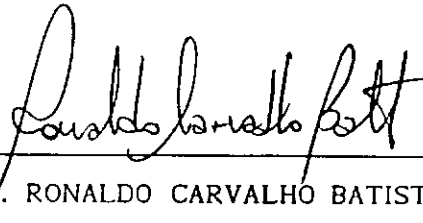


ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL ASSINTÓTICA DA ESTABILIDADE
DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS

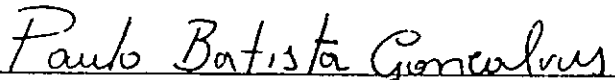
CLAUDIO ERNESTO JOUGLARD

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

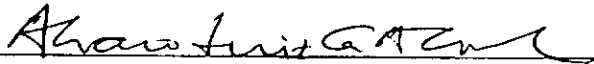
APROVADA POR:



PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA, Ph.D.
(PRESIDENTE)



PROF. PAULO BATISTA GONÇALVES, D.Sc.



PROF. ALVARO LUIZ G. A. COUTINHO, D.Sc.



PROF. RICARDO COSCARELLI ANTONINI, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1993

JOUGLARD, CLAUDIO ERNESTO

Análise não-linear incremental assintótica da estabilidade de estruturas elásticas [Rio de Janeiro] 1993.

X, 272 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1993)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

I. Estabilidade estrutural I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Ronaldo Carvalho Batista pela orientação.

Ao Professor Carlos P. Filipich por ter me conduzido nos meus primeiros passos na pesquisa.

Ao Professor Jorge A. Reyes pelo apoio e incentivo.

Resumo da tese apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

ANÁLISE NÃO-LINEAR INCREMENTAL ASSINTÓTICA DA ESTABILIDADE
DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS

Claudio Ernesto Jougard

Agosto de 1993

Orientador : Ronaldo Carvalho Batista

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho apresenta a formulação e implementação numérica de um algoritmo geral de solução para problemas de estruturas elásticas, geométricamente não-lineares, no contexto do método dos elementos finitos. Em particular, problemas onde as instabilidades são partes essenciais do comportamento.

As equações principais para a análise do equilíbrio, estabilidade e estados críticos de sistemas elásticos discretos, são obtidas mediante a aplicação da técnica das perturbações diretamente sobre as equações não-lineares de equilíbrio. Esta técnica permite expressar as soluções das equações não-lineares, usualmente chamadas caminhos de equilíbrio, como expansões de Taylor paramétricas. É utilizado o comprimento de arco destes caminhos como parâmetro de perturbação e são apresentadas fórmulas gerais de recorrência que permitem a obtenção destas expansões até a ordem desejada numa forma computacionalmente eficiente.

Estas expansões são introduzidas como preditores de alta ordem num algoritmo incremental de solução, sendo desenvolvida uma implementação adaptativa que permite uma completa automatização do processo de cálculo, que fornece a identificação de pontos de equilíbrio crítico e uma descrição precisa do comportamento inicial pós-crítico.

São apresentados vários exemplos numéricos cujos resultados são usados para discutir as propriedades do algoritmo desenvolvido.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

NON-LINEAR INCREMENTAL ASYMPTOTIC ANALYSIS
OF THE STABILITY OF ELASTIC STRUCTURES

Claudio Ernesto Jouglard

August, 1993

Thesis supervisor : Ronaldo Carvalho Batista

Department : Civil Engineering

This work presents the formulation and numerical implementation of a general solution algorithm for elastic geometrically non-linear structures in the context of the finite element method. In particular, problems where instabilities are essential parts of the behaviour.

The main equations for the equilibrium, stability and critical state analysis of discrete elastic systems are obtained by means of the perturbation technique, which is applied directly to the non-linear equilibrium equations. This technique gives the solutions of the non-linear equations, usually called equilibrium paths, in the form of parametric Taylor expansions. The arc-length of these paths is used as perturbation parameter, and general recurrence formulas are presented which gives these expansions till the desired order in a computational efficient manner.

These expansions are introduced as high order predictors in an incremental algorithm and an adaptive implementation is developed which permits the complete automatization of the computation process, giving the identification of critical equilibrium points and an accurate description of initial post-critical behaviour.

Several numerical examples are presented, and the results are used to discuss the numerical properties of the developed algorithm.

ÍNDICE

I - Introdução geral	1
II - Estabilidade de sistemas conservativos discretos	4
II.1 - Sistemas discretos	5
II.1.1 - Trabalho e energia	5
II.1.2 - Coordenadas generalizadas	9
II.1.3 - Equações de movimento de Lagrange	11
II.2 - Estabilidade de sistemas conservativos	14
II.2.1 - Definição de estabilidade	14
II.2.2 - Condições para um mínimo da energia potencial	15
II.3 - Análise de sistemas estruturais	19
II.3.1 - Parâmetros de controle	19
II.3.2 - Diagramas de resposta	20
III - Equações de equilíbrio para sistemas contínuos	25
III.1 - Cinemática de deformação finita	26
III.1.1 - Tensores de deformação de Green e Almansi	26
III.1.2 - Tensor de Green em coordenadas corrotacionais	33
III.1.3 - Mudanças de área e volume	38
III.2 - Princípios fundamentais da mecânica do contínuo	44
III.2.1 - Princípio de conservação da massa	44
III.2.2 - Princípio do momentum linear	45
III.2.3 - Princípio do momentum angular	46
III.3 - Tensões e forças externas	47
III.3.1 - Tensores de tensão de Kirchhoff e Lagrange	47
III.3.2 - Tensor de tensões de Kirchhoff em coordenadas corrotacionais	54
III.3.3 - Forças externas de superfície e volume	59

III.4 - Leis do movimento de Cauchy	62
III.5 - Equações constitutivas	65
III.5.1 - Materiais elásticos	65
III.5.2 - Materiais hiperelásticos	66
III.6 - Energia de deformação	67
III.7 - Potencial das forças externas conservativas	69
III.8 - Particularização a sistemas contínuos discretizados	70
IV - Aproximações assintóticas dos caminhos de equilíbrio	75
IV.1 - Descrição paramétrica dos caminhos de equilíbrio	76
IV.1.1 - O comprimento de arco como parâmetro	79
IV.1.2 - O comprimento de arco ponderado	84
IV.2 - Solução das equações de equilíbrio pela técnica das perturbações	89
IV.2.1 - Equações de equilíbrio de m-ésima ordem	89
IV.2.2 - Unicidade da solução num ponto de equilíbrio normal	95
IV.3 - Pontos de equilíbrio crítico.	99
IV.4 - Equações de equilíbrio pós-críticas.	100
IV.5 - Pontos limites de equilíbrio	111
IV.5.1 - Variação do autovalor crítico num ponto limite	116
IV.6 - Pontos de bifurcação simples	120
IV.6.1 - Relações entre as componentes de uma bifurcação	127
IV.6.2 - Componentes de ordem superior dos caminhos numa bifurcação	132
IV.6.3 - Variação do autovalor crítico numa bifurcação simples	141
V - Particularização a sistemas estruturais discretizados	150
V.1 - Matriz de rigidez tangente	151
V.2 - Matriz de rigidez tangente de m-ésima ordem	154
V.3 - Vetor de forças geométricas de m-ésima ordem	155
V.4 - Equações de equilíbrio pós-críticas	162
VI - Elemento de pórtico plano	168
VI.1 - Descrição do elemento	169
VI.2 - Energia de deformação do elemento	171
VI.3 - Interpolação dos deslocamentos	174
VI.4 - Matrizes K_0 , K_1 , K_2 do elemento	178

VI.5 - Matriz de rigidez tangente	184
VI.6 - Vetor de forças internas	186
VI.7 - Vetor de forças geométricas	188
VI.8 - Coeficientes das equações de equilíbrio pós-críticas	194
VI.9 - Matriz de rigidez tangente de primeira ordem	200
VII - Implementação computacional	202
VII.1 - Métodos de continuação	203
VII.2 - O método de Newton-Raphson	204
VII.3 - O método de Newton-Raphson modificado	208
VII.4 - Equações de restrição	213
VII.4.1 - Controle de carga	213
VII.4.2 - Controle de deslocamento	213
VII.4.3 - Controle do comprimento de arco	214
VII.5 - Estratégias de predição	215
VII.6 - Estratégia de solução	218
VII.7 - Detecção de pontos críticos	221
VII.8 - Cálculo direto de pontos críticos	223
VII.8.1 - Aproximações iniciais de pontos críticos	229
VII.9 - Cálculo das trajetórias iniciais pós-críticas	232
VII.10 - Estabilização da matriz de rigidez num ponto crítico	232
VII.11 - Exemplo 1: arco abatido biengastado	236
VII.12 - Exemplo 2: pórtico abatido biengastado	241
VII.13 - Exemplo 3: treliça dupla	244
VIII - Conclusões	250
Apêndice A	253
Apêndice B	263
Referências bibliográficas	268

CAPITULO I

INTRODUÇÃO GERAL

Para uma adequada descrição da estabilidade do comportamento de sistemas estruturais é necessário obter a solução das equações de equilíbrio considerando a variação dos parâmetros do sistema tais como a intensidade da carga, amplitudes de imperfeição, variáveis de projeto, etc. De considerável interesse é a localização e caracterização de pontos críticos nestes conjuntos de soluções, isto é pontos limite e de bifurcação.

Atualmente existem duas estratégias para a solução destes problemas; a primeira está baseada na técnica das perturbações. As bases desta estratégia foram estabelecidas em 1945 por Koiter que desenvolveu um método geral para a análise de problemas de bifurcação em elasticidade não-linear [1]. A segunda estratégia está baseada nos métodos de continuação [2],[3]. Sua aplicação em engenharia estrutural é mais recente, sendo introduzida com a aplicação do método dos elementos finitos na análise não-linear.

A técnica das perturbações está baseada em expansões em séries de potências e, portanto, seus resultados aproximam a solução localmente, isto é, em torno de pontos pre-determinados da solução nos quais as séries são avaliadas.

O método desenvolvido por Koiter ^[1] estava orientado a meios contínuos e suas aplicações foram predominantemente de natureza analítica. As adaptações desta técnica, tendo em vista o desenvolvimento de procedimentos numéricos para a análise das analogias discretas das equações contínuas, foram introduzidas na década dos sessenta e posteriormente.

Em contraste às técnicas de perturbação, os métodos de continuação produzem resultados que não estão confinados a uma região particular do espaço solução. A principal diferença com a técnica das perturbações é o uso de métodos de iteração. Os métodos de continuação pertencem à classe de procedimentos do tipo preditor-corretor. Eles fornecem a solução na forma de um conjunto de pontos. Estes pontos são calculados passo à passo ao longo da curva solução.

Outra possibilidade é a utilização de técnicas de redução ^[4-10], que consistem em definir uma base reduzida de funções de aproximação, as quais podem ser obtidas pela técnica das perturbações, e solucionar o problema reduzido por métodos de continuação.

Para estender o domínio de aplicabilidade da técnica das perturbações é possível combinar esta técnica com os métodos de continuação. Isto foi feito por Walker ^[11] que apresentou uma forma incremental da técnica das perturbações, usando as soluções obtidas com esta técnica como preditores de alta ordem num algoritmo preditor-corretor do tipo Newton-Raphson.

Na referência [12] Eriksson descreve a utilização de vários preditores baseados em expansões de Taylor de segundo e terceiro grau, extrapolação Lagrangeana e alguns métodos usualmente empregados para a integração de problemas de valor inicial. Em referências prévias [13],[14] o mesmo autor descreve a utilização de preditores baseados em expansões de Taylor de segundo e terceiro grau deduzidas da teoria geral da estabilidade ^{[15],[16]}.

Neste trabalho é desenvolvida, de maneira independente, uma técnica do tipo preditor-corretor onde é utilizada a técnica das perturbações na etapa de

predição, mas sem limitar a ordem dos termos retidos das expansões de Taylor. Para isso foram desenvolvidas fórmulas gerais de recorrência que permitem calcular estes termos até a ordem desejada. A estratégia adotada consiste em calcular um preditor de quinta ordem onde os termos de quarta e quinta ordem são utilizados para estimar o erro da aproximação gerando uma técnica adaptativa.

No capítulo II são apresentados alguns conceitos básicos da teoria geral da estabilidade de sistemas discretos e é feita uma breve descrição da análise estática de sistemas estruturais.

No capítulo III são apresentados alguns conceitos básicos da mecânica do contínuo, particularizando alguns aspectos relacionados com a não-linearidade geométrica de estruturas esbeltas.

No capítulo IV são desenvolvidas as equações gerais da técnica das perturbações, sendo analisada a aplicação desta técnica em pontos críticos de equilíbrio.

No capítulo V é apresentada a formulação matricial das equações desenvolvidas no capítulo anterior, quando aplicada a sistemas estruturais discretos.

No capítulo VI as equações anteriormente deduzidas são desenvolvidas para o caso particular de um elemento finito de pórtico plano.

O capítulo VII descreve a implementação computacional e são apresentados os resultados numéricos.

CAPITULO II

ESTABILIDADE DE SISTEMAS CONSERVATIVOS DISCRETOS

INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta de forma sumária os conceitos básicos e definições relativas à estabilidade de sistemas conservativos discretos. O capítulo está dividido em três seções, a primeira relativa a sistemas discretos onde é introduzido o conceito de coordenadas generalizadas e são deduzidas as equações de equilíbrio para este tipo de sistemas. Na segunda seção apresenta-se a definição de estabilidade e sua particularização a sistemas conservativos, e na terceira seção é feita uma breve descrição da análise estática de sistemas estruturais.

II.1 - SISTEMAS DISCRETOS

II.1.1 - TRABALHO E ENERGIA

Uma parte específica do universo físico, ou uma quantidade específica de matéria que é identificada para seu estudo é chamada um *sistema*. Um sistema é composto por partículas e forças que atuam sobre estas partículas. A posição de cada partícula no espaço é definida por um vetor posição r relativo a um sistema de coordenadas fixo no espaço.

A variação de posição de uma partícula no tempo é chamada o *movimento* da partícula. A cada partícula é atribuída uma grandeza não-negativa chamada *massa* que não varia durante o movimento.

Considere-se uma partícula de massa m em movimento sobre uma curva s sob a ação de uma força F :

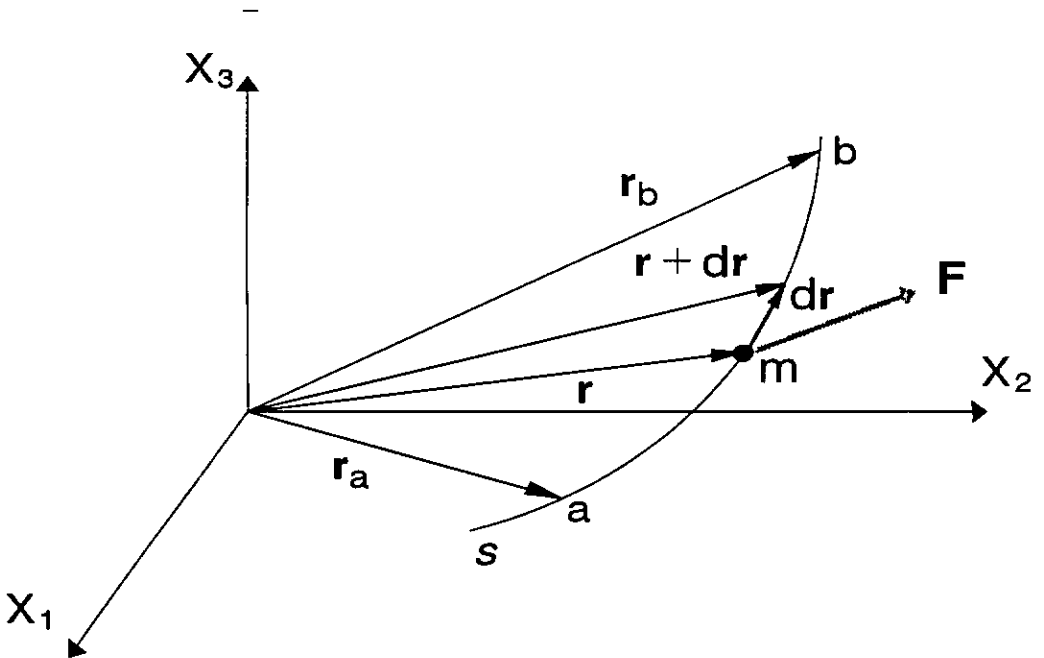


FIGURA II.1 - Movimento de uma partícula.

O *incremento de trabalho* associado com o deslocamento da partícula da posição r à posição $r + dr$ é definido como o produto escalar dos vetores F e dr :

$$\Delta W = \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} dr_{\alpha} \quad (\text{II.1})$$

Esta expressão não deve ser interpretada como uma verdadeira diferencial de uma função W , senão como uma expressão infinitesimal. Em muitos problemas físicos a força atuante depende unicamente da posição, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, e a quantidade ΔW pode ser escrita na forma de um diferencial perfeito como:

$$\Delta W = \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = - dV(\mathbf{r}) \quad (\text{II.2})$$

onde $V(\mathbf{r})$ é uma função escalar que depende somente do vetor posição \mathbf{r} , e é reconhecida como a *Energia Potencial*.

Note-se que nestes casos o trabalho total W feito pela força \mathbf{F} sobre a partícula entre os pontos a e b pode ser escrito como:

$$W = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = - \int_{V_a}^{V_b} dV = V(\mathbf{r}_a) - V(\mathbf{r}_b) \quad (\text{II.3})$$

Ou seja, o trabalho total independe da trajetória empregada para se chegar de a até b , e o campo de forças \mathbf{F} é dito *conservativo*. As componentes deste campo vetorial de forças podem ser expressas como:

$$F_{\alpha}^c = - \frac{\partial V}{\partial r_{\alpha}} \quad (\text{II.4})$$

onde o super-índice c indica que o campo de forças \mathbf{F} é conservativo. Existem diversos tipos de energia potencial dependendo da natureza das forças \mathbf{F} , por enquanto serão todos englobados numa única função V .

Note-se que se o campo de forças é constante, isto é, se o vetor \mathbf{F} mantém invariáveis sua intensidade e sentido em todo instante de tempo, então este campo de forças deve ser necessariamente conservativo pois da equação (II.3)

tem-se:

$$W = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F}^{cT} dr = \int_{r_a}^{r_b} d(\mathbf{F}^{cT} r) = -(\mathbf{F}^{cT} r_a - \mathbf{F}^{cT} r_b) \quad (\text{II.5})$$

e a função energia potencial associada a este campo de forças é $V(r) = -\mathbf{F}^{cT} r$.

Em resumo, sempre que o incremento de trabalho ΔW possa ser expresso na forma de um diferencial perfeito, o campo de forças será conservativo e seus componentes podem ser derivados de uma função de energia potencial. Além disso o trabalho total feito por estas forças sobre uma partícula que percorre uma trajetória entre dois pontos a e b pode ser avaliado independente do caminho utilizado para unir tais pontos.

Em adição às forças conservativas podem existir *forças não-conservativas* Q , que não são derivadas de alguma função de energia potencial. Assim, o incremento de trabalho de todas as forças que atuam sobre a partícula pode ser escrito como:

$$\Delta W = Q^T dr - dV(r) \quad (\text{II.6})$$

A segunda lei de Newton para a partícula é simplesmente:

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} \quad (\text{II.7})$$

onde com ponto indica-se a derivada em relação ao tempo t , notando que $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ e $\ddot{\mathbf{r}} = d\dot{\mathbf{r}}/dt$, a equação (II.1) pode ser escrita como:

$$\Delta W = \mathbf{F}^T dr = m \ddot{\mathbf{r}}^T dr = m \dot{\mathbf{r}}^T d\dot{\mathbf{r}} = d\left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}}\right) = dT \quad (\text{II.8})$$

onde o lado direito representa a diferencial de uma função chamada a *energia cinética* T definida como:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 \quad (\text{II.9})$$

onde $|\dot{\mathbf{r}}|$ é a magnitude do vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}$. Note-se que T é uma função escalar não-negativa. O trabalho total W feito por todas as forças, conservativas ou não, que atuam sobre a partícula quando esta se desloca entre os pontos a e b pode ser expresso como:

$$W = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_b^T \dot{\mathbf{r}}_b - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_a^T \dot{\mathbf{r}}_a = T_b - T_a \quad (\text{II.10})$$

Portanto o trabalho da resultante das forças é igual à variação total de energia cinética.

Considerando um sistema composto de N partículas, as energias cinética e potencial totais do sistema são simplesmente a soma das energias cinética e potencial de cada partícula, e o incremento total do trabalho das forças não-conservativas é a soma dos incrementos do trabalho destas forças sobre cada partícula. Definindo a *energia total* E

$$E = T + V \quad (\text{II.11})$$

Fazendo a substituição de ΔW da equação (II.6) na equação (II.8) e somando sobre todas as partículas do sistema tem-se:

$$d(T + V) = dE = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i{}^T d\mathbf{r}^i \quad (\text{II.12})$$

onde $d\mathbf{r}^i$ e \mathbf{Q}^i são respectivamente os incrementos de posição e as forças não-conservativas que atuam sobre a partícula i . Dividindo ambos os lados por dt tem-se:

$$\frac{d(T + V)}{dt} = \frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i \cdot \dot{\mathbf{r}}^i \quad (\text{II.13})$$

que estabelece que a taxa de variação da energia total E do sistema é igual à taxa de trabalho (ou potencia) das forças não-conservativas. Considerando-se a ausência de forças não-conservativas a equação acima fica:

$$\frac{d(T + V)}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0 \quad (\text{II.14})$$

ou seja

$$\boxed{E = T + V = \text{const.}} \quad (\text{II.15})$$

que estabelece, que na ausência de forças não-conservativas a energia total do sistema permanece invariante no tempo. A equação (II.15) é conhecida como o *princípio de conservação da energia* e o sistema é dito *conservativo*.

II.1.2 - COORDENADAS GENERALIZADAS

Seja um sistema de partículas em movimento, onde cada partícula tem associado um vetor posição \mathbf{r} em relação a um mesmo sistema de coordenadas fixo no espaço. A posição instantânea destas partículas num certo instante de tempo é chamada uma *configuração* do sistema. Definem-se os *graus de liberdade* do sistema como o número de parâmetros necessários para descrever uma configuração do sistema. Os sistemas que possuem um número finito de graus de liberdade são chamados *discretos*.

Um sistema pode ter uma quantidade infinita de partículas e portanto, pode ser necessário um número infinito de parâmetros para descrever suas configurações. Muitas vezes existem relações entre as posições relativas das

partículas que tornam possível uma redução a um número finito de parâmetros. Deve-se notar que estas relações podem ser fisicamente exatas, como no caso de corpos rígidos, onde a posição relativa das partículas não varia com o tempo, ou podem constituir aproximações do comportamento físico real, como são assumidas, por exemplo, no método dos elementos finitos.

Definem-se as *coordenadas generalizadas* ϕ_i como o conjunto de n parâmetros independentes que especificam completamente a posição de cada partícula de um sistema. É necessário que exista uma relação única entre cada conjunto de valores das n coordenadas generalizadas e configurações espaciais do sistema, para que estas fiquem univocamente definidas. Assim é possível expressar as coordenadas físicas \mathbf{r} de uma partícula de um sistema de n graus de liberdade mediante a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.16})$$

As velocidades $\dot{\mathbf{r}}$ são obtidas como as derivadas totais em relação ao tempo de \mathbf{r} :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i = \dot{\mathbf{r}}(\phi_i, \dot{\phi}_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.17})$$

onde é utilizada a convenção de soma sobre os índices latinos de 1 até n . (No Apêndice A é apresentado um resumo das principais regras do álgebra indicial).

Note-se que em geral o vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ será uma função de ϕ_i e $\dot{\phi}_i$. Assim, para um sistema composto de N partículas a energia cinética total do sistema pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m^j \dot{\mathbf{r}}^{jT} \dot{\mathbf{r}}^j = T(\phi_i, \dot{\phi}_i) \quad (\text{II.18})$$

onde m^j , $\dot{\mathbf{r}}^j$ são a massa e o vetor velocidade da partícula j .

Os incrementos de trabalho feitos pelas forças que atuam sobre cada partícula

podem ser escritos como:

$$\Delta W = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}^{jT} d\mathbf{r}^j = \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{F}^{jT} \frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial \phi_1} \right) d\phi_1 = F_1 d\phi_1 \quad (\text{II.19})$$

onde $d\mathbf{r}^j$, \mathbf{F}^j são os incrementos de posição e o vetor de forças que atuam sobre a partícula j , e

$$F_1 = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}^{jT} \frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial \phi_1} \quad (\text{II.20})$$

é chamada *força generalizada* na direção da coordenada generalizada ϕ_1 .

Note-se que se o campo de forças é conservativo, estas forças podem ser expressas como as derivadas de uma função de energia potencial, equação (II.4), portanto substituindo na expressão acima tem-se:

$$f_1^c = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial V^j}{\partial r_\alpha} \frac{\partial r_\alpha^j}{\partial \phi_1} = - \frac{\partial V}{\partial \phi_1} \quad (\text{II.21})$$

onde f_1^c é chamada *força generalizada conservativa*.

II.1.3 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE LAGRANGE

Considerando o princípio de Hamilton como fundamental, este estabelece que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^{nc} dt = 0 \quad (\text{II.22})$$

Isto é, a variação das energias cinéticas e potencial mais a variação do trabalho feito pelas forças não-conservativas durante um intervalo de tempo t_1

até t_2 deve ser zero, sujeito à restrição de variações nulas nos extremos deste intervalo.

A energia cinética T é função de ϕ_1 , $\dot{\phi}_1$ e portanto deve ser:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T(\phi_1, \dot{\phi}_1) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \delta \dot{\phi}_1 \right) dt = 0 \quad (\text{II.23})$$

Integrando por partes o último termo tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \delta \dot{\phi}_1 dt = \left| \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \delta \dot{\phi}_1 \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \delta \phi_1 dt \quad (\text{II.24})$$

onde o primeiro termo da direita se anula em virtude das variações nulas nos extremos do intervalo (t_1, t_2) , isto é, $\delta \phi_1(t_1) = \delta \phi_1(t_2) = 0$.

A energia potencial V é função de ϕ_1 , portanto:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V(\phi_1) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 dt \quad (\text{II.25})$$

O trabalho virtual δW^{nc} feito pelas forças não-conservativas durante deslocamentos virtuais induzidos por um conjunto arbitrário de variações nas coordenadas generalizadas pode ser expresso como:

$$\delta W = q_i \delta \phi_i \quad (\text{II.26})$$

onde q_i é a componente segundo a coordenada ϕ_i da resultante das forças generalizadas não-conservativas que atuam sobre todas as partículas do sistema:

$$q_i = \sum_{j=1}^N Q^{jT} \frac{\partial r^j}{\partial \phi_i} \quad (\text{II.27})$$

Portanto a expressão (II.22) pode ser escrita como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi_i} - \frac{\partial V}{\partial \phi_i} + q_i \right] \delta \phi_i dt = 0 \quad (\text{II.28})$$

Como as variações $\delta \phi_i$ são arbitrárias, esta equação só é satisfeita em geral se os termos entre colchetes se anulam, isto é:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.29})$$

Estas equações são conhecidas como as *equações de movimento de Lagrange* e estabelecem um balanço entre todas as forças generalizadas que atuam no sistema.

Pode-se deduzir das equações de Lagrange que a condição necessária e suficiente para o equilíbrio estático de um sistema conservativo ($q_i = 0$) é a nulidade de todas as derivadas primeiras da energia potencial em relação às coordenadas generalizadas:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.30})$$

Note-se que estas equações são as condições de estacionaridade da função de energia potencial V , e portanto são condições necessárias também para a existência de um extremo desta função.

II.2 - ESTABILIDADE DE SISTEMAS CONSERVATIVOS

II.2.1 - DEFINIÇÃO DE ESTABILIDADE

A estabilidade e instabilidade de um estado de equilíbrio estático são convencionalmente definidas em termos dos movimentos livres do sistema que ocorrem após uma perturbação infinitesimal do mesmo. As várias possibilidades do comportamento do sistema perturbado são:

- 1) O sistema retorna ao equilíbrio, e a configuração de equilíbrio estático é dita *assintoticamente estável*.
- 2) O sistema oscila em torno da configuração de equilíbrio estático sem apresentar nenhuma tendência secular, isto é, nenhuma tendência ao equilíbrio nem para se afastar dele. Neste caso, a configuração de equilíbrio estático é dita apenas *estável*.
- 3) O sistema apresenta uma tendência a se afastar secularmente da configuração de equilíbrio estático, a qual é dita *instável*.

Para sistemas conservativos existem teoremas de energia que permitem tirar conclusões sobre a estabilidade do sistema, sem necessidade de efetuar uma análise dinâmica. Segundo o teorema de Lagrange: "*um estado de equilíbrio estático no qual a energia potencial total é um mínimo local isolado é necessariamente estável*". Assumindo que o contrário seja verdadeiro, isto é, "se um estado de equilíbrio estático no qual a energia potencial não é um mínimo local isolado é necessariamente instável", para o que uma demonstração rigorosa implica em que o sistema tenha uma pequena quantidade de amortecimento positivo^[15], pode-se afirmar:

"Um mínimo relativo completo da energia potencial total em relação às coordenadas generalizadas é condição necessária e suficiente para a estabilidade do estado de equilíbrio de um sistema conservativo".

Para uma comprovação simples, considere-se uma configuração O de equilíbrio estático do sistema para a qual a função energia potencial total V_0 apresenta um

mínimo relativo completo. Seja T_0 a energia cinética induzida por uma perturbação infinitesimal para afastar o sistema de sua posição de equilíbrio, e V_1 , T_1 as energias potencial e cinética num entorno infinitesimal da configuração 0, respectivamente, então pelo princípio da conservação da energia, equação (II.16), tem-se:

$$V_1 + T_1 = V_0 + T_0 \quad (\text{II.31})$$

Assumindo que a energia potencial seja mínima na configuração de equilíbrio 0 então da expressão acima tem-se:

$$\Delta V = V_1 - V_0 = T_0 - T_1 > 0 \quad (\text{II.32})$$

e em virtude que as energias cinética T_0 , T_1 são sempre não-negativas é evidente que ΔV não pode superar um valor máximo $\Delta V = T_0$. Como a energia potencial é, por definição, uma função contínua e diferenciável nas coordenadas generalizadas ϕ_1 , então os incrementos $\Delta\phi_1$ destas coordenadas devem ficar limitados e conseqüentemente o movimento das partículas do sistema deve ficar restrito a um entorno infinitesimal da configuração 0 de equilíbrio.

II.2.2 - CONDIÇÕES PARA UM MÍNIMO DA ENERGIA POTENCIAL

Considere-se uma configuração de equilíbrio E identificada pelo valor ϕ_1^E das coordenadas generalizadas. Assumindo que a energia potencial total $V(\phi_1)$ seja uma função analítica das coordenadas ϕ_1 , então pode ser representada por uma expansão de Taylor num entorno infinitesimal da configuração E como:

$$\Delta V = V(\phi_1^E + \delta\phi_1) - V(\phi_1^E) = dV^E + d^2V^E + d^3V^E + \dots \quad (\text{II.33})$$

com

$$dV^E = V_{,1}|_E \delta\phi_1 \quad (\text{II.34a})$$

$$d^2V^E = \frac{1}{2!} V_{,1j}|_E \delta\phi_1 \delta\phi_j \quad (\text{II.34b})$$

$$d^3V^E = \frac{1}{3!} V_{,1jk}|_E \delta\phi_1 \delta\phi_j \delta\phi_k \quad (\text{II.34c})$$

$$\vdots$$

onde com vírgula é indicada a derivada parcial em relação às coordenadas generalizadas ϕ_1 .

Uma condição necessária para que a função $V(\phi_1)$ tenha um extremo local na configuração E , é que a diferencial primeira seja nula para variações arbitrárias $\delta\phi_1$:

$$dV^E = V_{,1}^E|_E \delta\phi_1 = 0 \quad (\text{II.35})$$

Mas, em virtude de ser a configuração E equilibrada, da equação (II.30) tem-se:

$$V_{,1}^E|_E = 0 \quad (\text{II.36})$$

e portanto a condição (II.35) é automaticamente satisfeita.

Da equação (II.33) tem-se que se a função $V(\phi_1)$ tem um mínimo local na configuração E deve-se ter num entorno infinitesimal:

$$\Delta V = V(\phi_1^E + \delta\phi_1) - V(\phi_1^E) > 0 \quad (\text{II.37})$$

Notando que nesse entorno os diferenciais d^3V , d^4V , são infinitésimos de ordem superior a d^2V , então tem-se que:

$$\Delta V \approx d^2V^E = \frac{1}{2!} V_{,ij}|_E \delta\phi_i \delta\phi_j > 0 \quad (\text{II.38})$$

Portanto, uma condição suficiente para garantir que um extremo seja um mínimo é que a forma quadrática d^2V seja positiva definida. Isto é, deve ser estritamente positiva para variações arbitrárias $\delta\phi_i$.

Para comprovar isto é necessário diagonalizar a forma quadrática mediante uma transformação de coordenadas. Define-se a *matriz de estabilidade* da configuração E como:

$$\left[V_{,ij}|_E \right] = \begin{bmatrix} V_{,11}|_E & V_{,12}|_E & \dots & V_{,1n}|_E \\ & V_{,22}|_E & \dots & V_{,2n}|_E \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{simétrica} & & & V_{,nn}|_E \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

que em termos matemáticos corresponde à matriz *Hessiana* da energia potencial $V(\phi)$. Os autovalores ω_p desta matriz, que são reais pois é uma matriz simétrica [18], e seus autovetores unitários associados ξ_p devem satisfazer a equação de autovalor:

$$V_{,ij}|_E \xi_{p_j} = \omega_p \xi_{p_i} \quad (\text{II.40})$$

Notando que os autovetores unitários desta matriz simétrica formam uma base ortonormal [18] do espaço das coordenadas generalizadas ϕ_i , isto é:

$$\xi_{p_i} \xi_{q_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p \neq q \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

e ainda satisfazem as seguintes condições de ortogonalidade em relação à matriz $V_{,ij}|_E$:

$$V_{,ij}|_E \xi_{p_i} \xi_{q_j} = \begin{cases} \omega_p & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p \neq q \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

é possível então fazer a seguinte transformação de coordenadas:

$$\delta\phi_i = \alpha_p \xi_{p_i} \quad (\text{II.43})$$

e fazendo a substituição na equação (II.38) tem-se:

$$\begin{aligned} d^2V^E &= \frac{1}{2} V_{,ij}|_E (\alpha_p \xi_{p_i}) (\alpha_q \xi_{q_j}) = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_p \alpha_q V_{,ij}|_E \xi_{p_i} \xi_{q_j} = \frac{1}{2} \omega_p (\alpha_p)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

ou seja

$$d^2V^E = \frac{1}{2} \omega_p (\alpha_p)^2 > 0 \quad (\text{II.45})$$

Portanto, uma condição suficiente para que a forma quadrática seja positiva definida é que todos os autovalores ω_p sejam *positivos*. Neste caso a energia potencial têm um mínimo na configuração E, e o equilíbrio nesta configuração é *estável*. Se ao menos um autovalor ω_p é negativo, isto indica que a forma quadrática assumirá valores negativos em alguma direção, e portanto o equilíbrio será *instável*. Se um ou mais autovalores são nulos tem-se uma configuração de equilíbrio *crítico* [15]. Se somente um autovalor é nulo, tem-se um ponto crítico *simples ou distinto*, e se vários autovalores são simultaneamente nulos tem-se um ponto crítico *múltiplo ou composto*.

Note-se que o determinante de uma matriz é igual ao produto de todos seus autovalores [18], portanto numa configuração crítica a matriz de estabilidade é *singular*.

Define-se o *grau de instabilidade* de uma configuração de equilíbrio como a

quantidade de autovalores negativos da matriz de estabilidade nessa configuração, portanto numa configuração de equilíbrio estável o grau de instabilidade deve ser sempre nulo. Uma forma simples de determinar o grau de instabilidade de uma dada configuração sem conhecimento do valor dos autovalores, consiste em efetuar uma decomposição da matriz de estabilidade usando fatorização triangular ou eliminação de Gauss. Os pivôs da fatorização têm o mesmo sinal dos autovalores [19], portanto se todos os pivôs são positivos, os autovalores são todos positivos e o equilíbrio é estável. Se ao menos um pivô é negativo, existe um autovalor negativo e o equilíbrio é instável. Se um pivô se anula existe um autovalor nulo e o equilíbrio é crítico.

II.3 - ANÁLISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

II.3.1 - PARÂMETROS DE CONTROLE

Um sistema estrutural é formado por uma estrutura física, composta de um ou vários materiais e pelas forças que atuam sobre ela. Para definir fisicamente um sistema estrutural é necessário fornecer valores às cargas, geometria da estrutura, vinculações, propriedades dos materiais, etc.

Uma das premissas básicas da análise estrutural é estudar o comportamento do sistema estrutural ante variações das cargas e de alguma de suas magnitudes características. A forma mais eficiente de fazer isto é mediante a definição de *parâmetros de controle* que medem tais variações em relação a valores de referência.

Assim, se a distribuição das cargas sobre a estrutura não varia, é possível definir um *parâmetro de carga* λ em relação a um estado de cargas de referência e pode-se identificar a variação de magnitude das cargas em forma proporcional a este parâmetro.

As estruturas reais apresentam inevitavelmente imperfeições geométricas inerentes a seu processo de fabricação. Para estudar o comportamento destas estruturas *imperfeitas* é fixada uma distribuição de desvios geométricos em

relação a uma estrutura ou modelo *perfeito*, e se define um *parâmetro de imperfeições* ϵ que mede a magnitude dessas imperfeições em forma proporcional à distribuição de desvios geométricos de referência.

Para sistemas estruturais conservativos discretos a energia potencial será uma função das coordenadas generalizadas e dos parâmetros de controle:

$$V = V(\phi_1, \lambda, \epsilon) \quad (\text{II.46})$$

e, em particular, para problemas independentes do tempo, as configurações de equilíbrio estático do sistema são fornecidas pelos extremos desta função de energia potencial em relação às coordenadas generalizadas:

$$V_{,1} = \frac{\partial V}{\partial \phi_1}(\phi_1, \lambda, \epsilon) = 0 \quad (\text{II.47})$$

Para visualizar a evolução das configurações de equilíbrio para distintos valores dos parâmetros de controle é necessário recorrer a *diagramas de resposta*.

II.3.2 - DIAGRAMAS DE RESPOSTA

A totalidade das informações que identificam o comportamento de um sistema é fornecida pelos valores de várias funções chamadas *variáveis ou parâmetros de estado*. Em particular para sistemas discretos, quando o comportamento é completamente definido pelas configurações do sistema, é possível identificar as coordenadas generalizadas com as variáveis de estado.

O comportamento estático de uma estrutura pode ser caracterizado globalmente por uma curva de resposta num diagrama parâmetro de carga versus coordenada generalizada chamada *caminho de equilíbrio*. Cada ponto do caminho representa uma configuração de equilíbrio estático associada a um certo valor do parâmetro de carga.

A origem do diagrama de resposta é chamada o *estado de referência*. Para problemas associados com estruturas perfeitas o estado de referência é um estado em equilíbrio livre de tensões e deformações. O caminho que passa pelo estado de referência é chamado *caminho fundamental*.

Os pontos (ϕ_1^E, λ^E) pertencentes a uma curva de resposta são soluções das equações de equilíbrio. Se estas equações são lineares nas variáveis ϕ_1 e λ , a solução, se existir, é única e é representada por uma reta no diagrama de resposta. Mas se as equações de equilíbrio são não-lineares podem existir várias configurações de equilíbrio associadas a um mesmo valor do parâmetro de carga. Isto é, haverá, em geral, várias soluções representadas por distintos caminhos de equilíbrio.

Os caminhos de equilíbrio que não são fundamentais mas interceptam o caminho fundamental são chamados *caminhos secundários*. Os caminhos de equilíbrio que interceptam um caminho secundário, e não são fundamentais nem secundários são chamados *caminhos terciários* e assim sucessivamente.

Em particular para sistemas conservativos as equações de equilíbrio são fornecidas pelas derivadas primeiras da energia potencial em relação às coordenadas generalizadas, se estas equações são lineares nestas coordenadas isto implica que as derivadas segundas, e portanto a matriz de estabilidade, são constantes, conseqüentemente o grau de instabilidade não varia. Mas se as equações de equilíbrio são não-lineares os caminhos de equilíbrio apresentam, em geral, mudanças de seu grau de instabilidade ao longo de seu trajeto.

De particular importância são as configurações de equilíbrio *crítico* nas quais se apresenta uma transição de estabilidade. Subseqüentemente será demonstrado que os pontos de equilíbrio crítico são de dois tipos: (1) *pontos limite*, nos quais a tangente do caminho de equilíbrio é perpendicular ao eixo do parâmetro de carga, e (2) *pontos de bifurcação*, nos quais dois ou mais caminhos de equilíbrio se interceptam.

Outros pontos característicos dos caminhos de equilíbrio, mas que não representam configurações de equilíbrio crítico, são aqueles pontos nos quais a tangente do caminho de equilíbrio é perpendicular ao eixo de uma coordenada

generalizada, chamados *pontos de retorno*.

Na figura II.2 são mostrados os caminhos de equilíbrio, em traço cheio os trechos estáveis, e com linhas tracejadas os trechos instáveis, num diagrama de resposta para uma certa coordenada generalizada ϕ_1 .

Deve-se notar que estes diagramas não correspondem a um processo evolutivo de incremento de carga e medição de deslocamentos (coordenadas generalizadas), que é essencialmente um processo dinâmico que envolve variação das cargas no tempo, simplesmente mostram todas as configurações de equilíbrio possíveis para uma determinada magnitude das cargas consideradas estáticas, isto é, independentes do tempo.

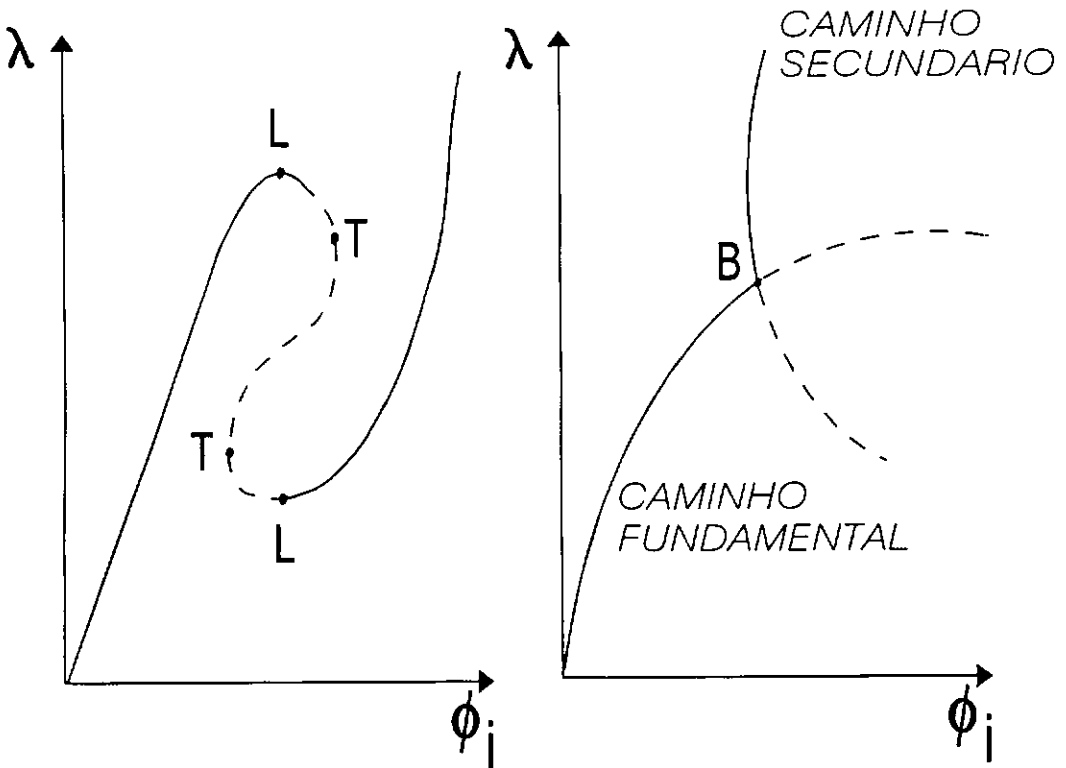


FIGURA II.2 - Caminhos de equilíbrio (L: ponto limite, B: ponto de bifurcação, T: ponto de retorno)

Existirá uma certa correspondência, se as cargas puderem ser consideradas "quase-estáticas", isto é, quando sua variação de magnitude no tempo for muito lenta e possam ser desprezados os efeitos dinâmicos. Num processo evolutivo real para cargas quase-estáticas, para cada incremento de carga a estrutura procura uma nova configuração de equilíbrio estático estável em sua vizinhança, correspondente ao nível atual de carga. No caso particular de ponto limite, onde não existem configurações possíveis de equilíbrio estático na vizinhança para um incremento de carga, a estrutura experimenta um "salto dinâmico", isto é, uma passagem brusca a outra posição de equilíbrio estável possivelmente muito afastada da atual.

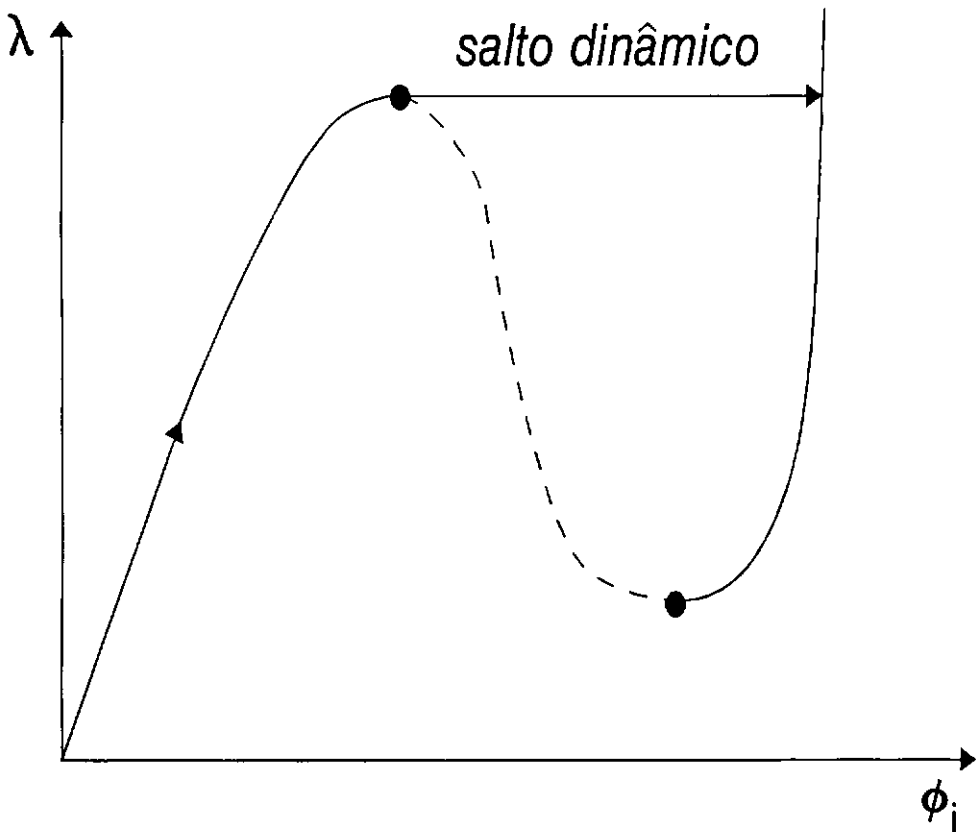


FIGURA II.3 - Fenômeno de "salto dinâmico".

As estruturas reais sempre apresentam inevitavelmente algum tipo de imperfeição inicial. Se estas imperfeições são pequenas, o comportamento da estrutura imperfeita é refletido no diagrama de resposta por caminhos de equilíbrio que são assintóticos às respostas para o modelo perfeito. Para o caso particular que o modelo perfeito apresente uma bifurcação, a estrutura imperfeita apresenta respostas assintóticas aos caminhos da bifurcação. Isto implica que nas proximidades da carga de bifurcação do modelo perfeito a estrutura imperfeita apresentará, em geral, mudanças bruscas de configuração com aumento notável das deformações. Este fenômeno de alteração brusca de configuração é conhecido como "flambagem" e pode levar a estrutura à ruína definitiva ou a uma situação que impossibilite sua utilização. A magnitude das cargas com ele associada é chamada "carga de flambagem" e está fortemente relacionada com a magnitude das cargas críticas.

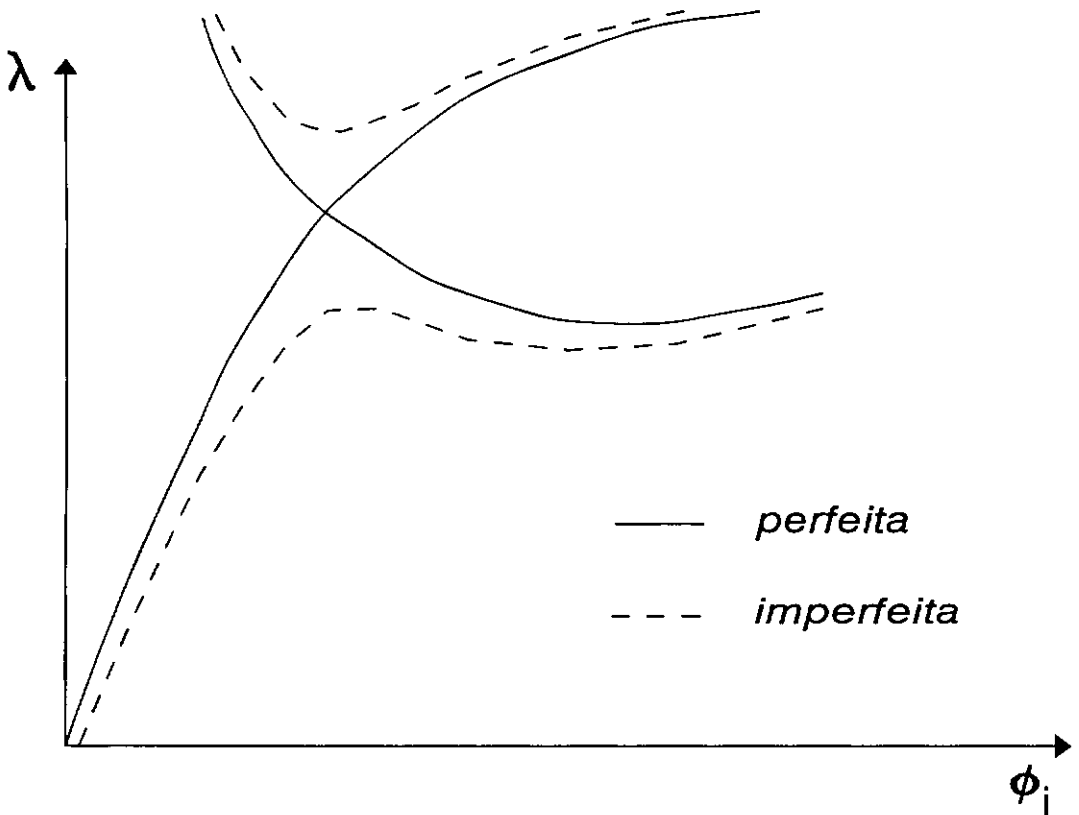


FIGURA II.4 - Respostas de estruturas imperfeitas.

CAPITULO III

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA SISTEMAS CONTÍNUOS DISCRETIZADOS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos da mecânica do contínuo relacionados com a não-linearidade geométrica. São deduzidas as equações de equilíbrio para meios contínuos e previamente e feita uma descrição da cinemática de deformação finita, particularizando a equivalência, para pequenas deformações, dos tensores de deformação de Green e de tensões de Kirchhoff com os tensores de deformação e tensão usuais de engenharia referidos a um referencial corrotacional que roda e se translada rigidamente com o corpo.

Esta equivalência é de grande importância para a descrição do comportamento de estruturas esbeltas, que sofrem grandes deslocamentos mas pequenas deformações, pois implica que é possível utilizar as mesmas equações constitutivas da elasticidade infinitesimal.

Na literatura básica da mecânica do contínuo [20-22] não é possível achar uma demonstração direta deste conceito, portanto um dos objetivos deste capítulo é demonstrar a anteriormente citada equivalência.

III.1 - CINEMÁTICA DE DEFORMAÇÃO FINITA

III.1.1 - TENSORES DE DEFORMAÇÃO DE GREEN E ALMANSI

Um corpo é um conjunto infinito de partículas, onde existe uma correspondência biunívoca entre cada partícula e um conjunto ordenado de tres números reais chamados as *coordenadas* da partícula que definem sua posição no espaço. A posição instantânea do conjunto de partículas que formam o corpo é chamada uma *configuração* do corpo. A seqüência de configurações em instantes consecutivos de tempo t é chamada o *movimento* do corpo. A *cinemática* é o estudo do movimento do corpo sem considerar as causas desse movimento.

Considere-se um corpo sólido deformável que num certo instante de tempo t_0 ocupa o volume v_0 , esta configuração será chamada *original*. Usando um sistema de coordenadas cartesianas retangulares de eixos x_i ($i=1,2,3$), um ponto P desta configuração é identificado pelas coordenadas x_i^0 , onde o índice superior "0" indica que as coordenadas são da configuração original. Um instante t_1 depois o corpo passa a ocupar o volume v_1 , esta nova configuração será chamada *deformada*. O ponto P da configuração original é levado até P' na configuração deformada. As coordenadas do ponto P' são agora x_i^I onde o índice superior "I" indica que as coordenadas são da configuração deformada.

As mudanças de configuração do corpo são assumidas contínuas e a transformação pontual (mapeamento) de P a P' é assumida biunívoca. A equação de transformação pode ser escrita como:

$$x_i^I = x_i^I(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \quad (\text{III.1})$$

que tem uma transformação inversa única para todo ponto do corpo da forma:

$$x_i^0 = x_i^0(x_1^I, x_2^I, x_3^I) \quad (\text{III.2})$$

As funções x_i^I e x_i^0 são assumidas contínuas e diferenciáveis.

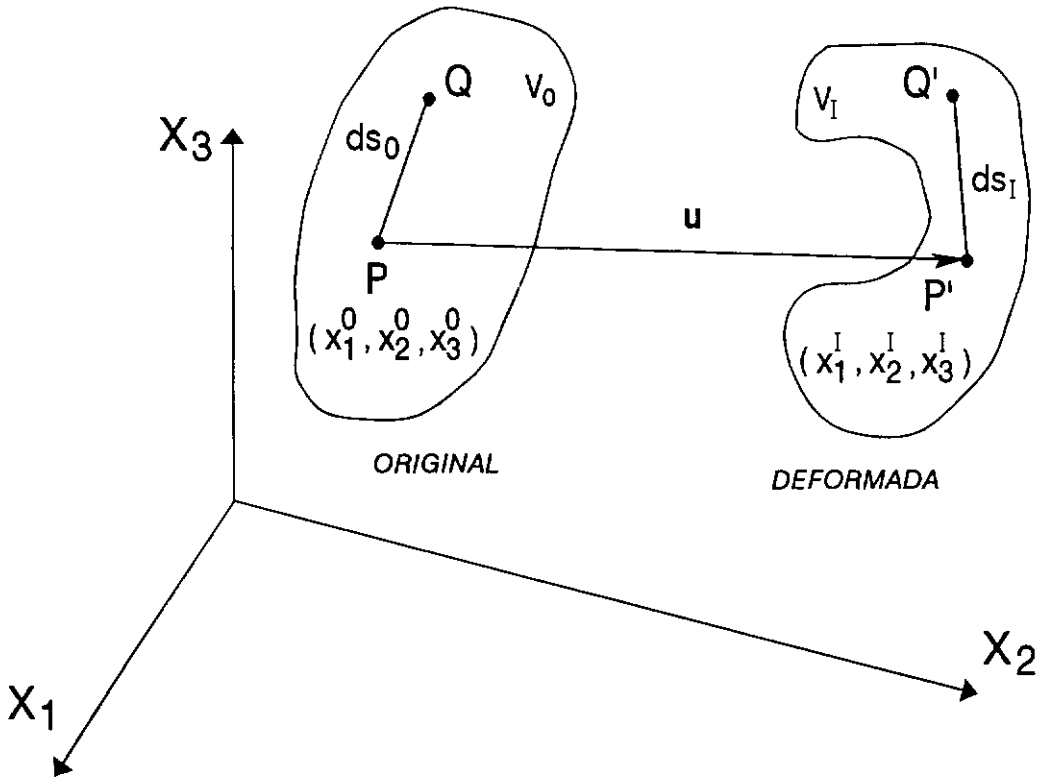


FIGURA III.1 - Mudanças de configuração de um sólido deformável.

Considere-se um elemento de linha infinitesimal ds_0 ligando o ponto $P(x_1^0)$ a um ponto muito próximo $Q(x_1^0 + dx_1^0)$ da configuração original. O quadrado do segmento \overline{PQ} é dado por:

$$(ds_0)^2 = dx_1^0 dx_1^0 \quad (\text{III.3})$$

Quando P e Q são levados até $P'(x_1^I)$ e $Q'(x_1^I + dx_1^I)$, o quadrado do comprimento do elemento de linha deformado ds_1 que liga os pontos $\overline{P'Q'}$ é dado por:

$$(ds_1)^2 = dx_1^I dx_1^I \quad (\text{III.4})$$

Das relações (III.1) e (III.2) tem-se que:

$$dx_1^0 = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_j^I} dx_j^I \quad (\text{III.5a})$$

$$dx_1^I = \frac{\partial x_1^I}{\partial x_j^0} dx_j^0 \quad (\text{III.5b})$$

Portanto os quadrados dos elementos de linha ds_0 , ds_I podem ser escritos como:

$$(ds_0)^2 = \frac{\partial x_m^0}{\partial x_i^I} \frac{\partial x_m^0}{\partial x_j^I} dx_i^I dx_j^I \quad (\text{III.6a})$$

$$(ds_I)^2 = \frac{\partial x_m^I}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_m^I}{\partial x_j^0} dx_i^0 dx_j^0 \quad (\text{III.6b})$$

A diferença dos quadrados dos comprimentos pode ser expressa como:

$$(ds_I)^2 - (ds_0)^2 = \left[\frac{\partial x_m^I}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_m^I}{\partial x_j^0} - \delta_{ij} \right] dx_i^0 dx_j^0 \quad (\text{III.7a})$$

$$(ds_I)^2 - (ds_0)^2 = \left[\delta_{IJ} - \frac{\partial x_m^0}{\partial x_i^I} \frac{\partial x_m^0}{\partial x_j^I} \right] dx_i^I dx_j^I \quad (\text{III.7b})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ para $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$).

Define-se o *tensor de deformação de Green* de componentes E_{IJ} como:

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_m^I}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_m^I}{\partial x_j^0} - \delta_{ij} \right] \quad (\text{III.8})$$

e o tensor de deformação de Almansi de componentes e_{ij} como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial x_m^0}{\partial x_i^I} \frac{\partial x_m^0}{\partial x_j^I} \right] \quad (\text{III.9})$$

onde ambos os tensores são simétricos. Logo as equações (III.7) podem ser escritas como:

$$(ds_I)^2 - (ds_0)^2 = 2 E_{ij} dx_i^0 dx_j^0 \quad (\text{III.10a})$$

$$(ds_I)^2 - (ds_0)^2 = 2 e_{ij} dx_i^I dx_j^I \quad (\text{III.10b})$$

Note-se que se $(ds_I)^2 \neq (ds_0)^2$ implica que o corpo sofreu uma deformação e as funções E_{ij} , e_{ij} servem como medidores dessa deformação. Em virtude de que $ds_I = ds_0$ quando $E_{ij} = 0$, $e_{ij} = 0$, (e vice-versa), uma condição necessária e suficiente para que o movimento seja um movimento de corpo rígido é que as componentes dos tensores de deformação sejam nulas em todo o corpo.

Observe-se, da equação (III.10a) que o tensor de Green mede as deformações em relação à configuração original. Este tipo de descrição é chamada *Lagrangiana*. No caso do tensor de deformação de Almansi, equação (III.10.b), as deformações são medidas em relação à configuração deformada. Este tipo de descrição é chamada *Euleriana*.

Introduzindo o vetor *deslocamento* u como a diferença dos vetores posição de um ponto nas configurações deformada e original, as componentes u_i deste vetor deslocamento são:

$$u_i = x_i^I - x_i^0 \quad (\text{III.11})$$

então

$$x_i^I = x_i^0 + u_i \quad (\text{III.12a})$$

$$x_i^0 = x_i^I - u_i \quad (\text{III.12b})$$

e derivando em relação à coordenada x_j tem-se:

$$\frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} \quad (\text{III.13a})$$

$$\frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^I} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j^I} \quad (\text{III.13b})$$

Fazendo a substituição destas expressões nas equações (III.8), (III.9), as componentes dos tensores de deformação podem ser escritas como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^0} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j^0} \right) - \delta_{ij} \right] \quad (\text{III.14a})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \left(\delta_{mi} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i^I} \right) \left(\delta_{mj} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j^I} \right) \right] \quad (\text{III.14b})$$

que após alguma álgebra ficam:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^0} \right] \quad (\text{III.15a})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j^I} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^I} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i^I} \frac{\partial u_m}{\partial x_j^I} \right] \quad (\text{III.15b})$$

Deve notar-se que todas as derivadas destas expressões são em relação às mesmas coordenadas x_i , os índices superiores "0" e "1" simplesmente indicam que os deslocamentos u_i são expressos como funções das coordenadas x_i^0 de pontos da configuração original para o tensor de Green, e como funções das coordenadas x_i^1 de pontos da configuração deformada para o tensor de Almansi.

Os gradientes dos deslocamentos não são em geral simétricos, $\partial u_i / \partial x_j \neq \partial u_j / \partial x_i$, mas podem ser expressos como a soma de um tensor simétrico ϵ_{ij} e um tensor antissimétrico ω_{ij} como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (\text{III.16})$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \epsilon_{ji} \quad (\text{III.17a})$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = -\omega_{ji} \quad (\text{III.17b})$$

As quantidades ϵ_{ij} , ω_{ij} são chamadas os *tensores de deformação infinitesimal* e de *rotação infinitesimal*, respectivamente. Para deslocamentos infinitesimais estes tensores tem um significado geométrico simples, as componentes ϵ_{ii} do tensor ϵ_{ij} medem a variação relativa de comprimento de uma fibra infinitesimal originalmente na direção x_i , e as componentes ϵ_{ij} ($i \neq j$) medem a distorção angular entre duas fibras originalmente perpendiculares nas direções x_i , x_j . As componentes ω_{ij} do tensor rotação medem, para um campo de deslocamentos infinitesimais, a rotação infinitesimal de corpo rígido de duas fibras ortogonais segundo as direções x_i , x_j [20],[22].

Assim os tensores de deformação de Green e Almansi podem ser escritos como:

$$E_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} (\epsilon_{mi}^0 + \omega_{mi}^0)(\epsilon_{mj}^0 + \omega_{mj}^0) \quad (\text{III.18a})$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij}^I - \frac{1}{2} (\epsilon_{mi}^I + \omega_{mi}^I)(\epsilon_{mj}^I + \omega_{mj}^I) \quad (\text{III.18b})$$

onde os índices superiores "0", "I", indicam sobre qual configuração estão expressos os deslocamentos.

No caso de deformações pequenas de corpos muito flexíveis, como vigas esbeltas, placas e cascas finas, as quantidades ϵ_{ij} podem ser freqüentemente assumidas como infinitésimos de segunda ordem frente às componentes infinitésimais de rotação ω_{ij} que podem ser muito maiores [21]. Isto é, $\epsilon_{ij} \ll \omega_{ij} \ll 1$, então os tensores de deformação poder ser aproximados como:

$$E_{ij} \cong \epsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} \omega_{mi}^0 \omega_{mj}^0 \quad (\text{III.19a})$$

$$e_{ij} \cong \epsilon_{ij}^I - \frac{1}{2} \omega_{mi}^I \omega_{mj}^I \quad (\text{III.19b})$$

Deve notar-se que para que estas aproximações sejam válidas as rotações de corpo rígido reais do corpo devem ser muito pequenas, pois só nesse caso o tensor ω_{ij} representa as rotações de corpo rígido de um elemento infinitesimal de volume [20],[22], por isso esta teoria é chamada de *rotações moderadas*. Em particular para placas finas, as expressões simplificadas do tensor de deformação de Green (III.19a) em termos de deslocamentos são conhecidas como equações de von Kármán [20],[23],[24].

Se as rotações ω_{ij} são infinitésimos da mesma ordem que ϵ_{ij} , e conseqüentemente $\partial u_i / \partial x_j$, então podem ser desprezados seus produtos em relação às primeiras potências. Ainda mais das equações (III.13) tem-se:

$$\frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^0} \cong \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^I} \cong \delta_{ij} \quad (\text{III.20})$$

isto é, as configurações original e deformada podem ser assumidas coincidentes, resultando:

$$E_{ij} \cong e_{ij} \cong \epsilon_{ij} \quad (\text{III.21})$$

que implica que para deformações e rotações muito pequenas os tensores E_{ij} , e_{ij} coincidem com o tensor de deformação infinitesimal ϵ_{ij} .

III.1.2 - TENSOR DE GREEN EM COORDENADAS CORROTACIONAIS

Qualquer campo de deslocamentos u_i pode sempre ser expresso como soma de um campo de deslocamentos u_i^R de movimentos de corpo rígido, mais um campo de deslocamentos v_i que produz deformações no corpo:

$$u_i = u_i^R + v_i \quad (\text{III.22})$$

Os deslocamentos u_i^R levam o corpo mediante rotações e translações de corpo rígido desde a configuração original até uma configuração intermediária sem alterar o estado de deformações do corpo. A partir desta configuração intermediária os deslocamentos v_i deformam o corpo até levá-lo à configuração deformada. Fixando ao corpo um sistema de coordenadas *corrotacionais* de eixos y_i , que roda e se translada com o corpo quando este se desloca rigidamente, é possível identificar uma configuração *corrotacionada* neste sistema. Cada ponto material nesta configuração intermediária possui localmente as mesmas coordenadas que na configuração original, isto é, $y_i^c = x_i^0$, onde o índice superior "c" indica que as coordenadas são de pontos da configuração corrotacionada, pois o corpo não sofre deformações durante os movimentos de corpo rígido.

Para uma definição mais precisa, devido às varias interpretações do termo "corrotacional" [24], aqui será assumido que, independentemente da magnitude dos deslocamentos, para pequenas deformações a configuração corrotacionada deve servir de base para utilizar as relações simplificadas para pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Isto é, assume-se que os deslocamentos v_i medidos desde a configuração corrotacionada são suficientemente pequenos, ficando muito

proximas as configurações deformada e corrotacionada.

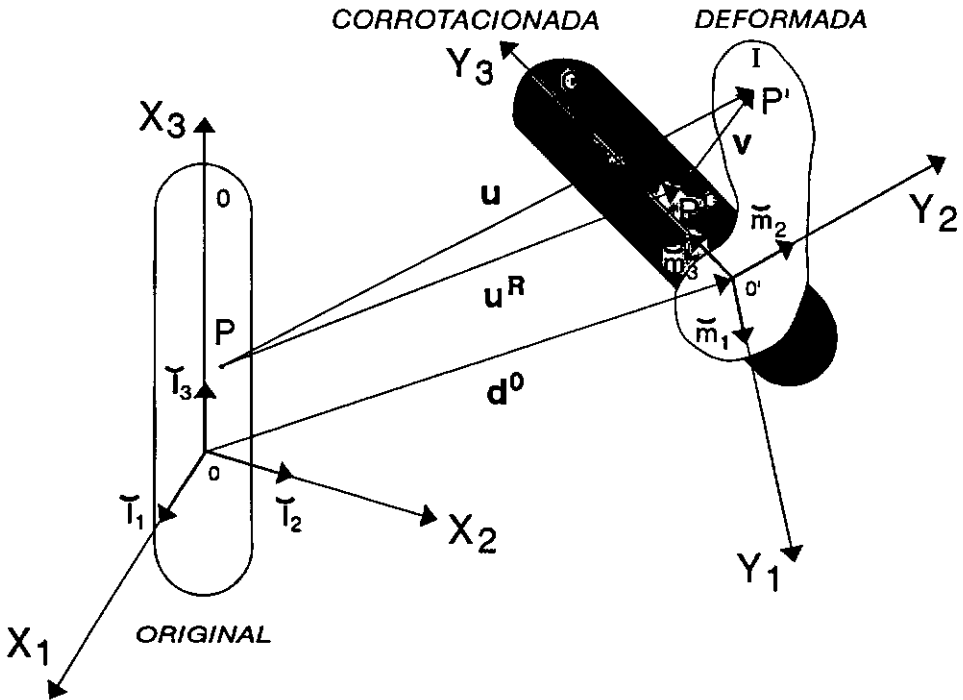


FIGURA III.2 - Sistema de coordenadas corrotacional.

As componentes E_{ij}^0 do tensor de Green expressas no sistema de coordenadas x , são da equação (III.8):

$$E_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_m^I}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_m^I}{\partial x_j^0} - \delta_{ij} \right] \quad (\text{III.23})$$

As coordenadas x_i^I de um ponto P' da configuração deformada podem ser obtidas somando as coordenadas x_i^c desse ponto na configuração corrotacionada e os deslocamentos v_i entre estas configurações:

$$x_i^I = x_i^c + v_i \quad (\text{III.24})$$

Para obter as coordenadas x_i^c em função das coordenadas y_j^c do mesmo ponto, considere um vetor w de componentes w_j no sistema de coordenadas x , seus componentes w_i' no sistema de coordenadas y são fornecidas pela transformação [apêndice A]:

$$w_i' = r_{ij} w_j \quad (\text{III.25})$$

onde r_{ij} são os elementos da matriz de rotação R que podem ser escritos como:

$$r_{ij} = \check{m}_i \cdot \check{l}_j = \cos(\check{m}_i, \check{l}_j) \quad (\text{III.26})$$

onde \check{m}_i , \check{l}_j são os vetores unitários na direção dos eixos y_i e x_j respectivamente. Pode demonstrar-se facilmente [Apêndice A], que R é uma matriz ortonormal cuja inversa coincide com sua transposta, isto é, $R^{-1} \equiv R^T$, ficando portanto relacionados os elementos r_{ij} pela seguinte equação:

$$r_{im} r_{jm} = r_{mj} r_{mi} = \delta_{ij} \quad (\text{III.27})$$

A transformação (III.25) possui uma transformação inversa única da forma:

$$w_j = r_{ji} w_i' \quad (\text{III.28})$$

em forma matricial estas transformações podem ser expressas como:

$$w' = R w \quad (\text{III.29a})$$

$$w = R^{-1} w' = R^T w' \quad (\text{III.29b})$$

Assim, as coordenadas x_i^c podem ser expressas como:

$$x_i^c = r_{ji} y_j^c + d_i^0 \quad (\text{III.30})$$

onde d_i^0 são as coordenadas da origem O' do sistema corrotacional, que representam os movimentos de translação como corpo rígido, enquanto as rotações de corpo rígido são representadas pelos elementos r_{ij} da matriz de rotação. Levando em conta que para cada ponto material da configuração corrotacionada tem-se $y_j^c = x_j^0$, a equação (III.30) fica:

$$x_i^c = r_{ji} x_j^0 + d_i^0 \quad (\text{III.31})$$

portanto as coordenadas x_i^I são:

$$x_i^I = r_{ji} x_j^0 + d_i^0 + v_i \quad (\text{III.32})$$

Derivando a coordenada x_m^I em relação a x_i^0 tem-se:

$$\frac{\partial x_m^I}{\partial x_i^0} = r_{jm} \delta_{ji} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} = r_{im} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \quad (\text{III.33})$$

Fazendo a substituição na equação (III.23) o tensor de deformação de Green E_{ij} pode ser escrito como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(r_{im} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \right) \left(r_{jm} + \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} \right) - \delta_{ij} \right] \quad (\text{III.34})$$

que após alguma álgebra e levando em conta as relações (III.27) pode ser expresso como:

$$E_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left[r_{im} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} + r_{jm} \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} \right] \quad (\text{III.35})$$

Note-se que este tensor mede as deformações totais entre as configurações

original e deformada.

As componentes $E_{ij}^{c'}$ do tensor de Green referidas à configuração corrotacionada e expressas no sistema de coordenadas corrotacionais y_1 são, da equação (III.15a):

$$E_{ij}^{c'} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i'}{\partial y_j^c} + \frac{\partial v_j'}{\partial y_i^c} + \frac{\partial v_p'}{\partial y_1^c} \frac{\partial v_p'}{\partial y_j^c} \right] \quad (\text{III.36})$$

Note-se que este tensor mede as deformações entre as configurações corrotacionada e deformada, sendo portanto independente dos movimentos de corpo rígido. Mediante uma rotação de coordenadas é possível expressar as componentes v_i' em função das componentes v_m do mesmo vetor no sistema x pela equação (III.25), e levando em conta as relações (III.27), chega-se a:

$$E_{ij}^{c'} = \frac{1}{2} \left[r_{im} \frac{\partial v_m}{\partial y_j^c} + r_{jm} \frac{\partial v_m}{\partial y_i^c} + \frac{\partial v_m}{\partial y_1^c} \frac{\partial v_m}{\partial y_j^c} \right] \quad (\text{III.37})$$

Notando-se que para um mesmo ponto material tem-se $y_j^c = x_j^0$ e comparando com a expressão (III.35) resulta:

$$\boxed{E_{ij}^0 = E_{ij}^{c'}} \quad (\text{III.38})$$

Daquí pode concluir-se que:

- (i) O tensor de deformação de Green E_{ij}^0 referido à configuração original é invariante ante movimentos de corpo rígido, pois o tensor $E_{ij}^{c'}$ independe da magnitude destes deslocamentos. Isto implica que é indistinta a ordem em que sejam considerados os deslocamentos na descrição de E_{ij}^0 , podendo assumir-se que o corpo se deforma primeiro e após isso se desloca rigidamente até chegar à configuração final. Deve-se notar que o tensor de Almansi e_{ij}^0 não possui esta propriedade.

(ii) Para deformações muito pequenas as componentes E_{ij}^0 do tensor de Green podem ser interpretadas como as componentes $\epsilon_{ij}^{0'}$ do tensor de deformação infinitesimal referidas a um sistema corrotacional que se translada rigidamente com o corpo. Notando, pela observação anterior que o tensor E_{ij}^0 independe dos movimentos de corpo rígido, isto implica que as componentes E_{ij}^0 do tensor de Green representam, neste caso, as deformações usuais de engenharia referidas à configuração original. Esta observação é de grande importância na descrição das deformações de estruturas muito flexíveis que sofrem grandes deslocamentos mas pequenas deformações.

II.1.3 - MUDANÇAS DE ÁREA E VOLUME

Deseja-se conhecer as relações entre elementos de área e volume das configurações original e deformada. Para analisar as mudanças de área, considere um elemento de área dA_0 na configuração original com vetor unitário normal n^0 e sejam dl_0 , dm_0 os vetores dos lados deste elemento.

Do cálculo vetorial tem-se que a área dA_0 é dada pela magnitude do produto vetorial $dl_0 \times dm_0$:

$$dA_0 n_i^0 = e_{ijk} dl_j^0 dm_k^0 \quad (\text{III.39})$$

onde e_{ijk} é o símbolo de permutação [Apêndice A].

Após a deformação o elemento de área dA_0 passa a ser dA_1 com vetor normal unitário n^I e lados dl^I , dm^I . A área dA_1 é dada pela magnitude do produto vetorial $dl^I \times dm^I$:

$$dA_1 n_i^I = e_{ijk} dl_j^I dm_k^I \quad (\text{III.40})$$

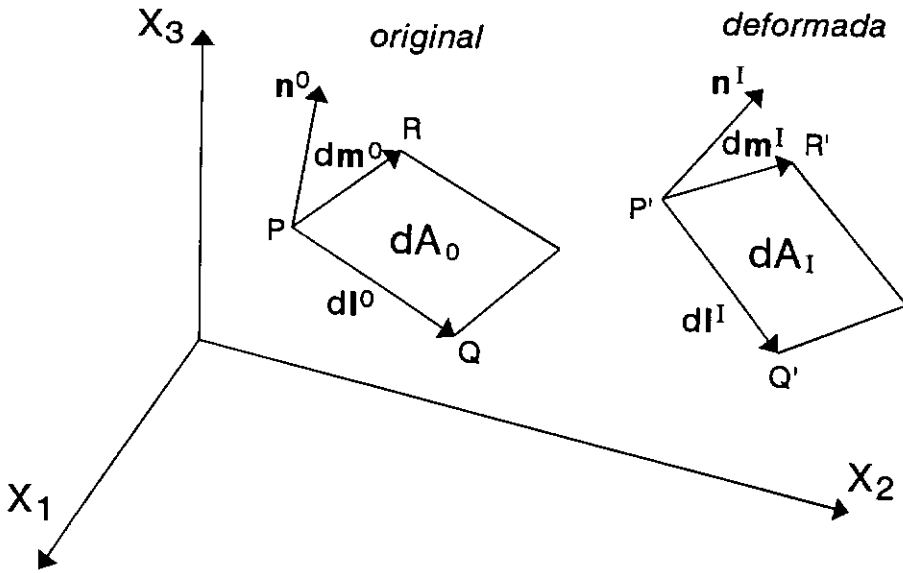


FIGURA III.3 - Mudança de um elemento de área

A relação entre as componentes dos vetores dl^I , dm^I e dl^0 , dm^0 é dada pelas equações de transformação (III.5b):

$$dl_i^I = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^0} dl_j^0 \quad (\text{III.41a})$$

$$dm_i^I = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^0} dm_j^0 \quad (\text{III.41b})$$

e fazendo a substituição na equação (III.40) tem-se:

$$dA_I n_i^I = e_{ijk} \frac{\partial x_j^I}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_k^I}{\partial x_q^0} dl_p^0 dm_q^0 \quad (\text{III.42})$$

e multiplicando por $\partial x_i^I / \partial x_r^0$ resulta:

$$dA_I n_I^I \frac{\partial x_1^I}{\partial x_r^0} = e_{ijk} \frac{\partial x_1^I}{\partial x_r^0} \frac{\partial x_j^I}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_k^I}{\partial x_q^0} dl_p^0 dm_q^0 \quad (\text{III.43})$$

mas fazendo uso da definição de determinante [Apêndice A] tem-se:

$$e_{ijk} \frac{\partial x_1^I}{\partial x_r^0} \frac{\partial x_j^I}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_k^I}{\partial x_q^0} = e_{rpq} \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right| \quad (\text{III.44})$$

onde $\left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right|$ é o determinante da matriz jacobiana da transformação $x_1^I = x_1^I(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ de elementos $\frac{\partial x_1^I}{\partial x_j^0}$:

$$\left[\frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^I}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_1^I}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_1^I}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial x_2^I}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_2^I}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_2^I}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial x_3^I}{\partial x_1^0} & \frac{\partial x_3^I}{\partial x_2^0} & \frac{\partial x_3^I}{\partial x_3^0} \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

Assim a equação (III.43) pode ser escrita como:

$$dA_I n_I^I \frac{\partial x_1^I}{\partial x_r^0} = \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right| e_{rpq} dl_p^0 dm_q^0 \quad (\text{III.46})$$

ou seja

$$\boxed{dA_I n_I^I \frac{\partial x_1^I}{\partial x_r^0} = \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right| dA_0 n_r^0} \quad (\text{III.47})$$

Analogamente pode-se achar que:

$$\boxed{dA_0 n_i^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial x_r^I} = \left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| dA_I n_r^I} \quad (\text{III.48})$$

onde $\left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right|$ é o determinante da matriz jacobiana da transformação inversa $x_i^0 = x_i^0(x_1^I, x_2^I, x_3^I)$ de elementos $\frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^I}$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_1^I} & \frac{\partial x_1^0}{\partial x_2^I} & \frac{\partial x_1^0}{\partial x_3^I} \\ \frac{\partial x_2^0}{\partial x_1^I} & \frac{\partial x_2^0}{\partial x_2^I} & \frac{\partial x_2^0}{\partial x_3^I} \\ \frac{\partial x_3^0}{\partial x_1^I} & \frac{\partial x_3^0}{\partial x_2^I} & \frac{\partial x_3^0}{\partial x_3^I} \end{array} \right] \quad (\text{III.49})$$

Note-se que esta matriz é a inversa da matriz $\left[\frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right]$, pois multiplicando-se estas matrizes tem-se:

$$\frac{\partial x_i^I}{\partial x_m^0} \frac{\partial x_m^0}{\partial x_j^I} = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^I} = \delta_{ij} \quad (\text{III.50})$$

portanto o determinante de uma destas matrizes é o inverso do determinante da outra:

$$\left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| = \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right|^{-1} \quad (\text{III.51})$$

Para analisar as mudanças de volume considere-se um elemento de volume dv_0 na configuração original de lados dl^0, dm^0, dn^0 .

Do cálculo vetorial tem-se que o volume dv_0 é dado pela magnitude do produto misto $dl^0_x dm^0 \cdot dn^0$:

$$dv_0 = dl^0_x dm^0 \cdot dn^0 = e_{ijk} dl^0_i dm^0_j dn^0_k \quad (\text{III.52})$$

onde e_{ijk} é o simbolo de permutação [Apêndice A].

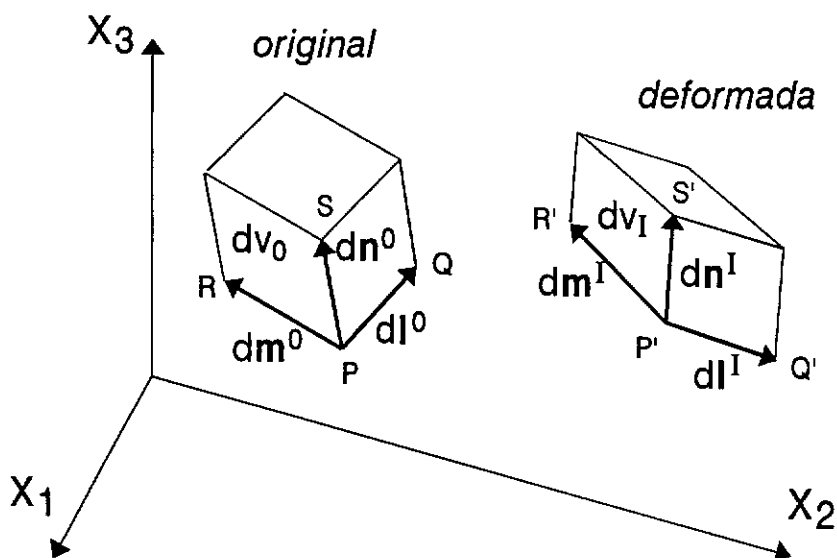


FIGURA III.4 - Mudança de um elemento de volume

Após a deformação o elemento de volume dv_0 passa a ser dv_I de lados dl^I , dm^I , dn^I . O volume dv_I é dado pela magnitude do produto misto $dl^I_x dm^I \cdot dn^I$:

$$dv_I = dl^I_x dm^I \cdot dn^I = e_{ijk} dl^I_i dm^I_j dn^I_k \quad (\text{III.53})$$

A relação entre as componentes dos vetores dl^I , dm^I , dn^I e dl^0 , dm^0 , dn^0 é dada pelas equações de transformação (III.5b):

$$dl^I_i = \frac{\partial x^I_i}{\partial x^0_j} dl^0_j \quad (\text{III.54a})$$

$$dm_i^I = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^0} dm_j^0 \quad (\text{III.54b})$$

$$dn_i^I = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_j^0} dn_j^0 \quad (\text{III.54c})$$

fazendo a substituição na equação (III.53) tem-se:

$$dv_I = e_{ijk} \frac{\partial x_i^I}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_j^I}{\partial x_q^0} \frac{\partial x_k^I}{\partial x_r^0} dl_p^0 dm_q^0 dn_r^0 \quad (\text{III.55})$$

e utilizando a relação (III.44) resulta

$$dv_I = \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right| e_{pqr} dl_p^0 dm_q^0 dn_r^0 \quad (\text{III.56})$$

ou seja

$$\boxed{dv_I = \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right| dv_0} \quad (\text{III.57})$$

e multiplicando por $\left| \partial x^0 / \partial x^I \right|$, levando em conta a relação (III.51) tem-se:

$$\boxed{dv_0 = \left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| dv_I} \quad (\text{III.58})$$

As equações (III.57), (III.58) relacionam os diferenciais de volume das configurações original e deformada.

III.2 - PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

III.2.1 - PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA

Cada partícula do corpo tem associada uma grandeza chamada *massa*, que será assumida absolutamente contínua, portanto existe uma função ρ chamada *densidade de massa* que representa a massa por unidade de volume do corpo. Um princípio fundamental da mecânica do contínuo é o princípio de conservação da massa que estabelece :

"Cada corpo possui uma propriedade não-negativa, aditiva e invariável chamada massa. A massa de um corpo se conserva invariante durante qualquer movimento do corpo."

Se ρ_0 e ρ_1 identificam as densidades de massa do corpo nas configurações original e deformada, respectivamente, então de acordo com o princípio acima tem-se:

$$\int_{v_0} \rho_0 \, dv_0 = \int_{v_1} \rho_1 \, dv_1 \quad (\text{III.59})$$

onde as integrais são sobre as mesmas partículas, e pela relação (III.57) entre os diferenciais de volume dv_0 e dv_1 é possível fazer a transformação de coordenadas:

$$\int_{v_1} \rho_1 \, dv_1 = \int_{v_0} \rho_1 \left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| dv_0 \quad (\text{III.60})$$

e a relação (III.59) fica:

$$\int_{v_0} \rho_0 - \rho_1 \left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| dv_0 = 0 \quad (\text{III.61})$$

Como esta relação deve ser válida para qualquer volume parcial v_0 do corpo resulta:

$$\rho_0 = \rho_1 \left| \frac{\partial x^I}{\partial x^0} \right| \quad (\text{III.62})$$

e multiplicando por $\left| \partial x^0 / \partial x^I \right|$, levando em conta a relação (III.51) tem-se:

$$\rho_1 = \rho_0 \left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| \quad (\text{III.63})$$

Estas equações são conhecidas como *equações de continuidade*.

Alternativamente, fazendo uso das relações (III.57), (III.58) entre diferenciais de volume, as relações (III.62), (III.63) entre as densidades de massa antes e após a deformação podem ser escritas como:

$$\rho_1 dv_1 = \rho_0 dv_0 \quad (\text{III.64})$$

III.2.2 - PRINCÍPIO DO MOMENTUM LINEAR

Define-se o *momentum linear* \mathbb{P} de um corpo de massa m como:

$$\mathbb{P} = \int_m \dot{\mathbf{u}} dm \quad (\text{III.65})$$

onde $\dot{\mathbf{u}}$ é o campo vetorial de velocidade. Se a massa é absolutamente contínua pode substituir-se dm por ρdv :

$$\mathbb{P} = \int_V \dot{\mathbf{u}} \rho \, dv \quad (\text{III.66})$$

O princípio de momentum linear estabelece que :

" A taxa de variação no tempo do momentum linear é igual à resultante F das forças que atuam no corpo."

$$\boxed{\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \dot{\mathbb{P}} = \mathbf{F}} \quad (\text{III.67})$$

Este princípio pode ser interpretado como a extensão para corpos sólidos da segunda lei de Newton para sistemas de partículas.

III.2.3 - PRINCÍPIO DO MOMENTUM ANGULAR

Define-se o momentum angular \mathbb{H}_O de um corpo de massa m como:

$$\mathbb{H}_O = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} \, dm \quad (\text{III.68})$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição em relação ao ponto "o" e $\dot{\mathbf{u}}$ é o campo de velocidade. Se a massa é absolutamente contínua pode-se substituir dm por $\rho \, dv$:

$$\mathbb{H}_O = \int_V \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} \rho \, dv \quad (\text{III.69})$$

O princípio de momentum angular estabelece que:

" A taxa de variação no tempo do momentum angular em torno de um ponto fixo o é igual ao momento resultante M_o relativo a o ."

$$\boxed{\frac{dH_o}{dt} = \dot{H}_o = M_o} \quad (\text{III.70})$$

III.3 - TENSÕES E FORÇAS EXTERNAS

III.3.1 - TENSORES DE TENSÃO DE KIRCHHOFF E LAGRANGE

No interior de um corpo são geradas forças internas devido à ação de uma partícula sobre outra. Como a força que uma partícula aplica sobre outra vizinha é igual e oposta à força que a partícula vizinha aplica sobre esta, a resultante destas forças internas é nula.

Para medir estas forças internas considere-se uma partícula P' no interior do corpo deformado contida numa superfície de área ΔA_I e normal \mathbf{n}^I , e seja ΔT^I a força interna que atua sobre a face de área ΔA_I , então define-se o *vetor tensão* σ em P' como:

$$\sigma = \lim_{\Delta A_I \rightarrow 0} \frac{\Delta T^I}{\Delta A_I} = \frac{dT^I}{dA_I} \quad (\text{III.71})$$

O vetor tensão σ representa as forças por unidade de área no corpo deformado, e depende da força dT^I e da orientação da superfície dA_I . Em particular, usando um sistema de coordenadas cartesianas x_i e orientando estas superfícies paralelas aos planos coordenados é possível decompor o vetor tensão atuando nestas superfícies em componentes segundo os eixos coordenados. Assim, para uma superfície cuja normal está na direção x_1 , as componentes do vetor tensão sobre esta superfície na direção x_j serão indicadas como σ_{1j} , adotando-se a seguinte convenção para os sentidos positivos destas componentes, se a normal exterior da superfície coincide com a direção positiva do eixo x_1 então a componente σ_{1j} é positiva na direção positiva do eixo x_j , e se a normal exterior da superfície coincide com a direção negativa do eixo x_1 então a componente σ_{1j} é positiva na

direção negativa do eixo x_j .

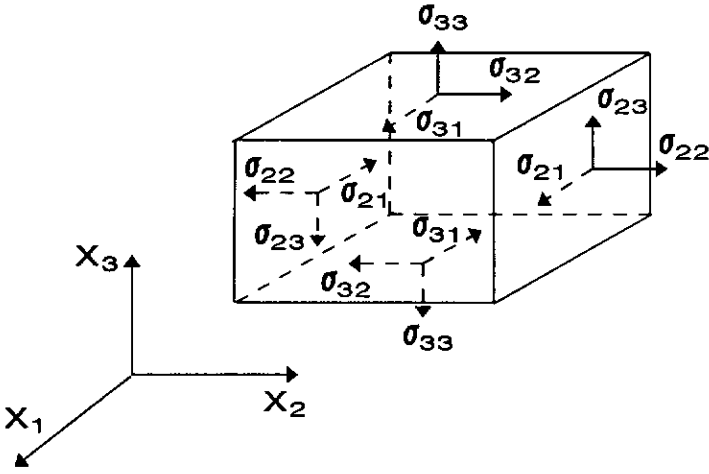


FIGURA III.5 - Sentidos positivos das tensões.

Para conhecer as tensões que atuam sobre uma superfície inclinada dA_I de normal n^I no ponto P' da configuração deformada deve considerar-se o equilíbrio do seguinte tetraedro infinitesimal no ponto P' :

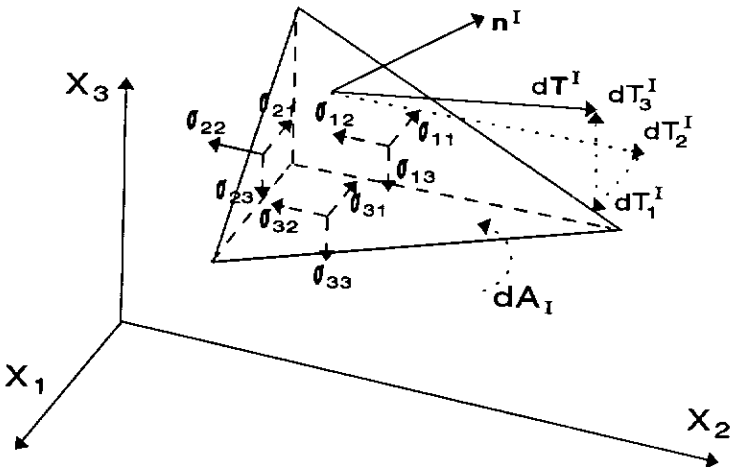


FIGURA III.6 - Tensões numa superfície inclinada.

Pode demonstrar-se [20],[22] que as componentes σ_j do vetor tensão σ que atua na superfície inclinada dA_I são fornecidas pela *fórmula de Cauchy* :

$$\sigma_j = \sigma_{ij} n_i^I \quad (\text{III.72})$$

Desta expressão pode deduzir-se o caráter tensorial das componentes σ_{ij} [9] , que são conhecidas como as componentes do *tensor de tensões Euleriano* ou de *Cauchy* , e representam as forças internas por unidade de área que atuam no corpo deformado. Usando a equação (III.71) as componentes dT_j^I do vetor de forças internas dT^I são:

$$dT_j^I = \sigma_{ij} n_i^I dA_I \quad (\text{III.73})$$

Um tensor de tensões referido ao estado deformado é um conceito físico natural. Mas será necessário relacionar tensões com deformações. Assim, se as deformações são referidas à configuração original do corpo, é conveniente definir as tensões similarmente em relação à configuração original.

Em correspondência com o vetor de forças internas dT^I que atua na superfície deformada dA_I é possível definir um vetor dT^0 na superfície original dA_0 . Se é adotada uma regra de correspondência entre dT^I e dT^0 para cada par de superfícies correspondentes, e são definidos vetores de tensão, em cada caso, como as taxas limites dT^I/dA_I e dT^0/dA_0 , então podem ser definidos tensores de tensão em ambas as configurações. As regras de correspondência entre dT^I e dT^0 são arbitrárias mas devem ser matematicamente consistentes. As seguintes regras são conhecidas como regras *Lagrangiana* e de *Kirchhoff*:

$$\text{Lagrange} : \quad dT_1^0 \text{ (L)} \equiv dT_1^I \quad (\text{III.74a})$$

$$\text{Kirchhoff} : \quad dT_1^0 \text{ (K)} \equiv \frac{\partial x_1^0}{\partial x_j^I} dT_j^I \quad (\text{III.74b})$$

Note-se que neste último caso $dT^{0(K)}$ e dT^I estão relacionados pela mesma regra de transformação que $dx_1^0 = (\partial x_1^0 / \partial x_j^I) dx_j^I$, equação (III.5a).

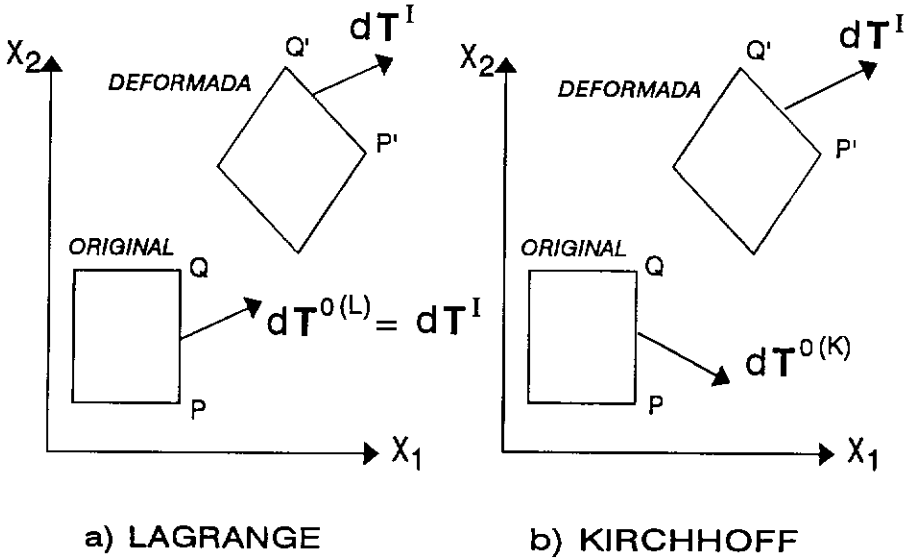


FIGURA III.7 - Correspondência de vetores de forças internas

Se n^0 é o vetor normal à superfície dA_0 , então, usando uma lei similar às fórmulas de Cauchy (III.73), podem-se definir componentes de tensão T_{ij} , S_{ij} referidas à configuração original como:

$$\text{Lagrange : } dT_i^{0(L)} = T_{ij} n_j^0 dA_0 = dT_i^I \quad (\text{III.75a})$$

$$\text{Kirchhoff : } dT_i^{0(K)} = S_{ij} n_j^0 dA_0 = \frac{\partial x_j^0}{\partial x_m^I} dT_m^I \quad (\text{III.75b})$$

onde T_{ij} é chamado *tensor de tensões Lagrangiano* ou *primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff*, e S_{ij} é chamado *tensor de tensões de Kirchhoff* ou *segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff*.

Das relações (III.48) entre elementos de área dA_0 , dA_I antes e após a deformação e levando em conta o princípio de conservação da massa (III.63), tem-se:

$$\left| \frac{\partial x^0}{\partial x^I} \right| n_j^I dA_I = \frac{\rho_I}{\rho_0} n_j^I dA_I = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_j^I} n_i^0 dA_0 \quad (\text{III.76})$$

portanto

$$n_j^I dA_I = \frac{\rho_0}{\rho_I} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_j^I} n_i^0 dA_0 \quad (\text{III.77})$$

Fazendo a substituição de dT_j^I da equação (III.73) na equação (III.75a) tem-se:

$$T_{ij} n_i^0 dA_0 = \sigma_{mj} n_m^I dA_I = \sigma_{mj} \frac{\rho_0}{\rho_I} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_m^I} n_i^0 dA_0 \quad (\text{III.78})$$

resultando

$$T_{ij} = \sigma_{mj} \frac{\rho_0}{\rho_I} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_m^I} \quad (\text{III.79})$$

Analogamente fazendo a substituição de dT_m^I da equação (III.73) na equação (III.75.b) , tem-se:

$$S_{ij} n_i^0 dA_0 = \frac{\partial x_j^0}{\partial x_m^I} \sigma_{pm} n_p^I dA_I = \frac{\rho_0}{\rho_I} \frac{\partial x_j^0}{\partial x_m^I} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_p^I} \sigma_{pm} n_i^0 dA_0 \quad (\text{III.80})$$

resultando

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho_I} \frac{\partial x_i^0}{\partial x_p^I} \frac{\partial x_j^0}{\partial x_m^I} \sigma_{pm} \quad (\text{III.81})$$

Subseqüentemente será demonstrado que o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} é simétrico. Da equação (III.79) pode-se observar que em geral, o tensor de tensões Lagrangiano T_{ij} não é simétrico, mas o tensor de tensões de Kirchhoff, equação (III.81), é sempre simétrico. Das equações (III.79), (III.81) é possível relacionar os tensores S_{ij} e T_{ij} como:

$$S_{ij} = \frac{\partial x_j^0}{\partial x_m^I} T_{im} \quad (\text{III.82})$$

e usando as seguintes identidades:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i^0}{\partial x_m^I} \frac{\partial x_m^I}{\partial x_j^0} \quad (\text{III.83a})$$

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i^I}{\partial x_m^0} \frac{\partial x_m^0}{\partial x_j^I} \quad (\text{III.83b})$$

podem ser obtidas as seguintes relações:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho_I}{\rho_0} \frac{\partial x_i^I}{\partial x_p^0} T_{pj} = \frac{\rho_I}{\rho_0} \frac{\partial x_i^I}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_j^I}{\partial x_m^0} S_{pm} \quad (\text{III.84a})$$

$$T_{ij} = \frac{\partial x_j^I}{\partial x_m^0} S_{im} \quad (\text{III.84b})$$

Para expressar os tensores de tensões de Kirchhoff e Cauchy em termos de deslocamentos devem-se usar as equações (III.13):

$$\frac{\partial x_1^I}{\partial x_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_1}{\partial x_j^0} \quad (\text{III.85a})$$

$$\frac{\partial x_1^0}{\partial x_j^I} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_1}{\partial x_j^I} \quad (\text{III.85b})$$

e fazendo a substituição nas equações (III.81) e (III.84a) tem-se que o tensor de tensões de Kirchhoff S_{ij} pode ser expresso como:

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho_I} \left[\sigma_{ij} - \left(\delta_{jm} \frac{\partial u_1}{\partial x_p^I} + \delta_{ip} \frac{\partial u_j}{\partial x_m^I} - \frac{\partial u_1}{\partial x_p^I} \frac{\partial u_j}{\partial x_m^I} \right) \sigma_{pm} \right] \quad (\text{III.86a})$$

e analogamente o tensor de tensões de Cauchy pode ser expresso como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho_I}{\rho_0} \left[T_{ij} + \left(\delta_{jm} \frac{\partial u_1}{\partial x_p^0} + \delta_{ip} \frac{\partial u_j}{\partial x_m^0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_p^0} \frac{\partial u_j}{\partial x_m^0} \right) S_{pm} \right] \quad (\text{III.86b})$$

Se os deslocamentos são infinitesimais então tem-se:

$$\frac{\partial x_1^I}{\partial x_j^0} \cong \frac{\partial x_1^0}{\partial x_j^I} \cong \delta_{ij} \quad (\text{III.87a})$$

$$\rho_0 \cong \rho_I \quad (\text{III.87b})$$

resultando da equação (III.84a):

$$\sigma_{ij} \cong T_{ij} \cong S_{ij} \quad (\text{III.88})$$

isto é , para deformações e deslocamentos muito pequenos os tensores T_{ij} , S_{ij} coincidem com o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} . Deve-se notar que o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} representa as tensões reais atuando sobre o corpo deformado e portanto para pequenos deslocamentos os tensores T_{ij} , S_{ij} representam essas tensões, mas para grandes deslocamentos e deformações estes tensores não tem um significado físico definido.

III.3.2 - TENSOR DE TENSÕES DE KIRCHHOFF EM COORDENADAS CORROTACIONAIS

Considere-se a seguinte decomposição do campo de deslocamentos u_i :

$$u_i = u_i^R + v_i \quad (\text{III.89})$$

onde u_i^R é um campo de deslocamentos de corpo rígido que definem uma configuração corrotacionada, e v_i são os deslocamentos medidos a partir desta configuração que produzem deformações no corpo.

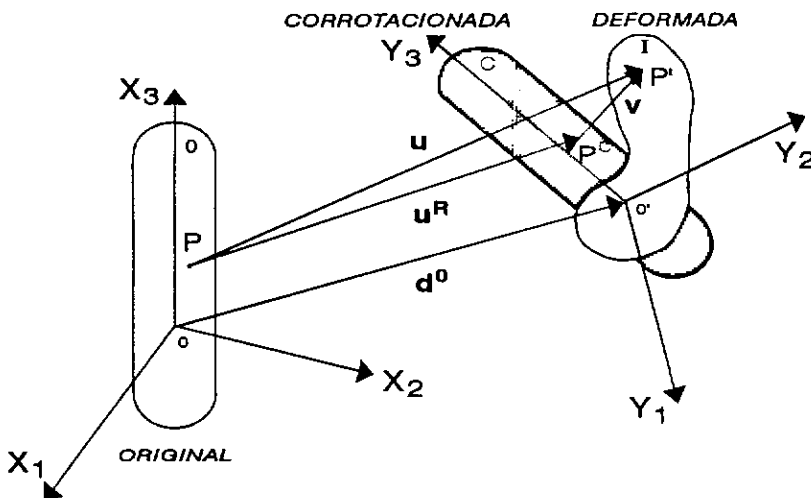


FIGURA III.8 - Sistema de coordenadas corrotacional.

As componentes S_{ij}^0 do tensor de tensões de Kirchhoff referidas à configuração original e expressas no sistema de coordenadas x_i são da equação (III.81):

$$S_{ij}^0 = \frac{\rho_0}{\rho_I} \frac{\partial x_i^0}{\partial x_p^I} \frac{\partial x_j^0}{\partial x_m^I} \sigma_{pm} \quad (\text{III.90})$$

onde as componentes σ_{pm} são as componentes do tensor de tensões de Cauchy expressas no sistema de coordenadas x_i .

As coordenadas x_i^I de um ponto P' da configuração deformada podem ser expressas em função das coordenadas x_j^0 do mesmo ponto na configuração original mediante a equação (III.32) como:

$$x_i^I = r_{ji} x_j^0 + d_i^0 + v_i \quad (\text{III.91})$$

onde r_{ij} são os elementos da matriz de rotação, equação (III.24) e d_i^0 são as coordenadas da origem O' do sistema corrotacional. Multiplicando por r_{ki} e levando em conta as relações (III.27) tem-se:

$$r_{ki} x_i^I = r_{ki} r_{jl} x_j^0 + r_{ki} d_l^0 + r_{ki} v_l = x_k^0 + r_{ki} d_l^0 + r_{ki} v_l \quad (\text{III.92})$$

resultando

$$x_k^0 = r_{ki} x_i^I - r_{ki} d_l^0 - r_{ki} v_l \quad (\text{III.93})$$

derivando em relação a x_p^I tem-se:

$$\frac{\partial x_k^0}{\partial x_p^I} = r_{ki} \delta_{lp} - r_{ki} \frac{\partial v_l}{\partial x_p^I} = r_{kp} - r_{ki} \frac{\partial v_l}{\partial x_p^I} \quad (\text{III.94})$$

Fazendo a substituição na equação (III.90) o tensor de tensões de Kirchhoff S_{ij}^0 pode ser escrito como:

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho_I} \left[\left(r_{ip} - r_{iq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p^I} \right) \left(r_{ip} - r_{iq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p^I} \right) \right] \sigma_{pm} \quad (\text{III.95})$$

ou em forma expandida:

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho_I} \left[r_{ip} r_{jm} - r_{iq} r_{jm} \frac{\partial v_q}{\partial x_p^I} - r_{ip} r_{js} \frac{\partial v_s}{\partial x_m^I} - r_{iq} r_{js} \frac{\partial v_q}{\partial x_p^I} \frac{\partial v_s}{\partial x_m^I} \right] \sigma_{pm}$$

(III.96)

As componentes $S_{ij}^{c'}$ do tensor de tensões de Kirchhoff referido à configuração corrotacionada, e expressas no sistema de coordenadas corrotacionais y_i , são da equação (III.86a) :

$$S_{ij}^{c'} = \frac{\rho_0}{\rho_I} \left[\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{jl} \frac{\partial v_i'}{\partial y_k^I} - \delta_{ik} \frac{\partial v_j'}{\partial y_l^I} + \frac{\partial v_i'}{\partial y_k^I} \frac{\partial v_j'}{\partial y_l^I} \right] \sigma_{kl}' \quad (\text{III.97})$$

onde v_i' são as componentes do vetor v de deslocamentos entre as configurações corrotacionada e deformada, e σ_{kl}' são as componentes do tensor de tensões de Cauchy, ambas expressas no sistema de coordenadas corrotacionais y_i . Note-se que o tensor $S_{ij}^{c'}$ é independente dos movimentos de corpo rígido.

Mediante uma rotação de coordenadas [Apêndice A] é possível expressar as componentes v_i' , σ_{kl}' em função das componentes v_q , σ_{pm} no sistema x_i como:

$$v_i' = r_{iq} v_q \quad (\text{III.98})$$

$$\sigma_{kl}' = r_{kp} r_{lm} \sigma_{pm} \quad (\text{III.99})$$

Fazendo a substituição na equação (III.97) tem-se:

$$S_{ij}^c' = \frac{\rho_0}{\rho_I} \left[r_{ip} r_{jm} - r_{iq} r_{jm} \left(r_{kp} \frac{\partial v_q}{\partial y_k^I} \right) - r_{ip} r_{js} \left(r_{lm} \frac{\partial v_s}{\partial y_l^I} \right) - r_{iq} r_{js} \left(r_{kp} \frac{\partial v_q}{\partial y_k^I} \right) \left(r_{lm} \frac{\partial v_s}{\partial y_l^I} \right) \right] \sigma_p \quad (\text{III.100})$$

Notando-se que y_k^I são as componentes do vetor posição y^I de um ponto P' da configuração deformada no sistema y_1 , este vetor está relacionado com o vetor posição x^I do mesmo ponto no sistema x_1 pela equação:

$$x^I = R^{-1} y^I + d^0 = R^T y^I + d^0 \quad (\text{III.101})$$

ou seja

$$x_p^I = r_{mp} y_m^I + d_p^0 \quad (\text{III.102})$$

derivando em relação a y_k^I tem-se:

$$\frac{\partial x_p^I}{\partial y_k^I} = r_{mp} \delta_{mk} = r_{kp} \quad (\text{III.103})$$

A derivada de v_q em relação a x_p^I é:

$$\frac{\partial v_q}{\partial x_p^I} = \frac{\partial v_q}{\partial y_k^I} \frac{\partial y_k^I}{\partial x_p^I} = r_{kp} \frac{\partial v_q}{\partial y_k^I} \quad (\text{III.104})$$

resultando

$$r_{kp} \frac{\partial v_q}{\partial y_k^I} = \frac{\partial v_q}{\partial x_p^I} \quad (\text{III.105})$$

Fazendo a substituição em (III.100) pode-se comprovar que:

$$\boxed{S_{ij}^0 = S_{ij}^{c'}} \quad (\text{III.106})$$

Daqui pode-se concluir que:

- (i) O tensor de tensões de Kirchhoff S_{ij}^0 referido à configuração original é invariante ante movimentos de corpo rígido. Isto é, se o corpo deformado é levado a outra configuração por movimentos de corpo rígido as componentes S_{ij} do tensor de tensões de Kirchhoff mantêm-se inalteradas, pois neste caso o tensor $S_{ij}^{c'}$ não varia. Esta propriedade é conhecida como *objetividade* do tensor de tensões, e implica que as tensões são obtidas como funções unicamente das deformações e não são afetadas pelos movimentos de corpo rígido, sendo portanto estes tensores apropriados para serem utilizados em equações constitutivas. Deve-se notar que o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} não possui esta propriedade.
- (ii) Para deformações muito pequenas as componentes S_{ij}^0 do tensor de tensões de Kirchhoff podem ser interpretadas como as componentes σ_{ij}' do tensor de tensões de Cauchy referidas a um sistema corrotacional que se translada rigidamente com o corpo. Notando, pela observação anterior que o tensor S_{ij}^0 independe dos movimentos de corpo rígido, isto implica que as componentes S_{ij}^0 do tensor de tensões de Kirchhoff representam, neste caso, as tensões usuais de engenharia referidas à configuração original.

III.3.3 - FORÇAS EXTERNAS DE SUPERFÍCIE E VOLUME

As forças externas que atuam sobre um corpo contínuo podem ser divididas em dois tipos: (1) *forças de volume* e (2) *forças de superfície*.

As forças de volume \mathbf{b} representam as forças por unidade de massa (ou unidade de volume) que são geradas por ações externas e são assumidas serem funções contínuas definidas em todo o volume do corpo.

As forças de superfície \mathbf{p} atuam nas superfícies que formam o contorno do corpo. Elas são definidas por unidade de área de superfície externa e representam o contato de um corpo sobre outro ou a interação com o meio. As forças de superfície são assumidas como funções seccionalmente contínuas.

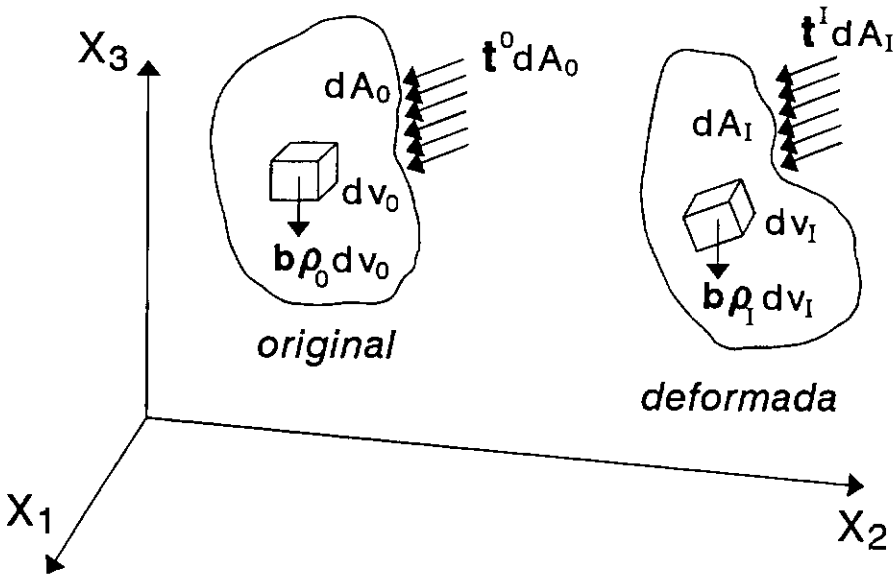


FIGURA III.9 - Forças externas de superfície e volume

Se as forças externas de superfície e volume não variam em magnitude e sentido nas distintas configurações do corpo, isto é, se se mantêm constantes e portanto são *conservativas*, devem cumprir-se as seguintes relações:

$$b_1^0 \rho_0 dv_0 = b_1^I \rho_I dv_I \quad (\text{III.107a})$$

$$p_1^0 dA_0 = p_1^I dA_I \quad (\text{III.107b})$$

e levando em conta o princípio de conservação da massa equação (III.64) tem-se:

$$b_1^0 = b_1^I \quad (\text{III.108})$$

A resultante f^I das forças externas que atuam na configuração deformada é:

$$f_1^I = \int_{v_I} b_1^I \rho_I dv_I + \int_{A_I} p_1^I dA_I \quad (\text{III.109})$$

Usando a fórmula de Cauchy (III.72) a resultante das forças de superfície podem ser escritas como:

$$\int_{A_I} p_1^I dA_I = \int_{A_I} \sigma_{j1} n_j^I dA_I \quad (\text{III.110})$$

e mediante a aplicação do teorema da divergência pode transformar-se como:

$$\int_{A_I} \sigma_{j1} n_j^I dA_I = \int_{v_I} \frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j^I} dv_I \quad (\text{III.111})$$

portanto a resultante f^I fica:

$$\boxed{f_1^I = \int_{v_I} \left(\frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j^I} + b_1^I \rho_I \right) dv_I} \quad (\text{III.112})$$

Para referenciar esta força resultante à configuração original, da equação (III.78) tem-se:

$$\sigma_{ji} n_j^I dA_I = T_{pi} n_p^0 dA_0 \quad (\text{III.113})$$

e, usando o teorema da divergência, a resultante das forças de superfície podem ser escritas como:

$$\int_{A_I} p_i^I dA_I = \int_{A_0} T_{ji} n_j^0 dA_0 = \int_{v_0} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j^0} dv_0 \quad (\text{III.114})$$

e levando em o princípio de conservação da massa, $\rho_I dv_I = \rho_0 dv_0$, tem-se:

$$\boxed{f_i^I = \int_{v_0} \left(-\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j^0} + b_i^I \rho_0 \right) dv_0} \quad (\text{III.115})$$

e usando as relações (III.84b) resulta:

$$\boxed{f_i^I = \int_{v_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_j^0} \left(S_{jp} \frac{\partial x_p^I}{\partial x_j^0} \right) + b_i^I \rho_0 \right] dv_0} \quad (\text{III.116})$$

Estas duas equações fornecem a resultante das forças externas que atuam na configuração deformada como funções dos tensores de tensão referidos à configuração original.

III.4 - LEIS DO MOVIMENTO DE CAUCHY

Usando os princípios de momentum é possível obter equações locais de movimento para cada partícula x_1^I da configuração deformada.

Pelo princípio de momentum linear (III.67) tem-se:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{v_I} \rho_I \dot{u} dv_I \right) = f^I \quad (\text{III.117})$$

e levando em conta o princípio de conservação da massa. $d(\rho_I dv_I)/dt = 0$, a equação (III.117) pode ser escrita como:

$$f_i^I = \int_{v_I} \rho_I u_i dv_I = \int_{v_0} \rho_0 u_i dv_0 \quad (\text{III.118})$$

e fazendo a substituição de f_i^I da equação (III.112) tem-se:

$$\int_{v_I} \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j^I} + b_i^I \rho_I - \rho_I u_i \right) dv_I = 0 \quad (\text{III.119})$$

Como a integral deve ser válida para volumes arbitrários do corpo tem-se:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j^I} + b_i^I \rho_I = \rho_I u_i} \quad (\text{III.120})$$

Esta equação é conhecida como *primeira lei de movimento de Cauchy*.

Analogamente as equações de movimento utilizando as equações (III.115), (III.116) em função dos tensores de tensão da configuração original são:

$$\boxed{\frac{\partial T_{j1}}{\partial x_j^0} + b_i^I \rho_0 = \rho_0 u_i} \quad (\text{III.121a})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j^0} \left(S_{jm} \frac{\partial x_m^I}{\partial x_m^0} \right) + b_i^I \rho_0 = \rho_0 u_i} \quad (\text{III.121b})$$

Pelo princípio de momentum angular (III.70) tem-se:

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{v_I} \rho_I (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}) dv_I \right) = Mo^I \quad (\text{III.122})$$

e levando em conta o princípio de conservação da massa, $d(\rho_I dv_I)/dt = 0$, a equação (III.122) pode ser escrita como:

$$Mo_i^I = \int_{v_I} \rho_I e_{ijk} r_j u_k dv_I \quad (\text{III.123})$$

O momento das forças externas da configuração deformada é formado pela soma dos momentos das forças de massa e superfície. Utilizando a fórmula de Cauchy (III.72) para as forças de superfície este momento resulta:

$$Mo_i^I = \int_{v_I} e_{ijk} r_j b_k^I \rho_I dv_I + \int_{A_I} e_{ijk} r_j \sigma_{pk} n_k^I dA_I \quad (\text{III.124})$$

que, pelo teorema da divergência, pode ser escrito como:

$$Mo_i^I = \int_{v_I} \left[e_{ijk} r_j \left(\frac{\partial \sigma_{pk}}{\partial x_p^I} + b_k^I \rho_I \right) + e_{ijk} \delta_{pj} \sigma_{pk} \right] dv_I \quad (\text{III.125})$$

e, levando em conta as equações de movimento (III.120), tem-se:

$$M O_i^I = \int_{v_I} e_{ijk} r_j u_k \rho_I dv_I + \int_{v_I} e_{ijk} \sigma_{jk} dv_I \quad (\text{III.126})$$

Comparando as equações (III.123) e (III.126) resulta:

$$\int_{v_I} e_{ijk} \sigma_{jk} dv_I = 0 \quad (\text{III.127})$$

Como a integral deve ser válida para volumes arbitrários do corpo, então deve-se ter que:

$$\boxed{e_{ijk} \sigma_{jk} = 0} \quad (\text{III.128})$$

Esta equação é conhecida como *segunda lei de movimento de Cauchy*, e dela pode-se deduzir que:

$$\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0 \quad (\text{III.129})$$

ou seja

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj} \quad (\text{III.130})$$

que implica que o tensor de tensões de Cauchy é *simétrico*, e portanto da equação (III.81) tem-se:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (\text{III.131})$$

que implica que o tensor de tensões de Kirchhoff também é *simétrico*.

III.5 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

III.5.1 - MATERIAIS ELÁSTICOS

As equações constitutivas descrevem o comportamento dos materiais fornecendo as tensões como funções das deformações. Estas leis constitutivas podem incluir como variáveis também a temperatura e o tempo. Um material é chamado *elástico* se as tensões em qualquer instante de tempo t dependem somente do estado local de deformação no instante t e não dos estados anteriores de deformação. Portanto as equações constitutivas para um material elástico devem ser da forma:

$$\sigma_{ij} = \mathcal{G}(e_{ji}) \quad (\text{III.132})$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy e e_{ij} é o tensor de deformação de Almansi. Como estes tensores estão univocamente relacionados com o tensor de tensões de Kirchhoff S_{ij} e o tensor de deformação de Green, respectivamente, um material elástico pode ser descrito em variáveis Lagrangianas como:

$$S_{ij} = \mathcal{F}(E_{ji}) \quad (\text{III.133})$$

Para tensões menores do que as correspondentes ao escoamento ou fratura, a grande maioria dos materiais estruturais apresentam deformações muito pequenas, embora a estrutura possa apresentar grandes deslocamentos de corpo rígido. Como foi demonstrado nas seções anteriores para pequenas deformações os tensores de tensão de Kirchhoff S_{ij} e o tensor de deformação de Green E_{ij} são equivalentes, respectivamente, ao tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} e ao tensor de deformação infinitesimal ϵ_{ij} usuais de engenharia; portanto uma lei constitutiva muito empregada na prática consiste numa generalização da lei de Hooke [19],[24],[25]:

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (\text{III.134})$$

onde C_{ijkl} são as componentes do tensor de elasticidade linear isotrópica:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{III.135})$$

onde λ , μ são as constantes de Lamé que expressas em função do módulo de

elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν são:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{III.136a})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{III.136b})$$

Deve observar-se que se o material é elástico mas apresenta um comportamento não-linear para pequenas deformações ainda é possível utilizar uma relação do tipo (III.134), mas onde as componentes do tensor C_{ijkl} serão funções das deformações [19].

III.5.2 - MATERIAIS HIPERELÁSTICOS

Uma definição alternativa dos materiais elásticos emana da noção de reversibilidade. Num sentido termodinâmico a reversibilidade implica que não deve existir dissipação de energia durante um processo de deformação de um material elástico. Notando-se que para um material elástico o estado atual de tensões independe da história da deformação, pode-se interpretar que o trabalho feito pelas tensões durante o processo de deformação é conservativo e portanto pode-se assumir que existe uma função potencial $W(E_{ij})$ chamada *densidade de energia de deformação* da qual podem ser derivadas as tensões como:

$$S_{ij} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (\text{III.137})$$

Os materiais elásticos que satisfazem esta equação são chamados *hiperelásticos* [20],[22],[25].

Como geralmente a configuração original será conhecida é mais conveniente usar ao invés de $W(E_{ij})$ uma função de potencial elástico $\mathcal{U}(E_{ij})$ por unidade de volume da configuração original:

$$u = \rho_0 W \quad (\text{III.138})$$

e portanto

$$S_{ij} = \frac{\partial u}{\partial E_{ij}} \quad (\text{III.139})$$

Tecnicamente um material elástico não precisa ser hiperelástico, mas assumir o contrário implica que existirá uma dissipação de energia durante o processo de deformação [25]. Os materiais aqui considerados serão assumidos hiperelásticos.

III.6 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Assumindo que o potencial elástico por unidade de volume $u(E_{ij})$ seja uma função analítica em seus argumentos E_{ij} , então, pode ser expresso pela expansão de Taylor:

$$u = u_0 + C_{ij} E_{ij} + \frac{1}{2!} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklrs} E_{ij} E_{kl} E_{rs} \dots \quad (\text{III.140})$$

onde u_0 é uma constante arbitrária que pode ser assumida nula, e os coeficientes C_{ij} , C_{ijkl} , C_{ijklrs} , ... são chamados *elasticidades de ordem 0, 1, 2, ...*. Como os tensores S_{ij} , E_{ij} são simétricos, as elasticidades de qualquer ordem devem ser simétricas em cada par de índices sucessivos:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (\text{III.141a})$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{likj} \quad (\text{III.141a})$$

⋮
etc

Da equação (III.132) tem-se para um material hiperelástico:

$$S_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial E_{ij}} = C_{ij} + C_{ijkl} E_{kl} + \frac{1}{2!} C_{ijklrs} E_{kl} E_{rs} + \dots \quad (\text{III.142})$$

Note-se que se $E_{ij} = 0$ tem-se $S_{ij} = C_{ij}$, portanto C_{ij} representa as "tensões iniciais" na configuração original. Se esta configuração é adotada em correspondência com o estado natural livre de tensões tem-se $C_{ij} = 0$. Então zerando a constante irrelevante \mathcal{U}_0 , a equação (III.140) fica:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2!} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklrs} E_{ij} E_{kl} E_{rs} + \dots \quad (\text{III.143})$$

Assumindo que as deformações sejam muito pequenas é possível obter uma aproximação da função energia de deformação, truncando a expansão (III.143) no primeiro termo como:

$$\mathcal{U} \cong \frac{1}{2!} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (\text{III.144})$$

e correspondentemente as tensões S_{ij} são aproximadas como:

$$S_{ij} \cong C_{ijkl} E_{kl} \quad (\text{III.145})$$

como estas expressões devem ser válidas para deformações infinitesimais, em particular para materiais isotrópicos, os coeficientes C_{ijkl} devem coincidir com os tensores de elasticidade infinitesimal da equação (III.135).

Além disso, para que o equilíbrio no estado livre de tensões ($\mathcal{U} = 0$) seja estável, é necessário que a função \mathcal{U} assuma um valor mínimo nessa configuração, portanto \mathcal{U} deve ser uma função positiva definida para deformações pequenas em torno do estado livre de tensões. Pode-se demonstrar ^[20] que isto só é possível se $E > 0$ e $-1 < \nu < 0.5$ nesse entorno.

A energia de deformação U é obtida mediante a integração sobre todas as partículas da estrutura da energia de deformação específica \mathcal{U} em relação à

configuração original livre de deformações como:

$$U = \int_{V_0} \mathcal{U} \, dv_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \, dv_0 \quad (\text{III.146})$$

Notando-se que para pequenas deformações as tensões S_{ij} podem ser expressas pela equação (III.145), então a energia de deformação pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_0} S_{ij} E_{ij} \, dv_0 \quad (\text{III.147})$$

III.7 - POTENCIAL DAS FORÇAS EXTERNAS CONSERVATIVAS

Considerando-se forças externas conservativas de massa b e de superfície t que não variam em intensidade e sentido, o potencial associado ao trabalho destas forças, equação (II.5), é:

$$\Omega = - \int_{V_0} b_i u_i \rho_0 \, dv_0 - \int_{A_0} t_i u_i \, dA_0 \quad (\text{III.148})$$

onde as forças estão referidas à configuração original e u_i são os deslocamentos entre as configurações original e deformada. Para carregamento proporcional a um parâmetro de carga λ o potencial das forças externas é:

$$\Omega = \lambda \Omega_0 = - \lambda \left[\int_{V_0} b_i^0 u_i \rho_0 \, dv_0 - \int_{A_0} t_i^0 u_i \, dA_0 \right] \quad (\text{III.149})$$

onde b_i^0 , t_i^0 são magnitudes fixas de referência das cargas, e Ω_0 é o potencial de referência destas cargas.

As forças concentradas são casos particulares de forças de volume ou superfície, que atuam sobre um volume ou área infinitesimal onde os deslocamentos podem ser considerados iguais para todas as partículas dessas

regiões do corpo. Portanto o potencial das forças concentradas é:

$$\Omega = - u_1 \left[\int_{V_0} b_1 \rho_0 dv_0 - \int_{A_0} t_1 dA_0 \right] = - p_1 u_1 \quad (\text{III.150})$$

onde p_1 é a força concentrada na direção do deslocamento u_1 .

III.8 - PARTICULARIZAÇÃO A SISTEMAS CONTÍNUOS DISCRETIZADOS

Um sistema contínuo é constituído por infinitas partículas e as distintas configurações do sistema são identificadas pelos deslocamentos u destas partículas. Usando uma descrição Lagrangiana, estes campos de deslocamentos serão funções das coordenadas de cada partícula em uma configuração de referência, isto é:

$$u = u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \quad (\text{III.151})$$

Para obter uma representação aproximada do campo de deslocamentos u com um número finito de parâmetros é possível expressar estes deslocamentos como:

$$u_\alpha = N_\alpha^i(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \phi_i, \quad \alpha = 1,2,3, \quad i = 1,2, \dots, n \quad (\text{III.152})$$

onde as ϕ_i são um conjunto de n coordenadas generalizadas e as N_α^i são funções de interpolação, onde o índice superior indica a coordenada generalizada associada e o índice inferior o deslocamento associado. Nesta seção serão adotados índices latinos no intervalo 1 até n para referenciar coordenadas generalizadas ϕ_i , e índices gregos no intervalo 1 até 3 para referenciar às coordenadas cartesianas x_α .

Quando o contínuo é discretizado por elementos finitos as coordenadas generalizadas ϕ_i ficam, usualmente associadas a deslocamentos nodais e as funções de interpolação N_α^i são definidas localmente sobre aqueles elementos que

contém o grau de liberdade ϕ_1 .

As componentes $E_{\alpha\beta}$ do tensor de Green, equação (III.15a), podem ser escritas como:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta}) \quad (\text{III.153})$$

onde com vírgula é indicada a derivada parcial, neste caso em relação às coordenadas espaciais x_α , isto é:

$$u_{\alpha,\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\text{III.154})$$

Fazendo a substituição da aproximação de u_α , equação (III.152), no tensor de Green, tem-se:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (N_{\alpha,\beta}^1 \phi_1 + N_{\beta,\alpha}^j \phi_j + N_{\gamma,\alpha}^k N_{\gamma,\beta}^1 \phi_k \phi_1) \quad (\text{III.155})$$

A energia de deformação, equação (III.146), é:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_0} C_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} dv_0 \quad (\text{III.156})$$

Levando em conta que as componentes do tensor de Green $E_{\alpha\beta}$ são funções quadráticas das coordenadas generalizadas ϕ_i , então a energia de deformação deve ser uma função quártica nestas coordenadas, isto é:

$$U = U (\phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4) \quad (\text{III.157})$$

Expandindo a energia de deformação em séries de Taylor em torno da origem das coordenadas generalizadas ($\phi_i = 0$), tem-se:

$$U = \frac{1}{2} U_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} U_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{1}{24} U_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \quad (\text{III.158})$$

onde os coeficientes U_{ij} , U_{ijk} , U_{ijkl} serão chamados *coeficientes de rigidez de zero, primeira e segunda ordem*, respectivamente, e são definidos como:

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\phi=0} \quad (\text{III.159a})$$

$$U_{ijk} = \frac{\partial^3 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \Big|_{\phi=0} \quad (\text{III.159b})$$

$$U_{ijkl} = \frac{\partial^4 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k \partial \phi_l} \Big|_{\phi=0} \quad (\text{III.159c})$$

Note-se que esta forma de expressar a energia de deformação é válida para qualquer sólido elástico cujas deformações, assumidas pequenas, sejam calculadas mediante o tensor de Green, e cujos deslocamentos sejam aproximados por funções de interpolação *lineares* nas coordenadas generalizadas.

O potencial Ω_0 associado às forças externas de referência, é da equação (III.149):

$$\Omega_0 = - \int_{V_0} b_\alpha^0 u_\alpha \rho_0 dv_0 - \int_{A_0} t_\alpha^0 u_\alpha dA_0 \quad (\text{III.160})$$

onde b_α^0 , t_α^0 são as magnitudes de referência das cargas externas de massa e superfície, e u_α são os deslocamentos entre as configurações original e deformada. Adotando-se a aproximação (III.152) para estes deslocamentos o potencial Ω_0 fica:

$$\Omega_0 = - \left[\int_{V_0} b_\alpha^0 N_\alpha^i \rho_0 dv_0 - \int_{A_0} t_\alpha^0 N_\alpha^i dA_0 \right] \phi_i \quad (\text{III.161})$$

onde o termo entre colchetes corresponde às forças generalizadas associadas a este potencial, da equação (II.21):

$$p_i = - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \phi_i} = \int_{V_0} b_{\alpha}^0 N_{\alpha}^i \rho_0 \, dv_0 + \int_{A_0} t_{\alpha}^0 N_{\alpha}^i \, dA_0 \quad (\text{III.162})$$

e portanto o potencial (III.160) pode ser escrito como:

$$\Omega_0 = - p_i \phi_i \quad (\text{III.163})$$

Para carregamento proporcional, a energia potencial total é formada pela soma da energia de deformação mais o potencial das forças externas proporcionais como:

$$V = U + \lambda \Omega \quad (\text{III.164})$$

Quando é empregada uma descrição Lagrangiana com a aproximação (III.152) para os deslocamentos, a energia de deformação U é expressa pela equação (III.158) e o potencial Ω_0 das forças externas é expresso pela equação (III.163), ficando a energia potencial total como:

$$V = \frac{1}{2} U_{IJ} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} U_{Ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{1}{24} U_{Ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l - \lambda p_i \phi_i \quad (\text{III.165})$$

A condição de equilíbrio estático de um sistema discreto conservativo é que a energia potencial total seja estacionária em relação às coordenadas generalizadas, equação (II.30), isto é:

$$V_{,i} = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0 \quad , \quad \forall i \quad (\text{III.166})$$

Aplicando as regras de diferenciação da álgebra indicial [Apêndice A], as derivadas da energia potencial em relação a ϕ_i são:

$$F_i = U_{IJ} \phi_j + \frac{1}{2} U_{Ijk} \phi_j \phi_k + \frac{1}{6} U_{Ijkl} \phi_j \phi_k \phi_l - \lambda p_i = 0 \quad (\text{III.167})$$

onde F_i é a resultante de todas as forças generalizadas, que deve ser nula para garantir o equilíbrio. Definindo o *vetor de forças internas* $f(\phi)$ de componentes $f_i(\phi)$ como:

$$f_i(\phi) = U_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} U_{ijk} \phi_j \phi_k + \frac{1}{6} U_{ijkl} \phi_j \phi_k \phi_l \quad (\text{III.168})$$

então as equações de equilíbrio podem ser escritas vetorialmente como:

$$\boxed{F(\phi, \lambda) = f(\phi) - \lambda \mathbf{p} = 0} \quad (\text{III.169})$$

Note-se que as componentes $F_i(\phi, \lambda)$ do vetor F são funções analíticas das coordenadas generalizadas ϕ_i e do parâmetro λ , pois as componentes do vetor de forças internas $f(\phi)$ são funções polinomiais cúbicas das coordenadas ϕ , e o vetor \mathbf{p} é assumido constante.

CAPITULO IV

APROXIMAÇÕES ASSINTÓTICAS DOS CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidas as equações gerais da técnica das perturbações. São deduzidas as fórmulas de recorrência e é analisada a aplicação desta técnica em pontos de equilíbrio crítico. É feita uma introdução sobre a descrição paramétrica dos caminhos de equilíbrio e o uso particular do comprimento de arco como parâmetro.

IV.1 - DESCRIÇÃO PARAMÉTRICA DOS CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

Considere-se um sistema de n equações não-lineares de equilíbrio:

$$F_j(\phi_j, \lambda) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (IV.1)$$

onde ϕ_j são um conjunto de n coordenadas generalizadas e λ é o parâmetro de cargas.

Cada uma destas equações define uma superfície ("hiperfície" na linguagem matemática se $n > 2$) de dimensão n no espaço de coordenadas ϕ_j, λ . As soluções do sistema de equações são representadas pelas interseções destas n superfícies na forma de curvas chamadas *caminhos de equilíbrio*.

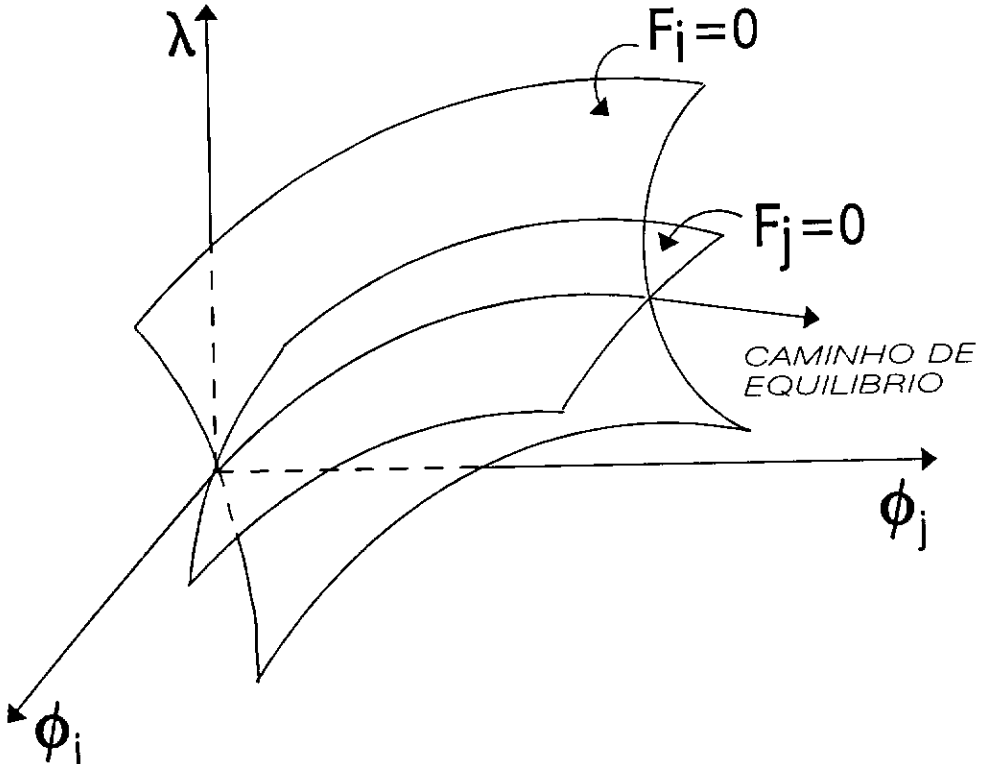


FIGURA IV.1 - Caminho de equilíbrio no espaço ϕ, λ .

Um caminho de equilíbrio pode ser descrito parametricamente como:

$$\phi_j = \phi_j(t) \quad (\text{IV.2a})$$

$$\lambda = \lambda(t) \quad (\text{IV.2b})$$

onde t é o *parâmetro do caminho* que define o avanço sobre o caminho de equilíbrio. Exceto para casos muito simples, em geral não é possível obter as soluções $\phi_j(t)$, $\lambda(t)$ em forma fechada, devendo-se recorrer a alguma representação em série. Assumindo que as relações funcionais $F_i(\phi_j, \lambda)$ sejam analíticas nas variáveis ϕ_j , λ , então, se existem, as funções $\phi_j(t)$, $\lambda(t)$ também devem ser analíticas [26]. Portanto é possível expressar as soluções $\phi_j(t)$, $\lambda(t)$ em séries de Taylor do parâmetro t como:

$$\phi(t) = \phi|_{t=0} + \phi^{(1)}|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \phi^{(2)}|_{t=0} t^2 + \dots \quad (\text{IV.3a})$$

$$\lambda(t) = \lambda|_{t=0} + \lambda^{(1)}|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \lambda^{(2)}|_{t=0} t^2 + \dots \quad (\text{IV.3b})$$

onde é utilizada a notação $(\cdot)^{(m)} = d^m(\cdot)/dt^m$ para indicar a m -ésima derivada em relação ao parâmetro t , isto é:

$$\phi^{(m)T} = \left\{ \frac{d^m \phi_1}{dt^m} \quad \frac{d^m \phi_2}{dt^m} \quad \frac{d^m \phi_3}{dt^m} \quad \dots \dots \frac{d^m \phi_n}{dt^m} \right\} \quad (\text{IV.4a})$$

$$\lambda^{(m)} = \frac{d^m \lambda}{dt^m} \quad (\text{IV.4b})$$

e adota-se por convenção a notação $(\cdot)^{(0)} = (\cdot)$, isto é:

$$\phi^{(0)T} = \left\{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \dots \phi_n \right\} \quad (\text{IV.5a})$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda \quad (\text{IV.5b})$$

Devido ao uso intensivo que será feito das expansões de Taylor e de coeficientes obtidos por fórmulas de recorrência, é conveniente simplificar a notação. Assim o m -ésimo termo de uma seqüência será indicado com um índice

superior direito entre colchetes $(\cdot)^{[m]}$. Empregando esta notação as series anteriores podem ser escritas como:

$$\phi(t) = \phi^{[0]} + \phi^{[1]} t + \phi^{[2]} t^2 + \phi^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.6a})$$

$$\lambda(t) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} t + \lambda^{[2]} t^2 + \lambda^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.6b})$$

onde

$$\phi^{[m]} = \frac{1}{m!} \phi^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.7a})$$

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{m!} \lambda^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.7b})$$

Assumindo que estas séries sejam, ao menos, localmente convergentes em torno da origem da expansão, é possível aproximar o caminho de equilíbrio com os primeiros termos. Assim os sucessivos truncamentos fornecem *aproximações assintóticas* lineares, quadráticas, etc., segundo a quantidade de termos retidos; isto é ilustrado na figura IV.2.

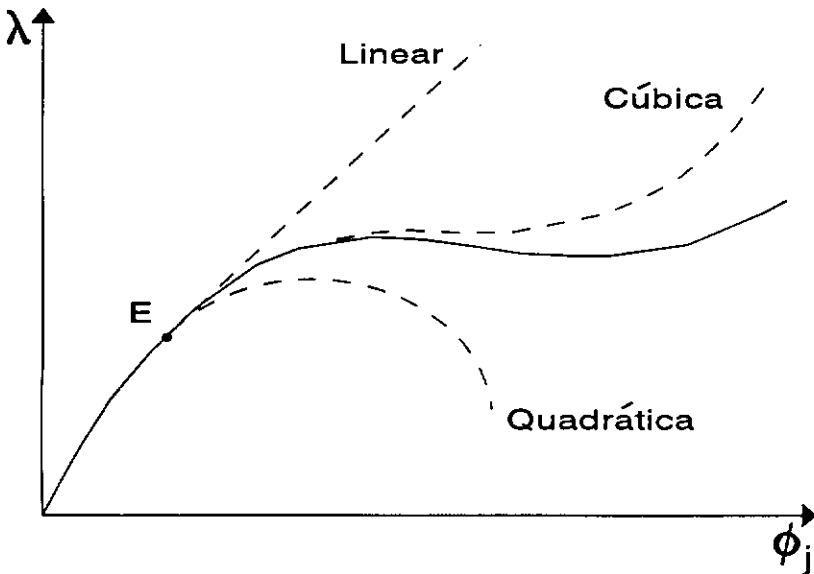


FIGURA IV.2 - Aproximações assintóticas de um caminho de equilíbrio.

O parâmetro t é arbitrário, mas é conveniente identifica-lo com alguma variável que assegure a existência das relações funcionais $\phi_j(t)$, $\lambda(t)$, e por conseqüência das respectivas expansões de Taylor. Esta identificação é imposta mediante o cumprimento de certas equações de restrição entre os coeficientes das expansões de Taylor, que serão chamadas *equações de restrição paramétrica*.

IV.1.1 - O COMPRIMENTO DE ARCO COMO PARÂMETRO

Em forma vetorial a curva de componentes $\phi_j(t)$, $\lambda(t)$, ilustrada na figura IV.3, pode ser expressa como:

$$\rho(t) = \left\{ \phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \phi_3(t) \quad \dots \quad \phi_n(t) \quad \lambda(t) \right\}^T \quad (IV.8)$$

onde $\rho(t)$ é o vetor posição da curva no espaço ϕ, λ .

A derivada do vetor posição $\rho(t)$ em relação ao parâmetro do caminho t fornece um vetor tangente à curva como:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho^{(1)} = \left\{ \phi_1^{(1)} \quad \phi_2^{(1)} \quad \phi_3^{(1)} \quad \dots \quad \phi_n^{(1)} \quad \lambda^{(1)} \right\}^T \quad (IV.9)$$

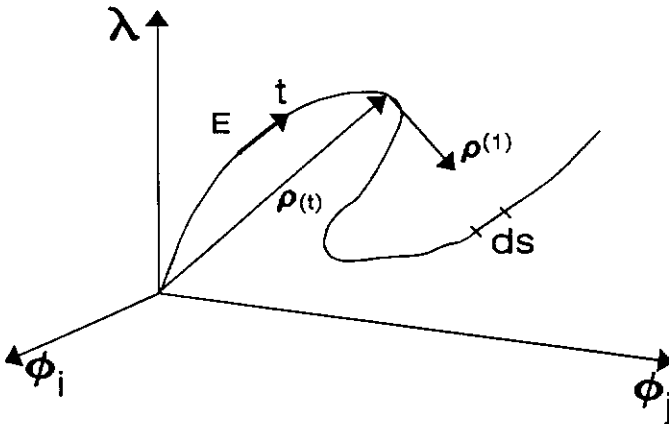


FIGURA IV.3 - Vetores posição e tangente do caminho de equilíbrio.

Considere-se um segmento diferencial de curva de comprimento ds :

$$ds = |\rho^{(1)}| dt \quad (\text{IV.10})$$

onde $|\rho^{(1)}|$ é a norma euclidiana do vetor tangente, que usando a convenção de soma pode ser expressa como:

$$|\rho^{(1)}| = [\phi_i^{(1)} \phi_i^{(1)} + (\lambda^{(1)})^2]^{1/2} \quad (\text{IV.11})$$

Assim o comprimento s de curva entre a origem do parâmetro t ($t=0$) e um outro ponto qualquer da curva é dado por:

$$s = \int_0^t |\rho^{(1)}| dt \quad (\text{IV.12})$$

Daqui pode-se deduzir que a condição necessária e suficiente para assegurar que uma curva seja parametrizada pelo seu comprimento de arco ($t = s$), é que para todo t seja:

$$|\rho^{(1)}| = 1 \quad , \quad \forall t \quad (\text{IV.13})$$

Esta condição pode ser expressa equivalentemente como:

$$l(s) = |\rho^{(1)}|^2 - 1 = \phi_i^{(1)} \phi_i^{(1)} + (\lambda^{(1)})^2 - 1 = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Observando que existe uma relação unívoca entre o comprimento de arco s e cada ponto da curva, isto implica em que, se a curva é analítica, existem em todo ponto da curva as relações funcionais $\phi_j(s)$, $\lambda(s)$, que podem ser expressas pelas seguintes expansões de Taylor:

$$\phi(s) = \phi^{[0]} + \phi^{[1]} s + \phi^{[2]} s^2 + \phi^{[3]} s^3 + \dots \quad (\text{IV.15a})$$

$$\lambda(s) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} s + \lambda^{[2]} s^2 + \lambda^{[3]} s^3 + \dots \quad (\text{IV.15b})$$

Expandindo a condição de restrição (IV.14) em séries de Taylor em torno da origem ($s = 0$) tem-se:

$$l(s) = l|_{s=0} + l^{(1)}|_{s=0} s + \frac{1}{2!} l^{(2)}|_{s=0} s^2 + \dots = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Como esta equação deve ser válida para qualquer s , então devem ser nulos todos os coeficientes da expansão, i.e.:

$$l^{(m)}|_{s=0} = [\phi_i^{(1)} \phi_i^{(1)} + (\lambda^{(1)})^2 - 1]^{(m)}|_{s=0} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Em forma explícita a m -ésima derivada $l^{(m)}$ pode ser escrita como [Apêndice B] :

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \\ \text{para } m>1 \end{array} \right. \begin{array}{l} l^{(1)} = 2 (\phi_i^{(1)} \phi_i^{(2)} + \lambda^{(1)} \lambda^{(2)}) \\ \\ l^{(m)} = 2 (\phi_i^{(1)} \phi_i^{(m+1)} + \lambda^{(1)} \lambda^{(m+1)}) + \\ \sum_{p=1}^{m-1} \binom{m}{p} [\phi_i^{(p+1)} \phi_i^{(m-p+1)} + \lambda^{(p+1)} \lambda^{(m-p+1)}] \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{IV.18a}) \\ \\ (\text{IV.18b}) \end{array}$$

onde $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p! (m-p)!}$ são os coeficientes binomiais.

Note-se que na origem ($s = 0$) as derivadas paramétricas $\phi_j^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$ podem ser expressas em função dos coeficientes $\phi_j^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ das expansões de Taylor (IV.15) como:

$$\phi_j^{(m)}|_{s=0} = m! \phi_j^{[m]} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.19a})$$

$$\lambda^{(m)}|_{s=0} = m! \lambda^{[m]} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.19b})$$

portanto a m-ésima derivada $l^{(m)}|_{s=0}$ na origem vale:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ l^{(1)}|_{s=0} = 4 (\phi_1^{[1]} \phi_1^{[2]} + \lambda^{[1]} \lambda^{[2]}) \end{array} \right. \quad \text{(IV.20a)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>1 \\ l^{(m)}|_{s=0} = 2 (m+1)! (\phi_1^{[1]} \phi_1^{[m+1]} + \lambda^{[1]} \lambda^{[m+1]} + \beta^{[m+1]}) \end{array} \right. \quad \text{(IV.20b)}$$

onde $\beta^{[2]} = 0$, e para $m>2$:

$$\beta^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2^m} (\phi_1^{[p]} \phi_1^{[m-p+1]} + \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]}) \quad \text{(IV.21)}$$

Em forma alternativa, estes coeficientes podem ser expressos, para índices m ímpares e pares, como:

para m = ímpar , m>1 :

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=3 \\ \beta^{[3]} = \frac{2}{3} \left[\phi_1^{[2]} \phi_1^{[2]} + (\lambda^{[2]})^2 \right] \end{array} \right. \quad \text{(IV.22a)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>3 \\ \beta^{[m]} = \frac{(m-1)}{m} \left[\phi_1^{[m-1]} \phi_1^{[m-1]} + (\lambda^{[m-1]})^2 \right] + \\ \sum_{p=2}^{(m-1)/2} \frac{p(m-p+1)}{m} \left[\phi_1^{[p]} \phi_1^{[m-p+1]} + \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]} \right] \end{array} \right. \quad \text{(IV.22b)}$$

para $m = \text{par}, m > 2$:

$$\beta^{[m]} = \sum_{p=2}^{m/2} \frac{p(m-p+1)}{m} (\phi_i^{[p]} \phi_i^{[m-p+1]} + \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]}) \quad (\text{IV.22c})$$

Estas expressões minimizam a quantidade de operações necessárias para o cálculo dos coeficientes $\beta^{[m]}$.

Assim, o cumprimento das equações (IV.14) e (IV.17) implica nas seguintes condições de restrição:

para $m=1$ $\phi_1^{[1]} \phi_1^{[1]} + (\lambda^{[1]})^2 = 1$	(IV.23a)
para $m=2$ $\phi_1^{[1]} \phi_1^{[2]} + \lambda^{[1]} \lambda^{[2]} = 0$	(IV.23b)
para $m > 2$ $\phi_1^{[1]} \phi_1^{[m]} + \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} = -\beta^{[m]}$	(IV.23c)

Estas equações de restrição paramétricas asseguram que o parâmetro do caminho seja o comprimento de arco, e é possível obter uma interpretação geométrica simples das duas primeiras equações. A primeira equação (IV.23a) implica que o vetor tangente na origem da expansão possui módulo unitário. Das fórmulas de Frenet [26] tem-se que o vetor curvatura é fornecido pela derivada do vetor tangente em relação ao comprimento de arco:

$$\frac{d\rho^{(1)}}{ds} = \rho^{(2)} = \left\{ \phi_1^{(2)} \quad \phi_2^{(2)} \quad \phi_3^{(2)} \quad \dots \quad \phi_n^{(2)} \quad \lambda^{(2)} \right\}^T \quad (\text{IV.24})$$

Este vetor, cujo módulo é a curvatura do caminho, passa pelo centro instantâneo de curvatura que se encontra na direção de um vetor normal à curva. Portanto a segunda equação (IV.23b) representa a ortogonalidade entre o vetor tangente $\rho^{(1)}$

e o vetor curvatura $\rho^{(2)}$ na origem da expansão.

IV.1.2 - O COMPRIMENTO DE ARCO PONDERADO

A vantagem de se usar o comprimento de arco como parâmetro de um caminho analítico, é que assegura a existência e unicidade das relações funcionais $\phi(s)$, $\lambda(s)$. Mas é possível utilizar outros parâmetros que, ao menos localmente, também apresentem essas propriedades.

A maioria dos parâmetros usualmente empregados na literatura podem ser identificados com o comprimento de arco de uma curva obtida do caminho original mediante a seguinte transformação de coordenadas:

$$\psi_i(t) = w_i \phi_i(t) \quad (\text{sem soma em } i) \quad (\text{IV.25a})$$

$$\Lambda(t) = w_\lambda \lambda(t) \quad (\text{IV.25b})$$

onde w_i , w_λ são constantes de ponderação, não simultaneamente nulas, e t é o comprimento de arco da curva transformada $\psi(t)$, $\Lambda(t)$, cujo vetor tangente $\tilde{\rho}^{(1)}$ deve possuir módulo unitário, isto é:

$$|\tilde{\rho}^{(1)}|^2 = \psi^{(1)T} \psi^{(1)} + (\Lambda^{(1)})^2 = 1 \quad (\text{IV.26})$$

onde, derivando as equações (IV.25) tem-se:

$$\psi_i^{(1)} = w_i \phi_i^{(1)} \quad (\text{sem soma em } i) \quad (\text{IV.27a})$$

$$\Lambda^{(1)} = w_\lambda \lambda^{(1)} \quad (\text{IV.27b})$$

portanto a equação de restrição (IV.26) pode ser escrita como:

$$l(t) = \phi^{(1)T} \mathbf{W} \phi^{(1)} + (w_\lambda)^2 (\lambda^{(1)})^2 - 1 = 0 \quad (\text{IV.28})$$

onde a matriz diagonal de ponderação \mathbf{W} é:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1^2 & & & & \\ & w_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & w_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

Note-se que esta matriz é positiva definida ou ao menos semi-definida positiva se algum coeficiente w_i é nulo.

As equações de restrição paramétricas para o comprimento de arco ponderado são obtidas em forma análoga ao caso sem ponderar, isto é, expandindo $l(t)$ em séries de Taylor e impondo-se a nulidade de cada termo da expansão, resultam as seguintes equações de restrição:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \phi^{[1]T} \mathbf{W} \phi^{[1]} + (w_\lambda)^2 (\lambda^{[1]})^2 = 1 \quad (\text{IV.30a}) \\ \\ \text{para } m=2 \\ \phi^{[1]T} \mathbf{W} \phi^{[2]} + (w_\lambda)^2 \lambda^{[1]} \lambda^{[2]} = 0 \quad (\text{IV.30b}) \\ \\ \text{para } m>2 \\ \phi^{[1]T} \mathbf{W} \phi^{[m]} + (w_\lambda)^2 \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} = -\beta^{[m]} \quad (\text{IV.30c}) \end{array} \right.$$

onde para $m>2$:

$$\beta^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2m} \left[\phi^{[p]T} \mathbf{W} \phi^{[m-p+1]} + w_\lambda^2 \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]} \right] \quad (\text{IV.31})$$

Note-se que se todas as constantes de ponderação são diferentes de zero, a transformação (IV.25) representa um fator de escala das variáveis, e portanto, a curva transformada $\psi(t)$, $\Lambda(t)$ conserva a analiticidade do caminho original e garante a existência e unicidade das relações funcionais $\phi(t)$, $\lambda(t)$. Isto implica que para todo ponto do caminho existem as derivadas:

$$\phi^{(1)}(t) = \frac{d\phi}{dt} \quad , \quad \lambda^{(1)}(t) = \frac{d\lambda}{dt} \quad (\text{IV.32a,b})$$

portanto a equação de restrição (IV.28) pode ser expressa como:

$$d\phi^T \mathbf{W} d\phi + (w_\lambda)^2 (d\lambda)^2 = (dt)^2 \quad (\text{IV.33})$$

Note-se que se todas as constantes de ponderação w_1 , w_λ são diferentes de zero, esta equação representa um elipsóide, e o parâmetro t é chamado "*comprimento de arco elipsoidal*". Para o caso particular de $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, $w_\lambda = 1$, a equação (IV.33) fica:

$$d\phi^T d\phi + (d\lambda)^2 = (dt)^2 \quad (\text{IV.34})$$

que representa uma esfera e o parâmetro t é chamado "*comprimento de arco esférico*" que coincide com o comprimento de arco s do caminho original.

Para o caso particular $w_\lambda = 0$, $\mathbf{W} \neq 0$ tem-se $\Lambda(t) = 0$, a curva transformada $\psi(t)$ está contida no subespaço das coordenadas generalizadas ϕ_i , a equação de restrição (IV.28) fica:

$$l(t) = \phi^{(1)T} \mathbf{W} \phi^{(1)} - 1 = 0 \quad (\text{IV.35})$$

e da equação (IV.33) tem-se:

$$d\phi^T \mathbf{W} d\phi = (dt)^2 \quad (\text{IV.36})$$

que representa um cilindro elíptico, e o parâmetro t é chamado "comprimento de arco elíptico". Em particular para $W = I$, o parâmetro t é chamado "comprimento de arco cilíndrico".

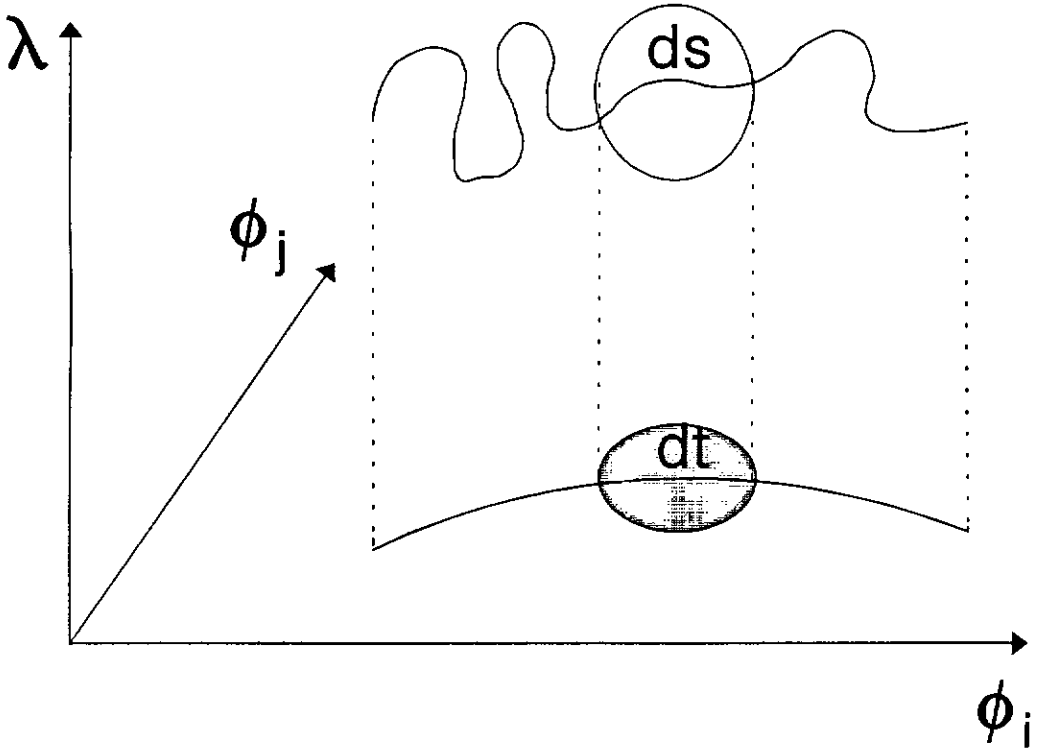


FIGURA IV.4 - Comprimento de arco esférico e cilíndrico.

Para o caso particular $W = 0$, $w_\lambda = 1$, tem-se $\psi(t) = 0$, $\Lambda(t) = \lambda$, isto é a curva transformada coincide com o eixo λ e as condições de restrição paramétricas (IV.30) resultam:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ (\lambda^{[1]})^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{(IV.37a)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>1 \\ \lambda^{[m]} = 0 \end{array} \right. \quad \text{(IV.37b)}$$

e da equação (IV.32) tem-se:

$$(d\lambda)^2 = (dt)^2 \quad (\text{IV.38})$$

Isto implica que o parâmetro t coincide com o parâmetro de carga λ . Note-se que para que as derivadas $\phi^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$ estejam definidas é necessário que $dt \neq 0$, que para este caso implica $d\lambda \neq 0$. Portanto o parâmetro de carga λ é um parâmetro válido do caminho $\phi(\lambda)$, λ em trechos onde não existam pontos limites ($d\lambda = 0$).

Para o caso particular $w_i = 1$, $w_j = 0$ ($i \neq j$) e $w_\lambda = 0$ tem-se $\psi_i = \phi_i$, $\psi_j(t) = 0$ ($i \neq j$), $\Lambda(t) = 0$, isto é, a curva transformada coincide com o eixo ϕ_i , e as condições de restrição paramétricas (IV.30) ficam:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ (\phi_1^{[1]})^2 = 1 \\ \\ \text{para } m>1 \\ \phi_1^{[m]} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{IV.39a}) \\ \\ (\text{IV.39b}) \end{array}$$

e da equação (IV.32) tem-se:

$$(d\phi_1)^2 = (dt)^2 \quad (\text{IV.40})$$

Isto implica que o parâmetro t coincide com a coordenada generalizada ϕ_1 , e para que esta coordenada seja um parâmetro válido do caminho $\phi_j(\phi_1)$, $\lambda(\phi_1)$ deve ser $d\phi_1 \neq 0$, isto é, não devem existir pontos de retorno da coordenada generalizada ϕ_1 ($d\phi_1$).

Neste trabalho será adotada a matriz $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, deixando livre o coeficiente de ponderação w_λ .

II.2 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PELA TÉCNICA DAS PERTURBAÇÕES

A técnica das perturbações permite expressar a solução do sistema de equações não-lineares de equilíbrio como uma série de potências num determinado parâmetro. Nesta seção será mostrada como é gerada esta seqüência, e a representação particular quando o parâmetro utilizado é o comprimento de arco ponderado da curva solução.

II.2.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DE m-ÉSIMA ORDEM

Considere-se um sistema de n equações não-lineares de equilíbrio:

$$F(\phi_j, \lambda) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.41})$$

Assumindo que as funções $F_j(\phi_j, \lambda)$ sejam analíticas nas variáveis ϕ_j, λ , então as soluções deste sistema podem ser expressas parametricamente [26] como funções analíticas $\phi_j(t), \lambda(t)$ de um parâmetro t , ao menos num intervalo de t . Estas funções devem satisfazer às equações de equilíbrio:

$$F(t) = F(\phi_j(t), \lambda(t)) = 0 \quad (\text{IV.42})$$

Como estas equações devem ser válidas para qualquer magnitude do parâmetro t , no intervalo de definição das relações funcionais $\phi_j(t), \lambda(t)$, então derivando sucessivamente em relação a t , devem ser cumpridas as seguintes equações:

$$F^{(1)}(t) = 0 \quad (\text{IV.43a})$$

$$F^{(2)}(t) = 0 \quad (\text{IV.43b})$$

.

.

.

$$F^{(m)}(t) = 0 \quad (\text{IV.43c})$$

onde novamente é utilizada a notação $(\cdot)^{(m)} = d^m(\cdot)/dt^m$ para indicar as derivadas em relação a t . Cada uma destas equações representa um *sistema de equações de perturbação* com t como *parâmetro de perturbação*. Levando em conta que $F_j(t)$ é uma função implícita do parâmetro t , a m -ésima derivada em relação a t pode ser expressa, aplicando a regra da cadeia [Apêndice B] como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ F^{(1)} = F_\phi \phi^{(1)} + F_\lambda \lambda^{(1)} = 0 \\ \\ \text{para } m>1 \\ F^{(m)} = F_\phi \phi^{(m)} + F_\lambda \lambda^{(m)} + \sum_{p=1}^{m-1} \binom{m-1}{p} \left[F_\phi^{(p)} \phi^{(m-p)} + F_\lambda^{(p)} \lambda^{(m-p)} \right] = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.44a)} \\ \\ \text{(IV.44b)} \end{array}$$

onde F_ϕ , F_λ são as derivadas parciais de F em relação às coordenadas generalizadas ϕ e ao parâmetro λ , respectivamente.

Assumindo que as funções $\phi(t)$, $\lambda(t)$ sejam analíticas em t , então podem ser expressas pelas seguintes expansões de Taylor:

$$\phi(t) = \phi^{[0]} + \phi^{[1]} t + \phi^{[2]} t^2 + \phi^{[3]} t^3 + \dots \quad \text{(IV.45a)}$$

$$\lambda(t) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} t + \lambda^{[2]} t^2 + \lambda^{[3]} t^3 + \dots \quad \text{(IV.45b)}$$

onde os coeficientes destas séries são:

$$\phi^{[m]} = \frac{1}{m!} \phi^{(m)} \Big|_{t=0} \quad \text{(sem soma em } m) \quad \text{(IV.46a)}$$

$$\lambda^{[m]} = \frac{1}{m!} \lambda^{(m)} \Big|_{t=0} \quad \text{(sem soma em } m) \quad \text{(IV.46b)}$$

Multiplicando ambos os lados por $m!$ tem-se:

, isto é, $F_1 = V_{,1}$, portanto a matriz de rigidez tangente para estes sistemas é sempre simétrica:

$$\mathbf{K}_T^E = \begin{bmatrix} V_{,11}|_E & V_{,12}|_E & \dots & V_{,1n}|_E \\ & V_{,22}|_E & \dots & V_{,2n}|_E \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{simétrica} & & & V_{,nn}|_E \end{bmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

Definindo o vetor de *forças geométricas de m-ésima ordem* $\mathbf{g}^{[m]}$, para $m > 1$, como :

$$\mathbf{g}^{[m]} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-1}{p!} \left[\mathbf{F}_\phi^{(p)}|_E \phi^{[m-p]} + \mathbf{F}_\lambda^{(p)}|_E \lambda^{[m-p]} \right] \quad (\text{IV.51})$$

e notando-se que as derivadas paramétricas $\mathbf{F}_\phi^{(p)}$, $\mathbf{F}_\lambda^{(p)}$ são funções das derivadas até a ordem p de ϕ , λ , o vetor $\mathbf{g}^{[m]}$ será função das derivadas até a ordem $m-1$ de ϕ , λ .

Logo as equações de equilíbrio de m -ésima ordem podem ser escritas como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \mathbf{K}_T^E \phi^{[1]} = - \mathbf{F}_\lambda|_E \lambda^{[1]} \quad (\text{IV.52a}) \\ \\ \text{para } m>1 \\ \mathbf{K}_T^E \phi^{[m]} = - \mathbf{F}_\lambda|_E \lambda^{[m]} - \mathbf{g}^{[m]} \quad (\text{IV.52b}) \end{array} \right.$$

Cada um destes sistemas apresenta n equações com $n+1$ incógnitas $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$, pois as incógnitas contidas em $\mathbf{g}^{[m]}$ vem de equações anteriores. Portanto é necessária uma equação adicional por cada sistema para que as soluções possam ser determinadas. Estas equações são obtidas das condições de restrição paramétricas

vistas na seção anterior, que dependem do parâmetro do caminho escolhido.

Para sistemas estruturais as equações de equilíbrio podem ser escritas como:

$$F(\phi, \lambda) = f(\phi) - \lambda p(\phi) = 0 \quad (\text{IV.53})$$

onde $f(\phi)$ é o vetor de forças internas e p é o vetor de forças externas de referência. Portanto para estes sistemas tem-se

$$F_{\phi}|_E = f_{\phi}|_E - \lambda p_{\phi}|_E \quad (\text{IV.54a})$$

$$F_{\lambda}|_E = - p|_E \quad (\text{IV.54b})$$

onde f_{ϕ} , p_{ϕ} são as derivadas parciais dos vetores f , p em relação às coordenadas generalizadas ϕ . Em geral o vetor p é um vetor de forças de referência de magnitude constante, mas para sistemas não-conservativos pode ser dependente das coordenadas generalizadas, portanto será indicado como p^E onde o índice superior indica a configuração onde é calculado. Então, as equações de equilíbrio de m -ésima ordem (IV.52) podem ser escritas como:

para $m=1$

$$K_T^E \phi^{[1]} = \lambda^{[1]} p^E \quad (\text{IV.55a})$$

para $m>1$

$$K_T^E \phi^{[m]} = \lambda^{[m]} p^E - g^{[m]} \quad (\text{IV.55b})$$

Assumindo que os elementos $F_{i,j}$ da matriz de rigidez tangente sejam funções analíticas de ϕ , λ , estes podem ser, então, expressos pela seguinte expansão de Taylor no parâmetro t , em torno de um ponto de equilíbrio E (ϕ^E, λ^E) como:

$$F_{i,j}(t) = F_{i,j}|_E + F_{i,j}^{(1)}|_E t + \frac{1}{2!} F_{i,j}^{(2)}|_E t^2 + \dots \quad (\text{IV.56})$$

ou matricialmente:

$$K_T(t) = K_T^E + K_T^{[1]} t + K_T^{[2]} t^2 + \dots \quad (\text{IV.57})$$

onde as matrizes:

$$K_T^{[m]} = \frac{1}{m!} F_{\phi}^{(m)}|_E \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.58})$$

serão chamadas *matrizes de rigidez tangente de m-ésima ordem*.

Assumindo, num caso geral, que os elementos $p_i(\phi)$ do vetor de forças externas de referência sejam funções analíticas das coordenadas ϕ , então estes podem ser expressos pela seguinte expansão de Taylor no parâmetro t , em torno de um ponto de equilíbrio E (ϕ^E, λ^E) como:

$$P_i(t) = P_i|_E + P_i^{(1)}|_E t + \frac{1}{2!} P_i^{(2)}|_E t^2 + \dots \quad (\text{IV.59})$$

ou vetorialmente

$$P(t) = P^E + P^{[1]} t + P^{[2]} t^2 + \dots \quad (\text{IV.60})$$

onde

$$P^{[m]} = \frac{1}{m!} P^{(m)}|_E \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.61})$$

serão chamados *vetores de forças externas de m-ésima ordem*.

Portanto os vetores de forças geométricas podem ser expressos como:

$$\mathbf{g}^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \left[\mathbf{K}_T^{[p]} \phi^{[m-p]} - \lambda^{[m-p]} \mathbf{p}^{[p]} \right] \quad (\text{IV.62})$$

Note-se que se a solução das equações de equilíbrio fosse linear ($\phi^{[m]} = 0$, $\lambda^{[m]} = 0$, $m > 1$) o cumprimento das equações de equilíbrio de m -ésima ordem (IV.55b) exige que $\mathbf{g}^{[m]} = 0$; portanto uma condição necessária e suficiente para garantir que a solução das equações de equilíbrio seja linear é que todos os vetores de forças geométricas sejam nulos:

$$\mathbf{g}^{[m]} = 0 \quad , \quad \forall m > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{solução linear} \quad (\text{IV.63})$$

IV.2.2 - UNICIDADE DA SOLUÇÃO NUM PONTO DE EQUILÍBRIO NORMAL

Utilizando o comprimento de arco ponderado s como parâmetro de perturbação, tem-se uma equação de restrição paramétrica (IV.30) adicional para cada equação de equilíbrio de m -ésima ordem. Em particular adotando a matriz de ponderação $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, o m -ésimo sistema aumentado de equações fica:

para $m=1$

$$\mathbf{K}_T^E \phi^{[1]} = \lambda^{[1]} \mathbf{p}^E \quad (\text{IV.64a})$$

$$\phi^{[1]T} \phi^{[1]} + (w_\lambda)^2 (\lambda^{[1]})^2 = 1 \quad (\text{IV.64b})$$

para $m > 1$

$$\mathbf{K}_T^E \phi^{[m]} = \lambda^{[m]} \mathbf{p}^E - \mathbf{g}^{[m]} \quad (\text{IV.64c})$$

$$\phi^{[1]T} \phi^{[m]} + (w_\lambda)^2 \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} = -\beta^{[m]} \quad (\text{IV.64d})$$

onde $\beta^{[2]} = 0$, e para $m > 2$:

$$\beta^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2m} \left[\phi^{[p]T} \phi^{[m-p+1]} + w\lambda^2 \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]} \right] \quad (\text{IV.65})$$

e $w\lambda$ é um coeficiente de ponderação do parâmetro de carga λ .

Assumindo que a matriz de rigidez tangente K_T^E seja não-singular então existe a matriz inversa $[K_T^E]^{-1}$ e podem ser definidos os seguintes vetores intermediários δ_0 , $\delta^{[m]}$ como as soluções de:

$$K_T^E \delta_0 = p^E \quad (\text{IV.66})$$

e para $m > 1$:

$$K_T^E \delta^{[m]} = g^{[m]} \quad (\text{IV.67})$$

Então as soluções $\phi^{[m]}$ das equações (IV.64a,c) podem ser expressas como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \phi^{[1]} = \lambda^{[1]} \delta_0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.68a})$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>1 \\ \phi^{[m]} = \lambda^{[m]} \delta_0 - \delta^{[m]} \end{array} \right. \quad (\text{IV.68b})$$

Fazendo a substituição de $\phi^{[1]}$ na primeira equação de restrição paramétrica (IV.64b) tem-se:

$$(\lambda^{[1]})^2 (\delta_0^T \delta_0 + w\lambda^2) = 1 \quad (\text{IV.69})$$

que implica:

$$\lambda^{[1]} = \pm (\delta_0^T \delta_0 + w\lambda^2)^{-1/2} \quad (IV.70)$$

Observando que $\lambda^{[1]}$ é a componente segundo o eixo λ de um vetor tangente à curva no ponto E, o sinal define o sentido de avanço, positivo para magnitudes de cargas crescentes ($\lambda > \lambda^E$) e negativo para magnitudes decrescentes ($\lambda < \lambda^E$).

Note-se que $\lambda^{[1]}$ é sempre diferente de zero, isto decorre do fato de haver assumido a matriz de rigidez tangente não-singular no ponto E, existindo portanto uma solução única para δ_0 na equação (IV.66) e conseqüentemente para $\phi^{[1]}$ e $\lambda^{[1]}$ nas equações (IV.68a) e (IV.70).

Considerem-se conhecidos os vetores $\phi^{[1]}$, $\phi^{[2]}$, ..., $\phi^{[m-1]}$ e os coeficientes $\lambda^{[1]}$, $\lambda^{[2]}$, ..., $\lambda^{[m-1]}$. Portanto é possível calcular $g^{[m]}$ e $\beta^{[m]}$, e, da equação (IV.67), pode ser obtido $\delta^{[m]}$. Fazendo a substituição de $\phi^{[m]}$, dado pela equação (IV.68b), na m-ésima equação de restrição (IV.64d) tem-se:

$$\lambda^{[m]} \lambda^{[1]} (\delta_0^T \delta_0 + w\lambda^2) - \phi^{[1]T} \delta^{[m]} = -\beta^{[m]} \quad (IV.71)$$

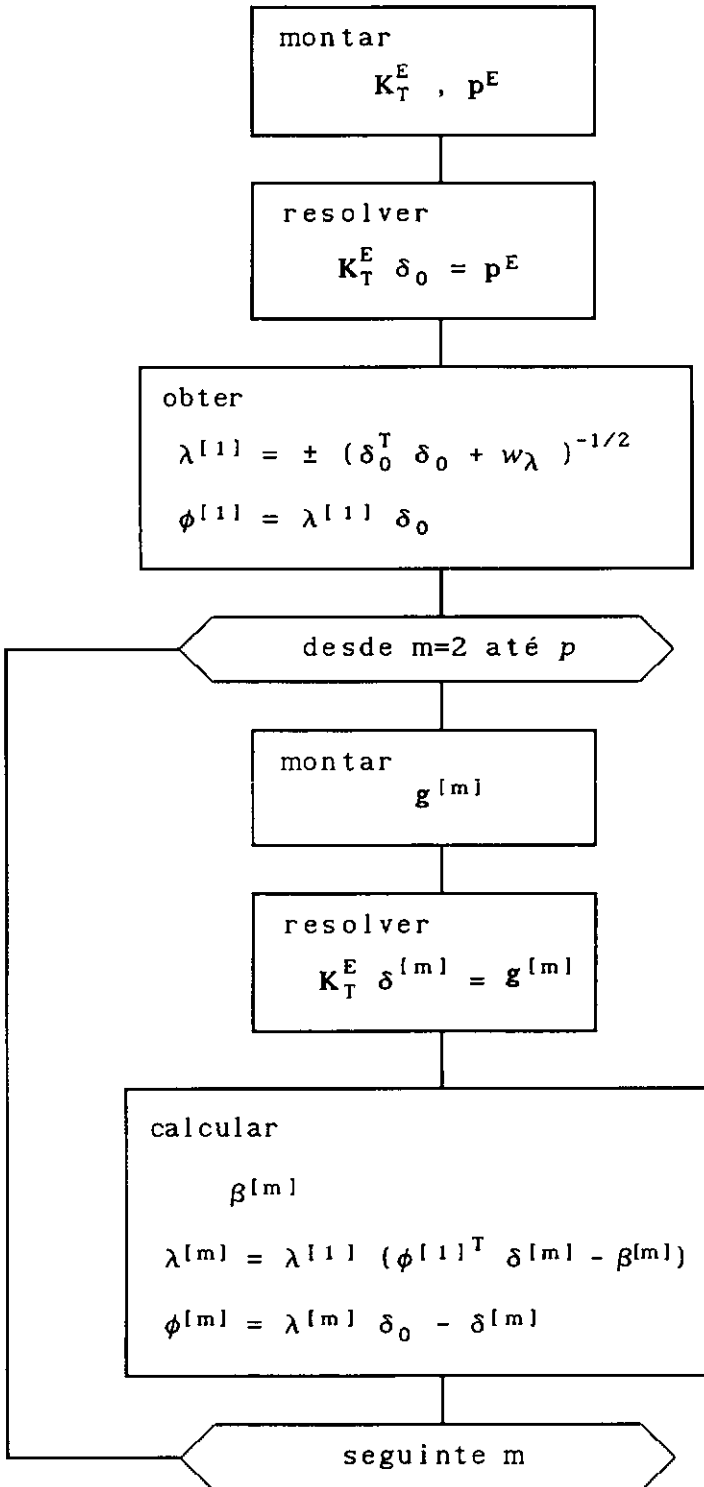
e pela equação (IV.69) tem-se:

$$\lambda^{[m]} = \lambda^{[1]} (\phi^{[1]T} \delta^{[m]} - \beta^{[m]}) \quad (IV.72)$$

As equações (IV.68b) e (IV.72) definem de forma única $\phi^{[m]}$ e $\lambda^{[m]}$ como funções de $\phi^{[r]}$, $\lambda^{[r]}$ com $r=1,2,\dots,m-1$, portanto todas as componentes do caminho podem ser obtidas seqüencialmente.

Pode-se concluir que se K_T^E é não-singular, isto é, se o ponto E é um ponto de equilíbrio normal ou não-crítico, então a solução do sistema aumentado de equações (IV.64) é única, e existe um único caminho de equilíbrio passando por esse ponto.

No fluxograma IV.1 apresenta-se um esquema dos passos necessários para obter as primeiras m componentes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ da solução das equações de equilíbrio para $m = 1, 2, 3, \dots, p$, num ponto de equilíbrio normal:



FLUXOGRAMA IV.1 - Obtenção das componentes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$.

IV.3 - PONTOS DE EQUILÍBRIO CRÍTICO

Seja um caminho de equilíbrio cujas componentes podem ser expressas como funções analíticas de um parâmetro t , isto é, $\phi_j(t)$, $\lambda(t)$. Assumindo que as equações de equilíbrio $F(\phi, \lambda)$ sejam funções analíticas das variáveis ϕ_j , λ , então sobre este caminho os elementos da matriz de rigidez tangente em cada ponto $F_\phi(t)$ serão funções analíticas do parâmetro t e pode ser demonstrado que os autovalores $\omega(t)$ e autovetores $\xi(t)$ desta matriz também devem ser funções analíticas do parâmetro t [27].

Para todo ponto deste caminho, onde existam as relações funcionais $\phi(t)$, $\lambda(t)$, os autovalores $\omega(t)$ e seus autovetores associados $\xi(t)$ devem cumprir a equação de autovalor:

$$K_T(t) \xi(t) = \omega(t) \xi(t) \quad (IV.73)$$

A partir de um ponto ϵ de equilíbrio normal ou não-crítico onde todos os autovalores ω sejam não-nulos, estes mudam continuamente de magnitude com acréscimos de t sobre o caminho de equilíbrio, até chegar a um ponto crítico, identificado pelo valor t_c , onde um ou mais desses autovalores se anulam tornando singular a matriz de rigidez tangente. Quando um único autovalor se anula, o ponto crítico é chamado *simples* ou *distinto*, se mais de um autovalor é nulo, então é chamado *múltiplo* ou *composto*.

Considere o caso em que um único autovalor $\hat{\omega}$ se anule no ponto crítico, com autovetor unitário associado $\hat{\xi}$; a equação (IV.73) fica:

$$K_T^C \hat{\xi} = 0 \quad (IV.74)$$

Notando-se que se os elementos da matriz de rigidez tangente são assumidos analíticos no parâmetro t , então expandindo os elementos desta matriz em series de Taylor em torno de um ponto ϵ , da equação (IV.57) tem-se:

$$(K_T^E + K_T^{[1]} t_c + K_T^{[2]} t_c^2 + \dots) \hat{\xi} = 0 \quad (IV.75)$$

que é um problema não-linear de autovalor, onde as incógnitas são os autovalores t_c e os autovetores críticos $\hat{\xi}$. As soluções t_c deste problema definem as configurações de equilíbrio crítico $\phi(t_c)$, $\lambda(t_c)$.

Na literatura, a expressão (IV.75) é usualmente aproximada por um truncamento no segundo termo fornecendo um problema linear de autovalor:

$$(K_T^E + K_T^{[1]} t_c) \hat{\xi} \cong 0 \quad (IV.76)$$

Em particular, quando é utilizado o parâmetro de carga λ como parâmetro do caminho, a matriz $K_T^{[1]}$ é conhecida como *matriz de rigidez geométrica*, usualmente indicada como K_G^E , e o problema de autovalor linearizado (IV.76) pode ser escrito como:

$$(K_T^E + \lambda_c K_G^E) \hat{\xi} \cong 0 \quad (IV.77)$$

Deve-se notar que a qualidade das soluções aproximadas obtidas com os problemas de autovalor linearizados depende do grau de não-linearidade do caminho de equilíbrio. Isto é, se o caminho é fracamente não-linear, estes problemas de autovalor linearizados fornecem boas aproximações. Mas se o caminho é fortemente não-linear, as configurações de equilíbrio crítico obtidas são em geral muito diferentes das correspondentes ao problema de autovalor não-linear (IV.75). Sem aprofundar em considerações numéricas que serão analisadas posteriormente, serão assumidas como conhecidas a configuração crítica ϕ^c , λ^c , e o autovetor crítico $\hat{\xi}$.

IV.4 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PÓS-CRÍTICAS

Considere-se um ponto crítico *simples* onde um único autovalor da matriz de rigidez tangente se anula, então o autovetor unitário associado ξ deve cumprir:

$$K_T^C \hat{\xi} = 0 \quad (IV.78)$$

Limitando a análise a problemas onde a matriz de rigidez tangente seja simétrica, notando que para sistemas conservativos esta matriz é sempre simétrica mas não necessariamente para sistemas não-conservativos, os autovetores desta matriz são coincidentes com os de sua transposta, devendo cumprir no ponto crítico:

$$\hat{\xi}^T \mathbf{K}_T^C = 0 \quad (IV.79)$$

As equações de equilíbrio de m-ésima ordem (IV.55) no ponto crítico são:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \mathbf{K}_T^C \phi^{[1]} = \lambda^{[1]} \mathbf{p}^C \\ \text{para } m>1 \\ \mathbf{K}_T^C \phi^{[m]} = \lambda^{[m]} \mathbf{p}^C - \mathbf{g}^{[m]} \end{array} \right. \quad (IV.80a)$$

$$\quad \quad \quad (IV.80b)$$

Note-se que se a matriz de um sistema de equações lineares é singular, para que o sistema tenha solução é necessário que o vetor do lado direito seja ortogonal ao autovetor crítico da matriz transposta. Definindo o coeficiente b como:

$$b = \hat{\xi}^T \mathbf{p}^C \quad (IV.81)$$

então as condições de ortogonalidade do autovetor crítico com os lados direitos das equações de equilíbrio de m-ésima ordem (IV.80) podem ser expressas como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \lambda^{[1]} b = 0 \\ \text{para } m>1 \\ \hat{\xi}^T \mathbf{g}^{[m]} = \lambda^{[m]} b \end{array} \right. \quad (IV.82a)$$

$$\quad \quad \quad (IV.82b)$$

Note-se que se a matriz de rigidez tangente é singular não é possível assegurar a unicidade da solução, pois somando um múltiplo do autovetor crítico a uma solução tem-se uma outra solução, mas existe uma única solução ortogonal ao

autovetor crítico.

Definindo os vetores intermediarios $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}^{[m]}$, ortogonais ao autovetor crítico, como as soluções dos seguintes sistemas:

$$K_T^C \hat{\delta}_0 = p^C - (\hat{\xi}^T p^C) \hat{\xi} = p^C - b \hat{\xi} \quad (IV.83a)$$

$$\hat{\xi}^T \hat{\delta}_0 = 0 \quad (IV.83b)$$

e para $m > 1$:

$$K_T^C \hat{\delta}^{[m]} = g^{[m]} - (\hat{\xi}^T g^{[m]}) \hat{\xi} = g^{[m]} - \lambda^{[m]} b \hat{\xi} \quad (IV.83c)$$

$$\hat{\xi}^T \hat{\delta}^{[m]} = 0 \quad (IV.83d)$$

Observe-se que os lados direitos das equações (IV.83a) e (IV.83c) são as componentes ortogonais ao autovetor crítico dos vetores p^C e $g^{[m]}$, respectivamente, isto implica que existe solução para os vetores $\hat{\delta}^{[m]}$, e as condições de ortogonalidade (IV.83b), (IV.83d) asseguram que estas soluções sejam únicas. Então qualquer solução das equações de equilíbrio de m -ésima ordem (IV.80) pode ser expressa como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \phi^{[1]} = \alpha^{[1]} \hat{\xi} + \lambda^{[1]} \hat{\delta}_0 \quad (IV.84a) \\ \\ \text{para } m>1 \\ \phi^{[m]} = \alpha^{[m]} \hat{\xi} + \lambda^{[m]} \hat{\delta}_0 - \hat{\delta}^{[m]} \quad (IV.84b) \end{array} \right.$$

onde os primeiros termos são as componentes segundo o autovetor crítico dos vetores $\phi^{[m]}$ e as restantes parcelas representam as componentes ortogonais a esse autovetor.

Para obter uma relação entre as incógnitas $\alpha^{[p]}$, $\lambda^{[p]}$ é necessário fazer a substituição de $\phi^{[p]}$ nos vetores de forças geométricas $\mathbf{g}^{[m]}$ na equação (IV.82b). Da equação (IV.51) tem-se que os vetores $\mathbf{g}^{[m]}$ no ponto crítico são:

$$\mathbf{g}^{[m]} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-1}{p!} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(p)} \Big|_c \phi^{[m-p]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(p)} \Big|_c \lambda^{[m-p]} \right] \quad (\text{IV.85})$$

As derivadas $\mathbf{F}_{\phi}^{(p)} \Big|_c$, $\mathbf{F}_{\lambda}^{(p)} \Big|_c$ são funções das derivadas até a ordem p de ϕ , λ , que pelas equações (IV.47), no ponto crítico podem ser expressas em função dos coeficientes $\phi^{[p]}$, $\lambda^{[p]}$ das expansões de Taylor. Portanto o vetor $\mathbf{g}^{[m]}$ será função dos coeficientes até a ordem $m-1$, $\phi^{[m-1]}$, $\lambda^{[m-1]}$. Notando que o primeiro e o último termo do somatório de $\mathbf{g}^{[m]}$ são os únicos termos que contém as incógnitas $\phi^{[m-1]}$, $\lambda^{[m-1]}$, então, separando estas parcelas por conveniência para a análise posterior, os vetores $\mathbf{g}^{[m]}$ podem ser expressos como:

para $m=2$

$$\mathbf{g}^{[2]} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(1)} \Big|_c \phi^{[1]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(1)} \Big|_c \lambda^{[1]} \right] \quad (\text{IV.86a})$$

para $m=3$

$$\mathbf{g}^{[3]} = \frac{2}{3} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(1)} \Big|_c \phi^{[2]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(1)} \Big|_c \lambda^{[2]} \right] + \frac{1}{6} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(2)} \Big|_c \phi^{[1]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(2)} \Big|_c \lambda^{[1]} \right] \quad (\text{IV.86b})$$

para $m > 3$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{[m]} = & \frac{m-1}{m} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(1)} \Big|_c \phi^{[m-1]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(1)} \Big|_c \lambda^{[m-1]} \right] + \\ & + \frac{1}{m!} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(m-1)} \Big|_c \phi^{[1]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(m-1)} \Big|_c \lambda^{[1]} \right] + \\ & + \frac{1}{m} \sum_{p=2}^{m-2} \frac{m-p}{p!} \left[\mathbf{F}_{\phi}^{(p)} \Big|_c \phi^{[m-p]} + \mathbf{F}_{\lambda}^{(p)} \Big|_c \lambda^{[m-p]} \right] \quad (\text{IV.86c}) \end{aligned}$$

As derivadas paramétricas $F_{\phi}^{(p)}$, $F_{\lambda}^{(p)}$ podem ser obtidas pela regra da cadeia como [Apêndice B]:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } p=1 \\ F_{\phi}^{(1)} = F_{\phi\phi} \phi^{(1)} + F_{\phi\lambda} \lambda^{(1)} \end{array} \right. \quad (IV.87a)$$

$$F_{\lambda}^{(1)} = F_{\lambda\phi} \phi^{(1)} + F_{\lambda\lambda} \lambda^{(1)} \quad (IV.87b)$$

para $p>1$

$$F_{\phi}^{(p)} = F_{\phi\phi} \phi^{(p)} + F_{\phi\lambda} \lambda^{(p)} + \sum_{q=1}^{p-1} \binom{p-1}{q} \left[F_{\phi\phi}^{(q)} \phi^{(p-q)} + F_{\phi\lambda}^{(q)} \lambda^{(p-q)} \right] \quad (IV.87c)$$

$$F_{\lambda}^{(p)} = F_{\lambda\phi} \phi^{(p)} + F_{\lambda\lambda} \lambda^{(p)} + \sum_{q=1}^{p-1} \binom{p-1}{q} \left[F_{\lambda\phi}^{(q)} \phi^{(p-q)} + F_{\lambda\lambda}^{(q)} \lambda^{(p-q)} \right] \quad (IV.87d)$$

Em particular no ponto crítico, usando as relações (IV.46), estas derivadas valem:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } p=1 \\ F_{\phi}^{(1)} \Big|_c = F_{\phi\phi} \Big|_c \phi^{[1]} + F_{\phi\lambda} \Big|_c \lambda^{[1]} \end{array} \right. \quad (IV.88a)$$

$$F_{\lambda}^{(1)} \Big|_c = F_{\lambda\phi} \Big|_c \phi^{[1]} + F_{\lambda\lambda} \Big|_c \lambda^{[1]} \quad (IV.88b)$$

para $p>1$

$$F_{\phi}^{(p)} \Big|_c = p! \left\{ F_{\phi\phi} \Big|_c \phi^{[p]} + F_{\phi\lambda} \Big|_c \lambda^{[p]} + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{p-q}{p} \frac{1}{q!} \left[F_{\phi\phi}^{(q)} \Big|_c \phi^{[p-q]} + F_{\phi\lambda}^{(q)} \Big|_c \lambda^{[p-q]} \right] \right\} \quad (IV.88c)$$

$$F_{\lambda}^{(p)} \Big|_c = p! \left\{ F_{\lambda\phi} \Big|_c \phi^{[p]} + F_{\lambda\lambda} \Big|_c \lambda^{[p]} + \sum_{q=1}^{p-1} \frac{p-q}{p} \frac{1}{q!} \left[F_{\lambda\phi}^{(q)} \Big|_c \phi^{[p-q]} + F_{\lambda\lambda}^{(q)} \Big|_c \lambda^{[p-q]} \right] \right\} \quad (IV.88d)$$

Fazendo a substituição nos vetores de forças geométricas $\mathbf{g}^{[m]}$ tem-se:

para $m=2$

$$\mathbf{g}^{[2]} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}\phi\phi|_c \phi^{[1]} \phi^{[1]} + 2 \lambda^{[1]} \mathbf{F}\phi\lambda|_c \phi^{[1]} + (\lambda^{[1]})^2 \mathbf{F}\lambda\lambda|_c \right] \quad (\text{IV.89a})$$

para $m=3$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{[3]} = & \left[\mathbf{F}\phi\phi|_c \phi^{[1]} \phi^{[2]} + \mathbf{F}\phi\lambda|_c (\lambda^{[1]} \phi^{[2]} + \lambda^{[2]} \phi^{[1]}) + \lambda^{[1]} \lambda^{[2]} \mathbf{F}\lambda\lambda|_c \right] + \\ & + \frac{1}{6} \left[\mathbf{F}\phi\phi|_c^{(1)} \phi^{[1]} \phi^{[1]} + 2 \lambda^{[1]} \mathbf{F}\phi\lambda|_c^{(1)} \phi^{[1]} + (\lambda^{[1]})^2 \mathbf{F}\lambda\lambda|_c^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.89b})$$

para $m>3$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{[m]} = & \left[\mathbf{F}\phi\phi|_c \phi^{[1]} \phi^{[m-1]} + \right. \\ & \left. + \mathbf{F}\phi\lambda|_c (\lambda^{[m-1]} \phi^{[1]} + \lambda^{[m-1]} \phi^{[1]}) + \lambda^{[1]} \lambda^{[m-1]} \mathbf{F}\lambda\lambda|_c \right] + \\ & + \sum_{p=1}^{m-2} \frac{m-p-1}{m(m-1)p!} \left[\mathbf{F}\phi\phi|_c^{(p)} \phi^{[1]} \phi^{[m-p-1]} + \right. \\ & \left. + \mathbf{F}\phi\lambda|_c^{(p)} (\lambda^{[1]} \phi^{[m-p-1]} + \lambda^{[m-p-1]} \phi^{[1]}) + \lambda^{[1]} \lambda^{[m-p-1]} \mathbf{F}\lambda\lambda|_c^{(p)} \right] + \\ & + \sum_{p=2}^{m-2} \frac{m-p}{m} \left[\mathbf{F}\phi\phi|_c \phi^{[m-p]} \phi^{[p]} + \right. \\ & \left. + \mathbf{F}\phi\lambda|_c (\lambda^{[p]} \phi^{[m-p]} + \lambda^{[m-p]} \phi^{[p]}) + \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p]} \mathbf{F}\lambda\lambda|_c \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=2}^{m-2} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p)(p-q)}{m p q!} \left[\mathbf{F} \phi \phi \Big|_c^{(q)} \phi^{[m-p]} \phi^{[p-q]} + \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{F} \phi \lambda \Big|_c^{(q)} (\lambda^{[p-q]} \phi^{[m-p]} + \lambda^{[m-p]} \phi^{[p-q]}) + \lambda^{[m-p]} \lambda^{[p-q]} \mathbf{F} \lambda \lambda \Big|_c^{(q)} \right]
\end{aligned} \tag{IV.89c}$$

então os produtos escalares $\hat{\xi}^T \mathbf{g}^{[m]}$ podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
& \text{para } m=2 \\
& \hat{\xi}^T \mathbf{g}^{[2]} = \frac{1}{2} \left[\hat{\xi}^T \mathbf{F} \phi \phi \Big|_c \phi^{[1]} \phi^{[1]} + 2 \lambda^{[1]} \hat{\xi}^T \mathbf{F} \phi \lambda \Big|_c \phi^{[1]} + (\lambda^{[1]})^2 \hat{\xi}^T \mathbf{F} \lambda \lambda \Big|_c \right]
\end{aligned} \tag{IV.90a}$$

$$\begin{aligned}
& \text{para } m>2 \\
& \hat{\xi}^T \mathbf{g}^{[m]} = \left[\hat{\xi}^T \mathbf{F} \phi \phi \Big|_c \phi^{[1]} \phi^{[m-1]} + \right. \\
& \quad \left. + \hat{\xi}^T \mathbf{F} \phi \lambda \Big|_c (\lambda^{[1]} \phi^{[m-1]} + \lambda^{[m-1]} \phi^{[1]}) + \lambda^{[1]} \lambda^{[m-1]} \hat{\xi}^T \mathbf{F} \lambda \lambda \Big|_c \right] + \\
& \quad + C_i^{[m-1]}
\end{aligned} \tag{IV.90b}$$

onde os coeficientes $C_i^{[m]}$ são :

$$\begin{aligned}
& \text{para } m=2 \\
& C_i^{[2]} = \frac{1}{6} \left[\hat{\xi}^T \mathbf{F} \phi \phi \Big|_c^{(1)} \phi^{[1]} \phi^{[1]} + 2 \lambda^{[1]} \hat{\xi}^T \mathbf{F} \phi \lambda \Big|_c^{(1)} \phi^{[1]} + (\lambda^{[1]})^2 \hat{\xi}^T \mathbf{F} \lambda \lambda \Big|_c^{(1)} \right]
\end{aligned} \tag{IV.91a}$$

para $m > 2$

$$\begin{aligned}
 C_1^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{m-p+1}{m+1} & \left[\hat{\xi}^T F \phi \phi \Big|_C \phi^{[p]} \phi^{[m-p+1]} + \hat{\xi}^T F \phi \lambda \Big|_C (\lambda^{[p]} \phi^{[m-p+1]} + \right. \\
 & \left. + \lambda^{[m-p+1]} \phi^{[p]}) + \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]} \hat{\xi}^T F \lambda \lambda \Big|_C \right] + \\
 & + \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p+1)(p-q)}{(m+1)pq!} \left[\hat{\xi}^T F \phi \phi \Big|_C \phi^{[m-p+1]} \phi^{[p-q]} + \right. \\
 & \left. + \hat{\xi}^T F \phi \lambda \Big|_C (\lambda^{[p-q]} \phi^{[m-p+1]} + \lambda^{[m-p+1]} \phi^{[p-q]}) + \right. \\
 & \left. + \lambda^{[m-p+1]} \lambda^{[p-q]} \hat{\xi}^T F \lambda \lambda \Big|_C \right] \quad (IV.91b)
 \end{aligned}$$

Note-se que os coeficientes $C_1^{[m]}$ são funções das componentes até a ordem $m-1$, $\phi^{[m-1]}$, $\lambda^{[m-1]}$.

Fazendo a substituição dos produtos $\hat{\xi}^T g^{[m]}$ nas equações (IV.82), tem-se:

para $m=1$

$$\lambda^{[1]} b = 0 \quad (IV.92a)$$

para $m=2$

$$\hat{\xi}^T F \phi \phi \Big|_C \phi^{[1]} \phi^{[1]} + 2 \lambda^{[1]} \hat{\xi}^T F \phi \lambda \Big|_C \phi^{[1]} + (\lambda^{[1]})^2 \hat{\xi}^T F \lambda \lambda \Big|_C = 2 \lambda^{[2]} b \quad (IV.92b)$$

para $m > 2$

$$\begin{aligned}
 \hat{\xi}^T F \phi \phi \Big|_C \phi^{[1]} \phi^{[m-1]} + \hat{\xi}^T F \phi \lambda \Big|_C (\lambda^{[1]} \phi^{[m-1]} + \lambda^{[m-1]} \phi^{[1]}) + \\
 + (\lambda^{[1]})^2 \hat{\xi}^T F \lambda \lambda \Big|_C = \lambda^{[m]} b - C_1^{[m-1]} \quad (IV.92c)
 \end{aligned}$$

Estas equações serão chamadas *equações de equilíbrio pós-críticas de m-ésima ordem*, e devem ser atendidas pelas componentes de qualquer caminho de equilíbrio partindo do ponto crítico.

Fazendo a substituição das componentes $\phi^{[m]}$, das equações (IV.84), tem-se:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \lambda^{[1]} b = 0 \end{array} \right. \quad \text{(IV.93a)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ (\alpha^{[1]})^2 A_1 + 2 \alpha^{[1]} \lambda^{[1]} A_2 + (\lambda^{[1]})^2 A_3 = 2 \lambda^{[2]} b \end{array} \right. \quad \text{(IV.93b)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>2 \\ \alpha^{[m-1]} (\alpha^{[1]} A_1 + \lambda^{[1]} A_2) + \lambda^{[m-1]} (\alpha^{[1]} A_2 + \lambda^{[1]} A_3) = \\ = \lambda^{[m]} b - C_1^{[m-1]} - C_2^{[m-1]} \end{array} \right. \quad \text{(IV.93c)}$$

onde os coeficientes $C_2^{[m]}$, para $m>1$, são:

$$C_2^{[m]} = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \phi^{[1]} \hat{\delta}^{[m]} + \lambda^{[1]} \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_c \hat{\delta}^{[m]} \quad \text{(IV.94)}$$

e os coeficientes A_1 , A_2 , A_3 são:

$$A_1 = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\xi} \quad \text{(IV.95a)}$$

$$A_2 = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\delta}_0 + \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_c \hat{\xi} \quad \text{(IV.95b)}$$

$$A_3 = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\delta}_0 \hat{\delta}_0 + 2 \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_c \hat{\delta}_0 + \hat{\xi}^T F_{\lambda\lambda}|_c \quad \text{(IV.95c)}$$

Definindo os coeficientes $C^{[m]}$, para $m > 1$ como:

$$C^{[m]} = C_1^{[m]} - C_2^{[m]} \quad (\text{IV.96})$$

e os coeficientes B_1 , B_2 como:

$$B_1 = \alpha^{[1]} A_1 + \lambda^{[1]} A_2 \quad (\text{IV.97a})$$

$$B_2 = \alpha^{[1]} A_2 + \lambda^{[1]} A_3 \quad (\text{IV.97b})$$

então as equações de equilíbrio pós-críticas de m -ésima ordem (IV.93) podem ser expressas como:

para $m=1$

$$\lambda^{[1]} b = 0 \quad (\text{IV.98a})$$

para $m=2$

$$(\alpha^{[1]})^2 A_1 + 2 \alpha^{[1]} \lambda^{[1]} A_2 + (\lambda^{[1]})^2 A_3 = 2 \lambda^{[2]} b \quad (\text{IV.98b})$$

para $m > 2$

$$\alpha^{[m-1]} B_1 + \lambda^{[m-1]} B_2 = \lambda^{[m]} b - C^{[m-1]} \quad (\text{IV.98c})$$

Note-se que existem duas incógnitas $\alpha^{[m-1]}$, $\lambda^{[m]}$ por equação, portanto é necessária uma equação adicional para cada dupla de incógnitas, para que o sistema de equações fique determinado. Estas equações adicionais são obtidas das condições de restrição paramétricas, que dependem do parâmetro escolhido para descrever as trajetórias pós-críticas.

Em particular, quando é utilizado o comprimento de arco ponderado adotando a matriz de ponderação $W = I$, estas equações de restrição são:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \phi^{[1]} \phi^{[1]} + (w_\lambda)^2 (\lambda^{[1]})^2 = 1 \\ \\ \text{para } m>1 \\ \phi^{[1]} \phi^{[m]} + (w_\lambda)^2 \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} = -\beta^{[m]} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.99a)} \\ \\ \text{(IV.99c)} \end{array}$$

onde os coeficientes $\beta^{[m]}$ são, $\beta^{[2]}=0$ e para $m>2$, da equação (IV.31):

$$\beta^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2m} \left[\phi^{[p]} \phi^{[m-p+1]} + w_\lambda^2 \lambda^{[p]} \lambda^{[m-p+1]} \right] \quad \text{(IV.100)}$$

Fazendo a substituição das componentes $\phi^{[m]}$, das equações (IV.84), as equações de restrição (IV.99) podem ser escritas como:

$\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ (\alpha^{[1]})^2 + a_1 (\lambda^{[1]})^2 = 1 \\ \\ \text{para } m>1 \\ \alpha^{[1]} \alpha^{[m]} + a_1 \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} = -\beta^{[m]} + \lambda^{[1]} a^{[m]} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{(IV.101a)} \\ \\ \text{(IV.101b)} \end{array}$
--	--

onde a_1 é uma constante positiva que vale:

$$a_1 = \hat{\delta}_0^T \hat{\delta}_0 + w_\lambda^2 \quad \text{(IV.102)}$$

e os coeficientes $a^{[m]}$, para $m>1$, são:

$$a^{[m]} = \hat{\delta}_0^T \hat{\delta}^{[m]} \quad \text{(IV.103)}$$

A solução simultânea das equações (IV.98) e (IV.101) fornece os coeficientes $\alpha^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ de qualquer caminho de equilíbrio partindo do ponto crítico.

IV.5 - PONTOS LÍMITES DE EQUILÍBRIO

A primeira equação de equilíbrio pos-crítico (IV.98a) é:

$$\lambda^{[1]} b = 0 \quad (IV.104)$$

Se o coeficiente b é diferente de zero, então, para que esta equação seja atendida, deve-se ter $\lambda^{[1]} = 0$, isto é:

$$b = \hat{\xi}^T p^c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{[1]} = 0 \quad (IV.105)$$

Isto implica que a derivada do parâmetro de carga λ em relação ao parâmetro do caminho é nula no ponto crítico:

$$\lambda^{(1)}|_c = \left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_c = \lambda^{[1]} \quad (IV.106)$$

Note-se que a condição de primeira derivada nula é uma condição necessária para assegurar a existência de um extremo local, máximo ou mínimo, do parâmetro λ em torno do ponto crítico. Além disso, uma condição suficiente é que a derivada segunda seja diferente de zero, isto é:

$$\lambda^{(2)}|_c = \left. \frac{d^2\lambda}{dt^2} \right|_c = 2 \lambda^{[2]} \neq 0 \quad (IV.107)$$

Se $\lambda^{[2]}$ é negativo tem-se um máximo do parâmetro de carga λ , e se $\lambda^{[2]}$ é positivo tem-se um mínimo. Em ambos os casos o ponto crítico é chamado *ponto limite* e representa a carga máxima ou mínima que pode ser atingida em torno do ponto crítico, ao se percorrer um determinado caminho de equilíbrio que contenha o ponto limite.

Da equação (IV.84a), para $\lambda^{[1]} = 0$, tem-se que a componente $\phi^{[1]}$ do vetor tangente vale:

$$\phi^{[1]} = \alpha^{[1]} \hat{\xi} \quad (IV.108)$$

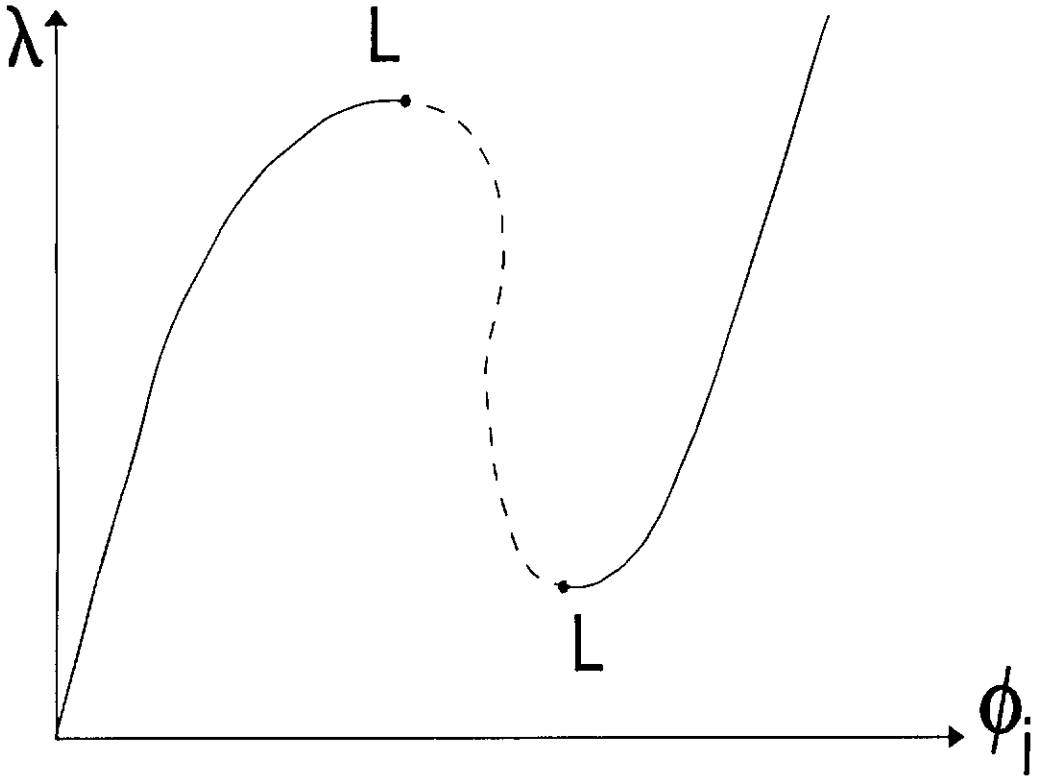


Figura IV.5 - Pontos limites de equilíbrio.

isto é, o vetor tangente no ponto limite é paralelo ao autovetor crítico $\hat{\xi}$; e da primeira equação de restrição paramétrica (IV.101a), para $\lambda^{(1)} = 0$ tem-se:

$$(\alpha^{[1]})^2 = 1 \quad (\text{IV.109})$$

que implica

$$\alpha^{[1]} = \pm 1 \quad (\text{IV.110})$$

onde o sinal define o sentido do avanço na direção do autovetor crítico $\hat{\xi}$.

Da segunda equação de equilíbrio pós-crítico (IV.98b) para $\lambda^{[1]} = 0$ tem-se:

$$A_1 = 2 \lambda^{[2]} b \quad (\text{IV.111})$$

e levando em conta que o coeficiente b é diferente de zero, resulta:

$$\lambda^{[2]} = \frac{A_1}{2 b} \quad (\text{IV.112})$$

isto implica que se o coeficiente A_1 é diferente de zero, então $\lambda^{[2]}$ é diferente de zero e tem-se efetivamente um ponto de extremo no ponto limite. Se o coeficiente A_1 for nulo, então o parâmetro de carga λ apresentará, em geral, um ponto de inflexão e não um ponto de extremo. Mas, deve-se notar que este último caso é de ocorrência pouco provável e de difícil detecção numérica.

Na literatura matemática [28], onde o eixo λ é representado usualmente em posição horizontal, os pontos limites ($\lambda^{[1]}=0$, $\lambda^{[2]} \neq 0$) são chamados *pontos de retorno quadráticos*, e os pontos de inflexão ($\lambda^{[1]}=\lambda^{[2]}=0$, $\lambda^{[3]} \neq 0$) são chamados *pontos de retorno cúbicos*.

Note-se que as componentes de alta ordem $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ do caminho de equilíbrio resultam univocamente determinadas, pois das equações (IV.82b) e (IV.101b), e adotando $\alpha^{[1]}=1$, isto é, sentido positivo de avanço na direção do autovetor crítico, tem-se:

$$\lambda^{[m]} = \frac{\hat{\xi}^T \mathbf{g}^{[m]}}{b} \quad (\text{IV.113a})$$

$$\alpha^{[m]} = -\beta^{[m]} \quad (\text{IV.113b})$$

Portanto, isto implica que por um ponto limite, associado a um ponto crítico simples, passa uma única trajetória de equilíbrio. Ainda mais, um ponto limite é sempre um ponto crítico de equilíbrio, pois da equação de equilíbrio de primeira ordem (IV.80a), para $\lambda^{[1]} = 0$, tem-se:

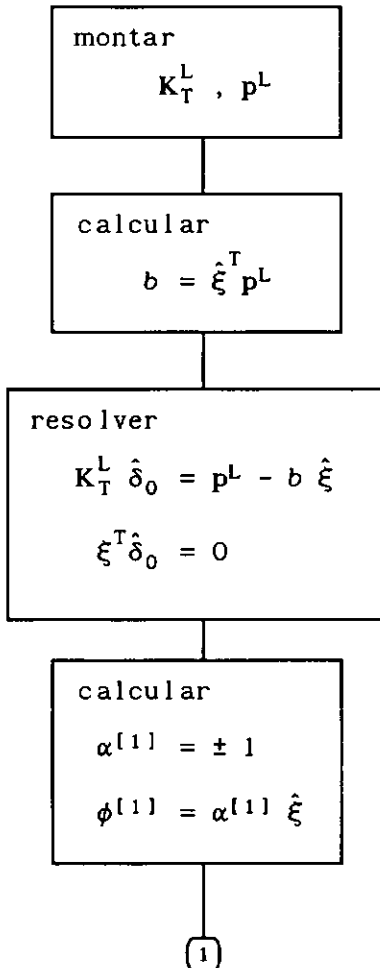
$$\mathbf{K}_T^C \phi^{[1]} = 0 \quad (\text{IV.114})$$

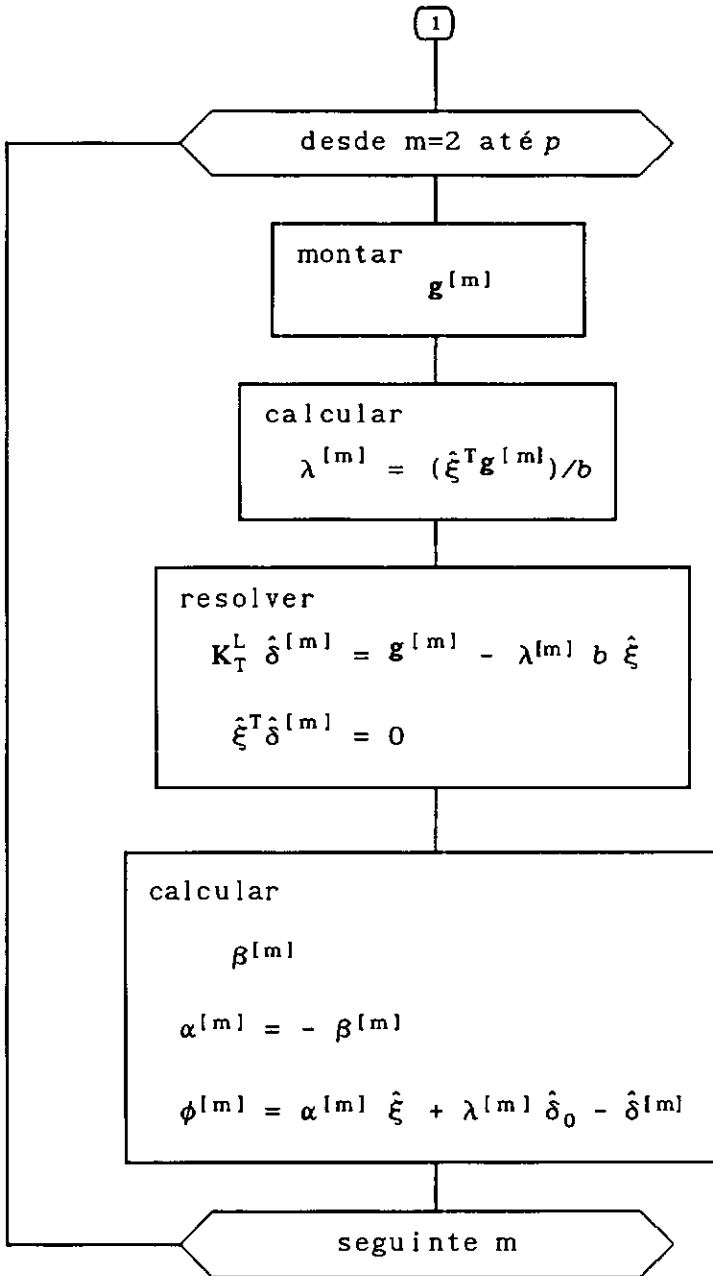
que possui uma solução trivial $\phi^{[1]} = 0$. Assumindo que o caminho de equilíbrio seja parametrizado pelo seu comprimento de arco, da primeira equação de restrição paramétrica (IV.23a), para $\lambda^{[1]} = 0$, tem-se:

$$\phi^{[1]T} \phi^{[1]} = 1 \quad (\text{IV.115})$$

que implica que o vetor $\phi^{[1]}$ deve possuir módulo unitário. Portanto para que o sistema de equações (IV.114) tenha solução distinta da trivial, a matriz do sistema deve ser singular e tem-se um ponto crítico.

No fluxograma IV.2 apresenta-se um esquema dos passos necessários para obter as primeiras m componentes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ da solução das equações de equilíbrio para $m = 1, 2, 3, \dots, p$, num ponto limite, assumindo conhecidas a posição do ponto limite e o autovetor crítico $\hat{\xi}$:





FLUXOGRAMA IV.2 - Obtenção das componentes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ num ponto limite.

IV.5.1 - VARIACÃO DO AUTOVALOR CRÍTICO NUM PONTO LIMITE

Considere um caminho de equilíbrio cujas componentes $\phi(t)$, $\lambda(t)$ possam ser expressas como funções analíticas de um parâmetro t . Assumindo que sobre este caminho os elementos da matriz de rigidez tangente $F_{\phi}(t)$ sejam funções analíticas das variáveis ϕ , λ , então os autovalores $\omega(t)$ e seus autovetores unitários associados $\xi(t)$ desta matriz também devem ser funções analíticas do parâmetro t [27], e podem ser expressos, em torno de uma configuração de equilíbrio E , pelas seguintes expansões de Taylor:

$$\omega(t) = \omega^E + \omega^{[1]} t + \omega^{[2]} t^2 + \omega^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.116a})$$

$$\xi(t) = \xi^E + \xi^{[1]} t + \xi^{[2]} t^2 + \xi^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.116b})$$

onde os coeficientes destas expansões são:

$$\omega^{[m]} = \frac{1}{m!} \omega^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.117a})$$

$$\xi^{[m]} = \frac{1}{m!} \xi^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{IV.117b})$$

Os autovalores $\omega(t)$ e seus autovetores unitários associados $\xi(t)$ estão relacionados pela equação de autovalor:

$$F_{\phi}(t) \xi(t) = \omega(t) \xi(t) \quad (\text{IV.118})$$

Derivando ambos os lados em relação a t resulta:

$$F_{\phi} \xi^{(1)} + F_{\phi}^{(1)} \xi = \omega \xi^{(1)} + \omega^{(1)} \xi \quad (\text{IV.119})$$

Como esta equação deve ser válida para qualquer t , em particular para $t=0$, tem-se:

$$F_{\phi} \Big|_E \xi^{[1]} + F_{\phi}^{(1)} \Big|_E \xi^E = \omega^E \xi^{[1]} + \omega^{[1]} \xi^E \quad (\text{IV.120})$$

Note-se que, se o autovetor ξ é unitário, deve cumprir em todo t a relação:

$$\xi(t)^T \xi(t) = 1 \quad (\text{IV.121})$$

Derivando ambos os lados em relação a t , tem-se:

$$2 \xi^T \dot{\xi}^{(1)} = 0 \quad (\text{IV.122})$$

que implica que os vetores ξ e $\xi^{(1)}$ são ortogonais em todo t , em particular para $t=0$, na configuração E , tem-se:

$$\xi^{E^T} \xi^{[1]} = 0 \quad (\text{IV.123})$$

Note-se que se a matriz F_ϕ é simétrica, então pre-multiplicando a equação (IV.118) por $\xi^{[1]T}$, e calculando no ponto E , tem-se:

$$\xi^{[1]T} F_\phi|_E \xi^E = \xi^{E^T} F_\phi|_E \xi^{[1]} = \omega^E \xi^{E^T} \xi^{[1]} = 0 \quad (\text{IV.124})$$

Portanto pré-multiplicando a equação (IV.120) por ξ^{E^T} resulta:

$$\omega^{[1]} = \xi^{E^T} F_\phi^{(1)}|_E \xi^E \quad (\text{IV.125})$$

e, fazendo a substituição de $F_\phi^{(1)}|_E$, da equação (IV.87a), tem-se:

$$\omega^{[1]} = \xi^{E^T} F_\phi|_E \phi^{[1]} \xi^E + \lambda^{[1]} \xi^{E^T} F_\phi \lambda|_E \xi^E \quad (\text{IV.126})$$

Num ponto crítico simples um autovalor $\omega^E = \hat{\omega} = 0$ se anula, portanto as expansões de Taylor do autovalor crítico e de seu autovetor unitário associado $\xi^E = \hat{\xi}$, em torno do ponto crítico são:

$$\omega(t) = \hat{\omega}^{[1]} t + \hat{\omega}^{[2]} t^2 + \hat{\omega}^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.127a})$$

$$\xi(t) = \hat{\xi} + \hat{\xi}^{[1]} t + \hat{\xi}^{[2]} t^2 + \hat{\xi}^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.127b})$$

Num entorno infinitesimal do ponto crítico a variação do autovalor crítico é aproximadamente linear:

$$\omega(t) \cong \hat{\omega}^{[1]} t \quad (\text{IV.128})$$

isto implica que a variação do sinal do autovalor crítico em torno do ponto crítico é determinada pelo sinal do coeficiente $\hat{\omega}^{[1]}$.

Se o ponto crítico é um ponto limite então as componentes do vetor tangente são:

$$\phi^{[1]} = \hat{\xi} \quad (\text{IV.129a})$$

$$\lambda^{[1]} = 0 \quad (\text{IV.129b})$$

e o coeficiente $\hat{\omega}^{[1]}$, da equação (IV.126) fica:

$$\hat{\omega}^{[1]} = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi} \Big|_L \hat{\xi} \hat{\xi} \quad (\text{IV.130})$$

Note-se que o lado direito coincide com a definição do coeficiente A_1 , da equação (IV.95a), que deve ser sempre diferente de zero se o ponto crítico é um ponto limite (ponto de retorno quadrático). Portanto, pela equação (IV.111) resulta:

$$\hat{\omega}^{[1]} = A_1 = 2 \lambda^{[2]} b \neq 0 \quad (\text{IV.131})$$

Isto implica que num entorno do ponto limite o autovalor crítico $\hat{\omega}$ deve necessariamente mudar de sinal.

Como visto no capítulo II, a estabilidade de uma configuração de equilíbrio de um sistema conservativo, pode ser determinada analisando os sinais dos autovalores da matriz de rigidez tangente. Se todos os autovalores são positivos a configuração de equilíbrio é estável, se ao menos um autovalor é negativo a configuração de equilíbrio é instável.

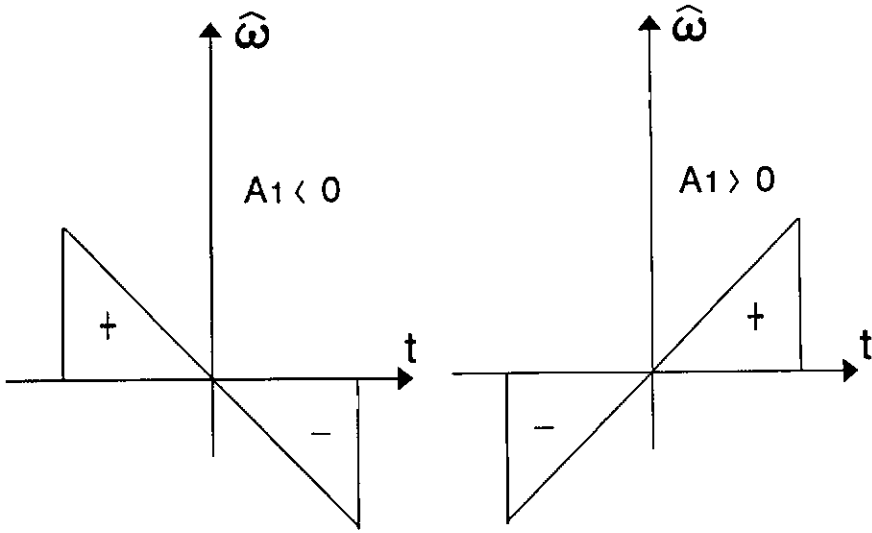


FIGURA IV.6 - Variação do autovalor crítico em torno de um ponto limite.

Portanto, num ponto limite sempre existe variação do grau de instabilidade (quantidade de autovalores negativos da matriz de rigidez tangente). Em particular se um ramo do caminho que parte do ponto limite é estável, o outro ramo deve ser necessariamente instável.

IV.6 - PONTOS DE BIFURCAÇÃO SIMPLES

Considere um ponto crítico simples, da primeira equação de equilíbrio pós-crítico (IV.98a) tem-se:

$$\lambda^{[1]} b = 0 \quad (IV.132)$$

Se o coeficiente b é diferente de zero, tem-se, como mostrado na seção anterior, um ponto limite de equilíbrio. Se o coeficiente b é nulo, esta equação não fornece nenhuma informação com relação ao coeficiente $\lambda^{[1]}$. Portanto os coeficientes $\lambda^{[m]}$, $\alpha^{[m]}$ devem ser obtidos das restantes equações de equilíbrio pós-crítico (IV.98b,c), que, para $b = 0$ podem ser escritas como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ (\alpha^{[1]})^2 A_1 + 2 \alpha^{[1]} \lambda^{[1]} A_2 + (\lambda^{[1]})^2 A_3 = 0 \\ \text{para } m>1 \\ \alpha^{[m]} B_1 + \lambda^{[m]} B_2 = - C^{[m]} \end{array} \right. \quad (IV.133a)$$

$$\alpha^{[m]} B_1 + \lambda^{[m]} B_2 = - C^{[m]} \quad (IV.133b)$$

Note-se que a primeira equação (IV.133a) é quadrática homogênea em $\alpha^{[1]}$, $\lambda^{[1]}$ e pelo teorema de Bezout ^[15] tem-se que existem como máximo duas soluções diferentes relacionando $\alpha^{[1]}$, $\lambda^{[1]}$. Isto implica que pelo ponto crítico passam, em geral, duas trajetórias de equilíbrio diferentes e o ponto crítico é chamado "ponto de bifurcação".

Observe-se, das equações (IV.81) e (IV.82b), que para $b = 0$ tem-se:

$$\hat{\xi}^T p^C = 0 \quad (IV.134a)$$

$$\hat{\xi}^T g^{[m]} = 0 \quad (IV.134b)$$

Isto é, num ponto de bifurcação o autovetor crítico $\hat{\xi}$ é ortogonal ao vetor de forças externas p^C e a todos os vetores de forças geométricas de m -ésima ordem $g^{[m]}$.

Assumindo que as trajetórias de bifurcação sejam parametrizadas pelo seu comprimento de arco, então os coeficientes $\alpha^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ de qualquer uma destas trajetórias devem atender as equações de restrição paramétricas (IV.101):

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ (\alpha^{[1]})^2 + a_1 (\lambda^{[1]})^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{(IV.135a)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>1 \\ \alpha^{[1]} \alpha^{[m]} + a_1 \lambda^{[1]} \lambda^{[m]} = -\beta^{[m]} + \lambda^{[1]} a^{[m]} \end{array} \right. \quad \text{(IV.135b)}$$

Considere-se o coeficiente A_1 diferente de zero, então $\lambda^{[1]}$ deve ser diferente de zero, pois se for nulo, da equação (IV.133a) implicaria que $\alpha^{[1]}$ também deveria ser nulo, mas da primeira equação de restrição (IV.135a) tem-se que os coeficientes $\alpha^{[1]}$, $\lambda^{[1]}$ não podem ser simultaneamente nulos. Portanto se o coeficiente A_1 é diferente de zero então $\lambda^{[1]}$ é diferente de zero, e é possível escrever a equação (IV.133a) como:

$$\left(\frac{\alpha^{[1]}}{\lambda^{[1]}} \right)^2 A_1 + 2 \left(\frac{\alpha^{[1]}}{\lambda^{[1]}} \right) A_2 + A_3 = 0 \quad \text{(IV.136)}$$

As soluções desta equação quadrática são:

$$\left(\frac{\alpha^{[1]}}{\lambda^{[1]}} \right) = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - A_1 A_3}}{A_1} \quad \text{(IV.137)}$$

Chamando Δ ao radicando:

$$\Delta = A_2^2 - A_1 A_3 \quad \text{(IV.138)}$$

Se Δ for menor que zero, as soluções da equação quadrática (IV.136) são complexas, e não existe nenhuma solução real. Neste caso, pelo ponto crítico não passa nenhuma trajetória de equilíbrio, e tem-se apenas um ponto isolado de equilíbrio crítico que é chamado "*ponto de formação isolada simples*". Portanto num ponto de bifurcação pertencente a uma trajetória de equilíbrio o radicando Δ deve ser sempre maior ou igual que zero.

A primeira equação de equilíbrio pós-crítico (IV.133a) pode ser escrita como:

$$(\alpha^{[1]})^2 A_1 + (\lambda^{[1]})^2 A_3 = - 2 \alpha^{[1]} \lambda^{[1]} A_2 \quad (\text{IV.139})$$

elevando ambos os lados ao quadrado, tem-se:

$$(\alpha^{[1]})^4 A_1^2 + 2 (\alpha^{[1]})^2 (\lambda^{[1]})^2 A_1 A_3 + (\lambda^{[1]})^4 A_3^2 = 4 (\alpha^{[1]})^2 (\lambda^{[1]})^2 A_2^2 \quad (\text{IV.140})$$

Da primeira equação de restrição paramétrica (IV.135a) tem-se:

$$(\alpha^{[1]})^2 = 1 - a_1 (\lambda^{[1]})^2 \quad (\text{IV.141})$$

e fazendo a substituição na equação (IV.140), chega-se à seguinte equação quadrática em $(\lambda^{[1]})^2$:

$$(\lambda^{[1]})^4 D_1 - 2 (\lambda^{[1]})^2 D_2 + D_3 = 0 \quad (\text{IV.142})$$

onde

$$D_1 = A_3^2 + a_1^2 A_1^2 + 4 a_1 A_2^2 - 2 a_1 A_1 A_3 \quad (\text{IV.143a})$$

$$D_2 = 2 A_2^2 - A_1 A_3 + a_1 A_1^2 \quad (\text{IV.143b})$$

$$D_3 = A_1^2 \quad (\text{IV.143c})$$

Note-se que o coeficiente D_1 pode ser escrito como:

$$D_1 = A_3^2 + a_1^2 A_1^2 + 2 a_1 A_2^2 + 2 a_1 \Delta \quad (\text{IV.144})$$

e levando em conta que o coeficiente a_1 , da equação (IV.102), é sempre positivo, isto implica que o coeficiente D_1 é sempre positivo. Rigorosamente, existe a possibilidade de serem os coeficientes A_1 , A_2 , A_3 simultaneamente nulos, que implicaria a nulidade de D_1 , D_2 , D_3 . Mas nesse caso particular, a primeira equação de equilíbrio pós-crítico (IV.133a) não forneceria nenhuma informação

relativa aos coeficientes $\alpha^{[1]}$, $\lambda^{[1]}$, a qual deveria ser procurada nas equações de equilíbrio de maior ordem. Por simplicidade, aqui será assumido que os coeficientes A_1 , A_2 , A_3 não são simultaneamente nulos e portanto o coeficiente D_1 pode ser assumido sempre diferente de zero, existindo duas soluções da equação quadrática (IV.142) que podem ser expressas como:

$$(\lambda^{[1]})^2 = \frac{D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - D_1 D_3}}{D_1} \quad (\text{IV.145})$$

Note-se que o radicando é sempre maior ou igual que zero, pois:

$$D_2^2 - D_1 D_3 = 4 A_2^2 (A_2^2 - A_1 A_3) = 4 A_2^2 \Delta \geq 0 \quad (\text{IV.146})$$

e notando que os coeficientes D_1 são sempre não-negativos tem-se

$$D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - D_1 D_3} \geq 0 \quad (\text{IV.147})$$

isto implica que as soluções para $\lambda^{[1]}$ são reais e valem:

$$\lambda^{[1]} = \pm \left(\frac{D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - D_1 D_3}}{D_1} \right)^{1/2} \quad (\text{IV.148})$$

onde o sinal no início do lado direito indica o sentido de avanço adotado. Esta expressão apresenta a vantagem de ser válida para qualquer valor dos coeficientes A_i .

O coeficiente $\alpha^{[1]}$ é obtido da equação (IV.141) como:

$$\alpha^{[1]} = \pm \left(1 - a_1 (\lambda^{[1]})^2 \right)^{1/2} \quad (\text{IV.149})$$

onde o sinal é escolhido de maneira de satisfazer a equação (IV.133a).

Note-se que se o coeficiente A_1 é diferente de zero existem duas soluções não-nulas, em geral diferentes, para $\lambda^{[1]}$. Isto implica que no ponto crítico se

interceptam dois caminhos de equilíbrio. Este tipo de bifurcação é chamada na literatura de estabilidade [15],[16] de *bifurcação assimétrica* e na literatura matemática [28] de *bifurcação transcritical* (Fig.IV.7).

Como será visto subseqüentemente este tipo de bifurcação apresenta a característica que os caminhos de equilíbrio intercambiam seu grau de instabilidade (quantidade de autovalores negativos da matriz de rigidez tangente) no ponto crítico.

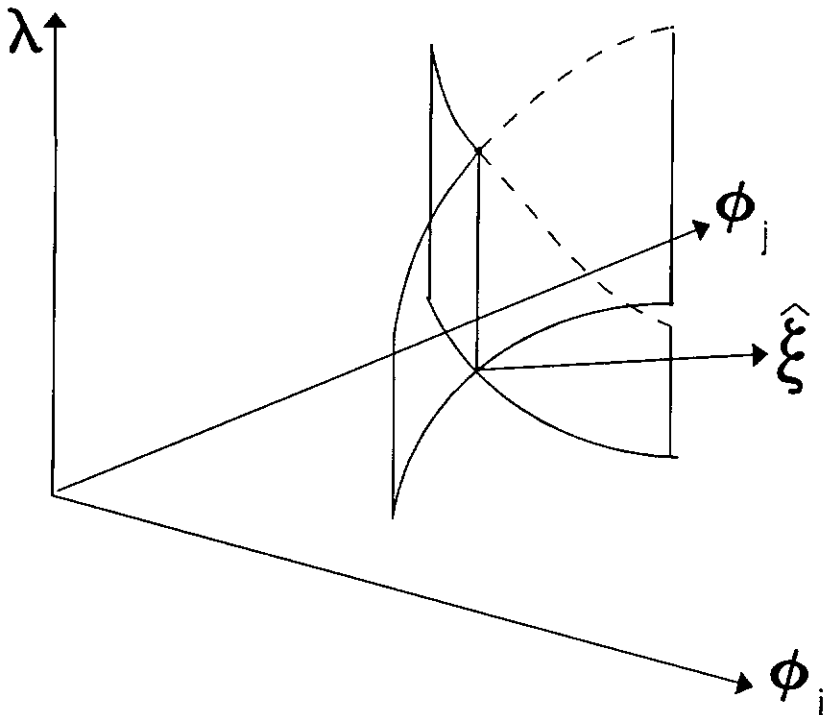


FIGURA IV.7 - Bifurcação assimétrica ($A_1 \neq 0$).

Note-se da equação (IV.84a), que a componente $\phi^{[1]}$ do vetor tangente a cada caminho da bifurcação é:

$$\phi^{[1]} = \alpha^{[1]} \hat{\xi} + \lambda^{[1]} \hat{\delta}_0 \quad (\text{IV.150})$$

Portanto se $\lambda^{[1]}$ é diferente de zero para ambos os caminhos, isto implica que os vetores tangentes dos caminhos de uma bifurcação assimétrica não são paralelos

ao autovetor crítico pois sempre possuem uma parcela ortogonal a este vetor.

Se o coeficiente A_1 for nulo, então a primeira equação de equilíbrio pós-crítico (IV.133a) pode ser expressa como:

$$\lambda^{[1]} (2 \alpha^{[1]} A_2 + \lambda^{[1]} A_3) = 0 \quad (\text{IV.151})$$

Uma das soluções desta equação é:

$$\lambda^{[1]} = 0 \quad (\text{IV.152})$$

Isto é, para um caminho o ponto de bifurcação é um ponto de extremo do parâmetro λ e o vetor tangente desse caminho coincide com o autovetor crítico, pois das equações (IV.135a) e (IV.150) tem-se:

$$\alpha^{[1]} = \pm 1 \quad (\text{IV.153a})$$

$$\phi^{[1]} = \pm \hat{\xi} \quad (\text{IV.153b})$$

onde o sinal define o sentido do avanço.

Note-se que se os coeficientes A_1 , A_2 fossem simultaneamente nulos ($A_1 = A_2 = 0$), a equação (IV.133a) ficaria:

$$(\lambda^{[1]})^2 A_3 = 0 \quad (\text{IV.154})$$

que tem duas soluções coincidentes $\lambda^{[1]} = 0$. Mas neste caso o radicando Δ da equação (IV.138), é igual a zero. Isto implica em uma situação limite para a existência de um ponto de bifurcação. Portanto, assumindo que A_2 seja diferente de zero, da equação (IV.151), tem-se que para o outro caminho deve ser:

$$\alpha^{[1]} = - \lambda^{[1]} \frac{A_3}{2 A_2} \quad (\text{IV.155})$$

e fazendo a substituição na primeira equação de restrição paramétrica (IV.135a) tem-se:

$$\lambda^{(1)} = \pm \left[\left(\frac{A_3}{2 A_2} \right)^2 + a_1 \right]^{-1/2} \quad (\text{IV.156})$$

onde o sinal define o sentido do avanço, e note-se que para este caminho $\lambda^{(1)}$ é sempre diferente de zero.

Este tipo de bifurcação é chamada na literatura de estabilidade [15],[16] de *bifurcação simétrica* e na literatura matemática [28] de *bifurcação tridente* (*pitchfork bifurcation*).

Como será visto subsequêntemente este tipo de bifurcação apresenta a característica que o caminho de bifurcação com tangente na direção do autovetor crítico não muda seu grau de instabilidade em torno do ponto crítico. Isto é, nesse entorno o autovetor crítico não muda de sinal sobre este caminho, tocando apenas o zero no ponto crítico. Se o autovalor crítico assume valores positivos no resto desse entorno a bifurcação é chamada *simétrica estável* e se assume valores negativos é chamada *simétrica instável* (Figs. IV.8 e IV.9).

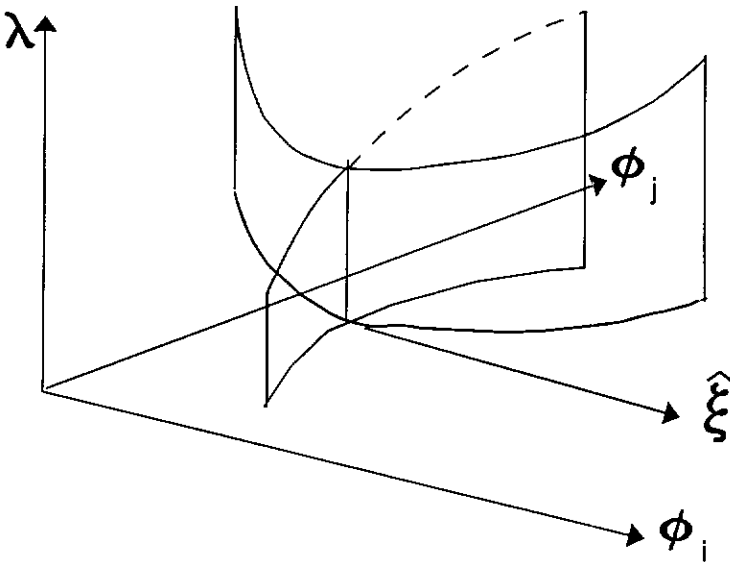


FIGURA IV.8 - Bifurcação simétrica estável ($A_1 = 0$).

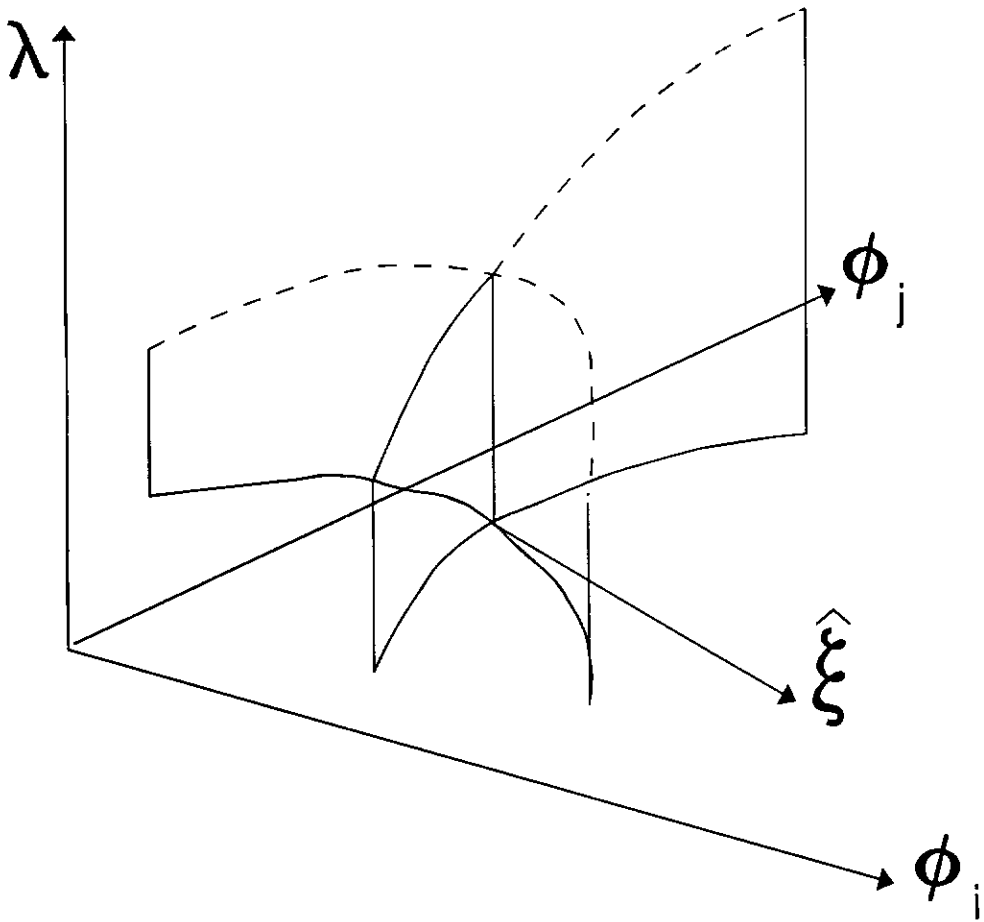


FIGURA IV.9 - Bifurcação simétrica instável ($A_1 = 0$).

IV.6.1 - RELAÇÕES ENTRE AS COMPONENTES DE UMA BIFURCAÇÃO SIMPLES

A determinação das diferentes trajetórias de equilíbrio de um sistema estrutural é sempre feita em forma seqüencial. Isto é, iniciando o processo desde um ponto de equilíbrio normal coincidente com uma configuração de referência, é determinada uma trajetória, chamada *caminho fundamental*. As trajetórias que interceptam o caminho fundamental são chamadas *caminhos secundários*. Usando os índices maiúsculos F e S para referenciar quantidades

relativas às trajetórias fundamental e secundária, respectivamente, então o vetor tangente $\rho_F^{(1)}$ à trajetória fundamental num ponto de bifurcação terá componentes $\phi_F^{[1]}$, $\lambda_F^{[1]}$, e o vetor tangente $\rho_S^{(1)}$ à trajetória secundária terá componentes $\phi_S^{[1]}$, $\lambda_S^{[1]}$.

Notando, que em geral, numa bifurcação simples sempre existe um caminho de bifurcação cuja componente $\lambda^{[1]}$ é diferente de zero, será assumido que a componente $\lambda_F^{[1]}$ da trajetória fundamental é sempre não-nula.

As componentes $\phi_F^{[1]}$, $\phi_S^{[1]}$ podem ser expressas pela equação (IV.84a) como:

$$\phi_F^{[1]} = \alpha_F^{[1]} \hat{\xi} + \lambda_F^{[1]} \hat{\delta}_0 \quad (\text{IV.157a})$$

$$\phi_S^{[1]} = \alpha_S^{[1]} \hat{\xi} + \lambda_S^{[1]} \hat{\delta}_0 \quad (\text{IV.157b})$$

Em virtude de $\lambda_F^{[1]}$ ser assumido diferente de zero, é possível definir os seguintes coeficientes γ , η como:

$$\gamma = \frac{\lambda_S^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} \quad (\text{IV.158a})$$

$$\eta = \alpha_S^{[1]} - \gamma \alpha_F^{[1]} \quad (\text{IV.158b})$$

e portanto as componentes $\phi_S^{[1]}$, $\lambda_S^{[1]}$ podem ser escritas como:

$$\phi_S^{[1]} = \eta \hat{\xi} + \gamma \phi_F^{[1]} \quad (\text{IV.159a})$$

$$\lambda_S^{[1]} = \gamma \lambda_F^{[1]} \quad (\text{IV.159b})$$

Note-se que a expressão (IV.159a) é válida para qualquer trajetória da bifurcação, inclusive a fundamental, que é obtida fazendo $\eta = 0$, $\gamma = 1$.

Fazendo a substituição de $\phi_S^{[1]}$, $\lambda_S^{[1]}$ na equação de equilíbrio pós-crítico (IV.92b) e notando que para uma bifurcação simples o coeficiente b é nulo, tem-se:

$$\eta^2 A_1 + 2 \eta \gamma \hat{A}_2^F + \gamma^2 \hat{A}_3^F = 0 \quad (\text{IV.160})$$

onde

$$A_1 = \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\xi} \quad (\text{IV.161a})$$

$$\hat{A}_2^F = \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \phi_F^{[1]} + \lambda_F^{[1]} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\lambda}|_c \hat{\xi} \quad (\text{IV.161b})$$

$$\hat{A}_3^F = \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}|_c \phi_F^{[1]} \phi_F^{[1]} + 2 \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\lambda}|_c \phi_F^{[1]} + (\lambda_F^{[1]})^2 \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\lambda\lambda}|_c \quad (\text{IV.161c})$$

Como a equação (IV.160) deve ser válida para a trajetória fundamental ($\eta = 0$, $\gamma = 1$), resulta:

$$\hat{A}_3^F = 0 \quad (\text{IV.162})$$

Portanto a equação de equilíbrio pós-crítico (IV.160) fica:

$$\eta (\eta A_1 + 2 \gamma \hat{A}_2^F) = 0 \quad (\text{IV.163})$$

que apresenta duas soluções:

$$\eta = 0 \quad (\text{IV.164a})$$

$$\eta A_1 + 2 \gamma \hat{A}_2^F = 0 \quad (\text{IV.164b})$$

Assumindo que seja utilizado o comprimento de arco como parâmetro de cada caminho, então a primeira equação de restrição paramétrica pós-crítica (IV.101a) é:

$$(\alpha^{[1]})^2 + a_1 (\lambda^{[1]})^2 = 1 \quad (\text{IV.165})$$

Das equações (IV.158) tem-se para o caminho secundário:

$$\lambda_S^{[1]} = \gamma \lambda_F^{[1]} \quad (\text{IV.166a})$$

$$\alpha_S^{[1]} = \eta + \gamma \alpha_F^{[1]} \quad (\text{IV.166b})$$

e fazendo a substituição na equação (IV.165) resulta:

$$\eta^2 + 2 \eta \gamma \alpha_F^{[1]} + \gamma^2 [(\alpha_F^{[1]})^2 + a_1 (\lambda_F^{[1]})^2] = 1 \quad (\text{IV.167})$$

Note-se que o termo entre colchetes possui valor unitário, pois as componentes $\alpha_F^{[1]}$, $\lambda_F^{[1]}$ do caminho fundamental também devem atender a equação (IV.165), portanto tem-se:

$$\eta^2 + 2 \eta \gamma \alpha_F^{[1]} + \gamma^2 = 1 \quad (\text{IV.168})$$

Observe-se que se $\eta = 0$ tem-se $\gamma = \pm 1$, e portanto das equações (IV.159) resulta um vetor tangente paralelo ao vetor tangente do caminho fundamental. Isto implica que a solução $\eta = 0$ da equação (IV.163) corresponde ao caminho fundamental. Portanto as soluções para o caminho secundário são fornecidas pela equação (IV.164b).

Subseqüentemente será demonstrado que o coeficiente $\hat{\Delta}_2^F$ está associado à mudança de sinal do autovalor crítico sobre o caminho fundamental. Pode-se demonstrar que se este coeficiente é nulo não existe bifurcação e o autovetor crítico não muda de sinal em torno do ponto crítico, apenas toca o zero nesse ponto. Portanto assumindo que o coeficiente $\hat{\Delta}_2^F$ seja diferente de zero tem-se da equação (IV.164b):

$$\gamma = - \eta \frac{A_1}{2 \hat{\Delta}_2^F} \quad (\text{IV.169})$$

Fazendo a substituição na equação (IV.168) tem-se:

$$\eta^2 \left[1 - \frac{A_1}{\hat{A}_F} \alpha_F^{[1]} + \frac{1}{4} \left(\frac{A_1}{\hat{A}_2} \right)^2 \right] = 1 \quad (\text{IV.170})$$

Note-se, da equação (IV.165), que para o caminho fundamental tem-se:

$$(\alpha_F^{[1]})^2 = 1 - a_1 (\lambda_F^{[1]})^2 < 1 \quad (\text{IV.171})$$

que implica

$$\left| \alpha_F^{[1]} \right| < 1 \quad (\text{IV.172})$$

portanto, é simples provar, que com esta condição o termo entre colchetes na equação (IV.170) é sempre positivo, resultando:

$$\eta = \pm \left[1 - \frac{A_1}{\hat{A}_F} \alpha_F^{[1]} + \frac{1}{4} \left(\frac{A_1}{\hat{A}_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{IV.173})$$

onde o sinal define o sentido de avanço, e das equações (IV.166a) e (IV.169) tem-se:

$$\lambda_S^{[1]} = - \eta \frac{A_1}{2 \hat{A}_F} \lambda_F^{[1]} \quad (\text{IV.174})$$

Note-se que em coincidência com a análise anterior, se $A_1 \neq 0$ implica que $\lambda_S^{[1]} \neq 0$ e tem-se uma bifurcação assimétrica, e se $A_1 = 0$ resulta $\lambda_S^{[1]} = 0$ e tem-se uma bifurcação simétrica.

IV.6.2 - COMPONENTES DE ORDEM SUPERIOR DOS CAMINHOS NUMA BIFURCAÇÃO

Para determinar as componentes de ordem superior dos caminhos pós-críticos é necessário calcular os coeficientes B_1 , B_2 de cada caminho, que das equações (IV.97) são:

$$B_1 = \alpha^{[1]} A_1 + \lambda^{[1]} A_2 \quad (\text{IV.175a})$$

$$B_2 = \alpha^{[1]} A_2 + \lambda^{[1]} A_3 \quad (\text{IV.175b})$$

Observe-se que o coeficiente B_1^F do caminho fundamental coincide com o coeficiente \hat{A}_2^F , que é assumido diferente de zero:

$$\begin{aligned} B_1^F &= \alpha_F^{[1]} A_1 + \lambda_F^{[1]} A_2 = \\ &= \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} (\alpha_F^{[1]} \hat{\xi} + \lambda_F^{[1]} \hat{\delta}_0) + \lambda_F^{[1]} \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_C \hat{\xi} = \\ &= \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} \phi_F^{[1]} + \lambda_F^{[1]} \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_C \hat{\xi} \equiv \hat{A}_2^F \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.176})$$

Portanto, da equação (IV.133b), o coeficiente $\alpha_F^{[m]}$ do caminho fundamental pode ser expresso como:

$$\alpha_F^{[m]} = - (\lambda_F^{[m]} B_2^F + C_F^{[m]}) / B_1^F \quad (\text{IV.177})$$

Note-se que a equação de equilíbrio pós-crítico (IV.133a) pode ser escrita como:

$$\alpha^{[1]} (\alpha^{[1]} A_1 + \lambda^{[1]} A_2) + \lambda^{[1]} (\alpha^{[1]} A_2 + \lambda^{[1]} A_3) = 0 \quad (\text{IV.178})$$

e notando que os termos entre colchetes coincidem com os coeficientes B_1 , B_2 , esta equação pode ser escrita como:

$$\alpha^{[1]} B_1 + \lambda^{[1]} B_2 = 0 \quad (\text{IV.179})$$

e levando em conta que $\lambda_F^{[1]}$ é assumido diferente de zero, então o coeficiente B_2^F do caminho fundamental pode ser expresso como:

$$B_2^F = - \frac{\alpha_F^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} B_1^F \quad (\text{IV.180})$$

e fazendo a substituição de B_2^F na equação (IV.177) resulta:

$$\alpha_F^{[m]} = \lambda_F^{[m]} \frac{\alpha_F^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} - \frac{C_F^{[m]}}{B_1^F} \quad , m > 1 \quad (\text{IV.181})$$

Fazendo a substituição de $\alpha_F^{[m]}$ na equação de restrição paramétrica (IV.135b) tem-se:

$$\frac{\lambda_F^{[m]}}{\lambda_F^{[1]}} \left[(\alpha_F^{[1]})^2 + a_1 (\lambda_F^{[1]})^2 \right] - \alpha_F^{[1]} \frac{C_F^{[m]}}{B_1^F} = - \beta_F^{[m]} + \lambda_F^{[1]} a_F^{[m]} \quad (\text{IV.182})$$

e notando que o termo entre colchetes possui valor unitário, pela equação (IV.165) resulta:

$$\lambda_F^{[m]} = \lambda_F^{[1]} \left[- \beta_F^{[m]} + \alpha_F^{[1]} \frac{C_F^{[m]}}{B_1^F} + \lambda_F^{[1]} a_F^{[m]} \right] \quad , m > 1 \quad (\text{IV.183})$$

As equações (IV.181), (IV.183), permitem obter as componentes $\phi_F^{[m]}$ das expansões assintóticas do caminho fundamental, da equação (IV.84b) como:

$$\phi_F^{[m]} = \alpha_F^{[m]} \hat{\xi} + \lambda_F^{[m]} \hat{\delta}_0 - \hat{\delta}_F^{[m]} \quad , m > 1 \quad (\text{IV.184})$$

e são válidas para o caminho fundamental de qualquer tipo de bifurcação simples, simétrica ou assimétrica.

Para o caminho secundário o coeficiente B_1^S vale, da equação (IV.175a):

$$B_1^S = \alpha_S^{[1]} A_1 + \lambda_S^{[1]} A_2 \quad (IV.185)$$

Para uma bifurcação assimétrica, pode-se demonstrar que este coeficiente é sempre diferente de zero, pois substituindo $\alpha_S^{[1]}$, $\lambda_S^{[1]}$ das equações (IV.166) tem-se:

$$B_1^S = \eta A_1 + \gamma (\alpha_F^{[1]} A_1 + \lambda_F^{[1]} A_2) = \eta A_1 + \gamma \hat{A}_2^F \quad (IV.186)$$

e notando que para o caminho secundário, da equação (IV.164b), tem-se:

$$\eta A_1 = -2 \gamma \hat{A}_2^F \quad (IV.187)$$

e levando em conta que da equação (IV.176) resulta $\hat{A}_2^F = B_1^F \neq 0$, então o coeficiente B_1^S pode ser expresso como:

$$B_1^S = -\gamma \hat{A}_2^F = -\frac{\lambda_S^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} B_1^F \quad (IV.188)$$

que é sempre diferente de zero para uma bifurcação assimétrica, pois $\lambda_S^{[1]}$ é sempre diferente de zero para este tipo de bifurcação.

Então as componentes de ordem superior do caminho secundário de uma bifurcação assimétrica podem ser obtidas de maneira análoga ao caso anterior, resultando:

$$\lambda_S^{[m]} = \lambda_S^{[1]} \left[-\beta_S^{[m]} + \alpha_S^{[1]} \frac{C_S^{[m]}}{B_1} + \lambda_S^{[1]} a_S^{[m]} \right], \quad m > 1 \quad (IV.189a)$$

$$\alpha_S^{[m]} = \lambda_S^{[m]} \frac{\alpha_S^{[1]}}{\lambda_S^{[1]}} - \frac{C_S^{[m]}}{B_1^S}, \quad m > 1 \quad (\text{IV.189b})$$

Para uma bifurcação simétrica o coeficiente B_1^S , da equação (IV.188), se anula pois $\lambda_S^{[1]} = 0$. Neste caso o coeficiente B_2^S , da equação (IV.175b) fica:

$$B_2^S = \alpha_S^{[1]} A_2 \quad (\text{IV.190})$$

Note-se que numa bifurcação simétrica o coeficiente A_1 se anula, resultando das equações (IV.169) e (IV.173):

$$\gamma = 0 \quad (\text{IV.191a})$$

$$\eta = \pm 1 \quad (\text{IV.191b})$$

onde o sinal define o sentido do avanço na direção do autovetor crítico. Em virtude da irrelevância deste sinal na análise será adotado $\eta = 1$. Assim da equação (IV.166b) tem-se:

$$\alpha_S^{[1]} = 1 \quad (\text{IV.192})$$

resultando

$$B_2^S = A_2 \quad (\text{IV.193})$$

e notando que se os coeficientes A_1 e A_2 se anulam simultaneamente os dois caminhos de bifurcação possuem componente $\lambda^{[1]} = 0$, como visto anteriormente na seção IV.6. Então como foi assumido $\lambda_F^{[1]} \neq 0$ deve-se ter $A_2 \neq 0$ e conseqüentemente $B_2^S \neq 0$. Portanto, da equação (IV.133b), para uma bifurcação simétrica ($B_1^S = 0$) tem-se:

$$\lambda_S^{[m]} = - \frac{C_S^{[m]}}{A_2} \quad , m > 1 \quad (IV.194)$$

e da equação de restrição paramétrica (IV.135b), para uma bifurcação simétrica ($\alpha_S^{[1]} = 1, \lambda_S^{[1]} = 0$), resulta:

$$\alpha_S^{[m]} = - \beta_S^{[m]} \quad , m > 1 \quad (IV.195)$$

As equações (IV.194) e (IV.195) permitem obter as componentes $\phi_S^{[m]}$ das expansões assintóticas (IV.84b) do caminho secundário de uma bifurcação simétrica como:

$$\phi_S^{[m]} = \alpha_S^{[m]} \hat{\xi} + \lambda_S^{[m]} \hat{\delta}_0 - \hat{\delta}_S^{[m]} \quad , m > 1 \quad (IV.196)$$

Note-se que para qualquer tipo de bifurcação as componentes de alta ordem dos caminhos fundamental e secundário ficam univocamente determinadas, isto implica que por um ponto de bifurcação simples passam no máximo duas trajetórias diferentes de equilíbrio.

Numericamente é possível achar uma bifurcação quase-simétrica onde o coeficiente $\lambda_S^{[1]}$ seja muito pequeno mas não-nulo. Nesse caso as equações (IV.189) podem resultar pouco precisas para se obter os coeficientes $\alpha_S^{[m]}, \lambda_S^{[m]}$, sendo conveniente utilizar as seguintes expressões válidas para $B_2^S \neq 0$. Da equação (IV.133b) tem-se:

$$\lambda_S^{[m]} = - (\alpha_S^{[m]} B_1^S + C_S^{[m]}) / B_2^S \quad , m > 1 \quad (IV.197)$$

e da equação (IV.179) para o caminho secundário tem-se:

$$B_1^s = - \frac{\lambda_S^{[1]}}{\alpha_S^{[1]}} B_2^s \quad (\text{IV.198})$$

Fazendo a substituição de B_1^s na equação (IV.197) resulta:

$$\lambda_S^{[m]} = \alpha_S^{[m]} \frac{\lambda_S^{[1]}}{\alpha_S^{[1]}} - \frac{C_S^{[m]}}{B_2^s} \quad , \quad m > 1 \quad (\text{IV.199})$$

e fazendo a substituição de $\lambda_S^{[m]}$ na equação de restrição paramétrica (IV.135b) tem-se:

$$\frac{\alpha_S^{[m]}}{\alpha_S^{[1]}} \left[(\alpha_S^{[1]})^2 + a_1 (\lambda_S^{[1]})^2 \right] - a_1 \lambda_S^{[1]} \frac{C_S^{[m]}}{B_1^s} = - \beta_S^{[m]} + \lambda_S^{[1]} a_S^{[m]} \quad (\text{IV.200})$$

onde o termo entre colchetes possui valor unitário, pela equação (IV.165), resultando:

$$\alpha_S^{[m]} = \alpha_S^{[1]} \left[- \beta_S^{[m]} + a_1 \lambda_S^{[1]} \frac{C_S^{[m]}}{B_1^s} + \lambda_S^{[1]} a_S^{[m]} \right] \quad , \quad m > 1 \quad (\text{IV.201})$$

Note-se que para $\lambda_S^{[1]} = 0$, as equações (IV.199), (IV.201) coincidem com as equações (IV.194), (IV.195) de uma bifurcação simétrica.

Um critério possível para determinar as equações a serem utilizadas consiste em comparar os módulos de B_1^s , B_2^s , se $|B_1^s| > |B_2^s|$ são utilizadas as equações (IV.189), em caso contrário são utilizadas as equações (IV.199) e (IV.201).

No fluxograma IV.2 apresenta-se um esquema dos passos necessários para obter as primeiras m componentes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ das soluções fundamental e secundária das equações de equilíbrio num ponto de bifurcação simples, assumindo conhecidas a posição do ponto de bifurcação e o autovetor crítico $\hat{\xi}$:

montar

$$K_T^B, p^B$$

resolver

$$K_T^B \hat{\delta}_0 = p^B - b \hat{\xi}$$

$$\hat{\xi}^T \hat{\delta}_0 = 0$$

calcular

$$\alpha_F^{[1]}, \lambda_F^{[1]}$$

$$\alpha_S^{[1]}, \lambda_S^{[1]}$$

$$\phi_F^{[1]} = \alpha_F^{[1]} \hat{\xi} + \lambda_F^{[1]} \hat{\delta}_0$$

$$\phi_S^{[1]} = \alpha_S^{[1]} \hat{\xi} + \lambda_S^{[1]} \hat{\delta}_0$$

$$B_1^F, B_2^F$$

fundamental

desde $m=2$ até p

montar

$$g_F^{[m]}$$

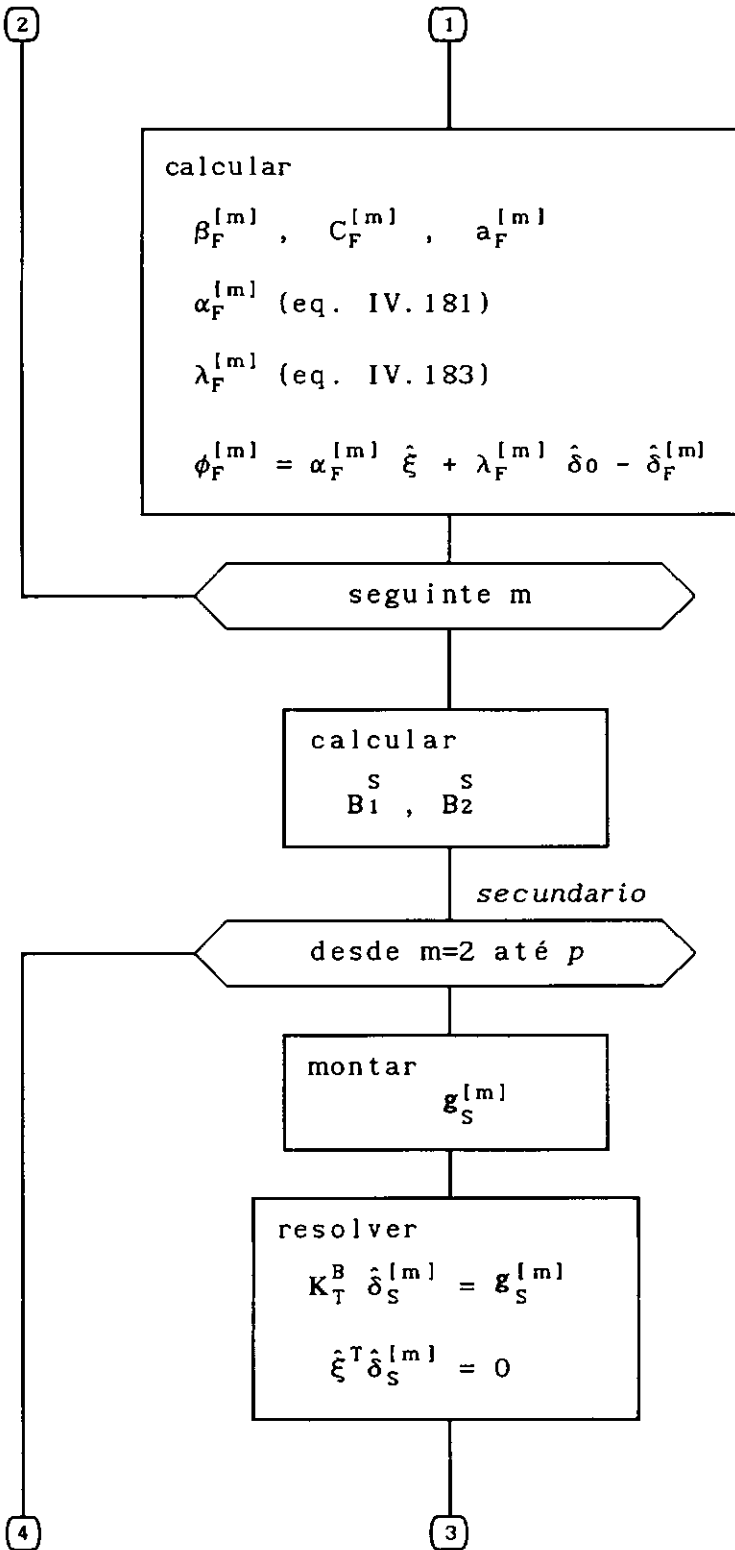
resolver

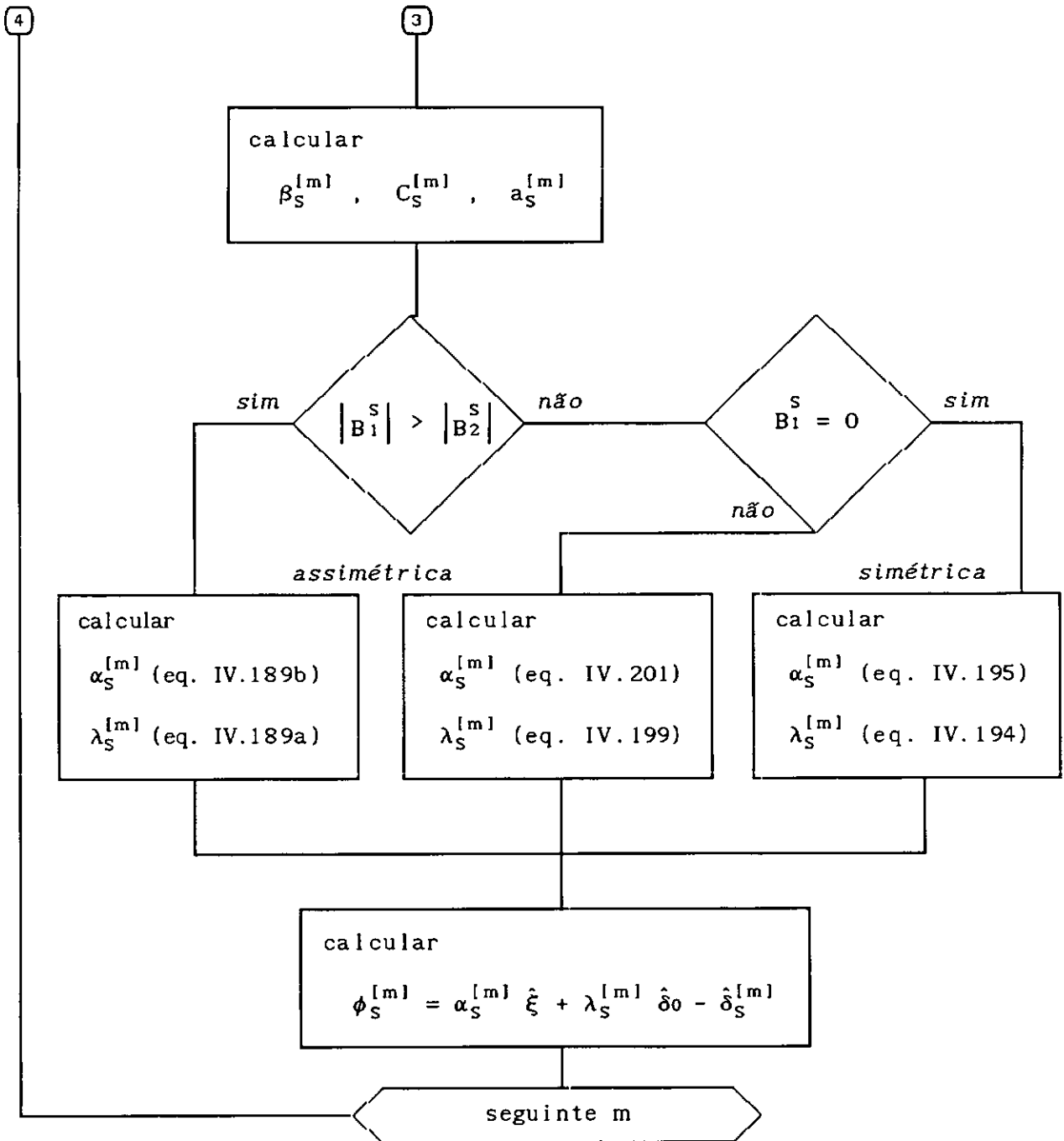
$$K_T^B \hat{\delta}_F^{[m]} = g_F^{[m]}$$

$$\hat{\xi}^T \hat{\delta}_F^{[m]} = 0$$

2

1





FLUXOGRAMA IV.3 - Obtenção das componentes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ numa bifurcação simples.

IV.6.3 - VARIAÇÃO DO AUTOVALOR CRÍTICO NUMA BIFURCAÇÃO SIMPLES

Assumindo que os elementos da matriz de rigidez tangente $F_{\phi}(\phi, \lambda)$ sejam funções analíticas de ϕ , λ , então em torno de um ponto de bifurcação simples, e sobre cada caminho da bifurcação que seja parametrizado por um parâmetro t , o autovalor crítico $\omega(t)$ e seu autovetor unitário associado $\xi(t)$ podem ser expressos pelas seguintes expansões de Taylor, em torno do ponto de bifurcação:

$$\omega(t) = \hat{\omega}^{[1]} t + \hat{\omega}^{[2]} t^2 + \hat{\omega}^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.202a})$$

$$\xi(t) = \hat{\xi} + \hat{\xi}^{[1]} t + \hat{\xi}^{[2]} t^2 + \hat{\xi}^{[3]} t^3 + \dots \quad (\text{IV.202b})$$

Se o coeficiente $\hat{\omega}^{[1]}$ é diferente de zero, então num entorno infinitesimal do ponto crítico a variação do autovalor crítico é aproximadamente linear:

$$\omega(t) \cong \hat{\omega}^{[1]} t \quad (\text{IV.203})$$

Isto implica que a variação do sinal do autovalor crítico é determinada pelo coeficiente $\hat{\omega}^{[1]}$, que pela equação (IV.126) vale:

$$\hat{\omega}^{[1]} = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \phi^{[1]} \hat{\xi} + \lambda^{[1]} \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_c \hat{\xi} \quad (\text{IV.204})$$

Notando que para qualquer caminho de bifurcação a componente $\phi^{[1]}$ pode ser expressa, pela equação (IV.84a), como:

$$\phi^{[1]} = \alpha^{[1]} \hat{\xi} + \lambda^{[1]} \hat{\delta}_0 \quad (\text{IV.205})$$

Fazendo a substituição na expressão de $\hat{\omega}^{[1]}$, resulta:

$$\hat{\omega}^{[1]} = \alpha^{[1]} \left[\hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\xi} \right] + \lambda^{[1]} \left[\hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\delta}_0 + \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_c \hat{\xi} \right] \quad (\text{IV.206})$$

e levando em conta a definição dos coeficientes A_1 , A_2 das equações (IV.95), tem-se:

$$\hat{\omega}^{[1]} = \alpha^{[1]} A_1 + \lambda^{[1]} A_2 \quad (\text{IV.207})$$

onde o lado direito coincide com a definição do coeficiente B_1 , equação (IV.97a), resultando:

$$\hat{\omega}^{[1]} = B_1 \quad (\text{IV.208})$$

Analizando primeiramente o caminho fundamental, tem-se, pela equação (IV.176):

$$\hat{\omega}_F^{[1]} = B_1^F = \hat{A}_2^F \neq 0 \quad (\text{IV.209})$$

que para uma bifurcação simples é sempre diferente de zero. Isto implica que o autovalor crítico muda de sinal num entorno infinitesimal do ponto de bifurcação sobre o caminho fundamental.

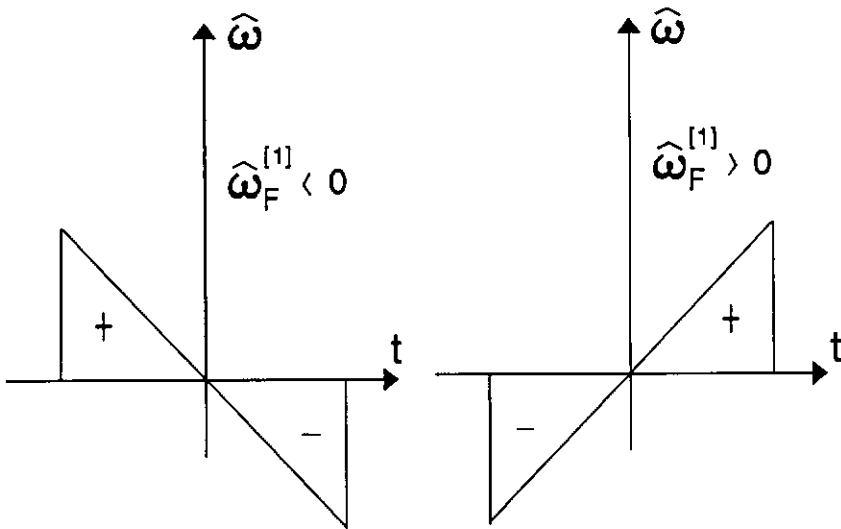


FIGURA IV.10 - Variação do autovalor crítico sobre o caminho fundamental.

Para sistemas conservativos a estabilidade de uma configuração de equilíbrio

pode ser determinada analisando os sinais dos autovalores da matriz de rigidez tangente. Se todos os autovalores são positivos a configuração de equilíbrio é estável, se ao menos um autovalor é negativo a configuração de equilíbrio é instável.

Portanto, num ponto de bifurcação simples sempre existe variação do grau de instabilidade (quantidade de autovalores negativos) da trajetória fundamental. Em particular, se um ramo do caminho fundamental que parte do ponto de bifurcação é estável, o outro ramo deve ser necessariamente instável.

Para a trajetória secundária o coeficiente B_1^S é, da equação (IV.188):

$$B_1^S = - \frac{\lambda_S^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} B_1^F \quad (IV.210)$$

portanto, da equação (IV.208) resulta:

$$\hat{\omega}_S^{[1]} = - \frac{\lambda_S^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} \hat{\omega}_F^{[1]} \quad (IV.211)$$

Note-se que numa bifurcação assimétrica a componente $\lambda_S^{[1]}$ do vetor tangente do caminho secundário é diferente de zero, portanto resulta $\hat{\omega}_S^{[1]} \neq 0$ e o autovalor crítico muda de sinal num entorno infinitesimal do ponto de bifurcação assimétrica sobre o caminho secundário.

Para sistemas conservativos exibindo bifurcação assimétrica, adotando sentido de avanço positivo na direção de cargas crescentes ($\lambda_F^{[1]} > 0$, $\lambda_S^{[1]} > 0$), o sinal negativo na equação (IV.211) indica que se o caminho fundamental perde estabilidade para valores de carga crescente ($\hat{\omega}_F^{[1]} < 0$), então o caminho secundário deve ganhar estabilidade ($\hat{\omega}_S^{[1]} > 0$) para valores de carga crescente. Isto é, os caminhos trocam seu grau de instabilidade ao passar pelo ponto de bifurcação.

Para uma bifurcação simétrica $\lambda_s^{[1]}$ se anula, resultando $\hat{\omega}_s^{[1]} = 0$, e se o coeficiente $\hat{\omega}_s^{[2]}$ é diferente de zero, então num entorno infinitesimal do ponto crítico a variação do autovalor crítico é aproximadamente quadrática:

$$\omega(t) \cong \hat{\omega}_s^{[2]} t^2 \quad (\text{IV.212})$$

portanto o sinal do autovalor crítico não varia em torno do ponto crítico sobre este caminho, tocando o zero apenas nesse ponto.

Para sistemas conservativos, isto implica que o grau de instabilidade do caminho secundário não varia em torno do ponto de bifurcação simétrica.

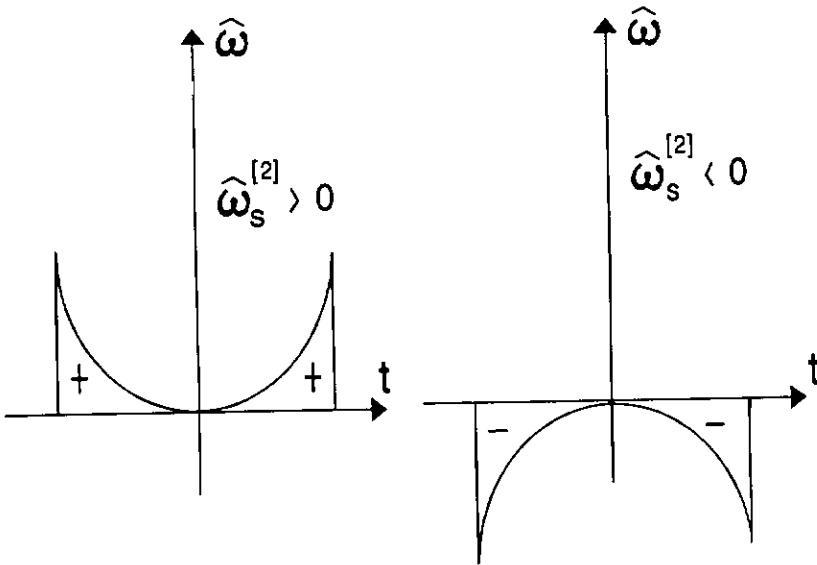


FIGURA IV.11 - Variação do autovalor crítico sobre o caminho secundário de uma bifurcação simétrica.

Note-se que se a matriz de rigidez tangente é simétrica, um autovalor ω qualquer desta matriz, com autovetor unitário associado ξ deve atender a equação de autovalor:

$$F_\phi(t) \xi(t) = \omega(t) \xi(t) \quad (\text{IV.213})$$

Derivando ambos os lados em relação a t resulta:

$$\mathbf{F}_\phi \xi^{(1)} + \mathbf{F}_\phi^{(1)} \xi = \omega \xi^{(1)} + \omega^{(1)} \xi \quad (\text{IV.214})$$

e derivando novamente ambos os lados em relação a t , tem-se:

$$\mathbf{F}_\phi \xi^{(2)} + 2 \mathbf{F}_\phi^{(1)} \xi^{(1)} + \mathbf{F}_\phi^{(2)} \xi = \omega \xi^{(2)} + 2 \omega^{(1)} \xi^{(1)} + \omega^{(2)} \xi \quad (\text{IV.215})$$

Pré-multiplicando ambos os lados por ξ^T e levando em conta a condição (IV.121) de vetor unitário do autovetor ξ , e a condição de ortogonalidade (IV.122) do autovetor ξ com o vetor derivada primeira $\xi^{(1)}$, isto é:

$$\xi^T \xi = 1 \quad (\text{IV.216a})$$

$$\xi^T \xi^{(1)} = 0 \quad (\text{IV.216b})$$

Então a equação (IV.215) pode ser escrita como:

$$\omega \xi^T \xi^{(2)} + 2 \xi^T \mathbf{F}_\phi^{(1)} \xi^{(1)} + \xi^T \mathbf{F}_\phi^{(2)} \xi = \omega \xi^T \xi^{(2)} + \omega^{(2)} \xi \quad (\text{IV.217})$$

onde os primeiros termos de ambos os lados se cancelam mutuamente, e dividindo ambos os lados por 2 tem-se:

$$\frac{\omega^{(2)}}{2} = \xi^T \mathbf{F}_\phi^{(1)} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{F}_\phi^{(2)} \xi \quad (\text{IV.218})$$

Em particular, no ponto crítico, da equação (IV.117a) tem-se:

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = \frac{\omega^{(2)}}{2} \Big|_c \quad (\text{IV.219})$$

Portanto, no ponto de bifurcação, a equação (IV.218) para o autovalor crítico $\hat{\omega}$ e seu autovetor unitário associado $\hat{\xi}$, fica:

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = \hat{\xi}^T \mathbf{F}_\phi^{(1)} \Big|_C \hat{\xi}^{[1]} + \frac{1}{2} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_\phi^{(2)} \Big|_C \hat{\xi} \quad (\text{IV.220})$$

Para o caminho secundário da bifurcação simétrica tem-se $\hat{\omega}_S^{[1]} = 0$ e, portanto, da equação (IV.214), no ponto crítico tem-se:

$$\mathbf{F}_\phi \Big|_C \hat{\xi}^{[1]} = - \mathbf{F}_\phi^{(1)} \Big|_C \hat{\xi} \quad (\text{IV.221})$$

Note-se que o vetor de forças geométricas de segunda ordem $\mathbf{g}^{[2]}$, da equação (IV.85), para o caminho secundário da bifurcação simétrica ($\phi_S^{[1]} = \hat{\xi}$, $\lambda_S^{[1]} = 0$) é :

$$\mathbf{g}^{[2]} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_\phi^{(1)} \Big|_C \hat{\xi} \quad (\text{IV.222})$$

Assim , levando em conta a definição (IV.49) da matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T , a equação (IV.221) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_T^C \hat{\xi}^{[1]} = - 2 \mathbf{g}^{[2]} \quad (\text{IV.223})$$

e levando em conta a definição dos vetores intermediários $\hat{\delta}^{[m]}$, das equações (IV.83), em particular para $m = 2$, e notando que para uma bifurcação o coeficiente b é nulo, tem-se:

$$\mathbf{K}_T^C \hat{\delta}_S^{[2]} = \mathbf{g}^{[2]} \quad (\text{IV.224a})$$

$$\hat{\xi}^T \hat{\delta}_S^{[m]} = 0 \quad (\text{IV.224b})$$

Portanto, notando que o vetor $\hat{\xi}^{[1]}$ é ortogonal a $\hat{\xi}$, e comparando as equações (IV.223) e (IV.224a), resulta:

$$\hat{\xi}^{[1]} = - 2 \hat{\delta}_S^{[2]} \quad (\text{IV.225})$$

Então, o coeficiente $\hat{\omega}_S^{[2]}$, da equação (IV.220), pode ser expresso como:

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = - 2 \hat{\xi}^T \mathbf{F}_\phi^{(1)} \Big|_C \hat{\delta}_S^{[2]} + \frac{1}{2} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_\phi^{(2)} \Big|_C \hat{\xi} \quad (\text{IV.226})$$

Note-se que a componente $\phi_S^{[2]}$ do caminho secundário é, da equação (IV.84b):

$$\phi_S^{[2]} = \alpha_S^{[2]} \hat{\xi} + \lambda_S^{[2]} \hat{\delta}_0 - \hat{\delta}_S^{[2]} \quad (\text{IV.227})$$

mas da equação (IV.195) e pela definição dos coeficientes $\beta_S^{[ml]}$, tem-se:

$$\alpha_S^{[2]} = -\beta_S^{[2]} = 0 \quad (\text{IV.228})$$

resultando:

$$\phi_S^{[2]} = \lambda_S^{[2]} \hat{\delta}_0 - \hat{\delta}_S^{[2]} \quad (\text{IV.229})$$

As derivadas $F_{\phi}^{(1)}|_c$, $F_{\phi}^{(2)}|_c$ são, das equações (IV.88):

$$F_{\phi}^{(1)}|_c = F_{\phi\phi}|_c \phi_S^{[1]} + F_{\phi\lambda}|_c \lambda_S^{[1]} \quad (\text{IV.230a})$$

$$F_{\phi}^{(2)}|_c = 2 \left[F_{\phi\phi}|_c \phi_S^{[2]} + F_{\phi\lambda}|_c \lambda_S^{[2]} \right] + \left[F_{\phi\phi}^{(1)}|_c \phi_S^{[1]} + F_{\phi\lambda}^{(1)}|_c \lambda_S^{[1]} \right] \quad (\text{IV.230b})$$

Fazendo a substituição de $\phi_S^{[2]}$ e notando que para uma bifurcação simétrica tem-se, $\phi_S^{[1]} = \hat{\xi}$, $\lambda_S^{[1]} = 0$, resultam:

$$F_{\phi}^{(1)}|_c = F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \quad (\text{IV.231a})$$

$$F_{\phi}^{(2)}|_c = 2 \lambda_S^{[2]} \left[F_{\phi\phi}|_c \hat{\delta}_0 + F_{\phi\lambda}|_c \right] - 2 F_{\phi\phi}|_c \hat{\delta}_S^{[2]} + F_{\phi\phi}^{(1)}|_c \hat{\xi} \quad (\text{IV.231b})$$

Portanto a equação (IV.226) de $\hat{\omega}_S^{[2]}$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_S^{[2]} = \lambda_S^{[2]} \left[\hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\delta}_0 + \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_c \hat{\xi} \right] - \\ - 3 \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_c \hat{\xi} \hat{\delta}_S^{[2]} + \frac{1}{2} \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}^{(1)}|_c \hat{\xi} \hat{\xi} \end{aligned} \quad (\text{IV.232})$$

Note-se que o termo entre colchetes coincide com a definição (IV.95b) do coeficiente A_2 , resultando:

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = \lambda_S^{[2]} A_2 - 3 \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} \hat{\delta}_S^{[2]} + \frac{1}{2} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}^{(1)}|_C \hat{\xi} \hat{\xi} \quad (\text{IV.233})$$

Por outro lado, o coeficiente $C_S^{[2]}$ para o caminho secundário ($\phi_S^{[1]} = \hat{\xi}$, $\lambda_S^{[1]} = 0$) é, das equações (IV.96), (IV.94) e (IV.91);

$$C_S^{[2]} = \frac{1}{6} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}^{(1)}|_C \hat{\xi} \hat{\xi} - \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} \hat{\delta}_S^{[2]} \quad (\text{IV.234})$$

portanto $\hat{\omega}_S^{[2]}$ pode ser expresso como:

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = \lambda_S^{[2]} A_2 + 3 C_S^{[2]} \quad (\text{IV.235})$$

Da equação (IV.194) tem-se:

$$C_S^{[2]} = - \lambda_S^{[2]} A_2 \quad (\text{IV.236})$$

e fazendo a substituição na expressão (IV.235) de $\hat{\omega}_S^{[2]}$ resulta:

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = - 2 \lambda_S^{[2]} A_2 \quad (\text{IV.237})$$

Da equação (IV.207), para o caminho fundamental ($\lambda_F^{[1]} \neq 0$) de uma bifurcação simétrica ($A_1 = 0$), tem-se:

$$A_2 = \frac{\omega_F^{[1]}}{\lambda_F^{[1]}} \quad (\text{IV.238})$$

portanto

$$\hat{\omega}_S^{[2]} = - \frac{2 \lambda_S^{[2]}}{\lambda_F^{[1]}} \hat{\omega}_F^{[1]} \quad (\text{IV.239})$$

Note-se que se é adotado o comprimento de arco como parâmetro dos caminhos, então da definição (IV.24) do vetor curvatura, tem-se:

$$2 \lambda_S^{[2]} = \lambda_S^{(2)} \Big|_C \quad (\text{IV.240})$$

que é a componente do vetor curvatura segundo o eixo λ do caminho secundário, assumindo que esta componente seja diferente de zero, implica que o coeficiente $\hat{\omega}_S^{[2]}$ é diferente de zero. Portanto, num entorno infinitesimal do ponto de bifurcação simétrica, o autovalor crítico varia quadraticamente sobre o caminho secundário, não mudando de sinal.

Para sistemas conservativos exibindo uma bifurcação simétrica, e adotando sentido positivo de avanço na direção de cargas crescentes para o caminho fundamental ($\lambda_F^{[1]} > 0$), a equação (IV.239) indica que se o caminho fundamental perde estabilidade para valores de carga crescentes ($\hat{\omega}_F^{[1]} < 0$), então o caminho secundário ganha estabilidade ($\hat{\omega}_S^{[2]} > 0$) se $\lambda_S^{[2]} > 0$, isto é, se o vetor curvatura apresenta componente positiva segundo o eixo λ , ou perde estabilidade ($\hat{\omega}_S^{[2]} < 0$) se $\lambda_S^{[2]} < 0$, quando o vetor curvatura apresenta componente negativa segundo o eixo λ .

CAPITULO V

PARTICULARIZAÇÃO A SISTEMAS ESTRUTURAIS DISCRETIZADOS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a formulação matricial das equações desenvolvidas no capítulo anterior quando aplicadas a sistemas estruturais discretizados. É feito em cada caso uma análise particular para reduzir o número necessário de operações para o cálculo dos elementos das matrizes e vetores.

V.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Para sistemas estruturais com descrição Lagrangeana e na ausência de forças não-conservativas, as equações de equilíbrio destes sistemas são expressas pelas derivadas primeiras da energia potencial total em relação às coordenadas generalizadas, equação (III.167), como:

$$F_i = U_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} U_{ijk} \phi_j \phi_k + \frac{1}{6} U_{ijkl} \phi_j \phi_k \phi_l - \lambda p_i = 0 \quad (V.1)$$

onde U_{ij} , U_{ijk} , U_{ijkl} são tensores simétricos que dependem das funções de interpolação usadas para os deslocamentos.

Os elementos da matriz de rigidez tangente K_T^E numa configuração E , são fornecidos pelas derivadas primeiras das equações de equilíbrio F_i em relação a ϕ_j calculadas no ponto E , equação (IV.49), como:

$$K_T^E = \left[\left. F_{i,j} \right|_E \right] \quad (V.2)$$

Derivando-se a expressão (V.1) em relação à coordenada generalizada ϕ_j , e assumindo que o vetor p independa destas coordenadas, tem-se:

$$F_{i,j} = U_{ij} + U_{ijk} \phi_k + \frac{1}{2} U_{ijkl} \phi_k \phi_l \quad (V.3)$$

Portanto a matriz de rigidez tangente no ponto E é:

$$K_T^E = \left[\left. U_{ij} + U_{ijk} \phi_k^E + \frac{1}{2} U_{ijkl} \phi_k^E \phi_l^E \right] \right] \quad (V.4)$$

onde ϕ^E são as coordenadas generalizadas na configuração E . Note-se que esta matriz é sempre simétrica por ser o sistema conservativo.

Definindo as matrizes K_0 , $K_1(a)$, $K_2(a,b)$ como:

$$K_0 = [U_{ij}] \quad (V.5a)$$

$$K_1(a) = [[U_{ijk} a_k]] \quad (V.5b)$$

$$K_2(a,b) = [[U_{ijkl} a_k b_l]] \quad (V.5c)$$

que pela simetria dos tensores U_{ij} , U_{ijk} , U_{ijkl} possuem as seguintes propriedades [18] :

(i) *simetria*

$$K_0 = K_0^T \quad (V.6a)$$

$$K_1(a) = K_1(a)^T \quad (V.6b)$$

$$K_2(a,b) = K_2(a,b)^T \quad (V.6c)$$

(ii) *distributividade dos argumentos*

$$K_1(a+b) = K_1(a) + K_1(b) \quad (V.7a)$$

$$K_2(a+b,c) = K_2(a,c) + K_2(b,c) \quad (V.7b)$$

(iii) *comutatividade dos argumentos*

$$K_2(a,b) = K_2(b,a) \quad (V.8)$$

(iv) *comutatividade na multiplicação por escalar*

$$\alpha K_1(a) = K_1(\alpha a) \quad (V.9a)$$

$$\alpha K_2(a, b) = K_2(\alpha a, b) = K_2(a, \alpha b) \quad (V.9b)$$

(v) *comutatividade na multiplicação por vetores*

$$K_1(a) b = K_1(b) a \quad (V.10a)$$

$$K_2(a, b) c = K_2(a, c) b = K_2(c, b) a \quad (V.10b)$$

onde a, b, c são vetores e α é um escalar.

Então a matriz de rigidez tangente no ponto ϵ pode ser expressa como:

$$\boxed{K_T^E = K_0 + K_1(\phi^E) + \frac{1}{2} K_2(\phi^E, \phi^E)} \quad (V.11)$$

Note-se que as componentes f_1^E do vetor de forças internas f^E na configuração ϵ , é da equação (III.168):

$$f_1^E = U_{1j} \phi_j^E + \frac{1}{2} U_{1jk} \phi_j^E \phi_k^E + \frac{1}{6} U_{1jkl} \phi_j^E \phi_k^E \phi_l^E \quad (V.12)$$

portanto, usando as definições das matrizes K_1, K_2 , estes vetores podem ser escritos como:

$$\boxed{f^E = \left[K_0 + \frac{1}{2} K_1(\phi^E) + \frac{1}{6} K_2(\phi^E, \phi^E) \right] \phi^E} \quad (V.13)$$

onde a matriz entre colchetes é usualmente chamada *matriz de rigidez secante* K_s^E :

$$K_s^E = K_0 + \frac{1}{2} K_1(\phi^E) + \frac{1}{6} K_2(\phi^E, \phi^E) \quad (V.14)$$

V.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE DE m-ÉSIMA ORDEM

Da equação (IV.58) tem-se que as matrizes de rigidez tangente de m-ésima ordem num ponto E são:

$$\mathbf{K}_T^{[m]} = \frac{1}{m!} \mathbf{F} \phi^{(m)} \Big|_E = \frac{1}{m!} \left[\mathbf{F}_{i,j}^{(m)} \Big|_E \right] \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{V.15})$$

Derivando a expressão (V.3) em relação ao parâmetro do caminho tem-se:

$$\mathbf{F}_{i,j}^{(m)} = U_{ijk} \phi_k^{(m)} + \frac{1}{2} U_{ijkl} (\phi_k \phi_l)^{(m)} \quad (\text{V.16})$$

Em particular adotando-se o ponto E em correspondência com a origem do parâmetro do caminho, as derivadas $\phi^{(m)}$ podem ser expressas, da equação (IV.19a), como:

$$\phi_j^{(m)} \Big|_E = m! \phi_j^{[m]} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{V.17})$$

As derivadas paramétricas $(\phi_k \phi_l)^{(m)}$ são [Apêndice B]:

$$(\phi_k \phi_l)^{(m)} = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \phi_k^{(p)} \phi_l^{(m-p)} \quad (\text{V.18})$$

que em particular no ponto E, fazendo a substituição da expressão (V.17) para as derivadas $\phi^{(m)}$ nesse ponto, tem-se:

$$(\phi_k \phi_l)^{(m)} \Big|_E = m! \sum_{p=0}^m \phi_k^{[p]} \phi_l^{[m-p]} \quad (\text{V.19})$$

Portanto as matrizes de rigidez tangente de m-ésima ordem podem ser escritas como:

$$\mathbf{K}_T^{[m]} = \left[\left[U_{ijk} \phi_k^{[m]} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^m U_{ijkl} \phi_k^{[p]} \phi_l^{[m-p]} \right] \right] \quad (\text{V.20})$$

e levando em conta a definição das matrizes $K_1(a)$, $K_2(a,b)$ das equações (V.5b,c), tem-se:

$$\mathbf{K}_T^{[m]} = \mathbf{K}_1(\phi^{[m]}) + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^m \mathbf{K}_2(\phi^{[p]}, \phi^{[m-p]}) \quad (\text{V.21})$$

Note-se que as matrizes $\mathbf{K}_T^{[m]}$ são simétricas pois as matrizes K_1 , K_2 são simétricas.

V.3 - VETOR DE FORÇAS GEOMÉTRICAS DE m-ÉSIMA ORDEM

O vetor de forças geométricas de m-ésima ordem é da equação (IV.62):

$$\mathbf{g}^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \left[\mathbf{K}_T^{[p]} \phi^{[m-p]} - \lambda^{[m-p]} \mathbf{p}^{[p]} \right] \quad (\text{V.22})$$

Assumindo que o vetor de forças generalizadas de referência \mathbf{p} seja constante, isto é, independente de ϕ , λ , então:

$$\mathbf{p}^{(p)} = \mathbf{p}^{[p]} = 0 \quad (\text{V.23})$$

portanto o vetor de forças geométricas fica:

$$\mathbf{g}^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \left[\mathbf{K}_T^{[p]} \phi^{[m-p]} \right] \quad (\text{V.24})$$

e levando em conta a definição (V.21) das matrizes de rigidez tangente de m-ésima ordem tem-se:

$$\mathbf{g}^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \left[\mathbf{K}_1(\phi^{[p]}) \phi^{[m-p]} + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^p \mathbf{K}_2(\phi^{[q]}, \phi^{[p-q]}) \phi^{[m-p]} \right] \quad (\text{V.25})$$

Definindo os vetores $\mathbf{g}^{[m][p]}$, $\mathbf{g}^{[m][p][q]}$ como:

$$\mathbf{g}^{[m][p]} = \mathbf{K}_1(\phi^{[m]}) \phi^{[p]} \quad (\text{V.26a})$$

$$\mathbf{g}^{[m][p][q]} = \mathbf{K}_2(\phi^{[m]}, \phi^{[p]}) \phi^{[q]} \quad (\text{V.26b})$$

onde, devido à propriedade de comutatividade na multiplicação por vetores das matrizes $\mathbf{K}_1(\phi)$, $\mathbf{K}_2(\phi, \phi)$, os índices entre colchetes destes vetores são comutativos, isto é:

$$\mathbf{g}^{[m][p]} = \mathbf{g}^{[p][m]} \quad (\text{V.27a})$$

$$\mathbf{g}^{[m][p][q]} = \mathbf{g}^{[p][q][m]} = \mathbf{g}^{[q][m][p]} = \mathbf{g}^{[m][q][p]} = \mathbf{g}^{[q][p][m]} = \mathbf{g}^{[p][m][q]} \quad (\text{V.27b})$$

e definindo os vetores $\mathbf{g}_1^{[m]}$, $\mathbf{g}_2^{[m]}$ como:

$$\mathbf{g}_1^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p]} \quad (\text{V.28a})$$

$$\mathbf{g}_2^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=0}^p \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[q][p-q][m-p]} \quad (\text{V.28b})$$

Então os vetores de forças geométricas $\mathbf{g}^{[m]}$ podem ser expressos como:

$$\mathbf{g}^{[m]} = \mathbf{g}_1^{[m]} + \frac{1}{2} \mathbf{g}_2^{[m]} \quad (\text{V.29})$$

Note-se que pela propriedade (V.27a) de comutatividade dos índices dos vetores $\mathbf{g}^{[m][p]}$, o vetor $\mathbf{g}_1^{[m]}$ pode ser expresso como :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^{[m]} &= \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p]} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p]} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p]} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p+p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p]} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m-1} \mathbf{g}^{[p][m-p]} \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

Observe-se que pelas mesmas propriedades de comutatividade o somatório possui termos que se repetem duas vezes quando $p \neq m-p$, e nenhuma vez se $p = m-p$. Portanto para evitar somas de termos repetidos é conveniente somar os vetores $\mathbf{g}^{[p][m-p]}$ na ordem crescente dos valores entre colchetes de esquerda à direita, isto é, adotando $p \leq m-p$ que implica $p \leq m/2$, e multiplicar cada termo por um fator de multiplicidade como:

$$\mathbf{g}_1^{[m]} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\text{int}(m/2)} \text{mul} \mathbf{g}^{[p][m-p]} \quad (\text{V.31})$$

onde $\text{int}(a)$ simboliza a parte inteira do número a , e mul é um fator de multiplicidade que leva em conta as repetições de cada termo que vale:

$$\text{mul} = \begin{cases} 2 & \text{se } p \neq m-p \\ 1 & \text{se } p = m-p \end{cases} \quad (\text{V.32})$$

Esta forma de expressar o vetor $\mathbf{g}_1^{[m]}$ é adequada para se implementar computacionalmente, pois a maioria das linguagem de programação possuem o operador de divisão inteira que retorna o menor inteiro resultante de um quociente de números inteiros.

Assim $\mathbf{g}_1^{[m]}$ pode ser calculado pelo seguinte algoritmo escrito em pseudo-código:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } p=1 \text{ até } \text{int}(m/2) \\ \quad \text{mul} = 2 \\ \quad \text{se } (m=2*p) \text{ então } \text{mul}=1 \\ \quad \mathbf{g}_1^{[m]} = \mathbf{g}_1^{[m]} + \text{mul}/2 * \mathbf{g}^{[p][m-p]} \\ \text{seguinte } p \end{array} \right. \quad (\text{V.33})$$

Note-se da equação (V.28b) que no duplo somatório do vetor $\mathbf{g}_2^{[m]}$ existem termos $\mathbf{g}^{[q][p-q][m-p]}$ com valores zero entre colchetes. Observando que $m-p$ é sempre diferente de zero, pois $p < m$, então os termos com um valor nulo entre colchetes ocorrem quando $q = 0$ ou $p-q = 0$. Um valor nulo entre colchetes está associado ao vetor $\phi^{[0]}$ que contém as coordenadas da origem do caminho de equilíbrio, se este ponto coincide com a origem do sistema de coordenadas generalizadas tem-se $\phi^{[0]} = 0$, e conseqüentemente isto implica, pela definição (V.26b), que se algum índice dos vetores $\mathbf{g}^{[m][p][q]}$ é zero então estes vetores devem ser nulos.

Portanto é conveniente separar no duplo somatório (V.28b) os termos com valores nulos entre colchetes, expressando $\mathbf{g}_2^{[m]}$ como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ \quad \mathbf{g}_2^{[m]} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{[0][1][1]} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{[1][0][1]} \end{array} \right. \quad (\text{V.34a})$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>2 \\ \quad \mathbf{g}_2^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[0][p][m-p]} + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[p][0][m-p]} + \\ \quad \quad \quad \sum_{p=2}^{m-1} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[q][p-q][m-p]} \end{array} \right. \quad (\text{V.34b})$$

levando em conta as propriedades de comutatividade (V.27b) dos índices dos vetores $\mathbf{g}^{[m][p][q]}$, e fazendo uma transformação dos extremos do duplo somatório, o vetor $\mathbf{g}_2^{[m]}$ pode ser expresso como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ \\ \text{para } m>2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{g}_2^{[2]} = \mathbf{g}^{[0][1][1]} \\ \\ \mathbf{g}_2^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \mathbf{g}^{[0][p][m-p]} + \sum_{p=1}^{m-2} \sum_{q=1}^{m-p-1} \frac{p}{m} \mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]} \end{array} \quad \begin{array}{l} (V.35a) \\ \\ (V.35b) \end{array}$$

Note-se que pelas propriedades de comutatividade dos índices o primeiro somatório na equação (V.35b) possui termos $\mathbf{g}^{[0][p][m-p]}$ que se repetem duas vezes quando $p \neq m-p$ e nenhuma quando $p = m-p$. Portanto para evitar somas de termos repetidos é conveniente somar os termos $\mathbf{g}^{[0][p][m-p]}$ na ordem crescente dos valores entre colchetes de esquerda a direita, isto é, adotando $p \leq m-p$ que implica $p \leq m/2$, e multiplicar cada vetor $\mathbf{g}^{[0][p][m-p]}$ por um fator de multiplicidade.

Analogamente, o duplo somatório possui seis termos com o mesmo vetor $\mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]}$ se os colchetes são todos diferentes, isto é para $p \neq q \neq m-p-q \neq p$. A soma destes seis termos é:

$$\begin{aligned} & \frac{p}{m} \mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]} + \frac{p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p-q][q]} + \frac{q}{m} \mathbf{g}^{[q][p][m-p-q]} + \\ & \frac{q}{m} \mathbf{g}^{[q][m-p-q][p]} + \frac{m-p-q}{m} \mathbf{g}^{[m-p-q][p][q]} + \frac{m-p-q}{m} \mathbf{g}^{[m-p-q][q][p]} \end{aligned} \quad (V.36)$$

Fatorizando o vetor $\mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]}$ tem-se:

$$2 \frac{(p+q+m-p-q)}{m} \mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]} = 2 \mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]} \quad (V.37)$$

Quando dois colchetes são iguais o duplo somatório apresenta três termos com o mesmo vetor $\mathbf{g}^{[p][q][m-p-q]}$, estes termos ocorrem quando $p = q \neq m-p-q$ ou $p = m-p-q \neq q$ ou $p \neq q = m-p-q$. A soma destes três termos, por exemplo para $p = q \neq m-p-q$, é:

$$\frac{p}{m} g^{[p][p][m-2p]} + \frac{p}{m} g^{[p][m-2p][p]} + \frac{m-2p}{m} g^{[m-2p][p][p]} \quad (V.38)$$

Fatorizando o vetor $g^{[p][p][m-p-q]}$ tem-se:

$$\frac{(p + p + m-2p)}{m} g^{[p][p][m-p-q]} = g^{[p][q][m-p-q]} \quad (V.39)$$

Quando os três colchetes são iguais, isto é para $p = q = m-p-q = m/3$, apenas tem-se um termo que ocorre unicamente se m é múltiplo de três que vale:

$$\frac{m/3}{m} g^{[m/3][m/3][m/3]} = \frac{1}{3} g^{[m][m][m]} \quad (V.40)$$

Portanto, para evitar somas de termos com o mesmo vetor $g^{[p][q][m-p-q]}$, é conveniente somar estes termos na ordem crescente dos valores entre colchetes de esquerda a direita, isto é, adotando $p \leq q \leq m-p-q$ que implica $p \leq m/3$, $q \leq (m-p)/2$, e multiplicar cada vetor $g^{[p][q][m-p-q]}$ por um fator de multiplicidade.

Então o vetor $g_2^{[m]}$ pode ser expresso como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ g_2^{[2]} = g^{[0][1][1]} \end{array} \right. \quad (V.41a)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m>2 \\ g_2^{[m]} = \sum_{p=1}^{\text{int}(m/2)} \text{mul1} g^{[0][p][m-p]} + \\ \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{\text{int}(m/3)} \sum_{q=1}^{\text{int}((m-p)/2)} \text{mul2} g^{[p][q][m-p-q]} \end{array} \right. \quad (V.41b)$$

onde os fatores de multiplicidade $mul1$, $mul2$ são:

$$mul1 = \begin{cases} 2 & \text{se } p \neq m-p \\ 1 & \text{se } p = m-p \end{cases} \quad (\text{V.42a})$$

$$mul2 = \begin{cases} 6 & \text{se } p \neq q \neq m-p-q \\ 3 & \text{se } p = q \text{ ou } q = m-p-q \\ 1 & \text{se } p = q = m-p-q \end{cases} \quad (\text{V.42b})$$

Portanto o vetor $g_2^{[m]}$ pode ser calculado pelo seguinte algoritmo escrito em pseudo código:

```

[ se ( $\phi^{[0]}=0$ ) então
  [ para p=1 até int(m/2)
    mul = 2
    se (m=2*p) então mul=1
     $g_2^{[m]} = g_2^{[m]} + mul * g^{[0][p][m-p]}$ 
    seguinte p
  fim se
[ se (m>2) então
  [ para p=1 até int(m/3)
    [ para q=p até int((m-p)/2)
      mul = 6
      se ((p=q) ou (m=2*q+p)) então mul=3
      se (m=3*p) então mul=1
       $g_2^{[m]} = g_2^{[m]} + mul/3 * g^{[p][q][m-p-q]}$ 
      seguinte q
    seguinte p
  fim se
]

```

(V.43)

Estes algoritmos permitem uma redução aproximada de 50% e 87% do esforço computacional necessário para calcular os vetores $g_1^{[m]}$ e $g_2^{[m]}$, respectivamente, em comparação com as expressões (V.28) dos somatórios completos.

V.4 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PÓS-CRÍTICAS

As equações de equilíbrio pós-críticas (IV.98) são funções dos coeficientes A_1 , A_2 , A_3 e $C^{[m]}$. Os coeficientes A_i são fornecidos pelas equações (IV.95) como:

$$A_1 = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} \hat{\xi} \quad (V.44a)$$

$$A_2 = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} \hat{\delta}_0 + \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_C \hat{\xi} \quad (V.44b)$$

$$A_3 = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_C \hat{\delta}_0 \hat{\delta}_0 + 2 \hat{\xi}^T F_{\phi\lambda}|_C \hat{\delta}_0 + \hat{\xi}^T F_{\lambda\lambda}|_C \quad (V.44c)$$

Para sistemas estruturais conservativos aqui considerados as equações de equilíbrio são fornecidas pelas equações (V.1) que são lineares no parâmetro de carga λ , portanto tem-se:

$$F_{\phi\lambda} = 0 \quad (V.45a)$$

$$F_{\lambda\lambda} = 0 \quad (V.45b)$$

e os elementos $F_{1,jk}$ do tensor de terceira ordem $F_{\phi\phi}$ são obtidos derivando as equações (V.3) em relação às coordenadas generalizadas ϕ_k como:

$$F_{1,jk} = U_{1jk} + U_{1jkl} \phi_l \quad (V.46)$$

Definindo a matriz $K_{\phi}^c(\hat{\xi})$ como:

$$K_{\phi}^c(\hat{\xi}) = F_{\phi\phi}|_C \hat{\xi} = \left[F_{1,jk}|_C \hat{\xi}_k \right] = \left[U_{1jk} \hat{\xi}_k + U_{1jkl} \phi_l^c \hat{\xi}_k \right] \quad (V.47)$$

e utilizando as definições (V.5b,c) das matrizes $K_1(\phi)$, $K_2(\phi, \phi)$, pode ser expressa como:

$$K_{\phi}^c = K_1(\hat{\xi}) + K_2(\phi^c, \hat{\xi}) \quad (V.48)$$

Note-se que esta matriz é simétrica pois as matrizes \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 são simétricas.

Portanto os coeficientes A_i são:

$$A_1 = \hat{\xi}^T \mathbf{K}_\phi^c(\hat{\xi}) \hat{\xi} \quad (\text{V.49a})$$

$$A_2 = \hat{\xi}^T \mathbf{K}_\phi^c(\hat{\xi}) \hat{\delta}_0 \quad (\text{V.49b})$$

$$A_3 = \hat{\delta}_0^T \mathbf{K}_\phi^c(\hat{\xi}) \hat{\delta}_0 \quad (\text{V.49c})$$

Os coeficientes $C^{[m]}$ são da equação (IV.96):

$$C^{[m]} = C_1^{[m]} - C_2^{[m]} \quad (\text{V.50})$$

onde das equações (IV.91), e levando em conta que $F_{\phi\lambda} = 0$, $F_{\lambda\lambda} = 0$, tem-se que os coeficientes $C_1^{[m]}$ valem:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ C_1^{[2]} = \frac{1}{6} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}^{(1)} \Big|_c \phi^{[1]} \phi^{[1]} \quad (\text{V.51a}) \\ \\ \text{para } m>2 \\ C_1^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{m-p+1}{m+1} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi} \Big|_c \phi^{[p]} \phi^{[m-p+1]} + \\ \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p+1)(p-q)}{(m+1)pq!} \hat{\xi}^T \mathbf{F}_{\phi\phi}^{(q)} \Big|_c \phi^{[m-p+1]} \phi^{[p-q]} \quad (\text{V.51b}) \end{array} \right.$$

Os elementos $F_{i,jk}^{(q)}$ da hipermatriz $\mathbf{F}_{\phi\phi}^{(q)}$ são obtidos derivando a expressão (V.46) em relação ao parâmetro do caminho como:

$$F_{i,jk}^{(q)} = U_{ijkl} \phi_l^{(q)} \quad (\text{V.52})$$

Em particular adotando a origem do parâmetro do caminho no ponto crítico c ,

tem-se:

$$\phi_i^{(q)}|_C = q! \phi_i^{[q]} \quad (\text{sem soma em } m) \quad (\text{V.53})$$

resultando

$$F_{i,jk}^{(q)}|_C = q! U_{ijkl} \phi_i^{[q]} \quad (\text{V.54})$$

e utilizando as definições das matrizes $K_\phi^C(\hat{\xi})$, $K_2(\phi, \phi)$, os coeficientes $C_1^{[m]}$ podem ser expressos como:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ C_1^{[2]} = \frac{1}{6} \hat{\xi}^T K_2(\phi^{[1]}, \phi^{[1]}) \phi^{[1]} \\ \\ \text{para } m>2 \\ C_1^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{m-p+1}{m+1} \phi^{[p]} K_\phi^C(\hat{\xi}) \phi^{[m-p+1]} + \\ \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p+1)(p-q)}{(m+1)p} \hat{\xi}^T K_2(\phi^{[m-p+1]}, \phi^{[p-q]}) \phi^{[q]} \end{array} \right. \quad (\text{V.55a})$$

$$\quad \quad \quad (\text{V.55b})$$

Definindo os coeficientes $C^{[m][p]}$, $C^{[m][p][q]}$ como:

$$C^{[m][p]} = \phi^{[m]T} K_\phi^C(\hat{\xi}) \phi^{[p]} \quad (\text{V.56a})$$

$$C^{[m][p][q]} = \hat{\xi}^T K_2(\phi^{[m]}, \phi^{[p]}) \phi^{[q]} = \hat{\xi}^T g^{[m][p][q]} \quad (\text{V.56b})$$

onde devido à propriedade de comutatividade na multiplicação por vetores da matriz $K_2(\phi, \phi)$ e a simetria da matriz K_ϕ^C , os índices entre colchetes destes

coeficientes são comutativos, isto é:

$$C^{[m][p]} = C^{[p][m]} \quad (V.57a)$$

$$C^{[m][p][q]} = C^{[p][q][m]} = C^{[q][m][p]} = C^{[m][q][p]} = C^{[q][p][m]} = C^{[p][m][q]} \quad (V.57b)$$

e definindo os coeficientes $C_3^{[m]}$, $C_4^{[m]}$ como:

$$C_3^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{m-p+1}{m+1} C^{[p][m-p+1]} \quad , \quad m > 2 \quad (V.58a)$$

$$C_4^{[m]} = \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p+1)(p-q)}{(m+1)p} C^{[m-p+1][p-q][q]} \quad (V.58b)$$

Então os coeficientes $C_1^{[m]}$ podem ser escritos como:

para $m=2$

$$C_1^{[2]} = C_4^{[2]} \quad (V.59a)$$

para $m > 2$

$$C_1^{[m]} = C_3^{[m]} + C_4^{[m]} \quad (V.59b)$$

Note-se que pelas propriedades (V.57) de comutatividade dos índices dos coeficientes $C^{[m][p]}$, $C^{[m][p][q]}$, os somatórios (V.58) possuem vários termos com coeficientes idênticos. Portanto, para evitar a soma de termos com o mesmo coeficiente é conveniente re-escrever os somatórios dos coeficientes $C_3^{[m]}$, $C_4^{[m]}$, usando o mesmo procedimento da seção anterior, como:

$$C_3^{[m]} = \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{\text{int}((m+1)/2)} \text{mul1} C^{[p][m-p+1]}, \quad m > 2 \quad (\text{V.60a})$$

$$C_4^{[m]} = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{\text{int}((m+1)/3)} \sum_{q=p}^{\text{int}((m-p+1)/2)} \text{mul2} C^{[p][q][m-p-q+1]} \quad (\text{V.60b})$$

onde os fatores de multiplicidade mul1 , mul2 são:

$$\text{mul1} = \begin{cases} 2 & \text{se } p \neq m-p+1 \\ 1 & \text{se } p = m-p+1 \end{cases} \quad (\text{V.61a})$$

$$\text{mul2} = \begin{cases} 6 & \text{se } p \neq q \neq m-p-q+1 \\ 3 & \text{se } p = q \text{ ou } q = m-p-q+1 \\ 1 & \text{se } p = q = m-p-q+1 \end{cases} \quad (\text{V.61b})$$

Portanto os coeficiente $C_3^{[m]}$ podem ser calculados pelo seguinte algoritmo escrito em pseudo código:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } p=2 \text{ até } \text{int}((m+1)/2) \\ \quad \text{mul1} = 2 \\ \quad \text{se } (m=2*p+1) \text{ então } \text{mul1}=1 \\ \quad C_3^{[m]} = C_3^{[m]} + \text{mul1}/2 * C^{[p][m-p+1]} \\ \text{seguinte } p \end{array} \right. \quad (\text{V.62})$$

e para os coeficientes $C_4^{[m]}$:

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{para } p=1 \text{ até } \text{Int}((m+1)/3) \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{para } q=p \text{ até } \text{Int}((m-p+1)/2) \\
 \text{mul2} = 6 \\
 \text{se } ((p=q) \text{ ou } (m=2*q+p-1)) \text{ então } \text{mul2}=3 \\
 \text{se } (m=3*p-1) \text{ então } \text{mul2}=1 \\
 C_4^{[m]} = C_4^{[m]} + \text{mul2}/6 * C_{[p][q][m-p-q+1]}^{[m]} \\
 \text{seguinte } q \\
 \text{seguinte } p
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (V.63)$$

Da equação (IV.94), e levando em conta que $F_{\phi\lambda} = 0$, tem-se que os coeficientes $C_2^{[m]}$ são:

$$C_2^{[m]} = \hat{\xi}^T F_{\phi\phi}|_C \phi^{[1]} \hat{\delta}^{[m]} \quad (V.64)$$

Usando a definição da matriz $K_{\phi}^C(\hat{\xi})$ estes coeficientes podem ser escritos como:

$$C_2^{[m]} = \phi^{[1]T} K_{\phi}^C(\hat{\xi}) \hat{\delta}^{[m]} \quad (V.65)$$

Portanto os coeficientes $C^{[m]}$ podem ser expressos como:

$$\begin{array}{l}
 \text{para } m=2 \\
 C^{[2]} = C_4^{[2]} - C_2^{[2]}
 \end{array} \quad (V.66a)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{para } m>2 \\
 C^{[m]} = C_3^{[m]} + C_4^{[m]} - C_2^{[m]}
 \end{array} \quad (V.66b)$$

CAPITULO VI

ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta o desenvolvimento de um elemento finito de pórtico plano baseado numa formulação Lagrangeana e para rotações moderadas. São particularizadas às matrizes e vetores definidos no capítulo anterior para este tipo de elemento.

VI.1 - DESCRIÇÃO DO ELEMENTO

Considere-se um elemento de pórtico plano de eixo reto e seção constante. Para identificar os deslocamentos é definido um sistema de coordenadas cartesianas x_1 fixo na configuração original indeformada do elemento. O eixo x_1 coincide com o eixo centroidal e os eixos x_2 , x_3 estão na direção dos eixos principais da seção, onde é assumido que um destes eixos está contido no plano da estrutura. O campo de deslocamentos está composto por: translação u na direção do eixo x_1 , translação v na direção do eixo x_2 e rotação θ na direção do eixo x_3 . Estes deslocamentos são interpolados dos deslocamentos nodais extremos.

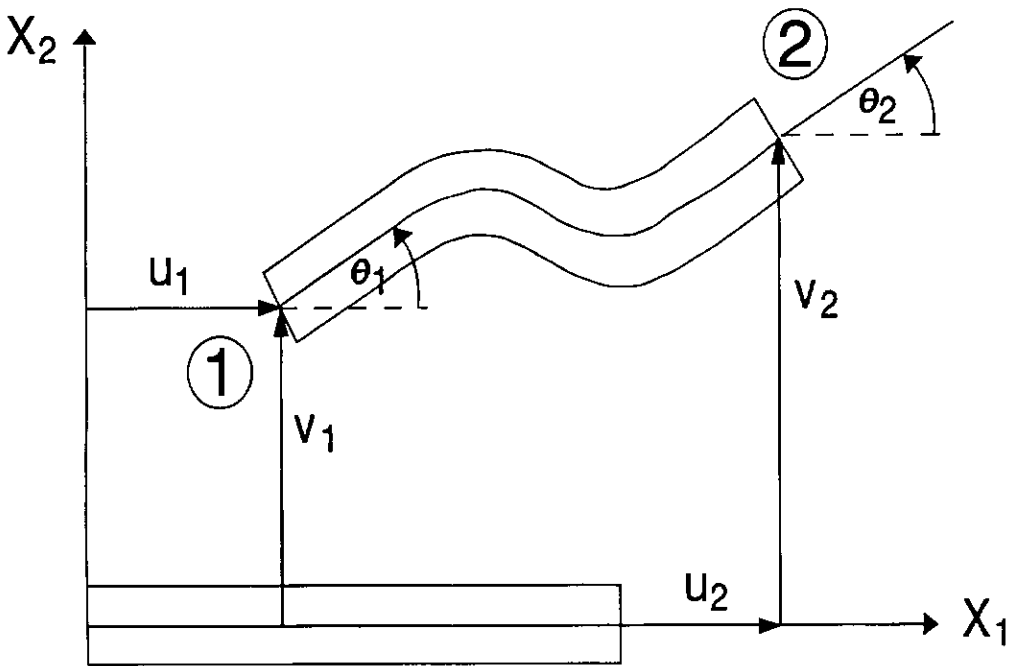


FIGURA VI.1 - Deslocamentos nodais do elemento de pórtico plano.

O elemento pode sofrer grandes deslocamentos, mas as rotações e deformações são assumidas pequenas. Portanto o area A da seção transversal e o comprimento L do elemento apresentam variações muito pequenas durante a deformação. Assume-se que as seções permanecem planas após a deformação e perpendiculares ao eixo do elemento, i.e., são desprezadas as deformações por esforços cisalhantes.

Sejam u_0, v_0 os deslocamentos de um ponto O do eixo centroidal, então pela hipótese das seções planas, os deslocamentos u, v de um ponto P contido na mesma seção do ponto O , podem ser expressos como:

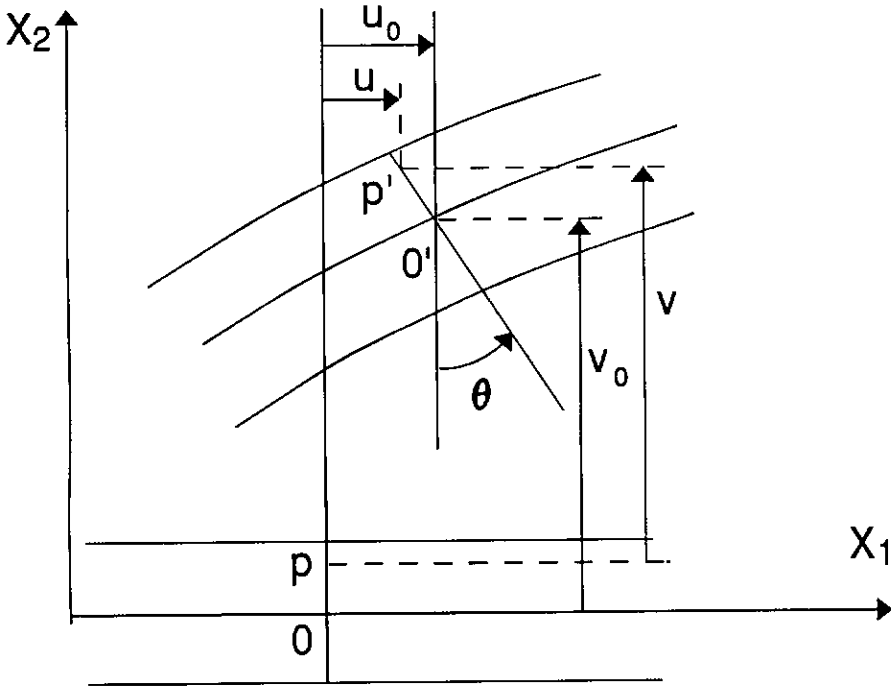


FIGURA VI.2 -Deslocamentos desde a configuração original.

$$u = u_0 - x_2 \operatorname{sen} \theta \quad (\text{VI.1a})$$

$$v = v_0 - x_2 (1 - \cos \theta) \quad (\text{VI.1b})$$

Pela hipótese de pequenas rotações pode-se assumir que $\theta \ll 1$ e portanto:

$$\cos \theta \cong 1 \quad (\text{VI.2a})$$

$$\operatorname{sen} \theta \cong \theta \cong \operatorname{tg} \theta \cong \frac{dv_0}{dx_1} \quad (\text{VI.2b})$$

Então u , v e θ podem ser aproximados como:

$$u = u_0 - x_2 \frac{dv_0}{dx_1} \quad (\text{VI.3a})$$

$$v = v_0 \quad (\text{VI.3b})$$

$$\theta = \frac{dv_0}{dx_1} \quad (\text{VI.3c})$$

onde os deslocamentos do eixo centroidal $u_0(x_1)$, $v_0(x_1)$ somente variam com a coordenada x_1 ao longo do comprimento do elemento.

VI.2 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO ELEMENTO

Assumindo que as únicas componentes não-nulas do tensor de tensões sejam S_{11} , S_{12} , (estado plano de tensões), a energia de deformação é, da equação (III.147):

$$U = \frac{1}{2} \int_{v_0} S_{11} E_{11} + S_{12} E_{12} dv_0 \quad (\text{VI.4})$$

e desprezando a parcela de energia devida às tensões cisalhantes S_{12} , tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_{v_0} S_{11} E_{11} dv_0 \quad (\text{VI.5})$$

Para pequenas deformações dentro do campo elástico, o tensor de tensões de Kirchhoff S_{ij} fica associado ao tensor de deformação de Green E_{ij} pelas mesmas equações constitutivas da elasticidade infinitesimal:

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (\text{VI.6})$$

onde as componentes do tensor constitutivo são:

$$C_{ijkl} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{VI.7})$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e δ_{ij} é o delta de Kronecker. Fazendo-se a substituição do tensor constitutivo na equação (VI.6), as componentes S_{11} , S_{22} e S_{33} do tensor de tensões de Kirchhoff são:

$$S_{11} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \frac{E}{2(1 + \nu)} E_{11} \quad (\text{VI.8a})$$

$$S_{22} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \frac{E}{2(1 + \nu)} E_{22} = 0 \quad (\text{VI.8b})$$

$$S_{33} = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \frac{E}{2(1 + \nu)} E_{33} = 0 \quad (\text{VI.8c})$$

Das equações (VI.8b), (VI.8c) resultam:

$$E_{22} = -\nu E_{11} \quad (\text{VI.9a})$$

$$E_{33} = -\nu E_{11} \quad (\text{VI.9b})$$

e fazendo-se a substituição de E_{22} , E_{33} na equação (VI.8a) tem-se:

$$S_{11} = E (E_{11}) \quad (\text{VI.10})$$

Portanto a energia de deformação fica:

$$U = \frac{E}{2} \int_{V_0} (E_{11})^2 dv_0 \quad (\text{VI.11})$$

Para pequenas rotações e deformações a componente E_{11} do tensor de Green pode ser aproximada pela teoria de rotações moderadas, equações (III.19a), como:

$$E_{11} \cong \epsilon_{11} + \frac{1}{2} (\omega_{12})^2 + \frac{1}{2} (\omega_{13})^2 \quad (\text{VI.12})$$

onde considerando apenas deslocamentos no plano da estrutura, as componentes ϵ_{11} , ω_{12} , ω_{13} dos tensores de deformação e rotação infinitesimal são, das equações (III.17):

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad (\text{VI.13a})$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right] \quad (\text{VI.13b})$$

$$\omega_{13} = 0 \quad (\text{VI.13c})$$

Portanto a componente E_{11} fica:

$$E_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{8} \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right]^2 \quad (\text{VI.14})$$

Fazendo a substituição de u , v das equações (VI.3) tem-se:

$$E_{11} = \frac{du_0}{dx_1} - x_2 \frac{d^2 v_0}{dx_1^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{dv_0}{dx_1} \right]^2 \quad (\text{VI.15})$$

e a energia de deformação fica:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left\{ \left[\frac{du_0}{dx_1} \right]^2 + \frac{du_0}{dx_1} \left[\frac{dv_0}{dx_1} \right]^2 - 2 x_2 \frac{du_0}{dx_1} \frac{d^2v_0}{dx_1^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{dv_0}{dx_1} \right]^4 + \right. \\ \left. (x_2)^2 \left[\frac{d^2v_0}{dx_1^2} \right]^2 - x_2 \left[\frac{dv_0}{dx_1} \right]^2 \frac{d^2v_0}{dx_1^2} \right\} dA dx_1 \quad (\text{VI.16})$$

onde A é a área da seção transversal e L é o comprimento do elemento.

Como os eixos x_2 , x_3 são eixos principais da seção tem-se:

$$\int_A x_2 dA = 0 \quad (\text{VI.17a})$$

$$\int_A (x_2)^2 dA = I \quad (\text{VI.17b})$$

onde I é o momento de inércia da seção em relação ao eixo x_3 . Portanto a energia de deformação fica:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ A \left[\frac{du_0}{dx_1} \right]^2 + A \frac{du_0}{dx_1} \left[\frac{dv_0}{dx_1} \right]^2 + \frac{A}{4} \left[\frac{dv_0}{dx_1} \right]^4 + I \left[\frac{d^2v_0}{dx_1^2} \right]^2 \right\} dx_1$$

(VI.18)

VI.3 - INTERPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Aproximando os deslocamentos centroidais u_0 , v_0 por funções de interpolação linear e cúbica, respectivamente, tem-se:

$$u_0 = (1 - \eta) u_1 + \eta u_2 \quad (\text{VI.19a})$$

$$v_0 = (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) v_1 + (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) \theta_1 L + \\ + (3\eta^2 - 2\eta^3) v_2 + (\eta^3 - \eta^2) \theta_2 L \quad (\text{VI.19b})$$

onde $\eta = x_1/L$ e $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$ são os deslocamentos nodais do elemento.

Derivando estas aproximações em relação a x_1 resultam:

$$\frac{du_0}{dx_1} = (u_2 - u_1)/L \quad (\text{VI.20a})$$

$$\frac{dv_0}{dx_1} = (6\eta^2 - 6\eta) (v_1 - v_2)/L + (1 - 4\eta + 3\eta^2) \theta_1 + (3\eta^2 - 2\eta) \theta_2 \quad (\text{VI.20b})$$

$$\frac{d^2v_0}{dx_1^2} = (12\eta - 6) (v_1 - v_2)/L^2 + (6\eta - 4) \theta_1/L + (6\eta - 2) \theta_2/L \quad (\text{VI.20c})$$

e substituindo na expressão (VI.18) e integrando ao longo do comprimento, a energia de deformação é:

$$U = EA \left[\frac{L}{280} (2\theta_1^4 - \theta_1^3 \theta_2 + \theta_1^2 \theta_2^2 - \theta_1 \theta_2^3 + 2\theta_2^4) + \right. \\ \left. + \frac{1}{280} (v_1 - v_2) (-\theta_1^3 + 3\theta_1^2 \theta_2 + 3\theta_1 \theta_2^2 - \theta_2^3) + \right. \\ \left. + \frac{1}{30} (u_2 - u_1) (2\theta_1^2 - \theta_1 \theta_2 + 2\theta_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{10 L} (u_2 - u_1) (v_1 - v_2) (\theta_1 + \theta_2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{5} L^2 (u_2 - u_1) (v_1 - v_2)^2 + \frac{9}{35} L^3 (v_1 - v_2)^4 + \\
& + \frac{9}{70} L^2 (v_1 - v_2)^3 (\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2} L (u_2 - u_1)^2 + \\
& + \frac{9}{140} L (v_1 - v_2)^2 (\theta_1^2 + \theta_2^2) \Big] + \\
& + EI \left[\frac{6}{L^3} (v_1 - v_2)^2 + \frac{6}{L^2} (v_1 - v_2) (\theta_1 + \theta_2) + \frac{2}{L} (\theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2) \right]
\end{aligned}
\tag{VI.21}$$

Ordenando os deslocamentos nodais num vetor ϕ de coordenadas generalizadas do elemento como:

$$\phi^T = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2\} = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6\}
\tag{VI.22}$$

cada componente ϕ_i fica associada a um deslocamento nodal na ordem mostrada acima. Logo, é possível expressar a energia de deformação como:

$$U = U_2 + U_3 + U_4
\tag{VI.23}$$

onde as parcelas U_n contém apenas termos de grau n nas coordenadas generalizadas ϕ_i e são:

(i) *termos quadráticos* U_2

$$\begin{aligned}
U_2 = \frac{EA}{2L} (\phi_1^2 - 2 \phi_1 \phi_4 + \phi_4^2) + EI \left[\frac{6}{L^3} (\phi_2^2 - 2 \phi_2 \phi_5 + \phi_5^2) + \right. \\
\left. + \frac{6}{L^2} (\phi_2 \phi_3 + \phi_2 \phi_6 - \phi_5 \phi_3 - \phi_5 \phi_6) + \frac{2}{L} (\phi_3^2 + \phi_3 \phi_6 + \phi_6^2) \right]
\end{aligned}
\tag{VI.24a}$$

(ii) *termos cúbicos* U_3

$$\begin{aligned}
 U_3 = EA \left[\frac{1}{30} (2 \phi_4 \phi_3^2 - \phi_4 \phi_3 \phi_6 + 2 \phi_4 \phi_6^2 - 2 \phi_1 \phi_3^2 + \phi_1 \phi_3 \phi_6 - \right. \\
 \left. - 2 \phi_1 \phi_6^2) + \frac{1}{10 L} (\phi_4 \phi_2 \phi_3 + \phi_4 \phi_2 \phi_6 - \phi_4 \phi_5 \phi_3 - \right. \\
 \left. - \phi_4 \phi_5 \phi_6 - \phi_1 \phi_2 \phi_3 - \phi_1 \phi_2 \phi_6 + \phi_1 \phi_5 \phi_3 + \phi_1 \phi_5 \phi_6) + \right. \\
 \left. + \frac{3}{5 L^2} (\phi_4 \phi_2^2 - 2 \phi_4 \phi_2 \phi_5 + \phi_4 \phi_5^2 - \phi_1 \phi_2^2 + 2 \phi_1 \phi_2 \phi_5 - \right. \\
 \left. - \phi_1 \phi_5^2) \right] \quad \text{(VI.24b)}
 \end{aligned}$$

(iii) *termos quárticos* U_4

$$\begin{aligned}
 U_4 = EA \left[\frac{L}{280} (2 \phi_3^4 - \phi_3^3 \phi_6 + \phi_3^2 \phi_6^2 - \phi_3 \phi_6^3 + 2 \phi_6^4) + \frac{1}{280} (\phi_5 \phi_3^3 - \right. \\
 \left. - 3 \phi_5 \phi_3^2 \phi_6 - 3 \phi_5 \phi_3 \phi_6^2 + \phi_5 \phi_6^3 - \phi_2 \phi_3^3 + 3 \phi_2 \phi_3^2 \phi_6 + \right. \\
 \left. + 3 \phi_2 \phi_3 \phi_6^2 - \phi_2 \phi_6^3) + \frac{9}{35 L^3} (\phi_2^4 - 4 \phi_2^3 \phi_5 + 6 \phi_2^2 \phi_5^2 - \right. \\
 \left. - 4 \phi_2 \phi_5^3 + \phi_5^4) + \frac{9}{70 L^2} (\phi_2^3 \phi_3 - 3 \phi_2^2 \phi_5 \phi_3 + 3 \phi_2 \phi_5^2 \phi_3 - \right. \\
 \left. + \phi_5^3 \phi_3 + \phi_2^3 \phi_6 - 3 \phi_2^2 \phi_5 \phi_6 + 3 \phi_2 \phi_5^2 \phi_6 - \phi_5^3 \phi_6) + \right. \\
 \left. + \frac{9}{140 L} (\phi_2^2 \phi_3^2 - 2 \phi_2 \phi_5 \phi_3^2 + \phi_5^2 \phi_3^2 + \phi_2^2 \phi_6^2 - 2 \phi_2 \phi_5 \phi_6^2 + \right. \\
 \left. + \phi_5^2 \phi_6^2) \right] \quad \text{(VI.24c)}
 \end{aligned}$$

VI.4 - MATRIZES K_0 , K_1 , K_2 DO ELEMENTO

Sejam ϕ^a , ϕ^b dois vetores de deslocamentos nodais do elemento, então as matrizes K_0 , $K_1(\phi^a)$, $K_2(\phi^a, \phi^b)$ são, das equações (V.5):

$$K_0 = \llbracket U_{ij} \rrbracket \quad (\text{VI.25a})$$

$$K_1(\phi^a) = \llbracket U_{ijk} \phi_k^a \rrbracket \quad (\text{VI.25b})$$

$$K_2(\phi^a, \phi^b) = \llbracket U_{ijkl} \phi_k^a \phi_l^b \rrbracket \quad (\text{VI.25c})$$

onde U_{ij} , U_{ijk} , U_{ijkl} são, respectivamente, as derivadas segundas, terceiras e quartas da energia de deformação U em relação as coordenadas generalizadas ϕ_i , avaliadas na origem ($\phi_i=0$):

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=0} \quad (\text{VI.26a})$$

$$U_{ijk} = \left. \frac{\partial^3 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \right|_{\phi=0} \quad (\text{VI.26b})$$

$$U_{ijkl} = \left. \frac{\partial^4 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k \partial \phi_l} \right|_{\phi=0} \quad (\text{VI.26c})$$

Derivando sucessivamente a energia de deformação, equação (VI.24), em relação às coordenadas ϕ_i , e calculando estas derivadas na origem $\phi_i = 0$, são obtidos os seguintes coeficientes de rigidez (o restante dos coeficientes que não podem ser obtidos com uma permutação de índices, dos mostrados a seguir, são nulos):

(i) *coeficientes de rigidez de segunda ordem* U_{ij}

$$U_{11} = -U_{14} = U_{44} = EA/L \quad (\text{VI.27a})$$

$$U_{22} = -U_{25} = U_{55} = 12 EI/L^3 \quad (\text{VI.27b})$$

$$U_{33} = U_{66} = 4 EI/L \quad (\text{VI.27d})$$

$$U_{36} = 2 EI/L \quad (\text{VI.27e})$$

(ii) *coeficientes de rigidez de terceira ordem* U_{ijk}

$$U_{334} = U_{466} = -U_{133} = -U_{166} = 2/15 EA \quad (\text{VI.28a})$$

$$U_{136} = -U_{346} = 1/30 EA \quad (\text{VI.28b})$$

$$\begin{aligned} U_{234} = U_{246} = -U_{345} = -U_{456} = -U_{123} = \\ = -U_{126} = U_{135} = U_{156} = 1/10 EA/L \end{aligned} \quad (\text{VI.28c})$$

$$U_{422} = -U_{425} = U_{455} = -U_{221} = U_{215} = -U_{155} = 6/5 EA/L^2 \quad (\text{VI.28d})$$

(iii) *coeficientes de rigidez de quarta ordem* U_{ijkl}

$$U_{3333} = U_{6666} = 6/35 EAL \quad (\text{VI.29a})$$

$$U_{3336} = U_{3666} = -3/140 EAL \quad (\text{VI.29b})$$

$$U_{3366} = 1/70 EAL \quad (\text{VI.29c})$$

$$\begin{aligned} U_{3335} = -U_{3356} = -U_{3566} = U_{5666} = -U_{2333} = \\ = U_{2336} = U_{2366} = -U_{2666} = 3/140 EA \end{aligned} \quad (\text{VI.29d})$$

$$U_{2222} = -U_{2225} = U_{2255} = -U_{2555} = U_{5555} = 216/35 EA/L^3 \quad (\text{VI.29e})$$

$$\begin{aligned}
 U_{2223} = -U_{2235} = U_{2355} = -U_{3555} = U_{2226} = \\
 = -U_{2256} = U_{2556} = -U_{5556} = 27/35 EA/L^2
 \end{aligned}
 \tag{VI.29f}$$

$$U_{2233} = -U_{2335} = U_{3355} = U_{2266} = -U_{2566} = U_{5566} = 9/35 EA/L
 \tag{VI.29g}$$

Portanto a matriz K_0 é:

$$K_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ & c_5 & c_4 & 0 & -c_5 & c_4 \\ & & c_3 & 0 & -c_4 & c_2 \\ & & & c_1 & 0 & 0 \\ & & & & c_5 & -c_4 \\ & & & & & c_3 \end{bmatrix}
 \tag{VI.30}$$

simétrica

onde

$$c_1 = EA/L
 \tag{VI.31a}$$

$$c_2 = 2 EI/L
 \tag{VI.31b}$$

$$c_3 = 4 EI/L
 \tag{VI.31c}$$

$$c_4 = 6 EI/L^2
 \tag{VI.31d}$$

$$c_5 = 12 EI/L^3
 \tag{VI.31e}$$

A matriz $K_1(\phi^a)$ é:

$$K_1(\phi^a) = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{11} & 0 & -c_{12} & c_{10} \\ & c_9 & c_8 & -c_{12} & -c_9 & c_8 \\ & & c_7 & -c_{11} & -c_8 & c_6 \\ & & & 0 & c_{12} & -c_{10} \\ & & & & c_9 & -c_8 \\ & & & & & c_7 \end{bmatrix} \quad \text{(VI.32)}$$

simétrica

onde

$$c_6 = 1/30 EA (\phi_1^a - \phi_4^a) \quad \text{(VI.33a)}$$

$$c_7 = 2/15 EA (\phi_4^a - \phi_1^a) \quad \text{(VI.33b)}$$

$$c_8 = 1/10 EA/L (\phi_4^a - \phi_1^a) \quad \text{(VI.33c)}$$

$$c_9 = 6/5 EA/L^2 (\phi_4^a - \phi_1^a) \quad \text{(VI.33d)}$$

$$c_{10} = 1/30 EA/L [3(\phi_5^a - \phi_2^a) + L(\phi_3^a - 4\phi_6^a)] \quad \text{(VI.33e)}$$

$$c_{11} = 1/30 EA/L [3(\phi_5^a - \phi_2^a) + L(\phi_6^a - 4\phi_3^a)] \quad \text{(VI.33f)}$$

$$c_{12} = 1/10 EA/L^2 [12(\phi_5^a - \phi_2^a) - L(\phi_3^a + \phi_6^a)] \quad \text{(VI.33g)}$$

A matriz $K_2(\phi^a, \phi^b)$ é:

$$K_2(\phi^a, \phi^b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{13} & c_{14} & 0 & -c_{13} & c_{15} \\ & & c_{16} & 0 & -c_{14} & c_{18} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & -c_{15} \\ \text{simétrica} & & & & & c_{17} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.34})$$

onde

$$c_{13} = 9/35 EA/L^3 \{ 24(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_2^b - \phi_5^b) + 3L [(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_3^b + \phi_6^b) + (\phi_2^b - \phi_5^b)(\phi_3^a + \phi_6^a)] + L^2 (\phi_3^a \phi_3^b + \phi_6^a \phi_6^b) \} \quad (\text{VI.35a})$$

$$c_{14} = 3/140 EA/L^2 \{ 36(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_2^b - \phi_5^b) + 12L [(\phi_2^a - \phi_5^a) \phi_3^b + (\phi_2^b - \phi_5^b) \phi_3^a] + L^2 [(\phi_6^a - \phi_3^a) \phi_3^b + (\phi_3^a + \phi_6^a) \phi_6^b] \} \quad (\text{VI.35b})$$

$$c_{15} = 3/140 EA/L^2 \{ 36(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_2^b - \phi_5^b) + 12L [(\phi_2^a - \phi_5^a) \phi_6^b + (\phi_2^b - \phi_5^b) \phi_6^a] + L^2 [(\phi_6^a - \phi_3^a) \phi_6^b + (\phi_3^a + \phi_6^a) \phi_3^b] \} \quad (\text{VI.35c})$$

$$c_{16} = 1/140 EA/L \{ 36(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_2^b - \phi_5^b) + 3L [(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_6^b - \phi_3^b) + (\phi_2^b - \phi_5^b)(\phi_6^a - \phi_3^a)] + L^2 [24 \phi_3^a \phi_3^b - 3(\phi_3^a \phi_6^b + \phi_6^a \phi_3^b) + 2 \phi_6^a \phi_6^b] \} \quad (\text{VI.35d})$$

$$\begin{aligned}
c_{17} = 1/140 \text{ EA/L} \{ & 36(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_2^b - \phi_5^b) - \\
& - 3 L [(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_6^b - \phi_3^b) + (\phi_2^b - \phi_5^b)(\phi_6^a - \phi_3^a)] + \\
& + L^2 [24 \phi_6^a \phi_6^b - 3(\phi_3^a \phi_6^b + \phi_6^a \phi_3^b) + 2 \phi_3^a \phi_3^b] \} \quad (\text{VI.35e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{18} = 1/140 \text{ EA/L} \{ & 3 [(\phi_2^a - \phi_5^a)(\phi_6^b + \phi_3^b) + (\phi_2^b - \phi_5^b)(\phi_6^a + \phi_3^a)] - \\
& - L [3(\phi_3^a \phi_3^b + \phi_6^a \phi_6^b) - 2(\phi_3^a \phi_6^b + \phi_3^a \phi_6^b)] \} \quad (\text{VI.35f})
\end{aligned}$$

No caso particular de $\phi^a = \phi^b = \phi$, tem-se:

$$\begin{aligned}
c_{13} = 9/35 \text{ EA/L}^3 [& 24(\phi_2 - \phi_5)^2 + \\
& + 6 L (\phi_2 - \phi_5)(\phi_3 + \phi_6) + L^2 (\phi_3^2 + \phi_6^2)] \quad (\text{VI.36a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{14} = 3/140 \text{ EA/L}^2 [& 36(\phi_2 - \phi_5)^2 + 24 L (\phi_2 - \phi_5) \phi_3 + \\
& + L^2 (\phi_6^2 + 2 \phi_3 \phi_3 - \phi_3^2)] \quad (\text{VI.36b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{15} = 3/140 \text{ EA/L}^2 [& 36(\phi_2 - \phi_5)^2 + 24 L (\phi_2 - \phi_5) \phi_3 + \\
& + L^2 (\phi_3^2 + 2 \phi_3 \phi_3 - \phi_6^2)] \quad (\text{VI.36c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{16} = 1/140 \text{ EA/L} [& 36(\phi_2 - \phi_5)^2 + 6 L (\phi_2 - \phi_5)(\phi_6 - \phi_3) + \\
& + L^2 (24 \phi_3^2 - 6 \phi_3 \phi_6 + 2 \phi_6^2)] \quad (\text{VI.36d})
\end{aligned}$$

$$c_{17} = 1/140 EA/L [36(\phi_2 - \phi_5)^2 - 6 L (\phi_2 - \phi_5)(\phi_6 - \phi_3) + \\ + L^2 (24 \phi_6^2 - 6 \phi_3 \phi_6 + 2 \phi_3^2)] \quad (VI.36e)$$

$$c_{18} = 1/140 EA [6 L (\phi_2 - \phi_5)(\phi_6 + \phi_3) - \\ - L^2 (3 \phi_6^2 - 4 \phi_3 \phi_6 + 3 \phi_3^2)] \quad (VI.36f)$$

VI.5 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Da equação (V.11) tem-se que a matriz de rigidez tangente num ponto de equilíbrio ε é:

$$\mathbf{K}_T^E = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\phi^E) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\phi^E, \phi^E) \quad (VI.37)$$

No caso particular que o ponto ε coincide com a origem das coordenadas generalizadas, i.e., $\phi = 0$, resulta:

$$\mathbf{K}_T^E = \mathbf{K}_0 \quad (VI.38)$$

e a matriz de rigidez tangente coincide com a matriz \mathbf{K}_0 , cujos elementos são obtidos das equações (VI.30), (VI.31). Em caso contrário a matriz de rigidez tangente é:

$$\mathbf{K}_T^E = \begin{bmatrix}
 c_1 & c_{12} & c_{11} & -c_1 & -c_{12} & c_{10} \\
 & c_{19} & c_{20} & -c_{12} & -c_{19} & c_{22} \\
 & & c_{21} & -c_{11} & -c_{20} & c_{23} \\
 & & & c_1 & c_{12} & -c_{10} \\
 & & & & c_{19} & -c_{22} \\
 & & & & & c_{24}
 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.39})$$

simétrica

onde

$$c_{19} = c_5 + c_9 + 1/2 c_{13} \quad (\text{VI.40a})$$

$$c_{20} = c_4 + c_8 + 1/2 c_{14} \quad (\text{VI.40b})$$

$$c_{21} = c_3 + c_7 + 1/2 c_{16} \quad (\text{VI.40c})$$

$$c_{22} = c_4 + c_8 + 1/2 c_{15} \quad (\text{VI.40d})$$

$$c_{23} = c_2 + c_6 + 1/2 c_{18} \quad (\text{VI.40e})$$

$$c_{24} = c_3 + c_7 + 1/2 c_{17} \quad (\text{VI.40f})$$

onde os coeficientes c_1 até c_5 são obtidos das equações (VI.31), os coeficientes c_6 até c_{12} são obtidos das equações (VI.33) com $\phi^a = \phi^E$, e os coeficientes c_{13} até c_{18} são obtidos das equações (VI.36) com $\phi = \phi^E$.

VI.6 - VETOR DE FORÇAS INTERNAS

Da equação (V.13) tem-se que o vetor de forças internas num ponto de equilíbrio E é:

$$\mathbf{f}^E = \left[\mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\phi^E) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\phi^E, \phi^E) \right] \phi^E \quad (\text{VI.41})$$

Usando a definição (V.14) da matriz de rigidez secante \mathbf{K}_s^E , este vetor pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}^E = \mathbf{K}_s^E \phi^E \quad (\text{VI.42})$$

onde a matriz de rigidez secante é:

$$\mathbf{K}_s^E = \begin{bmatrix} c_1 & c_{27} & c_{26} & -c_1 & -c_{27} & c_{25} \\ & c_{28} & c_{29} & -c_{27} & -c_{28} & c_{31} \\ & & c_{30} & -c_{26} & -c_{29} & c_{32} \\ & & & c_1 & c_{27} & -c_{25} \\ & & & & c_{28} & -c_{31} \\ \textit{simétrica} & & & & & c_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.43})$$

onde

$$c_{25} = 1/2 c_{10} \quad (\text{VI.44a})$$

$$c_{26} = 1/2 c_{11} \quad (\text{VI.44b})$$

$$c_{27} = 1/2 c_{12} \quad (\text{VI.44c})$$

$$c_{28} = c_5 + 1/2 c_9 + 1/6 c_{13} \quad (\text{VI.44d})$$

$$c_{29} = c_4 + 1/2 c_8 + 1/6 c_{14} \quad (\text{VI.44e})$$

$$c_{30} = c_3 + 1/2 c_7 + 1/6 c_{16} \quad (\text{VI.44f})$$

$$c_{31} = c_4 + 1/2 c_8 + 1/6 c_{15} \quad (\text{VI.44g})$$

$$c_{32} = c_2 + 1/2 c_6 + 1/6 c_{18} \quad (\text{VI.44h})$$

$$c_{33} = c_3 + 1/2 c_7 + 1/6 c_{17} \quad (\text{VI.44i})$$

onde os coeficientes c_1 até c_{18} são obtidos de forma similar a como é feito para a matriz de rigidez tangente.

Fazendo o produto matriz por vetor, na equação (VI.42), as componentes f_i do vetor \mathbf{f}^E segundo as coordenadas ϕ_i :

$$\mathbf{f}^E = \{f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6\}^T \quad (\text{VI.45})$$

podem ser expressas como:

$$f_1 = c_1 (\phi_1 - \phi_4) + c_{27} (\phi_2 - \phi_5) + c_{26} \phi_3 + c_{25} \phi_6 \quad (\text{VI.46a})$$

$$f_2 = c_{27} (\phi_1 - \phi_4) + c_{28} (\phi_2 - \phi_5) + c_{29} \phi_3 + c_{31} \phi_6 \quad (\text{VI.46b})$$

$$f_3 = c_{26} (\phi_1 - \phi_4) + c_{29} (\phi_2 - \phi_5) + c_{30} \phi_3 + c_{32} \phi_6 \quad (\text{VI.46c})$$

$$f_4 = -f_1 \quad (\text{VI.46d})$$

$$f_5 = -f_2 \quad (\text{VI.46e})$$

$$f_6 = c_{25} (\phi_1 - \phi_4) + c_{31} (\phi_2 - \phi_5) + c_{32} \phi_3 + c_{33} \phi_6 \quad (\text{VI.46f})$$

VI.7 - VETOR DE FORÇAS GEOMÉTRICAS

Da equação (V.29) tem-se que os vetores de forças geométricas de m-ésima ordem são:

$$\mathbf{g}^{[m]} = \mathbf{g}_1^{[m]} + \frac{1}{2} \mathbf{g}_2^{[m]} \quad (\text{VI.47})$$

onde, das equações (V.28) tem-se:

$$\mathbf{g}_1^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[p][m-p]} \quad (\text{VI.48a})$$

$$\mathbf{g}_2^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=0}^p \frac{m-p}{m} \mathbf{g}^{[q][p-q][m-p]} \quad (\text{VI.48b})$$

e das equações (V.26) tem-se:

$$\mathbf{g}^{[m][p]} = \mathbf{K}_1(\phi^{[m]}) \phi^{[p]} \quad (\text{VI.49a})$$

$$\mathbf{g}^{[m][p][q]} = \mathbf{K}_2(\phi^{[m]}, \phi^{[p]}) \phi^{[q]} \quad (\text{VI.49b})$$

onde $\phi^{[m]}$ são os coeficientes das expansões de Taylor das coordenadas generalizadas ϕ em torno de uma configuração de equilíbrio E.

Substituindo as matrizes $\mathbf{K}_1(\phi^{[m]})$, $\mathbf{K}_2(\phi^{[m]}, \phi^{[p]})$ das equações (VI.32), (VI.34), e fazendo as multiplicações matriz por vetor nas equações acima, as componentes $\mathbf{g}_{1_i}^{[m]}$ do vetor $\mathbf{g}_1^{[m]}$:

$$\mathbf{g}_1^{[m]} = \{ \mathbf{g}_{1_1}^{[m]} \quad \mathbf{g}_{1_2}^{[m]} \quad \mathbf{g}_{1_3}^{[m]} \quad \mathbf{g}_{1_4}^{[m]} \quad \mathbf{g}_{1_5}^{[m]} \quad \mathbf{g}_{1_6}^{[m]} \}^T \quad (\text{VI.50})$$

podem ser expressas como:

$$g_{11}^{[m]} = 1/30 EA/L^2 [-36 d_1^{[m]} - 3 L d_2^{[m]} + L^2 d_3^{[m]}] \quad (VI.51a)$$

$$g_{12}^{[m]} = 1/10 EA/L^2 [-12 d_4^{[m]} - L d_5^{[m]}] \quad (VI.51b)$$

$$g_{13}^{[m]} = 1/30 EA/L [-3 d_4^{[m]} + L d_6^{[m]}] \quad (VI.51c)$$

$$g_{14}^{[m]} = - g_{11}^{[m]} \quad (VI.51d)$$

$$g_{15}^{[m]} = - g_{12}^{[m]} \quad (VI.51e)$$

$$g_{16}^{[m]} = 1/30 EA/L [-3 d_4^{[m]} + L d_7^{[m]}] \quad (VI.51f)$$

onde os coeficientes $d_i^{[m]}$, ($i=1,2,\dots,7$) são:

$$d_i^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-p}{m} d_i^{[p][m-p]}, \quad (i=1,2,\dots,7) \quad (VI.52)$$

com

$$d_1^{[m][p]} = (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) \quad (VI.53a)$$

$$d_2^{[m][p]} = (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_3^{[p]} + \phi_6^{[p]}) + (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_3^{[m]} + \phi_6^{[m]}) \quad (VI.53b)$$

$$d_3^{[m][p]} = \phi_6^{[m]} (\phi_3^{[p]} - 4 \phi_6^{[p]}) + \phi_3^{[m]} (\phi_6^{[p]} - 4 \phi_3^{[p]}) \quad (VI.53c)$$

$$d_4^{[m][p]} = (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_1^{[p]} - \phi_4^{[p]}) + (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]}) \quad (VI.53d)$$

$$d_5^{[m][p]} = (\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]})(\phi_3^{[p]} + \phi_6^{[p]}) + (\phi_1^{[p]} - \phi_4^{[p]})(\phi_3^{[m]} + \phi_6^{[m]}) \quad (VI.53e)$$

$$d_6^{[m][p]} = (\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]})(\phi_6^{[p]} - 4\phi_3^{[p]}) + (\phi_1^{[p]} - \phi_4^{[p]})(\phi_6^{[m]} - 4\phi_3^{[m]}) \quad (VI.53f)$$

$$d_7^{[m][p]} = (\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]})(\phi_3^{[p]} - 4\phi_6^{[p]}) + (\phi_1^{[p]} - \phi_4^{[p]})(\phi_3^{[m]} - 4\phi_6^{[m]}) \quad (VI.53g)$$

Note-se que os vetores $g^{[m][p]}$ são obtidos trocando os coeficientes $d_i^{[m]}$ pelos coeficientes $d_i^{[m][p]}$ nas equações (VI.51), portanto levando em conta a comutatividade dos índices entre colchetes, como notado na seção V.3, o somatório (VI.52) de $d_i^{[m]}$ para $i=1,2,\dots,7$, pode ser calculado como:

$$d_i^{[m]} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\text{Int}(m/2)} mul^{[p][m-p]} d_i^{[p][m-p]}, \quad (i=1,2,\dots,7) \quad (VI.54)$$

onde mul é um fator de multiplicidade que vale:

$$mul = \begin{cases} 2 & \text{se } 2p \neq m \\ 1 & \text{se } 2p = m \end{cases} \quad (VI.55)$$

Analogamente as componentes $g_{2_1}^{[m]}$ do vetor $g_2^{[m]}$:

$$g_2^{[m]} = (g_{2_1}^{[m]} \ g_{2_2}^{[m]} \ g_{2_3}^{[m]} \ g_{2_4}^{[m]} \ g_{2_5}^{[m]} \ g_{2_6}^{[m]})^T \quad (VI.56)$$

podem ser expressas como:

$$g_{2_1}^{[m]} = g_{2_4}^{[m]} = 0 \quad (\text{VI.57a})$$

$$g_{2_2}^{[m]} = 3/140 EA/L^3 [288 d_8^{[m]} + 36 L d_9^{[m]} + 12 L^2 d_{10}^{[m]} + L^3 d_{11}^{[m]}] \quad (\text{VI.57b})$$

$$g_{2_3}^{[m]} = 1/140 EA/L^2 [108 d_8^{[m]} + 36 L d_{12}^{[m]} + 3 L^2 d_{13}^{[m]} + L^3 d_{14}^{[m]}] \quad (\text{VI.57c})$$

$$g_{2_5}^{[m]} = - g_{2_2}^{[m]} \quad (\text{VI.57d})$$

$$g_{2_6}^{[m]} = 1/140 EA/L^2 [108 d_8^{[m]} + 36 L d_{15}^{[m]} + 3 L^2 d_{16}^{[m]} + L^3 d_{17}^{[m]}] \quad (\text{VI.57e})$$

onde os coeficientes $d_i^{[m]}$, ($i=8,9,\dots,17$) são:

$$d_i^{[m]} = \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=0}^p \frac{m-p}{m} d_i^{[q][p-q][m-p]}, \quad (i=8,9,\dots,17) \quad (\text{VI.58})$$

com

$$d_8^{[m][p][q]} = (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) \quad (\text{VI.59a})$$

$$\begin{aligned} d_9^{[m][p][q]} &= (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_3^{[q]} + \phi_6^{[q]}) + \\ &+ (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]})(\phi_3^{[p]} + \phi_6^{[p]}) + \\ &+ (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]})(\phi_3^{[m]} + \phi_6^{[m]}) \end{aligned} \quad (\text{VI.59b})$$

$$\begin{aligned} d_{10}^{[m][p][q]} &= (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_3^{[p]} \phi_3^{[q]} + \phi_6^{[p]} \phi_6^{[q]}) + \\ &+ (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_3^{[m]} \phi_3^{[q]} + \phi_6^{[m]} \phi_6^{[q]}) + \end{aligned}$$

$$+ (\phi_2^{[qi]} - \phi_5^{[qi]})(\phi_3^{[m]} \phi_3^{[pl]} + \phi_6^{[m]} \phi_6^{[pl]}) \quad (\text{VI.59c})$$

$$\begin{aligned} d_{11}^{[m][p][q]} &= (\phi_6^{[m]} - \phi_3^{[m]})(\phi_3^{[p]} \phi_3^{[q]} - \phi_6^{[p]} \phi_6^{[q]}) + \\ &+ (\phi_6^{[m]} + \phi_3^{[m]})(\phi_3^{[p]} \phi_6^{[q]} + \phi_6^{[p]} \phi_3^{[q]}) \end{aligned} \quad (\text{VI.59d})$$

$$\begin{aligned} d_{12}^{[m][p][q]} &= (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) \phi_3^{[q]} + \\ &+ (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) \phi_3^{[m]} + \\ &+ (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) \phi_3^{[p]} \end{aligned} \quad (\text{VI.59e})$$

$$\begin{aligned} d_{13}^{[m][p][q]} &= (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]}) [(\phi_6^{[p]} - \phi_3^{[p]}) \phi_3^{[q]} + (\phi_6^{[p]} + \phi_3^{[p]}) \phi_6^{[q]}] + \\ &+ (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) [(\phi_6^{[m]} - \phi_3^{[m]}) \phi_3^{[q]} + (\phi_6^{[m]} + \phi_3^{[m]}) \phi_6^{[q]}] + \\ &+ (\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) [(\phi_6^{[m]} - \phi_3^{[m]}) \phi_3^{[p]} + (\phi_6^{[m]} + \phi_3^{[m]}) \phi_6^{[p]}] \end{aligned} \quad (\text{VI.59f})$$

$$\begin{aligned} d_{14}^{[m][p][q]} &= (24 \phi_3^{[m]} \phi_3^{[p]} + 2 \phi_6^{[m]} \phi_6^{[p]}) \phi_3^{[q]} + \\ &+ (\phi_3^{[m]} \phi_6^{[p]} + \phi_3^{[p]} \phi_6^{[m]}) (2 \phi_6^{[q]} - 3 \phi_3^{[q]}) - \\ &- 3 (\phi_3^{[m]} \phi_3^{[p]} + \phi_6^{[m]} \phi_6^{[p]}) \phi_6^{[q]} \end{aligned} \quad (\text{VI.59g})$$

$$\begin{aligned} d_{15}^{[m][p][q]} &= (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) \phi_6^{[q]} + \\ &+ (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) \phi_6^{[m]} + \\ &+ (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]})(\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) \phi_6^{[p]} \end{aligned} \quad (\text{VI.59h})$$

$$\begin{aligned}
 d_{i6}^{[m][p][q]} &= (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]}) [(\phi_3^{[p]} - \phi_6^{[p]}) \phi_6^{[q]} + (\phi_3^{[p]} + \phi_6^{[p]}) \phi_3^{[q]}] + \\
 &+ (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) [(\phi_3^{[m]} - \phi_6^{[m]}) \phi_6^{[q]} + (\phi_3^{[m]} + \phi_6^{[m]}) \phi_3^{[q]}] + \\
 &+ (\phi_2^{[q]} - \phi_5^{[q]}) [(\phi_3^{[m]} - \phi_6^{[m]}) \phi_6^{[p]} + (\phi_3^{[m]} + \phi_6^{[m]}) \phi_3^{[p]}]
 \end{aligned}
 \tag{VI.59i}$$

$$\begin{aligned}
 d_{i7}^{[m][p][q]} &= (24 \phi_6^{[m]} \phi_6^{[p]} + 2 \phi_3^{[m]} \phi_3^{[p]}) \phi_6^{[q]} + \\
 &+ (\phi_3^{[m]} \phi_6^{[p]} + \phi_3^{[p]} \phi_6^{[m]}) (2 \phi_3^{[q]} - 3 \phi_6^{[q]}) - \\
 &- 3 (\phi_3^{[m]} \phi_3^{[p]} + \phi_6^{[m]} \phi_6^{[p]}) \phi_3^{[q]}
 \end{aligned}
 \tag{VI.59j}$$

Note-se que os vetores $g^{[m][p][q]}$ são obtidos trocando os coeficientes $d_i^{[m]}$ pelos coeficientes $d_i^{[m][p][q]}$ nas equações (VI.57), portanto levando em conta a comutatividade dos índices entre colchetes, como notado na seção V.3, o somatório (VI.58) de $d_i^{[m]}$ para $i=8,9,\dots,17$, pode ser calculado como:

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{para } m=2 \\
 d_i^{[2]} = d_i^{[0][1][1]} \\
 \\
 \text{para } m>2 \\
 d_i^{[m]} = \sum_{p=1}^{\text{int}(m/2)} \text{mul1} d_i^{[0][p][m-p]} + \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{\text{int}(m/3)} \sum_{q=1}^{\text{int}((m-p)/2)} \text{mul2} d_i^{[p][q][m-p-q]}
 \end{array} \right.
 \tag{VI.60a}$$

$$\tag{VI.60b}$$

onde mul1 , mul2 são fatores de multiplicidade que valem:

$$mul1 = \begin{cases} 2 & \text{se } p \neq m-p \\ 1 & \text{se } p = m-p \end{cases} \quad (\text{VI.61a})$$

$$mul2 = \begin{cases} 6 & \text{se } p \neq q \neq m-p-q \\ 3 & \text{se } p = q \text{ ou } q = m-p-q \\ 1 & \text{se } p = q = m-p-q \end{cases} \quad (\text{VI.61b})$$

VI.8 - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PÓS-CRÍTICAS

Os coeficientes A_1 , A_2 , A_3 das equações de equilíbrio pós-críticas são, das equações (V.49):

$$A_1 = \hat{\xi}^T K_{\phi}^c(\hat{\xi}) \hat{\xi} \quad (\text{VI.62a})$$

$$A_2 = \hat{\xi}^T K_{\phi}^c(\hat{\xi}) \hat{\delta}_0 \quad (\text{VI.62b})$$

$$A_3 = \hat{\delta}_0^T K_{\phi}^c(\hat{\xi}) \hat{\delta}_0 \quad (\text{VI.62c})$$

onde a matriz $K_{\phi}^c(\hat{\xi})$ é, da equação (V.48):

$$K_{\phi}^c = K_1(\hat{\xi}) + K_2(\phi^c, \hat{\xi}) \quad (\text{VI.63})$$

Efetuando a soma de matrizes do lado direito tem-se:

$$K_{\phi}^c(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{11} & 0 & -c_{12} & c_{10} \\ & c_{34} & c_{35} & -c_{12} & -c_{34} & c_{37} \\ & & c_{36} & -c_{11} & -c_{35} & c_{38} \\ & & & 0 & c_{12} & -c_{10} \\ & & & & c_{34} & -c_{37} \\ \textit{simétrica} & & & & & c_{39} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.64})$$

onde

$$c_{34} = c_9 + c_{13} \quad (\text{VI.65a})$$

$$c_{35} = c_8 + c_{14} \quad (\text{VI.65b})$$

$$c_{36} = c_7 + c_{16} \quad (\text{VI.65c})$$

$$c_{37} = c_8 + c_{15} \quad (\text{VI.65d})$$

$$c_{38} = c_6 + c_{18} \quad (\text{VI.65e})$$

$$c_{39} = c_7 + c_{17} \quad (\text{VI.65f})$$

onde os coeficientes c_6 até c_{12} são obtidos das equações (VI.33) com $\phi^a = \hat{\xi}$, e os coeficientes c_{13} até c_{18} são obtidos das equações (VI.35) com $\phi^a = \phi^c$ e $\phi^b = \hat{\xi}$.

Os coeficientes $C^{[m]}$ das equações de equilíbrio pós-críticas são, das equações (V.66):

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=2 \\ C^{[2]} = C_4^{[2]} - C_2^{[2]} \\ \\ \text{para } m>2 \\ C^{[m]} = C_3^{[m]} + C_4^{[m]} - C_2^{[m]} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VI.66a)} \\ \\ \text{(VI.66b)} \end{array}$$

onde

$$C_2^{[m]} = \phi^{[1]T} K_{\phi}^C(\hat{\xi}) \hat{\delta}^{[m]} \quad \text{(VI.67a)}$$

$$C_3^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{m-p+1}{m+1} C^{[p][m-p+1]} \quad , \quad m>2 \quad \text{(VI.67b)}$$

$$C_4^{[m]} = \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p+1)(p-q)}{(m+1)p} C^{[m-p+1][p-q][q]} \quad \text{(VI.67c)}$$

e das equações (V.56) tem-se:

$$C^{[m][p]} = \phi^{[m]T} K_{\phi}^C(\hat{\xi}) \phi^{[p]} \quad \text{(VI.68a)}$$

$$C^{[m][p][q]} = \hat{\xi}^T K_2(\phi^{[m]}, \phi^{[p]}) \phi^{[q]} = \hat{\xi}^T g^{[m][p][q]} \quad \text{(VI.68b)}$$

Efetuando-se as multiplicações entre matrizes e vetores, os coeficientes $C_2^{[m]}$ podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} C_2^{[m]} = & c_{10} d_{18}^{[m]} + c_{11} d_{19}^{[m]} + c_{12} d_{20}^{[m]} + c_{34} d_{21}^{[m]} + c_{35} d_{22}^{[m]} + \\ & + c_{36} d_{23}^{[m]} + c_{37} d_{24}^{[m]} + c_{38} d_{25}^{[m]} + c_{39} d_{26}^{[m]} \end{aligned} \quad \text{(VI.69)}$$

com

$$d_{18}^{[m]} = \hat{\delta}_6^{[m]} (\phi_1^{[1]} - \phi_4^{[1]}) + \phi_6^{[1]} (\hat{\delta}_1^{[m]} - \hat{\delta}_4^{[m]}) \quad (\text{VI.70a})$$

$$d_{19}^{[m]} = \hat{\delta}_3^{[m]} (\phi_1^{[1]} - \phi_4^{[1]}) + \phi_3^{[1]} (\hat{\delta}_1^{[m]} - \hat{\delta}_4^{[m]}) \quad (\text{VI.70b})$$

$$d_{20}^{[m]} = (\hat{\delta}_2^{[m]} - \hat{\delta}_5^{[m]}) (\phi_1^{[1]} - \phi_4^{[1]}) + (\phi_2^{[1]} - \phi_5^{[1]}) (\hat{\delta}_1^{[m]} - \hat{\delta}_4^{[m]}) \quad (\text{VI.70c})$$

$$d_{21}^{[m]} = (\hat{\delta}_2^{[m]} - \hat{\delta}_5^{[m]}) (\phi_2^{[1]} - \phi_5^{[1]}) \quad (\text{VI.70d})$$

$$d_{22}^{[m]} = \hat{\delta}_3^{[m]} (\phi_2^{[1]} - \phi_5^{[1]}) + \phi_3^{[1]} (\hat{\delta}_2^{[m]} - \hat{\delta}_5^{[m]}) \quad (\text{VI.70e})$$

$$d_{23}^{[m]} = \hat{\delta}_3^{[m]} \phi_3^{[1]} \quad (\text{VI.70f})$$

$$d_{24}^{[m]} = \hat{\delta}_6^{[m]} (\phi_2^{[1]} - \phi_5^{[1]}) + \phi_6^{[1]} (\hat{\delta}_2^{[m]} - \hat{\delta}_5^{[m]}) \quad (\text{VI.70g})$$

$$d_{25}^{[m]} = \hat{\delta}_3^{[m]} \phi_6^{[1]} + \phi_3^{[1]} \hat{\delta}_6^{[m]} \quad (\text{VI.70h})$$

$$d_{26}^{[m]} = \hat{\delta}_6^{[m]} \phi_6^{[1]} \quad (\text{VI.70i})$$

Os coeficientes $C_3^{[m]}$ são para $m > 2$:

$$\begin{aligned} C_3^{[m]} = & c_{10} d_{27}^{[m]} + c_{11} d_{28}^{[m]} + c_{12} d_{29}^{[m]} + c_{34} d_{30}^{[m]} + c_{35} d_{31}^{[m]} + \\ & + c_{36} d_{32}^{[m]} + c_{37} d_{33}^{[m]} + c_{38} d_{34}^{[m]} + c_{39} d_{35}^{[m]} \end{aligned} \quad (\text{VI.71})$$

onde os coeficientes $d_i^{[m]}$, $(i=27,28,\dots,35)$, são:

$$d_i^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{m-p+1}{m+1} d_i^{[p][m-p+1]}, \quad m > 2 \quad (\text{VI.72})$$

com

$$d_{27}^{[m]} = \phi_6^{[m]} (\phi_1^{[1]} - \phi_4^{[1]}) + \phi_6^{[1]} (\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]}) \quad (\text{VI.73a})$$

$$d_{28}^{[m]} = \phi_3^{[m]} (\phi_1^{[p]} - \phi_4^{[p]}) + \phi_3^{[p]} (\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]}) \quad (\text{VI.73b})$$

$$d_{29}^{[m][p]} = (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]}) (\phi_1^{[p]} - \phi_4^{[p]}) + (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) (\phi_1^{[m]} - \phi_4^{[m]}) \quad (\text{VI.73c})$$

$$d_{30}^{[m][p]} = (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]}) (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) \quad (\text{VI.73d})$$

$$d_{31}^{[m][p]} = \phi_3^{[m]} (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) + \phi_3^{[p]} (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]}) \quad (\text{VI.73e})$$

$$d_{32}^{[m][p]} = \phi_3^{[m]} \phi_3^{[p]} \quad (\text{VI.73f})$$

$$d_{33}^{[m][p]} = \phi_6^{[m]} (\phi_2^{[p]} - \phi_5^{[p]}) + \phi_6^{[p]} (\phi_2^{[m]} - \phi_5^{[m]}) \quad (\text{VI.73g})$$

$$d_{34}^{[m][p]} = \phi_3^{[m]} \phi_6^{[p]} + \phi_3^{[p]} \phi_6^{[m]} \quad (\text{VI.73h})$$

$$d_{35}^{[m][p]} = \phi_6^{[m]} \phi_6^{[1]} \quad (\text{VI.73i})$$

Note-se que os coeficientes $C^{[m][p]}$ são obtidos trocando os coeficientes $d_i^{[m]}$ pelos coeficientes $d_i^{[m][p]}$ na equação (VI.71), portanto levando em conta a comutatividade dos índices entre colchetes, como notado na seção V.4, o somatório (VI.72) de $d_i^{[m]}$ para $i=27,28,\dots,35$, pode ser calculado como:

$$d_i^{[m]} = \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{\text{int}((m+1)/2)} m u l l d_i^{[p][m-p+1]}, \quad m > 2 \quad (\text{IV.74})$$

onde $mult$ é um fator de multiplicidade que vale:

$$mult = \begin{cases} 2 & \text{se } 2p \neq m+1 \\ 1 & \text{se } 2p = m+1 \end{cases} \quad (\text{VI.75})$$

Os coeficientes $C_4^{[m]}$ são :

$$C_4^{[m]} = 1/140 EA/L^3 [864 d_{36}^{[m]} + 108 L d_{37}^{[m]} + 36 L^2 d_{38}^{[m]} + 3 L^3 d_{39}^{[m]} + L^4 d_{40}^{[m]}] \quad (\text{VI.76})$$

onde os coeficientes $d_i^{[m]}$, ($i=36,37,\dots,40$), são:

$$d_i^{[m]} = \sum_{p=2}^m \sum_{q=1}^{p-1} \frac{(m-p+1)(p-q)}{(m+1)p} d_i^{[m-p+1][p-q]} \quad (\text{VI.77})$$

com

$$d_{36}^{[m][p][q]} = (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_5) d_8^{[m][p][q]} \quad (\text{VI.78a})$$

$$d_{37}^{[m][p][q]} = (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_5) d_9^{[m][p][q]} + (\hat{\xi}_3 + \hat{\xi}_6) d_8^{[m][p][q]} \quad (\text{VI.78b})$$

$$d_{38}^{[m][p][q]} = (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_5) d_{10}^{[m][p][q]} + \hat{\xi}_3 d_{12}^{[m][p][q]} + \hat{\xi}_6 d_{15}^{[m][p][q]} \quad (\text{VI.78c})$$

$$d_{39}^{[m][p][q]} = (\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_5) d_{11}^{[m][p][q]} + \hat{\xi}_3 d_{13}^{[m][p][q]} + \hat{\xi}_6 d_{16}^{[m][p][q]} \quad (\text{VI.78d})$$

$$d_{40}^{[m][p][q]} = \hat{\xi}_3 d_{14}^{[m][p][q]} + \hat{\xi}_6 d_{17}^{[m][p][q]} \quad (\text{VI.78e})$$

onde os coeficientes $d_i^{[m][p][q]}$, ($i=8,9,\dots,17$) são obtidos das equações (VI.59).

Note-se que os coeficientes $C^{[m]p|q}$ são obtidos trocando os coeficientes $d_i^{[m]}$ pelos coeficientes $d_i^{[m]p|q}$ na equação (VI.76), portanto levando em conta a comutatividade dos índices entre colchetes, como notado na seção V.4, o somatório (VI.77) de $d_i^{[m]}$ para $i=36,28,\dots,40$, pode ser calculado como:

$$d_i^{[m]} = \frac{1}{6} \sum_{p=1}^{\text{int}((m+1)/3)} \sum_{q=p}^{\text{int}((m-p+1)/2)} \text{mul2} d_i^{[p]q|[m-p-q+1]} \quad (\text{IV.79})$$

onde *mul2* é um fator de multiplicidade que vale:

$$\text{mul2} = \begin{cases} 6 & \text{se } p \neq q \neq m-p-q+1 \\ 3 & \text{se } p = q \text{ ou } q = m-p-q+1 \\ 1 & \text{se } p = q = m-p-q+1 \end{cases} \quad (\text{IV.80})$$

VI.8 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE DE PRIMEIRA ORDEM

Da equação (V.21) tem-se que as matrizes de rigidez tangente de m -ésima ordem são:

$$K_T^{[m]} = K_1(\phi^{[m]}) + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^m K_2(\phi^{[p]}, \phi^{[m-p]}) \quad (\text{VI.81})$$

Em particular para o problema de autovalor linearizado que fornece uma primeira aproximação dos pontos críticos, é necessário utilizar a matriz de rigidez tangente de primeira ordem ($m = 1$):

$$K_T^{[1]} = K_1(\phi^{[1]}) + K_2(\phi^{[0]}, \phi^{[1]}) \quad (\text{VI.82})$$

Para o elemento de pórtico plano esta matriz é:

$$K_T^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{11} & 0 & -c_{12} & c_{10} \\ & c_{40} & c_{41} & -c_{12} & -c_{40} & c_{43} \\ & & c_{42} & -c_{11} & -c_{41} & c_{44} \\ & & & 0 & c_{12} & -c_{10} \\ \textit{simétrica} & & & & c_{40} & -c_{43} \\ & & & & & c_{45} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.83})$$

onde

$$c_{40} = c_9 + c_{13} \quad (\text{VI.84a})$$

$$c_{41} = c_8 + c_{14} \quad (\text{VI.84b})$$

$$c_{42} = c_7 + c_{16} \quad (\text{VI.84c})$$

$$c_{43} = c_8 + c_{15} \quad (\text{VI.84d})$$

$$c_{44} = c_6 + c_{18} \quad (\text{VI.84e})$$

$$c_{45} = c_7 + c_{17} \quad (\text{VI.84f})$$

onde os coeficientes c_6 até c_{12} são obtidos das equações (VI.33) com $\phi^a = \phi^{[1]}$, e os coeficientes c_{13} até c_{18} são obtidos das equações (VI.35) com $\phi^a = \phi^{[0]}$ e $\phi^b = \phi^{[1]}$.

CAPITULO VII

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é descrita a estratégia computacional para a solução das equações não-lineares de equilíbrio. São apresentados os métodos de Newton-Raphson com a inclusão de uma equação de restrição adicional permitindo uma melhor descrição destes métodos, em relação às diferentes variantes. É feita uma descrição da estratégia de solução adotada, onde são aproveitados os desenvolvimentos analíticos dos capítulos anteriores, e é apresentado o método do cálculo direto de pontos críticos. Na parte final são incluídos três exemplos numéricos, cujos resultados são discutidos.

VII.1 - MÉTODOS DE CONTINUAÇÃO

Em mecânica estrutural não-linear, as equações de equilíbrio são usualmente solucionadas utilizando métodos incrementais. Entretanto estes métodos foram desenvolvidos em forma mais ou menos independente na literatura de engenharia, é possível reconhecer que eles pertencem à classe geral dos métodos de continuação usados em matemática.

Basicamente, em mecânica estrutural, as equações de equilíbrio para sistemas discretos são da forma:

$$F(\phi, \lambda) = f(\phi) - \lambda p(\phi) = 0 \quad (\text{VII.1})$$

onde f é o vetor de forças internas resistentes, p é o vetor de cargas de referência, λ é o parâmetro de cargas associado à magnitude das cargas e ϕ representa um conjunto de n coordenadas generalizadas.

O interesse está centrado na determinação de caminhos contínuos $\phi(t)$, $\lambda(t)$ que sejam soluções da equação (VII.1). O parâmetro do caminho t , em princípio, pode ser arbitrariamente escolhido, mas deve assegurar a existência e unicidade das relações $\phi(t)$, $\lambda(t)$, ao menos localmente.

Em forma geral, um método de continuação é um procedimento que partindo de uma solução conhecida ϕ_0 , λ_0 em t_0 , fornece aproximações aceitáveis $\phi(t_1)$, $\lambda(t_1)$ para uma seqüência de valores t_1 , t_2 , t_3, \dots , do parâmetro t .

O caminho de equilíbrio é descrito por pontos associados a sucessivos incrementos do parâmetro de controle t . Dependendo da escolha deste parâmetro é possível agrupar as estratégias de solução em três grupos, usualmente chamados:

- 1) *controle de carga*
- 2) *controle de deslocamento*
- 3) *controle de comprimento de arco*

No controle de carga, o procedimento clássico, o parâmetro de controle é o

parâmetro de carga λ , no controle de deslocamento, uma coordenada generalizada ϕ_1 é utilizada como parâmetro de controle, e no controle de comprimento de arco são empregadas diferentes aproximações ao comprimento de arco s do caminho de equilíbrio como parâmetros de controle.

Em um algoritmo de continuação duas estratégias devem ser escolhidas: 1) como proceder de uma configuração $\phi(t_1)$, $\lambda(t_1)$ à próxima configuração $\phi(t_{i+1})$, $\lambda(t_{i+1})$ (*predição*), e 2) como melhorar a solução predita (*correção*). O primeiro ponto é crucial, pois tem uma influência direta no processo de correção. Portanto a construção de um algoritmo robusto de predição é de interesse primário.

O mais popular dos algoritmos atualmente empregados é o método de Newton-Raphson onde as sucessivas predições são obtidas em forma incremental e corrigidas iterativamente.

VII.2 - O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Deseja-se obter uma configuração de equilíbrio E (ϕ^E, λ^E) que atenda as equações de equilíbrio (VII.1):

$$F(\phi^E, \lambda^E) = 0 \quad (\text{VII.2})$$

Assumindo que seja conhecida uma configuração não-equilibrada E' ($\phi^{E'}, \lambda^{E'}$) na vizinhança da configuração de equilíbrio E , então, expandindo em série de Taylor as equações de equilíbrio em torno do ponto E' , tem-se:

$$F(\phi^E, \lambda^E) = F(\phi^{E'}, \lambda^{E'}) + [F_{\phi} |_{E'}, d\phi^{E'} + F_{\lambda} |_{E'}, d\lambda^{E'}] + \Delta F |_{E'} = 0 \quad (\text{VII.3})$$

onde as diferenças $d\phi^{E'}$, $d\lambda^{E'}$, são:

$$d\phi^{E'} = \phi^E - \phi^{E'} \quad (\text{VII.4a})$$

$$d\lambda^{E'} = \lambda^E - \lambda^{E'} \quad (\text{VII.4b})$$

e o termo $\Delta F|_{E'}$ é uma correção de ordem superior em $d\phi^{E'}$, $d\lambda^{E'}$. Assumindo que estas diferenças sejam pequenas, isto é, se as configurações E e E' estão muito próximas, é possível desprezar a parcela $\Delta F|_{E'}$, e da expansão truncada resulta:

$$F\phi|_{E'} d\phi^{E'} \cong - F(\phi^{E'}, \lambda^{E'}) - F\lambda|_{E'} d\lambda^{E'} \quad (\text{VII.5})$$

e chamando

$$K_T^{E'} = F\phi|_{E'} \quad (\text{VII.6a})$$

$$p^{E'} = - F\lambda|_{E'} \quad (\text{VII.6b})$$

$$r^{E'} = - F(\phi^{E'}, \lambda^{E'}) \quad (\text{VII.6c})$$

onde $K_T^{E'}$ é a matriz de rigidez tangente na configuração E' , $p^{E'}$ é o vetor de forças externas de referência na configuração E' , e $r^{E'}$ é o vetor de forças residuais na mesma configuração E' , então a equação (VII.5) pode ser escrita como:

$$K_T^{E'} d\phi^{E'} \cong - r^{E'} + d\lambda^{E'} p^{E'} \quad (\text{VII.7})$$

Note-se que este é um sistema linear de n equações com $n+1$ incógnitas, as n componentes do vetor $d\phi^{E'}$ e o incremento $d\lambda^{E'}$, portanto é necessária uma equação adicional relacionando estas incógnitas para que o sistema de equações fique determinado. Esta equação adicional de restrição pode ser escrita como:

$$C(\phi^E, \lambda^E) = C(d\phi^{E'}, d\lambda^{E'}) = 0 \quad (\text{VII.8})$$

Geométricamente esta equação define uma superfície cuja interseção com a superfície definida pelas equações de equilíbrio determina a configuração de equilíbrio procurada E .

As soluções das equações (VII.7) e (VII.8) fornecem uma nova configuração E'' ($\phi^{E''}, \lambda^{E''}$) mais próxima ao ponto E como:

$$\phi^{E''} = \phi^{E'} + d\phi^{E'} \quad (\text{VII.9a})$$

$$\lambda^{E''} = \lambda^{E'} + d\lambda^{E'} \quad (\text{VII.9b})$$

Assim é possível expressar o processo iterativo de obtenção das correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$, correspondentes ao passo de iteração $k+1$, mediante a seguinte equação de recursão:

$$\boxed{K_T^k d\phi^{k+1} = -r^k + d\lambda^{k+1} p^k} \quad (\text{VII.10})$$

onde as correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$ devem atender a condição de restrição (VII.8):

$$C(d\phi^{k+1}, d\lambda^{k+1}) = 0 \quad (\text{VII.11})$$

e as sucessivas aproximações ao ponto de equilíbrio procurado são:

$$\phi^E \cong \phi^{k+1} = \phi^{E-1} + d\phi^0 + d\phi^1 + d\phi^2 + \dots + d\phi^{k+1} = \phi^{E-1} + \Delta\phi^{k+1} \quad (\text{VII.12a})$$

$$\lambda^E \cong \lambda^{k+1} = \lambda^{E-1} + d\lambda^0 + d\lambda^1 + d\lambda^2 + \dots + d\lambda^{k+1} = \lambda^{E-1} + \Delta\lambda^{k+1} \quad (\text{VII.12b})$$

onde ϕ^{E-1} , λ^{E-1} correspondem a uma configuração de equilíbrio atingida na etapa anterior, e $\Delta\phi^{k+1}$, $\Delta\lambda^{k+1}$ são as correções acumuladas na etapa atual após $k+1$ iterações, isto é:

$$\Delta\phi^{k+1} = d\phi^0 + d\phi^1 + d\phi^2 + \dots + d\phi^{k+1} \quad (\text{VII.13a})$$

$$\Delta\lambda^{k+1} = d\lambda^0 + d\lambda^1 + d\lambda^2 + \dots + d\lambda^{k+1} \quad (\text{VII.13b})$$

Observe-se que se o processo é convergente as sucessivas correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$ devem tender a zero para valores crescentes de k .

Para iniciar o processo é necessário fornecer predições iniciais $d\phi^0$, $d\lambda^0$. A

predição mais simples é a linear na direção tangente no início da etapa. Note-se que o vetor de componentes $\{\phi \lambda\} = \{\delta_0 \ 1\}$, onde δ_0 é a solução de:

$$K_T^{E-1} \delta_0 = p^{E-1} \quad (\text{VII.14})$$

é um vetor tangente ao caminho de equilíbrio na configuração E-1, portanto uma predição linear será da forma:

$$\{d\phi^0 \ d\lambda^0\} = d\lambda^0 \{\delta_0 \ 1\} \quad (\text{VII.15})$$

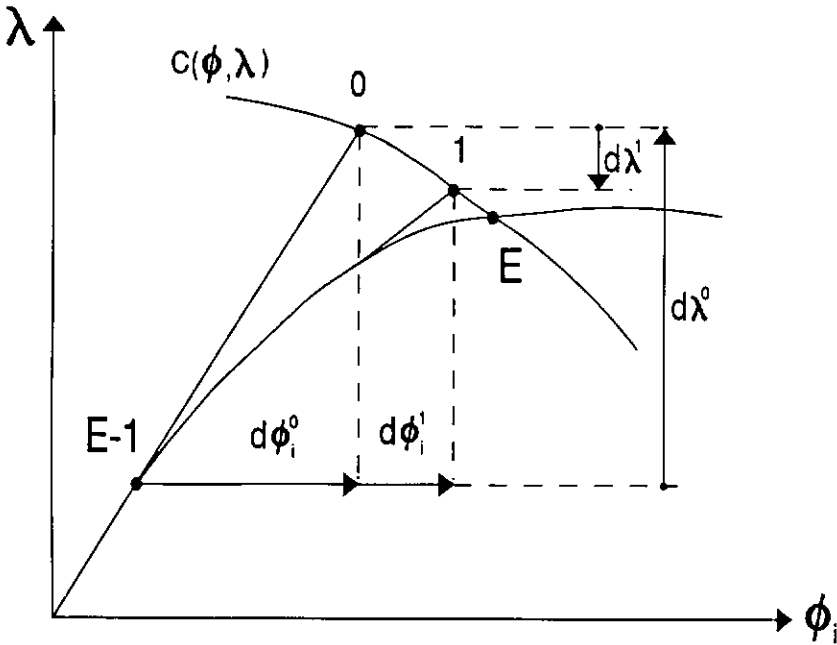


FIGURA VII.1 - Método de Newton-Raphson.

Para obter as correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$ a equação (VII.10) é solucionada em dois passos fazendo a decomposição [29]:

$$d\phi^{k+1} = \delta_1^{k+1} + d\lambda^{k+1} \delta_0^{k+1} \quad (\text{VII.16})$$

onde δ_0^{k+1} , δ_1^{k+1} são as soluções de :

$$\mathbf{K}_T^k \delta_0^{k+1} = \mathbf{p}^k \quad (\text{VII.17a})$$

$$\mathbf{K}_T^k \delta_1^{k+1} = -\mathbf{r}^k \quad (\text{VII.17b})$$

A decomposição (VII.16) permite expressar a $d\phi^{k+1}$ como função de $d\lambda^{k+1}$, e fazendo a substituição na equação de restrição (VII.11) chega-se a uma equação adicional do tipo:

$$C(d\lambda^{k+1}) = 0 \quad (\text{VII.18})$$

da qual pode ser obtida a correção $d\lambda^{k+1}$, e substituindo esta correção na equação (VII.16) é possível obter a correção $d\phi^{k+1}$.

Deve-se notar que as equações de restrição (VII.8) definem em forma implícita o parâmetro t do caminho $\phi(t)$, $\lambda(t)$, de maneira análoga às equações de restrição paramétricas vistas no capítulo IV.

VII.3 - O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

Uma desvantagem do método de Newton-Raphson é que a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T^k deve ser atualizada em cada passo k do processo iterativo de correção. Alternativamente é possível fixar a matriz de rigidez tangente no início da etapa de correção para reduzir o número de operações.

Para isso, considere-se uma configuração equilibrada $E-1$ ($\phi^{E-1}, \lambda^{E-1}$), na vizinhança da qual deseja-se obter uma nova configuração equilibrada E (ϕ^E, λ^E).

Expandindo as equações de equilíbrio em série de Taylor em torno da configuração $E-1$ tem-se:

$$F(\phi^E, \lambda^E) = F(\phi^{E-1}, \lambda^{E-1}) + [F_\phi|_{E-1} \Delta\phi^{E-1} + F_\lambda|_{E-1} \Delta\lambda^{E-1}] + \Delta F|_{E-1} = 0 \quad (\text{VII.19})$$

onde os incrementos $\Delta\phi^{E-1}$, $\Delta\lambda^{E-1}$ são:

$$\Delta\phi^{E-1} = \phi^E - \phi^{E-1} \quad (\text{VII.20a})$$

$$\Delta\lambda^{E-1} = \lambda^E - \lambda^{E-1} \quad (\text{VII.20b})$$

e o termo $\Delta F|_{E-1}$ é uma correção de ordem superior em $\Delta\phi^{E-1}$, $\Delta\lambda^{E-1}$. Como a configuração $E-1$ está em equilíbrio deve ser:

$$F(\phi^{E-1}, \lambda^{E-1}) = 0 \quad (\text{VII.21})$$

Note-se que $\Delta\phi^{E-1}$, $\Delta\lambda^{E-1}$ são os incrementos totais entre duas configurações de equilíbrio e não são necessariamente quantidades pequenas. Portanto não é possível desprezar a parcela $\Delta F|_{E-1}$, a qual pode ser expressa da equação (VII.17) como:

$$\Delta F|_{E-1} = F(\phi^E, \lambda^E) - [F_\phi|_{E-1} \Delta\phi^{E-1} + F_\lambda|_{E-1} \Delta\lambda^{E-1}] \quad (\text{VII.22})$$

Assumindo que seja conhecida uma configuração $E'(\phi^{E'}, \lambda^{E'})$ muito próxima à configuração E , é possível aproximar a parcela $\Delta F|_{E-1}$ como:

$$\Delta F|_{E-1} \cong F(\phi^{E'}, \lambda^{E'}) - [F_\phi|_{E-1} \Delta\phi^{E'} + F_\lambda|_{E-1} \Delta\lambda^{E'}] \quad (\text{VII.23})$$

onde

$$\Delta\phi^{E'} = \phi^{E'} - \phi^{E-1} \quad (\text{VII.24a})$$

$$\Delta\lambda^{E'} = \lambda^{E'} - \lambda^{E-1} \quad (\text{VII.24b})$$

do lado direito da equação (VII.19) e levando em conta a equação (VII.21) tem-se:

$$F_{\phi} \Big|_{E-1} \Delta \phi^{E-1} = - \Delta F \Big|_{E-1} - \Delta \lambda^{E-1} F_{\lambda} \Big|_{E-1} \quad (\text{VII.25})$$

Fazendo a substituição de $\Delta F \Big|_{E-1}$ da equação (VII.23) tem-se:

$$F_{\phi} \Big|_{E-1} (\Delta \phi^{E-1} - \Delta \phi^{E'}) \cong - F(\phi^{E'}, \lambda^{E'}) - (\Delta \lambda^{E-1} - \Delta \lambda^{E'}) F_{\lambda} \Big|_{E-1} \quad (\text{VII.26})$$

Chamando

$$d\phi^{E'} = \Delta \phi^{E-1} - \Delta \phi^{E'} = \phi^E - \phi^{E'} \quad (\text{VII.27a})$$

$$d\lambda^{E'} = \Delta \lambda^{E-1} - \Delta \lambda^{E'} = \lambda^E - \lambda^{E'} \quad (\text{VII.27b})$$

e usando as definições (VII.6) a equação (VII.26) pode ser escrita como:

$$K_T^{E-1} d\phi^{E'} \cong - r^{E'} + d\lambda^{E'} p^{E-1} \quad (\text{VII.28})$$

Note-se que esta equação é similar à equação (VII.7) e representa um sistema linear de n equações com $n+1$ incógnitas, as n componentes do vetor $d\phi^{E'}$ e o incremento $d\lambda^{E'}$, portanto é necessária uma equação adicional relacionando as incógnitas $d\phi^{E'}$, $d\lambda^{E'}$ da forma:

$$C(d\phi^{E'}, d\lambda^{E'}) = 0 \quad (\text{VII.29})$$

A solução das equações (VII.28) e (VII.29) fornecem uma nova configuração E'' ($\phi^{E''}, \lambda^{E''}$) mais próxima ao ponto E como:

$$\phi^{E''} = \phi^{E'} + d\phi^{E'} \quad (\text{VII.30a})$$

$$\lambda^{E''} = \lambda^{E'} + d\lambda^{E'} \quad (\text{VII.30b})$$

Assim é possível expressar o processo iterativo de obtenção das correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$, correspondentes ao passo de iteração $k+1$, mediante a seguinte equação de recursão:

$$\boxed{\mathbf{K}_T^{E+1} d\phi^{k+1} = -\mathbf{r}^k + d\lambda^{k+1} p^{E+1}} \quad (\text{VII.31})$$

onde as correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$ devem atender a condição de restrição (VII.29):

$$C(d\phi^{k+1}, d\lambda^{k+1}) = 0 \quad (\text{VII.32})$$

Note-se a semelhança das equações (VII.31) e (VII.10), onde pode ser notado que no método modificado de Newton-Raphson a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T^{E-1} e o vetor de forças externas p^{E-1} não são modificados durante o processo de correção.

Em forma análoga ao método completo de Newton-Raphson as sucessivas aproximações ao ponto de equilíbrio procurado são:

$$\phi^E \cong \phi^{k+1} = \phi^{E-1} + d\phi^0 + d\phi^1 + d\phi^2 + \dots + d\phi^{k+1} = \phi^{E-1} + \Delta\phi^{k+1} \quad (\text{VII.33a})$$

$$\lambda^E \cong \lambda^{k+1} = \lambda^{E-1} + d\lambda^0 + d\lambda^1 + d\lambda^2 + \dots + d\lambda^{k+1} = \lambda^{E-1} + \Delta\lambda^{k+1} \quad (\text{VII.33b})$$

onde ϕ^{E-1} , λ^{E-1} correspondem a uma configuração de equilíbrio atingida na etapa anterior, e $\Delta\phi^{k+1}$, $\Delta\lambda^{k+1}$ são as correções acumuladas na etapa atual após de $k+1$ iterações, isto é:

$$\Delta\phi^{k+1} = d\phi^0 + d\phi^1 + d\phi^2 + \dots + d\phi^{k+1} \quad (\text{VII.34a})$$

$$\Delta\lambda^{k+1} = d\lambda^0 + d\lambda^1 + d\lambda^2 + \dots + d\lambda^{k+1} \quad (\text{VII.34b})$$

Para obter as correções $d\phi^{k+1}$, $d\lambda^{k+1}$ a equação (VII.31) é solucionada em dois passos fazendo a decomposição [29]:

$$d\phi^{k+1} = \delta_1^{k+1} + d\lambda^{k+1} \delta_0 \quad (\text{VII.35})$$

onde δ_0 , δ_1^{k+1} são as soluções de :

$$K_T^{E-1} \delta_0 = p^{E-1} \quad (\text{VII.36a})$$

$$K_T^{E-1} \delta_1^{k+1} = -r^k \quad (\text{VII.36b})$$

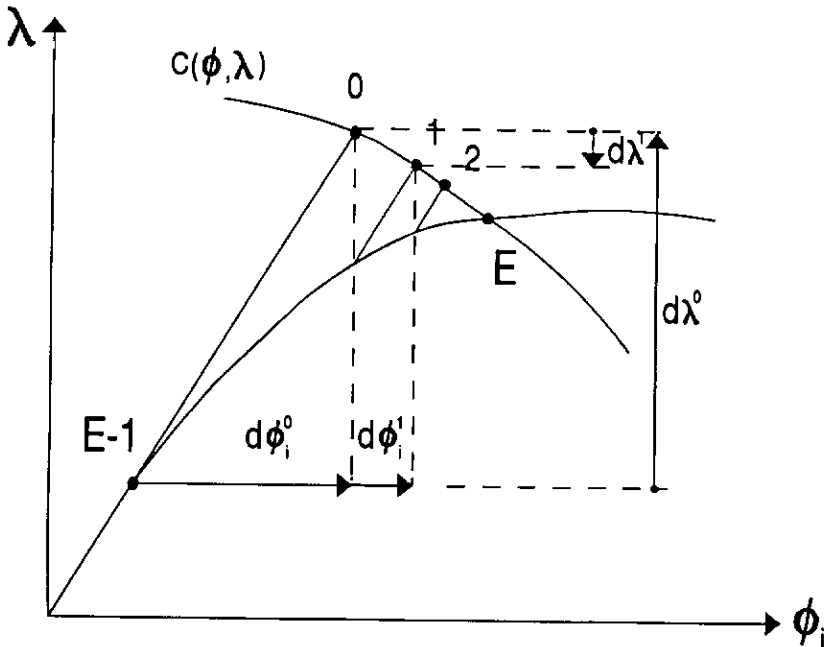


FIGURA VII.2 - Método de Newton-Raphson modificado.

Note-se que o vetor δ_0 permanece constante durante o processo de correção. A decomposição (VII.35) permite expressar a $d\phi^{k+1}$ como função de $d\lambda^{k+1}$, e fazendo a substituição na equação de restrição (VII.32) chega-se a uma equação adicional do tipo:

$$C(d\lambda^{k+1}) = 0 \quad (\text{VII.37})$$

da qual pode ser obtida a correção $d\lambda^{k+1}$, e substituindo esta correção na equação (VII.35) é possível obter a correção $d\phi^{k+1}$.

VII.4 EQUAÇÕES DE RESTRIÇÃO

VII.4.1 - CONTROLE DE CARGA

No controle de carga o incremento de carga entre duas configurações sucessivas de equilíbrio , $\Delta\lambda^E = \lambda^E - \lambda^{E-1}$, é mantido constante durante o processo iterativo de correção, isto é:

$$\Delta\lambda^E = d\lambda^0 \quad (\text{VII.38})$$

portanto as equações de restrição são:

$$\boxed{d\lambda^k = 0} \quad , \quad k > 0 \quad (\text{VII.39})$$

Das equações (VII.16) e (VII.35) tem-se que tanto para o método completo de Newton-Raphson como para o modificado as sucessivas correções $d\phi^{k+1}$ são:

$$d\phi^{k+1} = \delta_1^{k+1} \quad (\text{VII.40})$$

Deve-se notar que este procedimento falha em pontos limites.

VII.4.2 - CONTROLE DE DESLOCAMENTO

No controle de deslocamento o incremento de uma coordenada generalizada entre duas configurações sucessivas de equilíbrio , $\Delta\phi_1^E = \phi_1^E - \phi_1^{E-1}$, é mantido constante durante o processo iterativo de correção, isto é:

$$\Delta\phi_1^E = d\phi_1^0 \quad (\text{VII.41})$$

portanto as equações de restrição são:

$$d\phi_1^k = 0 \quad , \quad k > 0 \quad (\text{VII.42})$$

Neste caso , a correção $\delta\lambda^{k+1}$ para o método completo de Newton-Raphson é da equação (VII.16):

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{\delta_{1_1}^{k+1}}{\delta_{0_1}^{k+1}} \quad (\text{VII.43})$$

e para o método modificado, da equação (VII.35):

$$\delta\lambda^{k+1} = - \frac{\delta_{1_1}^{k+1}}{\delta_{0_1}} \quad (\text{VII.44})$$

Uma possível escolha da coordenada ϕ_1 a controlar, sugerida por Rheinboldt [3] , consiste em adotar a coordenada correspondente à maior componente do vetor tangente δ_0 no início do passo.

VII.4.3 - CONTROLE DO COMPRIMENTO DE ARCO

Em forma genérica, as equações de restrição para as diferentes aproximações do comprimento de arco podem ser escritas como:

$$C(d\phi^k, d\lambda^k) = \mathbf{t}^k{}^T \mathbf{C} \mathbf{n}^k - \theta_0 = 0 \quad (\text{VII.45})$$

onde \mathbf{t}^k , \mathbf{n}^k são vetores do espaço ϕ, λ , θ_0 é uma constante e \mathbf{C} é uma matriz de ponderação, usualmente diagonal, positiva definida ou ao menos positiva semi-definida da forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ (w_\lambda)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.46})$$

A sub-matriz \mathbf{W} contém os fatores de ponderação das coordenadas generalizadas e w_λ é um fator de ponderação do parâmetro de cargas λ .

A maioria das propostas que aparecem na literatura [301-336] estão baseadas numa aproximação secante do comprimento de arco, i.e., são procurados pontos de equilíbrio sobre retas secantes ao caminho do equilíbrio. Notando que no limite a secante de uma curva coincide com o comprimento de arco as técnicas baseadas nestas aproximações secantes são denominadas "*métodos do comprimento de arco*".

As equações de restrição (VII.45) misturam quantidades com diferentes significados físicos, como deslocamentos, rotações, parâmetro de carga, e a utilização de fatores de ponderação é sugerida por vários autores [371,336], para adimensionalizar as equações de restrição. Mas, em forma análoga a como visto no capítulo IV, seção IV.1.2, estes fatores de ponderação representam uma transformação de coordenadas e definem implicitamente o parâmetro do caminho t . Notando que, em geral, as relações funcionais $\phi(t)$, $\lambda(t)$ podem ser muito diferentes para cada parâmetro t , isto implica em que a velocidade de convergência das iterações de correção pode ser também muito diferente para cada parâmetro t . Como este parâmetro é definido implicitamente pelos fatores de ponderação da equação (VII.46), existirá, portanto, influência destes fatores sobre a velocidade de convergência.

VII.5 - ESTRATÉGIAS DE PREDIÇÃO

Num método de continuação uma curva solução $\phi(t)$, $\lambda(t)$ das equações de equilíbrio (VII.1) é obtida em forma discreta como uma sucessão de aproximações aceitáveis $\phi(t_i)$, $\lambda(t_i)$ para uma seqüência de valores t_1 , t_2 , ..., do parâmetro de controle t . O principal objetivo de uma estratégia de predição é como proceder de uma configuração $\phi(t_i)$, $\lambda(t_i)$ à próxima configuração $\phi(t_{i+1})$, $\lambda(t_{i+1})$.

Isto requer uma aproximação à curva solução em torno da configuração $\phi(t_i)$, $\lambda(t_i)$ e a determinação sobre esta curva de uma configuração próxima à solução procurada $\phi(t_{i+1})$, $\lambda(t_{i+1})$.

O preditor mais simples, é o chamado preditor de Euler, onde a curva é aproximada por uma reta tangente.

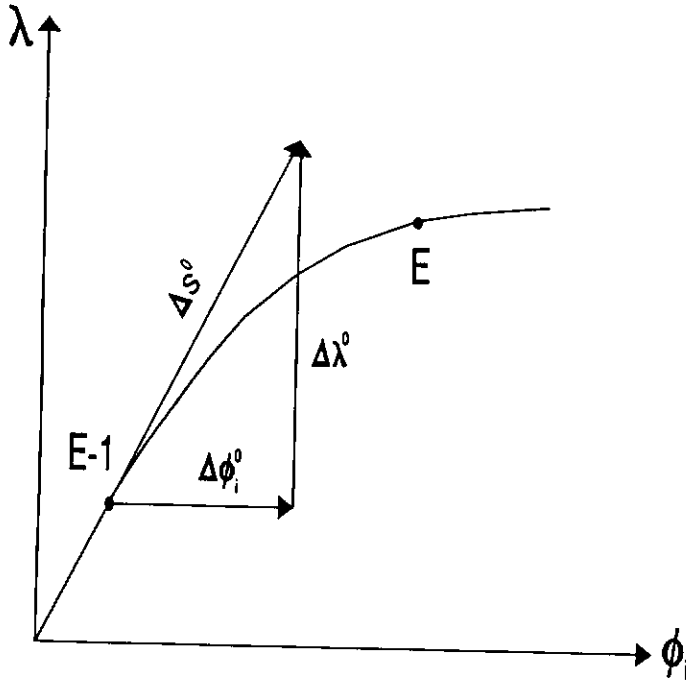


FIGURA VII.3 - Preditor de Euler.

Note-se que o vetor de componentes $\{\phi \lambda\} = \{\delta_0 \ 1\}$, onde δ_0 é a solução de:

$$\mathbf{K}_T^{E-1} \delta_0 = \mathbf{p}^{E-1} \quad (\text{VII.47})$$

é um vetor tangente ao caminho de equilíbrio na configuração E-1, portanto uma predição linear será da forma:

$$\{\Delta\phi^0 \ \Delta\lambda^0\} = \Delta\lambda^0 \{\delta_0 \ 1\} \quad (\text{VII.48})$$

que fornece uma primeira aproximação ao ponto E como:

$$\{\phi^E \ \lambda^E\} \cong \{\phi^{E-1} \ \lambda^{E-1}\} + \{\Delta\phi^0 \ \Delta\lambda^0\} \quad (\text{VII.49})$$

Observe-se que a única incógnita na equação (VII.48) é $\Delta\lambda^0$, portanto se a curva é descrita mediante incrementos $\Delta\lambda$ do parâmetro de carga, fazendo $\Delta\lambda^0 = \Delta\lambda$ fica determinada a posição da aproximação inicial.

Se a curva é descrita mediante incrementos $\Delta\phi_1$ de uma coordenada generalizada ϕ_1 , da equação (VII.48) tem-se:

$$\Delta\phi_1^0 = \Delta\phi_1 = \Delta\lambda^0 \delta o_1 \quad (\text{VII.50})$$

que implica

$$\Delta\lambda^0 = \Delta\phi_1 / \delta o_1 \quad (\text{VII.51})$$

ficando determinado o valor $\Delta\lambda^0$ e a posição da predição linear inicial.

Se a curva é descrita mediante incrementos Δs do comprimento de arco, da figura VII.3 tem-se:

$$\Delta\phi_1^{0T} \Delta\phi_1^0 + (\Delta\lambda^0)^2 = (\Delta s)^2 \quad (\text{VII.52})$$

e notando da equação (VII.48) que $\Delta\phi^0 = \Delta\lambda^0 \delta o$ resulta:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta s (\delta o^T \delta o + 1)^{-1/2} \quad (\text{VII.53})$$

onde o sinal indica o sentido do avanço, isto é, se o caminho é percorrido na direção de cargas crescentes ou decrescentes.

A curva pode ser descrita mediante incrementos fixos do parâmetro de controle ou alternativamente é possível utilizar incrementos variáveis. Um procedimento simples, sugerido por Ramm [34], consiste em atualizar o parâmetro de controle Δt como:

$$\Delta t^{i+1} = \Delta t^i (I_d/I_1)^{-1/2} \quad (\text{VII.54})$$

onde I_1 são as iterações requeridas no passo previo, e I_d é o número de iterações desejadas em cada passo. Esta técnica conduz a incrementos pequenos quando o caminho apresenta grande curvatura e incrementos grandes quando o caminho é quase linear, mas as mudanças fortes de curvatura não são adequadamente antecipadas.

É possível utilizar preditores mais elaborados que o simples preditor linear. Existem na literatura vários trabalhos [11],[12],[39],[40] sobre a utilização de preditores de alta ordem. A motivação principal para o uso destes preditores é melhorar a eficiência computacional do algoritmo de solução, particularmente na etapa de correção, evitando possíveis divergências e reduzindo a quantidade de iterações de correção.

Na referência [12] Eriksson descreve a utilização de varios preditores baseados em expansões de Taylor de segundo e terceiro grau, extrapolação Lagrangiana e alguns métodos usualmente empregados para a integração de problemas de valor inicial. Em referências prévias [13],[14] o mesmo autor descreve a utilização de preditores baseados em expansões de Taylor de segundo e terceiro grau deduzidas da teoria geral da estabilidade [15], chegando à conclusão que a utilização destes preditores melhoram a eficiência computacional.

VII.6 - ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

Aquí será utilizado um preditor baseado nas expansões de Taylor dos caminhos de equilíbrio usando o comprimento de arco s destes caminhos como parâmetro das expansões, isto é:

$$\phi(s) = \phi^{[0]} + \phi^{[1]} s + \phi^{[2]} s^2 + \phi^{[3]} s^3 + \dots \quad (\text{VII.55a})$$

$$\lambda(s) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} s + \lambda^{[2]} s^2 + \lambda^{[3]} s^3 + \dots \quad (\text{VII.55b})$$

Em particular, será adotado o comprimento de arco cilíndrico como parâmetro. Para uma justificação de seu emprego, considere sistemas estruturais cujas equações de equilíbrio sejam da forma:

$$F(\phi, \lambda) = f(\phi) - \lambda p = 0 \quad (\text{VII.56})$$

onde $f(\phi)$ é o vetor de forças internas, cujas componentes são funções não-lineares das coordenadas generalizadas ϕ , e p é um vetor constante de forças externas de referência. Desta equação pode-se deduzir que o parâmetro λ será, em geral, uma função não-linear das coordenadas $\phi(s)$ e portanto deve apresentar maior variação com o parâmetro s que estas coordenadas.

Isto implica que a projeção do caminho de equilíbrio sobre o plano das coordenadas generalizadas é, em geral, uma curva mais suave, que o próprio caminho. Portanto as expansões de Taylor de $\phi(s)$ usando o comprimento de arco cilíndrico deveriam apresentar maior raio de convergência que as expansões baseadas no comprimento de arco esférico. Este fato pode ser comprovado numericamente ^[41] e portanto será adotado o comprimento de arco cilíndrico ($w_\lambda=0$) como parâmetro do caminho.

Usando as equações (IV.64) os m -ésimos termos das expansões (VII.55), para o caso particular de comprimento de arco esférico ($w_\lambda=0$), são obtidos solucionando os seguintes sistemas de equações:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m=1 \\ \mathbf{K}_T^E \phi^{[1]} = \lambda^{[1]} p^E \quad (\text{VII.57a}) \\ \phi^{[1]T} \phi^{[1]} = 1 \quad (\text{VII.57b}) \\ \\ \text{para } m>1 \\ \mathbf{K}_T^E \phi^{[m]} = \lambda^{[m]} p^E - g^{[m]} \quad (\text{VII.57c}) \\ \phi^{[1]T} \phi^{[m]} = -\beta^{[m]} \quad (\text{VII.57d}) \end{array} \right.$$

onde $\beta^{[2]} = 0$, e para $m>2$:

$$\beta^{[m]} = \sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2m} [\phi^{[p]T} \phi^{[m-p+1]}] \quad (\text{VII.58})$$

onde a configuração ϵ é uma configuração equilibrada.

Estas equações são resolvidas segundo o fluxograma IV.1, pag. 98, e é utilizado o método de eliminação de Gauss para resolver os sistemas de equações lineares. Note-se que a matriz K_T^E é a mesma para todos os sistemas, portanto esta matriz é fatorizada uma única vez e o vetor dos pivôs da eliminação, i.e., a diagonal da matriz fatorizada, é armazenado para a análise da estabilidade.

Será adotado um preditor de quinta ordem, isto é, em cada configuração equilibrada no início de um novo incremento são calculados os coeficientes $\phi^{[m]}$, $\lambda^{[m]}$ para $m=1,2,3,4,5$. Onde os termos de quarta e quinta ordem são utilizados para estimar o erro da aproximação de terceira ordem. Fixando uma tolerância para esta estimativa de erro é possível definir automaticamente o comprimento Δs do preditor.

Note-se da discussão anterior que, em geral, o parâmetro de cargas $\lambda(s)$ apresenta uma maior variação que as coordenadas generalizadas $\phi_1(s)$, isto implica que em geral o erro de truncamento é maior no parâmetro de carga $\lambda(s)$, portanto controlando este erro é possível controlar também o erro nas coordenadas generalizadas $\phi_1(s)$.

O incremento $\Delta\lambda^0$ do preditor pode ser expresso como:

$$\Delta\lambda^0 = \lambda^{[1]} \Delta s^0 + \lambda^{[2]} (\Delta s^0)^2 + \lambda^{[3]} (\Delta s^0)^3 + \dots \quad (\text{VII.59})$$

Como a solução exata é desconhecida, uma forma de estimar o erro é fornecida pela comparação da convergência dos termos da expansão de $\Delta\lambda(s)$ em torno da última posição de equilíbrio atingida.

Separando estes termos em ímpares e pares é possível impor as seguintes tolerâncias:

$$\lambda^{[5]} (\Delta s^0)^5 = tol_1 [\lambda^{[3]} (\Delta s^0)^3 + \lambda^{[1]} \Delta s^0] \quad (\text{VII.60a})$$

$$\lambda^{[4]} (\Delta s^0)^4 = tol_2 [\lambda^{[2]} (\Delta s^0)^2] \quad (\text{VII.60b})$$

A primeira equação controla os termos ímpares e a segunda os termos pares, e baseado em experiências numéricas previas são adotados os valores 0.00001 e 0.001 para as tolerâncias tol_1 e tol_2 , os quais são mantidos fixos durante toda a análise.

Esta estratégia simples funciona adequadamente nos exemplos testados, mas seria conveniente basear os valores destas tolerâncias num estudo mais profundo que vincule o tamanho do incremento com o erro da aproximação e as características de convergência das expansões de Taylor ^[42].

A menor raiz positiva Δs^0 destas equações fornece o comprimento do passo inicial, e a predição inicial como:

$$\Delta \phi^0 = \phi^{[1]} \Delta s^0 + \phi^{[2]} (\Delta s^0)^2 + \dots + \phi^{[5]} (\Delta s^0)^5 \quad (\text{VII.61a})$$

$$\Delta \lambda^0 = \lambda^{[1]} \Delta s^0 + \lambda^{[2]} (\Delta s^0)^2 + \dots + \lambda^{[5]} (\Delta s^0)^5 \quad (\text{VII.61b})$$

Para a etapa de correção e baseado em testes numéricos comparativos efetuados por Eriksson ^[41], aqui será adotado o método de controle de deslocamentos, onde o deslocamento a controlar é escolhido em correspondência com a maior componente em valor absoluto do vetor tangente $\phi^{[1]}$ no início do passo ^[29].

Para os exemplos testados foi adotado um número fixo de iterações de correção, variando entre zero e quatro iterações.

VII.7 - DETEÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Para detectar que foi ultrapassado um ponto limite, existem na literatura duas técnicas ^[24]. Uma consiste em analisar a variação dos autovalores negativos da matriz de rigidez tangente entre dois pontos de equilíbrio sucessivos, esta

informação é obtida analisando a variação do sinal dos pivôs da eliminação Gaussiana entre estes pontos.

Notando que num ponto limite existe uma variação do grau de instabilidade, uma diferença na quantidade de autovalores negativos é um indicador de uma possível ultrapassagem de um ponto limite. Mas deve-se notar que o grau de instabilidade também varia ao ultrapassar uma bifurcação, e não varia ao ultrapassar um ponto limite de uma bifurcação simétrica. Portanto esta técnica é de aplicação limitada a problemas que não apresentem bifurcações.

A outra técnica consiste em analisar a variação do sinal do produto interno $p^T \delta$ no início de cada passo. É simples demonstrar que este produto muda de sinal ao passar um ponto limite, mas deve-se notar que também muda de sinal ao passar certos pontos de retorno.

Portanto, nenhuma destas duas técnicas é totalmente efetiva pois dependem de indicadores que não são completamente confiáveis.

A estratégia aqui adotada para detectar a ultrapassagem de um ponto limite consiste em verificar a variação de sinal da componente $\lambda^{(1)}$ do vetor tangente, diretamente do preditor de alta ordem. Isto é, a presença de um ponto de extremo neste preditor no intervalo Δs^0 é adotada como evidência da existência de um ponto de extremo sobre a solução exata. Esta técnica é sumamente efetiva não apresentando as falhas das anteriormente citadas.

Note-se que para solucionar as equações (VII.57) é necessário adotar o sinal do coeficiente $\lambda^{(1)}$ em correspondência com o sentido do avanço, como visto na seção IV.2.2, i.e., deve ser positivo se o caminho de equilíbrio é percorrido na direção de cargas crescentes ou negativo se é percorrido na direção de cargas decrescentes. Portanto ao ultrapassar um ponto limite deve ser feita uma mudança no sinal de $\lambda^{(1)}$ para evitar um retorno do caminho percorrido.

Para detectar que foi ultrapassado um ponto de bifurcação é verificada a variação do grau de instabilidade entre dois pontos sucessivos. Se entre estes pontos não existe um ponto limite esta variação é um indicador de que foi ultrapassada uma bifurcação.

Para o caso particular de uma bifurcação simétrica quando é percorrida a trajetória secundária, não existe variação do grau de instabilidade ao ultrapassar a bifurcação, mas é detectado um ponto limite. Portanto a detecção de um ponto limite sem variação do grau de instabilidade é um indicador de que foi ultrapassada uma bifurcação simétrica.

Uma vez detectados os pontos críticos, pontos limites e de bifurcação estes são determinados de maneira precisa com a técnica que se descreve a seguir.

VII.8 - CÁLCULO DIRETO DE PONTOS CRÍTICOS

Como assinalado por Wriggers e Simo [43], o cálculo direto de pontos críticos não têm recebido uma adequada atenção na literatura de engenharia. A maioria dos métodos atualmente empregados para isolar pontos críticos estão baseados na inspeção do sinal dos autovalores da matriz de rigidez tangente, e empregam procedimentos simples de biseção [38] ou alguma forma linearizada do problema de autovalor crítico [6],[7].

Em constraste, na literatura matemática e de análise numérica este tema têm recebido considerável atenção [43],[44],[45].

Conceitualmente, a ideia básica consiste em aumentar o sistema de equações não-lineares de equilíbrio somando uma equação de restrição que caracteriza a presença de um ponto crítico. Este sistema não-linear aumentado de equações é solucionado pelo método de Newton-Raphson ou alguma outra técnica iterativa, conduzindo ao cálculo direto do ponto crítico e o autovetor crítico.

As condições para que um ponto ϕ^C , λ^C seja um ponto crítico da solução das equações de equilíbrio $F(\phi, \lambda) = 0$, onde a matriz de rigidez tangente $F_\phi|_C$ apresenta um autovalor nulo com autovetor crítico associado $\hat{\xi}$ são:

$$F(\phi^C, \lambda^C) = 0 \quad (\text{VII.62a})$$

$$G(\phi^C, \lambda^C, \hat{\xi}) = F_\phi|_C \hat{\xi} = 0 \quad (\text{VII.62b})$$

$$l(\hat{\xi}) = \hat{\xi}^T \xi = 1 \quad (\text{VII.62c})$$

A primeira equação (VII.62a) indica que o ponto crítico é um ponto de equilíbrio, a segunda equação (VII.62b) indica a condição de equilíbrio crítico e a terceira equação (VII.62c) indica que o autovetor crítico possui módulo unitário.

Note-se que estas equações representam um sistema não-linear de $2n + 1$ equações com $2n + 1$ incógnitas, que são as n componentes do vetor ϕ^C , o valor crítico λ^C do parâmetro de cargas e as n componentes do autovetor crítico $\hat{\xi}$.

Utilizando a técnica similar à descrita por Wriggers e Simo [43], estas equações são resolvidas utilizando o método de Newton-Raphson. Em particular é adotado o método de Newton-Raphson modificado.

Para uma dedução das equações necessárias considere-se uma expansão em série de Taylor em torno de um ponto E próximo ao ponto crítico e para uma aproximação $\tilde{\xi}$ ao vetor crítico como:

$$F|_C = F|_E + [F_\phi|_E \Delta\phi + F_\lambda|_E \Delta\lambda] + \Delta F = 0 \quad (\text{VII.63a})$$

$$G|_C = G|_E + [G_\phi|_E \Delta\phi + G_\lambda|_E \Delta\lambda + G_\xi|_E \Delta\xi] + \Delta G = 0 \quad (\text{VII.63b})$$

$$l(\xi) = l(\tilde{\xi}) + l_\xi|_{\tilde{\xi}} \Delta\xi + \Delta l = 0 \quad (\text{VII.63c})$$

onde os incrementos $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\xi$ são:

$$\Delta\phi = \phi^C - \phi^E \quad (\text{VII.64b})$$

$$\Delta\lambda = \lambda^C - \lambda^E \quad (\text{VII.64b})$$

$$\Delta\xi = \xi^C - \tilde{\xi} \quad (\text{VII.64c})$$

As parcelas $\Delta F(\Delta\phi, \Delta\lambda)$, $\Delta G(\Delta\phi, \Delta\lambda, \Delta\xi)$, $\Delta l(\Delta\xi)$ são correções de ordem superior nos incrementos $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\xi$ que podem ser expressas como:

$$\Delta F = F|_C - F|_E - [F_\phi|_E \Delta\phi + F_\lambda|_E \Delta\lambda] \quad (\text{VII.65a})$$

$$\Delta G = G|_C - G|_E - [G_\phi|_E \Delta\phi + G_\lambda|_E \Delta\lambda + G_\xi|_E \Delta\xi] \quad (\text{VII.65b})$$

$$\Delta l = l(\xi) - l(\tilde{\xi}) - l_\xi|_{\tilde{\xi}} \Delta\xi \quad (\text{VII.65c})$$

Assumindo que seja conhecida uma configuração $c'(\phi^{C'}, \lambda^{C'})$ muito próxima ao ponto crítico, e uma aproximação ξ' também muito próxima ao vetor crítico ξ , então é possível aproximar os incrementos $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\xi$ como:

$$\Delta\phi \cong \Delta\phi' = \phi^{C'} - \phi^E \quad (\text{VII.66a})$$

$$\Delta\lambda \cong \Delta\lambda' = \lambda^C - \lambda^E \quad (\text{VII.66b})$$

$$\Delta\xi \cong \Delta\xi' = \xi' - \tilde{\xi} \quad (\text{VII.66c})$$

Portanto as parcelas ΔF , ΔG , Δl podem ser expressas como:

$$\Delta F \cong F|_{C'} - F|_E - [F_\phi|_E \Delta\phi' + F_\lambda|_E \Delta\lambda'] \quad (\text{VII.67a})$$

$$\Delta G \cong G|_{C'} - G|_E - [G_\phi|_E \Delta\phi' + G_\lambda|_E \Delta\lambda' + G_\xi|_{\tilde{\xi}} \Delta\xi'] \quad (\text{VII.67b})$$

$$\Delta l \cong l(\xi') - l(\tilde{\xi}) - l_\xi|_{\tilde{\xi}} \Delta\xi' \quad (\text{VII.67c})$$

Definindo as diferenças $d\phi$, $d\lambda$, $d\xi$ como:

$$d\phi \cong \Delta\phi - \Delta\phi' = \phi^C - \phi^{C'} \quad (\text{VII.68a})$$

$$d\lambda \cong \Delta\lambda - \Delta\lambda' = \lambda^C - \lambda^{C'} \quad (\text{VII.68b})$$

$$d\xi \cong \Delta\xi - \Delta\xi' = \xi - \xi' \quad (\text{VII.68c})$$

então substituindo as aproximações (VII.67) das parcelas ΔF , ΔG , Δl , nas expansões de Taylor (VII.63) tem-se:

$$F_{\phi}|_E d\phi + F_{\lambda}|_E d\lambda + F|_{C'} \cong 0 \quad (\text{VII.69a})$$

$$G_{\phi}|_E d\phi + G_{\lambda}|_E d\lambda + G_{\xi}|_{\tilde{\xi}} d\xi + G|_{C'} \cong 0 \quad (\text{VII.69b})$$

$$l_{\xi}|_{\tilde{\xi}} d\xi + l(\xi') \cong 0 \quad (\text{VII.69c})$$

As derivadas $G_{\phi}|_E$, $G_{\lambda}|_E$, $G_{\xi}|_{\tilde{\xi}}$ da equação de autovalor (VII.62b) são:

$$G_{\phi}|_E = F_{\phi\phi}|_E \tilde{\xi} \quad (\text{VII.70a})$$

$$G_{\lambda}|_E = F_{\phi\lambda}|_E \tilde{\xi} \quad (\text{VII.70b})$$

$$G_{\xi}|_{\tilde{\xi}} = F_{\phi}|_E \quad (\text{VII.70c})$$

e a derivada $l_{\xi}|_{\tilde{\xi}}$ da condição de restrição de vetor unitário do autovetor crítico é:

$$l_{\xi}|_{\tilde{\xi}} = 2 \tilde{\xi} \quad (\text{VII.71})$$

então o sistema de equações (VII.69) pode se escrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} F_{\phi}|_E & 0 & F_{\lambda}|_E \\ F_{\phi\phi}|_E \tilde{\xi} & F_{\phi}|_E & F_{\phi\lambda}|_E \tilde{\xi} \\ 0 & 2 \tilde{\xi}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\phi \\ d\xi \\ d\lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F|_{C'} \\ G|_{C'} \\ l(\xi') \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.72})$$

As soluções $d\phi$, $d\lambda$, $d\xi$ fornecem uma melhor aproximação ao ponto crítico e ao autovetor crítico como:

$$\phi^{C''} = \phi^{C'} + d\phi \quad (\text{VII.73a})$$

$$\lambda c'' = \lambda c' + d\lambda \quad (\text{VII.73b})$$

$$\xi'' = \xi' + d\xi \quad (\text{VII.73c})$$

A partir destas aproximações o processo se repete até atingir uma determinada tolerância nas diferenças das aproximações.

Particularizando para as equações de equilíbrio estático:

$$\mathbf{F}(\phi, \lambda) = \mathbf{f}(\phi) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (\text{VII.74})$$

onde \mathbf{f} é o vetor de forças internas e \mathbf{p} é o vetor de forças externas. Assumindo que o vetor \mathbf{p} seja constante tem-se:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{F}_\phi = \mathbf{f}_\phi \quad (\text{VII.75a})$$

$$\mathbf{F}_\lambda = -\mathbf{p} \quad (\text{VII.75b})$$

$$\mathbf{F}_{\phi\phi} = \mathbf{f}_{\phi\phi} \quad (\text{VII.75c})$$

$$\mathbf{F}_{\phi\lambda} = \mathbf{F}_{\lambda\lambda} = \mathbf{0} \quad (\text{VII.75d})$$

onde \mathbf{K}_T é a matriz de rigidez tangente, e levando em conta a definição (V.45) da matriz $\mathbf{K}_\phi^E(\xi)$, tem-se:

$$\mathbf{F}_{\phi\phi} \Big|_E \tilde{\xi} = \mathbf{K}_\phi^E(\tilde{\xi}) \quad (\text{VII.76})$$

Portanto o sistema de equações (VII.72) fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^E & 0 & -\mathbf{p} \\ \mathbf{K}_\phi^E(\tilde{\xi}) & \mathbf{K}_T^E & 0 \\ 0 & 2 \tilde{\xi}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\phi \\ d\xi \\ d\lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}|_{c'} \\ \mathbf{G}|_{c'} \\ l(\xi') \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.77})$$

Para obter a solução destas equações é utilizado o seguinte esquema:

1) Resolver a primeira equação para obter $d\phi$:

$$\mathbf{K}_T^E d\phi = -\mathbf{F}|_{c'} + d\lambda \mathbf{p} \quad (\text{VII.78})$$

Chamando do , da às soluções de:

$$\mathbf{K}_T^E do = \mathbf{p} \quad (\text{VII.79a})$$

$$\mathbf{K}_T^E da = -\mathbf{F}|_{c'} \quad (\text{VII.79b})$$

então $d\phi$ pode ser expresso como:

$$\boxed{d\phi = da + d\lambda do} \quad (\text{VII.80})$$

2) Resolver a segunda equação para $d\xi$

$$\mathbf{K}_T^E d\xi = -\mathbf{G}|_{c'} - \mathbf{K}_\phi^E(\tilde{\xi}) d\phi \quad (\text{VII.81})$$

onde fazendo a substituição de $d\phi$ da equação (VII.80) tem-se:

$$\mathbf{K}_T^E d\xi = -\mathbf{G}|_{c'} - \mathbf{K}_\phi^E(\tilde{\xi}) da - d\lambda \mathbf{K}_\phi^E(\tilde{\xi}) do \quad (\text{VII.82})$$

Chamando db , dc às soluções de:

$$K_T^E db = G|_{c'} + K_\phi^E(\tilde{\xi}) da \quad (\text{VII.83a})$$

$$K_T^E dc = K_\phi^E(\tilde{\xi}) do \quad (\text{VII.83b})$$

então $d\xi$ pode ser expresso como:

$$d\xi = - db - d\lambda dc \quad (\text{VII.84})$$

3) Calcular o incremento $d\lambda$. Fazendo a substituição de $d\xi$ na última equação de (VII.77) tem-se:

$$- 2 (\tilde{\xi}^T db + d\lambda \tilde{\xi}^T dc) = - l(\xi') \quad (\text{VII.85})$$

resultando

$$d\lambda = \frac{l(\xi')/2 - \tilde{\xi}^T db}{\tilde{\xi}^T dc} \quad (\text{VII.86})$$

Com $d\phi$, $d\xi$, $d\lambda$ é possível obter uma nova aproximação ao ponto crítico e ao autovetor crítico.

A velocidade de convergência depende fundamentalmente das predições iniciais do autovetor crítico $\tilde{\xi}$ e da configuração crítica $\phi^{c'}$, $\lambda^{c'}$.

VII.8.1 - APROXIMAÇÕES INICIAIS DE PONTOS CRÍTICOS

Para um ponto limite estas aproximações são obtidas do preditor de terceira ordem:

$$\lambda(s) = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} s + \lambda^{[2]} s^2 + \lambda^{[3]} s^3 \quad (\text{VII.87})$$

Num ponto limite a derivada do parâmetro $\lambda(s)$ em relação a s deve ser nula:

$$\left. \frac{d\lambda}{ds} \right|_L = \lambda^{[1]} + 2 \lambda^{[2]} s_L + 3 \lambda^{[3]} s_L^2 = 0 \quad (\text{VII.88})$$

Esta equação quadrática apresenta duas raízes:

$$s_L = \frac{-\lambda^{[2]} \pm \sqrt{(\lambda^{[2]})^2 - 3 \lambda^{[1]} \lambda^{[3]}}}{3 \lambda^{[3]}} \quad (\text{VII.89})$$

Assumindo que o radicando seja positivo, a menor raiz positiva fornece o valor desejado s_L . Substituindo nas expressões do preditor de terceira ordem, tem-se:

$$\phi^L = \phi^{[0]} + \phi^{[1]} s_L + \phi^{[2]} s_L^2 + \phi^{[3]} s_L^3 \quad (\text{VII.90a})$$

$$\lambda^L = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} s_L + \lambda^{[2]} s_L^2 + \lambda^{[3]} s_L^3 \quad (\text{VII.90b})$$

Para obter uma predição do autovetor crítico $\hat{\xi}$, notando que num ponto limite este vetor coincide com o vetor tangente no ponto limite, deve-se derivar a expressão (VII.90a) resultando:

$$\tilde{\xi} = \phi^{[1]} + 2 \phi^{[2]} s_L + 3 \phi^{[3]} s_L^2 \quad (\text{VII.91})$$

Para o caso particular de uma bifurcação simétrica quando é percorrida a trajetória secundária, a bifurcação é detectada como um ponto limite desta trajetória e portanto é usado o mesmo procedimento para aproximar o ponto crítico e o autovetor crítico.

Para uma bifurcação assimétrica ou para o caminho fundamental de uma bifurcação simétrica o autovetor crítico é obtido do problema linearizado de autovalor. Isto é, notando que num ponto crítico deve ser atendida a equação de autovalor crítico:

$$\mathbf{K}_T^C \hat{\xi} = 0 \quad (\text{VII.92})$$

Expandindo a matriz de rigidez tangente crítica K_T^C em série de Taylor do parâmetro s tem-se:

$$K_T^C = K_T^E + \hat{s} K_T^{[1]} + \hat{s}^2 K_T^{[2]} + \dots \quad (\text{VII.93})$$

onde \hat{s} corresponde ao valor do parâmetro s na configuração crítica, e a configuração E é a correspondente ao ponto imediatamente anterior à detecção da bifurcação.

Truncando a expressão acima no segundo termo, a equação de autovalor (VII.92) pode ser aproximada como:

$$(K_T^E + \hat{s} K_T^{[1]}) \hat{\xi} = 0 \quad (\text{VII.94})$$

que é um problema linear de autovalor.

Note-se que este problema de autovalor não precisa ser exatamente solucionado, pois só é necessária uma aproximação razoável ao autovetor crítico $\hat{\xi}$ para iniciar o método do cálculo direto descrito acima. Na implementação adotada são utilizados três passos de iteração inversa, iniciando o processo de iteração inversa com um vetor unitário com uma única componente de valor um e as restantes nulas. Esta componente é adotada em correspondência com a posição do primeiro pivô da fatorização Gaussiana que muda de sinal entre as duas configurações nas quais foi detectado o ponto de bifurcação.

Do problema linearizado de autovalor são obtidas as aproximações $\tilde{\xi}$ ao autovetor crítico e ao valor \hat{s} do parâmetro s na configuração crítica (ϕ^C, λ^C) , com \hat{s} é possível obter uma aproximação desta configuração utilizando o preditor de quinta ordem como:

$$\phi^{C'} = \phi^{[0]} + \phi^{[1]} \hat{s} + \phi^{[2]} \hat{s}^2 + \phi^{[3]} \hat{s}^3 + \phi^{[4]} \hat{s}^4 + \phi^{[5]} \hat{s}^5 \quad (\text{VII.95a})$$

$$\lambda^{C'} = \lambda^{[0]} + \lambda^{[1]} \hat{s} + \lambda^{[2]} \hat{s}^2 + \lambda^{[3]} \hat{s}^3 + \lambda^{[4]} \hat{s}^4 + \lambda^{[5]} \hat{s}^5 \quad (\text{VII.95b})$$

VII.9 - CÁLCULO DAS TRAJETÓRIAS INICIAIS PÓS-CRÍTICAS

A obtenção das predições de alta ordem a partir de um ponto limite e de bifurcação são feitas segundo os pasos indicados nos fluxogramas IV.2 e IV.3 respectivamente.

Para a identificação das trajetórias pós-críticas numa bifurcação é comparado o grau de instabilidade de cada uma das trajetórias antes e após a bifurcação calculando a derivada primeira do autovalor crítico usando a equação (IV.208):

$$\hat{\omega}^{[1]} = B_1 \quad (\text{VII.96})$$

para bifurcações assimétricas, e para o caminho fundamental de uma bifurcação simétrica; e as equações (IV.237):

$$\hat{\omega}^{[2]} = - 2 \lambda^{[2]} A_2 \quad (\text{VII.97})$$

para o caminho secundario de uma bifurcação simétrica.

Isto permite uma correta individualização de cada uma das trajetórias da bifurcação, inclusive quando estas trajetórias são quase paralelas.

Deve-ser observado que este procedimento é limitado a bifurcações simples.

VII.10 - ESTABILIZAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ NUM PONTO CRÍTICO

Deve-se notar que para se obter as predições de alta ordem a partir de um ponto crítico é necessário resolver sistemas de equações onde a matriz do sistema é singular, portanto é necessário efetuar modificações para resolver estes sistemas.

Utilizando o método de eliminação de Gauss, aqui é adotada a estratégia de estabilização da matriz tangente sugerida por Riks [46] e Thurston [47], onde é efetuada uma fatoração posposta, eliminando a linha e coluna desta matriz associadas com a maior componente do autovetor crítico.

Para uma descrição desta técnica considere a obtenção da solução δ do seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}_T^C \delta = \mathbf{p} \quad (\text{VII.98})$$

onde \mathbf{K}_T^C é a matriz de rigidez tangente num ponto crítico c que apresenta um autovalor nulo nesse ponto com autovetor unitário associado $\hat{\xi}$, e é assumido que o vetor do lado direito \mathbf{p} é ortogonal ao autovetor crítico:

$$\hat{\xi}^T \mathbf{p} = 0 \quad (\text{VII.99})$$

existindo portanto solução para o único vetor δ ortogonal ao autovetor crítico:

$$\hat{\xi}^T \delta = 0 \quad (\text{VII.100})$$

Particionando a matriz singular \mathbf{K}_T^C pela j -ésima linha e coluna tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{k}}_j \\ \bar{\mathbf{k}}_j^T & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ p_j \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.101})$$

onde o índice j é adotado em correspondência com a maior componente em valor absoluto $\hat{\xi}_j$ do autovetor crítico. $\bar{\mathbf{K}}$ é a submatriz obtida de \mathbf{K}_T^C eliminando a j -ésima linha e coluna, $\bar{\mathbf{k}}$ é obtido da j -ésima coluna \mathbf{k}_j eliminando o elemento k_{jj} , e $\bar{\delta}$, $\bar{\mathbf{p}}$ são obtidos de δ , \mathbf{p} , eliminando as componentes δ_j , p_j .

Note-se que se a componente $\hat{\xi}_j$ do autovetor crítico é diferente de zero, isto implica que a sub-matriz $\bar{\mathbf{K}}$ é não-singular, pois da equação de autovalor:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{k}}_j \\ \bar{\mathbf{k}}_j^T & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\xi} \\ \hat{\xi}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.102})$$

tem-se

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\xi} = -\bar{\mathbf{k}}_j \hat{\xi}_j \neq 0 \quad (\text{sem soma em } j) \quad (\text{VII.103a})$$

$$\mathbf{k}_j^T \bar{\xi} = -k_{jj} \hat{\xi}_j \quad (\text{VII.103b})$$

Note-se que se a submatriz $\bar{\mathbf{K}}$ fosse singular isto implicaria que o lado direito da equação (VII.103a) deveria ser nulo. Para isto ser possível deveria ser $\bar{\mathbf{k}}_j$ um vetor nulo, pois $\hat{\xi}_j$ é assumido diferente de zero, mas o atendimento da equação (VII.103b) exigiria que $\hat{\xi}_j$ fosse nulo. Portanto, se $\hat{\xi}_j$ é diferente de zero isto implica que a submatriz $\bar{\mathbf{K}}$ é não-singular.

Observando que se a matriz completa \mathbf{K}_T^C é singular, isto implica que uma de suas linhas é uma combinação linear das outras, então para que o sistema de equações (VII.101) seja determinado é necessário substituir uma de suas linhas por outra equação linearmente independente.

Substituindo a j -ésima linha da matriz \mathbf{K}_T^C pela equação (VII.100) tem-se:

$$\mathbf{K}^* \delta = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{k}}_j \\ \bar{\xi}^T & \hat{\xi}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.104})$$

Note-se que a matriz \mathbf{K}^* não é, em geral, simétrica, mas a submatriz $\bar{\mathbf{K}}$ é simétrica, portanto para aproveitar esta simetria é conveniente resolver este sistema em dois passos. Re-escrevendo estas equações como:

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\delta} = \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{k}}_j \delta_j \quad (\text{VII.105a})$$

$$\bar{\xi}^T \bar{\delta} + \hat{\xi}_j \delta_j = 0 \quad (\text{sem soma em } j) \quad (\text{VII.105b})$$

e chamando $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ às soluções de:

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{p}} \quad (\text{VII.106a})$$

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{k}}_j \quad (\text{VII.106b})$$

então a parcela $\bar{\delta}$ do vetor solução δ pode ser expressa como:

$$\bar{\delta} = \mathbf{v}_0 - \delta_j \mathbf{v}_1 \quad (\text{VII.107})$$

Da equação (VII.103a) tem-se:

$$\mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{k}}_j = -\bar{\xi} / \hat{\xi}_j \quad (\text{VII.108})$$

portanto

$$\bar{\delta} = \mathbf{v}_0 + \delta_j \bar{\xi} / \hat{\xi}_j \quad (\text{VII.109})$$

Fazendo a substituição na segunda equação (VII.105b) tem-se:

$$\bar{\xi}^T (\mathbf{v}_0 - \delta_j \bar{\xi} / \hat{\xi}_j) + \hat{\xi}_j \delta_j = 0 \quad (\text{sem soma em } j) \quad (\text{VII.110})$$

que implica

$$\delta_j = -\hat{\xi}_j (\bar{\xi}^T \mathbf{v}_0) / [\bar{\xi}^T \bar{\xi} + (\hat{\xi}_j)^2] \quad (\text{VII.111})$$

Note-se que o denominador é o módulo do autovetor crítico. Portanto, assumindo que este autovetor seja de módulo unitário, a componente δ_j do vetor solução δ pode ser expressa como:

$$\delta_j = -\hat{\xi}_j (\bar{\xi}^T \mathbf{v}_0) \quad (\text{VII.112})$$

e fazendo a substituição na equação (VII.109) a parcela $\bar{\delta}$ do vetor solução δ é:

$$\bar{\delta} = \mathbf{v}_0 - (\bar{\xi}^T \mathbf{v}_0) \bar{\xi} \quad (\text{VII.113})$$

VII.11 - EXEMPLO 1: ARCO ABATIDO BIENGASTADO

Analisou-se um arco biengastado, sujeito a pressão uniforme, ilustrado na figura VII.4. Este problema foi resolvido analiticamente por Kerr e Soifer [48], e apresenta uma bifurcação simétrica onde o caminho secundário forma uma curva fechada que intersepta o caminho fundamental em dois pontos.

São adotadas as seguintes dimensões para o modelo: raio $R = 10$ in, ângulo de semi-abertura $\alpha = 15^\circ$, rigidez axial $EA = 2.056 \cdot 10^6$ lb, rigidez flexional $EI = 796$ lb in².

O parâmetro de cargas λ é medido em relação à seguinte magnitude da pressão de referência:

$$p_0 = \frac{EI}{h R^2} \quad (\text{VII.114})$$

onde h é a espessura do arco que é adotada como $h = 2 (3 I/A)^{1/2}$.

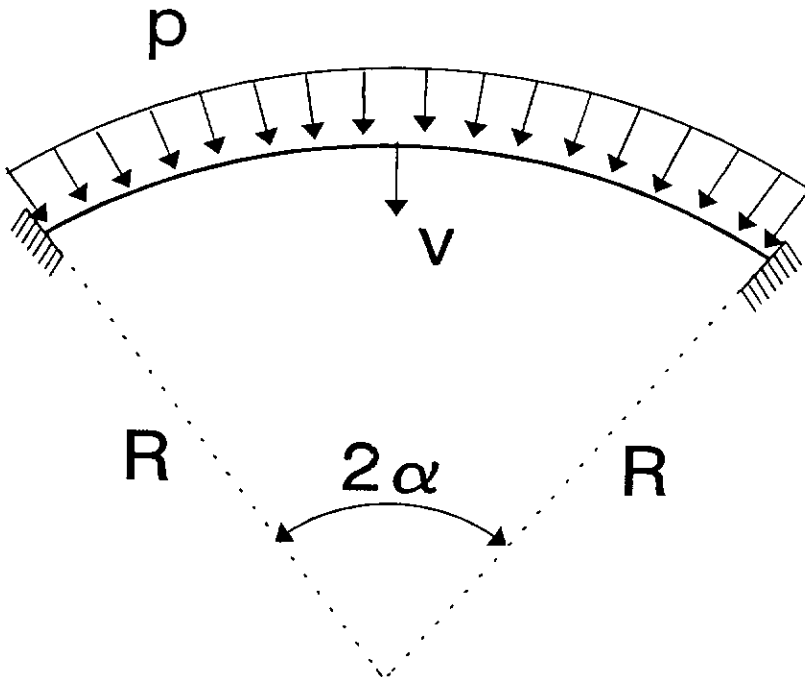


FIGURA VII.4 - Arco biengastado sob pressão uniforme.

A análise foi realizada com três discretizações de 8, 16 e 32 elementos, e na figura VII.5 são mostradas as trajetórias de equilíbrio num plano λ, v , onde v é o deslocamento no topo, para uma discretização de 32 elementos.

Na parte superior desta figura são mostrados os pontos de equilíbrio obtidos da análise incremental, e pode ser notado como a densidade destes pontos aumenta nas regiões de maior curvatura do caminho.

Na figura VII.6 são mostradas as trajetórias de equilíbrio num plano θ, v , onde θ é a rotação no topo, para a mesma discretização de 32 elementos.

Comparando as respostas com as do modelo analítico [48], nota-se uma boa aproximação às carga críticas, em particular ao primeiro ponto de bifurcação e ao ponto limite superior.

carga crítica	analítico	presente	dif. %
primeira bifurc.	1.9105	1.91051	0.00052
ponto limite sup.	2.2681	2.28166	0.598
segunda bifurc.	0.5131	0.66484	29.60
ponto limite inf.	0.4808	0.63573	32.22

TABELA VII.1 - valores críticos do parâmetro λ .

As diferenças maiores na segunda bifurcação e no ponto limite inferior são devidas à impossibilidade do elemento de reproduzir estados inextensíveis de flexão. Este fenômeno é conhecido como *trancamento de membrana* (*membrane locking*) [24], e é caracterizado por uma sobre-estimação da energia de deformação de membrana que conduz a um comportamento muito rígido do elemento.

Este efeito é mais acentuado quando são utilizadas discretizações grosseiras. Na figura VII.7 são mostrados os resultados obtidos com discretizações de 8, 16 e 32 elementos. Note-se que para a discretização mais grossa de 8 elementos a primeira bifurcação resulta estável em oposição à solução analítica instável.

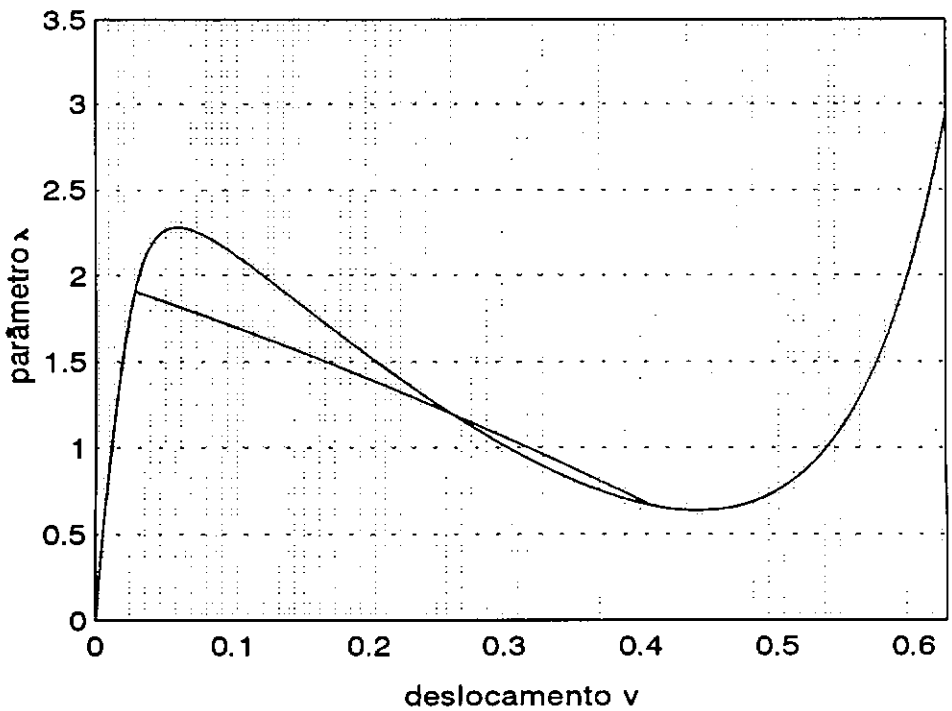
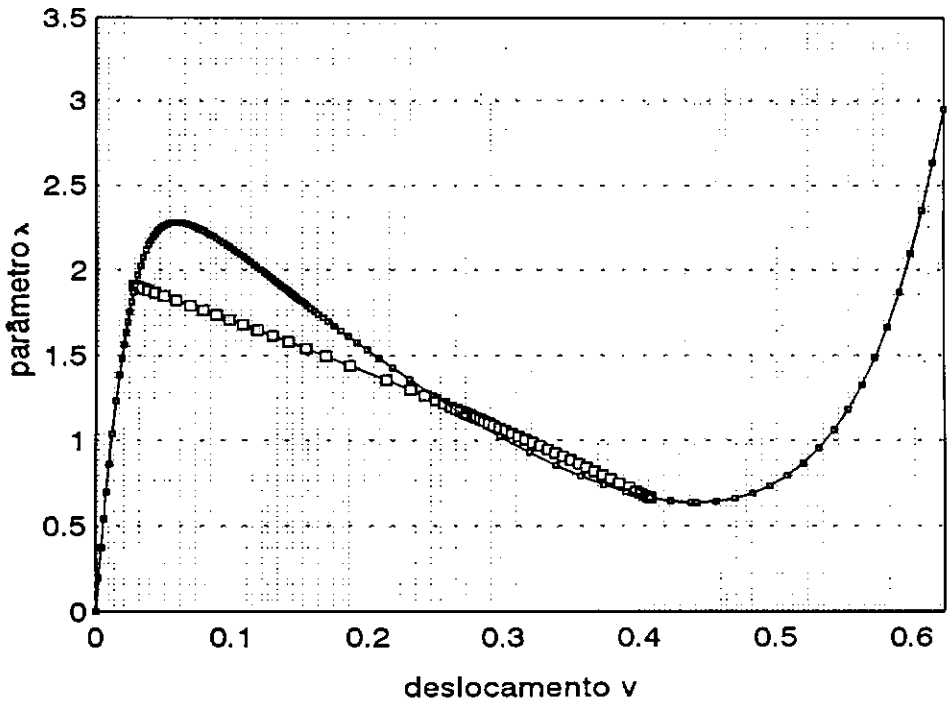


FIGURA VII.5 - Arco biengastado sob pressão uniforme.

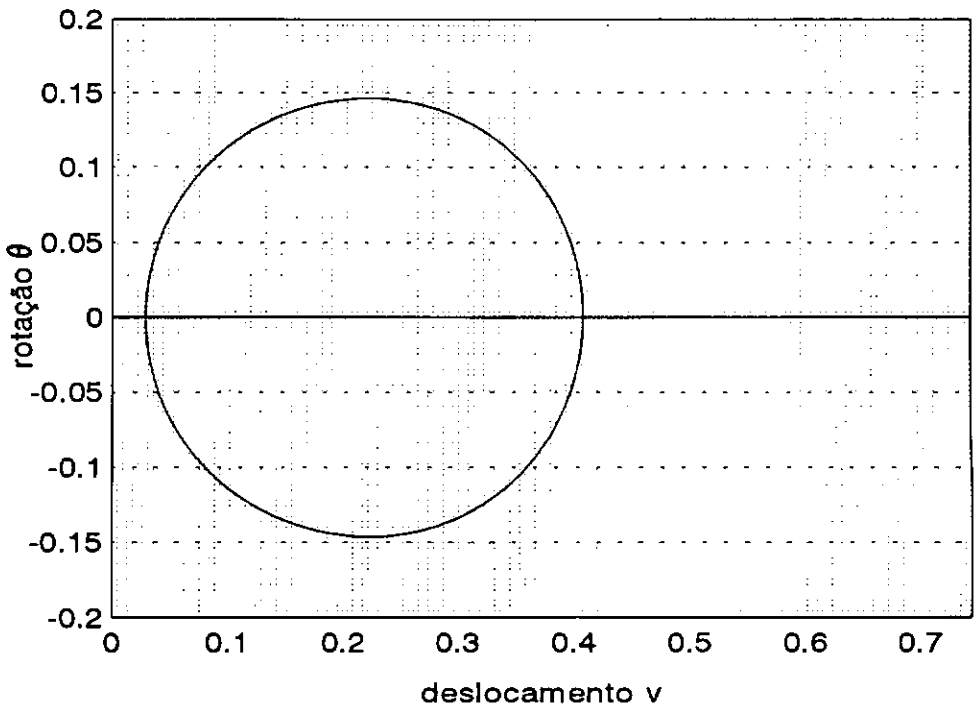
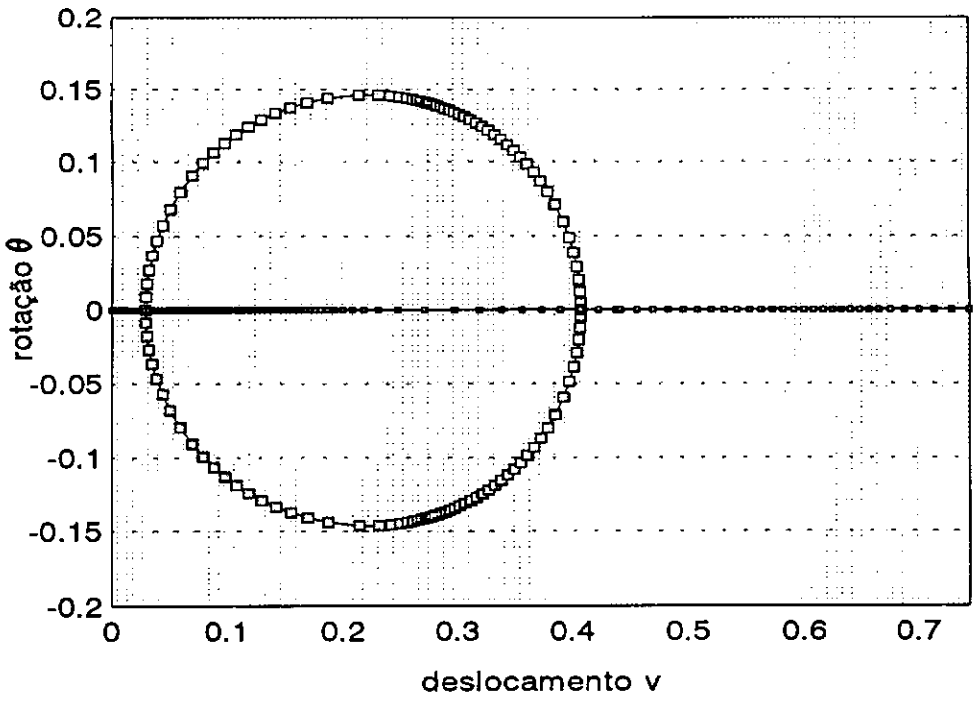


FIGURA VII.6 - Arco biengastado sob pressão uniforme.

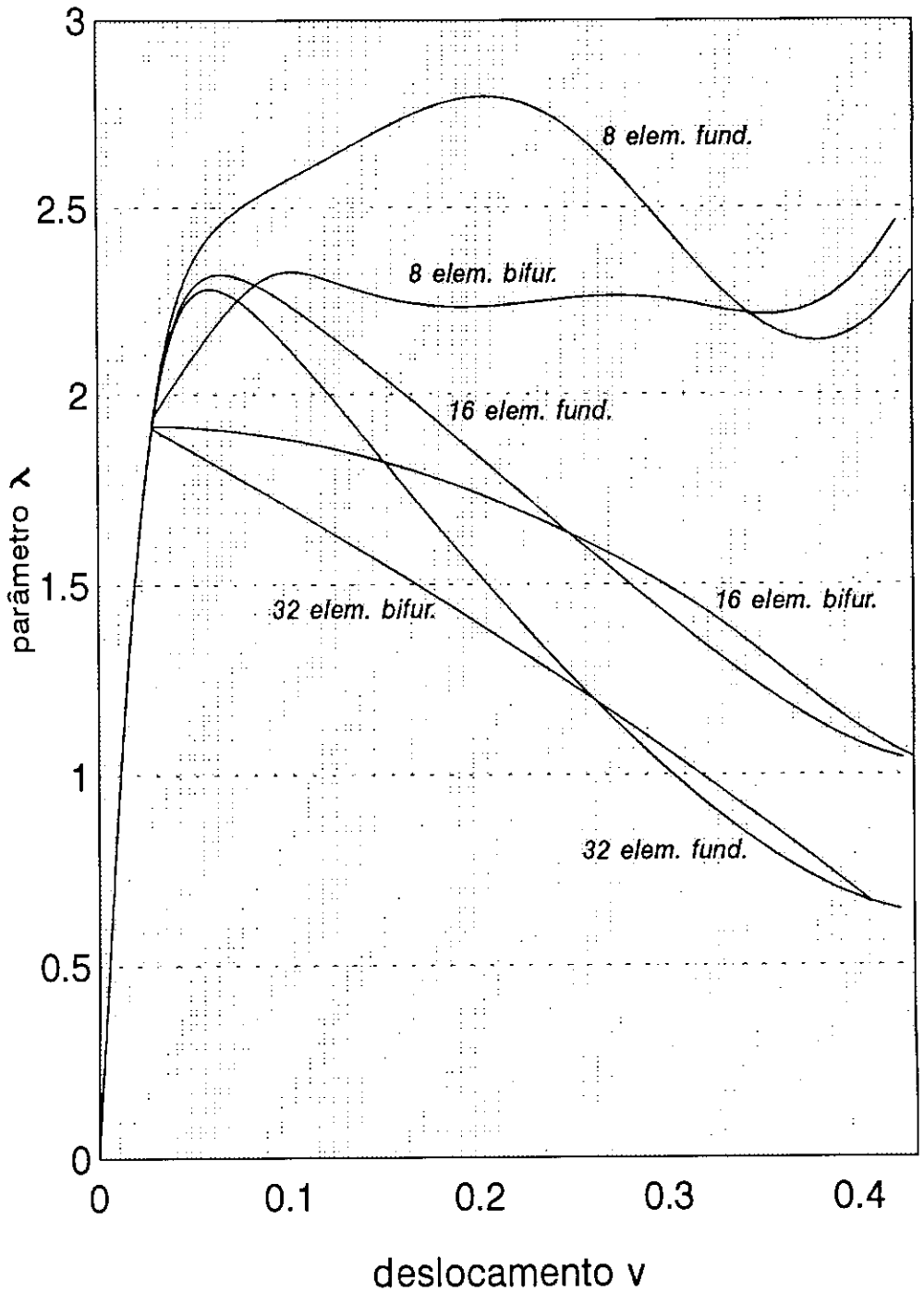


FIGURA VII.7 - Arco biengastado: Influência da discretização.

VII.12 - EXEMPLO 2: PÓRTICO ABATIDO BIENGASTADO

Analisou-se um pórtico triangular abatido biengastado, ilustrado na figura VII.8, sujeito a uma carga concentrada vertical no topo. Este modelo apresenta uma trajetória fundamental com dois pontos limites, a qual é interceptada por dois bifurcações simétricas instáveis.

São adotadas as seguintes dimensões: semi-largura $L = 32.856$ cm, abatimento $f = 0.98$ cm, módulo de elasticidade $E = 7\,200\,000$ N/cm², área $A = 1.18$ cm², inércia $I = 0.003784$ cm⁴.

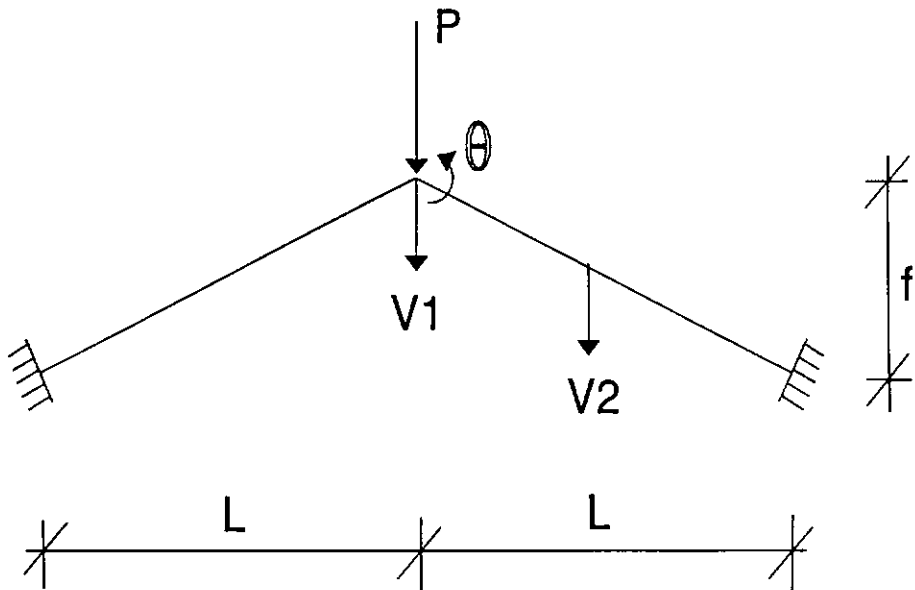


FIGURA VII.8 - Pórtico abatido biengastado.

A análise foi realizada com uma discretização de 32 elementos, e na figura VII.9 são mostradas na parte superior, as trajetórias de equilíbrio num plano P , v_1 , onde v_1 é o deslocamento vertical no topo; e na parte inferior num plano P , θ , onde θ é a rotação no topo. Note-se como a densidade dos pontos obtidos da análise incremental aumenta nas regiões de maior curvatura.

Na figura VII.10 são mostradas as trajetórias de equilíbrio num plano P , v_2 , onde v_2 é o deslocamento vertical no meio do lado, e pode-se observar que ambas as bifurcações são simétricas.

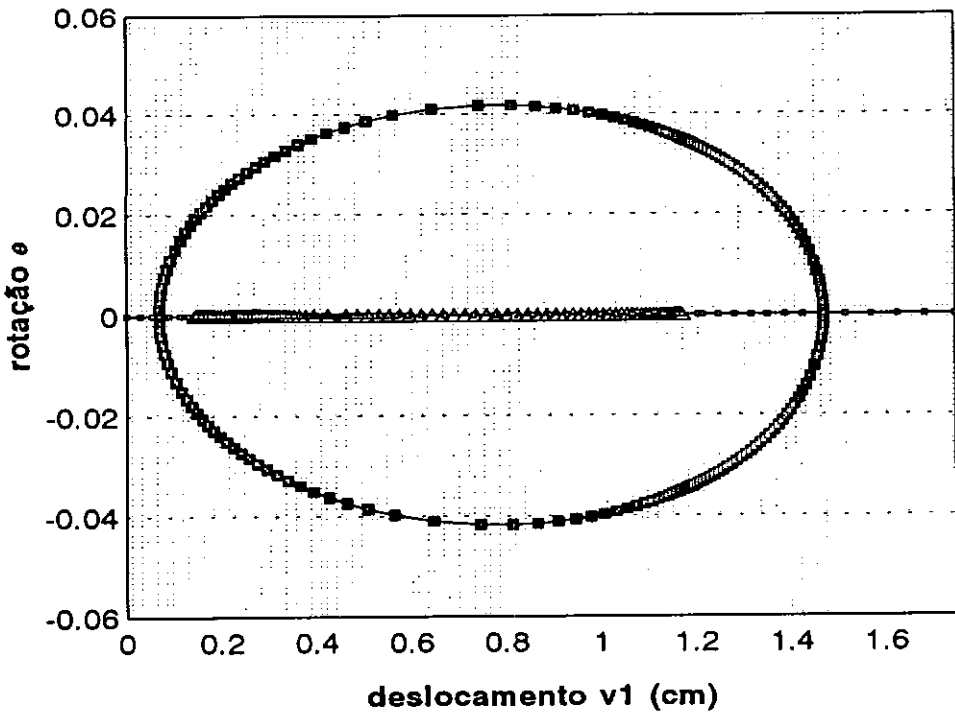
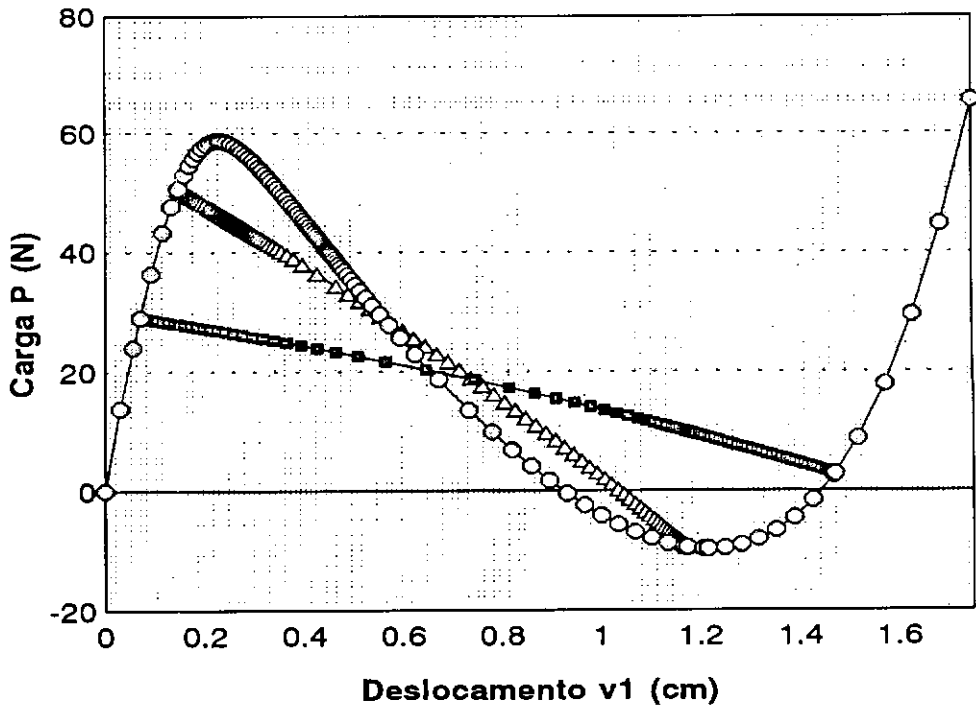


FIGURA VII.9 - Pórtico abatido biengastado.

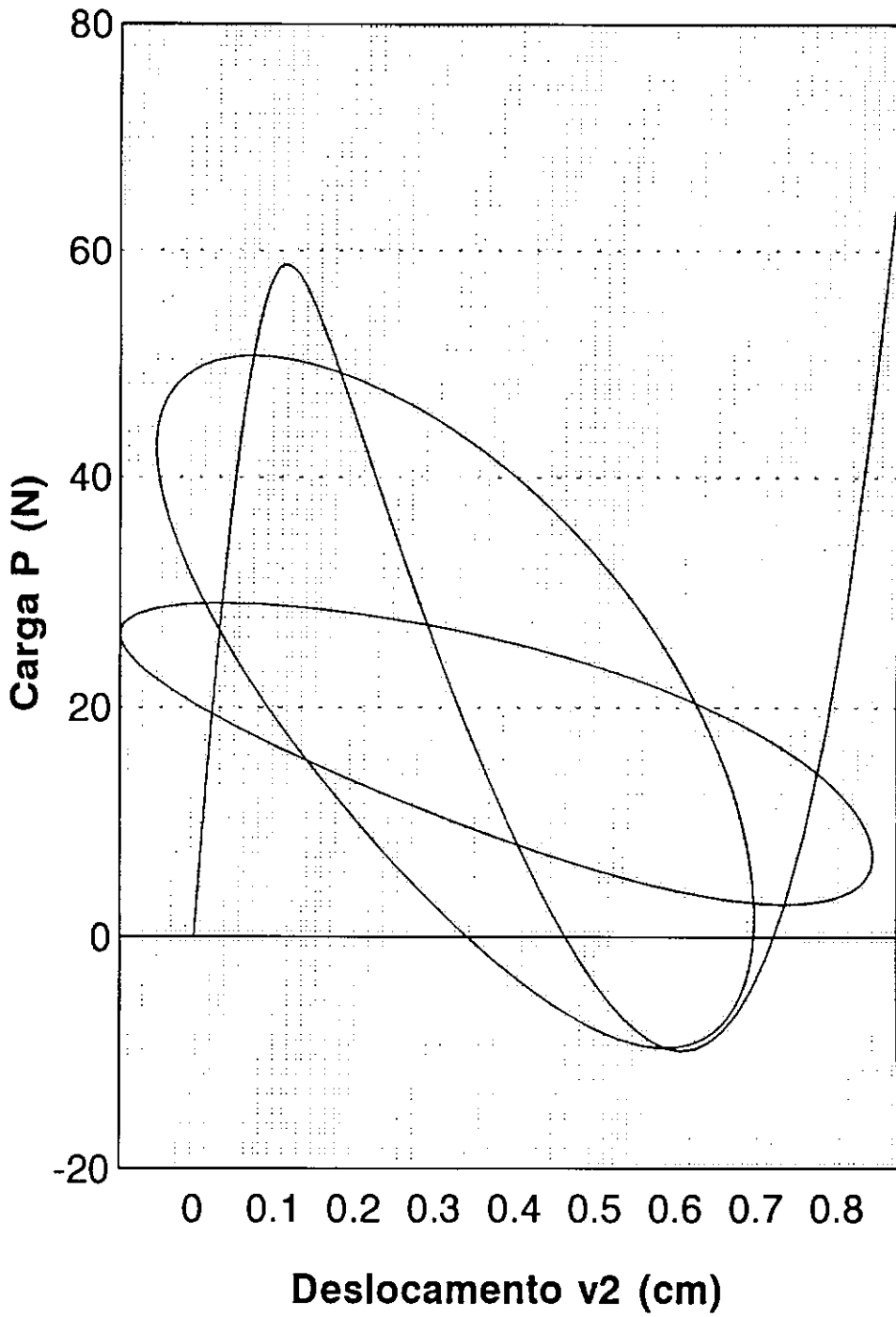


FIGURA VII.10 - Pórtico abatido biengastado.

VII.13 - EXEMPLO 3: TRELIÇA DUPLA

Analisou-se uma treliça dupla triangular, sujeita a uma carga concentrada no vértice superior, ilustrada na figura VII.11. Foi utilizado um elemento de treliça desenvolvido em forma análoga ao elemento de pórtico plano, mas utilizando o tensor de Green completo sem fazer simplificações para rotações moderadas. Para pequenas deformações este elemento reproduz adequadamente movimentos de corpo rígido.

São adotados os seguintes dimensões para a análise: $L = 99,84$ cm., $h_1 = 4$ cm., $h_2 = 20$ cm., área $A = 25$ cm², módulo de elasticidade para elementos inclinados $E_1 = 2\,100\,000$ kg/cm², módulo de elasticidade para o elemento vertical $E_2 = 180$ kg/cm².

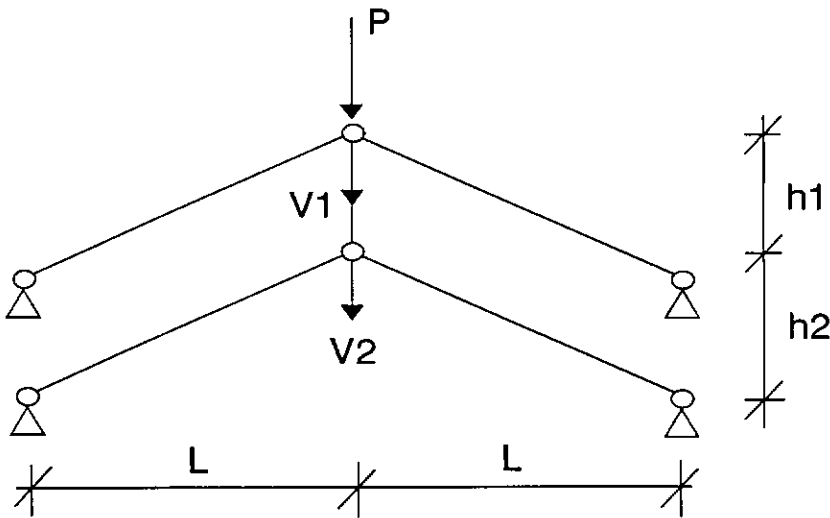


FIGURA VII.11 - Treliça dupla.

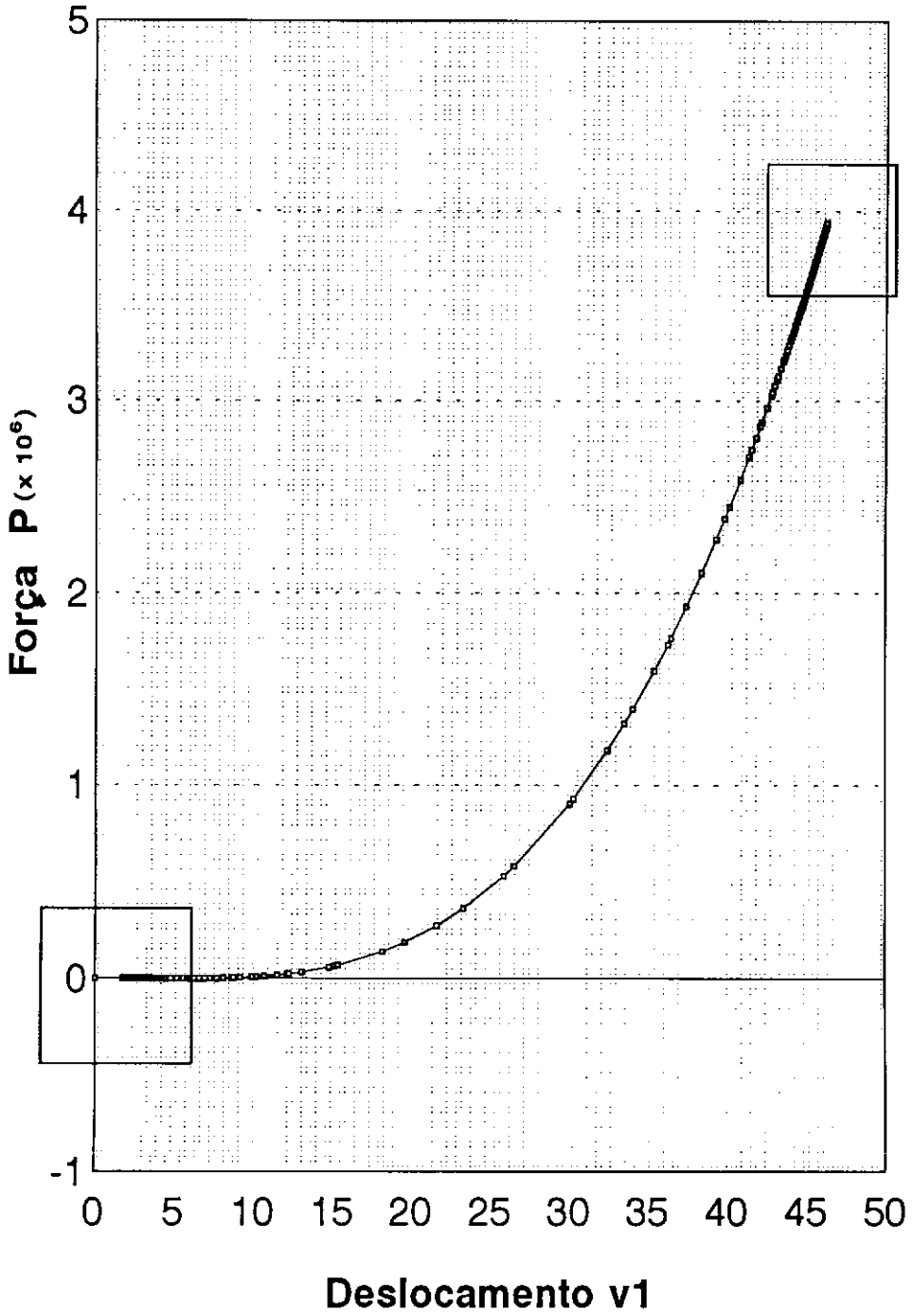
Na figura VII.12 é mostrada a trajetória de equilíbrio num plano P, v_1 , onde v_1 é o deslocamento vertical do vértice superior. pode-se observar um ponto limite muito agudo, seguido imediatamente de um ponto de retorno.

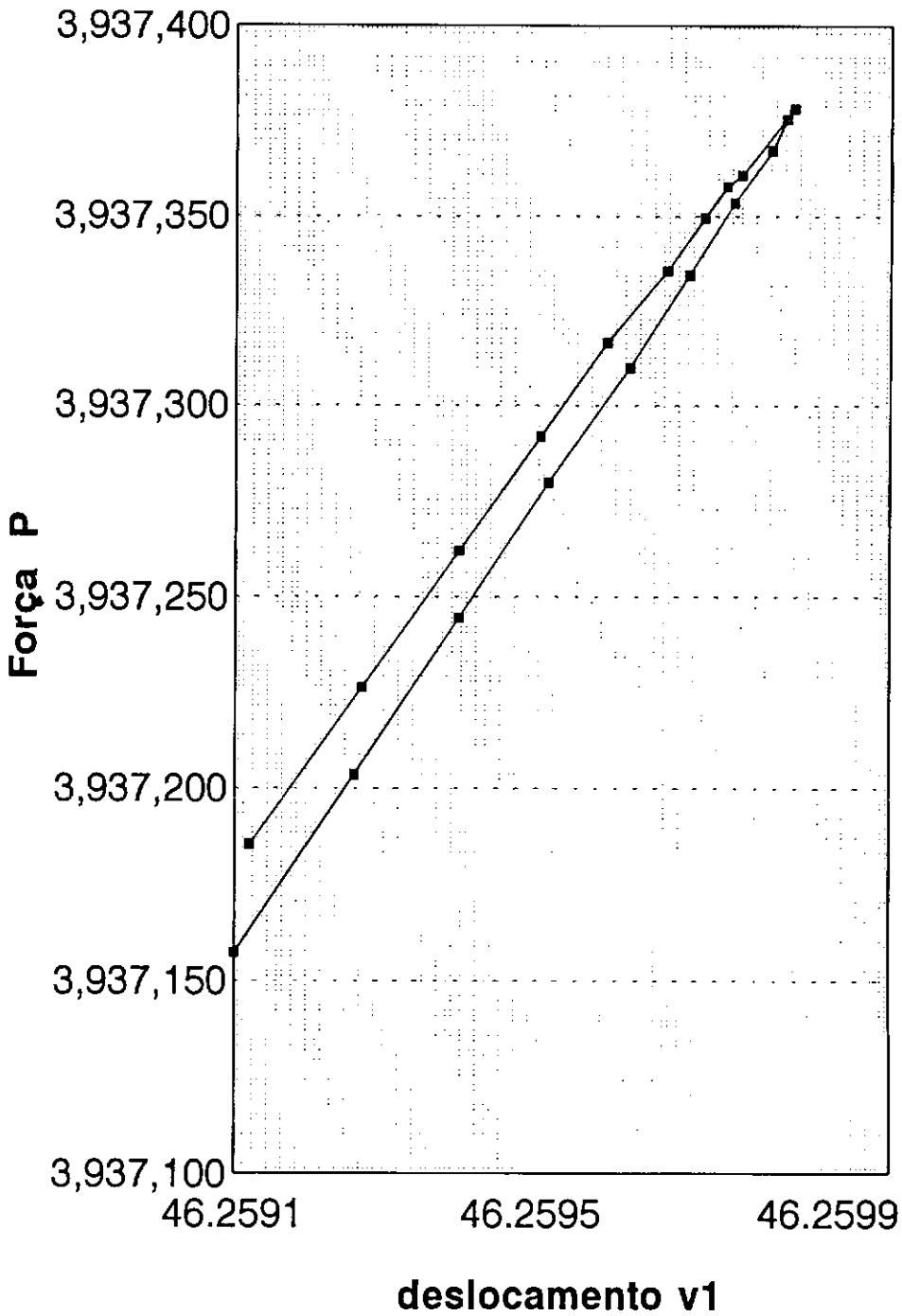
Na figura VII.13 é mostrada uma ampliação desta região. Deve-se notar que o produto escalar $\mathbf{p}^T \delta \mathbf{o}$ muda de sinal no ponto limite e no ponto de retorno, e devido à proximidade destes pontos a técnica de detecção de pontos limites baseada na mudança de sinal de aquele produto escalar falha em indicar a

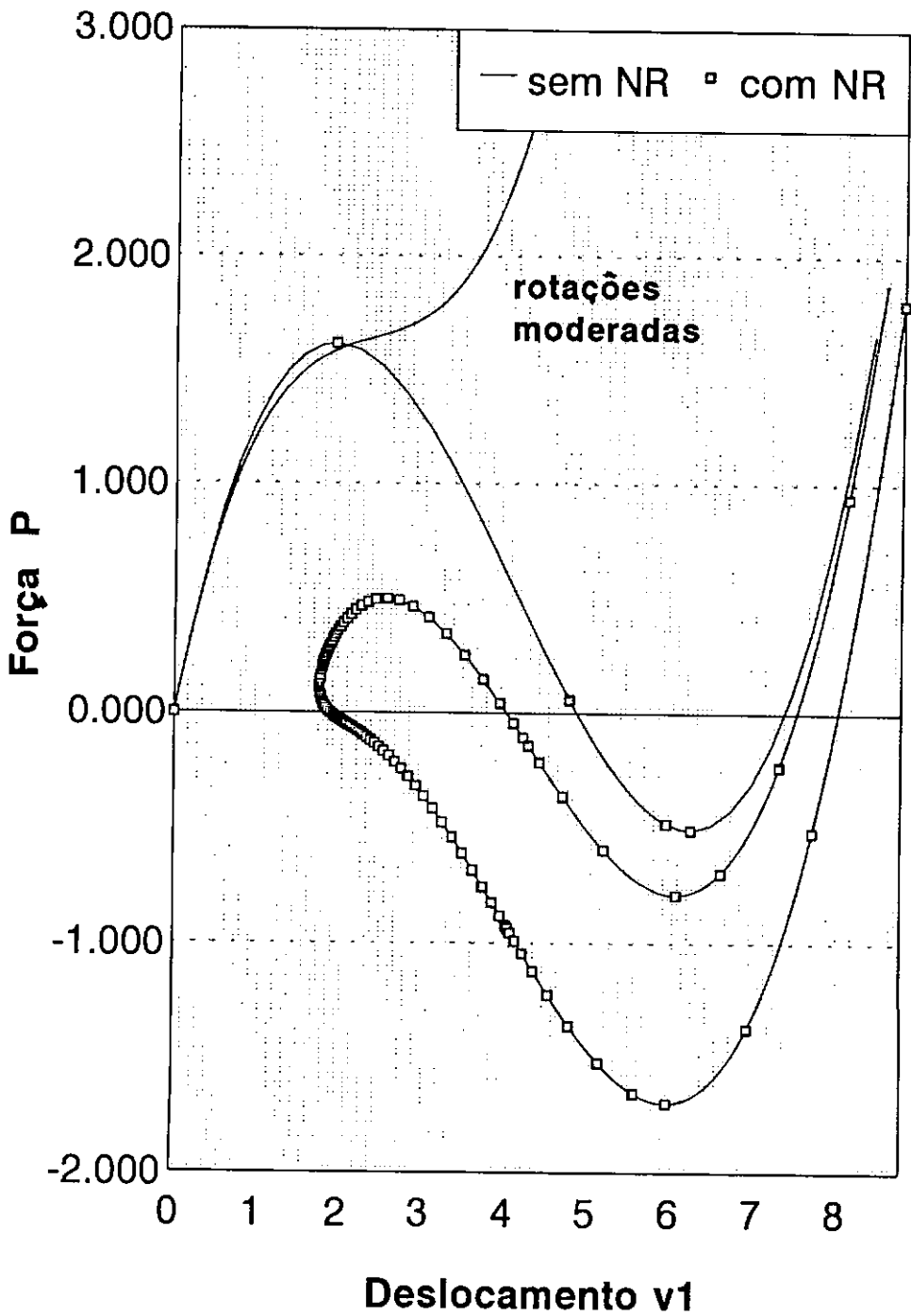
presença de um ponto limite. Pelo contrario, a técnica aqui proposta baseada na informação contida no preditor de alta ordem detecta adequadamente o ponto limite.

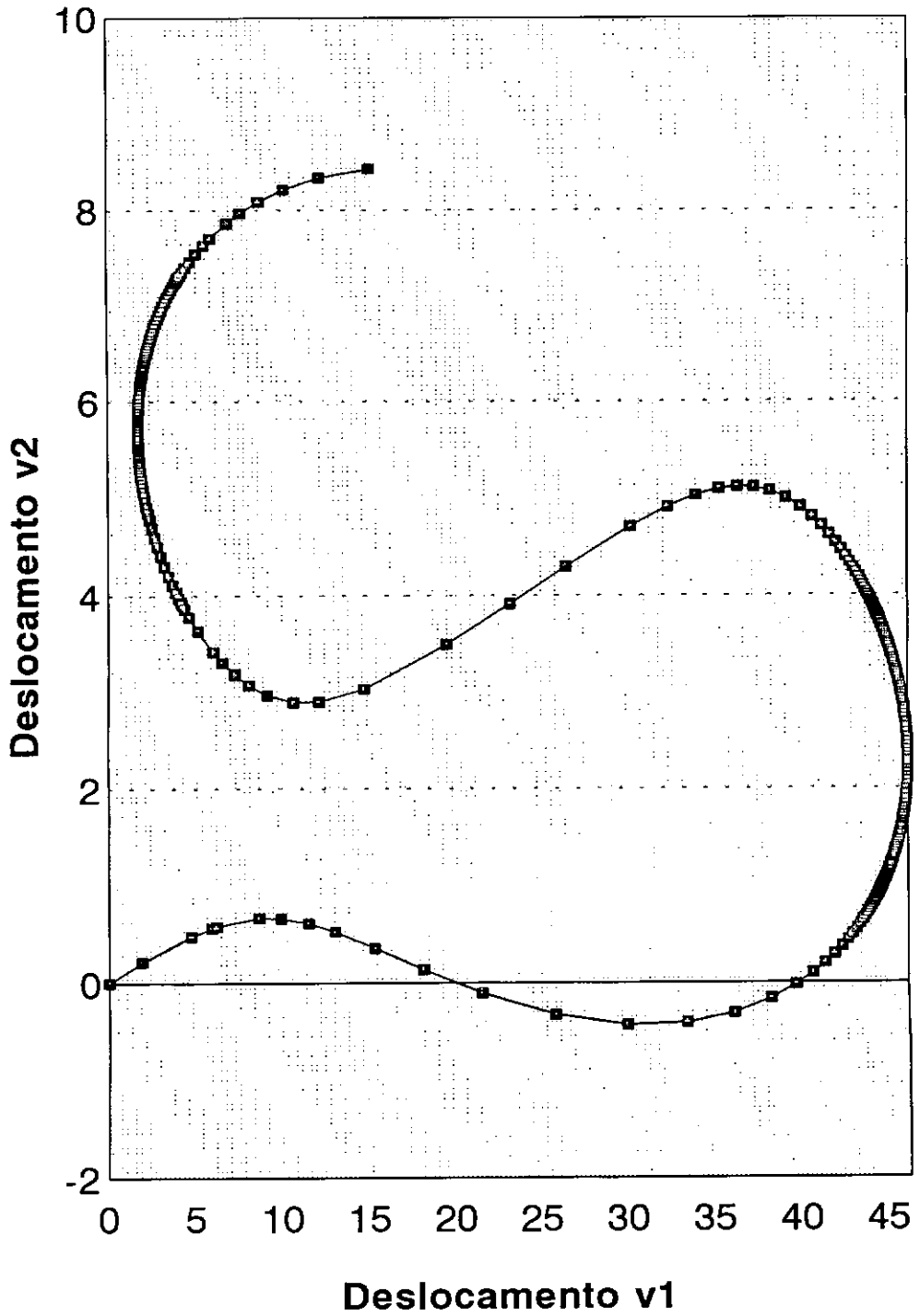
Na figura VII.14 é mostrada uma ampliação da região entorno da origem onde podem ser observados diferentes pontos de retornos. Nesta figura é mostrada a trajetória obtida com a teoria das rotações moderadas que não apresenta ponto limite. Deve-se notar que este exemplo foi analisado numericamente por Aznal e Herrera [49] , utilizando uma formulação Lagrangiana atualizada [19], com resultados muitos semelhantes até o segundo ponto limite, mas afastando-se dos aqui obtidos para valores crescentes dos deslocamentos. Isto é devido ao fato de que para grandes deformações o tensor de Green deixa de ser equivalente ao tensor de deformação infinitesimal. Na figura VII.15 , são mostrados os deslocamentos v_1 , v_2 dos nós extremos da treliça central, pode-se notar que quando o extremo superior sofreu um deslocamento (v_1) de 10 cm. o extremo inferior apenas se deslocou menos de 1 cm. Isto implica que a treliça central sofreu um encurtamento da ordem do 50 % , portanto, as deformações fornecidas pelo tensor de Green não possuem significado físico definido.

Deve-se notar que os simbolos mostrados nas figuras VII.12 até VII.15 são obtidos com quatros iterações de correção, e as curvas em traço cheio são obtidas sem efetuar nenhuma iteração de correção, utilizando-se apenas o preditor de alta ordem.

FIGURA VII.12 - *Treliça dupla.*

FIGURA VII.13 - *Treliça dupla.*

FIGURA VII.14 - *Treliça dupla.*

FIGURA VII.15 - *Treliça dupla.*

CAPITULO VIII

CONCLUSÕES

CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO E SUGESTÕES DE CONTINUAÇÃO

Dos resultados numéricos pode-se concluir que o método descreve adequadamente as diferentes trajetórias de equilíbrio, embora seja necessária uma maior quantidade de testes numéricos para uma melhor avaliação da eficiência das diversas partes do algoritmo de cálculo.

A introdução do preditor de alta ordem baseado nas expansões de Taylor dos caminhos de equilíbrios permite que a análise dos caminhos pós-críticos seja realizada em forma inteiramente automática.

A estratégia adotada para determinar o comprimento do passo na etapa de predição mostrou-se efetiva nas aplicações numéricas, mas seria desejável uma análise mais refinada baseada num estudo analítico da evolução do erro para otimizar o esforço computacional.

Deve-se notar que uma grande parte deste esforço computacional é consumida na etapa de predição, mais precisamente no cálculo dos vetores de forças geométricas. Este cálculo envolve, basicamente, um grande número de operações do tipo elemento por elemento com alto grau de paralelismo, portanto a implementação num computador paralelo poderia trazer grandes reduções nos tempos de processamento.

Para obter a solução dos sistemas de equações lineares foi adotado o método de eliminação de Gauss, pois este método fornece informação sobre a evolução dos autovalores da matriz de rigidez tangente, a qual é necessária para a análise de estabilidade das trajetórias de equilíbrio. Mas seria possível adotar métodos iterativos para a solução destes sistemas, particularmente para os sistemas de equações relacionados com o preditor de alta ordem. Deve-se notar que a eficiência computacional dos métodos iterativos depende essencialmente das aproximações iniciais da solução e levando em conta que o preditor de alta ordem está baseado em expansões de Taylor seria possível obter boas aproximações iniciais e portanto tirar vantagem da utilização dos métodos iterativos, em particular para problemas que possuem um grande número de graus de liberdade.

Seria desejável, derivar as matrizes de rigidez do elemento finito utilizando uma formulação corrotacional, que leve em conta os movimentos de corpo rígido e que possa reproduzir estados inextensíveis de flexão.

Deve-se notar que a grande diferença do comportamento pós-crítico com diferentes discretizações, obtida no exemplo do arco biengastado é devida à impossibilidade do elemento de reproduzir estados inextensíveis de flexão. Embora isto possa ser melhorado com adoção de formulações adequadas, seria desejável adotar uma estratégia de discretização adaptativa para minimizar os erros devidos à discretização.

Uma outra possível modificação seria eliminar completamente a etapa de correção. O exemplo da treliça dupla mostra que praticamente são obtidos os mesmos resultados, embora esta modificação possa apresentar dificuldades nas proximidades de pontos críticos, devidos ao mal-condicionamento da matriz de rigidez tangente, isto poderia ser corrigido com uma técnica de estabilização similar à apresentada na seção VII.10.

O desenvolvimento analítico feito no capítulo IV foi baseado na aplicação das técnicas das perturbações diretamente sobre as equações não-lineares de equilíbrio, e não sobre a energia potencial como é feito na teoria geral da estabilidade [1],[2]. Isto permite uma maior generalidade da aplicação desta técnica inclusive para problemas não-conservativos, ou problemas não-lineares em regime estacionário.

Uma extensão direta deste desenvolvimento é a análise de estruturas com pequenas imperfeições iniciais. Deve-se notar que a única diferença é a introdução de uma variável adicional, o parâmetro de imperfeições, sendo o desenvolvimento muito similar ao efetuado no capítulo IV.

APÊNDICE A

ÁLGEBRA INDICIAL

A.1 - NOTAÇÃO INDICIAL

A notação indicial permite uma importante redução na quantidade de termos de uma expressão ou equação.

Considere um vetor \mathbf{a} de n elementos, $\mathbf{a}^T = \{ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n \}$; usando notação indicial a_i representa um elemento do vetor \mathbf{a} , onde o índice i assume valores de 1 até n . De forma análoga b_{ij} representa um elemento de uma matriz \mathbf{B} , onde os índices i, j assumem valores de 1 até os limites fixados para cada um destes índices.

A convenção de soma é complementar à notação indicial e permite uma maior redução em expressões com somas. Considere, por exemplo, o produto escalar de dois vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} de n elementos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_i b_i \quad (\text{A.1})$$

A convenção de soma requer que o índice i seja repetido, mas elimina o uso do símbolo do somatório. A letra particular utilizada para tal índice pode ser arbitrariamente escolhida, assim $a_i b_i = a_j b_j$ simbolizam a mesma operação de soma. Os índices repetidos são chamados índices mudos. A efetividade da convenção de soma é mais aparente quando é aplicada a sistemas de equações. Considere o seguinte sistema:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \quad (\text{A.2a})$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \quad (\text{A.2b})$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \quad (\text{A.2c})$$

Num primeiro passo de abreviação, estas equações podem ser escritas como:

$$a_{1j} x_j = b_1 \quad (\text{A.3a})$$

$$a_{2j} x_j = b_2 \quad (\text{A.3b})$$

$$a_{3j} x_j = b_3 \quad (\text{A.3c})$$

e no passo final como:

$$a_{ij} x_j = b_i \quad (\text{A.4})$$

No primeiro passo, o índice j assume valores de 1 até 3 e os termos à esquerda da equação (A.3) devem somar-se pois o índice j está repetido. As três equações do primeiro passo podem ser representadas por uma única equação no último passo, mediante o uso do índice i em ambos os lados desta equação.

As convenções acima podem ser resumidas pelas seguintes regras:

- (i) Se um índice aparece uma única vez em cada termo de uma equação é chamado "*índice livre*", e deve aparecer em todos os termos da equação.

(ii) Se um índice aparece duas vezes em um termo de uma equação é chamado "índice mudo" e os respectivos termos devem ser somados.

(iii) Um mesmo índice não pode aparecer mais de duas vezes num termo de uma equação.

A.2 - O SIMBOLO δ_{ij} (DELTA DE KRONECKER)

Os deltas de Kronecker δ_{ij} são os elementos da matriz identidade de dimensão 3:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Portanto, as componentes δ_{ij} valem 1 se $i = j$, e 0 se $i \neq j$. Ainda mais a matriz é simétrica pois $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

O delta de Kronecker pode ser interpretado como um operador. Considere-se, por exemplo:

$$\delta_{ij} v_j = \delta_{i1} v_1 + \delta_{i2} v_2 + \delta_{i3} v_3 = v_i \quad (\text{A.6})$$

A aplicação de δ_{ij} a v_j simplesmente substitui i por j em v_j , portanto o símbolo δ_{ij} atua como um operador de substituição.

A.3 - O SÍMBOLO DE PERMUTAÇÃO e_{ijk}

Define-se o símbolo de permutação e_{ijk} como:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ é uma permutação par de } 1,2,3. \\ -1 & \text{se } ijk \text{ é uma permutação ímpar de } 1,2,3. \\ 0 & \text{se algum dos índices está repetido.} \end{cases}$$

Isto é, para o caso de índices diferentes:

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = - e_{132} = - e_{321} = - e_{213} = 1 \quad (\text{A.7})$$

Uma aplicação importante dos símbolos de permutação é a abreviação da expressão dos determinantes de matrizes de dimensão 3.

Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

cujo determinante é:

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - \\ & - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

que usando os símbolos de permutação pode ser escrito como:

$$|A| = e_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (\text{A.10})$$

ou equivalentemente como:

$$|A| = e_{ijk} a_{1i} a_{j2} a_{k3} \quad (\text{A.11})$$

Notando-se que o sinal do determinante muda quando se efetua uma permutação ímpar das linhas ou colunas de uma matriz, se mantem invariante se as permutações são pares, e é nulo se existem linhas ou colunas repetidas, tem-se:

$$e_{ijk} a_{im} a_{jp} a_{kq} = e_{mpq} |A| \quad (\text{A.12})$$

ou equivalentemente:

$$e_{ijk} a_{mi} a_{pj} a_{qk} = e_{mpq} |A| \quad (\text{A.13})$$

Considere-se o produto vetorial de dois vetores \mathbf{a}, \mathbf{b} , cujo resultado é um vetor \mathbf{c} fornecido pelo determinante:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \check{i}_1 & \check{i}_2 & \check{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

usando os símbolos de permutação as componentes c_i do vetor resultante do produto vetorial podem ser escritas como:

$$c_i = e_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.15})$$

Outra aplicação dos símbolos de permutação é a representação de produtos mistos de vetores, considere, por exemplo:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = e_{ijk} a_i b_j c_k \quad (\text{A.16})$$

A.4 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A.4.1 - SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS

No espaço tridimensional um sistema de coordenadas cartesianas retangulares é representado por um conjunto de três eixos ortogonais x_i ($i=1,2,3$). Neste sistema um vetor \mathbf{v} é expresso como:

$$\mathbf{v} = v_1 \check{i}_1 + v_2 \check{i}_2 + v_3 \check{i}_3 = v_i \check{i}_i \quad (\text{A.17})$$

onde $\check{\mathbf{l}}_i$ são os vetores unitários na direção dos eixos x_i , que cumprem:

$$\check{\mathbf{l}}_i \cdot \check{\mathbf{l}}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.18})$$

onde δ_{ij} são os delta de Kronecker. Assim, as componentes v_j do vetor \mathbf{v} podem ser expressas pelo seguinte produto escalar:

$$v_j = \mathbf{v} \cdot \check{\mathbf{l}}_j = v_i (\check{\mathbf{l}}_i \cdot \check{\mathbf{l}}_j) = \delta_{ij} v_i \quad (\text{A.19})$$

Freqüentemente é necessário reorientar os eixos de referência e avaliar os novos valores para as componentes de \mathbf{v} nesse novo sistema de coordenadas. Seja um sistema de coordenadas cartesianas y onde o vetor \mathbf{v} possui componentes v'_j , como:

$$v'_j = \mathbf{v} \cdot \check{\mathbf{m}}_j \quad (\text{A.20})$$

onde $\check{\mathbf{m}}_j$ são os vetores unitários na direção dos eixos y_j . As componentes do vetor \mathbf{v} nos dois sistemas estão relacionadas mediante os cosenos dos ângulos entre os sentidos positivos dos eixos x e y . Chamando $r_{ij} = \cos(y_i, x_j)$ ao cosseno diretor do eixo y_i na direção x_j , i.e., a componente segundo o eixo x_j do vetor unitário $\check{\mathbf{m}}_i$, fornecida pelo produto escalar:

$$r_{ij} = \cos(\check{\mathbf{m}}_i, \check{\mathbf{l}}_j) = \check{\mathbf{m}}_i \cdot \check{\mathbf{l}}_j \quad (\text{A.21})$$

então o vetor unitário $\check{\mathbf{m}}_i$ pode ser expresso no sistema de coordenadas x_j como:

$$\check{\mathbf{m}}_i = (\check{\mathbf{m}}_i \cdot \check{\mathbf{l}}_j) \check{\mathbf{l}}_j = r_{ij} \check{\mathbf{l}}_j \quad (\text{A.22})$$

e analogamente:

$$\check{\mathbf{l}}_i = (\check{\mathbf{l}}_i \cdot \check{\mathbf{m}}_j) \check{\mathbf{m}}_j = r_{ji} \check{\mathbf{m}}_j \quad (\text{A.23})$$

Note-se que em geral $r_{ij} \neq r_{ji}$. Assim as componentes v'_i do vetor \mathbf{v} no sistema de coordenadas no sistema de coordenadas y são:

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \check{\mathbf{m}}_i = r_{ij} (\mathbf{v} \cdot \check{\mathbf{l}}_j) = r_{ij} v_j \quad (\text{A.24})$$

ou seja

$$\boxed{v_i' = r_{ij} v_j} \quad (\text{A.25})$$

que em forma matricial pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R} \mathbf{v} \quad (\text{A.26})$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação e \mathbf{v}' é o vetor \mathbf{v} expresso no sistema de coordenadas y . Note-se que \mathbf{R} é uma matriz ortogonal, isto é, suas linhas e colunas são ortonormais entre si, pois:

$$\check{m}_i \cdot \check{m}_j = \delta_{ij} = r_{ip} r_{jq} (\check{l}_p \cdot \check{l}_q) = r_{ip} r_{jq} \delta_{pq} = r_{ip} r_{jp} \quad (\text{A.27a})$$

$$\check{l}_i \cdot \check{l}_j = \delta_{ij} = r_{ip} r_{qj} (\check{m}_p \cdot \check{m}_q) = r_{pi} r_{qj} \delta_{pq} = r_{pi} r_{pj} \quad (\text{A.27b})$$

ou seja

$$r_{ip} r_{jp} = r_{pi} r_{pj} = \delta_{ij} \quad (\text{A.28})$$

Portanto a inversa da matriz de rotação coincide com sua transposta, isto é:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (\text{A.29})$$

Em forma análoga as componentes v_i podem ser expressas como:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \check{l}_i = r_{ji} (\mathbf{v} \cdot \check{m}_j) = r_{ji} v_j' \quad (\text{A.30})$$

ou seja

$$\boxed{v_i = r_{ji} v_j'} \quad (\text{A.31})$$

que em forma matricial pode ser escrita como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}' = \mathbf{R}^T \mathbf{v}' \quad (\text{A.32})$$

A.4.2 - DEFINIÇÃO DE TENSORES CARTESIANOS

As regras de transformação anteriores, pelas quais as componentes de um vetor em um novo sistema de coordenadas são uma combinação linear das componentes no sistema original, são muito convenientes para estabelecer a definição de vetor.

No que se segue, serão adotadas essas regras como definição de vetor em substituição da definição usual de vetor como uma quantidade que possui direção e magnitude. A motivação principal para adotar esta definição, é que ela pode ser facilmente generalizada a quantidades físicas mais complicadas chamadas *tensores*.

Um *tensor de primeira ordem* é definido como o conjunto de três quantidades, chamadas suas componentes, com a propriedade de que se seus valores, num ponto fixo, para um sistema de coordenadas x são v_j , então seus valores v_1' , no mesmo ponto, para outro sistema de coordenadas y , são fornecidas pelas relações:

$$v_1' = r_{1j} v_j \quad (\text{A.33})$$

Como todos os vetores se transformam segundo esta lei, os vetores são tensores de primeira ordem.

Uma quantidade escalar, como a temperatura, possui o mesmo valor independentemente do sistema de coordenadas usado para especificá-la num ponto, portanto um escalar não é alterado pelas transformações de coordenadas e é definido como um *tensor de ordem zero*.

Um tensor de primeira ordem (ou um vetor) é um conjunto de $3^1 = 3$ componentes, e um tensor de ordem zero (ou um escalar) é um conjunto de $3^0 = 1$ componente.

Esta definição pode ser estendida similarmente a tensores de ordem mais alta.

Assim, um *tensor de segunda ordem* é um conjunto de $3^2 = 9$ componentes, tais que se seus valores num ponto são A_{ij} no sistema de coordenadas x , então seus valores A'_{ij} , no mesmo ponto, expressos em outro sistema de coordenadas y são definidos como:

$$A'_{ij} = r_{ip} r_{jq} A_{pq} \quad (\text{A.34})$$

Um *tensor de terceira ordem* é um conjunto de $3^3 = 27$ componentes, tais que se seus valores num ponto são A_{ijk} no sistema de coordenadas x , seus valores A'_{ijk} em outro sistema de coordenadas y são definidas como:

$$A'_{ijk} = r_{ip} r_{jq} r_{ks} A_{pqs} \quad (\text{A.35})$$

Os tensores podem ser de qualquer ordem, a equação de transformação geral é evidente das definições prévias. Todos estes tensores são chamados *tensores cartesianos* pela restrição aos sistemas de coordenadas utilizados.

A.5 - DIFERENCIAÇÃO DE FORMAS SIMÉTRICAS

Um tensor é chamado simétrico quando não muda de valor se a ordem de seus índices é alterada mediante uma permutação arbitrária. Assim, por exemplo, os tensores A_{ij} , B_{ijk} são simétricos se cumprem:

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{A.36a})$$

$$B_{ijk} = B_{jki} = B_{kij} = B_{ikj} = B_{kji} = B_{jik} \quad (\text{A.36b})$$

Considere a forma simétrica C de grau n :

$$C = C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \phi_{i_1} \phi_{i_2} \phi_{i_3} \dots \phi_{i_n} \quad (\text{A.37})$$

onde $C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$ é um tensor simétrico de n -ésima ordem e os argumentos ϕ_i são todos elementos de um mesmo vetor ϕ .

A derivada de C em relação ao argumento ϕ_{1_p} é :

$$\frac{\partial C}{\partial \phi_{1_p}} = n C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_{p-1}} \phi_{i_{p+1}} \dots \phi_{i_n}} \quad (\text{A.38})$$

Assim, para as seguintes formas simétricas:

$$A = A_{ij} \phi_i \phi_j \quad (\text{A.39a})$$

$$B = B_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (\text{A.39b})$$

$$C = C_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \quad (\text{A.39c})$$

onde A_{ij} , B_{ijk} , C_{ijkl} são tensores simétricos, as derivadas em relação ao argumento ϕ_i são:

$$\frac{\partial A}{\partial \phi_i} = 2 A_{ij} \phi_j \quad (\text{A.40a})$$

$$\frac{\partial B}{\partial \phi_i} = 3 B_{ijk} \phi_j \phi_k \quad (\text{A.40b})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \phi_i} = 4 C_{ijkl} \phi_j \phi_k \phi_l \quad (\text{A.40c})$$

Deve-se notar que esta regra só é válida para tensores simétricos, portanto para efetuar a diferenciação de uma forma não-simétrica é necessário simetrizar os tensores previamente transformado-a numa forma simétrica. O processo de simetrização consiste em somar todas as possíveis permutações dos índices do tensor não-simétrico e dividir o tensor resultante pelo fatorial da ordem do tensor. Assim, para tensores não-simétricos A_{ij} , B_{ijk} seus tensores simétricos associados são:

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2!} \{ A_{ij} + A_{ji} \} \quad (\text{A.41a})$$

$$B_{(ijk)} = \frac{1}{3!} \{ B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} + B_{ikj} + B_{kji} + B_{jik} \} \quad (\text{A.41b})$$

onde a simetrização é efetuada para os índices indicados entre parênteses.

APÊNDICE B

FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA PARA DERIVAÇÃO

B.1 - NOTAÇÃO PARA DERIVAÇÃO

Seja $u = u(t)$ uma função da variável t , cujas derivadas em relação a t serão indicadas como:

$$u^{(m)} = \frac{d^m u}{dt^m} \quad (\text{B.1})$$

onde adota-se por convenção $u^{(0)} \equiv u$.

B.2 - DERIVADAS DE $u = f_1 f_2$

Sejam $f_1(t)$, $f_2(t)$ funções da variável t , então a m -ésima derivada do produto $(f_1 f_2)$ em relação a t é expressa como:

$$(f_1 f_2)^{(m)} = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} f_1^{(p)} f_2^{(m-p)} \quad (\text{B.2})$$

onde $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p! (m-p)!}$ são os coeficientes binomiais, e por convenção adota-se $0! = 1$.

Alternativamente a equação (B.2) pode ser escrita, para $m > 0$, como:

$$(f_1 f_2)^{(m)} = f_1 f_2^{(m)} + \sum_{p=1}^m \binom{m}{p} f_1^{(p)} f_2^{(m-p)} \quad (\text{B.3})$$

ou também:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m = 1 \\ (f_1 f_2)^{(m)} = f_1 f_2^{(1)} + f_1^{(1)} f_2 \\ \text{para } m > 1 \\ (f_1 f_2)^{(m)} = f_1 f_2^{(m)} + f_1^{(m)} f_2 + \sum_{p=1}^{m-1} \binom{m}{p} f_1^{(p)} f_2^{(m-p)} \end{array} \right. \quad (\text{B.4a})$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m = 1 \\ (f_1 f_2)^{(m)} = f_1 f_2^{(1)} + f_1^{(1)} f_2 \\ \text{para } m > 1 \\ (f_1 f_2)^{(m)} = f_1 f_2^{(m)} + f_1^{(m)} f_2 + \sum_{p=1}^{m-1} \binom{m}{p} f_1^{(p)} f_2^{(m-p)} \end{array} \right. \quad (\text{B.4b})$$

B.3 - DERIVADAS DE $u = f_1 f_2 \dots f_n$

Sejam $f_i(t)$ um conjunto de n funções da variável t , então a m -ésima derivada do produto $(f_1 f_2 \dots f_n)$ em relação a t é obtida aplicando recursivamente a equação (B.2) como:

$$(f_1 f_2 \dots f_n)^{(m)} =$$

$$= \sum_{p_1=0}^m \sum_{p_2=0}^{p_1} \dots \sum_{p_{n-1}=0}^{p_{n-2}} \binom{m}{p} \binom{p_1}{p_2} \dots \binom{p_{n-2}}{p_{n-1}} f_1^{(p_{n-1})} f_2^{(p_{n-2}-p_{n-1})} \dots f_1^{(p_1-p_2)} f_2^{(m-p_1)} \quad (\text{B.5})$$

No caso particular, em que as derivadas das funções f_i sejam da forma:

$$f_i^{(p)} = p! f_i^{[p]} \quad (\text{B.6})$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 (f_1 f_2 \dots f_n)^{(m)} &= \\
 &= m! \sum_{p_1=0}^m \sum_{p_2=0}^{p_1} \dots \sum_{p_{n-1}=0}^{p_{n-2}} f_1^{[p_{n-1}]} f_2^{[p_{n-2}-p_{n-1}]} \dots f_1^{[p_1-p_2]} f_2^{[m-p_1]}
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.4 - DERIVADAS DE $u = g^n$

Seja $g(t)$ uma função de t , então a m -ésima derivada de g^n em relação a t é obtida como caso particular do analisado na seção anterior, com $f_1 = f_2 = \dots = f_n = g$, e portanto tem-se:

$$\begin{aligned}
 (g^n)^{(m)} &= \\
 &= \sum_{p_1=0}^m \sum_{p_2=0}^{p_1} \dots \sum_{p_{n-1}=0}^{p_{n-2}} \binom{m}{p} \binom{p_1}{p_2} \dots \binom{p_{n-2}}{p_{n-1}} g^{(p_{n-1})} g^{(p_{n-2}-p_{n-1})} \dots g^{(p_1-p_2)} g^{(m-p_1)}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

e analogamente se as derivadas $g^{(m)}$ de g em relação a t são da forma:

$$g^{(m)} = p! g^{[p]} \tag{B.9}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 (g^n)^{(m)} &= m! \sum_{p_1=0}^m \sum_{p_2=0}^{p_1} \dots \sum_{p_{n-1}=0}^{p_{n-2}} g^{[p_{n-1}]} g^{[p_{n-2}-p_{n-1}]} \dots g^{[p_1-p_2]} g^{[m-p_1]}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

B.5 - DERIVADAS DE $u = F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

Seja $F(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ uma função de n variáveis $\phi_i(t)$ dependentes de t , então a primeira derivada de F em relação a t é, pela regra da cadeia:

$$F^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(1)} \quad (\text{B.11})$$

A m-ésima derivada da soma de produtos $(\frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(1)})$ em relação a t, é obtida da equação (B.3) como:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(1)}\right)^{(m)} = F^{(m+1)} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(m+1)} + \sum_{p=1}^m \binom{m}{p} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_1}\right)^{(p)} \phi_1^{(m-p+1)} \quad (\text{B.12})$$

Chamando $q = m + 1$, a equação anterior pode ser escrita como:

$$F^{(q)} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(q)} + \sum_{p=1}^{q-1} \binom{q-1}{p} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_1}\right)^{(p)} \phi_1^{(q-p)} \quad (\text{B.13})$$

e portanto as m-ésimas derivadas de F em relação a t são:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m = 1 \\ \\ \text{para } m > 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} F^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(1)} \\ \\ F^{(m)} = \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \phi_1^{(m)} + \sum_{p=1}^{m-1} \binom{m-1}{p} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_1}\right)^{(p)} \phi_1^{(m-p)} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{B.14a}) \\ \\ (\text{B.14b}) \end{array}$$

Se $\mathbf{F} = \{ F_1 \ F_2 \ F_3 \ \dots \ F_n \}$ é um vetor de n funções $\phi_i(t)$, então em forma análoga as m-ésimas derivadas do vetor \mathbf{F} em relação a t são:

$$\left[\begin{array}{l} \text{para } m = 1 \\ \\ \text{para } m > 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}_\phi \phi^{(1)} \\ \\ \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{F}_\phi \phi^{(m)} + \sum_{p=1}^{m-1} \binom{m-1}{p} \mathbf{F}_\phi^{(p)} \phi^{(m-p)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(B.15a)} \\ \\ \text{(B.15b)} \end{array}$$

onde \mathbf{F}_ϕ simboliza o vetor transposto de derivadas parciais:

$$\mathbf{F}_\phi = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \phi_1} \quad \frac{\partial F}{\partial \phi_2} \quad \frac{\partial F}{\partial \phi_3} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \phi_n} \right\} \quad \text{(B.16)}$$

e $\phi^{(m)}$ é o vetor das m-ésimas derivadas em relação a t das n variáveis $\phi_i(t)$:

$$\phi^{(m)} = \left\{ \phi_1^{(m)} \quad \phi_2^{(m)} \quad \phi_3^{(m)} \quad \dots \quad \phi_n^{(m)} \right\}^T \quad \text{(B.17)}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Koiter, W.T., On the Stability of Elastic Equilibrium, Tese de Doutorado (em holandês), Polytechnic Institute Delft, Holanda, 1945. Tradução para o inglês : *NASA, Tech. Trans. F10,833*, 1967.
- [2] Riks, E., Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, **47**, 219-259, 1984.
- [3] Rheinboldt, W.C., Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems, *Comp. Struct.* , **13**, 103-113, 1981.
- [4] Carnoy, E.G., Asymptotic study of the elastic postbuckling behaviour of structures by the finite element method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, **29**, 147-173, 1981.
- [5] Carnoy, E.G., Postbuckling analysis of elastic structures by the finite element method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, **23**, 143-174, 1981.

-
- [6] Antonini, R.C., Uma Formulação Discretizada da Teoria da Estabilidade Elástica para Análise Estrutural Via Elementos Finitos, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1986.
- [7] Alves, R.V., Análise Modal Assintótica da Estabilidade de Estruturas Reticuladas Espaciais, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [8] Batista, R.C., R.C. Antonini e R.V. Alves, An asymptotic modal approach to nonlinear structural elastic instability, *Comp. Struct.*, **38** (4), 475-484, 1991.
- [9] Noor, A.K. e J.M. Peters, Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures, *AIAA J.*, **18** (4), 455-462, 1980.
- [10] Almroth, B.O., F.A. Brogan e P. Stern, Automatic choice of global shape functions in structural analysis, *AIAA J.*, **16**, 525-528, 1978.
- [11] Walker, A.C., A nonlinear finite element analysis of shallow circular arches, *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 97-107, 1969.
- [12] Eriksson, A., On improved predictions for structural equilibrium path evaluations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **36**, 201-220, 1993.
- [13] Eriksson, A., Derivatives of the tangential stiffness matrices for equilibrium path descriptions, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **32**, 1093-1113, 1991.
- [14] Eriksson, A., On Accurate descriptions for primary and secondary paths in equilibrium problems, *Comp. Struct.*, **44** (1/2), 229-242, 1992.
- [15] Thompson, J.M.T. e G.W. Hunt, *Elastic Instability Phenomena*, John- Wiley and Sons, Inc., 1984.
- [16] Thompson, J.M.T. e G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, John- Wiley and Sons, Inc., 1973.

-
- [17] Synge, J.L. e B.A. Griffith, *Principles of Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [18] Stephenson, G., *An Introduction to Matrices, Sets and Groups*, Longman, London, 1970.
- [19] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [20] Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [21] Novozhilov, V.V., *Introduction of the Nonlinear Theory of Elasticity*, Graylock Press, Rochester, N.Y., 1953.
- [22] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [23] Timoshenko, S.P. e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2da. edição, McGraw-Hill, 1959.
- [24] Crisfield, M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley and Sons Ltd, 1991.
- [25] Oden, J.T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [26] Lima, E.L., *Curso de Análise*, vol.2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [27] Gohberg, I., P. Lancaster, e L. Rodman, *Matrix polinomials*, Academic Press, Inc, New York, 1982.
- [28] Jepson, A. e Spence A., Folds in solutions of two parameter systems and their calculation. Part I, *Siam J. Numer. Anal.*, 22 (2), 347-368, 1985.

-
- [29] Batoz, J.L. e G. Dhatt, Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 1262-1267, 1980.
- [30] Crisfield, M.A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", *Comp. Struct.*, **13**, 55-62, 1981.
- [31] Riks, E., The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **39**, 1060-1065, 1972.
- [32] Riks, E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Struct.*, **15**, 529-551, 1979.
- [33] Wempner, G.A, Discrete approximations related to nonlinear theories of solids, *Int. J. Solids Struct.*, **7**, 1581-1599, 1971.
- [34] Ramm, E., Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, em K.J.Bathe et.al (eds), *Europe-U.S. Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Ruhr Universitat Bochum, Alemanha, Springer-Verlag, Berlin, 63-89, 1980.
- [35] Fried, I., Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, **47**, 283-297, 1984.
- [36] Schweizerhof, K.H. e P. Wriggers, Consistent linearization for path following methods in nonlinear F.E. analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, **59**, 261-279, 1986.
- [37] Kouhia, R. e M. Mikkola, Tracing the equilibrium path beyond simple critical points, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 2923-2941, 1989.
- [38] Eriksson, A., On linear constraints for Newton-Raphson corrections and critical point searches in structural F.E. problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 1317-1334, 1989.
- [39] Wagner, W., A path-following algorithm with quadratic predictor, *Comp. Struct.*, **39** (3/4), 339-348, 1991.

-
- [40] Schwetlick, H. e J. Cleve, Higher order predictors and adaptive steplength control in path following algorithms, *Siam J. Numer. Anal.*, 24 (6), 1382-1393, 1987.
- [41] Bellini, P.X. e A. Chulya, An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations, *Comp. Struct.*, 26 (1/2), 99-110, 1981.
- [42] Den Heijer, C. e W.C. Rheinboldt, On steplength algorithms for a class of continuation method, *Siam J. Numer. Anal.*, 18, 925-948, 1981.
- [43] Wriggers P. e J.C. Simo, A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30, 155-176, 1990.
- [44] Moore, G. e A. Spence, The calculation of turning points of nonlinear equations, *Siam J. Numer. Anal.*, 17, 567-576, 1980.
- [45] Seydel, R., Numerical computations of branch points in nonlinear equations, *Numer. Math.*, 33, 339-352, 1979.
- [46] Riks, E., Bifurcation and stability, a numerical approach, *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, ed. W.K. Liu et. al., Pineridge Press, Swansea, 313-344, 1984.
- [47] Thurston, G.A., Continuation of Newton's method through bifurcation points, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 36, 425-430, 1969.
- [48] Kerr, A.D. e M.T. Soifer, The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 36, 425-430, 1969.
- [49] Sancho Aznal, J.M. e J. Ortiz Herrera, Implementación de los métodos de Riks-Wempner, Batoz-Dhatt, Powell-Simons y otros en el programa de elementos finitos F.E.A.P., *Rev. Int. Met. Num. Ing.*, 7 (3), 265-288, 1991.