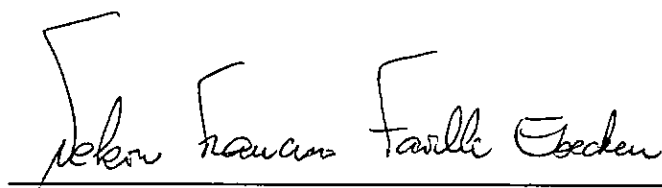


MODELOS DE ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM ESTRUTURAS
TRIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

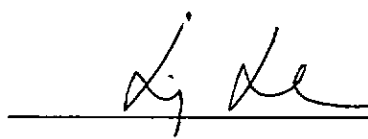
MARCÍLIO SOUSA DA ROCHA FREITAS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

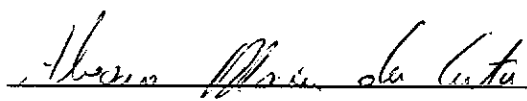
APROVADA POR:



NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN, D.Sc.



LUIZ LANDAU, D.Sc.



ÁLVARO MAIA DA COSTA, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1991

FREITAS, MARCÍLIO SOUSA DA ROCHA

Modelos de Análise da Propagação de Trincas em Estruturas Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos [Rio de Janeiro] 1991

ix, 98p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1991).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1.Mecânica da Fratura

2.Fator de Intensidade de tensão

3.Propagação de Trincas

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (série)

AOS MEUS PAIS

BENEDITO DA ROCHA FREITAS FILHO E

MARIA DE JESUS SOUSA FREITAS

AOS MEUS IRMÃOS

AO MEU SOBRINHO LUCAS

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos pelo incentivo, confiança e sacrifícios que fizeram por mim.

Ao professor NELSON EBECKEN, pela orientação e ensinamentos, fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos pesquisadores Breno P. Jacob, Luiz A. de Souza e Álvaro Coutinho pela inestimável ajuda.

Aos professores Djalma Veloso Filho e Paulo de Tarso C. Mendes da UFPI pelo incentivo a minha vinda para a COPPE.

A todos os professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE pelos ensinamentos transmitidos e constante apoio.

A Francisco Célio, Sandro, Ademir e Sanclér pela amizade e convívio diário.

Aos amigos Arlene, Rafael, Moacir, Gray, Maria Lúcia, Luis Paulo, Assis, Paulinho, Zacarias, Jorge, Adriana,

Sueli e Fernando pela amizade.

A todos os colegas da COPPE que de alguma maneira contribuíram nesta caminhada.

Aos funcionários Célio Nóia do laboratório de computação e ao consultor do NCE Pergentino Neto.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

MODELOS DE ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

MARCÍLIO SOUSA DA ROCHA FREITAS

MAIO DE 1991

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia civil

Neste trabalho discutem-se os principais modelos de análise da propagação de trincas em estruturas tridimensionais pelo método dos elementos finitos. São apresentados o método da extensão virtual, o método implícito da extensão virtual e o modelo de linha de molas. Através destes modelos são calculados os parâmetros mais importantes da mecânica da fratura, como o fator de intensidade de tensão K e a integral J .

Alguns exemplos são analisados para demonstrar a viabilidade destes modelos. Suas vantagens e desvantagens são comentadas.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUERIMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER
OF SCIENCE (M.Sc.).

MODELS OF ANALYSIS OF CRACK-GROWTH OF SOLIDS STRUCTURES
BY THE FINITE ELEMENTS METHOD

MARCÍLIO SOUSA DA ROCHA FREITAS

MAY, 1991

Thesis Supervisor: Nelson Francisco Favilla Ebecken
Departament: Civil Engineering

The principals models of analysis of Crack-Growth of solids structures by the finite elements method are presented. The virtual crack extension method, the implicit virtual extension method and the line-spring model are studied. By these models, are evaluated the most importants parameters of the fracture mechanics, as the stress intensity factor K and J integral.

Several examples are analised to demonstrate the viability of these models. The advantages and disadvantages are also pointed out.

ÍNDICE

	página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II - MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA.....	4
II.1 - Introdução.....	4
II.2 - Conceitos Elementares.....	6
CAPÍTULO III - MÉTODOS NUMÉRICOS.....	18
III.1 - Introdução.....	18
III.2 - Método de Extrapolação de deslocamentos..	20
III.2.1 - Elemento Quarter-Point.....	22
III.3 - Método da Extensão Virtual da Trinca.....	30
III.4 - Método Implícito da extensão Virtual.....	33
III.5 - Modelo de Linha de Mola.....	42
III.5.1 - Modelo de Linha de Mola	
Bidimensional.....	53
CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	57
IV.1 - Introdução.....	57
IV.2 - Descrição Geral do Programa.....	57
IV.3 - Elementos Utilizados.....	65

IV.3.1 - Elemento de sólido.....	65
IV.3.2 - Elemento de Linha de Mola.....	69
CAPÍTULO V - APLICAÇÕES.....	72
V.1 - Chapa tracionada - Caso I.....	72
V.2 - Chapa tracionada - Caso II.....	76
V.3 - Chapa com modos mistos.....	81
V.4 - Junta tubular.....	84
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES.....	90
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	93

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Ao projetar um componente estrutural, o engenheiro deve determinar a geometria e dimensões finais do componente, bem como selecionar o material de modo que sobre dados carregamento e condições ambientais este componente venha a realizar sua função de modo apropriado.

Para a realização desta tarefa, necessita-se de um critério de colapso. Para selecionar e aplicar o critério de colapso mais apropriado é necessário que se tenha uma idéia sobre o provável modo de colapso do componente estrutural. A fratura, caracterizada como a formação de novas superfícies no material, é um desses modos de colapso estrutural.

Defeitos diversos, tais como, defeitos de fabricação, fadiga, corrosão, tensões internas residuais, concentrações de tensão, são responsáveis pelo aparecimento e crescimento de trincas, que provocam uma perda de resistência do componente estrutural. É necessário, portanto, que seja feito uma análise com o

objetivo de determinar a necessidade, ou não, de um reforço ou inutilização da estrutura. A velocidade de propagação da trinca e a sua abertura são dois importantes parâmetros neste tipo de análise.

Diversos parâmetros foram propostos para medir a instabilidade de uma trinca. O fator de intensidade de tensão, que permite avaliar a propagação da trinca em relação à resistência à fratura do material, é o parâmetro mais importante na mecânica da fratura linear elástica. A sua determinação de forma analítica só é exequível em algumas situações. Para formas mais complexas de geometria e carregamento, o uso de soluções numéricas é mais eficiente.

Utiliza-se, também, a determinação da variação de energia potencial por acréscimo de fratura, que pode ser relacionado com o fator de intensidade de tensão no caso de regime linear. Quando a análise é feita em regime elasto-plástico pode-se relacioná-la com a integral J , que é um outro importante parâmetro na mecânica da fratura.

Neste trabalho apresentam-se três importantes métodos de análise da mecânica da fratura linear elástica, todos eles utilizando o método dos elementos finitos. O modelo de linha de molas se presta para a análise de trincas não-passantes, ao passo que o método da extensão virtual e o método implícito da extensão virtual podem ser

utilizados para trincas passantes ou não.

No capítulo II é apresentado um resumo dos conceitos mais importantes da mecânica da fratura, com destaque àqueles de maior interesse para a presente tese. A seguir, no capítulo III, justifica-se o uso de métodos numéricos, e faz-se um resumo dos principais desenvolvimentos neste sentido. Em particular, apresenta-se o elemento quarter-point que desempenha um importante papel na mecânica da fratura. Os três métodos utilizados neste trabalho têm as suas formulações apresentadas em detalhe, sendo que para o modelo de linha de molas é feito, também, um histórico do seu desenvolvimento.

O sistema computacional implementado, com a apresentação dos aspectos de maior interesse computacional, é apresentado no capítulo IV. É feita, ainda, uma abordagem da implementação dos elementos de sólido e de linha de mola.

No capítulo V são apresentados resultados de algumas aplicações do sistema desenvolvido, enquanto que algumas conclusões e comentários são feitos no capítulo VI.

CAPÍTULO II

MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

II.1 - INTRODUÇÃO

A ruptura catastrófica em componentes estruturais devido à propagação de trincas é um problema que surge na análise e projeto em várias áreas da engenharia. Em algumas dessas áreas as consequências da ruptura catastrófica são de suma importância como, por exemplo, na indústria aeronáutica e usinas nucleares.

A mecânica da fratura linear elástica tem, também, um destacado papel nas estruturas metálicas marítimas utilizadas para a exploração de petróleo. O aparecimento de uma trinca em uma junta tubular de plataforma marítima poderá exigir a execução de um reparo que, neste caso, é tarefa longa devido a necessidade do projeto, de mergulhadores, barcos e que o mar esteja calmo para permitir a execução do trabalho. Caso seja verificado que a ruptura da junta trincada compromete toda a plataforma, é necessário saber em quanto tempo a trinca atingirá o tamanho crítico de modo que se possa realizar o reparo em tempo hábil.

Em maior ou menor grau, as trincas estão presente em todas as estruturas, sendo intrínsecas aos materiais constituintes ou aparecem durante a construção ou na sua vida em serviço. Portanto, um requisito fundamental da mecânica da fratura é assegurar a estabilidade de tais trincas. Neste sentido, o fator de intensidade de tensão foi o progresso mais importante para caracterizar o início e a propagação da trinca.

No entanto, o emprego do fator de intensidade de tensão na análise da estabilidade de trincas requer um conhecimento preciso do campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca para a geometria, carregamento e condições de contorno da estrutura em questão. Soluções analíticas só são disponíveis para alguns casos relativamente simples, fazendo com que as técnicas numéricas, como as apresentadas neste trabalho, desempenhem uma importante tarefa na sua determinação em situações práticas.

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos da mecânica da fratura e revistos alguns desenvolvimentos históricos e recentes da mecânica da fratura linear elástica.

II.2 - CONCEITOS ELEMENTARES

A primeira formulação matemática para a mecânica da fratura foi dada por INGLIS [1] em 1913. Ao analisar uma chapa sob tensão uniforme σ com um furo de forma elíptica, figura (II.1) , ele concluiu que a máxima tensão ocorre no ponto onde o raio de curvatura $\rho = \frac{b^2}{a}$ é mínimo, ou seja , no ápice do maior eixo, sendo esta tensão dada por

$$\sigma_{y_{\max}} = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (\text{II.1})$$

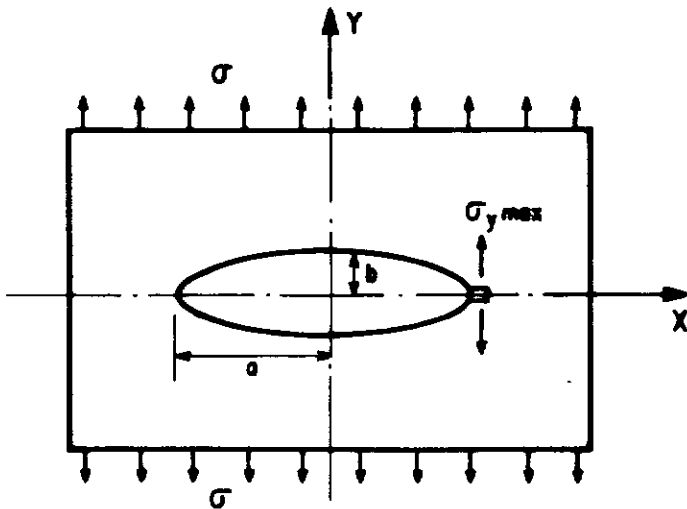


figura II.1 - Chapa com furo elíptico sob tensão σ

Isto nos levaria a concluir que para trincas reais ($b=0$) a tensão na ponta da trinca se torna infinitamente grande, ou seja, um corpo trincado não suportaria nenhuma carga, pois o material é capaz de resistir apenas a tensões finitas. Isto, contudo, não condiz com a realidade.

Foram as contribuições originais de GRIFFITH [2,3] que resolveram o dilema da tensão infinita na ponta da trinca inerente ao uso da teoria da elasticidade para estruturas trincadas. A idéia básica da teoria da fratura de Griffith é a existência de uma força associada à extensão da trinca, que resulta da liberação de energia potencial no corpo, em conjunto com uma resistência ao crescimento da trinca. A resistência ao crescimento da trinca é associada à necessidade de fornecer energia para as novas superfícies da trinca.

De posse do princípio da conservação da energia, ele concluiu que a trinca tornava-se instável (figura II.2) quando a taxa de liberação de energia de deformação U na trinca excedia o acréscimo na energia de superfície W devido ao aumento da área da superfície trincada, ou seja

$$\frac{\partial U}{\partial a} > \frac{\partial W}{\partial a} \quad (\text{II.2})$$

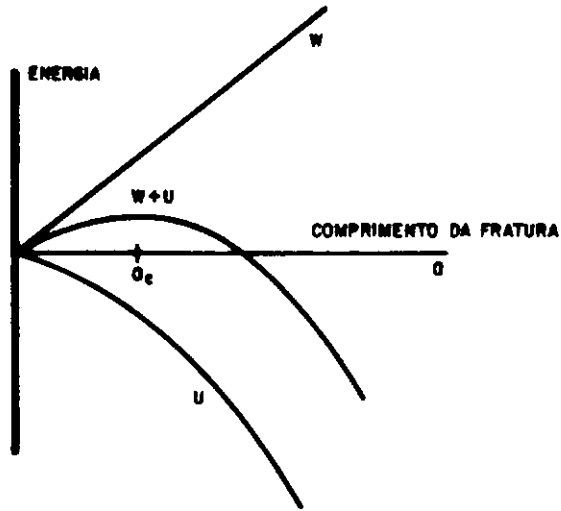


figura II.2 - gráfico da energia dissipada U e a energia interna W

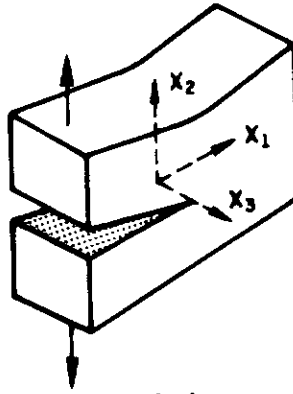
Duas importantes contribuições serviram para estabelecer as bases da mecânica da fratura. A primeira, devido a IRWIN [4], estendeu a teoria de Griffith aos metais e a segunda, ligou a concepção global de Griffith a um parâmetro da ponta da trinca de cálculo mais imediato IRWIN [5].

Antes, porém, de comentar essa segunda contribuição será introduzida a classificação dos três movimentos cinemáticos independentes das faces superior e inferior da trinca, uma em relação a outra, que servem para representar os vários caminhos em que um corpo trincado pode se deformar. A figura (II.3) mostra esses modos, segundo Irwin:

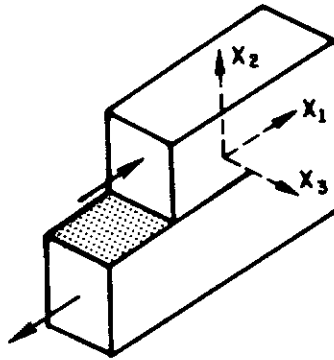
MODO DE ABERTURA - MODO I - As superfícies da trinca se separam simetricamente com respeito aos planos $x_1 x_2$ e $x_1 x_3$.

MODO DE DESLIZAMENTO - MODO II - As superfícies da trinca deslizam uma sobre a outra simetricamente em relação ao plano $x_1 x_2$ mas de maneira anti-simétrica em relação ao plano $x_1 x_3$.

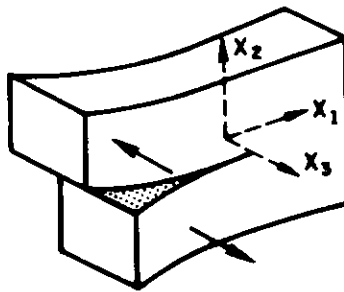
MODO DE RASGAMENTO - MODO III - As superfícies da trinca também deslizam uma em relação a outra mas de maneira anti-simétrica com relação aos planos $x_1 x_2$ e $x_1 x_3$.



(a)



(b)



(c)

figura II.3 - Modos de Fratura

a) modo de abertura; b) modo de deslizamento e c) modo de rasgamento

Usando as soluções de Westergaad para corpos trincados, Irwin reescreveu as componentes de tensões, na região da ponta da trinca, correspondentes aos três modos de fratura como:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_1(\theta) \quad (II.3)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_2(\theta) \quad (II.4)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} f_3(\theta) \quad (II.5)$$

Nas equações acima, r é a distância radial a partir da ponta da trinca e $f_i(\theta)$ são funções da geometria dependendo apenas do ângulo θ (figura II.4). Os parâmetros K_I , K_{II} e K_{III} são conhecidos como os fatores de intensidade de tensão correspondentes aos três modos de fratura. Eles caracterizam a magnitude do campo de tensão na ponta da trinca.

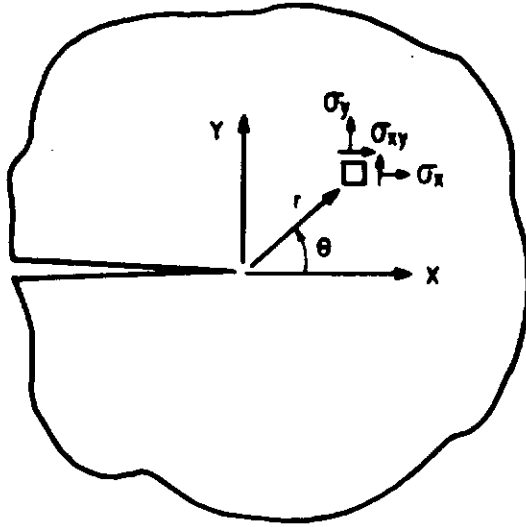


figura II.4 - Coordenadas r e θ

A quantidade de energia de deformação dissipada na fratura, G , é um outro parâmetro importante na MFLE. Ele relaciona-se com o correspondente fator de intensidade de tensão do seguinte modo :

$$G_I = \frac{1 + k}{8 \mu} K_I^2 \quad (II.6)$$

$$G_{II} = \frac{1 + k}{8 \mu} K_{II}^2 \quad (II.7)$$

$$G_{III} = \frac{1 + k}{8 \mu} K_{III}^2 \quad (II.8)$$

onde $k = 3 - 4\nu$ para o estado plano de deformação e $k = \frac{3-\nu}{1-\nu}$ para o estado plano de tensão, μ e ν são o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Se a propagação da trinca é tal que ela permanece no seu plano original, então a expressão geral da taxa de liberação de energia de deformação é

$$G_T = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (II.9)$$

Inicialmente, a estabilidade de uma trinca, ou seja, a não propagação súbita, era estabelecida através da comparação de G com um valor G_c . Posteriormente, ela passou a ser medida através de K_c , para o estado plano de tensão, e K_{Ic} para o estado plano de deformação, que representam a resistência à fratura do material. Os valores de K_c e K_{Ic} são obtidos experimentalmente e são característicos de cada tipo de material. Valores típicos de K_c e K_{Ic} para diversos tipos de materiais podem ser encontrados em MAY [6].

Outro importante conceito na mecânica da fratura é a integral independente do caminho introduzida por RICE [7]. Concepções similares foram apresentadas independentemente por SANDERS [8], ESHELBY [9] e CHEREPANOV [10]; no entanto, a de Rice tem sido a mais utilizada atualmente.

A relação básica é

$$J = \int_{\Gamma} \left(U \, dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \, ds \right) \quad (\text{II.10})$$

onde U é a densidade de energia de deformação, t_i é o vetor de tração, normal ao contorno, u_i é o vetor de deslocamento e ds um elemento de arco ao longo do contorno de integração Γ (figura II.5). Esta integral é independente do caminho escolhido desde que os pontos inicial e final do contorno Γ estejam em faces opostas da trinca e o contorno contenha a ponta da trinca. É válida também para materiais elásticos não lineares e é de grande importância para análise elasto-plástica, quando os fatores de intensidade de tensão perdem seu significado.

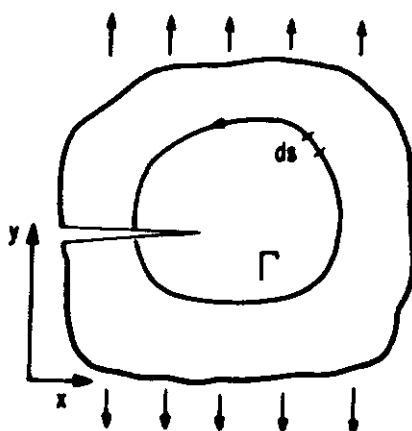


figura II.5 - Contorno para avaliação de J

Para condições elásticas lineares J e G são equivalentes. Esta equivalência pode ser mostrada através de uma interpretação de J como taxa de variação de energia, que resulta em

$$J = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \equiv G \quad (\text{ II.11 })$$

onde Π representa a energia potencial do corpo trincado.

Deste modo, a integral J pode ser relacionada aos fatores de intensidade de tensão através das equações (II.6) a (II.8). Analogamente, pode-se definir uma característica do material, J_c , que é o valor crítico da integral J.

Um outro parâmetro de importância na análise de trincas em regime plástico, figura (II.6), é o deslocamento de abertura de trinca (crack opening displacement). Ele foi inicialmente estudado por WELLS [11] , figura (II.6), sendo definido por

$$\text{C.O.D.} = \frac{4 \sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{ II.12 })$$

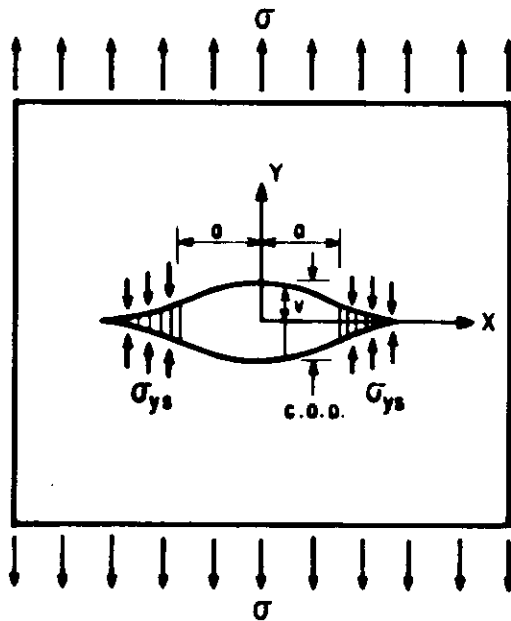


figura II.6 - C.O.D.

O valor do COD para $x = a$ recebe uma outra denominação, qual seja, CTOD (crack tip open displacement). Para a mecânica da fratura linear elástica o CTOD é nulo, ao contrário do que ocorre se considerarmos a plastificação da ponta da trinca.

CAPÍTULO III

MÉTODOS NUMÉRICOS

III.1 - INTRODUÇÃO

A introdução do fator de intensidade de tensão por Irwin propiciou o desenvolvimento de soluções analíticas para determinação dos fatores de intensidade de tensão para várias geometrias de trinca e carregamento. Com relativa simplicidade, soluções numéricas podem ser produzidas para situações onde não há soluções analíticas.

As técnicas numéricas mais comuns empregam o método dos elementos finitos e basicamente consistem de três métodos:

1º) Método da Extrapolação: utiliza as equações II.3, II.4 e II.5, onde os valores dos fatores de intensidade de tensão são plotados e extrapolados para $r=0$. Neste caso a utilização de elemento com singularidade, como os quarter-point, melhoram consideravelmente a solução;

2º) Métodos Energéticos: utilizam a equação II.11, determinando G por diferenças finitas, e consequentemente

os fatores de intensidade de tensão pelas equações II.6, II.7 e II.8;

3º) Método da Integral J: utiliza a equação II.10, definindo-se um caminho ao longo dos elementos e integrando-se numericamente.

O estudo detalhado do desenvolvimento do estado de tensão na vizinhança da ponta da trinca dado por WILLIAMS [12] e, posteriormente, por KARP E KARAL [13], deram um apoio vital para a utilização prática dos métodos numéricos. Neste capítulo serão apresentadas algumas das mais importantes técnicas numéricas utilizadas na análise da mecânica da fratura linear elástica.

Um dos primeiros a usar o método dos elementos finitos para determinar fatores de intensidade de tensão foi CHAN et al. [14]. Eles usaram elementos convencionais na ponta da trinca e foram forçados a usar um procedimento onde o valor de K era obtido por extrapolação utilizando valores de deslocamentos de abertura da trinca (COD) até a ponta da mesma. Pouco depois, vários pesquisadores desenvolveram elementos especiais que, explicitamente, continham a singularidade. Este procedimento, contudo, tornou-se desnecessário devido à descoberta de HENSHELL E SHAW [15] do chamado elemento quarter-point. Este é um elemento finito convencional quadrático onde os nós

centrais dos lados são deslocados e, em consequência, introduz-se no elemento a singularidade $r^{-1/2}$ que é da mesma ordem da singularidade do problema de trinca elástica.

Devido a sua simplicidade, o elemento **quarter-point** tornou-se uma escolha usual dos analistas de problemas da mecânica da fratura linear elástica. Uma outra contribuição foi realizada por **BARSOUM** [16] que desenvolveu procedimentos de análise usando elementos finitos isoparamétricos. **HIBBITT** [17] mostrou que elementos isoparamétricos podem representar não só as singularidades da **MFLE** ($r^{-1/2}$) como também as singularidades da mecânica da fratura elasto-plástica desde que os nós intermediários sejam posicionados adequadamente.

III.2 - MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO DE DESLOCAMENTOS

O desenvolvimento das equações (II.3), (II.4) e (II.5) levam às equações (III.1) e (III.2), abaixo, derivadas por **SIH, RICE e LOEBER** [18 - 20] para a variação de deslocamentos ao longo de linhas radiais partindo da ponta de uma trinca plana, conforme figura (III.1), sujeita ao modo I ou modo II de deformação.

$$K_I \left\{ \begin{array}{l} (2k - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ (2k + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \end{array} \right\} = 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} \quad (\text{III.1})$$

e

$$K_{II} \left\{ \begin{array}{l} -(2k + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\ (2k - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \end{array} \right\} = 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} \quad (\text{III.2})$$

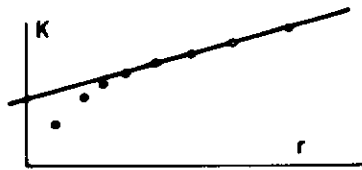
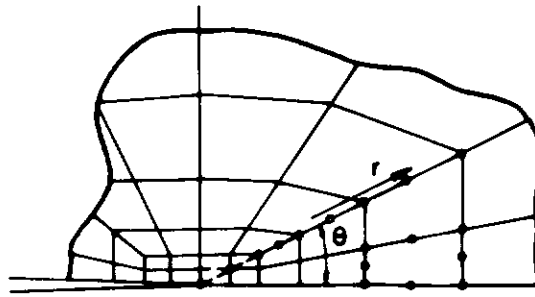


figura III.1 - Obtenção de K por extrapolação

Substituindo os valores de u ou v e r para pontos nodais ao longo de uma linha partindo da ponta da trinca, podemos fazer um gráfico de K_I e K_{II} contra a distância r . Descartando os resultados para pontos próximos da ponta da

trinca e extrapolando a solução para $r = 0$, encontraremos uma aproximação para o respectivo fator de intensidade de tensão. Este tipo de análise, normalmente, é realizada com elemento finito quarter-point.

III.2.1 - ELEMENTO QUARTER-POINT

Será apresentado, inicialmente, um elemento unidimensional, figura (III.2), e a extensão para o caso tridimensional, feita de modo análogo.

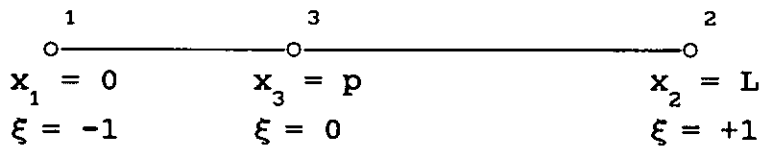


figura III.2 - Elemento Quadrático Unidimensional

Tomando-se $x_1 = 0$, o que não implicará em perda de generalidade, as funções de interpolação são :

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) - \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \quad (\text{III.3})$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) - \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \quad (\text{III.4})$$

$$N_3 = 1 - \xi^2 \quad (\text{III.5})$$

e as coordenadas são escritas como:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (\text{ III.6 })$$

Para $p = \frac{L}{4}$, ou seja, $x_1 = 0$, $x_2 = L$ e $x_3 = \frac{L}{4}$,

tem-se

$$x = \frac{L}{4} (1 + \xi)^2 \quad (\text{ III.7 })$$

Resolvendo-se (III.7) em relação a ξ e considerando-se que $\xi \geq -1$, obtém-se

$$\xi = -1 + 2 \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (\text{ III.8 })$$

Os deslocamentos u podem ser escritos de forma similar a (III.6):

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (\text{ III.9 })$$

Substituindo N_1 , N_2 , N_3 das equações (III.3) a (III.5) obtém-se :

$$u = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right] u_1 + \left[-\frac{1}{2}(1+\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right] u_2 + \\ + [1 - \xi^2] u_3 \quad (\text{ III.10 })$$

A deformação na direção x é :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Portanto,

$$\epsilon_x = \left[\left(-\frac{1}{2} + \xi \right) u_1 + \left(\frac{1}{2} + \xi \right) u_2 - 2\xi u_3 \right] \frac{1}{(Lx)^{1/2}} \quad (\text{III.11})$$

Observa-se na equação acima que a singularidade de deformação é do tipo $r^{-1/2}$. Para a teoria linear elástica a tensão também será proporcional a $r^{-1/2}$.

Será apresentada a seguir, a extensão do elemento quarter-point para o caso tridimensional. HUSSAIN [21] e MANU [22] realizaram um aprofundado estudo deste assunto.

Seja o elemento da figura (III.3). As funções de interpolação para este elemento sólido quadrático podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}
 N_i(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2) \xi_i^2 \eta_i^2 \zeta_i^2 + \\
 & + \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (1 - \xi_i^2) + \\
 & + \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (1 - \eta_i^2) + \\
 & + \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (1 - \zeta_i^2) +
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 20$$

$$(III.12)$$

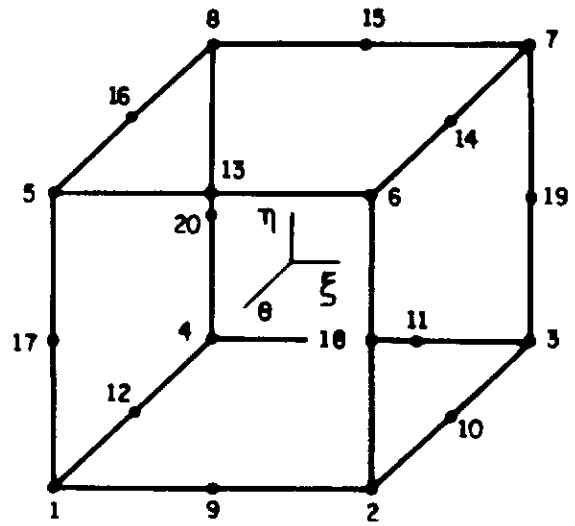
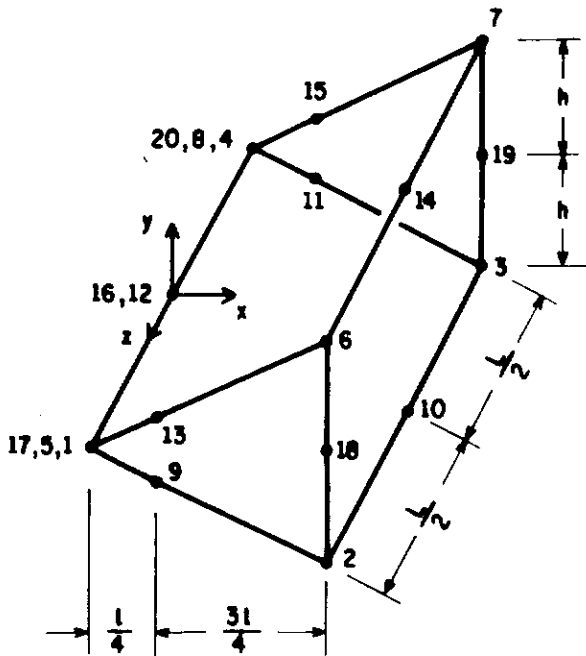


figura III.3 - Elemento Quarter-point sólido

As coordenadas são representadas por:

$$x = \sum_{i=1}^{20} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{20} N_i y_i \quad \text{e} \quad z = \sum_{i=1}^{20} N_i z_i \quad (\text{III.13})$$

Para o caso da figura (III.3) pode-se escrever a partir das equações (III.12) e (III.13):

$$x = \frac{\ell}{4} (1 + \xi)^2 \quad (\text{III.14})$$

$$y = \frac{h}{4} (1 + \xi)^2 \quad (\text{III.15})$$

$$z = \frac{L}{2} \theta \quad (\text{III.16})$$

O jacobiano será:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2}(1+\xi) & \frac{h}{2}\eta(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{h}{4}(1+\xi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

$$\text{e} \quad |J| = \frac{h\ell L}{16} (1 + \xi)^3 \quad (\text{III.18})$$

As componentes de deslocamento podem ser dadas por:

$$u = \sum_{i=1}^{20} N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{20} N_i v_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{20} N_i w_i \quad (\text{III.19})$$

Pode-se mostrar que as singularidades são do tipo r^{-1} e $r^{-1/2}$. Caso sejam impostas restrições aos nós 17, 5 e 1, 16 e 12, e 20, 8 e 4, conforme figura (III.3), de modo a se comportarem como apenas três nós independentes, a singularidade r^{-1} é eliminada.

Os elementos **quarter-point** possuem as propriedades da convergência monotônica por serem isoparamétricos. Logo, eles podem representar tanto movimentos de corpo rígido, sem desenvolver tensões, quanto estados de tensões constantes. Os deslocamentos serão contínuo dentro e na fronteira dos elementos. Devido a estes fatos a solução será tanto mais precisa quanto mais refinada for a malha.

LYNN E INGRAFFEA [23] apresentaram o elemento de transição a ser usado entre os elementos **quarter-point** e os elementos regulares da malha. Estes elementos tornam a utilização dos elementos **quarter-point** mais eficiente mas não são obrigatórios.

Será apresentado um elemento de transição para o caso unidimensional na figura (III.4).

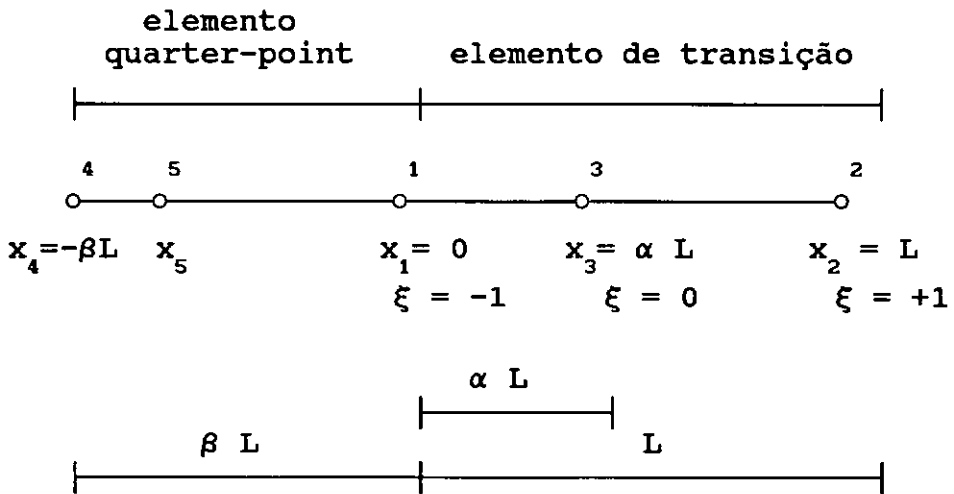


figura III.4 - Elemento de Transição

Seja o elemento quarter-point da ponta da trinca (nós 4, 5 e 1) com singularidade do tipo $r^{-1/2}$ no ponto x_4 . Para que o elemento vizinho (nós 1, 2 e 3) apresente singularidade em x_4 é necessário que o ponto $x_3 = \alpha L$ seja tal que

$$\frac{d\xi}{dx} = \infty \quad \text{em} \quad x = x_4 \quad (\text{III.20})$$

Sem perda de generalidade, se $x_1 = 0$ a coordenada x é interpolada por

$$x = \left[\frac{1}{2}(1 + \xi) - (1 - \xi^2) \right] x_2 + (1 - \xi^2) x_3 \quad (\text{III.21})$$

sendo

$$x_2 = L \quad (\text{ III.22 })$$

$$x_3 = \alpha L \quad (\text{ III.23 })$$

chega-se a :

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \xi^2) L + (1-\xi^2) \alpha L \quad (\text{ III. 24})$$

cuja solução em ξ é:

$$\xi = \frac{1}{(1-2\alpha)L} \left(-L + \sqrt{L^2 - 8\alpha L^2 + 8Lx + 16\alpha^2 L^2 - 16\alpha Lx} \right) \quad (\text{ III.25 })$$

Logo,

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{(1-2\alpha)L} \frac{4L - 8\alpha L}{(L^2 - 8\alpha L^2 + 8Lx + 16\alpha^2 L^2 - 16\alpha Lx)^{1/2}} \quad (\text{ III.26 })$$

A condição (III.20) será obedecida em $x = x_4 = -\beta L$ se

$$L^2 - 8\alpha L^2 - 8\beta L^2 + 16\alpha\beta L^2 = 0 \quad (\text{ III.27 })$$

que resolvida, fornece

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(1 - 2\beta + 2\sqrt{\beta(1+\beta)} \right) \quad (\text{ III.28 })$$

O uso de apenas uma camada de elementos de transição em torno dos elementos quarter-point da ponta da trinca é suficiente para uma boa precisão.

III.3 - MÉTODO DA EXTENSÃO VIRTUAL DA TRINCA

Seja uma trinca de comprimento a que sofre um aumento δa , de modo que altere a energia de deformação de uma quantidade δU . Define-se a taxa de liberação de energia de deformação

$$G = \frac{\delta U}{\delta a} \approx \frac{\Delta U}{\Delta a} \quad (\text{ III.29 })$$

que está diretamente relacionada com os fatores de intensidade de tensão, conforme as equações (II.6) a (II.8), no modo correspondente. Com a realização de duas análises por elementos finitos para dois comprimentos de trinca que diferem de um comprimento Δa , avalia-se a diferença de energia de deformação ΔU , e então a taxa de liberação de energia de deformação é calculada de acordo com (III.29).

A energia de deformação nas duas configurações podem ser calculadas como

$$U = \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^t \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \quad (\text{ III.30 })$$

onde $\tilde{u}$ é o vetor de deslocamentos global e $\tilde{K}$ é a matriz de rigidez.

Uma variação do método da extensão virtual foi apresentada por HELLEN [24], com o objetivo de se realizar apenas uma análise. Partindo da energia potencial total, dada por

$$\Pi = \frac{1}{2} \tilde{u}^t \tilde{K} \tilde{u} - \tilde{u}^t \tilde{F} \quad (\text{III.31})$$

sendo $\tilde{F}$ o vetor de cargas nodais correspondente, e considerado um pequeno crescimento virtual Δa no comprimento da trinca, sem mudança nas cargas externas, a taxa de liberação de energia G é obtida a partir da variação de Π com respeito a carga constante, isto é,

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \tilde{u}^t \delta \tilde{K} \tilde{u} + \delta \tilde{u}^t \tilde{K} \tilde{u} - \delta \tilde{u}^t \tilde{F} - \tilde{u}^t \delta \tilde{F} \quad (\text{III.32})$$

como $\tilde{K} \tilde{u} = \tilde{F}$, a equação (III.32) pode ser escrita como

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \tilde{u}^t \delta \tilde{K} \tilde{u} - \tilde{u}^t \delta \tilde{F} \quad (\text{III.33})$$

Considerando que o carregamento seja devido a forças atuando fora do elemento da ponta da trinca, o vetor $\delta \tilde{F}$ é nulo. Então

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^t \underset{\sim}{\delta K} \underset{\sim}{u} \quad (\text{ III.34 })$$

Portanto,

$$G = - \frac{d\Pi}{da} = - \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^t \left[\frac{\partial K}{\partial a} \right] \underset{\sim}{u} \quad (\text{ III.35 })$$

Este resultado mostra uma alternativa para o cálculo de G. A matriz de variação de rigidez δk é nula para todos os elementos fora da ponta da trinca, pois só há mudança de geometria na ponta da trinca. Portanto, δK é formada apenas pela contribuição dos elementos da ponta da trinca.

Este processo apresentado por Hellen se torna eficiente quando avaliado durante o processo de eliminação da solução do sistema de equações, fazendo uso de um método frontal. A vantagem do método da extensão virtual é que pode ser realizado utilizando-se um programa padrão de elementos finitos, e tem apresentado resultados mais precisos que o método da extrapolação. Uma desvantagem do método da extensão virtual é a necessidade de duas análises, fazendo uso de malhas muito refinadas. Um cuidado que se deve ter é o erro numérico devido a diferenças entre números muito grandes.

III.4 - MÉTODO IMPLÍCITO DA EXTENSÃO VIRTUAL DA TRINCA

Um novo procedimento para o método da extensão virtual da trinca foi apresentado, recentemente, por HELLEN [25]. Este procedimento utiliza uma direta minimização da energia potencial, que é um componente essencial na teoria de elementos finitos na análise de tensões. Normalmente, a energia potencial Π é minimizada com respeito aos graus de liberdade de deslocamento, mas como Π pode ser expresso como uma função de outras variáveis, por exemplo, comprimento de trinca, pode-se utilizar a minimização com respeito ao comprimento da trinca.

A energia potencial total é escrita como:

$$\Pi = \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^t \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}^t \underset{\sim}{F} = W - \underset{\sim}{u}^t \underset{\sim}{F} \quad (\text{ III.36 })$$

Com $W = w(u, x)$ sendo uma função dos deslocamentos e da geometria, tem-se:

$$\delta \pi = \underset{\sim}{\delta u}^t \frac{\partial \Pi}{\partial \underset{\sim}{u}} + \underset{\sim}{\delta x}^t \frac{\partial \Pi}{\partial \underset{\sim}{x}} \quad (\text{ III.37 })$$

ou

$$\delta \Pi = \delta \underset{\sim}{u}^t \left[\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{u}} - \underset{\sim}{F} \right] + \delta \underset{\sim}{x}^t \left[\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{x}} - \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{u} \right] \quad (\text{ III.38 })$$

O primeiro termo é zero ou porque $\delta \underset{\sim}{u}^t$ é zero nos nós com graus de liberdade restritos ou porque há o equilíbrio do termo entre colchetes. Então,

$$\delta \Pi = \delta \underset{\sim}{x}^t \left[\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{x}} - \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{u} \right] \quad (\text{ III.39 })$$

Para extensões na vizinhança da ponta da trinca $\delta \underset{\sim}{F}$ é invariavelmente zero, então o segundo termo pode ser ignorado. Considerando que não haja variação em $\underset{\sim}{F}$,

$$\frac{\delta \Pi}{\delta a} = \frac{\partial W}{\partial a} \quad (\text{ III.40 })$$

Isto afeta apenas os elementos da ponta da trinca, pois nos demais $\partial w / \partial a$ é zero.

Usando transformações elementares do espaço real V para o espaço adimensional V_0 , como na teoria de elemento isoparamétrico, se $[J]$ é a matriz de transformação jacobiana e $|J|$ seu determinante, para qualquer vetor $\underset{\sim}{x}$

$$\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{x}} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{x}} |J| + W \frac{\partial |J|}{\partial \underset{\sim}{x}} \right) dV \quad (\text{ III.41 })$$

e para material homogêneo linear,

$$\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{x}} = \frac{\partial W}{\partial \xi_{kl}} \frac{\partial \xi_{kl}}{\partial \underset{\sim}{x}} = \sigma_{kl} \frac{\partial \xi_{kl}}{\partial \underset{\sim}{x}} \quad (\text{ III.42 })$$

Assumindo que o grau de liberdade a ser perturbado seja x_1^n , a i-ésima componente do nó n, então

$$G = - \frac{\partial W}{\partial x_1^n} = - \int \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1^n} |J| + W \frac{\partial |J|}{\partial x_1^n} \right\} dV \quad (\text{ III.43 })$$

ou

$$G = - \frac{d\Pi}{dx_1^n} = - \int_{V_0} (A + B) dV \quad (\text{ III.44 })$$

A avaliação de A e B é feita, separadamente, abaixo.

CÁLCULO DE A

A hipótese de W como um trabalho potencial para materiais elásticos é usada na equação (III.42),

$$\frac{\partial W}{\partial x_1^n} = \frac{\partial W}{\partial \xi_{kl}} \frac{\partial \xi_{kl}}{\partial x_1^n} = \sigma_{kl} \frac{\partial \xi_{kl}}{\partial x_1^n} \quad (\text{ III.45 })$$

onde, para comportamento de pequena deformação, a diferenciação com respeito aos eixos globais fornece

$$\xi_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (\text{ III.46 })$$

Aqui x_1^n significa componente x_1 , $i = 1, 2, 3$ do nó n , bem como as expressões x , y , z que são usadas quando conveniente.

Para avaliar $\partial \xi_{k1} / \partial x_1^n$ é necessário introduzir as três coordenadas adimensionais (ξ, η, ζ) que definem o espaço adimensional V_0 . Então

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} , \quad (\text{ III.47 })$$

e

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{ III.48 })$$

e pela regra de Cramer, os termos do vetor do lado direito são avaliados de modo análogo ao termo abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{|J|} \quad (\text{III.49})$$

Os termos como $\partial u / \partial x$ aparecem na equação (III.45) diferenciados em relação a x_1^n . Estes podem ser avaliados usando as funções de forma h_i , onde $u = \sum_j h_j u_j$ e $x = \sum_j h_j x_j$, e u_j e x_j são os valores nodais de u e x .

$\partial |J| / \partial x_1$ é encontrada notando que

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + \\ &- \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + \\ &+ \frac{\partial x}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

e

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_j \frac{\partial h_j}{\partial x_1^n} u_j = \frac{\partial h_1}{\partial x_1^n} u_1 \quad (\text{III.51})$$

e analogamente para os outros termos na equação (III.50) de modo que após algumas operações chega-se a:

$$\frac{\partial |J|}{\partial x_1^n} = \frac{\partial h_n}{\partial x_1} |J| \quad (\text{ III.52 })$$

Tem-se, também, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & - \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \\ & \left. + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \right] / |J| \end{aligned} \quad (\text{ III.53 })$$

de modo que $(\partial/\partial x_1^n) (\partial u/\partial x)$ é obtida pela diferenciação de uma função dividida por outra função. Após várias operações, é obtida a fórmula geral

$$\frac{\partial}{\partial x_1^n} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) = - \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \frac{\partial h_n}{\partial x_1} \quad (\text{ III.54 })$$

e, então, da equação (III.46)

$$\frac{\partial \xi_{k1}}{\partial x_1^n} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \frac{\partial h_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_n}{\partial x_k} \right) \quad (\text{ III.55 })$$

Portanto, A é determinado explicitamente.

CÁLCULO DE B

Sendo $B = W \frac{\partial |J|}{\partial x_1^n}$, da equação (II.64) obtem-se

$$B = W \frac{\partial h_n}{\partial x_1} |J| \quad (\text{ III.56 })$$

EXPRESSÕES GERAIS

A partir da equação (III.44), G pode ser escrito, em notação indicial, da seguinte forma:

$$G = - \frac{d\Pi}{dx_1^n} = - \int_{V_0} \left\{ W \frac{\partial h_n}{\partial x_1} - \sigma_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \frac{\partial h_n}{\partial x_1} \right\} |J| dV \quad (\text{ III.57 })$$

As equações acima fornecem as expressões da taxa de liberação de energia potencial utilizadas no método implícito da extensão virtual.

No caso de extensão da trinca ao longo do eixo x, ou seja, $i = 1$ e $x_1^n \equiv x^n$, a equação (III.57), na forma tridimensional, se torna

$$\begin{aligned}
G = & - \int_{V_0} \left\{ w \frac{\partial h_n}{\partial x} - \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial x} - \right. \\
& - \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial y} - \sigma_z \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial z} - \\
& - \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial x} \right) + \\
& - \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial y} \right) + \\
& \left. - \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial z} \right) \right\} |J| dv \\
& \qquad \qquad \qquad (\text{III.58})
\end{aligned}$$

se a extensão ocorre ao longo do eixo y , $i = 2$, $x_1^n \equiv y^n$
então

$$\begin{aligned}
G = & - \int_{V_0} \left\{ w \frac{\partial h_n}{\partial y} - \sigma_x \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial x} - \right. \\
& - \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial y} - \sigma_z \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial z} - \\
& - \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial x} \right) + \\
& - \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial y} \right) + \\
& \left. - \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial z} \right) \right\} |J| dv \\
& \qquad \qquad \qquad (\text{III.59})
\end{aligned}$$

Para uma extensão ao longo do eixo z , $i = 3$, $x_i \equiv z^n$,

$$\begin{aligned}
 G = & - \int_{V_0} \left\{ w \frac{\partial h_n}{\partial z} - \sigma_x \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial x} - \right. \\
 & - \sigma_y \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial y} - \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial z} - \\
 & - \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial x} \right) + \\
 & - \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial y} \right) + \\
 & \left. - \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial x} \right) \right\} |J| dv \\
 & \quad \quad \quad (\text{III.60})
 \end{aligned}$$

Ao definir $G = - \frac{d\Pi}{dx_i^n}$, foi assumido que o grau de liberdade x_i^n corresponde a uma direção no sistema de referência global que era a mesma da ponta da trinca. Se a extensão δa ocorre num ângulo θ arbitrário em relação a x_i^n , então

$$G = - \frac{d\Pi}{da} = - \frac{\partial P}{\partial x_i^n} \frac{\partial x_i^n}{\partial a} \quad (\text{III.61})$$

onde $\frac{\partial x_i^n}{\partial a} = \frac{a_i}{t}$, sendo a_i os cossenos diretores e t a

espessura. Para o caso bidimensional,

$$G = - \frac{\partial P}{\partial x_1^n} \frac{\cos \theta}{t} - \frac{\partial P}{\partial x_2^n} \frac{\sin \theta}{t} \quad (\text{ III.62 })$$

Este método é bastante interessante tendo em vista a necessidade de apenas uma análise. Esta vantagem é de suma importância numa análise não-linear ao compará-lo com o método da extensão virtual, onde é necessário o processamento simultâneo das posições original e estendida da ponta da trinca durante cada incremento.

III.5 - MODELO DE LINHA DE MOLA

Conforme visto anteriormente, a análise de uma trinca em componente estrutural é um problema tridimensional, dificultando, assim, a utilização de métodos analíticos. Recorre-se, então, a técnicas numéricas sendo várias delas baseadas no M.E.F. Estas técnicas requerem uma discretização muito refinada da estrutura tornando a solução onerosa. Este problema se torna crítico quando se estende a análise para o regime não-linear, que implica na utilização de processos incrementais-iterativos na solução do problema.

A análise de trincas não-passantes com o uso do modelo de linha de mola (M.L.M.) tem se desenvolvido

rapidamente devido à sua simplicidade e eficiência na solução de problemas dessa natureza. Este modelo evita a discretização ao longo da espessura e reduz o problema em uma dimensão, produzindo economia computacional sem deixar de fornecer resultados com um grau de precisão aceitável. Este modelo foi introduzido por RICE E LEVY [26] tendo por base a teoria clássica de flexão de placas desenvolvida por Kirchhoff. Posteriormente, PARKS [27,28] tratou do problema de trinca longitudinal num cilindro utilizando a teoria clássica de casca em conjunto com o M.L.M.. A utilização deste modelo junto com a teoria de Reissner para flexão foi apresentada por DELALE E ERDOGAN [29,30]. GERMAN [31] obteve uma matriz de rigidez para os elementos de mola e implementou num sistema em conjunto com elementos finitos de casca. A seguir, KUMAR E GERMAN [32] apresentaram uma versão modificada do M.L.M. em duas dimensões.

DESVAUX [33] e SOUZA [34] estenderam o modelo para os modos II e III. O desenvolvimento para o caso elasto-plástico perfeito foi realizado por RICE [35], sendo complementado para incluir considerações de endurecimento do material por PARKS [27 e 36].

O modelo desenvolvido por Rice e Levy objetiva reduzir o problema de trinca tridimensional a uma análise bidimensional de um problema de membrana e flexão. Isto é

conseguido através da redução das tensões na parte remanescente de uma trinca não-passante à superfície neutra de uma placa ou casca como um esforço de membrana N e um de flexão M .

Os deslocamentos da superfície trincada são representados por um deslocamento de abertura da trinca δ e uma rotação da superfície θ , referidos à superfície neutra. Assumindo que a relação entre (N, M) e (δ, θ) possa ser aproximada pelos resultados do estado plano de deformação obtidos da solução de uma faixa de placa trincada, figura (III.5), com largura igual a espessura da placa e comprimento da trinca igual a profundidade da trinca no ponto considerado, obtém-se o par de equações

$$h \delta = A_{tt} \sigma + A_{tb} m \quad (\text{ III.63 })$$

$$\frac{h \theta}{6} = A_{bt} \sigma + A_{bb} m \quad (\text{ III.64 })$$

$$\text{onde } \sigma = \frac{N}{h} \quad \text{e} \quad m = \frac{6M}{h^2}$$

e A_{ij} são as constantes de reciprocidade elástica.

O fator de intensidade de tensão para a faixa pode ser expresso como

$$K = h^{1/2} (\sigma g_t + m g_b) \quad (\text{ III.65 })$$

onde g_t e g_b são funções de L/h . Expressões para g_t e g_b são encontradas em [29].

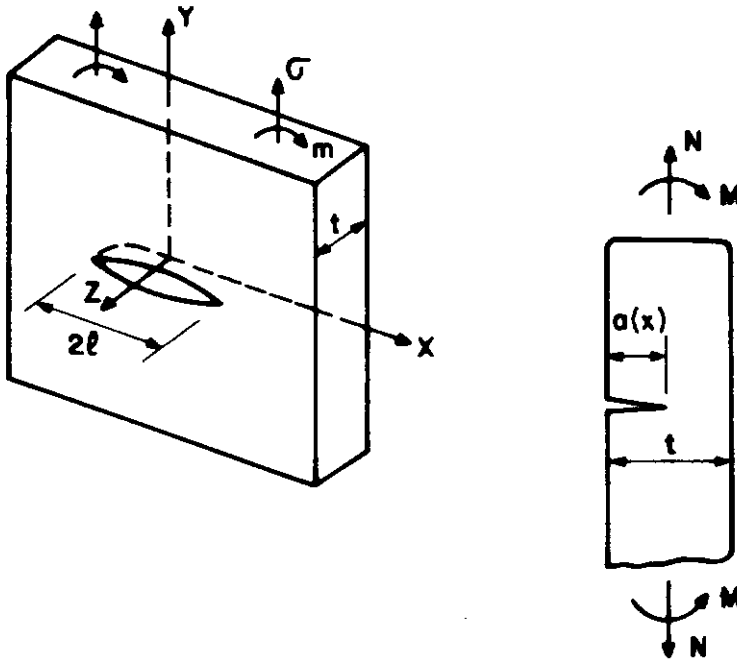


figura III.5 - MLM - Geometria da Placa Fraturada

Das expressões da taxa de liberação de energia potencial e da equação (III.65)

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 = h \frac{1-\nu^2}{E} (\sigma^2 g_t^2 + 2 \sigma m g_t g_b + m^2 g_b^2)$$

ou

$$G = \frac{1}{2} \left[\sigma \frac{\partial}{\partial L} (h\delta) + m \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{h^2 \theta}{6} \right) \right] \quad (\text{III.66})$$

obtendo-se, então

$$\delta = \frac{2(1 - \nu^2)h}{E} (\alpha_{tt} \sigma + \alpha_{tb} m) \quad (\text{III.67})$$

$$\theta = \frac{12(1 - \nu^2)}{E} (\alpha_{bt} \sigma + \alpha_{bb} m) \quad (\text{III.68})$$

onde

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{h} \int_0^L g_i g_j dL, \quad (i, j = b, t) \quad (\text{III.69})$$

substituindo σ e m em (III.67) e (III.68) resulta

$$\delta = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} (\alpha_{tt} N + \alpha_{tb} \frac{6M}{h}) \quad (\text{III.70})$$

$$\theta = \frac{12(1 - \nu^2)}{E} \left(\alpha_{bt} \frac{N}{h} + \alpha_{bb} \frac{6M}{h^2} \right) \quad (\text{III.71})$$

Em forma matricial, tem-se:

$$\begin{matrix} D & = & C & P \\ \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (\text{III.72})$$

onde

$$\begin{matrix} D \\ \sim \end{matrix} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} C \\ \sim \end{matrix} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \begin{bmatrix} \alpha_{tt} & \frac{6}{h} \alpha_{tb} \\ \frac{6}{h} \alpha_{bt} & \frac{36}{h^2} \alpha_{bb} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

A matriz C representa a matriz de reciprocidade elástica local, ou seja, é a matriz de flexibilidade da linha de mola.

Efetuando, agora, um procedimento análogo em que sejam levados em consideração os três modos de fratura, ver figura (III.6), a equação (III.72) se transforma em :

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \Delta t \\ \Delta r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \\ V \\ Q \\ T \end{Bmatrix} \quad (\text{ III.73 })$$

onde

δ = deslocamento de abertura das faces trincadas

θ = rotação das faces trincadas

Δt = deslizamento das faces trincadas

Δr = deslocamento anti-plano das faces trincadas

ϕ = rotação anti-plano das faces trincadas

N = esforço normal

M = momento fletor

V = esforço cisalhante

Q = esforço de rasgamento

T = esforço torsor

Através de simples considerações de equilíbrio podemos simplificar estas equações, chegando-se a

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \Delta t \\ \Delta r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \\ V \\ Q \\ T \end{Bmatrix} \quad (\text{ III.74 })$$

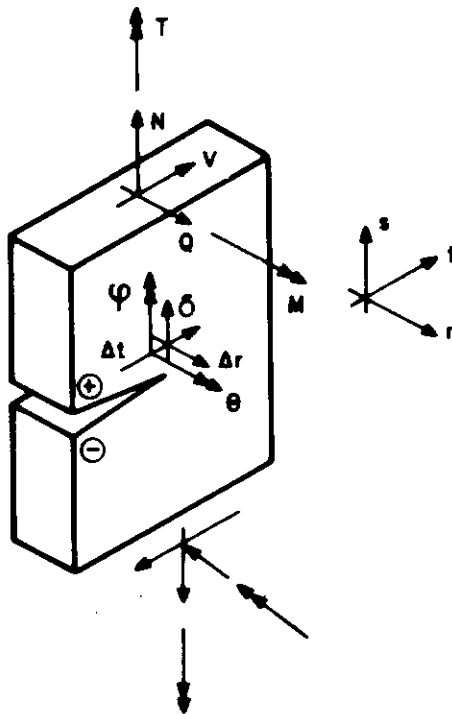


figura III.6 - Placa em Estado Plano de Deformação

A determinação dos coeficientes de flexibilidade pode ser feita separadamente, tendo em vista que o modo I de fratura está relacionado aos esforços N e M e aos deslocamentos δ e θ . O modo II está relacionado ao esforço V e ao deslizamento Δt , enquanto que o modo III está relacionado aos esforços Q e T e aos deslocamentos Δr e ϕ . Os coeficientes relativos ao modo I foram determinados anteriormente, os demais serão determinados a seguir.

Recorrendo-se à relação entre a taxa de energia dissipada e os fatores de intensidade de tensão, aplicada aos três modos

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2G'} \quad (\text{ III.75 })$$

$$\text{onde } E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{e} \quad G' = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

pode-se determinar os coeficientes de flexibilidade relativos aos modos II e III de fratura.

Escrevendo o modo II da seguinte forma:

$$K_{II} = K_V \quad V \quad (\text{ III.76 })$$

e pelo teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \Delta t \quad (\text{ III.77 })$$

derivando (III.75) em relação a V,

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{2K_{II}}{E'} \frac{\partial K_{II}}{\partial V} = \frac{2 K_v^2}{E'} V \quad (\text{ III.78 })$$

derivando (III.77) em relação a profundidade a,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) = \frac{\partial \Delta t}{\partial a} \quad (\text{ III.79 })$$

combinando as equações (III.78) e (III.79), obtém-se

$$\Delta t = \frac{2 V}{E'} \int_0^a K_v^2 da \quad (\text{ III.80 })$$

Logo,

$$C_{33} = \frac{2}{E'} \int_0^a K_v^2 da \quad (\text{ III.81 })$$

A integral acima é efetuada, analiticamente, a partir de uma expressão aproximada para K_v , dada por TADA [36], para o caso de tensões de cisalhamento uniforme, sendo conservativa para trincas pequenas.

Procedimento análogo é utilizado para a obtenção dos coeficientes de flexibilidade relativos ao modo III.

assim,

$$K_{III} = K_Q Q + K_T T \quad (III.82)$$

Pelo teorema de Castigliano,

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta r \quad (III.83)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \phi \quad (III.84)$$

Derivando com relação a profundidade a,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right) = \frac{\partial \Delta r}{\partial a} \quad (III.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial a} \quad (III.86)$$

Derivando (III.75) com relação a cada esforço,

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{K_Q Q + K_T T}{G'} K_Q \quad (III.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{K_Q Q + K_T T}{G'} K_T \quad (III.88)$$

combinando (III.85) a (III.88), obtém-se

$$\Delta r = Q \int_0^a \frac{K_Q^2}{G'} da + T \int_0^a \frac{K_Q K_T}{G'} da \quad (III.89)$$

$$\phi = Q \int_0^a \frac{K_Q K_T}{G'} da + T \int_0^a \frac{K_T^2}{G'} da \quad (\text{ III.90 })$$

Logo,

$$C_{44} = \int_0^a \frac{K_Q^2}{G'} da \quad (\text{ III.91 })$$

$$C_{45} = \int_0^a \frac{K_Q K_T}{G'} da \quad (\text{ III.92 })$$

$$C_{55} = \int_0^a \frac{K_T^2}{G'} da \quad (\text{ III.93 })$$

A equação (III.91) é integrada analiticamente, enquanto que as equações (III.92) e (III.93) não possuem soluções fechadas, necessitando serem integradas numericamente. Neste trabalho foi assumido $C_{45} = 0$, que além de fornecer resultados mais satisfatórios como demonstrado por Desvaux, pode ser justificado fisicamente.

A matriz de rigidez é obtida invertendo-se a matriz de flexibilidade. Pode-se, então, inverter a equação (III.74) de modo a se obter:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \\ V \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \Delta t \\ \Delta r \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{ III.94 })$$

III.5.1 - MODELO DE LINHA DE MOLA BIDIMENSIONAL

Este modelo difere do modelo unidimensional basicamente em dois pontos:

- i) O corpo que contém a trinca é modelado por elemento 3-D ao invés de elementos de casca.
- ii) A ligação não-trincada é modelada por elementos de linha de mola 2-D.

Embora todo o desenvolvimento seja baseado em elementos 3-D, ele não requer uma modelagem detalhada da trinca e é portanto mais simples e econômico que uma completa análise por elementos finitos 3-D.

De modo semelhante ao modelo unidimensional, a matriz de rigidez do elemento 2-D é obtida de uma faixa de placa trincada. Inicialmente, será apresentada a parte da matriz de rigidez do elemento 2-D correspondente ao modo I de fratura.

Seja $[k']$ a matriz de rigidez do E.L.M. 2-D e $[K]$ a matriz de rigidez do E.L.M. 1-D. A partir da figura (III.7), observa-se que

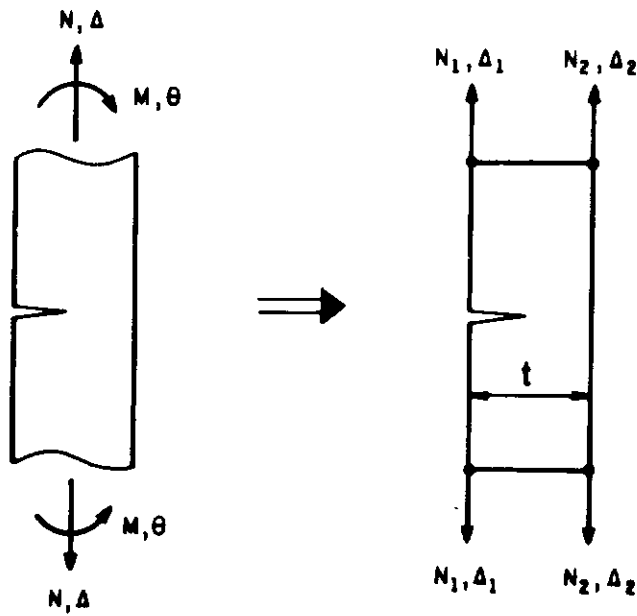


figura III.7 - Esquema de Modelo de Linha de Mola 1D e 2D

$$\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2) / 2 \quad (\text{III.95})$$

$$\theta = (\Delta_1 - \Delta_2) / t \quad (\text{III.96})$$

$$N = N_1 + N_2 \quad (\text{ III.97 })$$

e

$$M = (N_1 - N_2) t / 2 \quad (\text{ III.98 })$$

Tem-se, também, as relações

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (\text{ III.99 })$$

e

$$\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{ III.100 })$$

Substituindo-se as equações (III.95) a (III.98) em (III.99) e reagrupando os termos, obtém-se para [k']:

$$\begin{bmatrix} K' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{4} + \frac{K_{12}}{t} + \frac{K_{22}}{t^2} & \frac{K_{11}}{4} + \frac{K_{22}}{t^2} \\ \frac{K_{11}}{4} - \frac{K_{22}}{t^2} & \frac{K_{11}}{4} - \frac{K_{12}}{t} + \frac{K_{22}}{t^2} \end{bmatrix}$$

$$(\text{ III.101 })$$

Utilizando-se este mesmo procedimento, é determinada a matriz de rigidez do E.L.M. 2-D para os três modos de fratura. Ela é escrita em função da matriz de rigidez do E.L.M. 1-D da seguinte forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & d & d & 0 & 0 \\ & & & d & 0 & 0 \\ & & & & e & f \\ & & & & & e \end{bmatrix} \quad (\text{III.102})$$

onde

$$a = \frac{K_{11}}{4} + \frac{K_{12}}{t} + \frac{K_{22}}{t^2}$$

$$b = \frac{K_{11}}{4} - \frac{K_{22}}{t^2}$$

$$c = \frac{K_{11}}{4} - \frac{K_{12}}{t} + \frac{K_{22}}{t^2}$$

$$d = \frac{K_{33}}{4}$$

$$e = \frac{K_{44}}{4} + \frac{K_{55}}{t^2}$$

$$f = \frac{K_{44}}{4} - \frac{K_{55}}{t^2}$$

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

IV.1 - INTRODUÇÃO

A implementação do sistema computacional está relacionada com o método numérico utilizado. Neste trabalho utilizou-se o método dos elementos finitos fazendo uso de dois tipos de elementos. O primeiro é um elemento de sólido que foi utilizado nos três modelos comparados, e o segundo é um elemento de linha de mola bidimensional utilizado no modelo de linha de mola.

O programa possui as características comuns aos códigos resultantes do M.E.F., conforme será apresentado a seguir, acrescido do cálculo dos parâmetros relativos à mecânica da fratura.

O sistema foi implementado no computador IBM 4381 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, utilizando-se da linguagem FORTRAN 77 disponível neste equipamento.

IV.2 - DESCRIÇÃO GERAL DO PROGRAMA

A partir de um programa básico do método dos

elementos finitos, implementou-se os elementos de sólido e de linha de mola bidimensional, bem como as modificações necessárias, e a parte relativa ao cálculo dos parâmetros da mecânica da fratura desejados. O programa foi preparado para análise de trincas não-passantes por meio de três métodos: M.E.V, M.I.E.V. e M.L.M.. Descreve-se, a seguir, os vários módulos em que se divide o programa sem, no entanto, descer ao nível das rotinas.

MÓDULO I

Neste módulo é feito o dimensionamento do vetor de trabalho, que será utilizado no armazenamento das variáveis. O programa implementado faz uso de alocação dinâmica das variáveis de modo a se obter uma otimização do espaço de memória. Este procedimento permite a realocação de determinada área do vetor de trabalho que estava ocupada por variáveis que já não são de interesse em determinada fase do processamento. Para que se possa armazenar diferentes variáveis no vetor de trabalho é feito uso de apontadores que indicam as posições destas variáveis.

MÓDULO II

Nesta etapa é feita a leitura e impressão dos dados:

a) tipo de análise;

- b) tipos de elementos utilizados;
- c) características topológicas (coordenadas, incidências);
- d) condições de contorno;
- e) características dos materiais (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson etc);
- f) forças aplicadas.

Durante todo este processo de leitura dos dados, é feita uma crítica de modo a evitar o processamento com dados inconsistentes. Erros, tais como a duplicidade de nós ou elementos, são identificados e impressos num arquivo apropriado, indicando o tipo de erro e o local do mesmo.

Ainda neste módulo são determinados os apontadores dos elementos da diagonal da matriz de rigidez global para armazenamento em perfil por altura efetiva de coluna. O número de equações, número de blocos, tamanho máximo de um bloco, e o número de coeficientes da matriz de rigidez armazenados são alguns dos principais parâmetros do sistema de equações calculados nesta etapa do programa.

MÓDULO III

Nesta etapa são calculadas as matrizes de rigidez de cada elemento de sólido e de linha de mola, se for o caso, e feito o armazenamento.

Este processo é feito utilizando-se um laço externo, onde é variado o número de bloco de um até o número máximo de blocos determinado no módulo anterior, e outros laços internos onde a variação é em relação aos elementos. Nestes laços internos só são calculadas as matrizes dos elementos que contribuem no bloco em análise. Paralelamente à montagem da matriz são introduzidas as condições de contorno, de modo que ao final deste módulo todas as condições de contorno são introduzidas.

O esquema de armazenamento em perfil por altura efetiva de coluna é muito eficiente, tendo em vista que um único vetor de trabalho BP armazena os coeficientes de cada coluna a partir do primeiro valor não nulo até o coeficiente da diagonal principal.

Supondo que a matriz abaixo, figura (IV.1), represente a matriz de rigidez de uma estrutura,

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & 0 & 0 \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}$$

figura (IV.1) Matriz de Rigidez

O vetor de trabalho $\underline{BP}$ será dado por:

$$\underline{BP}^t = \{ \begin{matrix} K_{11} & K_{22} & K_{23} & K_{33} & K_{14} & 0 & 0 & K_{44} \\ K_{25} & K_{35} & 0 & K_{55} & K_{26} & K_{36} & 0 & K_{56} & K_{66} \end{matrix} \}$$

A localização dos coeficientes é feita com o auxílio de um outro vetor que fornece a posição dos termos da diagonal principal dentro do vetor $\underline{BP}$. Para a matriz $\underline{K}$ acima, o vetor auxiliar $\underline{IPOS}$ será

$$\underline{IPOS}^t = \{ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 17 \}$$

Este vetor $\underline{IPOS}$ foi determinado no módulo anterior a partir da determinação das alturas efetivas das colunas.

Mesmo com a eficiência do armazenamento em perfil, as vezes é necessário particionar a matriz de rigidez global da estrutura devido à limitação de memória central do equipamento utilizado. Foi, então, utilizada a técnica do particionamento em grupos de alturas efetivas de colunas.

A figura (III.2) mostra um esquema de armazenamento de uma matriz global particionada em bloco.

$$\underset{\sim}{K} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc}
 X & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
 & & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\
 & & & X & X & X & 0 & X \\
 & & & & X & X & X & X \\
 & & & & & X & X & X \\
 & & & & & & X & X \\
 & & & & & & & X
 \end{array} \right]$$

1° bloco
2° bloco
3° bloco

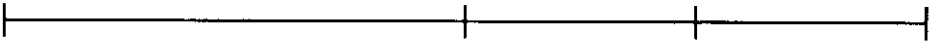


figura (IV.2) matriz armazenada em blocos

Para que este particionamento fique bem definido é necessário o conhecimento de alguns parâmetros. São eles:

- tamanho de cada bloco, expresso pelo número de coeficientes em cada bloco;
- número de colunas em cada bloco;
- a posição do primeiro coeficiente de cada bloco em relação a um armazenamento em forma completa do perfil.

MÓDULO IV

A solução do sistema de equações é realizada utilizando-se o método de Cholesky, que é um procedimento eficiente quando opera segundo as colunas da matriz armazenada em perfil. Este método pode ser aplicado para matrizes positivas definidas e que permitam a sua decomposição em uma matriz triangular inferior e outra superior.

Pode-se separar este procedimento de solução nas seguintes etapas: decomposição, onde acontece a triangularização da matriz do sistema; substituição, que produz a solução do sistema formado com a matriz triangular inferior, e a etapa de retrossubstituição, onde finalmente se encontra a solução do sistema de equações original.

No caso da matriz de rigidez ter sido particionada em blocos existe a possibilidade de uso de memória auxiliar, por exemplo, fita magnética, que permite a solução de sistemas maiores. Neste caso, basta a existência de espaço na memória principal para dois blocos de cada vez.

MÓDULO V

Obtidos os deslocamentos na etapa anterior, três

possibilidades se apresentam dependendo do método que está sendo utilizado:

a) No caso do método utilizado ser o da extensão virtual, esta fase do processamento armazena em memória auxiliar a matriz de rigidez global e os deslocamentos, que serão utilizados no cálculo da energia de deformação;

b) Para o método implícito da extensão virtual são calculadas as deformações e tensões nos elementos da ponta da trinca, e então calculadas as variações de energia de deformação para o crescimento da trinca segundo às direções globais.

c) No último caso, utilização do modelo de linha de mola, são calculados vários parâmetros da mecânica da fratura. A partir dos deslocamentos encontrados no módulo anterior são avaliados os fatores de intensidade de tensão para os três modos de fratura, a integral J e o deslocamento de abertura de trinca.

MÓDULO VI

Neste último módulo do programa são impressos os deslocamentos, encontrados na solução do sistema de equações, e os parâmetros importantes na avaliação da fratura de acordo com o método de análise escolhido.

IV.3 - ELEMENTOS UTILIZADOS

IV.3.1 - ELEMENTO DE SÓLIDO

O procedimento básico na formulação de um elemento finito isoparamétrico [38] é expressar as coordenadas e deslocamentos do elemento na forma de interpolações, usando o sistema de coordenada natural do elemento.

Para um elemento tridimensional, as interpolações de coordenadas são:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^q h_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^q h_i y_i \\ z &= \sum_{i=1}^q h_i z_i \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

onde x , y e z são as coordenadas em qualquer ponto do elemento, e x_i , y_i , z_i , $i = 1, \dots, q$, são as coordenadas dos q nós do elemento. As funções de interpolação h_i são definidas no sistema de coordenadas naturais do elemento, que tem variáveis r , s , e t variando de -1 a $+1$.

Portanto, o conhecimento das funções de interpolação h_i é básico nas equações (IV.1). A propriedade fundamental da função de interpolação h_i é que seu valor, no sistema

de coordenadas naturais, é unitário no nó i e é zero em todos os outros nós. Usando estas condições, as funções h_i correspondentes a dada distribuição de pontos nodais podem ser encontradas de uma maneira sistemática.

Seja o elemento tridimensional com um número de nós variável de 8 a 20, figura (IV.3). As funções de interpolação para este elemento serão:

$$h_1 = g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17}) / 2$$

$$h_2 = g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18}) / 2$$

$$h_3 = g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19}) / 2$$

$$h_4 = g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20}) / 2$$

$$h_5 = g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17}) / 2$$

$$h_6 = g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18}) / 2$$

$$h_7 = g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19}) / 2$$

$$h_8 = g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20}) / 2$$

$$h_i = g_i \quad \text{para } i = 9, \dots, 20$$

onde $g_i = 0$ se o nó i não está incluído. Do contrário,

$$g_i = G(r, r_i) G(s, s_i) G(t, t_i)$$

$$G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2} (1 + \beta_i \beta) \quad \text{para } \beta_i = \pm 1$$

$$G(\beta, \beta_i) = (1 - \beta^2) \quad \text{para } \beta_i = 0 ; \beta = r, s, t$$

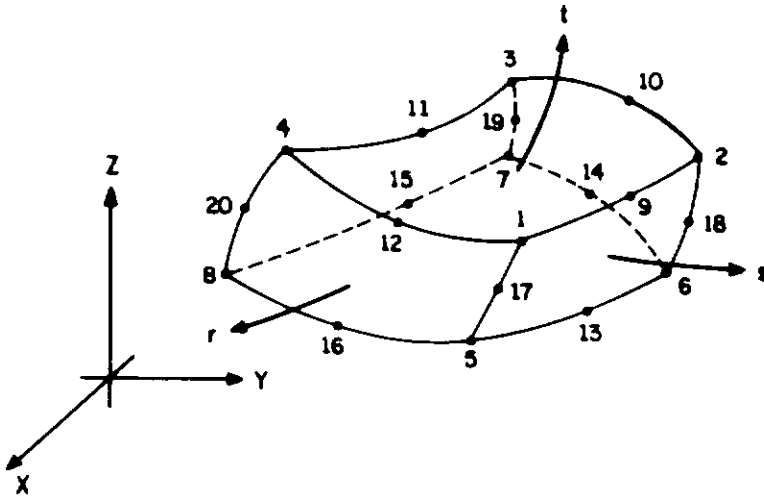


figura IV.3 -Elemento tridimensional com número de nós variável de 8 a 20.

A atratividade deste elemento reside na possibilidade dele ter qualquer número de nós entre 8 e 20, bem como poder formar elementos prismáticos.

Os deslocamentos são interpolados da mesma maneira que a geometria, isto é,

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i ; \quad v = \sum_{i=1}^q h_i v_i ; \quad w = \sum_{i=1}^q h_i w_i \quad (\text{IV.2})$$

onde u , v e w são os deslocamentos locais do elemento em qualquer ponto do elemento e u_i , v_i e w_i , $i = 1, \dots, q$, são os correspondentes deslocamentos do elemento nos seus nós.

Para avaliar a matriz de rigidez de um elemento é necessário calcular a matriz de transformação deformação-deslocamento B , isto é,

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \hat{\underline{\underline{u}}} \quad (\text{IV.3})$$

onde $\hat{\underline{\underline{u}}}$ é o vetor de deslocamentos dos pontos nodais do elemento.

A matriz de rigidez do elemento é, então, dada por

$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^t \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dV \quad (\text{IV.4})$$

sendo $\underline{\underline{D}}$ a matriz tensão-deformação para materiais lineares isotrópicos, dada por:

$$D = \frac{E(1 - \nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & a & a & & & \\ a & 1 & a & & & \\ a & a & 1 & & & \\ & & & b & & \\ & & & & b & \\ & & & & & b \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{onde } a = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{e} \quad b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

A integral existente na equação (IV.4) é feita de forma numérica utilizando-se o método da quadratura de Gauss. Neste trabalho existe a possibilidade de uso de até 4 pontos de integração em cada direção.

IV.3.2 - ELEMENTO DE LINHA DE MOLA

Dois importantes aspectos devem ser considerados no acoplamento do E.L.M. com o elemento de sólido utilizado na discretização da estrutura.

Sendo este acoplamento realizado através dos nós, é necessário a avaliação de uma rigidez equivalente ao nível de nós, e integrar ao longo do comprimento do lado a que está ligado. A cada mola discreta é associada um comprimento efetivo W_e , que é dependente das funções de interpolação utilizadas, conforme [31].

Deve, também, ser notado que a relação entre forças e deslocamentos nos E.L.M. está num sistema de coordenadas locais. Como a fratura pode ocorrer em qualquer direção com relação ao referencial global no qual a estrutura se localiza, é necessário relacionar as forças e deflexões do E.L.M. com o sistema global dos elementos de sólido.

Isto é realizado com a ajuda de uma matriz de rotação, de modo que:

$$\underset{\sim}{K}_G = \underset{\sim}{R}^t \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{R} \quad (\text{IV.6})$$

onde $\underset{\sim}{K}_G$ é a matriz de rigidez global

$\underset{\sim}{K}$ é a matriz de rigidez local

$\underset{\sim}{R}$ é a matriz de rotação do E.L.M

A matriz de rotação para o caso do E.L.M. 2D é dada por:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & T_1 & 0 & R_1 & 0 \\ S_2 & 0 & T_2 & 0 & R_2 & 0 \\ S_3 & 0 & T_3 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & T_1 & 0 & R_1 \\ 0 & S_2 & 0 & T_2 & 0 & R_2 \\ 0 & S_3 & 0 & T_3 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

onde S_1 , T_1 e R_1 são os cossenos diretores dos eixos locais com os eixos globais.

A matriz $\tilde{K}_G$ é, então, espalhada na matriz de rigidez da estrutura de modo semelhante à matriz do elemento de sólido.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

Neste capítulo são analisados alguns exemplos com o objetivo de testar a implementação computacional dos modelos estudados, assim como comparar os resultados obtidos. Foram, inicialmente, estudados alguns exemplos em que se dispunha dos resultados teóricos para que se pudesse verificar a confiabilidade do programa implementado.

CHAPA TRACIONADA - CASO I

Com o objetivo de comparar as aproximações fornecidas pelos modelos estudados neste trabalho, analisa-se, através de um teste-padrão, uma chapa com uma trinca central com comprimento $2a$, largura da chapa $2W$, espessura unitária, comprimento $2,5W$ e a razão entre o comprimento da trinca e a largura da chapa igual a $0,2$ conforme figura (V.1). Os dados geométricos e físicos utilizados foram:

comprimento da chapa (L)	= 500 mm
largura da chapa ($2W$)	= 200 mm
comprimento da trinca ($2a$)	= 40 mm
espessura (t)	= 1 mm
módulo de elasticidade (E)	= 2000000 N/mm ²

coeficiente de Poisson (ν) = 0

carregamento de tração (σ) = 800 N/mm²

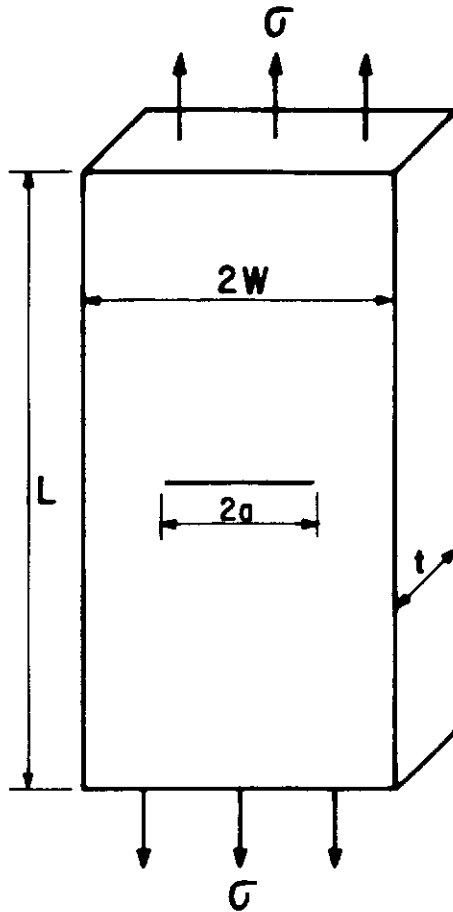


figura V.1 - Chapa Tracionada

Tirando-se partido da simetria de geometria e carregamento, discretizou-se apenas um quarto da estrutura, aplicando condições de contorno adequadas. A malha utilizada, figura (V.2), possui 110 elementos e 848 nós. Ao redor da ponta da trinca foram utilizados elementos quarter-point de modo a se obter resultados melhores.

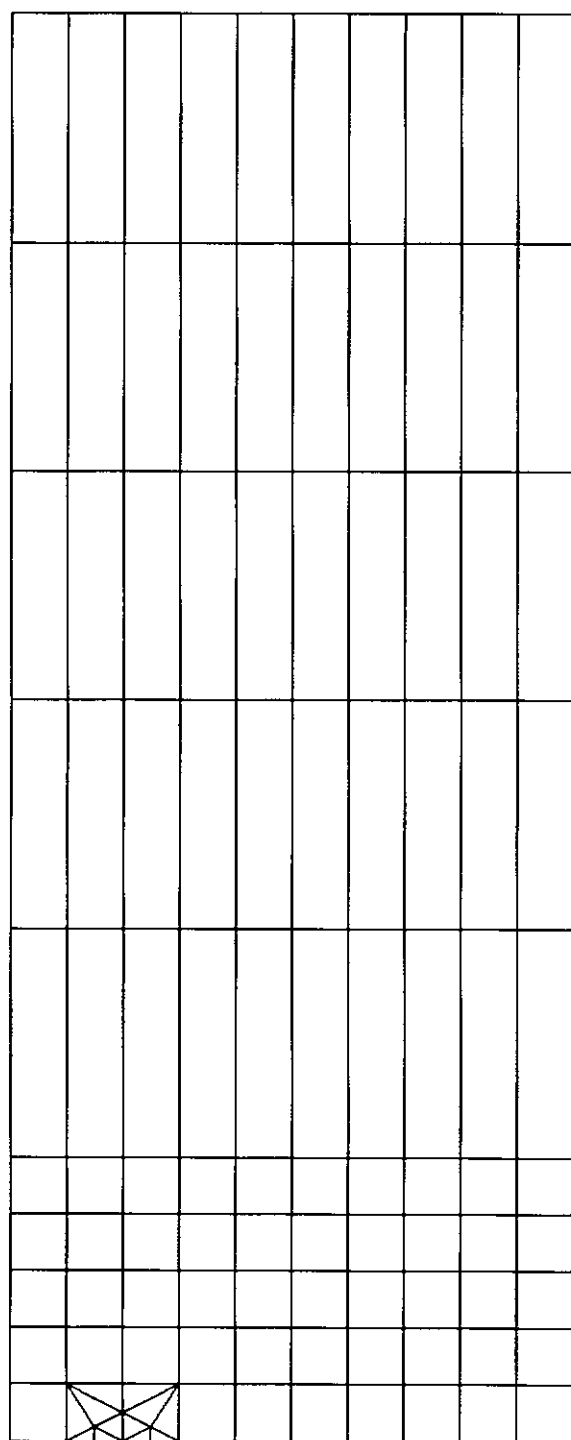


figura V.2 - Malha da Chapa Tracionada

Neste exemplo, só foram utilizados o método da extensão virtual e o método implícito da extensão virtual devido ao fato da trinca ser passante, o que inviabiliza a análise pelo modelo de linha de mola. No método da extensão virtual foi utilizado um acréscimo de trinca $\Delta a = 0,01$ mm sendo portanto 0,002 do comprimento da aresta do elemento da ponta da trinca que é de 5 mm. O resultado teórico assume um fator de correção geométrica $F(a/W) = 1,02$. Os valores obtidos para a Taxa de Energia Dissipada G e para o Fator de Intensidade de Tensão K_I nos dois modelos são comparados com o resultado teórico na tabela V.1. Estes valores são metade do valor real, devido à utilização da simetria.

Método	G (N/mm)	F.I.T. K (N.mm ^{-3/2})
MEV	9,82	4432
MIEV	11,89	4876
Teórico	10,46	4574

tabela V.1 - Taxa de Energia Dissipada G e Fator de Intensidade de tensão K_I

Verifica-se que os valores do fator de intensidade de tensão K_I , o único não nulo, devido à simetria, estão com uma precisão de 7% em relação ao valor teórico de Rooke [39].

CHAPA TRACIONADA - CASO II

Este exemplo consiste de uma chapa tracionada, semelhante ao exemplo anterior, com uma trinca central e dados geométricos e físicos fornecidos abaixo:

comprimento da chapa (L)	= 500 mm
largura da chapa (2W)	= 200 mm
comprimento da trinca (2a)	= 100 mm
espessura (t)	= 1 mm
módulo de elasticidade (E)	= 2000000 N/mm ²
coeficiente de Poisson (ν)	= 0
carregamento de tração (σ)	= 800 N/ mm ²

Um objetivo deste exemplo é verificar a influência do grau de refinamento da malha nos resultados obtidos com os modelos analisados. Foram então realizadas duas discretizações, conforme figuras (V.3) e (V.4). Na figura (V.3) está uma malha mais refinada, consistindo de 110 elementos e 848 nós. A malha da figura (V.4), menos refinada, possui 14 elementos e 131 nós. Foram utilizados elementos quarter-point ao redor da ponta da trinca para melhor precisão dos resultados. O acréscimo de trinca dado no método da extensão virtual foi $\Delta a = 0,01$ mm sendo o comprimento do elemento da ponta da trinca de 5 mm. A simetria na geometria e no carregamento aplicado possibilitou que se discretizasse apenas um quarto da estrutura.

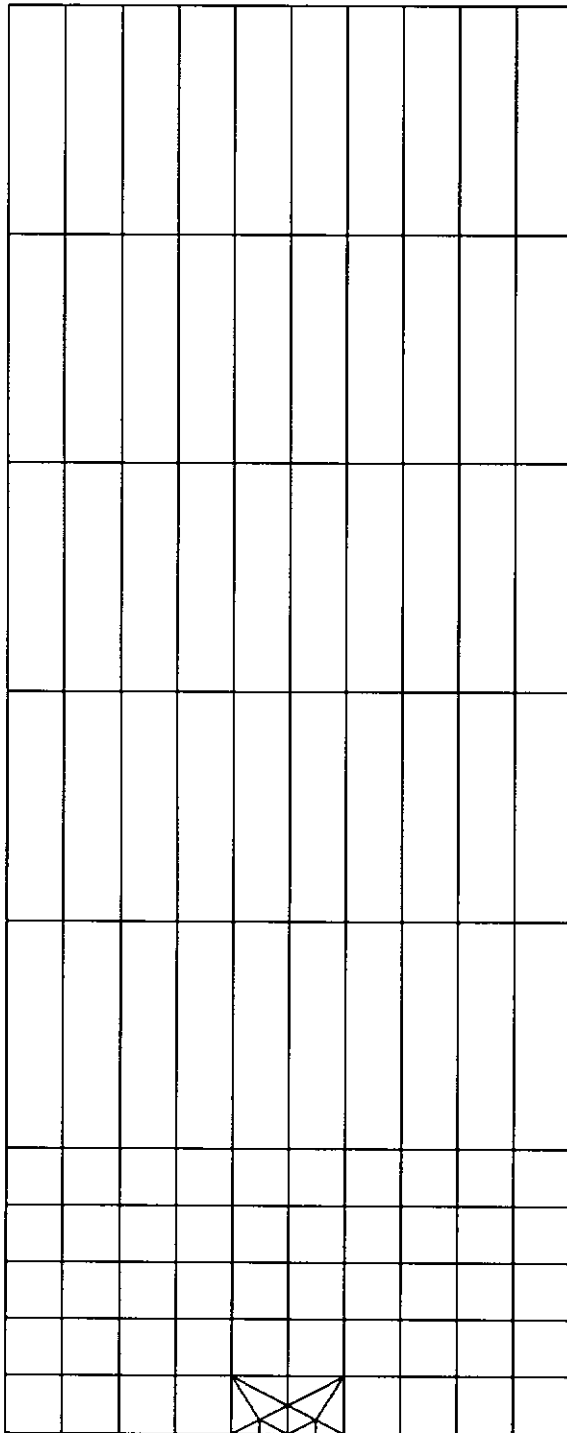


figura V.3 - Malha Refinada

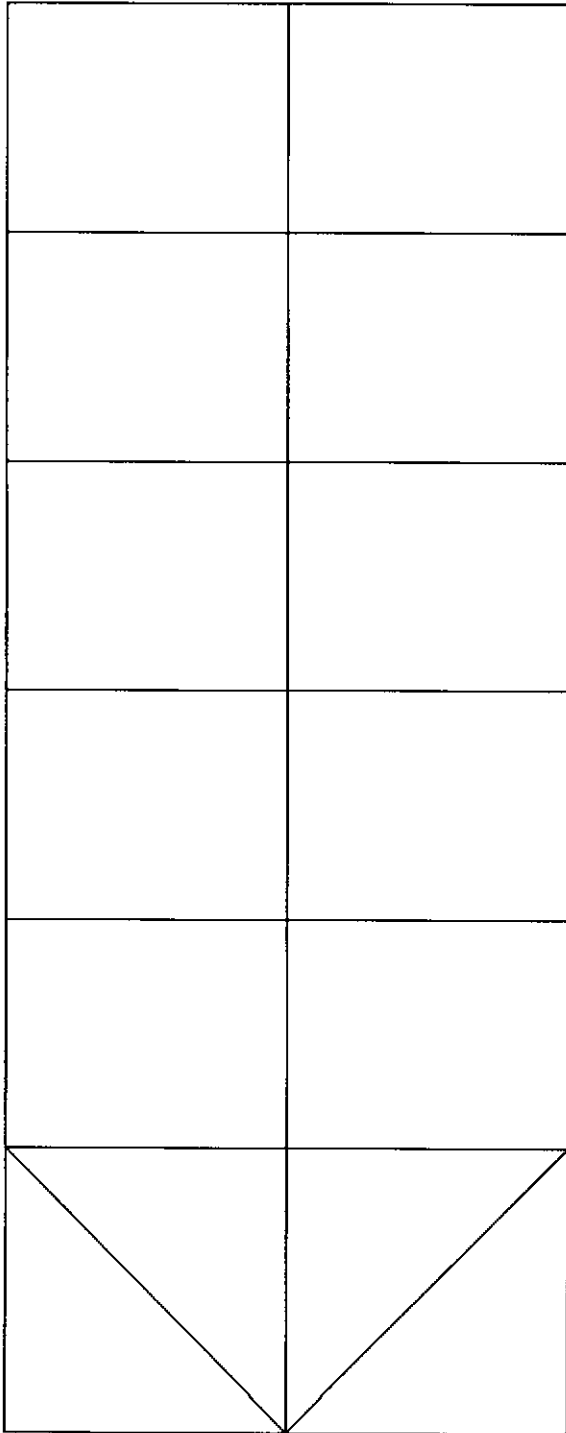


figura V.4 - Malha Pouco Refinada

Com a malha menos refinada foi possível conceber esta chapa como uma faixa de largura igual a espessura da chapa. Isto possibilitou o uso do modelo de linha de molas, que apresentou um bom resultado conforme demonstrado.

Os valores obtidos para a Taxa de Energia Dissipada G e para o Fator de Intensidade de Tensão K_I para os modelos e graus de refinamento analisados são apresentados nas tabelas V.2 e V.3 e comparados com o valor teórico, obtido com um fator de correção geométrica $F(a/W) = 1,20$ conforme [39]. Aqui, também, os valores calculados correspondem a metade do valor real.

Neste exemplo, conforme os resultados apresentados nas tabelas V.2 e V.3, o grau de refinamento da malha não influi de maneira acentuada. Os resultados para os fatores de intensidade de tensão estão com uma precisão da ordem de 5% inclusive com a malha muito pobre da figura (v.4). Nota-se, também, o bom resultado obtido pelo modelo de linha de mola 2-D.

Método	G (N/mm)	F.I.T. K (N.mm ^{-3/2})
MEV	33,2	8149
MIEV	40,0	8944
Teórico	36,2	8509

tabela V.2 - taxa de Energia Dissipada G e Fator de Intensidade de tensão K_I

Método	G (N/mm)	F.I.T. K (N.mm ^{-3/2})
MEV	33,7	8210
MIEV	40,0	8944
LM	34,7	8330
Teórico	36,2	8509

tabela V.3 - Taxa de Energia Dissipada G e Fator de Intensidade de Tensão K_I

CHAPA COM MODOS MISTOS

Este exemplo mostra a versatilidade do modelo de linha de mola na obtenção dos fatores de intensidade de tensão para os modos I, II e III, separadamente. A chapa utilizada é mostrada na figura (V.5), sendo a geometria, as características físicas do material e o carregamento aplicado dados abaixo:

comprimento (L)	= 8 cm
largura (b)	= 2 cm
espessura (t)	= 1 cm
profundidade da trinca (a)	= 1 cm
módulo de elasticidade (E)	= 2100000 KN/cm ²
coeficiente de Poisson (ν)	= 0,3
carregamento $\sigma_N = \sigma_Q = \sigma_V$	= 15 KN/cm ²

A malha foi discretizada conforme a figura (V.5), e os resultados dos fatores de intensidade de tensão foram comparados com os apresentados por SOUZA nas tabelas V.4 e V.5. Embora a discretização seja bastante grosseira a aproximação entre os modelos é significativa.

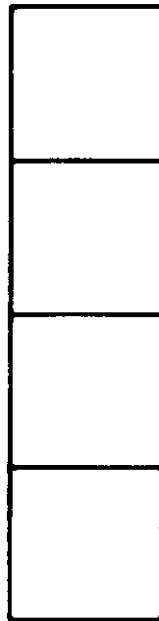
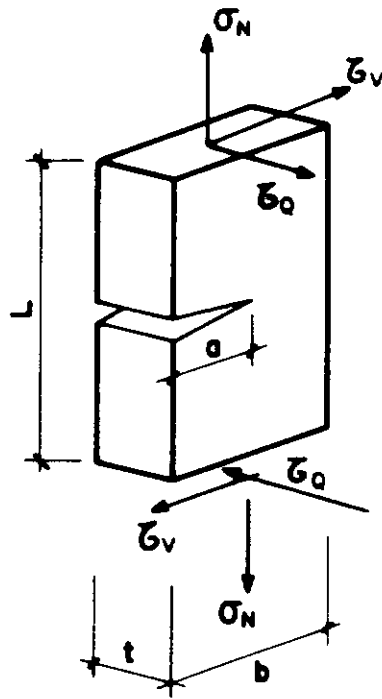


figura (V.5) - Características geométricas e malha utilizada na discretização

Mola	F.I.T ($\text{KN}.\text{mm}^{-3/2}$)		
	K_I	K_{II}	K_{III}
1	569	12,2	24,6
2	312	15,3	19,8
3	59	12,5	23,5

tabela V.4 - Fatores de Intensidade de Tensão encontrados neste trabalho

Mola	F.I.T ($\text{KN}.\text{mm}^{-3/2}$)		
	K_I	K_{II}	K_{III}
1	584	14,1	24,4
2	313	14,2	19,2
3	38	14,7	27,0

tabela V.5 - Fatores de Intensidade de Tensão encontrados por Souza

JUNTA TUBULAR

Serão apresentadas três trincas superficiais em uma junta T, conforme figuras (V.6) e (V.9). Foi feita uma discretização com elementos de sólidos isoparamétricos quadráticos, e na borda da trinca utilizou-se elementos quarter-point. A malha, sem as trincas, é composta por 204 elementos e 1281 nós, conforme figura (V.7). Esta malha representa apenas um quarto da junta, devido à dupla simetria.

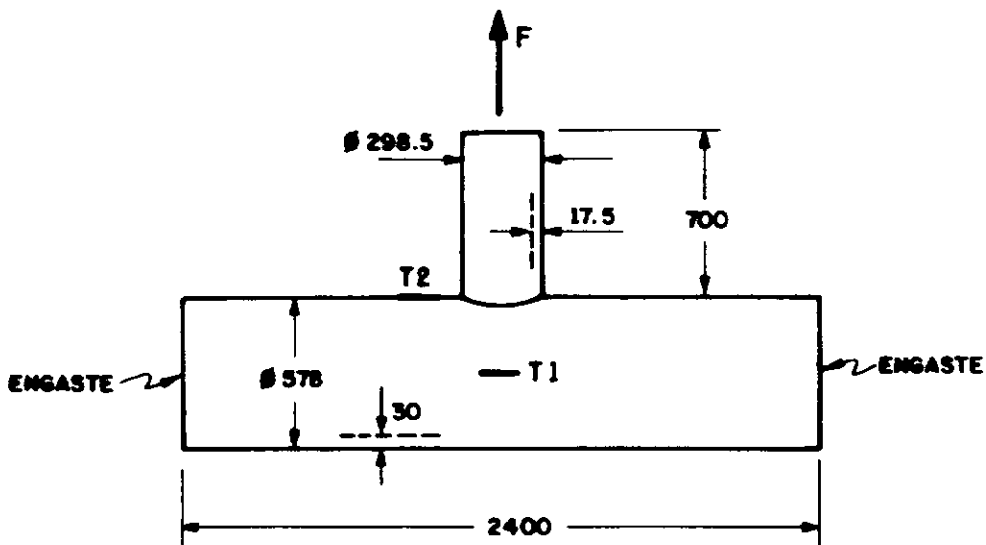


figura (V.6) - junta tubular T com as trincas T1 e T2 e
 $F = 40 \text{ tf}$

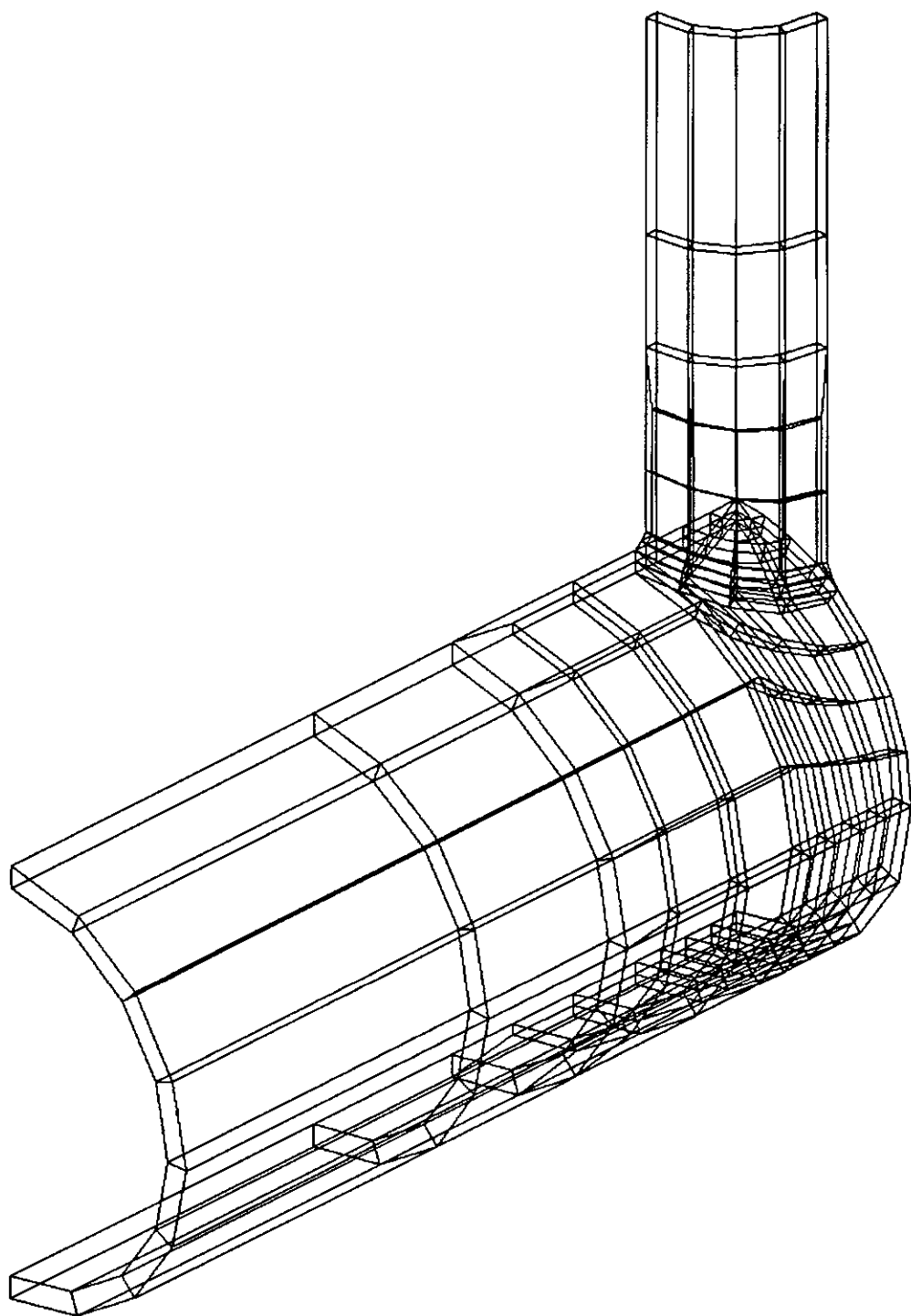


figura V.7 - Malha da Junta Tubular

TRINCAS T1 e T2

Com a introdução da trinca T1 a malha da junta passou a ser composta de 216 elementos e 1296 nós. A trinca tem o formato apresentado na figura (V.8). No método da extensão virtual aplicou-se um deslocamento nos nós da borda da trinca e nos nós vizinhos que resultou num aumento de área da trinca ΔA igual a $3,1 \text{ mm}^2$. Para o modelo de linha de mola utilizou-se três elementos de mola.

Os resultados obtidos para a taxa de energia dissipada G , que no caso linear equivale a integral J , estão apresentados na tabela (V.6), onde se percebe a boa concordância entre os três métodos analisados.

Método	$G \times 10^{-6} \text{ (tf/mm)}$	FIT $K \times 10^{-3} \text{ (tf.mm}^{-3/2} \text{)}$
MEV	128,0	51,8
MIEV	174,0	60,4
LM	161,0	58.1

tabela V.6 - Taxa de Energia Dissipada G e Fator de intensidade de Tensão K_I para a trinca T1

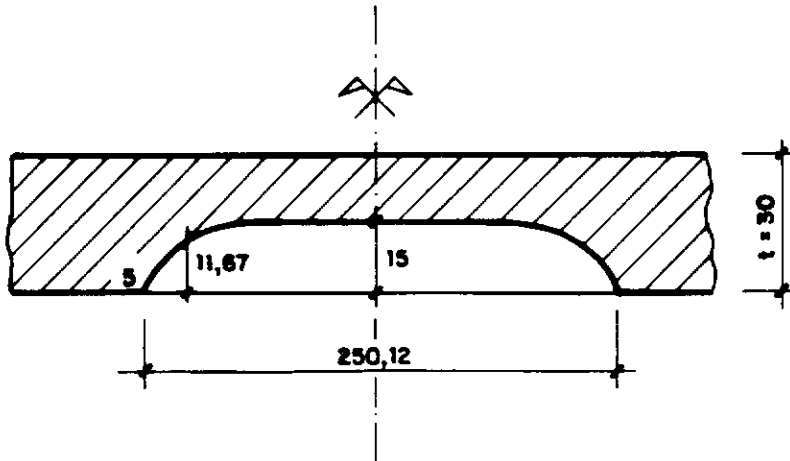


figura V.8 - Formato da trinca T1

Para a análise da trinca T2 discretizou-se a junta com uma malha de 206 elementos e 1286 nós. a trinca tem o formato retangular, de comprimento igual a 103,25 mm e profundidade de 15mm, ou seja, metade da espessura do tubo. No método da extensão virtual o aumento de área da trinca ΔA foi igual a $15,5 \text{ mm}^2$, enquanto que no modelo de linha de mola foi utilizado apenas um elemento de mola.

Método	$G \times 10^{-6} \text{ (tf/mm)}$	FIT $K \times 10^{-3} \text{ (tf mm}^{-3/2}\text{)}$
MEV	25,7	24,3
MIEV	111,0	50,6
LM	21,7	22,4

tabela V.7 - Taxa de Energia Dissipada G e Fator de Intensidade de Tensão K_I para a trinca T2

A tabela V.7 mostra os resultados obtidos para a taxa de energia dissipada G e o fator de intensidade de tensão K_I . Nota-se o valor discordante encontrado pelo método implícito da extensão virtual, que deve ser atribuído ao fato da malha não está suficientemente refinada na região próxima a trinca.

TRINCA T3

A trinca T3 foi analisada com uma malha de 206 elementos e 1286 nós, sendo o seu comprimento igual a 65,5 mm e a profundidade de 15 mm, o que corresponde a metade da espessura do tubo. O aumento de área da trinca para o método da extensão virtual foi ΔA igual a $6,5 \text{ mm}^2$, e no modelo de linha de mola foi utilizado apenas um elemento de mola.

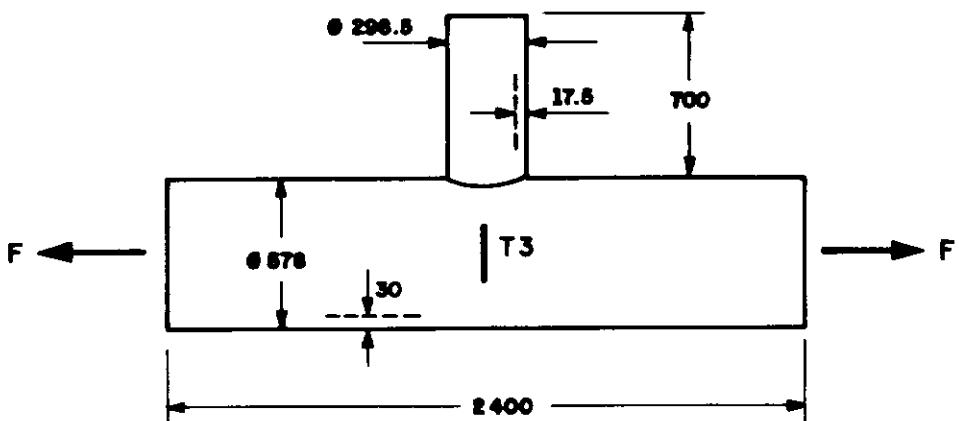


figura V.9 - junta tubular T com trinca T3 e $F = 120 \text{ tf}$

Método	$G \times 10^{-6} \text{ (tf/mm)}$	FIT $K \times 10^{-3} \text{ (tf mm}^{-3/2}\text{)}$
MEV	10,7	15,7
MIEV	15,1	18,7
LM	11,0	15,9

tabela V.8 - Taxa de Energia Dissipada G e Fator de Intensidade de tensão K_I para a trinca T3

Os resultados, apresentados na tabela V.8 acima, para a taxa de energia dissipada e o fator de intensidade de tensão K_I estão bastante concordantes.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

A análise de trincas em estruturas tridimensionais foi tratada neste trabalho sob três importantes enfoques, todos eles fazendo uso do método dos elementos finitos. Foram implementados o método da extensão virtual, o método implícito da extensão virtual e o modelo de linha de mola. Os dois primeiros podem ser utilizados para trincas passantes e não-passantes enquanto que este último só para o caso de trincas não-passantes.

É feito uso de um elemento de sólido isoparamétrico que permite qualquer número de nós entre 8 e 20, bem como a formação de elementos prismáticos. Isso permitiu o uso de elementos quarter-point, obtidos através do deslocamento dos nós centrais dos lados, que possuem a singularidade $r^{-1/2}$, possibilitando portanto o estudo da mecânica da fratura linear elástica sem a necessidade de desenvolver elementos especiais.

Uma grande dificuldade quando da análise de trincas em estruturas tridimensionais é a geração da malha de elementos finitos. É de fundamental importância se ter disponível pré e pós-processadores que permitam a

visualização da malha, tanto a original quanto a deformada, viabilizando o processo de refinamento quando a malha original ainda não está produzindo bons resultados. Com as estações gráficas, este problema ficará facilitado se for tratado de forma integrada, ou seja, a geração da malha, a análise e o pós-processamento estiverem num mesmo ambiente computacional. Deve-se ressaltar também a necessidade de estudos de procedimentos auto-adaptativos, que ganham fundamental importância na análise de concentração de tensões.

Ficou evidenciado neste trabalho a boa concordância dos resultados obtidos pelos três métodos analisados. Deve-se, no entanto, ressaltar que o modelo de linha de mola apresenta algumas vantagens como a não discretização da trinca ao longo da espessura da estrutura e a obtenção dos fatores de intensidade de tensão separados em modo I, II e III. Como desvantagem cita-se a limitação deste modelo tratar apenas trincas não-passantes, dificultando a sua utilização quando a profundidade da trinca for maior que 0,8 da espessura da estrutura.

O método implícito da extensão virtual, bem como o modelo de linha de mola, necessitam de apenas uma etapa ao passo que o método da extensão virtual necessita de duas etapas, sendo que a segunda requer uma alteração na malha inicial.

As vantagens do modelo de linha de mola e do método implícito da extensão virtual podem ser estendidas à mecânica da fratura elasto-plástica. Para o caso do modelo de linha de mola, este estudo vem sendo realizado por Souza [40].

Desta forma pode-se viabilizar, por exemplo, o estudo do colapso estrutural de juntas metálicas soldadas, que até agora foi apenas tratado do ponto de vista experimental, e existe presentemente uma grande carência de critérios efetivos para atender normas de projeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] INGLIS, C.E. - "Stress in a Plate Due to Presence of Cracks and Sharp Corners", Proc. Inst. Naval Architects, 60, 1913.

- [2] GRIFFITH, A. A., - Phil. Trans. Royal Soc. London, A 221, 163, 1921.

- [3] GRIFFITH, A. A., Proceedings of the 1st International Congress for Applied Mechanics, Delft, pp. 55, 1924.

- [4] IRWIN, G. R., "Fracture Dynamics", Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland, pp. 147-166, 1948.

- [5] IRWIN, G. R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", Jornal of Applied Mechanics, 24, pp. 361-364, 1957.

- [6] MAY, M. J., "Fracture Toughness", The Iron and Steel Institute, Cap. 7, pp. 101-104, 1968.

- [7] RICE, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks", Jornal of Applied Mechanics, 35, pp 379-386,

1968.

[8] SANDERS, J. L., "On the GRIFFITH-IRWIN Fracture Theory", Jornal of Applied Mechanics, 27, pp. 352-353, 1960.

[9] ESHELBY, J. D., "energy relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics", Ineslatic Behavior of Solids, M. F. Kanninen et al. (ed.), McGraw-Hill, New York, pp. 77-115, 1969.

[10] CHEREPANOV, G. P., "On Crack Propagation in Solids", International Jornal of Solids and Structures, 5, pp. 863-871, 1969.

[11] WELLS, A. A., "Application of fracture Mechanics at and Beyond General Yielding", British Welding Journal, 10, pp. 563-570, 1963.

[12] WILLIAMS, M. L., "On the Stress distribution at the Base of a Stationary Crack", Journal of Applied Mechanics, 24, pp. 109-114, 1957.

[13] KARP, S. N. E KARAL, F. C., "The Elastic-Field Behavior in the Neighborhood of a Crack of Arbitrary Angle", Communications on Pure and Applied Mathematics, XV, pp. 413-421, 1962.

[14] CHAN, S. K., TUBA, I.S. e WILSON, W.K., "On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics", Engineering Fracture Mechanics, 2, pp. 1-17, 1970.

[15] HENSHELL, R.D. E SHAW, K. G., "Crack-Tip Finite Elements Are Unnecessary", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9, pp. 495-507, 1975.

[16] BARSOUM, R. S., "On the Use of Isoparametric Finite Element in Linear fracture Mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, pp. 25-37, 1976.

[17] HIFFITH, H. D., "Some Properties of Singular Isoparametric Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, pp. 180-184, 1977.

[18] SIH, G. C. e RICE, J. R., "The Bending of Plates of Dissimilar Materials with Cracks", Journal of Applied Mechanics, 31, pp. 477-482, 1964.

[19] RICE, J. R. e SIH, G. C., "Plane Problems of cracks in Dissimilar Media", Journal of Applied Mechanics, 32, pp. 418-423, 1965.

[20] LOEBER, J. F. e SIH, G. C., "Green's Function for Cracks in Nonhomogeneous Materials", Journal of Applied Mechanics, 34, pp. 240-243, 1967.

[21] HUSSAIN, M. A., COFFIN, L. F. e ZALESKI, K. A., "Three Dimensional Singular Elements", Computer & Structures, 13, pp. 595-599, 1981.

[22] MANU, C., "Quarter-Point Elements for Curved Cracks Fronts", Computer & Structures, 17, pp. 227-231, 1983.

[23] LYNN, P. P. e INGRAFFEA, A. R., "Transition Elements to Be Used with Quarter-Point Crack Tip Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, pp. 1031-1036, 1978.

[24] HELLEN, T. K., "On the Method of Virtual Crack Extension", International Journal for Numerical Method in Engineering, 9, pp. 187-207, 1975.

[25] HELLEN, T. K., "Virtual Crack Extension Method for Non-linear Materials", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 929-942, 1989.

[26] RICE, J. R. e LEVY, N., "The Part-Through Surface Crack in an Elastic Plate", ASME - Journal of Applied Mechanics, 39, pp. 185-194, 1972.

[27] PARKS, D. M., "The Inelastic Line-Spring: Estimates of Elastic-Plastic Fracture Parameters for Surface Cracked Plates and Shells", ASME - Journal of Applied Mechanics,

1980.

[28] PARKS, D. M., "Inelastic Analysis of Surface Flaws Using the Line Spring Model, Proc. 5th Int. Conf. on Fracture, 1981.

[29] DELALE, F. e ERDOGAN, F., "Line Spring Model for Surface Cracks in a Reissner Plate, International Journal of Eng. Science, 19, 1981.

[30] DELALE, F. e ERDOGAN, F., "Application of the Line Spring Model to a Cilindrical Shell Containing a Circunferential or an axial Part-Through Crack, ASME - Journal of Applied Mechanics, 49, 1982.

[31] GERMAN, M. D., KUMAR, V. e LORENZI, H. G., "Analysis of Surface Cracks in Plates and Shells Using the Line-spring Model and ADINA", Computer & Structures, 17, pp. 881-890, 1983.

[32] KUMAR, V. e GERMAN, M. D., "Studies of the Line-spring Model for Nonlinear Crack Problems, ASME - Journal of Pressure Vessels Technology, 107, pp.412-420, 1985.

[33] DESVAUX, G. J., "The Line Spring Model for Surface Flaw, an Extension to Mode II and Mode III", Tese de M.Sc., Massachusetts Institute of Technology, 1985.

[34] SOUZA, L. A. e EBECKEN, N. F. F., "Análise dos Modos de Fratura I, II e III em Estruturas Laminadas", X MECOM - CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 1989.

[35] RICE, J. R., "The Line-Spring Model for Surface Flaws", The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, ed. J. L. Swedlow American Society of Mechanics Engineers, 1972.

[36] PARKS, D. M. e WHITE, C. S., "Elastic-Plastic Line-Spring Finite Elements for Surface Cracked Plates and Shells, ASME - Journal of Pressure Vessels Technology, 104, pp. 287-292, 1982.

[37] TADA, H., PARIS, P. C. e IRWIN, G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, 1973.

[38] BATHE, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.

[39] ROOKE, D. P. e CARTWRIGHT, D. J., Compendium of Stress Intensity Factors, London, 1975.

[40] SOUZA, L. A., Tese de Doutorado em Andamento, COPPE/UFRJ.