

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO ATÉ A RUPTURA DE VIGAS
CONTÍNUAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA

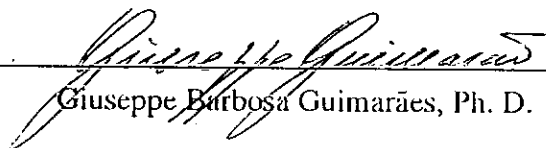
Jean Marie Désir

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE POS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP
(Presidente)



Giuseppe Barbosa Guimarães, Ph. D.



Ibrahim Abd El Malik Shehata, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 1993

DÉSIR, JEAN MARIE

Análise não-linear do comportamento até a ruptura de vigas de concreto com protensão externa [Rio de Janeiro] 1993.

VIII, 109 p., 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1993)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Análise não-linear I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao professor Paulo Chaves pela orientação e o apoio durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao professor Ronaldo Carvalho Batista pela atenção no momento da inscrição no curso.

Agradeço aos professores Giuseppe Barbosa Guimarães e Ibrahim Shehata por participar da banca.

Meus agradecimentos ao pessoal da secretaria que nunca deixou de ajudar a solucionar os problemas.

Agradeço todos os colegas da COPPE Civil, em particular a Paulo Regis e Márcio Pompei, que ajudaram muito com as suas discussões.

Também agradeço a minha família, em especial meus pais, meus irmãos César, Wilfrid e Rose Marie que contribuíram a sua maneira na realização deste trabalho.

Agradeço a Clevi pela grande ajuda com o português.

Ao CNPq, agradeço o apoio financeiro.

Enfim, que todas as pessoas que de uma forma ou outra contribuíram na realização deste trabalho recebam meus sinceros agradecimentos.

Resumo da tese apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO ATÉ A RUPTURA DE VIGAS
CONTÍNUAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA

Jean Marie Désir

Novembro de 1993

Orientador: Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho apresenta um método para a análise não linear geométrica e física de vigas hiperestáticas protendidas com cabos externos. O objetivo principal é generalizar uma formulação já aplicada para vigas isostáticas e que permite levar em conta os parâmetros introduzidos pelos cabos exteriores: a variação da tensão depende da deformação global, da variação de excentricidade entre pontos de desvio ou de ancoragem e o possível deslizamento dos cabos sobre os desviadores .

O estudo teórico é desenvolvido e apresentado no texto. A partir deste, um programa em FORTRAN é elaborado para servir de previsor para ensaios e análise de comportamento. Sua concepção deixa bastante flexibilidade para a definição do modelo estrutural.

Os resultados do programa são comparados com os de outros programas desenvolvidos fora do Brasil e com os de um ensaio executado nos Estados Unidos. Também são apresentados os resultados que se esperam para duas vigas de uma série a serem ensaiadas brevemente nos laboratórios da UFRJ.

Summary of the thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

NON-LINEAR ANALYSIS OF THE BEHAVIOUR OF EXTERNALLY PRESTRESSED
CONTINUOUS BEAMS

Jean Marie Désir

November of 1993

Thesis supervisor: Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP
Department : Civil Engineering

This work presents a method of analysis in non-linear geometric and physic elasticity for externally prestressed beams. The main object is to extend to non statically determinate beams a formulation already tested for statically determinate beams. This formulation takes into account many aspects of the external tendons behaviour like: the stress variation in accordance with the global displacements, variation of the tendon eccentricity between fixation points - deviation saddles or anchorages and the eventual tendon slips on the saddles.

The theoretical study is developed and presented in the text. On this basis it was written a FORTRAN program which allows to simulate a test and to make the analysis of the beam behaviour. It was conceived to make easy the definition of any beam structural model.

The program's results are compared with the data of other programs developed out of Brazil and with the data of a test done in the United States of America. The results given by the program for two of a set of five beams to be tested in a close future at the UFRJ's laboratory are also presented.

Resumé de la thèse présentée à la COPPE/UFRJ comme partie des conditions nécessaires pour l'obtention du grade de Maître en Sciences (M. Sc.)

**ANALYSE NON-LINÉAIRE DU COMPORTEMENT À RUPTURE DE POUTRES
CONTINUES EN BÉTON À PRÉCONTRAINTÉ EXTÉRIEURE**

Jean Marie Désir

Novembre de 1993

Directeur de thèse: Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP
Programme : Génie Civil

Ce travail présente une méthode d'analyse en élasticité non-linéaire géométrique et physique pour des poutres à précontrainte extérieure. Le but principal est de généraliser une formulation déjà vérifiée pour des poutres isostatique et qui permet de tenir compte des aspects inhérents aux câbles extérieurs: la variation de contrainte en fonction de la déformation globale, la variation d'excentricité du câble entre les points de déviation ou d'ancrage et l'éventuel glissement des câbles sur les déviateurs.

L'étude théorique é développée et présentée dans le texte. Elle a servi à l'élaboration d'un logiciel en FORTRAN capable de simuler des essais et d'aider dans l'analyse du comportement. Sa conception laisse une grande flexibilité pour la définition du modèle structural.

Les résultats du logiciel sont comparés avec ceux d'autres logiciels rédigés en dehors du Brésil et avec ceux d'un essai réalisé aux États Unis. On a incorporé aussi les résultats que le logiciel prévoit pour deux poutres d'une série d'essais qui sera réalisé en bref dans les laboratoires de l'UFRJ.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO GERAL	1
CAPÍTULO 2 - HIPÓTESES FUNDAMENTAIS	7
2.1.- Introdução	7
2.2.- Hipóteses fundamentais	7
2.3.- Estruturas analisadas	8
2.4.- Discretização da estrutura	9
2.5.- Leis de comportamento dos materiais	10
2.5.1.- Concreto	10
2.5.1.1.- Concreto comprimido	10
2.5.1.2.- Concreto em tração	12
2.5.2.- Aço	12
2.5.2.1.- Aços passivos	14
2.5.2.2.- Aços ativos	16
CAPÍTULO 3 - EQUILÍBRIO DE UMA SEÇÃO EM ELASTICIDADE NÃO-LINEAR	18
3.1.- Introdução	18
3.2.- Cálculo dos esforços internos	19
3.3.- Definição do operador ϕ e da aplicação linear ϕ_t	20
3.4.- Cálculo prático dos esforços internos	22
3.5.- Cálculo prático da matriz ϕ_t	23

3.6.- Equilíbrio de uma seção	24
CAPÍTULO 4 - PROTENSÃO EXTERNA - ESTUDO GLOBAL	27
4.1.- Introdução	27
4.2.- Cabo interno aderente	27
4.3.- Cabo externo sem atrito fixo transversalmente	29
4.4.- Cabo exterior livre transversalmente	32
4.5.- Variação de excentricidade do cabo	33
4.6.- Determinação dos deslizamentos sobre os desviadores	35
4.6.1.- Condições de equilíbrio	35
4.6.1.1 Deslizamento para a esquerda	36
4.6.1.1 Deslizamento para a direita	37
4.6.2.- Cálculo dos deslizamentos	38
4.6.2.1.- Deslizamento isolado	38
4.6.2.2.- Deslizamento múltiplo	40
4.7.- Estudo global	43
CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ALGORITMOS DE CÁLCULO	44
5.1.- Introdução	44
5.2.- Equações constitutivas dos materiais	45
5.3.- Cálculo das rigidezes iniciais	45
5.4.- Cálculo dos esforços devidos a cargas externas	47
5.5.- Determinação dos esforços devidos à protensão externa	49
5.6.- Cálculo dos deslizamentos sobre os desviadores	55
5.7.- Resolução da equação de equilíbrio de uma seção	56
5.7.1.- Método de Newton-Raphson	58

5.7.2.- Método de Newton-Raphson Modificado	59
5.7.3.- Parâmetros de controle para o cálculo e noção de convergência	61
5.8.- Análise de abertura de juntas	62
5.9.- Seqüência lógica do cálculo	62
CAPÍTULO 6 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS	68
6.1.- Introdução	68
6.2.- Viga isotática	69
6.3.- Viga do texas	73
6.4.- Comparação com programas - vigas do "benchmark test"	79
6.4.1.- Descrição dos programas	79
6.4.2.- Dados para a comparação	82
6.4.3.- Discussão dos resultados	84
6.5.-Vigas de "PAULO REGIS"	89
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES	93
ANEXO A - Notações	96
ANEXO B - Análise de comportamento local de algumas vigas	99
ANEXO C - Referências bibliográficas	106

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A protensão surgiu no final da década de vinte. Enquanto na França FRESSYNET (1928) apresentava o método da protensão interna, DISCHINGER realizava na Alemanha várias obras de arte com a protensão externa. Esta técnica pode ser aplicada tanto em estruturas antigas como nas novas. Nas obras já existentes a protensão pode atender a duas necessidades diferentes. A primeira é a recuperação daquelas deterioradas e enfraquecidas pela agressividade do meio ambiente ou por acidentes. A segunda é a possibilidade de reforçá-las quando houver uma má avaliação inicial das ações ou quando, por alguma necessidade, é preciso mudar a sua destinação. Nas estruturas novas o projeto pode prever uma construção com protensão total ou parcialmente externa.

Nos primórdios de sua utilização, a protensão externa teve dificuldades para alcançar a qualidade esperada de resultados. Todavia isto não atrapalhou a sua divulgação. As primeiras obras não tardaram a aparecer: as pontes de Saale-Brücke (1928) e de Arc em Sax (1936) são alguns exemplos. Nos anos 50, muitos países já tinham obras com protensão externa. Pode-se citar: a França, a Grã-Bretanha, a Bélgica, a Venezuela, onde o professor LEONHARDT (1967) construiu a ponte sobre o rio Caroni.

No início dos anos setenta, várias obras, principalmente pontes construídas por balanços sucessivos, apresentaram falhas de comportamento. Grandes obras de recuperação e de reforço foram então executadas com a protensão externa, iniciando, assim, o verdadeiro desenvolvimento desta técnica. O sucesso obtido como técnica de recuperação e de reforço consagra a protensão externa. No final da década aparecem as primeiras pontes modernas com protensão totalmente externa. As pontes de Long Key e Seven Mile, Channel Five e Niles Channel na Flórida, U.S.A são alguns exemplos.

O sucesso da protensão externa é uma consequência das vantagens que ela apresenta. POWELL (1988) faz uma análise completa das vantagens e desvantagens da

protensão externa. Do ponto de vista econômico, a questão não é definida: não é possível estabelecer de forma absoluta a relação de custos das diferentes soluções disponíveis. Porém não há nenhuma dúvida sobre as vantagens técnicas da protensão externa em relação a protensão interna. A seguir é apresentada uma descrição breve de algumas dessas vantagens:

- um meio eficiente para recuperação e reforço de estruturas;
- a melhoria na concretagem. A ausência de cabos dentro do concreto facilita a concretagem e a vibração, elevando a qualidade da execução;
- a redução do tempo de execução do trabalho. A protensão externa dispensa muitas operações - colocação, regulagem e fixação das bainhas, concordância de bainhas nas juntas em obras com aduelas pré-fabricadas - que são imprescindíveis na protensão interna. Isto simplifica muito o trabalho dos construtores e reduz consideravelmente o tempo de execução da tarefa;
- a facilidade no traçado dos cabos. O cabo é ligado ao concreto só nos pontos de desvio. O cabo fica então com um traçado poligonal. Não há praticamente perdas por atrito em linha. Considera-se somente o atrito em curva para a passagem dos cabos pelos desviadores;
- as melhores condições de injeção e de controle de qualidade. A inspeção da operação de injeção é direta, sendo fácil notar se há fuga das bainhas ou entupimentos das mesmas, assegurando, assim, a proteção contra a corrosão dos cabos;
- a possibilidade de substituir os cabos. Um projeto que preveja uma substituição dos cabos externos terá um custo adicional em relação a um projeto com cabos definitivos. Mas a melhoria da qualidade da obra do ponto de vista de manutenção em funcionamento compensa amplamente este custo;
- a independência da estrutura e da protensão. É uma flexibilidade da técnica que permite a combinação de diferentes tipos de materiais com a protensão externa na pesquisa de novas formas de estruturas.

Mas a protensão externa enfrenta algumas dificuldades não desprezíveis. Pode-se citar:

-
- o controle de vibrações ao longo do cabo;
 - a redução da margem de possíveis excentricidades, o que leva a aumentar a força de protensão comparada com a força que seria necessária com a protensão interna, mais excêntrica;
 - o risco de ruptura brusca sem aviso prévio, porque a capacidade do cabo depende muito do desenho da ancoragem e dos desviadores;
 - o problema de difusão das forças nos pontos de aplicação da protensão.
 - o problema para controlar a fissuração.

Durante todos esses anos a protensão externa não foi tema de pesquisas teóricas importantes. Os primeiros trabalhos para um modelo teórico são atribuídos a VIRLOGEUX (1983). A era teórica desta técnica começou então lentamente com as bases apresentadas por este pesquisador.

O modelo ideal deve permitir o estudo do comportamento das estruturas protendidas externamente tanto em serviço como na ruptura. Na análise de vigas hiperestáticas, que é o objetivo deste trabalho, o modelo deve permitir seguir:

- os deslocamentos globais das vigas: flechas e rotações;
- a fissuração do concreto;
- as deformações das seções de concreto;
- as deformações das armaduras passivas;
- o comportamento dos cabos de protensão: sobretensão, deformações, deslizamentos sobre desviadores;
- as perdas de protensão imediatas e no tempo.

Para o estudo desses assuntos é preciso conhecer as deformações e tensões nas vigas, considerando o comportamento não-linear dos materiais aço e concreto. As normas de cálculo em geral dão uma atenção especial ao cálculo à ruptura porque protege a estrutura contra a ação das cargas últimas e evita assim a sua ruína. Infelizmente, o cálculo de estabilidade à ruptura não permite conhecer as deformações. Para suprir esta falta, efetua-se a análise do comportamento em elasticidade não-linear.

A análise de estruturas em regime não-linear é tema de pesquisa desde o século XIX. Muitos trabalhos teóricos e numéricos relativos a vigas foram publicados até hoje. Mais recentemente, em 1970 aparecem alguns trabalhos onde os autores utilizam elementos de viga com rigidez axial (EA) e flexional (EI) constantes para cada elemento. Neles os autores diferenciam entre centro de gravidade e centroíde de uma seção. O trabalho de GUNIN (1970) é um exemplo.

Dois anos depois MENEGOTTO (1972) e PINTO (1974) apresentam um método onde as não-linearidades materiais são tratadas num referencial móvel ligado a outro fixo. A não-linearidade geométrica é considerada durante a passagem do referencial móvel a outro fixo. A formulação para esta passagem é atribuída a JENNINGS (1968). O método de MENEGOTTO e PINTO faz a integração das deformações das seções obtendo assim uma matriz de flexibilidade, a qual, invertida, fornece a matriz de rigidez. GRELAT (1978), utiliza o mesmo critério. Ele, porém, considera a tração do concreto e introduz o efeito de "tension stiffening". Entretanto, outros pesquisadores apresentam trabalhos com uma matriz de rigidez analítica. As rigidezes EI e EA são as médias dos valores das diferentes seções do elemento. TELLES (1976) apresenta esta matriz para um elemento plano e MARTINS (1979) para um elemento espacial. Pode-se mencionar também o trabalho de TABORDA GARCIA (1974) para elementos planos.

No final dos anos setenta aparecem alguns trabalhos tratando das vigas protendidas. FERRARO-MAIA (1979) considera no seu trabalho os efeitos diferidos e a protensão interna. Os cabos tem um traço parabólico. Recentemente NAIT-RABAH (1990) tratou também a protensão interna usando um elemento finito de seis graus de liberdade. Ele faz a integração das deformações para obter a matriz de rigidez e usa função cúbica para o traçado dos cabos.

As bases para a consideração da protensão externa aparecem nos trabalhos de VIRLOGEUX (1983). No ano seguinte, M'RAD (1984) apresenta uma formulação para o cálculo de pontes isostáticas com cabos externos. Dois anos mais tarde, VIRLOGEUX e FOURÉ (1986) apresentam um trabalho sobre o comportamento das vigas isostáticas com aduelas pré-fabricadas.

Hoje, os pesquisadores que trabalham com protensão externa são muitos, o que pode ser verificado pelo número de trabalhos que foram apresentados sobre o tema nos últimos congressos de cálculo estrutural. Todos eles refletem a preocupação em encontrar um modelo teórico que permita uma boa interpretação dos fenômenos físicos que se apresentam nas estruturas sob ação das cargas. Um conhecimento mais profundo desses

fenômenos permitirá definir com regras mais gerais o comportamento, facilitando a elaboração de programas de computação mais confiáveis para o cálculo.

Seguindo esta determinação, esta pesquisa enquadra-se na linha dos trabalhos de MARTINS (1989). Ele apresenta a formulação de base para o estudo do comportamento dos cabos exteriores na modelagem até a ruptura em flexão de vigas de concreto com protensão externa ou mista. O referido autor se limita às vigas isostáticas. Sugeriu, porém, uma forma para resolver o problema hiperestático. Faz-se referência única porque MARTINS foi, aparentemente, o primeiro a tentar resolver o assunto aqui abordado: definir as equações de equilíbrio para o cálculo dos deslizamentos dos cabos sobre os desviadores. A bibliografia sobre o tema não é muito ampla. VIRLOGEUX (1988) apresenta uma tentativa de solução, mas não muito amadurecida. Os trabalhos publicados demonstram o interesse dos pesquisadores mas não apresentam novas formulações para o assunto. Este estudo pode ser considerado como uma continuação do trabalho de MARTINS.

O objetivo aqui é analisar o comportamento das vigas hiperestáticas com cabos exteriores. Tenta-se generalizar a formulação isostática. A partir desta generalização elabora-se os algoritmos necessários para o cálculo numérico. O programa de computação resultante (CARPE), escrito em linguagem FORTRAN, é capaz de prever o comportamento de uma viga. A sua performance é confrontada com a de outros programas de cálculo e seus resultados comparados com resultados experimentais.

Assim, objetivando alcançar o objetivo proposto, no capítulo 2 são definidas as hipóteses adotadas e as leis de comportamento dos materiais.

O capítulo 3 é uma revisão da formulação básica da elasticidade não-linear para uma seção. Mostra-se como chegar ao sistema de equações diferenciais que assegura o equilíbrio de uma seção. Apresenta-se também o método de resolução do dito sistema.

O capítulo 4 se refere à protensão externa. Fazem-se todas as considerações necessárias para reproduzir da forma mais apropriada possível o comportamento dos cabos externos.

O capítulo 5 relata a elaboração do programa de cálculo. Apresenta-se os algoritmos de cálculo assim como todas as técnicas utilizadas para obter os melhores resultados.

O capítulo 6 é dedicado aos exemplos de aplicação. São comparadas resultados experimentais e numéricos.

O capítulo 7 relata as conclusões tiradas e as propostas de continuação da pesquisa.

No final deste volume são apresentados três anexos. O anexo A apresenta as principais notações utilizadas no trabalho. O anexo B contém uma série de curvas que o programa CARPE fornece para a análise de comportamento local. O anexo C contém a bibliografia referenciada no texto.

CAPÍTULO 2

HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

2.1.- INTRODUÇÃO

O concreto armado ou protendido é um material composto. Cada componente tem comportamento não-linear. Nesta pesquisa são tratados dois tipos de não-linearidades: a não-linearidade física devida às variações nas propriedades dos materiais e a não-linearidade geométrica devida às variações de excentricidade dos cabos de protensão para uma seção fletida. Procura-se um método de cálculo que permita interpretar a todo momento a influência destas não-linearidades no comportamento do conjunto. A modelagem é feita dentro da teoria de análise não-linear.

O cálculo das estruturas em regime não-linear é uma formulação bem conhecida. Porém, dependendo do problema, os procedimentos de cálculo podem ser diferentes. O método aqui apresentado realiza o cálculo de uma viga hiperestática com protensão externa em dois tempos. Para uma etapa de carga dada faz-se:

- uma análise de cada seção da discretização. O equilíbrio é verificado considerando a contribuição de cada material na seção;

- um análise global da estrutura. A viga, em cada etapa de carga, adota uma nova configuração geométrica. Esta permite atualizar os parâmetros dos cabos (geometria e propriedades físicas). São considerados assim os efeitos da não-linearidade geométrica.

2.2.- HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

Esta pesquisa é uma análise plana para vigas hiperestáticas. Várias hipóteses são adotadas:

- as deformações e os deslocamentos são pequenos. Portanto pode-se relacionar os deslocamentos com as deformações pela expressão:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad (2.1)$$

- a hipótese de BERNOLLI-NAVIER é válida até a ruptura. A seção homogeneizada permanece plana e perpendicular à fibra média após a deformação da viga. Considera-se uma aderência aço-concreto perfeita;

- as curvas tensão-deformação dos materiais são as solicitações unidirecionais como será visto mais adiante;

- em termos de solicitações, considera-se a interação esforço normal-momento fletor sendo o objetivo principal o estudo a flexão. Porém, a influência do esforço cortante é desprezada;

- As cargas são estáticas, monotônicas e crescentes.

2.3.- ESTRUTURAS ANALISADAS

O método de cálculo é geral. A formulação permite o estudo do comportamento de vigas de concreto armado ou protendido com um dos três tipos de protensão: a interna, a qual pode ser aderente ou não; a externa, com os cabos presos ou não sobre os desviadores; a mista, que é uma combinação das duas primeiras. Nesta pesquisa trata-se especialmente o caso das vigas hiperestáticas protendidas com cabos exteriores. A combinação com cabos internos retos é também considerada.

Um cabo exterior, normalmente, tem vários trechos separados entre eles por desviadores. O programa permite o uso de um número qualquer de cabos simétricos dois a dois em relação ao eixo vertical da seção. Cada cabo pode ter características mecânicas próprias. No momento da protensão, a tensão no cabo é conhecida. Porém diminui de um trecho para outro. Esta diminuição é consequência das perdas. Consideram-se somente as perdas instantâneas que são próprias ao dispositivo de aplicação da protensão e à fricção dos cabos sobre os desviadores. Para o cálculo, estas perdas podem ser diminuídas da tensão inicial de cada trecho.

A protensão interna, na atual versão do programa desenvolvido, é dada com cabos internos retos. Ela exerce numa seção um esforço igual e de sentido contrário ao esforço de tração no cabo que é aderente ao concreto e trabalha como aço de reforço com pré-deformação em relação ao concreto.

2.4.- DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA

As estruturas aqui estudadas são vigas hiperestáticas. Considera-se que são formadas por um conjunto de "elementos de viga" unidos entre si pelos nós. Cada elemento tem dois nós e quatro graus de liberdade. As propriedades mecânicas de um elemento (rigidezes) são definidas como as médias dos valores das duas seções extremas do elemento. O comprimento dos elementos não atende a nenhuma regra fixa, porém é óbvio que a discretização deve depender da precisão que se queira nos resultados.

A seção típica que se considera tem um contorno poligonal. Admite-se também as seções vazadas com o mesmo tipo de contorno. A figura (2.1) mostra alguns tipos.

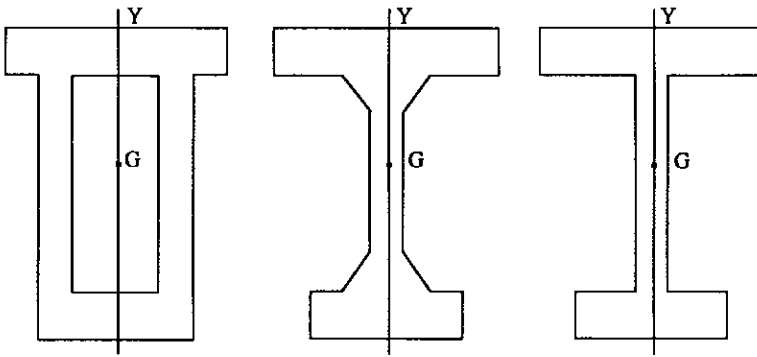


Fig. 2.1. Seções típicas

A seção é simétrica em relação ao eixo principal "Gy" situado no seu plano médio e é formada por um conjunto de trapézios. Estes são utilizados para o cálculo das propriedades geométricas da seção. Esta discretização corresponde à seção do concreto.

As armaduras passivas e ativas são consideradas como áreas concentradas nos centros de gravidade das barras ou dos cabos.

2.5.- LEI DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

Os materiais considerados nesta pesquisa são representados conforme citado por leis de comportamento uniaxiais considerando apenas o processo de carregamento (JACOBSEN, 1973; TELLES, 1976; MARTINS, 1979). Detalha-se a seguir os critérios adotados para a formulação destas leis.

2.5.1.- Concreto

2.5.1.1.- Concreto comprimido

O ensaio de uma amostra de concreto (um prisma ou um cilindro), permite traçar uma curva tensão axial-deformação axial parecida com aquela da figura (2.2). Esta curva representa a lei de comportamento do concreto não confinado. Está caracterizada por duas partes. A primeira é ascendente. Na origem seu módulo tangente é E_{c_0} . O ponto máximo corresponde à resistência a compressão σ_j do concreto. A outra parte é descendente. Vai do ponto máximo até o ponto (ϵ_u, σ_u) , o qual marca a ruptura do material. Nesta pesquisa, adota-se para a formulação a lei de SARGIN(1971), adotada pelo MC90 do CEB(1990)

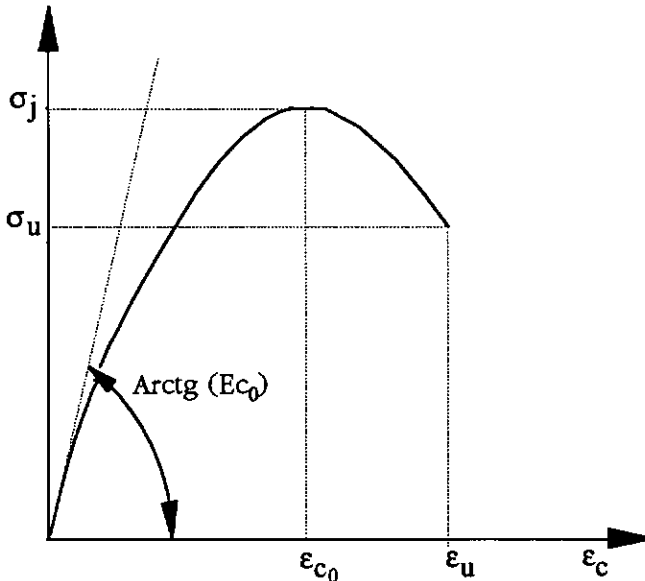


Fig. 2.2.- Lei de comportamento do concreto em compressão uniaxial

A tensão de compressão é dada por:

$$\sigma_c = \frac{k \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}}\right) + (k-1) \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}}\right)^2}{1 + (k-2) \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}}\right) + k' \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}}\right)^2} \quad (2.2)$$

onde:

$$k = E_{c0} \cdot \left(\frac{\epsilon_{c0}}{\sigma_j}\right) \quad (2.3)$$

E_{c0} : módulo de elasticidade na origem.

σ_j : resistência a compressão do concreto (a idade j de concretagem)

ϵ_{c0} : deformação correspondente a σ_j

k e k' : parâmetros adimensionais

O parâmetro k' influencia sobretudo a parte descendente da curva. Quando k' vale zero, o caimento é forte e caracteriza concretos frágeis. Para $k'=1$, a curva é mais chata e define concretos menos frágeis. Para considerar este efeito tem-se:

$$k' = k - 1 \quad \text{se } \sigma_j < 30 \text{ MPa} \quad (2.4.a)$$

$$k' = (k-1) \cdot \frac{(55 - \sigma_j)}{25} \quad 30 \text{ MPa} < \sigma_j < 50 \text{ MPa} \quad (2.4.b)$$

$$k' = 0 \quad \sigma_j > 50 \text{ MPa} \quad (2.4.c)$$

Para alguns cálculos, a parte descendente parabólica é substituída por uma reta. Então, a expressão que dá a tensão σ_c , para uma deformação ϵ_c compreendida entre ϵ_{c0} e ϵ_u é:

$$\sigma_c = \sigma_j \left[1 - \frac{(1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_j}) (\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}} - 1)}{(\frac{\epsilon_u}{\epsilon_{c0}} - 1)} \right] ; \quad \epsilon_{c0} < \epsilon_c < \epsilon_u \quad (2.5)$$

σ_u e ϵ_u são respectivamente a tensão e a deformação de ruptura.

2.5.1.2.- Concreto em tração

Conforme o modelo de flexão adotado, a tração pode ser considerada de duas formas diferentes. O equilíbrio da seção flexionada é analisado em termos de deformações médias ou em termos de deformações locais. A análise em termos de deformações locais apresenta muitas questões ainda sem respostas. (MARTINS, 1989). Adotou-se para a modelagem a primeira forma através de um diagrama fictício. Este diagrama dá a contribuição média do concreto tracionado entre duas fissuras sucessivas na rigidez do elemento. É o efeito "Tension Stiffening". As proposições para definir o tipo deste diagrama são muitas (GILBERT & WARNER, 1978; ESPION/QUAST, 1986). Retém-se a proposição de GRELAT (1978). Sua formulação atribui à zona tracionada de uma seção qualquer uma distribuição linear das tensões (figura 2.3).

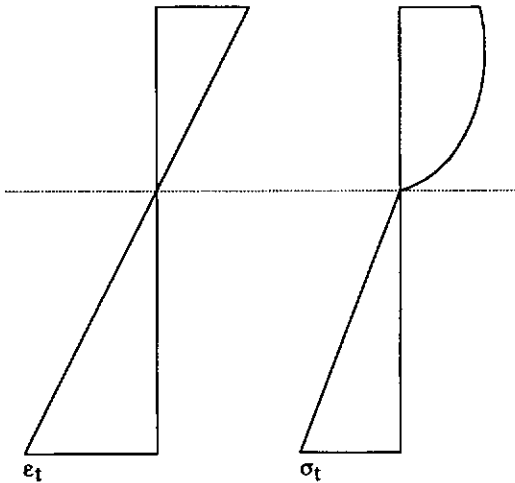


Fig. 2.3 Diagrama fictício da distribuição de tensão de tração no concreto

A tensão de tração σ_t da fibra mais tracionada cresce proporcionalmente à deformação correspondente ϵ_t até um ponto (ϵ_{ct}, f_{ctj}) a partir do qual decresce com uma

lei parabólica. Admite-se que a contribuição do concreto em tração desaparece quando a deformação máxima atinge o limite de elasticidade do aço mais tracionado (figura 2.4).

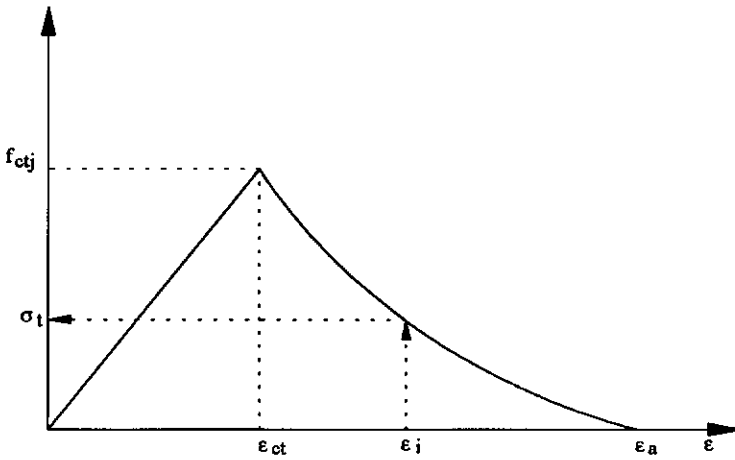


Fig. 2.4 Diagrama $\sigma-\epsilon$ para o concreto em tração.

$$\sigma_t = E_{c0} \cdot \epsilon_i \quad \text{para } 0 < \epsilon_i < \epsilon_{ct} \quad (2.5.b)$$

$$\sigma_t = f_{ctj} \cdot \left[\frac{(\epsilon_a - \epsilon_i)}{(\epsilon_a - \epsilon_{ct})} \right]^2 \quad \epsilon_{ct} < \epsilon_i < \epsilon_a \quad (2.5.b)$$

$$\sigma_t = 0 \quad \epsilon_a < \epsilon_i \quad (2.5.c)$$

sendo:

f_{ctj} : resistência a tração do concreto

ϵ_{ct} : deformação correspondente a f_{ctj}

ϵ_a : limite de elasticidade longitudinal do aço mais tracionado

E_{c0} : módulo de elasticidade longitudinal do concreto na origem

2.5.2.- Aço

Conforme a modelagem distinguem-se:

- os aços passivos para reforço (concreto armado);
- os aços ativos para protensão (concreto protendido).

Para os dois grupos nota-se:

σ_r : tensão de ruptura

σ_e : limite de elasticidade para uma deformação de 2‰ ou 1‰

E_a : módulo de elasticidade longitudinal

2.5.2.1.- Aços passivos

Os aços aqui considerados para armadura passiva são de dois tipos:

- aços laminados a quente;
- aços deformados a frio (encruados).

Os aços laminados a quente apresentam, com relação a tensão-deformação, um comportamento conforme a lei elasto-plástica mostrada na figura (2.5).

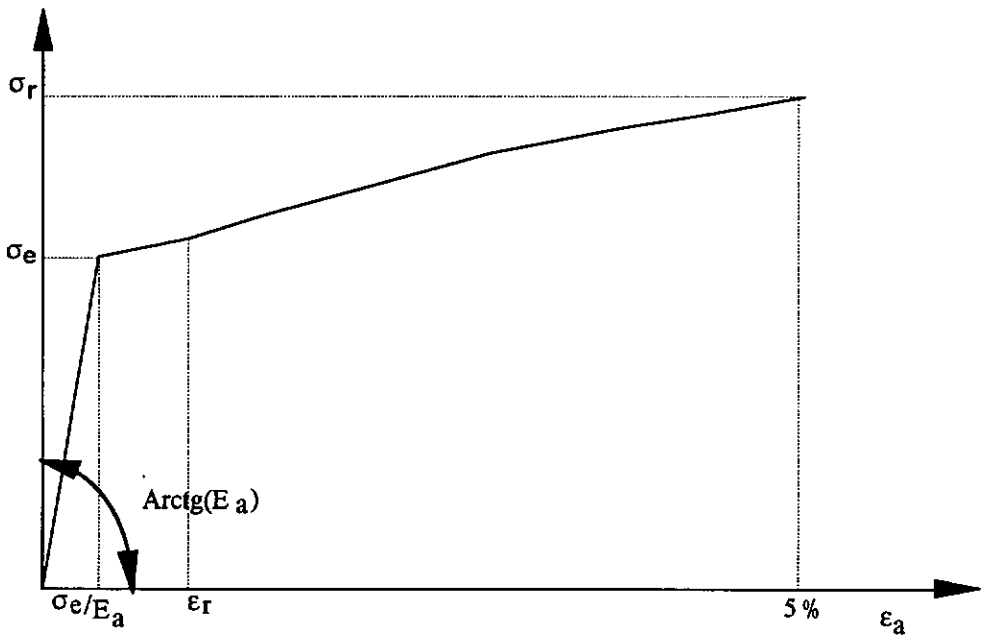


Fig. 2.5. Diagrama $\sigma - \epsilon$ para o aço natural

$$\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon_a \quad \text{para} \quad 0 < \varepsilon_a < \sigma_c/E_a \quad (2.6.a)$$

$$\sigma_a = \sigma_c \quad \sigma_c/E_a < \varepsilon_a < \varepsilon_r \quad (2.6.b)$$

$$\sigma_a = \sigma_c + \sigma_r \cdot \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_r)}{(0.05 - \varepsilon_r)} \cdot \left[.002 - \frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_r)}{(0.05 - \varepsilon_r)} \right]; \quad \varepsilon_a > \varepsilon_r \quad (2.6.c)$$

ε_r : deformação no final do patamar plástico (5 a 10%)

Também apresenta-se na figura (2.6) uma lei para o comportamento elasto-plástico perfeito destes aços.

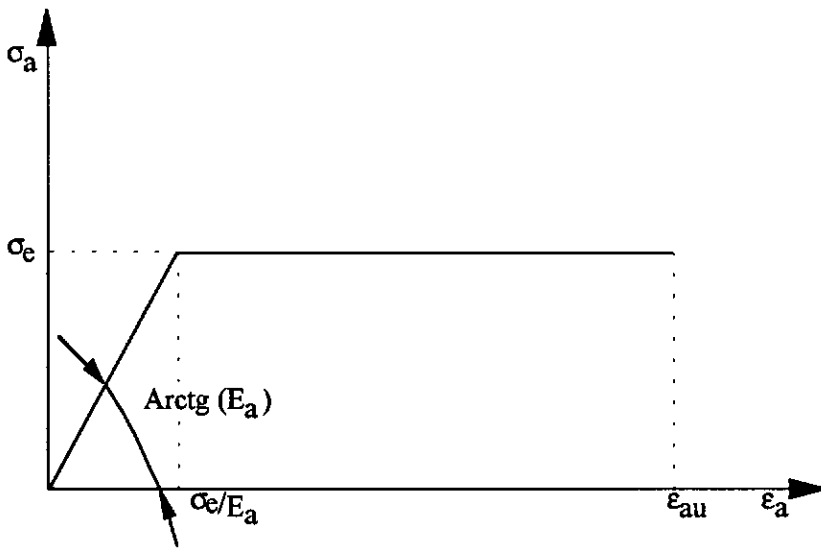


Fig. 2.6 Diagrama elasto-plástico perfeito

Os aços deformados a frio mostram um comportamento não-linear a partir do limite de 70% da tensão de escoamento convencional, sendo 2‰ a deformação residual correspondente a σ_c , figura (2.7). A norma brasileira NBR-7187 recomenda as seguintes fórmulas para a lei constitutiva do material.

$$\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon_a \quad \text{para} \quad 0 < \sigma_a < \sigma_r \quad (2.7.a)$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c} - \beta \right)^5 \quad \text{para } \sigma_a > \sigma_l \quad (2.7.b)$$

Usualmente adota-se $\alpha = 0.823$ e $\beta = 0.70$

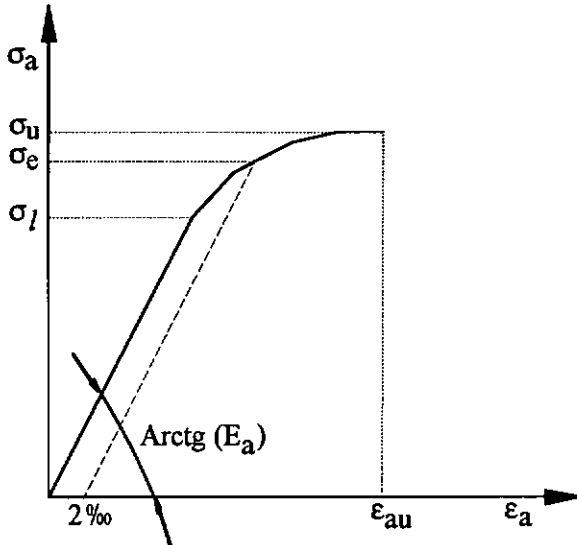


Fig. 2.7. Diagrama $\sigma - \varepsilon$ para aços encruados

2.5.2.2.- Aços ativos

O comportamento das armaduras de protensão pode ser definido com um diagrama parecido ao dos aços encruados. A parte linear vai até $\sigma_l = 0.9 \cdot \sigma_s$ e a deformação residual é 1‰. As fórmulas são:

$$\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p \quad \text{para } 0 < \sigma_p < \sigma_l \quad (2.8.a)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_c} - \beta \right)^5 \quad \text{para } \sigma_p > \sigma_l \quad (2.8.b)$$

Normalmente toma-se $\alpha = 100$ e $\beta = 0.90$

Tanto para os aços encruados como para os aços de protensão, a tensão é calculada por aproximações sucessivas, uma vez que o que se conhece inicialmente é a deformação ϵ_a ou ϵ_p .

CAPÍTULO 3

EQUILÍBRIO DE UMA SEÇÃO EM ANÁLISE NÃO-LINEAR

3.1.- INTRODUÇÃO

Submetida a um par de solicitações normais externas (N_{ext} , M_{ext}), próximas aos valores últimos, uma seção de concreto armado ou protendido fatura e plastifica. Através das deformações obtém-se os esforços internos que permitem equilibrar as solicitações externas. A deformação de uma fibra situada a uma distância y do centro de gravidade da seção homogeneizada é dada por (figura 3.1):

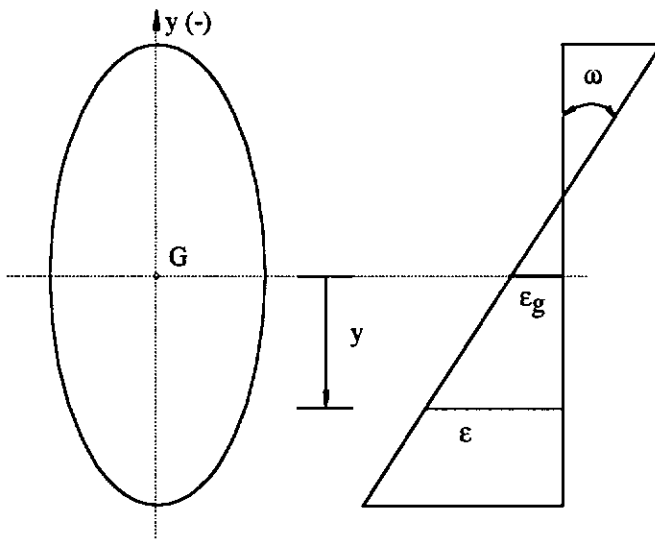


Fig. 3.1 Estado de deformação de uma seção transversal

$$\epsilon = \epsilon_g + \omega \cdot y \quad (3.1)$$

ϵ_g : deformação no centro de gravidade

ω : curvatura da seção

Na análise de uma seção, as mesmas grandezas - deformações e esforços - são avaliadas para os diferentes materiais. Para evitar confusão, em todo o trabalho, um índice "c" refere-se ao concreto, um "a" ao aço de reforço e um "p" ao aço de protensão. Quando se tratam de posições, um índice "g" refere-se ao centro de gravidade da seção homogeneizada.

Para a convenção de sinais, o critério é o mesmo que se encontra na literatura referente ao assunto:

- as deformações são positivas no sentido dos encurtamentos (compressão), negativas no sentido dos alongamentos (tração);

- em geral, um momento é positivo quando produz uma compressão no bordo superior da seção;

- a excentricidade dos cabos de protensão em relação ao centro de gravidade é considerada positiva para baixo.

3.2.- CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS

Em elasticidade linear, a tensão é dada por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ε é a deformação definida pela equação (3.1).

Portanto:

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon_g + \omega \cdot y) \quad (3.3)$$

Um estado de deformação (ε_g, ω) produz um par de esforços internos (N_{int}, M_{int}) , os quais se escrevem:

$$N_{int} = \int_A \sigma \cdot dA \quad (3.4.a)$$

$$M_{int} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \quad (3.4.b)$$

substituindo σ na equação (3.4) e desenvolvendo temos:

$$N_{int} = E \cdot \varepsilon_g \cdot \int_A dA + E \cdot \omega \cdot \int_A y \cdot dA \quad (3.5.a)$$

$$M_{int} = E \cdot \varepsilon_g \cdot \int_A y \cdot dA + E \cdot \omega \cdot \int_A y^2 \cdot dA \quad (3.5.b)$$

Estas duas equações podem ser escritas sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_{int} \\ M_{int} \end{Bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & y^2 \end{bmatrix} \cdot E \cdot dA \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} N_{int} \\ M_{int} \end{Bmatrix} = [\Phi] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde Φ é um operador de transformação.

3.3.- DEFINIÇÃO DO OPERADOR Φ E DA APLICAÇÃO LINEAR χ

Fazendo $\sigma = \chi(\varepsilon)$, a tensão torna-se uma função qualquer da deformação dentro de um certo intervalo $[-\varepsilon_n, \varepsilon_{rc}]$, sendo $-\varepsilon_n$ e ε_{rc} as deformações de tração e de compressão máximas admitidas. É possível definir um operador Φ que permite passar das deformações (ε_g, ω) aos esforços internos $[N_{int}(\varepsilon_g, \omega), M_{int}(\varepsilon_g, \omega)]$ conforme as seguintes expressões:

$$N_{int}(\varepsilon_g, \omega) = \int_A \chi(\varepsilon) \cdot dA \quad (3.8.a)$$

$$M_{int}(\varepsilon_g, \omega) = \int_A \chi(\varepsilon) \cdot y \cdot dA \quad (3.8.b)$$

No item 3.2 foi visto que $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Isto permite definir um módulo tangente:

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \quad (3.9)$$

Supondo-se $\chi(\epsilon)$ derivável por partes dentro de seu intervalo de definição, pode-se expressar o módulo de elasticidade como uma função da deformação.

$$E(\epsilon) = \frac{\partial \chi(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \chi(\epsilon)}{\partial(\epsilon_g, \omega)} \quad (3.10)$$

As derivadas parciais de $\chi(\epsilon)$ são:

$$\frac{\partial \chi(\epsilon)}{\partial \epsilon_g} = \frac{\partial \chi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_g} = E(\epsilon) \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_g} = E(\epsilon) \quad (3.11.a)$$

$$\frac{\partial \chi(\epsilon)}{\partial \omega} = \frac{\partial \chi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} = E(\epsilon) \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} = E(\epsilon) \cdot y \quad (3.11.b)$$

Escrevem-se agora as derivadas parciais das equações (3.8), utilizando as equações (3.11)

$$\frac{\partial N_{int}(\epsilon_g, \omega)}{\partial \epsilon_g} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_g} \int_A \chi(\epsilon) \cdot dA = \int_A E(\epsilon) \cdot dA \quad (3.12.a)$$

$$\frac{\partial N_{int}(\epsilon_g, \omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_A \chi(\epsilon) \cdot dA = \int_A E(\epsilon) \cdot y \cdot dA \quad (3.12.b)$$

$$\frac{\partial M_{int}(\epsilon_g, \omega)}{\partial \epsilon_g} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_g} \int_A \chi(\epsilon) \cdot y \cdot dA = \int_A E(\epsilon) \cdot y \cdot dA \quad (3.12.c)$$

$$\frac{\partial M_{int}(\epsilon_g, \omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_A \chi(\epsilon) \cdot y \cdot dA = \int_A E(\epsilon) \cdot y^2 \cdot dA \quad (3.12.d)$$

Estas quantidades definem uma aplicação tangente no ponto (ε_g, ω) do espaço vetorial das deformações. Portanto, para todo estado de deformação admissível (ε_g, ω) , ϕ pode ser substituída pela aplicação linear ϕ_t :

$$\phi_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_g} & \frac{\partial N_{int}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_g} & \frac{\partial M_{int}}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & y^2 \end{bmatrix} \cdot E(\varepsilon) \cdot dA \quad (3.13)$$

3.4.- CÁLCULO PRÁTICO DOS ESFORÇOS INTERNOS

Os esforços internos são desenvolvidos para o estado de deformação (ε_g, ω) na parte resistente da seção de concreto, nos aços passivos e nos aços de protensão interna aderente. A parte resistente do concreto refere-se a toda fibra cuja deformação permanece dentro do intervalo $[-\varepsilon_{rc}, \varepsilon_{tc}]$. Para um estado de deformação (ε_g, ω) as expressões que dão os esforços internos são:

$$N_{int}(\varepsilon_g, \omega) = \int_{A_c} \chi_c(\varepsilon_g + \omega \cdot y_c) \cdot dA + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \cdot \chi_a(\varepsilon_g + \omega \cdot y_{aj}) - \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot \chi_p(\varepsilon_g + \omega \cdot e_{pk}) \quad (3.14)$$

$$M_{int}(\varepsilon_g, \omega) = \int_A \chi_c(\varepsilon_g + \omega \cdot y_c) \cdot y_c \cdot dA + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \cdot \chi_a(\varepsilon_g + \omega \cdot y_{aj}) \cdot y_{aj} - \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot \chi_p(\varepsilon_g + \omega \cdot e_{pk}) \cdot e_{pk} \quad (3.15)$$

onde

n_a : número de camadas de aço passivo

n_p : número de camadas de aço de protensão

A_{aj} : área de cada camada de aço passivo

A_{ap} : área de cada camada de aço de protensão

Como indicou-se no item 2.5.2, no caso dos aços de protensão, as tensões são calculadas a partir das deformações por aproximações sucessivas.

3.5.- CÁLCULO PRÁTICO DA MATRIZ ϕ_t

Pela equação (3.13) tem-se:

$$\phi_t = \int_A \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & y^2 \end{bmatrix} \cdot E(\epsilon) \cdot dA$$

Avaliando cada termo da mesma equação obtém-se:

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_g} = \int_{A_c} E_c(\epsilon) \cdot dA_c + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \cdot E_a(\epsilon) + \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot E_p(\epsilon) \quad (3.15.a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \omega} = \frac{\partial M}{\partial \epsilon_g} = \int_{A_c} E_c(\epsilon) \cdot y_c \cdot dA_c + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \cdot E_a(\epsilon) \cdot y_{aj} + \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot E_p(\epsilon) \cdot e_{pk} \quad (3.15.b)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \omega} = \int_{A_c} E_c(\epsilon) \cdot y_c^2 \cdot dA_c + \sum_{j=1}^{n_a} A_{aj} \cdot E_a(\epsilon) \cdot y_{aj}^2 + \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot E_p(\epsilon) \cdot e_{pk}^2 \quad (3.15.c)$$

A seção de concreto é discretizada em trapézios. Para resumir a expressão de ϕ_t chama-se A_i uma porção de área de qualquer um dos materiais, E_i o seu módulo de elasticidade tangente e y_i a sua ordenada em relação ao eixo passando pelo centro de gravidade da seção:

$$\phi_t = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i & \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^n A_i \cdot E_i \cdot y_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.6.- EQUILÍBRIO DE UMA SEÇÃO

Num primeiro tempo verifica-se o equilíbrio das seções, uma por uma. O problema consiste em equilibrar as solicitações externas. Estas solicitações incluem vários efeitos:

- peso próprio
- sobrecarga
- protensão

O método de avaliação desses efeitos é apresentado no capítulo 5, reservado aos algoritmos de cálculo. Agora considera-se um par de esforços solicitantes conhecidos (N, M) definidos por:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{\text{ext}} + \sum_{k=1}^{n_p} P_k \\ M_{\text{ext}} + \sum_{k=1}^{n_p} P_k \cdot e_{pk} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

sendo (N, M) os esforços totais incluindo a protensão externa. O desequilíbrio entre (N, M) e (N_{int}, M_{int}) para um par arbitrado produz uma variação de deformação na seção. O que leva a resolver por aproximações sucessivas a equação (3.18) para obter o par que torna (N, M) igual a (N_{int}, M_{int}) dentro da tolerância adotada para o problema:

$$\begin{Bmatrix} N - N_{\text{int}} \\ M - M_{\text{int}} \end{Bmatrix} = [\phi_t] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_g \\ \Delta \omega \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

O princípio do método de cálculo é de partir de uma estimativa inicial das deformações, convenientemente escolhida. Seja, por exemplo, aquela deduzida das características mecânicas da seção.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_g = \frac{1}{E_c \cdot A_c} \cdot \left(N_{ext} + \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot E_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{a0k} \right) \\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{E_c \cdot I_c} \cdot \left(M_{ext} + \sum_{k=1}^{n_p} A_{pk} \cdot E_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{a0k} \cdot e_{pk} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo:

E_c , A_c , I_c o módulo de elasticidade, a área e a inércia da seção bruta de concreto
 $\boldsymbol{\varepsilon}_{a0k}$: pré-deformação do cabo k .

Os esforços internos de uma iteração i são obtidos somando o incremento de esforços produzidos pelo incremento de deformação aos esforços da iteração anterior. Ou seja, para uma etapa de carga j , os esforços internos das iterações $(i-1)$ e i estão ligados pela equação:

$$\begin{Bmatrix} N_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_i}, \boldsymbol{\omega}_i) \\ M_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_i}, \boldsymbol{\omega}_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}}, \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \\ M_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}}, \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \end{Bmatrix} + [\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}}, \boldsymbol{\omega}_{i-1})] \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{g_i} - \boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}} \\ \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_{i-1} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Fazendo:

$$\begin{cases} N_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_i}, \boldsymbol{\omega}_i) = N \\ M_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_i}, \boldsymbol{\omega}_i) = M \end{cases} \quad (3.24)$$

e substituindo na equação (3.23), tem-se uma fórmula de recorrência:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{g_i} \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} \end{Bmatrix} + [\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}}, \boldsymbol{\omega}_{i-1})]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} N - N_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}}, \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \\ M - M_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}_{g_{i-1}}, \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Considera-se equilibrada uma etapa quando a precisão no cálculo das deformações ou dos esforços satisfaz às tolerâncias pré-fixadas. A figura (3.2) mostra um fluxograma para o equilíbrio de uma seção.

Em cada etapa, depois de verificar o equilíbrio de todas as seções, deve-se fazer um estudo global sobre toda a viga. Calculam-se as flechas e as rotações considerando a participação do sistema de forças auto-equilibradas gerado pela excentricidade e mudança de direção dos cabos externos de protensão. O capítulo 4 trata todos os elementos necessários para o estudo global.

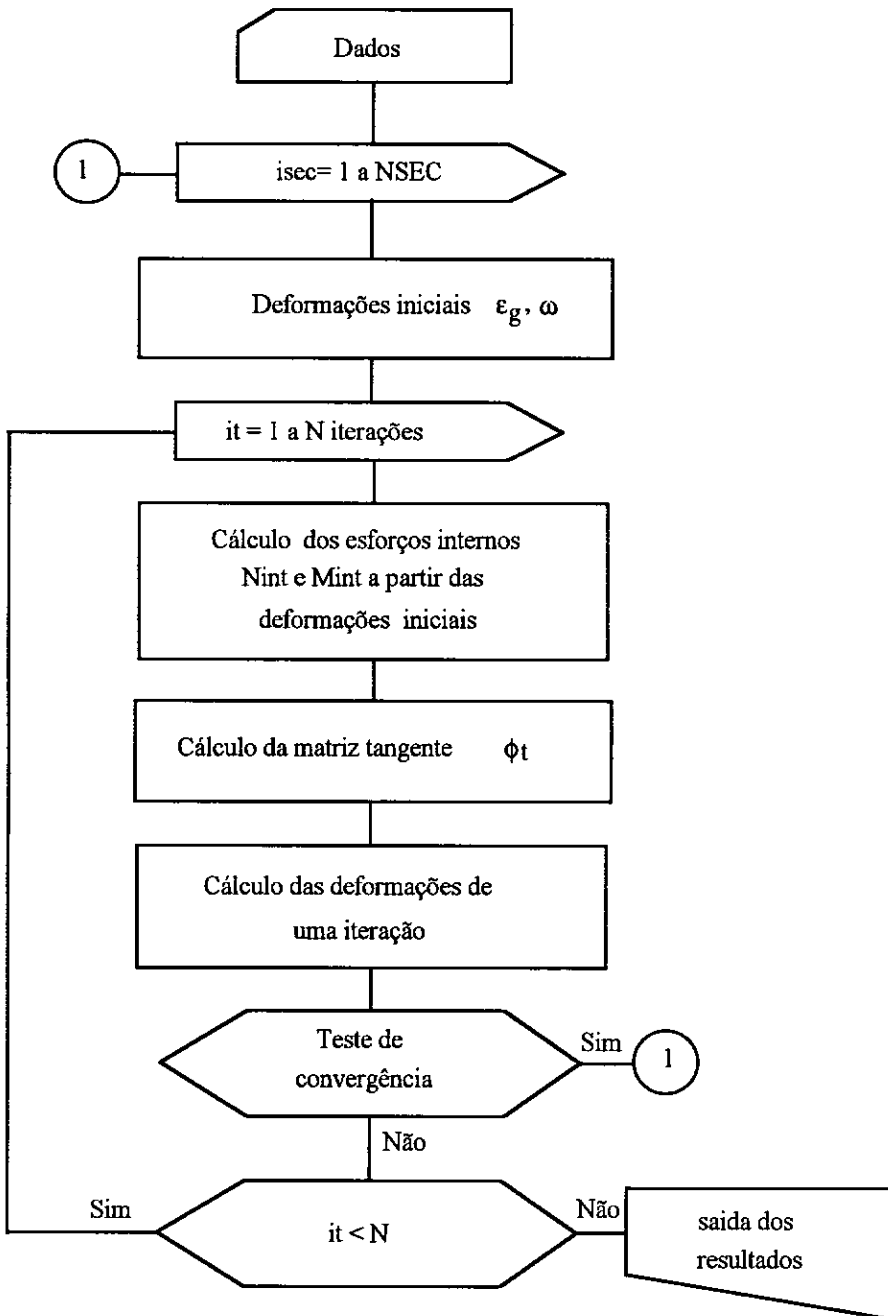


Fig. 3.2.- Fluxograma para o equilíbrio de uma seção

CAPÍTULO 4

PROTENSÃO EXTERNA - ESTUDO GLOBAL

4.1.- INTRODUÇÃO

Uma viga protendida com cabo interior tem um comportamento diferente de quando protendida com cabo exterior. Diferentes aspectos devem ser considerados para a modelagem do cabo em cada caso.

O cálculo estrutural de uma viga com protensão externa impõe algumas verificações específicas que fogem aos métodos tradicionais de análise das vigas com protensão interna aderente. Neste capítulo são analisados os aspectos fundamentais para o cálculo à ruptura de uma estrutura protendida com cabos externos (VIRLOGEUX, 1983; MARTINS, 1989). Em alguns casos apresenta-se também o cálculo clássico de uma viga protendida com cabos internos para apreciar as diferenças. Analisa-se, para as duas vigas, a expressão das variações de deformação e de força dos cabos de protensão. No caso específico da protensão externa, são analisadas a variação de excentricidade dos cabos e a possibilidade de deslizamento dos cabos sobre desviadores.

4.2.- CABO INTERNO ADERENTE

No caso dos cabos interiores aderentes, figura (4.1), as deformações são consideradas iguais no concreto e no cabo situado no mesmo nível.



Fig. 4.1.- Viga isostática com cabo interno aderente

A hipótese de BERNOLLI-NAVIER é admitida como válida para todo o domínio de comportamento e as variações de deformação de uma fibra ao nível do cabo de uma seção genérica são dadas por:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_g + \Delta \omega \cdot e \quad (4.1)$$

O equilíbrio é feito seção a seção. As variações da força de protensão interna, ΔP , são ligadas às da deformação da seção. Para uma variação (ΔN , ΔM) dos esforços solicitantes tem-se:

$$\begin{cases} \Delta N = \Delta P \\ \Delta M = \Delta P \cdot e(x) + \Delta M_{ext}(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

O que implica:

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_g = \frac{\Delta N}{E_c \cdot A_c} = \frac{\Delta P}{E_c \cdot A_c} \\ \Delta \omega = \frac{\Delta M}{E_c \cdot I_c} = \frac{\Delta P \cdot e(x) + \Delta M_{ext}(x)}{E_c \cdot I_c} \end{cases} \quad (4.3)$$

A variação de força está ligada à deformação da seção pela relação:

$$\Delta \varepsilon_p = -\Delta \varepsilon \quad (4.4)$$

ou seja:

$$\Delta P = A_p \cdot E_p \cdot \Delta \varepsilon_p = -A_p \cdot E_p \cdot (\Delta \varepsilon_g + \Delta \omega \cdot e(x)) \quad (4.5)$$

Substituindo $\Delta\varepsilon_g$ e $\Delta\omega$ da equação (4.3) na equação (4.5):

$$\Delta P = -A_p \cdot E_p \cdot \frac{e(x) \cdot \frac{\Delta M_{ext}(x)}{E_c \cdot I_c}}{\left[1 + \frac{A_p \cdot E_p}{E_c \cdot A_c} + \frac{A_p \cdot E_p}{E_c \cdot I_c} \cdot e^2(x) \right]} \quad (4.6)$$

4.3.- CABO EXTERNO FIXO TRANSVERSALMENTE E SEM ATRITO

É um caso totalmente teórico, difícil de reproduzir em laboratório. Seja um cabo exterior mantido fixo em cada seção. Admite-se que não existe nenhum atrito entre o cabo e as ligações com a viga (figura 4.2).

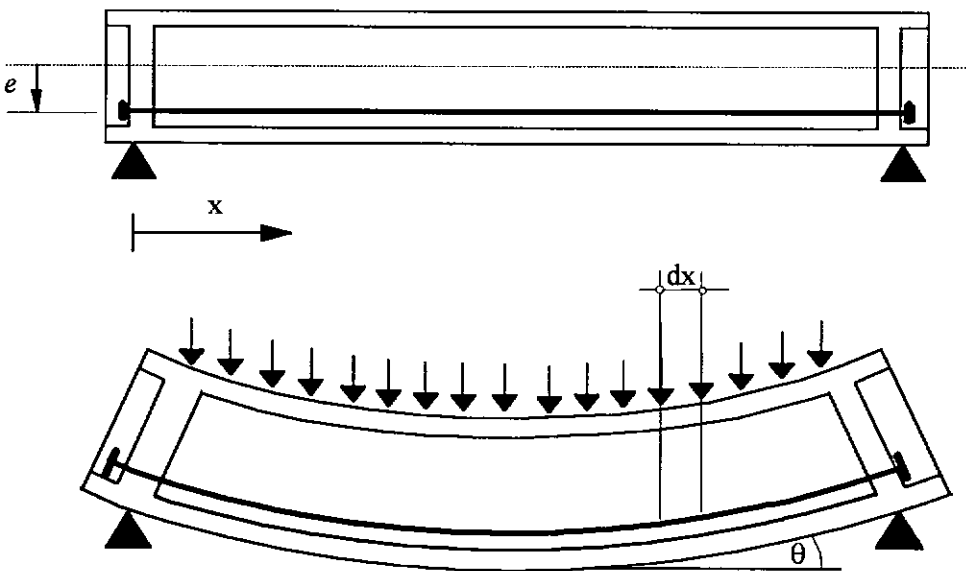


Fig. 4.2.- Cabo exterior sem atrito fixo transversalmente em cada seção

Não há aderência entre concreto e aço. A seção do cabo é constante e conseqüentemente a variação de tensão é uniforme em função do alongamento total do cabo. A deformação do concreto numa seção qualquer, na altura do cabo, é dada conforme a equação (3.1):

$$\varepsilon = \varepsilon_g + \omega \cdot e \quad (4.7)$$

Porém, a variação de alongamento é dado por:

$$d\Delta l = - \frac{(\varepsilon_g + \omega \cdot e)}{\cos \theta} \cdot dx \quad (4.8)$$

onde θ é o ângulo na seção entre a tangente ao cabo e uma reta horizontal. Por outro lado:

$$dl = \frac{dx}{\cos \theta} \quad (4.9)$$

ou seja

$$l = \int_A^B \frac{dx}{\cos \theta} \quad (4.10)$$

l : comprimento do cabo

integrando a equação (4.8) temos:

$$\Delta l = - \int_A^B \frac{(\varepsilon_g + \omega \cdot e)}{\cos \theta} \cdot dx \quad (4.11)$$

A deformação média é:

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{\Delta l}{l} = \frac{- \int_A^B \frac{(\varepsilon_g + \omega \cdot e)}{\cos \theta} \cdot dx}{\int_A^B \frac{dx}{\cos \theta}} \quad (4.12)$$

Considerando-se θ muito pequeno, $\cos \theta$ pode ser assumido igual à unidade e:

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{\Delta l}{l} = - \frac{1}{l} \int_A^B (\varepsilon_g + \omega \cdot e) \cdot dx \quad (4.13)$$

O cabo tem uma excentricidade $e(x)$ em cada seção. A viga é submetida ao mesmo par $(\Delta N, \Delta M)$ considerado para a protensão interna em cada seção. Neste caso a variação da força do cabo está ligada ao seu alongamento global, conforme a equação (4.13):

$$\Delta P = A_p \cdot E_p \cdot \epsilon_p \quad (4.14)$$

$$\Delta P = - \frac{A_p \cdot E_p}{l} \cdot \int_0^l (\Delta \epsilon_s + \omega \cdot e) \cdot dx \quad (4.15)$$

substituindo $\Delta \epsilon_s$ e $\Delta \omega$ pelos valores da equação (4.3) tem-se:

$$\Delta P = - \frac{A_p \cdot E_p}{l} \cdot \int_0^l \left[\frac{\Delta P}{E_c \cdot A_c} + \frac{\Delta P}{E_c \cdot I_c} \cdot e(x) + \frac{\Delta M_{ext}(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} \right] dx \quad (4.16)$$

O que implica:

$$\Delta P = - A_p \cdot E_p \cdot \frac{\frac{1}{l} \int_0^l \frac{\Delta M_{ext}(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} \cdot dx}{1 + \frac{A_p \cdot E_p}{l} \int_0^l \left[\frac{1}{E_c \cdot A_c} + \frac{e^2(x)}{E_c \cdot I_c} \right] \cdot dx} \quad (4.17)$$

Para um cabo reto e uma seção constante:

$$\Delta P = - A_p \cdot E_p \cdot \frac{\frac{e}{E_c \cdot I_c} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l \Delta M_{ext}(x) \cdot dx}{1 + \frac{A_p \cdot E_p}{E_c \cdot A_c} + \frac{A_p \cdot E_p}{E_c \cdot I_c} \cdot e^2} \quad (4.18)$$

A variação de força para um cabo interior é função da variação de momento na seção. Porém, para um cabo exterior, ela varia em função da variação média do momento para toda a viga.

4.4.- CABO EXTERIOR LIVRE TRANSVERSALMENTE

Neste caso a variação do comprimento do cabo não é mais igual ao da fibra de concreto inicialmente ao seu nível, figura (4.3).



Fig.4.3.- Viga isostática com protensão externa

O comprimento do cabo, para uma variação de carregamento, é dado pela posição que seus pontos de fixação assumem após a deformação da peça. A figura (4.4) apresenta um trecho de um cabo. Sejam H e I os pontos extremos do trecho. Esses pontos passam às posições H' e I' em consequência dos deslocamentos que eles sofrem. O trecho de comprimento inicial l_0 tem, numa etapa j, um comprimento l_j . Conforme as notações da figura (4.4) H(X_H, Y_H) passa à posição H'($X_{H'}, Y_{H'}$) sendo

$$X_{H'} = X_H + \omega_H \cdot \overline{HG_H}$$

e como ω_H é pequeno $\cos(\omega_H) = 1$, o que permite escrever

$$Y_H = \overline{H'G'_H} \cdot \cos \omega_H = \overline{HG_H}$$

Portanto

$$Y_{H'} = Y_H + v_H$$

$$l_j = \sqrt{(X_{I'} - X_{H'})^2 + (Y_{I'} - Y_{H'})^2} \quad (4.19)$$

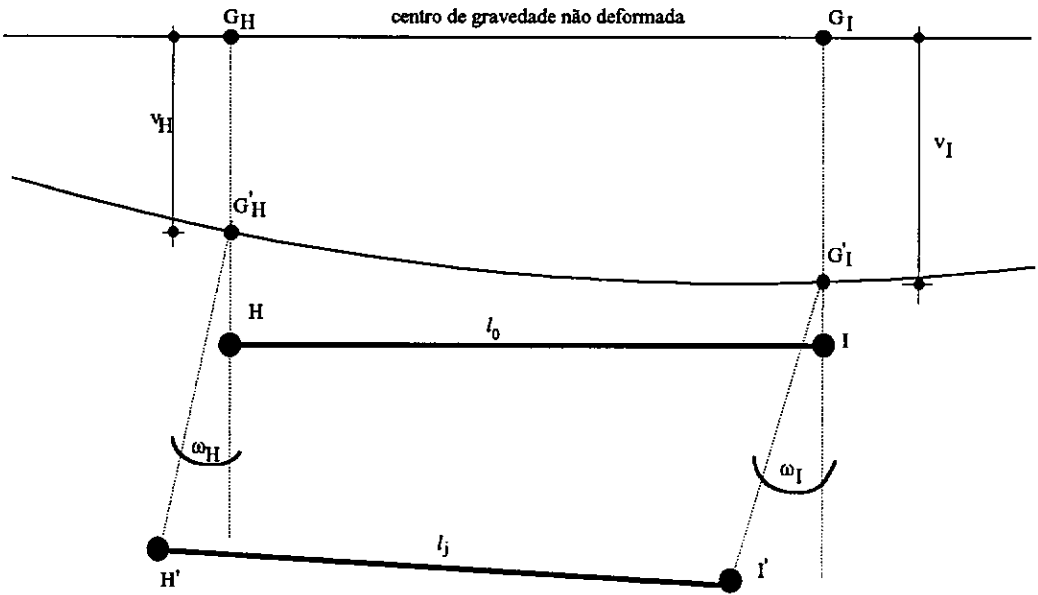


Fig. 4.4.- Nova posição dos pontos de um cabo

O trecho de cabo sofre uma deformação e conseqüentemente uma variação de tensão:

$$\Delta \epsilon_p = \frac{l_j - l_0}{l_0} \quad (4.20)$$

o que implica

$$\Delta \sigma_p = \chi(\Delta \epsilon_p) \quad (4.21)$$

assim

$$\sigma_p = \sigma_{p0} + \Delta \sigma_p \quad (4.22)$$

4.5.- VARIAÇÃO DE EXCENTRICIDADE DO CABO

No caso do cabo livre transversalmente, aparece um efeito de segunda ordem que não existia quando o cabo era coagido a acompanhar a deformada da viga. A excentricidade e do cabo varia com a deformação da viga $v(x)$. Em toda seção transversal, o momento passa a ser dado por:

$$M(x) = M_{\text{ext}} + P \cdot (e_0 - v(x)) \quad (4.23)$$

A quantidade $(e_0 - v(x))$ é a nova excentricidade do cabo na seção. Para uma viga isostática é simples determinar a equação $v(x)$. Porém, não ocorre o mesmo para as vigas hiperestáticas onde se deve considerar as variações de rigidez ao longo das peças. MARTINS (1989), fazendo referência a FARGEOT & JARTOUX (1984) e COMBAULT (1986) atualiza a excentricidade dos cabos a partir das flechas obtidas para a viga no final da etapa anterior. Tudo se resume em algumas considerações geométricas. A figura (4.5) mostra um trecho de cabo preso ao concreto nos pontos H e I.

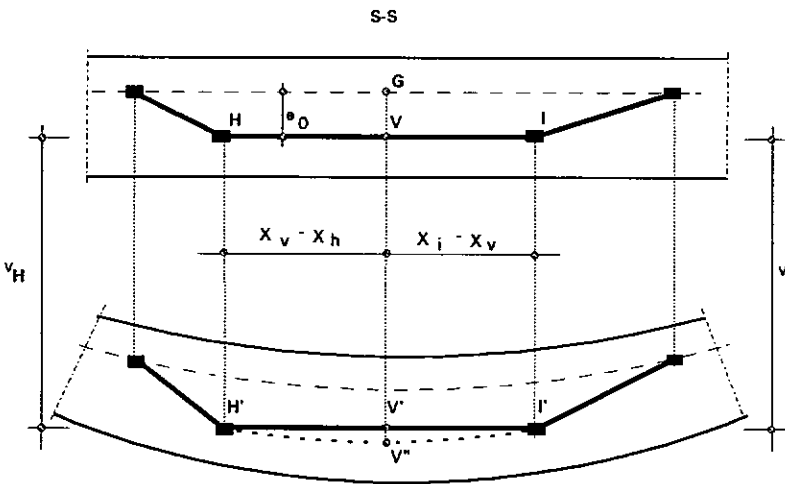


Fig 4.5.- Nova configuração de um cabo

Quando um carregamento produz uma flexão da viga, cada ponto passa a ocupar uma nova posição no espaço. Há um movimento relativo entre cabo e concreto. Analisa-se a situação de um ponto V tomado sobre o cabo numa seção s-s. Sejam v_H e v_I as flechas obtidas para os pontos H e I na etapa anterior. Estes pontos passam às posições H' e I'.

O ponto V do cabo passa à posição V' e sua distância ao centro de gravidade inicial não deformado é:

$$\overline{GV'} = e_0 + v_H \cdot \frac{(X_I - X_V)}{(X_I - X_H)} + v_I \cdot \frac{(X_V - X_H)}{(X_I - X_H)} \quad (4.24)$$

Mas, se V fosse um ponto da viga, passaria à posição V'', cuja distância ao centro de gravidade não deformado é, sendo v_v a flecha do ponto V:

$$\overline{GV''} = e_0 + v_v \quad (4.25)$$

O movimento relativo entre cabo e concreto é a diferença ($\overline{GV''} - \overline{GV'}$):

$$v_r = v_v - \left[\frac{v_H \cdot (X_I - X_V) + v_I \cdot (X_V - X_H)}{(X_I - X_H)} \right] \quad (4.26)$$

A nova excentricidade do cabo em s-s é então:

$$e = e_0 - v_r \quad (4.27)$$

4.6.- DETERMINAÇÃO DOS DESLIZAMENTOS SOBRE OS DESVIADORES

A variação de tensão é diferente para cada trecho. No ponto de ligação de dois trechos, devem-se equilibrar duas forças que não são necessariamente iguais. Portanto é preciso considerar a contribuição do atrito do cabo sobre o dispositivo de desvio. Nos próximos parágrafos, analisa-se até quando o dispositivo consegue absorver o desequilíbrio e o que acontece depois.

4.6.1.- Condições de equilíbrio

Um cabo exterior normalmente apresenta vários trechos com inclinação diferente. Um desviador é um dispositivo que permite realizar as mudanças de direção de um cabo num determinado ponto. Eles dividem um cabo em vários segmentos que chamamos trechos.

As tensões variam em cada trecho de forma diferente. A diferença de tensões entre dois trechos consecutivos é absorvida pelo desviador que os separa, sendo assim assegurado o equilíbrio face ao deslizamento. Agora, se numa certa etapa do carregamento, a diferença de tensões supera a capacidade de absorção do desviador, ocorre um deslizamento do cabo no sentido do trecho de maior tensão.

A seguir, faz-se uma análise da equação do equilíbrio face ao deslizamento, detalhando os fatores que condicionam o fenômeno.

O equilíbrio para dois trechos i e j cercado o desviador d_i , como mostra a figura (4.6), impõe (VIRLOGEUX, 1986; MARTINS, 1989):

$$P_i \cdot e^{-f_i \alpha_i} < P_j < P_i \cdot e^{f_i \alpha_i} \quad (4.28)$$

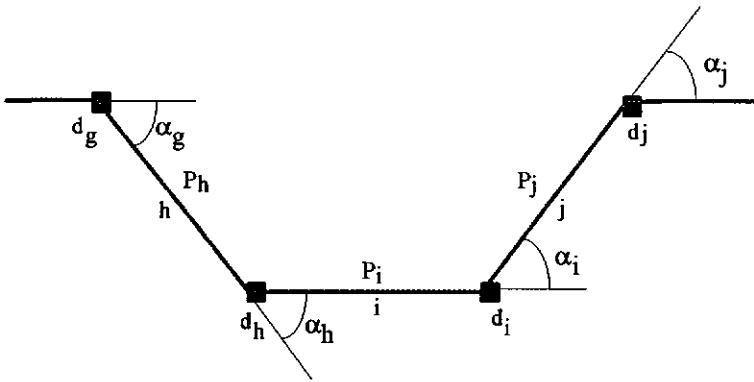


Fig. 4.6.- Cabo exterior

Faz-se:

$$\xi_i = e^{a_i f_i \alpha_i}, \quad a_i = \pm 1 \quad (4.29)$$

onde ξ_i é uma expressão exponencial que permite considerar o sentido (a_i) do possível deslizamento, o coeficiente de atrito (f_i) e o ângulo (α_i) de desvio entre os dois trechos.

A equação (4.28) assegura o equilíbrio nos dois sentidos. Como o movimento só pode aparecer num sentido por vez, o primeiro a definir é o possível sentido de deslizamento. Para isso decompõe-se a equação (4.28) em duas.

4.6.1.1.- Deslizamento para a esquerda

$$P_i \cdot \xi_i < P_j \quad (4.30)$$

ou seja

$$\xi_i < \frac{P_j}{P_i} \quad (4.31)$$

Para um deslizamento a esquerda deve-se ter:

$$P_j/P_i < 1 \quad (4.32)$$

O atrito sobre o desviador d_i diminui P_i . Então:

$$\xi_i = e^{a_i \cdot f_i \cdot \alpha_i} < 1 \quad (4.33)$$

Como $f_i \cdot \alpha_i > 0$, tem-se $a_i = -1$

Assim, o equilíbrio com tendência de deslizamento a esquerda é dado por:

$$\begin{cases} a_i = -1 \\ \xi_i \leq \frac{P_j}{P_i} \end{cases} \quad (4.34)$$

4.6.1.2.- Deslizamento para a direita

$$P_j < P_i \cdot \xi_i \quad (4.35)$$

ou seja

$$\frac{P_j}{P_i} < \xi_i \quad (4.36)$$

Um deslizamento a direita impõe $1 < P_j/P_i$.

$$\xi_i = e^{a_i \cdot f_i \cdot \alpha_i} > 1 \quad (4.37)$$

Como $f_i \cdot \alpha_i > 0$, tem-se $a_i = 1$. Portanto, o equilíbrio com tendência de deslizamento a direita é dado por:

$$\begin{cases} a_i = 1 \\ \frac{P_j}{P_i} \leq \xi_i \end{cases} \quad (4.38)$$

Assim a determinação dos deslizamento se realiza em dois passos. Primeiro, deve-se definir o sentido do possível deslizamento avaliando o quociente P_j/P_i . Logo, calcula-se o valor ξ_i e verifica-se a possibilidade de deslizamento com as expressões (4.34) e (4.38).

4.6.2.- Cálculo dos deslizamentos

A expressão ξ_i é função das características do desviador. Estas características (a_i , f_i , α_i) são diferentes para cada desviador. O cálculo de α_i é elementar e não apresenta nenhuma dificuldade. Não é no entanto assim para o coeficiente de atrito f_i . Ele depende do tipo de material do desviador como também do tipo do desviador. No capítulo 5 discute-se a forma de escolher o valor mais adequado. Supondo a existência de um deslizamento, deve-se calcular o seu valor. Considera-se dois casos: deslizamento isolado e deslizamento múltiplo.

4.6.2.1.- Deslizamento isolado

Quando um cabo desliza sobre um desviador, produz-se uma variação nas tensões (forças) dos trechos que cercam aquele desviador. Os valores das variações são os necessários para restabelecer o equilíbrio. Assim, o deslizamento se detém quando (MARTINS, 1989):

$$P_j + \Delta P_j = (P_i + \Delta P_i) \cdot e^{a_i \cdot f_i \cdot \alpha_i} \quad (4.39)$$

onde:

$a_i = \pm 1$, conforme o sentido do deslizamento.

Seja g_i o deslizamento sobre o desviador d_i , positivo para a direita, então:

$$\Delta P_i = -E_{pi} \cdot \frac{g_i}{l_i} \cdot A_p \quad (4.40)$$

$$\Delta P_j = E_{pj} \cdot \frac{g_i}{l_j} \cdot A_p \quad (4.41)$$

onde A_p , l_j , E_{pj} : são respectivamente a seção, o comprimento, e o módulo elástico tangente do cabo.

Substituindo ΔP_i e ΔP_j na equação (4.39) tem-se:

$$P_j + E_{pj} \cdot \frac{g_i}{l_j} \cdot A_p = (P_i - E_{pi} \cdot \frac{g_i}{l_i} \cdot A_p) \cdot \xi_i \quad (4.42)$$

$$E_{pj} \cdot \frac{g_i}{l_j} \cdot A_p + E_{pi} \cdot \frac{g_i}{l_i} \cdot A_p \cdot \xi_i = P_i \cdot \xi_i - P_j \quad (4.43)$$

$$A_p \cdot g_i \cdot \left[\frac{E_{pj}}{l_j} + \frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i \right] = P_i \cdot \xi_i - P_j \quad (4.44)$$

$$g_i = \frac{1}{A_p} \cdot \frac{P_i \cdot \xi_i - P_j}{\left[\frac{E_{pj}}{l_j} + \frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i \right]} \quad (4.45)$$

Como a tensão de um trecho do cabo é:

$$\sigma_i = P_i / A_p \quad (4.46)$$

$$g_i = \frac{\sigma_i \cdot \xi_i - \sigma_j}{\left[\frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i + \frac{E_{pj}}{l_j} \right]} \quad (4.47)$$

Esta equação fornece o valor do deslizamento para um desviador isolado. Normalmente um cabo exterior tem mais de uma variação angular e cada uma se realiza com um desviador. Deve-se então estudar o caso de deslizamento múltiplo.

4.6.2.2.- Deslizamento múltiplo

Se um cabo tem vários desviadores, cada um tem valores próprios para a_i , f_i e α_i . As condições de deslizamentos são, portanto, diferentes e é possível que apareça deslizamento sobre um ou vários desviadores ao mesmo tempo. Ainda mais, o deslizamento sobre um desviador modifica as tensões dos trechos que o rodeiam provocando ou não mudanças nas condições de deslizamento dos desviadores adjacentes. Esta situação pode gerar deslizamento em número indeterminado. Porém estudando o equilíbrio dos desviadores, chega-se a uma equação matricial que permite calcular todos os deslizamentos. Atribui-se a formulação a MARTINS (1989). Seja o cabo da figura (4.7):

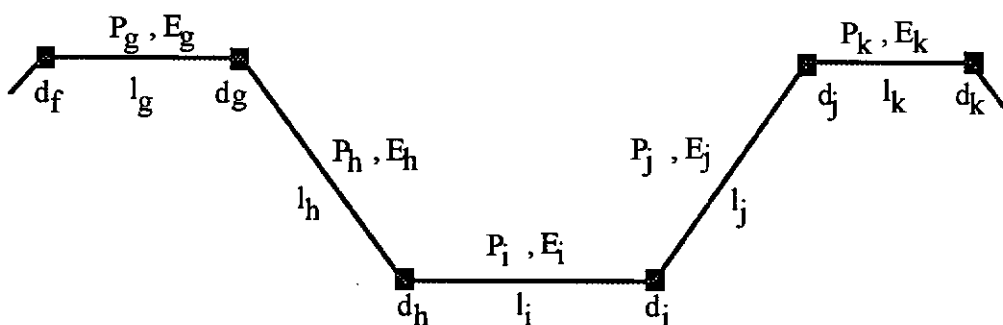


Fig. 4.7.- Características de um cabo

O equilíbrio sobre um desviador depende fundamentalmente das tensões dos trechos que o cercam. Mas por outro lado, a tensão de um trecho é função das condições de deslizamento dos desviadores que o limitam. Então a equação que assegura o equilíbrio deve refletir estes dois aspectos. O equilíbrio do cabo implica para os desviadores d_h , d_i e d_j que:

$$P_i + \Delta P_i = [P_h + \Delta P_h] \cdot \xi_h \quad (4.48.a)$$

$$P_j + \Delta P_j = [P_i + \Delta P_i] \cdot \xi_i \quad (4.48.b)$$

$$P_k + \Delta P_k = [P_j + \Delta P_j] \cdot \xi_j \quad (4.48.c)$$

reordenando a equação (4.48.b) tem-se:

$$\Delta P_i \cdot \xi_i - \Delta P_j = P_j - P_i \cdot \xi_i \quad (4.49)$$

onde:

ξ_i : abreviação de $e^{a_i \cdot f_i \cdot \alpha_i}$

P_i, P_j : forças nos trechos i e j antes do deslizamento

Considera-se agora a variação ΔP .

$$\Delta P = \Delta \sigma \cdot A_p \quad (4.50)$$

$$\Delta \sigma = \Delta \epsilon_p \cdot E_p \quad (4.51)$$

Para um trecho limitado por dois desviadores i e j:

$$\Delta \epsilon_p = \frac{g_i - g_j}{l_j} \quad (4.52)$$

Então substituindo sucessivamente $\Delta \epsilon_p$ e $\Delta \sigma$ nas equações (4.51) e (4.50), tem-se:

$$\Delta P_i = E_{pi} \cdot \frac{g_h - g_i}{l_i} \cdot A_p \quad (4.53)$$

$$\Delta P_j = E_{pj} \cdot \frac{g_i - g_j}{l_j} \cdot A_p \quad (4.54)$$

Agora substituindo ΔP_i e ΔP_j na equação (4.49):

$$E_{pi} \cdot \frac{[g_h - g_i]}{l_i} \cdot A_p \cdot \xi_i - E_{pj} \cdot \frac{[g_i - g_j]}{l_j} \cdot A_p = P_j - P_i \cdot \xi_i \quad (4.55)$$

Reagrupando

$$\frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i \cdot g_h - \left(\frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i + \frac{E_{pj}}{l_j} \right) g_i + \frac{E_{pj}}{l_j} \cdot g_j = \sigma_j - \sigma_i \cdot \xi_i \quad (4.56)$$

Esta equação dá o equilíbrio para o desviador d_j de um sistema de n desviadores, considerando as tensões dos trechos que o rodeiam e as condições de deslizamento sobre os desviadores adjacentes. Ela representa um sistema de n equações com uma matriz de largura de banda três. Os desviadores são dependentes três a três. Em forma matricial, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \underline{0} \\ & E_{ih} & E_{ij} \\ & \underline{0} & E_{m-1} & E_{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} g_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

onde

$$E_{ii} = -\frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i - \frac{E_{pj}}{l_j} \quad (4.58.a)$$

$$E_{ih} = \frac{E_{pi}}{l_i} \cdot \xi_i \quad (4.58.b)$$

$$E_{ij} = \frac{E_{pj}}{l_j} \quad (4.58.c)$$

$$T_i = \sigma_j - \sigma_i \cdot \xi_i \quad (4.58.d)$$

O sistema resolve o problema para n desviadores. A única condição que se impõe é de definir de antemão os desviadores com possibilidade de deslizamento. Para os outros, preenchem-se as linhas correspondentes na matriz por uma identidade, com a técnica dos "zeros e uns". Ou seja:

$$E_{ii} = 1 \quad (4.59.a)$$

$$E_{ij} = E_{ib} = 0 \quad (4.59.b)$$

$$T_i = 0 \quad (4.59.c)$$

4.7.- ESTUDO GLOBAL

Os aspectos apresentados neste capítulo descrevem os parâmetros necessários para o estudo do comportamento de um cabo exterior. Como se conclui no item 3.6, só um estudo global permite considerar a interação entre o cabo e o resto da estrutura.

Numa etapa de carga, a viga sobre a ação dos esforços solicitantes, adota uma nova configuração que produz sobretensões nos cabos. Deve-se avaliar estas sobretensões. O princípio de cálculo é simples. Nos parágrafos anteriores demonstrou-se como deduzir desta nova configuração as variações de deformações e conseqüentemente as variações de tensões de um cabo. Os cabos são formados de trechos. A variação de tensão é diferente para cada trecho. Assim a tensão de cada trecho deve ser atualizada com a variação de tensão correspondente conforme a equação (4.22).

$$\sigma_{pj} = \sigma_{pi} + \Delta\sigma_p \quad (4.60)$$

onde:

σ_{pi} : tensão do trecho no final da etapa anterior.

σ_{pj} : tensão da etapa corrente

$\Delta\sigma_p$: variação da tensão do trecho entre as duas etapas.

Nesse processo pode ocorrer que a diferença de tensão entre dois trechos vença o atrito e provoque um deslizamento sobre o desviador que une os dois trechos. Aí se realiza o cálculo dos deslizamentos conforme à formulação apresentada no item 4.6. Os deslizamentos sobre os desviadores produzem as deformações necessárias para restabelecer o equilíbrio global do cabo. Realiza-se então o cálculo das novas tensões dos trechos por aproximações sucessivas. Um controle de convergência é feito sobre as tensões de duas etapas consecutivas. Se não existe convergência, um artifício matemático que corrige as tensões é adotado para tentar forçá-la. Se não é suficiente a etapa é calculada de volta com um passo de carga menor. Os valores de tolerância adotados para isso são apresentados e comentados no item 5.7.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ALGORITMOS DE CÁLCULO

5.1.- INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado à organização computacional do cálculo. Nas diferentes seções são apresentados todos os algoritmos que foram implementados para solucionar o problema hiperestático. Leva-se em conta a não-linearidade física dos materiais e realiza-se o cálculo global necessário para considerar a interação entre viga de concreto e cabo de protensão externo. O programa tem em torno de 3000 linhas. São muitas as rotinas de cálculo incluídas no conjunto do programa. Várias dentre elas mesmo fundamentais são porém, elementares ou bem conhecidas. Nesses casos nenhuma alusão é feita a elas. Quando são utilizadas rotinas já existentes em outros trabalhos, apresenta-se uma descrição sucinta de sua inclusão no programa. Para maiores detalhes deve ser consultada a bibliografia correspondente. Em resumo o objetivo é demonstrar a consistência dos algoritmos utilizados para reproduzir numericamente a modelagem apresentada nas seções anteriores.

Para facilitar a compreensão, nos itens de 5.2 à 5.8 apresentam-se as considerações sobre cada assunto em forma isolada, onde os principais aspectos tratados são:

- equações constitutivas dos materiais;
- cálculo das rigidezes iniciais;
- cálculo dos esforços devidos às cargas externas não incluindo a protensão externa;
- cálculo dos esforços devidos à protensão externa;
- cálculo dos deslizamentos sobre os desviadores;
- avaliação das aberturas de juntas nos casos de vigas com aduelas;
- resolução da equação de equilíbrio de uma seção genérica e parâmetros de controle para o cálculo e noção de convergência.

Após, no item 5.9, apresenta-se um resumo da seqüência lógica que segue o procedimento geral de cálculo.

5.2.- EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS

No capítulo 2 foram apresentadas algumas formulações para reproduzir o comportamento não-linear dos materiais. Na versão atual do programa o comportamento não-linear do concreto em compressão é tratado com a lei de SARGIN (item 2.5.1.a) e em tração com a lei de GRELAT (item 2.5.1.b).

O programa permite o uso de cinco tipos de aço:

- elasto-plástico com consolidação;
- encruados;
- de protensão segundo a equação do CEB/78;
- de protensão segundo a equação de THURLIMAN;
- elasto- plástico perfeito

A resolução da equação de equilíbrio (equação 3.18) fornece as deformações da seção. A avaliação da tensão para quase todos os materiais resulta numa mera substituição da deformação na equação da tensão. Porém, para os aços encruados e os aços de protensão do tipo CEB/78, a deformação é uma função de quinto grau da tensão. Neste caso, a avaliação da tensão é feita por aproximações sucessivas.

5.3.- CÁLCULO DAS RIGIDEZES INICIAIS

No cálculo não-linear, as propriedades físicas dos materiais variam em função do estado de deformação. A formulação não-linear permite passar das deformações ao módulo de elasticidade e às tensões. A seção da viga pode ser constituída de vários materiais, cada um com suas próprias características. Não é possível fazer uma avaliação de um módulo de elasticidade para a seção. As rigidezes a esforço axial ($E \cdot A$) e a esforço flexional ($E \cdot I$) da seção são substituídas pelas quantidades (EI) e (EA), as quais são características da seção e permitem considerar a não-linearidade física de todos os materiais da mesma.

As rigidezes iniciais são os valores que são atribuídos aos termos EI e EA no início do cálculo. A determinação delas é realizada para a configuração não deformada da seção.

A seção é normalmente composta de concreto e de aços. Adota-se uma discretização em " n_c " trapézios de concreto e " n_a " lâminas de aços como mostra a figura (5.1).

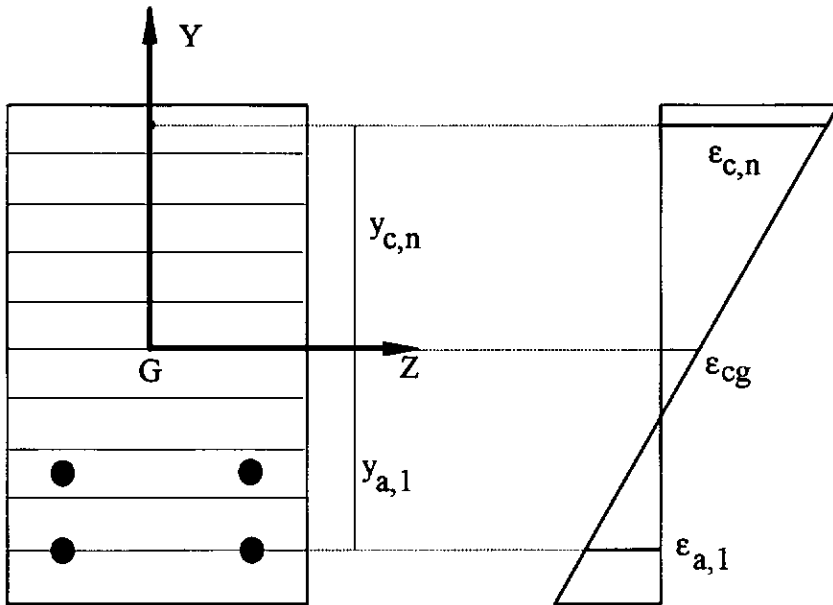


Fig. 5.1.- Discretização

Para calcular a rigidez a esforço axial considera-se uma pequena deformação axial sem deformação de flexão no centro geométrico da seção. Com essa deformação determina-se através dos diagramas de comportamento dos materiais os esforços normais de cada trapézio de concreto e de cada lâmina de aço. O somatório de todos eles define o esforço normal total N_0 , o que permite calcular a rigidez inicial pela expressão:

$$EA = N_0 / \epsilon_g \quad (5.1)$$

Da mesma forma pode-se considerar o caso de uma pequena deformação de flexão sem deformação axial no centro de gravidade. Determina-se o esforço M_0 como somatória dos esforços de flexão de cada elemento da discretização e calcula-se a rigidez inicial a flexão como:

$$EI = M_0 / \omega \quad (5.2)$$

ϵ_g : deformação axial no centro geométrico

ω : curvatura

Estas avaliações são feitas para todas as seções da discretização. Obtém-se assim as rigidezes iniciais para a estrutura inteira.

5.4.- CÁLCULO DOS ESFORÇOS DEVIDOS A CARGAS EXTERNAS

O cálculo dos esforços correspondentes a um conjunto de cargas externas é realizado pelo método da rigidez. A formulação do método é bem conhecida e as referências são inúmeras. Adota-se nesse trabalho aquela apresentada por GERE e WEAVER (1965). Usa-se um elemento prismático de dois nós com dois graus de liberdade por nó. Para a análise é aconselhado uma boa discretização. O número de seções é arbitrário sendo necessário fazer coincidir alguma seção com qualquer discontinuidade: ponto de aplicação de cargas concentradas, início e fim de cargas distribuídas pontos de desviação dos cabos externos, pontos de mudança de propriedades dos materiais. Como não são considerados os deslocamentos horizontais, a matriz de rigidez de um elemento é uma expressão simplificada daquela de um elemento de pórtico plano.

$$\tilde{R}_L = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{L^2}{12EI_z} & \frac{L}{6EI_z} & \frac{L^2}{12EI_z} & \frac{L}{6EI_z} \\ -\frac{L^3}{6EI_z} & \frac{L^2}{2EI_z} & \frac{L^3}{6EI_z} & \frac{L^2}{4EI_z} \\ \frac{L^2}{6EI_z} & \frac{L}{2EI_z} & -\frac{L^2}{6EI_z} & \frac{L}{4EI_z} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Como vimos na seção (5.3) quando calculamos as rigidezes iniciais é possível, em todo momento, avaliar a quantidade EI_z de uma seção para um estado de deformação qualquer. Os esforços são calculados no início de cada etapa. Em consequência o estado de deformação considerado para atualizar as matrizes de rigidez dos elementos é o da última etapa equilibrada.

As matrizes de rigidez dos elementos são utilizadas para determinar a matriz global da estrutura. A resolução do sistema de equação é feita pelo método de eliminação de

GAUSS na forma apresentada por BATHE KLAUS-JÜRGEN (1982). A matriz de rigidez global pode ser escrita como o somatório das matrizes dos elementos.

$$\underline{R}_G = \sum_{i=1}^{n_d} \underline{R}_{Li} \quad (5.4)$$

Na formação dessa matriz global somente são armazenados os termos correspondentes aos graus de liberdade dos elementos. Um vetor de conectividade relaciona os graus de liberdade de cada elemento àqueles correspondentes na matriz global. Ele é determinado a partir dos nós do elemento e dos números das equações associadas a eles. A montagem da matriz é feita através do procedimento "sky line" ou altura efetiva de coluna, o que permite guardar todos os termos da matriz num vetor unidimensional S_k . Em resumo a seqüência das operações é a seguinte:

- formação, a partir dos dados da estrutura, dos vetores de conectividade dos elementos;
- avaliação das alturas efetivas para cada elemento;
- estabelecimento dos endereços necessários no vetor unidimensional S_k ;
- cálculo dos termos da matriz de cada elemento e armazenamento dos mesmos no vetor S_k através do vetor de conectividade.

O sistema de equações a resolver é da forma:

$$[R_G] \cdot \{D\} = \{AE\} \quad (5.5)$$

onde:

RG: matriz de rigidez global;

D: vetor de deslocamentos e

AE: vetor das forças aplicadas

O procedimento por eliminação de GAUSS permite transformar a matriz de rigidez global em uma matriz superior, a partir da qual podem ser calculados por retro-substituição os deslocamentos D. A vantagem deste método de resolução para este programa é que os tratamentos matemáticos feitos na matriz de rigidez permitem trabalhar posteriormente com tantos vetores de forças aplicadas quantos se queira. Assim, numa etapa é possível utilizar

várias vezes a matriz transformada, e para determinar os deslocamentos forma-se o vetor de forças nodais a partir das cargas aplicadas.

Para as vigas contínuas, o carregamento comum tem: cargas concentradas e cargas distribuídas uniformes ou não. O programa trata automaticamente qualquer combinação delas e forma o vetor de força AE resultante. Distingue-se dois grupos de cargas: as permanentes e as variáveis, todas verticais. As cargas permanentes são transformadas em forças nodais e guardadas. Em cada etapa, as cargas variáveis são definidas por um processo incremental, transformadas em cargas nodais e somadas às cargas permanentes já processadas. Esta soma é o vetor AE das forças externas para a etapa, este é reduzido e os deslocamentos são determinados. Os esforços correspondentes são calculados como esforços de extremidades de membros com as fórmulas comuns do método da rigidez.

5.5.- DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS DEVIDOS A PROTENSÃO EXTERNA

A determinação dos esforços devido à protensão externa é um tanto complicada. Muitos métodos - o das rotações das tangentes extremas à elástica, o das deformações angulares, o da compensação dos momentos de CROSS e KANI - permitem calcular os esforços. O processo não apresenta maiores dificuldades nos casos de vigas simples ou até de três vãos. Porém, não é fácil generalizar estas formulações para uma estrutura mais complexa. Neste programa os esforços são determinados pelo método das linhas de influência que é aplicável a qualquer estrutura estaticamente determinada ou não e pode ser demonstrado facilmente pelo teorema de Betti (GHALI & NEVILLE, 1972). O método permite automatizar o cálculo das LI (linhas de influência). A formulação é de um trabalho de DIAZ(1984), o qual faz referência a MELLO (1982) e FENDES (1964). O procedimento geral é constituído pela:

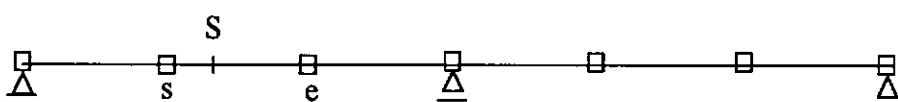
- liberação dos vínculos correspondentes aos esforços desejados. O grau de indeterminação da estrutura é reduzido de um.
- aplicação, nas extremidades do vínculo liberado, de um par de esforços, tal que ocasione um deslocamento relativo unitário.
- determinação dos deslocamentos da estrutura assim modificada e carregada.

O método que é tratado aqui não muda o modelo mecânico da estrutura. Assim, permite aproveitar a matriz global já transformada, utilizada anteriormente no cálculo dos esforços devido às cargas externas aplicadas. A figura (5.2.a) apresenta o modelo mecânico da viga. A estrutura é discretizada em elementos. A figura (5.2.b) mostra uma barra "s-e" e

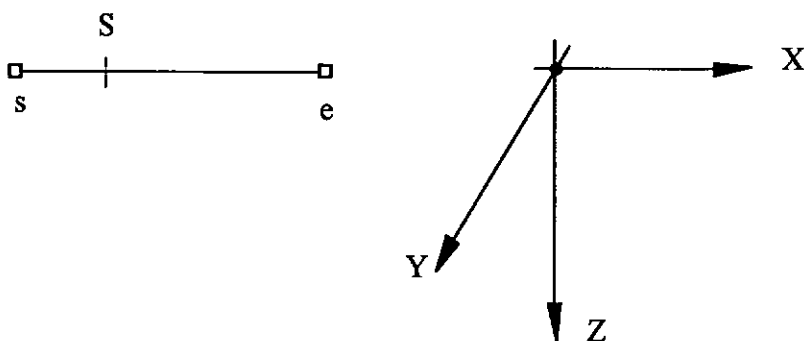
o sistema de coordenadas associado a ela. Para a obtenção da LI de uma ação, deve-se calcular os deslocamentos nas extremidades dos elementos da discretização. Para isto dois passos de cálculo são necessários. Daí o nome de "Método dos dois passos" dado a esse procedimentos. Estes passos são descritos a seguir:

a) A barra que contém o ponto S é considerada biengastada. O vínculo do momento fletor é liberado e um par de esforços é aplicado, de modo a provocar uma rotação relativa unitária na seção S, figura(5.3.a). São determinados os esforços de engastamento perfeito, aplicado nas extremidades da barra, os quais são denominados \bar{F}_z^s , \bar{M}_y^s , \bar{F}_z^e e \bar{M}_y^e , onde "s" e "e" são os nós da barra.

b) Os esforços de engastamento perfeito, com os sentidos invertidos, são aplicados no modelo da estrutura. Estes novos esforços são considerados como esforços externos e são designados por F_z^s , M_y^s , F_z^e e M_y^e . Com este estado de carga, são determinados os deslocamentos da estrutura, figura (5.3.b).

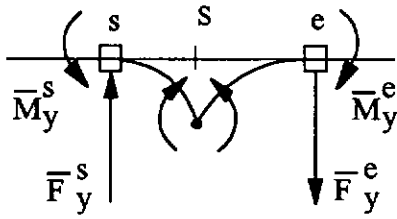


a) Modelo mecânico da viga

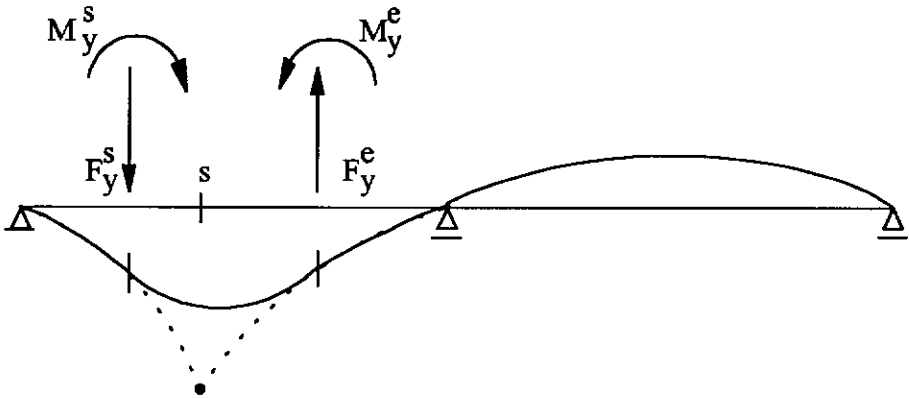


b) Barra e sistema de eixos de coordenadas associado

Fig. 5.2.-LI em vigas contínuas



a) Deformada no primeiro passo de cálculo



b) Deformada da viga no segundo passo de cálculo

Fig. 5.3.- Cálculo das linhas de influência de uma viga contínua

A linha de influência final é determinada através da soma dos deslocamentos da barra biengastada obtidos no primeiro passo de cálculo com os deslocamentos da estrutura obtidos no segundo passo, como mostra a figura (5.4).

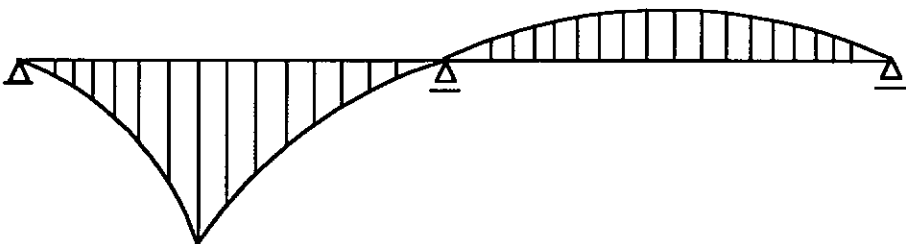
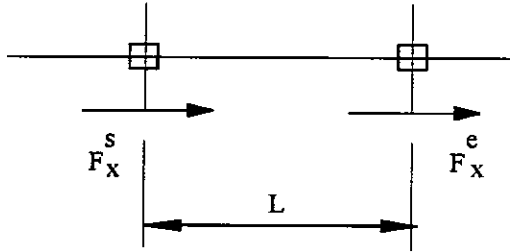


Fig. 5.4.- Linha de Influência por adição dos deslocamentos dos dois passos de cálculo

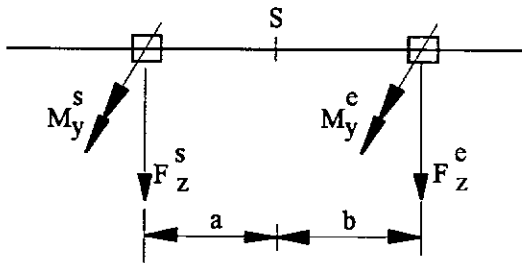
O procedimento é o mesmo para qualquer tipo de esforço ou deslocamento; sendo os esforços externos a serem aplicados dependentes somente do tipo de LI que se deseja calcular. São apresentados a seguir estes esforços para os tipos de LI analisadas no programa.

a) LI da força normal



$$F_x^s = -\frac{EA_x}{L} \quad F_x^e = \frac{EA_x}{L} \quad (5.7)$$

b) LI de momento fletor



$$F_z^s = 3EI_y \frac{(2b-2a)}{L^3} \quad M_z^s = 2EI_y \frac{(a-2b)}{L^2} \quad (5.9.a)$$

$$F_z^e = 3EI_y \frac{(2a-2b)}{L^3} \quad M_z^e = 2EI_y \frac{(2a-b)}{L^2} \quad (5.9.b)$$

sendo:

a e b são as distâncias do ponto S às extremidades da barra.

c) LI das deflexões

$$F_z^e = 1 \quad (5.10)$$

d) LI das rotações

$$M_y^e = 1 \quad (5.11)$$

Numa estrutura estaticamente indeterminada, uma ação qualquer H (momento, esforço cortante, etc...) é a soma de duas porções: uma estática (H_{est}) e uma hiperestática \bar{H} . A expressão genérica é:

$$H = H_{est} + \bar{H}$$

O método das LI permite calcular o valor da ação sem precisar determinar separadamente H_{est} e \bar{H} . Para avaliar uma certa ação, por exemplo o momento fletor M_s na seção "s-s" da viga da figura (5.5.b), a qual mostra também a LI de M_s para a seção, deve-se considerar no caso de cabos externos, o sistema de forças concentradas formado pelas forças de desviação e aplicadas nas posições dos desviadores. Estas forças são as componentes verticais da força do cabo naquele pontos, figura (5.5.a). A partir das ordenadas da LI pode-se escrever:

$$M_s = \eta_1 \cdot P_{d1} + \eta_2 \cdot P_{d2} + \eta_3 \cdot P_{d3} + \eta_4 \cdot P_{d4} + \eta_5 \cdot P_{d5} \quad (5.12)$$

O esforço é obtido com o somatório dos produtos das forças de desviação P_d pelas ordenadas da LI no ponto de aplicação das mesmas. Em resumo, uma vez calculada a linha de influência, a ação correspondente é dada por:

$$H_s = \sum_{i=1}^{n_f} P_{di} \cdot \eta_i \quad (5.13)$$

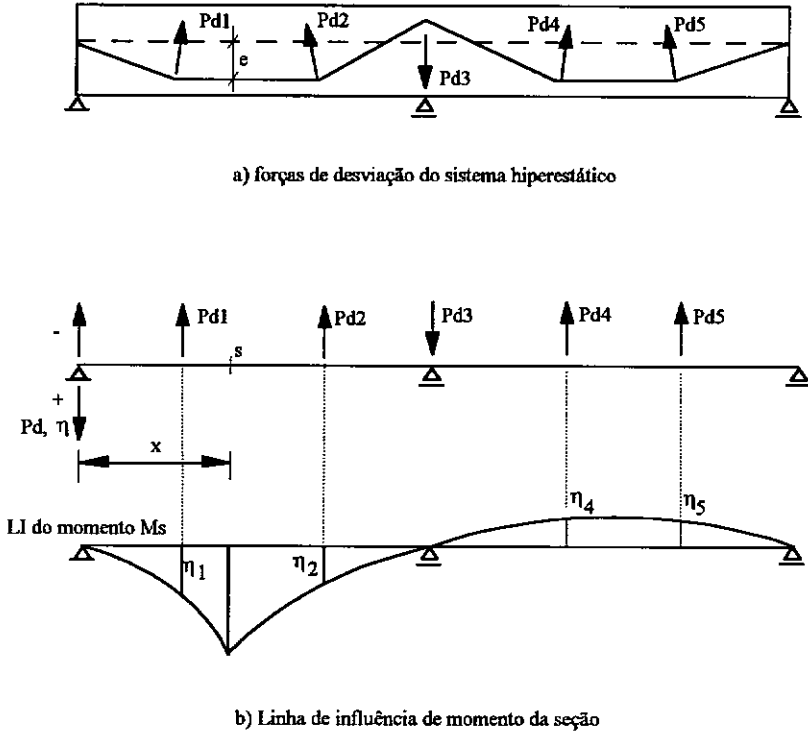


Fig. 5.5.-Cálculo de momento fletor na seção "s-s" com as linhas de influência

Se um esforço ou deslocamento é avaliado em "n" seções, formam-se "n" vetores de esforços externos. Porém, a matriz de rigidez da estrutura não sofre nenhuma mudança; assim, é possível usar a matriz já processada anteriormente no tratamento das cargas externas. Em conseqüência, para a determinação da LI em cada seção, conforme o procedimento descrito acima, basta reduzir e retro-substituir o vetor de força. Este procedimento é geral e pode ser aplicado também a qualquer sistema de cablagem não aderente. No caso de cabo parabólico, o processo é um pouco mais complexo, pois deve-se fazer a integral da área compreendida entre a linha de influência e o eixo de referência "x", já que as forças de desviação são distribuídas ao longo do cabo.

Este procedimento não permite resolver o caso de um cabo com excentricidade de extremidade (pontos de ancoragem), onde aparece um momento triangular adicional. É possível calcular as ações comentadas no parágrafo anterior usando as LI. Deve-se aplicar, na seção correspondente, a força P do cabo como carga axial e um momento Pe , sendo "e" a excentricidade do cabo, GHALI (1972). Porém, este procedimento não é implementado na versão atual do programa. O momento tem um diagrama linear entre apoios. Portanto, calculam-se os valores das ações sobre estes apoios com as fórmulas deduzidas a partir do método das tangentes extremas, LEONHARDT (1967). Nestes casos, para as rigidezes dos

vãos, considera-se a média das rigidezes das seções contidas no vão. Os valores correspondentes a estas seções intermediárias são calculados depois por interpolação linear.

5.6.- CÁLCULO DOS DESLIZAMENTOS SOBRE OS DESVIADORES

O cálculo dos deslizamentos é uma aplicação direta da formulação apresentada no item 4.6. Um deslizamento ocorre quando não é satisfeita uma das duas condições seguintes:

$$1) \begin{cases} a_i = -1 \\ \xi_i \leq \frac{P_j}{P_i} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a_i = 1 \\ \frac{P_j}{P_i} \leq \xi_i \end{cases}$$

sendo

$$\xi_i = e^{a_i f_i \alpha_i}, \quad a_i = \pm 1$$

Note-se que:

- O valor de a_i é determinado como função do quociente P_j/P_i . Como as seções dos cabos são constantes, é possível trabalhar com o quociente das tensões dos trechos ou seja σ_{pj}/σ_{pi} .

⌚ o coeficiente de atrito f_i é o mais difícil de determinar, ele depende tanto do tipo do desviador, como do tipo da bainha e injeção utilizadas para o cabo. Na prática seu valor oscila entre 0.15 e 0.40

⌚ A inclinação α_i entre os trechos do cabo é determinada através de considerações geométricas. A deformada da viga obtida anteriormente permite atualizar as posições dos pontos de desvio, permite também levar em conta a variação do ângulo entre os dois trechos em cada etapa do cálculo.

O parâmetro ξ_i é avaliado e são testadas as condições mencionadas acima. Se existe a possibilidade de deslizamento sobre um ou vários desviadores deve-se resolver a equação matricial não-linear vista no item 4.6.

A matriz dos coeficientes é uma 'matriz banda' de largura três. Resolve-se o sistema de equação pelo método de eliminação de GAUSS (triangulação e retro-substituição), determinando os deslizamentos g_i . São avaliadas as variações de deformações e as novas tensões que resultam delas. Se as variações nas tensões fogem das tolerâncias, uma nova aproximação é iniciada desde a verificação das condições de equilíbrio face ao deslizamento. Quando as tolerâncias são respeitadas para todos os trechos, calcula-se a norma do vetor das tensões do cabo; se esta norma é menor que uma certa tolerância, a última aproximação feita para os deslizamentos é considerada como os valores finais da etapa. Caso contrário, uma nova iteração é realizada para tentar equilibrar o cabo face aos deslizamentos. Porém, às vezes as tensões oscilam ao redor de um certo valor e dificulta a convergência. Nestes casos é possível utilizar um coeficiente de redução para diminuir a diferença entre as tensões de duas iterações sucessivas. Na prática usa-se a seguinte fórmula:

$$\sigma_{pi}^1 = \sigma_{pi-1} + 0.6 (\sigma_{pi}^0 - \sigma_{pi-1}) \quad (5.6)$$

onde

σ_{pi}^1 : tensão para a nova iteração;

σ_{pi-1} : tensão da etapa equilibrada e

σ_{pi}^0 : tensão da etapa corrente que não pode ser equilibrada.

5.7.- RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DE UMA SEÇÃO

A análise não-linear do equilíbrio de uma seção leva a resolver a equação matricial deduzida no item 3.6.

$$\begin{Bmatrix} N - N_{int} \\ M - M_{int} \end{Bmatrix} = [\phi_i] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_g \\ \Delta \omega \end{Bmatrix}$$

A variação dos esforços é função da variação das deformações $(\Delta \epsilon, \Delta \omega)$, as quais são as incógnitas do sistema. Estas são calculadas por aproximações sucessivas. Deve-se utilizar para a resolução do sistema algum método iterativo.

No capítulo 3, associa-se as cargas externas, incluindo a protensão, a um par de solicitações (N, M) e as deformações a um par (ϵ_g, ω) . Era mais conveniente pois as equações eram escritas com as componentes dos vetores. No que segue, as operações são feitas sobre vetores e matrizes; para simplificar as expressões e manter uma notação semelhante à da literatura correspondente, chama-se:

F: o vetor das forças internas representando o par (N_{int}, M_{int})

R: o vetor das forças externas representando as solicitações externas totais (N, M)

U: o vetor das deformações representando o par (ϵ_g, ω)

Na análise incremental a força externa (solicitações resultantes do conjunto das ações externas) é obtida em cada etapa com incrementos sucessivos. Se "j-1" é a última etapa equilibrada, tem-se:

$${}^j\{R\} = {}^{j-1}\{R\} + {}^j\{\Delta R\} \quad (5.14)$$

O equilíbrio da etapa "j" implica um incremento de deformação $\{\Delta U\}$ tal que

$${}^j\{U\} = {}^{j-1}\{U\} + {}^j\{\Delta U\} \quad (5.15)$$

Como a tensão (σ) é função da deformação, pode-se escrever:

$${}^j\{\sigma\} = {}^{j-1}\{\sigma\} + {}^j\{\Delta \sigma\} \quad (5.16)$$

A implementação numérica é feita da seguinte forma: se "j" é a etapa corrente, a equação pode ser escrita com as notações adotadas acima sob a forma:

$${}^j\{R - F\} = {}^{j-1}[\phi_t] \cdot {}^j\{\Delta U\} \quad (5.17)$$

A avaliação de jF para esta equação não é direta. É necessário utilizar um método iterativo para sua determinação. Faz-se (n) iterações até obter:

$${}^jF^i = {}^jR \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (5.18)$$

Existem muitos métodos de resolução para a equação (5.17). Neste trabalho adota-se o método de Newton-Raphson que é apresentado a seguir.

5.7.1.- Método de Newton-Raphson

É conhecido como método iterativo de equilíbrio; numa etapa " j " faz-se (n) aproximações para equilibrar a equação (3.18). No início de uma iteração (i), o método supõe a iteração anterior ($i-1$) equilibrada, sendo ${}^j[\phi_t]^{(i-1)}$ a matriz de rigidez tangente atualizada da seção após a iteração ($i-1$). Assim, tem-se:

$${}^j[\phi_t]^{(i-1)} \cdot {}^j\{\Delta U\} = {}^j\{R\} - {}^j\{F\}^{(i-1)} \quad (5.19)$$

Calculando $\{\Delta U\}^{(i)}$ tem-se:

$${}^j\{U\}^{(i)} = {}^j\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (5.20)$$

O vetor de deformação ${}^j\{U\}^{(i)}$ permite calcular o vetor de força ${}^j\{F\}^{(i)}$ da iteração (i) e atualizar a matriz de rigidez obtendo-se ${}^j[\phi_t]^{(i)}$. A figura (5.6) ilustra o processo de resolução pelo método de Newton-Raphson descrito acima. Na primeira iteração de uma etapa são utilizados os valores finais da etapa anterior, isto é:

$${}^j\{U\}^0 = {}^{j-1}\{U\} \quad (5.21)$$

$${}^j[\phi_t]^0 = {}^{j-1}[\phi_t] \quad (5.22)$$

$${}^j\{F\}^0 = {}^{j-1}\{F\} \quad (5.23)$$

Este método normalmente converge em poucas iterações. Deve-se mencionar porém, que para alguns tipos de materiais podem aparecer problemas numéricos. O método atualiza a matriz de rigidez a cada iteração, o que implica um esforço computacional maior. Algumas modificações permitem contornar parte do problema, caracterizando o método de Newton-Raphson Modificado que é apresentado a seguir.

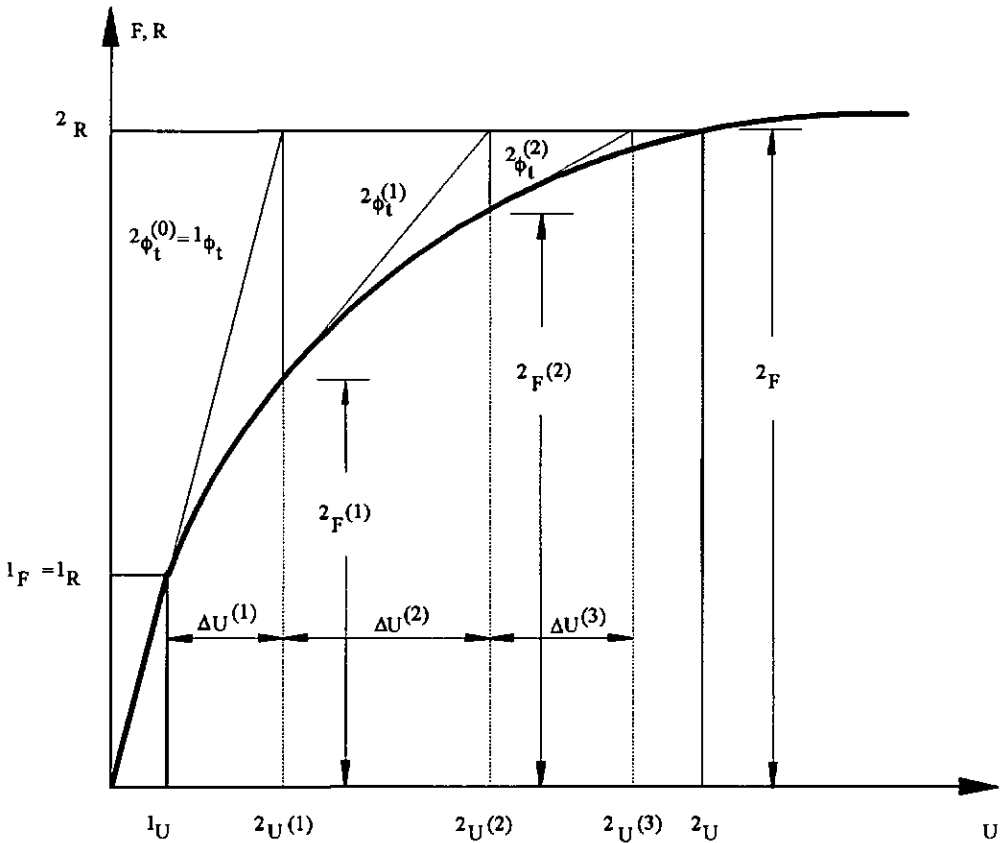


Fig. 5.7.- Método de Newton-Raphson

5.7.2.- Método de Newton-Raphson Modificado

A principal modificação feita é limitar o número de vezes que deve ser atualizada a matriz de rigidez tangencial $^j[\phi_t]$ durante a etapa "j". A matriz é tomada constante para todas as iterações e pode ser calculada no início da etapa "j" ou no início da primeira etapa.

$$^j[\phi_t]^0 = {}^{j-1}[\phi_t] = {}^1[\phi_t] \quad (5.24)$$

O resto do processo de cálculo não muda:

$$^j[\phi_t]^{(i-1)} \cdot {}^j\{\Delta U\} = {}^j\{R\} - {}^j\{F\}^{(i-1)} \quad (5.25)$$

Calculando $\{\Delta U\}^{(i)}$ tem-se:

$${}^j\{U\}^{(i)} = {}^j\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (5.26)$$

Para a primeira iteração de uma etapa "j" de carga, toma-se

$${}^j[U]^{(0)} = {}^{j1}[U] \quad (5.27)$$

$${}^j[F]^{(0)} = {}^{j1}[F] \quad (5.28)$$

A figura (5.8) mostra o processo de cálculo do método de Newton-Raphson Modificado.

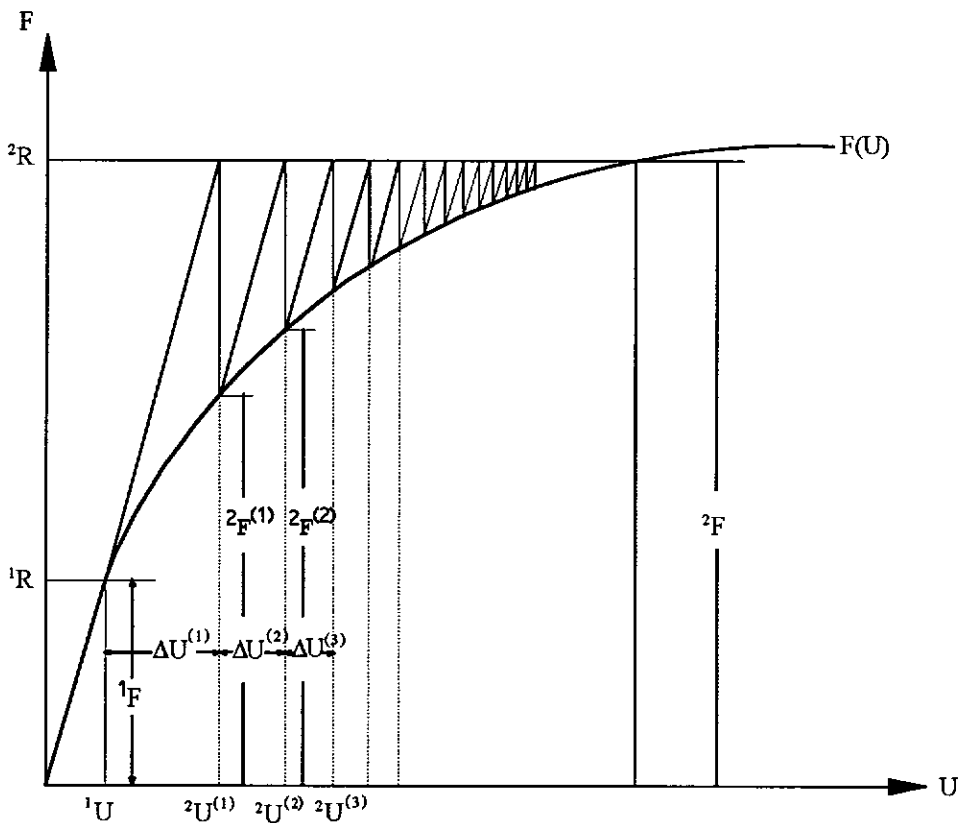


Fig. 5.8. - Método de Newton-Raphson Modificado

O método permite um esforço computacional menor, porém sua convergência é mais lenta. A escolha de um dos dois métodos depende muito do tipo de problema a resolver (CHEN & HAN, 1988). O programa permite os dois esquemas seguintes:

1) Começar com o método de Newton-Raphson Modificado;

2) Começar com o Newton-Raphson e passar para o Newton-Raphson Modificado quando a rigidez da seção cai para um certo valor pré-fixado. Este valor é tomado como uma fração do determinante calculado para a seção na primeira etapa.

5.7.3.- Parâmetros de controle para o cálculo e noção de convergência

Qualquer que seja o método considerado, deve-se fazer no final de cada iteração um controle dos valores obtidos. Esses são aceitos como finais da etapa se o critério de convergência estabelecido for cumprido. São muitos os critérios que podem ser utilizados. Os mais usados são:

- critério da carga;
- critério da força;
- critério da energia interna.

Nesta pesquisa o critério adotado é o controle da força. Deve-se cumprir a equação:

$$\| \{R\}^j - \{F\}^j \| \leq \gamma_F \cdot \| \{R\}^j - \{F\}^{j-1} \| \quad (5.29)$$

onde

$\| \|$: indica a norma euclidiana de um vetor

γ_F : é uma tolerância pré-fixada. Sua escolha deve ser cuidadosa: um valor muito grande leva a resultados pouco precisos enquanto um valor muito pequeno pode aumentar inutilmente o número das iterações.

Se, após um certo número de iterações fixado de antemão, a equação não é verificada, considera-se que o cálculo está divergente; o processo iterativo é reiniciado com a metade do incremento de carga. Estes problemas aparecem quando a carga está na proximidade de seu valor limite (carga que esgota a resistência da seção), situação na qual pode ocorrer uma instabilidade numérica no cálculo. A tentativa de equilibrar a seção é

pode ocorrer uma instabilidade numérica no cálculo. A tentativa de equilibrar a seção é detida quando para um incremento menor do que o erro permitido nas cargas o cálculo não consegue convergir.

5.8.- AVALIAÇÃO DE ABERTURA DE JUNTAS

O modelo no qual se baseia esta pesquisa (MARTINS, 1989) apresenta as expressões que permitem o cálculo das aberturas de juntas para as vigas de aduelas. Porém, elas não podem ser aplicadas aqui porque são deduzidas a partir do aço tracionado (junta com armadura). No caso de juntas sem armadura interior é necessário recorrer a outros métodos para a determinação das aberturas de juntas. Nesta pesquisa, utiliza-se a proposta do C.E.B. (Bol. 158) para peças com armadura não aderente. A expressão geral é:

$$w_k = k \cdot h_{wo} \cdot \epsilon_m \quad (5.30)$$

onde

k : é um coeficiente de ajuste

h_{wo} : altura descomprimida da junta

ϵ_m : deformação de tração no bordo da seção

Para o estudo toma-se $k = 1$. Também a altura de descompressão é limitada a metade do comprimento da aduela. Ou seja:

$$h_w \leq \frac{la}{2}$$

5.9.- SEQÜÊNCIA LÓGICA DO CÁLCULO

O método apresentado neste trabalho permite seguir o comportamento da estrutura até a ruptura. A implementação numérica pretende reproduzir e interpretar a resposta da estrutura face aos esforços solicitantes. Para isto vários efeitos são avaliados durante uma etapa de cálculo. Apresenta-se a seguir a seqüência de cálculo do programa de computação elaborado com bases no modelo matemático desenvolvido.

A introdução dos dados da estrutura - geometria, tipos e propriedades dos materiais, características da cablagem e sistema de protensão, esquema dos carregamentos

(cargas permanentes e cargas variáveis iniciais) - é realizada no início do processo. Com estes dados são calculadas as rigidezes iniciais das seções, as matrizes de rigidez dos elementos e a matriz de rigidez global.

Alí começa uma análise incremental iterativa. Um fator de carga λ , somente para as cargas variáveis, é incrementado sucessivamente a partir de um valor inicial unitário. Para uma etapa "j", o fator de carga é λ_j . As cargas variáveis, junto com as cargas permanentes e a protensão definem o vetor de carga jR introduzido na seção (5.7). As fases do cálculo durante uma etapa são as seguintes:

1) A matriz de rigidez global é zerada. A partir dos valores finais da última etapa equilibrada as matrizes de rigidez dos elementos são calculadas e armazenadas na matriz global segundo o procedimento já comentado.

2) Atualiza-se a geometria dos cabos a partir dos resultados da etapa anterior "j-1". A contribuição hiperestática é avaliada e as solicitações totais são determinadas para todas as seções da discretização.

3) Realiza-se o processo de equilíbrio da seção através de aproximações sucessivas. Um dos dois métodos de resolução vistos no item 5.7 é aplicado. Se a equação (5.29) é respeitada em todas as seções, há convergência no equilíbrio delas; caso contrário, o processo recomeça com um incremento de carga menor.

4) Se houve convergência na fase anterior, a deformada da viga é determinada. As flechas são obtidas como soma daquelas devido às cargas externas permanentes e variáveis com aquelas devidas à protensão.

5) As posições dos pontos de desvio são atualizadas pelo procedimento do item 4.4 definindo assim as novas excentricidades dos cabos.

6) A partir desta nova configuração são calculadas as sobretensões resultantes nos trechos dos cabos externos. Atualizam-se as tensões destes.

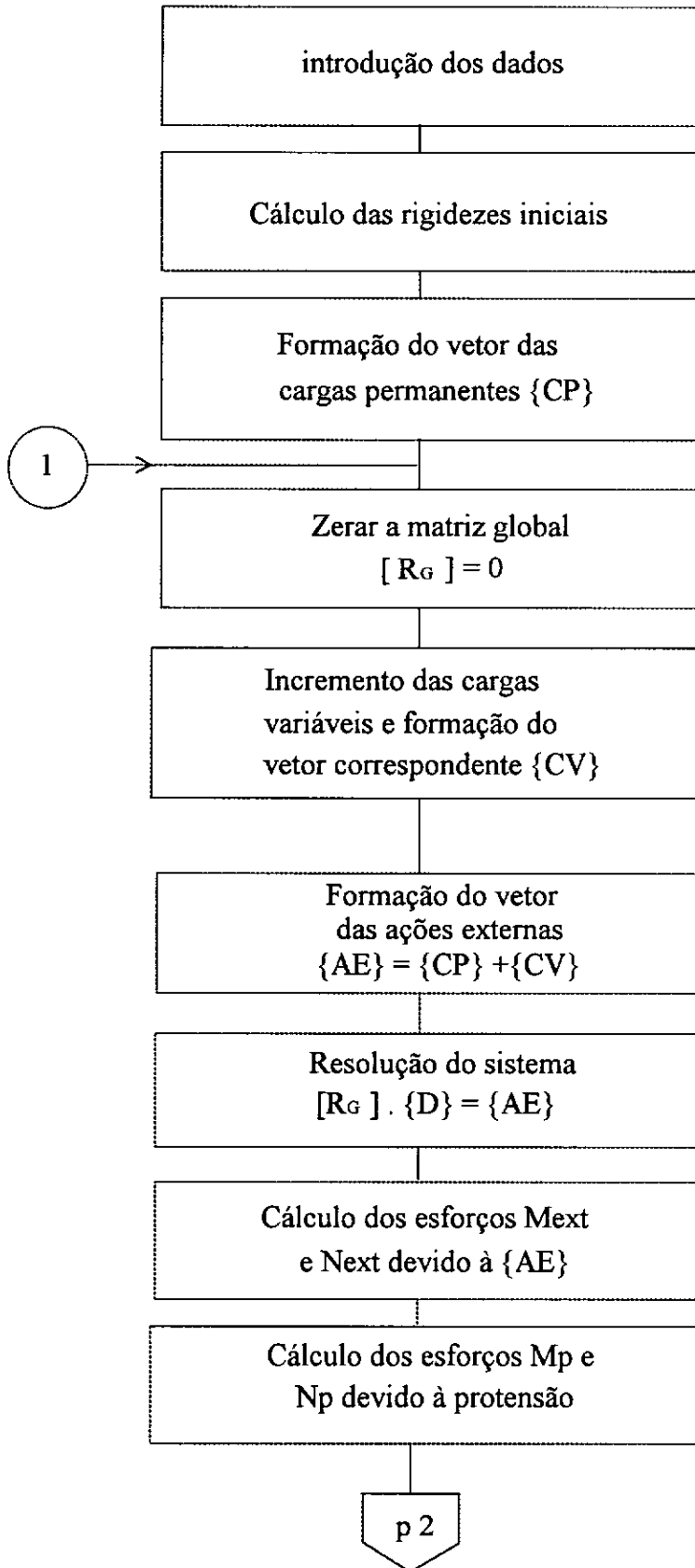
7) Realiza-se uma verificação do equilíbrio face ao deslizamento sobre os desviadores com as equações (4.34) e (4.38). Se existir um deslizamento sobre um ou mais desviadores, seu valor é calculado por aproximações sucessivas. O controle é feito sobre as tensões dos trechos, as quais constituem o vetor de carga a ser equilibrado pelos deslizamentos.

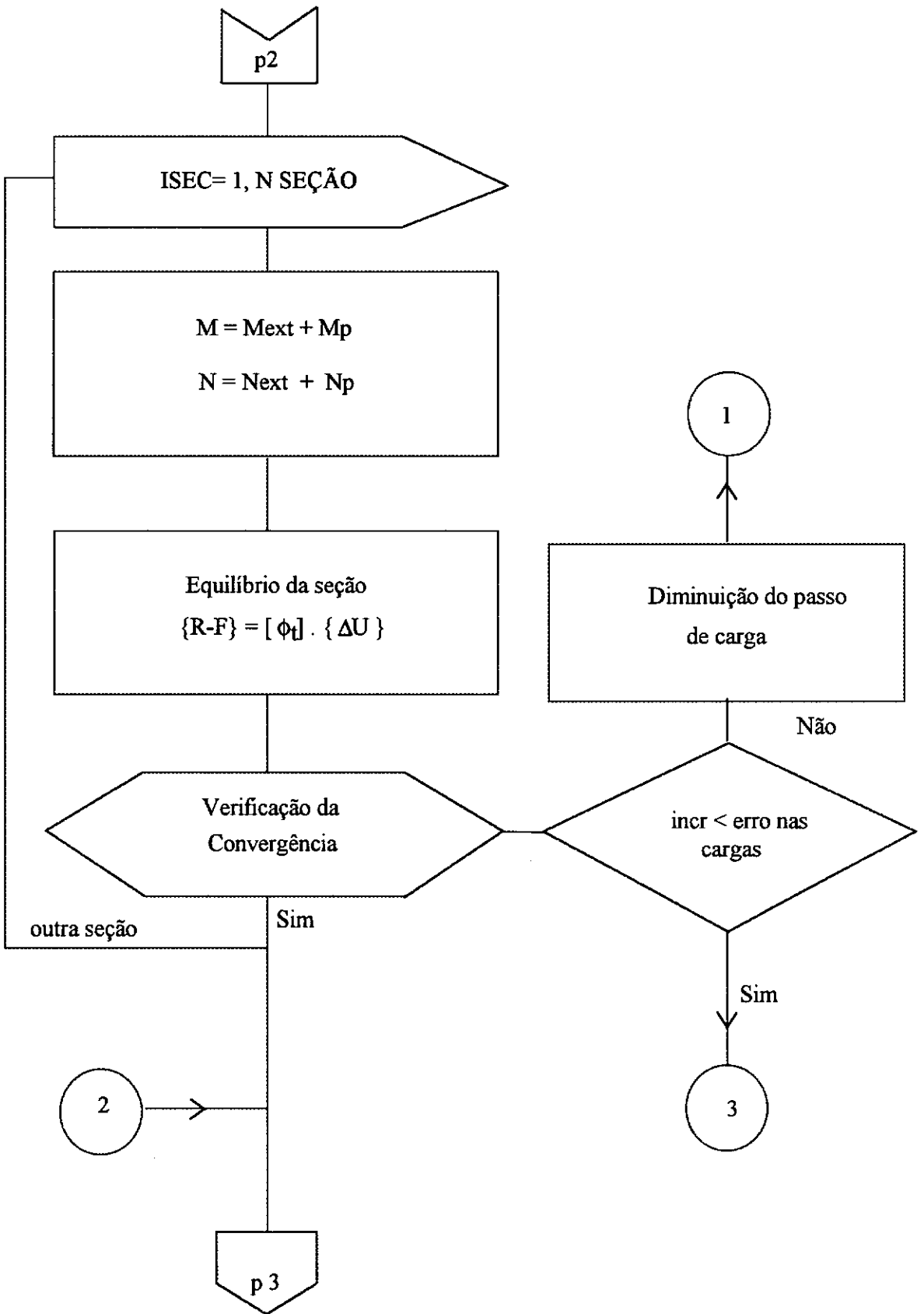
(5.7) para forçar a convergência. Se esta tentativa não resolver o problema a etapa é reiniciada com um passo de carga menor, a metade do anterior.

8) Se o cálculo dos deslizamento sobre os desviadores converge o parâmetro de carga é incrementado e uma nova etapa começa.

9) A carga última é obtida quando o cálculo diverge para um incremento de carga menor do que um certo valor pré-fixado.

A figura (5.8) mostra um diagrama de fluxo da seqüência descrita acima.





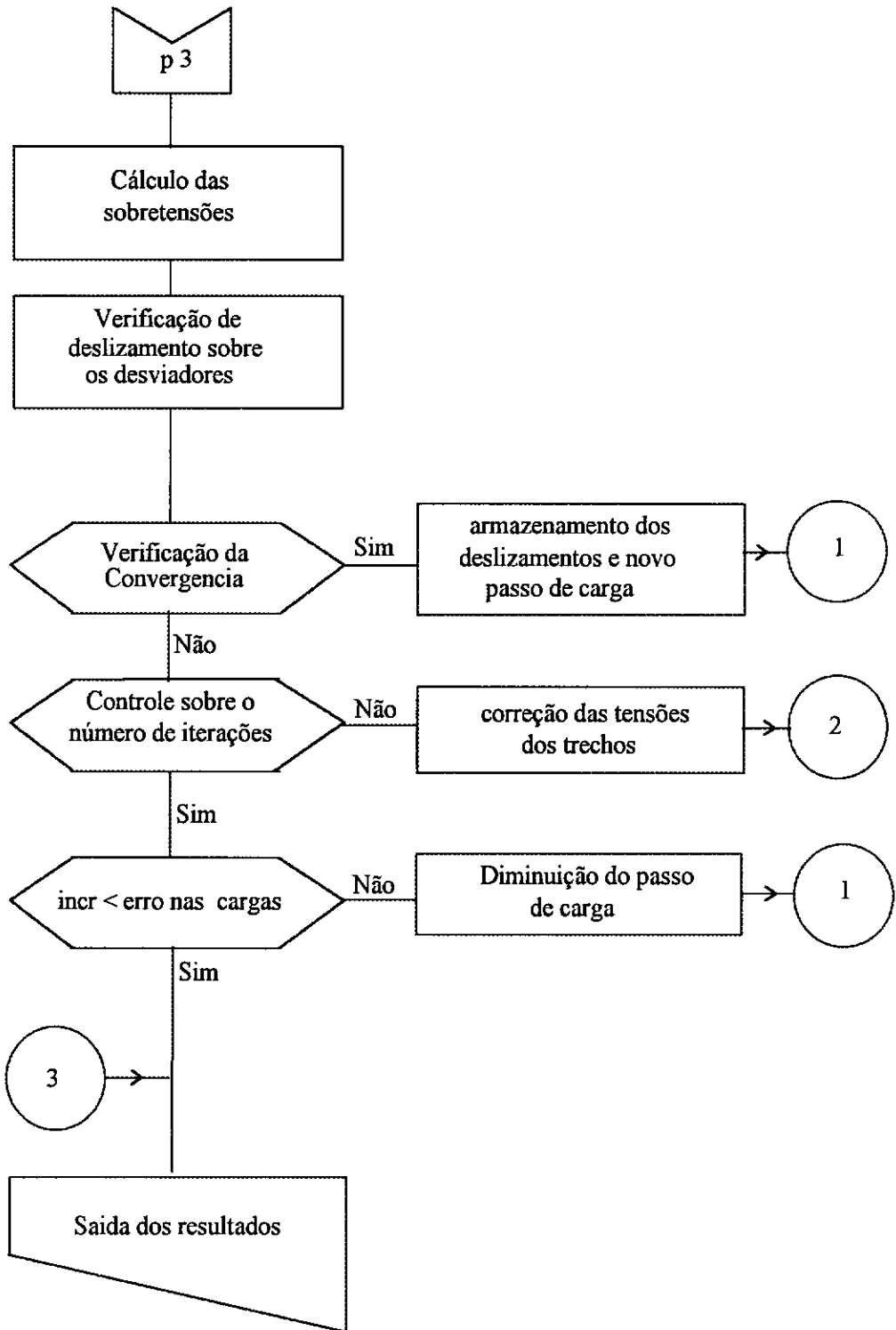


Fig. 5.8.- Fluxograma do cálculo incremental iterativo

CAPÍTULO 6

COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

6.1.- INTRODUÇÃO

Neste trabalho, procura-se generalizar e verificar para as vigas hiperestáticas um modelo já testado para as vigas isostáticas. Nos capítulos anteriores foram apresentadas as considerações específicas necessárias para isto dentro das hipóteses adotadas. Apresenta-se a seguir uma verificação do modelo considerado para vigas hiperestáticas. As estruturas são de concreto protendido com cabos externos. Vários casos podem ser estudados. Citam-se:

- vigas isostáticas monolíticas ou com aduelas pré-fabricadas;
- vigas hiperestáticas monolíticas ou com aduelas pré-fabricadas;
- vigas hiperestáticas monolíticas e com aduelas .

Na literatura referente ao assunto há poucos trabalhos experimentais. Até hoje, somente um ensaio de viga hiperestática com protensão externa é conhecido (MACGREGOR 1989).

Neste capítulo comparam-se os resultados fornecidos pelo programa com aqueles obtidos por:

- a) uma viga isostática tomada de uma série de vigas ensaiadas na França (1989).
- b) um ensaio realizado no Texas por MACGREGOR (1989);
- c) diversos programas para a análise de um "benchmark test" organizado para um congresso sobre protensão externa na França (Junho 1993);

Como o objetivo deste trabalho é ter um previsor para ajustar os dados antes de realizar um ensaio, incorpora-se os primeiros resultados obtidos para duas das vigas que,

em breve, serão ensaiadas nos laboratórios da UFRJ, no âmbito de tese de D. Sc. de PAULO REGIS (1993).

O programa CARPE proporciona um conjunto de resultados para a análise do comportamento. Permite traçar para qualquer seção as curvas:

- carga - flecha;
- carga - abertura de junta;
- carga - altura de abertura de junta;
- carga - momento fletor;
- carga - variação de tensão dos cabos;
- carga - força de protensão dos cabos;
- carga - tensão dos cabos;
- carga - deslizamento sobre desviadores para os cabos;
- carga - tensão para os diversos materiais;
- carga - deformação para os diversos materiais;

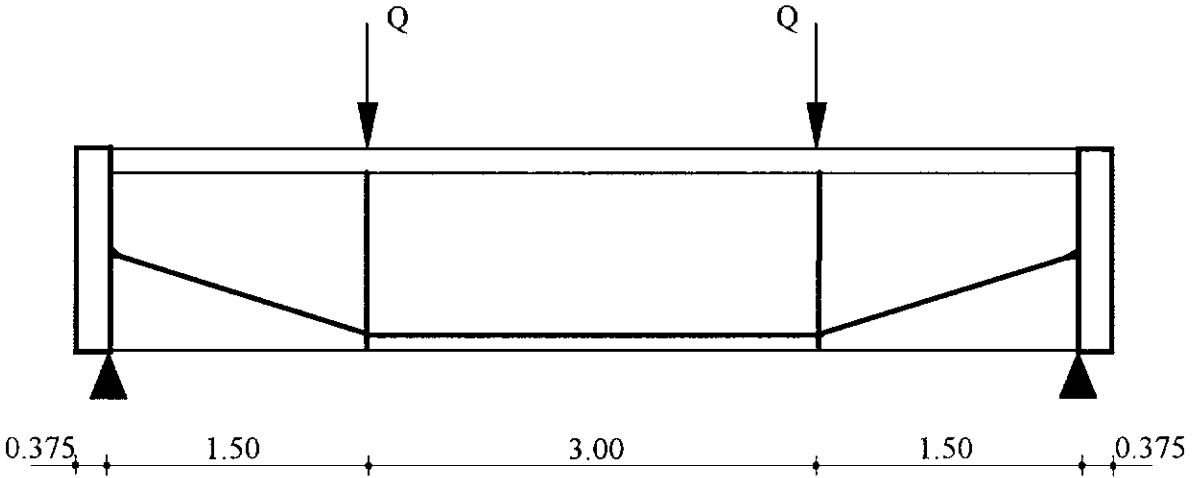
As vigas que se tem para as comparações apresentam algumas destas curvas. Neste capítulo utilizam-se os dados disponíveis. No anexo B são apresentados alguns outros resultados analisados para estas vigas com o programa CARPE e para os quais não há dados de comparações.

6.4.- VIGA ISOSTÁTICA

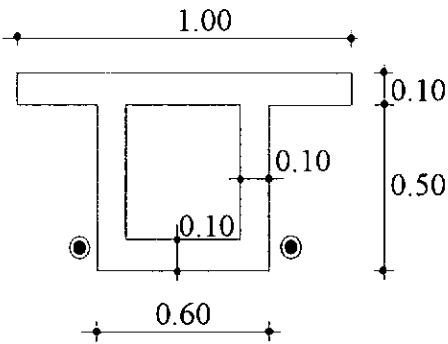
Esta é uma viga de uma série de 11 ensaidas em um programa de pesquisa no C.E.B.T.P. (HOANG e PASQUIGNON,1987). Seu comprimento é de 6.75 m e a seção é caixão. A figura (6.1.a) mostra uma elevação da viga enquanto a figura (6.1.b) apresenta a seção transversal. Esta é protendida com dois cabos (2xT13) desviados 6° sobre os desviadores, os quais são colocados simetricamente em relação aos apoios. No trecho reto, o cabo tem uma excentricidade de 19.95 cm. A viga tem uma armadura passiva também chamada armadura de pele. A injeção é feita com cimento.

Os materiais utilizados são dois tipos diferentes de concreto em termos de resistência à compressão: o talão tem um concreto de 45.2 MPa e um módulo de elasticidade de 34500 MPa, o resto um concreto de 49.8 MPa com 36900 MPa de módulo de elasticidade. A tensão de tração permitida é de 3.85 MPa para o talão e 3.75 MPa

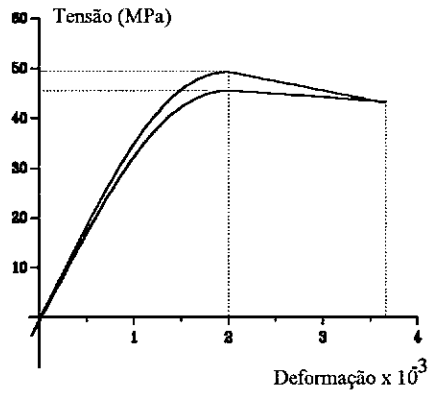
para o resto da seção. Considerando a lei de SARGIN (item 2.5.1) tem-se para o concreto as curvas da figura (6.1.c).



a) Elevação da viga



b) Seção transversal da viga



c) diagrama σ - ϵ (Sargin)

Fig. 6.1.- Viga isostática do C.E.B.T.P.

As condições do ensaio podem ser resumidas da seguinte forma:

- a viga é protendida com uma força inicial de 1610 kN;
- a carga é aplicada com dois macacos colocados nas abscissas dos desviadores
- a carga inicial é de 34kN.

Para o coeficiente de atrito toma-se o valor 0.45 que resultou de um estudo paramétrico feito naquela época com outro programa. Os resultados obtidos com o programa são comparados com os experimentais através das curvas apresentadas a seguir. A curva carga-flecha da figura (6.2) medida no meio da viga mostra uma queda brusca de rigidez para uma carga igual a 500 kN. Comparando os diversos resultados, deslizamentos sobre desviadores (figura 6.3), evolução de tensão no cabo (figura 6.4) vê-se que este ponto corresponde ao início da fissuração da viga. O comportamento torna-se não-linear com uma diminuição forte da rigidez. Porém, esta rigidez fica aproximadamente constante depois permitindo à viga resistir ainda a mais quase 200 kN. As duas curvas da figura (6.4) são do programa CARPE e representam a evolução das tensões em dois trechos do cabo ao longo do ensaio. Outros resultados são apresentados para esta viga no anexo B.

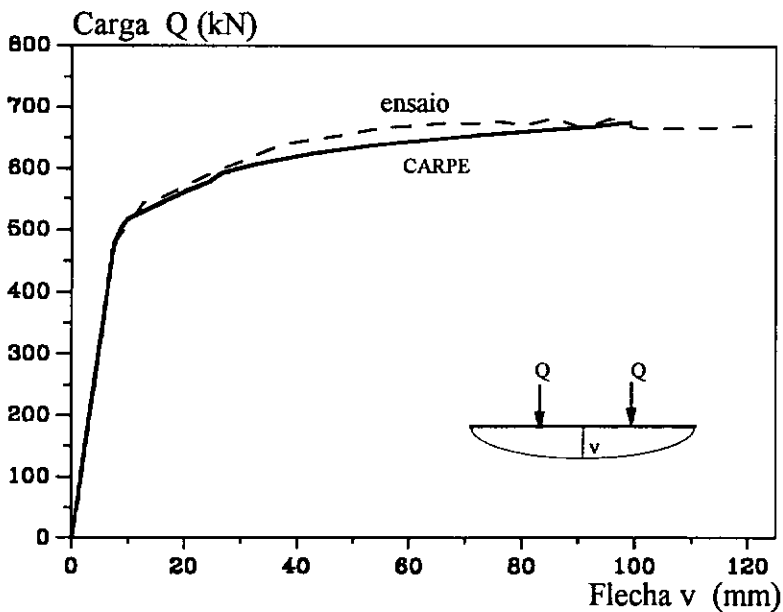


Fig. 6.2.- curva carga - flecha

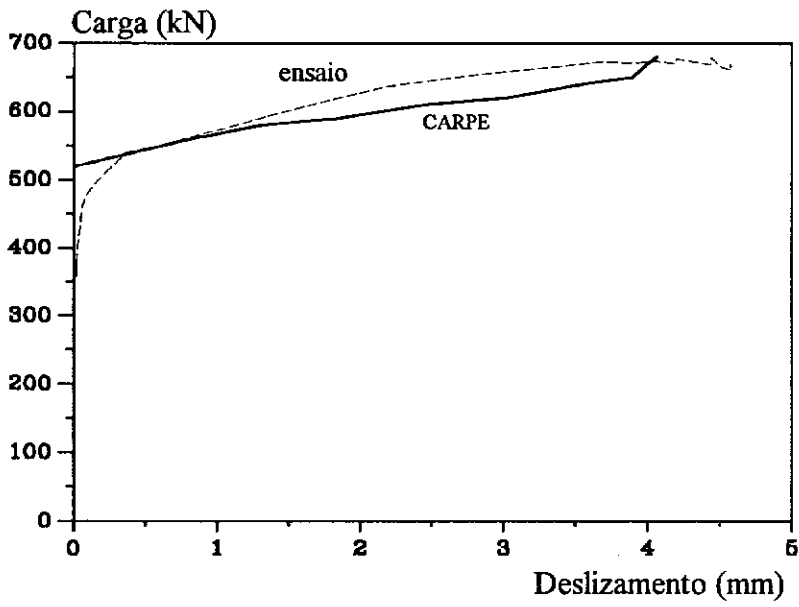


Fig. 6.3.- Curva carga - deslizamento sobre desviador

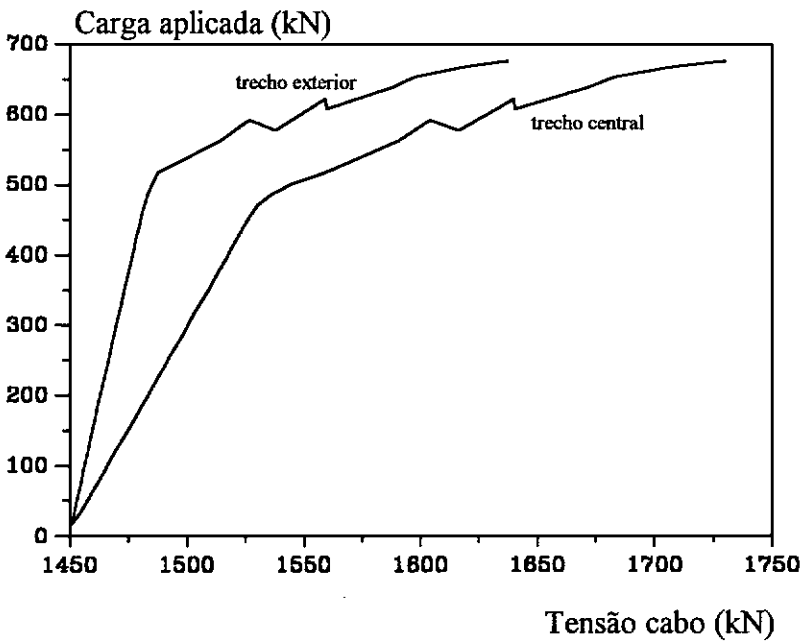


Fig. 6.4.- Tensão nos trechos do cabo (teórico)

6.3.- VIGA DO TEXAS

a) Escolha do modelo

MACGREGOR (1989), apresenta na sua tese de doutorado o relatório de um ensaio realizado com uma viga caixão de três vãos protendida com cabos externos. O ensaio é parte de um programa de investigação encomendado pelo "Texas DHPT" (Texas Department of Highways and Public Transportation). O objetivo é avaliar a resistência e a ductilidade do modelo para extrapolar depois os resultados a um protótipo. Para isto foi necessário dimensionar o modelo através da teoria da semelhança. Com uma análise dimensional - o autor refere a MURPHY (1950) e TAYLOR (1974) - estabeleceu-se os parâmetros adimensionais que relacionam o modelo e o protótipo. Em resumo o modelo deve satisfazer três condições fundamentais:

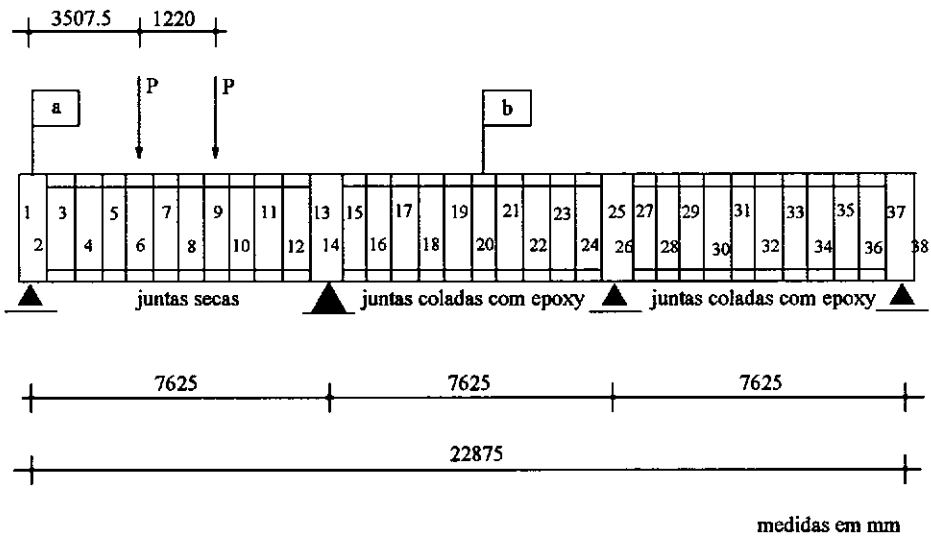
- as dimensões e o carregamento devem ser geometricamente semelhantes aos do protótipo;
- as forças na seção e nos cabos devem variar com o quadrado do fator de escala;
- os materiais do modelo devem ter as mesmas propriedades dos materiais do protótipo.

Após um estudo de custo e de viabilidade construtiva um fator de escala de 1/4 foi escolhido para relacionar modelo e protótipo. Esta escala é para permitir o uso de cordoalhas, de ancoragens convencionais e de concreto preparado em usina. A seção transversal do modelo foi adotada em função daquela do protótipo e com a idéia de contornar as dificuldades de fabricação e de instrumentação dos cabos para um modelo reduzido. Um fator de eficiência, definido por RODOLNY e MULLER (1982) permitiu escolher, dentre as seções aceitáveis, a mais adequada.

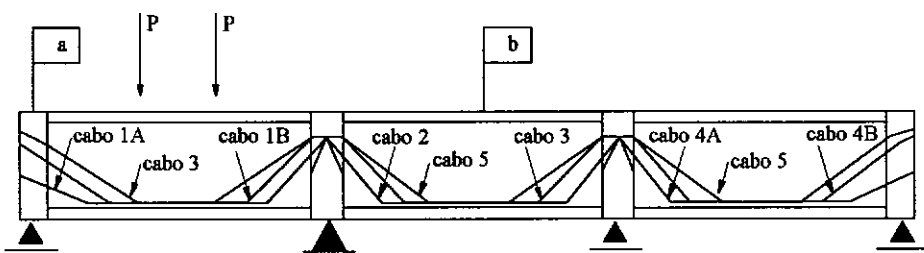
O modelo foi construído para levar o seu peso próprio e trabalhar em serviço como na ruptura dentro das recomendações da AASHTO Bridge Design Specification (1983). A estrutura foi construída de uma maneira seqüencial de forma idêntica ao protótipo, vão por vão. Durante a construção os cabos que percorrem somente um vão são esticados primeiro e os cabos que cobrem vários vãos depois.

b) Descrição do modelo

O modelo foi construído no laboratório da universidade do Texas em Austin. A ponte da figura (6.5.a) é uma estrutura de três vãos simétricos em relação ao eixo vertical central. Cada vão tem 8 aduelas de 68.6 cm. Nos apoios há uma aduela de 30.5 cm. A transição entre vão e apoio é feita com uma aduela de 76.25 cm.



a) Elevação da geometria



b) Cablagem

Fig. 6.5. - Geometria e cablagem da viga

A seção típica do vão é diferente da seção de apoio, figura (6.6). Sobre cada apoio há um bloco com os dispositivos de ancoragens para os cabos de protensão. Como as aduelas dos apoios são fabricadas "in situ", a ligação com as aduelas dos vãos é feita com uma placa de concreto realizada também "in situ". As seções são escolhidas para dar uma

relação comprimento/altura e uma eficiência compatível com o protótipo. No meio de cada aduela há uma transversina através da qual o cabo externo é desviado.

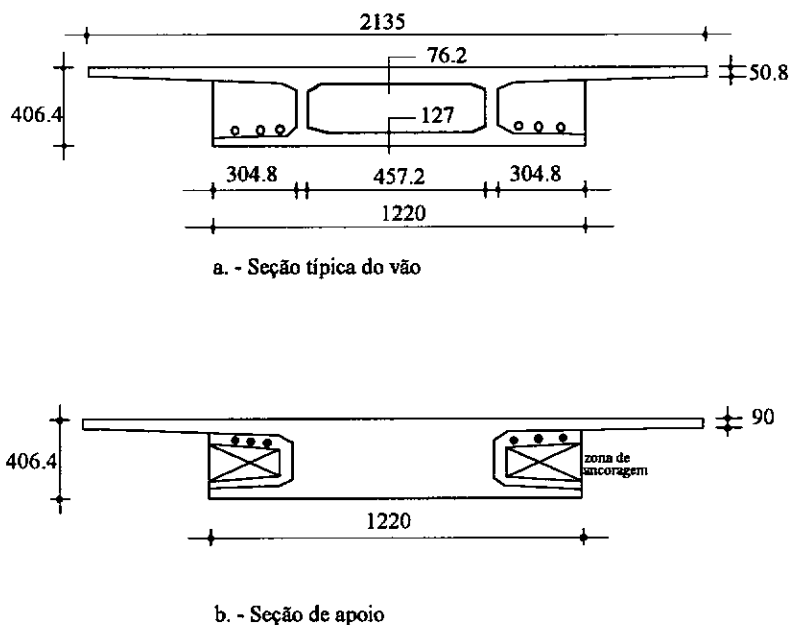


Fig. 6.6.- Seções transversais do modelo

Estas seções precisam de um material quatro vezes mais denso do que aquele do protótipo para reproduzir as tensões de peso próprio. Como não foi possível aumentar a densidade do material, decidiu-se por uma compensação do peso próprio. Uma carga distribuída equivalente a três vezes o peso próprio da estrutura foi pendurada no modelo. Sendo 2793.54 cm^2 a área da seção típica e 2.353 t/m^3 o peso específico do concreto, o peso próprio normal é 6.57 kN/m . Com a compensação o peso próprio total é 26.3 kN/m . O esquema da cablagem é dado na figura (6.5.b). Os cabos caem de pontos altos sobre os apoios para pontos baixos no meio dos vãos. Os números 1A, 1B, 2, 4A e 4B referem-se a pares de cabos - cada cabo tem cinco fios de $3/8''$ de diâmetro - posicionados simetricamente nos lados da estrutura. Os pares 1A e 1B estão no primeiro vão, os pares 4A e 4B estão no terceiro. Estes quatro pares são esticados primeiro. Os pares de cabos 3 e 5 têm dois fios de $3/8''$ de diâmetro cada e percorrem os vãos 1, 2 e 2, 3 respectivamente. Esses são esticados depois da protensão dos pares anteriores. Dois cabos internos são utilizados para reforçar a resistência à flexão e à torção. São cabos retos. Somente o cabo superior é esticado. Para uma descrição mais completa vide MACGREGOR (1989).

c) Propriedades dos materiais

Para o protótipo é previsto um concreto com uma tensão mínima de compressão de 41.37 MPa aos 28 dias. Quatro tipos diferentes de dosagens foram utilizadas na produção do concreto das aduelas pré-fabricadas. Porém, o quadro de propriedades apresentado por MACGREGOR (1989) para as aduelas permite definir nove tipos diferentes em função da resistência a compressão e do módulo de elasticidade, parâmetros característicos de concreto na entrada de dados para o programa CARPE.

Para permitir tensões elevadas durante a protensão as aduelas dos apoios, as quais servem de ancoragens, foram projetadas com concreto de alta resistência. A tabela (6.1) mostra os dados destes concretos.

Tipos de concreto	Aduelas	Resistência aos 28 dias (MPa)	Módulo de elasticidade (MPa)
1	1,2,25,26,27,38	91.70	45438
2	13,14	69.88	38508
3	5,9,10	33.53	24822
4	4,6,8,11	39.30	25650
5	3,12,15,17,21,22	43.43	26890
6	7,18,20,27,35	47.16	29373
7	19,23,24,26,28,29,33,34	50.66	31372
8	30,32	51.00	31551
9	31,36	60.47	31786

Tabela 6.1 - Características dos concretos

Todos os cabos usados para a protensão são de 3/8" de diâmetro e de baixa relaxação (270). O fio tem uma seção de 0.5488 cm², uma resistência última de 1924 MPa para uma deformação de 5.47 % e um módulo de elasticidade de 195818 MPa. Para os aços de reforço vários diâmetros foram utilizados dependendo da necessidade. A resistência última para estes aços é 810 MPa sendo 210000 MPa o módulo de elasticidade. Os cabos externos são protendidos com uma tensão igual a 80 % de sua resistência última ou seja 1539 MPa. As perdas para os cabos até o dia do ensaio variam entre 8 e 18 %. Para o

cálculo considera-se para todos os cabos uma perda de 14%. Assim a tensão nos cabos para o início do ensaio é 1350 MPa.

d) discussão dos resultados

O ensaio do Texas proporciona muitos dados para uma comparação tanto do ponto de vista global como para a análise local. Apresentam-se a seguir alguns destes resultados: curva carga-flecha, curva dos deslizamentos sobre desviadores para um cabo, a variação de tensão num trecho de cabo. Estes parâmetros são só alguns dos tantos que poderiam servir na comparação. Outros resultados são apresentados para esta viga no anexo B. A figura (6.7) mostra a comparação de curva carga-flecha medidas um pouco a esquerda do ponto de aplicação da carga (3.28 m do apoio). A relação carga-flecha é linear até uma carga de 70 kN. Porém, a carga de decompressão é mais baixa. Segundo o relatório seu valor é em torno de 40 kN. A curva carga-deslizamento sobre desviadores do cabo 1A apresentada na figura (6.8) ajuda a interpretar isto. É pouco provável ter deslizamento sem uma decompressão da viga. A 140kN começa a plastificação da viga. Ai, a rigidez da viga começa a cair rapidamente e conseqüentemente a curva carga-flecha deixa de ser linear. Porém, depois esta rigidez fica bastante constante até a ruptura da peça.

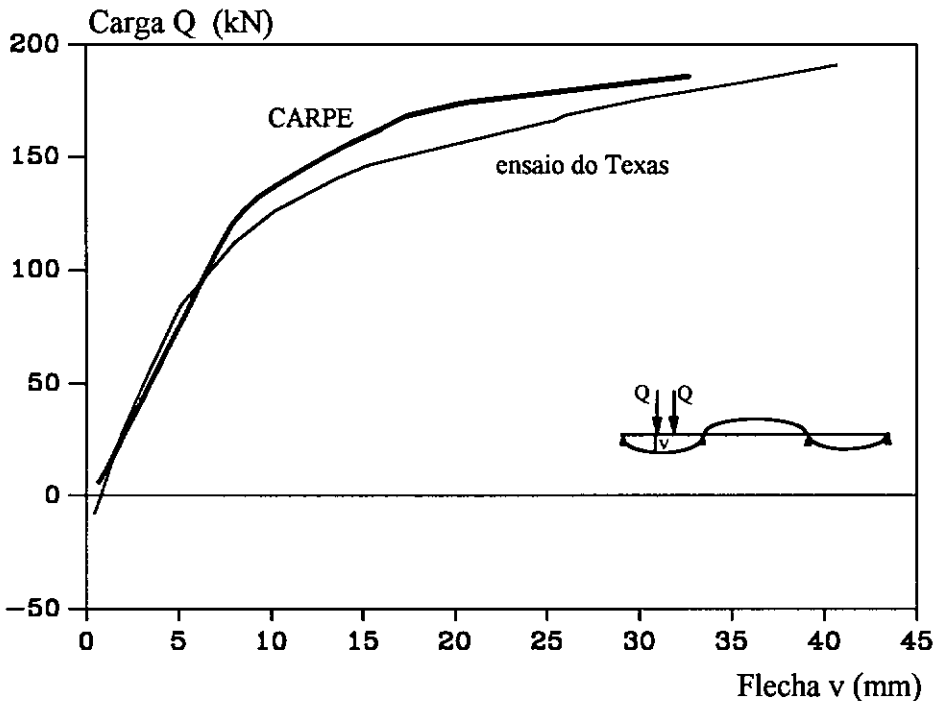


Fig. 6.7. - Curva carga-flecha

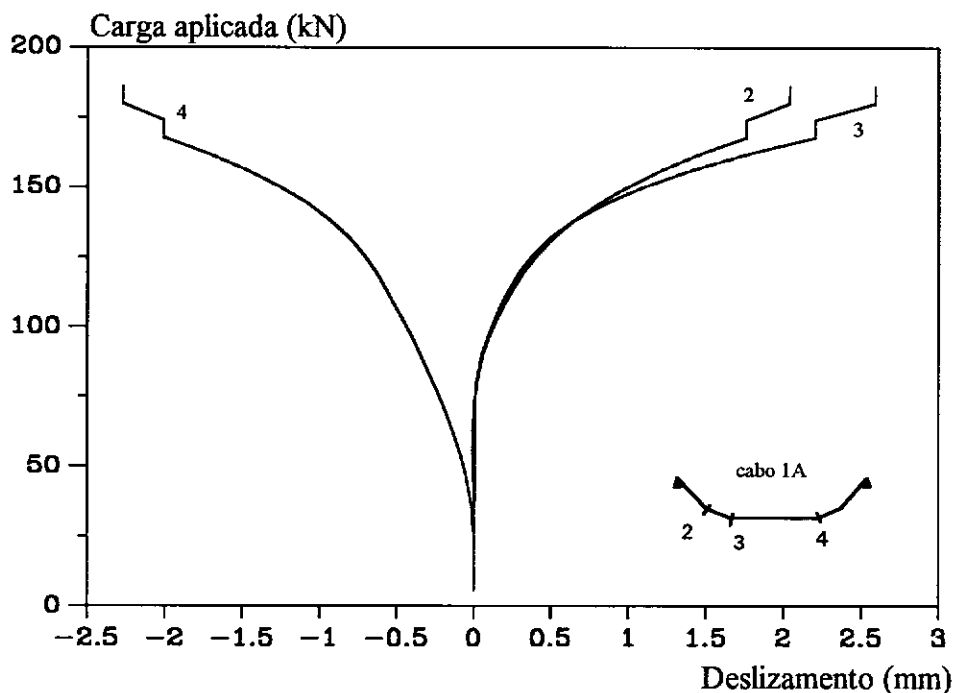


Fig. 6.8.- deslizamento para o cabo 1A

Apresentam-se a seguir as variações de tensão num trecho do cabo 1B (figura 6.9). O programa não dá quase nada de variação para a fase de comportamento linear da viga. A curva do ensaio arranca a partir da carga de descompressão da viga enquanto o programa faz isto significativamente apenas no nível de carga para o qual começa a plastificação. O motivo desta diferença pode ter várias origens

- as tensões iniciais nos trechos dos cabos não são exatamente iguais. Considera-se uma perda única de 14% para o cabo inteiro quando na verdade as perdas são diferentes para cada trecho;

- o coeficiente de atrito real entre cabo e desviador pode ser diferente daquele que se usou. Os pesquisadores que realizaram o ensaio dizem que este coeficiente poderia estar entre 0.20 e 0.40, porém eles não apontam que melhores estudos deveriam ser feitos para avaliar o verdadeiro coeficiente de atrito a usar.

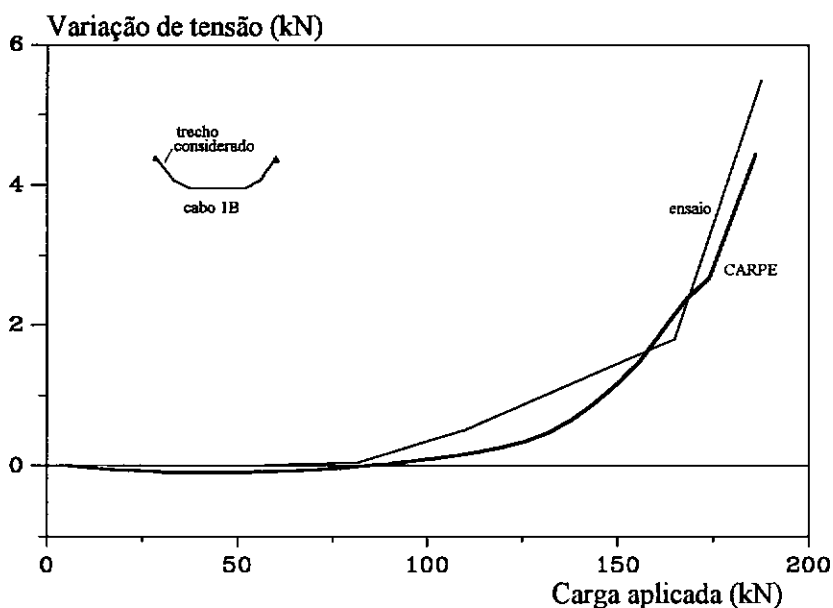


Fig. 6.9.- Variação de tensão - cabo 1B

6.4.- COMPARAÇÃO COM PROGRAMAS - VIGAS DO "BENCHMARK TEST"

6.4.1.- Descrição dos programas

No citado congresso na França em junho de 1993, os organizadores propuseram uma comparação de métodos de cálculo não-linear para estruturas protendidas. Escolheu-se para isso dois exercícios com certa flexibilidade para serem adaptados a qualquer programa de cálculo. Trata-se de uma viga isostática e de uma hiperestática. Todos os tipos de protensão podem ser utilizados. Para o que interessa no presente estudo considera-se somente os casos com 100% de protensão externa. Os resultados apresentados no relatório do congresso são para vigas protendidas com cabos fixos sobre os desviadores. Assim não há dados para comparar os resultados de um caso intermediário entre o cabo fixo e o caso ideal do cabo livre sem atrito nenhum. Os resultados obtidos para tal caso com o programa CARPE são apresentados em curvas junto com os obtidos para os cabos presos sobre desviadores.

A comparação com outros programas é difícil. O relatório do seminário retem os resultados de quatorze programas. A publicação que relata a comparação apresenta unicamente as curvas carga-flecha. Os resultados dos diferentes programas formam um feixe bastante largo. Para falar em números, pode-se estabelecer, para ter uma idéia geral, a relação entre os valores extremos obtidos para as flechas e as cargas. A carga máxima

alcançada por alguns programas é duas vezes maior do que aquela obtida por outros programas. Para a flecha máxima, a relação entre os máximos valores chega, em alguns casos a seis ou sete. Vale esclarecer também que nem sempre o programa que dá a maior carga obtém também a maior flecha.

É difícil estabelecer um critério para definir qual deles reproduz melhor o comportamento real da viga pois não há resultados de ensaio para confrontar. Mas quando lê-se as descrições dos métodos de cálculo utilizados por cada programa ficam justificadas as diferenças. Os métodos são bem diferentes para cada programa. Alguns são simplificados (por exemplo um cálculo iterativo com atualização da matriz tangente da seção transversal), enquanto outros são mais complicados (cálculo baseado na energia de fratura, cálculo não-linear combinado com o método de elementos finitos e com solução analítica prévia, cálculo com elementos finitos para viga-coluna). Porém a aparência das distintas curvas é bem parecida. Alguns programas chegam mais longe do que outros. Certos dão somente uma idéia geral do comportamento, outros fazem um verdadeiro cálculo não-linear e proporcionam muitas informações sobre o comportamento local da viga. Estas informações permitem seguir a evolução de parâmetros tais como:

- tensão dos cabos;
- aberturas de juntas para as vigas com aduelas;
- tensão e deformação no concreto e no aço.

Para a comparação, escolhem-se alguns dos programas apresentados:

- aqueles que tivessem resultados para todos os tipos de estruturas consideradas;
- aqueles cujas curvas carga-flecha ficam no meio do feixe de resultados.

Antes de passar aos resultados, apresenta-se uma descrição sucinta dos programas escolhidos para a comparação. O número que segue o nome do programa é utilizado para indicar a qual programa corresponde cada curva nas figuras.

a) Programa DLTPC-ABAQUS (7)

O programa usa o algoritmo comum de elementos finitos. Os autores EIBL e RETZEPIS (1993) utilizam um elemento plano com três nós e três graus de liberdade por nó. O modelo considera as não-linearidades dos materiais conforme a seguir:

- o concreto tem um diagrama tensão-deformação do tipo parabólico retangular;
- o aço tem uma lei bi-linear;
- o comportamento não-linear dos cabos

A versão DLTPC trata as vigas monolíticas. No caso das vigas compostas de aduelas pré-fabricadas a versão ABAQUS utiliza elementos especiais para modelar o contato entre as aduelas. O modelo permite transmitir pressões e esforços de cortantes. O programa considera sempre uma resistência a tração para o concreto mas o relatório não dá a lei utilizada para representá-la.

b) Programa ConcreteMac (8)

OJDROVIC (1993), através de um processo unificado faz a análise de concreto armado, de concreto parcial ou totalmente protendido. O sistema de equações não-lineares de equilíbrio é resolvido pelo método dos elementos finitos. As não-linearidades materiais e geométricas são consideradas.

Para incluir o efeito "tension stiffening" o método propõe uma modelagem nova para a relação tensão-deformação do concreto em tração. Segundo o relatório essa modelagem está baseada no conceito de energia de fratura, a qual é modificada para tomar em conta o aço de reforço. Todos os tipos de protensão podem ser combinadas.

c) Programa VOV (9)

Os autores são G. IVÁNYI, W. BUSCHMEYER e Y. HU (1993). O comportamento à flexão de vigas protendidas com cabos não aderentes é tratado pelo método de elementos finitos utilizando elementos de viga. As relações não-lineares para o concreto, o aço passivo e o aço de protensão são usadas para calcular a curvatura de flexão e a rigidez dos elementos de viga. Para o caso de vigas com aduelas pré-fabricadas o aço de reforço e o concreto não têm tensão de tração nas seções de junta.

d) Programa VOK-2 (10)

Segundo o relatório, o programa está baseado em suposições muito simples para facilitar a análise no estado último de pontes protendidas com cabos convencionais internos e com cabos externos. Os autores são VITEK, J.L. & VITEK, P. (1993). O comportamento não-linear dos materiais é considerado. Quando se trata de tração no concreto, o efeito

"tension stiffening" é considerado. Para a fissuração, o critério de BAZANT e OH (1983) é adotado. A análise não-linear é feita pelo método de Newton-Raphson. O programa permite controlar as tensões e os deslocamentos em serviço e na ruptura. A carga última é determinada através de um cálculo iterativo. Os cabos de protensão externa são considerados ou fixos ou livres sem atrito nenhum. Durante a análise, a estrutura é considerada sem capacidade portante quando a tensão ou deformação máxima em compressão é alcançada no concreto ou quando a deformação nos aços de reforço ou de protensão alcança o valor máximo admitido.

6.4.2.- Dados para a comparação

a) Casos considerados

A comparação é feita através do cálculo de uma viga hiperestática. A protensão é totalmente externa. A tabela (6.2) mostra um resumo dos casos escolhidos para essa comparação.

	VIGA HIPERESTÁTICA	
	monolítica	com aduelas
PROG 7	x	x
PROG 8	x	
PROG 9	x	x *
PROG 10	x	x
CARPE	x	x *

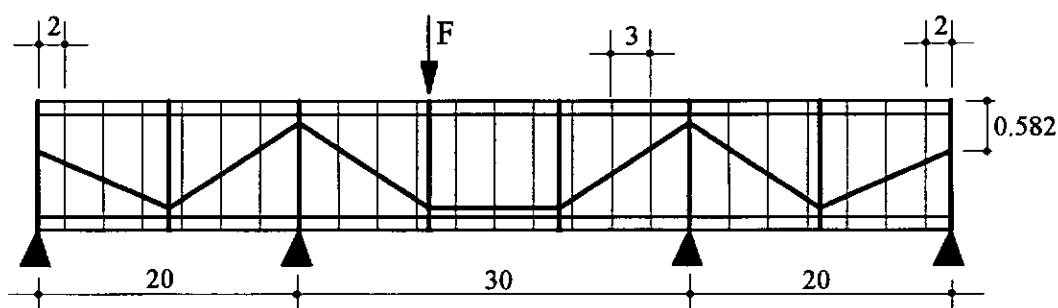
* : sem tensão de tração no concreto na junta

Tabela 6.2.- Exemplos testados

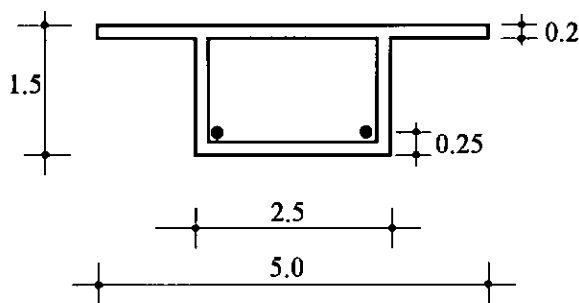
b) Geometria da viga

A viga hiperestática é uma viga contínua de três vãos. Na figura (6.10.a) é mostrada uma elevação da viga. Tem-se uma distribuição simétrica dos desviadores em relação ao meio, sendo o comprimento total de 70 m. Ela é considerada em duas versões: uma monolítica "in situ" e outra com elementos pré-fabricados. Estes elementos pré-fabricados tem todos 3m, a exceção dos elementos de extremidades que têm 2m. A seção transversal da viga é ilustrada na figura (6.10.b). A viga original permite os seguintes sistemas de

protensão: 100 % externo, 100% interno, 50% interno e 50% externo. Analisa-se aqui somente o caso com 100 % de protensão externa. Esta protensão é aplicada com um par de cabos cujas características são as seguintes: uma área nominal de 22.5 cm^2 para cada cabo; uma força efetiva após perda de 3000 kN ou seja uma tensão de 1333 MPa. Duas camadas de aço de reforço, uma superior de 30 cm^2 e outra inferior de 40 cm^2 são colocadas na seção transversal. A viga tem um peso próprio de 48.5 kN/m . Uma carga variável aplicada a 30 m do apoio esquerdo permite levar a viga a ruptura por incrementos sucessivos.



a) elevação da viga



b) seção transversal

dimensões em m

Fig. 6.10. - Geometria da viga

c) Características dos materiais

As leis de comportamento dos materiais a utilizar são definidas pelas curvas tensão-deformação apresentadas a seguir. O diagrama do concreto é parabólico retangular como mostra a figura (6.11.a). O concreto tem uma tensão característica de 20 MPa correspondente a uma deformação de 2‰. A Resistência máxima do concreto à tração é de

2.4 MPa e a deformação correspondente é 0.12 %. A figura (6.11.b) mostra a lei do aço de reforço. É uma lei elasto-plástica perfeita, idêntica em tração e em compressão. A tensão de escoamento é de 400 MPa. A lei do aço de protensão é linear até o limite de proporcionalidade (1575 MPa) e segue depois com uma função de quinto grau até a tensão de ruptura (1669.5 MPa). O módulo de elasticidade tangente na origem é 190000 MPa.

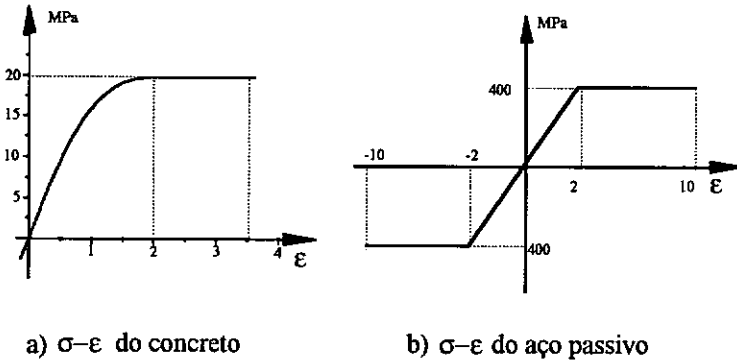


Fig.6.11. - Curvas σ - ϵ impostas para os materiais

6.4.3.- Discussão dos resultados

O programa CARPE utiliza basicamente as mesmas leis para os materiais. Para a tração o diagrama não termina bruscamente quando o concreto alcança sua resistência máxima à tração. Ele termina com uma função quadrática como visto no item 2.5.1.b.

As curvas carga-flecha do relatório são reproduzidos para essa discussão. Nelas incorporam-se os resultados obtidos com o programa CARPE para o mesmo modelo. Apresentam-se a seguir os diversos casos.

a) Viga hiperestática monolítica

Na figura (6.12) nota-se que as curvas mostram no início uma inclinação diferente. Como esta parte corresponde ao domínio elástico do material, é de se supor que os programas adotaram um módulo de elasticidade na origem diferente já que o relatório não especifica o módulo a usar. Porém, este valor, conforme o diagrama de tensão do relatório, deveria ser 20000 MPa. Por outro lado, calculado pelas fórmulas empíricas, o módulo de elasticidade que corresponde à tensão de compressão dada, está em torno de 29000 MPa. A curva do programa CARPE desenhada em traço forte, é obtida com o módulo de 20000

MPa (módulo tangente na origem). A curva [9] estaria indicando uma viga mais rígida. Nota-se que pouco depois de começar a fissuração, o cálculo se detém sem chegar à carga de ruptura da viga. Normalmente isto caracteriza uma ruptura brusca, típica de estrutura pouco dúctil. Quanto à curva [10], esta começa com o módulo de elasticidade na origem menor do que o das outras curvas. Porém, um fato estranho, parece ganhar rigidez antes de fissurar. É interessante o caso da curva [7]. Praticamente acompanha a curva do programa CARPE, mas no início da fissuração apresenta uma perda brusca de rigidez.

São algumas observações na tentativa de interpretar estes resultados parecidos mas diferentes. Estas observações não são suficientes para dizer qual destas curva está mais próxima do que poderia ser o comportamento real da estrutura. Porém, a boa concordância do programa CARPE com os dados experimentais das duas vigas apresentadas acima permite pensar que a curva obtida com ele para esta viga pode estar bastante próxima da real.

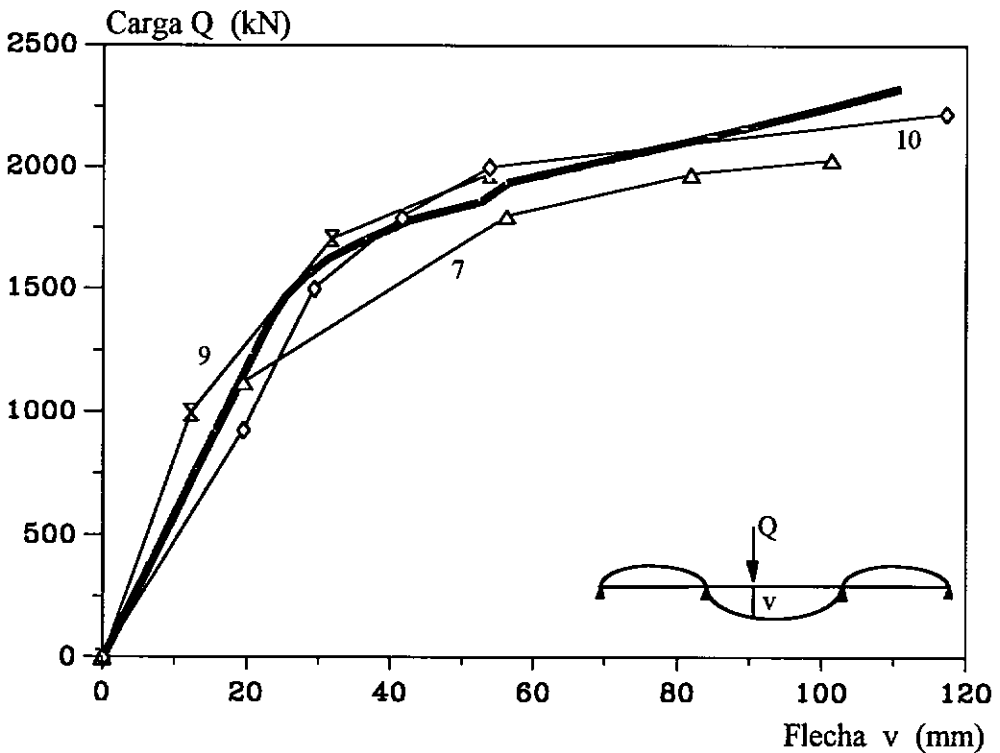


Fig. 6.12.- Viga monolítica

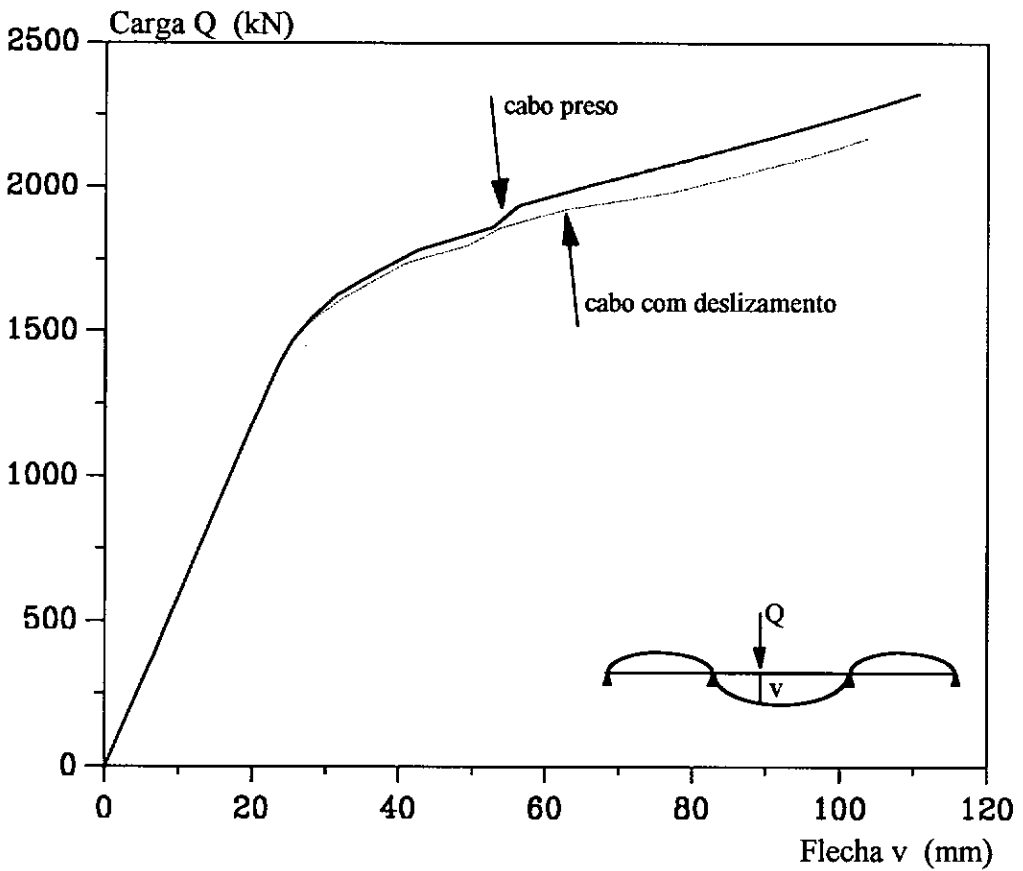


Fig. 6.13. - Comparação entre vigas com e sem deslizamentos de cabo

A figura (6.13) mostra duas curvas obtidas com o programa CARPE. Uma é a curva antes comparada com as curvas dos programas do "benchmark test" e a outra é a resposta da viga quando se considera a possibilidade de deslizamento do cabo sobre os desviadores. O coeficiente de atrito usado é 0.30. As curvas começam a se separar no momento em que o cabo começa a deslizar sobre os desviadores. A figura (6.14) mostra as curvas carga-deslizamento para os diferentes desviadores. Nota-se que os deslizamentos aparecem somente sobre os desviadores do vão central. Em termos de comparação não se tem outros resultados dos programas. Outros parâmetros que servem na análise local de comportamento das seções são apresentados no anexo B.

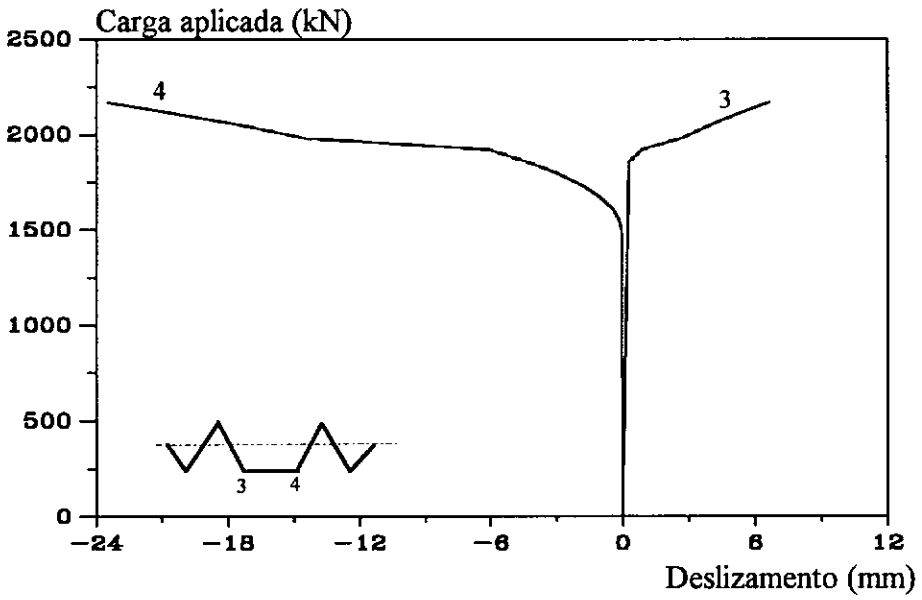


Fig. 6.14.- Deslizamento sobre desviadores

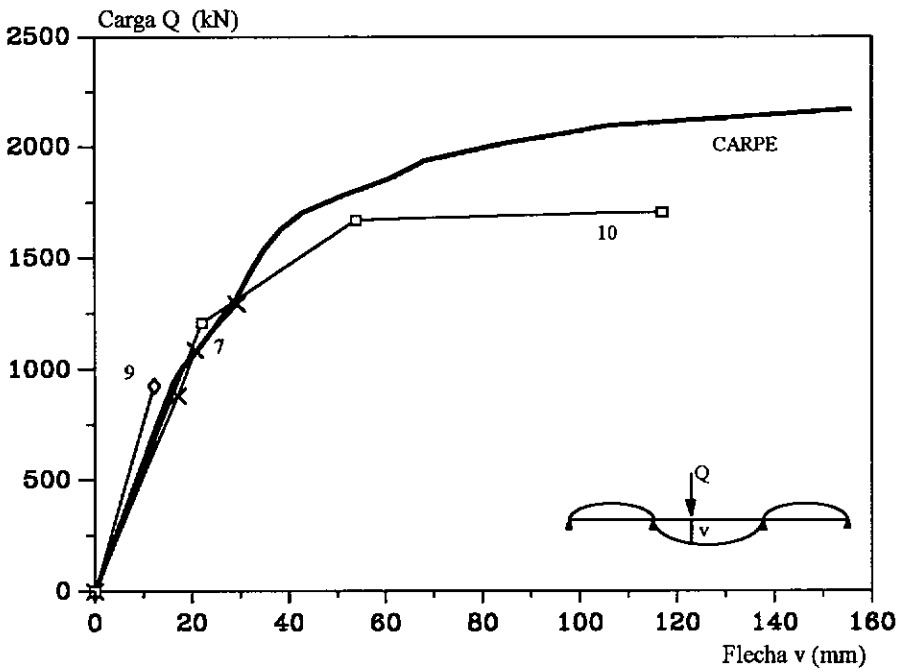


Fig. 6.15.- Viga com aduelas

b) Viga com aduelas pré-fabricadas

A figura (6.15) apresenta as curvas carga-flecha para uma viga de elementos pré-fabricados. Nota-se que as curvas seguem a mesma tendência que no caso da monolítica. Os resultados dos programas ficam num feixe mais restrito ainda. Para a curva do programa CARPE a queda de rigidez é mais lenta. Desta vez a curva [10] tem a mesma tangente na origem do que a curva do CARPE. No resto as diferenças parecem ser a escolha do passo de carga já que as tendências são bem parecidas.

Na figura (6.16) tem-se uma comparação entre o modelo com deslizamento sobre desviador e aquele com cabo preso sobre desviadores. Cabe fazer as mesmas observações que para a viga monolítica. A figura (6.17) mostra os deslizamentos dos desviadores para o caso da viga com aduelas.

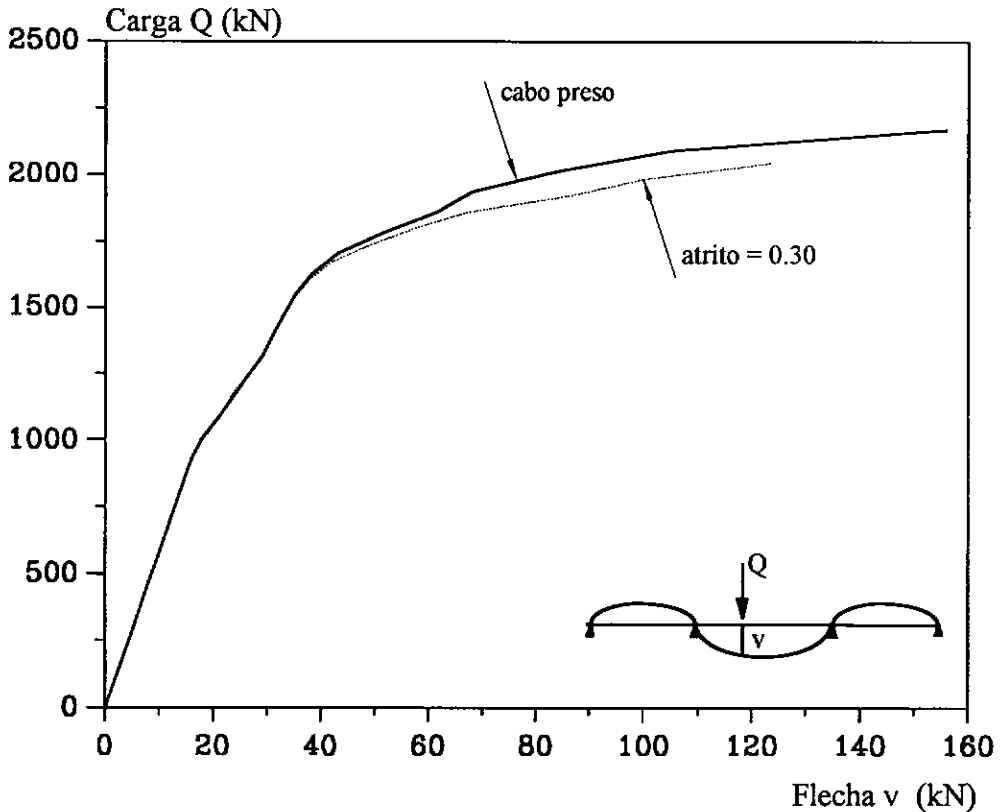


Fig. 6.16.- Comparação de vigas c/aduelas

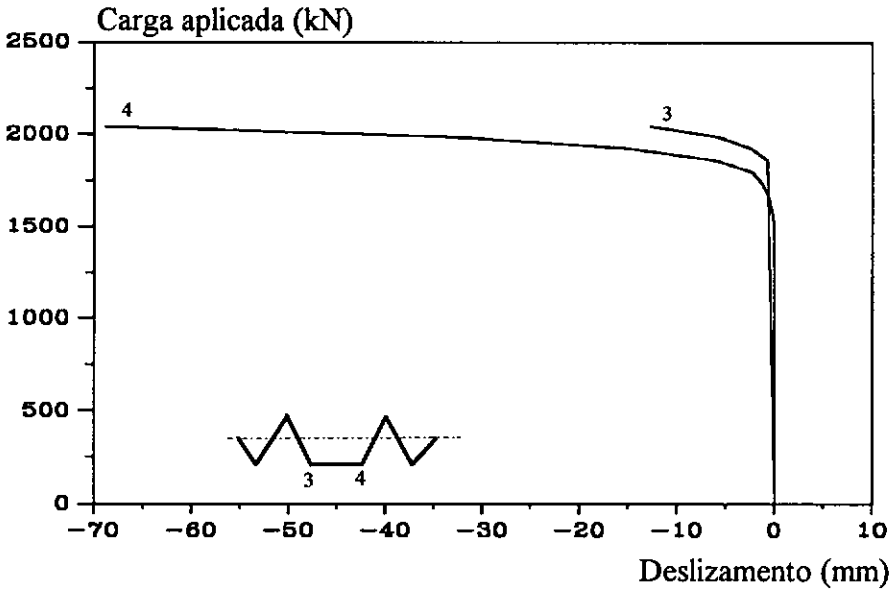


Fig. 6.17.- Curva carga - deslizamento sobre desviadores

6.5.- VIGAS DE "PAULO REGIS "

Procurando uma justificação do modelo, um programa de ensaios está sendo preparado no âmbito da tese de doutorado de PAULO REGIS (1993). É um conjunto de 5 vigas, as quais devem fornecer informações para os três tipos de protensão. A figura (6.18) apresenta as características geométricas da viga mostrando uma elevação longitudinal e as diferentes seções típicas. Estas vigas serão de dois tipos: uma monolítica, concretada "in situ" e as outras com aduelas pré-fabricadas. Estas aduelas terão um comprimento de 0.75 m. A viga será protendida com um par de cabos de 3 cordoalhas cada, com uma excentricidade de 0.24 m no vão e 0.20 m nos apoios. A carga será aplicada com macacos hidráulicos. Os cabos passarão sobre quatro desviadores. Dois destes desviadores estarão em baixo dos macacos que proporcionarão o carregamento da estrutura. No segundo vão os outros dois são simétricos em relação aos do primeiro vão. O coeficiente de atrito que se espera é da ordem de 0.30. A previsão é de usar para estas vigas um concreto que tenha uma resistência de 35 MPa aos 28 dias e um módulo de elasticidade de 30000 MPa. Os dimensionamentos são feitos com uma tensão inicial nos cabos igual a 1425 MPa. Com estes dados, o programa CARPE apresenta os resultados a seguir comentados.

6.5.1.- Viga monolítica

A figura (6.19) mostra a curva carga-flecha medida entre as duas cargas. Medidas feitas também embaixo das cargas mostram que a máxima deflexão está entre as duas cargas. O comportamento global não apresenta nenhuma irregularidade. Ao contrário, a viga parece bem comportada. Para os 150 kN, carga para a qual a viga deve começar a fissurar, a variação de rigidez, simbolizada pela tangente à curva é gradual. Porém, no final a ruptura é brusca. Quando a carga de 200 kN correspondente a uma flecha de 35mm é incrementada em 8 % (16 kN) a flecha duplica. Na figura (6.20) tem-se a curva carga-deslizamento sobre desviadores. As mudanças do comportamento da viga observadas na curva carga-flecha se notam também aqui. Resultados sobre tensões, variação de tensão e forças nos cabos são reunidos no anexo B.

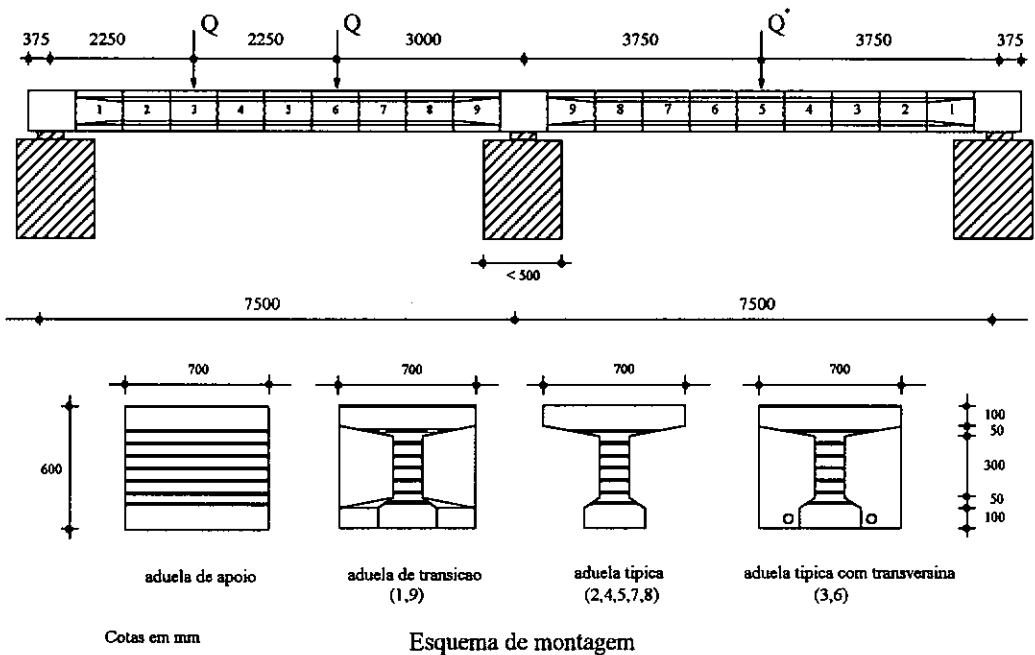


Fig. 6.18.- Viga de "PAULO REGIS"

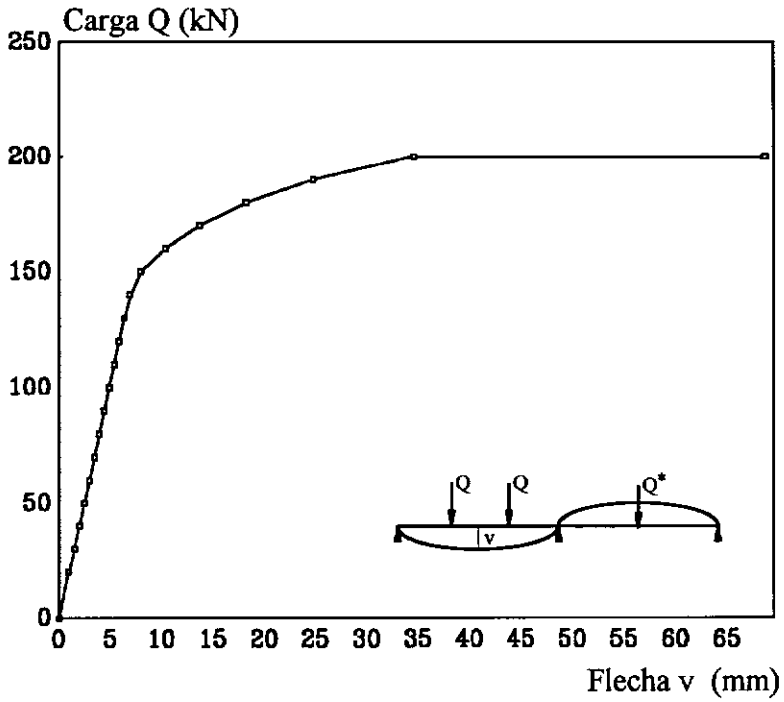


Fig. 6.19.- curva carga - flecha

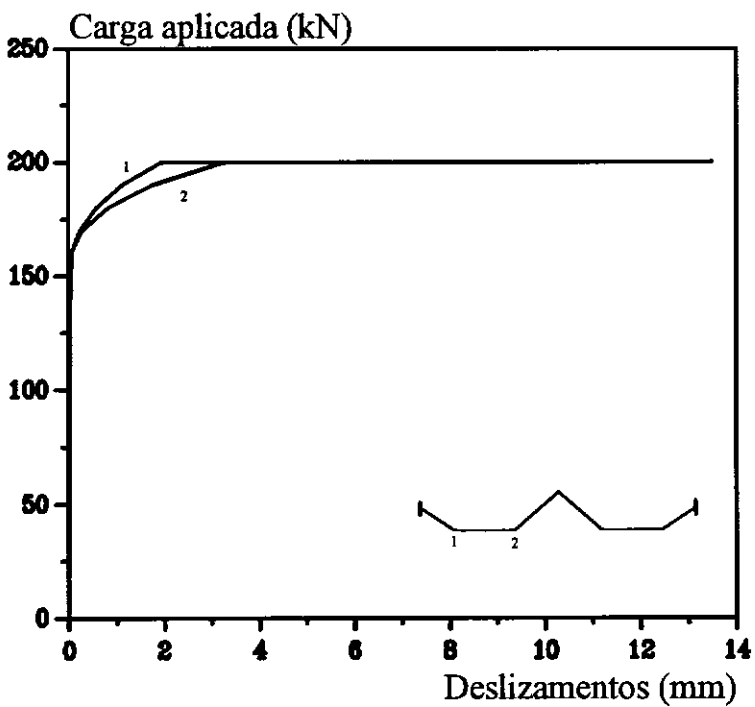


Fig. 6.20.- curva carga - deslizamento sobre desviadores

6.5.2.- Viga com aduelas prefabricadas

Para a viga de elementos pré-fabricados as características são as mesmas descritas para a viga monolítica. As diferenças fundamentais são:

- nas seções de junta não há armadura passiva enquanto a viga monolítica tem uma quantia de 0.8 %
- nas seções de junta o concreto não tem resistência à tração.

Para esta fase de calibração dos ensaios, todos os outros dados são tomados iguais aos da viga monolítica. Porém, o comportamento da viga é algo diferente (fig. 6.21). Agora qual seria a razão disto acontecer. Pode-se notar claramente uma perda de ductilidade da viga. Isto é porque a viga não tem praticamente armadura passiva.

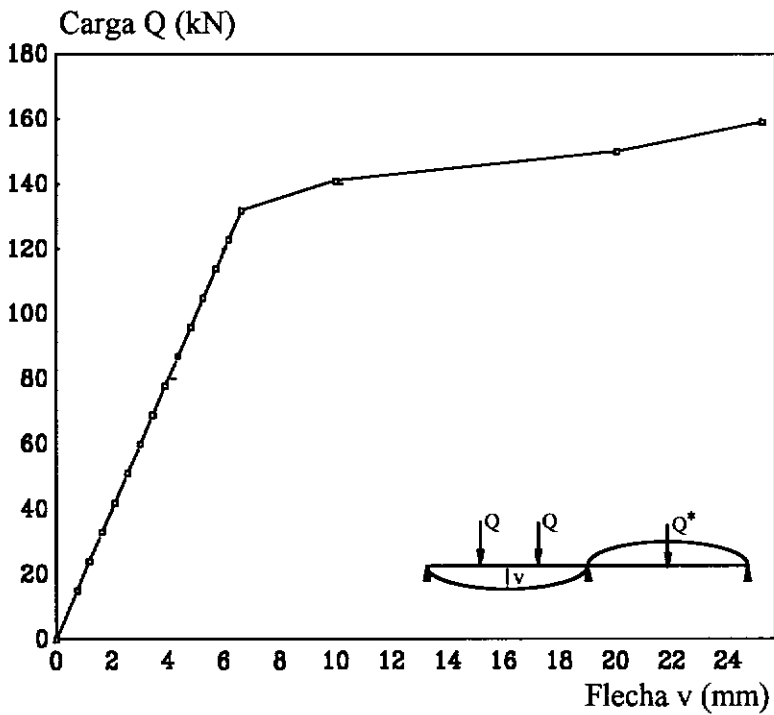


Fig. 6.21.- Curva carga-flecha

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

A tentativa de proceder às verificações nos estados limites de serviço e de ruptura de vigas protendidas com cabos externos leva a problemas específicos (capítulo 4) que fogem aos métodos tradicionais de análise das estruturas com protensão interior aderente. Na pesquisa de solução a proposta de uma modelagem até a ruptura para vigas isostáticas com protensão mista já foi desenvolvida. O método é baseado na teoria das vigas e é aplicado ao cálculo global da estrutura. Nesta tese procurou-se, a partir deste método, resolver o caso das vigas contínuas com protensão externa. Todos os aspectos de um cálculo não-linear são considerados e uma atenção especial é dada aos inerentes à protensão externa. Os principais são:

- a) a não-linearidade física dos materiais é solucionada com a atualização das rigidezes das seções em cada etapa de cálculo;
- b) a determinação dos esforços devidos à cargas externas permanentes (peso próprio) e variável (carga aplicada);
- c) a determinação dos esforços devidos à protensão externa;
- d) o estudo do equilíbrio das seções transversais para as solicitações externas levando em conta a não-linearidade física dos materiais utilizando as variáveis independentes ϵ_g e ω ;
- e) o estudo global onde é considerada a interação entre a viga e os cabos de protensão. As expressões para o cálculo de deslizamentos simultâneos sobre os desviadores dos cabos exteriores são apresentadas explicitamente.

O programa elaborado com este modelo é comparado com outros programas e para alguns exemplos seus resultados são confrontados com os resultados experimentais. Estas comparações permitem avaliar a performance do modelo. Pode-se citar as principais observações feitas através das comparações.

A comparação com os distintos programas para o mesmo "benchmark test" mostra um comportamento bastante bom. As curvas obtidas com o programa CARPE ficam em todos os casos dentro do feixe de curvas obtidas a partir dos outros programas. Na comparação com os dois ensaios apresentados, a performance é bastante similar. São razões suficientes para pensar que esta tentativa de resolver o problema das vigas contínuas com protensão está no caminho certo.

Porém, os testes com as vigas serviram também para observar a grande sensibilidade do cálculo em análise não-linear física. Apresenta-se a seguir as principais observações feitas durante os testes.

a) A influência da porcentagem de armadura passiva é decisiva para o comportamento das vigas no início da fissuração. As vigas providas de armadura passiva mostram ter perdas de rigidez mais suave, enquanto as outras têm uma queda brusca. Às vezes isto ocasiona problema numérico e o cálculo se detém sem alcançar o valor do par (carga-flecha) esperado para a ruptura.

b) A escolha do passo de carga assim como a carga inicial podem influenciar o comportamento da viga na fase de fissuração. Uma idéia do resultado que se espera pode permitir a boa escolha satisfatória do passo de carga. Por exemplo, para uma viga com pouca armadura passiva deve-se tomar um passo pequeno.

c) O equilíbrio das seções e o cálculo das tensões dos cabos de protensão são feitos através de métodos iterativos. Valores confiáveis destes parâmetros dependem das tolerâncias adotadas para o controle do cálculo.

d) A variação do coeficiente de atrito influencia no ponto de início de deslizamento sobre desviadores.

Os resultados obtidos confirmam a validade do modelo e a possibilidade de aplicá-lo às vigas hiperestáticas.

Porém, vários assuntos merecem outros estudos para aprimoramento do método. Do ponto de vista teórico deve-se procurar:

- uma solução mais geral que a apresentada no item 5.5 para o problema de excentricidade dos cabos em cabeças de viga;
- uma nova formulação para a avaliação da abertura de junta sem armadura. Esta é calculada segundo a expressão do item 5.8.
- a inclusão no modelo das diferentes perdas de protensão;

No que se refere ao programa CARPE deve-se procurar:

- a forma de incluir para o concreto em compressão outras leis alternativas;
- implementar os algoritmos necessários para o uso de cablagens parabólico e estender a análise à protensão interna;
- melhorar os critérios de convergência. O critério da versão atual do programa é o da força (seção 5.7). Mas como a grande parte da deformação da estrutura acontece num intervalo muito reduzido de tensão, nota-se uma grande dificuldade para pegar os últimos pontos da curva. Embora o valor da carga seja correto, devido à problemas numéricos, nem sempre podemos determinar os valores das deformações. Uma solução pode ser trocar o critério de força para o critério de deslocamento. Isto poderia controlar as dificuldades que aparecem nos distintos cálculos iterativos.

ANEXO A

NOTAÇÕES

No objetivo de ajudar a compreensão são reunidos neste anexo as principais notações utilizadas no trabalho. Algumas letras usadas, tais como o "i", o "j" não foram assinaladas porque são usadas em lugares diferentes com sentidos diferentes. Mas nestes casos, são definidos no parágrafo evitando qualquer confusão.

A.1.- LETRAS GREGAS

σ_c : tensão de compressão do concreto

ξ_i : abreviação de $e^{a_i \cdot f_i \cdot \alpha_i}$

α_i : ângulo de desviação de um cabo sobre um desviador

f_i : coeficiente de atrito do desviador d_i

ϵ_g : deformação axial no centro geométrico de uma seção

ϵ_{ct} : deformação correspondente a f_{ctj}

ϵ_u : deformação de ruptura do concreto

ϵ_i : deformação de uma fibra i

ϵ_r : deformação do aço no final do patamar plástico

ϵ_c : deformação do concreto a compressão correspondente a σ_c

σ_e : limite de elasticidade do aço passivo para uma deformação de 2 %

ϵ_a : limite de elasticidade longitudinal do aço mais tracionado

σ_j : resistência na idade j em dias de concretagem

σ_r : tensão de ruptura

σ_u : tensão de ruptura do concreto

σ : tensão normal

γ_F : uma tolerância pré-fixada para o controle de convergência nas forças

ω : curvatura de uma seção

α, β : coeficientes numéricos nas leis de comportamentos dos aços

-
- ϕ : operador
 η : ordenada de um diagrama de linha de influência
 λ : parâmetro de carga
 ϕ_t : aplicação linear tangente do operador ϕ

A.2.- LETRAS MAJÚSCULAS

- \bar{H} : ação hiperestática devida à protensão
A: área genérica de um elemento qualquer de uma seção
E: módulo de elasticidade correspondente à área A
 E_{c_0} : módulo de elasticidade do concreto na origem no diagrama tensão-deformação
 E_s : módulo de elasticidade longitudinal
Aa: área de aço passivo
Ac: área de concreto
Ac: área de concreto
AE: vetor das forças aplicadas
Ap: área de aço de protensão
D: vetor de deslocamentos
E: módulo de elasticidade
EA: rigidez à deformação axial
EI: rigidez à flexão
F: vetor de forças internas
H: ação isostática devida à protensão
I: momento de inércia de uma seção transversal homogênea
LI: linha de influência
M: momento fletor total
N: esforço normal total
Pa: força de desviação sobre um desviador
Pi: força de protensão num trecho de cabo
R: vetor de forças externas totais
RG: matriz de rigidez global
RL: matriz de rigidez de um elemento
S: uma seção genérica
Ti: tensão num trecho
U: vetor das deformações

A.3.- LETRAS MINÚSCULAS

- a_i : coeficiente de valor +1 ou -1
- f_{ctj} : tensão de tração máxima do concreto
- d_j : indica um desviador
- e : base dos logaritmos neperianos
- e : excentricidade de um cabo
- g : deslizamento de um cabo sobre um desviador
- k e k' : parâmetros adimensionais
- L : comprimento de uma viga

A.4.- ÍNDICES E SÍMBOLOS

- c : referente ao concreto
- g : referente ao centro geométrico
- p : referente à protensão
- x : referente à direção "x"
- y : ordenada de uma fibra de concreto
- y : referente a direção "y"
- z : referente a direção "z"
- $\| \|$: indica a norma euclidiana de um vetor
- $[]$: indica uma matriz
- $\{ \}$: indica um vetor

ANEXO B

ANÁLISE LOCAL DO COMPORTAMENTO

Este anexo contém um conjunto de curvas obtidas pelo programa CARPE para as diversas vigas estudadas neste trabalho. Em geral estas curvas representam a evolução de algum parâmetro em função da carga aplicada na estrutura. Porém, são apresentadas também algumas curvas combinando parâmetros diferentes da carga. Isto é para mostrar a variedade de resultados que o programa permite analisar. Apresenta-se a seguir cada viga com as curvas realizadas para ela. Em alguns casos realiza-se a comparação com os dados dos ensaios. É o caso da curva de abertura de junta para a viga do texas. Infelizmente o resultado não é bom.

B1.- Viga isostática

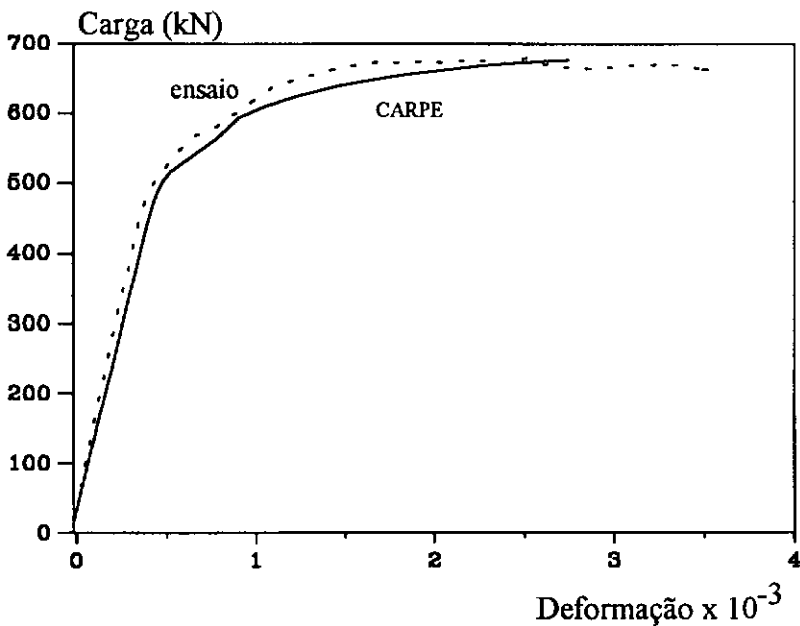


Fig.-B1.1 - Curva carga deformação no bordo comprimido do concreto

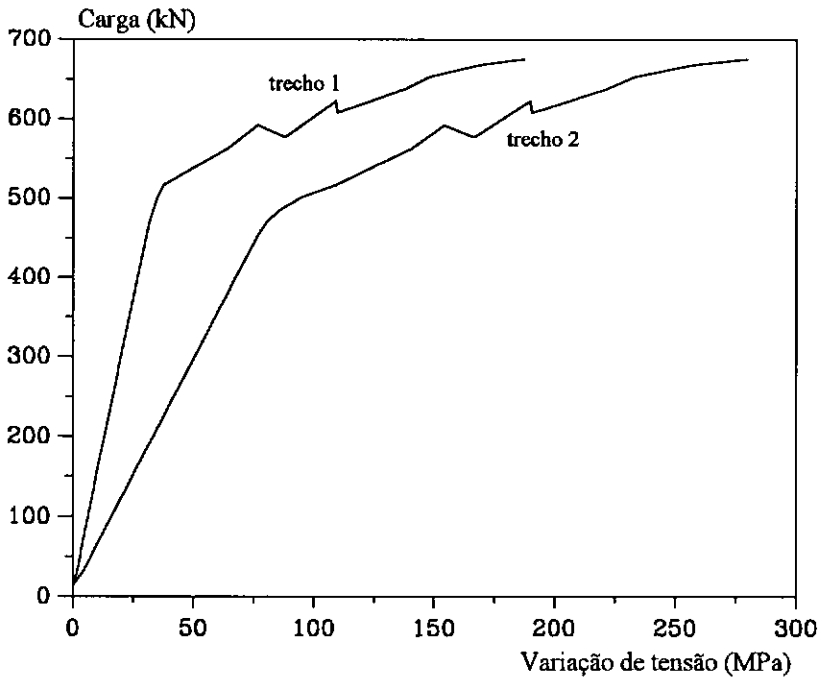


Fig. B1.2 - Curva carga-variação de tensão do cabo (teórico)

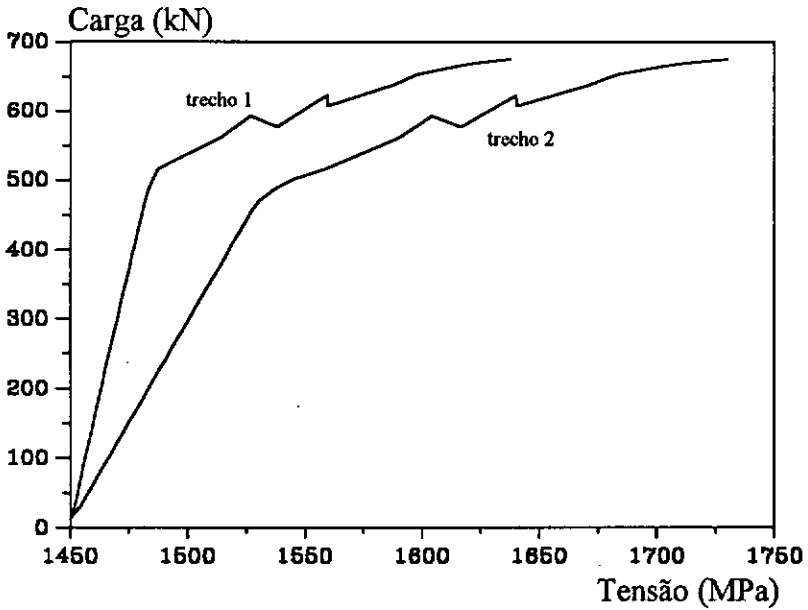


Fig.-B1.3 - Curva carga-tensão do cabo (teórico)

B2.- Viga do Texas

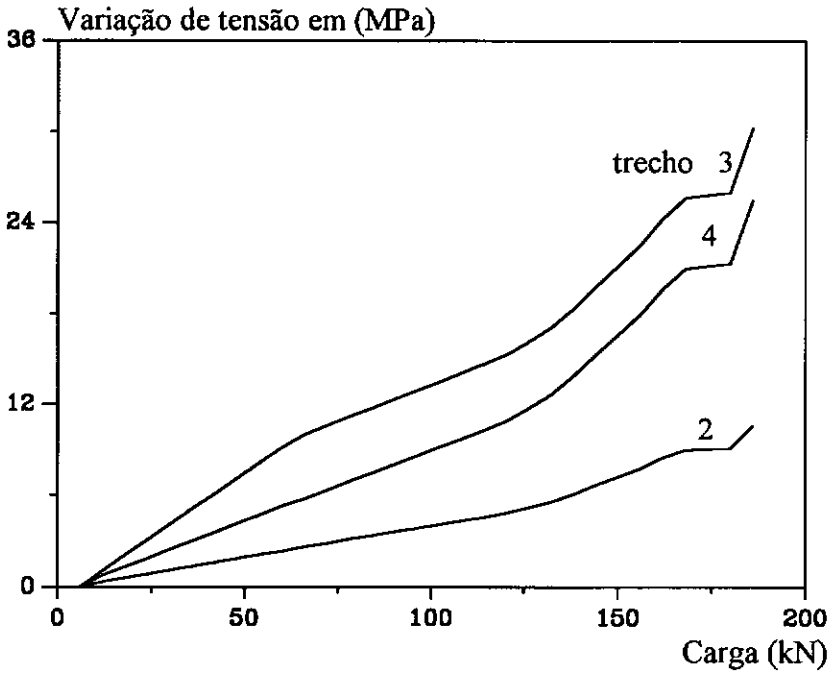


Fig. B2.1 - Curva carga-variação de tensão do cabo #2 (teórico)

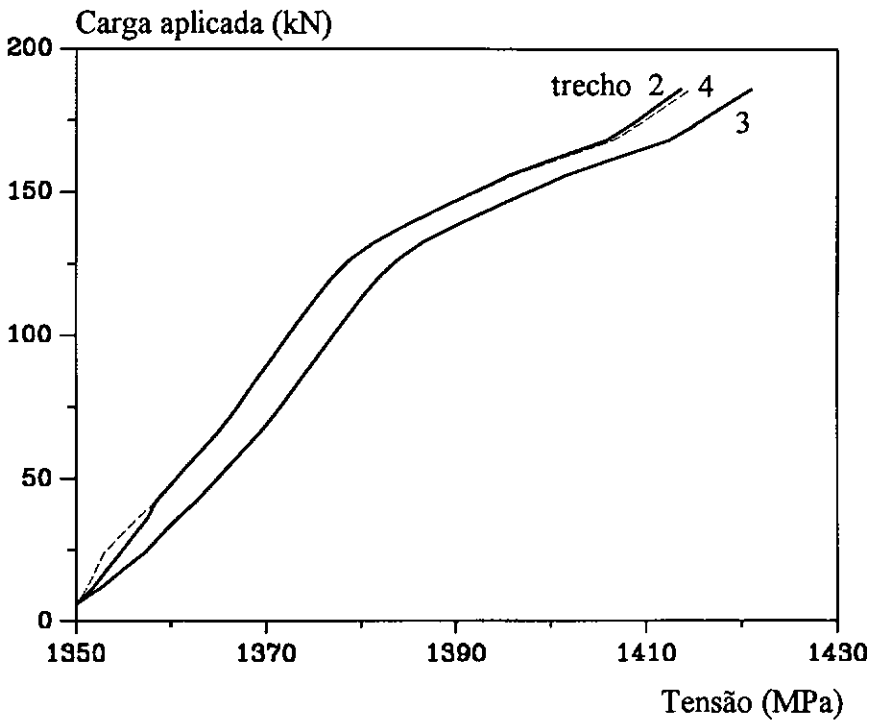


Fig.B2.2 - Curva carga-tensão do mesmo cabo (teórico)

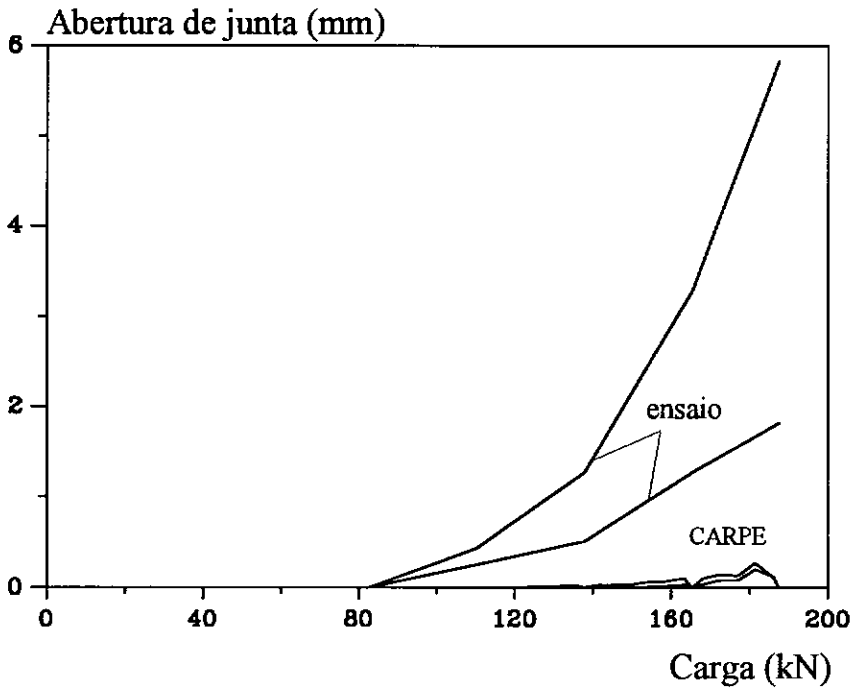


Fig.- B2.3 - Curva carga-abertura de junta (comparação)

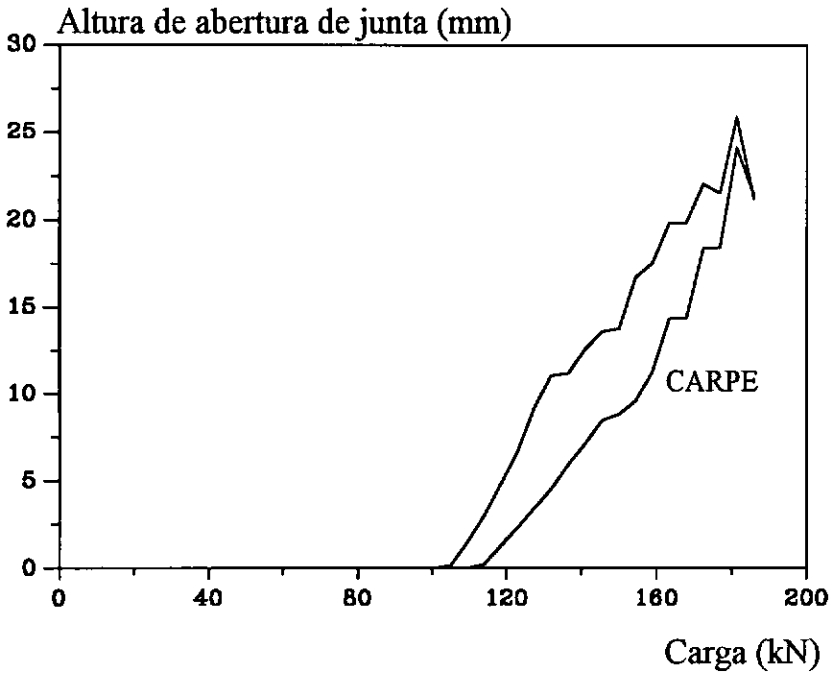


Fig.- B2.4 - Curva carga-altura de abertura de junta (teórico)

B3.- Viga do "benchmark test"

a) Viga com aduelas sem deslizamentos sobre desviadores

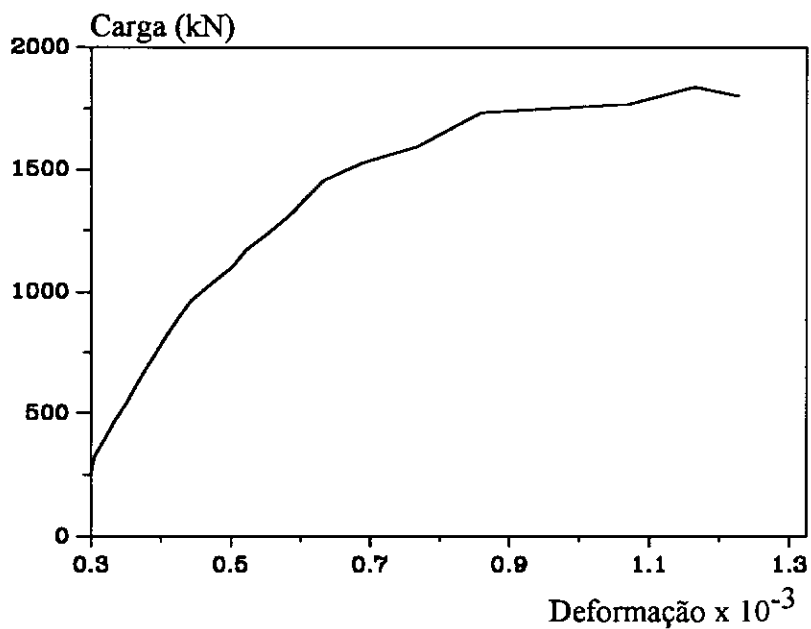


Fig.B3.1 - Curva carga-deformação do concreto

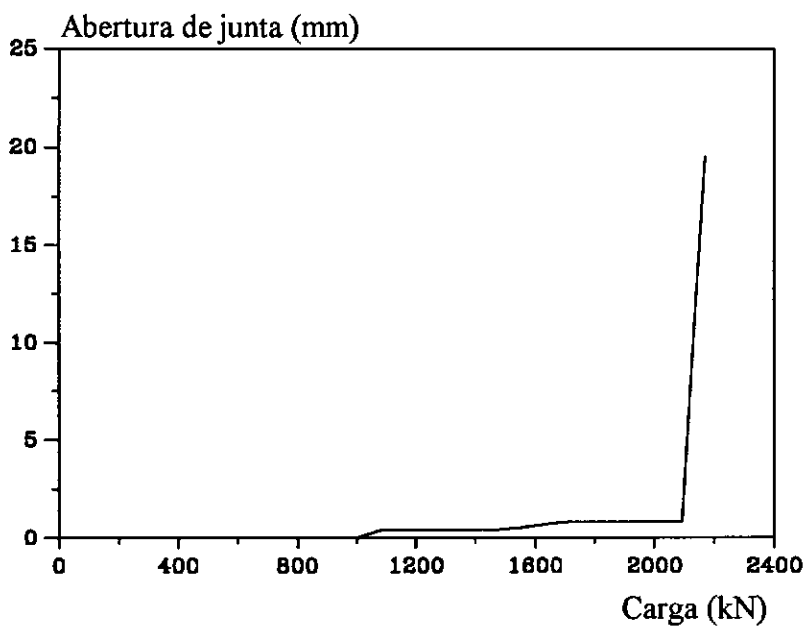


Fig.B3.2 - Curva carga-abertura de junta (debaixo da carga)

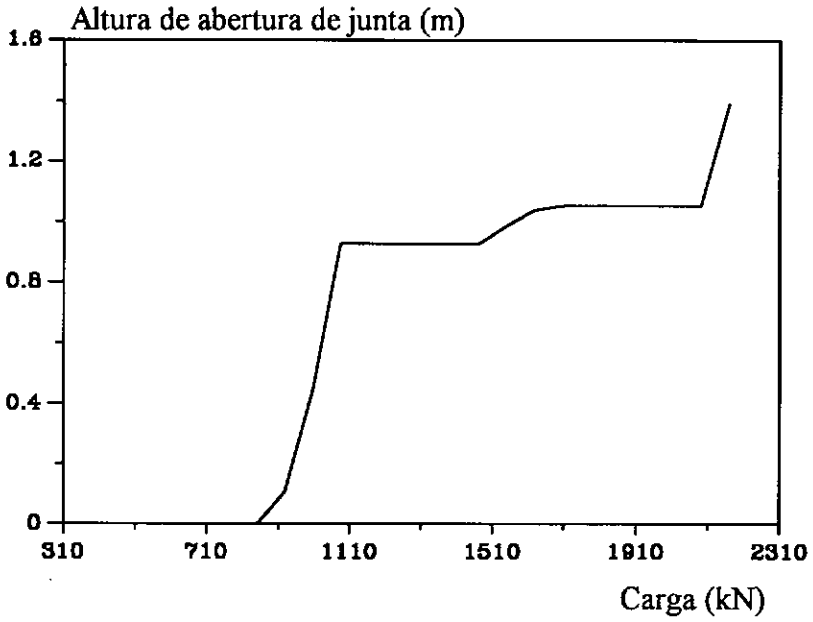


Fig.B3.3 - Curva carga-altura de abertura de junta

b) Viga com deslizamentos

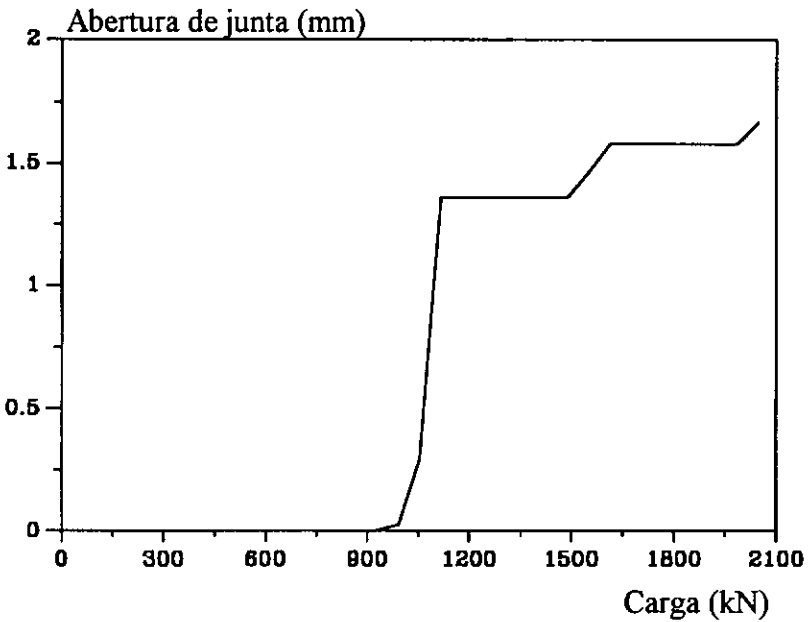


Fig.- B3.4 - Curva carga-abertura de junta

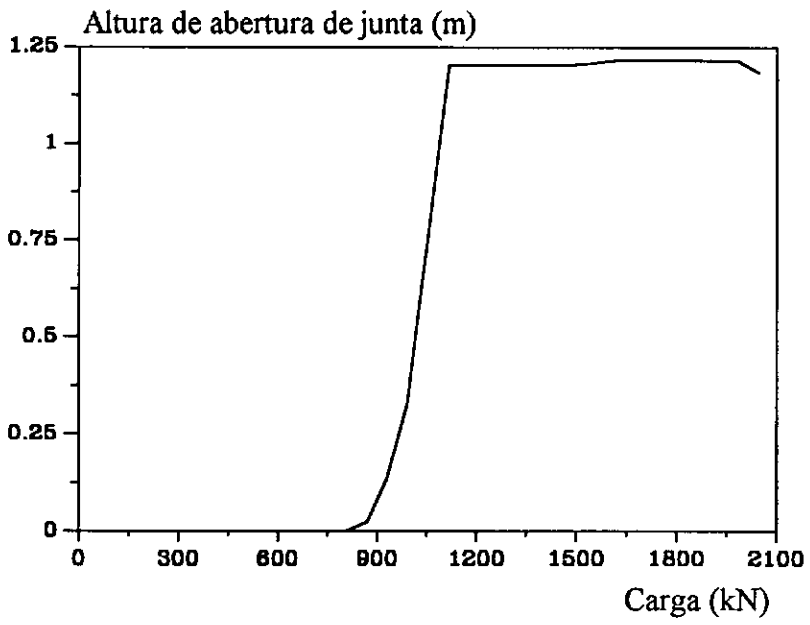


Fig.- B3.5 - Curva carga-altura de abertura de junta

ANEXO C**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

AAS. JACOBSEN, K. (1973)

Design of slender reinforced concrete frames. Institute für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Zürich.

AASHTO Bridge Design Specification (1983)

Standard Specifications For Highways Bridges, 13th Edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, 1983.

BATHE KLAUS-JÜRGEN (1982)

Finite element procedures in engineering analysis, editora Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

BAZANT e OH(1983)

Crack bond theory for fracture of concrete. R.I.L.E.M., Material and Structure, vol. 94, nº 16.

CHEN W. F., D. J. HAN (1988)

Plasticity for Structural Engineers. Editora Springer-Verlag, New York.

EIBL J. e I. RETZEPIS (1993)

Behaviour of external prestressing in structures. Workshop, França (Junho 1993)

ERNANI DIAZ B. (1984)

Observação sobre a determinação de linhas de influência com o auxílio de programas de análise de estruturas. Revista RBE, Rio de Janeiro, 1984.

FERRARO-MAIA A. C. (1979)

Analyse non-lineaire des portiques plans en béton armé ou précontraint compte tenu du retrait, du fluage et de la relaxation. Tese de doutor engenheiro, Universidade Paris VI, Avril 1979.

GARCIA, L.F. TABORDA (1974)

Análise Não-linear de Pórticos Planos em concreto Armado, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1974.

GERE e WEAVER(1965)

Analysis of frame structures. Litton Educational Publishing, Inc., VanNostrand Reinhold Ltd., USA.

GHALI A., A.M. NEVILLE (1972)

Structural analysis - a unified classical and matrix approach, editora The Haddon Craftsmen, Inc., Scranton Pennsylvania, USA.

GILBERT R.I. e WARNER R.F. (1978)

Tension stiffening in reinforced concrete slabs. A.S.C.E., Journal Of Structural

GRELAT A. (1978)

Comportement non-linéaire et stabilité des ossatures en béton armé. Annales de l'I.T.B.T.P., Novembro 1978.

GUNIN B.L. , RAD F.N. e FURLONG W. (1970)

A general nonlinear analysis of concrete structures and comparison with frame tests. Computers & Structures 7 (3), pp. 257-265, 1977

IVÁNYI G., W. BUSCHMEYER e Y. HU (1993)

Behaviour of external prestressing in structures. Workshop, França (Junho 1993)

JENNINGS A. (1968)

Frame analysis including change in geometry. Journal of structural division, ASCE, Março 1968

LEONHARDT F. (1967)

Prestressed concrete - Design and construction. Editora WILHELM ERNST & SOHN, Berlin, Alemanha.

M'RAD A. (1984)

Calcul à la rupture des ponts à précontrainte extérieure au béton. Tese de doutorado, Universidade Pierre et Marie Curie (Paris VI), França.

MACGREGOR, R. J. G. (1989)

Evaluation of strength and ductility of a three-Span externally post-tensioned box girder bridge model. Tese de doutorado, University of Texas at Austin, 1989

MARTINS P.C. R. (1979)

Análise não-linear de estruturas reticuladas espaciais de concreto armado. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Março 1979.

MARTINS P. C. R. (1989)

Modelisation du comportement jusqu'à la rupture en flexion de poutres en béton à précontrainte extérieure ou mixte. Tese de Doutorado, Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris, Setembro 1989.

MELLO, WALDIR JOSÉ DE (1982)

Procedimento para determinação de linhas de influência pelo programa STRESS, Procedimento interno de "Engenheiros Associados Ltda.", Rio de Janeiro, 1982.

MENEGOTTO e PINTO (1972)

Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete frames including changes in geometry and non elastic behavior of elements. Istituto di Scienza et Technica delle Costruzioni. Pub. N° 5, Roma 1972

MURPHY G. (1950)

Similitude in engineering, The Ronald Press Company, New York, USA.

NAIT-RABAH(1990)

Simulation numerique du comportement non-linéaire des ossatures spatiales - Application aux structures en béton armé, en béton précontraint et mixtes. Tese de Doutorado, Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris, Setembro 1989.

NEBOJŠA P. OJDROVIC(1993)

Behaviour of external prestressing in structures. Workshop, França (Junho 1993)

POWELL L. C., BREEN J.E., and KREGER M.E. (1988)

State of the Art for Externally Post-Tensioned Bridges with Deviators, The University of Texas at Austin, Center for Transportation Research, Research Report 365-1, Junho 1988.

RODOLNY W. e MULLER J. (1982,17)

Construction and design of Prestressed Concrete Segmental Bridges. John Willey and ,Sons, Inc..

SARGIN M. (1971)

Stress-Strain relationships for concrete and the analysis of the strutural concrete sections. S M study N° 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada.

TAYLOR E.S., (1974)

Dimensional analysis for engineers. Clarendon Press, Oxford.

TELLES J. C. F. (1976)

Análise do comportamento não-linear geométrico e físico de pórticos planos de concreto armado. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

VIRLOGEUX M. (1983)

La précontrainte extérieure. Annales de l'I.T.B.T.P., n° 420, Série Béton 219

VIRLOGEUX M. e FOURÉ B. (1986)

Précontrainte extérieure au béton: comportement jusqu'à rupture de poutres à voussoirs préfabriqués. F.N.T.P., Travaux, X Congrès International de la F.I.P., New Delhi, Supplément au n° Janvier/1986.

VITEK J.L.e P. VITEK (1993)

Behaviour of external prestresseing in structures. Workshop, França (Junho 1993)