


PUNÇÃO ASSIMÉTRICA EM LAJES

ROBERTO CALDAS DE ANDRADE PINTO

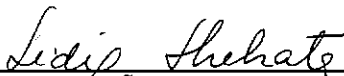
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:



---

Prof<sup>o</sup> IBRAHIM ABD-EL MALIK SHEHATA, PhD  
( P R E S I D E N T E )




---

Prof<sup>a</sup> LÍDIA DA CONCEIÇÃO DOMINGUES SHEHATA, PhD



---

Prof<sup>o</sup> YOSIAKI NAGATO, D.SC.



---

PROF<sup>o</sup> LIBANIO MIRANDA PINHEIRO, PhD

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL - 1993

PINTO, ROBERTO CALDAS DE ANDRADE

Punção Assimétrica em Lajes [Rio de Janeiro] 1993.

xiv, 145 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1993)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Punção

2. Lajes

3. Concreto Armado.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

Para

Cláudia, minha esposa

Gustavo, meu filho

## AGRADECIMENTOS

Ao professores:

Ibrahim A. M. Shehata

Lídia C. D. Shehata

Ao CNPq

À Cláudia

RESUMO DA TESE APRESENTADA A COPPE/UF RJ COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.SC.).

PUNÇÃO ASSIMÉTRICA EM LAJES

ROBERTO CALDAS DE ANDRADE PINTO

ABRIL 1993

Orientador: Ibrahim A. Malik Shehata

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta um estudo da resistência da ligação laje-pilar sem armadura de cisalhamento à punção, para o caso onde há transferência de momento fletor para o pilar.

Desenvolveram-se modelos de bielas e tirantes representativos dos casos de lajes com pilares internos e nas bordas. São feitas comparações de seus resultados com os de fórmulas recomendadas em normas de cálculo e com os de ensaios.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL  
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER  
OF SCIENCE (M.Sc.)

NON-SYMMETRIC PUNCHING IN SLABS

ROBERTO CALDAS DE ANDRADE PINTO

APRIL 1993

Thesis Supervisor: Ibrahim A. Malik Shehata

Department: Civil Engineering

This work investigates the punching resistance of slab-column connections with moment transfer in flat slabs structures without shear reinforcement. Both internal and edge columns cases are studied.

A rational model based on a strut-and-tie model is presented for the cases of internal and edge column-slab connections. Comparisons of the results given by this model with test results and results of formulae of codes of practice are made.

## ÍNDICE

	pág.
CAPITULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPITULO II - PUNÇÃO SIMÉTRICA .....	5
II.1 Análise Teórico - Experimental .....	5
II.1.1 Modelo Teórico .....	10
II.2 Análise a Partir da Teoria da Plasticidade ...	16
II.2.1 Solução Limite Inferior .....	16
II.2.2 Solução Limite Superior .....	22
II.3 Comparação de Resultados dos Modelos .....	29
II.4 Recomendações de Normas .....	31
II.4.1 CEB-FIP/90 .....	32
II.4.2 ACI 318-89 .....	32
II.4.3 BS 8110 .....	33
II.4.4 NBR 6118 .....	33
II.5 Comparação entre Recomendações de Normas .....	35
CAPITULO III - PUNÇÃO ASSIMÉTRICA - PILARES INTERNOS ..	38
III.1 Introdução .....	38
III.2 Revisão das Formulações Desenvolvidas .....	42
III.2.1 Consideração de Distribuição Linear das Tensões de Cisalhamento .....	42
III.2.2 Distribuições das Tensões Segundo Análise Elástica .....	46

III.2.3	Consideração de Distribuição Uniforme Anti-simétrica das Tensões de Cisalhamento .....	51
III.3	Recomendações de Normas .....	53
III.3.1	CEB-FIP/90 .....	53
III.3.2	ACI 318-89 .....	54
III.3.3	BS 8110 .....	55
III.4	Comentários Sobre as Recomendações de Normas .....	57
III.5	Modelo de Bielas e Tirantes Proposto .....	59
III.5.1	Parcela de Flexão (Mf) .....	62
III.5.2	Parcela Devida ao Cisalhamento Vertical (Mcv) .....	64
III.5.3	Parcela de Torção (Mt) .....	65
III.5.4	Casos Particulares .....	72
III.5.5	Formulação Geral .....	76
III.6	Estudos Experimentais .....	80
III.6.1	Ensaios de Stamenkovic & Chapman ....	80
III.6.2	Ensaios de Shehata .....	81
III.6.3	Ensaios de Islam & Park .....	82
III.6.4	Ensaios de Hanson & Hanson .....	82
III.6.5	Ensaios de Moe .....	83
III.6.6	Ensaios de Ghali, Elmasri & Dilger ..	84
III.6.7	Ensaios de Hawkings, Bao & Yamasaki .	85
III.7	Comparação dos Resultados do Método de Cálculo Proposto com Resultados Experimentais .....	86

<b>CAPITULO IV - PUNÇÃO ASSIMÉTRICA - PILARES DE BORDA ...</b>	<b>98</b>
IV.1 Introdução .....	98
IV.2 Revisão das Formulações Desenvolvidas .....	98
IV.2.1 Método ACI - Distribuição Linear das Tensões de Cisalhamento .....	98
IV.2.2 Método CEB-FIP - Distribuição Uniforme das Tensões de Cisalhamento .....	105
IV.2.3 Método de Regan .....	106
IV.2.4 Método de Moehle .....	112
IV.3 Recomendações de Normas .....	114
IV.3.1 CEB-FIP/90 .....	114
IV.3.2 ACI 318-89 .....	114
IV.3.3 BS 8110 .....	115
IV.4 Modelo de Bielas e Tirantes Proposto .....	117
IV.4.1 Parcela M1 .....	117
IV.4.2 Parcela Mf .....	120
IV.4.3 Parcela Mcv .....	122
IV.4.4 Momento Atuante .....	123
IV.5 Estudos Experimentais .....	127
IV.6 Comparação dos Resultados de Ensaios com os do Modelo Proposto .....	130
<b>CAPITULO V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>136</b>
V.1 Introdução .....	136
V.2 Modelo Proposto para Pilares Internos .....	136
V.3 Modelo Proposto para Pilares de Borda .....	138
V.4 Recomendações para Trabalhos Futuros .....	141

Referências Bibliográficas ..... 142

## NOTAÇÕES

- $A_c$  - área do apoio do segmento  
 $A_s$  - área de uma barra de aço  
 $A_{Sflex}$  - área de aço responsável pelo momento  $M_1$   
 $b$  - biela  
 $C$  - coeficiente  
 $c$  - lado do pilar paralelo ao eixo do momento transferido  
 $c_2$  - distância do centro da coluna ao ponto mais distante do perímetro de controle  
 $c_3$  - distância do centróide da seção interna do perímetro de controle para pilares no bordo à face livre do pilar  
 $c_4$  - distância do centróide da seção interna do perímetro de controle para pilares no bordo à face interna do perímetro  
 $c_t$  - lado do pilar perpendicular ao eixo do momento transferido  
 $D$  - forças de pino  
 $d$  - altura efetiva da laje  
 $d'$  - cobrimento da armadura  
 $E$  - energia interna  
 $E_c$  - módulo de elasticidade do concreto  
 $E_s$  - módulo de elasticidade do aço  
 $F_b$  - força axial atuante na biela  
 $F_c^*$  - força total no concreto na direção radial  
 $F_{cr}$  - força no concreto na direção radial  
 $F_{ct}$  - força no concreto na direção tangencial

- $F_h$  - componente horizontal da força atuante na biela  
 $F_n$  - componente normal ao pilar da força atuante na biela  
 $F_s^*$  - força total na armadura na direção radial  
 $F_{sr}$  - força na armadura na direção radial  
 $F_{st}$  - força na armadura na direção tangencial  
 $F_v$  - componente vertical da força atuante na biela  
 $f_c$  - resistência à compressão do concreto  
 $f_t$  - resistência à tração do concreto  
 $f_y$  - tensão de escoamento do aço  
 $g$  - excentricidade do carregamento  
 $h$  - espessura da laje  
 $J$  - propriedade de uma seção interna ao perímetro de controle  
 $KM$  - parcela de momento devida à tensão não uniforme de cisalhamento  
 $k, k'$  - coeficientes  
 $M$  - momento atuante na seção  
 $M_o$  - momento resistente de uma seção com ausência de carga vertical transferida  
 $M_1$  - parcela de momento do modelo de pilares de bordo  
 $M_{cv}$  - parcela de momento devida ao cisalhamento vertical  
 $M_e$  - momento transferido ao pilar em ensaios experimentais  
 $M_f$  - parcela de momento devida à flexão  
 $M_{mod}$  - momento transferido calculado a partir do modelo proposto  
 $M_t$  - parcela de momento devida à torção  
 $N$  - força de tração atuante nas armaduras  
 $n$  - relação entre o módulo de elasticidade do concreto e do aço

- $P$  - carga vertical atuante  
 $P_o$  - carga última para punção simétrica  
 $P_e$  - carga vertical transferida em ensaios experimentais  
 $r_o$  - raio do pilar  
 $r_f$  - raio do cone de punção  
 $r_p$  - raio do perímetro de carregamento  
 $r_s$  - raio dentro do qual ocorre escoamento da armadura  
 $S_{eff}$  - espaçamento da armadura  
 $T_e$  - trabalho externo  
 $u, u^*$  - comprimento do perímetro de controle  
 $V$  - resultante das tensões de cisalhamento  
 $W$  - propriedade de uma seção interna ao perímetro de controle  
 $x$  - altura da linha neutra  
 $x_1$  - comprimento do perímetro de controle paralelo ao bordo da laje  
 $x_{flex}$  - altura da linha neutra para seções submetidas a flexão simples  
 $z$  - braço de alavanca  
 $\alpha$  - ângulo  
 $\alpha_e - \epsilon_{c1} / \epsilon_{cu}$   
 $\beta$  - ângulo  
 $\beta_c$  - relação entre os lados de um pilar  
 $\delta$  - deslocamento  
 $\epsilon_{c1}$  - deformação no concreto equivalente a 0,0020  
 $\epsilon_{cu}$  - deformação última do concreto (0,0035)  
 $\epsilon_{sy}$  - deformação no aço no escoamento  
 $\phi$  - ângulo de atrito interno do concreto  
 $\psi_f$  - rotação na ruptura

$\nu$  - coeficiente de Poisson do concreto

$\nu_c$  - coeficiente

$\nu_e$  - coeficiente de efetividade

$\rho, \rho_t, \rho^*, \rho'$  - taxa de armadura de uma seção

$\sigma$  - tensão

$\sigma_c$  - tensão no concreto

$\sigma_{cmf}$  - tensão atuante na faceta comprimida

$\tau$  - tensão nominal de cisalhamento

$\tau_c$  - tensão limite de cisalhamento

$\xi$  - fator de forma da laje

$\Delta\phi$  - ângulo de segmento radial

## CAPITULO I

## INTRODUÇÃO

Um sistema estrutural convencional para uma edificação é composto de lajes, vigas e pilares. Como alternativa para este sistema, incluem-se as lajes-cogumelo, que são lajes diretamente apoiadas nos pilares, e não em vigas como no sistema convencional.

Um dos problemas (o mais crítico) das lajes cogumelo é a ligação laje-pilar onde se concentram as tensões cisalhantes, as quais podem causar ruptura por punção se a ligação não for dimensionada adequadamente para combater estas tensões.

Em geral, a ausência das vigas apresenta as seguintes vantagens:

- economia de fôrmas,
- diminuição de pé direito,
- aumento do número de andares quando a cota do topo do prédio é pré-fixada e

- flexibilidade maior no arranjo arquitetônico, principalmente em prédios comerciais.

Por outro lado, suas desvantagens são:

- maior deformabilidade da laje,
- sensível diminuição da rigidez a carregamentos laterais e
- possibilidade de ruptura por punção.

Estes problemas, entretanto, são contornáveis. A deformabilidade da laje, por exemplo, pode ser diminuída utilizando-se a protensão, e, para aumentar a rigidez lateral da estrutura, paredes de cisalhamento são normalmente empregadas em combinação com os poços de elevadores. Com relação à punção, o problema já está quase esclarecido, existindo ainda algumas dúvidas, particularmente com relação ao caso de punção assimétrica (casos de colunas de bordo e cantos como também colunas internas com momento transferido na ligação laje-pilar).

Com este quadro de vantagens e desvantagens, a adoção de lajes cogumelo torna-se vantajosa do ponto de vista estético, estrutural e construtivo.

O desaparecimento das vigas neste sistema estrutural,

não só cria uma nova modalidade de ruptura (por punção), mas também gera uma forte interação de flexão com cisalhamento ao longo do pilar (região crítica). Portanto, para a determinação da resistência da ligação e a identificação de qual dos dois fatores é o dominante para a ruptura da ligação, os dois problemas não podem ser tratados em separado. Quando a resistência à punção da laje é menor que sua resistência à flexão, o efeito de punção é primordial no cálculo da laje; entretanto, quando o inverso ocorre, a punção é um efeito secundário.

Em pilares internos de laje onde não há transferência de momento da laje para o pilar, o caso de punção simétrica ocorre. No capítulo II são apresentados resumidamente alguns modelos para o cálculo da resistência à punção simétrica quando não há armadura de cisalhamento, comparando os seus resultados com os de métodos de cálculo de várias normas, inclusive da brasileira.

Quando há transferência de momento da laje para o pilar, ou seja, em pilares de canto e de borda e em pilares internos quando não há simetria de carregamento ou há presença de carregamento lateral, ou quando os vãos entre eixos de pilares não são iguais, a resistência à punção da laje é diminuída em comparação à da laje simétrica. Vários pesquisadores estudaram este efeito e modelaram-no. Nos capítulos III e IV apresentam-se modelos já desenvolvidos para a representação da transferência de momento em pilares internos e pilares de borda,

respectivamente, assim como um novo modelo de bielas para estes casos. Posteriormente, faz-se uma comparação dos resultados obtidos através destes modelos com os resultados provenientes da utilização de procedimentos de cálculo de normas e com valores obtidos experimentalmente.

No último capítulo são apresentadas conclusões gerais deste trabalho e proposições para futuras pesquisas.

## CAPITULO II

## PUNÇÃO SIMÉTRICA

## II.1 ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL

Nos principais trabalhos experimentais para a verificação da resistência à punção de uma ligação laje-pilar, foram utilizados modelos que representam as regiões sujeitas a um momento negativo em torno de um pilar ou a um momento positivo em torno de um carregamento. Os limites físicos destes modelos representam a linha de contraflecha de lajes contínuas.

Dependendo da configuração das cargas e dos apoios, fissuras de flexão podem ter diversas formas antes da ruptura; entretanto, a sequência em que aparecem é a mesma em todos os casos. Quando do início do carregamento, fissuras circunferenciais aparecem em torno do pilar ou da área carregada. Com o acréscimo de carregamento, fissuras radiais se desenvolvem a partir das circunferenciais, indo até o bordo da laje, ou indo até as linhas de inflexão em painéis contínuos. A quantidade e disposição da armadura e sua eventual protensão influenciam muito a fissuração, conforme demonstram experimentos de SHEHATA [1] (figura

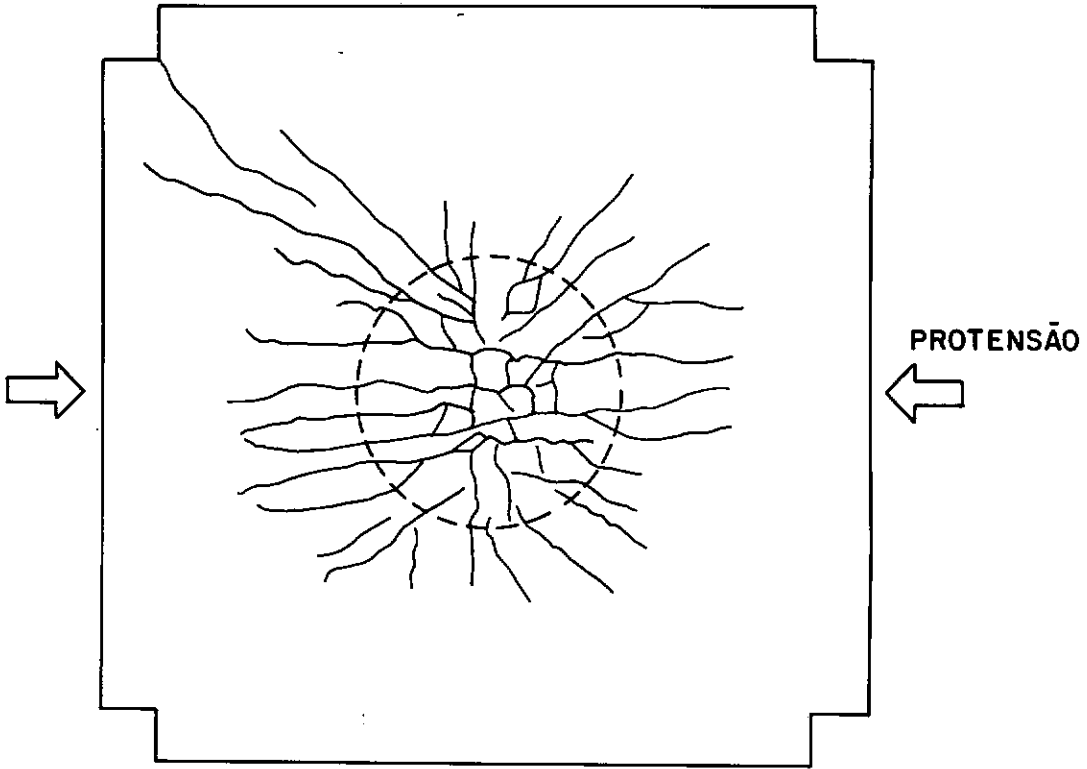
2.1).

Uma fissuração interna diagonal ocorre a seguir, porém neste momento a laje permanece estável, podendo ser descarregada e recarregada sem afetar a sua carga última à punção, ou seja, a ruptura não acontece imediatamente após o aparecimento da fissuração diagonal. Experimentos [1] comprovam a fissuração diagonal e indicam sua ocorrência para uma carga igual a aproximadamente 50% a 70% da carga de ruptura da laje por punção.

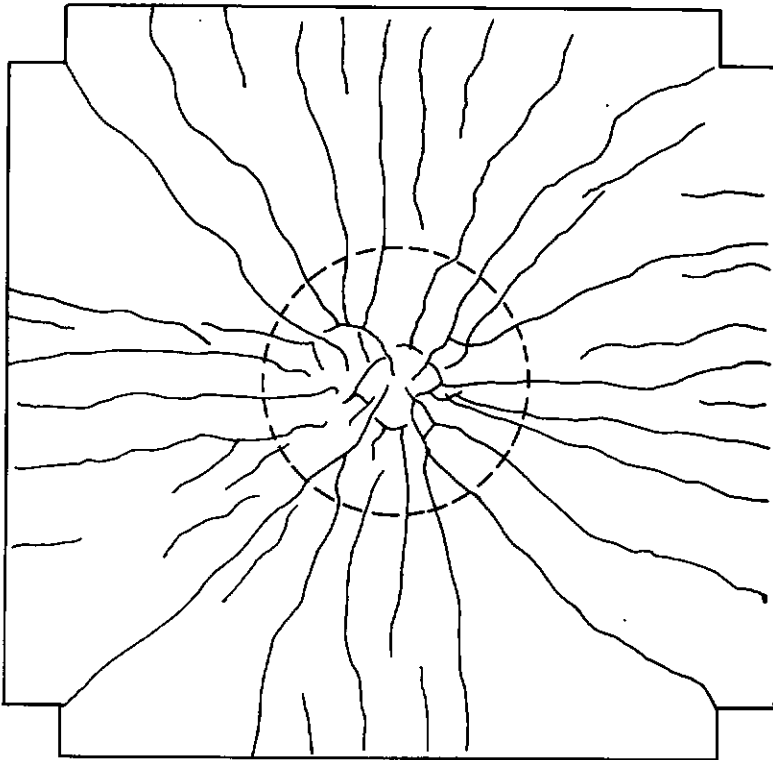
A deflexão da superfície comprimida é praticamente linear, o que significa que há rotação de corpo rígido de segmentos de laje em relação à face do pilar.

As deformações do concreto na face comprimida atingem seus valores mais altos junto ao pilar ou ao carregamento. As deformações radiais atingem valores máximos bem superiores às deformações tangenciais. Entretanto, as deformações radiais decaem sensivelmente com a distância à face do pilar, enquanto as deformações tangenciais decaem gradualmente. Assim, estas deformações atingem valores superiores dos das radiais a partir de uma certa distância da face do pilar, conforme demonstrado na figura 2.2.

A ruptura por punção se dá após a formação de uma fissuração inclinada partindo do lado carregado e atravessando a espessura da laje segundo um ângulo de  $20^\circ$  a  $30^\circ$  em relação à horizontal. A deformação da laje é bem



a) LAJE SP-2



b) LAJE SP-3

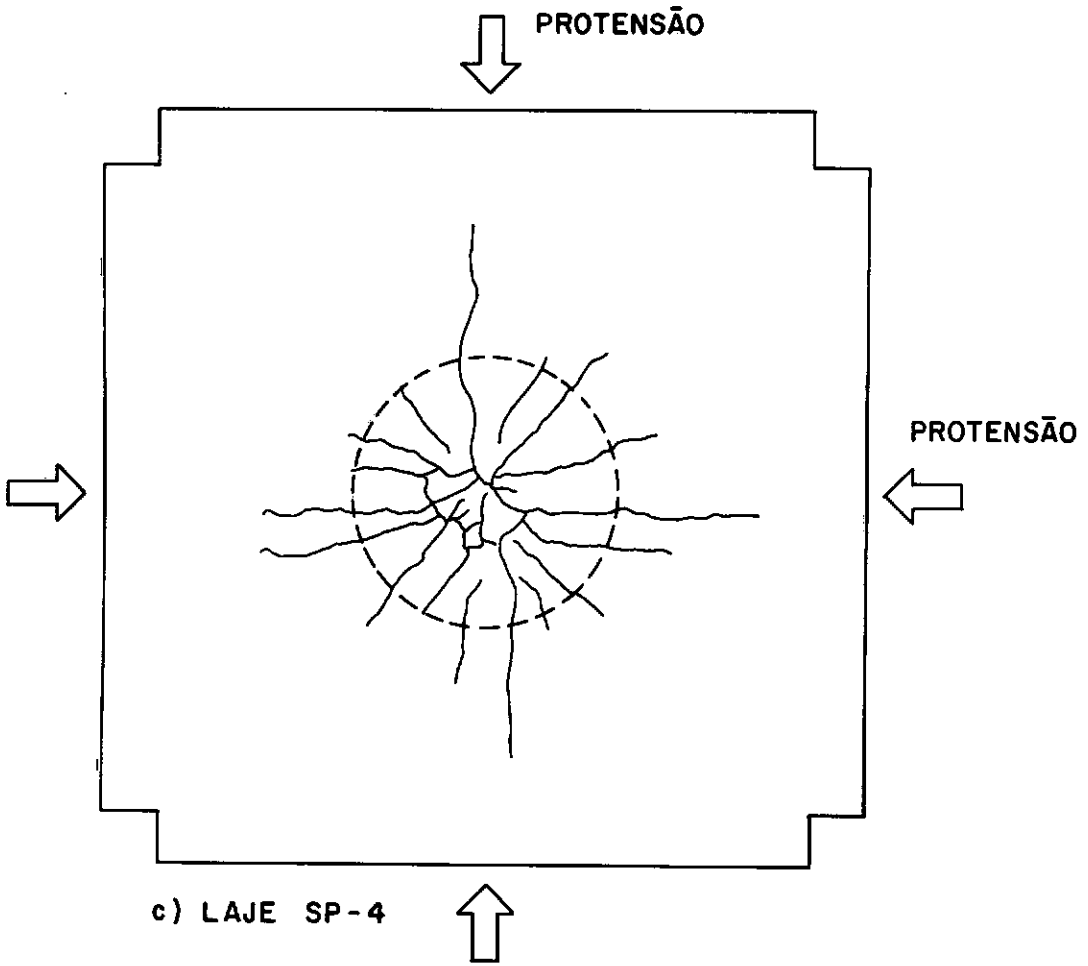


FIG. 2.1 (Cont.) - FISSURAÇÃO DE LAJES ENSAIADAS POR SHEHATA [1]

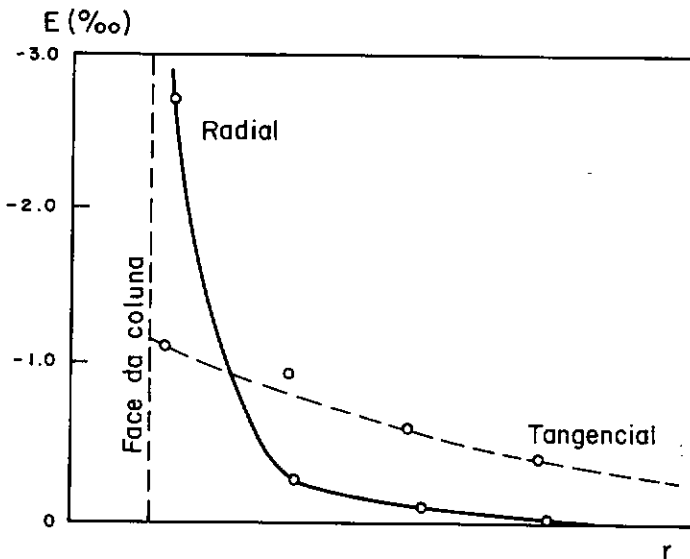


FIG. 2.2 - DEFORMAÇÕES NO CONCRETO NAS DIREÇÕES RADIAL E TANGENCIAL [1]

concentrada perto do pilar, ou da área carregada. A ruptura por punção é geralmente caracterizada pela ausência de escoamento generalizado da armadura, sendo basicamente ocasionada pela destruição local do concreto da zona comprimida em torno do pilar ou da área carregada. A ruptura, portanto, é súbita e violenta, havendo rápida perda da capacidade resistente, o que não acontece numa ruptura por flexão.

As análises de REGAN e BRAESTRUP [2] demonstraram que a resistência à punção é influenciada por vários parâmetros: resistência à compressão do concreto, taxa de armadura longitudinal, altura efetiva da laje e distância entre o pilar (ou área carregada) e a linha de inflexão. A variação da resistência à punção com os três primeiros parâmetros é dada por  $(f_c)^{1/2}$  ou  $(f_c)^{1/3}$ ,  $(\rho)^{1/3}$  ou  $(\rho)^{1/2}$  e  $(1/d)^{1/3}$ , respectivamente. Para distâncias entre o pilar e a linha de contraflecha menores que  $1,5d$ , há um aumento sensível da resistência à punção.

Como a ruptura por punção se dá principalmente com o esmagamento do concreto, é necessário o desenvolvimento de uma função que caracterize a resistência do concreto submetido a um estado triaxial de tensões ( $f_c'$ ). SHEHATA [1] apresenta o desenvolvimento de uma função e a simplifica [3] para a seguinte equação:

$$f_c' = \nu_c f_c$$

onde:

$$\nu_c = 1,4 \left( \frac{2d}{r_o} \right)^{1/2} \geq 1,25$$

o símbolo  $r_o$  representa o raio do pilar e o limite de 1,25 é relativo à resistência biaxial do concreto. O estado biaxial de tensões é o que corresponde a lajes finas apoiadas em pilares largos, quando ocorre uma certa restrição da deformação da laje na direção tangencial.

Os modelos já desenvolvidos para o caso de punção simétrica, em geral, tratam do caso de pilares ou áreas carregadas circulares. Foi observado [1] que, no caso da ocorrência de outro tipo de geometria, a consideração de um círculo de igual perímetro ao do pilar conduz a bons resultados.

### II.1.1 MODELO TEÓRICO

SHEHATA [1] apresentou um modelo racional para a determinação da carga de ruptura por punção. Este modelo consiste de segmentos radiais de laje definidos por fissuras inclinadas e fissuras radiais, e elementos de cunha definidos por fissuras inclinadas e fissuras circunferenciais. Estes segmentos radiais de laje giram em torno de um centro de rotação CR localizado na face do pilar, ao nível da linha neutra, conforme mostra a figura 2.3. A maioria dos símbolos abaixo empregados é também indicada nesta figura.

O raio onde ocorre o escoamento da armadura ( $r_s$ ) é dado pela seguinte expressão:

$$r_s = \psi_f \frac{d}{\epsilon_{sy}} \left( 1 - \frac{x}{d} \right)$$

A força D, correspondente ao efeito de pino, se anula quando  $r_f \leq r_s$ , ou, quando  $r_f \geq r_s$  assume a expressão

$$D = 0,364 \rho f_y d r_s \ln \left( \frac{r_f}{r_s} \right) \Delta\phi$$

A equação de equilíbrio das forças verticais nos dá:

$$F_C \operatorname{sen}\alpha \sqrt[3]{\frac{500}{d}} = \frac{P \Delta\phi}{2\pi} - D \quad (\text{II.1})$$

onde:

$F_C = v_c f_c A_C$ , sendo  $A_C$  a área frontal do segmento, e

$\sqrt[3]{\frac{500}{d}}$  é o fator que representa o efeito de tamanho da laje. O valor de  $A_C$  é dado pela seguinte equação:

$$A_C = \frac{0,94 x}{\operatorname{sen}(110-\alpha)} \left( r_o - \frac{0,94 x \operatorname{sen}\alpha}{2 \operatorname{sen}(110-\alpha)} \right) \Delta\phi$$

O equilíbrio de momentos com relação ao ponto O nos dá:

$$P_O \frac{\Delta\phi}{2\pi} (r_p - r_o) = F_s^* z + D (r_f - r_o) , \quad (\text{II.2})$$

onde:

$$F_s^* = F_{sr} + F_{st} \Delta\phi ,$$

Quando  $r_s \leq r_f$

$$F_{st} = \rho f_y r_s d \ln\left(\frac{r_p}{r_f}\right)$$

$$F_{sr} = \rho f_y r_s d \Delta\phi$$

e quando  $r_s \geq r_f$

$$F_{st} = \rho f_y d \left[ r_s - r_f + r_s \ln\left(\frac{r_p}{r_f}\right) \right]$$

$$F_{sr} = \rho f_y r_f d \Delta\phi$$

Finalmente, o equilíbrio horizontal das forças nos dá:

$$F_s^* = F_c^* \quad (\text{II.3})$$

$$F_c^* = F_{cr} + F_{ct} \Delta\phi$$

$$F_{cr} = v_c f_c \cos\alpha A_c$$

O valor de  $F_{ct}$  depende da relação entre  $r_o$  e  $r_{\epsilon_{cu}}$  ou  $r_o$  e  $r_{\epsilon_{c1}}$ , sendo:

$$r_{\epsilon_{cu}} = \frac{\psi_f x}{\epsilon_{cu}} \quad r_{\epsilon_{c1}} = \frac{\psi_f x}{\epsilon_{c1}}$$

Para  $r_o \leq r_{\epsilon_{cu}}$

$$F_{ct} = f_c x^2 \left[ k_e \frac{\psi_f}{\epsilon_{c1}} - 0,723 \frac{r_o}{x} + 0,425 \frac{\psi_f}{\epsilon_{c1}} \ln\left(\frac{\epsilon_{c1} r_p}{\psi_f x}\right) \right],$$

para  $r_{\epsilon_{cu}} \leq r_o \leq r_{\epsilon_{c1}}$ ,

$$F_{ct} = f_c x^2 \left[ \left(0,425 - \frac{0,298}{\alpha_e - 1}\right) \left(\frac{\psi_f}{\epsilon_{c1}} - \frac{r_o}{x}\right) + \frac{0,298}{\alpha_e - 1} \frac{\psi_f}{\epsilon_{c1}} \ln\left(\frac{\psi_f x}{\epsilon_{c1} r_o}\right) + 0,425 \frac{\psi_f}{\epsilon_{c1}} \ln\left(\frac{\epsilon_{c1} r_p}{\psi_f x}\right) \right]$$

e para  $r_o \geq r_{\epsilon_{c1}}$

$$F_{ct} = 0,425 f_c x^2 \ln\left(\frac{r_p}{r_o}\right)$$

$$\text{sendo } k_e = 0,425 + 0,298 \frac{\ln(\alpha_e)}{(\alpha_e - 1)}$$

$$\alpha_e = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{c1}}$$

As equações II.1, II.2 e II.3 formam um sistema não linear com as incógnitas  $x$ ,  $\alpha$  e  $P_o$ , podendo ser resolvido iterativamente para uma dada rotação  $\psi_f$  do segmento, até atingir um dos três estados críticos:

- o ângulo de inclinação da força  $F_{cr}$  atinge  $20^\circ$ , passando a existir tensões principais de tração,

- a deformação radial obtida da rotação de corpo rígido em um comprimento médio igual a 150mm atinge o valor de 0,0035, correspondendo ao comprimento da rótula plástica, a partir de resultados experimentais em vigas.

- a deformação tangencial no comprimento igual a  $x$  atinge 0,0035.

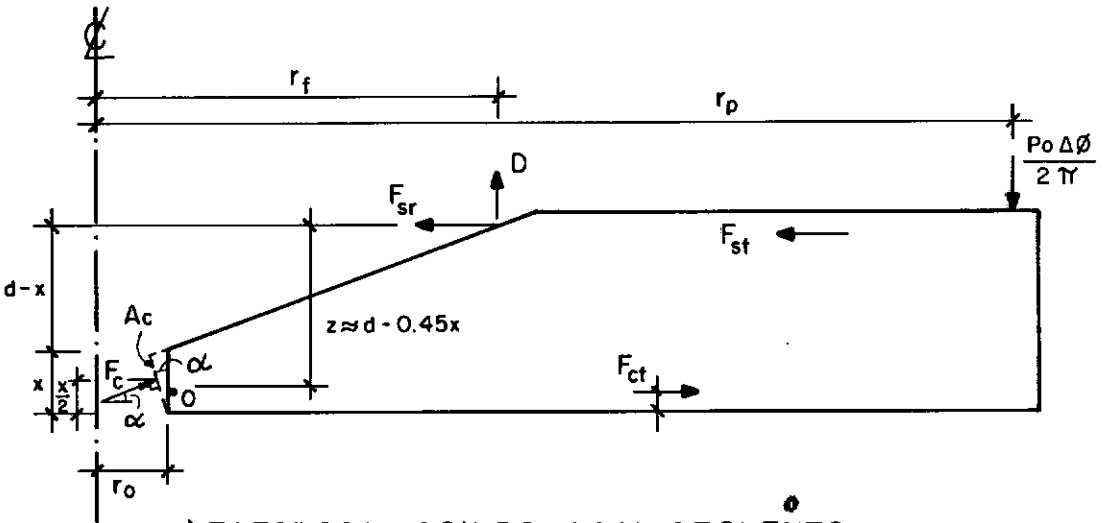
Para a resolução do sistema de equações pode-se adotar o seguinte procedimento:

- i) Assume-se uma rotação  $\psi_f$  do segmento radial.
- ii) Assume-se um ângulo  $\alpha = \alpha_1$  da inclinação da força compressiva na face do pilar.
- iii) Calcula-se a altura da linha neutra a partir da

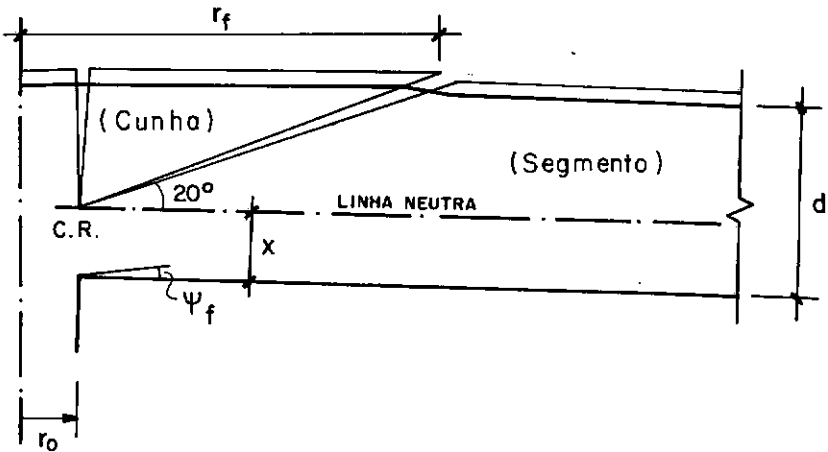
equação II.3.

- iv) Calcula-se  $P_o$  utilizando-se a equação II.2.
- v) Calcula-se  $\alpha_2$  utilizando-se a equação II.1.
- vi) Se  $\alpha_2 \neq \alpha_1$ , repete-se a iteração.
- vii) Se  $\alpha_2 = \alpha_1$ , verifica-se a ocorrência de algum dos 3 estados críticos anteriormente descritos. Se nenhum deles ocorrer, deve-se voltar à etapa (i), adotando-se outro valor de  $\psi_f$ .

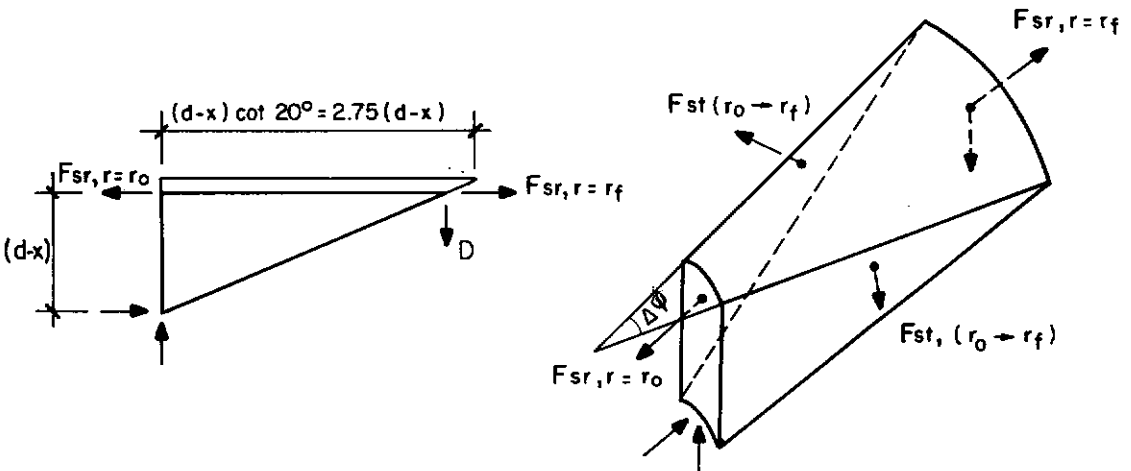
Embora o cálculo da carga de ruptura por punção por este método não seja imediato, com o uso de um computador a resolução matemática do sistema de equações não lineares se torna um problema de fácil solução.



a) ESFORÇOS AGINDO NUM SEGMENTO



b) FISSURAÇÃO INTERNA



c) ESFORÇOS AGINDO NO ELEMENTO DA CUNHA

FIG. 2.3 - MODELO DE SHEHATA [1] PARA ANÁLISE DE PUNÇÃO SIMÉTRICA

## II.2 ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DA PLASTICIDADE

### II.2.1 SOLUÇÃO LIMITE-INFERIOR

#### a) Modelo de SHEHATA [3]

A solução apresentada por SHEHATA [3], vem a ser uma simplificação de seu modelo geral já apresentado no item II.1. A figura 2.4 ilustra o modelo estático adotado.

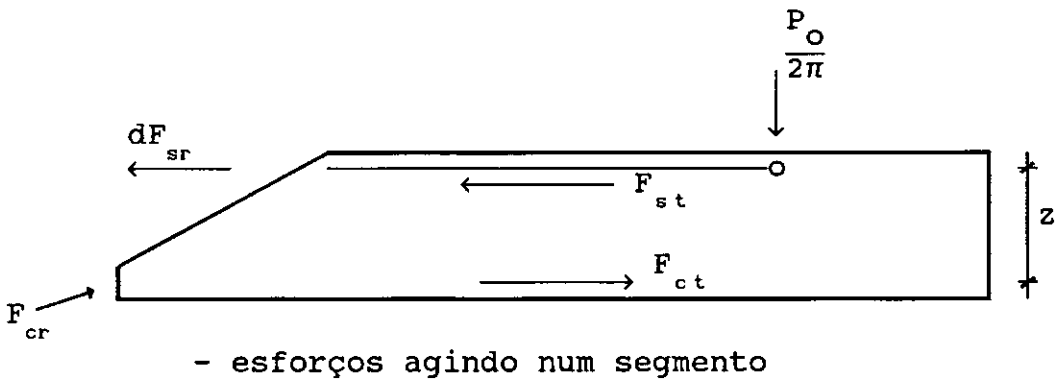


Fig. 2.4- Modelo de SHEHATA [3]

O modelo é composto de uma biela comprimida radial e tirante radial em cada segmento. A partir das equações de equilíbrio das forças horizontais e verticais, tem-se:

$$\frac{P_o \Delta\phi}{2\pi} = dF_{cr} \text{ sen } 10^\circ$$

$$dF_{sr} = dF_{cr} \text{ cos } 10^\circ$$

$$dF_{cr} = r_o \Delta\phi \frac{x}{\text{cos } 10^\circ} \nu_c f_c \quad (\text{II.4})$$

$$dF_{sr} = \rho_r r_f d \Delta\phi f_y$$

de onde chega-se a:

$$P_o = 2\pi r_o \times \nu_c f_c \tan 10^\circ \xi, \quad (\text{II.5})$$

onde  $\xi$  é um fator que leva em consideração o tamanho da laje:

$$\xi = \left( \frac{500}{d} \right)^{1/3}$$

A altura da linha neutra ( $x$ ) na fase elasto-plástica pode ser calculada por:

$$x = 0,8 d (n \rho_e)^{1/2} (35/f_c)^{1/2} \quad (\text{II.6})$$

sendo:

$\rho_e$  = taxa de armadura referente à tensão de escoamento de 500 MPa

$$\rho_e = \rho \left( \frac{f_y}{500} \right)$$

$n$  = relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto.

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

e  $f_y$  e  $f_c$  na unidade MPa.

Considerando que  $n \approx 10$ , tem-se:

$$x = 0,67 d \left( \frac{\rho f_y}{f_c} \right)^{1/2} \quad (\text{II.7})$$

Na tabela II.2 são apresentados resultados obtidos a partir desta modelagem comparados com resultados experimentais.

Para que se possa garantir o escoamento da armadura, limita-se o valor de  $\rho$  a um máximo de 2%.

b) Modelo de ALEXANDER E SIMMONDS [4]

O modelo proposto por ALEXANDER e SIMMONDS [4] consiste em uma treliça espacial composta de bielas de concreto e tirantes de aço conforme figura 2.5.

O cisalhamento é resistido pela componente vertical da biela inclinada de compressão do concreto, mecanismo já verificado experimentalmente. Estas bielas são chamadas de "bielas de cisalhamento". São necessários 3 dados importantes para a definição deste mecanismo:

- o ângulo  $\alpha_1$  de inclinação da biela,
- a força de tração no tirante de aço e
- a força de compressão na biela de concreto.

Considera-se também que qualquer barra de aço que esteja posicionada até a uma distância igual à altura efetiva da laje deva ser incluída no modelo. As barras que não estiverem posicionadas de forma a cruzar o pilar, devem ter suas áreas multiplicadas por um fator redutor variando linearmente com a distância ao pilar e anulando-se a uma distância igual à altura efetiva da laje junto ao pilar.

Por este modelo pode-se definir uma ruptura por escoamento do tirante de aço ou por esmagamento da biela comprimida.

ALEXANDER e SIMMONDS assumiram que o modo de ruptura seria dado pelo escoamento da armação, ou seja, não ocorreria esmagamento da biela de concreto. Decidiram por esta forma de ruptura a partir de observações de resultados de ensaios existentes que mostram que o aço junto ao pilar escoava antes da ruptura, sugerindo que a resistência à compressão da biela não é atingida. Esta escolha arbitrária impede a consideração de ruptura por punção devida ao esmagamento do concreto.

Desta forma, apenas o ângulo  $\alpha_1$ , de inclinação da biela, seria necessário para a definição da resistência à punção.

A partir de considerações geométricas tem-se que a componente fora do plano da biela é igual à multiplicação da  $\tan\alpha$  pela componente no plano. Como esta é igual à força de escoamento da barra considerada, tem-se, para equação de equilíbrio das forças verticais:

$$P_o = \sum_{n=1}^m A_s f_y \tan\alpha, \quad (\text{II.8})$$

onde

$m$  = número de barras a considerar,

Para a avaliação do ângulo  $\alpha_1$ , ALEXANDER E SIMMONDS indicam a seguinte fórmula empírica:

$$\tan(\alpha_1) = 1.0 - e^{-2.25 k} ,$$

$$k = \frac{S_{eff} d' (f_c)^{1/2}}{A_s f_y (c_1/d)^{1/4}} , \quad \text{em unidades SI} \quad (\text{II.9})$$

sendo:

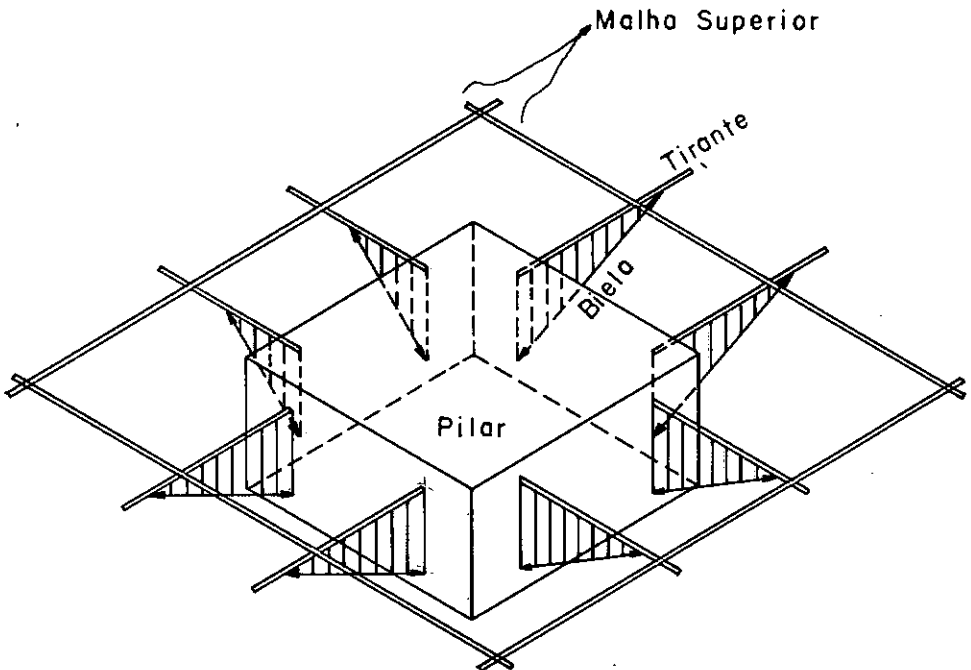
$d'$  = cobrimento da armadura,

$S_{eff}$  = espaçamento das barras.

$c_1$  = dimensão da face do pilar perpendicular à barra considerada.

Mesmo se fosse aplicado para este modelo um critério de resistência para a biela comprimida de concreto, os resultados finais não se modificariam substancialmente, pois na formulação empírica para a avaliação do ângulo  $\alpha_1$  foram levados em consideração diversos ensaios em que, na realidade, ocorreu ruptura por esmagamento do concreto na região comprimida e não por escoamento do aço. Portanto, embora os resultados obtidos por esta formulação atinjam valores próximos aos reais, conforme pode ser observado na tabela II.2, o modelo utilizado não representa o comportamento real da laje.

## MODELO DE ALEXANDER E SIMMONDS [4]



## MODELO DE BIELAS E TIRANTES EM TORNO DO PILAR

FIGURA 2.5

## II.2.2 SOLUÇÃO LIMITE-SUPERIOR

### a) Modelo de NIELSEN et al [5]

Para a obtenção de uma solução "upper bound", NIELSEN et al [5] utilizaram um mecanismo de ruptura que considera a separação de um sólido de revolução do resto da laje, conforme mostra a figura 2.6, associado ao critério de escoamento de Mohr-Coulomb modificado para o concreto.

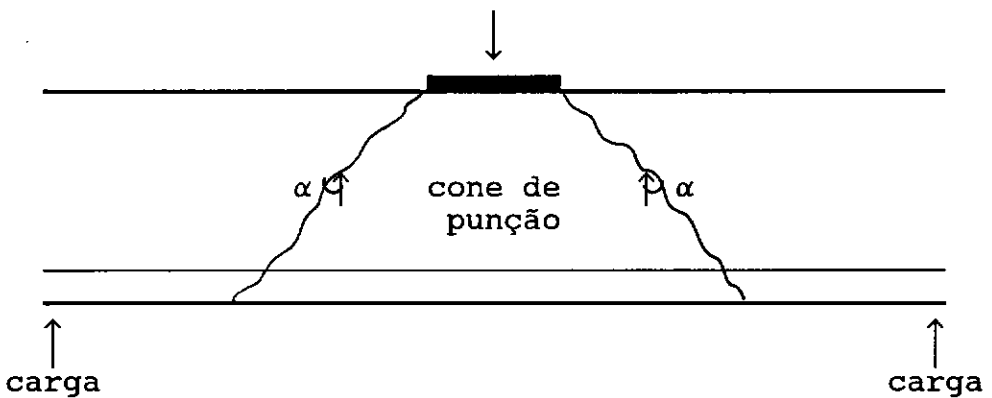


Fig. 2.6 - Modelo "upper-bound" de Nielsen et al [5]

O deslocamento relativo da superfície de ruptura é perpendicular à armação principal, o que implica em dissipação nula de energia devido à armação principal, ou seja, desprezando-se o efeito de pino, esta armadura não exerce influência na capacidade de carga à punção. A superfície ótima de ruptura é calculada através de cálculo variacional, chegando-se a uma catenária combinada com uma reta inclinada de um ângulo  $\phi$  (ângulo de atrito interno do concreto) com a vertical. A figura 2.7 representa graficamente a curva ótima.

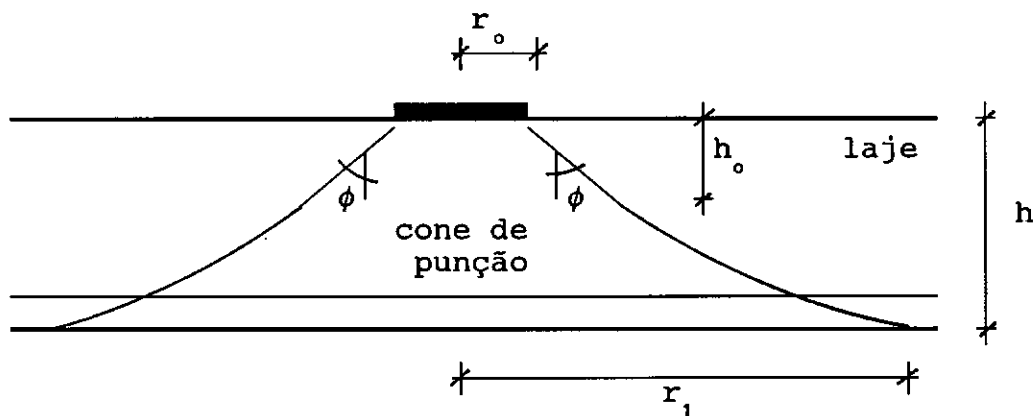


Fig. 2.7 - Curva ótima do modelo de Nielsen et al

A carga de ruptura por punção é dada pela seguinte expressão:

$$P = \frac{\pi}{2} v_e f_c \left[ h_0 (2r_0 + h_0 \tan\phi) \frac{1 - \operatorname{sen}\phi}{\operatorname{cos}\phi} + k_1 k_3 (h - h_0) + k_3 \left( r_1 \sqrt{r_1^2 - k_3^2} - k_4 k_5 \right) - k_2 \left( r_1^2 - k_4 \right) \right] \quad (\text{II.10})$$

onde:

$$k_1 = 1 - (k_6 - 1) \frac{f_t}{f_c}$$

$$k_2 = 1 - (k_6 + 1) \frac{f_t}{f_c}$$

$$k_6 = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi} = 4 \quad (\phi = 37^\circ)$$

$$k_4 = r_0 + h_0 \tan\phi$$

$$k_5 = k_3 \tan\phi$$

$$k_3 = \sqrt{k_4^2 - k_5^2}$$

$$r_1 = k_4 \operatorname{cosh}\left(\frac{h - h_0}{k_3}\right) + k_5 \operatorname{senh}\left(\frac{h - h_0}{k_3}\right)$$

O raio  $r_1$  da interseção da superfície de ruptura com a face oposta da laje é escolhido de forma a fornecer o menor valor de P.

O coeficiente de efetividade  $\nu_e$  é indicado como sendo função da resistência à compressão  $f_c$ .

$$\nu_e = \frac{4,22}{(f_c)^{1/2}}$$

#### b) Modelo Proposto

Um modelo mais apropriado que levasse em consideração a armadura da laje e também um mecanismo de ruptura mais real seria o modelo rotacional tal como foi desenvolvido por SHEHATA [1]. Este modelo considera a rotação do segmento de laje além da fissura inclinada ocasionando a plastificação do concreto abaixo do centro de rotação (CR) e o escoamento das armaduras tangenciais e radiais, conforme figura 2.8, chegando-se às expressões a seguir indicadas.

A parte da dissipação de energia interna devido ao aço radial é:

$$D_{Er} = 2\pi \rho_r r_f f_y d (d - x) \psi_f \quad (\text{II.11})$$

e a devida ao aço tangencial é:

$$D_{Et} = \rho_t (r_p - r_f) d f_y (d - 0,4x) 2\pi \psi_f \quad (\text{II.12})$$

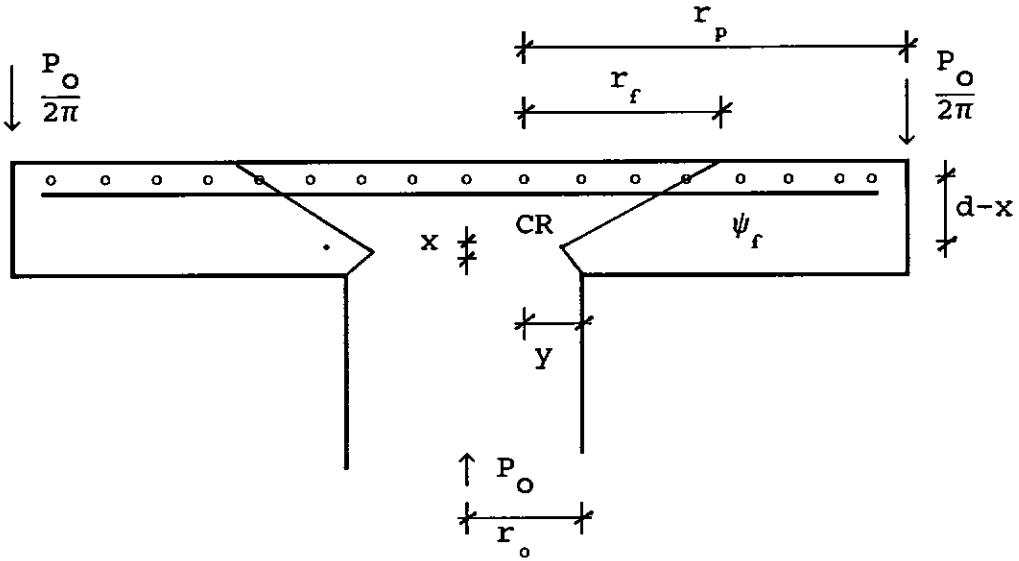


Fig. 2.8 - Modelo Cinemático Proposto

A região de concreto crítica está sujeita a um estado triaxial de tensões: tensões radiais, tangenciais e verticais.

Considerando-se que a tensão intermediária é a tensão tangencial, tem-se que:

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{min}}} = \frac{\cos(\alpha/2)}{\text{sen}(\alpha/2)},$$

Assumindo-se que o ângulo da superfície inclinada seja de  $20^\circ$ , chega-se a:

$$\sigma_{\text{máx}} = 5,67 \sigma_{\text{min}}$$

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb modificado aplicado ao concreto fornece:

$$4 \sigma_{\text{min}} - \sigma_{\text{máx}} = f_c,$$

Daí,  $\sigma_{\text{máx}} = -3,40 f_c,$

$$\sigma_{\min} = - 0,60 f_c$$

e portanto, a parte da dissipação de energia devida ao concreto é:

$$D_{Ec} = \sigma_{\max} \times 2\pi \left( r_o - \frac{y}{2} \right) \psi_f \frac{x}{2 \cos 10^\circ} \quad (\text{II.13})$$

$$D_{Ec} \cong 3,4 \pi f_c r_o x^2 \psi_f \quad (\text{II.14})$$

A dissipação total de energia interna é dada pela soma das três parcelas anteriormente descritas,  $D_{Er}$ ,  $D_{Et}$  e  $D_{Ec}$ .

O trabalho externo é dado por:

$$T_e = P \delta = P ( r_p - r_o + y ) \psi_f$$

$$T_e \cong P ( r_p - r_o ) \psi_f \quad (\text{II.15})$$

com  $\psi_f$  sendo a rotação do segmento de laje, conforme demonstrado na figura 2.8.

Igualando-se o trabalho externo à dissipação de energia tem-se:

$$P_o = \frac{2\pi f_y d^2}{r_p - r_o} \left[ \rho_r r_f \left( 1 - \frac{x}{d} \right) + 1,7 \frac{f_c}{f_y} r_o \left( \frac{x}{d} \right)^2 + \rho_t (r_p - r_f) \left( 1 - 0,4 \frac{x}{d} \right) \right] \quad (\text{II.16})$$

onde:

$$r_f = 2,75 (d - x) + r_o$$

A altura da linha neutra pode ser obtida a partir da consideração de plastificação no sentido tangencial.

$$\frac{x}{d} = 1,47 \rho \frac{f_y}{f_c} \leq 0,45 \quad (\text{II.17})$$

Quando  $\frac{x}{d}$  tiver valores elevados, ou seja, o concreto apresentar baixa resistência e a seção tiver uma taxa de armadura elevada, (seção superarmada), a ruptura pode-se dar por falta de ancoragem da armadura.

Objetivando-se evitar uma ruptura frágil, indica-se o valor conservador de 0,45 para limite superior de  $x/d$ . Esta limitação implica em:

$$\rho \leq 0,30 \frac{f_c}{f_y} \quad (\text{II.18})$$

Para os casos usuais de armadura em malha isotrópica, tanto  $\rho_r$  quanto  $\rho_t$  assumem o valor de  $\rho$ .

A tabela II.1 apresenta alguns resultados de ensaios realizados em lajes com alta taxa de armadura. Nela pode-se observar que, para taxas de armadura superiores a 2%, (incluídos os casos em que foi necessário utilizar a limitação de  $x/d$  adotada), os valores da carga de ruptura encontrados por esta formulação são demasiadamente superiores aos obtidos experimentalmente. Os resultados da tabela II.2, obtidos considerando-se a limitação da taxa de armadura de 2%, mostram que esta limitação, utilizada no modelo simplificado apresentado no item II.1.1, leva a resultados bem mais razoáveis.

LAJE No.	$\rho$ (%)	Carga Teórica $P_o$ (kN)	Carga de Ruptura $P_e$ (kN)	$\frac{P_o}{P_e}$
A-2c	2,47	748	467	1,60
A-7b	2,47	739	512	1,44
A-3b	2,11	628	445	1,41
A-3c	2,48	740	534	1,38
A-3d	3,22	962	547	1,76
A-5	2,47	861	535	1,98
A-6	2,33	813	498	1,63
B-14	3,00	924	579	1,60

Tabela II.1 - Resultados de ensaios realizados por Elstner & Hognestad [6], comparados com os da solução limite superior proposta

### II.3 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DOS MODELOS

A tabela II.2 apresenta a comparação dos resultados teóricos obtidos segundo os diferentes modelos apresentados, com os resultados obtidos em ensaios.

Nessa tabela pode-se observar que o modelo completo dado no item II.1 é o que fornece melhores resultados.

A solução-limite superior desenvolvida, como era de se esperar, leva a resultados superiores aos experimentais, a menos das lajes com taxa de armadura muito baixa, que podem, na realidade, ter apresentado ruptura por flexão.

Dos modelos de treliça, o modelo simplificado sugerido por SHEHATA [3], é de fácil aplicação e, em geral, fornece resultados muito bons. Entretanto, para ensaios onde o valor da resistência à compressão do concreto é elevada, este modelo leva a superestimação dos valores da carga de ruptura. O modelo desenvolvido por SIMMONDS e ALEXANDER [4] também fornece bons resultados, mas sua aplicação é um pouco mais trabalhosa do que a do modelo de SHEHATA [3].

Laje no.	Modelos baseados na Teoria da Plasticidade					SHEHATA		Real $P_e$	
	Limite Superior Proposto		Limite Inferior			Modelo			
			SHEHATA		ALEXANDER SIMMONDS		Teórico		
$P_o$	$P_o/P_e$	$P_o$	$P_o/P_e$	$P_o$	$P_o/P_e$	$P_o$	$P_o/P_e$		
o Kinnunen & Nylander [7]									
5	310	1.19	261	1.00	250	0.96	255	0.98	260
6	320	1.14	263	0.94	257	0.92	266	0.95	280
24	538	1.23	465	1.06	378	0.86	441	1.01	438
25	514	1.24	441	1.06	364	0.88	401	0.96	416
32	246	0.94	306	1.16	268	1.02	234	0.89	263
33	255	0.97	315	1.20	268	1.02	243	0.92	263
o Elstner & Hognestad [6]									
A-1a	376	1.24	283	0.93	245	0.81	300	0.99	303
A-1b	386	1.06	380	1.04	303	0.83	346	0.95	365
A-1c	389	1.09	407	1.14	318	0.89	345	0.97	356
A-1e	383	1.08	340	0.96	281	0.79	322	0.90	356
A-2a	381	1.14	351	1.05	330	0.99	330	0.99	334
A-2b	534	1.33	415	1.03	381	0.95	405	1.01	401
A-7b	604	1.18	502	0.98	445	0.87	495	0.97	512
A-3a	356	1.00	339	0.95	349	0.98	356	1.00	356
A-3b	598	1.34	451	1.01	450	1.01	470	1.06	445
A-3c	602	1.13	489	0.92	483	0.90	529	0.99	534
A-3d	609	1.11	558	1.02	541	0.99	580	1.06	547
A-4	438	1.09	458	1.14	447	1.11	385	0.96	401
A-5	696	1.30	492	0.92	566	1.06	547	1.02	535
A-6	696	1.40	561	1.13	535	1.07	591	1.19	498
A-9	501	1.13	470	1.06	456	1.02	436	0.98	445
A-10	515	1.15	526	1.07	557	1.18	530	1.08	490
B-11	375	1.14	392	1.19	365	1.11	351	1.07	329
Média		1.15		1.04		0.97		1.00	
Desvio Padrão		0.12		0.08		0.10		0.06	

Tabela II.2 - Comparação de resultados dos modelos baseados na teoria da plasticidade com ensaios

## II.4 RECOMENDAÇÕES DE NORMAS

Segundo as normas para cálculo de estruturas de concreto, a verificação da resistência à punção é feita comparando-se uma tensão de cisalhamento nominal com a tensão limite estabelecida pelas mesmas.

As tensões de cisalhamento nominais são definidas como sendo a razão entre a carga  $P_0$  e a área de uma superfície de controle cilíndrica normal ao plano da laje, em torno da área carregada. O perímetro desta superfície de controle tem a mesma forma da área carregada ou mantém uma distância constante da mesma, de tal forma que, para um pilar quadrado, o perímetro de controle é também quadrado com cantos retos ou arredondados. Se o contorno da área carregada for côncavo, o perímetro de controle não levará em conta este efeito e terá a forma da menor curva circunscrita.

As diferenças entre as normas estão nas definições da distância do perímetro de controle à área carregada e da tensão limite. Além disto, algumas normas levam em consideração a influência da quantidade de armadura de flexão, o tamanho da laje ou a forma do carregamento.

A seguir apresentam-se as especificações apresentadas pelo código modelo CEB-FIP/90 [8], e pelas normas ACI 318-89 [9], BS 8110 [10] e NBR 6118 [11].

## II.4.1 CEB-FIP/90 [8]

A tensão nominal de cisalhamento é calculada pela fórmula

$$\tau = \frac{P}{u d} , \quad (\text{II.19})$$

onde o perímetro de controle  $u$  é calculado como o comprimento da menor curva a uma distância  $2d$  da área carregada.

A tensão limite  $\tau_c$  é dada por:

$$\tau_c = 0,12 \xi (100\rho f_c)^{1/3} \quad (\text{II.20})$$

com

- o fator de forma  $\xi = 1 + (200/d)^{1/2}$ ,  $d$  em mm
- $\rho$  igual à média aritmética das taxas de armadura nas direções  $x$  e  $y$ , calculadas a uma distância do pilar, ou área carregada, igual à dimensão da coluna mais  $3d$ .

## II.4.2 ACI 318-89 [9]

A tensão nominal de cisalhamento é calculada considerando o perímetro de controle a uma distância de  $0,5d$  da área carregada, conservando sua forma.

A tensão limite é dada pela seguinte expressão:

$$\tau_c = \left( 2 + \frac{4}{\beta_c} \right) (f_c)^{1/2} \quad (f_c \text{ em Psi})$$

ou,

$$\tau_c = 0,083 \left( 2 + \frac{4}{\beta_c} \right) (f_c)^{1/2} \quad (f_c \text{ em MPa})$$

(III.21)

onde  $\beta_c$  representa a relação entre o maior e o menor lado da área carregada, representando um efeito de retangularidade da área carregada. O menor valor possível de  $\beta_c$  a ser considerado na expressão de  $\tau_c$  é 2, de forma que o valor máximo de  $\tau_c$  é  $4 (f_c)^{1/2}$  ( $f_c$  em Psi), ou  $0,332 (f_c)^{1/2}$  ( $f_c$  em MPa).

#### II.4.3 BS 8110 [10]

A tensão nominal de cisalhamento é calculada com o perímetro de controle a uma distância  $1,5d$  da área carregada conservando sua forma.

A tensão limite á dada por:

$$\tau_c = 0,632 (100\rho)^{1/3} \xi \left( \frac{f_c}{21} \right)^{1/3} \quad (\text{II.22})$$

com:

$$\xi = (400/d)^{1/4} \geq 1, \quad d \text{ em mm,}$$

$$\rho \leq 3\%,$$

$$f_c \leq 33.3 \text{ MPa,}$$

$$f_c/21 > 1,$$

$$\tau_c \leq 0,73 \sqrt{f_c} \quad \text{ou } 5 \text{ MPa,}$$

#### II.4.4 NBR 6118 [11]

A tensão nominal de cisalhamento é calculada com o

perímetro de controle calculado a uma distância  $0,5d$  da área carregada.

A tensão limite  $\tau_c$  é dada pela fórmula seguinte que possui forma semelhante à da norma ACI-318.

$$\tau_c = 0,323 \sqrt{f_c} \quad (f_c \text{ em MPa}) \quad (\text{II.23})$$

## II.5 COMPARAÇÃO ENTRE RECOMENDAÇÕES DE NORMAS

Na tabela II.3 são feitas comparações entre as cargas de ruptura por punção obtidas por fórmulas dadas pelas normas aqui comentadas e as cargas de ruptura obtidas em ensaios, os fatores de segurança já estão embutidos nas formulações das normas.

Observa-se que as fórmulas do CEB e da norma britânica, que consideram um fator de forma e a taxa de armadura, fornecem valores da carga de ruptura mais próximos dos reais, que as fórmulas das normas americana e brasileira, (considerando médias e desvios padrão), as quais somente associam a carga última com a resistência à compressão do concreto,  $f_c$ .

BRAESTRUP [12] apresenta um estudo comparativo detalhado entre normas européias e a americana, comentando que o método de cálculo utilizado em normas, com a consideração de um perímetro de controle, advém de uma solução-limite superior da teoria da plasticidade. O mecanismo de ruptura admitido, considera uma separação do concreto tal como é visto na figura 2.6, mas sendo a superfície de ruptura cônica.

Assim, desprezando-se a resistência do concreto à tração, chega-se à seguinte expressão:

$$P = d \pi (2r_0 + d \cot\alpha) \frac{1 - \cos\alpha}{2\sin\alpha} v_e f_c \quad (\text{II.24})$$

onde  $(2r_0 + d \cot\alpha)$  representa o comprimento do perímetro de controle  $u$ , sendo o coeficiente de efetividade  $v_e$  considerado igual a  $\frac{k}{\sqrt{f_c}}$ . A expressão (II.24) toma a

seguinte forma:

$$\frac{P}{ud} = \frac{1 - \cos\alpha}{2\sin\alpha} k \sqrt{f_c} \quad (\text{II.25})$$

que é semelhante à das expressões (II.21) e (II.23).

Laje no.	CEB		ACI		BS		NBR		REAL P <sub>e</sub>
	P <sub>o</sub>	P <sub>e</sub> /P <sub>o</sub>	P <sub>o</sub>	P <sub>e</sub> /P <sub>o</sub>	P <sub>o</sub>	P <sub>e</sub> /P <sub>o</sub>	P <sub>o</sub>	P <sub>e</sub> /P <sub>o</sub>	
o Kinnunen & Nylander [7]									
5	177	1.47	172	1.51	206	1.26	167	1.56	260
6	177	1.58	172	1.63	222	1.26	167	1.68	280
24	267	1.64	299	1.46	323	1.36	291	1.50	438
25	254	1.64	280	1.49	308	1.35	272	1.53	416
32	195	1.35	284	0.93	220	1.20	275	0.96	263
33	202	1.30	291	0.90	223	1.18	283	0.93	263
o Elstner & Hognestad [6]									
A-1a	206	1.47	218	1.39	258	1.17	198	1.53	303
A-1b	251	1.45	294	1.24	275	1.33	266	1.37	365
A-1c	262	1.36	314	1.13	288	1.24	285	1.25	356
A-1e	233	1.53	263	1.35	258	1.38	238	1.50	356
A-2a	252	1.33	207	1.61	318	1.05	188	1.78	334
A-2b	282	1.42	244	1.64	318	1.26	224	1.79	401
A-7b	320	1.60	296	1.73	351	1.46	268	1.91	512
A-3a	282	1.26	199	1.79	339	1.05	181	1.97	356
A-3b	340	1.31	266	1.67	348	1.28	241	1.85	445
A-3c	360	1.48	288	1.85	368	1.45	261	2.05	534
A-3d	392	1.40	328	1.67	397	1.38	298	1.84	547
A-4	295	1.36	380	1.06	325	1.23	351	1.14	401
A-5	372	1.44	376	1.42	409	1.31	346	1.55	535
A-6	411	1.21	355	1.40	422	1.18	329	1.51	498
A-9	285	1.56	305	1.46	313	1.42	278	1.60	445
A-10	320	1.53	388	1.26	353	1.39	358	1.37	490
B-11	267	1.23	205	1.60	339	0.97	186	1.77	329
Média		1.43		1.44		1.27		1.56	
Desvio Padrão		0.13		0.26		0.13		0.30	

Tabela II.3 - Comparações de resultados de normas  
com ensaios, valores em (kN).

## CAPITULO III

## PUNÇÃO ASSIMÉTRICA - PILARES INTERNOS

## III.1 INTRODUÇÃO

Quando em uma ligação laje-pilar de uma laje cogumelo ocorre uma transferência de momento da laje para o pilar, ou vice-versa, além da transferência usual de cortante, o estudo de punção para esta ligação deve levar em consideração a parcela de momento transferido, o que ocasiona uma diminuição da resistência da ligação à punção.

A transferência pode ser ocasionada por diversos fatores:

- ocorrência de um carregamento lateral (vento, terremoto, entre outros), desde que paredes de cisalhamento não estejam presentes na estrutura,
- carregamentos verticais assimétricos,
- vãos distintos entre pilares,

- pilares posicionados em uma bordoadada laje e
- pilares posicionados nos cantos da laje.

Esta transferência causa tensões consideráveis ao longo do perímetro da coluna, sendo que especialmente as tensões cisalhantes podem ficar críticas, influenciando enormemente a resistência global da ligação.

Nas faces do pilar têm que ser consideradas: flexão ou torção e uma distribuição não uniforme do cortante vertical.

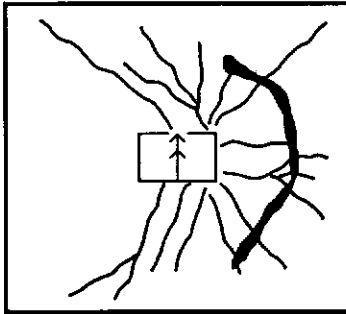
Resultados experimentais demonstram que as ligações laje-pilar sem armadura transversal têm pequena ductilidade. A ruptura ocorre rapidamente, após a ocorrência de uma fissuração diagonal, da mesma forma que no caso de punção simétrica, porém com a formação de apenas um trecho do cone clássico de punção, na face mais carregada do pilar.

Na figura 3.1 são mostrados três diferentes modos de ruptura por punção. Verifica-se uma semelhança muito grande entre os casos de ruptura por punção em pilares de borda e em pilares internos onde há transferência de momento.

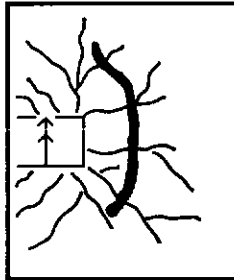
Para o estudo do efeito da transferência de momento na carga de ruptura por punção, são feitas análises

elásticas das placas no estágio anterior à fissuração para a determinação da tensão máxima de cisalhamento ao longo de um perímetro, ou então, considera-se também a ligação laje-pilar como sendo um cruzamento de vigas ortogonais contidas na própria laje, que resistem aos esforços de flexão e torção. De uma maneira mais simplificada, pode-se ainda admitir uma certa distribuição das tensões cisalhantes em um dado perímetro crítico. Esta última forma de abordagem do problema é a mais utilizada nas diversas normas de cálculo (ver item III.3).

A partir do modelo simplificado para o cálculo da resistência última a punção simétrica, apresentado no item II.2.1a, desenvolve-se aqui, um modelo formado por bielas de concreto e tirantes de aço para a análise da interação do momento e do esforço cortante transferidos, para o caso de lajes sem armadura de cisalhamento.

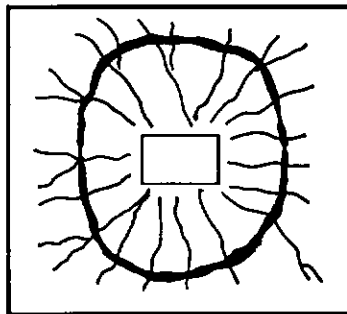


ligação laje-pilar interno



ligação laje-pilar de borda

a) Momento e carga vertical



b) Somente carga vertical

Fig. 3.1 - Fissuração Típica na Ruptura por Punção

### III.2 REVISÃO DAS FORMULAÇÕES DESENVOLVIDAS

#### III.2.1 CONSIDERAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO LINEAR DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO

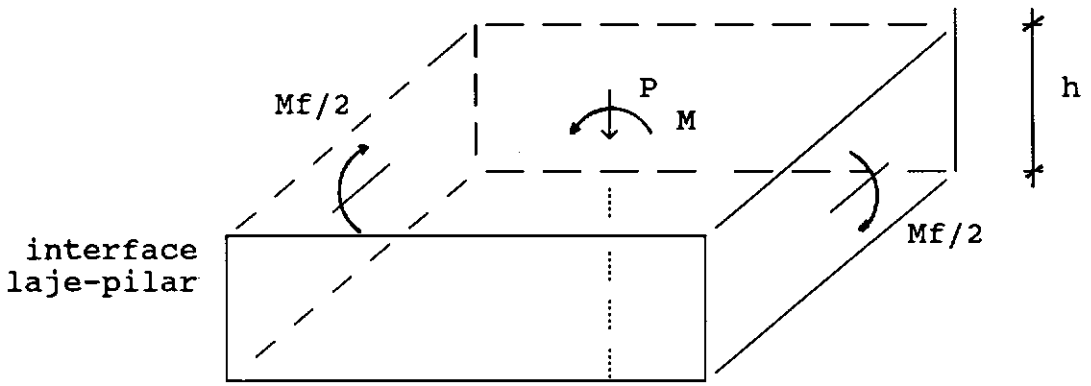
Na figura 3.2 são representados os esforços na ligação laje-pilar devidos a um carregamento vertical excêntrico.

Nos planos paralelos ao eixo de simetria de solicitações, se desenvolvem momentos torsores, enquanto nos planos perpendiculares aparecem momentos fletores. Com relação às tensões de cisalhamento, considera-se que as mesmas variam linearmente ao longo das faces paralelas de um perímetro de controle, em relação ao eixo de simetria, e que elas são constantes ao longo das outras faces do perímetro.

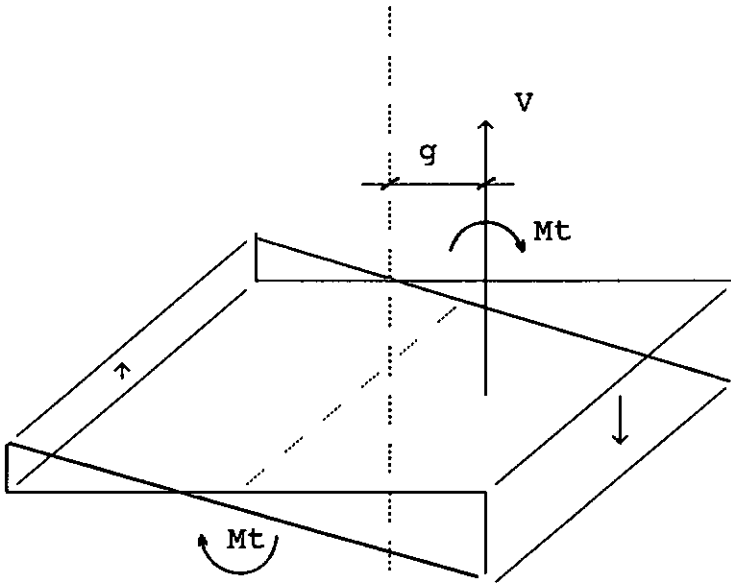
A resultante das tensões de cisalhamento, denotada por  $V$ , é igual à carga externa  $P$  e o somatório dos momentos internos deve equilibrar o momento  $M$ . Desta forma:

$$M = M_f + V g, \quad (\text{III.1})$$

onde  $g$  é a excentricidade da resultante  $V$ , e  $M_f$  representa o momento fletor no plano perpendicular ao eixo de simetria.



a) Momentos fletores na ligação



b) Distribuição de tensões cisalhantes ao longo da interface

Fig. 3.2 - Esforços na ligação laje-pilar

A parcela de momento ( $V g$ ), pode ser decomposta da seguinte forma:

$$V g = 2 M_t + M_{cv} \quad (\text{III.2})$$

onde  $M_t$  representa a parcela de momento torsor no plano paralelo ao eixo de simetria dado pelas tensões cisalhantes neste plano, e  $M_{CV}$  representa o momento dado pelas tensões cisalhantes no plano perpendicular ao eixo de simetria das solicitações, conforme se vê na figura 3.2.

A partir das expressões III.1 e III.2, tem-se:

$$M = M_f + 2M_t + M_{CV} = M_f + K M$$

onde a parcela  $K M$  representa o momento devido às tensões de cisalhamento não uniforme, dado pela expressão III.2.

Assumindo que as tensões cisalhantes são uniformemente distribuídas ao longo da altura efetiva da laje, têm-se:

$$\tau = \tau_p + \tau_m ,$$

onde  $\tau_p$  representa a parcela devida a carga vertical  $P$  e  $\tau_m$  a parcela devida a  $K M$ , desta forma:

$$\tau = \frac{P}{u d} + \frac{KM c_2}{J} \quad (\text{III.3})$$

onde:

$c_2$  - distância do centróide da seção transversal do pilar ao perímetro de controle,

$J$  - propriedade da superfície de controle, análoga ao momento de inércia polar em relação ao eixo do pilar.

Usa-se  $J = \frac{x_1^3 d}{6} + \frac{x_1 d^3}{6} + \frac{x_1^2 y_1 d}{2}$ , onde os símbolos  $x_1$  e  $y_1$  representam as dimensões do perímetro de controle

nas direções x e y respectivamente, conforme representado na figura 3.3.

Para os casos usuais, as dimensões do pilar são maiores que a altura efetiva da laje, portanto ainda maior é a relação entre as dimensões  $x_1$  e  $y_1$  do perímetro em relação à dimensão d. Desta forma a parcela que representa as tensões de cisalhamento horizontal  $\frac{x_1 d^3}{6}$  é pequena em relação às outras parcelas, e pode ser desprezada.

A ruptura ocorrerá quando  $\tau = \tau_c$  onde  $\tau_c$  é o limite considerado para a punção simétrica. Então:

$$\tau_c = \frac{P}{u d} + \frac{KM c_2}{J} \quad (\text{III.4})$$

$$\tau_c u d = P + \frac{KM c_2 u d}{J}$$

$$P = \tau_c u d - M \frac{K c_2 u d}{J} \quad (\text{III.5})$$

Esta equação admite uma interação linear entre o carregamento vertical e o momento transferido para o pilar.

Tendo por base resultados experimentais, HANSON & HANSON [13] indicam a adoção do valor de 0,4 para o coeficiente K.

A norma ACI 318-89 [9], sugere um valor de K variável, dado pela expressão:

$$K = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{c_t + d}{c + d}}} \quad (\text{III.6})$$

com  $c$  e  $c_t$  sendo respectivamente as dimensões paralela e perpendicular do pilar com relação ao eixo do momento.

Esta expressão leva a valores de  $K = 0,4$ , para o caso de pilares quadrados, e a uma diminuição do valor de  $K$  com o aumento do dimensão da face do pilar perpendicular ao eixo do momento transferido.

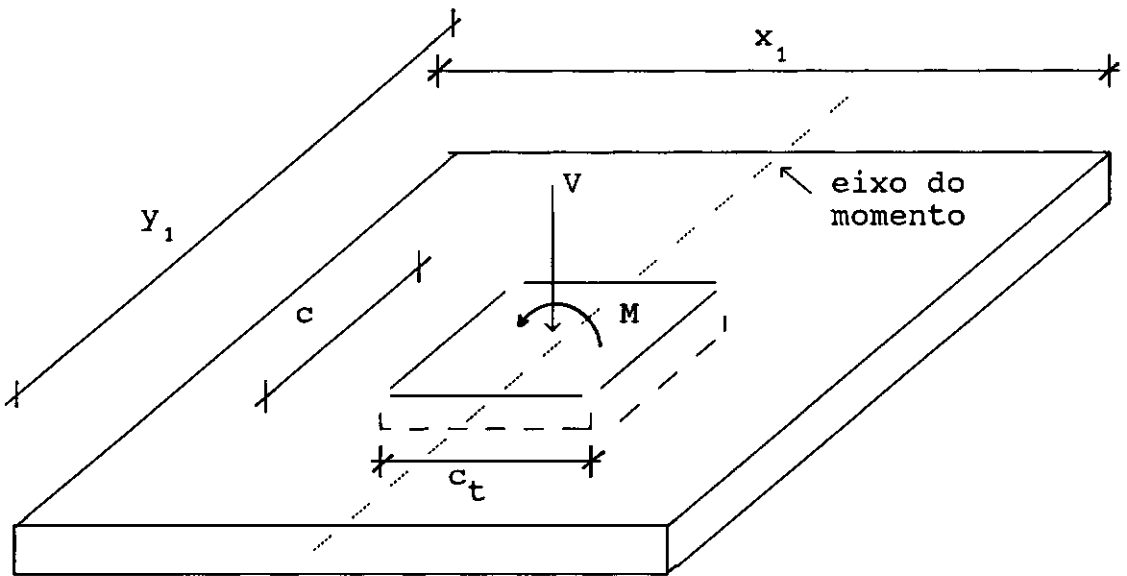


Fig. 3.3 - Perímetro de controle

### III.2.2. DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES CISALHANTES SEGUNDO ANÁLISE ELÁSTICA

MAST [14] demonstrou que a análise de placas segundo

a Teoria da Elasticidade não leva a uma distribuição linear das tensões de cisalhamento ao longo do perímetro considerado. A figura 3.4 mostra os esforços ao longo do perímetro, para o caso de uma transferência de momento para o pilar apenas em um plano, sem carga vertical transferida.

As fórmulas por ele desenvolvidas são as seguintes:

$$m_x = \frac{M}{8L} \left( \frac{1 + \nu}{k_1} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) + (1 - \nu) \frac{\pi x}{L} \frac{k_2}{k_1^2} \right)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = \frac{M}{8L} \pi (1 - \nu) y \frac{(\gamma - 1)}{k_1^2}$$

$$m_y = \frac{M}{8L} \left( \frac{1 + \nu}{k_1} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) - (1 - \nu) \frac{\pi x}{L} \frac{k_2}{k_1^2} \right)$$

$$q_x = \frac{M \pi}{4L^2} \frac{(k_3 - 1)}{k_1^2}$$

$$q_y = - \frac{M \pi}{4L^2} \frac{k_2}{k_1^2}$$

onde:

$$k_1 = \cosh \left( \frac{\pi y}{L} \right) - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)$$

$$k_2 = \sinh \left( \frac{\pi y}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right)$$

$$k_3 = \cosh \left( \frac{\pi y}{L} \right) \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)$$

$x, y$  = distâncias do perímetro ao eixo do pilar,

$L$  = distância entre as linhas de inflexão (vão do

modelo isolado).

Integrando-se as expressões acima ao longo do perímetro, chega-se às seguintes fórmulas para as parcelas do momento na ligação devidas à torção, flexão e cisalhamento:

$$M_x = \frac{2M}{\pi} \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{2} \frac{x y}{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

$$M_{xy} = \frac{M}{\pi} \frac{x y}{x^2 + y^2} \quad (\text{III.8})$$

$$M_{cx} = \frac{2M}{\pi} \frac{x y}{x^2 + y^2} \quad (\text{III.9})$$

$$M_{cy} = \frac{2M}{\pi} \left( \arctan \left( \frac{x}{y} \right) - \frac{x y}{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{III.10})$$

Comparando-se com os momentos apresentados na figura 3.2, percebe-se que  $M_f = M_x$ ,  $M_{cv} = M_{cy}$  e  $M_t = M_{cx} + M_{xy}$ .

A tabela III.1 mostra valores obtidos pelas fórmulas anteriores, divididos por M, para algumas relações de x/L e y/L.

Essas fórmulas não levam em consideração o tamanho do pilar e a espessura da laje, nem a fissuração das placas de concreto armado. Na análise da resistência da ligação laje-pilar, fatores como a redistribuição de esforços após

a fissuração por flexão e por cisalhamento e a plastificação da seção, devem ser considerados. As fórmulas de MAST indicam que, mesmo na fase elástica, a consideração de distribuição linear de tensões de cisalhamento não é adequada.

x/L	y/L	$\frac{M_x}{M}$	$\frac{M_{xy}}{M}$	$\frac{M_{cx}}{M}$	$\frac{M_{cy}}{M}$
0.05	0.10	0.58	0.13	0.25	0.04
0.10	0.05	0.17	0.13	0.25	0.45
0.04	0.04	0.34	0.16	0.32	0.18
0.07	0.07	0.34	0.16	0.32	0.18
0.10	0.10	0.34	0.16	0.32	0.18

Tabela III.1 – Momentos dados pela análise elástica em relação ao momento da ligação para alguns perímetros

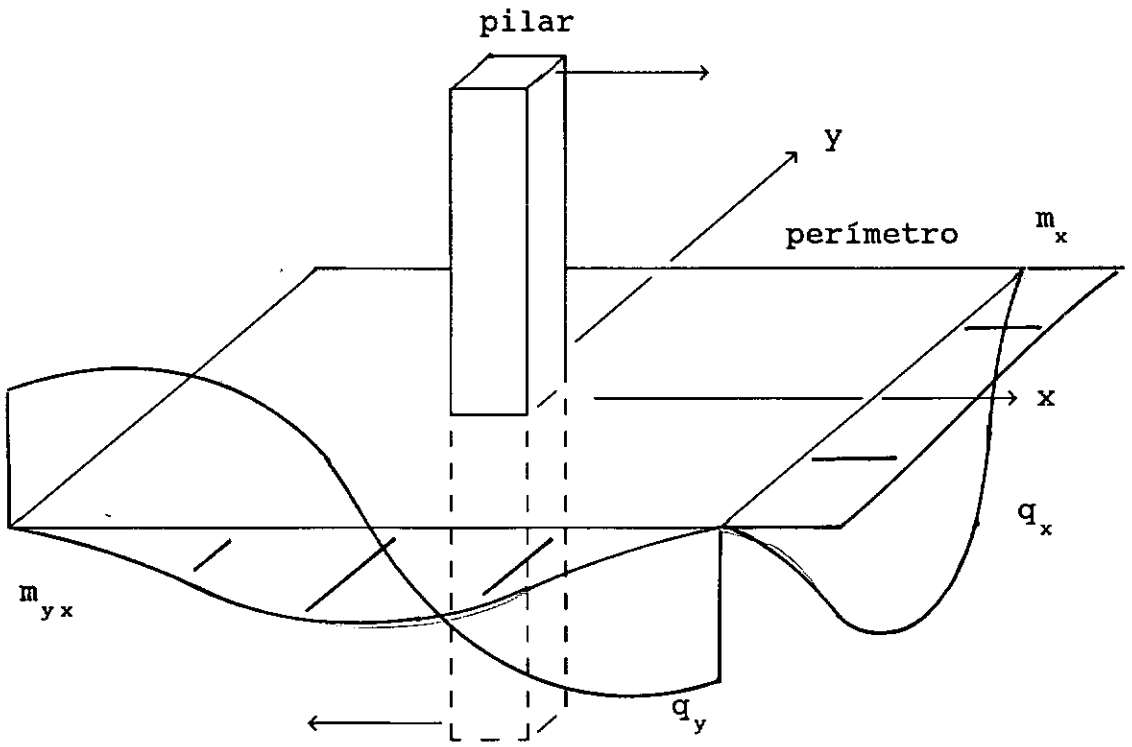


Fig. 3.4 - Esforços a partir do modelo elástico

### III.2.3 CONSIDERAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO UNIFORME ANTI-SIMÉTRICA DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO

A distribuição das tensões de cisalhamento no regime elástico, descrita no item anterior, assemelha-se mais a uma distribuição uniforme anti-simétrica, como a indicada na figura 3.5, do que a uma distribuição linear, como mostrada na figura 3.2.

Considerando-se a distribuição de tensões indicadas na figura 3.5, chega-se a:

$$K dM = \tau d e dl \quad (\text{III.11})$$

$$K M = \tau d \int e dl$$

$$\tau = \frac{K M}{d \int e dl} = \frac{K M}{d W} , \quad (\text{III.12})$$

onde  $W d$  é uma propriedade da superfície análoga ao momento estático e o símbolo "e" representa a distância entre um comprimento elementar  $dl$  e o eixo do momento.

Da mesma forma que no item III.2.1, o fator  $K$  define a parcela de momento transferida ao pilar, devida às tensões de cisalhamento.

A tensão cisalhante nominal a ser considerada é, portanto:

$$\tau = \tau_p + \tau_m ,$$

onde  $\tau_p$  representa a parcela devida a carga vertical  $P$  e  $\tau_m$  a parcela devida a  $K M$ . Desta forma:

$$\tau = \frac{P}{u d} + \frac{K M}{W d} \quad (\text{III.13})$$

O código modelo CEB-FIP/90 utiliza esta formulação e indica valores de K variando com a relação  $c_t/c$ . Estes valores são mostrados na Tabela III.2.

$\frac{c_t}{c}$	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

Tabela III.2 - Valores do coeficiente K

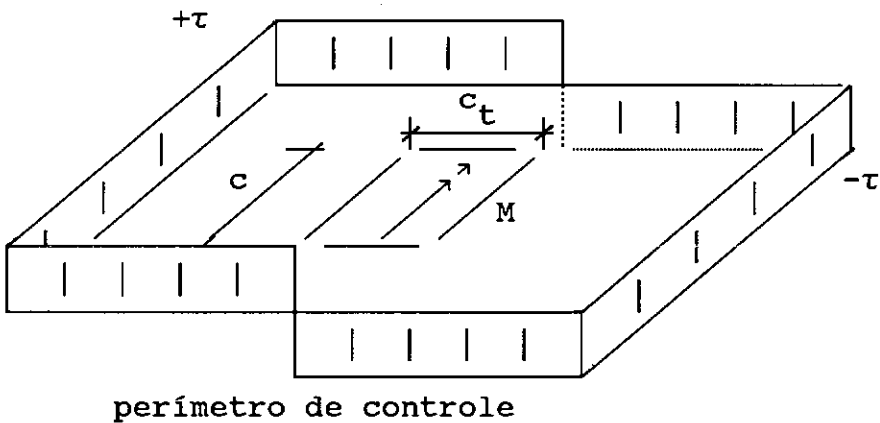


Fig 3.5 - Distribuição uniforme anti-simétrica das tensões de cisalhamento

### III.3 RECOMENDAÇÕES DE NORMAS

As normas de cálculo, geralmente, levam em consideração a ação do momento admitindo um acréscimo de tensão de cisalhamento no perímetro de controle adotado. Nas fórmulas empregadas são consideradas a geometria do pilar e da laje e a excentricidade do carregamento que provoca o momento atuante na ligação.

A norma brasileira é omissa em relação ao efeito do momento transferido na resistência à punção.

A abordagem do problema feita pelo código-modelo CEB-FIP/90, e pelas normas ACI 318-89 e BS-8110 é comentada a seguir.

#### III.3.1 CÓDIGO-MODELO CEB-FIP/90 [8]

O Código-modelo CEB-FIP/90 considera a formulação baseada na distribuição uniforme das tensões cisalhantes, conforme mostrado no item III.2.3.

A tensão de cisalhamento nominal é dada pela equação III.13 e a curva de interação  $P \times M$  pela seguinte expressão:

$$M = (P_o - P) \frac{W}{K u} \quad (\text{III.14})$$

onde

$u$  = perímetro de controle calculado como o comprimento da menor curva a uma distância  $2d$  da área carregada.

$W$  = conforme definido no item III.2.3.

$P_o$  = carga de ruptura a punção simétrica, dada a partir da equação II.19.

Para pilares retangulares, tem-se:

$$W = \frac{c_t^2}{2} + c_t c + 4 c d + 16 d^2 + 2\pi d c_t, \quad (\text{III.15})$$

e para pilares circulares:

$$W = 16 d^2 + 4\pi d r_o. \quad (\text{III.16})$$

$K$  é dado pela tabela III.2

### III.3.2 - NORMA ACI 318-89 [9]

A norma ACI 318-89 indica uma formulação baseada na distribuição linear das tensões cisalhantes mostrada na figura 3.6.

A tensão de cisalhamento nominal é, portanto, dada

pela equação III.3 e a expressão que representa a interação P x M toma a seguinte forma:

$$M = (P_o - P) \frac{J}{u d c_2 K} \quad (\text{III.17})$$

onde:

$$u = 2 (c + c_t + 2d)$$

$$c_2 = (c_t + d)/2$$

$$J = \frac{(c_t + d)^3 d + (c_t + d) d^3}{6} + \frac{(c_t + d)^2 (c + d) d}{2}$$

O valor de K, é dado pela equação III.6, vista anteriormente.

### III.3.3 - NORMA BS-8110 [10]

A curva de interação P x M é dada pela expressão:

$$M = (P_o - P) \frac{s}{1,5} \quad (\text{III.18})$$

onde s é o comprimento do lado do perímetro que esteja paralelo ao eixo de momento, ou seja, c + 3d para pilares retangulares.

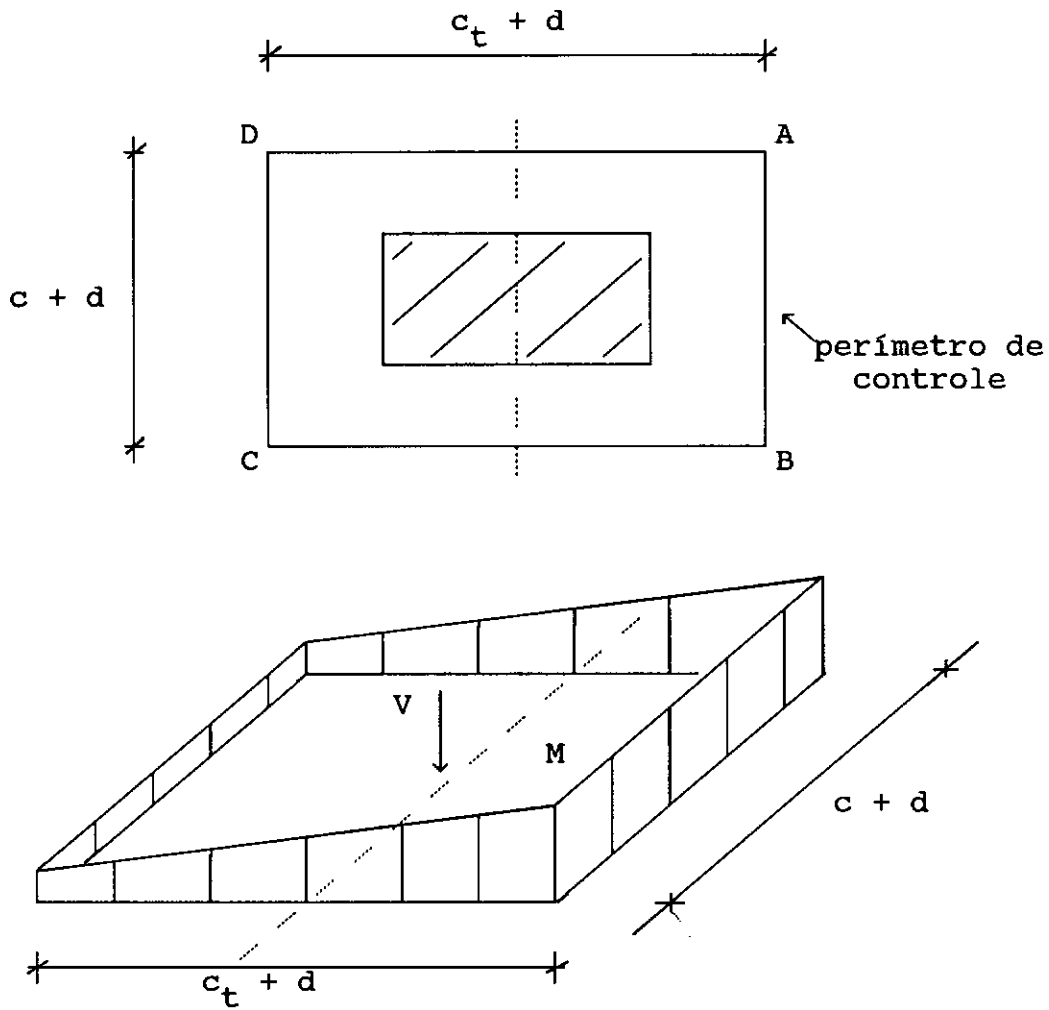


Fig 3.6 - Distribuição de tensões de cisalhamento pelo método ACI

### III.4 COMENTÁRIOS SOBRE AS RECOMENDAÇÕES DE NORMAS

Enquanto a norma ACI 318-89 considera uma distribuição linear de tensões cisalhantes, o código CEB/FIP-90 admite uma distribuição uniforme anti-simétrica.

Para o coeficiente K, a norma ACI indica a equação III.6 que inclui dimensões do pilar e da laje. Por outro lado, o código CEB-FIP indica os valores mostrados na tabela III.2, que dependem apenas da dimensão do pilar.

Pela análise elástica descrita por MAST (item III.2.2) verifica-se que, para pilares quadrados, tem-se um fator de 0,34 para o momento transferido por flexão e de 0,66 devido a torção e cisalhamento, segundo os valores constantes na tabela III.1. Portanto o valor de  $K = 0,60$  indicado pelo CEB-FIP para este caso se aproxima razoavelmente do dado pela análise elástica. Já a norma ACI indica o valor de 0,40 para este coeficiente.

Para um pilar retangular com relação  $c/c_t$  da ordem de 2, pela análise elástica chega-se aos valores de 0,58 e 0,42 para as parcelas de flexão e cisalhamento (com torção) respectivamente. Para este caso a norma ACI indica o valor de 0,35 (se  $c = 2d$ ) para o coeficiente K, enquanto o código CEB-FIP indica o valor de 0,45, valor este mais próximo do obtido por MAST.

A norma britânica não indica como a expressão III.18 apresentada foi obtida.

A tabela III.11 apresenta uma comparação entre as prescrições das normas e resultados experimentais.

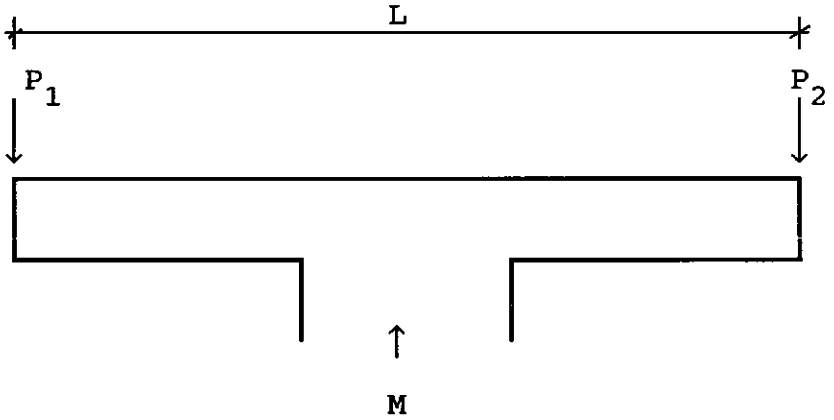
### III.5 MODELO DE BIELAS E TIRANTES PROPOSTO

Em qualquer ligação laje-pilar interno onde se deseje transmitir momento fletor, pode-se considerar que as ações resultam da adição de carregamentos simétrico e anti-simétrico, conforme mostra a figura 3.7.

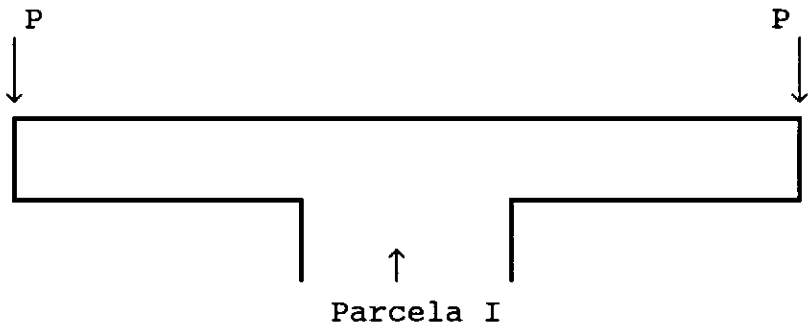
Desta forma, para a análise da capacidade de transferência de momento em uma ligação, precisa-se de um modelo que represente a parcela anti-simétrica do carregamento, para então somá-lo ao modelo correspondente à parcela simétrica.

Para a parcela simétrica do carregamento (parcela I) será utilizado o modelo de SHEHATA [3] descrito em II.2.1a, que, como foi visto, fornece bons resultados com fácil desenvolvimento matemático. Para a parcela anti-simétrica do carregamento (parcela II) será usado o modelo de bielas e tirantes mostrado na figura 3.8.

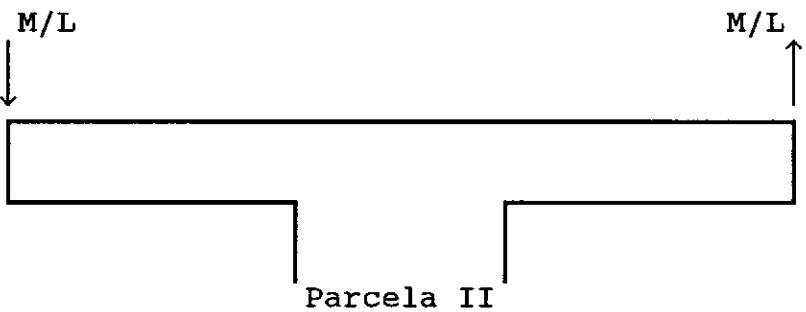
O momento transferido para o pilar inclui três parcelas: parcela de flexão ( $M_f$ ) e as parcelas relativa às tensões de cisalhamento ( $M_{cv}$ ) e ( $M_t$ ). O modelo de bielas e tirantes proposto representa cada uma destas parcelas, conforme será demonstrado adiante.



a) ligação laje-pilar com carga vertical e momento  
=



b) ligação laje-pilar somente com carga vertical  
+



c) ligação laje-pilar somente com momento

Fig 3.7 - Representação das componentes simétrica e anti-simétrica do carregamento

Somando-se os dois modelos, chega-se a uma expressão geral para o cálculo da interação carga vertical x momento em pilares de seção transversal retangular.

### III.5.1 - PARCELA DE FLEXÃO ( $M_f$ )

A parcela do momento transferido devida à flexão é proveniente da componente horizontal das forças nas bielas  $b_1$  e  $b_1'$  mostradas na figura 3.9.

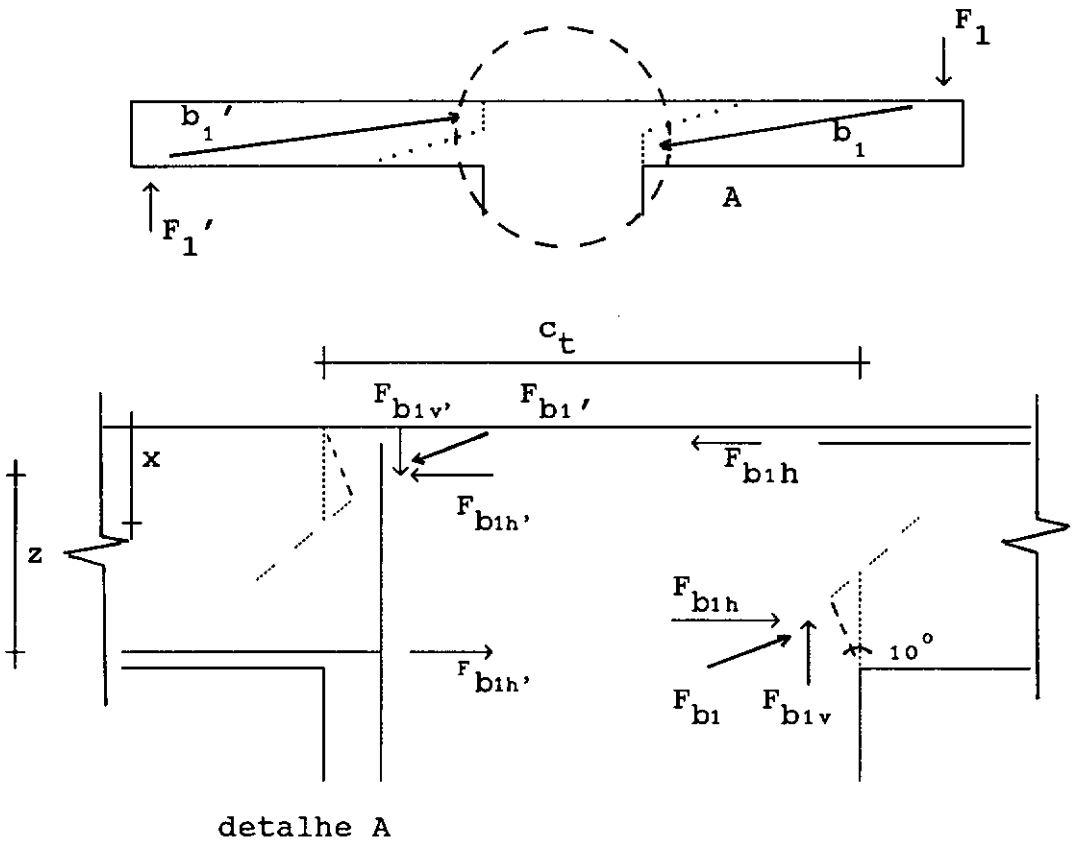


Fig 3.9 - Forças utilizadas no cálculo de  $M_f$

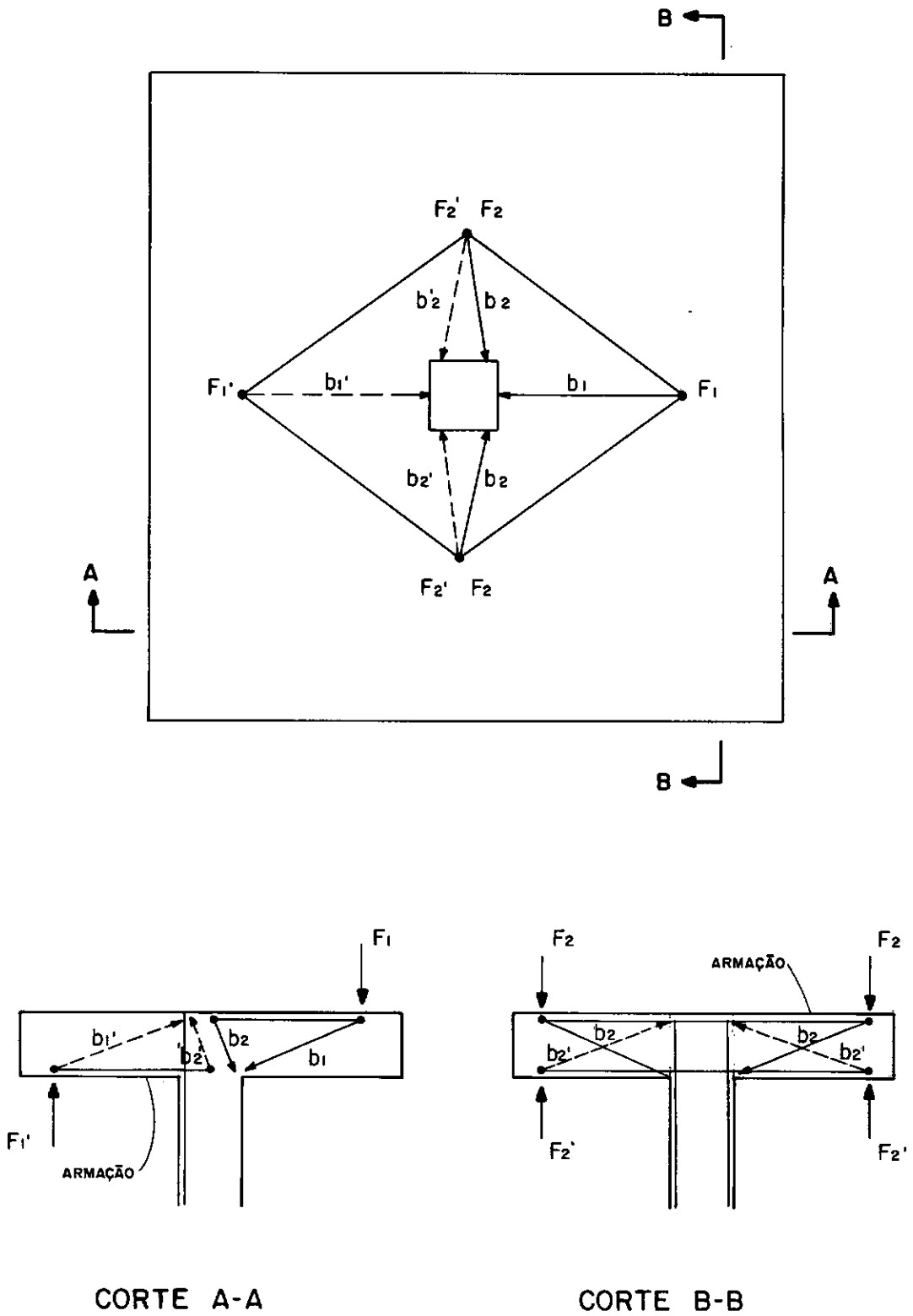


FIG. 3.8 - MODELO DE BIELAS E TIRANTES PARA A PARCELA II DO CARREGAMENTO

O momento fletor  $M_f$  é, portanto, devido às forças de compressão opostas que atuam em lados opostos da laje.

$$F_{b1'} = F_{b1}$$

$$M_f = 2 F_{b1h} z$$

$$F_{b1h} = \frac{M_f}{2 z}$$

A tensão na faceta de concreto comprimida devida à componente  $F_{b1h}$  é dada pela expressão seguinte, considerando que a inclinação da biela seja de  $10^\circ$ , a mesma usada no modelo para a parcela de carregamento simétrico, tem-se:

$$F_{b1} = \frac{F_{b1h}}{\cos 10^\circ}$$

$$\sigma_{cmf} = \frac{F_{b1}}{x c} \quad (\text{III.19})$$

$$\sigma_{cmf} = \frac{M_f}{2 z c x \cos 10^\circ} , \quad (\text{III.20})$$

A soma desta tensão com a devida ao carregamento I não poderá ultrapassar a resistência do concreto dada por  $\nu_c f_c$ .

$$\nu_c f_c \geq \sigma_{co} + \sigma_{cmf} , \quad (\text{III.21})$$

onde  $\sigma_{co}$  representa a tensão devida ao carregamento I.

Pela expressão II.5,

$$\sigma_{co} = \frac{P_o}{2\pi r_o x \tan 10^\circ \xi} ,$$

A partir desta expressão e das III.20 e III.21, chega-se a:

$$P_o = P + \frac{M_f \pi r_o}{c z} \xi \frac{\tan 10^\circ}{\cos 10^\circ}, \quad (\text{III.22})$$

onde

$$r_o = \frac{c + c_t}{\pi}$$

Então,

$$P = P_o - 0,18 \frac{c + c_t}{c} \frac{M_f \xi}{z}, \quad (\text{III.23})$$

ou

$$M_f = \frac{P_o - P}{0,18} \frac{c}{c + c_t} \frac{z}{\xi} \quad (\text{III.24})$$

Para pilares quadrados, tem-se:

$$P = P_o - 0,36 \frac{M_f \xi}{z}, \quad (\text{III.25})$$

ou,

$$M_f = \frac{\Delta P z}{0,36 \xi} \quad (\text{III.26})$$

Para o braço de alavanca  $z$  adota-se o mesmo valor utilizado no modelo teórico do item II.1.1, ou seja,  $z = d - 0,45x$ .

### III.5.2 - PARCELA DEVIDO AO CISALHAMENTO VERTICAL ( $M_{cv}$ )

Esta parcela do momento advém das componentes verticais das forças nas bielas  $b_1$  e  $b_1'$  ( $F_{b1v}$ ) mostradas na figura 3.9. Utilizando-se um braço de alavanca igual à

dimensão  $c_t$  do pilar, obtém-se:

$$M_{CV} = F_{b1} \operatorname{sen}10^\circ c_t$$

Como:

$$F_{b1} = \frac{F_{b1h}}{\cos 10^\circ} = \frac{M_f}{2z \cos 10^\circ}, \quad (\text{III.28})$$

tem-se que:

$$M_{CV} = \frac{M_f}{2z} \tan 10^\circ c_t,$$

ou, com  $M_f$  dado pela equação (III.24),

$$M_{CV} = \frac{0,98}{2\xi} (P_o - P) \frac{c c_t}{c + c_t}$$

$$M_{CV} = \frac{0,49}{\xi} (P_o - P) \frac{c c_t}{c + c_t} \quad (\text{III.29})$$

### III.5.3 PARCELA DE TORÇÃO ( $M_t$ )

A parcela do momento devida à torção nas faces do pilar advém das forças nas bielas  $b_2$  e  $b_2'$  da figura 3.8. Estas bielas ocorrem devido à existência de uma fissuração diagonal característica de efeito de torção nesta região, conforme já mostrado na figura 3.1.

As bielas  $b_2$  e  $b_2'$  representam todas as bielas que efetivamente ocorrem nesta região, mostradas esquematicamente na figura 3.10.

A componente horizontal das forças na biela,  $F_h$ , conforme mostrado na figura 3.12, é contrabalançada pela força de compressão na laje. A componente vertical  $F_v$  multiplicada pelo braço de alavanca  $z_t$  fornece o momento torsor, enquanto a componente que resta,  $F_n$ , interfere na resistência à punção da peça.

Para a definição do momento torsor resistido pela ligação é necessário, portanto, o cálculo das componentes  $F_v$  e  $F_n$  da força na biela  $b_2$ .

A região considerada resistente a torção é definida pela dimensão  $(c_t + 2d)$  mostrada na figura 3.10. Esta escolha arbitrária baseia-se na existência de uma continuidade entre o pilar e a laje, ou seja, na ausência de restrição que impeça a armadura imediatamente ao lado do pilar de contribuir para a resistência a torção desta região. Evidentemente, a partir de uma certa distância do pilar, já não haverá nenhuma contribuição da armadura. Considerou-se, portanto, uma largura igual à altura efetiva da laje para cada lado do pilar.

A força na biela deverá atingir o pilar na altura do centróide da região de compressão, que é considerada retangular conforme mostrado na figura 3.11, o que se assemelha com a análise elástica de MAST vista anteriormente.

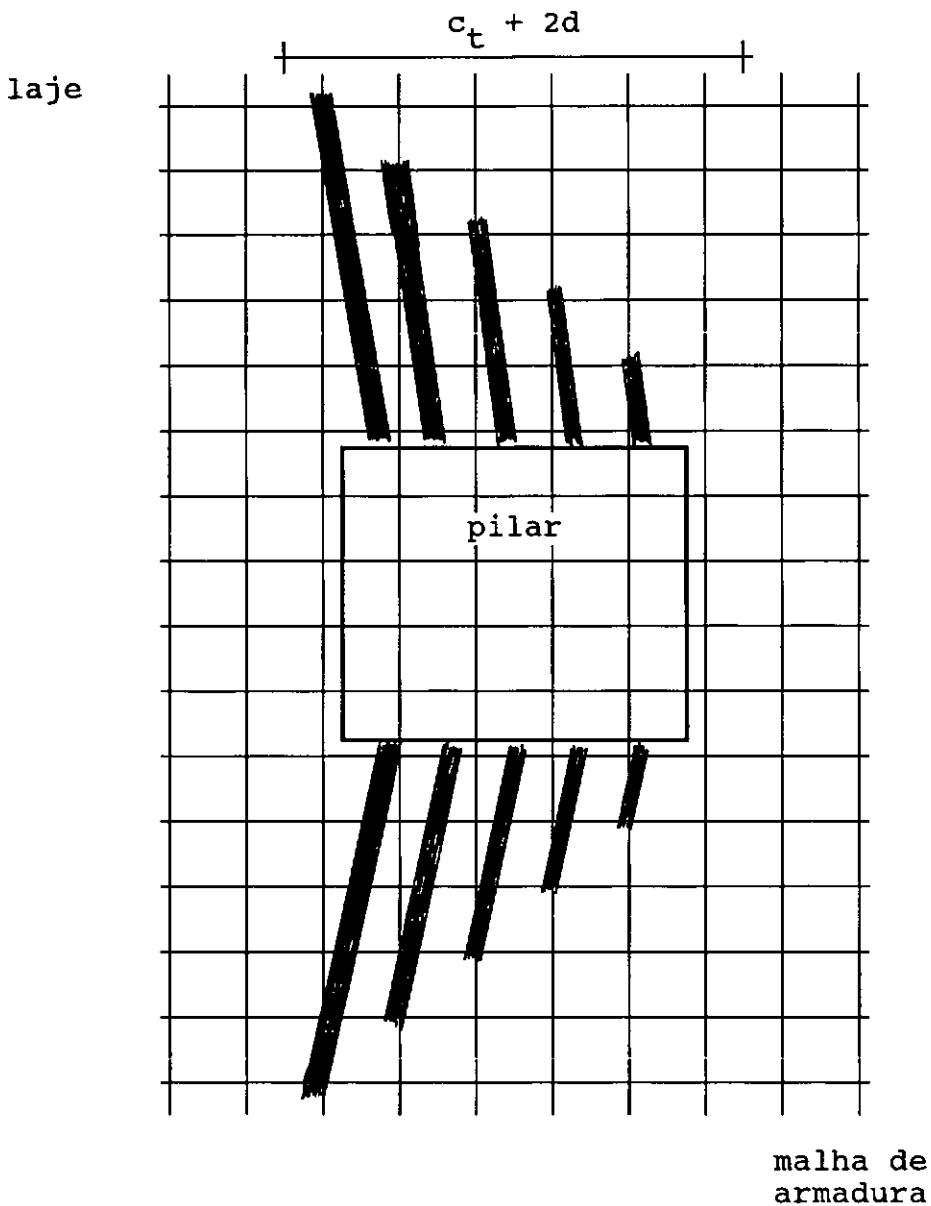


Fig. 3.10 - Esquema das bielas de torção

O valor arbitrário de  $d$  a partir da face do pilar, definido para considerar a parcela de armação que não cruza o pilar mas auxilia na resistência à torção, tem que ser limitado à metade da dimensão  $c_t$  do pilar, de forma que o ponto de aplicação da resultante acima descrita fique sempre na face do pilar.

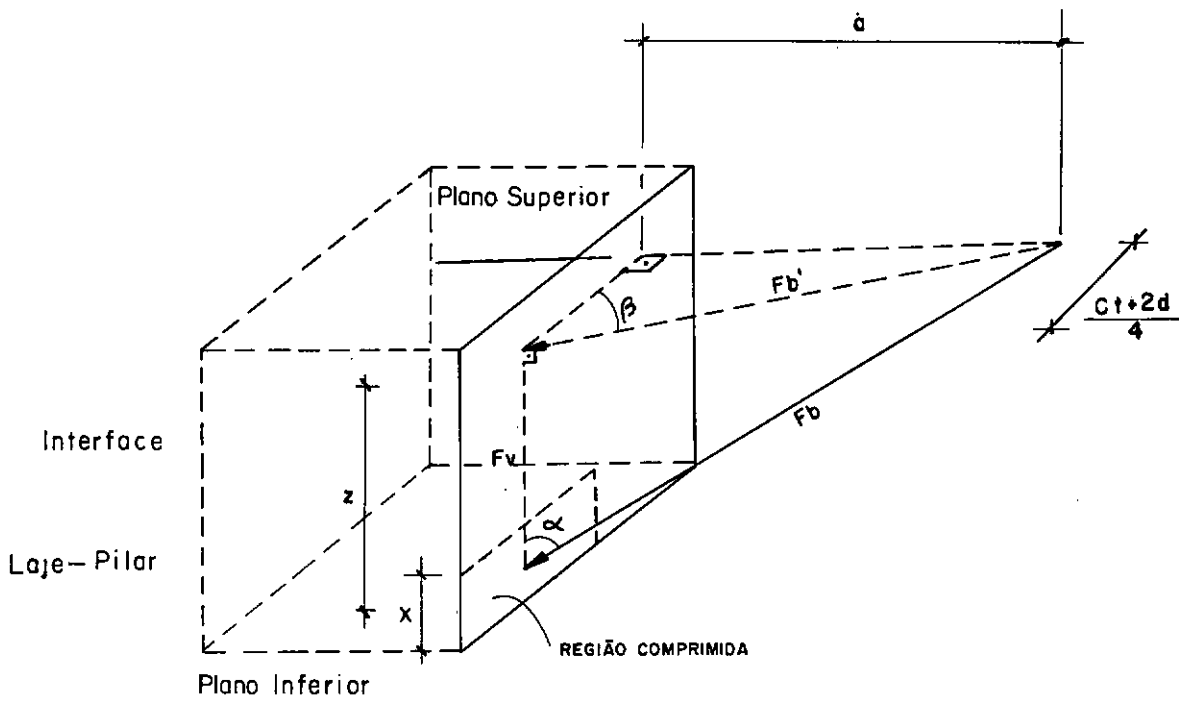


FIG. 3.11 - FORÇAS NA BIELA DE TORÇÃO

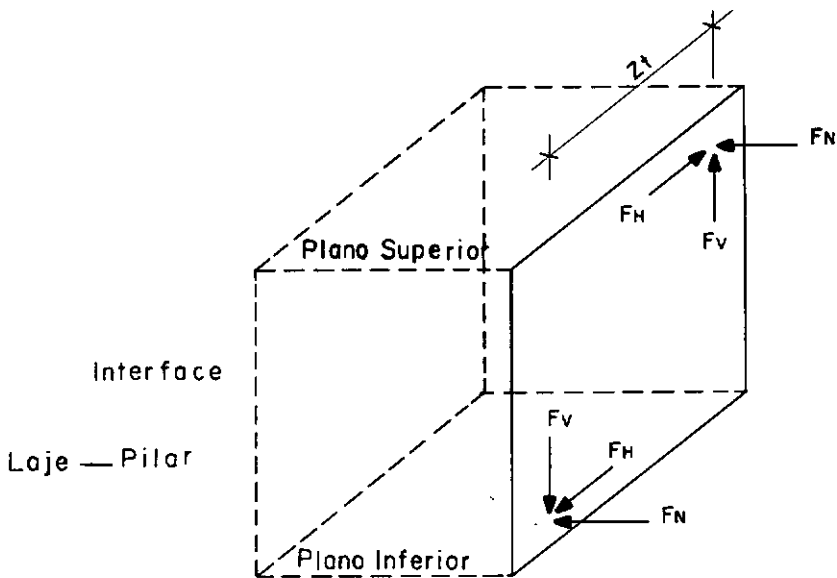


FIG. 3.12 - COMPONENTES DAS FORÇAS NA BIELA DE TORÇÃO

O cálculo das componentes da força na biela  $F_b$  se dá a partir do polígono de forças representado na figura 3.13, e da parcela  $\rho_t$  da armadura que que corta a biela, que resiste à torção.

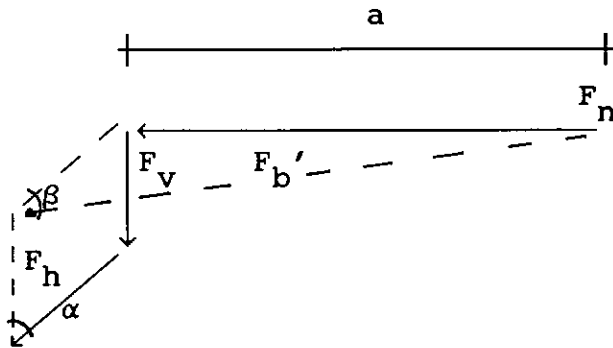


Fig. 3.13 - Componentes de  $F_b$

O valor da taxa de armadura que resiste à torção,  $\rho_t$ , é calculado a partir do conhecimento que a carga a punção é proporcional à raiz quadrada da taxa de armadura, conforme já visto no capítulo II. Desta forma:

$$\rho = \rho_t + \rho_I,$$

onde  $\rho_I$  representa a parcela de  $\rho$  necessária para a parcela I do carregamento.

Então:

$$P = k \rho_I^{1/2}$$

$$P_O = k \rho^{1/2}$$

$$\frac{P}{P_O} = \left( \frac{\rho_I}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$\rho_I = \rho \left( \frac{P}{P_O} \right)^2$$

$$\rho_t = \rho \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_o} \right)^2 \right] \quad (\text{III.29})$$

As componentes  $F_n$  e  $F_h$  de  $F_b$ , mostradas na figura 3.13, serão calculadas considerando que  $F_n$  é dada pelo escoamento da armadura, ou seja:

$$F_n = \rho_t d f_y (c_t + 2d)$$

$$F_h = \rho_t d f_y (c_t + 2d) / \tan\beta$$

Sabendo-se que:

$$F_b'^2 = F_n^2 + F_h^2$$

logo,

$$F_b' = \rho_t d f_y (c_t + 2d) \left[ 1 + \left( \frac{1}{\tan\beta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$F_b' = \frac{\rho_t d f_y (c_t + 2d)}{\text{sen}\beta} , \quad (\text{III.30})$$

ou então:

$$F_b' = \frac{F_n}{\text{sen}\beta} ,$$

A componente  $F_v$  é dada por:

$$F_v = \frac{F_b'}{\tan\alpha} = \frac{F_n}{\text{sen}\beta \tan\alpha} = \frac{F_n z}{a} , \quad (\text{III.31})$$

sendo  $\alpha$  o ângulo mostrado nas figuras 3.11 e 3.12, e a dimensão "a" (figura 3.11) dada pela seguinte expressão:

$$a = \frac{c_t + 2d}{4 \tan(\beta)} ,$$

onde  $\beta$  é o ângulo representado na figura 3.11. Para malhas isotrópicas:

$$a = \frac{c_t + 2d}{2}$$

O braço de alavanca  $z_t$  é dado por:

$$z_t = (c_t + 2d)/4$$

Sendo

$$M_{t1} = 2 F_v z_t,$$

tem-se

$$M_{t1} = \frac{F_n z (c_t + 2d)}{2a} = F_n z, \text{ para armações}$$

isotrópicas. (III.32)

Como a torção atua em duas faces:

$$M_t = 2 M_{t1}, \text{ ou}$$

$$M_t = 2 F_n z \quad \text{(III.33)}$$

Com  $F_n$  igual ao menor valor obtido a partir das seguintes expressões:

$$F_n = \rho_t d f_y (c_t + 2d), \quad \text{(III.34)}$$

ou

$$F_n = (0,5 c_t + d) \times \left( 1 - \frac{P}{P_o} \right) v_c f_c, \quad \text{(III.35)}$$

A expressão III.34 assume a plastificação total da armadura, enquanto a expressão III.35 representa a força máxima a que a região em questão pode estar submetida sem

atingir a carga de ruptura por punção.

#### III.5.4 CASOS PARTICULARES

O método proposto, que faz a superposição de modelos para as parcelas I e II do carregamento, considera o caso de momento puro transferido, exigindo a presença de armação nas faces superior e inferior da laje. Entretanto, a parcela de cortante transferida reduz a necessidade de armação em uma das faces. Desta forma, dependendo do nível de momento a ser transferido, pode-se ter malhas diferentes em cada face, ou até mesmo não se colocar uma malha em uma das faces.

A seguir apresentam-se as alterações que devem ser feitas no método para que possa ser utilizado para estes casos particulares.

##### a) Malhas diferentes em cada face da laje

Neste caso, a equação que representa a parcela  $M_f$  (expressão III.24) advém da resistência do concreto na face mais comprimida dada pela expressão definida no item II.1, porém com a diminuição da armação na outra face, esta pode se tornar a região crítica, desta forma:

$$\nu_c f_c = \sigma_{cmf} - \sigma_{co} ,$$

com  $\sigma_{co}$  a partir da expressão II.5, e  $\sigma_{cmf}$  dada pela expressão III.19.

Seguindo a mesma seqüência de cálculo apresentado no item III.4.1, chega-se a:

$$M_f = \frac{P_o' + P}{0,18} \frac{c}{c + c_t} \frac{z'}{\xi} \quad (\text{III.36})$$

com  $P_o'$  e  $z'$  calculados considerando a taxa de armação reduzida.

A parcela  $M_{cv}$  também deverá ser modificada da seguinte forma:

$$M_{cv} = \frac{0,49}{\xi} (P_o' + P) \frac{c c_t}{c + c_t} \quad (\text{III.37})$$

Com relação a parcela  $M_t$ , no cálculo de  $F_n$  deve-se considerar a taxa  $\rho_t$  calculada segundo a expressão III.29 ou então a menor taxa de armadura das malhas se esta for menor que  $\rho_t$ .

#### b) Inexistência de uma das malhas

As expressões acima desenvolvidas para  $M_f$  e  $M_{cv}$  permanecem válidas, porém o valor de  $P_o'$  se anula. Entretanto, se for levada em consideração a resistência à tração do concreto, pode-se determinar um taxa de armadura

fictícia que permita calcular  $P_o'$ .

$F_{aço} = A_s f_y = 2\pi (r_o + 2,75d) d \rho f_y$ ,  
admitindo-se o cone de punção com ângulo de  $20^\circ$ .

O diagrama de deformações acima da linha neutra é considerado linear e portanto:

$$F_{concreto} = f_t \frac{2\pi(r_o + 2,75d) (d - x)}{2}$$

Igualando-se  $F_{aço}$  com  $F_{concreto}$  chega-se a:

$$\rho'_{fict} = \frac{(d - x) f_t}{2d f_y} \quad , \quad (III.38)$$

Substituindo  $x$  pela equação II.7 tem-se:

$$2\rho'_{fict} \frac{f_y}{f_t} = 1 - 0,67 \left( \rho'_{fict} \frac{f_y}{f_c} \right)^{1/2}$$

$$\frac{2 f_y}{f_t} \rho'_{fict} + 0,67 \left( \frac{f_y}{f_c} \right)^{1/2} \rho'_{fict}^{1/2} - 1 = 0$$

(III.39)

equação que define o valor de  $\rho'_{fict}$ .

Com relação a  $M_t$ , a inexistência de uma malha resulta na incapacidade da formação das bielas. Neste caso, leva-se em consideração a tração do concreto fazendo com que a biela de compressão possa ocorrer.

Para tanto, calcula-se uma taxa de armadura fictícia correspondente à parcela de concreto da seguinte forma:

$$F_n = A_{\text{conc}} f_t$$

Sendo,

$$A_{\text{conc}} = (c_t + 2d) 2d' \quad (\text{dada na figura 3.14}),$$

tem-se:

$$F_n = (c_t + 2d) 2d' f_t = \rho_{f i c} d (c_t + 2d) f_y$$

onde

$$\rho_{f i c} = \frac{2d'}{d} \frac{f_t}{f_y}, \quad (\text{III.40})$$

ou, quando  $2d' > d/2$

$$\rho_{f i c} = \frac{f_t}{2 f_y} \quad (\text{III.41})$$

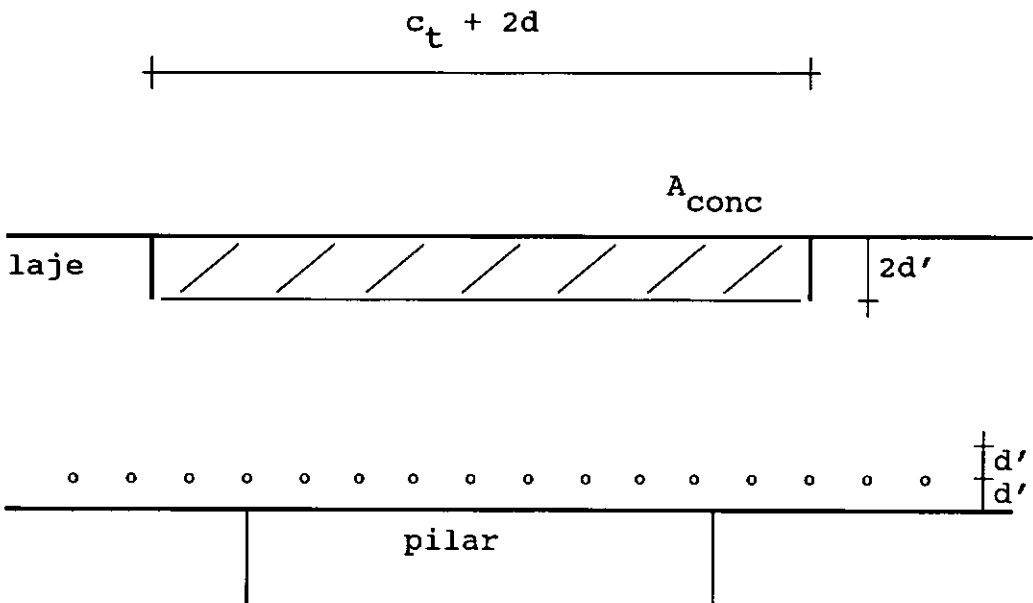


Fig. 3.14 - Área de concreto para efeito de armadura fictícia de torção

Como valor da resistência à tração do concreto,

indica-se a expressão abaixo, apresentada no código-modelo CEB-FIP/90.

$$f_{tmin} = 0,95 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{2/3} \quad (\text{valores em MPa}) \quad (\text{III.42})$$

### III.5.5 FORMULAÇÃO GERAL

A partir dos itens anteriores pode-se esquematizar o cálculo genérico da interação carga vertical x momento transferidos ao pilar.

$$M_f \leq \begin{cases} \frac{P_o' + P}{0,18} \frac{c}{c + c_t} \frac{z'}{\xi} & (\text{III.43}) \\ \frac{P_o - P}{0,18} \frac{c}{c + c_t} \frac{z}{\xi} & (\text{III.44}) \end{cases}$$

$$M_{cv} \leq \begin{cases} \frac{0,49}{\xi} (P_o' + P) \frac{c c_t}{c + c_t} & (\text{III.45}) \\ \frac{0,49}{\xi} (P_o - P) \frac{c c_t}{c + c_t} & (\text{III.46}) \end{cases}$$

$$M_t \leq \begin{cases} 2 z \rho_o d f_y (c_t + 2d) & (\text{III.47}) \\ 2 z (0,5 c_t + d) \times \left( 1 - \frac{P}{P_o} \right) v_c f_c & (\text{III.48}) \end{cases}$$

onde:

$\rho_o$  = menor entre os valores de  $\rho_t$  e  $\rho'$  e  $\rho_{fic}$ , este último se não houver armadura em uma das faces da laje.

A partir de  $M_f$ ,  $M_{cv}$  e  $M_t$ , obtem-se M:

$$M_{TOT} = M_f + M_{cv} + M_t \quad (III.49)$$

Analisando-se as expressões anteriores, verifica-se que a curva de interação cortante x momento transferidos para o pilar, para o caso de duas malhas iguais, pode ser:

- uma curva parabólica,
- uma reta ou
- uma reta em um trecho e uma parábola em outro trecho.

A soma de  $M_f$  com  $M_{cv}$  assume a forma linear ( $K - K_1 P$ ), porém a parcela  $M_t$  pode ser originada de duas equações diferentes, uma linear (III.48) e a outra parabólica (III.47). O ponto de modificação da curva é dado por:

$$\rho \left( 1 - \left( \frac{P}{P_o} \right)^2 \right) d f_y (c_t + 2d) = (0.5c_t + d) x \left( 1 - \frac{P}{P_o} \right) v_c f_c \quad (III.50)$$

Substituindo o valor de x pela equação II.7 chega-se

a:

$$\frac{P}{P_0} = 0,33 \nu_c \left( \frac{f_c}{\rho f_y} \right)^{1/2} - 1 \quad (\text{III.51})$$

Para valores de  $P/P_0$  superiores aos dados pela expressão III.51, a curva de interação é linear e para valores inferiores a curva é parabólica.

Portanto, se a relação  $P/P_0$  dada pela expressão III.51 tiver um valor superior a 1, a curva de interação será totalmente linear. Se tiver um valor negativo, a curva de interação será parabólica. Para valores de  $P/P_0$  entre 0 e 1 a curva de interação será inicialmente parabólica e passará depois a ser linear.

A figura 3.15 representa as 3 curvas de interação possíveis de ocorrer para uma laje e pilar tendo os seguintes parâmetros.

$$f_c = 35 \text{ MPa}$$

$$c = c_t = 150 \text{ mm}$$

$$d = 70 \text{ mm}$$

e tres relações  $\rho f_y$ .

$$\text{Caso 1} \quad \rho = 1\% \quad , \quad f_y = 500 \text{ MPa}$$

$$\text{Caso 2} \quad \rho = 1\% \quad , \quad f_y = 250 \text{ MPa}$$

$$\text{Caso 3} \quad \rho = 2\% \quad , \quad f_y = 600 \text{ MPa}$$

Verifica-se que a curva de interação só pode ser considerada linear quando a resistência a escoamento do

aço não é atingida em nenhum caso, ou seja, a ruptura se dá por esmagamento do concreto na região comprimida em todas as faces do pilar, ruptura típica de punção.

Ocorre, entretanto, que o mais usual é a combinação de dois efeitos, ou seja, na face do pilar onde há flexão, ocorre esmagamento do concreto, enquanto na face onde há torção, dependendo do valor do momento transferido pode ocorrer, além do esmagamento do concreto, o escoamento do aço.

### III.6 ESTUDOS EXPERIMENTAIS

A seguir serão descritos, resumidamente, alguns ensaios realizados visando o estudo da transfêrencia de momento ao pilar. Nos ensaios relacionados houve ruptura por punção.

#### III.6.1 ENSAIOS DE STAMENKOVIC & CHAPMAN [15]

STAMENKOVIC & CHAPMAN ensaiaram lajes quadradas de 915 mm de lado, sendo sete lajes apoiadas em pilares com seção transversal quadrada e seis em pilares com seção transversal retangular. A tabela III.3 fornece os dados geométricos das lajes e as cargas de ruptura.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
M/I/1	29.3	434	1.17	1.17	127	127	56	20	-	18.3
M/I/2	30.4	434	1.17	1.17	127	127	56	20	-	17.6
C/I/4	26.1	434	1.17	1.17	127	127	56	20	21	16.6
C/I/3	26.6	434	1.17	1.17	127	127	56	20	34	13.6
C/I/2	30.9	434	1.17	1.17	127	127	56	20	62	10.5
C/I/1	37.5	434	1.17	1.17	127	127	56	20	84	7.4
V/I/2	27.0	434	1.17	1.17	127	127	56	20	117	-
M/Ir/1	27.1	414	1.17	1.17	76	152	56	20	-	18.6
C/Ir/4	27.7	414	1.17	1.17	76	152	56	20	22	16.8
C/Ir/3	29.8	414	1.17	1.17	76	152	56	20	40	15.7
C/Ir/2	30.5	414	1.17	1.17	76	152	56	20	67	10.9
C/Ir/1	23.6	414	1.17	1.17	76	152	56	20	86	7.3
V/Ir/1	26.2	414	1.17	1.17	76	152	56	20	109	-

Tabela III.3 - Ensaaios de STAMENKOVIC &amp; CHAPMAN

## III.6.2 ENSAIOS DE SHEHATA [16]

SHEHATA ensaiou 5 lajes quadradas com 1600 mm de lado. A tabela III.4 fornece os dados destas lajes e as cargas de ruptura observadas.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
1	28.2	600	1.37	-	150	150	95	40	265	-
2	29.5	600	1.37	-	150	150	95	40	270	-
3	22.0	600	1.37	-	150	150	95	40	233	11.7
4	26.7	600	1.37	-	150	150	95	40	210	14.8
5	25.3	600	1.37	-	150	150	95	40	200	20.0

Tabela III.4 - Ensaaios de SHEHATA

## III.6.3 ENSAIOS DE ISLAM &amp; PARK [17]

ISLAM & PARK ensaiaram duas lajes retangulares de 2286 mm x 3048 mm com o momento atuando na face do pilar paralela ao menor lado. A tabela III.5 fornece os dados principais destas lajes e as cargas de ruptura observadas.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
1	27.3	356	1.15	0.57	229	229	70	19	36	30.5
2	31.9	374	1.15	0.57	229	229	70	19	36	37.7

Tabela III.5 - Ensaaios de ISLAM &amp; PARK

## III.6.4 ENSAIOS DE HANSON &amp; HANSON [13]

Lajes retangulares de 2134 mm x 1219 mm com o momento

atuando na face do pilar paralela ao menor lado, foram ensaiadas por HANSON 7 HANSON. Três lajes eram apoiadas em pilares com seção transversal quadrada e quatro em pilares com seção transversal retangular. Seus dados são apresentados na tabela III.6.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
A1	30.3	365	1.64	1.64	152	152	57	19	6	22.3
A12	33.2	372	1.64	1.64	152	152	57	19	27	20.5
B7	33.0	354	1.64	1.64	152	305	57	19	5	35.7
B16	30.4	341	1.64	1.64	152	305	57	19	34	27.3
C8	32.8	411	1.64	1.64	305	152	57	19	6	31.4
C17	36.0	341	1.64	1.64	305	152	57	19	32	24.7

Tabela III.6 - Ensaaios de HANSON & HANSON

### III.6.5 ENSAIOS DE MOE [18]

MOE ensaiou lajes quadradas de 1829 mm de lado apoiadas em pilares com seção transversal quadrada. A tabela III.7 fornece seus dados.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
M1A	20.8	481	1.51	-	305	305	114	38	433	-
M2A	15.5	481	1.51	-	305	305	114	38	213	39.4
M4A	17.7	481	1.51	-	305	305	114	38	144	62.4
M2	25.7	481	1.51	-	305	305	114	38	292	57.1
M3	22.7	481	1.51	-	305	305	114	38	207	70.0
H1	26.1	328	1.14	-	254	254	114	38	371	-
M6	26.5	328	1.33	-	254	254	114	38	239	40.2
M7	25.0	328	1.33	-	254	254	114	38	311	19.0
M8	24.6	328	1.33	0.57	254	254	114	38	150	65.3
M9	23.2	328	1.33	-	254	254	114	38	267	33.9
M10	21.1	328	1.33	0.57	254	254	114	38	178	54.8

Tabela III.7 - Ensaaios de MOE

## III.6.6 ENSAIOS DE GHALI, ELMASRI &amp; DILGER [19]

Foram ensaiadas lajes quadradas de 1829 mm de lado apoiadas em pilares com seção transversal quadrada. Os dados destas lajes constam da tabela III.8.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
SM0.5	36.8	476	0.50	0.17	305	305	121	32	129	100.3
SM1.0	33.4	476	1.00	0.33	305	305	121	32	129	127.5
SM1.5	40.0	476	1.50	0.50	305	305	121	32	129	132.9

Tabela III.8 - Ensaaios de GHALI et al

## III.6.7 ENSAIOS DE HAWKINGS, BAO &amp; YAMASAKI [20]

As lajes ensaiadas eram quadradas tendo 2134 mm de lado; 17 eram apoiadas em pilares com seção transversal quadrada e 3 em pilares com seção transversal retangular. As seções retangulares possuíam o mesmo perímetro que as quadradas e a razão entre os lados era de 2, 3 e 0,5. A tabela III.9 mostra os demais dados dos ensaios.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$\rho'$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$d'$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
6AH	31.3	472	0.55	0.25	305	305	121	32	169	90.4
9.6AH	30.7	415	0.88	0.46	305	305	118	35	187	97.7
14AH	30.3	420	1.31	0.55	305	305	114	38	205	100.2
6AL	22.7	472	0.55	0.25	305	305	121	32	244	32.7
9.6AL	28.9	415	0.88	0.46	305	305	118	35	257	34.6
14AL	27.0	420	1.31	0.55	305	305	114	38	319	43.3
7.3BH	22.2	472	0.67	0.36	305	305	83	32	80	39.0
9.5BH	19.8	472	0.93	0.43	305	305	83	32	94	45.4
14.2BH	29.5	415	1.31	0.67	305	305	80	35	102	51.0
7.3BL	18.1	472	0.67	0.36	305	305	83	32	130	12.8
9.5BL	20.0	472	0.93	0.43	305	305	83	32	142	16.6
14.2BL	20.5	415	1.31	0.67	305	305	80	35	162	20.9
6CH	52.4	472	0.55	0.25	305	305	121	32	186	95.1
9.6CH	57.2	415	0.88	0.46	305	305	118	35	218	113.1
14CH	54.7	420	1.31	0.55	305	305	114	38	252	133.3
6CL	49.5	472	0.55	0.25	305	305	121	32	273	36.8
14CL	47.7	420	1.31	0.55	305	305	114	38	362	49.4
9.6GH2	24.7	415	0.88	0.46	203	406	118	35	165	82.3
96GH05	26.3	415	0.88	0.46	406	203	118	35	182	89.6
9.6GH3	27.0	415	0.88	0.46	152	457	118	35	165	83.4

Tabela III.9 - Ensaios de HAWKINGS et al

### III.7 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DO MÉTODO DE CÁLCULO PROPOSTO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Na tabela III.10 é feita a comparação de resultados experimentais com os obtidos utilizando-se a formulação anteriormente desenvolvida.

Para o cálculo da carga última correspondente ao carregamento simétrico ( $P_o$ ) utilizou-se, quando possível, resultados obtidos pelos próprios pesquisadores, fazendo-se a necessária correção devida à variação de  $f_c$ . Quando não se tinha o valor de  $P_o$  experimental, calculou-se  $P_o$  utilizando-se a formulação apresentada em II.2.1a.

Para a relação entre os momentos obtidos pelo método proposto e os experimentais obteve-se a média de 1,06 com desvio padrão de 0,34 para o caso de pilares com seção quadrada. No caso de malha igual nas duas faces da laje, obteve-se uma média de 0,95 com desvio padrão de 0,09.

No caso de pilares com seção retangular havendo momento atuando na face mais larga do pilar, a média obtida para essa relação foi de 0,70 com desvio padrão de 0,16. Verifica-se, portanto que o método proposto não fornece tão bons resultados como no caso de pilares de seção quadrada.

Nas figuras 3.16 a 3.20 são representados os histogramas relativos aos casos de lajes apoiadas em pilares com seção quadrada ou retangular.

As figuras 3.21 e 3.22 apresentam a comparação das curvas de interação momento x carga vertical obtidas para as lajes ensaiadas por STAMENKOVIC & CHAPMAN, usando o método aqui proposto, com os resultados experimentais.

No caso de pilar com seção quadrada, a curva teórica fica muito próxima dos resultados experimentais. Para o caso de pilares com seção retangular a curva teórica se mostra conservadora.

Na tabela III.11, são mostrados os valores da relação entre o momento máximo a ser transferido obtido segundo indicações de três normas comentadas anteriormente, e o verificado em ensaios. Para  $P_0$ , foram considerados os valores máximos prescritos pelas normas.

Para as lajes ensaiadas por STAMENKOVIC & CHAPMAN, apresenta-se na figura 3.23, uma comparação entre a curva de interação obtida segundo indicações de normas com os dados experimentais. Pode-se observar nessa figura que as formulações indicadas pelas normas não representam a curva de interação da carga vertical e do momento transferidos simultaneamente ao pilar. O fator de segurança real varia conforme a proporção  $P/P_0$  ou  $M/M_0$ , embora os valores calculados sejam conservadores.

Laje no.	$P_o$ kN	$M_e$ kN m	$M_{mod}$ kN m	$M_{mod} / M_e$
<b>Pilares Seção Quadrada Malha Dupla Igual</b>				
o Stamenkovic & Chapman				
M/I/1	121	18.3	16.3	0.89
M/I/2	122	17.6	16.4	0.93
C/I/4	116	16.7	13.9	0.83
C/I/3	117	13.6	12.5	0.91
C/I/2	123	10.5	9.3	0.89
C/I/1	131	7.3	7.3	1.00
o Hanson & Hanson				
A1	174	22.3	23.4	1.05
A12	183	20.5	22.5	1.10
			Média	0.95
			Desvio Padrão	0.09
<b>Pilares Seção Quadrada Malha Dupla Desigual</b>				
o Islam & Park				
1	211	30.5	27.3	0.89
2	234	37.7	30.5	0.81
o Moe				
M8	389	65.3	70.6	1.08
M10	360	54.8	58.0	1.06
o Ghali et al				
SM0.5	408	100.3	79.0	0.79
SM1.0	549	127.5	120.0	0.94
SM1.5	736	132.9	172.8	1.30
o Hawkings et al				
6AH	393	90.4	70.5	0.78
9.6AH	447	97.7	84.8	0.87
14AH	528	100.2	97.8	0.98

Tabela III.10 - Resultados do Modelo e Ensaios

Laje no.	$P_o$ kN	$M_e$ kN m	$M_{mod}$ kN m	$M_{mod} / M_e$
6AL	335	32.7	33.8	1.13
9.6AL	434	34.6	65.6	1.90
14AL	498	43.3	65.4	1.51
7.3BH	235	39.0	33.4	0.86
9.5BH	261	45.4	36.2	0.80
14.2BH	339	51.0	48.5	0.95
7.3BL	212	12.8	19.5	1.52
9.5BL	262	16.6	28.3	1.70
14.2BL	284	20.9	26.9	1.28
6CH	508	95.1	95.7	1.01
9.6CH	610	113.1	117.9	1.04
14CH	709	133.3	130.9	0.98
6CL	494	36.8	71.0	1.93
14CL	663	49.4	95.3	1.93
			Média	1.17
			Desvio Padrão	0.38
Pilares Seção Quadrada Malha Simples				
o Shehata				
3	244	11.7	3.4	0.29
4	261	14.8	11.6	0.79
5	256	20.0	12.1	0.61
o Moe				
M2A	374	39.4	39.3	1.00
M4A	399	62.4	59.6	0.95
M2	481	57.1	49.8	0.87
M3	452	70.0	60.1	0.86
M6	404	40.2	44.4	1.10
M7	392	19.0	26.3	1.38

Tabela III.10 (cont.)

Laje no.	$P_o$ kN	$M_e$ kN m	$M_{mod}$ kN m	$M_{mod} / M_e$
M9	378	33.9	32.0	0.94
			Média	0.88
			Desvio Padrão	0.29
PILAR QUADRADO			Média	1.06
			Desvio Padrão	0.34
Pilares Seção Retangular lado maior = $c_t$				
o Stamenkovic & Chapman				
M/Ir/1	110	18.6	13.0	0.70
C/Ir/4	110	16.8	11.6	0.69
C/Ir/3	113	15.7	10.2	0.65
C/Ir/2	114	10.9	6.7	0.62
C/Ir/1	104	7.3	2.5	0.35
o Hanson & Hanson				
B7	220	35.7	28.5	0.80
B16	207	27.3	22.9	0.89
o Hawkings et al				
9.6GH2	410	82.3	67.8	0.82
9.6GH3	420	83.4	64.2	0.77
			Média	0.70
			Desvio Padrão	0.16
Pilares Retangulares lado maior = c				
o Hanson & Hanson				
C8	236	31.4	35.4	1.13
C17	226	24.7	30.3	1.23
o Hawkings et al				
9.6GH0.5	414	89.6	84.2	0.94

Tabela III.10 (cont.)

Laje no.	CEB-FIP			ACI			BS		
	$P_o$ (kN)	M (kN m)	$M/M_e$	$P_o$ (kN)	M (kN m)	$M/M_e$	$P_o$ (kN)	M (kN m)	$M/M_e$
<b>PILARES SEÇÃO QUADRADA</b>									
o Stamenkovic & Chapman									
M/I/1	76	15.4	0.84	69	10.8	0.59	82	16.1	0.88
M/I/2	77	15.6	0.89	70	10.9	0.62	83	16.4	0.93
C/I/4	73	10.6	0.64	65	6.9	0.41	79	11.4	0.69
C/I/3	74	8.1	0.60	65	4.8	0.36	79	8.9	0.65
C/I/2	78	3.2	0.31	71	1.2	0.12	83	3.9	0.38
C/I/1	83	0.0	0.00	78	0.0	0.00	84	0.0	0.00
o Shehata									
3	156	0.0	0.00	145	0.0	0.00	169	0.0	0.00
4	166	0.0	0.00	160	0.0	0.00	181	0.0	0.00
5	163	0.0	0.00	155	0.0	0.00	178	0.0	0.00
o Islam & Park									
1	128	27.5	0.90	145	27.6	0.90	138	29.9	0.98
2	135	29.6	0.00	157	31.0	0.82	145	31.9	0.85
o Hanson & Hanson									
A1	96	19.9	0.89	87	14.3	0.64	101	20.4	0.92
A12	99	15.9	0.78	91	11.3	0.55	104	16.6	0.81
o Moe									
M2A	241	12.4	0.32	249	12.8	0.33	293	34.5	0.88
M4A	252	47.8	0.77	267	43.8	0.70	293	64.2	1.03
M2	286	0.0	0.00	321	10.3	0.18	314	9.5	0.17
M3	274	29.7	0.42	302	33.8	0.48	302	40.9	0.59
M6	255	6.6	0.16	287	15.1	0.38	280	16.3	0.41
M7	250	0.0	0.00	279	0.0	0.00	275	0.0	0.00
M8	249	40.6	0.62	276	39.6	0.61	274	49.2	0.75
M9	244	0.0	0.00	268	0.3	0.01	268	0.4	0.01
M10	237	24.2	0.44	256	24.5	0.45	260	32.6	0.59

Tabela III.11 - Resultados de Normas e Ensaios

Laje no.	CEB-FIP			ACI			BS		
	$P_o$ (kN)	M (kN m)	$M/M_e$	$P_o$ (kN)	M (kN m)	$M/M_e$	$P_o$ (kN)	M (kN m)	$M/M_e$
o Ghali et al									
SM0.5	240	50.8	0.51	415	103.5	1.03	256	56.5	0.56
SM1.0	293	75.1	0.59	396	96.6	0.76	322	85.9	0.67
SM1.5	356	104.0	0.78	433	110.0	0.83	369	106.8	0.80
	Média		0.45		0.43			0.54	
	Desvio Padrão		0.34		0.32			0.37	
PILARES SEÇÃO RETANGULARES LADO MAIOR = $c_t$									
o Stamenkovic & Chapman									
M/Ir/1	71	14.7	0.79	66	9.1	0.49	75	16.0	0.86
C/Ir/4	72	10.4	0.62	67	6.2	0.37	76	11.5	0.69
C/Ir/3	74	7.0	0.45	69	4.0	0.26	78	8.1	0.52
C/Ir/2	74	1.4	0.13	70	0.4	0.04	78	2.3	0.22
C/Ir/1	70	0.0	0.00	61	0.0	0.00	62	0.0	0.00
o Hanson & Hanson									
B7	121	34.2	0.96	124	26.9	0.75	129	39.3	1.10
B16	118	24.8	0.91	119	19.2	0.70	125	28.8	1.06
PILARES SEÇÃO RETANGULARES LADO MAIOR = c									
o Hanson & Hanson									
C8	121	27.5	0.88	124	28.1	0.89	129	26.4	0.84
C17	125	22.2	0.90	130	23.3	0.94	129	20.9	0.84

Tab. III.11 (cont.)

$M / M_o$

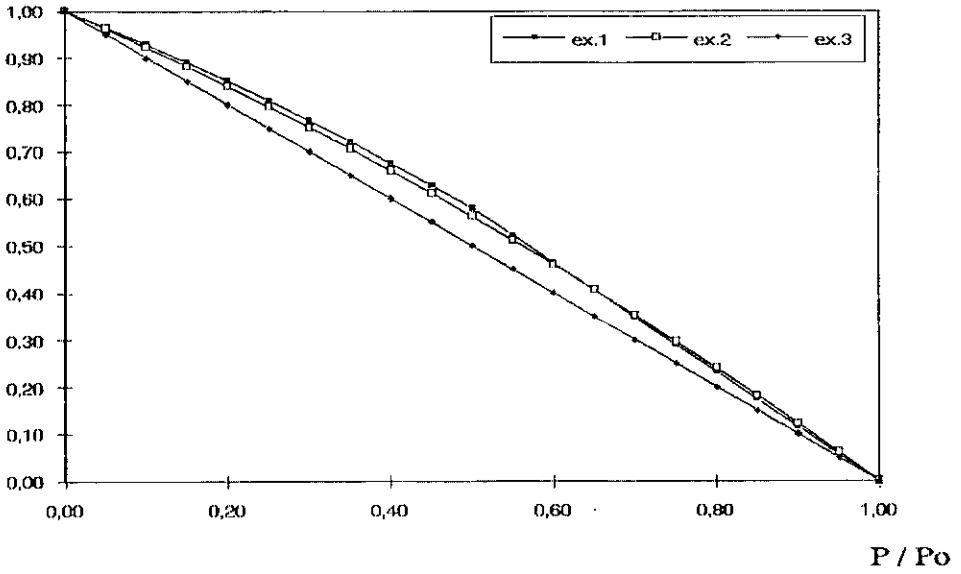


Figura 3.15 - Tipos de Curvas de Interação Obtidas do Modelo Proposto

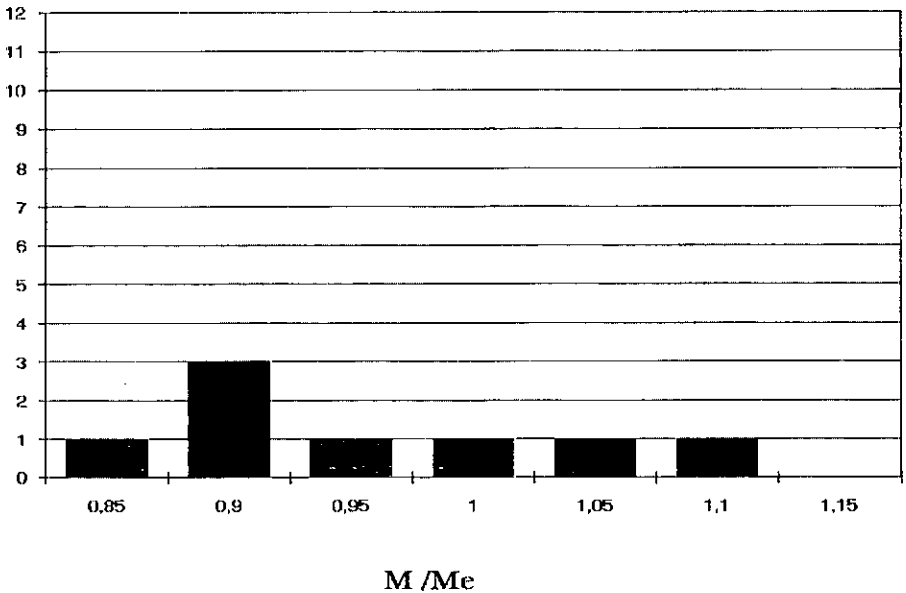


Figura 3.16 - Distribuição dos Resultados de Pilares Quadrados Armação Dupla Igual

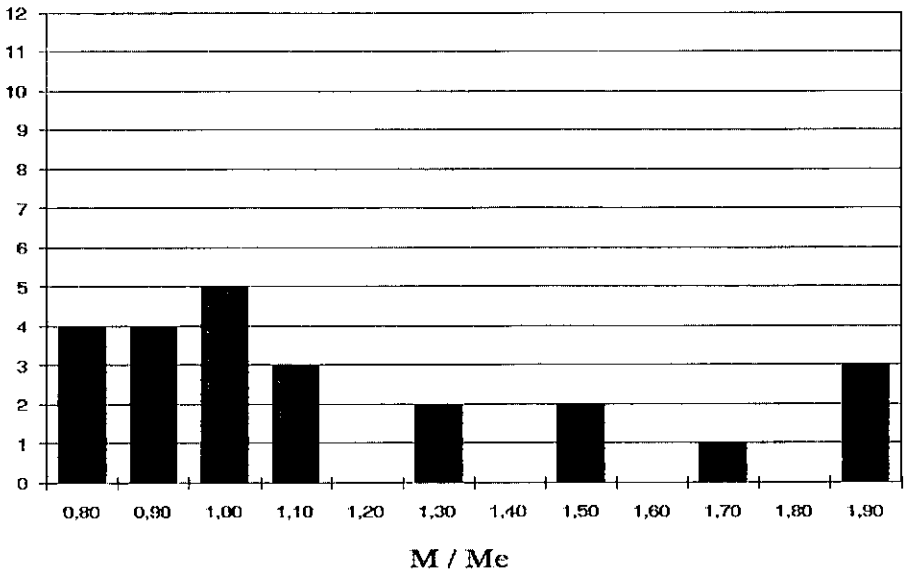


Figura 3.17 - Distribuição dos resultados de Pilares Quadrados Armação Dupla Desigual

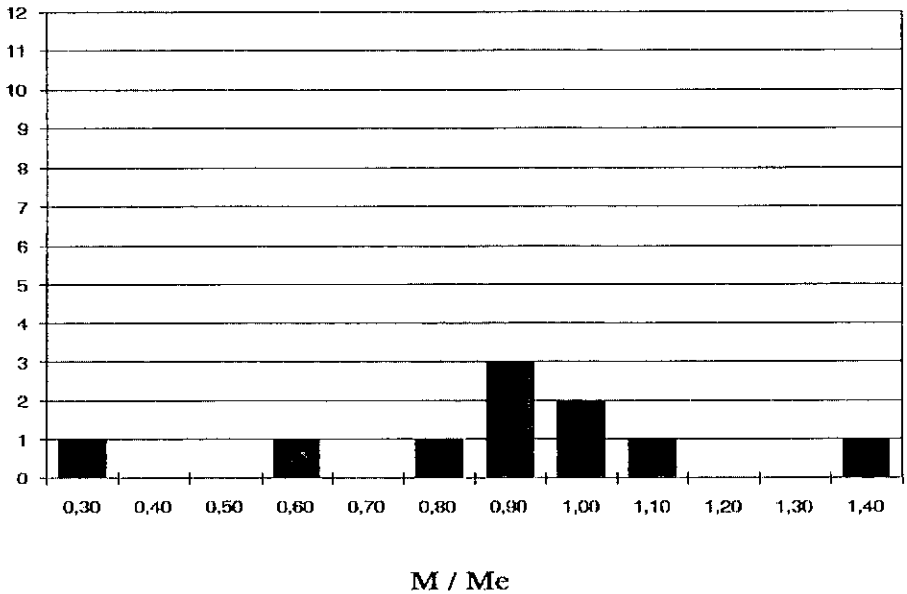


Figura 3.18 - Distribuição dos resultados de Pilares Quadrados Armação em uma Face

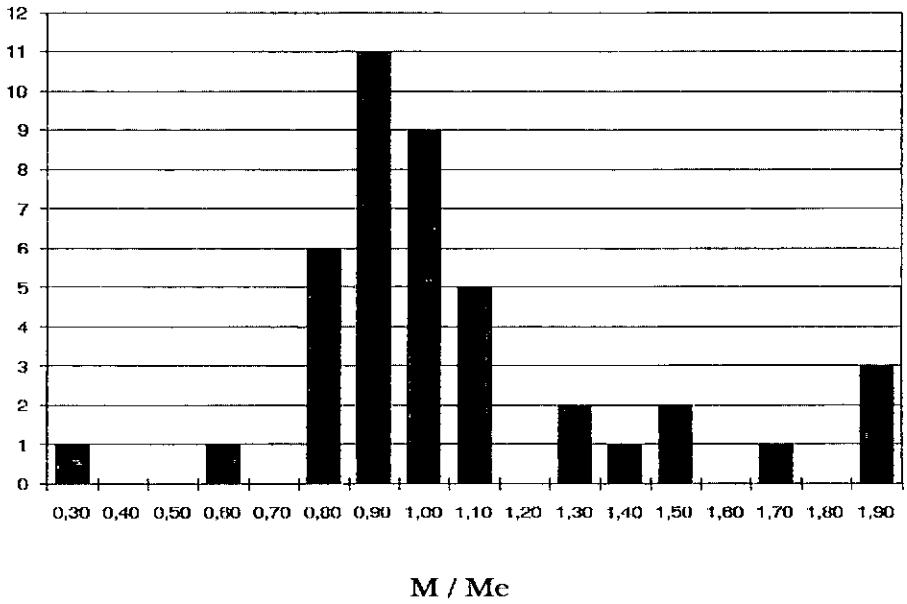


Figura 3.19 - Distribuição dos resultados de Pilares Quadrados  
Resumo

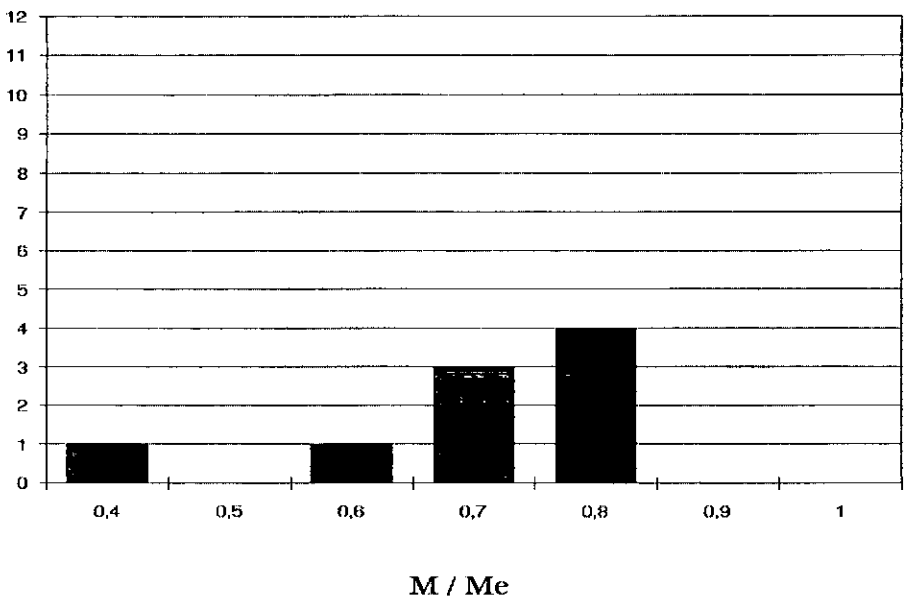


Figura 3.20 - Distribuição dos resultados de Pilares Retangulares

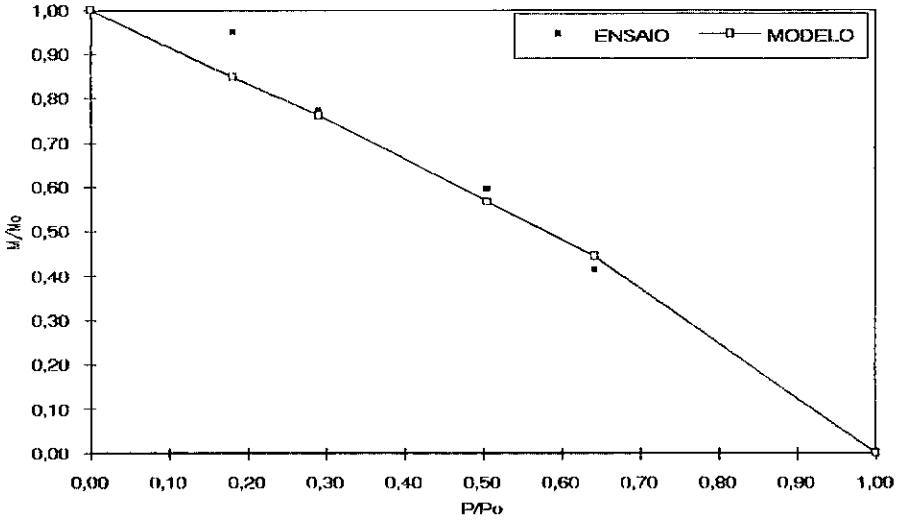


Figura 3.21 - Comparação Modelo Proposto x Resultados Experimentais Para Pilares Quadrados

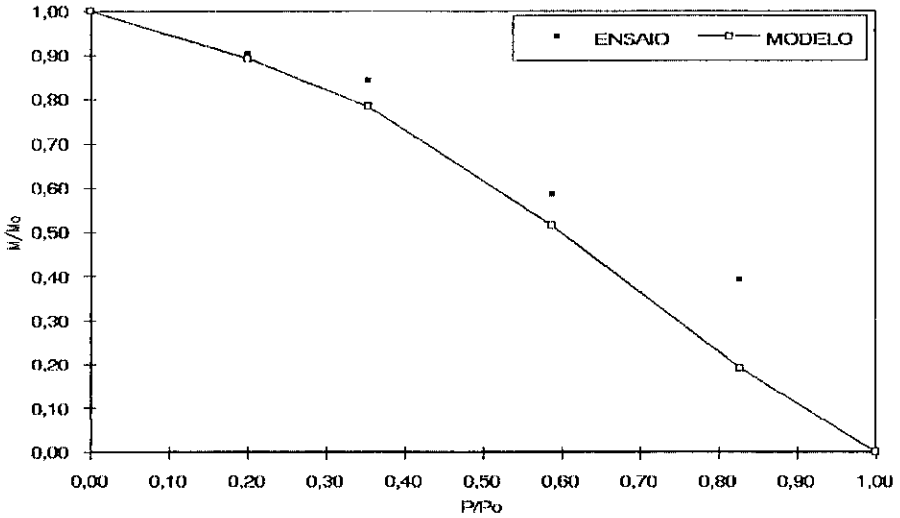


Figura 3.22 - Comparação Modelo Proposto x Resultados Experimentais Para Pilares Quadrados

M (kN m)

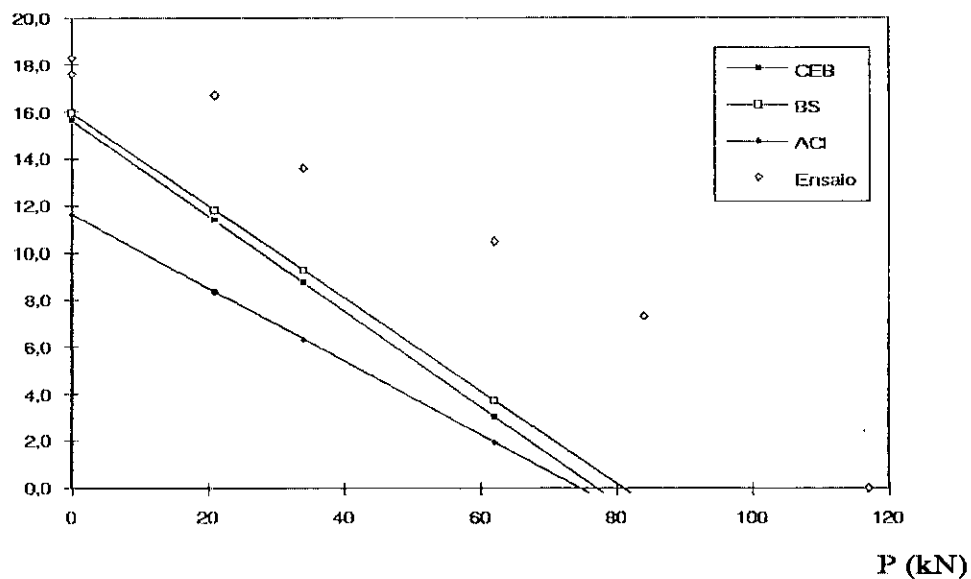


Figura 3.23 - Comparação Normas x Resultados Experimentais

## CAPITULO IV

## PUNÇÃO ASSIMETRICA - PILARES DE BORDA

## IV.1 INTRODUÇÃO

Nas ligações laje-pilar onde não existe uma viga na borda da laje, há uma transferência de momento e cortante para o pilar. Neste capítulo estuda-se a interação destes esforços.

## IV.2 REVISÃO DAS FORMULAÇÕES DESENVOLVIDAS

## IV.2.1 MÉTODO ACI - DISTRIBUIÇÃO LINEAR DAS TENSÕES DE CISCALHAMENTO -

Na figura 4.1 são representados os esforços em uma ligação laje-pilar onde a face externa do pilar coincide com a borda da laje.

Neste tipo de ligação aparecem momentos fletores na face do pilar paralela à face livre e momentos torsores na outras faces. As tensões de cisalhamento são consideradas

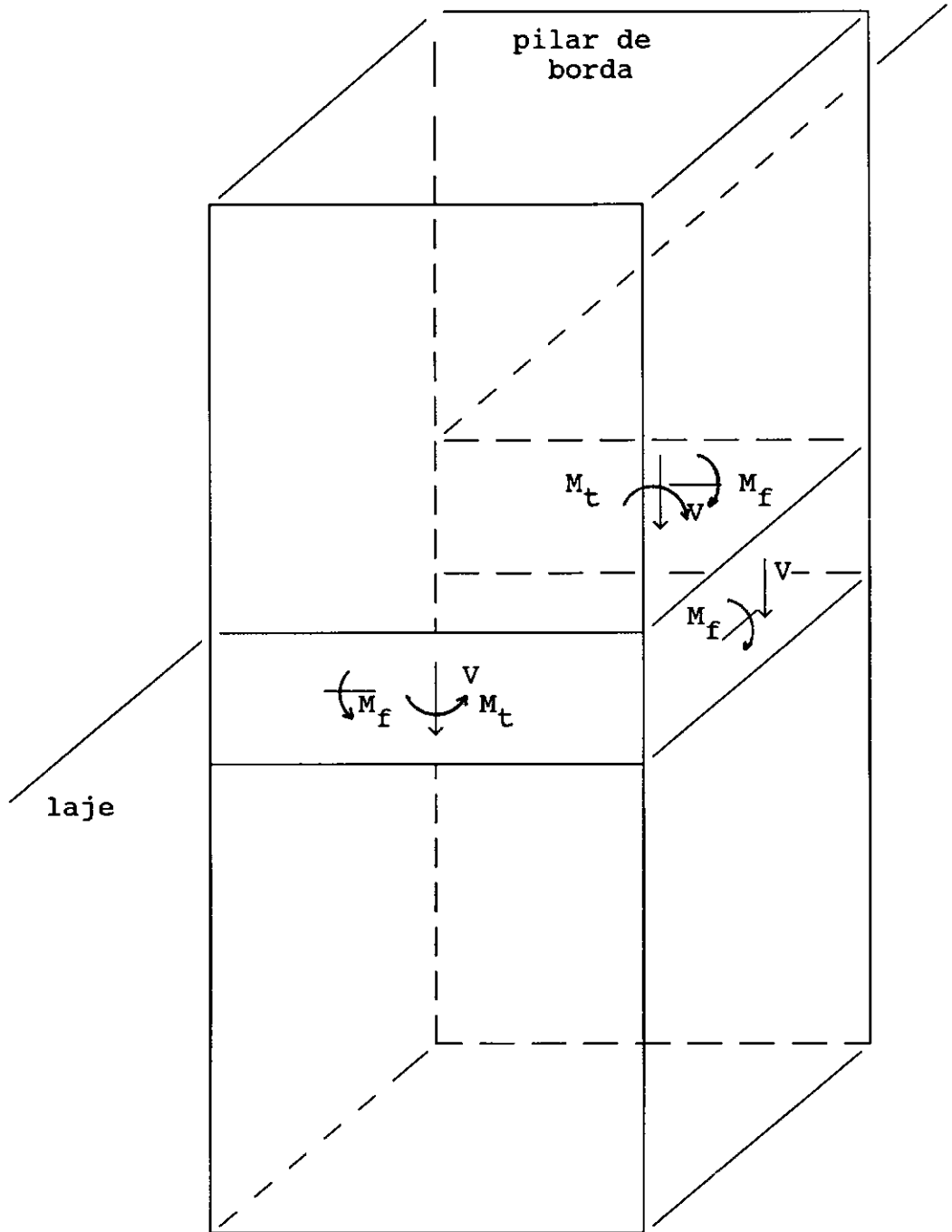


Fig. 4.1 - Tipos de esforços na ligação laje-pilar

como variando linearmente, conforme mostra a figura 4.2. Assumindo-se que estas tensões cisalhantes são uniformemente distribuídas ao longo da altura efetiva da laje, chega-se a:

$$\tau_c = \frac{P}{u d} + \frac{KM c_4}{J}, \text{ ou} \quad (\text{IV.1})$$

$$\tau_c = \frac{KM c_3}{J} - \frac{P}{u d}, \quad (\text{IV.2})$$

onde:

$$J = \frac{y_1 x_1^4 d}{(y_1 + 2x_1)^2} + \frac{x_1^3 d}{6} + \frac{x_1^3 d}{4} \left( \frac{y_1}{y_1 + 2x_1} \right) + \frac{x_1 d^3}{6}, \quad (\text{IV.3})$$

quando os efeitos torsionais são considerados, ou:

$$J = \frac{y_1 x_1^4 d}{(y_1 + 2x_1)^2} + \frac{x_1^3 d}{6} + \frac{x_1^3 d}{4} \left( \frac{y_1}{y_1 + 2x_1} \right) \quad (\text{IV.4})$$

quando forem consideradas apenas as tensões de cisalhamento verticais.

Os valores  $y_1$  e  $x_1$  são respectivamente os comprimentos paralelo e perpendicular ao perímetro considerado em relação à borda da laje, e os coeficientes  $c_3$  e  $c_4$  são, respectivamente, as distâncias do centróide da seção em relação às faces livre e interna do perímetro, conforme demonstrado na figura 4.3. Seus valores são dados pelas seguintes expressões em relação aos comprimentos do perímetro considerado:

$$c_3 = \frac{y_1 x_1 + x_1^2}{2x_1 + y_1} \quad (\text{IV.5})$$

$$c_4 = \frac{x_1^2}{2x_1 + y_1} \quad (\text{IV.6})$$

O coeficiente K é determinado segundo o procedimento descrito no item III.2.1.

Para a definição da interação momento - esforço cortante transferidos, deve-se verificar qual a face em que a tensão máxima de cisalhamento é atingida primeiramente.

Quando  $P=0$ , a tensão cisalhante máxima ocorre nos pontos A e D conforme é mostrado na figura 4.2, então:

$$\tau_c = \frac{K c_3}{J} M_s \quad (\text{IV.7})$$

com  $M_s$  sendo o momento na seção que passa pelo centróide do perímetro considerado.

Sendo

$$\tau_c = \frac{P_o}{u d} ,$$

tem-se:

$$P_o = \frac{K c_3 u d}{J} M_s$$

Fazendo-se  $\frac{J}{K u d} = A_1$  e  $M_s = M$ , chega-se a:

$$M = P_o \frac{A_1}{c_3} = M_o \quad (\text{IV.8})$$

onde  $M_o$  representa o momento transferido quando não há transferência de carga vertical.

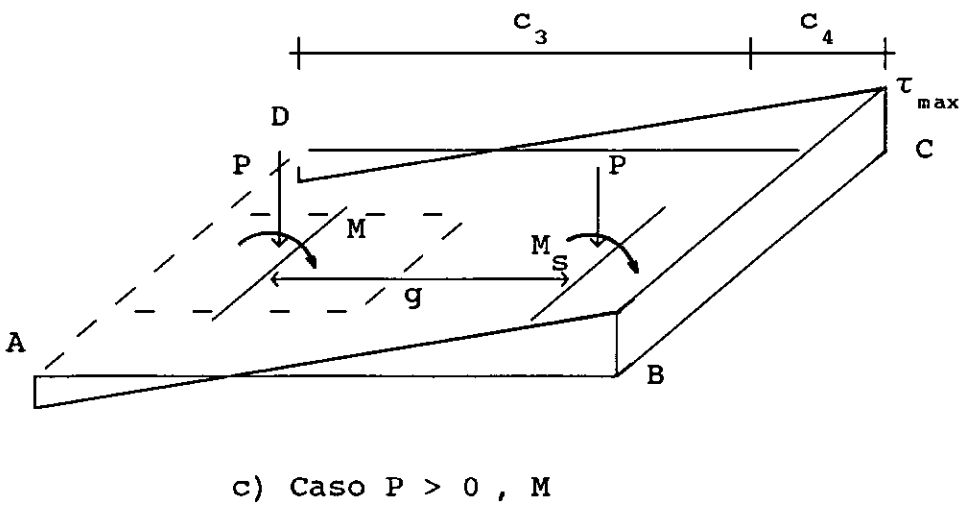
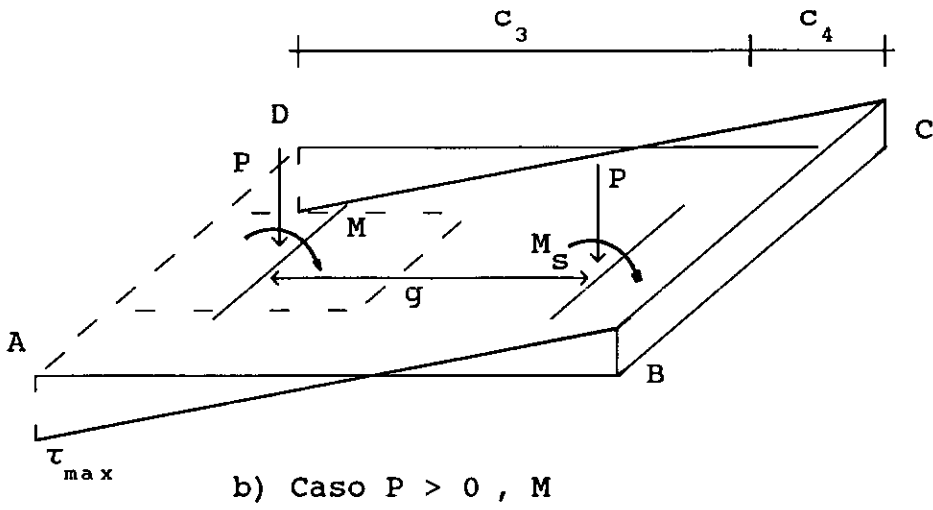
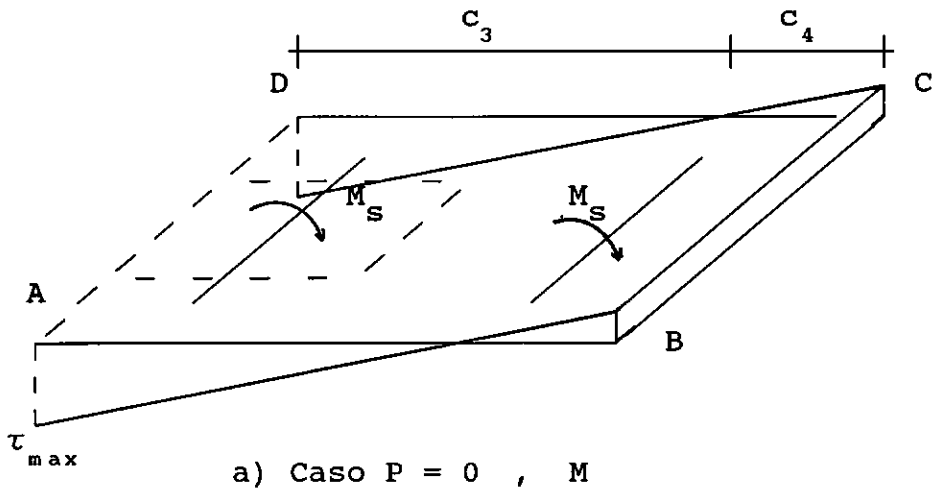


Fig. 4.2 - Distribuições de tensões cisalhantes ao Longo do perímetro de controle segundo a norma ACI

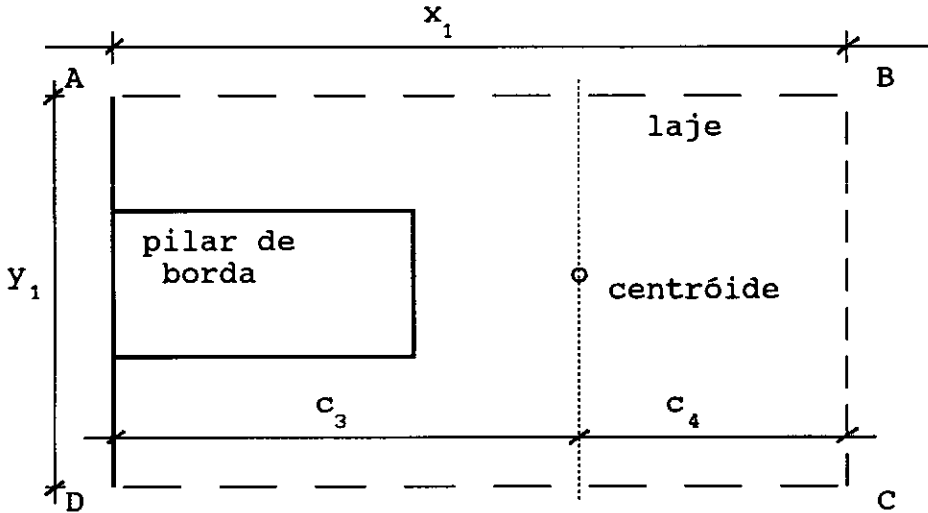


Fig. 4.3 - Localização do Centróide

Quando  $P > 0$  e a maior tensão de cisalhamento ocorre ainda nos pontos A e D, segundo a figura 4.2b,

$$\tau_c = \frac{K c_3}{J} M_s - \frac{P}{u d} \quad (\text{IV.9})$$

$$P_o = \frac{c_3}{A_1} M_s - P$$

Utilizando-se a equação IV.8, chega-se a:

$$M_s = M_o + P \frac{A_1}{c_3} \quad (\text{IV.10})$$

e, portanto, o momento transferido para o pilar é:

$$M = M_s + P g = M_o + P \left( \frac{A_1}{c_3} + g \right) \quad (\text{IV.11})$$

Esta equação IV.11 é válida até que se verifique:

$$\frac{K c_3}{J} M_s - \frac{P}{u d} = \frac{K c_4}{J} M_s + \frac{P}{u d} ,$$

Esta igualdade ocorre para:

$$M_s = \frac{2P A_1}{(c_3 - c_4)} ,$$

Substituindo-se a expressão anterior em IV.10, obtem-se:

$$P = P_o \frac{c_3 - c_4}{c_3 + c_4} \quad (\text{IV.12})$$

e, a partir de IV.11, chega-se a:

$$M = M_o + P_o \frac{c_3 - c_4}{c_3 + c_4} \left( \frac{A_1}{c_3} + g \right) \quad (\text{IV.13})$$

momento o qual será chamado de  $M_1$ .

Há um acréscimo linear do momento até se atingir o valor máximo  $M_1$ , conforme mostra a figura 4.4.

Quando  $\tau_c$  passa a ser crítico na face BC, mostrada na figura 4.2, tem-se:

$$\tau_c = \frac{K c_4}{J} M_s + \frac{P}{u d} , \quad (\text{IV.14})$$

$$P_o = \frac{c_4}{A_1} M_s + P$$

$$M_s = (P_o - P) \frac{A_1}{c_4}$$

$$M = \frac{P_o A_1}{c_4} + P \left( g - \frac{A_1}{c_4} \right) \quad (\text{IV.15})$$

Para  $P = P_o$ , tem-se:

$$M = P_o g$$

O gráfico de interação P-M obtido pelo método ACI está representado na figura 4.4.

Carga Vertical

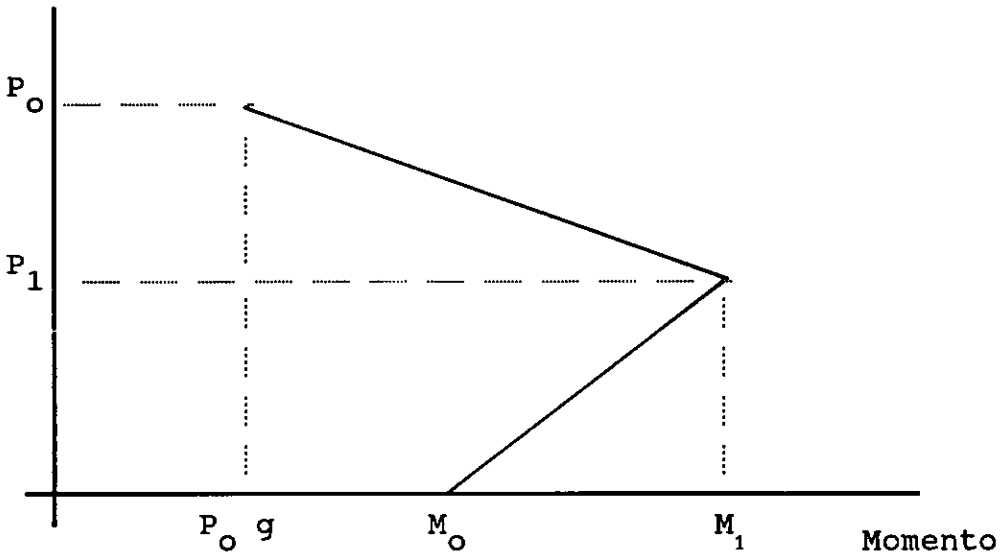


Fig. 4.4 - Curva de Interação Carga-Momento - Método ACI

#### IV.2.2 MÉTODO CEB-FIP - DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO

Da mesma forma que no caso de pilares internos, considerando-se que as tensões de cisalhamento sejam distribuídas de uma maneira uniforme ao longo de um perímetro, conforme mostra a figura 4.5, tem-se a tensão nominal dada por:

$$\tau = \frac{P}{u d} + \frac{K M}{W d} \quad (\text{IV.16})$$

O código-modelo CEB-FIP/90 utiliza esta formulação com valor para o coeficiente K conforme descrito no item III.2.3 e

$$W = \frac{c_t^2}{2} + \frac{c_t c}{2} + 2 c d + 8 d^2 + \pi d c_t \quad (\text{IV.17})$$

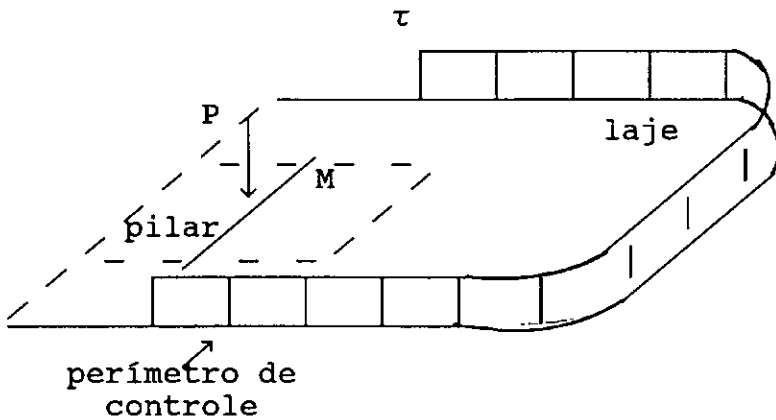


Figura 4.5 - Distribuições de tensões-método CEB-FIP

#### IV.2.3 MÉTODO DE REGAN

REGAN [21] desenvolveu um modelo para o caso onde a face interna do pilar coincide com a borda da laje (pilar externo), conforme indica a figura 4.6. Neste caso, quando somente há momento a transferir, o valor máximo deste momento é dado pela resistência à flexão da seção A-A ( $M_f$ ).

Por outro lado, quando há cortante também a transferir para o pilar, o momento atuando na ligação é:

$$M = M_f + \frac{P_o c_t}{2} \quad (\text{IV.18})$$

$P_o$  é obtido a partir da superfície de ruptura mostrada na figura 4.6.

$$P_o = A_c \tau_c$$

com  $A_c$  representando a área da superfície de ruptura inclinada de  $22^\circ$  em relação ao plano da laje.

$$A_c = 2,69 d (c + 1,25 \pi d), \quad (\text{IV.19})$$

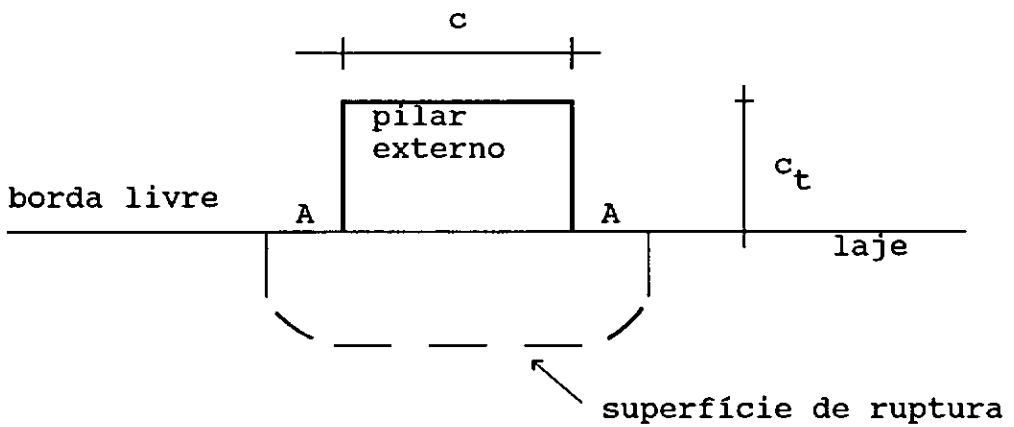


Fig. 4.6 - Superfície de Ruptura - Pilares Externos

$\tau_c$ , segundo REGAN, é dado pela seguinte expressão empírica:

$$\tau_c = 0,163 \left( \frac{300}{d} \right)^{1/4} (100\rho)^{1/3} f_c \quad (\text{IV.20})$$

A figura 4.7 ilustra a interação P-M de acordo com REGAN.

Para os casos usuais, onde a ligação entre a laje e o pilar ocorre em 3 faces do pilar, o momento máximo a ser

transferido quando não ocorrer transferência de cortante é dado pela armação que cruza as linhas de ruptura de torção que partem da face interna do pilar e vão até a borda da laje, com uma inclinação  $\alpha$  (figura 4.8).

Carga Vertical

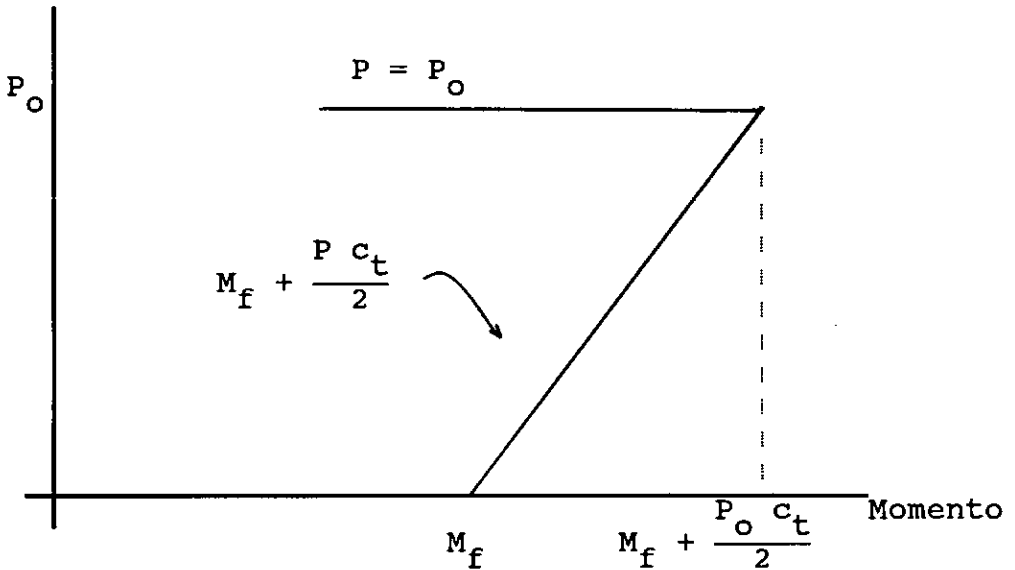


Fig. 4.7 - Curva de Interação Carga-Momento  
Método REGAN - pilares externos

Para o cálculo do ângulo  $\alpha$  deve-se considerar que as bielas de compressão são paralelas às linhas de ruptura torsionais. As componentes nas direções paralela e perpendicular ao bordo da laje estão em equilíbrio com as forças de tração desenvolvidas pela armação nestas direções. Desta forma:

$$\tan \alpha = \frac{N_x}{N_y} = \frac{c_l}{c_t}$$

com  $x$  e  $y$  sendo as direções paralela e perpendicular à

borda da laje, respectivamente.

Então:

$$\tan \alpha = \frac{\rho_x f_y c_t d}{\rho_y f_y c_1 d} = \frac{\rho_x}{\rho_y \tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = (\rho_x / \rho_y)^{1/2} \quad (\text{IV.21})$$

No caso de armação isotrópica tem-se, portanto, um ângulo  $\alpha$  de  $45^\circ$ .

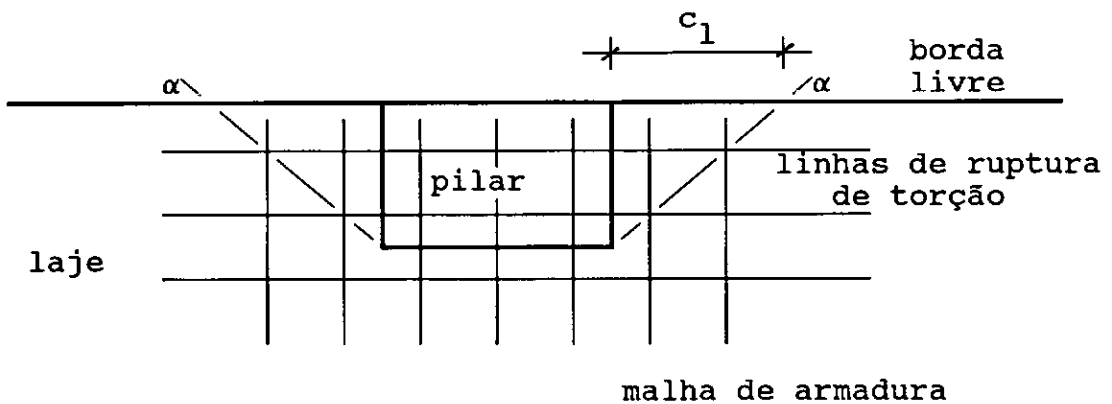


Fig. 4.8 - Linhas de Ruptura de Torção

Na figura 4.9 estão representadas as superfícies de ruptura consideradas no caso de transferência de cortante.

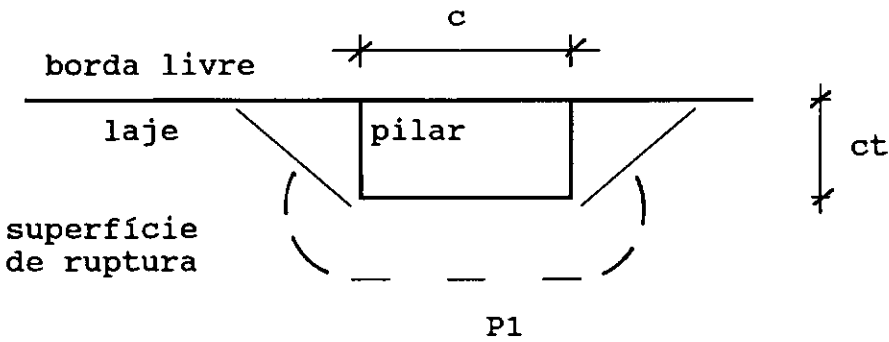
O maior momento possível na ligação é dado por (ver figura 4.9a):

$$M = M_f + P_1 \frac{c_t}{2}, \quad (\text{IV.22})$$

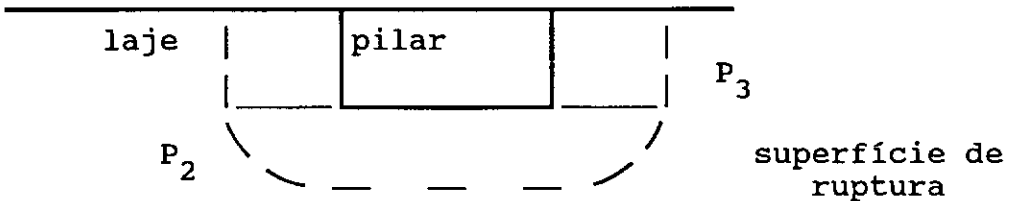
onde

$$P_1 = 2,69 d (c + 5,89 d) \tau_c \quad (\text{IV.23})$$

Para o maior cortante possível, o momento reduz-se, assumindo que não ocorra parcela de torção, ou seja, a componente de flexão é reduzida considerando-se somente as barras que cruzam a face interna do pilar. Desta forma:



a) caso de maior momento transferido



b) caso de maior carga vertical transferida

Fig. 4.9 - Superfície de Ruptura - Pilares Internos

$$M = M_{f_1} + \frac{P_2 c_t}{2}, \quad (\text{IV.24})$$

onde

$$P_2 = 2,69 d (c + 1,25 \pi d) \tau_c \quad (\text{IV.25})$$

e  $M_{f_1}$  representa o momento resistido pelas barras que cruzam a face do pilar.

O diagrama de interação proposto por REGAN é mostrado na figura 4.10.

A carga  $P_2 + P_3$ , representa a carga vertical máxima passível de ser transferida.

Como simplificação deste diagrama, REGAN indica um gráfico bilinear conforme a figura 4.11, definida por:

$$P_o \leq 0,8 (P_2 + P_3) \quad (\text{IV.26})$$

$$M_o \leq M_f + \frac{P c_t}{2} \frac{P_2}{P_2 + P_3} \quad (\text{IV.27})$$

Carga Vertical

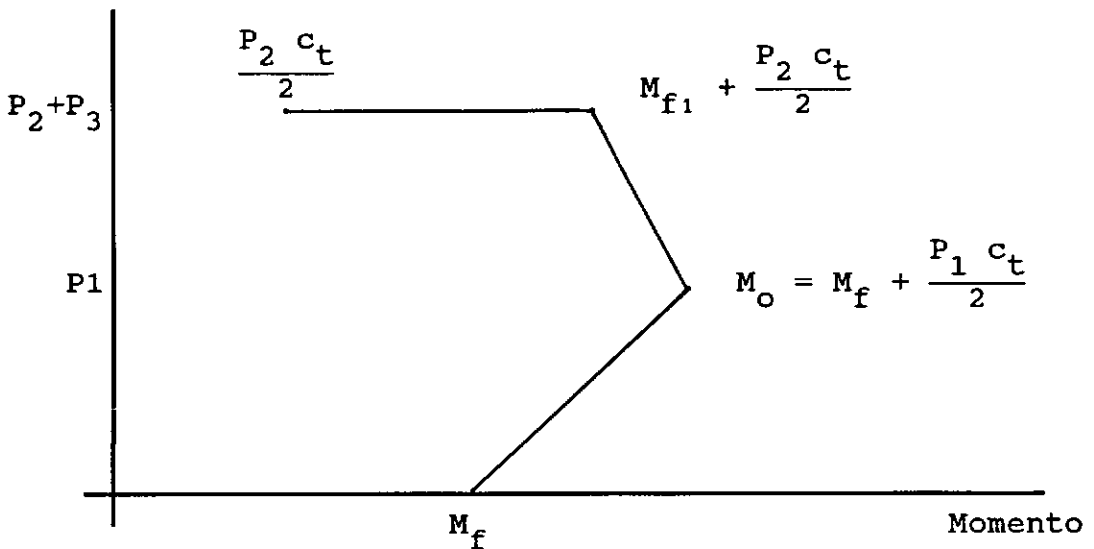


Fig. 4.10 - Curva de Interação Carga-Momento

Método REGAN

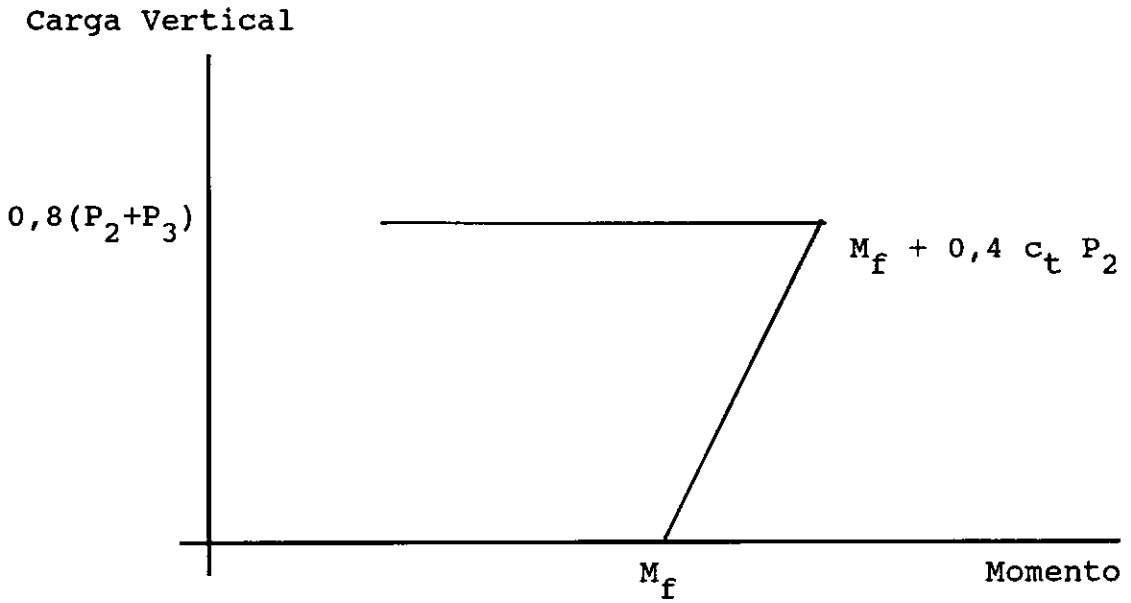


Fig. 4.11 - Curva de Interação Carga-Momento  
Método REGAN simplificado

#### IV.2.4 MÉTODO DE MOEHLE

MOEHLE [22] assume que, limitando-se o cortante transferido a um certo valor, não existe interação do momento com o cortante transferidos. O gráfico de interação, portanto, tem a forma mostrada na figura 4.12. A ruptura da ligação ocorre quando o momento atinge o valor do momento de flexão ou então a tensão máxima de cisalhamento é atingida.

MOEHLE considera como momento resistente da ligação, a resistência à flexão dada pela armação que cruza a região composta pela face interna do pilar e as superfícies de ruptura de torção, da mesma forma que

REGAN, porém limita o ângulo  $\alpha$  a  $45^\circ$ . Por outro lado, na definição da tensão de cisalhamento nominal limite, ele utiliza a formulação da norma ACI.

Segundo MOEHLE, se a tensão de cisalhamento nominal não ultrapassar 0,75 de seu valor limite, não ocorrerá nenhuma interação.

Como procedimento de projeto, MOEHLE propõe que a ligação laje-pilar seja dimensionada considerando o diagrama de interação tracejado mostrado na figura 4.12.

O comitê ACI/ASCE - 352 que trata de conexões indica estes procedimentos para o cálculo das ligações laje-pilar de bordo [23].

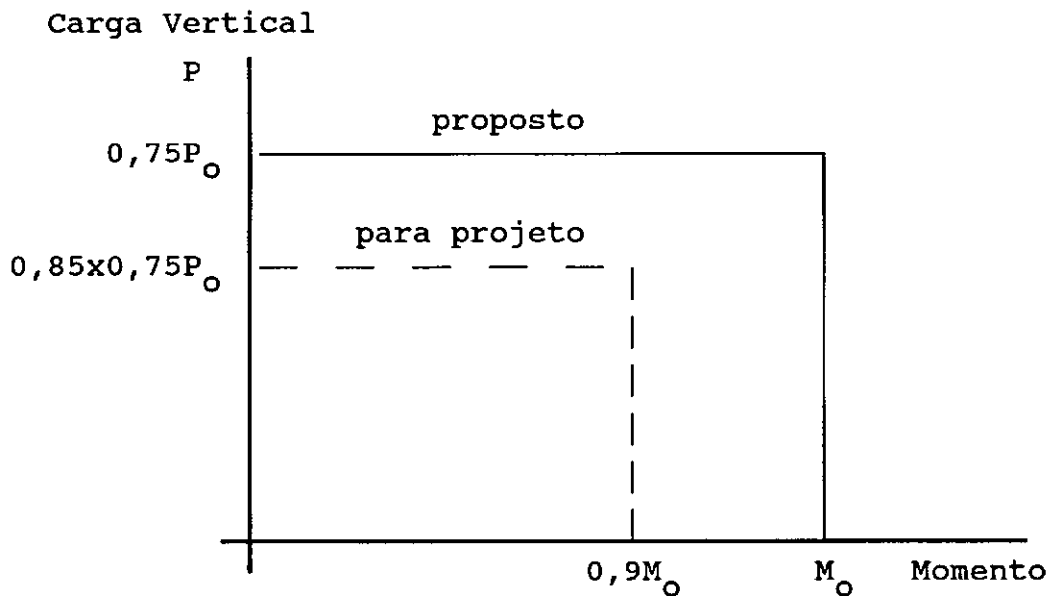


Fig. 4.12 - Curva de Interação Carga-Momento

Método de MOEHLE

### IV.3 RECOMENDAÇÕES DE NORMAS

As normas de cálculo, geralmente, tratam do caso de pilares de borda usando formulação semelhante à para pilares internos. A seguir apresentam-se as formulações dadas pelo CEB-FIP/90, ACI 318-89 e BS-8110. A norma brasileira é omissa em relação a este efeito.

#### IV.3.1 CEB-FIP/90 [8]

O código modelo CEB-FIP/90 considera a formulação baseada na distribuição uniforme das tensões cisalhantes (item IV.2.2), e o perímetro de controle conforme indicado na figura 4.13.

Se não houver nenhuma excentricidade paralela ao bordo para o lado interno da laje, é permitido utilizar um perímetro reduzido  $u^*$ , conforme mostrado na figura 4.13, na seguinte equação ao invés do perímetro  $u$ .

$$\tau_c = \frac{P}{u d} + \frac{K M}{W d}, \quad (\text{IV.28})$$

$W$  é calculado para o perímetro  $u$  através da expressão IV.17 e  $K$  é o coeficiente descrito no item III.2.3, porém com a relação  $c_t/c$  sendo substituída por  $c_t/2c$ .

## IV.3.2 ACI 318-89

O código ACI 318-89 expressa uma formulação baseada na distribuição linear das tensões cisalhantes conforme descrito no item IV.2.1 e utilizando o perímetro de controle a uma distância de  $0,5 d$  do pilar.

## IV.3.3 BS-8110 [10]

O código britânico não apresenta uma interação P-M para os casos em que o eixo do momento é paralelo à borda livre, indicando apenas os limites máximos para o momento e o cortante a serem transferidos.

$$M = 0,125 (c + c_t) d^2 f_c \quad (\text{IV.29})$$

$$P = \frac{P_o}{1,25} , \quad (\text{IV.30})$$

Para o cálculo de  $P_o$  utiliza-se o perímetro mostrado na figura 4.14 e a expressão dada no item II.4.3.

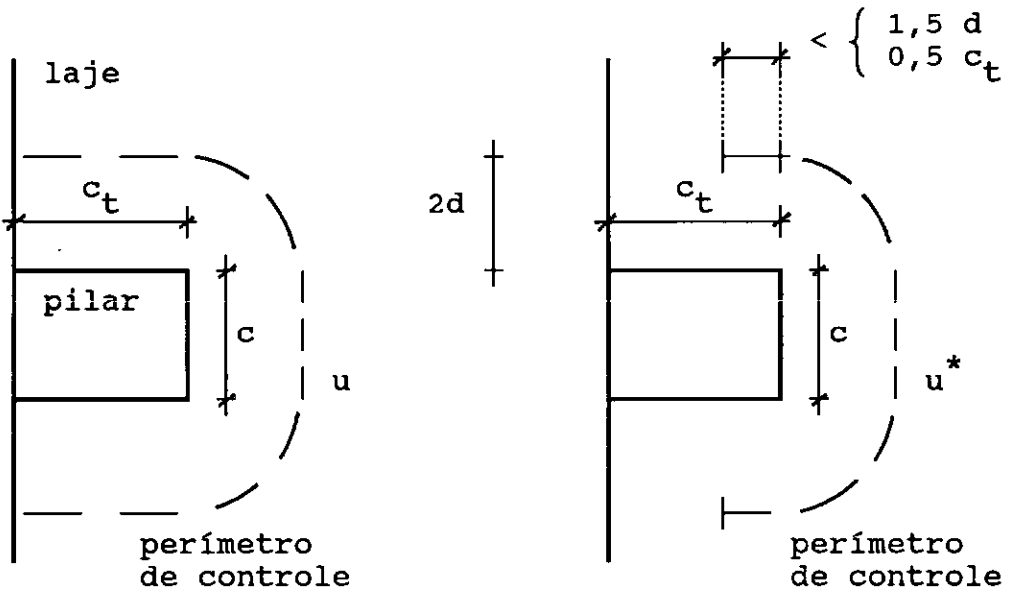


Fig. 4.13 - Perímetros de Controle  
para Pilares de Borda- CEB-FIP

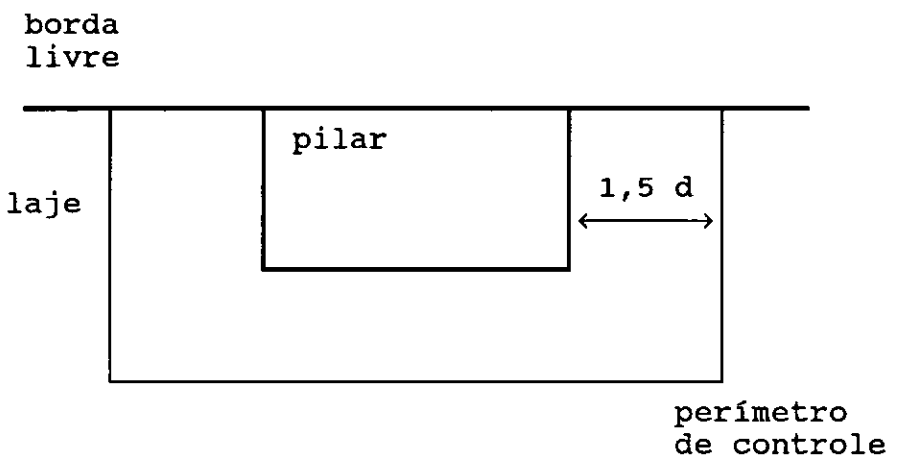


Fig. 4.14 - Perímetro de Controle - BS

#### IV.4 MODELO DE BIELAS E TIRANTES PROPOSTO

O modelo que se propõe para o tratamento das ligações laje-pilar de borda (figura 4.15) foi desenvolvido a partir do modelo descrito no capítulo III para pilares internos. Da mesma forma que anteriormente, o momento atuante no pilar compõe-se das parcelas  $M_f$ ,  $M_{cv}$  e  $M_t$ . Neste caso, entretanto, aparece uma nova parcela, devida à não simetria física do problema. Quando não há carga vertical transferida, surge um momento  $M_1$ , conforme indicado na figura 4.15, pois, segundo o modelo, não poderá haver cargas verticais opostas e simetricamente dispostas capazes de gerar este momento. A seguir descreve-se cada uma destas parcelas.

##### IV.4.1 PARCELA $M_1$

Esta nova parcela tem seu valor máximo quando há somente momento transferido para o pilar, e diminui na medida em que cresce a parcela de carga vertical transferida para o pilar. Conforme visto no item IV.2.3 REGAN assume que este momento é aquele que plastifica a armação que cruza as fissuras de torção e o pilar, perpendicularmente à borda da laje. Então,

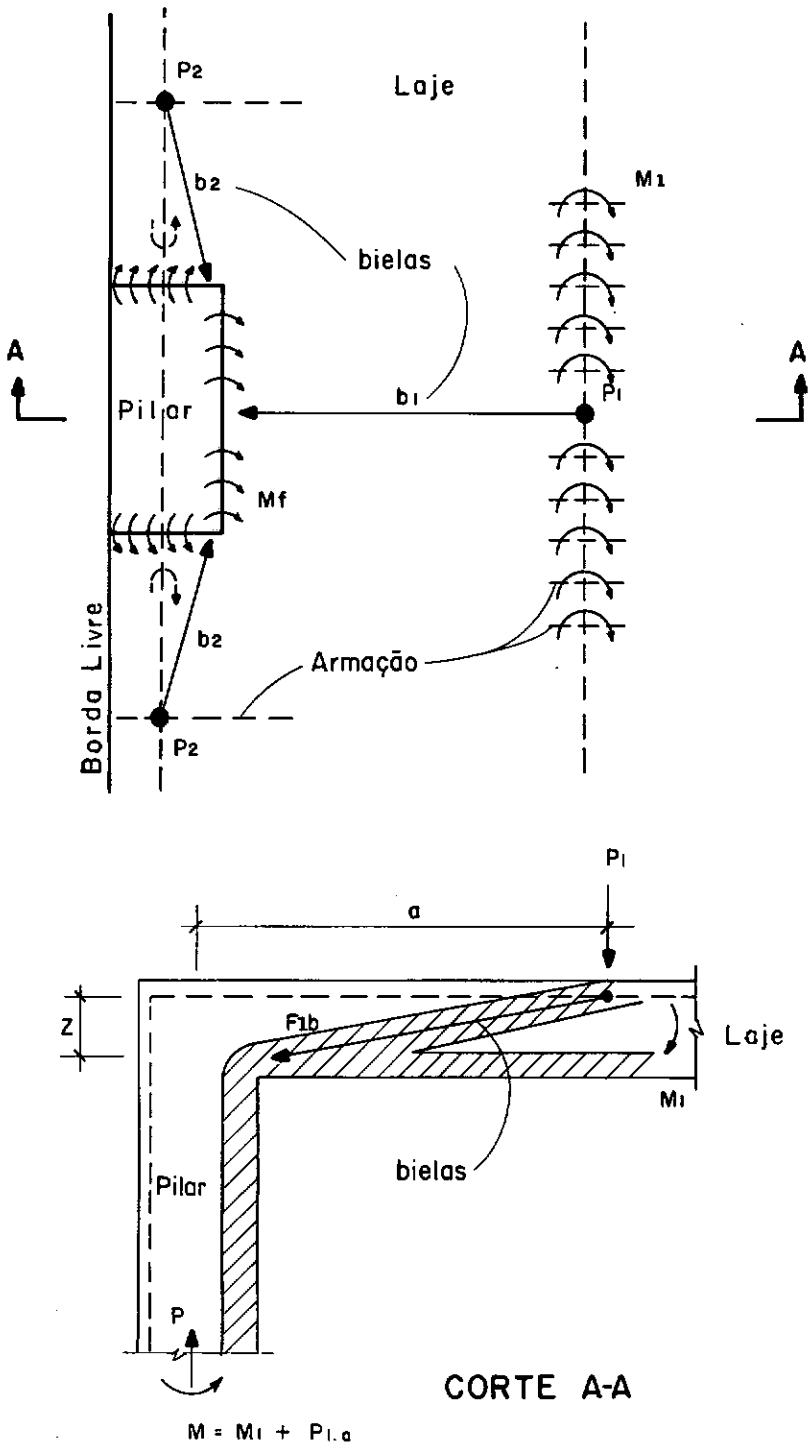


FIG. 4.15 - MODELO DE BIELAS E TIRANTES PARA PILARES DE BORDO

$$A_{Sf_{lex}} = \rho^* d f_y (c + 2 c_1) \quad (IV.31)$$

onde  $c_1$  está representado na figura 4.8.

$$M_1 = A_{Sf_{lex}} d \left( 1 - 0.59 \rho^* \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (IV.32)$$

ou

$$M_1 = \rho^* f_y (c + 2c_1) d^2 \left( 1 - 0.59 \rho^* \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (IV.33)$$

onde  $\rho^*$  representa a parcela da taxa de armadura na região que resiste  $M_1$ . Esta parcela decresce com o acréscimo da carga vertical transferida, anulando-se quando é atingida a carga vertical máxima que pode ser transferida, ou seja, a carga de ruptura por punção.

Conforme visto no capítulo I, a carga de punção é proporcional à raiz quadrada da taxa de armadura. Assim sendo:

$$\rho^* = \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^2 \right] \rho$$

Pode-se verificar que a expressão acima é igual à obtida para  $\rho_t$  (ex. III.29), para o modelo proposto para pilares internos no que se refere a  $M_t$ . Lembrando que  $M_1$  é resistido pela armação que cruza o pilar e as fissuras de torção, e que a biela  $b_2$  da figura 4.15, que representa a parcela  $M_t$  do modelo proposto, também é equilibrada pela armação que cruza as fissuras de torção, e ainda que tanto

$\rho_t$  quanto  $\rho^*$  são iguais, conclui-se, finalmente, que  $M_t$  está incluído na formulação apresentada para  $M_1$ . Desta forma o comprimento  $c_1$  da expressão IV.33 será igual a  $(c_t + d) \cot \alpha$ , conforme sugerido no item III.5.3, onde  $\alpha$  é o ângulo representado na figura 4.8 e definido pela expressão IV.21. A expressão IV.33 pode, portanto, ser escrita na forma:

$$M_1 = \rho_t f_y [c + 2(c_t + d) \cot \alpha] d^2 \left( 1 - 0.59 \rho_t \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (\text{IV.34})$$

que para malhas isotrópicas fica:

$$M_1 = \rho_t f_y [c + 2(c_t + d)] d^2 \left( 1 - 0.59 \rho_t \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (\text{IV.35})$$

#### IV.4.2 PARCELA $M_f$

A parcela do momento  $M_f$  é obtida multiplicando-se a componente horizontal da biela  $b_1$  pelo braço de alavanca  $z$ , (figura 4.15) ou seja,

$$M_f = F_{b_1 h} z$$

A tensão devida à componente  $F_{b_1 h}$  e ao momento  $M_1$ , atuante na faceta comprimida do concreto junto ao pilar, não poderá ultrapassar o valor  $(\nu_c f_c)$  que corresponde ao caso da carga vertical transferida igual à carga de ruptura por punção (caso onde  $M_1 = 0$ ). Quando a carga

vertical transferida para o pilar for menor que a carga de ruptura por punção, a tensão atuante na faceta comprimida junto ao pilar pode ser definida por:

$$\sigma_c = \sigma_{cmf} + \sigma_{cm1} \leq \nu_c f_c \quad (\text{IV.36})$$

Considerando que:

$$\sigma_{cm1} = k_c f_c$$

e

$$\sigma_c = \frac{P}{P_0} \nu_c f_c$$

obtem-se:

$$\sigma_{cmf} = \frac{P}{P_0} (\nu_c - k_c) f_c \quad (\text{IV.37})$$

Para a determinação do coeficiente  $k_c$ , pode-se, simplifadamente, admitir a expressão abaixo, a qual é função das alturas da linha neutra para os casos de ruptura por flexão e ruptura por punção.

$$k_c = 0,85 \frac{x_{flex}}{x} , \text{ onde} \quad (\text{IV.38})$$

onde

$$x_{flex} = \frac{\rho_t d f_y}{0,68 f_c}$$

e

$x$  é dado pela expressão II.7.

Substituindo-se  $x$  e  $x_{flex}$  em IV.38 chega-se a:

$$k_c = 1,865 \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_o} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho f_y}{f_c} \right)^{1/2} \quad (\text{IV.39})$$

Logo,  $M_f$  será dado pela seguinte expressão:

$$M_f = \frac{P}{P_o} (\nu_c - k_c) f_c c x z \quad (\text{IV.40})$$

Para o cálculo de  $P_o$  considera-se a mesma fórmula dada em II.2.1a, com a metade do perímetro, ou seja:

$$P_o = \pi r_o x \nu_c f_c \tan 10^\circ \xi$$

ou, como  $\pi r_o = c + c_t$ , tem-se:

$$P_o = (c + c_t) x \nu_c f_c \tan 10^\circ \xi \quad (\text{IV.41})$$

#### IV.4.3. PARCELA $M_{cv}$

Esta parcela é obtida multiplicando-se a componente vertical  $F_{b1v}$  da força na biela por sua distância ao centróide do pilar.

$$M_{cv} = F_{b1} \text{ sen } 10^\circ \frac{c_t}{2}$$

Como

$$F_{b1} = \frac{F_{b1h}}{\cos 10^\circ} = \frac{M_f}{z \cos 10^\circ} ,$$

tem-se que:

$$M_{cv} = M_f \frac{c_t}{z} \frac{\tan 10^\circ}{2} = 0,088 M_f \frac{c_t}{z} , \quad (\text{IV.42})$$

ou, substituindo  $M_f$  pela expressão IV.39,

$$M_{cv} = 0,088 \frac{P}{P_o} (\nu_c - k_c) f_c \times c \ c_t \quad (\text{IV.43})$$

#### IV.4.4 MOMENTO ATUANTE

A partir dos itens anteriores pode-se esquematizar o cálculo da interação carga vertical x momento transferidos para o pilar. O momento  $M$  é obtido somando-se as seguintes parcelas:

$$M_1 = \rho_t f_y [c + 2(c_t + d) \tan \beta] d^2 \left( 1 - 0,59 \rho_t \frac{f_y}{f_c} \right)$$

$$M_f = \frac{P}{P_o} (\nu_c - k_c) f_c c \times z$$

$$M_{cv} = 0,088 M_f \frac{c_t}{z}$$

onde,

$$\rho_t = k' \rho ,$$

$$k_c = 1,865 k' \left( \frac{\rho f_y}{f_c} \right)$$

$$k' = 1 - \left( \frac{P}{P_o} \right)^2$$

Somando-se estas parcelas obtém-se a expressão que traduz a interação existente do momento e da carga vertical transferidos para pilares de bordo:

$$M = k_{100} ( C_1 v^4 + C_2 v^3 + C_3 v^2 + C_4 v + C_5 ) \quad (\text{IV.44})$$

onde:

$$C_1 = -0,59 \omega k_3$$

$$C_2 = 1,25 k_5 k_6$$

$$C_3 = -k_3 (1 - 1,18 \omega)$$

$$C_4 = (2,35 k_4 \omega^{-1/2} - 1,25) k_5 k_6$$

$$C_5 = k_3 (1 - 0,59 \omega)$$

$$k_{100} = \omega f_c k_2^2 c^3$$

$$v = P/P_0$$

$$\omega = \frac{\rho f_y}{f_c}$$

$$k_1 = c_t/c$$

$$k_2 = d/c$$

$$k_3 = 2 k_1 + 2 k_2 + 1$$

$$k_4 = \left( \frac{k_2}{1 + k_1} \right)^{1/2}$$

$$k_5 = 1 + \frac{0,088 k_1}{k_2 k_6}$$

$$k_6 = 1 - 0,30 \omega^{-1/2}$$

As figuras 4.16, 4.17 e 4.18 representam as curvas de interação para lajes tendo, respectivamente, as seguintes características:

Exemplo 1:

$$f_y = 500 \text{ MPa}$$

$$f_c = 25 \text{ MPa}$$

$$\rho = 1\%$$

$$c = c_t = 250 \text{ mm}$$

$$d = 100 \text{ mm}$$

Exemplo 2:

$$f_y = 600 \text{ MPa}$$

$$f_c = 15 \text{ MPa}$$

$$\rho = 1,50 \%$$

$$c = c_t = 250 \text{ mm}$$

$$d = 100 \text{ mm}$$

Exemplo 3:

$$f_y = 250 \text{ MPa}$$

$$f_c = 30 \text{ MPa}$$

$$\rho = 0,80 \%$$

$$c = c_t = 250 \text{ mm}$$

$$d = 100 \text{ mm}$$

Nestas figuras pode-se observar que a curva de interação carga vertical - momento transferido para o pilar não assume sempre o mesmo aspecto. Dependendo das

características físicas e geométricas da laje, o momento fletor transferido pode aumentar ou diminuir com o aumento da carga vertical transferida.

#### IV.5 ESTUDOS EXPERIMENTAIS

A seguir são fornecidos os dados de lajes com pilar de borda ensaiadas para se estudar a interação carga vertical - momento transferidos. As lajes descritas romperam por punção.

Stamenkovic & Chapman [15] ensaiaram lajes quadradas de 915 mm de lado apoiadas continuamente em 3 lados e num pilar cortando a laje no outro lado. O carregamento aplicado constituiu-se de cargas verticais e horizontais. A tabela IV.1 contem os dados das lajes ensaiadas.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
M/E/1	25.3	496	1.17	127	127	55.9	-	8.5
M/E/2	27.5	496	1.17	127	127	55.9	-	8.4
C/E/4	28.6	496	1.17	127	127	55.9	10	8.8
C/E/3	28.3	496	1.17	127	127	55.9	25	10.1
C/E/2	27.0	496	1.17	127	127	55.9	55	9.2
C/E/1	32.0	446	1.17	127	127	55.9	73	5.6
V/E/1	29.9	496	1.17	127	127	55.9	75	-

Tabela IV.1 - Ensaios de Stamenkovic & Chapman

HANSON & HANSON [13] ensaiaram uma laje retangular de 1220 mm x 1143mm com momento normal à face menor da laje. Outros dados desta laje são apresentados na tabela IV.2.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
D15	31.1	365	1.64	152.4	152.4	57.2	12	9.9

Tabela IV.2 - Ensaio de Hanson &amp; Hanson

Pesquisadores da Universidade de São Carlos [24] ensaiaram lajes retangulares de 1300mm x 750mm com momento normal à face menor da laje. A tabela IV.3 contém outros dados das lajes ensaiadas.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
22/1	41.3	500	1.47	200	200	85.0	136	39.2
22/2	34.3	500	1.47	200	200	85.0	126	36.4
22/3	34.6	500	1.47	200	200	85.0	132	38.2
15	30.0	500	1.47	200	200	85.0	124	35.8

Tabela IV.3 - Ensaio de Martinelli et al

Na referência [22] foram obtidos os dados da tabela IV.4, correspondentes a lajes ensaiadas por outros pesquisadores.

laje no.	$f_c$ MPa	$f_y$ MPa	$\rho$ %	$c$ mm	$c_t$ mm	$d$ mm	$P_e$ kN	$M_e$ kN m
o KANE								
K-1	30.2	480	1.19	68.0	100.0	40.9	24	2.4
K-3	41.2	480	1.22	75.0	114.0	38.1	25	2.5
o REGAN								
SE1	35.5	480	1.12	200.0	300.0	98.0	198	39.6
SE4	26.6	480	1.12	300.0	200.0	98.0	152	30.5
SE9	41.9	480	0.73	250.0	250.0	98.0	123	35.7
SE10	41.1	480	0.73	250.0	250.0	98.0	114	36.0
SE11	51.5	480	0.73	250.0	250.0	98.0	138	39.6
o HAWKINGS, WONG & YONG								
E1	22.5	463	0.76	304.8	304.8	130.3	64	67.7
E2	29.5	425	1.07	406.4	406.4	139.7	83	150.3

Tabela IV.4 - Ensaio contidos em [22]

#### IV.6 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE ENSAIOS COM OS DO MODELO PROPOSTO

Na tabela IV.4 apresenta-se uma comparação de resultados experimentais com os obtidos utilizando-se o modelo desenvolvido neste capítulo.

Para o cálculo da carga  $P_0$  utilizou-se a variante da formulação apresentada no item II.2.1a expressa pela equação IV.41.

Foi obtida para a relação entre o momento de cálculo e o experimental a média de 0,98 com desvio padrão de 0,13.

Na figura 4.19 é mostrado o histograma dos resultados e a figura 4.20 apresenta a curva de interação momento - carga vertical obtida para as lajes ensaiadas por STAMENKOVIC & CHAPMAN.

Na tabela IV.5, compara-se os momentos calculados segundo procedimentos indicados por três normas de cálculo com os verificados experimentalmente. Nos cálculos, sempre que possível, considerou-se para  $P_0$ , os valores experimentais. Quando isto não ocorreu, o valor de  $P_0$  foi obtido através da expressão IV.41.

Laje no.	$P_o$ kN	$M_e$ kN m	$M_{mod}$ kN m	$\frac{M_{mod}}{M_e}$
o Stamenkovic & Chapman				
M/E/1	70	8.5	7.8	0.92
M/E/2	72	8.4	7.8	0.93
C/E/4	74	8.8	8.2	0.93
C/E/3	74	10.0	8.2	0.82
C/E/2	72	9.2	7.0	0.76
C/E/1	74	5.6	6.2	1.11
o Hanson & Hanson				
D15	88	9.9	10.2	1.03
o Kane				
K-1	43	2.4	2.8	1.17
K-3	49	2.5	2.9	1.16
o Regan				
SE1	214	39.6	34.8	0.88
SE4	185	30.5	39.8	1.30
SE9	188	35.7	35.8	1.00
SE10	186	36.0	35.6	0.99
SE11	208	39.6	38.5	0.97
o Hawkings et al				
E1	212	67.7	68.1	1.01
E2	346	150.3	127.5	0.85
o Martinelli et al				
22/1	204	39.2	37.8	0.96
22/2	186	36.4	36.7	1.01
22/3	187	38.2	34.8	0.91
15	164	35.8	34.8	0.97
Média				0.98
Desvio Padrão				0.13

Tabela IV.4 – Ensaios de Pilares de Bordo

Laje no.	NORMAS					
	CEB		ACI		BS	
	M (kN m)	M/M <sub>e</sub>	M (kN m)	M/M <sub>e</sub>	M (kN m)	M/M <sub>e</sub>
o Stamenkovic & Chapman						
M/E/1	10.3	1.21	3.3	0.39	2.5	0.29
M E/2	10.6	1.26	3.4	0.41	2.7	0.32
C/E/4	8.4	0.95	4.2	0.48	2.8	0.32
C/E/3	4.8	0.48	3.7	0.37	2.8	0.28
C/E/2	*		*		2.7	0.29
C/E/1	*		*		3.2	0.57
o Hanson & Hanson						
D15	8.4	0.85	5.9	0.60	3.9	0.39
o Kane						
K-1	*		*		1.1	0.46
K-3	*		0.6	0.25	1.4	0.56
o Regan						
SE1	*		*		21.3	0.54
SE4	*		*		16.0	0.52
SE9	*		22.2	0.62	25.1	0.70
SE10	*		24.2	0.67	24.7	0.69
SE11	*		24.2	0.61	30.9	0.78
o Hawkings et al						
E1	51.2	0.76	51.1	0.76	29.1	0.43
E2	104.0	0.69	100.0	0.67	58.5	0.39
o Martinelli et al						
22/1	*		9.6	0.24	14.9	0.38
22/2	*		8.5	0.23	12.4	0.34
22/3	*		*		12.5	0.33
15	*		*		10.8	0.30
Média		0.89		0.48		0.44
Desvio Padrão		0.28		0.18		0.15

\* Nestes casos  $P_{transferido} > P_o$  permitido pela norma.

Tabela IV.5 - Resultados de Comparações de Normas

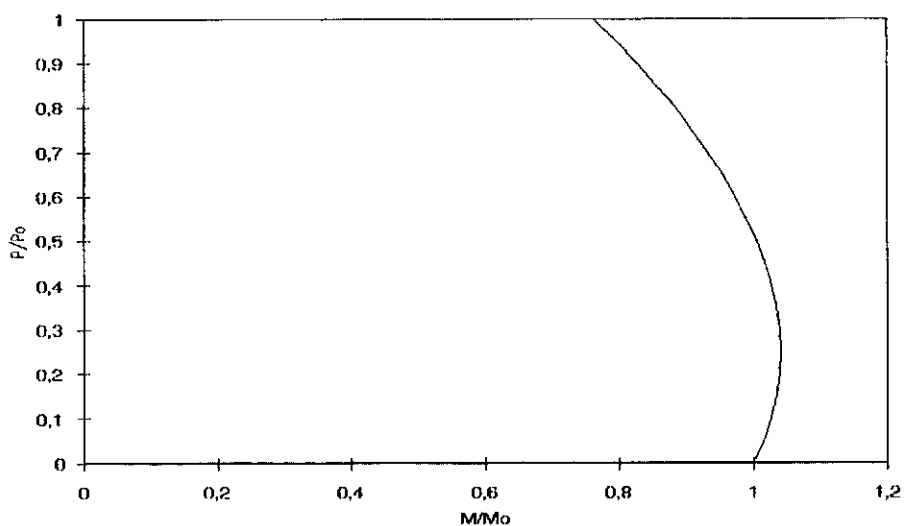


Figura 4.16 - Curva de Interação - Exemplo 1

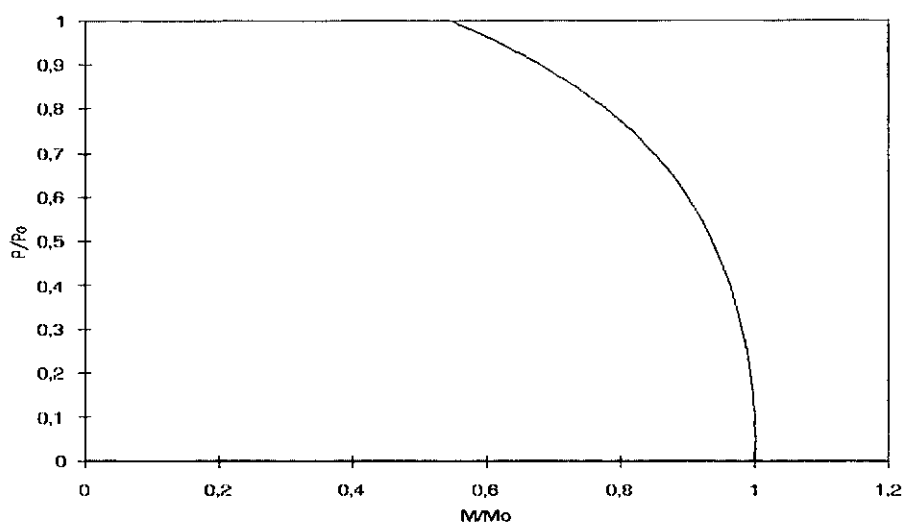


Figura 4.17 - Curva de Interação - Exemplo 2

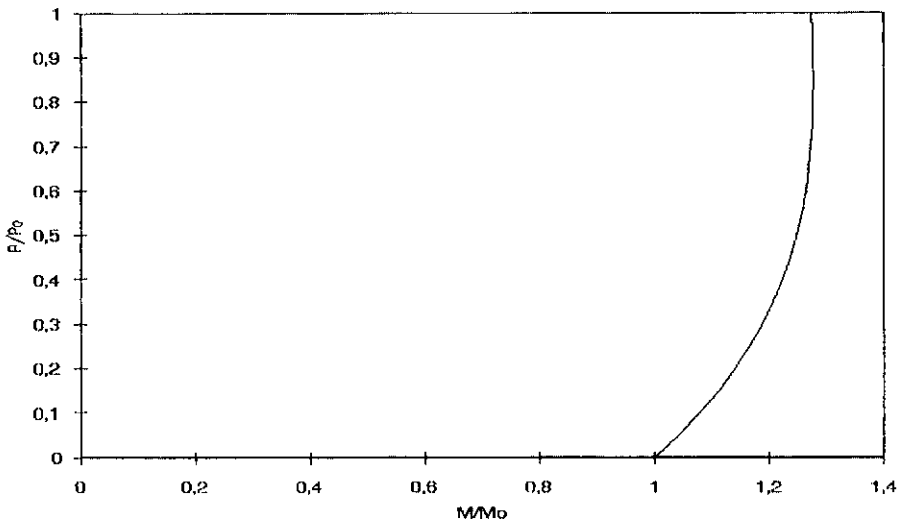


Figura 4.18 - Curva de Interação - Exemplo 3

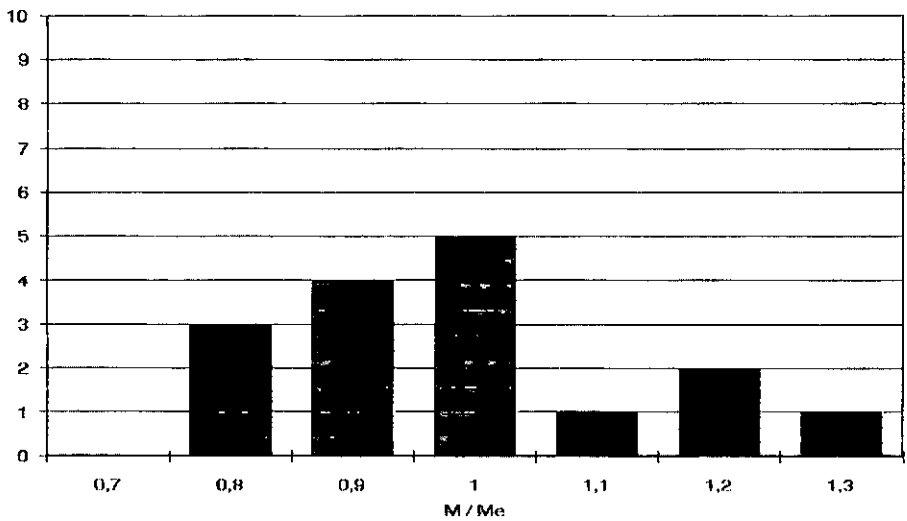


Figura 4.19 - Distribuição dos Resultados de Pilares de Borda

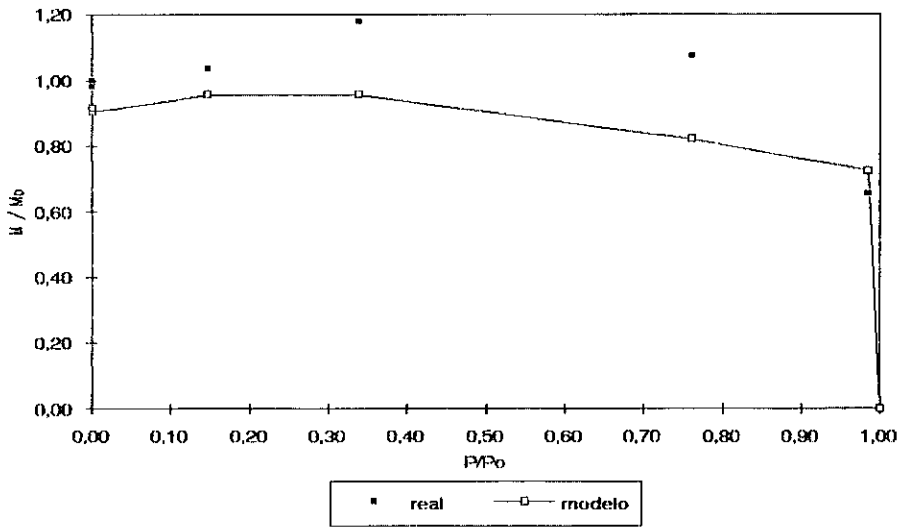


Figura 4.20 - Comparação Modelo Proposto x Resultados Experimentais Para Pilares de Borda

## CAPITULO V

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FINAIS

## V.1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho procurou-se apresentar um novo modelo de bielas e tirantes que pudesse representar uma ligação laje-pilar com transferência de carga vertical e momento fletor, para pilares posicionados internamente e na borda da laje, sem a presença de armadura de cisalhamento.

## V.2 MODELO PROPOSTO PARA PILARES INTERNOS

O modelo de bielas e tirantes proposto para pilares internos de seção transversal quadrada fornece resultados bastante satisfatórios, conforme se vê na tabela III.10, especialmente para pilares com armadura igual nas duas faces. A curva de interação P-M fornecida pelo modelo, conforme mostrada na figura 3.21, mostra-se bem próxima dos resultados experimentais.

Para o caso de pilares com seção transversal

retangular, o modelo já não se apresenta tão bom quanto para pilares com seção quadrada, conforme mostrado nos dados constantes da tabela III.10. A curva de interação, para este caso, apresenta valores bem conservativos. É necessário, portanto, fazer-se um estudo particular para a verificação do efeito de retangularidade da seção transversal do pilar no modelo proposto.

A equação final representativa do modelo de bielas e tirantes proposto (III.49) não é simples o suficiente para uma utilização de maneira expedita. A seguir, apresenta-se uma simplificação do modelo proposto de forma a facilitar o cálculo no dimensionamento.

Nas figuras 3.15, 3.21 e 3.22, observa-se que, para efeito de dimensionamento, pode-se considerar uma curva de interação linear. Fazendo-se isto, obtem-se resultados conservadores, mas bem próximos dos obtidos através do modelo. Assim, pode-se admitir a seguinte equação para descrever a interação P - M, para lajes com malha igual nas duas faces (caso mais usual):

$$\frac{P}{P_o} = 1 - \frac{M}{M_o} \quad (V.1)$$

com:

$$M_o = \frac{P_o}{\xi} \left[ \frac{c}{c + c_t} (4,7d + 0,5c) + 1,2 \frac{d}{c} (c_t + 2d) \right] \quad (V.2)$$

Esta equação é derivada das equações III.42 a III.49 com a simplificação de  $z \cong 0,85d$ .

Sendo  $P_o$  dado pela equação II.5, a partir de V.1 e V.2, chega-se a:

$$M = K (P_o - P) \quad (V.3)$$

com:

$$K = \frac{1}{\xi} \left[ \frac{c}{c + c_t} (4,7d + 0,5c) + 1,2 \frac{d}{c} (c_t + 2d) \right] \quad (V.4)$$

Aos valores obtidos, aplica-se, então, os coeficientes de segurança desejados.

### V.3 MODELO PROPOSTO PARA PILARES DE BORDA

Para o caso de pilares na borda da laje, o modelo de bielas e tirantes proposto fornece resultados muito bons, de acordo com os dados da tabela IV.4. Entretanto, somente 20 resultados de ensaios disponíveis foram comparados. Devido a esta pequena quantidade de ensaios, não se fez uma distinção entre pilares com seção transversal quadrada e com seção retangular. A curva de interação  $P - M$  fornecida pelo modelo se mostra mais conservadora do que a para pilares internos (figura 4.20). Esta curva pode-se apresentar de três formas distintas, conforme mostrado nas figuras 4.16 a 4.18. A equação correspondente ao modelo (IV.44) é um pouco complexa para um uso constante.

Para efeito de dimensionamento, pode-se adotar

simplesmente, uma curva de interação linear, conforme mostrado nas figuras 6.1 e 6.2.

$M_o$  é dado somente pela parcela  $M_1$ , ou seja:

$$M_o = \rho f_y [c + 2c_t + 2d] d^2 \left( 1 - 0,59 \rho \frac{f_y}{f_c} \right) \quad (V.5)$$

e  $P_o$  é obtido pela equação IV.41.

O momento máximo correspondente a  $P = P_o$  é dado pela soma das parcelas  $M_f$  e  $M_{cv}$  considerando a simplificação de  $z \cong 0,85d$ .

$$M_{P=P_o} = 0,85 v_c f_c c \times d \left( 1 + \frac{0,1 c_t}{d} \right), \quad (V.6)$$

Carga Vertical

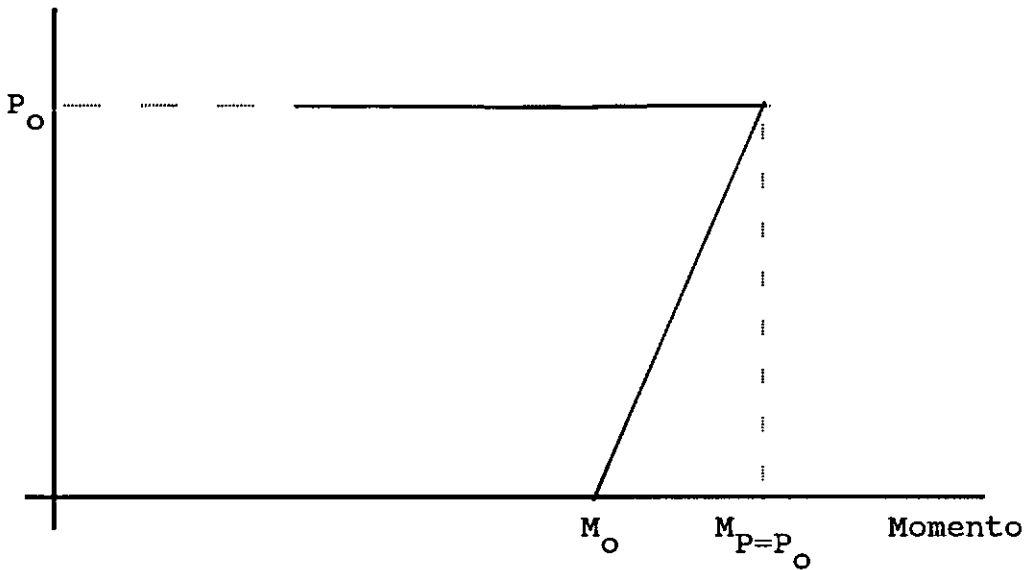


Fig. 5.1 Curva de Interação Carga-Momento Simplificado para Pilares de Borda

Carga Vertical

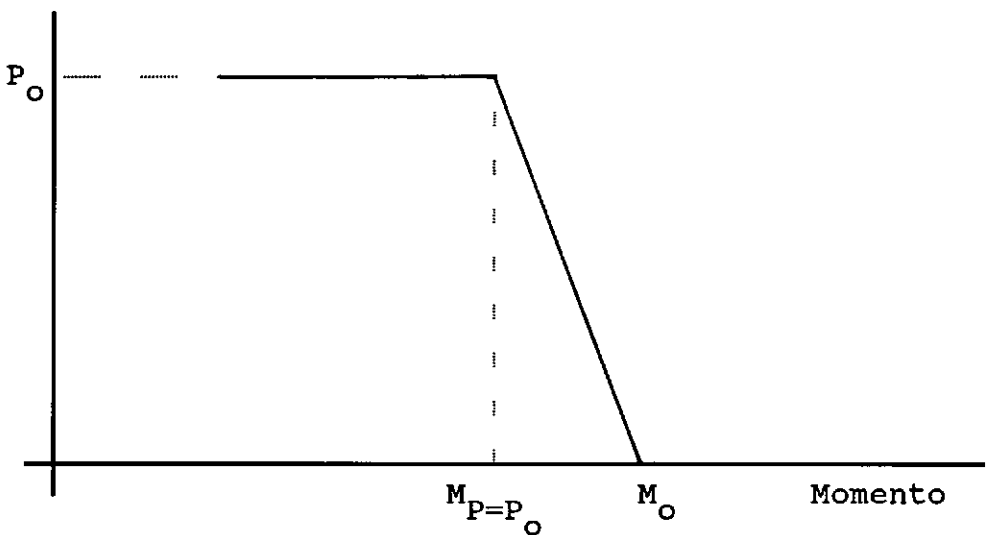


Fig. 5.2 Curva de Interação Carga-Momento Simplificada para Pilares de Borda

#### V.4 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para um melhoramento do modelo apresentado e continuação do estudo da interação carga vertical - momento transferidos em uma ligação laje-pilar sugerem-se estudos sobre:

- influência de diferentes tipos, quantidades e arranjos de armadura de cisalhamento e seus efeitos nos modelos propostos.
- pilares de canto,
- adequação do modelo para o caso de flexão oblíqua,
- efeito de retangularidade da seção transversal.
- realização de ensaios monitorados para a verificação real do posicionamento e tensões nas bielas na ruptura e posterior comparação com os valores admitidos nos modelos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] SHEHATA, I. A. E. M., "Theory of Punching in Concrete Slabs", Tese de Phd, The Polythecnic of Central London, 1985, 257 pp.
- [2] REGAN, P. E. e BRAESTRUP, M. W., "Punching Shear in Reinforced Concrete: A State of Art Report", *Bulletin d'Information* no. 168, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, Jan 1985, 232 pp.
- [3] SHEHATA, I. A. E. M., "Simplified Model for Estimating the Punching Resistance of Concrete Slabs", *Materials and Structures*, RILEM, Set 90, pp 364-371.
- [4] ALEXANDER, S. D. B. e SIMMONDS, S. H., "Ultimate Strength of Slab-Column Connections", *ACI Structural Journal*, vol.84, no. 3, Mai-Jun 87, pp 255-261.
- [5] NIELSEN, M. P., BRAESTRUP, M. W., JENSEN, B.C. e BACH, F., Concrete Plasticity - beam shear - shear in joints - punching shear, Danish Society for Structural Science and Engineering, Copenhagen, Out 78.

- [6] ELSTNER, R. C. e HOGNESTAD, E., "Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs", *ACI Journal*, vol.53, no.1, Jul 56.
- [7] KINNUNEN, S. e NYLANDER, H., "Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement", *Kunglia Tekniska Hogskolan, Meddelande no.38, Institutionen for Byggnadsstatik, Estocolmo, 1960.*
- [8] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON ET FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRECONTRAINTE, CEB-FIP Model Code 1990, *Bulletin D'Information no. 204, Final Draft, Lausanne, julho 1991.*
- [9] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-89)", Detroit, 1989.
- [10] BRITISH STANDARDS INSTITUTION, "The Structural Use of Concrete BS 8110, Londres, 1985.
- [11] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado (NBR 6118)", Rio de Janeiro, 1978.
- [12] BRAESTRUP, M. W., "Punching of Reinforced Concrete Slabs: Code Rules, Plastic Analysis, Test Results", *Nordic Concrete Research*, no.8, 1989, pp. 24-48.

- [13] HANSON, N. W., e HANSON J. M., "Shear and Moment Transfer Between Concrete Slabs and Columns", *Journal*, PCA Research and Development Laboratories, Vol.10, no.1, Jan.68, pp 2-16.
- [14] MAST, P. E., "Stresses in Flat Plates Near Columns", *ACI Journal*, vol.67, no.10, Out. 70, pp. 761-768.
- [15] STAMENKOVIC, A. e CHAPMAN, J. C., "Local Strength at Column Heads in Flat Slabs Subjected to a Combined Vertical and Horizontal Loading", *Proceedings*, Institution of Civil Engineers (London), Part2, Vol.57, Jun 74, pp. 205-232.
- [16] SHEHATA, I. A. E. M., "Puncionamento Assimetrico em Lajes de Concreto", *Jornadas en Español y Portugues sobre Estructuras y Materiales*, Madri, Mai.88, pp.171-180.
- [17] ISLAM, S. e PARK, R., "Tests on Slab-Column Connection with Shear and Unbalanced Flexure", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.102, no.ST3, Mar 76, pp. 549-568.
- [18] MOE, J., "Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings under Concentrated Loads", *Bulletin D47*, Portland Cement Association, Research and Development Laboratories, Skokie, Illinois, 1961.

- [19] GHALI, A., ELMASRI, M. Z. e DILGER, W., "Punching of Flat Plates Under Static and Dynamic Horizontal Forces", *ACI Journal*, Vol.73, no.10, Out.76, pp. 566-572.
- [20] HAWKINGS, N. W., BAO, A. e YAMASAKI, J., "Moment Transfer from Concrete Slabs to Columns", *ACI Structure Journal*, Vol.86, no.6, Nov-Dez 89, pp. 705-716.
- [21] REGAN, P. E., "Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs", CIRIA Report 89, Construction Industry Research and Information Association, Londres, 1981.
- [22] MOEHLE, J. P., "Strength of Slab-Column Edge Connections", *ACI Structural Journal*, Vol.85, no.1, Jan-Fev. 88, pp. 89-98.
- [23] ACI-ASCE Committee 352, "Recommendations for Design of Slab-Column Connections in Monolithic Reinforced Concrete Structures", *ACI Structural Journal*, Vol.85, no.6, Nov-Dez 88, pp. 675-696.
- [24] MARTINELLI, D. A. O., TAKEYA, T., FIGUEIREDO F<sup>o</sup>, J. R., FERREIRA, J. C. e SILVA, I., "Resultados Experimentais sobre a Ruína das Ligações Laje-Pilar em Cantos e Bordas de Lajes-Cogumelo", Publicação 045/83, Escola de Engenharia de São Carlos, 1983.