O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTODINÂMICA BI-DIMENSIONAL NO DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA COM EMPREGO DE ELEMENTOS QUADRÁTICOS

Luiz Alkimin de Lacerda

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por :

WEBE JOÃO MANSUR - Ph.D.
(Presidente)

JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES - Ph.D.

CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO - D.Sc.

JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER - D.Sc.

Rio de Janeiro, R.J. - Brasil

Maio de 1993

LACERDA, LUIZ ALKIMIN DE

O Método dos Elementos de Contorno para Elastodinâmica Bi-dimensional no Domínio da Freqüência com Emprego de Elementos Quadráticos (Rio de Janeiro) 1993.

XIV, 133 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1993).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elastodinâmica no Domínio da Freqüência.
2. Método dos Elementos de Contorno com Elementos Quadráticos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A MEUS PAIS, LUIZ E MARIA EMÍLIA

A MINHA NAMORADA NAJLA

A MEUS IRMÃOS, GUSTAVO, CLAUDIO,
RAQUEL, JOSÉ LUIZ E
MARCIA

AGRADECIMENTOS

A Webe João Mansur, por toda a atenção oferecida para a elaboração desta dissertação.

A todos colegas, professores e funcionários do Programa de Engenharia Civil.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTODINÂMICA BI-DIMENSIONAL NO DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA COM EMPREGO DE ELEMENTOS QUADRÁTICOS

Luiz Alkimin de Lacerda

Maio de 1993

Orientador : Webe João Mansur
Programa : Engenharia Civil

RESUMO

Problemas elastodinâmicos com domínios homogêneos e elástico-lineares são resolvidos através do Método dos Elementos de Contorno. Estes problemas são regidos por equações diferenciais parciais no domínio do tempo que, por sua vez, são levadas ao domínio da freqüência através da Transformada de Fourier. Sobre as equações diferenciais parciais elípticas resultantes aplica-se uma formulação direta para obtenção da equação integral em pontos internos. Processos limites são aplicados a esta equação integral e a mesma recai em uma equação integral com variáveis incógnitas somente no contorno.

Efetua-se uma implementação numérica com três tipos de elemento (constante, linear e quadrático) para o caso harmônico. Elementos não singulares são integrados numericamente através da quadratura gaussiana. Nos casos em que ocorre a singularidade, os elementos constantes são integrados analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy e os elementos lineares e quadráticos, também neste sentido, são integrados numericamente com o uso de subelementos e movimento de corpo rígido. O nó duplo de canto é implementado para os casos em que ocorre descontinuidade de forças de superfície. O cálculo de tensões em pontos no interior do domínio também é estudado.

Por último, três exemplos são apresentados com resultados muito bons e algumas idéias de continuidade do trabalho são citadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.).

QUADRATIC BOUNDARY ELEMENTS IN TWO-DIMENSIONAL ELASTODYNAMICS IN FREQUENCY DOMAIN

Luiz Alkimin de Lacerda

May, 1993

Chairman : Webe João Mansur

Department : Civil Engineering

ABSTRACT

Elastodynamic problems with homogeneous and linearly elastic domains are treated with the Boundary Element Method. This problem obeys a class of partial differential equations in time domain which is transformed into elliptic partial differential equation in frequency domain via Fourier Transform. A direct formulation is applied to this equation to obtain an integral equation for internal points. This integral equation can be recast, through limiting processes, into a boundary integral equation.

A numerical implementation with three kind of elements (constant, linear and quadratic) to the steady-state case is presented. Non-singular elements are numerically integrated with

gaussian quadrature. In singular cases, constant elements are analitically integrated in the Cauchy principal value sense and linear and quadratic elements, also in this sense, are numerically integrated with aid of static kernels, element subdivisions and rigid body motions. The corner double node is implemented to the cases in which traction discontinuity occur. Stresses at internal points are also studied.

The three examples presented show the good accuracy of the procedure studied.

Finally, sugestions concerning improvement and possible extensions of this work are presented.

NOTAÇÃO

X_i	coordenadas cartesianas
$f_{,i}$	derivada espacial em relação a direção i
$\dot{f}$	derivada em relação ao tempo
δ_{ij}	delta de Kronecker
ξ	ponto fonte
x	ponto campo
Ω	domínio do corpo
Γ	contorno do corpo
$\delta(\xi,x)$	função delta de Dirac
e_i	vetor unitário da direção i
n_i	cossenos diretores da normal unitária exterior ao contorno
μ e λ	constantes de Lamé
E	módulo de elasticidade
ν	coeficiente de Poisson (estado plano de deformações)
$\bar{\nu}$	coeficiente de Poisson (estado plano de tensões)
ρ	densidade de massa
b_i	componentes da força de volume por unidade de massa
t_i	componentes da força de superfície
u_i	componentes do deslocamento
σ_{ij}	componentes do tensor de tensões
ε_{ij}	componentes do tensor de deformações específicas
$\bar{f}$	indica que é um valor prescrito
$\underset{\sim}{\nabla}$	operador Nabla

∇	Laplaciano
ϕ	escalar
$\underset{\sim}{\psi}$	vetor
C_1	velocidade de propagação das ondas longitudinais
C_2	velocidade de propagação das ondas transversais
k	número de onda
w	freqüência da onda
B_i	componentes da força de volume por unidade de massa no domínio da freqüência
T_i	componentes da força de superfície no domínio da freqüência
U_i	componentes do deslocamento no domínio da freqüência
$\underset{\sim}{B}'$	força dinâmica unitária em cada direção
r	distância entre ξ e x
U^*_{ij}	componentes da solução fundamental de deslocamentos
T^*_{ij}	componentes da solução fundamental de forças de superfície.
χ e ψ	funções utilizadas em U^*_{ij} e T^*_{ij}
$I_\nu(z)$ e $K_\nu(z)$	funções modificadas de Bessel da primeira e segunda classe de ordem ν
D_{kij} e S_{kij}	tensores de terceira ordem
$\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{M}$ e $\underset{\sim}{N}$	funções de interpolação
$\underset{\sim}{X}^{(m)}$	vetor das coordenadas nodais de um elemento
$\underset{\sim}{U}^{(n)}$ e $\underset{\sim}{T}^{(n)}$	vetores dos deslocamentos e forças de superfície nodais para um elemento
$\bar{\underset{\sim}{B}}^{(e)}$	força de volume prescrita de cada célula

$\underset{\sim}{J}$ e $\underset{\sim}{V}$	jacobianos de transformação para elementos de área e volume
$\underset{\sim}{A}$	matriz do sistema final de equações
$\underset{\sim}{y}$	vetor de incógnitas do sistema final de equações
$\underset{\sim}{f}$	termos independentes do sistema final de equações

ÍNDICE

pág.

AGRADECIMENTOS iv

RESUMO v

ABSTRACT vii

NOTAÇÃO ix

1. INTRODUÇÃO 1

2. ELEMENTOS DA ELASTODINAMICA 6

2.1. INTRODUÇÃO 6

2.2. CONCEITOS BÁSICOS 6

2.2.1. NOTAÇÃO TENSORIAL CARTESIANA 6

2.2.2. CONVENÇÃO DE SOMA 6

2.2.3. CONVENÇÃO PARA DERIVADAS 7

2.2.4. DELTA DE KRONECKER 8

2.2.5. DELTA DE DIRAC 8

2.2.6. TEOREMA DA DIVERGÊNCIA 9

2.3. EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA 10

2.3.1. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO 11

2.3.2. RELAÇÕES DEFORMAÇÃO - DESLOCAMENTO 14

2.3.3. LEI DE HOOKE 14

2.3.4. CONDIÇÕES INICIAIS 14

2.3.5. CONDIÇÕES DE CONTORNO 15

2.3.6. EQUAÇÕES DE NAVIER 15

2.4. ONDA PLANA HARMÔNICA 20

2.5. TRANSFORMADA DE FOURIER 22

2.6. EQUAÇÕES NO DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA 28

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A ELASTODINÂMICA 32

3.1. INTRODUÇÃO 32

3.2. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS 32

3.3. FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL PARA A ELASTODINÂMICA 38

3.3.1. FORMULAÇÃO POR RESÍDUOS PONDERADOS 39

3.3.2. TEOREMA DA RECIPROCIDADE DINÂMICA 41

3.3.3. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS INTERNOS 42

3.3.4. EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO 44

4. TRATAMENTO NUMÉRICO DA EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO 50

4.1. INTRODUÇÃO 50

4.2. DISCRETIZAÇÃO E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES 50

4.3. DESLOCAMENTOS E TENSÕES EM PONTOS INTERNOS 58

4.4. ELEMENTOS DE CONTORNO 59

4.4.1. GEOMETRIA E FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO 59

4.4.2. JACOBIANOS E VETOR NORMAL 62

4.4.3. VARIAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS E FORÇAS DE SUPERFÍCIE 63

4.4.4. INTEGRAÇÕES NÃO-SINGULARES 67

4.4.5. INTEGRAÇÕES SINGULARES 70

4.5. SOLUÇÕES PARA PONTOS INTERNOS 76

4.6. NÓS DESCONTÍNUOS 79

5. O PROGRAMA MECH2D 80

6. EXEMPLOS 89

7. CONCLUSÃO 107

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 109

APÊNDICES 118

I - OPERADORES E GRANDEZAS VETORIAIS E ESCALARES 118

II - MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS 120

III - CÁLCULO DE LIMITES DE INTEGRAIS 123

IV - FUNÇÕES DE BESSEL 128

1. INTRODUÇÃO

Com o surgimento e popularização dos computadores digitais é que os métodos numéricos tiveram seu grande avanço. Estes métodos são, atualmente, as mais importantes ferramentas existentes para a solução de problemas não triviais de engenharia. Problemas estes que envolvem um enorme número de variáveis e cuja resolução através de métodos analíticos é impossível.

A princípio surgiu o Método das Diferenças Finitas e, posteriormente, o Método dos Elementos Finitos, o qual teve um grande impulso. O MEF requer o cálculo de integrais de domínio, que são efetuados em elementos com formas geométricas simples (triângulos, quadriláteros, tetraedros, prismas retangulares e outros). No modelo de deslocamentos utilizam-se funções polinomiais simples para interpolar deslocamentos, tendo o resultado para esta grandeza, em geral, boa precisão. Entretanto as tensões são obtidas a partir de derivadas das funções utilizadas para a interpolação dos deslocamentos, o que leva a uma piora na precisão dos resultados. A princípio pensou-se em modelos mistos para contornar este problema, mas estes modelos foram abandonados posteriormente.

Como os modelos de deslocamento derivam de uma técnica tipo Galerkin e devido ao tipo de funções de interpolação utilizadas (polinômios simples localizados) quando o operador diferencial é auto-adjunto, a matriz do sistema final de equações é simétrica e em banda. Apesar desta vantagem a perda de precisão no cálculo das tensões exige malhas excessivamente refinadas para uma

precisão que pode ser apenas razoável em algumas análises, por exemplo em problemas com concentração de tensões. Além do mais como a técnica exige integrais de domínio existem certas dificuldades no tratamento de domínios infinitos, contornados hoje em dia com o uso de elementos infinitos.

O Método dos Elementos de Contorno é uma formulação mista, que se aplica naturalmente a problemas de concentração de tensões, bem como a domínios infinitos, uma vez que não requer integrais de domínio. Como o problema fica restrito ao contorno, o problema tem sua dimensão reduzida de uma unidade. Este método além de possuir elementos de contorno com formas simples, utiliza funções de interpolação simples num sistema intrínsico.

O MEC apresenta as seguintes vantagens e desvantagens na sua utilização :

Vantagens

- Sistema de equações algébricas reduzido devido a necessidade de se discretizar somente o contorno.
- Os resultados são bastante precisos uma vez que técnicas numéricas de aproximação são diretamente aplicadas às equações integrais de contorno que correspondem à solução exata do problema.
- É aplicável a problemas que envolvem regiões semi-infinitas e infinitas, pois na construção das equações integrais de contorno utilizam-se as soluções fundamentais que obedecem às condições de radiação.
- Cálculo de tensões e deslocamentos em pontos internos é mais preciso e é efetuado em fase de

pós-processamento, o que permite uma seleção de pontos a serem estudados.

- Fornece ótimos resultados na resolução de problemas que envolvem concentração de tensões.

Desvantagens

- A matriz do sistema de equações é cheia e não simétrica.
- Os desenvolvimentos matemáticos que envolvem o cálculo das integrais singulares, embora não muito difíceis, contém conceitos novos para boa parte dos engenheiros.

A formulação do Método dos Elementos de Contorno pode ser direta, envolvendo variáveis com significado físico como deslocamentos e forças de superfície, ou pode ser indireta, envolvendo variáveis fictícias sem significado físico. Neste trabalho usa-se a formulação direta.

O método dos elementos de contorno tem sido aplicado com muita freqüência aos problemas regidos por equações diferenciais parciais elípticas, como é o caso da equação de Navier-Cauchy para a elastodinâmica, que é assunto desta dissertação.

Entre os trabalhos clássicos da elastodinâmica que abrangem estudos sobre as equações integrais pode-se mencionar os livros de Love [15], Morse e Feshbach [38], Pao e Mow [39], Achenbach [13], Eringen e Suhubi [8], Graff [40], Miklowitz [14], e os artigos de Wheeler e Sternberg [41], Pao e Varatharajulu [42], e Pao [43]. Entre os livros que tratam do MEC aplicado a eslastodinâmica tem-se os de Brebbia e Walker [44], Banerjee e Butterfield [45], Brebbia, Telles e Wrobel [10], Kitahara [47],

Wolf [48], e Manolis e Beskos [9].

Embora as formulações em equações integrais sejam conhecidas há vários anos, o tratamento numérico destas é bastante recente. O artigo de Banaugh e Goldsmith [49] de 1963, que trata do estado permanente de problemas planos da elastodinâmica, é possivelmente a primeira aplicação do MEC na dinâmica. Entretanto, da mesma época, tem-se os trabalhos de Friedman e Shaw [51] e Banaugh e Goldsmith [50] que tratam da equação da onda escalar e podem ser considerados como estudos do movimento anti-plano na elastodinâmica.

O problema da propagação transiente de ondas no semi-plano foi pela primeira vez resolvido por Cruse e Rizzo [29] e Cruse [30] em 1968. Mais tarde Manolis e Beskos [52-54] e Manolis [55] melhoraram e ampliaram este trabalho.

Os trabalhos de Dominguez [56,57] são os primeiros estudos das respostas dinâmicas de fundações rígidas no domínio da freqüência através do MEC bi e tri-dimensional. Variadas informações sobre o MEC e suas aplicações na elastodinâmica são encontradas em muitos artigos, entre eles, Shippy [58], Dominguez e Alarcon [59,60], Geers [61], Banerjee et al [62-64], Manolis et al [65], e Brebbia [66].

No tratamento numérico das equações integrais transformadas, o estado plano de deformação assim como o caso tri-dimensional, são investigados por Manolis e Beskos [53,67] e Tullberg [68,69] com o emprego da Transformada de Laplace, por Niwa et al [70,71] e Kobayashi e Nishimura [72] com o emprego da Transformada de Fourier, e por Brebbia e Chuang [73] em problemas harmônicos. O movimento anti-plano no domínio da

freqüência, o qual é governado pela equação de Helmholtz, é numericamente tratado nos trabalhos de Banaugh e Goldsmith [50] e Schuster e Smith [74].

Exemplos de análises tri-dimensionais de problemas no domínio da freqüência encontram-se em Dominguez [56,57,37], Theocaris et al [75], Banerjee et al [63,64], Ahmad e Manolis [76] e outros.

Entre as formulações do MEC que empregam elementos de ordem superior ao elemento constante tem-se as de Manolis e Beskos [54] em duas dimensões e Rizzo et al [77,78], Ahmad e Manolis [76] em três dimensões, todas no domínio da freqüência. Esquemas especiais de integração que baseiam-se na divisão de elementos em sub-elementos, são utilizados nestas formulações com elementos de ordem superior para os casos singulares como mostrado em Rizzo [77]. Esta técnica também é proposta por Bui et al [79,46].

O segundo e o terceiro capítulo desta tese dizem respeito as equações que governam o problema elastodinâmico em estudo e sua formulação integral. No quarto capítulo apresenta-se o tratamento numérico das equações integrais. O quinto contém comentários sobre o programa desenvolvido e o sexto problemas resolvidos. O último apresenta as conclusões e sugestões para futuras implementações.

2. ELEMENTOS DA ELASTODINÂMICA

2.1. INTRODUÇÃO

As equações básicas da elastodinâmica linear são apresentadas neste capítulo, bem como as equações da onda e um estudo sobre as mesmas. Posteriormente é feito um breve comentário sobre a Transformada de Fourier que em seguida é aplicada às equações governantes, passando o problema ao domínio da freqüencia.

2.2. CONCEITOS BÁSICOS

A seguir mostram-se alguns conceitos que serão utilizados no decorrer deste trabalho [4,17].

2.2.1. NOTAÇÃO TENSORIAL CARTESIANA

Permite escrever expressões de forma bastante compacta. Nesta notação as coordenadas X,Y,Z são denotadas por X_1, X_2, X_3 respectivamente, conforme a figura 2.1

2.2.2. CONVENÇÃO DE SOMA

Um índice repetido em um termo indica soma com relação a

este índice. Por exemplo, em três dimensões $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$ é representado por :

$$a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \qquad (2.1)$$

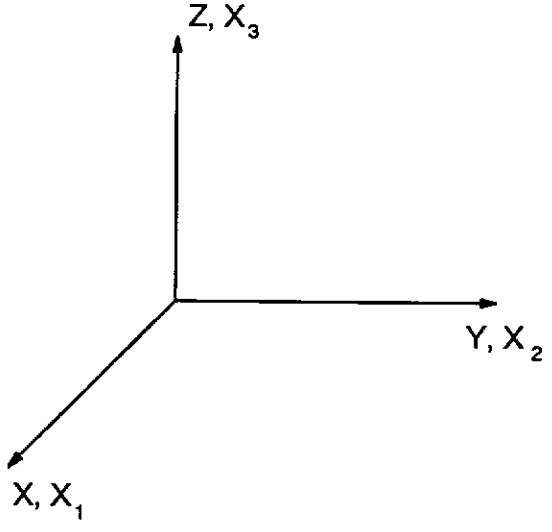


figura 2.1 Notação tensorial cartesiana

2.2.3. CONVENÇÃO PARA DERIVADAS

Um índice após a vírgula indica derivada com relação à coordenada correspondente àquele índice, ou seja

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial X_1} = f_{ij,1} \qquad (2.2)$$

Um ponto sobre a função indica derivada com relação ao tempo sendo o número de pontos igual a ordem da derivada

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} = \dot{f}_{ij} \tag{2.3}$$

2.2.4. DELTA DE KRONECKER

O delta de Kronecker δ_{ij} é definido como

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0 \qquad \text{se} \quad i \neq j \\ \delta_{ij} &= 1 \qquad \text{se} \quad i = j \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.5. DELTA DE DIRAC

É uma função capaz de representar forças concentradas na teoria da elasticidade. Sendo ξ o ponto de aplicação da força, $\xi \in \Omega$

$$\begin{aligned} \delta(\xi,x) &= 0 \qquad \text{se} \quad x \neq \xi \\ \int_{\Omega} \delta(\xi,x)\, d\Omega(x) &= 1 \qquad \text{se} \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

A seguinte propriedade da função delta de Dirac pode ser utilizada para deduzir equações integrais de contorno

$$\int_{\Omega} \delta(\xi,x)\, f(x)\, d\Omega(x) = f(\xi) \tag{2.6}$$

2.2.6. TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Este teorema permite transformar certas integrais de domínio em integrais de contorno. Ele estabelece uma correspondência entre as componentes e as derivadas das componentes de uma função vetorial $\underset{\sim}{f}(x)$ com primeiras derivadas parciais contínuas

$$\underset{\sim}{f}(x) = f_i(x)\underset{\sim}{e}_i = f_1(x)\underset{\sim}{e}_1 + f_2(x)\underset{\sim}{e}_2 + f_3(x)\underset{\sim}{e}_3 \qquad (2.7)$$

sendo x um ponto de coordenadas (x_1,x_2,x_3) e $\underset{\sim}{e}_i$ (i=1,2,3) os vetores unitários nas direções dos eixos de coordenadas X_i (i=1,2,3) conforme a figura 2.2 .

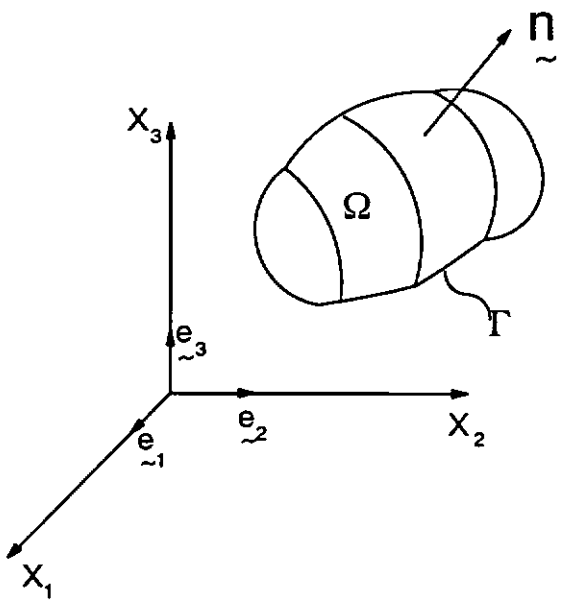


figura 2.2 Corpo com domínio Ω e contorno Γ

Para a região Ω fechada cujo contorno Γ é seccionalmente contínuo, o teorema da divergência pode ser escrito da seguinte forma [10]

$$\int_{\Omega} f_{j,j}\, d\Omega = \int_{\Gamma} f_j\, n_j\, d\Gamma \qquad (2.8)$$

onde n_j são os cossenos diretores do vetor unitário $\underset{\sim}{n}$

$$\underset{\sim}{n} = n_j \underset{\sim}{e}_j = n_1 \underset{\sim}{e}_1 + n_2 \underset{\sim}{e}_2 + n_3 \underset{\sim}{e}_3 \qquad (2.9)$$

que é normal a Γ e aponta para fora de Ω. A transformação indicada na equação (2.8) é possível desde que f(x) seja contínua e tenha primeiras derivadas parciais contínuas.

2.3. EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA

Seja um corpo elástico-linear, homogêneo e isotrópico representado por um domínio Ω_1 e contorno Γ_1 (figura 2.3), carregado arbitrariamente. Suas propriedades físicas são definidas por quaisquer duas das constantes elásticas μ, λ ou E, ν [8,15,16], onde :

- μ e λ - constantes de Lamé.
- E - módulo de elasticidade ou módulo de Young.
- ν - módulo de Poisson.

As relações entre estas constantes são :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.10}$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \tag{2.11}$$

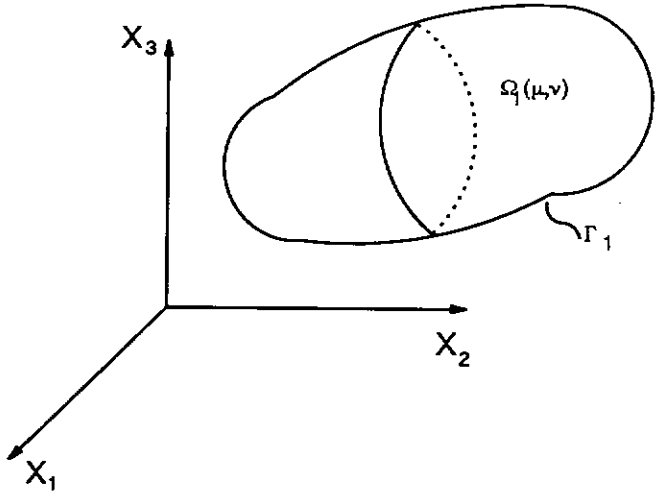


figura 2.3 Corpo com domínio Ω_1 e contorno Γ_1

2.3.1. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Separa-se da região Ω_1 uma sub-região Ω com contorno Γ (figura 2.4) e constrói-se as equações de equilíbrio, sendo b_i as componentes da força de volume $\underset{\sim}{b}$ por unidade de volume e t_i as componentes da força de superfície $\underset{\sim}{t}$ atuando em Γ. As forças $\underset{\sim}{t}$ são forças de ação e reação entre o corpo Ω e o restante de Ω_1.

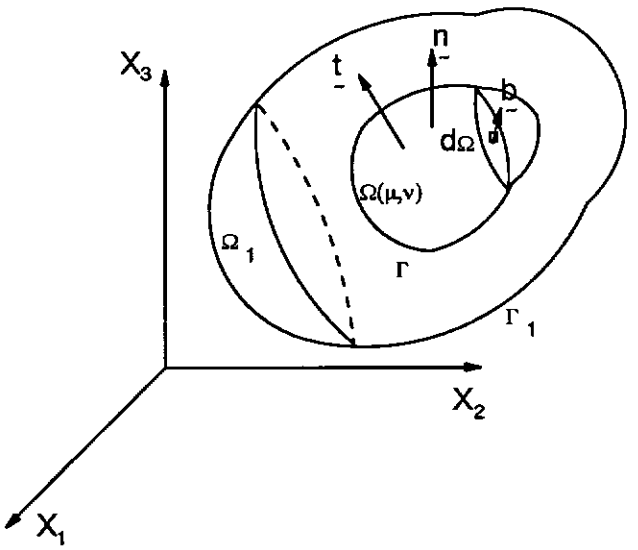


figura 2.4 Subregião Ω de Ω_1

Considera-se também as forças de inércia de D'Alembert $\rho\ddot{u}_i$ devido a aceleração, onde ρ é a densidade de massa e $\ddot{u}_i$ a derivada de 2ª ordem da componente u_i do vetor deslocamento em relação ao tempo. Projetando-se todas as forças em um eixo qualquer obtém-se

$$\int_{\Omega} (\rho b_i - \rho \ddot{u}_i)\, d\Omega + \int_{\Gamma} t_i\, d\Gamma = 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad (2.12)$$

Mas as componentes das forças de superfície são dadas por (figura 2.5)

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \qquad i = 1,2,3 \qquad (2.13)$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões e n_j os cossenos diretores da normal exterior ao contorno Γ. Com o auxílio do teorema da divergência

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j\, d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}\, d\Omega \qquad (2.14)$$

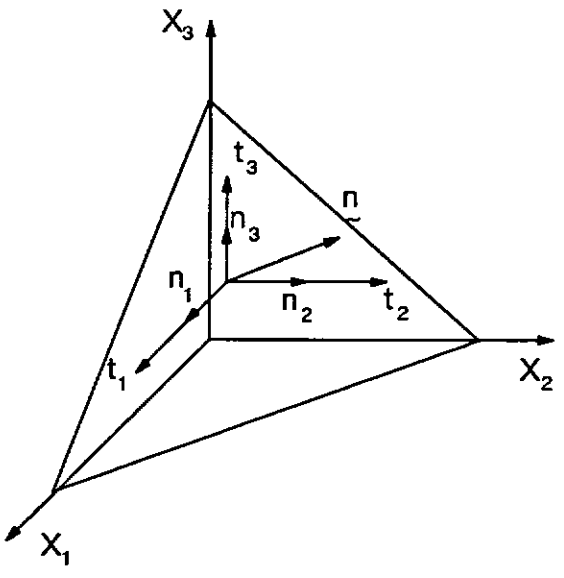


figura 2.5 Componentes da força de superfície

transforma-se a equação (2.12) em

$$\int_{\Omega} (\rho b_i - \rho \ddot{u}_i + \sigma_{ij,j})\ d\Omega = 0 \qquad (2.15)$$

Como esta relação é válida para qualquer sub-região Ω arbitrária tem-se as seguintes equações de movimento :

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (2.16)$$

Fazendo-se o equilíbrio dos momentos em relação aos eixos X_1, X_2 e X_3 separadamente, conclui-se que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (2.17)$$

Assim as equações de movimento (2.16) podem ser reescritas como

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \tag{2.18}$$

2.3.2. RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.19}$$

onde ε_{ij} são as componentes do tensor de deformações específicas de Cauchy.

2.3.3. LEI DE HOOKE

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.20}$$

2.3.4. CONDIÇÕES INICIAIS

Os deslocamentos e as velocidades são conhecidos em todos os pontos do domínio $\Omega+\Gamma$ no tempo inicial t_o.

$$u_i(\underset{\sim}{x}, t_o) = \bar{u}_i(\underset{\sim}{x}) \tag{2.21}$$

$$\dot{u}_i(\underset{\sim}{x}, t_o) = \bar{v}_i(\underset{\sim}{x}) \tag{2.22}$$

onde $\bar{u}_i(\underset{\sim}{x})$ e $\bar{v}_i(\underset{\sim}{x})$ são funções prescritas.

2.3.5. CONDIÇÕES DE CONTORNO

São deslocamentos e/ou forças de superfície conhecidos no contorno Γ que é dividido em Γ_1 e Γ_2, observando-se que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ e que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

$$u_i(\underset{\sim}{x},t) = \bar{u}_i(\underset{\sim}{x},t) \qquad \text{em } \Gamma_1 \tag{2.23}$$

$$t_i(\underset{\sim}{x},t) = \bar{t}_i(\underset{\sim}{x},t) \qquad \text{em } \Gamma_2 \tag{2.24}$$

onde $\bar{u}_i(\underset{\sim}{x},t)$ e $\bar{t}_i(\underset{\sim}{x},t)$ são funções prescritas.

2.3.6. EQUAÇÕES DE NAVIER

Substituindo-se a equação (2.19) em (2.20) obtém-se σ_{ij} em função das derivadas de deslocamentos.

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} \tag{2.25}$$

Esta equação (2.25) ao ser substituída em (2.13) fornece as componentes das forças de superfície também em termos das derivadas de deslocamentos.

$$t_i = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + u_{j,i}n_j\right) + \lambda u_{k,k}n_i \tag{2.26}$$

onde

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = u_{i,j}n_j \tag{2.27}$$

Ao substituir a equação (2.25) na equação (2.18) obtém-se as equações de movimento de Navier

$$(\lambda+\mu)u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \tag{2.28}$$

que são as equações que governam o comportamento dinâmico do corpo sólido, homogêneo, isotrópico e elástico-linear no domínio do tempo. Estas equações junto com as condições iniciais e as condições de contorno formam um problema de valor inicial de contorno (PVIC).

A equação (2.28) pode ser escrita vetorialmente como

$$(\lambda+\mu)\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{u}) + \mu\nabla^2\underset{\sim}{u} + \rho\underset{\sim}{b} = \rho\ddot{\underset{\sim}{u}} \tag{2.29}$$

ou

$$(\lambda+2\mu)\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{u}) - \mu\underset{\sim}{\nabla}\times(\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{u}) + \rho\underset{\sim}{b} = \rho\ddot{\underset{\sim}{u}} \tag{2.30}$$

onde $\underset{\sim}{\nabla}$ e ∇^2 são definidos no apêndice I.

De acordo com o teorema de Helmholtz [8,9] qualquer grandeza vetorial pode ser expressa como a soma do gradiente de uma grandeza escalar ϕ e o rotacional de uma grandeza vetorial $\underset{\sim}{\psi}$ como

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\nabla}\phi + \underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{u}' + \underset{\sim}{u}'' \tag{2.31}$$

onde ϕ e ψ_i são os potenciais de deslocamento escalar e vetorial respectivamente. $\underset{\sim}{u}'$ e $\underset{\sim}{u}''$ são os componentes de dilatação e rotação do vetor deslocamento. Similarmente a força de volume b_j pode ser decomposta numa grandeza escalar β e outra vetorial B_i.

Da decomposição do vetor deslocamento obtém-se ainda que (apêndice I),

$$\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{u}'' = 0 \tag{2.32}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{u}' = \underset{\sim}{0} \tag{2.33}$$

Na ausência de forças de volume, substituindo-se (2.31) em (2.29)

$$\left(\frac{\lambda+\mu}{\rho}\right)\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.(\underset{\sim}{u}' + \underset{\sim}{u}'')) + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\nabla^2(\underset{\sim}{u}' + \underset{\sim}{u}'') = \ddot{\underset{\sim}{u}}' + \ddot{\underset{\sim}{u}}'' \tag{2.34}$$

Levando-se em consideração (2.32)

$$\left(\frac{\lambda+\mu}{\rho}\right)\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{u}') + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\nabla^2(\underset{\sim}{u}' + \underset{\sim}{u}'') = \ddot{\underset{\sim}{u}}' + \ddot{\underset{\sim}{u}}'' \tag{2.35}$$

tomando-se a divergência desta equação, chega-se a

$$\nabla.\left(\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\nabla^2\underset{\sim}{u}' - \ddot{\underset{\sim}{u}}'\right) = 0 \tag{2.36}$$

e uma vez que o divergente da expressão entre parênteses é nulo e que de acordo com (2.33) o rotacional da mesma expressão anula-se, conclui-se que a expressão entre parênteses é nula em todo o espaço, logo

$$\nabla^2\underset{\sim}{u}' = \frac{1}{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ \ddot{\underset{\sim}{u}}' \tag{2.37}$$

ou ainda, como $\underset{\sim}{u}' = \underset{\sim}{\nabla}\phi$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ \ddot{\phi} \tag{2.38}$$

Aplicando-se agora em (2.34) a fórmula (2.33) e tomando-se o rotacional da equação resultante chega-se a

$$\nabla\times\left(\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\nabla^2\underset{\sim}{u}'' - \ddot{\underset{\sim}{u}}''\right) = 0 \tag{2.39}$$

Da mesma forma valem aqui as observações feitas acima, assim

$$\nabla^2\underset{\sim}{u}'' = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}}\ \ddot{\underset{\sim}{u}}'' \tag{2.40}$$

ou ainda, como $\underset{\sim}{u}'' = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{\psi}$

$$\nabla^2\underset{\sim}{\psi} = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}}\ \ddot{\underset{\sim}{\psi}} \tag{2.41}$$

(2.38) e (2.41) são as equações homogêneas escalar e vetorial da onda em três dimensões, respectivamente, sendo que a primeira representa a propagação de uma onda longitudinal com velocidade C_1

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{2.42}$$

e a segunda a propagação de uma onda transversal com velocidade C_2

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.43}$$

A onda transversal não provoca uma mudança de volume, uma vez que $\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{u}'' = 0$, enquanto que a onda longitudinal provoca ora dilatação ora compressão. A velocidade de onda C_1 está associada às ondas longitudinais, de dilatação, primárias ou ainda irrotacionais. A velocidade C_2 está associada às ondas transversais, de distorção, secundárias ou ainda rotacionais.

Dividindo-se a expressão (2.42) pela (2.43)

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}} > 1 \qquad (2.44)$$

conclui-se que as ondas longitudinais são mais velozes do que as transversais.

Quando ondas que se propagam num meio elástico encontram uma superfície descontínua sao produzidas reflexão, refração e difração das mesmas e o movimento de onda resultante é a superposição destas componentes.

A equação de Navier-Cauchy pode agora ser escrita em função das velocidades C_1 e C_2, substituindo-se as equações (2.42) e (2.43) em (2.28)

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + b_j = \ddot{u}_j \qquad (2.45)$$

Considerando-se agora as forças de volume as equações (2.38) e (2.41) tornam-se

$$C_1^2\nabla^2\phi + \beta = \ddot{\phi} \qquad (2.46)$$

$$C_2^2\nabla^2\underset{\sim}{\psi} + \underset{\sim}{B} = \ddot{\underset{\sim}{\psi}} \qquad (2.47)$$

O teorema da completividade [33] garante que qualquer solução da equação (2.45) está incluida no conjunto de soluções das equações (2.46) e (2.47).

Genericamente a equação da onda fica como

$$c^2\nabla^2\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{b} = \ddot{\underset{\sim}{u}} \tag{2.48}$$

2.4. ONDA PLANA HARMÔNICA

Sejam as equações da onda (2.38) e (2.41) ou a equação de Navier (2.45) livre das forças de volume. No caso de onda plana harmônica o campo do vetor de deslocamentos $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$ que corresponde às soluções destas equações é da seguinte forma [13,14]

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{\sim}{d}e^{i(k\underset{\sim}{n}.\underset{\sim}{x} - wt)} \tag{2.49}$$

onde $\underset{\sim}{d}$ é um vetor que define a direção do deslocamento, $\underset{\sim}{n}$ é um vetor unitário que define a direção de propagação da onda normal ao plano, k é o número de onda

$$k = \frac{w}{c} \tag{2.50}$$

w é a freqüência angular e t o tempo.

O plano normal a direção de propagação da onda é dado pela equação

$$\underset{\sim}{n}.\underset{\sim}{x} = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = p \tag{2.51}$$

sendo p a distância do plano à origem do sistema de coordenadas e n_1, n_2, n_3 os cossenos diretores da normal $\underset{\sim}{n}$. Assim tem-se

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{d}e^{ik(p - Ct)} \tag{2.52}$$

kp corresponde a fase do movimento e $\underset{\sim}{d}$ à amplitude. Substituindo-se (2.52) na equação de Navier (sem forças de volume) chega-se a seguinte equação

$$(C^2 - C_2^2)\underset{\sim}{d} - (C_1^2 - C_2^2)(\underset{\sim}{n}.\underset{\sim}{d})\underset{\sim}{n} = 0$$

Para que $C = C_1$ é necessário que

$$\underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{n}.\underset{\sim}{d})\underset{\sim}{n} \tag{2.53}$$

e como $\underset{\sim}{n}.\underset{\sim}{d}$ é uma constante, a direção do vetor deslocamento está na mesma direção da propagação da onda elástica plana com velocidade C_1. A igualdade $C = C_2$ é válida se

$$\underset{\sim}{n}.\underset{\sim}{d} = 0 \tag{2.54}$$

o qual implica que o vetor deslocamento associado à onda elástica plana propagando-se com velocidade C_2, está numa direção perpendicular à direção de propagação.

Normalmente supõem-se que o plano (X_1, X_2) contém o vetor $\underset{\sim}{n}$ (figura 2.6), que é paralelo à direção do vetor deslocamento da onda longitudinal ou onda P. O vetor deslocamento da onda transversal ou onda S pode ser decomposto em duas componentes, uma que pertence ao plano (X_1, X_2) e outra perpendicular ao mesmo, chamadas ondas SV e SH, respectivamente.

As ondas P e SV são as componentes do movimento plano enquanto que SH compõe o movimento antiplano como mostram as figuras (2.7) e (2.8) respectivamente.

Quando as ondas planas atingem uma superfície com descontinuidade de material surgem "ondas de superfície" que propagam-se paralelamente a mesma. A perturbação decai exponencialmente a medida que se afasta da superfície. Quando esta descontinuidade é uma superficie livre estas ondas são chamadas de "ondas de Rayleigh" se o deslocamento está no plano de propagação e de "ondas de Love" [15] se o deslocamento for perpendicular ao plano de propagação.

2.5. TRANSFORMADA DE FOURIER

Faz-se agora um breve comentário sobre a Transformada de Fourier para que posteriormente possa-se aplicá-la nas equações de movimento [7,27].

A Transformada de Fourier tem-se mostrado muito útil no estudo de problemas em diversos campos da ciência, tais como antenas, probabilidade, problemas de valor de contorno, ótica e outros.

Nesta operação transforma-se uma função de uma variável definida de $-\infty$ a $+\infty$ em uma função de uma outra variável também definida de $-\infty$ a $+\infty$. Essencialmente esta transformação consiste em se decompor a função original numa soma de senóides e cossenóides de diferentes freqüências.

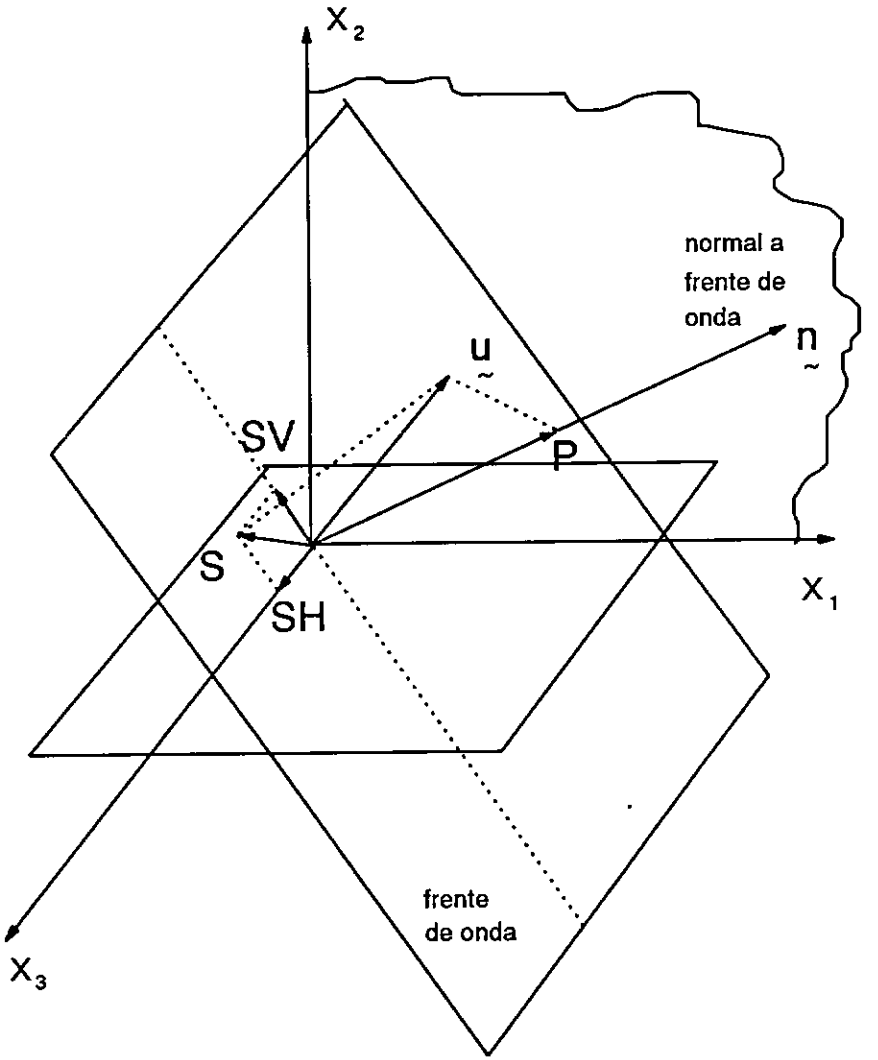


figura 2.6 Propagação de ondas planas no espaço

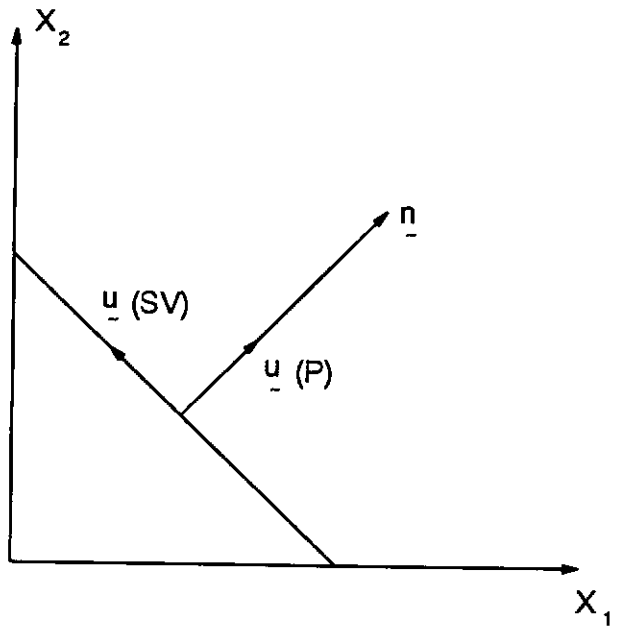


figura 2.7 Ondas SV e P em duas dimensões

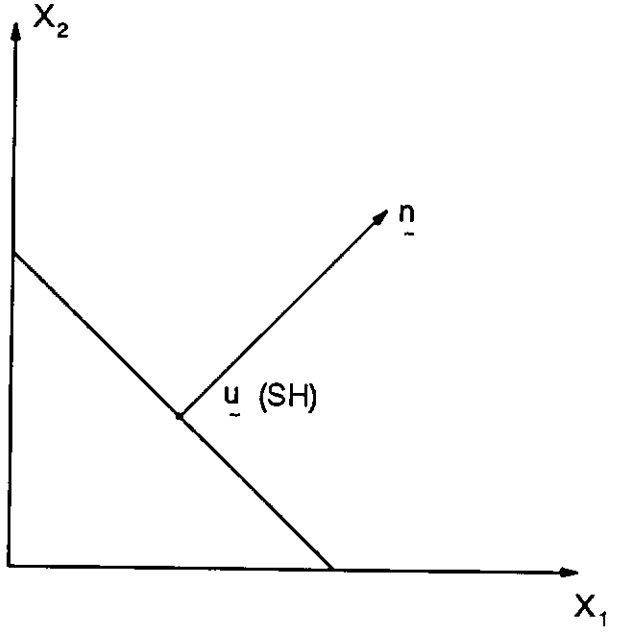


figura 2.8 Onda SH em duas dimensões

A representação da Transformada de Fourier é um diagrama que mostra a amplitude e freqüência de cada senóide e/ou cossenóide. A figura 2.9 a seguir mostra uma função periódica e sua transformada.

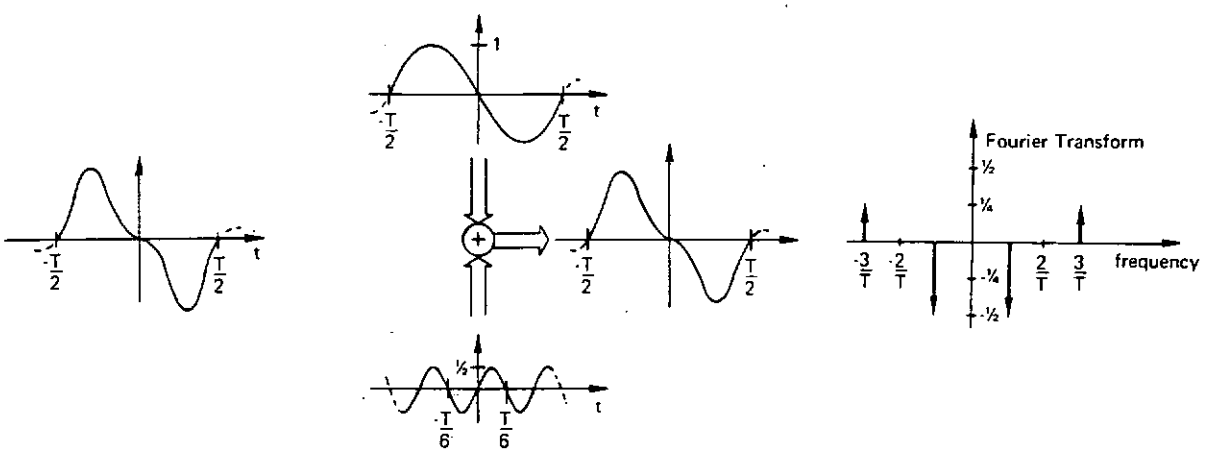


figura 2.9 Transformada de uma função periódica

Do último gráfico da figura acima distinguem-se as diferentes freqüências das senóides e/ou cossenóides e suas amplitudes que combinadas formam uma função arbitrária. Matematicamente esta relação é tida como

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ e^{-i2\pi ft}\ dt \qquad (2.55)$$

onde s(t) é a função a ser decomposta numa soma de senóides e/ou cossenóides, S(f) é a Transformada de Fourier de s(t), f é a

freqüência em radianos e i o número imaginário.

Se a função s(t) não é periódica então a Transformada de Fourier será uma função contínua de freqüências como mostra a figura 2.10,

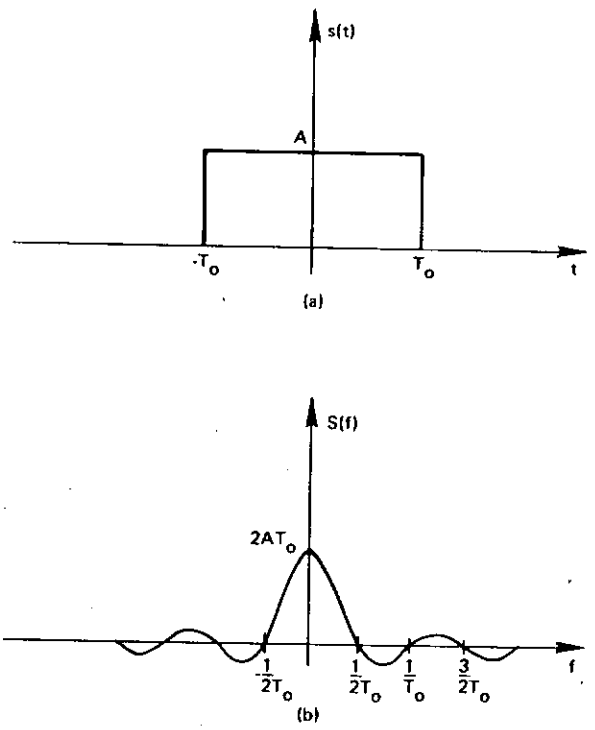


figura 2.10 Transformada de uma função não-periódica

Nesta transformada todas as freqüências devem ser consideradas. De maneira geral uma análise através da Transformada de Fourier permite examinar uma função de um outro ponto de vista, o transformado.

Alternativamente tem-se a transformada de Fourier da seguinte forma

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ e^{-iwt}\ dt \qquad (2.56)$$

e a transformada inversa

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(w)\ e^{iwt}\ dw \qquad (2.57)$$

onde $w = 2\pi f$ é a freqüência angular.

Se a transformada da equação (2.56) existe para cada valor do parâmetro w então esta equação define S(w), a Transformada de Fourier de s(t). Normalmente esta transformada é uma função complexa,

$$S(w) = R(w) + iI(w) = |S(w)|\ e^{i\theta(w)} \qquad (2.58)$$

sendo

R(w) - parte real da função transformada

I(w) - parte imaginária da função transformada

$|S(w)|$ - amplitude da função transformada

$$|S(w)| = \sqrt{R(w)^2 + I(w)^2} \qquad (2.59)$$

$\theta(w)$ - ângulo fase da função transformada

$$\theta(w) = \tan^{-1}\left[\frac{I(w)}{R(w)}\right] \qquad (2.60)$$

Se a função transformada é um número apenas real então a fase anula-se, e se a função for puramente imaginária a fase assume o seguinte valor,

$$\theta(w) = n\,\frac{\pi}{2} \qquad n \text{ - inteiro} \qquad (2.61)$$

A seguir aplica-se a Transformada de Fourier nas equações no domínio do tempo para passá-las ao domínio da freqüência.

Notar-se-á nos exemplos desenvolvidos no capítulo VI a correlação com os conceitos expostos neste capítulo.

2.6. EQUAÇÕES NO DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA

A idéia principal ao passar o problema ao domínio da freqüência, se o problema for transiente é de simplificar a resolução das equações diferenciais. Problemas harmônicos são melhor tratados no domínio da freqüência. A resposta no domínio do tempo pode ser posteriormente obtida aplicando-se a transformada inversa sobre um espectro de freqüências da força excitadora com o auxílio do algoritmo FFT de Coley-Tukey [7]. Em muitos casos é vantagem fazer a análise direto no domínio do tempo pois em certos tipos de problemas (ondas de choque) o retorno ao domínio do tempo via FFT ou outro algorítmo pode ser caro e não fornecer boa precisão.

Esta transformação do domínio do tempo para o da freqüência faz-se ou através da transformação da equação de Navier-Cauchy (2.45) ou da equação da onda (2.48) pois ambas representam igualmente o problema no domínio do tempo. Aplicar-se-ia a Transformada de Laplace se o interesse do presente estudo fosse, além da parte permanente da solução, a parte transiente. A expressão da transformada de Laplace direta é

$$L(s) = \int_0^{+\infty} l(t)\ e^{st}\ \ dt \qquad (2.62)$$

e a transformada inversa

$$l(t) = \int_0^{+\infty} L(s)\ e^{-st}\ ds \qquad (2.63)$$

Como quer-se apenas a solução permanente aplica-se a Transformada de Fourier que é uma particularização da Transformada de Laplace, trocando-se o parâmetro s por -iw e os limites de integração. Assim as equações de transformação ficam como as equações (2.56) e (2.57). Neste estudo da solução permanente com a aplicação da Transformada de Fourier assume-se que é decorrido um grande período de tempo e que os efeitos transientes já desapareceram devido a fenômenos amortecedores de algum tipo. Desta forma supõem-se também que os deslocamentos e velocidades iniciais afetam apenas a parte transitória da solução, logo são irrelevantes ao problema e podem ser considerados nulos.

Aplicando-se a Transformada de Fourier na equação de Navier

$$F\left[(C_1^2 - C_2^2)u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + b_j \right] = F\left[\ddot{u}_j \right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(C_1^2 - C_2^2)u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + b_j\right]e^{-iwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ddot{u}_j e^{-iwt}dt$$

Integrando-se por partes e fazendo as devidas simplificações chega-se à seguinte equação diferencial parcial elíptica, a qual é mais fácil de se tratar numericamente do que a equação de movimento original que é do tipo hiperbólica.

$$(C_1^2 - C_2^2)U_{i,ij} + C_2^2 U_{j,ii} + B_j = -w^2 U_j \qquad (2.64)$$

onde $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{B}$ são as Transformadas de Fourier de $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{b}$ respectivamente, indicado nas fórmulas a seguir

$$\underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{x},w) = F\left[\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)\ e^{-iwt}\ dt \qquad (2.65)$$

$$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x},w) = F\left[\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x},t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x},t)\ e^{-iwt}\ dt \qquad (2.66)$$

e as condições de contorno transformadas são

$$U_i(\underset{\sim}{x},w) = \overline{U}_i(\underset{\sim}{x},w) \qquad \text{em} \quad \Gamma_1 \qquad (2.67)$$

$$T_i(\underset{\sim}{x},w) = \overline{T}_i(\underset{\sim}{x},w) \qquad \text{em} \quad \Gamma_2 \qquad (2.68)$$

com $\overline{U}_i$ e $\overline{T}_i$ como funções prescritas.

No domínio do tempo tinha-se um problema de valor inicial de contorno (PVIC) que reduziu-se agora a um problema de valor de contorno (PVC) que pode ser de três tipos:

(i) Em deslocamentos onde estes são prescritos em todo o contorno

$$U_i(\underset{\sim}{x},w) = \overline{U}_i(\underset{\sim}{x},w) \qquad \underset{\sim}{x} \in \Gamma \qquad (2.69)$$

(ii) Em forças de superfície onde estas são prescritas em todo o contorno.

$$T_i(\underset{\sim}{x},w) = \overline{T}_i(\underset{\sim}{x},w) \qquad \underset{\sim}{x} \in \Gamma \qquad (2.70)$$

(iii) Misto como mostrado nas equações (2.67) e (2.68)

Alternativamente aplicando-se a Transformada de Fourier na equação da onda (genérica)

$$F\left[c^2\nabla^2\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{b} \right] = F\left[\ddot{\underset{\sim}{u}} \right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\nabla^2\underset{\sim}{u} + \frac{\underset{\sim}{b}}{c^2} \right] e^{-iwt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{c^2}\,\ddot{\underset{\sim}{u}}\right] e^{-iwt}\, dt$$

integrando-se por partes e simplificando chega-se a

$$\nabla^2\underset{\sim}{U} + k^2\underset{\sim}{U} = -\frac{\underset{\sim}{B}}{c^2} \qquad (2.71)$$

que é a equação não homogênea de Helmholtz onde k é o número de onda dado pela equação (2.50). $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{B}$ são as funções transformadas e as condições de contorno transformadas são as mesmas mostradas anteriormente. $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim}{B}$ podem ou não ser grandezas complexas, podendo possuir amplitude e fase.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ELASTODINÂMICA

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo desenvolve-se inicialmente as soluções fundamentais do problema em estudo [2] para os casos bi e tri-dimensional. Em seguida são desenvolvidas duas formulações diretas para a obtenção da equação integral [9,10]. A partir desta equação integral tem-se a solução para pontos internos e, por um processo limite, a equação integral no contorno que relaciona valores somente no contorno.

3.2. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Uma solução fundamental na elastodinâmica é a resposta do sistema em consideração à ação de uma carga unitária harmônica concentrada de freqüência w.

Este sistema idealizado é representado pelas equações (2.64) ou (2.71) como foi visto na secção (2.6). Assim para obter-se a solução fundamental basta fazer a seguinte substituição :

$$\underset{\sim}{B}' = \delta(\xi,x)\ \underset{\sim}{e} \qquad (3.1)$$

onde $\delta(\xi,x)\ \underset{\sim}{e}$ representa a ação da carga dinâmica mencionada; $\delta(\xi,x)$ é a função delta de Dirac; ξ o ponto de aplicação da carga; x um ponto qualquer do sistema e $\underset{\sim}{e}$ o vetor unitário na

direção da carga. Deve-se observar que $\underset{\sim}{B}'$ é um vetor transformado (está no domínio da freqüência) que representa a amplitude da carga dinâmica. Logo, embora a equação (3.1) não demonstre, a freqüência w está embutida na parcela e^{iwt} que foi cancelada no desenvolvimento das equações transformadas que regem o sistema.

Definindo r como a distância entre os pontos ξ e x

$$r = | \xi - x | \tag{3.2}$$

a expressão (3.1) pode ser escrita como :

$$\underset{\sim}{B}' = \delta(r)\ \underset{\sim}{e} \tag{3.3}$$

e supondo-se que $\delta(r)$ pode ser escrito em termos de um potencial escalar

$$\delta(r) = \nabla^2 V \tag{3.4}$$

então

$$\underset{\sim}{B}' = \nabla^2 V\ \underset{\sim}{e} = [\ \underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.(V\underset{\sim}{e})) - \underset{\sim}{\nabla}\times(\underset{\sim}{\nabla}\times(V\underset{\sim}{e}))\ ] \tag{3.5}$$

Utilizando-se a equação não homogênea de Helmholtz (2.71)

$$\nabla^2 \underset{\sim}{U} + k^2 \underset{\sim}{U} = - \frac{\underset{\sim}{B}}{c^2}$$

onde

$$\underset{\sim}{B} = \frac{\underset{\sim}{B}'}{\rho} \tag{3.6}$$

e como de acordo com o teorema de Helmholtz citado na secção

2.3.8. pode-se decompor $\underset{\sim}{U}$, uma grandeza vetorial, na soma do gradiente de uma grandeza escalar $\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{A}_1$ com o rotacional de uma grandeza vetorial $\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{A}_2$, tem-se que

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{A}_1) + \underset{\sim}{\nabla}\times(\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{A}_2) \tag{3.7}$$

Assim $\underset{\sim}{U}$ fica decomposto em dois potenciais $\underset{\sim}{A}_1$ e $\underset{\sim}{A}_2$, isto é, em suas partes irrotacional e equivolumial.

Substituindo-se as equações (3.5), (3.6) e (3.7) em (2.71) chega-se a uma equação que é válida se :

$$\begin{cases} \nabla^2\underset{\sim}{A}_1 - k_1^2\underset{\sim}{A}_1 = -\dfrac{V}{\rho C_1^2}\,\underset{\sim}{e} \\ \nabla^2\underset{\sim}{A}_2 + k_2^2\underset{\sim}{A}_2 = -\dfrac{V}{\rho C_2^2}\,\underset{\sim}{e} \end{cases} \tag{3.8}$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{iw}{C_1} \\ k_2 &= \frac{iw}{C_2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

mas se $\underset{\sim}{A}_1$ e $\underset{\sim}{A}_2$ estão na direção da carga unitária,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A}_1 &= A_1\,\underset{\sim}{e} \\ \underset{\sim}{A}_2 &= A_2\,\underset{\sim}{e} \end{aligned} \tag{3.10}$$

voltando-se às expressões (3.8), obtém-se duas expressões escalares

$$\begin{cases} \nabla^2 A_1 - k_1^2 A_1 = -\dfrac{V}{\rho C_1^2} \\ \nabla^2 A_2 + k_2^2 A_2 = -\dfrac{V}{\rho C_2^2} \end{cases} \tag{3.11}$$

Resolve-se agora estas equações diferenciais para os casos tri e bi-dimensional.

Para o caso tri-dimensional (teoria do potencial)

$$\delta(r) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3.12}$$

que com a equação (3.4) implica em

$$V = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3.13}$$

Substituindo-se (3.13) em (3.11), tem-se duas equações diferenciais cujas soluções são :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4\pi\rho w^2}\left(\frac{1}{r}\right) + c_1'\frac{e^{k_1 r}}{r} + c_1''\frac{e^{-k_1 r}}{r} \\ A_2 &= \frac{1}{4\pi\rho w^2}\left(\frac{1}{r}\right) + c_2'\frac{e^{k_2 r}}{r} + c_2''\frac{e^{-k_2 r}}{r} \end{aligned} \tag{3.14}$$

O primeiro termo destas equações é a solução particular e os outros dois correspondem à solução da equação diferencial parcial homogênea associada.

Os deslocamentos e tensões são obtidos por derivação e para o cálculo das constantes c_1', c_1'', c_2' e c_2'' é suficiente considerar-se o equilíbrio numa pequena região ao redor da carga, bem como as condições de radiação.

Retornando-se os valores das constantes às equações (3.14) e efetuando-se as devidas derivações, obtém-se as componentes dos deslocamentos e das forças de superfície com normal exterior $\underset{\sim}{n}$:

$$U^*_{ij} = \frac{1}{\alpha\pi\rho C_2^2}\left[\psi\,\delta_{ij} - \chi\, r_{,i}\, r_{,j}\right] \tag{3.15}$$

$$T^*_{ij} = -\frac{1}{\alpha\pi}\left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r}\right)\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}\, n_i\right) - \frac{2\chi}{r}\left(n_j\, r_{,i} - 2\, r_{,i}\, r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}\right) - 2\frac{d\chi}{dr}\, r_{,i}\, r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{C_1^2}{C_2^2} - 2\right)\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha\chi}{2r}\right) r_{,i}\, n_j\right] \tag{3.16}$$

$\alpha = 4$ e as funções ψ e χ são definidas como :

$$\psi = \frac{e^{-k_2 r}}{r} + \left(\frac{1}{k_2^2 r^2} + \frac{1}{k_2 r}\right)\frac{e^{-k_2 r}}{r} - \frac{C_2^2}{C_1^2}\left(\frac{1}{k_1^2 r^2} + \frac{1}{k_1 r}\right)\frac{e^{-k_1 r}}{r} \tag{3.17}$$

$$\chi = \left(\frac{3}{k_2^2 r^2} + \frac{3}{k_2 r} + 1\right)\frac{e^{-k_2 r}}{r} - \frac{C_2^2}{C_1^2}\left(\frac{3}{k_1^2 r^2} + \frac{3}{k_1 r} + 1\right)\frac{e^{-k_1 r}}{r} \tag{3.18}$$

Para o caso bi-dimensional (teoria do potencial)

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi}\nabla^2(\ln(r)) \tag{3.19}$$

que com a equação (3.4) implica em

$$V = \frac{1}{2\pi}\ln(r) \tag{3.20}$$

Substituindo-se (3.20) em (3.11), como indicado anteriormente, tem-se

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\rho w^2}\ln(r) + c_1' K_0(k_1 r) + c_1'' I_0(k_1 r)$$
$$A_2 = -\frac{1}{2\pi\rho w^2}\ln(r) + c_2' K_0(k_2 r) + c_2'' I_0(k_2 r) \tag{3.21}$$

onde I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas da primeira e segunda classe de ordem zero (ver apêndice IV). Da mesma forma, os deslocamentos e tensões são obtidos por derivação. As constantes são calculadas considerando-se o equilíbrio e as condições de radiação.

As componentes dos deslocamentos e forças de superfície são dadas pelas mesmas expressões (3.15) e (3.16) sendo que agora $\alpha = 2$ e ψ e χ as expressões a seguir:

$$\psi = K_0(k_2 r) + \frac{1}{k_2 r}\left[K_1(k_2 r) - \frac{C_2}{C_1} K_1(k_1 r)\right] \tag{3.22}$$

$$\chi = K_2(k_2 r) - \frac{C_2^2}{C_1^2} K_2(k_1 r) \tag{3.23}$$

K_i e a função de Bessel modificada da segunda classe de ordem i (ver apêndice IV).

Estas soluções fundamentais foram desenvolvidas para o estado plano de deformação. Para ter-se as soluções para o estado plano de tensões basta que o coeficiente de Poisson ν seja substituído por $\bar{\nu}$, onde,

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \tag{3.24}$$

sendo que a constante de Lamé μ não se altera.

Para as equações desenvolvidas tem-se ainda que (fig. 3.1) :

$$r_i = X_i(x) - X_i(\xi) \tag{3.25}$$

$$r = \sqrt{r_i r_i} \tag{3.26}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial X_i} = \frac{r_i}{r} \tag{3.27}$$

n_i - cosseno diretor da normal na direção i

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \left[\frac{\partial r}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial n} \right] = r_{,i}\, n_i \qquad (3.28)$$

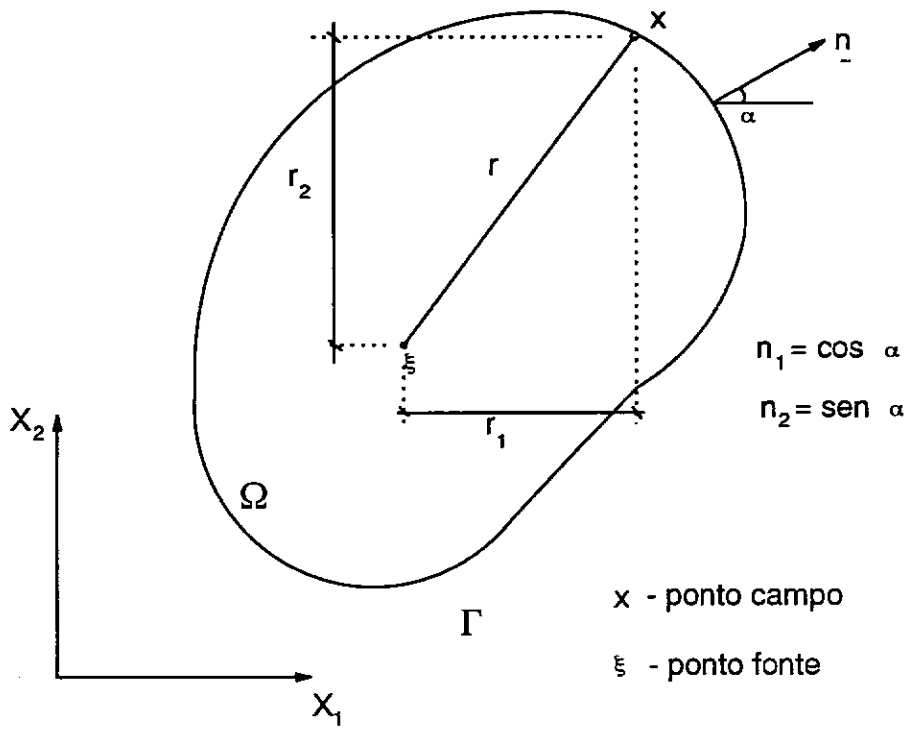


figura 3.1 Definições de grandezas auxiliares para a solução fundamental bi-dimensional

3.3. FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL PARA A ELASTODINÂMICA

As equações diferenciais parciais elípticas podem ser transformadas em equações integrais e estas, por sua vez, através de um processo limite, são transformadas em equações integrais no contorno, que relacionam valores somente no

contorno. O tratamento numérico destas equações integrais no contorno é que constitue o método dos elementos de contorno.

A equação integral pode ser obtida através de formulações diretas ou indiretas [9,10]. As diretas são as mais utilizadas por tratarem de valores físicos reais (deslocamento e força de superfície), sendo assim mais fácil sua compreensão. Entre as formulações diretas tem-se os princípios variacionais, funções de Green, resíduos ponderados e o teorema da reciprocidade dinâmica. Formula-se a seguir a equação integral para os dois últimos métodos citados acima.

3.3.1 FORMULAÇÃO POR RESÍDUOS PONDERADOS

O método dos resíduos ponderados é discutido no apêndice II deste trabalho.

Aplicando-se resíduos ponderados à equação (2.64), tem-se que :

$$\int_{\Omega}\left\{(C_1^2 - C_2^2)\ U_{i,ij} + C_2^2\ U_{j,ii} + w^2 U_j + B_j\right\} U_j^*\ d\Omega \quad =$$

$$\int_{\Gamma_2}\left\{T_j - \bar{T}_j\right\} U_j^*\ d\Gamma \quad - \quad \int_{\Gamma_1}\left\{U_j - \bar{U}_j\right\} T_j^*\ d\Gamma \qquad (3.29)$$

onde a função peso U_j^* (j=1,2,3) é a solução fundamental, sendo que

$$U_j^* = U_{ij}^* \, e_i$$

$$T_j^* = T_{ij}^* \, e_i \qquad (3.30)$$

U_{ij}^* e T_{ij}^* representam o deslocamento e força de superfície na direção j do ponto campo x devido a uma força dinâmica unitária atuando na direção i aplicada no ponte fonte ξ (figura 3.2).

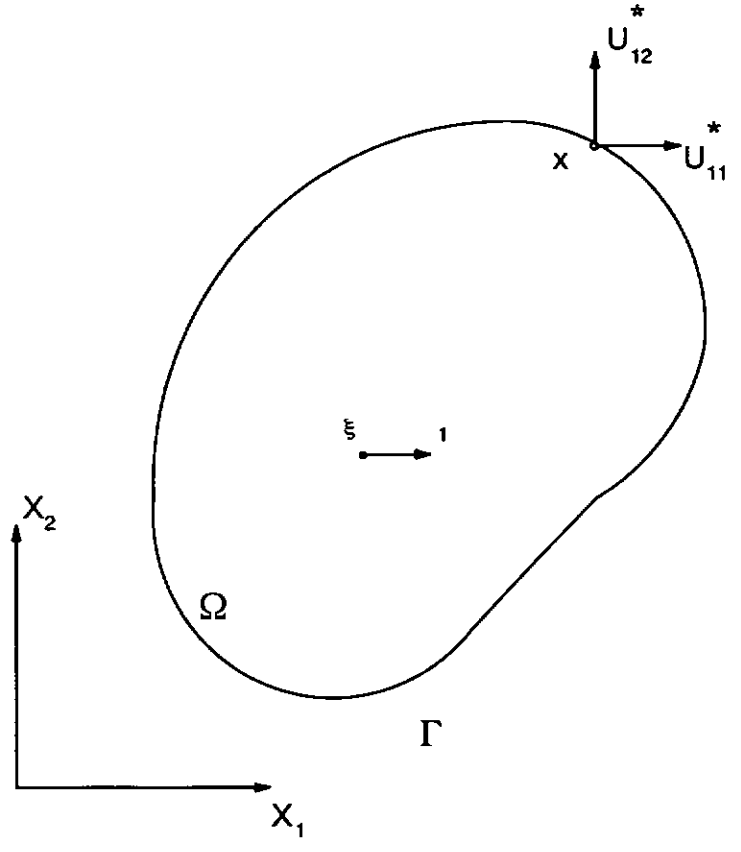


figura 3.2 Soluções fundamentais de deslocamento

(caso bi-dimensional)

Integrando-se a equação (3.29) por partes duas vezes com relação a X_i, chega-se a :

$$\int_{\Omega}\left\{(C_1^2 - C_2^2)\ U^*_{i,ij} + C_2^2\ U^*_{j,ii} + w^2 U^*_j\right\} U_j\ d\Omega + \int_{\Omega} B_j\ U^*_j\ d\Omega \ =$$

$$-\int_{\Gamma_2} \bar{T}_j\ U^*_j\ d\Gamma - \int_{\Gamma_1} T_j\ U^*_j\ d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_j\ T^*_j\ d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_j\ T^*_j\ d\Gamma \qquad (3.31)$$

ou ainda

$$\int_{\Omega}\left\{(C_1^2 - C_2^2)\ U^*_{i,ij} + C_2^2\ U^*_{j,ii} + w^2 U^*_j\right\} U_j\ d\Omega + \int_{\Omega} B_j\ U^*_j\ d\Omega \ =$$

$$-\int_{\Gamma} T_j\ U^*_j\ d\Gamma + \int_{\Gamma} U_j\ T^*_j\ d\Gamma \qquad (3.32)$$

que pode ser escrita como :

$$\int_{\Omega} B^*_j\ U_j\ d\Omega + \int_{\Gamma} T^*_j\ U_j\ d\Gamma = \int_{\Omega} B_j\ U^*_j\ d\Omega + \int_{\Gamma} T_j\ U^*_j\ d\Gamma \qquad (3.33)$$

que é a identidade dinâmica de Betti-Rayleigh. Chega-se a mesma equação (3.32) partindo-se do teorema da reciprocidade dinâmica.

3.3.2. TEOREMA DA RECIPROCIDADE DINÂMICA

Este teorema é uma extensão do teorema de Betti da elastostática. Sejam dois estados elastodinâmicos distintos definidos sobre um domínio Ω com contorno Γ,

$S\ (\underline{u},\ \underline{t},\ \underline{b}\ )$

$S^*(\underline{u}^*,\ \underline{t}^*,\ \underline{b}^*)$

O teorema diz que o trabalho realizado pelas forças do primeiro estado S com os deslocamentos do segundo S^* é igual ao trabalho correspondente das forças do segundo estado sobre os deslocamentos do primeiro. Assim,

$$\int_\Omega \underline{b} * \underline{u}^* \, d\Omega + \int_\Gamma \underline{t} * \underline{u}^* \, d\Gamma = \int_\Omega \underline{b}^* * \underline{u} \, d\Omega + \int_\Gamma \underline{t}^* * \underline{u} \, d\Gamma \qquad (3.34)$$

o operador (*) é a convolução no tempo.

Para o caso estacionário os produtos de convolução reduzem-se a produtos escalares, então

$$\int_\Gamma \underline{T}.\underline{U}^* \, d\Gamma + \int_\Omega \underline{B}.\underline{U}^* \, d\Omega = \int_\Omega \underline{B}^*.\underline{U} \, d\Omega + \int_\Gamma \underline{T}^*.\underline{U} \, d\Gamma \qquad (3.35)$$

Embora as equações (3.33) e (3.35) sejam aparentemente idênticas, conceitualmente elas são diferentes. A equação (3.33) parte do princípio de que a integral dos resíduos seja nula, enquanto que a equação (3.35) relaciona dois campos de soluções exatas para o problema elastodinâmico.

3.3.3. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS INTERNOS

Supondo-se na equação (3.32) que U_j^* e T_j^* são as soluções fundamentais das equações governantes transformadas (2.64),

então substituindo (3.1) em (3.35) e relembrando a equação (2.6)

$$U_j(\xi)\ e_j = \int_\Gamma T_j(x)\ U_j^*(\xi,x)\ d\Gamma(x) - \int_\Gamma T_j^*(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) + \int_\Omega B_j(x)\ U_j^*(\xi,x)\ d\Omega(x) \qquad (3.36)$$

e usando-se as equações (3.30), (3.36) fica como :

$$U_i(\xi) = \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) - \int_\Gamma T_{ij}^*(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) + \int_\Omega U_{ij}^*(\xi,x)\ B_j(x)\ d\Omega(x) \qquad (3.37)$$

a qual é a equivalente dinâmica à identidade de Somigliana. Esta equação relaciona os deslocamentos U_i em qualquer ponto interno ξ com valores de deslocamentos (U_j) e forças de superfície (T_j) sobre o contorno mais as forças de volume (B_j) conhecidas no domínio.

As tensões internas são calculadas através da diferenciação dos deslocamentos dados pelas equações (3.37) com relação ao ponto ξ usando a equação (2.25), logo

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_\Gamma D_{kij}\ T_k\ d\Gamma - \int_\Gamma S_{kij}\ U_k\ d\Gamma + \int_\Omega D_{kij}\ B_k\ d\Omega \qquad (3.38)$$

D_{kij} e S_{kij} são tensores de terceira ordem dados por:

$$D_{kij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial U^*_{kl}}{\partial X_l} + \mu\left[\frac{\partial U^*_{ik}}{\partial X_j} + \frac{\partial U^*_{jk}}{\partial X_i}\right]$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial T^*_{kl}}{\partial X_l} + \mu\left[\frac{\partial T^*_{ik}}{\partial X_j} + \frac{\partial T^*_{jk}}{\partial X_i}\right] \qquad (3.39)$$

3.3.4. EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

Para obter-se as soluções em pontos internos através da equação (3.37), viu-se que é necessário conhecer todos os deslocamentos e forças de superfície no contorno. Normalmente conhece-se apenas metade destes valores que definem qual o tipo de problema de valor de contorno (em deslocamentos, em forças de supeficie ou misto). A outra metade incógnita é obtida através de uma técnica onde se coloca o ponto ξ no contorno e resolve-se um sistema de equações algébricas envolvendo somente valores do contorno.

Ao aproximar ξ do contorno surge uma singularidade na equação (3.37), fazendo-se necessário um estudo separado de seus termos.

Seja a equação (3.37) mostrada a seguir,

$$U_i(\xi) = \int_\Gamma U^*_{ij}(\xi,x)\; T_j(x)\; d\Gamma(x) - \int_\Gamma T^*_{ij}(\xi,x)\; U_j(x)\; d\Gamma(x) +$$

$$\int_\Omega U^*_{ij}(\xi,x)\; B_j(x)\; d\Omega(x)$$

Para cálculo destas integrais quando ξ se aproxima do contorno, emprega-se o artifício de aumentar o domínio Ω de uma pequena área (caso bi-dimensional) Ω_ε equivalente a uma parte de um círculo de raio ε centrado em ξ, conforme mostra a figura 3.3 . A equação (3.37) passa a ser escrita como :

$$U_i(\xi) = \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon-\Gamma'} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) - \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon-\Gamma'} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) +$$

$$\int_{\Omega+\Omega_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x)\ B_j(x)\ d\Omega(x) \qquad (3.40)$$

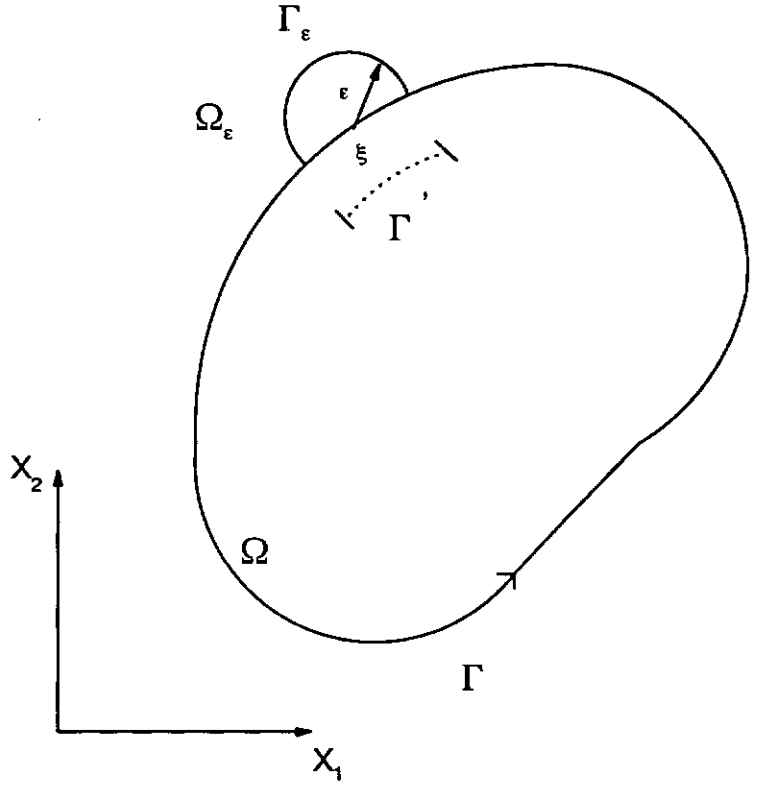


figura 3.3 Domínio Ω aumentado de Ω_ε(caso bi-dimensional)

Faz-se agora $\varepsilon \to 0$ e analísa-se cada integral separadamente.

A primeira integral da equação (3.40) também pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon-\Gamma'} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) + \int_{\Gamma-\Gamma'} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad (3.41)$$

A primeira integral do segundo membro da equação (3.41) é desenvolvida no apêndice III para $\varepsilon \to 0$, e resulta :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) = 0 \qquad (3.42)$$

e a segunda integral do segundo membro de (3.41) fica como :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma'} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) = VP \int_{\Gamma} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad (3.43)$$

mas como a singularidade da integral de $U^*_{ij}(\xi,x)$ é fraca (ordem de ln r) não há necessidade de calculá-la no sentido do valor principal de Cauchy. Assim, conclui-se que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon-\Gamma'} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad (3.44)$$

A segunda integral de (3.40) pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon-\Gamma'} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) + \int_{\Gamma-\Gamma'} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad (3.45)$$

No limite quando $\varepsilon \to 0$ a primeira integral do segundo membro da equação (3.45) é representada como :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ [U_j(x)-U_j(\xi)]\ d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(\xi)\ d\Gamma(x) \qquad (3.46)$$

Como $\underset{\sim}{U}$ é uma função contínua a primeira integral do segundo membro da equação (3.46) é zero e a segunda integral fica :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(\xi)\ d\Gamma(x) = U_j(\xi) \left[\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ d\Gamma(x) \right] = K_{ij}(\xi)\ U_j(\xi) \qquad (3.47)$$

onde

$$K_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x)\ d\Gamma(x) \qquad (3.48)$$

$K_{ij}(\xi)$ é desenvolvido no apêndice III. A última integral de (3.45) é interpretada no sentido do valor principal de Cauchy e é equivalente a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma-\Gamma'} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) = VP \int_{\Gamma} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad (3.49)$$

A integral de volume da equação (3.40) não apresenta singularidade especial assim a equação integral no contorno fica :

$$C_{ij}(\xi)U_j(\xi) = \int_{\Gamma} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) - VP \int_{\Gamma} T^*_{ij}(\xi,x)\ U_j(x)\ d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U^*_{ij}(\xi,x)\ B_j(x)\ d\Omega(x) \qquad (3.50)$$

sendo

$$C_{ij}(\xi) = 1 + K_{ij}(\xi) \qquad (3.51)$$

Se ξ estiver

sobre um contorno suave $\quad C_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{2}$

fora do domínio $\quad C_{ij}(\xi) = 0$

interior ao domínio $\quad C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$

Para o terceiro caso a equação (3.50) torna-se igual a equação para pontos internos (3.37).

A partir desta equação (3.50), junto com as condições de contorno, tem-se condições de calcular os valores incógnitos de deslocamento e força de superfície no contorno.

A solução analítica desta equação é bastante complicada, por isso, exceto para problemas extremamente simples, é imprescindível o emprego de um método numérico para resolução da mesma.

4. TRATAMENTO NUMÉRICO DA EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo a equação integral no contorno é discretizada e o sistema de equações formado, bem como as equações para cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos [10,18,26]. A seguir três tipos de elementos de contorno são descritos (constante, linear e quadrático) [19] com base nas suas características geométricas, funcionais e respectivas técnicas de integração. Nós com descontinuidade também são considerados [32].

4.2. DISCRETIZAÇÃO E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para que se possa resolver o problema numericamente, faz-se necessário a discretização da geometria do contorno Γ e do domínio Ω, e a esta discretização estão associados valores nodais de grandezas físicas como o deslocamento, força de superfície e força de volume.As variáveis envolvidas nas integrais de domínio não são interpoladas e sua discretização serve apenas para calcular as contribuições conhecidas. Pode-se usar os vetores de Galerkin para passar a integral de domínio ao contorno, assim a discretização do domínio seria desnecessária.

Seja a equação (3.50) escrita matricialmente,

$$\underset{\sim}{C}(\xi)\underset{\sim}{U}(\xi) = \int_{\Gamma} \underset{\sim}{U}^{*}(\xi,x)\ \underset{\sim}{T}(x)\ d\Gamma(x) - VP\int_{\Gamma} \underset{\sim}{T}^{*}(\xi,x)\ \underset{\sim}{U}(x)\ d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega} \underset{\sim}{U}^{*}(\xi,x)\ \underset{\sim}{B}(x)\ d\Omega(x) \qquad (4.1)$$

onde $\underset{\sim}{C}(\xi)$ é uma matriz relacionada à geometria do contorno no ponto ξ ,

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{U}(\xi)$ e $\underset{\sim}{U}(x)$ são os vetores de deslocamentos nos pontos ξ e x,

$$\underset{\sim}{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$\underset{\sim}{T}(x)$ é o vetor de forças de superfície no ponto x,

$$\underset{\sim}{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

$\underset{\sim}{B}(x)$ é o vetor de forças de volume,

$$\underset{\sim}{B} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix}$$

$\underset{\sim}{T}^{*}(\xi,x)$ e $\underset{\sim}{U}^{*}(\xi,x)$ são as matrizes de soluções fundamentais de forças de superfície e deslocamento, respectivamente,

$$\underset{\sim}{T}^* = \begin{bmatrix} T^*_{11} & T^*_{12} & T^*_{13} \\ T^*_{21} & T^*_{22} & T^*_{23} \\ T^*_{31} & T^*_{32} & T^*_{33} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{U}^* = \begin{bmatrix} U^*_{11} & U^*_{12} & U^*_{13} \\ U^*_{21} & U^*_{22} & U^*_{23} \\ U^*_{31} & U^*_{32} & U^*_{33} \end{bmatrix}$$

As matrizes e os vetores relacionados acima estão no caso tri-dimensional. Para o caso bi-dimensional basta retirar dos vetores e das matrizes todos os termos com sub-índice 3.

Para discretização da equação (4.1) divide-se o contorno em J elementos e o domínio em M elementos (elementos do domínio possuem dimensão maior que os do contorno). Em duas dimensões a geometria dos elementos de contorno pode ser reta ou curva (plana) e a dos elementos de domínio, uma superfície plana simples, normalmente triangular ou retangular. A esses elementos estão associados valores nodais de deslocamentos, forças de superfície (contorno) e forças de volume (domínio), em função dos quais a variação destas grandezas dentro do elemento depende das funções de interpolação utilizadas. A figura 4.1 mostra um corpo bi-dimensional discretizado.

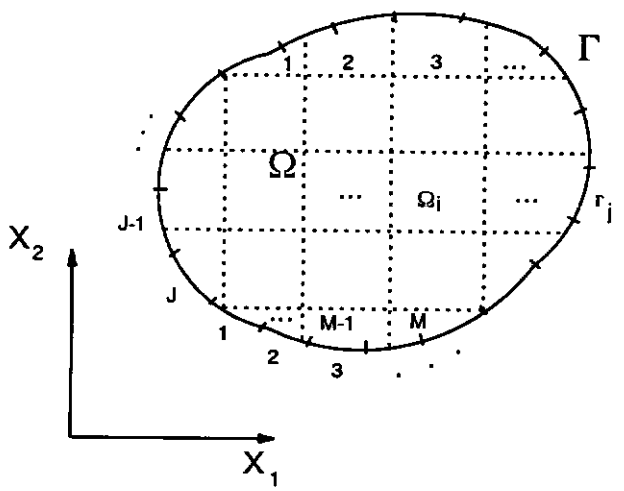


figura 4.1 Corpo bi-dimensional discretizado

Os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície serão parte prescritos e a outra parte incógnitas do sistema de equações discretizado.

A geometria de um elemento Γ_j do contorno varia de acordo com a função de interpolação $\underset{\sim}{M}$ adotada, e esta por sua vez é definida em função do número m de nós geométricos ($\underset{\sim}{X}^{(m)}$) do elemento. Desta forma as coordenadas cartesianas de um ponto ($\underset{\sim}{X}^{(j)}$) qualquer do elemento são calculadas pela expressão :

$$\underset{\sim}{X}^{(j)} = \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{X}^{(m)} \tag{4.2}$$

Similarmente, adotam-se funções de interpolação $\underset{\sim}{N}$,baseadas em um número n de nós funcionais do elemento, para aproximação dos deslocamentos e forças de superfície dentro do elemento.

$$\underset{\sim}{U}^{(j)} = \underset{\sim}{N}\ \underset{\sim}{U}^{(n)} \tag{4.3}$$

$$\underset{\sim}{T}^{(j)} = \underset{\sim}{N}\ \underset{\sim}{T}^{(n)} \tag{4.4}$$

Os elementos do domínio são discretizados e com funções de interpolação apropriadas tem-se a força de volume em qualquer elemento do domínio.

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{\bar{B}}^{(e)} \tag{4.5}$$

sendo $\underset{\sim}{\bar{B}}$ conhecido em cada elemento e do domínio.

Substituindo-se as equações (4.3), (4.4) e (4.5) em (4.1) tem-se :

$$\underset{\sim}{C}(\xi)\underset{\sim}{U}^{(n)}(\xi) = -\sum_{j=1}^{J}\left(\int_{\Gamma_j}\underset{\sim}{T}^{*}\,\underset{\sim}{N}^{T}\,d\Gamma\right)\underset{\sim}{U}^{(n)} + \sum_{j=1}^{J}\left(\int_{\Gamma_j}\underset{\sim}{U}^{*}\,\underset{\sim}{N}^{T}\,d\Gamma\right)\underset{\sim}{T}^{(n)}$$

$$+\sum_{p=1}^{M}\left(\int_{\Omega_p}\underset{\sim}{U}^{*}\,\underset{\sim}{L}^{T}\,d\Omega\right)\underset{\sim}{\bar{B}}^{(e)} \qquad (4.6)$$

onde ξ é aplicado sobre os nós funcionais.

Como normalmente as funções de interpolação são escritas em termos de um sistema de coordenadas intrínsico (η, υ, ζ), tem-se que,

$$d\Gamma = |\,\underset{\sim}{J}\,|\,d\eta\,d\upsilon \qquad (4.7)$$

$$d\Omega = |\,\underset{\sim}{V}\,|\,d\eta\,d\upsilon\,d\zeta \qquad (4.8)$$

para o caso tri-dimensional e,

$$d\Gamma = |\,\underset{\sim}{J}\,|\,d\eta \qquad (4.9)$$

$$d\Omega = |\,\underset{\sim}{V}\,|\,d\eta\,d\upsilon \qquad (4.10)$$

para o caso bi-dimensional.

$|\,\underset{\sim}{J}\,|$ e $|\,\underset{\sim}{V}\,|$ são, respectivamente, os jacobianos de transformação de elementos

de área e de volume - tri-dimensional

de linha e de área - bi-dimensional

entre os dois sistemas de coordenadas.

Assim as integrais da equação (4.6) ficam (caso bi-dimensional) :

$$\int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} | \underset{\sim}{J} | \, \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\eta \tag{4.11}$$

$$\int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} | \underset{\sim}{J} | \, \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\eta \tag{4.12}$$

$$\int_{\Omega_p} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{L}^T \, d\Omega = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} | \underset{\sim}{V} | \, \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{L}^T \, d\eta \, d\upsilon \tag{4.13}$$

É conveniente efetuar-se os cálculos das integrais numericamente, principalmente quando as funções de interpolação envolvidas possuem ordem superior a um. Neste cálculo numérico utiliza-se a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre [31]. Aplicando-se sobre a equação (4.6) tem-se,

$$\underset{\sim}{C} \, \underset{\sim}{U}^{(n)} = \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{i=1}^{I} |J_i| w_i (\underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T)_i \right) \underset{\sim}{T}^{(n)} - \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{i=1}^{I} |J_i| w_i (\underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T)_i \right) \underset{\sim}{U}^{(n)}$$

$$+ \sum_{p=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{K} |V_k| w_k (\underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{L}^T)_k \right) \underset{\sim}{\bar{B}}^{(e)} \tag{4.14}$$

A equação (4.14) fornece um sistema com tantas equações quanto for o número de nós funcionais do contorno vezes o número de graus de liberdade de cada nó. I e K são o número de pontos de integração sobre os elementos do contorno e do domínio, respectivamente. w_i e w_k são os fatores de peso associados aos pontos de integração. As duas integrais de domínio estão condensadas em um somatório.

Quando o ponto fonte ξ e o ponto campo x estão sobre o mesmo elemento surge uma singularidade que dependendo do tipo de elemento considerado terá um tratamento apropriado. Essas considerações serão mostradas na secção (4.4.5.) .

Outra maneira de se escrever (4.6) é :

$$\underset{\sim}{C}(\xi)\underset{\sim}{U}^{(n)}(\xi) = \sum_{j=1}^{J} \underset{\sim}{G}_j \underset{\sim}{T}^{(n)} - \sum_{j=1}^{J} \hat{\underset{\sim}{H}}_j \underset{\sim}{U}^{(n)} + \sum_{p=1}^{M} \underset{\sim}{F}_p \bar{\underset{\sim}{B}}^{(e)} \tag{4.15}$$

onde

$$\underset{\sim}{G}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma \tag{4.16}$$

$$\hat{\underset{\sim}{H}}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{T}^* \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma \tag{4.17}$$

$$\underset{\sim}{F}_p = \int_{\Omega_p} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{L}^T \, d\Omega \tag{4.18}$$

Após a aplicação de ξ sobre todos os N nós funcionais, obtem-se o sistema :

$$\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{T} - \hat{\underset{\sim}{H}}\,\underset{\sim}{U} + \bar{\underset{\sim}{B}} \tag{4.19}$$

ou

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{T} + \bar{\underset{\sim}{B}} \tag{4.20}$$

com

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{C} + \hat{\underset{\sim}{H}} \tag{4.21}$$

$\underset{\sim}{C}$ é uma matriz quase diagonal e $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{T}$ contém os valores

nodais de todos os deslocamentos e forças de superfície do contorno, onde metade são conhecidos e metade incógnitos.

A equação (4.20) pode ser reestruturada de forma a ter-se um sistema com uma matriz de coeficientes $\underset{\sim}{A}$, um vetor de incógnitas $\underset{\sim}{y}$ e um vetor de termos independentes $\underset{\sim}{f}$. Esse vetor de termos independentes contém todos os valores de força de volume, bem como os valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície multiplicados pelos respectivos coeficientes das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$.

O sistema reduz-se a :

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{f} \qquad (4.22)$$

Na ausência de forças de volume a equação (4.20) fica :

$$\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{T} \qquad (4.23)$$

que reduz-se da mesma forma a uma equação semelhante à (4.22).

A matriz $\underset{\sim}{A}$ possui coeficientes de $\underset{\sim}{G}$ e $\underset{\sim}{H}$ e os coeficientes destas duas matrizes, integrais dos produtos das soluções fundamentais pelas funções de interpolação, possuem grandezas cuja diferença é da ordem de μ (constante de Lamé). Assim, é necessário multiplicar algumas colunas de $\underset{\sim}{A}$ por μ de forma a torná-la uma matriz melhor condicionada para a posterior inversão da mesma. Esta matriz é cheia e não simétrica. As colunas de $\underset{\sim}{A}$ correspondentes às forças de superfície incógnitas devem ser multiplicadas por μ . Após a solução do sistema de equações, os valores de força de superfície calculados devem ser corrigidos, multiplicando-os pelo mesmo fator μ .

4.3. DESLOCAMENTOS E TENSÕES EM PONTOS INTERNOS

Uma vez que os deslocamentos e forças de superfície são conhecidos em todos os N nós funcionais do contorno discretizado, tem-se condições de calcular os deslocamentos e tensões em qualquer ponto ξ no interior do domínio, utilizando-se para isso a equação dinâmica equivalente à identidade de Somigliana (3.37) e a equação (3.38). Estas duas equações podem ser discretizadas da mesma forma como foi a do contorno, assim tem-se :

$$\underset{\sim}{U}(\xi) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{I}|J_i|w_i(\underset{\sim}{U}^{*}\ \underset{\sim}{N}^{T})_i\right)\ \bar{\underset{\sim}{T}} - \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{I}|J_i|w_i(\underset{\sim}{T}^{*}\ \underset{\sim}{N}^{T})_i\right)\ \bar{\underset{\sim}{U}}$$

$$+\sum_{p=1}^{M}\left(\sum_{k=1}^{K}|V_k|w_k(\underset{\sim}{U}^{*}\ \underset{\sim}{L}^{T})_k\right)\ \bar{\underset{\sim}{B}} \qquad (4.24)$$

$$\sigma_{rs}(\xi) = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{I}|J_i|w_i(\underset{\sim}{D}_{rs}\ \underset{\sim}{N}^{T})_i\right)\ \bar{\underset{\sim}{T}} - \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{I}|J_i|w_i(\underset{\sim}{S}_{rs}\ \underset{\sim}{N}^{T})_i\right)\ \bar{\underset{\sim}{U}}$$

$$+\sum_{p=1}^{M}\left(\sum_{k=1}^{K}|V_k|w_k(\underset{\sim}{D}_{rs}\ \underset{\sim}{L}^{T})_k\right)\ \bar{\underset{\sim}{B}} \qquad (4.25)$$

onde para o caso 3-D

$$\underset{\sim}{S}_{rs} = \left[\ S_{1rs}\ S_{2rs}\ S_{3rs}\ \right]$$

$$\underset{\sim}{D}_{rs} = \left[\ D_{1rs}\ D_{2rs}\ D_{3rs}\ \right] \qquad (4.26)$$

e para o caso 2-D

$$\underset{\sim}{S}_{rs} = \left[S_{1rs} \; S_{2rs} \right]$$

$$\underset{\sim}{D}_{rs} = \left[D_{1rs} \; D_{2rs} \right] \qquad (4.27)$$

4.4. ELEMENTOS DE CONTORNO

Este trabalho foi desenvolvido para o caso bi-dimensional e nele foram utilizados três tipos de elementos de contorno : Constante (superparamétrico) com geometria reta definida por dois pontos nodais extremos e variáveis constantes em todo o elemento; Linear (isoparamétrico) com geometria e variáveis no elemento definidas por dois pontos extremos; Quadrático (isoparamétrico) com geometria e variáveis no elemento definidas por três pontos (dois extremos e um central). Estes três tipos de elementos são descritos com base nos ítens que se seguem.

4.4.1. GEOMETRIA E FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Estes elementos de contorno podem ter geometria reta (definida por dois pontos) ou curva quadrática (definida por três pontos). No primeiro caso as coordenadas globais de qualquer ponto do elemento são obtidas através das funções de interpolação lineares definidas num sistema de coordenadas

intrínsico e das coordenadas globais de dois pontos (extremos) conhecidos. Para o segundo caso utilizam-se funções de interpolação quadráticas, sendo necessário conhecer-se as coordenadas globais de três pontos (ver figuras 4.2 e 4.3).

A equação (4.2) representa genericamente as geometrias reta e curva,

$$\underset{\sim}{X}^{(j)} = \underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{X}^{(m)}$$

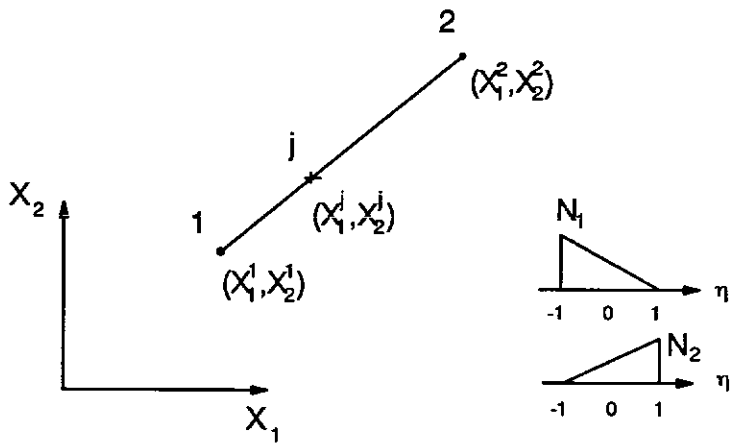


figura 4.2 Elemento reto e funções de interpolação lineares

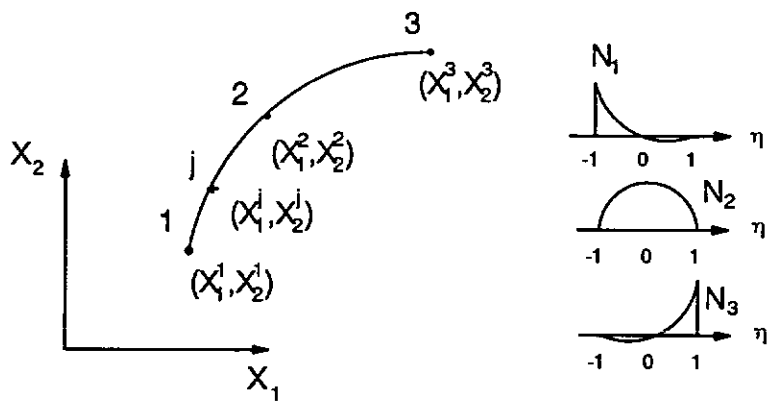


figura 4.3 Elemento curvo e funções de interpolação quadráticas

A matriz $\underset{\sim}{M}$ para o caso linear é :

$$\underset{\sim}{M} = \left[\underset{\sim}{M}_1 \;\vdots\; \underset{\sim}{M}_2 \right] \tag{4.28}$$

com

$$\underset{\sim}{M}_1 = \underset{\sim}{I}\, N_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}_2 = \underset{\sim}{I}\, N_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

onde N_1 e N_2 são as funções de interpolação lineares,

$$N_1 = \frac{1}{2}\,(1 - \eta) \qquad -1 \le \eta \le 1$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\,(1 + \eta) \tag{4.30}$$

A matriz $\underset{\sim}{M}$ para o caso quadrático é :

$$\underset{\sim}{M} = \left[\underset{\sim}{M}_1 \;\vdots\; \underset{\sim}{M}_2 \;\vdots\; \underset{\sim}{M}_3 \right] \tag{4.31}$$

com

$$\underset{\sim}{M}_1 = \underset{\sim}{I}\, N_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}_2 = \underset{\sim}{I}\, N_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

$$\underset{\sim}{M}_3 = \underset{\sim}{I}\, N_3 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

onde N_1, N_2 e N_3 são as funções de interpolação quadráticas,

$$N_1 = \frac{1}{2}\,(\eta^2 - \eta)$$

$$N_2 = 1 - \eta^2 \qquad -1 \le \eta \le 1 \tag{4.33}$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\,(\eta^2 + \eta)$$

4.4.2. JACOBIANOS E VETOR NORMAL

Ao passar-se de um sistema de coordenadas a outro surge um jacobiano que adapta esta transformação. Seja a expressão (4.9) mostrada a seguir,

$$d\Gamma = | \underset{\sim}{J} | \, d\eta$$

O módulo do jacobiano da transformação indicada pela equação (4.9) é dado por :

$$| \underset{\sim}{J} | = \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\eta} \right)^2} \qquad (4.34)$$

para o elemento reto tem-se

$$\frac{dX_1}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} X_1^1 + \frac{dN_2}{d\eta} X_1^2 \qquad (4.35)$$

$$\frac{dX_2}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} X_2^1 + \frac{dN_2}{d\eta} X_2^2 \qquad (4.36)$$

e para o elemento curvo quadrático,

$$\frac{dX_1}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} X_1^1 + \frac{dN_2}{d\eta} X_1^2 + \frac{dN_3}{d\eta} X_1^3 \qquad (4.37)$$

$$\frac{dX_2}{d\eta} = \frac{dN_1}{d\eta} X_2^1 + \frac{dN_2}{d\eta} X_2^2 + \frac{dN_3}{d\eta} X_2^3 \qquad (4.38)$$

onde os superíndices 1, 2 e 3 denotam os nós dos elementos reto e curvo (ver figura 4.2 e 4.3). Particularmente para o elemento reto, tem-se sempre que

$$| \underset{\sim}{J} | = \frac{l}{2} \qquad (4.39)$$

onde l é o comprimento do elemento.

O vetor unitário normal ao elemento é dado pela expressão

$$\underset{\sim}{n} = \frac{1}{|\ \underset{\sim}{J}\ |} \left(\frac{dX_2}{d\eta}\ \underset{\sim}{i} + \frac{dX_1}{d\eta}\ \underset{\sim}{j} \right) \qquad (4.40)$$

sendo que para o elemento reto, utilizam-se as expressões (4.35) e (4.36) e, para o elemento curvo, (4.37) e (4.38).

4.4.3. INTERPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS E FORÇAS DE SUPERFÍCIE

As equações (4.3) e (4.4), apresentadas novamente abaixo

$$\underset{\sim}{U}^{(j)} = \underset{\sim}{N}\ \underset{\sim}{U}^{(n)}$$

$$\underset{\sim}{T}^{(j)} = \underset{\sim}{N}\ \underset{\sim}{T}^{(n)}$$

representam genericamente a variação dos deslocamentos e forças de superfície nos três tipos de elementos em estudo.

$\underset{\sim}{U}^{(n)}$ e $\underset{\sim}{T}^{(n)}$ são vetores que armazenam, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície dos nós funcionais em duas direções. $\underset{\sim}{U}^{(j)}$ e $\underset{\sim}{T}^{(j)}$ armazenam, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície de um ponto j do elemento, com componentes nas direções 1 e 2.

O elemento constante possui apenas um nó funcional (central) e os valores de deslocamentos e forças de superfície em qualquer ponto j do elemento são iguais aos do nó funcional (ver figura 4.4).

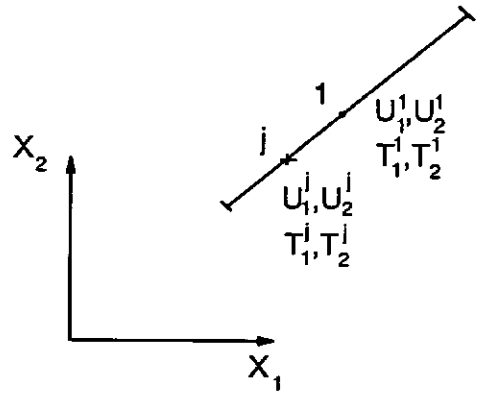


figura 4.4 Elemento constante

$$\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

$$\underset{\sim}{U}^{(j)} = \underset{\sim}{I}\ \underset{\sim}{U}^{(n)} = \underset{\sim}{U}^{(n)} \tag{4.42}$$

$$\underset{\sim}{T}^{(j)} = \underset{\sim}{I}\ \underset{\sim}{T}^{(n)} = \underset{\sim}{T}^{(n)} \tag{4.43}$$

O elemento linear possui dois nós funcionais, assim o cálculo dos deslocamentos e forças de superfície de um ponto j do elemento segue o mesmo raciocínio mostrado na secção 4.4.1. no cálculo das coordenadas de um ponto do elemento de geometria reta (ver figura 4.5).

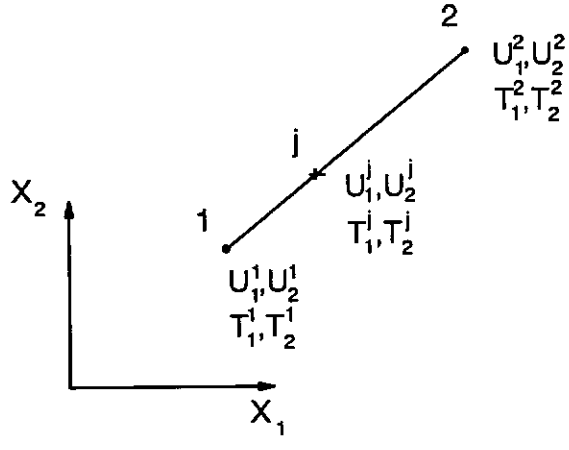


figura 4.5 Elemento linear

$$\underset{\sim}{N} = \left[\underset{\sim}{I}\, N_1 \;\vdots\; \underset{\sim}{I}\, N_2 \right] \tag{4.44}$$

$$\underset{\sim}{U}^{(j)} = \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \right\}_j \tag{4.45}$$

$$\underset{\sim}{U}^{(n)} = \left\{ \begin{array}{c} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \cdots \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{array} \right\} \tag{4.46}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \right\}_j = \left[\begin{array}{cc:cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \cdots \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{array} \right\} \tag{4.47}$$

com N_1 e N_2 dados por (4.30).

Analogamente para as forças de superfície tem-se

$$\left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \end{array} \right\}_j = \left[\begin{array}{cc:cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} T_1^1 \\ T_2^1 \\ \cdots \\ T_1^2 \\ T_2^2 \end{array} \right\} \tag{4.48}$$

Neste tipo de elemento as variáveis em questão variam linearmente entre os valores dos dois nós funcionais.

O elemento quadrático possui três nós funcionais e o cálculo dos deslocamentos e forças de superfície de pontos do elemento segue o mesmo raciocínio mostrado na secção 4.4.1. para o cálculo das coordenadas de um ponto do elemento de geometria curva (ver figura 4.6).

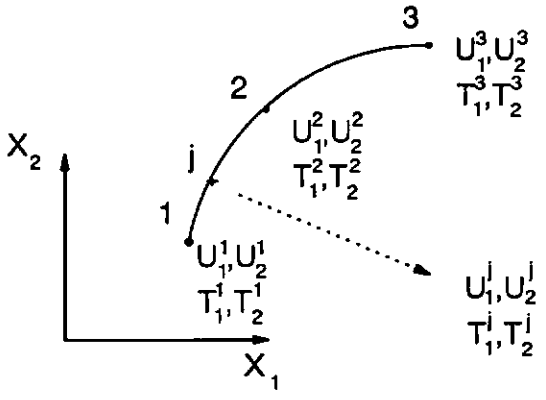


figura 4.6 Elemento quadrático

$$\underset{\sim}{N} = \left[\underset{\sim}{I}\, N_1 \;\vdots\; \underset{\sim}{I}\, N_2 \;\vdots\; \underset{\sim}{I}\, N_3 \right] \tag{4.49}$$

$$\underset{\sim}{U}^{(n)} = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \cdots \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ \cdots \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \tag{4.50}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & \vdots & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & \vdots & 0 & N_2 & \vdots & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \cdots \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ \cdots \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

com N_1, N_2 e N_3 dados por (4.33).

Analogamente para as forças de superfície, tem-se

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ \cdots \\ T_1^2 \\ T_2^2 \\ \cdots \\ T_1^3 \\ T_2^3 \end{Bmatrix} \qquad (4.52)$$

Neste elemento as variáveis em questão variam quadraticamente ao longo do mesmo com base nos três nós funcionais.

Para uma mesma malha de elementos de contorno a precisão dos resultados cresce a medida que se aumenta o grau do polinômio de interpolação. Assim os elementos quadráticos fornecem resultados mais precisos do que os lineares e, estes, do que os constantes.

4.4.4. INTEGRAÇÕES NÃO-SINGULARES

As integrais não-singulares, isto é, quando o ponto fonte ξ está fora do elemento Γ_j , para os três tipos de elemento não possuem nenhuma particularidade e podem ser efetuadas numericamente (quadratura de Gauss-Legendre). As integrais $\underset{\sim}{G}_j$ e $\underset{\sim}{\hat{H}}_j$ em (4.16) e (4.17) ficam como :

Elemento Constante

$$\underset{\sim}{G}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{I} \, d\eta \cong \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} w_k \, \underset{\sim}{U}_k^* \qquad (4.53)$$

$$\underset{\sim}{\hat{H}}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{I} \, d\eta \cong \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} w_k \, \underset{\sim}{T}_k^* \qquad (4.54)$$

O número K de pontos de Gauss depende da relação entre o comprimento do elemento e a menor distância r do ponto fonte ξ aos nós funcionais do mesmo. $\underset{\sim}{U}_k^*$ e $\underset{\sim}{T}_k^*$ são as soluções fundamentais de deslocamento e força de superfície dadas pelas equações (3.15) e (3.16) para um ponto k de coordenada intrínsica variando entre -1 e 1 [31].

Estas soluções fundamentais são expressas em termos das funções de Bessel modificadas da segunda classe de ordens zero (K_0), um (K_1) e dois (K_2) e suas derivadas. O argumento destas funções é complexo (iwr/C).

Através das fórmulas de recorrência, equações (IV-22 a 29), todos os valores das funções modificadas de Bessel da segunda classe podem ser obtidos de K_0 e K_1 que, por sua vez, saem de uma expansão em série.

Para o cálculo da solução fundamental de superfície requer-se os valores de $\frac{d\psi}{dr}$ e $\frac{d\chi}{dr}$ os quais são obtidos com auxílio das equações (IV-23).

$$\frac{d\psi}{dr} = - \frac{iw}{C_2} K_0\left(\frac{iwr}{C_2}\right) - \frac{1}{r}\left[K_2\left(\frac{iwr}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 K_2\left(\frac{iwr}{C_1}\right)\right] \qquad (4.55)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = - \frac{iw}{C_2} \left[K_1\left(\frac{iwr}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^3 K_1\left(\frac{iwr}{C_1}\right) \right] -$$

$$- \frac{2}{r} \left[K_2\left(\frac{iwr}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 K_2\left(\frac{iwr}{C_1}\right) \right] \qquad (4.56)$$

Elemento Linear

$$\underset{\sim}{G}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \frac{l}{2} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\eta \cong \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{K} w_k \, (\underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T)_k \qquad (4.57)$$

$$\underset{\sim}{\hat{H}}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \frac{l}{2} \int_{-1}^{1} \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\eta \cong \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{K} w_k \, (\underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T)_k \qquad (4.58)$$

Onde $\underset{\sim}{N}$ é dado pela expressão (4.44). Valem aqui para $\underset{\sim}{U}^*_k$ e $\underset{\sim}{T}^*_k$ as mesmas considerações feitas para o elemento constante.

Elemento Quadrático

$$\underset{\sim}{G}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} | \, \underset{\sim}{J} \, | \, \underset{\sim}{U}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\eta \cong \sum_{k=1}^{K} w_k \, | \, \underset{\sim}{J} \, |_k \, (\underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{N}^T)_k \qquad (4.59)$$

$$\underset{\sim}{\hat{H}}_j = \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} | \, \underset{\sim}{J} \, | \, \underset{\sim}{T}^* \, \underset{\sim}{N}^T \, d\eta \cong \sum_{k=1}^{K} w_k \, | \, \underset{\sim}{J} \, |_k \, (\underset{\sim}{T}^* \underset{\sim}{N}^T)_k \qquad (4.60)$$

Onde $\underset{\sim}{N}$ é dado pela expressão (4.49). Valem aqui para $\underset{\sim}{U}^*_k$ e $\underset{\sim}{T}^*_k$ as mesmas considerações feitas para o elemento constante.

4.4.5. INTEGRAÇÕES SINGULARES

Integrações singulares ocorrem quando a distância r do ponto fonte ξ ao ponto de integração do elemento é zero. Em duas dimensões as ordens de singularidade das soluções fundamentais de deslocamento e força de superfície são de ordem $\ln r$ e r^{-1}, respectivamente. Logo, as integrais correspondentes $\hat{\underset{\sim}{H}}_j$ devem ser interpretadas como no sentido do valor principal de Cauchy. As integrais relativas a $\underset{\sim}{G}_j$ também são valor principal, entretanto, como a ordem da singularidade é fraca, $\ln r$, o valor principal destas integrais coincide com o valor obtido quando elas são efetuadas no sentido convencional.

Elemento Constante

Para este caso a integral $\hat{\underset{\sim}{H}}_j$ é nula devido a ortogonalidade entre $\underset{\sim}{r}$ e $\underset{\sim}{n}$ (ver figura 4.7) que faz com que os termos da solução fundamental $\underset{\sim}{T}^*$ se anulem. Logo apenas a integral $\underset{\sim}{G}_j$ requer tratamento. O cáculo desta integral é efetuado analiticamente.

Se na solução fundamental U^*_{ij} (ver equação 3.15) as funções ψ e χ forem desenvolvidas em termos da expansão em série das funções modificadas de Bessel, notar-se-á que os termos que contribuem para a singularidade cancelam-se.

Desenvolve-se agora o cálculo analítico da integral $\underset{\sim}{G}_j$ com base na figura 4.7 .

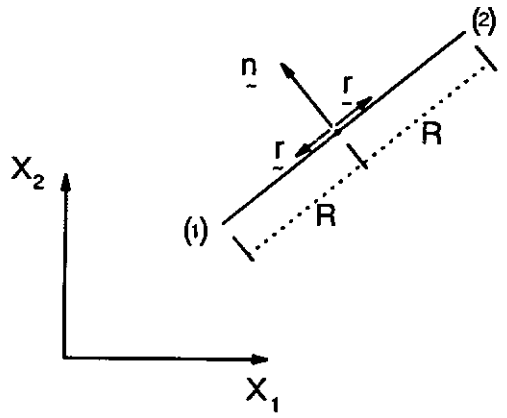


figura 4.7 Ortogonalidade entre os vetores $\underset{\sim}{r}$ e $\underset{\sim}{n}$ no elemento reto

$$G_{ij} = \int_{(1)}^{(2)} U^*_{ij}\, dr = 2 \int_0^R U^*_{ij}\, dr \qquad (4.61)$$

onde os números entre parênteses referem-se aos pontos extremos do elemento. Da equação (3.15) vem,

$$G_{ij} = \frac{1}{\pi\mu} \int_0^R (\psi\, \delta_{ij} - \chi\, r,_i\, r,_j)\, dr \qquad (4.62)$$

sendo ψ e χ funções de K_0, K_1 e K_2 dadas por (3.22) e (3.23).

Das fórmulas de recorrência, equações (IV-22) e (IV-24), tem-se

$$K_1(z) = -z \left[K_0(z) + K_1'(z) \right] \qquad (4.63)$$

$$K_2(z) = \frac{2}{z} K_1(z) + K_0(z) \qquad (4.64)$$

com $K_\nu'(z)$ definido em (IV-28). Então,

$$\int_0^R \frac{1}{z} K_1(z)\, dr = -\left\{ \int_0^R K_0(z)\, dr + \frac{C}{iw} \left[K_1(Z) - K_1(0) \right] \right\} \qquad (4.65)$$

$$\int_0^R K_2(z)\, dr = 2 \int_0^R \frac{1}{z} K_1(z)\, dr + \int_0^R K_0(z)\, dr \qquad (4.66)$$

para

$$z = \frac{iwr}{C}$$

$$Z = \frac{iwR}{C} \qquad (4.67)$$

Assim a integral de U^*_{ij} pode ser reduzida a valores de $K_1(z)$ em $r=R$ e a integrais de $K_0(z)$.

$$\int_0^R K_0(z)\, dr = \frac{C}{iw} \int_0^Z K_0(z)\, dz \qquad (4.68)$$

onde,

$$\int_0^Z K_0(z)\, dz = \left\{ (1 - \gamma - \ln \frac{Z}{2}) + \frac{0.25\, Z^2}{(1!)^2\, 3} (1 + \frac{1}{3} - \gamma - \ln \frac{Z}{2}) + \right.$$

$$+ \frac{(0.25\, Z^2)^2}{(2!)^2\, 5} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \gamma - \ln \frac{Z}{2}) + \ldots$$

$$+ \frac{(0.25\, Z^2)^n}{(n!)^2\, (2n+1)} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} +$$

$$\left. + \frac{1}{2n+1} - \gamma - \ln \frac{Z}{2}) + \ldots \right\} \qquad (4.69)$$

Assim

$$G_{ij} = \frac{1}{\pi\mu}\left\{\left[\int_0^R \psi\ dr\right]\delta_{ij} - \left[\int_0^R \chi\ dr\right] r,_i\ r,_j\right\} \qquad (4.70)$$

$$i,j = 1,2$$

$$\int_0^R \psi\ dr = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \int_0^R K_0(z_1)\ dr + \frac{C_2}{iw}\left[K_1(Z_2) - \frac{C_2}{C_1} K_1(Z_1)\right] \qquad (4.71)$$

$$\int_0^R \chi\ dr = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \int_0^R K_0(z_1)\ dr - \int_0^R K_0(z_2)\ dr +$$

$$+ \frac{2\ C_2}{iw}\left[K_1(Z_2) - \frac{C_2}{C_1} K_1(Z_1)\right] \qquad (4.72)$$

onde

$$z_1 = \frac{iwr}{C_1}\ , \qquad z_2 = \frac{iwr}{C_2}$$

$$Z_1 = \frac{iwR}{C_1}\ , \qquad Z_2 = \frac{iwR}{C_2} \qquad (4.73)$$

Elemento Linear

As integrais $\underset{\sim}{G}_j$ e $\underset{\sim}{\hat{H}}_j$ são calculadas de acordo com o raciocínio apresentado a seguir para o elemento quadrático.

Elemento Quadrático

Uma vez que a singularidade apresentada pela solução

fundamental de deslocamentos é fraca [9] a integral $\underset{\sim}{G}_j$ pode ser efetuada numericamente, bastando para isso que o elemento singular seja subdividido em subelementos se o ponto fonte estiver aplicado no nó central do elemento. Se o ponto fonte estiver sobre os nós do extremo do elemento não existe qualquer problema. Integrar o elemento com esta técnica significa integrá-lo no sentido do valor principal de Cauchy. Note que para o elemento linear a integração pode ser feita normalmente sem necessidade de subdivisões pois este não possui nó central. No programa desenvolvido ocorrem subdivisões nos elementos lineares que são exclusivamente para melhorar a integração sobre o mesmo. Esta integração poderia ainda ter sido melhorada se ao invés da integração normal (-1,1) fosse utilizada a integração logarítmica (0,1) que é mais adequada aos elementos subdivididos (quadráticos).

O cálculo analítico de $\hat{\underset{\sim}{H}}_j$ é muito complicado, por isso recorre-se a artifícios numéricos para o cálculo da integral.

Seja o bloco diagonal singular d^d_{ij} de dimensão (2x2) correspondente ao nó coincidindo com o ponto fonte ξ . O superíndice d denota que é dinâmico. Este bloco d^d_{ij} é composto por um termo de descontinuidade C_{ij} mais as integrais do tensor fundamental de forças de superfície multiplicado pelas funções de forma (interpolação) quadráticas, interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy. Estas integrais são efetuadas de acordo com o que foi explicitado no cálculo de $\underset{\sim}{G}_j$ (divisões em subelementos). Já o termo de descontinuidade é calculado via esquemas indiretos utilizando-se soluções fundamentais da estática. A idéia básica do esquema é prescrever

um movimento de corpo rígido ao problema, de forma que as forças de superfície sejam nulas. Isto permite que o bloco singular seja escrito em função dos blocos não-singulares. Isto aplica-se à dinâmica porque o comportamento das soluções fundamentais transformadas é similar ao estático para argumentos próximos de zero ($wr/C \to 0$). Como o termo C_{ij} não depende da freqüência ele é o mesmo tanto para a estática como para a dinâmica.

O movimento de corpo rígido na estática fornece a seguinte equação :

$$C_{ij} + \sum_{q=1}^{Q} \sum_{a=1}^{A} \int_{\Gamma q} T^{s}_{ij} N_a \, d\Gamma = 0 \qquad (4.74)$$

O superíndice s denota que é estático, N_a são as funções de forma e A, o número de funções de forma. Supondo-se, por exemplo, que q=1 é o elemento singular e que a=1 é o nó singular, reescreve-se (4.74) como,

$$d^{s}_{ij} = C_{ij} + \int_{\Gamma 1} T^{s}_{ij} N_1 \, d\Gamma = -\sum_{a=2}^{A} \int_{\Gamma 1} T^{s}_{ij} N_a \, d\Gamma -$$

$$- \sum_{q=2}^{Q} \sum_{a=1}^{A} \int_{\Gamma q} T^{s}_{ij} N_a \, d\Gamma = 0 \qquad (4.75)$$

Assim tem-se o bloco singular estático (d^{s}_{ij}) em termos dos blocos não-singulares. No caso de estruturas em meio infinito deve-se subtrair δ_{ij} do lado direito da equação (4.75).

O bloco singular dinâmico (d^d_{ij}) é definido como

$$d^d_{ij} = C_{ij} + \int_{\Gamma_1} T^d_{ij} \, N_1 \, d\Gamma \tag{4.76}$$

Eliminando-se C_{ij} de (4.75) e (4.76) obtém-se :

$$d^d_{ij} = d^s_{ij} + \int_{\Gamma_1} (T^d_{ij} - T^s_{ij}) \, N_1 \, d\Gamma \tag{4.77}$$

Desta forma calcula-se d^d_{ij} numericamente (quadratura de Gauss-Legendre) sem problemas pois o termo $(T^d_{ij} - T^s_{ij}) \, N_1$ é não-singular e d^s_{ij} é dado por (4.75).

4.5. SOLUÇÕES PARA PONTOS INTERNOS

As componentes de deslocamentos e tensões em qualquer ponto interno ξ são calculadas da equivalente dinâmica discretizada da identidade de Somigliana, como foi mostrado na secção 4.3. . Na ausência de forças de volume as equações (4.24) e (4.25) ficam,

$$U_i(\xi) = \sum_{n=1}^{N} G_{ij}(\xi,n) \, \tilde{T}^a_j(n) - \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_{ij}(\xi,n) \, \bar{U}^a_j(n) \tag{4.78}$$

$$\sigma_{ij}(\xi) = -\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M}(W_m\, S_{kij})_m\right)\bar{U}_k^a(n) \;+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M}(W_m\, D_{kij})_m\right)\bar{T}_k^a(n) \qquad (4.79)$$

onde N é o número de elementos, M o número de pontos de integração, a é o número do nó funcional do elemento (1,2,3) e S_{kij} e D_{kij} os tensores de terceira ordem obtidos da análise tensorial [4,17] dados por,

$$D_{kij} = -\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\left[\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - 2\right]\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr}\right) - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2\frac{\chi}{r}\right] r_{,k}\,\delta_{ij} +\right.$$

$$+\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r}\right) r_{,i}\,\delta_{jk} + \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r}\right) r_{,j}\,\delta_{ik} -$$

$$\left. - 2\left(\frac{d\chi}{dr} - 2\,\frac{\chi}{r}\right) r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,k}\right\} \qquad (4.80)$$

$$S_{kij} = -\frac{\mu}{2\pi}\left\{\left[\left\{\left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - 2\right)\left[\frac{1}{r}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)\left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 + 2\right) -\right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{2}{r}\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2\frac{d\chi}{dr} + \left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - 2\right)\left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)\right\}\right]$$

$$\left. + \left(1 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2\right)\frac{4\chi}{r^2}\right\} n_k + r_{,k}\,\frac{\partial r}{\partial n}\left\{2\left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - 2\right)\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} - 2\,\frac{d}{dr}\left(\frac{d\chi}{dr}\right)\right] + \frac{4}{r}\left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2\frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr}\right)\right\}\Bigg]\,\delta_{ij} + \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)\right.$$

$$+ \frac{6\chi}{r^2} - \frac{3}{r}\frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} \Big] \Big[\frac{\partial r}{\partial n} (r_{,j}\,\delta_{ik} + r_{,i}\,\delta_{jk}) + r_{,j}\,r_{,k}\,n_i +$$

$$+ r_{,i}\,r_{,k}\,n_j \Big] + \Big[\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \Big] (n_j\,\delta_{ik} + n_i\,\delta_{jk}) +$$

$$+ r_{,i}\,r_{,j}\,n_k \left\{ \frac{4}{r} \left(\left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right) + 2 \left(\left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 - 2 \right) \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr} \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\chi}{dr}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} \right] \right\} + 4\, r_{,i}\,r_{,j}\,r_{,k} \left[\frac{5}{r}\frac{d\chi}{dr} - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\chi}{dr}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{7\chi}{r^2} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \Bigg\} \qquad (4.81)$$

com $i,j,k = 1,2$

As derivadas de segunda ordem de ψ e χ em relação a r podem ser calculadas através das funções modificadas de Bessel da segunda classe de ordens zero e um, usando-se para isso as equações (IV-23), (IV-24) e (IV-28). Assim

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = - \frac{w^2}{2\,C_2^2} \left[K_0''\left(\frac{iwr}{C_2}\right) + K_2''\left(\frac{iwr}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^4 - K_0''\left(\frac{iwr}{C_2}\right) + \right.$$

$$\left. + K_2''\left(\frac{iwr}{C_1}\right) \right] \qquad (4.82)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = - \frac{w^2}{C_2^2} \left[K_2''\left(\frac{iwr}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^4 K_2''\left(\frac{iwr}{C_1}\right) \right] \qquad (4.83)$$

onde

$$K_0''(z) = \frac{1}{2} \left[K_0(z) + K_2(z) \right] \qquad (4.84)$$

$$K_1''(z) = \frac{1}{4} \left[3\, K_1(z) + K_3(z) \right] \qquad (4.85)$$

4.6. NÓS DESCONTÍNUOS

É muito comum nos problemas da elastodinâmica a existência de pontos em que ocorre descontinuidade das forças de superfície. Normalmente nós em cantos possuem esta descontinuidade, por exemplo o ponto B da figura 4.8a . Deve-se então, ao discretizar o problema, fazer com que estes pontos situem-se em nós de extremidade de dois elementos adjacentes conforme mostra a figura 4.8b .

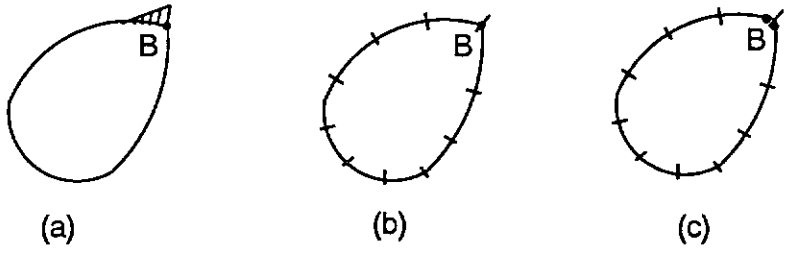


figura 4.8 Nó com descontinuidade em força de superfície

Esta consideração é necessária somente para elementos lineares e quadráticos, pois nestes existem pontos fontes coincidentes com nós das extremidades. Nestes nós impõem-se nós duplos (figura 4.8c), um em cada elemento, surgindo assim mais duas componentes de deslocamento e duas de forças de superfície, sendo que destas quatro componentes duas são conhecidas e duas incógnitas. Em contrapartida um par de equações adicionais surge quando forçamos a igualdade das duas componentes de deslocamento dos dois nós do canto. Assim o sistema de equações pode ser remanejado e resolvido com 2NN+2nd equações, sendo NN o número de nós e nd o número de pontos descontínuos [32].

5. O PROGRAMA MECH2D

5.1. INTRODUÇÃO

O programa MECH2D foi desenvolvido na linguagem FORTRAN e para a execução do mesmo utilizou-se uma estação SUN. A estrutura do programa é baseada na do programa apresentado em Manolis e Beskos [9].

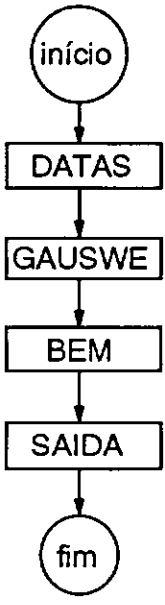
A secção 5.2 apresenta a estrutura do programa, e as sub-rotinas e funções usadas no mesmo são brevemente descritas nas secções 5.3. e 5.4., respectivamente. Finalizando, a entrada de dados e interpretação dos resultados são comentadas nas duas últimas secções.

5.2. ESTRUTURA DO PROGRAMA

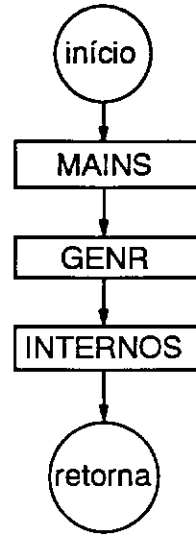
O programa está dimensionado à resolução de problemas que não extrapolem as dimensões dos vetores IVET(300), RVET(300) e ZVET(25000). Estes valores correspondem a uma discretização com, no máximo, 50 nós.

Vinte sub-rotinas e treze funções, além do programa principal, compõem o programa MECH2D cuja estrutura é mostrada a seguir.

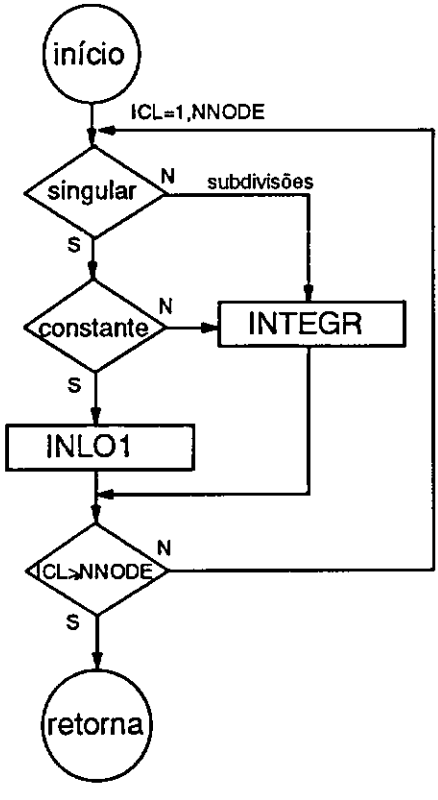
programa principal



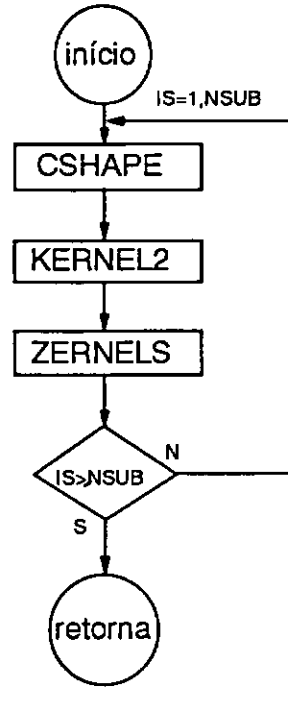
sub-rotina BEM



sub-rotina MAINS



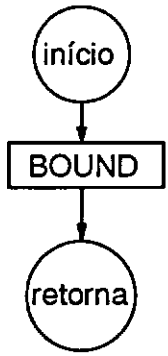
sub-rotina INTEGR



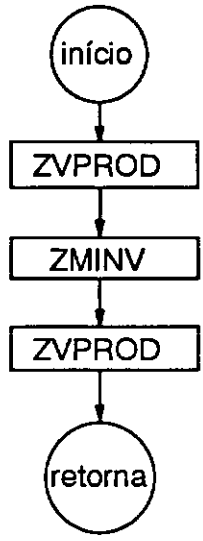
NNODE=número de nós

NSUB=número de subdivisões

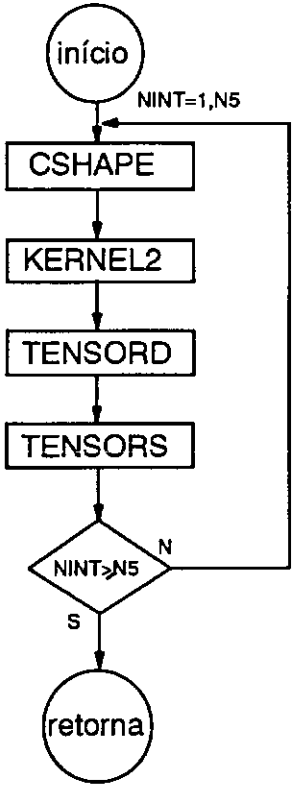
sub-rotina GENR



sub-rotina BOUND



sub-rotina INTERNOS



N5=número de pontos internos

5.3. DESCRIÇÃO DAS SUB-ROTINAS

1 - DATAS - Lê todos os dados do programa, exceto os valores prescritos no contorno, e os imprime no arquivo de saída.

2 - GAUSWE - Armazena em GPN e WTN as coordenadas intrínsecas dos pontos e os respectivos pesos da quadratura gaussiana.

3 - CLRZRR - Zera vetores e matrizes complexos.

4 - CLRARR - Zera vetores e matrizes reais.

5 - BEM - Início da solução pelo método dos elementos de contorno. Esta sub-rotina separa a solução em três etapas básicas : Cálculo dos coeficientes das matrizes ZGM ($\underset{\sim}{G}$) e ZHM ($\underset{\sim}{H}$); Formação e resolução do sistema de equações; Cálculos relacionados aos pontos internos.

6 - MAINS - Inicia o esquema de colocação nodal do ponto fonte ξ , faz a distinção entre os elementos singulares e não-singulares, divide o elemento em sub-elementos quando necessário e define o número de pontos de integração para cada elemento.

7 - INTEGR - Forma as sub-matrizes (2x2) entre o ponto fonte ξ e cada nó funcional do elemento que está sendo integrado via integração numérica, exceto para elementos singulares constantes. Calcula também as coordenadas globais dos pontos de integração com auxílio do sistema de coordenadas intrínsico.

8 - INLO1 - Forma as sub-matrizes (2x2) entre o ponto fonte ξ e o nó do elemento singular constante integrado via integração analítica.

9 - CSHAPE - Define o valor da função de forma para cada ponto de integração (equações (4.30) e (4.33)), o vetor normal externo ao elemento neste ponto (equação (4.40)) e os jacobianos de transformação do sistema de coordenadas também neste ponto (equação (4.34)).

10 - KERNEL2 - Calcula as soluções fundamentais transformadas $\underset{\sim}{U}^*$ e $\underset{\sim}{T}^*$ para o caso bi-dimensional (ver equações (3.15) e (3.16)).

11 - TENSORD - Calcula o tensor D_{kij} de terceira ordem (equação (4.80)).

12 - TENSORS - Calcula o tensor S_{kij} de terceira ordem (equação (4.81)).

13 - ZERNELS - Calcula as soluções fundamentais da elasticidade estática para o caso bi-dimensional [10].

14 - GENR - Lê os valores nodais prescritos, forma as matrizes ZGM ($\underset{\sim}{G}$) e ZHM ($\underset{\sim}{H}$) , divide os valores nodais prescritos de força de superfície pelo fator de escala μ para condicionar o sistema, chama a sub-rotina BOUND para reordenar o sistema $\underset{\sim}{H}\ \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{T}$, formar o sistema $\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{f}$ e resolvê-lo. A seguir o fator de escala μ é utilizado novamente para correção das forças de superfície.

15 - BOUND - Reordena o sistema $\underline{H}\,\underline{U} = \underline{G}\,\underline{T}$ de acordo com as condições de contorno e chama as subrotinas ZVPROD e ZMINV para solução do sistema.

16 - ZMINV - Efetua a inversão de uma matriz complexa de dimensão (100x100) no máximo.

17 - ZVPROD - Efetua o produto entre um vetor e uma matriz complexos.

18 - INTERNOS - Calcula os deslocamentos e tensões nos pontos internos, via integração numérica, de acordo com as equações (4.78) e (4.79).

19 - MODFA - Calcula o módulo e a fase de um número complexo.

20 - SAIDA - Imprime os resultados no arquivo de saída.

5.4. DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES

1 - ZK(M,X) - Função modificada de Bessel da segunda classe de ordem M com argumento real X (ver equações (IV-20 a 31)).

2 - RJ0(X) - Função de Bessel da primeira classe de ordem zero com argumento real X (ver equações (IV-7) e (IV-9)).

3 - RJ1(X) - Função de Bessel da primeira classe de ordem um com argumento real X (ver equações (IV-13) e (IV-15)).

4 - Y0(X) - Função de Bessel da segunda classe de ordem zero com argumento real X (ver equações (IV-8) e (IV-10)).

5 - Y1(X) - Função de Bessel da segunda classe de ordem um com argumento real X (ver equações (IV-14) e (IV-16)).

6 - ZSK0(X,R) - Integral da função modificada de Bessel da segunda classe de ordem zero com relação a variável r entre os limites 0 e R (ver equação (4.69)). Sendo o argumento X dado por wr/C.

7 - ZD2K(M,Z) - Derivada de segunda ordem de ZK(M,X) com relação a r (ver equações (4.84) e (4.85)). Sendo Z = wr/C.

8 - ZCHI(R1,R2) - Função χ dada pela equação (3.23). Sendo R1 = wr/C_1 e R2=wr/C_2.

9 - ZPSI(R1,R2) - Função ψ dada pela equação (3.22). Sendo R1 =wr/C_1 e R2 = wr/C_2.

10 - ZDCHI(R1,R2) - Derivada de χ em relação a r (equação (4.56)).

11 - ZDPSI(R1,R2) - Derivada de ψ em relação a r (equação (4.55)).

12 - ZD2CHI(R1,R2) - Derivada de segunda ordem de χ em relação a r (equação (4.83)).

13 - ZD2PSI(R1,R2) - Derivada de segunda ordem de ψ em relação a r (equação (4.82)).

5.5. ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA MECH2D

Com exceção do título do problema, todos os dados são lidos em formato livre.

1 - Título do problema no formato 18a4 (TIT).

2 - Número de nós (NNODE), número de elementos (NELEM), tipo de elemento (LTE) e número de pontos internos (NPIN).

elemento constante LTE=1

elemento linear LTE=2

elemento quadrático LTE=3

3 - Constantes de Lamé (RLA) e (RMU), coeficiente de poisson (RNU), densidade de massa (RHO), velocidades das ondas primária (C1) e secundária (C2), freqüência angular (w) e tipo de problema (LTP).

corpo finito LTP=0

corpo infinito LTP=1

4 - Coordenadas x dos extremos do elemento (XEE). Necessário somente para elementos constantes.

5 - Coordenadas y dos extremos do elemento (YEE). Necessário somente para elementos constantes.

6 - Coordenadas x dos nós funcionais dos elementos (XCR).

7 - Coordenadas y dos nós funcionais dos elementos (YCR).

8 - Coordenadas x dos pontos internos (XIN).

9 - Coordenadas y dos pontos internos (YIN).

10 - Conetividades dos elementos (KONN).

11 - Código de condição de contorno para cada direção de cada nó funcional (MBCU).

0 - força de superfície prescrita

1 - deslocamento prescrito

12 - Nós duplos do contorno (IDUP).

nó simples - 0

nó duplo - número do nó contíguo

13 - Valores prescritos nos nós funcionais nas duas direções (ZLOAD).

5.6. INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

- Deslocamentos e forças de superfície no contorno são positivos no sentido positivo dos eixos cartesianos e vice-versa.
- Nos pontos internos os deslocamentos seguem a mesma regra dos pontos do contorno. As tensões x e y quando negativas são de compressão e quando positivas, de tração. A tensão xy positiva causa distorção no sentido horário e vice-versa.

6. EXEMPLOS

6.1. INTRODUÇÃO

Estudam-se neste capítulo três problemas bi-dimensionais dinâmicos. O primeiro é uma barragem de terra solicitada por uma aceleração de base, o segundo é uma placa quadrada presa nas laterais e sob força de tração nos outros bordos. O último exemplo é uma cavidade cilíndrica num meio infinito sujeito a uma onda de compressão harmônica.

6.2. BARRAGEM DE TERRA

Neste exemplo estudou-se o comportamento de uma barragem de terra sujeita a perturbações no solo. Impôs-se condições de contorno de forma que fosse possível comparar as soluções obtidas com a solução de Clough e Chopra [23] onde a barragem foi discretizada com uma malha de elementos finitos sujeita a uma aceleração de base. Considerou-se então a barragem perfeitamente fixa em solo rígido e para simular a aceleração de base utilizaram-se forças de superfície variando linearmente (sentido oposto à aceleração), faces AB e BC (figura 6.1), representando assim as forças de inércia da barragem.

Dados da barragem :

base = 900 ft altura = 300 ft

$\mu = 4.037\ 10^6$ lb/ft^2 $\nu = 0.45$ $\rho = 4.037$ lb/ft^3

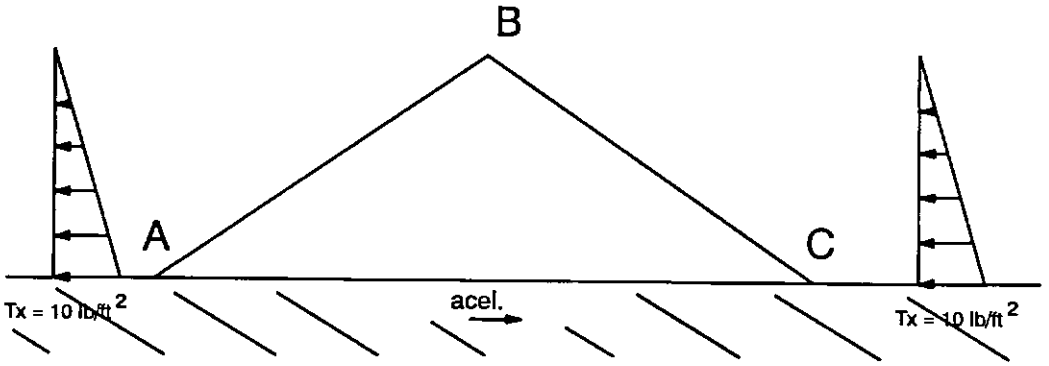


figura 6.1 Barragem de terra

As figuras 6.2, 6.3 e 6.4 mostram as malhas de elementos de contorno utilizadas.

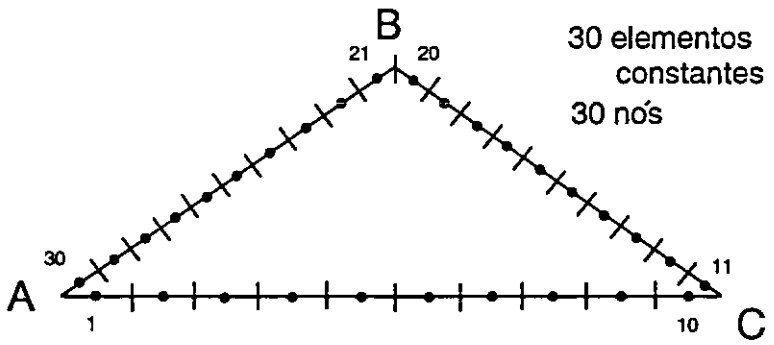


figura 6.2 Discretização com elementos constantes

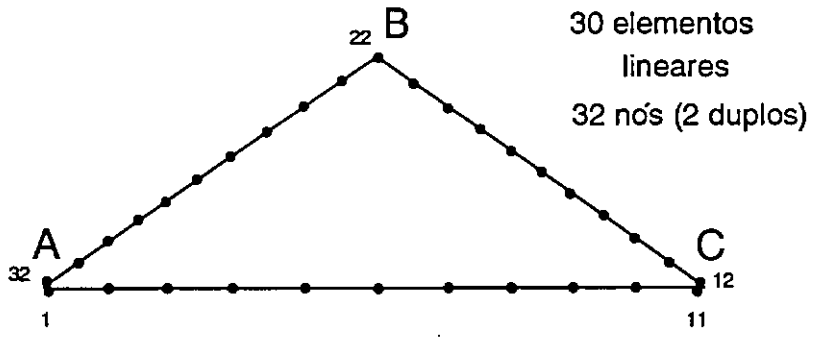


figura 6.3 Discretização com elementos lineares

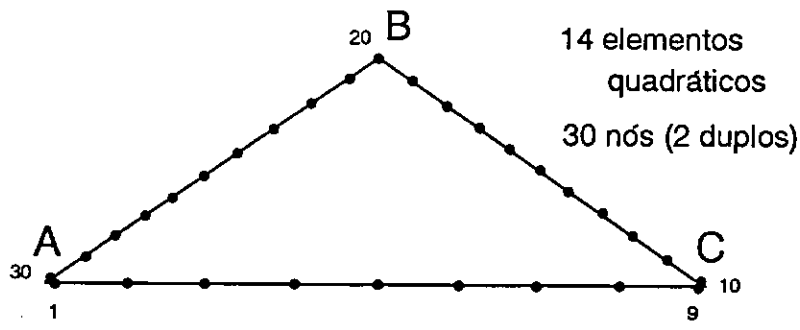


figura 6.4 Discretização com elementos quadráticos

Estudou-se a movimentação horizontal do ponto B (figura 6.1), variando-se a freqüência de 3 a 9 rad/s. Os resultados obtidos foram plotados, marcando-se as freqüências nas abcissas e o módulo do deslocamento horizontal nas ordenadas (figura 6.5).

Observa-se na figura 6.5.1 a existência de um pico, que representa a freqüência fundamental, dada por

w = 7.78 rad/s - elementos constantes

w = 7.77 rad/s - elementos lineares e quadráticos

Comparando-se com o método dos elementos finitos [23] (Clough e Chopra) e ainda com a teoria "Shear-wedge" (tabela 6.1), obtém-se os respectivos erros relativos :

0.9% e 2.89% (constantes)

0.77% e 2.99% (lineares e quadráticos)

programa contorno			elementos finitos	"Shear wedge"
constante	linear	quadrático		
7.78	7.77	7.77	7.71	8.01

tabela 6.1

Os resultados obtidos para os três tipos de elemento, mostrado na figura 6.5.1, ficaram bastante próximos entre si, ficando até difícil distinguir cada um. Nesta comparação as discretizações com elementos lineares e quadráticos poderiam ser menores, mas optou-se por aquelas (figuras 6.3 e 6.4) para facilitar a comparação das soluções nos lados AB e BC da barragem.

A figura 6.5.2 mostra a convergência de cada tipo de elemento empregado no cálculo do módulo do deslocamento horizontal do ponto B, para uma freqüência de 50000 rad/s, com a variação do número de elementos utilizados na discretização da barragem (1/3 do total em cada face e elementos com mesmo tamanho). Este gráfico mostra a economia proveniente do uso de uma malha de elementos quadráticos, a qual converge à resposta muito antes do que uma malha com elementos lineares, e mais ainda, que uma malha com elementos constantes. É interessante notar que embora a convergência dos elementos constantes seja lenta e que para 30 elementos sua resposta esteja longe de convergir à exata, a solução de freqüência fundamental já está ótima.

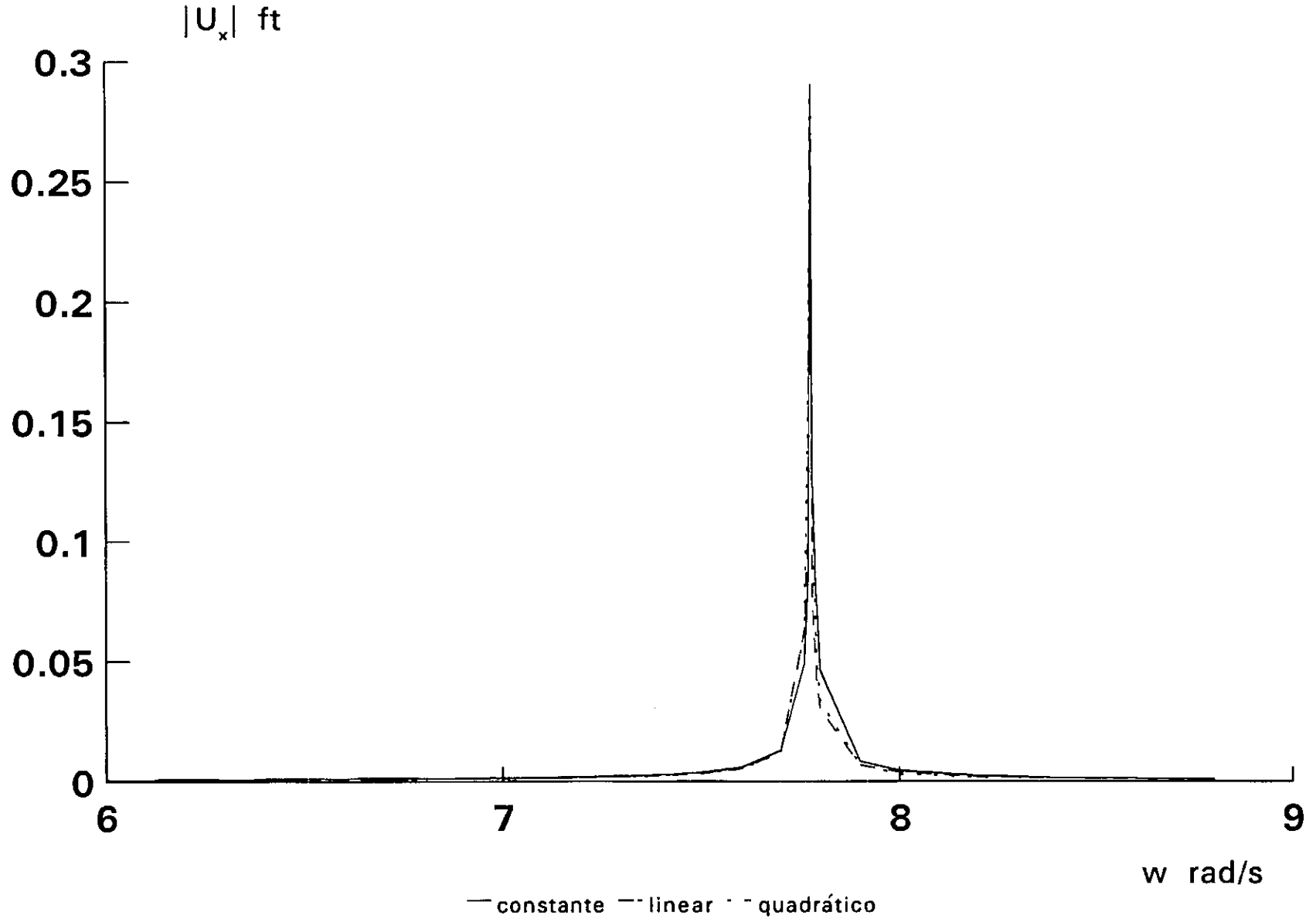


figura 6.5.1 Deslocamento horizontal de B versus freqüência

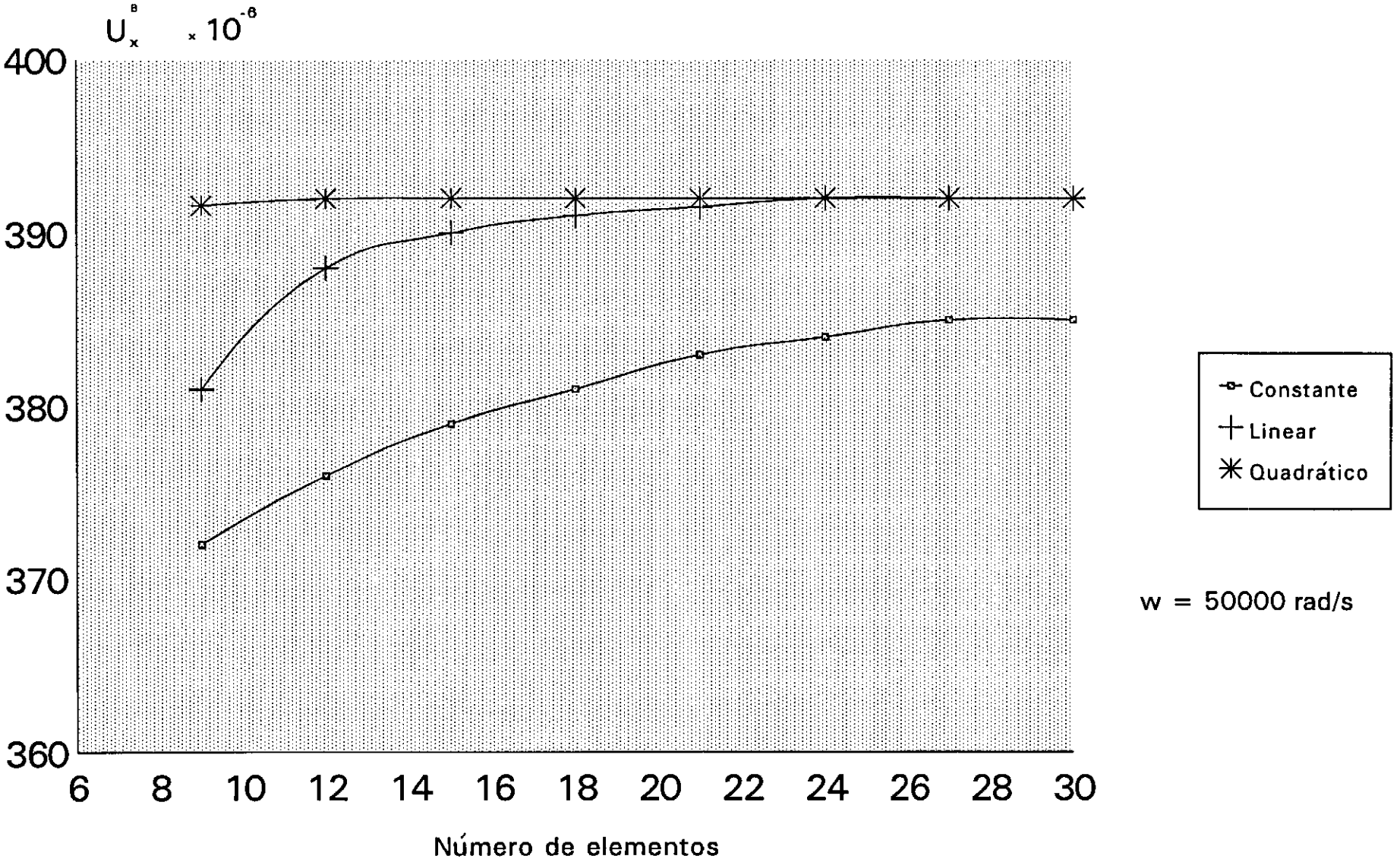


figura 6.5.2 Comparação da convergência para os três tipos de elemento

6.3. PLACA QUADRADA

Estuda-se agora o comportamento de uma placa quadrada sujeita a forças de superfície harmônicas. Estas forças de superfície atuam em lados opostos, sentidos contrários e no plano da placa. Devido ao tipo de condições de contorno (figura 6.6), os deslocamentos transversais são nulos.

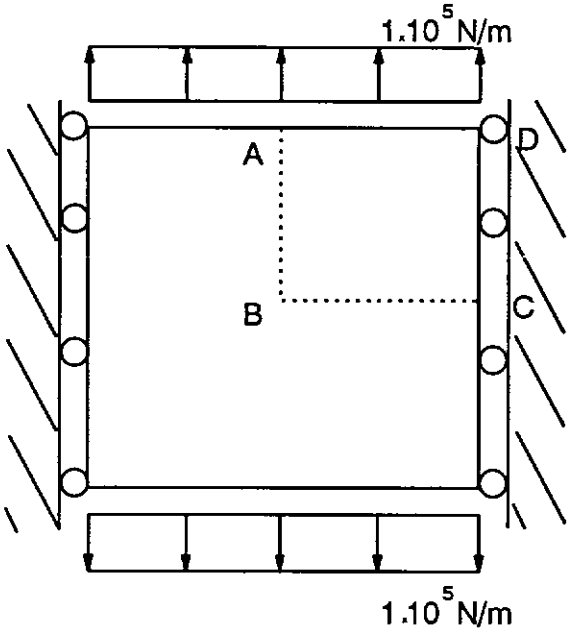


figura 6.6 Placa quadrada sob força harmônica sem movimento transversal

Tem-se os seguintes dados para resolução deste problema :

lado = 0.3m $\qquad$ $\mu = 8.575\ 10^{10}\ N/m^2$

$\nu = 0.2$ $\qquad$ $\rho = 7.85\ 10^3\ kg/m^3$

Como o problema é simétrico em duas direções, apenas 1/4 da placa é discretizada conforme mostrado nas figuras 6.7, 6.8 e

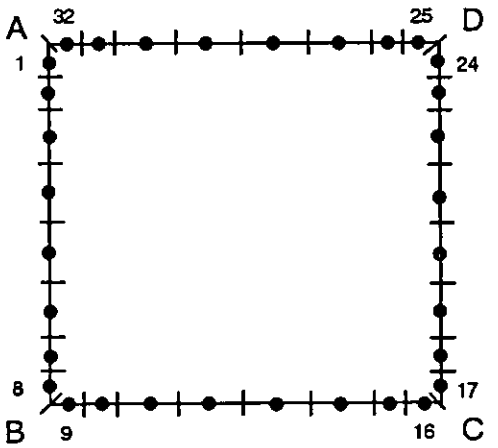
6.9. Embora a resposta seja constante concentrou-se mais elementos próximo aos cantos para amenizar eventuais erros de integração e obter-se tensões e deformações mais significativas. As condições de contorno são :

lado AB $U_1 = 0$, $T_2 = 0$

BC $T_1 = 0$, $U_2 = 0$

CD $U_1 = 0$, $T_2 = 0$

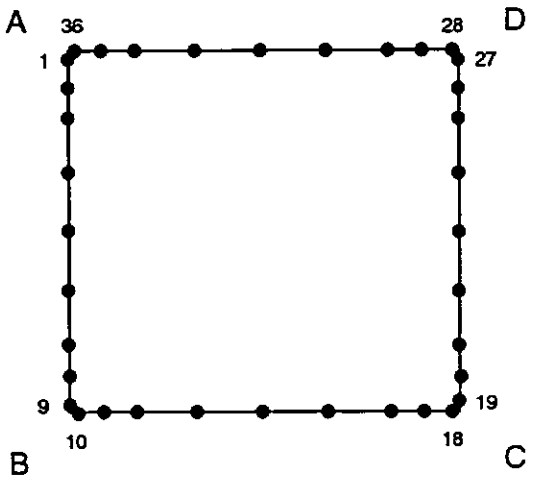
DA $T_1 = 0$, $T_2 = 1\ 10^5$ N/m



32 elementos constantes

32 nós

figura 6.7 Discretização com elementos constantes



32 elementos lineares

36 nós (4 duplos)

figura 6.8 Discretização com elementos lineares

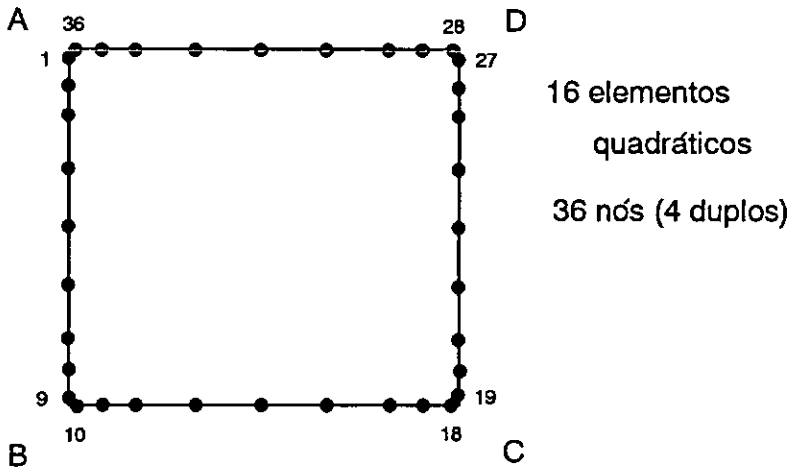


figura 6.9 Discretização com elementos quadráticos

Assim somente ondas de pressão surgirão e todos os pontos numa linha horizontal deverão ter os mesmos movimentos e tensões.

A ressonância é esperada quando metade do comprimento de onda L equivaler ao comprimento da placa, assim

$$\frac{L}{2} = 0.3$$

$$\frac{\pi w}{C_1} = 0.3 \qquad C_1 \text{ - velocidade da onda de pressão}$$

$$w = 56519 \text{ rad/s}$$

Este valor é obtido nos três casos como pode ser visto na figura 6.10 onde plota-se os valores de deslocamento vertical da borda superior (ou inferior) versus a freqüência (0 - 90000 rad/s). Os resultados ficaram muito próximos para os três tipos de elemento. Sob a freqüência de ressonância esperava-se que o deslocamento fosse para o infinito, e o "infinito" alcançado para as três discretizações (mostrado no gráfico) demonstra o quanto o elemento quadrático é superior na convergência.

A figura 6.11 mostra a variação das tensões na direção y com a mesma variação de freqüências do gráfico anterior. As mesmas observações feitas acima são válidas aqui.

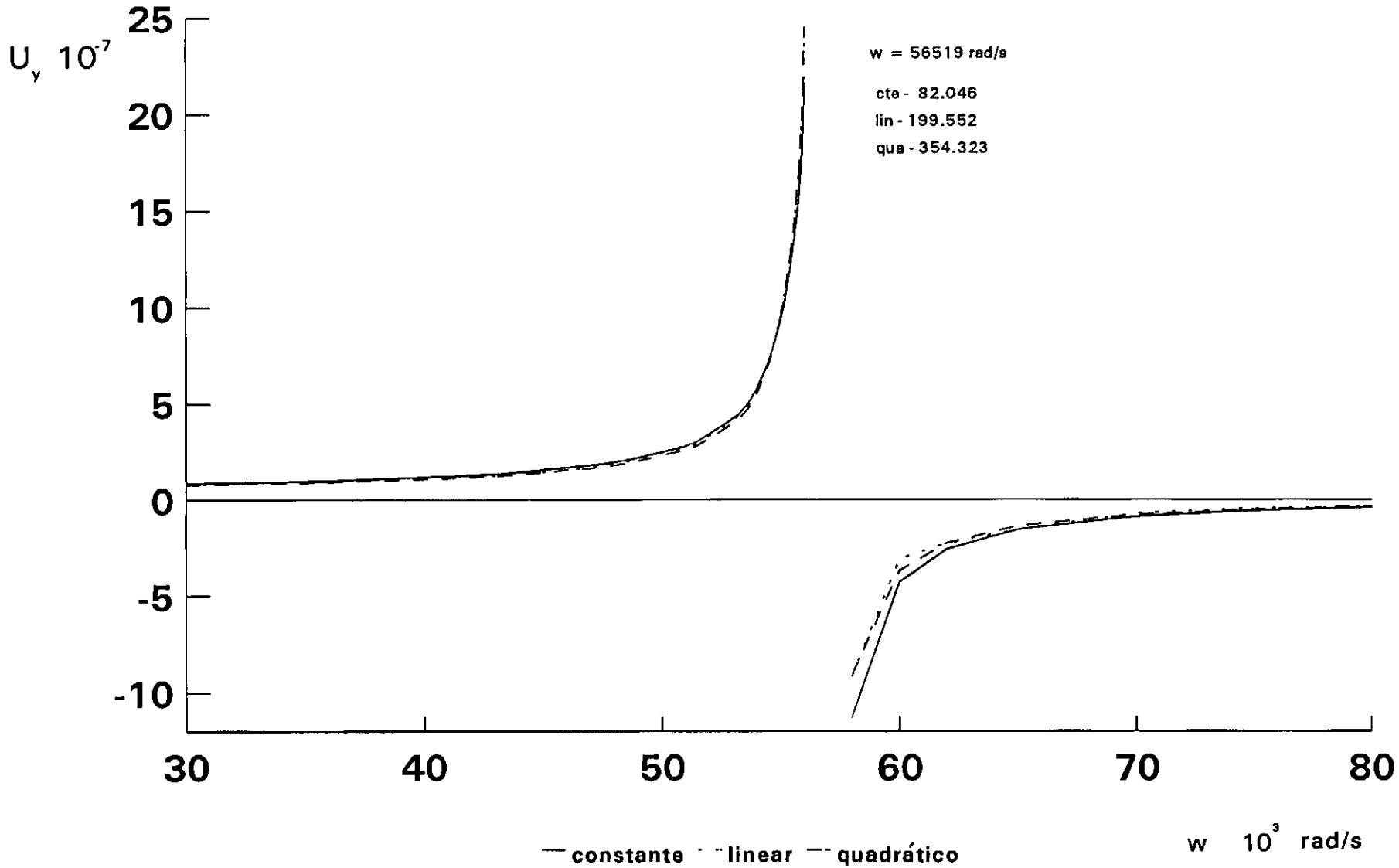


figura 6.10 Deslocamento vertical das bordas superior e inferior versus freqüência

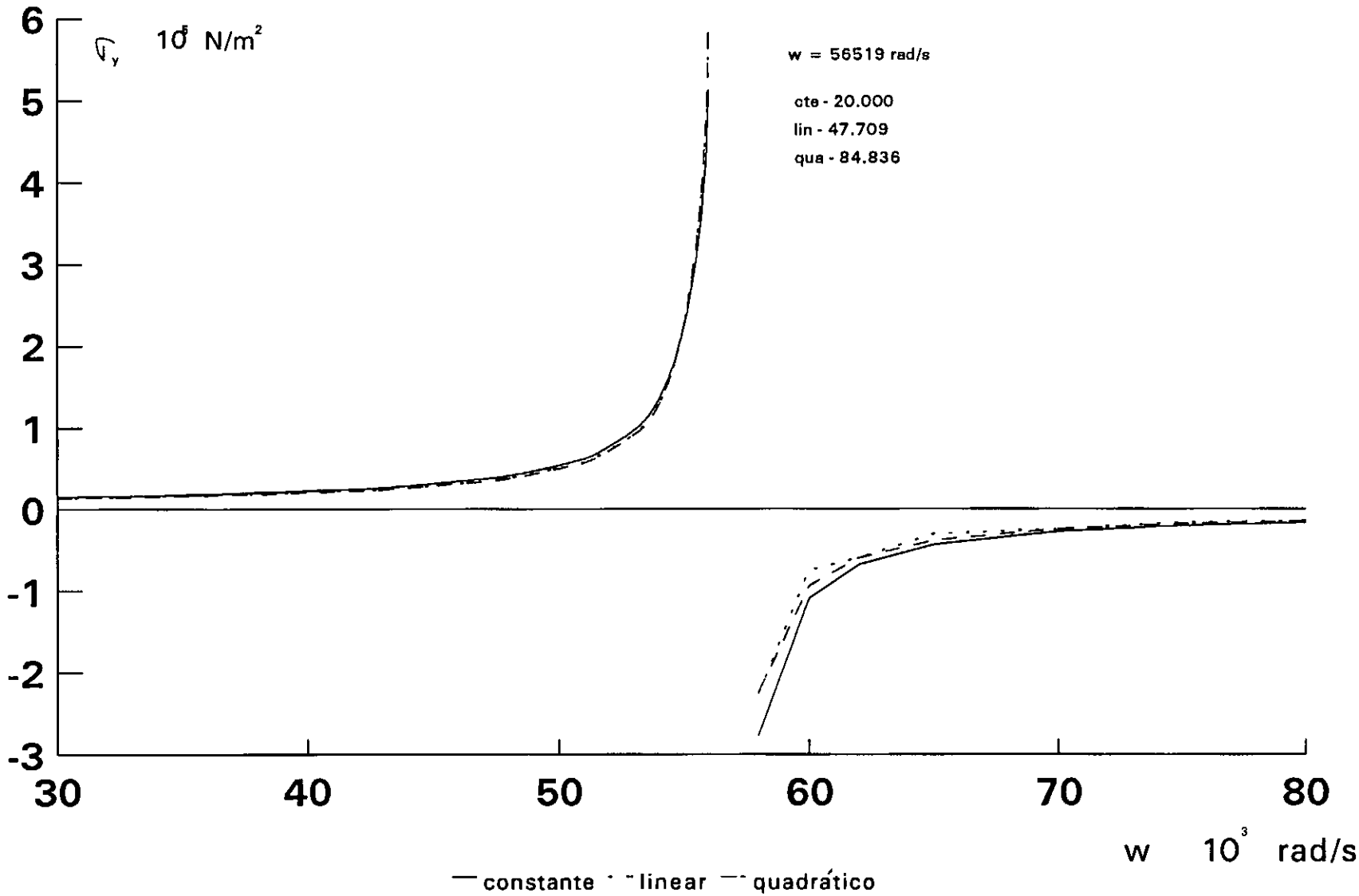


figura 6.11 Tensões verticais na linha horizontal central versus a freqüência

6.4. CAVIDADE EM MEIO INFINITO

Uma cavidade cilíndrica de comprimento infinito, dentro de um meio elástico linear infinito, foi analisada quando uma onda plana de compressão está presente no meio (figura 6.12) em estado harmônico.

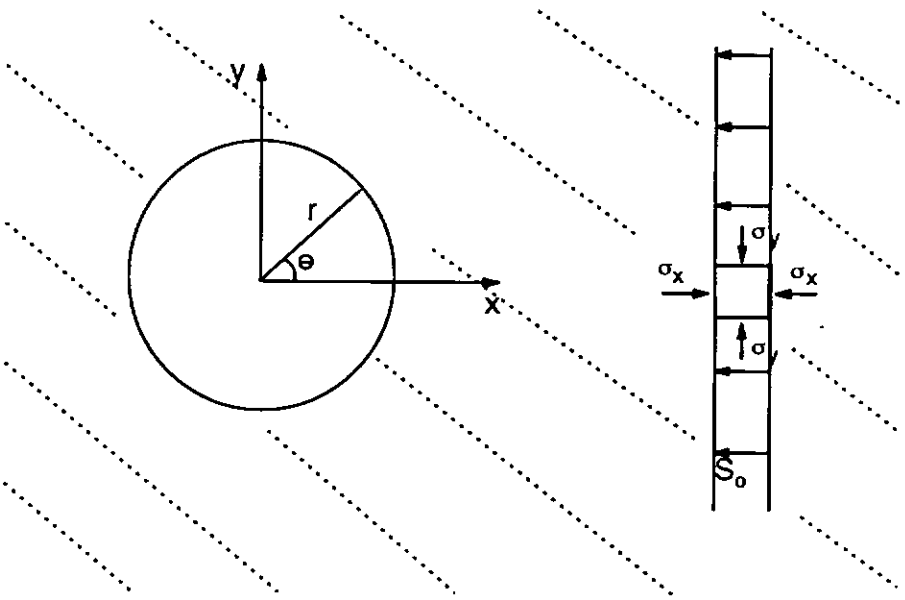


figura 6.12 Cavidade em meio infinito sob onda de compressão

Este é um problema de estado plano de deformação onde se quer determinar o estado de tensão ao longo da cavidade que está contida em um meio sujeito a uma onda de compressão com as seguintes amplitudes de tensões :

$$\sigma_x = So$$

$$\sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_x$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Esta distribuição de tensões é obtida com a superposição de duas situações : (i) tensões produzidas pela onda em um meio sem a cavidade (ii) tensões obtidas através da aplicação de forças de superfície no contorno da cavidade com sinal trocado, de modo que a superposição dos dois casos forneça forças de superfície nulas (figura 6.13).

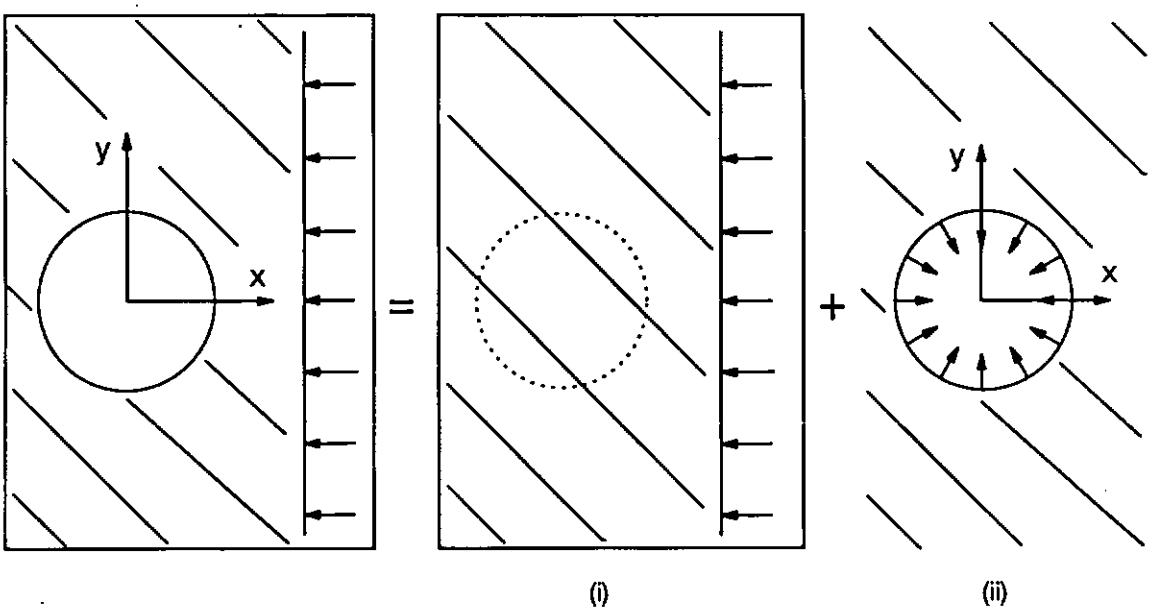


figura 6.13 Superposição dos dois casos

A solução do primeiro caso é trivial, e o segundo resolve-se com o programa com os seguintes dados :

μ = 11600000 lb/in^2

ρ = 0.000734 lb sec^2/in^4

r = 10 in

ν = 0.25

Adotou-se So = -1 lb/in^2 para que as tensões σ_{11} obtidas representem diretamente o fator de concentração de tensões

(FCT). As condições de contorno (forças de superfície prescritas) saem das fórmulas :

$$T_x = \sigma_x \, l \qquad\qquad T_y = \sigma_y \, m$$

pois $\tau_{xy} = 0$, onde l e m são os cossenos diretores da normal $\underset{\sim}{n}$ com os eixos x e y , respectivamente.

As figuras 6.14, 6.15 e 6.16 mostram as malhas de elementos de contorno utilizadas.

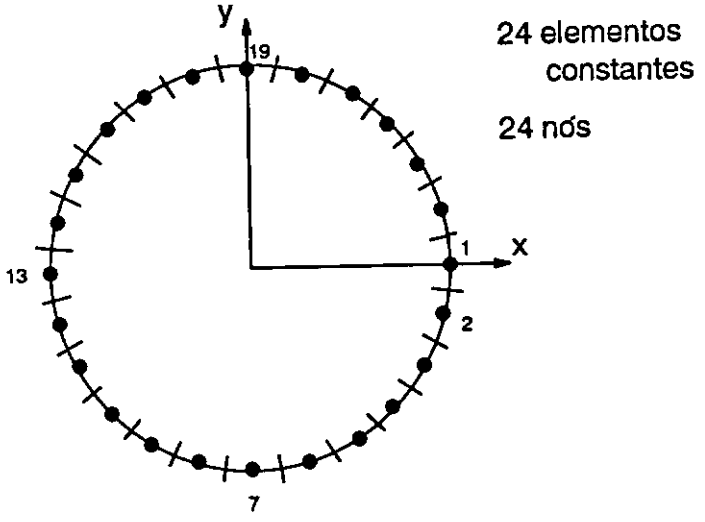


figura 6.14 Discretização com elementos constantes

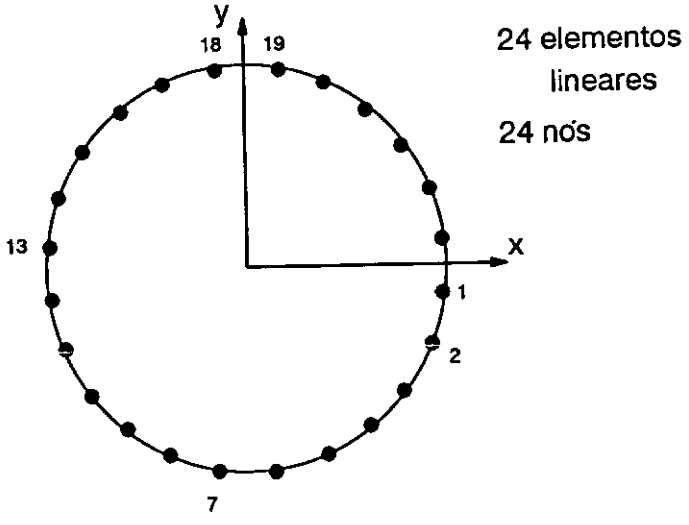


figura 6.15 Discretização com elementos lineares

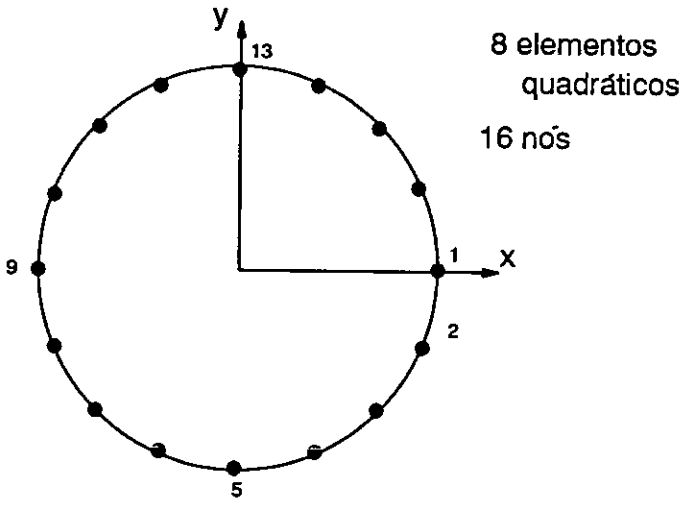


figura 6.16 Discretização com elementos quadráticos

Uma vez resolvido o problema tem-se os valores nodais de deslocamento e forças de superfície em todos os nós. Para obter-se σ_{11} em um ponto do contorno, utiliza-se a seguinte expressão :

$$\sigma_{11} = \frac{1}{1-\nu} \left(2 \mu \varepsilon_{11} + \nu \sigma_{22} \right)$$

onde

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

e

$$\sigma_{22} = -T_2$$

sendo T_2 o valor da força de superfície no nó considerado na direção da normal no mesmo ponto. No cálculo de ε_{11}, utiliza-se diferenças finitas.

Após calcular-se σ_{11} superpõe-se este valor com a solução trivial do primeiro caso e obtém-se o σ_{11} (total) que, com sinal trocado, corresponde ao FCT.

A figura 6.17 representa o módulo de FCT (módulo pois σ_{11} é complexo) versus a variação do parâmetro wr/C_1 para um valor de θ igual a 90^0. Neste gráfico estão presentes além dos resultados do programa para os três tipos de elemento, os resultados obtidos por Manolis [5] e Kirsch [24] que é a solução estática.

Todas as soluções partem próximas da solução estática, e a diferença existente decorre da integração numérica. O comportamento da solução obtida com a malha de elementos constantes é o que mais se aproxima da resposta de Manolis pois este utiliza elementos constantes curvos. Os três elementos convergiram muito bem e apresentam um comportamento geral muito semelhante entre si.

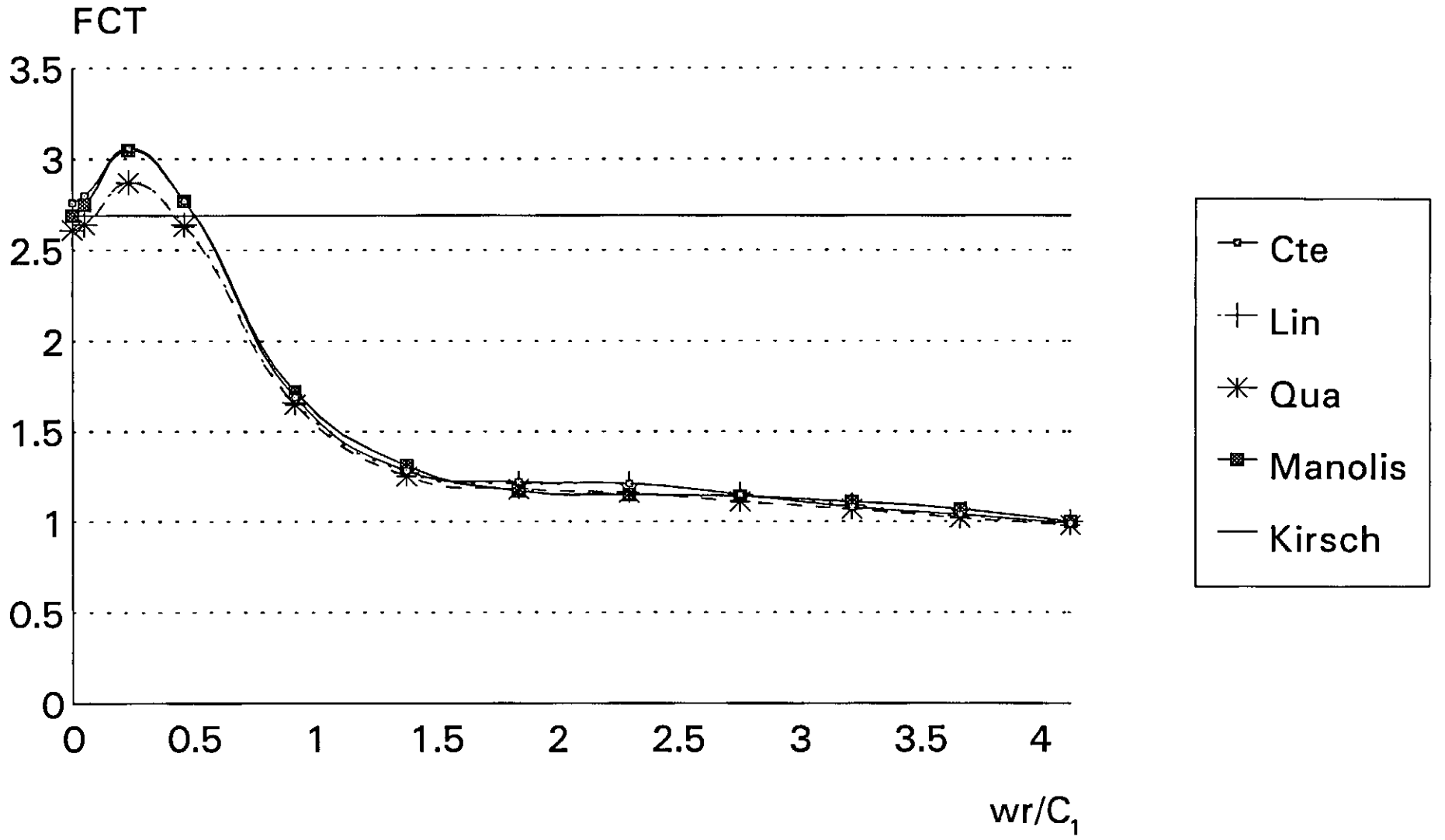


figura 6.17 FCT versus freqüência (90°)

7. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi estudar o comportamento de problemas elastodinâmicos e servir de base para futuras investigações sobre o tema.

Este estudo limitou-se à aplicação da formulação do Método dos Elementos de Contorno para a solução de problemas harmônicos, em meio elástico-linear, homogêneo e isotrópico no domínio da freqüência.

Implementou-se um programa de computador (linguagem FORTRAN) no qual foram utilizados elementos constantes, lineares e quadráticos.

Os resultados para estes três tipos de elementos, apresentaram boa convergência quando comparados entre si e com outras técnicas.

No cálculo de deslocamentos, forças de superfície e tensões, verificou-se que os elementos quadráticos convergem à solução exata muito antes dos elementos lineares, e mais ainda, do que os elementos constantes. Desta forma, sua utilização é vantajosa por ter um menor custo.

Para a obtenção de freqüências fundamentais constatou-se que mesmo com malhas pobres o elemento constante fornece bons resultados, assim como o linear e o quadrático.

Em problemas que apresentam singularidade, a aplicação de elementos lineares e quadráticos (convencionais) não tem boa convergência, por serem estes, elementos contínuos. O elemento constante é descontínuo e melhor se adapta a esta classe de problemas. A implementação de elementos lineares e quadráticos

descontínuos é viável e necessária para contornar as singularidades, como também é viável a combinação de elementos constantes com elementos contínuos.

Considerou-se, neste trabalho, apenas domínios homogêneos e isotrópicos. Uma abordagem que permite considerar um número maior de problemas deve considerar meios não-homogêneos e anisotrópicos. Para isto basta incluir no presente estudo o conceito de sub-regiões e soluções fundamentais para meio anisotrópico. Esta abordagem melhor representaria solos com diferentes camadas, onde cada camada seria tratada como uma sub-região. A medida que o solo é cada vez mais heterogêneo, uma combinação entre elementos de contorno e elementos finitos passa a ser mais propícia à solução do problema. Esta combinação também é interessante quando tem-se problemas de interação solo-estrutura, sendo o solo discretizado com elementos de contorno e a estrutura com elementos finitos.

Pode-se ainda complementar este trabalho aplicando-se a transformada rápida de Fourier para ter-se os resultados no domínio do tempo. Se for necessário o estudo do estado transiente de alguns problemas, aplica-se ao invés da transformada de Fourier a transformada de Laplace e retorna-se ao domínio do tempo da mesma forma.

Em resumo, o programa implementado soluciona diversos problemas de engenharia e para solução de vários outros é imprescindível complementar o programa com as técnicas citadas anteriormente, entre outras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dominguez, J., "Elastodynamics", chap. 7 , "Progress in Boundary Element Methods", Brebbia, C.A. (Ed.), J. Wiley (1981).

[2] Walker, S., "Fundamental Solutions", chap. 2, "Progress in Boundary Element Methods", Brebbia, C.A. (Ed.), J. Wiley (1981).

[3] Medina, F., "Analisis de la respuesta sismica de presas incluyendo efectos de interaccion suelo-agua-estructura", dissertação de Doutorado, Universidad de Sevilla (1987).

[4] Timoshenko, S. e Goodier, J., "Teoria da Elasticidade", Ed. Guanabara Dois S.A. (1980).

[5] Manolis, G.D., "Dynamic Response of Underground Structures", Ph.D. dissertation, University of Minnesota (1980).

[6] Mansur, W.J. e Prodanoff, J.H.A., "Métodos Numéricos em Recursos Hídricos II", COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro (a ser publicado).

[7] Brigham, E.O., "Fast Fourier Transform", Prentice Hall, Englewood (1974).

[8] Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., "Elastodynamics", vol. II, Linear Theory, Academic Press, New York (1975).

[9] Manolis, G.D. and Beskos, D.E., "Boundary Element Methods in Elastodynamics", Unwin Hyman, London (1988).

[10] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. e Wrobel, L.C., "Boundary Elements Techniques : Theory and Application in Engineering", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1984).

[11] Chuang, P.H., "Application of Boundary Element Methods in Elastodynamics", M.Sc. dissertation, University of Southampton (1981).

[12] Dumans, M.C.R.F., "Uma Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas da Elastodinâmica no Domínio da Freqüência", dissertação de Mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1985).

[13] Achenbach, J.D., "Wave Propagation in Elastic Solids", North Holland (1973).

[14] Miklowitz, J., "The Theory of Elastic Waves and Wave Guides", North Holland (1977).

[15] Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4th edition, New York, Dover (1944).

[16] Nowacki, W., "Dynamics of Elastic Systems", J. Wiley, New York (1963).

[17] Sokolnikoff, I.S., "Tensor Analysis : Theory and Application", John Wiley (1964).

[18] Brebbia, C.A. and Dominguez, J., "Boundary Element Method An Introductory Course", McGraw-Hill, New York (1989).

[19] Zienkiewich, O.C., "Finite Element Method", McGraw-Hill, London (1977).

[20] Abramowitz, M. e Stegun, I.R., "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards, Washington, D.C. (1965).

[21] Spiegel, M., "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", McGraw-Hill (1968).

[22] Piskounov, N., "Cálculo Diferencial e Integral", MIR, Moscow (1960).

[23] Clough, R.W. e Chopra, A.K., "Earthquake Stress Analysis in Earth Dams", Proc. ASCE J. Appl. Mech. 92, 197-211 (1966).

[24] Kirsch, G.,"Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der FestigKeitslehre", VDI-Z, 42, 797-807 (1898).

[25] Clough, R.W., "Dynamic of Structures", McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo (1975).

[26] Beskos, D.E., "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis", Applied Mechanics Reviews, 40, 1, 1-23 (1987).

[27] Paz, M., "Structural Dynamics Theory and Computation", Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York (1985).

[28] Pao, Y.H.,"Dynamical Stress Concentration in an Elastic Plate", J. Mech. Appl. 29, pp299-305, (1962).

[29] Cruse, T.A. e Rizzo, F.J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", J. Math. Anal. Appl. 22, pp 244-259 (1968).

[30] Cruse, T.A., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II", J. Math. Anal. Appl. 22, pp 341-355 (1968).

[31] Stroud, A.H. e Secrest, D., "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1966).

[32] Mansur, W.J., Halbritter, A.L. e Telles, J.C.F., "Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Elasticidade Linear Bi-dimensional", Anais comemorativos dos 15 anos da COPPE, pp 1-22 (1978).

[33] Sternberg, E., "On the Integration of Equations of Motion in the Classical Theory of Elasticity", Arch. Rational Mech. Anal. 6, 34-50 (1960).

[34] Pontes, B.R., "Interação Dinâmica de Estruturas

Bi-dimensionais com o solo : uma comparação entre o Método Semi-analítico e o Método dos Elementos de Contorno", dissertação de Mestrado, Unicamp (1992).

[35] Flügge, W., "Viscoelasticity", Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass (1967).

[36] Jakub, M., "Dynamic Stiffness of Foundations : 2-D vs 3-D Solutions", M.I.T. Research Report NO. R77-36, Civil Engineering Department (1977).

[37] Dominguez, J. e Abascal, R., "On Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity", Egineering Analysis 1, pp. 128-134 (1984).

[38] Morse, P.M. e Feshbach, H., "Methods of theoretical physics, parts I and II", McGraw-Hill, New York, (1953).

[39] Pao, Y.H. e Mow, C.C., "Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations", Crane Russak, New York (1973).

[40] Graff, K.F.,"Wave motion in elastic solids", Ohio State University Press, Columbus (1975).

[41] Wheeler, L.T. e Sternberg, E., "Some theorems in classical elastodynamics", Archive Rational Mech. Anal. 31, 51-90 (1968).

[42] Pao, Y.H. e Varatharajulu, V., "Huygens' principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves", J. Acoust. Soc. Am. 59, 1361-1371 (1976).

[43] Pao, Y.H., "Elastic waves in solids", J. Appl. Mech. 50, 1152-1164 (1983).

[44] Brebbia, C.A. e Walker, S., "Boundary element techniques in engineering", Newness-Butterworths, London (1980).

[45] Banerjee, P.K. e Butterfield, R., "Boundary element methods in engineering science", McGraw-Hill, London (1981).

[46] Bui, H.D., "New trends in boundary integral equations methods", in Computational Mechanics '86, Yagawa, G. e Atluri, S.N. Eds., Springer-Verlag, Tokyo, XI.3 - 8 (1986).

[47] Kitahara, M., "Boundary integral equation methods to eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates", Elsevier, Amsterdam (1985).

[48] Wolf, J.P., "Dynamic soil-structure interaction", Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1985).

[49] Banaugh, R.P. e Goldsmith, W., "Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape", J. Appl. Mech. 30, 589-597 (1963).

[50] Banaugh, R.P. e Goldsmith, W., "Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape", J. Acoust. Soc. Am. 35, 1590-1601 (1963).

[51] Friedman, M.B. e Shaw, R.P., "Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross-section", J. Appl. Mech. 29, 40-46 (1962).

[52] Manolis, G.D. e Beskos, D.E., "Dynamic stress concentration studies by the boundary integral equation method", in Innovative numerical analysis for the engineering sciences, Shaw, R.P. et al Eds., University Press of Virginia, Charlottesville, 459-463 (1980).

[53] Manolis, G.D. e Beskos, D.E., "Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform", Int.

J. Numer. Methods Eng. 17, 573-599 (1981).

[54] Manolis, G.D. e Beskos, D.E., "Dynamic response of lined tunnels by an isoparametric boundary element method", Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 36, 291-307 (1983).

[55] Manolis, G.D., "A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics", Int. J. Numer. Methods Eng. 19, 73-91 (1983).

[56] Dominguez, J., "Dynamic stiffness of rectangular foundations", Report no R78-20, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA, Aug (1978).

[57] Dominguez, J., "Response of embedded foundations to travelling waves", Report no R78-24, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA, Aug (1978).

[58] Shippy, D.J., "Applications of the boundary integral equation method to transient phenomena in solids", in Boundary integral equation method : Computational applications in applied mechanics, AMD- vol.11, Cruse, T.A. e Rizzo, F.J. Eds., ASME, New York, 15-30 (1975).

[59] Dominguez, J. e Alarcon, E., "Elastodynamics", in Progress in boundary element methods, Vol.1, Brebbia, C.A. Ed., Halsted Press, New York, 213-257 (1981).

[60] Dominguez, J., "Applications of boundary element methods in elastodynamics", in BETECH 85, Brebbia, C.A. e Noye, B.J. Eds., Springer-Verlag, Berlin, 105-127 (1985).

[61] Geers, T.L., "Boundary element methods for transient response analysis", in Computational methods for transient analysis, Belytschko, T. e Hughes, T.J.R. Eds., North Holland, Amsterdam, 221-243 (1983).

[62] Banerjee, P.K., "Computational methods for linearized problems", in Proc. int. workshop in Dynamic Soil-Structure Interaction, Beskos, D.E., Krauthammer, T. e Vardoulakis, I.G. Eds., University of Minnesota, Minneapolis, 40-65 (1985).

[63] Banerjee, P.K. e Ahmad, S., "Advanced three dimensional dynamic analysis by boundary element methods", in Advanced topics in boundary element analysis, AMD-vol.72, Cruse, T.A., Pifko, A.B. e Armen, H. Eds., ASME, New York, 65-81 (1985).

[64] Banerjee, P.K., Ahmad, S. e Manolis, G.D., "Advanced elastodynamic analysis", in Boundary element method in mechanics, chapter 5, Beskos, D.E. Ed., North-Holland, Amsterdam (1987).

[65] Manolis, G.D., Ahmad, S. e Banerjee, P.K., "Boundary element method implementation for three dimensional elastodynamics", in Developments in boundary element methods - 4, Banerjee, P.K. e Watson, J.O. Eds., Elsevier, London, 29-65 (1986).

[66] Brebbia, C.A., "The solution of wave propagation problems using boundary elements", in Advanced topics in boundary element analysis,AMD-vol.72, Cruse, T.A., Pifko, A.B. e Armen, H. Eds., ASME, New York, 91-111 (1985).

[67] Beskos, D.E., Dasgupta, B. e Vardoulakis, I.G., "Vibration isolation using open or filled trenches, part I : 2D homogeneous soil", Compt. Mech. 1, 43-64 (1986).

[68] Tullberg, O., "BEMDYN - A boundary element program for two-dimensional elastodynamics", in Boundary elements,

Brebbia, C.A., Futagami, T. e Tanaka, M. Eds., Springer-Verlag, Berlin, 699-708 (1983).

[69] Tullberg, O. e Wiberg, N.E., "Boundary element solutions for some problems in soil dynamics", in Numerical methods in geomechanics Nagoya 1985, Kawamoto, T. e Ichikawa, Y. Eds., A A Balkema, Rotterdam, 157-164 (1985).

[70] Niwa, Y., Kobayashi, S. e Azuma, N., "An analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of travelling waves", Memoirs Fac. Eng. Kyoto Univ. 37, 28-46 (1975).

[71] Niwa, Y., Kobayashi, S. e Fukui, T., "Applications of integral equation method to some geomechanical problems", in Numerical methods in geomechanics, Desai, C.S. Ed., ASCE, New York, 120-131 (1976).

[72] Kobayashi, S. e Nishimura, N., "Transient stress analysis of tunnels and caverns of arbitrary shape due to travelling waves", in Developments in boundary element methods - 2, Banerjee, P.K. e Shaw, R.P. Eds., Applied Science, London, 177-210 (1982).

[73] Brebbia, C.A. e Chuang, P., "Application of the boundary element method for solving elastodynamic problems", in Soil dynamics and earthquake engineering, Cakmak, A.S., Abdel-Ghaffar, A.M. e Brebbia, C.A. Eds., A A Balkema, Rotterdam, 381-408 (1982).

[74] Schuster, G.T. e Smith, L.C., "A comparison among four direct boundary integral methods", J. Acoust. Soc. Am. 77, 850-864 (1985).

[75] Theocaris, P.S., Karayanopoulos, N. e Tsamasphyros, G., "A

numerical method for the solution of the static and dynamic three-dimensional elasticity problems", Comput. Struc. 16, 777-784 (1983).

[76] Ahmad, S. e Manoli, G.D., "Dynamic analysis of 3-D structures by a transformed boundary element method", Comput. Mech., to appear.

[77] Rizzo, F.J., Shippy, D.J. e Rezayat, M., "A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three-dimensions", Int. J. Numer. Methods Eng 21, 115-129 (1985).

[78] Rizzo, F.J., Shippy,D.J. e Rezayat, M., "Boundary integral equation analysis for a class of earth-structure interaction problems", Final Report, NSF CEE-8013461, Department of Engineering Mechanics, Univ. of Kentucky, Lexington K Y, Feb (1985).

[79] Bui, H.D., Loret, B. e Bonnet, M., "Régularization des équations de l'élastostatique et de l'élastodynamique", C R Acad. Sci. Ser. II 300, 633-636 (1985).

APÊNDICE I - OPERADORES E GRANDEZAS VETORIAIS E ESCALARES

Seja a uma função escalar, $a = a(X_1, X_2, X_3)$ e $\underset{\sim}{b}$ um vetor

$$\underset{\sim}{b} = b_1 \underset{\sim}{i}_1 + b_2 \underset{\sim}{i}_2 + b_3 \underset{\sim}{i}_3 \qquad \text{(I-1)}$$

onde $\underset{\sim}{i}_1$, $\underset{\sim}{i}_2$, $\underset{\sim}{i}_3$ são os vetores unitários dos eixos X_1, X_2, X_3, respectivamente.

O operador $\underset{\sim}{\nabla}$ é definido por [22]

$$\underset{\sim}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial X_1} \underset{\sim}{i}_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} \underset{\sim}{i}_2 + \frac{\partial}{\partial X_3} \underset{\sim}{i}_3 \qquad \text{(I-2)}$$

e ∇^2, o laplaciano,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \qquad \text{(I-3)}$$

Operações sobre uma função escalar :

$$\underset{\sim}{\nabla} a = \frac{\partial a}{\partial X_1} \underset{\sim}{i}_1 + \frac{\partial a}{\partial X_2} \underset{\sim}{i}_2 + \frac{\partial a}{\partial X_3} \underset{\sim}{i}_3 \quad \text{(gradiente)} \qquad \text{(I-4)}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} . (\underset{\sim}{\nabla} a) = \frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial X_3^2} = \nabla^2 a \qquad \text{(I-5)}$$

sendo (.) o produto interno, $\underset{\sim}{i}_1 . \underset{\sim}{i}_1 = 1$ e $\underset{\sim}{i}_i . \underset{\sim}{i}_j = 0 \quad (i \neq j)$

$$\underset{\sim}{\nabla} \times (\underset{\sim}{\nabla} a) = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(I-6)}$$

e (x) o produto vetorial, $\underset{\sim}{i}_1 \times \underset{\sim}{i}_1 = 0$, $\underset{\sim}{i}_1 \times \underset{\sim}{i}_2 = \underset{\sim}{i}_3$, $\underset{\sim}{i}_2 \times \underset{\sim}{i}_1 = -\underset{\sim}{i}_3$ e assim por diante.

Operações sobre um vetor :

O produto interno entre dois vetores é um escalar,

$$\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{b} \rightarrow \text{escalar} \quad \text{(divergente)}$$

O produto externo entre dois vetores é um vetor,

$$\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{b} \rightarrow \text{vetor} \quad \text{(rotacional)}$$

O produto misto de qualquer vetor é nulo,

$$\underset{\sim}{\nabla}.(\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{b}) = 0 \tag{I-7}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\times(\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{b}) - \nabla^2\underset{\sim}{b} \tag{I-8}$$

APÊNDICE II - MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Este método é uma técnica numérica para aproximar a solução de uma equação diferencial parcial [10,18],

$$L(u_0) + g = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \tag{II-1}$$

com as condições de contorno essenciais,

$$F(u_0) + p = 0 \qquad \text{em} \quad \Gamma_1 \tag{II-2}$$

e naturais,

$$R(u_0) + f = 0 \qquad \text{em} \quad \Gamma_2 \tag{II-3}$$

onde L( ), F( ), R( ) são operadores diferenciais lineares; u_0 é a solução exata da equação; g, p, f funções de variáveis independentes, i.e, coordenadas X_i (i=1,2,3) e tempo t; $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Aproxima-se u_0 no domínio e no contorno utilizando-se uma função tentativa u da seguinte forma

$$u = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \tag{II-4}$$

u é expressa como uma combinação linear de funções N_m linearmente independentes, formando uma seqüência completa. Os coeficientes a_m são incógnitos. Quanto maior o número M de termos da série melhor será a aproximação, satisfazendo-se assim o critério de "completividade".

Normalmente u não corresponde a solução exata do problema, então aparecerão erros no domínio Ω e no contorno Γ, erros estes dados pelas seguintes expressões :

$$E_\Omega = L(u) + g$$
$$E_1 = F(u) + p \qquad \text{(II-5)}$$
$$E_2 = R(u) + f$$

Estes erros são minimizados forçando-se que a integral do produto destes erros por uma função peso W seja nula no domínio e no contorno. Isto é,

$$\int_\Omega E_\Omega \; W \; d\Omega = 0 \qquad \text{em } \Omega \qquad \text{(II-6)}$$

$$\int_\Gamma E_\Gamma \; W \; d\Gamma = 0 \qquad \text{em } \Gamma \qquad \text{(II-7)}$$

ou ainda,

$$\int_\Omega \{L(u) + g\} \; W \; d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \{F(u) + p\} \; g(W) \; d\Gamma$$
$$\int_{\Gamma_2} \{R(u) + f\} \; W \; d\Omega \qquad \text{(II-8)}$$

que é a sentença original de resíduos ponderados onde g(W) é uma função tal que $R = g(F)$. Dependendo do tipo de função de ponderação utilizado temos um tipo diferente de método para a resolução da equação diferencial. Por exemplo se

$$W = \delta(\xi, x)$$

teremos o método da colocação nodal.

A partir da sentenca original deduz-se a formulação fraca que dá origem ao método dos elementos finitos, bem como a formulação inversa que origina o método dos elementos de contorno.

O método dos resíduos ponderados pode ser aplicado a

qualquer tipo de problema para obter-se a equação integral, assim torna-se mais fácil combinar o método dos elementos de contorno com outros métodos, como por exemplo o método dos elementos finitos.

APÊNDICE III - CÁLCULO DE LIMITES DE INTEGRAIS

III.1 Cálculo de $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x)$ (III-1-1)

Substituindo-se o valor $U^*_{ij}(\xi,x)$ (equação(3.15)) em (III-1-1), tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{1}{2\pi\rho C_2^2} \left(\psi\ \delta_{ij} - \chi\ r_{,i} r_{,j} \right) \right] T_j(x)\ d\Gamma(x) \qquad \text{(III-1-2)}$$

Considera-se a figura III.1 a seguir e utiliza-se coordenadas cilíndricas por conveniência para cálculo da integral

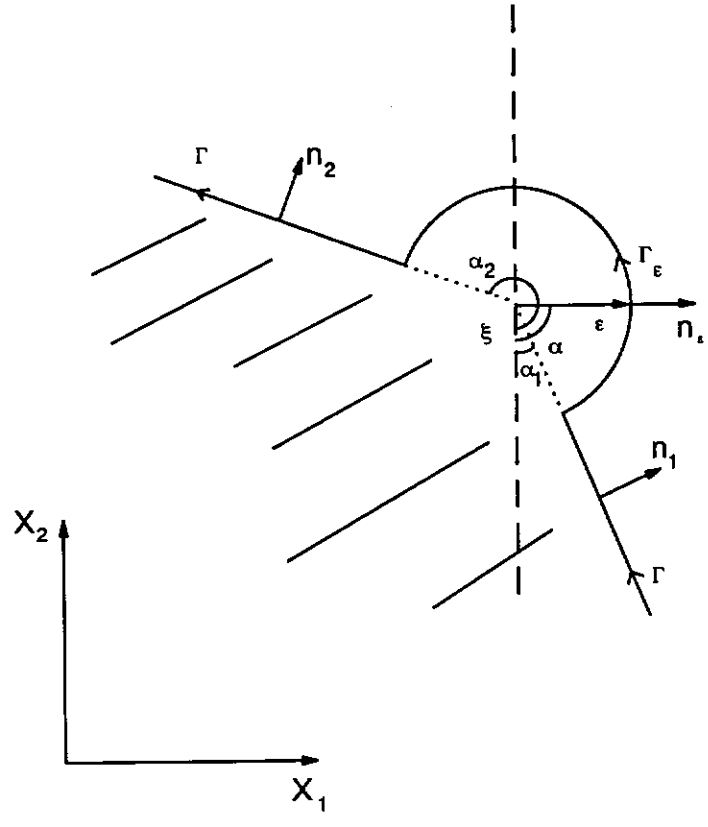


figura III.1 Representação do contorno Γ_ε

então

$$r = \varepsilon \tag{III-1-3}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1 \tag{III-1-4}$$

$$r,_i = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial X_i} = 1\ n_i = n_i \tag{III-1-5}$$

Uma vez que $\varepsilon \to 0$ toma-se as funções modificadas de Bessel para argumentos pequenos (equações (IV-30) e (IV-31)),

$$K_0(kr) = -\ln(kr) \tag{III-1-6}$$

$$K_1(kr) = \frac{1}{kr} \tag{III-1-7}$$

$$K_2(kr) = 2\left(\frac{1}{kr}\right)^2 \tag{III-1-8}$$

Os valores de ψ e χ, equações (3.22), (3.23) respectivamente, reduzem-se a :

$$\psi = -\ln\left(\frac{iw\varepsilon}{C_2}\right) \tag{III-1-9}$$

$$\chi = 0 \tag{III-1-10}$$

Substituindo-se as equações (III-1-3), (III-1-4), (III-1-5), (III-1-9) e (III-1-10) na equação (III-1-2), obtem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x)\ T_j(x)\ d\Gamma(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[\frac{1}{2\pi\rho C_2^2}\left(-\ln\left(\frac{iw\varepsilon}{C_2}\right)\right)\right] T_j(x)\ d\Gamma(x) \tag{III-1-11}$$

mas como

$$d\Gamma = \varepsilon \, d\alpha \qquad \text{(III-1-12)}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x) \; T_j(x) \; d\Gamma(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{2\pi\rho C_2^2} \left(-\ln \left(\frac{iw\varepsilon}{C_2} \right) \right) \right] \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} T_j(x) \; d\alpha \qquad \text{(III-1-13)}$$

onde

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \, \ln(\varepsilon) = 0 \qquad \text{(III-1-14)}$$

então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U^*_{ij}(\xi,x) \; T_j(x) \; d\Gamma(x) = 0$$

III.2 Cálculo de $K_{ij}(\xi)$ (bi-dimensional)

$$K_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T^*_{ij}(\xi,x) \; d\Gamma(x) \qquad \text{(III-2-1)}$$

Substituindo-se o valor $T^*_{ij}(\xi,x)$ (equação(3.16)) em (III-2-1), tem-se

$$K_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} \, n_i \right) - \right.$$

$$\frac{2\chi}{r} \left(n_j \, r_{,i} - 2 \, r_{,i} \, r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{\chi}{r} \, r_{,i} \, r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} +$$

$$\left. \left(\frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) r_{,i} \, n_j \right] d\Gamma(x) \qquad \text{(III-2-2)}$$

Considera-se a figura III.1 mostrada anteriormentee utiliza-se coordenadas cilíndricas por conveniência para cálculo da integral. Assim os valores de $\frac{d\psi}{dr}$, $\frac{d\chi}{dr}$ e χ, equações (4.55), (4.56) e (3.23) respectivamente, reduzem-se a :

$$\frac{d\psi}{dr} = - \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{(III-2-3)}$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{C_2^2}{C_1^2} - 1 \right] \qquad \text{(III-2-4)}$$

$$\chi = 0 \qquad \text{(III-2-5)}$$

Substituindo-se as equações (III-1-3), (III-1-4), (III-2-5), (III-2-3), (III-2-4) e (III-2-5) na equação (III-2-2), obtém-se

$$K_{ij}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} - \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon} \, d\Gamma \qquad \text{(III-2-6)}$$

mas como

$$d\Gamma = \varepsilon \, d\alpha \qquad \text{(III-2-7)}$$

e Γ_ε esta compreendido entre α_1 e α_2 , então :

$$K_{ij}(\xi) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta_{ij} \, d\alpha \qquad \text{(III-2-8)}$$

$$K_{ij}(\xi) = - \frac{1}{2\pi} \delta_{ij} \, [\alpha_2 - \alpha_1] \qquad \text{(III-2-9)}$$

Matricialmente,

$$K_{ij}(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III-2-10)}$$

Para contornos suaves tem-se que $\alpha_1 = \alpha_2 - \pi$, desta forma

$$K_{ij}(\xi) = -\frac{\delta_{ij}}{2} \qquad \text{(III-2-12)}$$

APÊNDICE IV - FUNÇÕES DE BESSEL

As funções de Bessel [20,21] são as soluções da equação de Bessel

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \qquad \text{(IV-1)}$$

onde z, k e ν assumem números reais, imaginários ou complexos. Estas soluções podem ser :

- funções de Bessel da primeira classe de ordem ν ($J_\nu(kz)$)
- funções de Bessel da segunda classe de ordem ν ($Y_\nu(kz)$), também chamadas de funções de Weber.
- funções de Bessel da terceira classe de ordem ν ($H_\nu^{(1)}(kz)$ e $H_\nu^{(2)}(kz)$), também chamadas de funções de Hankel. Entre inúmeras soluções estas podem assumir :

$$H_\nu^{(1)}(kz) = J_\nu(kz) + iY_\nu(kz) \qquad \text{(IV-2)}$$

$$H_\nu^{(2)}(kz) = J_\nu(kz) - iY_\nu(kz) \qquad \text{(IV-3)}$$

Fórmulas das funções de Bessel :

(i) Expansão em série

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,(\nu+k)!} \qquad \text{(IV-4)}$$

$$Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right\} J_\nu(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\phi(k) - \phi(n+k)\right\}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\,(n+k)!} \qquad \text{(IV-5)}$$

para $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$

onde

$\gamma = 0.5772156649...$ (constante de Euler)

e

$$\phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} \qquad \text{(IV-6)}$$

$$\phi(0) = 0$$

(ii) Aproximação polinomial (argumento real)

para $-3 \leq x \leq 3$

$$J_0(x) = 1 - 2.2499997\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1.2656208\left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0.3163866\left(\frac{x}{3}\right)^6$$

$$+ 0.0444479\left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.0039444\left(\frac{x}{3}\right)^{10} +$$

$$+ 0.0002100\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon \qquad \text{(IV-7)}$$

$$|\varepsilon| < 5\times10^{-8}$$

para $0 < x \leq 3$

$$Y_0(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)J_0(x) + 0.36746691 + 0.60559366\left(\frac{x}{3}\right)^2 +$$

$$- 0.74350384\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 0.25300117\left(\frac{x}{3}\right)^6 - 0.04261214\left(\frac{x}{3}\right)^8$$

$$+ 0.00427916\left(\frac{x}{3}\right)^{10} - 0.00024846\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon \qquad \text{(IV-8)}$$

$$|\varepsilon| < 1.4\times10^{-8}$$

para $3 \leq x \leq \infty$

$$J_0(x) = x^{-1/2}\, Fo\, \cos(To) \qquad \text{(IV-9)}$$

$$Y_0(x) = x^{-1/2}\, Fo\, \text{sen}(To) \qquad \text{(IV-10)}$$

$$Fo = 0.79788456 - 0.00000077\left(\frac{3}{x}\right) - 0.00552740\left(\frac{3}{x}\right)^2 -$$

$$- 0.00009512\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0.00137237\left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00072805\left(\frac{3}{x}\right)^5 +$$

$$+ 0.00014476\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon \qquad \text{(IV-11)}$$

$$|\varepsilon| < 1.6\times10^{-8}$$

$$To = x - 0.78539816 - 0.04166397\left(\frac{3}{x}\right) - 0.00003954\left(\frac{3}{x}\right)^2 +$$

$$+ 0.00262573\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0.00054125\left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00029333\left(\frac{3}{x}\right)^5 +$$

$$+ 0.00013558\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon \qquad \text{(IV-12)}$$

$$|\varepsilon| < 7\times10^{-8}$$

para $-3 \leq x \leq 3$

$$J_1(x) = x\left[\frac{1}{2} - 0.56249985\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 0.21093573\left(\frac{x}{3}\right)^4 - \right.$$

$$- 0.03954289\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.00443319\left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.00031761\left(\frac{x}{3}\right)^{10} +$$

$$\left. + 0.00001109\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon\right] \qquad \text{(IV-13)}$$

$$|\varepsilon| < 1.3\times10^{-8}$$

para $0 < x \leq 3$

$$Y_1(x) = \frac{1}{x}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right) x \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_1(x) - 0.6266198 + 0.2212091\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \right.$$

$$+ 2.1682709\left(\frac{x}{3}\right)^4 - 1.3164827\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.3123951\left(\frac{x}{3}\right)^8$$

$$\left. - 0.0400976\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0.0027873\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon\right] \qquad \text{(IV-14)}$$

$$|\varepsilon| < 1.1\times10^{-7}$$

para $3 \leq x \leq \infty$

$$J_1(x) = x^{-1/2}\ F_1\ \cos(T_1) \qquad \text{(IV-15)}$$

$$Y_1(x) = x^{-1/2}\ F_1\ \text{sen}(T_1) \qquad \text{(IV-16)}$$

$$F_1 = 0.79788456 + 0.00000156\left(\frac{3}{x}\right) + 0.01659667\left(\frac{3}{x}\right)^2 +$$

$$+ 0.00017105\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0.00249511\left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.00113653\left(\frac{3}{x}\right)^5 -$$

$$- 0.00020033\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon \qquad \text{(IV-17)}$$

$$|\varepsilon| < 4\times10^{-8}$$

$$T_1 = x - 2.35619449 + 0.12499612\left(\frac{3}{x}\right) + 0.00005650\left(\frac{3}{x}\right)^2 -$$

$$- 0.00637879\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0.00074348\left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.00079824\left(\frac{3}{x}\right)^5 -$$

$$- 0.00029166\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon \qquad \text{(IV-18)}$$

$$|\varepsilon| < 9\times10^{-8}$$

Retornando a equação de Bessel, se k for substituído por um número puramente imaginário ik, a equação (IV-1) torna-se :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + z\,\frac{du}{dz} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \qquad \text{(IV-19)}$$

que tem por soluções

- função modificada de Bessel da primeira classe de ordem ν $(I_\nu(kz))$
- função modificada de Bessel da segunda classe de ordem ν $(K_\nu(kz))$

Fórmulas das funções modificadas de Bessel :

(i) Relações entre funções

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\, i\, e^{(1/2)\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}(z) \qquad \text{(IV-20)}$$

$$K_\nu(z) = -\frac{\pi}{2}\, i\, e^{-(1/2)\nu\pi i}\, H_\nu^{(2)}(\bar{z}) \qquad \text{(IV-21)}$$

sendo $\bar{z}$ o conjugado complexo de z

(ii) Fórmulas de recorrência

$$K_{\nu+1}(z) = K_{\nu-1}(z) + \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) \qquad \text{(IV-22)}$$

$$-2K_\nu'(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) \qquad \text{(IV-23)}$$

$$-zK_{\nu-1}(z) = zK_\nu'(z) + \nu K_\nu(z) \qquad \text{(IV-24)}$$

$$-zK_{\nu+1}(z) = zK_\nu'(z) - \nu K_\nu(z) \qquad \text{(IV-25)}$$

$$K_0'(z) = -K_1(z) \qquad \text{(IV-26)}$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z) \qquad \text{(IV-27)}$$

onde

$$K_\nu'(kz) = \frac{d}{d(kz)} K_\nu(kz) \qquad \text{(IV-28)}$$

$$\frac{d}{dk} K_\nu(kz) = k\, K_\nu'(kz) \qquad \text{(IV-29)}$$

(iii) Limites para pequenos argumentos

$$K_0(z) = -\ln(z) \qquad \text{(IV-30)}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\,(\nu-1)!\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \qquad \text{(IV-31)}$$