

Os ângulos α_0 e β_0 são função das coordenadas nodais no referencial absoluto, ligado à estrutura. O ângulo γ_0 é o ângulo que os eixos principais y_0 e z_0 fazem com os eixos Y e Z.

A matriz de rotação $[R_0]$, função de $[r_0]$, é dada por :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} [r_0] & & & [0] \\ & [r_0] & & \\ & & [r_0] & \\ [0] & & & [r_0] \end{bmatrix} \quad [A.19]$$