MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS E MALHAS ADAPTATIVAS NA ANÁLISE DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

Eduardo Lúcio Mendes Garcia

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Luiz Landau, D. Sc.
(Presidente)

Prof. Abimael Fernando D. Loula, D. Sc.

Prof. Elson Magalhães Toledo, D. Sc.

Prof. Álvaro L. G. A. Coutinho, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MAIO de 1991

GARCIA, EDUARDO LÚCIO MENDES

Métodos de Elementos Finitos Mistos e Malhas Adaptativas na Análise de Cascas Axissimétricas [Rio de Janeiro] 1991

vii, 81 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Cascas Axissimétricas 2. Elementos Finitos Mistos

3. Malhas Adaptativas I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

À Maira.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Abimael Fernando Dourado Loula pela dedicação e orientação.

Aos professores e colegas que participaram da minha formação científica, em particular ao amigo e Prof. Elson Magalhães Toledo e ao amigo e colega Renato Simões Silva.

Ao Programa de Engenharia Civil da COPPE e ao LNCC/CNPq.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS E MALHAS ADAPTATIVAS NA ANÁLISE DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS

Eduardo Lúcio Mendes Garcia

Maio de 1991

Orientador : Abimael Fernando Dourado Loula

Programa : Engenharia Civil

Estudamos o comportamento mecânico de cascas axissimétricas delgadas, utilizando modelo de Reissner-Mindlin, cuja dependência da espessura causa dificuldades à construção de elementos finitos estáveis.

Discutimos as formulações clássicas de elementos finitos em um e em dois campos. Visando maior estabilidade e precisão na determinação do campo dos esforços consideramos uma formulação mista de Petrov-Galerkin, que consiste em adicionar, na formulação clássica de Galerkin, resíduos das equações de equilíbrio no interior dos elementos. Resultados numéricos são apresentados, utilizando elementos com aproximações de igual ordem para deslocamentos e esforços, para diversos tipos de estruturas e carregamentos, confirmando a recuperação de estabilidade obtida com a nova formulação.

Buscando melhores taxas de convergência consideramos técnicas auto-adaptativas, utilizando os métodos r , h e p, aplicados a problemas com camada limite, gerada pela singularidade do operador. Sensíveis melhoras são obtidas nas taxas de convergência após a aplicação destas técnicas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fullfilment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

MIXED FINITE ELEMENT METHOD AND ADAPTIVE MESH IN AXISYMMETRIC SHELLS ANALYSIS

Eduardo Lúcio Mendes Garcia

May, 1991

Thesis Supervisor : Abimael Fernando Dourado Loula

Department : Civil Engineering

Thin axissimetric shell studied through the use of Reissner-Mindlin theory presents some difficulties in constructing stable finite elements aproximations due to its dependence on the thickness of the shell.

Classical single field as well as two fields finite element formulations are discussed. A consistent mixed Petrov-Galerkin formulation is considered in order to achieve both stability and accuracy. It consists in adding to the classical Galerkin formulation a residual form of the equilibrium equation in the interior of each element.

Numerical experiments, using elements with equal order interpolation, are conducted for a variety of structures and loading, which confirms the improvement in stability obtained by this new formulation.

Adaptive mesh refinements, in theirs r , h e p versions, are used in order to improve the rate of convergence in presence of boundary layers, caused by the operator singularity.

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO 1

II. CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA DA CASCA AXISSIMÉTRICA 5

II.1 Introdução 5

II.2 Deformações e Esforços Generalizados em Cascas Delgadas 6

II.3 Cascas Axissimétricas com Carregamento Qualquer 9

II.4 Problemas Limites em Cascas Axissimétricas 12

II.4.1 Placa Circular 13

II.4.2 Casca Cilíndrica 15

III. FORMULAÇÕES VARIACIONAIS E ANÁLISE NUMÉRICA 20

III.1 Introdução 20

III.2 Método dos Deslocamentos 21

III.2.1 Exemplos Simples 23

a) Viga de Timoshenko 24

b) Problema Modelo Escalar 25

III.3 Método Misto de Galerkin 27

III.4 Método Misto de Petrov-Galerkin 31

III.5 Forma Matricial das Formulações Mistas 34

III.6 Resultados Numéricos 35

IV. MALHAS ADAPTATIVAS 51

IV.1. Introdução 51

IV.2. Estimadores de Erro a Posteriori 52

IV.3. Estratégias de Refinamento 54

IV.3.1. Método h 55

IV.3.2. Método r 56

IV.3.3. Método p 57

IV.4. Resultados Numéricos 58

V. CONCLUSÕES 73

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 75

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Há muito o estudo de flexão de placas e cascas preocupa engenheiros e matemáticos. O grande número de variáveis envolvidas no problema assim como a representação geométrica de tais estruturas são algumas dificuldades. A impossibilidade de generalizar a modelagem de placas e cascas de diversas geometrias levou ao surgimento de várias teorias.

Durante muito tempo a teoria de Kirchhoff, para estruturas delgadas, mereceu maior destaque, porém formulações variacionais, baseadas na teoria de Reissner-Mindlin, possuem vantagens sobre aquelas baseadas na teoria de Kirchhoff. Além disso o modelo de Reissner-Mindlin é mais refinado pois considera a deformação cisalhante, que é desprezada na teoria de Kirchhoff.

No caso da teoria de Reissner-Mindlin a consideração de deslocamentos e rotações como variáveis primitivas possibilita a obtenção de formulações variacionais envolvendo apenas derivadas primeiras destes campos, o que resulta numa maior flexibilidade na construção de aproximações conformes de elementos finitos, ao contrário do que ocorre quando utilizamos a teoria de Kirchhoff, cuja formulação variacional, em deslocamentos apenas, envolve segundas derivadas deste campo.

No limite, quando a espessura tende para zero, a teoria de Reissner-Mindlin pode ser interpretada como uma formulação penalizada da teoria de Kirchhoff, cuja penalidade é a rigidez ao cisalhamento. É bem sabido, no entanto, que formulações de elementos finitos penalizadas requerem, em geral, interpolações especiais ou construções de penalidades discretas para superar as dificuldades que surgem nestes casos, tal como *trancamento* (excessiva rigidez do modelo discreto). Outra

penalidade ocorre em ambas as teorias, associada à rigidez no plano e também pode provocar *trancamento* em certas aproximações de elementos finitos, incapazes de representar modos de deformação inextensionais.

Para amenizar os efeitos do *trancamento* e melhorar a eficiência computacional de aproximações C^0 para estruturas delgadas algumas técnicas especiais têm sido utilizadas: integração reduzida (HUGHES [1987]); interpolação independente para as deformações (PRATHAP E RAMESH BABU [1986]); hipótese discreta de Kirchhoff (BATHE [1982]); e balanço da energia residual (FRIED [1976]).

Outra alternativa é a utilização de uma formulação de elementos finitos mista baseada no princípio de Hellinger-Reissner, com deslocamentos e tensões como variáveis independentes. Desta forma, a teoria de Reissner-Mindlin pode ser vista como uma regularização da teoria de Kirchhoff. Infelizmente isto não resolve todos os problemas. Neste caso o que ocorre é que, para estruturas delgadas, as propriedades de existência e unicidade do problema contínuo não são transferidas automaticamente para o problema discreto, limitação típica das formulações mistas, que quando não satisfeita também pode provocar *trancamento* e oscilações espúrias. No caso da casca, isto ocorre quando sua espessura tende para zero implicando em que apenas algumas combinações entre os espaços de aproximação do campo de deslocamento e do campo de tensão sejam estáveis.

De modo a superar estas dificuldades, utilizaremos neste trabalho uma formulação de Petrov-Galerkin, introduzida em LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1986] para o problema da casca axissimétrica, que é obtida pela introdução, na formulação clássica de Galerkin, de termos de mínimos quadrados, relativos às equações de equilíbrio. Esta metodologia originou-se em trabalhos de Hughes, Johnson e seus colaboradores para alguns problemas em mecânica dos fluidos. Em LOULA, HUGHES, FRANCA E MIRANDA [1987], propõe-se este

procedimento para a viga de Timoshenko e em LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1989] prova-se existência e unicidade de solução do problema discreto, além de convergência uniforme, independente da espessura, para o problema da placa circular, utilizando-se elementos com interpolação de igual ordem. Em geral, o problema de cascas axissimétricas delgadas pode ser visto como um problema de perturbação singular onde comportamentos de camadas limites são esperados nas regiões próximas a apoios e a descontinuidades de carregamentos, e convergência uniforme, independente da espessura, não pode ser garantida para quaisquer geometrias. No entanto tal formulação, com elementos de igual ordem, provou ser eficiente em FRANCA, TOLEDO, LOULA E GARCIA [1988] e em LOULA, TOLEDO, FRANCA E GARCIA [1989], para diversos casos de carregamento e geometria.

O interesse em determinar precisamente os esforços em regiões de camadas limites, provocadas por concentração de tensões, exige a construção de espaços de aproximação bastante refinados, seja aumentando a densidade de elementos, seja aumentando o grau do polinômio de interpolação. Nestes casos a associação de malhas adaptativas a métodos de aproximação estáveis apresenta-se como uma alternativa para evitar o excessivo refinamento em locais afastados das regiões de gradientes elevados da solução. Em MALTA, LOULA E GARCIA [1989], resultados numéricos ilustram a utilização de malhas não-uniformes para o problema da casca cilíndrica com pressão interna. No presente trabalho fazemos alguns estudos para obtenção automática de malhas adaptativas para este mesmo problema, utilizando para isso estimadores de erro a posteriori (BABUŠKA E RHEINBOLDT [1978]).

No Capítulo II apresentamos as equações que regem o problema da casca axissimétrica em termos de deslocamentos e esforços, e estudamos o comportamento da solução exata para dois casos particulares e extremos de geometria. Analisamos a dependência da solução com relação a geometria e com relação a um parâmetro

dependente da espessura. Observamos no caso da casca cilíndrica a presença de regiões com camadas limites quando a estrutura é delgada.

No Capítulo III discutimos as limitações de formulações clássicas de Galerkin em um e em dois campos, e apresentamos a formulação de Petrov-Galerkin que utilizamos. Resultados numéricos mostram a eficiência do método adotado em problemas com diferentes tipos de geometria e carregamentos, quando comparado aos resultados obtidos por uma formulação em deslocamento. Consideramos, ainda, neste capítulo, o caso de carregamentos não-axissimétricos aplicando, como usualmente nestes casos, o desenvolvimento em série de Fourier dos deslocamentos, esforços e carregamentos.

O Capítulo IV trata da otimização de malhas através de técnicas auto-adaptativas h, r e p. A ocorrência de concentração de esforços em determinados pontos da estrutura justifica tais procedimentos, que buscam melhorar, automaticamente, a aproximação de elementos finitos nestes locais. Utiliza-se o estimador de erro a posteriori proposto por ZIENKIEWICZ E ZHU [1987], obtido pela diferença entre o campo de esforços de elementos finitos descontínuos e um segundo campo de esforços contínuos calculado por pós-processamento do primeiro. Devido ao grande número de variáveis envolvidas e a complexidade do problema da casca, consideramos inicialmente um problema modelo unidimensional escalar, para a realização dos primeiros experimentos numéricos com malhas auto-adaptativas, que são mostradas neste capítulo. Tal problema modelo envolve singularidade dependentes de parâmetro, semelhante ao que acontece com o problema da casca, como confirmamos no Capítulo II, onde ele é introduzido.

Finalmente no Capítulo V apresentamos as conclusões e fazemos algumas sugestões para futuros desenvolvimentos.

CAPÍTULO II

CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA DA CASCA AXISSIMÉTRICA

II.1 Introdução

Muitos problemas de valor de contorno de interesse na engenharia podem ser estudados pelas seguintes equações:

$$\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \ , \ \text{em} \quad \Omega \tag{II.1}$$

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) \ , \ \text{em} \quad \Omega \tag{II.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\epsilon(\mathbf{u}) \ , \ \text{em} \quad \Omega \ , \tag{II.3}$$

com condições de contorno

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad \Gamma_u \ , \tag{II.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} n = \mathbf{q} \quad \text{em} \quad \Gamma_q \ , \tag{II.5}$$

onde $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q = \partial\Omega$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$.

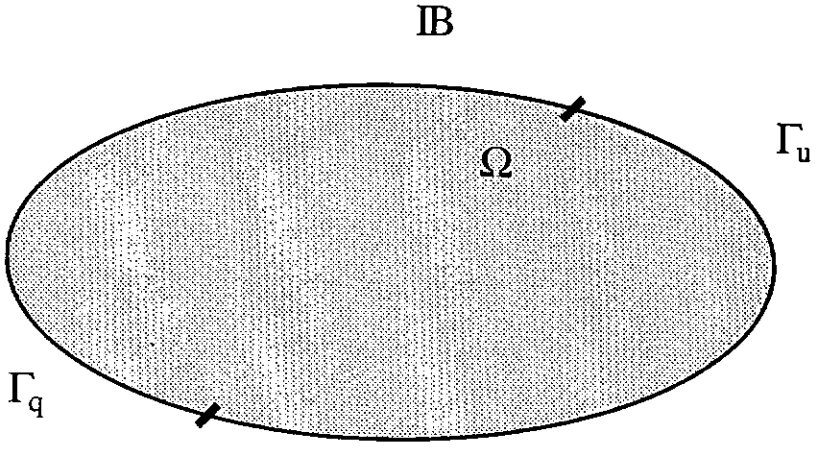


Figura 2.1 - Corpo elástico genérico IB

Em elasticidade linear (II.1)- (II.5) representam a resposta de um corpo elástico $\mathbb{B}$, que em sua configuração de referência ocupa uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com contorno $\partial\Omega$, sujeito a um campo de força de volume $\mathbf{f}$ e de superfície $\mathbf{q}$, atuando no contorno Γ_q e com deslocamentos prescritos $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$ em Γ_u. Neste caso (II.1) é a equação de equilíbrio, (II.2) é a relação cinemática correspondente a pequenas deformações, (II.3) é a equação constitutiva (lei de Hooke), $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensão de Cauchy, ϵ é o tensor de deformações infinitesimais, $\mathbf{D}$ é o tensor de elasticidade de quarta ordem, duplamente simétrico e $\mathbf{n}$ a normal externa à superfície do corpo.

II.2 Deformações e Esforços Generalizados em Cascas Delgadas

Sendo cascas corpos cuja massa se distribui na vizinhança de uma superfície, com uma espessura t, pequena em relação às demais dimensões, o sistema de coordenadas mais adequado para descrever seus movimentos é o sistema intrínseco de sua superfície média S.

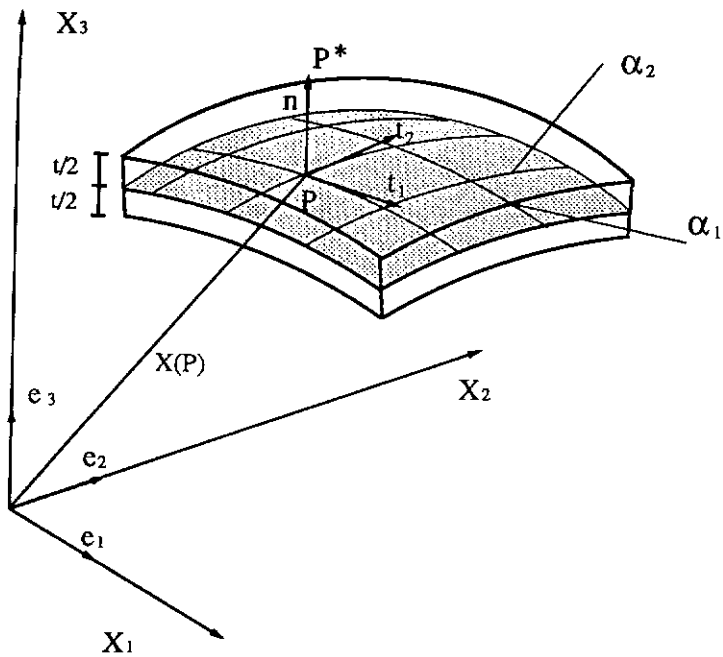


Figura 2.2 - Coordenadas intrínsecas de uma superfície

Assim sendo um ponto $\mathbf{P}^*$ qualquer, pertencente a casca $\mathbf{C}$, como mostra a Figura 2.2, pode ser conhecido pelas coordenadas cartesianas de sua projeção $\mathbf{P}$ sobre a superfície média de $\mathbf{C}$ e por uma coordenada ζ medida na direção normal à superfície média passando por $\mathbf{P}$, isto é

$$\mathbf{X}(P^*) = \mathbf{X}(P) + \zeta \mathbf{n}(P) \ , \tag{II.6}$$

sendo,

$$\mathbf{X}(P) = X_i(\alpha_1, \alpha_2) e_i \ , i = 1, 2 \text{ e } 3, \tag{II.7}$$

onde α_1 e α_2 são parâmetros reais, e definem um sistema de coordenadas curvilíneas sobre S, através das curvas α_1 ou α_2 constantes.

Da complexidade geométrica e das definições dos esforços atuantes, surgem diversas teorias de cascas. Supor que as normais à superfície média não deformada permanecem retas após a deformação (hipótese de Love), permite escrever os deslocamentos de um ponto qualquer da casca, da seguinte forma:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \zeta \boldsymbol{\beta} \tag{II.8}$$

sendo, $\mathbf{u}$ os deslocamentos da superfície média e $\boldsymbol{\beta}$ as rotações da normal dadas por:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \zeta} \mid_{\zeta=0} \ . \tag{II.9}$$

Se, além disso, consideramos a hipótese de pequenas deformações e nos limitarmos cascas delgadas, admitindo, ainda, nula a deformação normal à superfície média, temos:

$$u_1^* = u_1 + \zeta \beta_1 \ , \tag{II.10}$$

$$u_2^* = u_2 + \zeta \beta_2 \ , \tag{II.11}$$

$$u_3^* = u_3 \ , \tag{II.12}$$

onde β_1 e β_2 são rotações em torno de α_1 e α_2, respectivamente.

A teoria de Kirchhoff considera ainda que as fibras normais à superfície média permanecem normais após a deformação, ou de outra forma, assume deformação cisalhante nula ($\boldsymbol{\beta} = -\nabla u_3$). O mesmo não acontece para a teoria de Reissner-Mindlin para placas e cascas delgadas e medianamente espessas, que, por considerar a deformação por cisalhamento, nos proporciona uma análise mais refinada. Na Figura 2.3 ilustramos, para o caso de viga, de modo semelhante ao que ocorre nos casos de placas e cascas, as deformações por cisalhamento e por flexão.

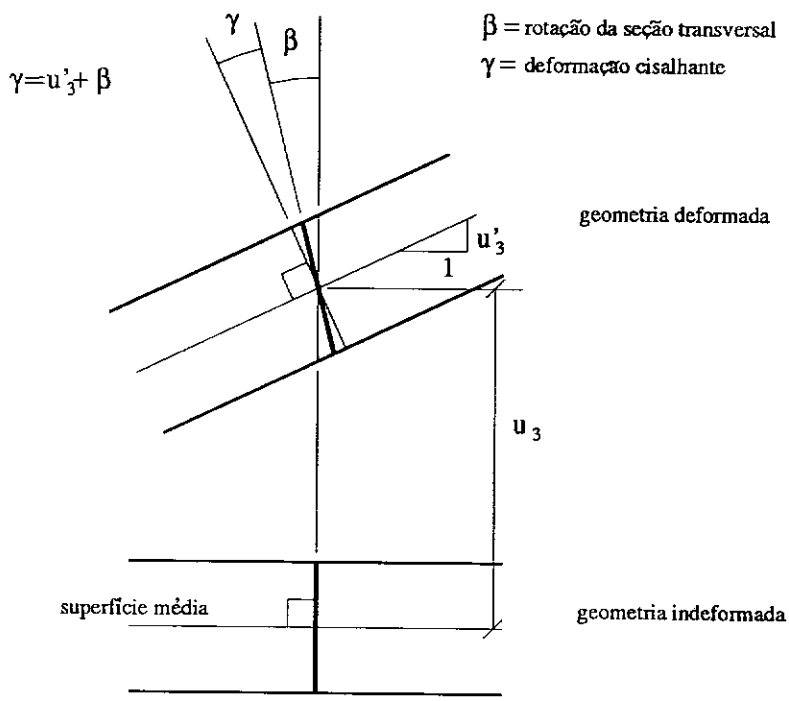


Figura 2.3 - Deformações por cisalhamento e flexão em viga

Como usual no estudo de placas e cascas, é conveniente trabalharmos com esforços ao invés de tensões. Para tanto introduzimos as seguintes definições de

esforços resultantes:

$$N_{\iota\varsigma} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\iota\varsigma} \, , d\zeta \tag{II.13}$$

$$M_{\iota\varsigma} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\iota\varsigma}\zeta \, , d\zeta \tag{II.14}$$

$$Q_{\iota} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\iota 3} \, , d\zeta \tag{II.15}$$

onde $N_{\iota\varsigma}$ são referidos como esforços de membrana, $M_{\iota\varsigma}$ são momentos fletores e Q_{ι} são esforços cisalhantes, com ι e ς assumindo os valores α_1 e α_2.

II.3 Cascas Axissimétricas com Carregamento Qualquer

Nosso interesse, neste trabalho, é o estudo de estruturas com simetria de revolução, nas quais o conhecimento da geratriz e da espessura em cada ponto caracterizam a geometria completa da casca, conforme ilustra a Figura 2.4, com $\alpha_1 = s$ e $\alpha_2 = \theta$.

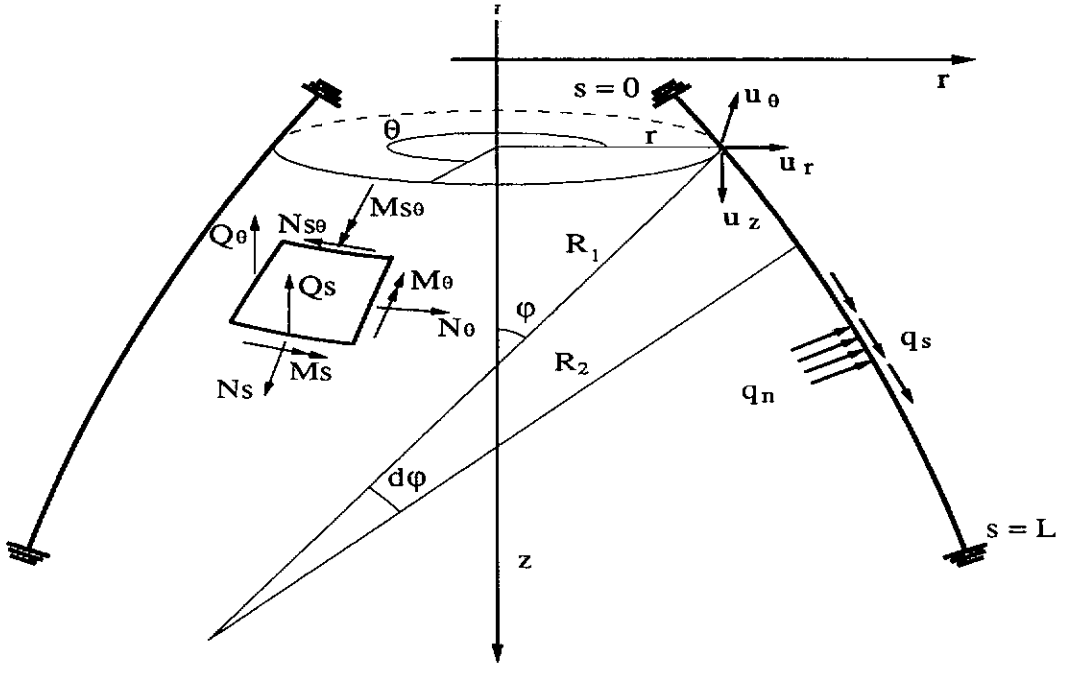


Figura 2.4 - Casca Axissimétrica: geometria e esforços

Seja então, para $(s,\theta) \in \Omega = [0,L] \times [0,2\pi]$:

$$\mathbf{u}(s,\theta) = \{u_r, u_z, u_\theta, \beta_s, \beta_\theta\}^T \ , \tag{II.16}$$

o vetor de deslocamentos generalizados,

$$\mathbf{q}(s,\theta) = \{q_s, q_n, q_\theta\}^T \ , \tag{II.17}$$

o vetor de forças de superfície,

$$\mathbf{N}(s,\theta) = \{N_s, N_\theta, N_{s\theta}, Q_s, Q_\theta, M_s, M_\theta, M_{s\theta}\}^T \ , \tag{II.18}$$

o vetor dos esforços resultantes,

$$\epsilon(s,\theta) = \{\epsilon_s, \epsilon_\theta, \gamma_{s\theta}, \gamma_{sz}, \gamma_{\theta z}, \kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}\}^T \ , \tag{II.19}$$

o vetor das componentes de deformação, onde $\epsilon_s, \epsilon_\theta, \gamma_{s\theta}$ são deformações de membrana, $\gamma_{sz}, \gamma_{\theta z}$ são deformações cisalhantes e $\kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}$ são deformações de flexão. A partir destas variáveis escrevemos as equações diferenciais para cascas axissimétricas sob a ação de carregamento não-axissimétrico da seguinte forma, KRAUS [1967]:

Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial(rN_s)}{\partial s} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} - N_\theta \cos\varphi + \frac{r}{R_1} Q_s + r q_s = 0 \ , \tag{II.20}$$

$$\frac{\partial(rN_{s\theta})}{\partial s} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{s\theta} \cos\varphi + Q_\theta \mathrm{sen}\varphi + r q_\theta = 0 \ , \tag{II.21}$$

$$\frac{\partial(rQ_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \left(\frac{N_s}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2}\right) r - r q_n = 0 \ , \tag{II.22}$$

$$\frac{\partial(rM_s)}{\partial s} + \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} - M_\theta \cos\varphi - r Q_s = 0 \ , \tag{II.23}$$

$$\frac{\partial(rM_{s\theta})}{\partial s} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{s\theta} \cos\varphi - r Q_\theta = 0 \ , \tag{II.24}$$

com,

$$R_2 = \frac{r}{\mathrm{sen}\varphi} \ .$$

Relações Cinemáticas:

$$\epsilon_s = \frac{\partial u_r}{\partial s}\cos\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial s}\mathrm{sen}\varphi \ , \tag{II.25}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \ , \tag{II.26}$$

$$\gamma_{s\theta} = 2\epsilon_{s\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\cos\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial \theta}\mathrm{sen}\varphi\right) - \frac{\cos\varphi}{r}u_\theta \ , \tag{II.27}$$

$$\gamma_{sz} = 2\epsilon_{sz} = \beta_s + \frac{\partial u_r}{\partial s}\mathrm{sen}\varphi - \frac{\partial u_z}{\partial s}\cos\varphi \ , \tag{II.28}$$

$$\gamma_{\theta z} = 2\epsilon_{\theta z} = \beta_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\mathrm{sen}\varphi - \frac{\partial u_z}{\partial \theta}\cos\varphi\right) - \frac{u_\theta}{r}\mathrm{sen}\varphi \ , \tag{II.29}$$

$$\kappa_s = \frac{\partial \beta_s}{\partial s} \ , \tag{II.30}$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \beta_s\cos\varphi\right) \ , \tag{II.31}$$

$$2\kappa_{s\theta} = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} - \beta_\theta\cos\varphi\right) \ , \tag{II.32}$$

Equações Constitutivas:

$$\epsilon_s = K^{-1}\left(N_s - \nu N_\theta\right) \ , \tag{II.33}$$

$$\epsilon_\theta = K^{-1}\left(N_\theta - \nu N_s\right) \ , \tag{II.34}$$

$$\gamma_{s\theta} = G^{-1}\left(N_{s\theta}\right) \ , \tag{II.35}$$

$$\gamma_{sz} = G^{-1}\left(Q_s\right) \ , \tag{II.36}$$

$$\gamma_{\theta z} = G^{-1}\left(Q_\theta\right) \ , \tag{II.37}$$

$$\kappa_s = D^{-1}\left(M_s - \nu M_\theta\right) \ , \tag{II.38}$$

$$\kappa_\theta = D^{-1}\left(M_\theta - \nu M_s\right) \ , \tag{II.39}$$

$$\kappa_{s\theta} = \frac{1}{H}M_{s\theta} \ , \tag{II.40}$$

com

$$K = Et \ , \tag{II.41}$$

$$G = \frac{\kappa E t}{2(1+\nu)} \ , \tag{II.42}$$

$$D = \frac{E t^3}{12} \ , \tag{II.43}$$

$$H = \frac{\kappa E t^3}{24(1+\nu)} \tag{II.44}$$

onde E é o módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson, κ é o fator de correção de cisalhamento e t é a espessura da casca.

A dependência deste problema em relação a um parâmetro pequeno pode ser evidenciada através da forma adimensionalizada das equações (II.20) a (II.40), o que nos permite fazer várias inferências a respeito do comportamento e propriedades da solução deste problema.

II.4 Problemas Limites em Cascas Axissimétricas

De modo a facilitar a compreensão do problema de cascas axissimétricas desenvolvemos aqui o estudo de dois casos particulares de geometria: o de uma placa circular e o de uma casca cilíndrica. Desta forma identificamos os diferentes comportamentos das soluções e sua dependência da geometria da casca.

Fixamos as seguintes condições de contorno, homogêneas, para o campo de deslocamentos, correspondente ao caso de extremidades engastadas:

$$u_r(0) = u_r(L) = 0 \ , \tag{II.45}$$

$$u_\theta(0) = u_\theta(L) = 0 \ , \tag{II.46}$$

$$u_z(0) = u_z(L) = 0 \ , \tag{II.47}$$

$$\beta_s(0) = \beta_s(L) = 0 \ , \tag{II.48}$$

$$\beta_\theta(0) = \beta_\theta(L) = 0 \ . \tag{II.49}$$

Consideramos para esta análise somente o caso de carregamentos axis-simétricos, assim se anulam: os esforços $N_{s\theta}$, Q_θ e $M_{s\theta}$; as componentes de deformações $\gamma_{s\theta}$, $\gamma_{\theta z}$ e $\kappa_{s\theta}$; e as componentes do vetor de deslocamentos generalizados u_θ e β_θ.

Para explicitar a dependência da solução com relação ao parâmetro

$$\varepsilon^2 = \frac{t^2}{12L^2} \quad , \tag{II.50}$$

introduzimos as seguintes variáveis adimensionais:

$$x = \frac{s}{L} \ , \quad u_1 = \frac{u_s}{L} \ , \quad u_2 = \frac{u_n}{L} \ , \quad u_3 = \beta \tag{II.51}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_s L^2}{D} \ , \quad \sigma_2 = \frac{N_\theta L^2}{D} \ , \quad \sigma_3 = \frac{Q_s L^2}{D} \ , \quad \sigma_4 = \frac{M_s L}{D} \ , \quad \sigma_5 = \frac{M_\theta L}{D} \ , \tag{II.52}$$

$$f_1 = \frac{q_s L^3}{D} \ , \quad f_2 = \frac{q_n L^3}{D} \ , \tag{II.53}$$

onde

$$u_s = u_r \cos\varphi + u_z \mathrm{sen}\varphi \tag{II.54}$$

$$u_n = u_r \mathrm{sen}\varphi - u_z \cos\varphi \tag{II.55}$$

são as componentes tangencial e normal do campo de deslocamentos **u**, respectivamente.

II.4.1 Placa Circular

Se consideramos uma placa circular com um furo no centro, temos:

$$\varphi = 0 \ , \quad R_1 = \infty \ , \quad s = r - r(0) \ ,$$

que são os parâmetros que definem esta geometria particular.

Para facilitar os cálculos adotamos

$$\lambda = \frac{r(0)}{L} \tag{II.56}$$

e as equações (II.20)- (II.40) assim se apresentam:

Equações de Equilíbrio:

$$-\frac{d[(x+\lambda)\sigma_1]}{dx} + \sigma_2 = (x+\lambda)f_1 \ , \tag{II.57}$$

$$-\frac{d[(x+\lambda)\sigma_3]}{dx} = (x+\lambda)f_2 \ , \tag{II.58}$$

$$-\frac{d[(x+\lambda)\sigma_4]}{dx} + \sigma_5 + (x+\lambda)\sigma_3 = 0 \ , \tag{II.59}$$

Equações Constitutivas:

$$\varepsilon^2(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{du_1}{dx} \ , \tag{II.60}$$

$$\varepsilon^2(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = u_1 \ , \tag{II.61}$$

$$\varepsilon^2\mu\sigma_3 = \frac{du_2}{dx} + u_3 \ , \tag{II.62}$$

$$\sigma_4 - \nu\sigma_5 = \frac{du_3}{dx} \ , \tag{II.63}$$

$$(x+\lambda)(\sigma_5 - \nu\sigma_4) = u_3 \ , \tag{II.64}$$

com

$$\mu = \frac{Et}{G} = \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \ . \tag{II.65}$$

Para problemas com esta geometria, a análise das equações (II.57)-(II.64)evidencia a existência de dois sistemas que podem ser estudados separadamente. O primeiro, formado pelas equações (II.57), (II.60) e (II.61), representando uma placa sob regime de membrana, ou seja, somente esforços atuando no plano da estrutura. Já o segundo, formado pelas demais (II.58), (II.59), (II.62), (II.63) e (II.64), representam um problema de flexão com cisalhamento.

Na solução analítica destes sistemas, para $f_1 = f_2 = 0$, obtemos para σ_1 e σ_2 funções polinomiais, de comportamento independente do parâmetro ε^2 e para u_1 uma função proporcional a ε^2. Desta forma, quando $\varepsilon^2 \to 0$ temos representada uma estrutura altamente rígida no seu plano. O caso limite quando $\varepsilon^2 = 0$, não possui interesse prático, já que corresponde a uma membrana elástica com rigidez infinita.

O problema da flexão da placa, tem solução para qualquer valor de ε^2. No entanto, é interessante ressaltar que no limite quando $\varepsilon^2 = 0$ temos o modelo de Reissner-Mindlin reduzido ao modelo de Kirchhoff, ou seja $u_3 = -u_2{}'$, como podemos observar na equação (II.62).

Este fato pode também ocorre no caso de flexão de viga estudado por LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1987]. Na teoria de Timoshenko, que também considera a deformação por cortante, as equações que regem o problema apresentam uma dependência de um parâmetro de modo semelhante ao aqui apresentado. No limite, o que temos é a redução desta teoria à de Euler-Bernoulli, na qual a deformação cisalhante é nula.

II.4.2 Casca Cilíndrica

Para esta geometria particular temos:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\ , \quad R_1 = \infty\ , \quad r = R\ , \quad s = z\ , \quad \varrho = \frac{L}{R}\ ,$$

e assim as equações que regem o problema são:

Equações de Equilíbrio:

$$-\frac{d\sigma_1}{dx} = f_1\ , \tag{II.66}$$

$$-\frac{d\sigma_3}{dx} + \varrho\sigma_2 = f_2 \ , \tag{II.67}$$

$$-\frac{d\sigma_4}{dx} + \sigma_3 = 0 \ , \tag{II.68}$$

Equações Constitutivas:

$$\varepsilon^2(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{du_1}{dx} \ , \tag{II.69}$$

$$\varepsilon^2(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \varrho u_2 \ , \tag{II.70}$$

$$\varepsilon^2\mu\sigma_3 = \frac{du_2}{dx} + u_3 \ , \tag{II.71}$$

$$\sigma_4 - \nu\sigma_5 = \frac{du_3}{dx} \ , \tag{II.72}$$

$$\sigma_5 - \nu\sigma_4 = 0 \ . \tag{II.73}$$

Diferentemente do que acontece no caso da placa circular, temos aqui o acoplamento entre os esfoços de membrana e de flexão o que resulta num problema mais complexo. Agora existência de solução depende do parâmetro ε^2. Isto pode ser confirmado pela resolução das equações (II.66)- (II.72), com $f_1 = f_2 = 0$ que nos leva à seguinte equação diferencial em σ_4:

$$\varepsilon^2\left(\sigma_4{}^{IV} - \mu\varrho^2\sigma_4{}^{II}\right) + \varrho^2(1-\nu^2)\sigma_4 = 0 \ . \tag{II.74}$$

Não estamos preocupados aqui em analisar a solução particular deste sistema, pois a dificuldade maior é intrínseca ao operador diferencial e está refletida na sua solução homogênea.

A solução da equação (II.74) requer a determinação das raízes de sua equação característica,

$$\varepsilon^2\left(\omega^4 - \mu\varrho^2\omega^2\right) + \varrho^2(1-\nu^2) = 0 \ , \tag{II.75}$$

que são:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\mu\varrho^2 \pm \sqrt{\mu^2\varrho^4 - \frac{4\varrho^2(1-\nu^2)}{\varepsilon^2}}\right) \ . \tag{II.76}$$

O sinal do discriminante é decisivo no tipo de solução que obtemos, e sabendo-se que:

$$\mu\varrho^2 > \sqrt{\mu^2\varrho^4 - \frac{4\varrho^2(1-\nu^2)}{\varepsilon^2}} \tag{II.77}$$

a solução poderá ser de dois tipos, a saber:

i) se $\mu^2\varrho^4 - \frac{4\varrho^2(1-\nu^2)}{\varepsilon^2} > 0$, temos quatro raízes reais ($\pm\omega_1$ e $\pm\omega_2$), para a equação (II.75) e assim:

$$\sigma_4 = C_1 \text{senh}\omega_1 z + C_2 \cosh\omega_1 z + C_3 \text{senh}\omega_2 z + C_4 \cosh\omega_2 z; \tag{II.78}$$

ii) se $\mu^2\varrho^4 - \frac{4\varrho^2(1-\nu^2)}{\varepsilon^2} < 0$, temos quatro raízes complexas, $\pm(\omega_1 + \omega_2 i)$ e $\pm(\omega_1 - \omega_2 i)$, para a equação (II.75) e assim:

$$\sigma_4 = e^{\omega_1 z}(C_1 \text{sen}\omega_2 z + C_2 \cos\omega_2 z) + e^{-\omega_1 z}(C_3 \text{sen}\omega_2 z + C_4 \cos\omega_2 z). \tag{II.79}$$

Pela análise da Figura 2.5 que mostra σ_4 quando fixamos $\kappa = 1,0$; $\nu = 0,3; \varrho = 1,0; f_1 = 0,0; f_2 = 1,0$; e variamos o valor de ε, observamos que a função muda de forma a medida que ϵ tende para zero (estrutura delgada). Os valores usuais adotados para ε estão na faixa que satisfaz ao caso ii), e o comportamento de camada limite da solução se manifesta a partir de $\varepsilon = 10^{-2}$. Nestes casos a presença de regiões com gradientes elevados, próximas aos apoios, evidencia o fenômeno de concentração de tensões, de extrema importância e projetos de estruturas esbeltas. Fica, então, caracterizado a singularidade intrínseca ao operador diferencial para a categoria de problemas dependentes de parâmetros.

Ao tratarmos o problema da casca de forma aproximada, através do método dos elementos finitos, a presença de regiões de gradientes elevados da solução exige um tratamento mais refinado nestes locais. Uma forma eficiente de garantir uma boa aproximação da solução, quando lidamos com problemas deste tipo, é utilizar refinamentos adaptativos nos quais aumentamos o refinamento somente

nas áreas de camadas limites. Melhor ainda é obter tais refinamentos de forma automática, ou seja, introduzirmos no programa de elementos finitos estratégias que identifiquem automaticamente os locais de camadas limites e aumentem o refinamento adaptativamente, com o mínimo de interferência do analista.

Tendo em vista o uso dessas estratégias auto-adaptativas para o problema de casca e considerando a complexidade deste problema apresentamos um problema escalar unidimensional com solução, dependente de parâmetro, semelhante à solução do problema da casca, pelo menos no que diz respeito a presença de camada limite, dado por:

Achar $u : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\eta u'' + u = f \ , \tag{II.80}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \ , \tag{II.81}$$

em que η é um parâmetro pequeno, $0 < \eta < 1$. Na Figura 2.5 podemos comparar as soluções exatas do problema da casca e deste problema modelo escalar, com $f = 1,0$ para diferentes valores para η. A semelhança deste problema modelo com o problema de casca motivou-nos a utilizá-lo nos primeiros experimentos com estratégias auto-adaptativas que foram, em seguida, estendidas para o problema de cascas cilíndricas.

No capítulo seguinte retomamos a análise do problema da casca, assim como o problema modelo escalar, por meio de formulações variacionais, comentando aspectos relevantes sobre existência e unicidade de solução, bem como sobre convergência de suas aproximações por elementos finitos.

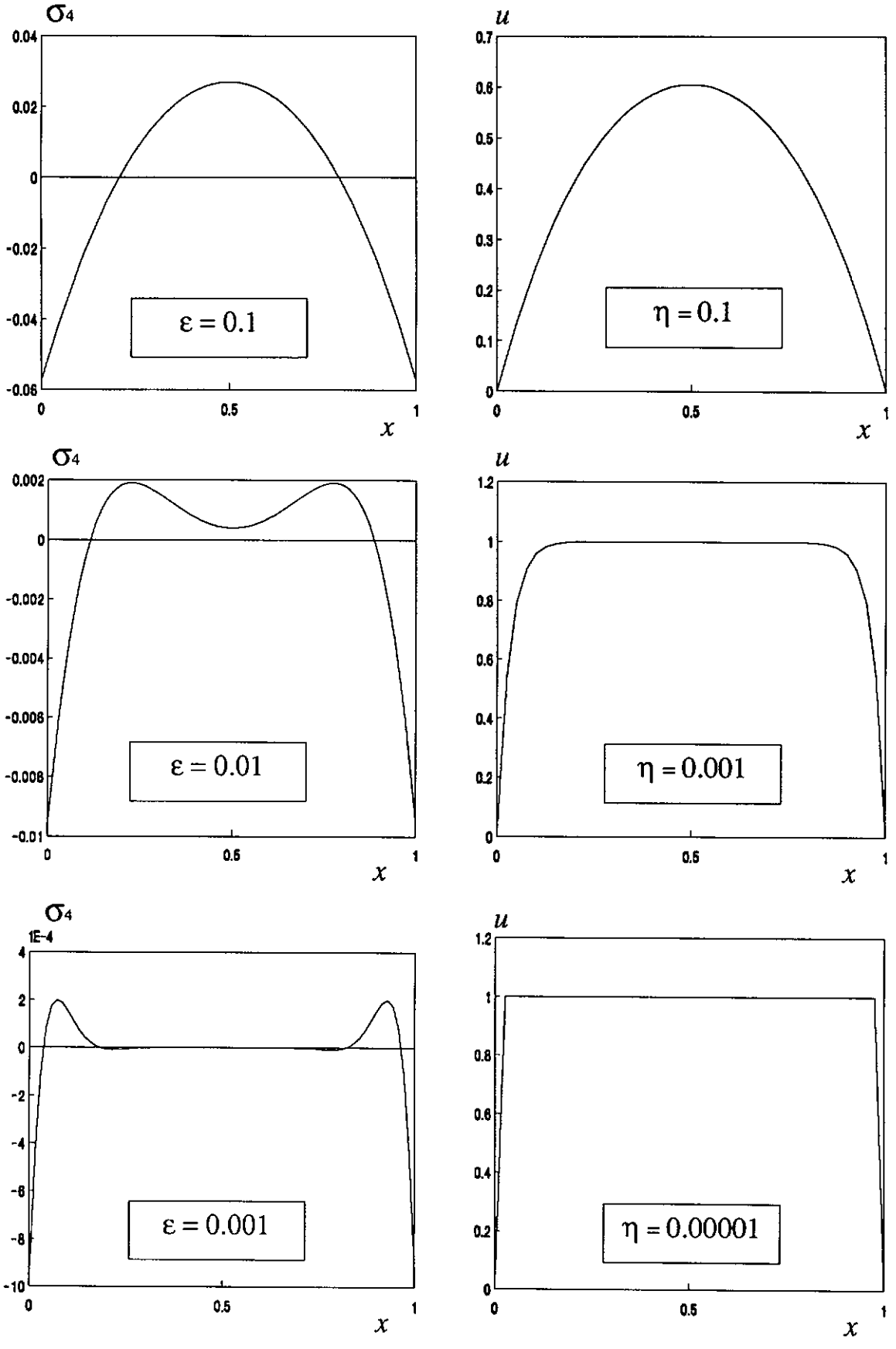


Figura 2.5 - Soluções, σ_4 e u, das equações (II.74) e (II.80)

CAPÍTULO III

FORMULAÇÕES VARIACIONAIS E ANÁLISE NUMÉRICA

III.1 Introdução

Conforme comentamos anteriormente, em flexão de placas e cascas, quando a espessura t tende para zero, o modelo de Reissner-Mindlin converge para o modelo de Kirchhoff. Este fato pode então ser interpretado como um método de penalização natural sobre a hipótese de Kirchhoff.

Do ponto de vista numérico, embora de aparência simples, a discretização do modelo de Reissner-Mindlin não é trivial. Para cascas delgadas interpolações usuais de Lagrange conduzem a resultados sub-ótimos, mesmo para aproximações de ordens elevadas (grau maior que dois). Aproximações aparentemente naturais conduzem a resultados que, grosseiramente, sub-estimam os deslocamentos. Para elementos lineares ocorre *trancamento* provocando efeitos nocivos no cálculo dos esforços de membrana e cortante. É bem sabido que formulações de elementos finitos penalizadas, requerem, em geral, aproximações especiais para evitar tal comportamento. Por outro lado, a não transferência automática das propriedades do problema contínuo para o problema discreto dificulta a construção de aproximações estáveis em modelos mistos.

Neste capítulo abordamos os aspectos relativos a aproximações de elementos finitos para formulações em um e em dois campos. Consideramos inicialmente métodos de deslocamentos e mistos baseados na formulação clássica de Galerkin que correspondem a restrição das equações variacionais do problema contínuo aos espaços de elementos finitos. Discutimos a existência e unicidade de solução para

tais problemas que são avaliadas pelo lema de Lax ou pelo teorema de Brezzi, para as formulações em um e dois campos, respectivamente.

Com o objetivo de estabilizar e aumentar a precisão da aproximação discreta, apresentamos uma formulação de Petrov-Galerkin consistente, introduzida em LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1986] para o caso da casca axissimétrica, LOULA, FRANCA, HUGHES E MIRANDA [1987a] para a viga de Timoshenko e LOULA, HUGHES, FRANCA E MIRANDA [1987b] para o problema do arco circular. Esta formulação é obtida adicionando-se, à formulação clássica de Galerkin, termos residuais das equações de equilíbrio, no domínio dos elementos.,

Resultados numéricos são apresentados comprovando a eficiência do método para diversas geometrias e tipos de carregamentos, inclusive não axissimétricos.

III.2 Método dos Deslocamentos

Esta formulação tem sido frequentemente utilizada para obtenção de soluções numéricas de problemas em mecânica. Por envolver um único campo, o dos deslocamentos, é fácil construir aproximações conformes, satisfazendo a priori, a relação cinemática entre o tensor deformações $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ e o vetor de deslocamentos $\mathbf{u}$.

No caso de cascas axissimétricas, (II.20 - II.40), o problema variacional, em termos de deslocamentos generalizados, assim se coloca:

Problema D : Achar $\mathbf{u} \in V$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = f(\hat{\mathbf{u}}) \; \forall \; \hat{\mathbf{u}} \in V \; , \tag{III.1}$$

com V o espaço de Hilbert dado por

$$V = \left\{ \hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{u}_\theta, \hat{\beta}_s, \hat{\beta}_\theta\}^T \in (H^1(\Omega))^5 : \hat{\mathbf{u}}(0,\theta) = \hat{\mathbf{u}}(L,\theta) = \mathbf{0} \right\} , \tag{III.2}$$

com norma

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_V^2 = \int_\Omega (\hat{\mathbf{u}}.\hat{\mathbf{u}} + \nabla\hat{\mathbf{u}}.\nabla\hat{\mathbf{u}}) \; d\Omega \; , \tag{III.3}$$

onde

$$a(\mathbf{u},\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{D}\epsilon(\mathbf{u}).\epsilon(\hat{\mathbf{u}})\, d\Omega \tag{III.4}$$

e

$$f(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}.\hat{\mathbf{u}}\, d\Omega\ , \tag{III.5}$$

que equivale a encontrar o mínimo do funcional da energia potencial total, $J(\hat{\mathbf{u}}) : V \rightarrow \mathbb{R}$, dado por:

$$J(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}) - f(\hat{\mathbf{u}})\ . \tag{III.6}$$

Ou seja, neste caso o problema consiste em achar $\mathbf{u} \in V$ tal que

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\hat{\mathbf{u}})\ \forall\ \hat{\mathbf{u}} \in V\ .$$

Existência e unicidade de solução para este problema são garantidas por

Teorema 3.1 (Lax-Milgram): Se V é um espaço de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e V-elítica e f um funcional linear contínuo, então o **Problema D** tem solução única.

No caso de cascas a continuidade e eliticidade da forma $a(\cdot,\cdot)$ são dadas pelas seguintes relações:

$$|a(\mathbf{u},\hat{\mathbf{u}})| \leq M(\frac{1}{t^2})\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{v}}\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{v}} \quad \forall\ \mathbf{u},\hat{\mathbf{u}} \in V\ , \tag{III.7}$$

$$a(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}) \geq \alpha\|\hat{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{v}} \quad \forall\ \hat{\mathbf{u}} \in V\ . \tag{III.8}$$

onde $M(\frac{1}{t^2}) < \infty$ e $\alpha > 0$ são as constantes de continuidade e eliticidade, respectivamente. A dependência da constante de continuidade com relação a t^2 pode causar problemas quando $t^2 \rightarrow 0$.

Aproximações de elementos finitos para o **Problema D** são classicamente obtidas introduzindo-se o espaço de elementos finitos $V_h \subset V$ (aproximação conforme), com $V_h = (S^k_h(\Omega))^5$, onde $S_h(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ é o espaço dos polinômios de

grau k, no interior de cada elemento e, com $h = max\{h_e\}$, $1 \leq e \leq ne$, em que h_e é o comprimento do elemento e, e ne é o número de elementos da malha. Por este procedimento podemos definir o problema aproximado da seguinte forma:

Problema $\mathbf{D}_h$: Achar $\mathbf{u}_h \in V_h$ tal que,

$$a(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = f(\hat{\mathbf{u}}_h), \quad \forall\ \hat{\mathbf{u}}_h \in V_h\ . \tag{III.9}$$

Devido ao uso de aproximações conformes, o problema discreto herda as propriedades de continuidade e eliticidade do problema contínuo, o que assegura a existência e unicidade de solução para o **Problema $\mathbf{D}_h$**.

Pelo lema de Céa, e considerando (III.7) e (III.8), resulta

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M(\frac{1}{t^2})}{\alpha}} \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_V \,\forall\ \hat{\mathbf{u}}_h \in V_h\ , \tag{III.10}$$

que combinada com os resultados clássicos da teoria de interpolação (CIARLET [1978]), conduz à seguinte taxa de convergência para $\mathbf{u}_h$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq \frac{C}{t} h^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1}\ , \tag{III.11}$$

com C independente de t. Da relação anterior podemos concluir que para estruturas delgadas, quando $t \to 0$, o lado direito da desigualdade cresce e estaremos sujeitos à instabilidades numéricas. Neste caso elementos lineares, $k = 1$, tendem ao *trancamento*, ou seja, tornam a estrutura super rígida, impedindo-a de se deslocar (HUGHES [1987]).

III.2.1 Exemplos Simples

O comportamento, descrito acima, pode ser melhor entendido quando analisamos problemas mais simples. Isto ocorre por exemplo com o problema da viga de Timoshenko e o problema modelo escalar, introduzido no capítulo II e descrito pelas equações (II.80) - (II.81), como comprovaremos a seguir.

a) Viga de Timoshenko

Através da análise deste problema, podemos compreender facilmente o fenômeno de *trancamento* que ocorre neste caso quando empregamos elementos lineares.

Utilizando aproximações de elementos finitos conformes, $V_h \subset V$, com $V_h = (S_h(0,L))^2$, podemos escrever o problema da viga como

Problema $\mathbf{E}_h$: Achar $\mathbf{v}_h \in V_h$ tal que

$$a(\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) = f(\hat{\mathbf{v}}_h) \; \forall \; \hat{\mathbf{v}}_h \in V_h \; , \tag{III.12}$$

com

$$a(\mathbf{v}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) = \int_0^L \beta_h' . \hat{\beta}_h' dx + \frac{6\kappa}{(\nu+1)} \frac{1}{t^2} \int_0^L (v_h' - \beta_h).(\hat{v}_h' - \hat{\beta}_h) dx \tag{III.13}$$

com $\mathbf{v}_h = \{v_h, \beta_h\}$, sendo v_h o deslocamento transversal e β_h a rotação, ambos tomados a partir do eixo médio da viga.

Em (III.13) observamos uma penalização natural sobre a deformação cisalhante tal que quando t^2 tende para zero força a satisfação da restrição $v_h' - \beta_h = 0$ (hipótese de Kirchhoff).

Para ilustrar a questão do *trancamento*, tomemos o caso de uma viga esbelta, sob a ação de peso próprio, engastada na extremidade, ou seja $v_h(0) = 0$ e $\beta_h(0) = 0$. A satisfação da restrição em $x = 0$ acarreta:

$$v_h'(0) - \beta_h(0) = 0 \text{ e } \beta_h(0) = 0 \implies v_h'(0) = 0 \; . \tag{III.14}$$

Para o elemento linear a derivada é constante em cada elemento e, e se conhecemos o seu valor em $x = 0$, em $x = h_e$ ela terá esse mesmo valor, ou seja, $v_h'(h_e) = 0$. Consequentemente, como a derivada é nula em todo o domínio do elemento, não há variação do valor do deslocamento, daí $v_h(h_e) = 0$. Este fato se repete para

todos os elementos, independente do refinamento, o que nos permite concluir que a solução obtida é nula em todo o domínio. Dizemos então, que elementos lineares superestimam grosseiramente a rigidez da estrutura provocando *trancamento*. Fato idêntico ocorre em placas. Em cascas, porém, tal comportamento não ocorre da mesma forma. Neste caso o acoplamento entre os esforços de flexão e de membrana ameniza os efeitos de flexão provocados pelos apoios e descontinuidades de carregamento. Em regiões afastadas destes pontos a estrutura tem comportamento de membrana. Isto pode fazer com que o fenômeno de *trancamento* não seja tão grave como o que ocorre em estruturas que trabalham em regime de flexão em todo domínio, como ocorre no caso de vigas e de placas.

b) Problema Modelo escalar

Pela análise do problema escalar apresentado no capítulo anterior, semelhante à realizada para o problema da casca, podemos fazer uma comparação interessante com o que acontece naquele problema.

Seja então (II.80) - (II.81) na forma variacional dado por:

Problema $\mathbf{M}_\eta$: Achar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$a_\eta(u,v) = f(v) \quad \forall\, v \in H_0^1 \ , \tag{III.15}$$

onde

$$a_\eta(u,v) = \eta \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx \quad \forall\, u,v \in H_0^1 \ , \tag{III.16}$$

$$f(v) = \int_0^1 fvdx \ . \tag{III.17}$$

Para $\eta > 0$ o **Problema $\mathbf{M}_\eta$** tem solução única e as constantes de continuidade, $M = 1$ e de eliticidade, $\alpha = \eta$, são facilmente determinadas.

Adotando aproximações conformes, $S_h^k \subset H_0^1$, o problema discreto herda as propriedades do problema contínuo e obtemos a seguinte estimativa de erro para

elementos lineares, ($k = 1$):

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C}{\sqrt{\eta}} h|u|_2 \ . \tag{III.18}$$

Neste caso a instabilidade do método provocada, quando $\eta \to 0$ implica em oscilações da solução aproximada, u_h, próximo à camada limite, que tendem a aumentar à medida que η diminui, Figura 3.1. Porém a análise da expressão (III.18) faz crer que se fizermos $h \ll \sqrt{\eta}$ o método poderá fornecer uma boa aproximação para a solução exata. Esta condição, entretanto, pode implicar em um custo computacional excessivo, quando $\eta \to 0$, se utilizarmos malhas uniformes. Malhas adaptativas são indicadas nestes casos.

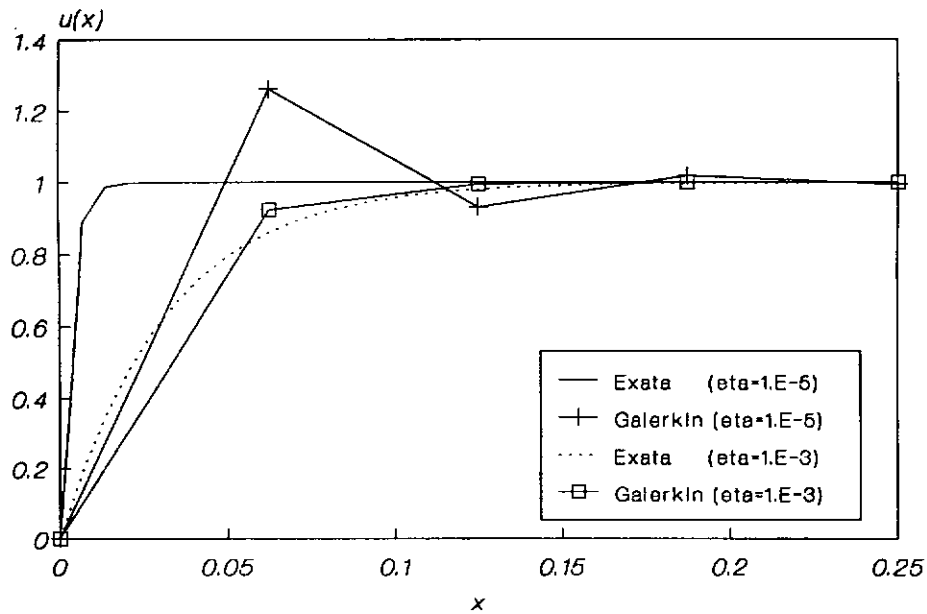


Figura 3.1 - Soluções para o **Problema $\mathbf{M}_\eta$**

Embora exista semelhança entre o **Problema $\mathbf{E}_h$** e o **Problema $\mathbf{M}_\eta$** , verificamos que a natureza dos resultados numéricos obtidos por ambos, são bem diferentes. O fato do lado direito das inequações que definem as estimativas de erro a priori, ser grande, e depender de parâmetros (no caso da viga de Timoshenko, como no caso de placas e cascas, devido a dependência de t da constante de continuidade e no caso do problema modelo escalar devido a dependência da constante

de eliticidade do parâmetro η), implica em instabilidade numérica, que pode se manifestar de diversas formas, como constatado.

No caso de *trancamento*, integrações reduzidas, ou seletivas, têm sido uma saída frequente para contornar estas limitações. Entretanto a possibilidade da presença de modos de energia nula em decorrência desta estratégia pode gerar sérias complicações (ver HUGHES [1987]). Tais modos de energia nula podem ser detectados quando usamos a fatoração de Crout da matriz de rigidez e encontramos "pivots" iguais a zeros que indicam a presença de modos de energia nula.

Outra alternativa é utilizar uma formulação mista de elementos finitos baseada no Princípio de Hellinger-Reissner com deslocamentos e esforços como variáveis independentes. Nesta forma a teoria de Reissner-Mindlin pode ser interpretada como uma regularização da teoria de Kirchhoff, e uma escolha natural para os espaços de aproximações seria adotar L_2 para o campo dos esforços e H^1 para o campo dos deslocamentos. Infelizmente, no limite quando $t \to 0$, também temos problemas com esta formulação, como será discutido no item seguinte.

III.3 Método Misto de Galerkin

A formulação variacional mista de Galerkin para o problema da casca, em termos de deslocamentos e esforços como variáveis independentes, assim se coloca:

Problema G : Achar $(\mathbf{N}, \mathbf{u}) \in W \times V$, tal que

$$a(\mathbf{N}, \hat{\mathbf{N}}) + b(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{u}) = 0, \qquad \forall\, \hat{\mathbf{N}} \in W, \tag{III.19}$$

$$b(\mathbf{N}, \hat{\mathbf{u}}) = f(\hat{\mathbf{u}}), \qquad \forall\, \hat{\mathbf{u}} \in V. \tag{III.20}$$

com

$$V = \left\{ \hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{u}_\theta, \hat{\beta}_s, \hat{\beta}_\theta\}^T \in (H^1(\Omega))^5 : \hat{\mathbf{u}}(0,\theta) = \hat{\mathbf{u}}(L,\theta) = \mathbf{0} \right\}, \tag{III.21}$$

$$W = \{\hat{\mathbf{N}} = (\hat{N}_s, \hat{N}_\theta, \hat{N}_{s\theta}, \hat{Q}_s, \hat{Q}_\theta, \hat{M}_s, \hat{M}_\theta, \hat{M}_{s\theta})^T \in (L_2(\Omega))^8\} \ . \qquad \text{(III.22)}$$

onde

$$a(\mathbf{N}, \hat{\mathbf{N}}) = -\int_\Omega \mathbf{DN}.\hat{\mathbf{N}}\, d\Omega =$$

$$-\int_0^L \int_0^{2\pi} \Big\{ \quad \frac{1}{K}\left[(N_s - \nu N_\theta)\hat{N}_s + (N_\theta - \nu N_s)\hat{N}_\theta\right] +$$

$$+ \frac{1}{G}\left[N_{s\theta}\hat{N}_{s\theta} + Q_s\hat{Q}_s + Q_\theta\hat{Q}_\theta\right] -$$

$$- \frac{1}{D}\left[(M_s - \nu M_\theta)\hat{M}_s + (M_\theta - \nu M_s)\hat{M}_\theta\right] -$$

$$- \frac{1}{H} M_{s\theta}\hat{M}_{s\theta} \quad \Big\}\, r d\theta ds \ , \qquad \text{(III.23)}$$

$$b(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) = (\hat{\mathbf{N}}, B\hat{\mathbf{u}}) = \int_\Omega \hat{\mathbf{N}}\epsilon(\hat{\mathbf{u}})\, d\Omega =$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \Big\{ \quad \hat{N}_s\left(\cos\varphi \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial s} + \mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial s}\right) + \hat{N}_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}_r}{r}\right) +$$

$$+ \hat{N}_{s\theta}\left[\frac{1}{r}\left(\cos\varphi \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta}\right) - \frac{\cos\varphi}{r}\hat{u}_\theta + \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial s}\right] +$$

$$+ \hat{Q}_s\left(\hat{\beta}_s + \mathrm{sen}\varphi \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial s} - \cos\varphi \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial s}\right) +$$

$$+ \hat{Q}_\theta\left(\hat{\beta}_\theta + \frac{\mathrm{sen}\varphi}{r}\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta} - \mathrm{sen}\varphi \frac{\hat{u}_\theta}{r}\right) +$$

$$+ \hat{M}_s \frac{\partial \hat{\beta}_s}{\partial s} + \frac{M_\theta}{r}\left(\frac{\partial \hat{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \cos\varphi\, \hat{\beta}_s\right) +$$

$$+ \hat{M}_{s\theta}\left[\frac{\partial \hat{\beta}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \hat{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \cos\varphi\, \hat{\beta}_\theta\right)\right] \quad \Big\}\, r d\theta ds$$

$$\text{(III.24)}$$

e

$$f(\hat{\mathbf{u}}) = \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_r\hat{u}_r + q_z\hat{u}_z + q_\theta\hat{u}_\theta)\, r d\theta\, ds \ . \qquad \text{(III.25)}$$

Resolver tal problema é equivalente a determinar o ponto de sela do funcional de Hellinger-Reissner, $HR(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) : W \times V \to \mathbb{R}$, dado por:

$$HR(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{N}}) + b(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) + f(\hat{\mathbf{u}}) \ , \qquad \text{(III.26)}$$

ou seja,

Achar $\{\mathbf{N}, \mathbf{u}\} \in W \times V$ tal que

$$HR(\mathbf{N}, \hat{\mathbf{u}}) \geq HR(\mathbf{N}, \mathbf{u}) \geq HR(\hat{\mathbf{N}}, \mathbf{u}) \quad \forall\, \hat{\mathbf{N}} \in W \text{ e } \quad \forall\, \hat{\mathbf{u}} \in V \ . \tag{III.27}$$

É importante notar que, do ponto de vista matemático, o **Problema G** se enquadra nos moldes da teoria dos problema mistos estudados por BREZZI [1974] e BABUŠKA [1971]. Para fazer uso dos resultados já estabelecidos por aqueles autores, precisamos caracterizar os seguintes subespaços de W :

$$K(f) = \{\hat{\mathbf{N}} \in W \ : b(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) = f(\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall\, \hat{\mathbf{u}} \in V\} \ , \tag{III.28}$$

$$K = K(0) = KerB = \{\hat{\mathbf{N}} \in W \ : b(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) = 0 \ \ \forall\, \hat{\mathbf{u}} \in V\} \ . \tag{III.29}$$

onde B é o operador , $B : W \rightarrow V'$,

$$(B\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}) = b(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}}), \quad \forall\, \hat{\mathbf{N}} \in W \ \ \forall\, \hat{\mathbf{u}} \in V \ , \tag{III.30}$$

sendo V' o dual de V.

Uma vez que as formas bilineares $a(.,.)$ e $b(.,.)$ e o funcional $f(.)$ são contínuas, existência e unicidade de solução para esta classe de problemas são garantidas pelo seguinte teorema:

Teorema 3.2 (BREZZI [1974])

Se existem as constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que podemos demonstrar

(H1) K-eliticidade:

$$|a(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{N}})| \geq \alpha \|\hat{\mathbf{N}}\|_W^2 \quad \forall\, \hat{\mathbf{N}} \in K \ , \tag{III.31}$$

(H2) Condição de Babuška-Brezzi :

$$\sup_{\forall\, \hat{\mathbf{N}} \in W} \frac{b(\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{u}})}{\|\hat{\mathbf{N}}\|_W} \geq \beta \|\hat{\mathbf{u}}\|_V \quad \forall\, \hat{\mathbf{u}} \in V \ , \tag{III.32}$$

então o **Problema G** tem solução única $(\mathbf{N}, \mathbf{u}) \in W \times V$.

Para o problema em questão, a hipótese (H2) é trivialmente verificada. A condição de eliticidade vale para todo o espaço W para cascas de espessura finita. O problema está no imite, quando $\frac{t}{R} \to 0$, com $R = min\{R_1, R_2\}$.

Para a aproximação de elementos finitos do **Problema G** adotamos $V_h \subset V$, com $V_h = (S_h^k(\Omega))^5$ definido anteriormente para o modelo de deslocamento, e $W_h \subset W$, $W_h = (P_h^l(\Omega))^8$, sendo $P_h^l(\Omega)$ o espaço C^{-1} de polinômios de grau l, no interior de cada elemento e descontínuos nas interfaces dos elementos. Assim podemos escrever o problema discreto

Problema G$_h$: Achar $(\mathbf{N}_h, \mathbf{u}_h) \in W_h \times V_h$, tal que

$$a(\mathbf{N}_h, \hat{\mathbf{N}}_h) + b(\hat{\mathbf{N}}_h, \mathbf{u}_h) = 0, \qquad \forall\ \hat{\mathbf{N}}_h \in W_h, \tag{III.33}$$

$$b(\mathbf{N}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = f(\hat{\mathbf{u}}_h), \qquad \forall\ \hat{\mathbf{u}}_h \in V_h. \tag{III.34}$$

Interpolações de igual ordem, para esta formulação, são instáveis no caso de estruturas delgadas. Tais aproximações conduzem a resultados sub-ótimos, mesmo para aquelas de ordens elevadas ($k = l \geq 2$). Para $k = l = 1$, estamos sujeitos a *trancamento* no cálculo dos deslocamentos, o que gera problemas no cálculo dos esforços de membrana e cortante. Este comportamento pode ser explicado pela fraca eliticidade da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ para $t^2 \to 0$, que em geral é dada por

$$|a(\hat{\mathbf{N}}_h, \hat{\mathbf{N}}_h)| \geq \alpha(t^2, h)\|\hat{\mathbf{N}}_h\|_W^2 \quad \forall\ \hat{\mathbf{N}}_h \in K_h\ , \tag{III.35}$$

onde

$$K_h = \{\hat{\mathbf{N}}_h \in W_h\ ;\ b(\hat{\mathbf{N}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = 0\ \ \forall\ \hat{\mathbf{u}}_h \in V_h\}\ . \tag{III.36}$$

A dependência de α com relação a t^2 e h, reduz a taxa de convergência das aproximações na maioria das situações, de uma forma semelhante à que ocorre com aproximações intáveis para o problema da viga de Timoshenko.

Retornando ao problema da placa circular adimensionalizada, que como vimos, se desacopla em dois problemas: de membrana e de flexão. Demonstram-se em LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1989] a W-eliticidade e K-eliticidade, dos problema de membrana e flexão, respectivamente, para valores positivos de ε^2. No problema da membrana, devido a eliticidade ser válida para todo o espaço W, mesmo quando $\varepsilon^2 \to 0$, esta propriedade é transferida automaticamente para o problema discreto. No problema de flexão, quando $\varepsilon^2 \to 0$, perdemos a W-eliticidade mantendo-se somente a K-eliticidade, que não é automaticamente transferida do problema contínuo para o discreto. O que se deve notar é que apesar de $W_h \subset W$ e $V_h \subset V$ (propriedades essenciais da aproximações conformes), não temos, necessariamente, $K_h \subset K$. Dessa forma, a construção de aproximações de elementos finitos estáveis se reduz a um problema de compatibilidade entre os espaços adotados para o campo dos deslocamentos e para o campo dos esforços. Se escolhemos, por exemplo, $l = k - 1$, conseguimos compatibilidade entre os espaços e asseguramos existência, unicidade e estabilidade do problema discreto. Dificuldades adicionais ocorrem no caso de cascas axissimétricas, de modo que convergência uniforme, independente da espessura, não deve ser esperada, mesmo com interpolações de diferentes ordens.

Visando superar algumas destas limitações apresentamos a seguir uma nova formulação mista com termos adicionais de mínimos quadrados.

III.4 Método Misto de Petrov-Galerkin

Adicionando, à formulação clássica de Galerkin, termos de mínimos quadradros, relativos às equações de equilíbrio no domínio dos elementos, e adotando os mesmos espaços de elementos finitos da formulação anterior, V_h e W_h, definimos o seguinte problema:

Problema PG$_h$: Achar $(\mathbf{N}_h, \mathbf{u}_h) \in W_h \times V_h$, tal que

$$a_h(\mathbf{N}_h, \hat{\mathbf{N}}_h) + b(\hat{\mathbf{N}}_h, \mathbf{u}_h) = g_h(\hat{\mathbf{N}}_h), \qquad \forall\, \hat{\mathbf{N}}_h \in W_h, \tag{III.37}$$

$$b(\mathbf{N}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = f(\hat{\mathbf{u}}_h), \qquad \forall\, \hat{\mathbf{u}}_h \in V_h, \tag{III.38}$$

onde

$$a_h(\mathbf{N_h}, \hat{\mathbf{N}}_h) = a(\mathbf{N_h}, \hat{\mathbf{N}}_h) + \sum_{e=1}^{ne} a_e(\mathbf{N}_h^e, \hat{\mathbf{N}}_h^e) \tag{III.39}$$

com

$$\begin{aligned}
a_e(\mathbf{N}_h^e, \hat{\mathbf{N}}_h^e) = -\delta_1 \int_{\Omega_e} \frac{h_e^2}{D}\left[\frac{\partial(rN_s)}{\partial s} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} - N_\theta \cos\varphi + \frac{r}{R_1} Q_s\right] \times \\
\times \left[\frac{\partial(r\hat{N}_s)}{\partial s} + \frac{\partial \hat{N}_{s\theta}}{\partial \theta} - \hat{N}_\theta \cos\varphi + \frac{r}{R_1}\hat{Q}_s\right] d\Omega_e \\
-\delta_2 \int_{\Omega_e} \frac{h_e^2}{D}\left[\frac{\partial(rN_{s\theta})}{\partial s} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{s\theta}\cos\varphi + Q_\theta \mathrm{sen}\varphi\right] \times \\
\times \left[\frac{\partial(r\hat{N}_{s\theta})}{\partial s} + \frac{\partial \hat{N}_\theta}{\partial \theta} + \hat{N}_{s\theta}\cos\varphi + \hat{Q}_\theta \mathrm{sen}\varphi\right] d\Omega_e \\
-\delta_3 \int_{\Omega_e} \frac{h_e^2}{D}\left[\frac{\partial(rQ_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \left(\frac{N_s}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2}\right)\right] \times \\
\times \left[\frac{\partial(r\hat{Q}_s)}{\partial s} + \frac{\partial \hat{Q}_\theta}{\partial \theta} - \left(\frac{\hat{N}_s}{R_1} + \frac{\hat{N}_\theta}{R_2}\right)\right] d\Omega_e \\
-\delta_4 \int_{\Omega_e} \frac{h_e^2}{r_c^2 D}\left[\frac{\partial(rM_s)}{\partial s} + \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} - M_\theta \cos\varphi\right] \times \\
\times \left[\frac{\partial(r\hat{M}_s)}{\partial s} + \frac{\partial \hat{M}_{s\theta}}{\partial \theta} - \hat{M}_\theta \cos\varphi\right] d\Omega_e \\
-\delta_5 \int_{\Omega_e} \frac{h_e^2}{r_c^2 D}\left[\frac{\partial(rM_{s\theta})}{\partial s} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{s\theta}\cos\varphi\right] \times \\
\times \left[\frac{\partial(r\hat{M}_{s\theta})}{\partial s} - \frac{\partial \hat{M}_\theta}{\partial \theta} + \hat{M}_{s\theta}\cos\varphi\right] d\Omega_e \ ,
\end{aligned} \tag{III.40}$$

onde $\hat{\mathbf{N}}_h^e$ é a restrição de $\hat{\mathbf{N}}_h$ ao elemento e, r_c é um valor característico da casca (valor máximo de r por exemplo), e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ e δ_5 constantes positivas adimen-

sionais a serem fixadas. Notar que para $\delta_i = 0, i = 1,2,3,4,5$, o **Problema $\mathbf{PG}_h$** reduz ao **Problema $\mathbf{G}_h$** .

Esta formulação goza das seguintes propriedades (LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1986]):

- *Consistência* : **Problema $\mathbf{PG}_h$** é variacionalmente consistente, isto é, se $(\mathbf{N}, \mathbf{u}) \in W \times V$ é solução do **Problema G** então $(\mathbf{N}, \mathbf{u})$ satisfaz ao **Problema $\mathbf{PG}_h$** . Isto decorre do fato de que a equação (III.37) é obtida adicionando à equação (III.33), a forma residual das equações de equilíbrio (II.20) - (II.24) no interior dos elementos.

- *Continuidade* : Como $a_e(\mathbf{N}_h^e, \hat{\mathbf{N}}_h^e)$ é proporcional a h_e^2 , podemos provar

$$|a_h(\mathbf{N}_h, \hat{\mathbf{N}}_h)| \leq C\|\mathbf{N}_h\|_W \|\hat{\mathbf{N}}_h\|_W \ , \tag{III.41}$$

com $C > 0$ independente de h.

- *Condição de Babuška-Brezzi discreta* : pode-se provar (H2) discreta,

$$\sup_{\hat{\mathbf{N}}_h \in w_h} \frac{b(\hat{\mathbf{N}}_h, \hat{\mathbf{u}}_h)}{\|\hat{\mathbf{N}}_h\|_W} \geq \beta \|\hat{\mathbf{u}}_h\|_V, \quad \forall\ \hat{\mathbf{u}}_h \in V_h \ , \tag{III.42}$$

com β independente de h.

- *Convergência* : A convergência de $(\mathbf{N}_h, \mathbf{u}_h)$ para $(\mathbf{N}, \mathbf{u})$ na norma do espaço produto $W \times V$, requer K_h-eliticidade, ou seja

$$|a_h(\hat{\mathbf{N}}_h, \hat{\mathbf{N}}_h)| \geq \alpha \|\hat{\mathbf{N}}_h\|_W^2 \quad \forall\ \hat{\mathbf{N}}_h \in K_h \ . \tag{III.43}$$

Esta condição em geral não é verificada. Para o caso particular da placa circular, escolhas apropriadas de $\delta_1, \delta_3, \delta_4$ conduzem a (III.43) independente de t e h LOULA, MIRANDA, HUGHES E FRANCA [1989], assim como para o caso da viga de Timoshenko LOULA, HUGHES, FRANCA E MIRANDA [1987]. Entretanto isto não ocorre para cascas axissimétricas, que por esta razão não apresentam convergência uniforme, nem mesmo para a formulação de Petrov-Galerkin aqui adotada.

III.5 Forma Matricial das Formulações Mistas

A resolução numérica dos problemas mistos resultantes da aplicação dos métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin, como apresentados anteriormente, levam à seguinte expressão matricial:

$$-AX + B^T U = G \tag{III.44}$$

$$BX = F \tag{III.45}$$

onde X e U representam os parâmetros nodais da interpolação para esforços e deslocamentos, respectivamente, A e B são as matrizes associadas com as formas bilineares $a_h(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot), G$ e F os vetores de carga equivalentes. Devemos notar que na aproximação de Galerkin $G = 0$. Além disso, como os esforços são interpolados descontinuamente, podemos eliminar os graus de liberdade, dos esforços X, a nível de elemento, escrevendo portanto (III.44) - (III.45) como:

$$KU = F^*, \qquad \text{com} \tag{III.46}$$

$$K = \sum_{e=1}^{ne} K_e, \quad K_e = B_e {A_e}^{-1} {B_e}^T \tag{III.47}$$

$$F^* = \sum_{e=1}^{ne} F_e^*, \quad F_e^* = F_e + B_e {A_e}^{-1} G_e \tag{III.48}$$

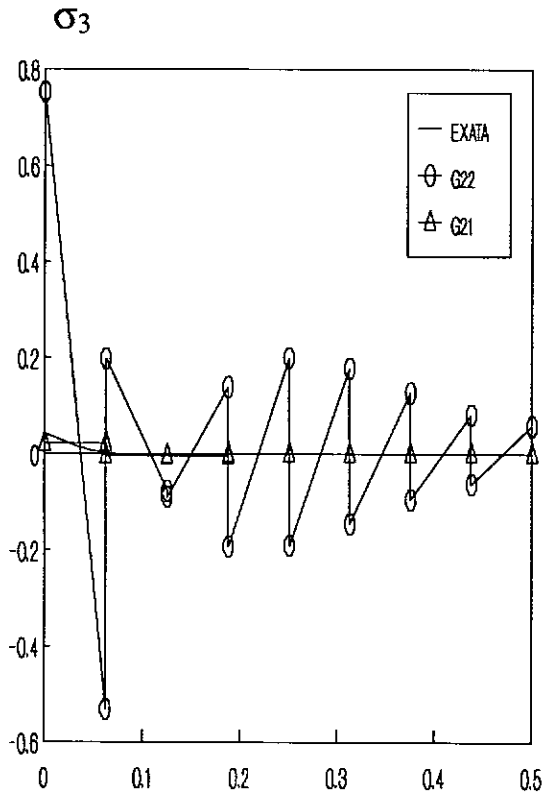
onde A_e e B_e são matrizes associadas com a restrição das formas bilineares $a_h(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot)$ para o elemento e, e G_e e F_e são os vetores de carga a nível de elemento. As expressões (III.47) e (III.48) nada mais são do que as operações do processo clássico de condensação estática, sendo K uma matriz de rigidez, onde somente os deslocamentos são mantidos como graus de liberdade globais.

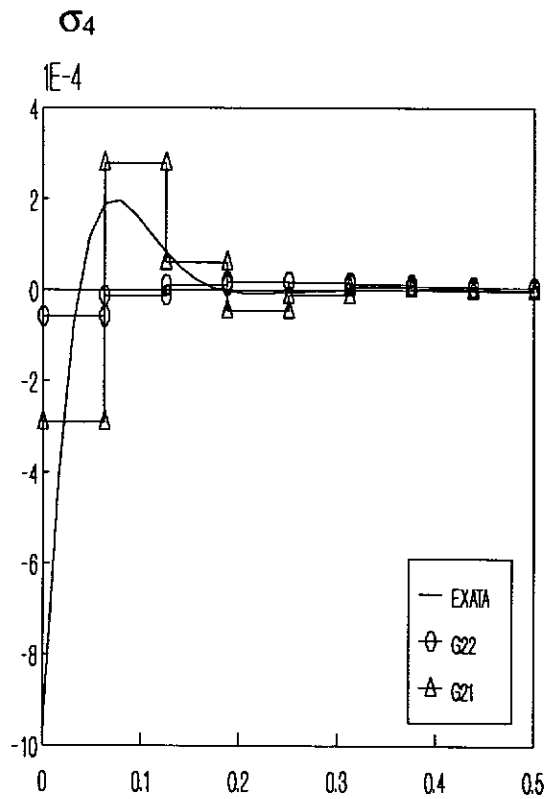
III.6 Resultados Numéricos

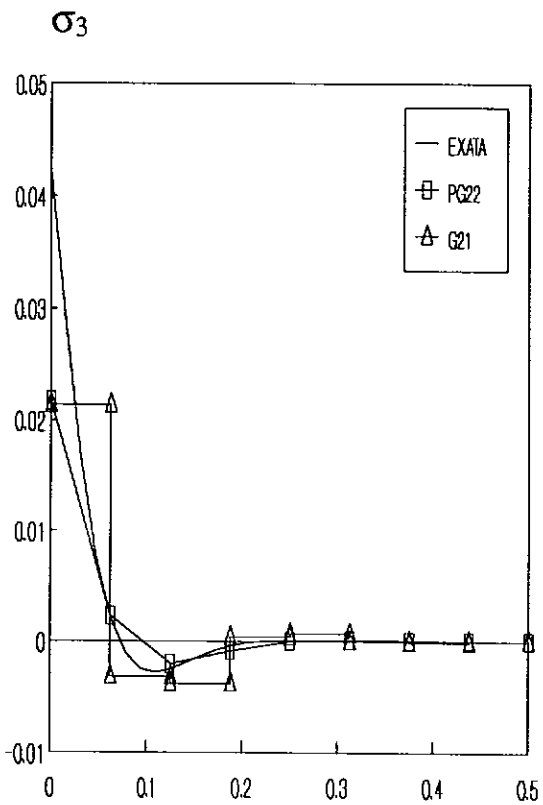
- Exemplo 1 - Casca cilíndrica delgada (forma adimensionalizada);

Analisamos inicialmente uma casca cilíndrica delgada ($\varepsilon = 10^{-3}$), sob ação de pressão interna. Neste caso empregamo a forma adimensionalizada introduzida no capítulo II. Devido a simetria discretizamos somente a metade do domínio, com uma malha de 8 elementos. Na Figura 3.2 apresentamos os resultados obtidos pelas formulações variacionais de Galerkin e Petrov-Galerkin com malhas uniformes, para as componentes σ_3 e σ_4, proporcionais ao esforço cortante Q_s e momento fletor M_s, respectivamente, calculadas pela formulação de Galerkin com interpolação linear para os campos de deslocamento e de esforços ($k = l = 1$), simbolizada por G22 (assim denominado pelo fato do elemento possuir dois valores distintos para cada um dos campos); e com interpolação linear para os deslocamentos e constante para os esforços ($k = 1,\ l = 0$), simbolizadas por G21 (elemento com dois valores nodais para os deslocamentos e um para os esforços). São apresentados, também, os resultados obtidos com a formulação a formulação de Petrov-Galerkin (PG22, interpolação linear para os deslocamentos e para os esforços), e a solução exata. Adotamos, neste caso, $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 1,0$ em todo o domínio. É importante notar a eliminação das oscilações em σ_3 e o sensível aumento da precisão para σ_4 obtido com elemento PG22. Neste caso verificamos que a variação nos valores dos deltas afeta a precisão mas não a estabilidade do método proposto.

Na Figura 3.3 apresentamos as taxas de convergência, na norma do L_2 dos métodos de Galerkin estável, G21, e Petrov-Galerkin PG22, com malhas uniformes, para as componentes σ_3 e σ_4, tratadas anteriormente. Observamos claramente, nestes gráficos, o aumento das taxas de convergência alcançado com a formulação de Petrov-Galerkin.







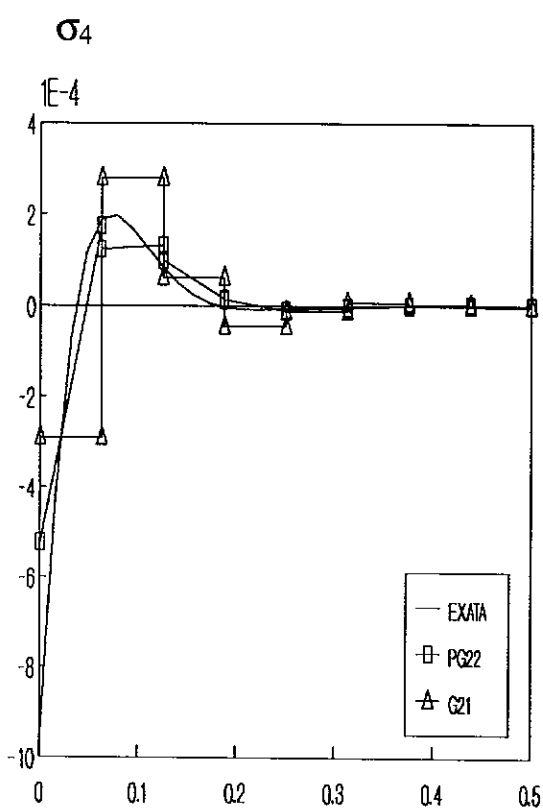
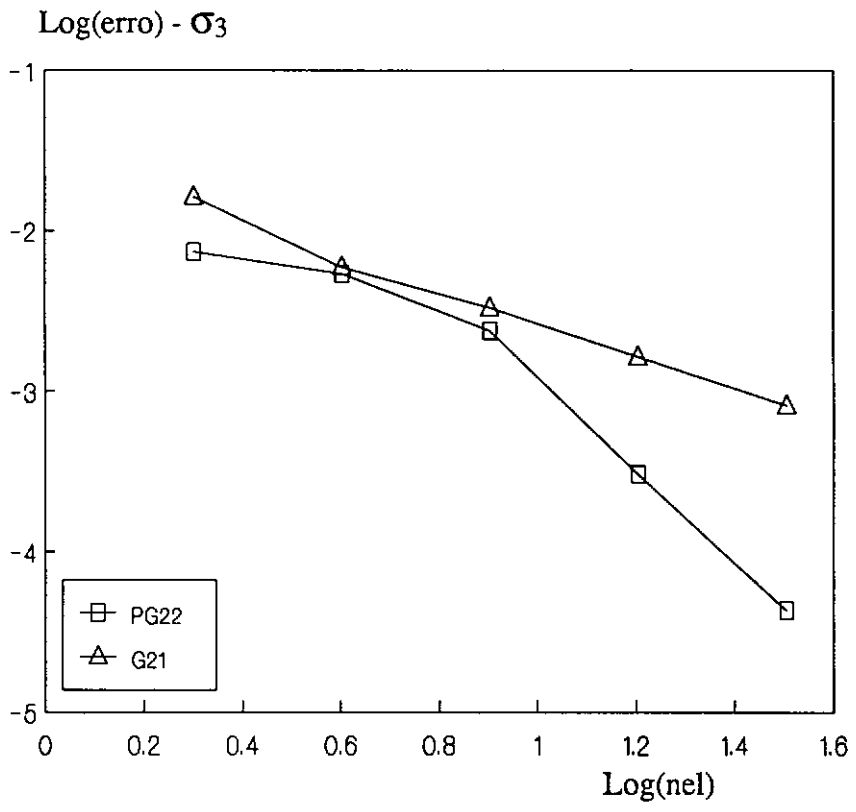


Figura 3.2 - σ_3 e σ_4 para diferentes aproximações e métodos, $\varepsilon = 10^{-3}$



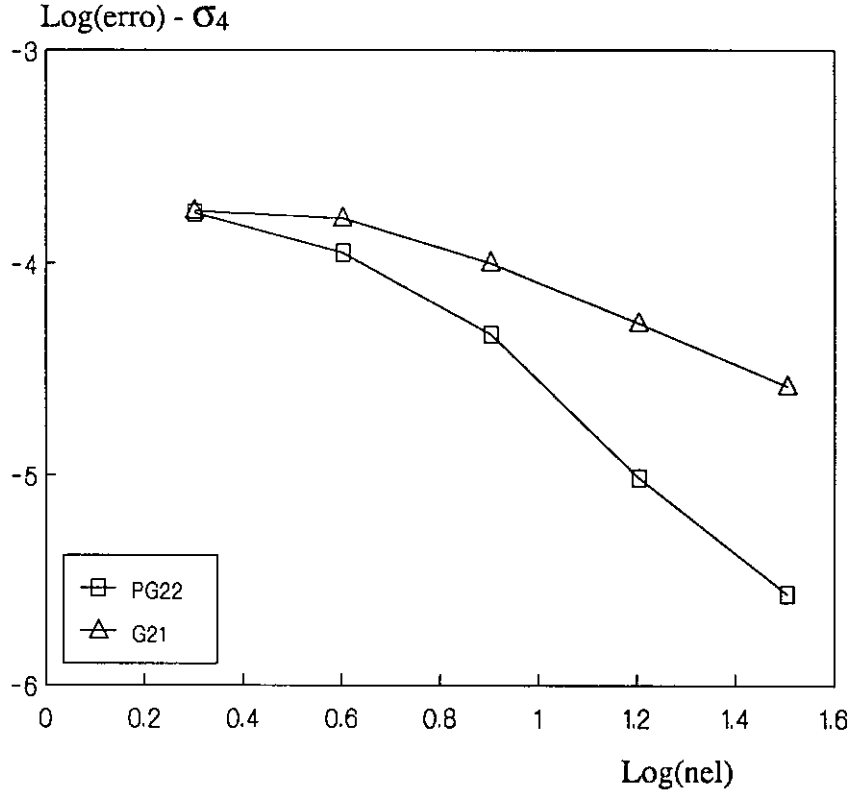
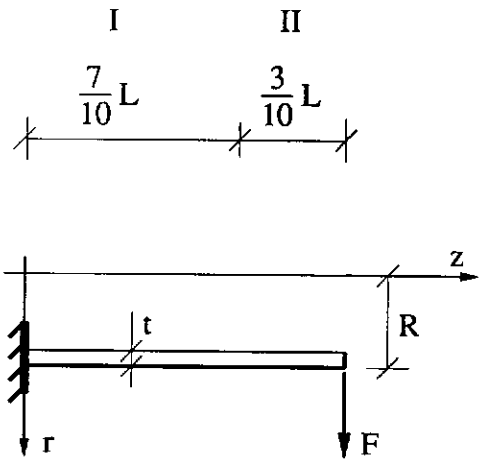


Figura 3.3 - Taxas de convergência para σ_3 e σ_4, $\varepsilon = 10^{-3}$

- Exemplo 2 - Casca cilíndrica ($t = 2,0$ e $t = 40,0$)

De modo a analisar a influência da espessura da casca sobre os resultados dos esforços, estudamos uma casca cilíndrica engastada em uma extremidade com carregamento radial na outra extremidade para dois valores diferentes de espessura ($t = 2,0$ e $t = 40,0$), como mostra a Figura 3.4.



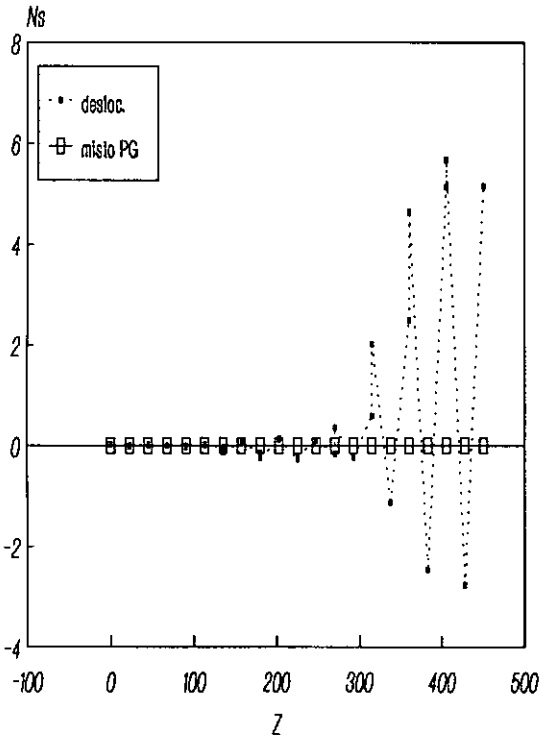
E = 206010,0 N / mm^2
R = 160,0 mm
L = 450,0 mm
F = 100,0 N
ν = 0,3

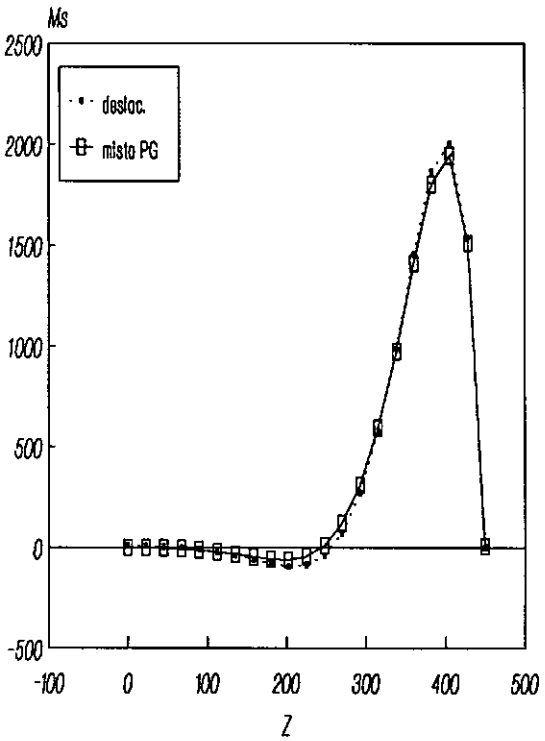
Figura 3.4 - Geometria e propriedades da casca cilíndrica

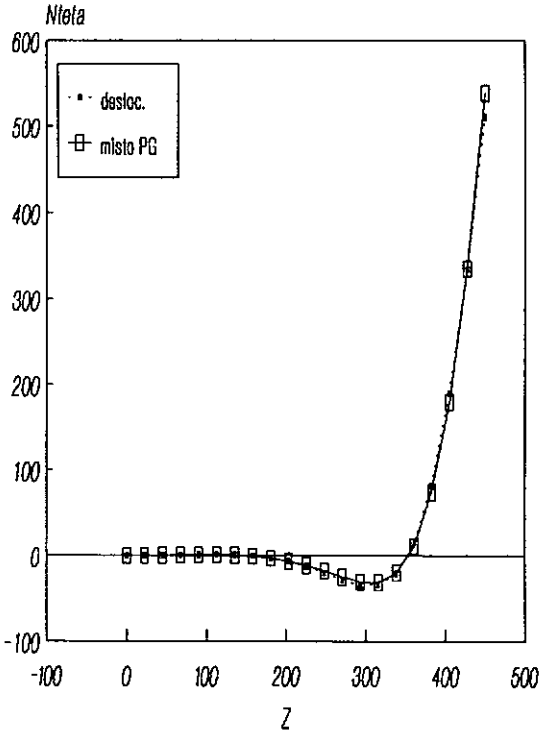
Utilizamos neste exemplo a formulação de Petrov-Galerkin com $\delta_1 = 1,0$; $\delta_4 = 10,0$; $\delta_2 = \delta_3 = \delta_5 = 0,0$, com elementos de 3 nós (interpolação quadrática, $k = l = 2$).

Para a casca espessa, $t = 40,0$, discretizamos o domínio com 10 elementos, igualmente espaçados. Em cascas delgadas, espera-se a ocorrência de gradientes elevados para os esforços, nas proximidades dos apoios, logo estas regiões estão sujeitas aos maiores erros de aproximação e um modo de minimizar este problema, de forma eficiente, é aumentar a concentração de elementos somente nestes locais. Assim sendo para a casca de espessura $t = 2,0$, usamos 7 elementos na região I e 9 na região II. Nas Figuras 3.5 e 3.6 os esforços para a casca es-

pessa ($t = 40,0mm$) e para a fina ($t = 2,0mm$) são respectivamente mostrados. Para uma análise comparativa, utilizamos resultados obtidos com uma formulação em deslocamentos, modelo de Kirchhoff, usando um elemento especial de 3 nós proposto por FEIJOO, JOSPIN, BEVILACQUA E TAROCO [1980], que provou ser eficiente em várias aplicações. Observamos a concordância entre os resultados obtidos com as duas formulações para as componentes N_θ e M_s, mostrando o bom desempenho da nova formulação que, inclusive não apresentando oscilações em N_s como ocorre nas formulações clássicas. A componente Q_s não pode ser comparada porque a formulação em deslocamento não a calcula.







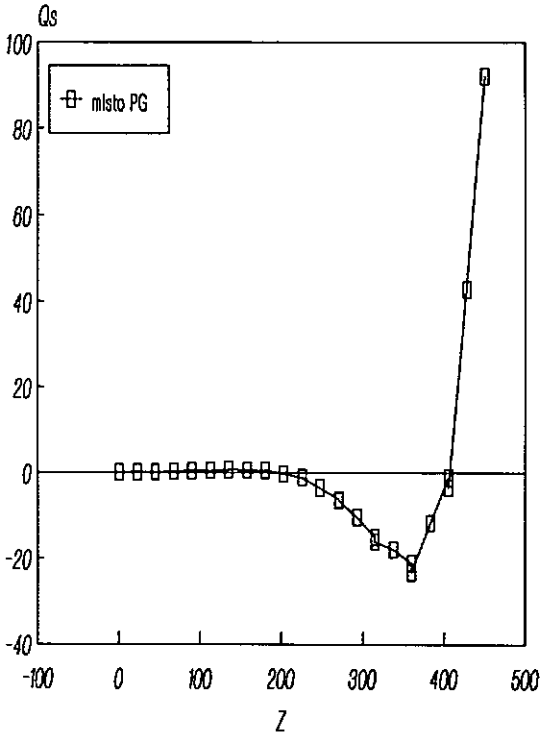
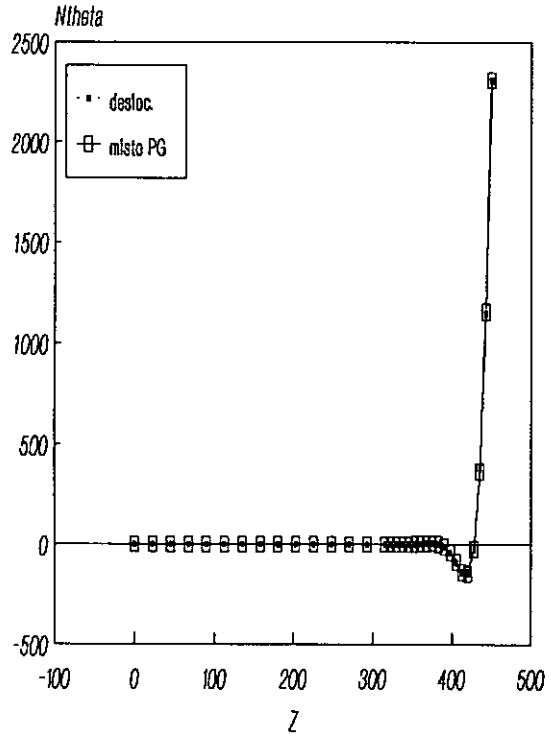
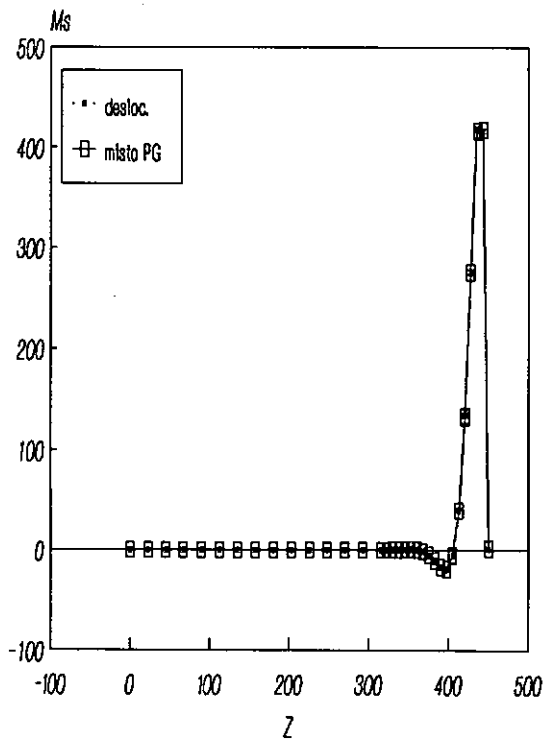
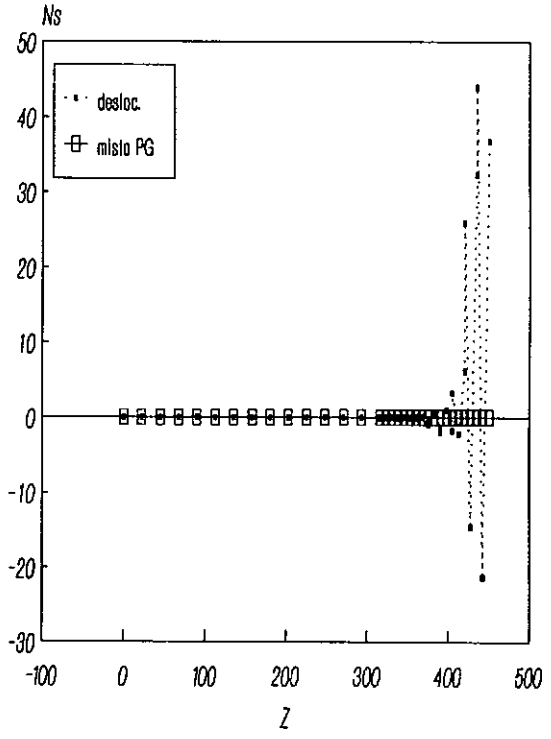


Figura 3.5 - Esforços na casca cilíndrica, $t = 40,0mm$







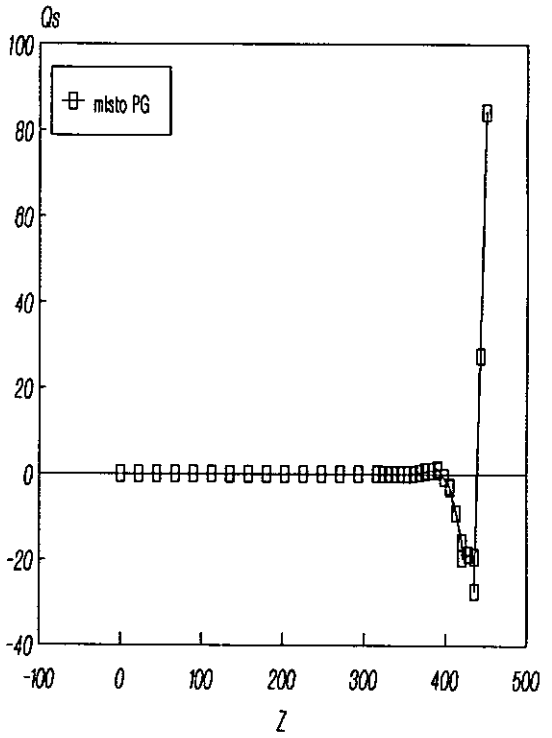


Figura 3.6 - Esforços na casca cilíndrica, $t = 2,0mm$

- Exemplo 3 - Vaso de contenção

O exemplo 3 e o exemplo 4, apresentados a seguir, são de grande interesse da área de tubulações e vasos de pressão. Inicialmente analisamos a estrutura do vaso de contenção da usina nuclear de Angra-2, localizada na cidade de Angra dos Reis no Estado do Rio de Janeiro

Na Figura 3.7, apresentamos os dados de geometria e propriedades dos materiais para o referido vaso. O carregamento considerado é uma pressão uniforme de p=0,53 N/mm^2. A estrutura é modelada como uma casca esférica engastada no

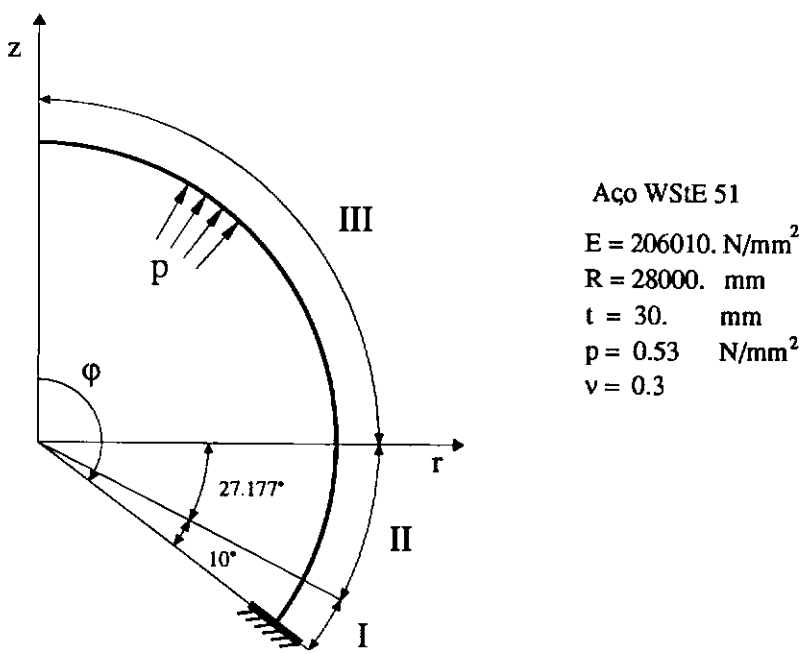


Figura 3.7 - Geometria e propriedades do vaso de contenção

apoio ($\varphi = 127,177^0$). e em sua discretização utilizamos elementos de 3 nós (interpolação quadrática, $k = l = 2$). Devido a presença de camada limite próxima ao engaste, optamos por fazer uma distribuição de elementos igualmente espaçados,

em três regiões, assim dispostos: 20 elementos na região I, 10 elementos na região II e 10 elementos na região III. Como nas regiões II e III aparecem somente esforços de membrana ($N_\theta = N_s = pR/2$), apresentamos, Figura 3.8, apenas os esforços na região I. Na formulação mista adotamos $\delta_1 = 1,0$ e $\delta_4 = 10,0$; sendo os demais deltas nulos. Observamos que δ_2 e δ_5 poderiam ter valores quaisquer visto que estão associados aos resíduos de equações que envolvem componentes que se anulam no caso de carregamento axissimétrico.

Notamos que os resultados são praticamente idênticos para ambos os métodos com exceção da componente de membrana N_s que na formulação em deslocamento apresenta oscilações espúrias .

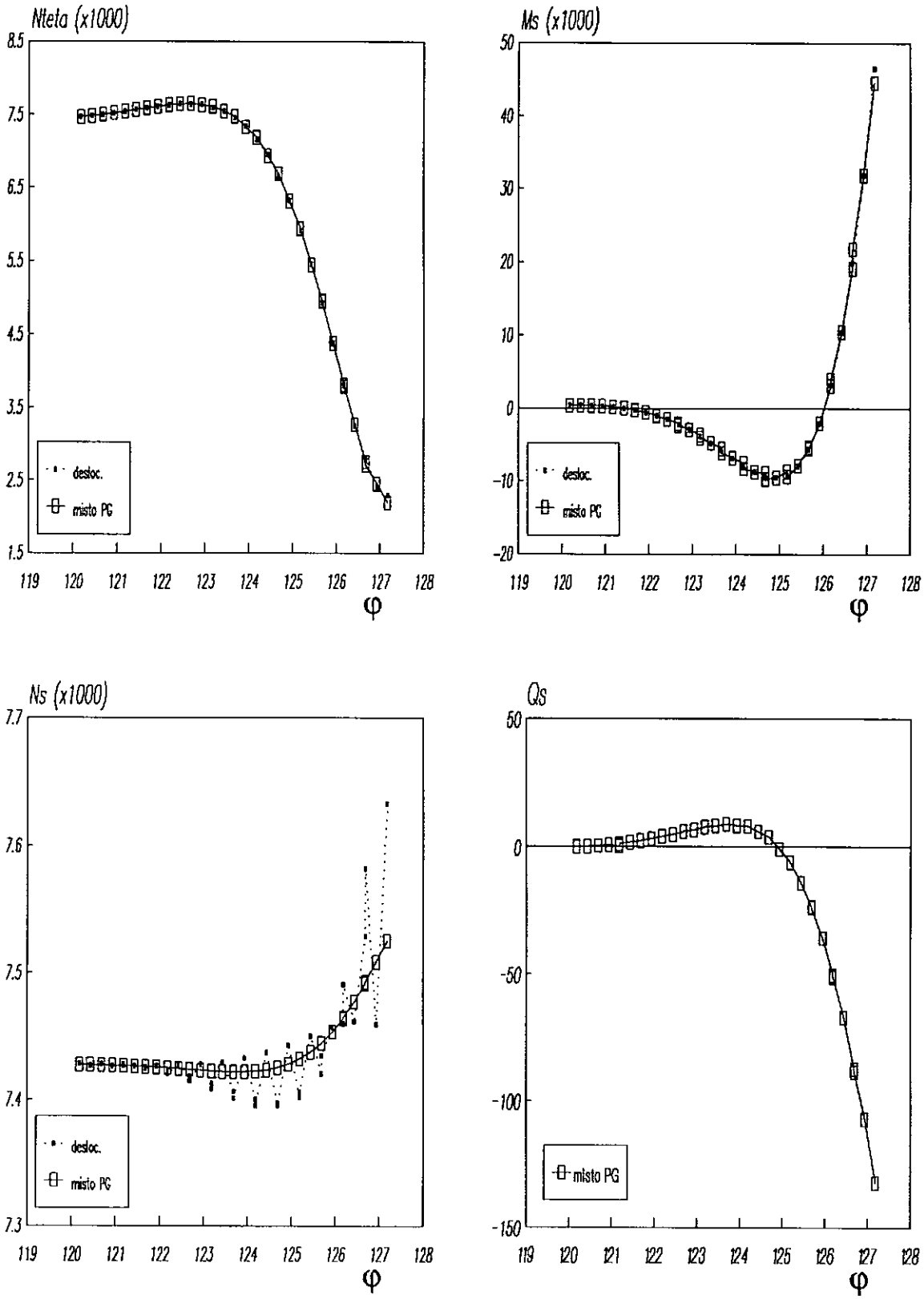


Figura 3.8 - Esforços na região I do vaso de contenção

- Exemplo 4 - Bocal DN290/38

Quando da análise de tensões de vaso de contenção, acima citado, além das regiões vizinhas aos apoios, também ocorrem concentração de tensões nos bocais, que são locais onde tubulações interceptam esta estrutura. Uma análise detalhada desses bocais é encontrada em LOULA, TAVARES, JOSPIN E TOLEDO [1983]. Fazemos aqui uma análise de um destes bocais, denominado DN 290/38. Suas características estão descritas na Figura 3.9, sendo que neste caso também utilizamos elementos de 3 nós (interpolação quadrática, $k = l = 2$). São distribuídos elementos igualmente espaçados como segue: 6 elementos na região I, 7 elementos na região II e 4 elementos na região III. Os valores fixados para os deltas são idênticos aos do exemplo 3. Avaliamos os resultados para três tipos diferentes de cargas, representadas na Figura 3.9 por F_1, F_2 e p, uniformemente distribuídas em θ. Os esforços na região I para cada tipo de carregamento estão mostrados na Figuras 3.10 a 3.12. Neste caso, para todos os tipos de carga, as respostas das duas formulações se assemelham exceto para N_s que, como no exemplo anterior, apresenta oscilações espúrias para a formulação em deslocamento.

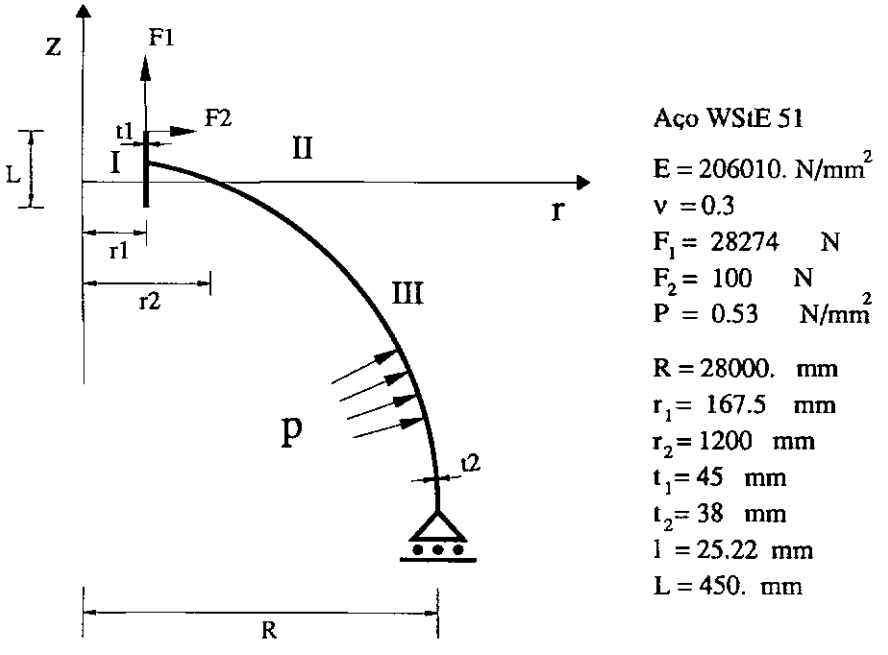


Figura 3.9 - Geometria e propriedades do bocal DN 290/38

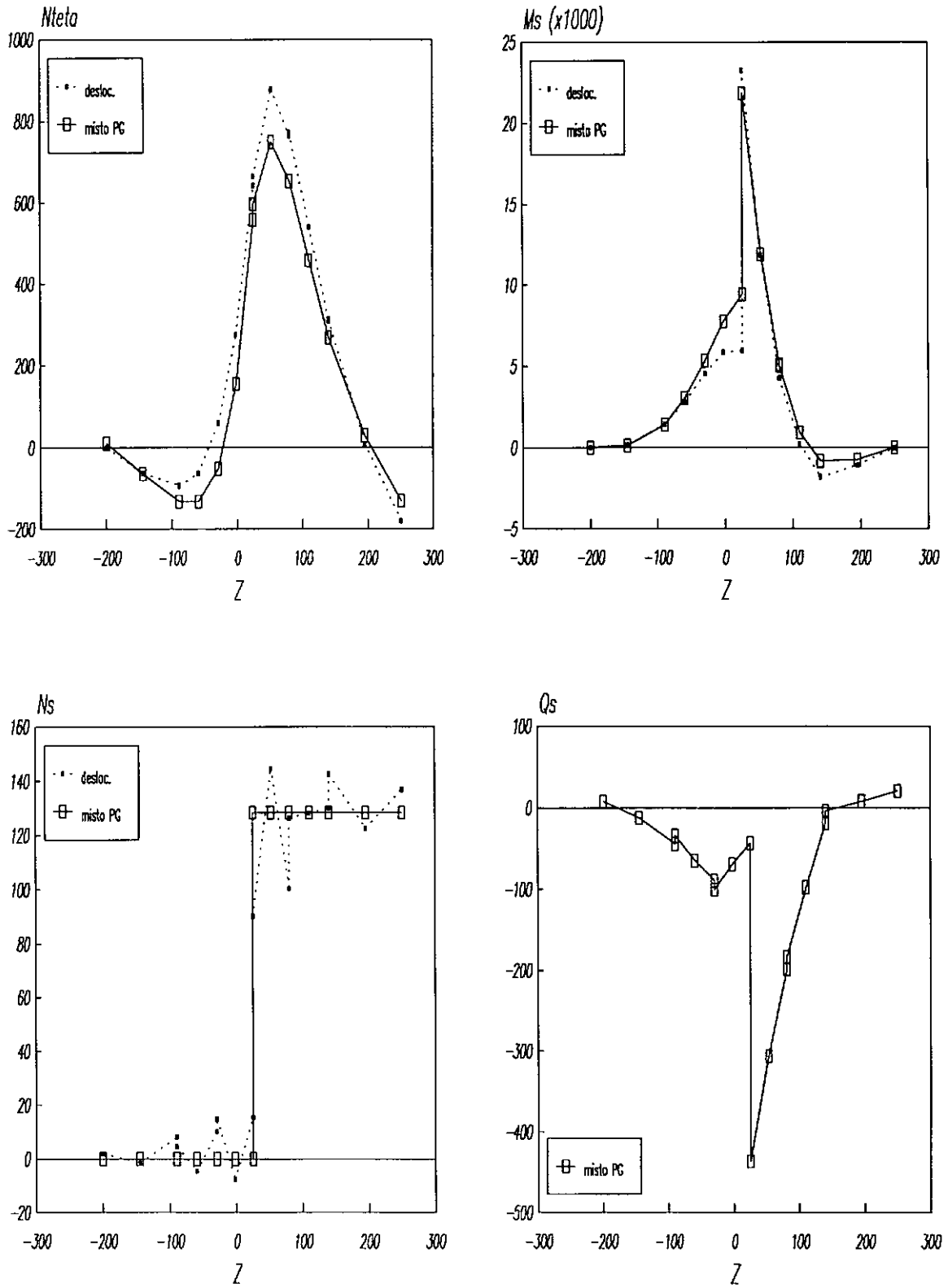
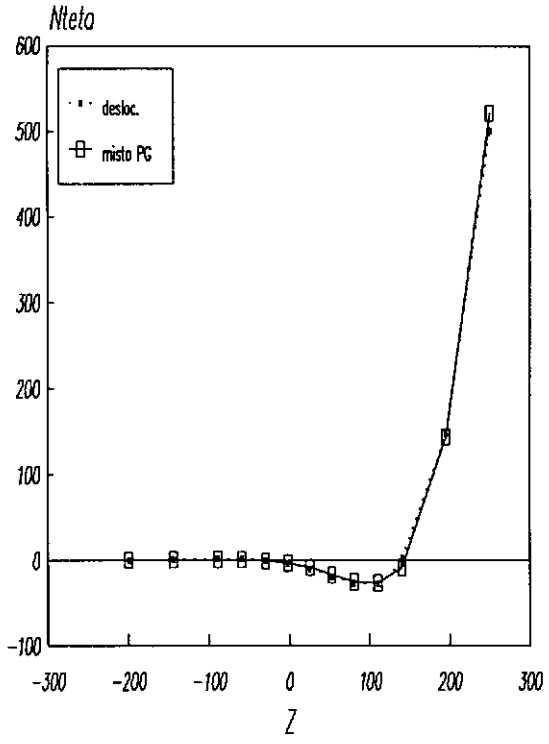
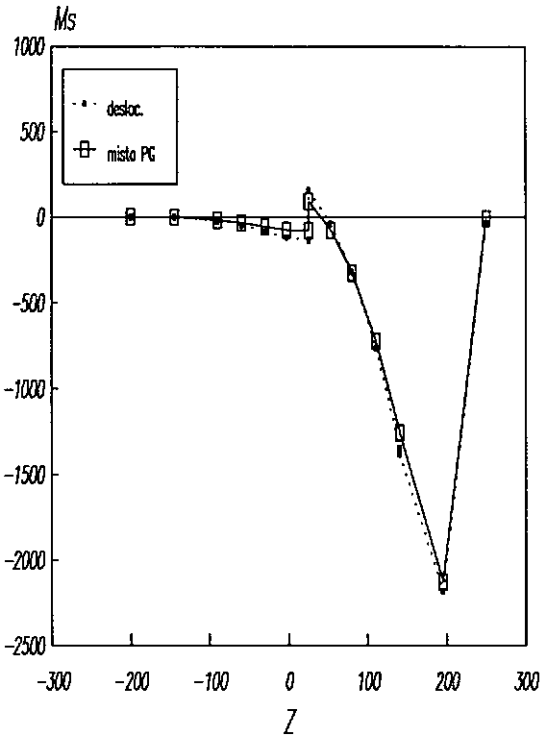
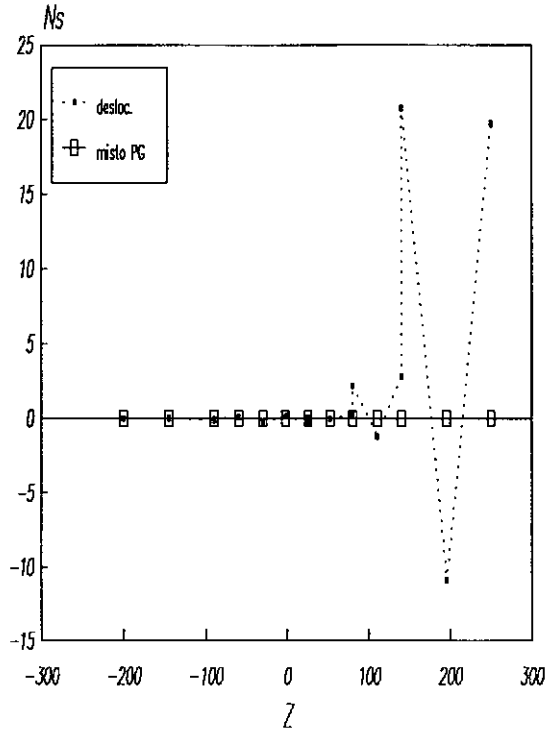


Figura 3.10 - Esforços no bocal DN 290/38, carga F_1, Região I







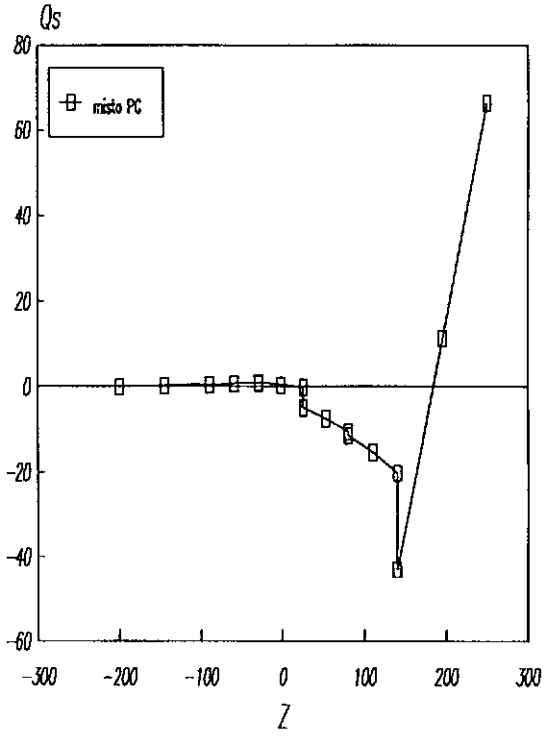
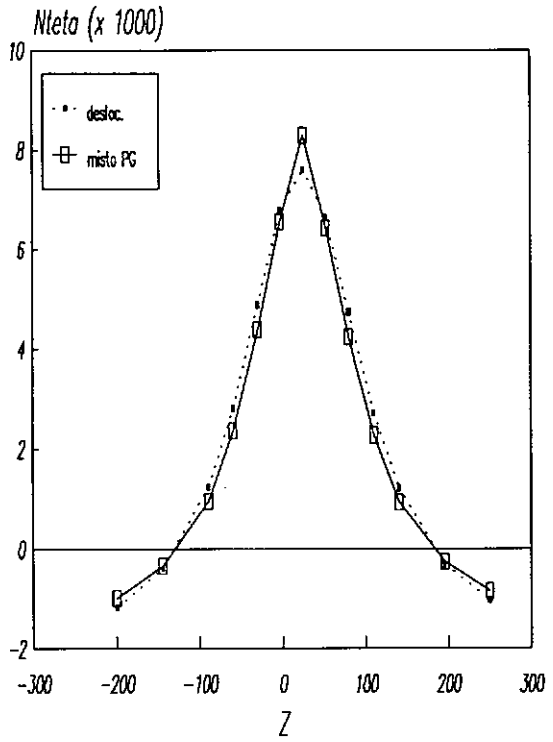
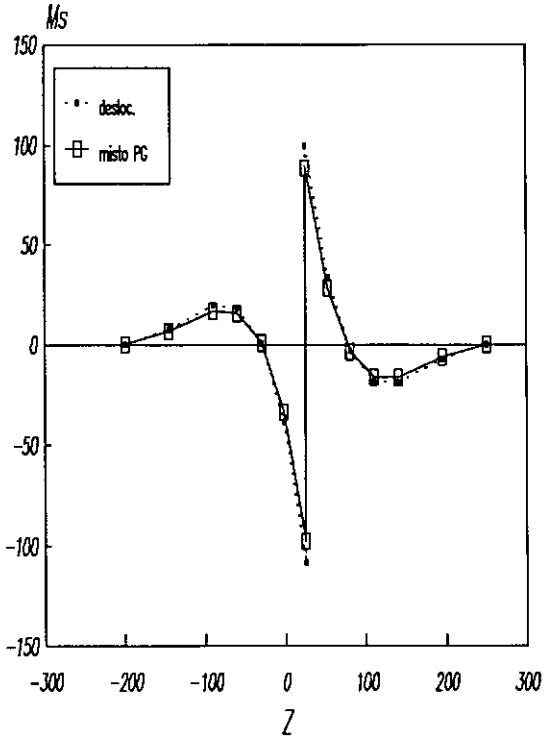
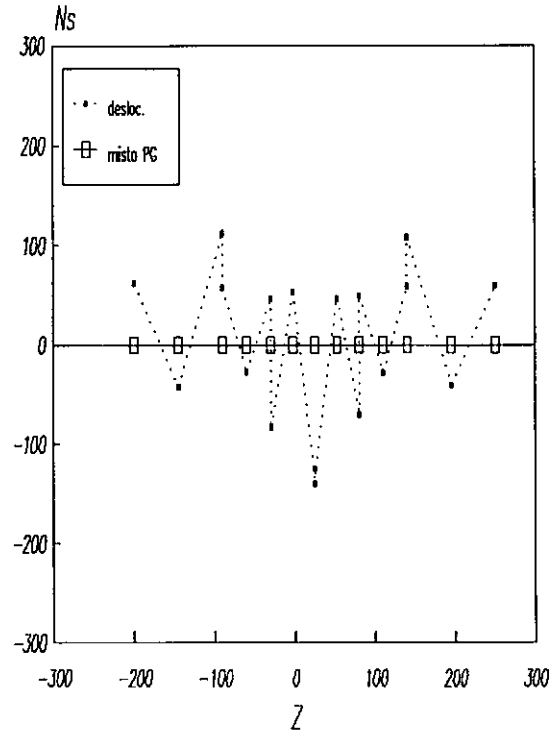


Figura 3.11 - Esforços no bocal DN 290/38, carga F_2, Região I







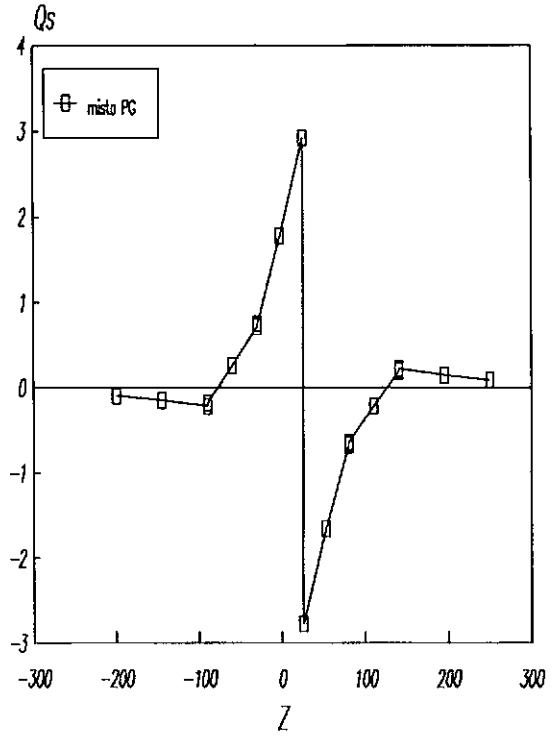


Figura 3.12 - Esforços no bocal DN 290/38, carga P, Região I

- Exemplo 5 - Casca cilíndrca com carga não axissimtrica

Por último analisamos uma casca cilíndrica, de comprimento $L = 3600mm$, raio $R = 1600mm$, espessura $t = 160mm$, módulo de Young $E = 2,06 \times 10^5 N/mm^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$; engastada na extremidade $s = 0,0\,(u_r = u_\theta = u_z = \beta_s = \beta_\theta = 0,0)$ e sujeita a uma força cortante na extremidade $s = L$ $(Q_s = 100\cos\theta, N_{s\theta} = -100\text{sen}\theta)$, como pode ser visto na Figura 3.13.

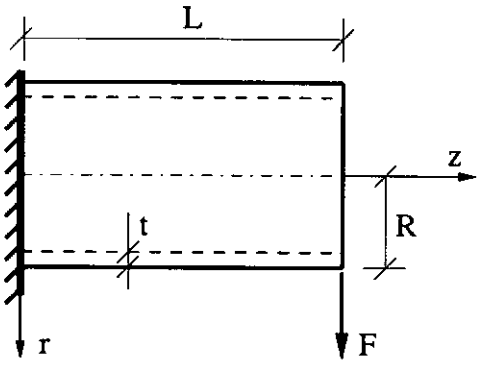


Figura 3.13 - Geometria do cilindro sob ação de força cortante

Este exemplo é um caso particular de carregamento dependente de θ, que pode ser expandido em série de Fourier, da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_M(s,\theta) = \sum_{m=0}^{M} (\mathbf{f}_m^s(s,\theta) + \mathbf{f}_m^a(s,\theta)) \ . \qquad \text{(III.49)}$$

Consequentemente, podemos também expandir os deslocamentos e esforços nas séries:

$$\mathbf{u}_M(s,\theta) = \sum_{m=0}^{M} (\mathbf{u}_m^s(s,\theta) + \mathbf{u}_m^a(s,\theta)) \ , \qquad \text{(III.50)}$$

$$\mathbf{N}_M(s,\theta) = \sum_{m=0}^{M} (\mathbf{N}_m^s(s,\theta) + \mathbf{N}_m^a(s,\theta)) \ , \qquad \text{(III.51)}$$

onde os superescritos s e a representam a parte simétrica e anti-simétrica, respectivamente da expansão em θ, e

$$\mathbf{u}_m^s(s,\theta) = \{u_r^s(s)\cos m\theta, u_z^s(s)\cos m\theta, u_\theta^s(s)\text{sen } m\theta, \beta_s^s(s)\cos m\theta, \beta_\theta^s(s)\text{sen } m\theta\}^T \tag{III.52}$$

$$\mathbf{u}_m^a(s,\theta) = \{u_r^a(s)\text{sen } m\theta, u_z^a(s)\text{sen } m\theta, u_\theta^a(s)\cos m\theta, \beta_s^a(s)\text{sen } m\theta, \beta_\theta^a(s)\cos m\theta\}^T \tag{III.53}$$

$$\mathbf{N}_m^s(s,\theta) = \{N_s^s(s)\cos m\theta, N_\theta^s(s)\cos m\theta, N_{s\theta}^s(s)\text{sen } m\theta, Q_s^s(s)\cos m\theta,$$
$$Q_\theta^s(s)\text{sen } m\theta, M_s^s(s)\cos m\theta, M_\theta^s(s)\cos m\theta, M_{s\theta}^s(s)\text{sen } m\theta\}^T \ , \tag{III.54}$$

$$\mathbf{N}_m^a(s,\theta) = \{N_s^a(s)\text{sen } m\theta, N_\theta^a(s)\text{sen } m\theta, N_{s\theta}^a(s)\cos m\theta, Q_s^a(s)\text{sen } m\theta,$$
$$Q_\theta^a(s)\cos m\theta, M_s^a(s)\text{sen } m\theta, M_\theta^a(s)\text{sen } m\theta, M_{s\theta}^a(s)\cos m\theta\}^T \ , \tag{III.55}$$

$$\mathbf{f}_m^s(s,\theta) = \{f_r^s(s)\cos m\theta, f_z^s(s)\cos m\theta, f_\theta^s(s)\text{sen } m\theta\}^T \ , \tag{III.56}$$

$$\mathbf{f}_m^a(s,\theta) = \{f_r^a(s)\text{sen } m\theta, f_z^a(s)\text{sen } m\theta, f_\theta^a(s)\cos m\theta\}^T \ . \tag{III.57}$$

Neste caso resolvemos o sistema (III.44) e (III.45) para cada harmônico separadamente e superpomos o efeito de cada um para cada seção θ que se deseja a solução. Com relação à discretização, utilizamos, neste exemplo, 25 elementos de dois nós (interpolação linear, $k = l = 1$). Na Figura 3.14 temos as amplitudes dos esforços de cisalhamento Q_s, $N_{s\theta}$ e o momento M_s ao longo de z, obtidos com as formulações mistas de Galerkin ($k = l = 1$) e Petrov-Galerkin ($k = l = 1$), ($\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1,0$ e $\delta_4 = \delta_5 = 10,0$) com elementos de dois nós. Observamos a instabilidade ocorrida em Q_s com a formulação de Galerkin e como se recuperou a estabilidade pela ativação dos deltas, na formulação de Petrov-Galerkin.

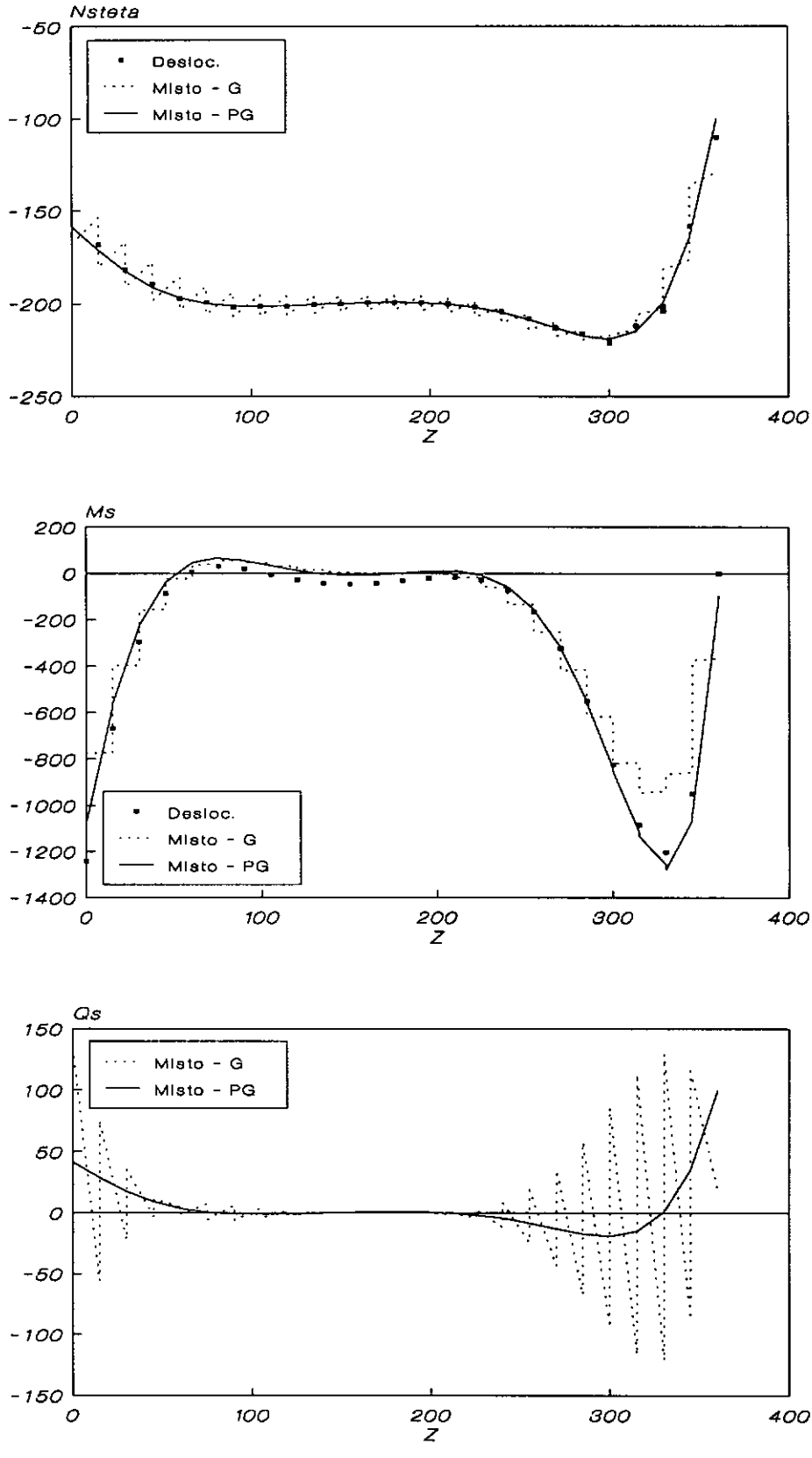


Figura 3.14 - Esforços no cilindro sob ação de força cortante

Os resultados apresentados neste capítulo confirmam o bom desempenho da nova formulação mista estudada. Utilizando elementos de igual ordem de interpolação para o campo de deslocamentos e de esforços, obtemos aproximações estáveis e mais precisas para o campo de esforços, o que não ocorre para as formulações de Galerkin, com a qual fizemos nossas comparações.

Na determinação da resposta de cascas delgadas, pelo método dos elementos finitos, é usual a utilização de malhas não-uniformes, como as empregadas nos exemplos do vaso de contenção e do cilindro delgado. A concentração de elementos próximo a regiões de camadas limites visa a redução do erro de aproximação, que nestes locais são maiores do que nos demais. Surge a questão: **Qual seria a malha ideal para ser empregada nestes casos?**

Ultimamente inúmeros estudos, em diversas áreas, têm sido feitos no sentido de se obter malhas adaptadas à solução, ou seja, malhas não-uniformes projetadas levando em consideração algum critério de otimização. No próximo capítulo apresentamos alguns estudos para obtenção automática de malhas adaptativas, para o caso da casca cilíndrica, utilizando estimadores de erro a posteriori.

CAPÍTULO IV

MALHAS ADAPTATIVAS

IV.1 Introdução

A análise de resultados de programas de elementos finitos e posteriores definições de sucessivos modelos aproximados, seja alterando o número de elementos, seja modificando posições de nós ou ainda alterando o grau do polinômio de interpolação, é uma tarefa de rotina. Nestes procedimentos obtemos diferentes aproximações e a comparação entre elas nos permite caracterizar a qualidade das soluções obtidas para o problema em questão. Esta tarefa é difícil e trabalhosa exigindo muita experiência do analista.

Estimativas de erro a priori, baseadas nas propriedades da solução do problema de valor de contorno, na teoria de interpolação e nos métodos de discretização, com malhas uniformes e quase-uniformes, nos permite prever o comportamento assintótico do erro com o número de graus de liberdade. Estas estimativas, contudo, fornecem pouca, ou nenhuma, informação sobre a qualidade da solução obtida por uma particular discretização.

Alternativamente, obtida uma primeira aproximação, estimadores de erro a posteriori, conforme introduzidos por BABUŠKA E RHEINBOLDT [1978], podem ser utilizados para análise da aproximação obtida. A partir daí podemos construir novas bases para o espaço de aproximações de uma maneira otimizada através de alguma estratégia adaptativa. Extensa pesquisa bibliográfica sobre este assunto pode ser encontrada em NOOR E BABUŠKA [1987].

O que se procura nestes casos é a construção de uma malha ótima, isto é, aquela, entre tantas outras admissíveis, que, para determinado número de graus de liberdade, minimize o erro, ou alguma medida de erro, já que para cada medida de erro utilizada temos uma malha ótima diferente. Em processos adaptativos, no entanto, utilizamos o conceito de malha *quase-ótima* que é aquela que apresenta uma distribuição uniforme dos indicadores de erro, que são medidas de erro calculados no domínio de cada elemento. Em KIKUCHI E TORIGAKI [1987] estes aspectos são abordados de maneira detalhada.

Uma nova base de aproximação para a solução do problema pode ser obtida de vários modos. O desenvolvimento de técnicas de malhas adaptativas popularizou os seguintes termos para denotar os diferentes modos de refinamento: *método h*, *método p* e *método r*. Refere-se ao termo *método h*, estruturado ou não, àquele em que se refina a malha, ou seja, diminui-se o tamanho do elemento. Diz-se que um refinamento h é estruturado se a nova malha é obtida por subdivisão dos elementos da malha anterior. Denomina-se *método p* àquele em que se aumenta o grau do polinômio de interpolação mantendo-se a malha fixa. O *método r* faz somente uma rearrumação dos nós da malha não introduzindo graus de liberdade adicionais. Naturalmente é possível utilizar-se de diferentes combinações destes métodos.

IV.2 Estimadores de Erro a Posteriori

O interesse em obter malhas adaptadas às características de cada problema específico fez crescer o estudo de estimadores de erro a posteriori e segundo ZHU E ZIENKIEWICZ [1989] podem ser classificados em três tipos: de resíduo, de pós-processamento e interpolação.

Neste trabalho utilizamos o de pós-processamento devido aos avanços al-

cançados inicialmente por ZIENKIEWICZ E ZHU [1987], para problemas de elasticidade plana e posteriormente pelos resultados obtidos por ZIENKIEWICZ E ZHU [1989], ZIENKIEWICZ, ZHU E GONG [1989], HOLZER, RANK E WERNER [1990] e YUNUS, PAWLAK E WHEELER [1990] para aplicações em placas e cascas.

Tal estimador está baseado na medida do erro em termos dos esforços, ou seja:

$$e = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \tag{IV.1}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é a solução exata e $\boldsymbol{\sigma}_h$ a solução de elementos finitos. Devido a impossibilidade de obtermos a expressão da solução exata para todos os problemas de interesse, estimamos o erro por

$$e \approx e^* = \boldsymbol{\sigma}_h^* - \boldsymbol{\sigma}_h \tag{IV.2}$$

com $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ um campo de esforços contínuos entre elementos, interpolado por $\varphi \in \mathbf{V}_h$, isto é:

$$\boldsymbol{\sigma}_h^* = \varphi \overline{\boldsymbol{\sigma}}_h^* \ . \tag{IV.3}$$

sendo $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_h^*$ os valores nodais dos esforços, obtidos por pós-processamento de $\boldsymbol{\sigma}_h$ satisfazendo a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} P(\boldsymbol{\sigma}_h^* - \boldsymbol{\sigma}_h)\, d\Omega \ = \ 0 \ . \tag{IV.4}$$

Diferentes escolhas da função P podem ser feitas implicando em diferentes suavizações para $\boldsymbol{\sigma}_h$. Para $P = \varphi^T$, temos $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ como uma projeção de $\boldsymbol{\sigma}_h$ sobre o espaço V_h. Entretanto, a simples média aritmética dos esforços que concorrem em cada nó, obtida quando escolhemos $P = \delta_i$, sendo δ_i a função delta de Dirac, proporciona bons resultados como mostra os resultados numéricos mais adiante.

Devido à dificuldade de se trabalhar com estratégias de refinamento que satisfaçam, simultaneamente, todas as componentes do campo dos esforços utiliza-

mos duas medidas para estimar o erro a posteriori. A primeira dada por:

$$\xi^2 = \|e^*\|^2 = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}_h^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^T D^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_h^* - \boldsymbol{\sigma}_h)\, d\Omega \ , \tag{IV.5}$$

baseada na expressão da energia de deformação de corpos elásticos, extraída do funcional de Hellinger-Reissner (equação (III.18)), e adotada no refinamento do método h. A segunda dada por:

$$\xi_j^2 = \|e^*\|_j^2 = \int_\Omega (\sigma_{hj}^* - \sigma_{hj})^2\, d\Omega \ , j = 1, \cdots, nesf \ , \tag{IV.6}$$

que é o erro de cada componente medido na norma do L_2, utilizada no refinamento do método r.

A questão relevante na escolha de um estimador de erro a posteriori é a capacidade deste em representar o comportamento do erro real, proporcionando uma estratégia adaptativa eficiente. Neste sentido, visando avaliar a eficiência dos estimadores de erro a posteriori, BABUŠKA [1986] define um *índice de eficiência* dado por:

$$\theta = \frac{\xi}{\|e\|} \ , \tag{IV.7}$$

onde ξ é o estimador de erro a posteriori e $\|e\|$ é o erro real. Assim o estimador é dito assintoticamente correto se $\theta \to 1$ quando $h \to 0$.

IV.3 Estratégias de Refinamento

De modo a determinar as áreas de maior erro, calculamos o estimador de erro a posteriori como uma somatória dos estimadores em cada elemento, ou seja:

$$\xi^2 = \sum_{e=1}^{ne} \chi_e^2 \ , \tag{IV.8}$$

sendo χ_e os indicadores de erro, isto é, as estimativas de erro calculada a partir da expressões (IV.5) e (IV.6) no domínio dos elementos.

No programa de elementos finitos utilizado, resolvemos o sistema de equações pelo método direto, o que equivale dizer que na obtenção de um solução não aproveitamos nenhuma informação de iteração anterior. A seguir detalhamos as estratégias de refinamento implementadas nos métodos h, r e p.

IV.3 Método h

O objetivo desta estratégia é aumentar a densidade de nós nas regiões de singularidade. A cada iteração calculamos uma nova malha subdividindo elementos da malha original. Para o problema em uma dimensão, como no nosso caso, o critério de refinamento é simples, cada elemento, de comprimento h_e, em que o indicador estiver acima de um nível especificado, dará origem a dois novos elementos de iguais tamanhos ($\frac{h_e}{2}$). O número de refinamentos é um dado inicial.

A cada refinamento devemos fazer uma avaliação da solução obtida. Uma boa medida da qualidade da solução pode ser dada pela porcentagem relativa entre as normas do erro e da solução:

$$\vartheta = \frac{\|e\|}{\|\sigma\|} \ . \tag{IV.9}$$

Uma aproximação para este valor pode ser obtida por,

$$\overline{\vartheta} = \left(\frac{\xi^2}{\|\sigma_h\|^2 + \xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{IV.10}$$

Utilizamos ϑ como um dado inicial em que definimos a porcentagem de erro que desejamos na solução aproximada.

De acordo com a proposta de BABUŠKA [1983], dois patamares para o refinamento possibilitam uma maior eficiência em estratégias adaptativas. A cada iteração avaliamos os dois valores e tomamos o menor deles. Desta forma o refinamento se dá segundo a seguinte estratégia:

$$cr_1 = \frac{\xi}{ne} \tag{IV.11}$$

$$cr_2 = \vartheta \left(\frac{\|\sigma_h\|^2 + \xi^2}{ne} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{IV.12}$$

$$cr = min(cr_1, cr_2) \tag{IV.13}$$

dividir os elementos para os quais $\chi_e \geq cr$.

Os dois valores adotados são relativamente fáceis de serem calculados. O primeiro, cr_1, é simplesmente uma média aritmética dos indicadores de erro. No segundo, cr_2, admitimos o erro igualmente distribuído em todo o domínio e através do valor fixado para ϑ, calculamos a contribuição que cada elemento deveria ter para atingir a porcentagem de erro requerida. Nos exemplos apresentados utilizamos $\vartheta = 5\%$.

IV.3.2 Método r

Mantendo constante o número de graus de liberdade da malha original, o *método r* tem como objetivo fazer uma rearrumação nas posições dos nós, procurando posições tais que o erro se torne igualmente distribuído entre os elementos. Desta forma reduzimos o tamanho dos elementos de maior erro, aumentando, assim, a densidade de nós nas regiões de singularidade.

Pelo fato de não introduzir nenhum novo grau de liberdade, com o aumento do número de iterações, neste método o erro não tende a zero, mas se estabiliza após um certo número de iterações. A partir daí podem ocorrer pequenas oscilações no cálculo das posições dos nós da nova malha. Este fato poderia ser utilizado para a definição de um critério de parada do refinamento, mas isto não foi feito aqui e adotamos para isto o número de iterações como dado inicial.

Na implementação deste método, adotamos a seguinte estratégia: de posse dos indicadores de erro, χ_e^j, com $j = 1, 2, \cdots, nesf$ e $e = 1, 2, \cdots, ne$, a nova

coordenada de cada nó (exceto os do contorno) será calculada de acordo com o seguinte procedimento:

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{\bar{x}_e\ \chi_e^j\ +\ \bar{x}_{e+1}\ \chi_{e+1}^j}{\chi_e^j + \chi_{e+1}^j}\ ,\ j = 1, \cdots, nesf\ , \tag{IV.14}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{nesf} \sum_{j=1}^{nesf} \bar{\bar{x}}_j\ , \tag{IV.15}$$

$$x^{novo} = x + \varpi(\bar{x} - x)\ , \tag{IV.16}$$

sendo $\bar{\bar{x}}_j$ as coordenadas calculadas a partir da média ponderada, levando em conta somente o esforço j; $\bar{x}_e$ é a coordenada do ponto médio do elemento e; $\bar{x}$ é a média aritmética das coordenadas $\bar{\bar{x}}_j$; x é a coordenada original do nó; x^{novo} é a nova posição do nó; $nesf$ é o número de esforços envolvidos (neste caso $nesf = 5$) e ϖ é denominado fator de amortecimento, semelhante ao utilizado em SILVA, GALEÃO E CARMO [1989], que tem a finalidade de estabilizar este cálculo, impedindo que, entre duas iterações, as novas coordenadas sejam muito afastadas das originais. Uma maneira de minimizar esta instabilidade, no cálculo das novas coordenadas, seria considerar a distribuição do erro em todo o domínio no cálculo das novas coordenadas.

IV.3.3 Método p

Ao contrário dos anteriores, o refinamento tipo p, aqui utilizado, foi realizado de maneira uniforme em toda a extensão do domínio, ou seja, todos os elementos com polinômios de interpolação de mesma ordem. É bom notar que desta maneira algumas áreas estão sujeitas a um refinamento excessivo. A utilização de refinamento hierárquico como em LANDAU E RIBEIRO [1986] pode ser uma boa

alternativa para otimização desta estratégia, bem como a condensação dos graus de liberdade do interior dos elementos.

Utilizamos, neste tipo de refinamento, uma família de elementos lagrangianos de grau 1 até 6. As integrais calculadas numericamente no interior dos elementos utilizam a quadratura de Gauss e o número de pontos de integração foi igual ao número de nós do elemento.

A seguir apresentamos os resultados numéricos obtidos para uma casca cilíndrica utilizando os três métodos descritos anteriormente.

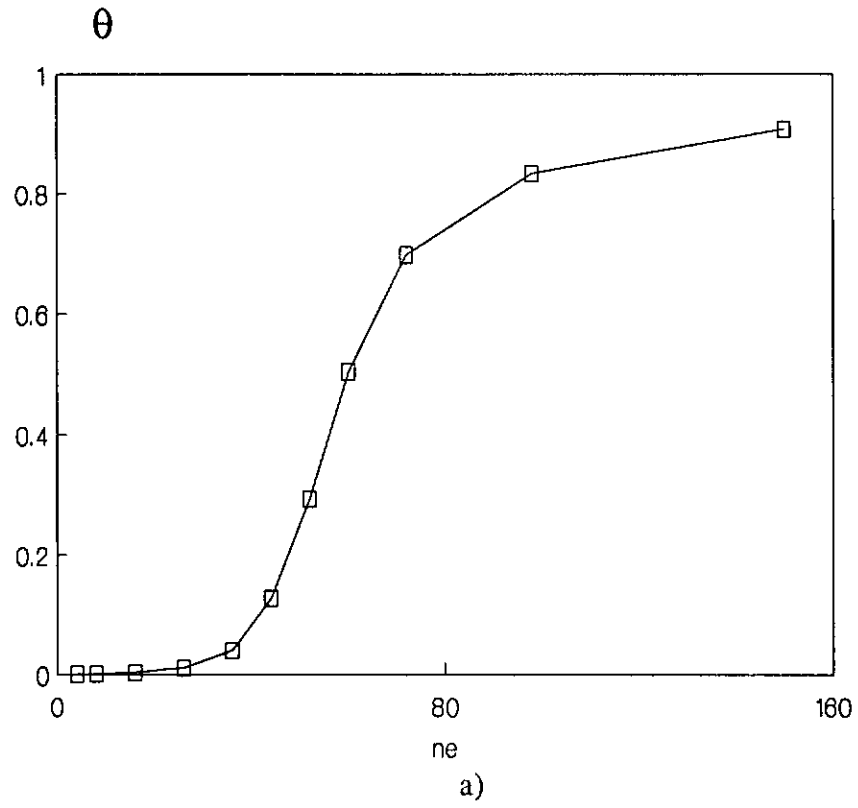
IV.4 Resultados Numéricos

Método h

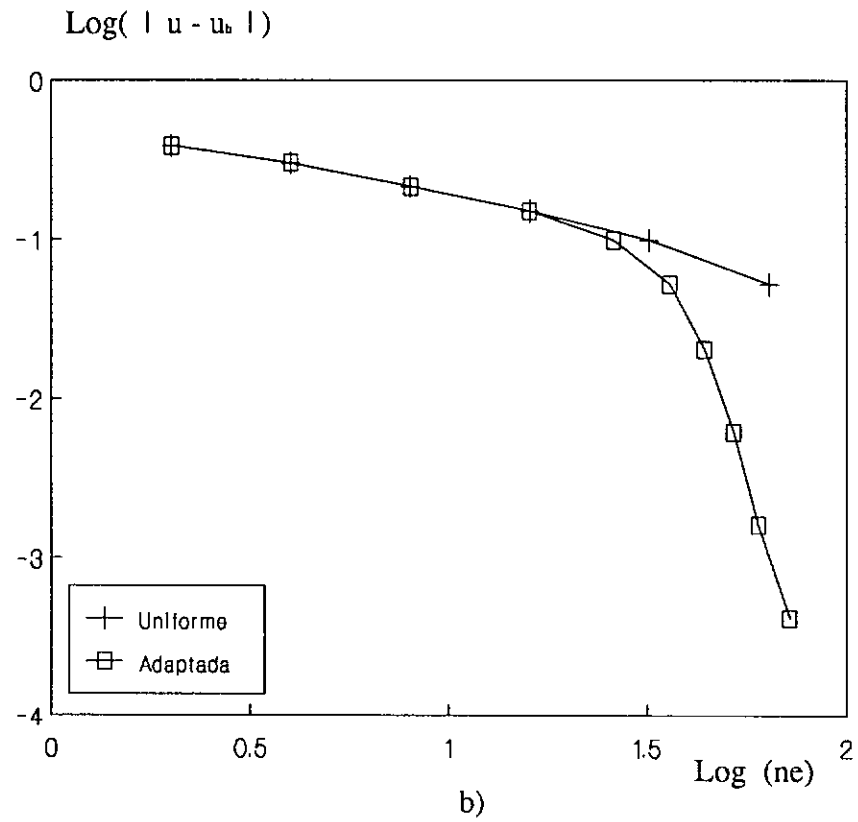
- Problema modelo escalar

Anteriormente à introdução das estratégias auto-adaptativas no problema da casca, experimentos numéricos, com o método h, foram realizados para o problema modelo escalar, dado por (III.14). Neste caso particular o valor de $\boldsymbol{\sigma}_h$ da expressão (IV.4) é substituída pela a derivada da solução u_h e $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ pela média aritmética dos valores nodais da derivada, u_h'.

Os resultados a seguir foram obtidos utilizando $\eta = 10^{-5}$. Na Figura 4.1a apresentamos o comportamento assintótico do estimador de erro, aqui adotado, através do índice de eficiência θ. O que se constata é que este é um bom estimador já que ganhos significativos em precisão são obtidos com a aplicação das estratégias auto-adaptativas, como pode ser confirmado pela Figura 4.1b, que mostra a comparação entre as taxas de convergência utilizando malhas uniformes e malhas adaptativas. A Figura 4.2a, mostra a solução ao longo da metade do domínio, e 4.2b uma ampliação da região de singularidade. A malha de tem 60 elementos, com $h_e < \sqrt{\eta}$, próximo à região de singularidade. É importante notar que, neste

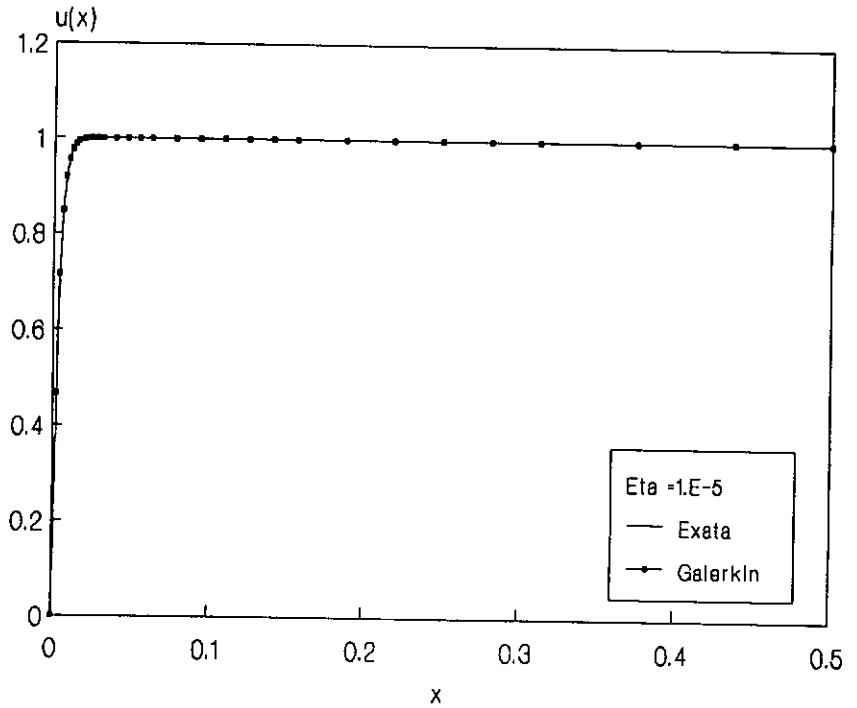


a)

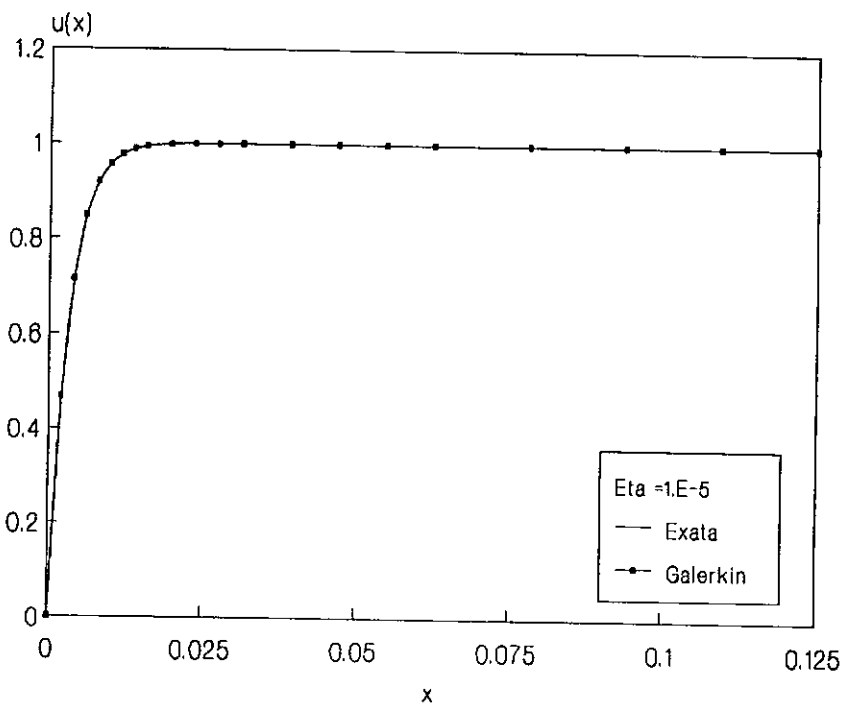


b)

Figura 4.1 - Método h - Problema modelo escalar: a) índice de eficiência, b)taxas de convergência



a)



b)

Figura 4.2 - Método h - Problema modelo escalar: $u(x)$ com malha adaptada

caso, o refinamento não só aumenta a precisão como estabiliza a solução numérica.

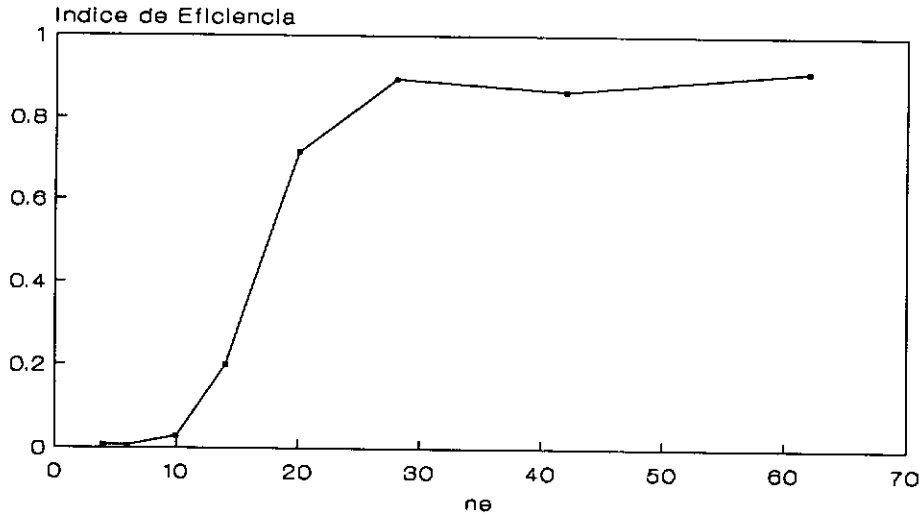
- Casca cilíndrica (forma adimensional)

Apresentamos aqui os resultados para o problema da casca cilíndrica, em sua forma adimensionalizada, com pressão interna, $f_2 = 1,0$ e $\varrho = 1,0$; $\nu = 0,3$ e $\varepsilon^2 = 10^{-6}$, usando aproximações de Petrov-Galerkin em esforços e deslocamentos generalizados. Para estes resultados foram fixados os seguintes valores para os deltas: $\delta_1 = 1,0$; $\delta_2 = 0,001$; e $\delta_3 = 1,0$.

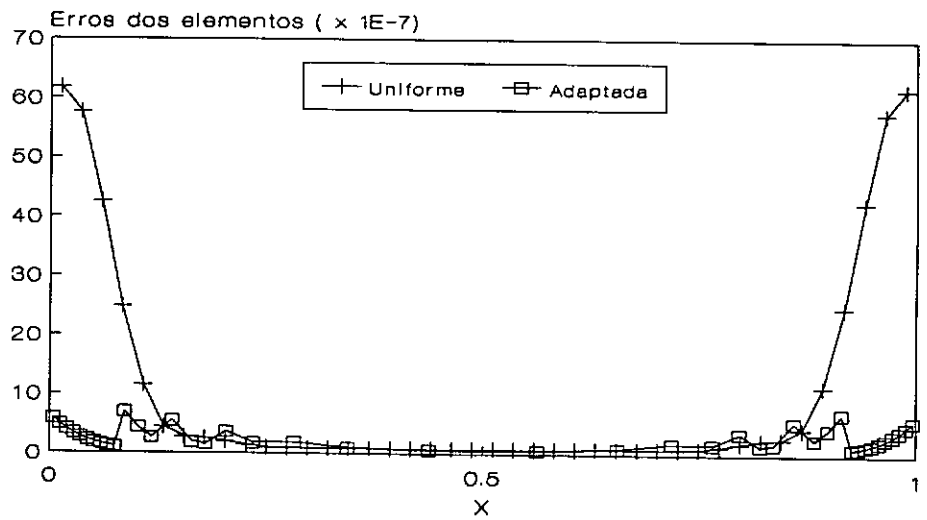
Na Figura 4.3a verifica-se a eficiência do estimador, dado por (IV.5), para o caso da casca. Na Figura 4.3b temos uma comparação do comportamento dos erros no domínio dos elementos, calculados por (IV.5), para uma malha uniforme e outra adaptada, ambas com 42 elementos, evidenciando a tendência a uma uniformização dos erros com a malha adaptada. A Figura 4.3c compara a porcentagem de erro de soluções utilizando malhas uniformes e malhas adaptadas. O desempenho do estimador de erro também pode ser avaliado na Figura 4.4 que mostra a trajetória de uma malha inicial de 4 elementos para 8 iterações do método h. Esta figura evidencia a concentração de elementos próximo aos apoios, onde há presença de camadas limites.

Na Figura 4.5 comparamos o comportamento da componente σ_3, proporcionalao cortante, para uma aproximação de Galerkin instável, G22, e a aproximação com termos de mínimos quadrados, PG22, para a mesma malha. O que se observa é que neste caso o refinamento não resolve o problema de instabilidade do método de Galerkin.

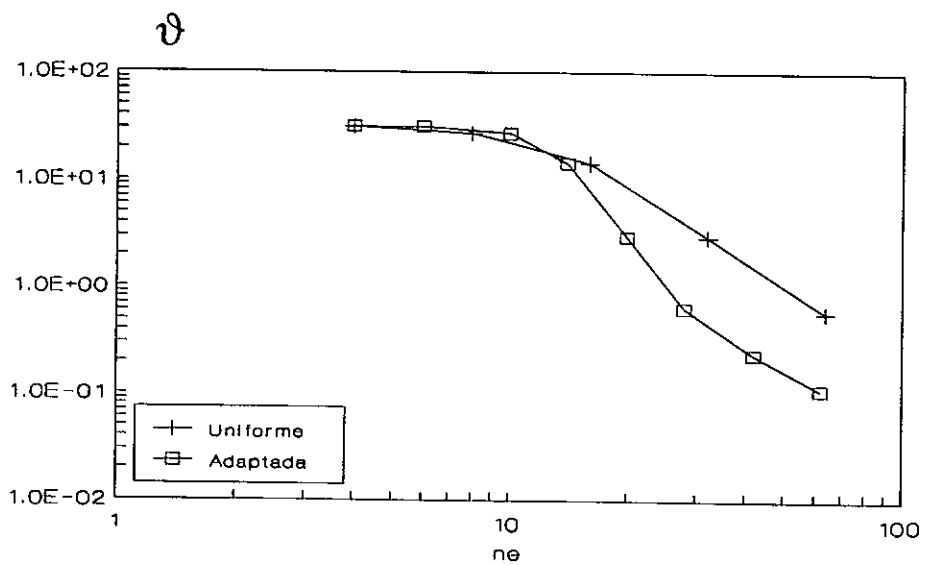
A Figura 4.6 apresenta erros na norma do L_2 para as componentes σ_2, σ_3 e σ_4 proporcionais a N_θ, Q_s e M_s, respectivamente, obtidos com PG22. Observa-se então o ganho em termos de precisão nos resultados correspondentes a malhas adaptativas.



a)



b)



c)

Figura 4.3 - Método h - Casca cilíndrica: a)índice de eficiência, b)erros dos elementos, c)erro relativo

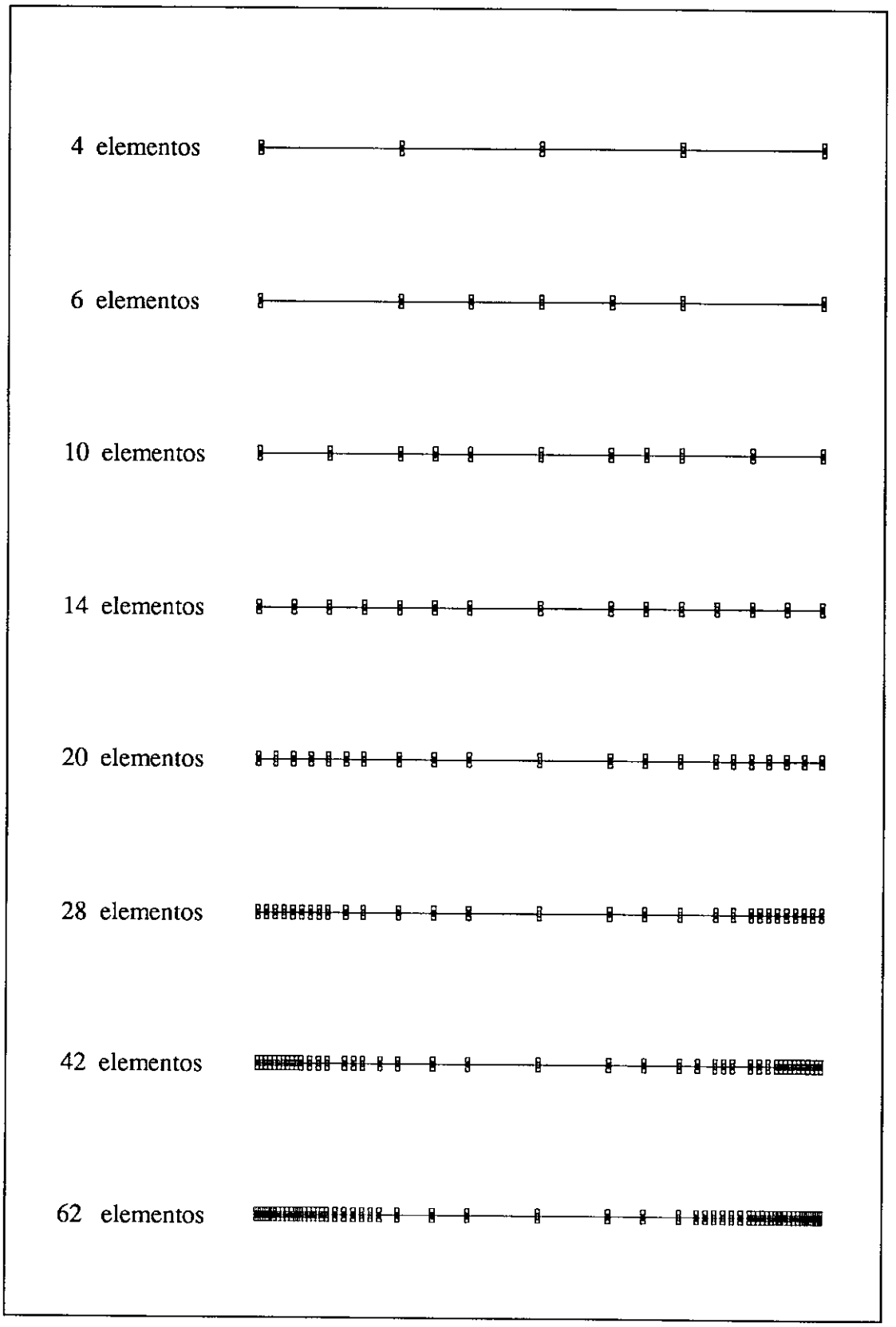
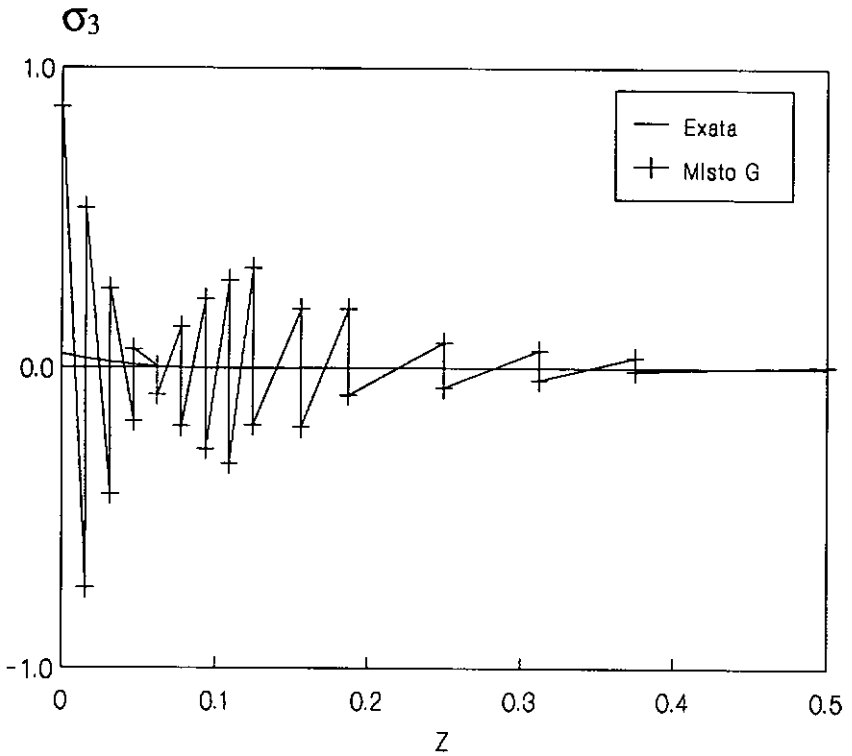
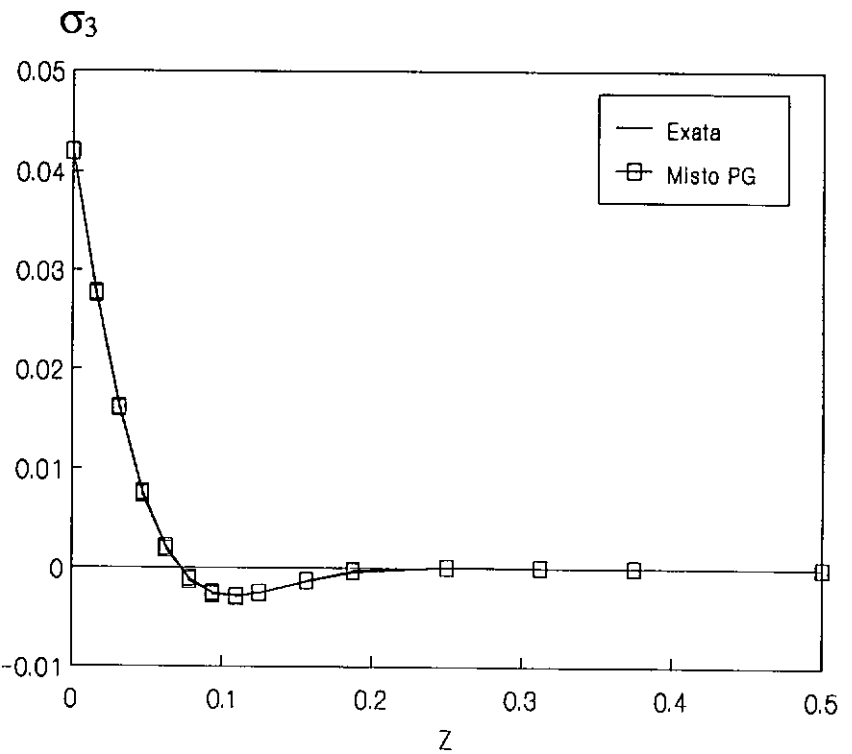


Figura 4.4 - Método h - Casca cilíndrica: trajetória da malha

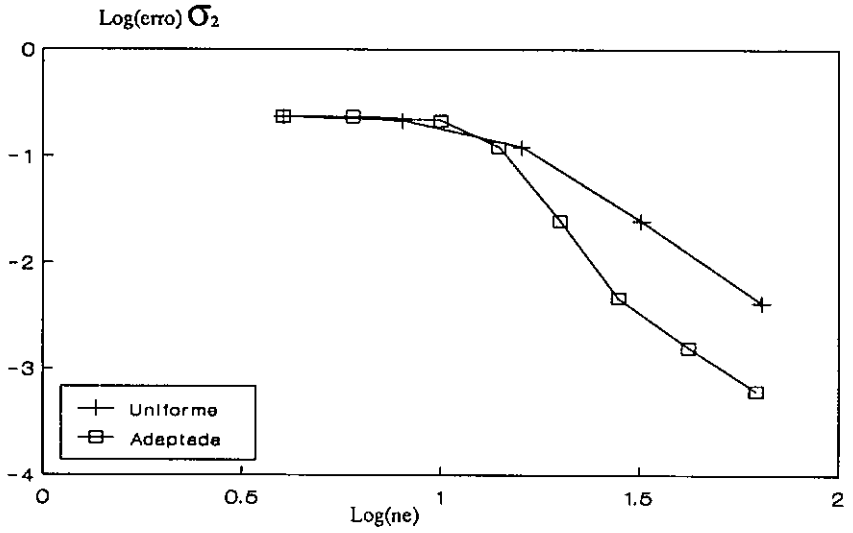


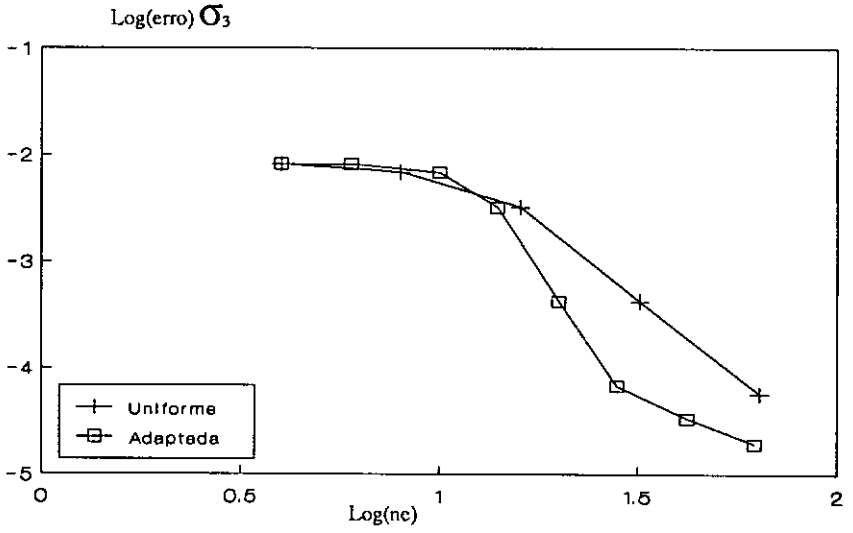
a)



b)

Figura 4.5 - Método h - Casca cilíndrica: componente σ_3





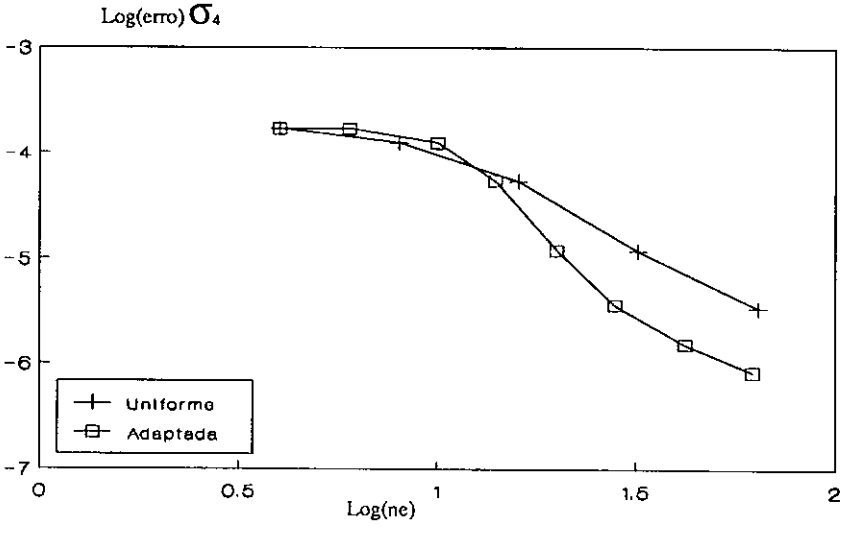


Figura 4.6 - Método h - Casca cilíndrica: taxas de convergência de σ_2, σ_3 e σ_4

Método r

- Casca cilíndrica (forma adimensional)

A Figura 4.7 mostra a tendência de uniformização dos erros no domínio dos elementos das componentes σ_2, σ_3 e σ_4, para uma malha de 32 elementosapós300 iterações.

Na Figura 4.8 temos a trajetória de uma malha de 16 elementos até 50 iterações do método r. Nas últimas iterações não há grandes alterações nas posições dos nós. Este resultado pode ser melhor entendido quando observamos, na Figura 4.9, que mostra a relação entre os erros e o número de iterações, para a mesma malha. A partir da vigésima quinta iteração os valores dos erros praticamente não se alteram. Notamos então que cada discretização requer um valor particular do número de iterações para a qual teremos um decréscimo significativo do erro.

Ainda na Figura 4.9, as diferenças ocorridas nas componentes σ_2, σ_3 e σ_4 ocorrem pela forma como foi definida a estratégia. A malha se adapta mais à componente de maior erro, já que esta tem o maior peso no cálculo das novas coordenadas. Este fato pode ser observado nesta figura, pois a componente σ_2, quetem maior erro, apresenta menores oscilações nos erros durante o refinamento. Tais oscilações podem ser explicadas pela pouca eficiência da estratégia, e poderia ser melhorada se, no cálculo das novas coordenadas, considerássemos a distribuição do erro em todo o domínio e não somente nos elementos vizinhos ao nó em questão, como foi feito.

A Figura 4.10 mostra as taxas de convergência de cada esforço na norma do L_2 e concluímos que, para soluções com camadas limites, a distribuição adaptativa dos nós tem um papel importante na precisão. Resultados mais precisos, foram obtidos em todas as componentes do campo dos esforços, para malhas adaptadas. Para a malha de quatro elementos, devido a imprecisão no cálculo dos indicadores,

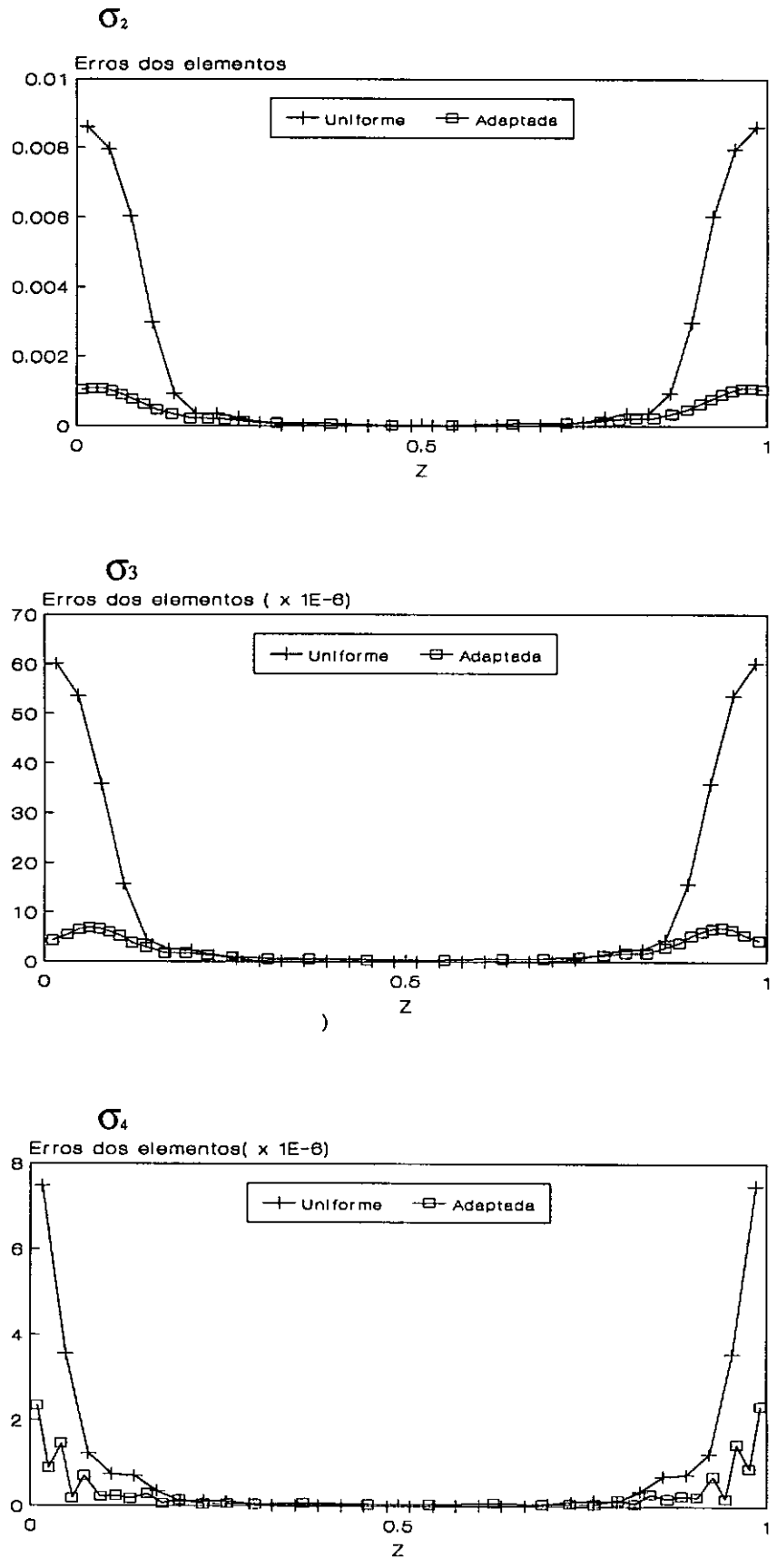


Figura 4.7 - Método r : distribuição de erros por elementos (32 elementos)

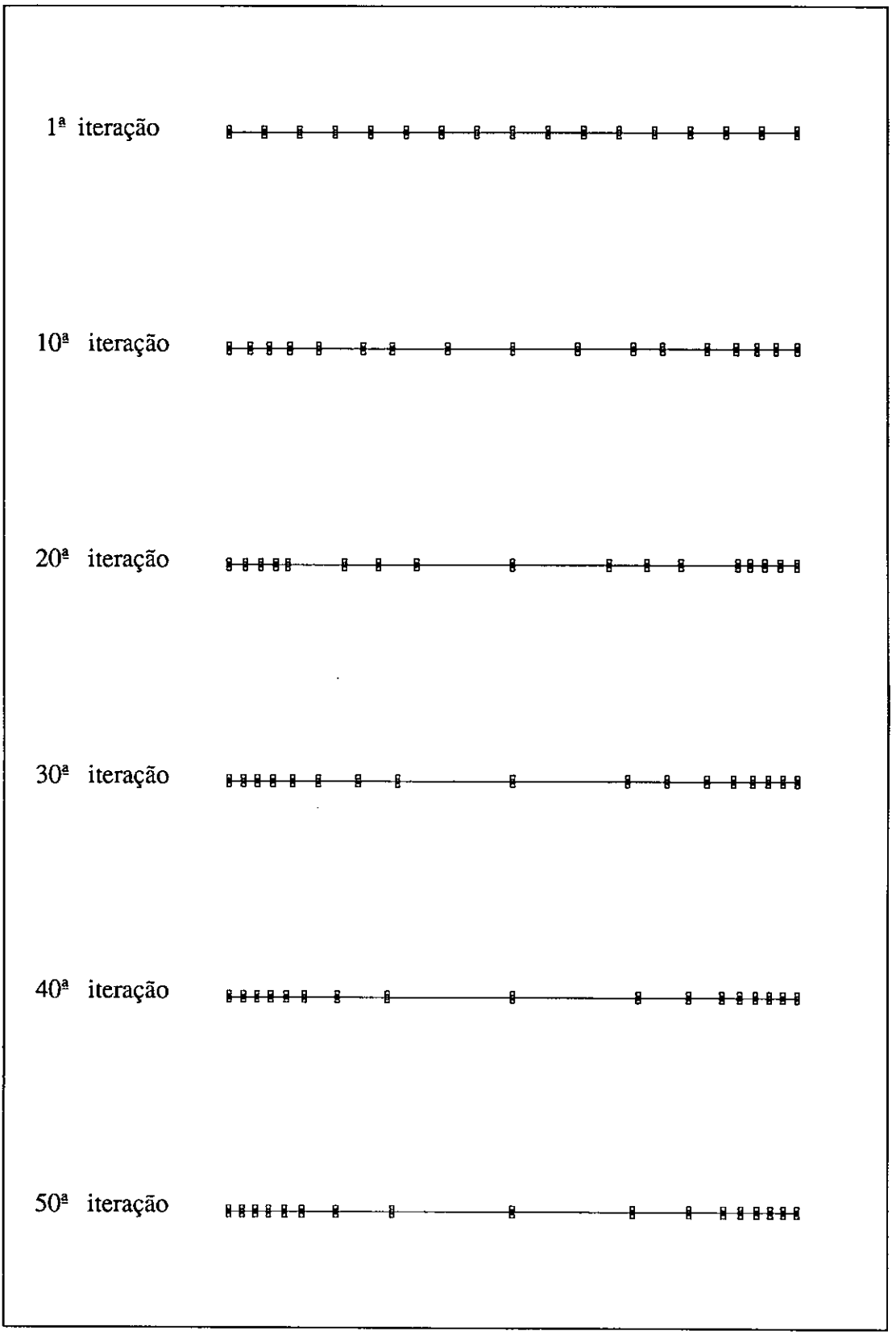


Figura 4.8 - Método r : trajetória da malha, 16 elementos, 50 iterações

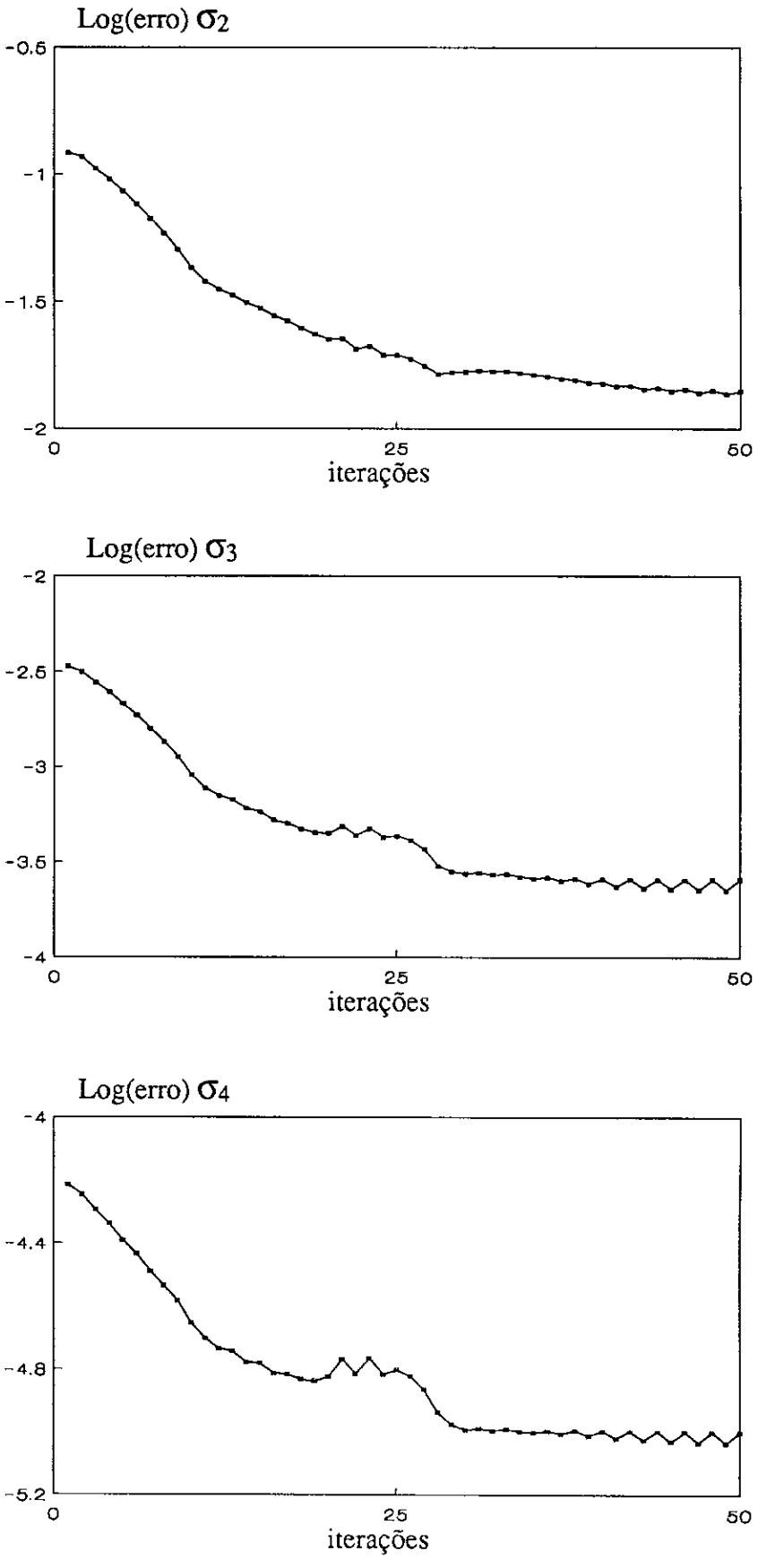
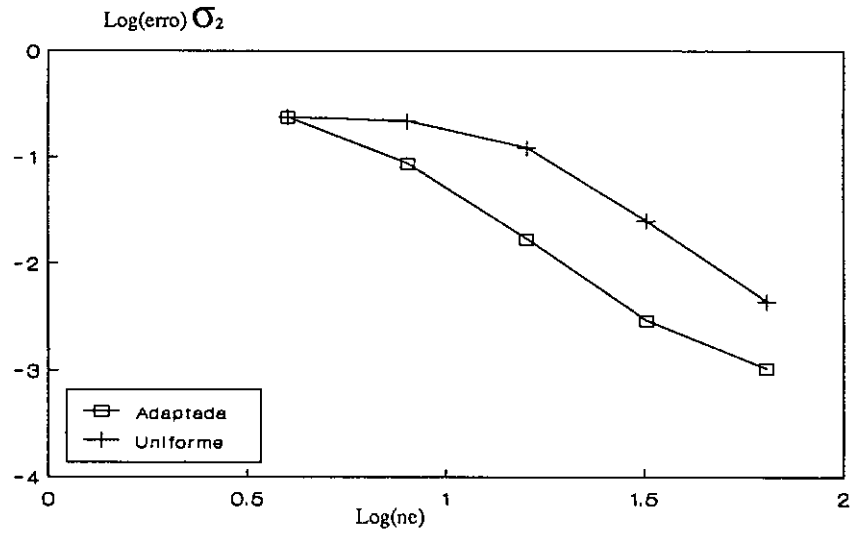
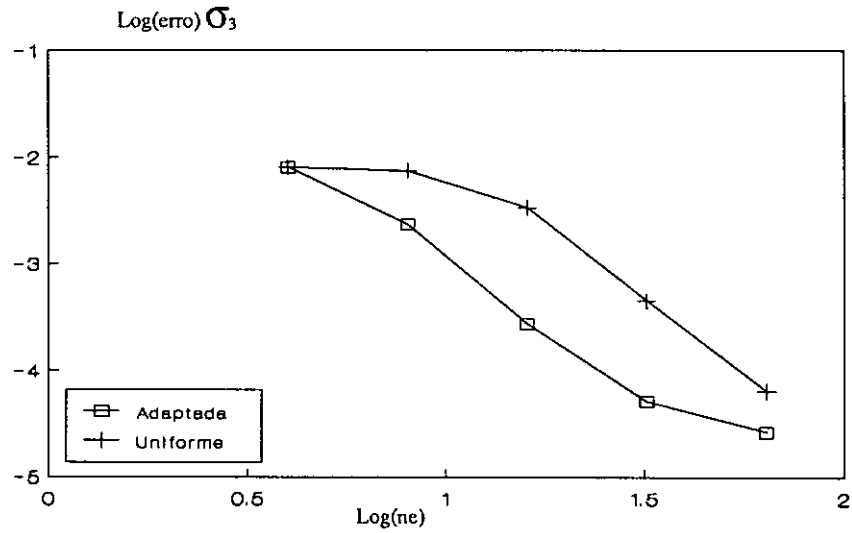


Figura 4.9 - Método r : erro real $\times$ iterações (16 elementos)





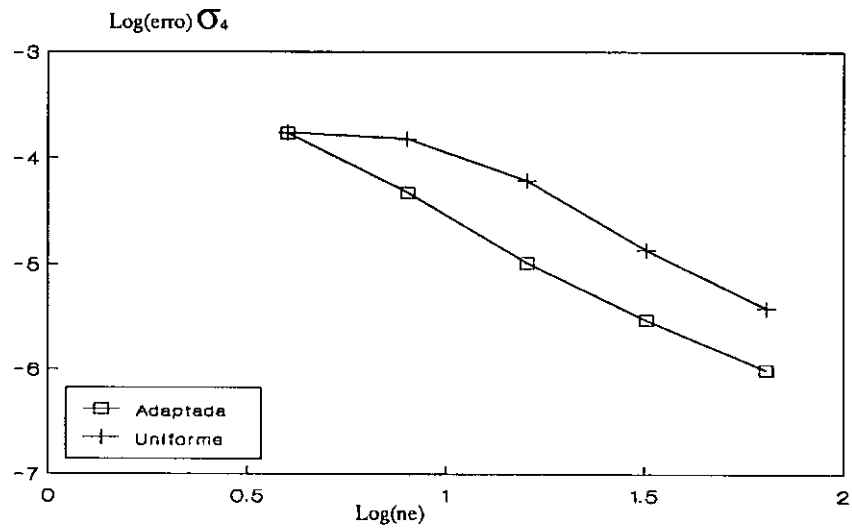


Figura 4.10 - Método r : taxas de convergência

que resultou em valores iguais para todos os elementos, a malha final é idêntica à malha inicial. Para a malha de 8 e 16 elementos fez-se $\varpi = 0,75$ e com 30 iterações. Utilizou-se $\varpi = 1,0$ para as malhas de 32 e 64 elementos com 60 e 300 iterações respectivamente.

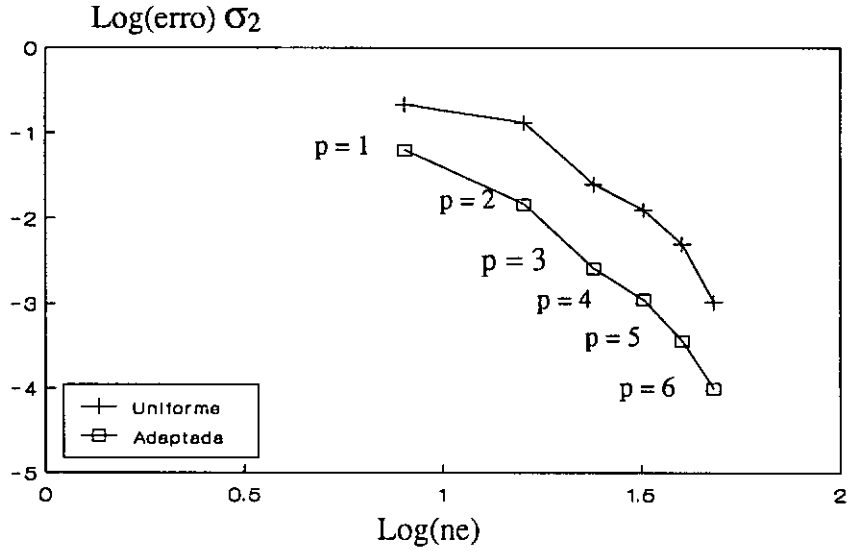
Método p

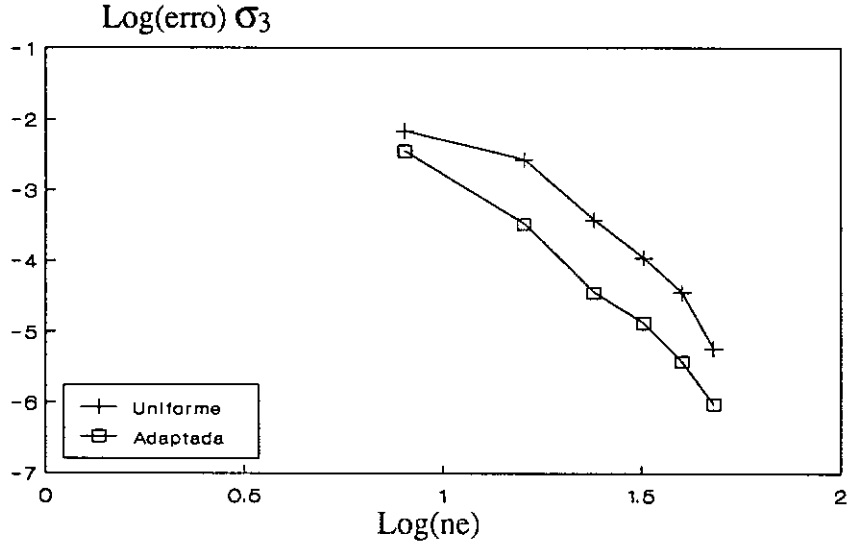
- Casca cilíndrica (forma adimensional)

Na Figura 4.11 fazemos uma comparação entre os erros dos resultados obtidos para um refinamento p a partir de uma malha uniforme e de uma malha adaptada, ambas com oito elementos. Como era esperado, a associação do método p com um refinamento adaptativo h, produz resultados mais precisos.

Comparando os resultados obtidos com os diferentes métodos observa-se que: neste caso com os métodos h e r atingimos resultados semelhantes. Nas aproximações com polinômios de graus elevados, os níveis de erro das componentes dos esforços são menores que os do refinamento h e r quando comparamos a relação do número de graus de liberdade com o nível de erro alcançado.

A aplicação de malhas auto-adaptativas, ao problema da casca cilíndrica, torna-se importante na medida em que se procura atingir, com eficácia, a precisão máxima. Estratégias mais rigorosas poderiam ser usadas para produzir melhores resultados.





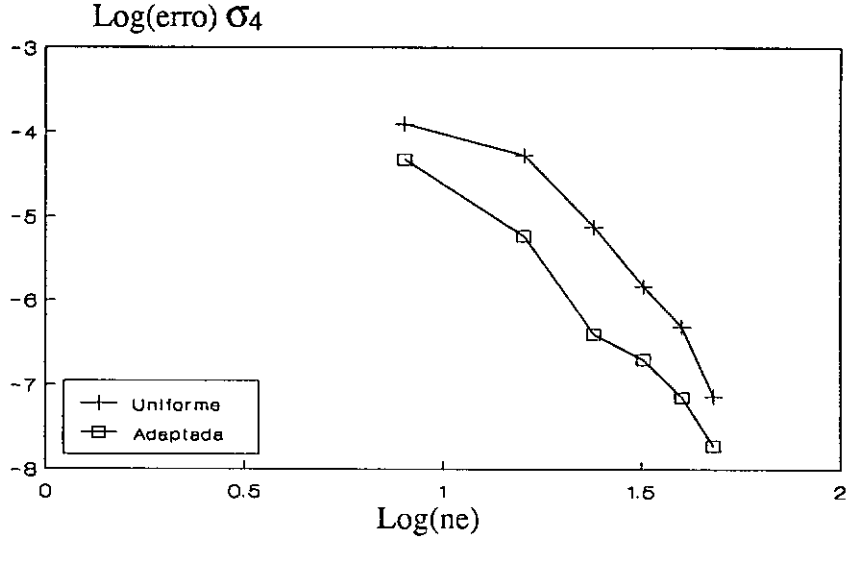


FigurA 4.11 Método p : erro real de σ_2, σ_3 e σ_4, com $p = 1$ a $p = 6$

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Por considerar deformações cisalhantes, a teoria de Reissner-Mindlin para flexão de placas e cascas é mais precisa do que a teoria de Kirchhoff. Além disso a consideração de deslocamentos e rotações como variáveis primitivas permite obter formulações variacionais envolvendo apenas derivadas primeiras destes dois campos, o que, a princípio, implica em maior flexibilidade na construção de aproximações de elementos finitos conformes.

No caso de formulações na variável primal, porém, devido a presença de uma penalização natural sobre a rigidez ao cisalhamento, discretizações clássicas do método de Galerkin não são estáveis quando a espessura tende para zero. Neste caso elementos lineares superestimam a rigidez da estrutura impedindo-a de se deslocar, provocando o fenômeno conhecido por *trancamento*.

Alternativamente formulações variacionais mistas em deslocamentos e tensões, baseada no princípio de Hellinger-Reissner, para a teoria de Reissner-Mindlin, podem ser interpretadas como uma regularização da teoria de Kirchhoff. Contudo, para pequenas espessuras, discretizações de igual ordem são instáveis.

Todavia ao adicionar, à formulação clássica de Galerkin, resíduos das equações de equilíbrio no interior dos elementos, podemos alcançar estabilidade e aumentar a precisão da formulação original. Resultados numéricos comprovam a estabilidade e precisão desta nova formulação.

Além disso, quando a espessura tende para zero, teremos um problema de perturbação singular implicando na presença de camada limite nas regiões próximas aos apoios e em locais com descontinuidade de carregamento. Para estes problemas não são esperadas taxas de convergência uniformes. Buscando melhora

nessas taxas de convergência, estratégias de refinamentos adaptativos automáticos são introduzidas, nas versões h, r e p. Resultados numéricos comprovam o ganho de convergência e precisão para tais métodos. Por outro lado, refinamentos adaptativos com elementos de casca instáveis não contribuem para estabilizar as aproximações.

Comparando os resultados obtidos com os diferentes métodos observa-se que com os métodos h e r atingimos resultados semelhantes. Já o método p mostrou ser o mais eficaz, quando comparamos o nível de erro atingido para número um fixo de graus de liberdade. Isto acontece mesmo para refinamento uniforme no domínio. Neste caso algumas áreas tiveram refinamento excessivo, demonstrando a necessidade de utilização de um estimador de erro a posteriori que trate elementos com $p > 1$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADJEDI, G., AUBRY, D.,[1989], "Development of a Hierarchical and Adaptive Finite Element Software", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** Vol. 75, pp 153-165.

AINSWORTH, M., ZHU, J.Z., CRAIG, A.W., ZIENKIEWICZ, O.C.,[1990], "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the Finite Elment Method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 28, pp. 2161-2174.

ARNOLD, D.N.,[1990], "Mixed Finite Element Method for Elliptic Problems ", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 82, pp. 281-300.

BABUŠKA, I.,[1971], "Error Bounds for Finite Element Method", **Numerische Mathematik**, Vol. 16, pp. 322-333.

BABUŠKA, I., RHEINBOLDT, W.C.,[1978], "Error Estimates for Adaptative Finite Element Computations ", **Journal of Numerical Analysis SIAM**, Vol. 15(4), pp. 736-754.

BABUŠKA, I., MILLER, A., VOGELIUS,[1983], "Adaptative Methods and Error Estimation for Elliptic Problems for Structural Mechanics", **Adaptative Computational Methods for Partial Differencial Equations** (Editores: BABUŠKA, I., CHANDRA, J., FLAHERTY, J.E.) SIAM, Philadelphia, pp. 57-73

BABUŠKA, I., ZIENKIEWICZ, O.C., GAGO, J., OLIVEIRA, E.R. DE, (EDITORES), [1986], **Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Elements Computations**, John Wiley and Sons Ltda, New York.

BATHE, K.J., [1982], **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

BREZZI, F., [1974], "On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems Arising From Lagrange Multipliers", **Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationelle, Série Rouge Analyse Numérique**, 8, R.2, pp. 129-151.

CIARLET, P.G., [1978], **The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam

DEMKOWICZ, L., DEVLOO, P., ODEN, J.T., [1985], "On a h-type Mesh-refinament Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 53, pp 67-89.

EWING, R.E., [1990], "A Posteriori Error Estimation", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 82, pp 59-72.

FEIJOO, R.A., JOSPIN R.J., BEVILACQUA, L., TAROCO, E., [1980], "A Curvilinear Finite Element for Shells of Revolution", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 16 , pp. 19-33.

FRANCA, L.P., HUGHES, T.J.R., LOULA, A.F.D., MIRANDA, I., [1988], "A New Family of Stable Elements for Nearly Incompressible Elasticity based on a Mixed Petrov-Galerkin Finite Element Formulation", **Numerische Mathe-**

matik, Vol. 53, pp. 123-141.

FRANCA, L.P., TOLEDO, E.M., LOULA, A.F.D., GARCIA, E.L.M., [1988], "Stress Analysis in Pressure Vessels by Mixed Finite Element Methods Taking into Account Shear Deformation", **Anais V Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão**, Salvador, Brasil.

FRIED, I., [1976], "Residual Energy Balancing Tecniques in the Generation of Plate Bending Finite elements", **Computers and Structures**, Vol. 4, pp. 261-277.

GAGO, J.P. DE S.R., KELLY, D.W., ZIENKIEWICZ, O.C., BABUŠKA, I., [1983], "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 19, pp. 1593-1619.

GAGO, J.P. DE S.R., KELLY, D.W., ZIENKIEWICZ, O.C., BABUŠKA, I., [1983], "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 19, pp. 1621-1656.

GRAVINA, P.B.J., [1957], **Cascas de Revolução**, São Paulo.

HINTON, E., CAMPBELL, J.S., [1974], "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using Least Squares Method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 8, pp. 461-480.

HOLZER, S., RANK, E., WERNER, H., [1990], "An Implementation of the *hp*-Version of the Finite Element Metohd for Reissner-Mindlin Plate Problems",

International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 459-471.

HUGHES, T.J.R., [1987], **The Finite Elements Method**, Prentice-Hall Inc.Englewood Cliffs, New Jersey.

HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., KANOKNUKULCHAI, W., [1977], "A Simple and Eficient Finite Element for Plate Bending", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 11, pp. 1529-1543.

KIKUCHI, N., TORIGAKI T., [1987], "Adaptative Finite Elements Methods in Computer Aided Engineering", **IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Florianópolis, Brasil.

KRAUS, H., [1967], **Thin Elastic Shells**, John Wiley and Sons.

LANDAU, L., RIBEIRO, F.L.B., [1986], "Aplicação de Processos Auto-adaptativos para Avaliação de Fatores de Concentração de Tensões em Juntas Tubulares pelo Método dos Elementos Finitos", **IV Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão**, Salvador, Brasil.

LOULA, A.F.D., [1988], **Notas do Curso Introdução ao Método dos Elementos Finitos**, 28º Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro, Brasil

LOULA, A.F.D., FRANCA, L.P., HUGHES, T.J.R., MIRANDA, I., [1987a], "Stability, Convergence and Accurancy of a New Finite Element Method for the Circular Arch Problem", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 63, pp. 281-303.

LOULA, A.F.D., HUGHES, T.J.R., FRANCA, L.P., MIRANDA, I., [1987b], "Mixed Petrov-Galerkin Method for the Timoshenko Beam", **Computer**

Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 63, pp. 133-154.

LOULA, A.F.D., MIRANDA I., HUGHES, T.J.R., FRANCA, L.P.,[1986], "A Successsful Mixed Formulation for Axisymmetric Shell Analysis Employing Discontinuous Stress Fields of the Same Order as the Displacement Field", **IV Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão**, Salvador,Brasil.

LOULA, A.F.D., MIRANDA, I., HUGHES, T.J.R., FRANCA, L.P.,[1989], "On Mixed Finite Element Methods for Axisymmetric Shell Analysis", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 72, pp. 201-231.

LOULA, A.F.D., TAVARES, G.A., JOSPIN, R.J., TOLEDO, E.M.,[1983], "Análise de Tensões do Vaso de Contenção Metálica de Angra 2", Relatório Técnico, LNCC, Rio de Janeiro - Brasil.

LOULA, A.F.D., TOLEDO, E.M., FRANCA, L.P., GARCIA, E.L.M.,[1989], "Application of a Mixed Galerkin/Least-Squares Method to Axisymmetric Shell Problems Subject to Arbitrary Loading", **Anais do X SMIRT, Anahein / California - USA**

LYRA, P.R.M., ALVES, J.L.D., COUTINHO, A.L.G.A., LANDAU, L., DEVLOO, P.,[1989], "Comparison of Mesh Refinament Strategies for the H-version of the Finite Element Method", **Anais do MECOM 89**, Cidade do Porto, Portugal.

MALTA, S.M.C., LOULA, A.F.D., GARCIA, E.L.M.,[1989], "Métodos Mistos Adaptativos para Cascas Axissimétricas", **Anais do MECOM 89**, Cidade do Porto, Portugal.

MOHR, G.A, [1982], "Application of Penalty Function to a Curved Isoparametric Axisymmetric Thick Shell Element", **Computers and Structures**, Vol. 15(6), pp. 685-690.

NOOR, A.K., BABUŠKA, I., [1987], "Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions", **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 3 , pp. 1-26.

PORTELA, J.C.S.S, RIBEIRO, F.L.B., COUTINHO, A.L.G.A., LANDAU, L., [1990], "Análise Adaptativa de Placas", **Publicações Técnicas**, COPPE / UFRJ, EC/E-017/90

PRATHAP, G., RAMESH BABU, C., [1986], "A Field Consistent Three-node Quadratic Curved Axisymmetric Shell Element", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 23, pp. 711-723.

SILVA, R.S., GALEÃO, A.C.N., CARMO, E.D., [1989], "Um Modelo de Petrov-Galerkin Combinado com Esquemas Auto-adaptativos e sua Aplicação na Resolução Numérica de Problemas com Camada Limite", **X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Rio de Janeiro, Brasil.

SOARES, C.M.M., [1984], "Análise Elástica de Cascas de Revolução-Método da Penalidades" **III Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão**, Salvador,Brasil.

TIMOSHENKO, S.P., KRIEGER, S.W., [1959], **Theory of Plates and Shells**, McGraw-Hill.

YUNUS, S.M., PAWLAK, T.P., WHEELER, M.J., [1990], "Application of the Zienkiewicz-Zhu Error Estimator for Plate and Shell Analysis", **Interna-**

tional Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 1281-1298.

ZIENKIEWICZ, O.C., BUAER, J., MORGAN, K., OÑATE, E., [1977], "A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 11, pp. 1545-1558.

ZIENKIEWICZ, O.C., MORGAN, K., [1983], **Finite Element and Approximation**, John Whiley and Sons, New York, 1983.

ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU J.Z., GONG, N.G., [1989], "Effective and Pratical $h-p$ Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 28, pp. 879-891.

ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU J.Z., [1987], "A Simple Erro Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 24, pp. 337-357.

ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU J.Z., [1989], "Error Estimates and Adaptative Refinements for Plate Bending Problems", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 28, pp. 2839-2853.

ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU J.Z., [1990], "Superconvervence Recovery Technique and A Posteriori Error Estimators" **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 30, pp. 1321-1339.