APLICAÇÃO DO M.E.F. NA ANÁLISE DO COLAPSO DE TUBULAÇÕES SUBMARINAS PARA ÁGUAS PROFUNDAS

Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.
(Presidente)

Edison Castro Prates de Lima, D.Sc.

Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc.

Alvaro Maia da Costa, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1991

LIMA, BEATRIZ DE SOUZA LEITE PIRES DE
Aplicação do M.E.F. na Análise do Colapso de Tubulações Submarinas para Águas Profundas
[Rio de Janeiro] 1991
VIII, 76p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1991)
Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
1. Tubulações Submarinas 2. Colapso
I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

a meu pai.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken, pela orientação deste trabalho.

Ao Breno, em especial, pela grande "força", pelas valiosas discussões e sugestões, e pela revisão do texto.

Ao José Luiz Drummond Alves, pelo apoio na fase computacional; aos colegas e professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE, e ao Paulo Arino e Gilberto Luziê pela cuidadosa elaboração das ilustrações.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

APLICAÇÃO DO M.E.F. NA ANÁLISE DO
COLAPSO DE TUBULAÇÕES SUBMARINAS PARA ÁGUAS PROFUNDAS

Beatriz de Souza Leite Pires de Lima
Maio de 1991

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken
Programa: Engenharia Civil

Este trabalho se refere ao cálculo da carga de colapso de tubulações submarinas para águas profundas, sujeitas a altas pressões hidrostáticas externas. Estas tubulações possuem uma relação D/t muito baixa, exigindo portanto critérios mais rigorosos em sua análise e dimensionamento.

A análise é feita através do Método dos Elementos Finitos (M.E.F), utilizando elementos de casca iso-paramétricos degenerados. Na formulação do elemento são considerados efeitos não-lineares geométricos e físicos. Para representar o comportamento da plastificação através da espessura do tubo, utiliza-se um modelo em camadas.

A determinação da instabilidade é implementada através de uma análise não-linear completa, com um procedimento incremental-iterativo baseado no Método de Newton-Raphson modificado. Esta implementação é feita em conjunto com uma técnica de controle de deslocamentos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

AN APPLICATION OF THE F.E.M. IN THE ANALYSIS OF THE COLLAPSE OF DEEPWATER PIPELINES

Beatriz de Souza Leite Pires de Lima

May, 1991

Thesis Supervisor: Nelson Francisco Favilla Ebecken
Department: Civil Engineering

This work presents developments on the numerical analysis and determination of collapse loads in deepwater pipelines, which are subjected to high external hydrostatic pressures. These pipelines present very small diameter-to-thickness ratios, thus requiring rigorous considerations on their analysis and design.

The Finite Element Method (F.E.M.) is considered in these developments, where the pipeline is discretized using nonlinear isoparametric shell elements, which accounts for geometric and material nonlinearities. Plastification across the thickness is represented by using a layered model.

The collapse analysis is performed through an incremental-iterative nonlinear analysis, based on the Newton-Raphson method, and also employing a special displacement-control technique.

ÍNDICE

pág.

CAPÍTULO I INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II CONSIDERAÇÕES SOBRE O COLAPSO DE TUBULAÇÕES SUBMARINAS 4

II.1 Introdução 4

II.2 Histórico 6

II.3 Enfoque Proposto 10

CAPÍTULO III FORMULAÇÃO DO ELEMENTO 12

III.1 Introdução 12

III.2 Definição da Geometria 13

III.3 Definição dos Deslocamentos 16

III.4 Definição das Tensões e Deformações 17

III.5 Matriz de Rigidez Linear 21

III.6 Integração ao Longo da Espessura: Modelo em Camadas 22

III.7 Consideração dos Efeitos Não Lineares 25

III.7.1 Não Linearidade Geométrica 25

III.7.2 Não Linearidade Física 30

CAPÍTULO IV DETERMINAÇÃO DA CARGA DE COLAPSO 37

IV.1 Introdução: Considerações sobre a Análise Não Linear 37

IV.2 Considerações sobre a Determinação da Carga Limite 41

IV.3 Determinação da Carga Limite de Tubulações Submarinas 48

CAPÍTULO V APLICAÇÕES 50

V.1 Introdução 50

V.2 Exemplo 1 51

V.3 Exemplo 2 55

V.4 Exemplo 3 57

V.5 Exemplo 4 61

V.6 Exemplo 5 63

V.7 Exemplo 6 67

CAPÍTULO VI CONCLUSÕES 70

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 73

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Com a expansão de atividades de exploração de petróleo no mar, em águas cada vez mais profundas, cresce a demanda por um meio de transporte adequado para os fluidos que resultam do processo de explotação. A solução mais apropriada e tradicionalmente empregada compõe-se de tubulações submarinas, que tem desempenhado um papel importante nessas atividades.

A profundidade máxima em que existem largas experiências operacionais para essas estruturas é de aproximadamente 500 metros. No entanto, atividades mais recentes de exploração na Bacia de Campos indicam que tubulações submarinas deverão ser operadas em profundidades maiores que 900 metros.

Novos campos de exploração de petróleo tem sido identificados além da plataforma continental, a profundidades que podem ultrapassar 1500 metros. Estudos de viabilidade tem demonstrado que tecnologias para explorar e produzir petróleo e gás em profundidades de até mais que 1800 metros podem ser desenvolvidas a custos aceitáveis.

Assim, existirá uma demanda crescente de tubulações para essas profundidades. Estas tubulações devem ser projetadas para suportar pressões externas muito elevadas, o

que implica no uso de materiais de alta resistência e razões diâmetro/espessura (D/t) particularmente baixos.

Os altos custos da instalação, e o custo adicional do material do tubo, ditam o uso de fatores de segurança baixos e tolerâncias de projeto pequenas. Isto requer uma avaliação contínua dos projetos e tecnologia existentes, e o desenvolvimento de métodos mais apurados para determinar a pressão de colapso.

O principal objetivo deste trabalho será então utilizar o Método dos Elementos Finitos para o cálculo da carga de colapso de tubulações com relações D/t baixas, sujeitas a altas pressões hidrostáticas externas. As tubulações serão modeladas com elementos de casca isoparamétricos, degenerados de elementos de sólido tridimensional.

Devido à discordância entre as teorias existentes que vem sendo utilizadas no projeto de tubulações submarinas em águas profundas, diferentes enfoques foram apresentados na literatura. Assim, outro objetivo deste trabalho é também comparar os resultados mais rigorosos fornecidos pelo MEF com os disponíveis na literatura.

O capítulo II a seguir apresenta um histórico e considerações sobre o comportamento e a análise do colapso de tubulações submarinas. O capítulo III descreve a formulação do elemento de casca espessa utilizado para representar este comportamento; o capítulo IV trata dos algoritmos para a determinação da carga de colapso, que

compreendem uma análise não linear completa com controle de deslocamentos. O capítulo V apresenta resultados para alguns casos; finalmente, as conclusões são apresentadas no capítulo VI.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES SOBRE O COLAPSO DE TUBULAÇÕES SUBMARINAS

II.1) Introdução

O processo de flambagem e colapso de uma tubulação instalada em águas profundas, e portanto submetida a elevadas pressões hidrostáticas externas, é caracterizado pelo achatamento da seção da tubulação.

Este comportamento pode ser descrito por uma pressão crítica (P_{cr}) e por uma pressão de propagação (P_p). Para uma tubulação inicialmente sem imperfeições iniciais, pressões externas superiores a P_{cr} atuando em um trecho limitado irão determinar o início de um processo de colapso, no qual a flambagem irá se propagar rapidamente para regiões adjacentes da tubulação, avançando até encontrar uma pressão externa menor que a pressão de propagação P_p. Este processo pode portanto causar o achatamento de uma grande extensão de tubulação.

A pressão de propagação P_p é sempre menor que a requerida para iniciar o colapso, e a presença de alguma imperfeição inicial ou dano localizado na tubulação pode determinar que a pressão de iniciação de flambagem seja inferior à pressão crítica P_{cr}. Este comportamento pode ser expresso pela desigualdade [1,2]

$P_{cr} > P_i > P_p$

onde P_i é a pressão de colapso para tubos com imperfeições iniciais, caracterizadas por danos localizados ou ovalização da seção. Este último efeito pode surgir devido a momentos fletores a que a tubulação é submetida durante o processo de instalação.

Considerando-se o comportamento acima descrito para o processo de colapso, dois critérios podem ser usados no projeto de tubulações.

O primeiro consiste em dimensionar o tubo, selecionando a espessura e a tensão de escoamento do material, de forma que a pressão de propagação seja sempre maior que a pressão hidrostática externa. Este critério requer uma espessura excessivamente grande, muito maior do que a exigida por outros critérios, tornando-se portanto antieconômico.

O segundo consiste em dimensionar o tubo de modo que a pressão crítica de colapso, e não a pressão de propagação, seja maior que a pressão hidrostática externa.

Este segundo critério não garante que a pressão externa seja sempre menor do que a pressão de propagação, de modo que qualquer dano no tubo pode se transformar numa flambagem que se propaga. Para prever esta hipótese e evitar que em tal eventualidade uma extensão muito grande da tubulação seja danificada, podem ser utilizados inibidores de

flambagem, que são reforços instalados em vários pontos ao longo da tubulação.

Este enfoque tem sido considerado [1] o mais realístico, e portanto será o adotado neste estudo. Por isto, os desenvolvimentos deste trabalho não irão buscar a determinação da pressão de propagação, concentrando-se na pesquisa de procedimentos para a determinação da carga crítica de colapso através de técnicas numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos.

II.2) Histórico

Diversos trabalhos que tratam da determinação da carga de colapso de tubulações submarinas tem sido publicados na literatura.

A maior parte destes trabalhos fornece fórmulas, critérios ou programas computacionais baseados em estudos analíticos que, de uma forma ou de outra, apresentam simplificações ou limitações que podem prejudicar a qualidade dos resultados. Algumas destas simplificações consistem em utilizar teorias de cascas finas para analisar tubos com relações diâmetro/espessura muito baixos.

Por outro lado, alguns trabalhos utilizam programas comercialmente disponíveis baseados no Método dos Elementos Finitos para estudar casos particulares. Estes estudos são úteis para a compreensão qualitativa do problema de colapso de tubulações, mas, como utilizam ferramentas computacionais

não projetadas especialmente para o problema em questão, requerem um esforço muito grande na modelação e na sequência de análises.

Os itens a seguir apresentam um histórico resumido dos trabalhos encontrados na literatura, mencionando respectivamente estudos analíticos e experimentais, e estudos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos.

a) Estudos Experimentais e Analíticos

KYRIAKIDES e YEH [3,4] descrevem uma série de ensaios experimentais de tubos para determinar o colapso sob pressão hidrostática externa considerando-se imperfeições iniciais. Os parâmetros medidos dos modelos são utilizados para elaborar fórmulas aproximadas para a pressão de colapso de tubulações, que são comparadas com os resultados dos ensaios.

MURPHEY e LANGNER [5], em um trabalho que aborda diversos assuntos relacionados ao comportamento de tubulações, incluindo a deformação de um tubo sujeito a cargas menores que a última e a fadiga de um cordão de solda de uma tubulação sob cargas cíclicas, apresentam fórmulas aproximadas para prever as condições de carga limite de colapso e flambagem.

SRISKANDARAJAH e MAHENDRAN [1] comparam diversas fórmulas analíticas e empíricas encontradas na literatura, com considerações particulares sobre os métodos de

instalação de tubulações, e sobre o dimensionamento dos inibidores de flambagem.

WINTER [6] apresenta um método aproximado de análise que se propõe a relacionar os parâmetros de um tubo, tais como geometria, imperfeições iniciais, tensão de escoamento, com uma combinação de cargas e com a capacidade de deformação a ser determinada. Emprega um modelo cinemático simplificado utilizando o conceito de rótulas plásticas e molas de rotação.

NOMOTO, ENOSAWA e FUJITA [7] seguem a linha de WINTER, desenvolvendo também um método de análise simplificado para o cálculo da resistência de colapso de tubulações submarinas sob cargas combinadas. A carga de colapso é determinada investigando-se a carga limite e a bifurcação. Neste método são consideradas grandes deflexões, plasticidade, e imperfeições iniciais.

O grupo de estudo de tubulações submarinas de águas profundas BATTELLE, formado por KINZEL, SAMPATH, POPELAR, JOHNS, e SORENSON [8], faz um estudo analítico para a determinação da carga de colapso de um tubo, baseado na teoria de cascas finas, considerando o material isotrópico e elasto-plástico.

O procedimento desenvolvido é mais orientado ao processo de lançamento ("laying") para instalação da tubulação, comparando os momentos atuantes com o momento elasto-plástico admissível, e incorporando os efeitos da

pressão hidrostática e força axial. Para relações D/t baixas, este momento admissível será alcançado após uma deformação plástica considerável.

JENSEN [9,10] desenvolve procedimentos numéricos para estudar o comportamento de deformação de cascas cilíndricas elasto-plásticas sob pressão hidrostática externa. O modelo é baseado na teoria de cascas finas, permitindo grandes rotações, mas assumindo pequenas deformações.

Procura-se determinar a pressão de propagação, comparando os resultados para duas formulações de plasticidade e duas diferentes razões de raio/espessura (R/t). A diferença entre as pressões calculadas é maior para as razões R/t menores, o que reforça a importância de um estudo mais preciso para cascas espessas.

b) Estudos baseados no método dos elementos finitos.

TOKIMASA e TANAKA [11] analisam o colapso de tubulações através de um programa de elementos finitos, discretizando a seção do tubo com elementos planos e estudando os efeitos de ovalização, não-uniformidade das paredes do tubo, diferentes relações D/t, tensão residual e comportamento elasto-plástico do material.

A carga de colapso é determinada através de uma análise não-linear incremental, pesquisando o ponto aonde o determinante da matriz de rigidez se anula.

Os resultados obtidos são comparados com algumas fórmulas analíticas disponíveis na literatura para avaliar o colapso; demonstra-se a imprecisão destas fórmulas, que não levam em conta todos os efeitos envolvidos, e apresenta-se uma fórmula empírica que procura considerar estes efeitos.

CHEDMAIL, OELBERMANN e RIGON [12] estudam o comportamento pós-crítico da propagação de flambagem em tubulações submarinas com grandes espessuras, utilizando um programa de elementos finitos.

A discretização é feita com elementos de sólido tridimensional, incorporando efeitos de não linearidade geométrica e física. Os autores consideram que uma análise estática é suficiente para determinar a carga de colapso, mas que os efeitos de inércia são importantes para o tratamento adequado do comportamento pós-crítico. O interesse no estudo do comportamento pós-crítico é justificado pela verificação da possibilidade de inundação do tubo após o colapso.

II.3) Enfoque proposto

Este estudo propõe utilizar o Método dos Elementos Finitos para efetuar o cálculo da carga crítica de colapso de tubulações submarinas espessas.

Uma modelação mais realística das tubulações para águas profundas será efetuada através de um elemento de casca espessa, degenerado de um elemento de sólido tri-

dimensional. Este elemento pode ser utilizado tanto para o estudo de problemas que podem ser representados por modelos planos, quanto para o estudo de problemas que requerem uma modelação tridimensional.

Como exemplo de problemas de determinação da carga de colapso por modelos planos, podem ser incluídos tubos sem imperfeições iniciais, tubos com ovalização ou com espessura não-uniforme. Problemas de determinação da carga de colapso que exigem modelos tridimensionais incluem tubos submetidos a efeitos de flexão e/ou com danos de geometria arbitrária.

Para representar mais adequadamente o comportamento de plastificação através da espessura do tubo, o elemento de casca utiliza um modelo em camadas. O capítulo III a seguir detalha a formulação do elemento, incluindo a consideração de efeitos não-lineares geométricos e do material.

A determinação da instabilidade é implementada através de uma análise não-linear incremental-iterativa completa, considerando adequadamente todos os efeitos de não linearidade física e geométrica, e implementada em conjunto com uma técnica de controle de deslocamentos. O capítulo IV irá descrever em mais detalhes a estratégia empregada para a determinação da carga de colapso.

CAPÍTULO III

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

III.1) Introdução

Elementos isoparamétricos degenerados são frequentemente utilizados em análises com o Método dos Elementos Finitos [13]. A transformação de um elemento de sólido isoparamétrico tri-dimensional em um elemento de casca degenerado é efetuada basicamente reduzindo-se as dimensões na direção da espessura da casca, e eliminando-se os nós intermediários que se encontram nesta direção; desta forma, considera-se que os lados do elemento na direção da espessura são retos. Em seguida, substituem-se os pares de nós superiores e inferiores por nós na superfície média e por *vetores espessura* definidos a partir das coordenadas dos nós suprimidos.

Na formulação do elemento de casca isoparamétrico quadrático degenerado utilizado neste trabalho, empregam-se as hipóteses usuais de:

a) Desprezar a energia de deformação correspondente a tensões perpendiculares à superfície média da casca, o que equivale a dizer que a componente de tensão normal à superfície média nas equações constitutivas é igual a zero;

b) Considerar que normais à superfície média permanecem

praticamente retas após a deformação, mas podem não permanecer normais, o que equivale a considerar deformações devidas ao esforço cortante.

O elemento resultante possui cinco graus de liberdade em cada ponto nodal, correspondendo a três componentes de translação nas direções globais (u,v e w) e duas componentes de rotação (β_1,β_2) em torno de duas direções ortogonais tangentes à superfície média.

III.2) Definição da Geometria

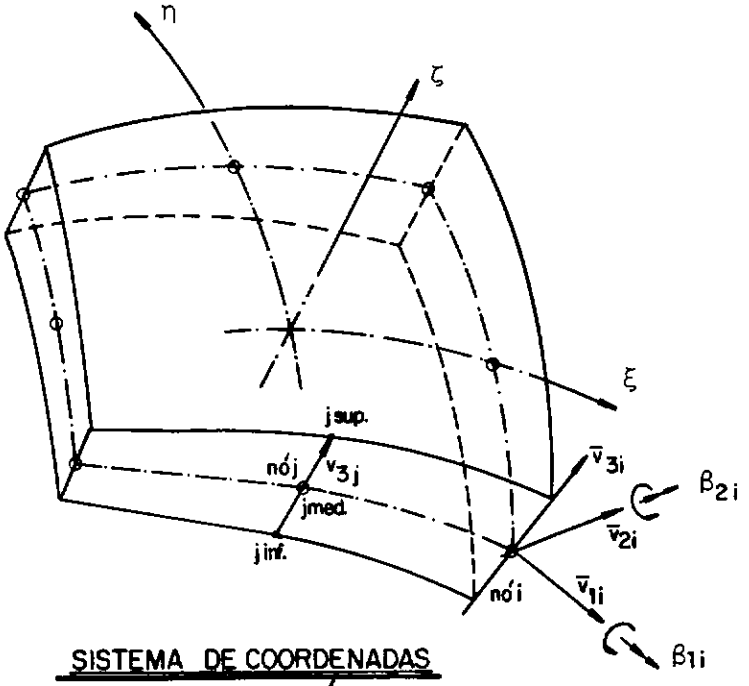
Para exprimir a geometria do elemento, utiliza-se um *sistema global de coordenadas cartesianas*, onde

$$\underset{\sim}{x}_i = [\ x_i \quad y_i \quad z_i\ ] \qquad \text{(III.1)}$$

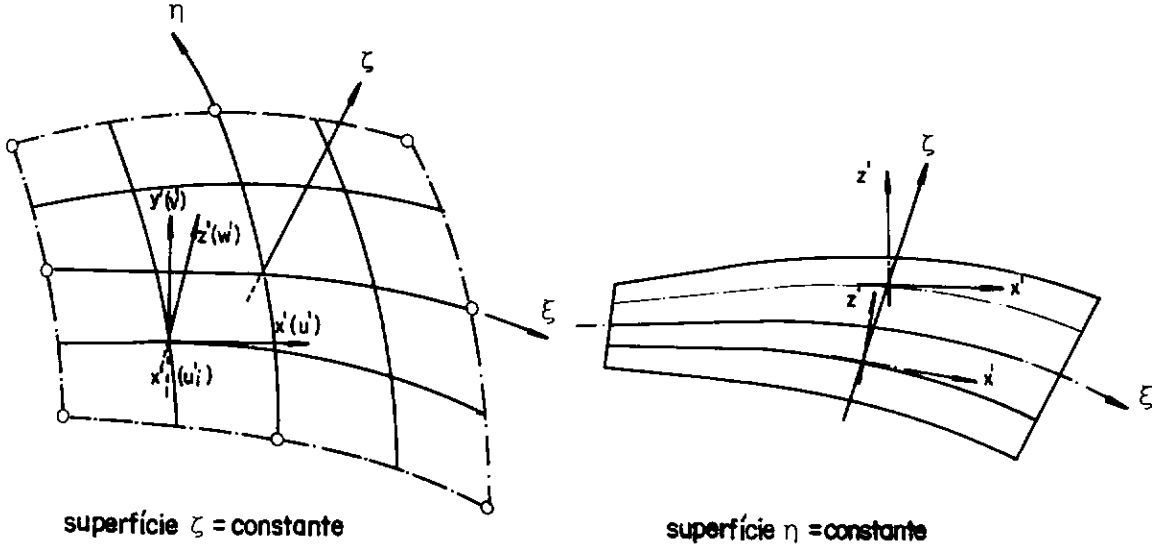
representa um vetor com as coordenadas globais de um nó i.

Além disso, definem-se *sistemas de coordenadas locais em cada ponto nodal* - $\underset{\sim}{v}_{ki}$, com origem na superfície média. Estes sistemas são indicados na figura III.1, onde:

a) $\underset{\sim}{v}_{3i}$ representa o *vetor espessura* mencionado no item anterior, e é aproximadamente (mas não necessariamente) normal à superfície média, com módulo igual à espessura da casca no nó i. O vetor unitário correspondente a $\underset{\sim}{v}_{3i}$ será representado como $\underset{\sim}{\vec{v}}_{3i}$.



SISTEMA DE COORDENADAS NODAIS NO NÓ i



SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS

Figura III.1

b) $\underset{\sim}{v}_{1i}$ é um vetor normal a $\underset{\sim}{v}_{3i}$ e paralelo ao plano *xy* global, ou seja,

$$\underset{\sim}{v}_{1i} = \vec{\underset{\sim}{k}} \times \underset{\sim}{v}_{3i} \qquad \text{(III.2)}$$

onde $\vec{\underset{\sim}{k}}$ é um vetor unitário na direção *z*-global. No caso particular de $\underset{\sim}{v}_{3i}$ coincidir com o eixo *z*-global, o produto (III.2) é indeterminado e adota-se $\underset{\sim}{v}_{1i}$ coincidente com o eixo *x*-global. O vetor unitário correspondente a $\underset{\sim}{v}_{1i}$ será representado como $\vec{\underset{\sim}{v}}_{1i}$.

c) $\underset{\sim}{v}_{2i}$ é um vetor normal ao plano definido por $\underset{\sim}{v}_{3i}$ e $\underset{\sim}{v}_{1i}$, ou seja,

$$\underset{\sim}{v}_{2i} = \underset{\sim}{v}_{3i} \times \underset{\sim}{v}_{1i} \qquad \text{(III.3)}$$

O vetor unitário correspondente a $\underset{\sim}{v}_{2i}$ será representado como $\vec{\underset{\sim}{v}}_{2i}$.

Finalmente, define-se o *sistema de coordenadas curvilíneas* indicado na figura III.1, aonde ξ e η mapeiam a superfície média, e ζ está na direção do vetor espessura; os valores para estas coordenadas variam entre -1 e +1.

Utilizando-se estes três sistemas de coordenadas, a geometria do elemento fica definida pela seguinte expressão:

$$\underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)\ \underset{\sim}{x}_i + \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)\ \zeta\ \frac{t_i}{2}\ \vec{\underset{\sim}{v}}_{3i} \qquad \text{(III.4)}$$

onde N_i são as funções de interpolação "serendipity" quadráticas definidas em [13], e t_i é o valor da espessura no ponto nodal *i*.

A expressão (III.4) permite obter as coordenadas cartesianas globais $\underset{\sim}{x}$ de um ponto arbitrário dentro do elemento, definido por suas coordenadas curvilíneas ξ, η e ζ, a partir das coordenadas cartesianas globais e do vetor espessura dos oito nós do elemento.

III.3) Definição dos Deslocamentos

A expressão apresentada a seguir, semelhante à (III.4) utilizada para definir a geometria, representa o campo de deslocamentos do elemento:

$$\underset{\sim}{u} = \sum_{i=1}^{8} N_i \, \underset{\sim}{u}_i + \sum_{i=1}^{8} N_i \, \zeta \, \frac{t_i}{2} \left[\vec{\underset{\sim}{v}}_{1i}, \; -\vec{\underset{\sim}{v}}_{2i} \right] \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.5)}$$

Por esta expressão, as componentes de deslocamento no sistema cartesiano global de um ponto arbitrário dentro do elemento são representadas em termos dos cinco graus de liberdade de cada nó do elemento.

A contribuição dos graus de liberdade de rotação β_{1i} e β_{2i} sobre as componentes de deslocamento $\underset{\sim}{u}_i$ de um nó pode ser vista como, respectivamente, conforme a figura III.2:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{u}_i(\beta_{1i}) &= t_i \; \vec{\underset{\sim}{v}}_{1i} \; \beta_{1i} \\ \underset{\sim}{u}_i(\beta_{2i}) &= t_i \; -\vec{\underset{\sim}{v}}_{2i} \; \beta_{2i} \end{aligned} \qquad \text{(III.6)}$$

Observa-se que na dedução das relações (III.6) assume-se que as rotações β são pequenas. Isto exige que, na aplicação deste elemento em problemas não-lineares, sejam empregados incrementos suficientemente pequenos para manter válidas estas relações.

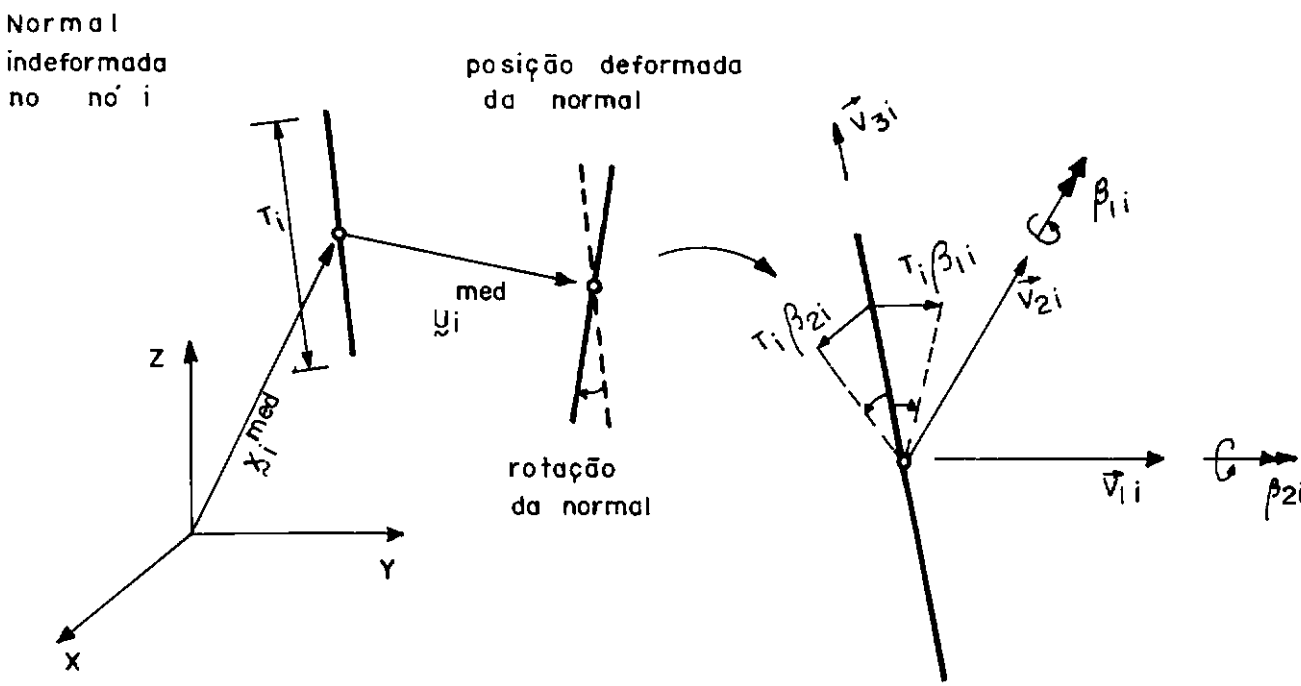


Figura III.2

Deslocamentos de um ponto na "normal" do nó *i*

III.4) Definição das Tensões e Deformações

Além dos sistemas de coordenadas mencionados no item III.2, define-se ainda um *sistema de coordenadas local* em cada ponto interior do elemento onde será efetuada a integração numérica e onde serão avaliadas as tensões e deformações. Este sistema será referenciado como $\underset{\sim}{x}'_k$ para diferenciá-lo do sistema local $\underset{\sim}{v}_{ki}$ que é definido para os

nós do elemento.

A direção $\underset{\sim}{x}'_3$ é tomada perpendicular à superfície ζ = constante, e é obtida através de um produto vetorial das direções ξ e η do sistema de coordenadas curvilíneas:

$$\underset{\sim}{x}'_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.7)}$$

As direções $\underset{\sim}{x}'_1$ e $\underset{\sim}{x}'_2$ são obtidas de modo análogo ao utilizado para determinar as direções $\underset{\sim}{v}_{1i}$ e $\underset{\sim}{v}_{2i}$ do sistema de coordenadas local nodal definido no item III.2. Assim, para obter $\underset{\sim}{x}'_1$ efetua-se o produto vetorial

$$\underset{\sim}{x}'_1 = \vec{\underset{\sim}{k}} \times \underset{\sim}{x}'_3 \qquad \text{(III.8)}$$

No caso particular de $\underset{\sim}{x}'_3$ coincidir com o eixo z-global, adota-se $\underset{\sim}{x}'_1$ coincidente com o eixo x-global. O vetor unitário correspondente a $\underset{\sim}{x}'_1$ será representado como $\vec{\underset{\sim}{x}}'_1$.

O vetor $\underset{\sim}{x}'_2$ é obtido fazendo-se

$$\underset{\sim}{x}'_2 = \underset{\sim}{x}'_3 \times \underset{\sim}{x}'_1 \qquad \text{(III.9)}$$

O vetor unitário correspondente a $\underset{\sim}{x}'_2$ será representado como $\vec{\underset{\sim}{x}}'_2$.

Uma matriz de rotação $\underset{\sim}{T}$ que relaciona este sistema

local com o sistema cartesiano global é definida como:

$$\underset{\sim}{T} = \left[\vec{\underset{\sim}{x}}'_1 \quad , \quad \vec{\underset{\sim}{x}}'_2 \quad , \quad \vec{\underset{\sim}{x}}'_3 \right] \tag{III.10}$$

As cinco componentes de deformação expressas neste sistema de coordenadas local são dadas por:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial z'} + \dfrac{\partial w'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial z'} + \dfrac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} \tag{III.11}$$

onde u', v' e w' são componentes de deslocamento correspondentes às direções $\vec{\underset{\sim}{x}}'_1$, $\vec{\underset{\sim}{x}}'_2$, $\vec{\underset{\sim}{x}}'_3$ respectivamente. A matriz de rotação definida em (III.10) permite obter as deformações de (III.11) a partir das derivadas dos deslocamentos u, v, w no sistema cartesiano global fazendo-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial x'} & \dfrac{\partial v'}{\partial x'} & \dfrac{\partial w'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial y'} & \dfrac{\partial v'}{\partial y'} & \dfrac{\partial w'}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial z'} & \dfrac{\partial v'}{\partial z'} & \dfrac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \underset{\sim}{T} \tag{III.12}$$

Por sua vez, as derivadas dos deslocamentos u, v, w com relação ao sistema global são obtidas a partir das derivadas destes deslocamentos em relação ao sistema curvilíneo $\xi\eta\zeta$ pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.13)}$$

onde $\underset{\sim}{J}$ é a matriz jacobiana definida como:

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.14)}$$

Finalmente, as derivadas dos deslocamentos em relação ao sistema curvilíneo de (III.13) podem ser obtidas derivando-se convenientemente a expressão (III.5) que define o campo de deslocamentos do elemento. Por sua vez o jacobiano (III.14) é obtido derivando a expressão (III.4) que define a geometria do elemento.

As expressões (III.11) a (III.14), bem como as derivadas das expressões (III.4) e (III.5) mencionadas acima, podem se combinar para exprimir a *matriz de deformação* linear $\underset{\sim}{B}_L$, que relaciona as componentes de deformação aos deslocamentos nodais do elemento:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}_L \; \underset{\sim}{u}^e \qquad \text{(III.15)}$$

onde $\underset{\sim}{u}^e$ é um vetor contendo, para cada nó do elemento, os cinco graus de liberdade. $\underset{\sim}{B}_L$ é então uma matriz com cinco linhas e o número de colunas é igual ao número total de

graus de liberdade do elemento.

Lembrando que foi assumido que a tensão na direção perpendicular à superfície média da casca é igual a zero, as cinco componentes de tensão no sistema local são:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(III.16)}$$

Para materiais lineares, $\underset{\sim}{D}$ é a matriz elástica dada por:

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ \text{simétrico} & & & & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.17)}$$

III.5) Matriz de Rigidez Linear

A formulação apresentada até aqui não considera a inclusão dos efeitos não lineares; a formulação para a consideração destes efeitos será apresentada no item III.7.

A matriz de rigidez linear do elemento de casca pode ser obtida fazendo-se:

$$\underset{\sim}{K}_L^e = \int_v \underset{\sim}{B}_L^T \, \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{B}_L dv = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}_L^T \, \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{B}_L J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \qquad \text{(III.18)}$$

Nesta expressão, J indica o determinante da matriz jacobiana.

O vetor de esforços internos do elemento é obtido fazendo-se:

$$\underset{\sim}{f}^e = \int_v \underset{\sim}{B}_L^T \, \underset{\sim}{\sigma} \, dv = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}_L^T \, \underset{\sim}{\sigma} \, J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \qquad \text{(III.19)}$$

A integração de (III.18) e (III.19) é feita numericamente pela regra de Gauss, permitindo-se um número variável de pontos de integração de modo a prever diferentes estratégias tais como a integração normal, que corresponde a 3 *x* 3 pontos na superfície média, e a integração reduzida, que corresponde a 2 *x* 2 pontos na superfície média.

Para a aplicação proposta, de acordo com as recomendações encontradas na literatura [13,14] será empregado o esquema de integração reduzida.

A integração na direção da espessura merece considerações especiais, que serão apresentadas no item a seguir.

III.6) Integração ao longo da espessura: Modelo em Camadas

A aplicação de um elemento de casca para a análise de tubulações submarinas em águas profundas é caracterizada por

apresentar um comportamento não linear do material, e por exigir a utilização de elementos mais espessos.

Uma formulação convencional com integração numérica com dois pontos de Gauss ao longo da espessura pode não ser adequada para determinar corretamente o perfil de tensões, e portanto para representar o comportamento da plastificação.

Para esta aplicação, o modelo em camadas apresentado por FIGUEIRAS e OWEN [15,16,17] constitui-se em uma técnica mais adequada para efetuar a discretização e integração numérica ao longo da espessura do elemento de casca.

Nesta técnica, a espessura é divida em camadas numeradas sequencialmente, a partir da superfície inferior da casca. A especificação da espessura de cada camada é feita em termos da coordenada curvilínea ζ. Para cada camada define-se uma "superfície média", que contém um ponto de integração para o cálculo das tensões. Desta forma, a distribuição de tensões toma a forma apresentada na figura III.3.

A matriz $\underset{\sim}{B}$ utilizada para calcular a matriz de rigidez e o vetor de esforços internos do elemento, como nas equações (III.18) e (III.19), será então calculada na superfície média de cada camada.

As resultantes de tensão são obtidas integrando as componentes de tensão correspondentes em relação à espessura:

- Forças normais:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_x^i \, \Delta\zeta^i \qquad \text{(III.20)}$$

- Momentos:

$$M_x = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, dz = -\frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^{n} \sigma_x^i \, \zeta^i \, \Delta\zeta^i \qquad \text{(III.21)}$$

- Cortante:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \tau_{xy}^i \, \Delta\zeta^i \qquad \text{(III.22)}$$

onde n é o número de camadas.

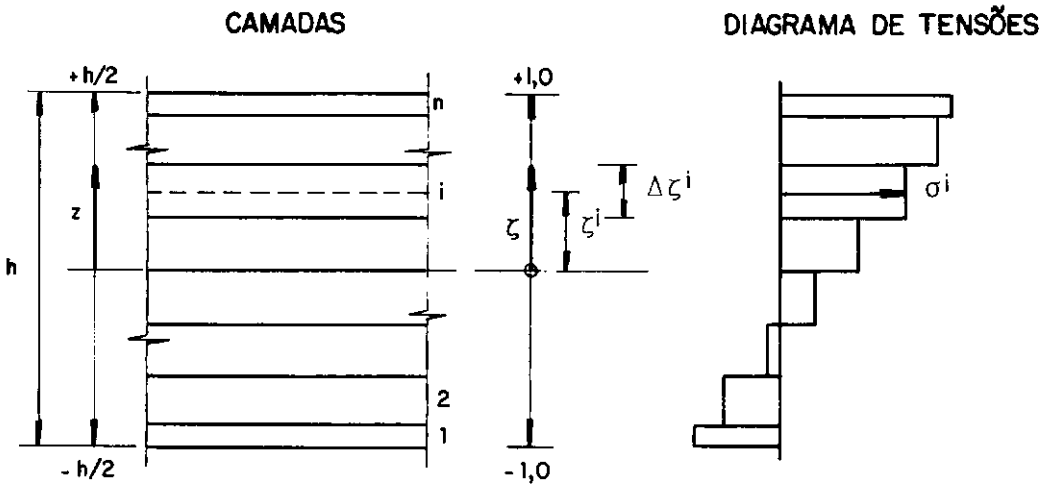


Figura III.3

III.7) Consideração dos Efeitos Não-Lineares

III.7.1) Não-linearidade Geométrica

A abordagem empregada para a descrição de problemas que apresentam grandes deslocamentos é a conhecida como *formulação lagrangiana total*, na qual o campo de tensões de Piola-Kirchhoff e o campo de deformações de Green-Lagrange referem-se à configuração geométrica original, indeformada, e o campo de deslocamentos fornece a configuração atual do sistema em relação à sua posição inicial.

Esta formulação é vantajosa para o problema do elemento degenerado de casca quadrático, já que a transferência de quantidades do sistema global para o local pode ser feita somente uma vez no decorrer de uma análise, dado que esta formulação se refere a configuração geométrica inicial.

No tratamento de problemas não-lineares, costuma-se adotar uma formulação incremental e definir uma *matriz de rigidez tangente* através da seguinte expressão:

$$\underset{\sim}{K}_T \cdot d\underset{\sim}{u}^e = d\underset{\sim}{f} \qquad \text{(III.23)}$$

Derivando-se uma expressão semelhante à (III.19) que define os esforços internos $\underset{\sim}{f}$, obtém-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez tangente de um elemento:

$$\underset{\sim}{K}_T \cdot d\underset{\sim}{u}^e = \int_v \underset{\sim}{B}^T \, d\underset{\sim}{\sigma} \, dv + \int_v d\underset{\sim}{B}^T \, \underset{\sim}{\sigma} \, dv \qquad \text{(III.24)}$$

onde deve-se considerar que a matriz deformação *x* deslocamento $\underset{\sim}{B}$ é agora composta por uma parcela infinitesimal linear $\underset{\sim}{B}_L$ e uma parcela não linear $\underset{\sim}{B}_{NL}$:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}_L + \underset{\sim}{B}_{NL} \qquad \text{(III.25)}$$

A primeira parcela do lado direito de (III.24) pode ser reescrita como uma expressão similar à (III.18):

$$\overline{\underset{\sim}{K}} = \int_v \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \, dv \qquad \text{(III.26)}$$

A partir de (III.25) se deduz que

$$d\underset{\sim}{B}^T = d\underset{\sim}{B}^T_{NL} \qquad \text{(III.27)}$$

e portanto a segunda parcela de (III.24), que define uma *matriz de rigidez geométrica* $\underset{\sim}{K}_\sigma$, pode ser dada por:

$$\underset{\sim}{K}_\sigma \cdot d\underset{\sim}{u}^e = \int_v d\underset{\sim}{B}^T_{NL} \, \underset{\sim}{\sigma} \, dv \qquad \text{(III.28)}$$

e a matriz de rigidez tangente pode ser então expressa como

$$\underset{\sim}{K}_T = \overline{\underset{\sim}{K}} + \underset{\sim}{K}_\sigma \qquad \text{(III.29)}$$

Para determinar a parcela não-linear da matriz deformação *x* deslocamento B_{NL}, o vetor de deformações de Green-Lagrange também pode ser dividido em duas parcelas, fazendo-se:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}_L + \underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} \qquad \text{(III.30)}$$

onde a parcela linear $\underset{\sim}{\varepsilon}_L$ é dada pela expressão (III.11), e a parcela não-linear $\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL}$ é expressa em coordenadas locais da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)^2\right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.31)}$$

Esta expressão para a contribuição não linear sobre o vetor de deformação pode ser reescrita da forma:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{S} \underset{\sim}{R} \qquad \text{(III.32)}$$

onde:

$$\underset{\sim}{S}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.33)}$$

e

$$\underset{\sim}{R} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.34)}$$

Por sua vez, este vetor $\underset{\sim}{R}$ pode ser representado em termos dos deslocamentos nodais $\underset{\sim}{u}^e$ como:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{u}^e \qquad \text{(III.35)}$$

Nesta expressão a matriz $\underset{\sim}{G}$ tem duas linhas e o número de colunas é igual ao número total de graus de liberdade do elemento. A primeira linha contém a contribuição de cada grau de liberdade sobre a derivada local $\frac{\partial w'}{\partial x'}$, com as correspondentes derivadas das funções de interpolação, e a segunda linha contém contribuições semelhantes sobre $\frac{\partial w'}{\partial y'}$. As componentes desta matriz são obtidas durante o cálculo da matriz B_L, como pode ser verificado observando-se as expressões (III.11) a (III.15).

Para concluir a obtenção da parcela não-linear da matriz deformação *x* deslocamento $\underset{\sim}{B}_{NL}$, toma-se a variação de $\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL}$ a partir das expressões (III.32) a (III.35):

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2}\, d\underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{R} + \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{S}\ d\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{S}\ d\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{G}\ d\underset{\sim}{u}^e \qquad \text{(III.36)}$$

de onde, por definição, deduz-se que a matriz deformação *x* deslocamento desejada é dada por:

$$\underset{\sim}{B}_{NL} = \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{G} \qquad \text{(III.37)}$$

Na implementação computacional, as matrizes $\underset{\sim}{B}_L$ e $\underset{\sim}{G}$ são calculadas apenas uma vez ao início da análise e armazenadas para uso posterior. Durante a análise incremental, os deslocamentos correntes permitem obter, através da expressão

(III.33), os componentes da matriz $\underset{\sim}{S}$ e, a partir de (III.37), obter $\underset{\sim}{B}_{NL}$.

Finalmente, para determinar a matriz de rigidez tangente $\underset{\sim}{K}_T$, resta avaliar a matriz geométrica $\underset{\sim}{K}_\sigma$. Substituindo-se (III.37) em (III.28), resulta:

$$\underset{\sim}{K}_\sigma \, d\underset{\sim}{u}^e = \int_v \underset{\sim}{G}^T \, d\underset{\sim}{S}^T \, \underset{\sim}{\sigma} \, dv \qquad \text{(III.38)}$$

Considerando (III.33) e (III.34), o termo $d\underset{\sim}{S}^T.\underset{\sim}{\sigma}$ pode ser escrito na forma:

$$d\underset{\sim}{S}^T.\underset{\sim}{\sigma} = [\underset{\sim}{\sigma}] \, \underset{\sim}{G} \, d\underset{\sim}{u}^e \qquad \text{(III.39)}$$

onde a matriz $[\underset{\sim}{\sigma}]$ é formada pelos componentes do vetor de tensões atualizado de Piola-Kirchhoff:

$$[\underset{\sim}{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.40)}$$

Substituindo (III.39) em (III.38) obtem-se a matriz de rigidez geométrica:

$$\underset{\sim}{K}_\sigma = \int_v \underset{\sim}{G}^T \, [\underset{\sim}{\sigma}] \, \underset{\sim}{G} \, dv \qquad \text{(III.41)}$$

que é atualizada a cada passo do processo incremental a partir dos valores correntes das tensões de Piola-Kirchhoff, e tomando-se a matriz $\underset{\sim}{G}$ calculada e armazenada no início da análise.

III.7.2) Não-Linearidade Física

A Teoria da Plasticidade [18,19] permite descrever o comportamento elastoplástico de um material a partir dos seguintes procedimentos:

- Definição das relações constitutivas do material, e

- Estabelecimento de um critério de escoamento que determine o nível de tensões em que o material começa a plastificar.

A formulação do problema elastoplástico pode ser ilustrada através do estudo do caso de um estado uniaxial de tensões, como o apresentado na figura III.4 e então generalizada para um estado multiaxial.

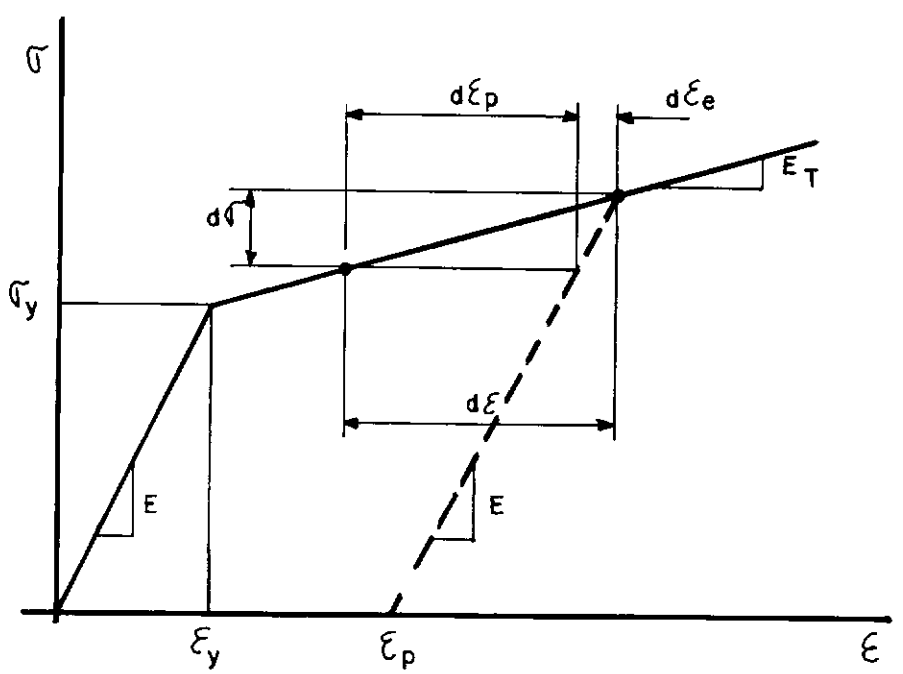


Figura III.4

a) Critério de Escoamento

Para o estado uniaxial de tensões, o critério de escoamento expressa o início da plastificação quando a tensão atuante σ atinge um limite σ_y. Uma deformação plástica subsequente irá alterar o valor deste limite, que representa a tensão necessária para produzir um novo escoamento.

Generalizando para um estado multiaxial de tensões, o critério de escoamento é caracterizado por uma função F que descreve a transição entre o regime elástico e plástico, e pode-se dizer que o escoamento ocorre quando:

$$F(\underset{\sim}{\sigma},k) = f(\underset{\sim}{\sigma}) - Y(k) = 0 \qquad \text{(III.42)}$$

onde $f(\underset{\sim}{\sigma})$ é uma função do estado de tensões atual e o limite de escoamento Y pode ser função de um parâmetro de endurecimento do material, k.

Definindo a tensão efetiva ou o potencial plástico, $\bar{\sigma}$, como uma função de escoamento de Huber-Mises para materiais isotrópicos, tem-se:

$$f = \bar{\sigma}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 +$$

$$+ \; 3 \tau_{12}^2 + 3 \tau_{13}^2 + 3 \tau_{23}^2 \qquad \text{(III.43)}$$

onde os σ's e τ's são componentes de tensão e os índices 1,2 e 3 referem-se as direções dos três eixos principais.

Desenvolvendo a expressão e assumindo que σ_3 é igual a zero, chega-se a:

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 3\tau_{12}^2 + 3\tau_{13}^2 + 3\tau_{23}^2 \qquad \text{(III.44)}$$

b) Relações Constitutivas

O comportamento elástico do material antes de atingir a tensão de escoamento σ_y é descrito, para o estado uniaxial, por:

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad \text{(III.45)}$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Para um estado multiaxial de tensões como o representado pelo problema aqui estudado, este comportamento elástico é descrito pela expressão (III.16).

O comportamento plástico é caracterizado por uma grande variação nas deformações para um pequeno acréscimo nas tensões, e por uma deformação ε_p, que permanece mesmo após o descarregamento.

Tomando o caso uniaxial, o incremento de deformação $d\varepsilon$ é composto por uma contribuição elástica $d\varepsilon_e$ e uma contribuição plástica $d\varepsilon_p$, ou seja,

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \qquad \text{(III.46)}$$

O incremento de tensões pode ser expresso por:

$$d\sigma = E \left(d\varepsilon - d\varepsilon_p \right) \qquad \text{(III.47)}$$

Alternativamente, tem-se

$$d\sigma = E_T \, d\varepsilon \qquad \text{(III.48)}$$

onde E_T é o módulo de elasticidade tangente; pode ter-se ainda

$$d\sigma = H \, d\varepsilon_p \qquad \text{(III.49)}$$

onde H é o parâmetro de endurecimento do material ("strain hardening" ou "working hardening parameter"). Este parâmetro pode ser obtido a partir de E e E_T pela seguinte expressão:

$$H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \qquad \text{(III.50)}$$

A expressão (III.46) define o comportamento do material após o escoamento inicial, aonde o incremento de deformação $d\underset{\sim}{\varepsilon}$ correspondente a um incremento de tensão $d\underset{\sim}{\sigma}$ é composto por uma parcela elástica e uma parcela plástica.

Generalizando para o caso multiaxial, considerando-se (III.16) o incremento elástico pode ser expresso por:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}_e = \underset{\sim}{D}^{-1} \, d\underset{\sim}{\sigma} \qquad \text{(III.51)}$$

O incremento plástico é dado pela lei de escoamento plástico:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad \text{(III.52)}$$

onde $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade a ser determinada e $\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$ é um vetor de direção normal à superfície de escoamento no espaço geométrico de tensões, conforme mostra a figura III.5.

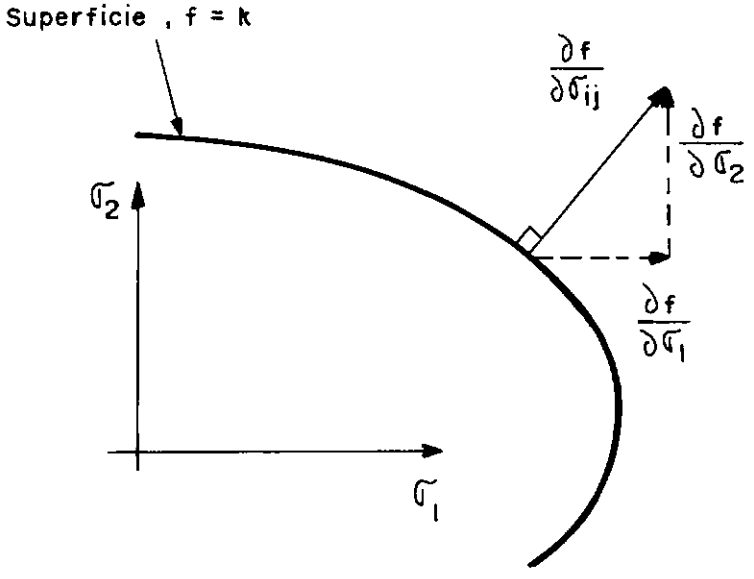


Figura III.5

O incremento total de deformação é então expresso por:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{D}^{-1} d\underset{\sim}{\sigma} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad \text{(III.53)}$$

Diferenciando-se a expressão (III.42), tem-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} d\underset{\sim}{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial k} dk \qquad \text{(III.54)}$$

que pode ser escrita como:

$$\underset{\sim}{a}^T d\underset{\sim}{\sigma} - A\, d\lambda = 0 \qquad \text{(III.55)}$$

onde

$$\underset{\sim}{a} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

e

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial k} dk \ .$$

Colocando a expressão (III.53) em função de $d\underset{\sim}{\sigma}$, e substituindo em (III.55), após algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$d\lambda = \frac{1}{A + \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{D}\, d\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(III.56)}$$

então a relação tensão / deformação elasto-plástica incremental é:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}_{ep}\, d\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(III.57)}$$

onde:

$$\underset{\sim}{D}_{ep} = \left[\underset{\sim}{D} - \frac{1}{A + \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{a} \right] \qquad \text{(III.58)}$$

A matriz de rigidez tangente do material a ser utilizada nesta análise, é então,

$$\underset{\sim}{K} = \int_v \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}_{ep} \underset{\sim}{B} \, dv \qquad \text{(III.59)}$$

CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO DA CARGA DE COLAPSO

IV.1) Considerações preliminares sobre a análise não-linear

O problema básico de uma análise não linear é determinar o estado de equilíbrio de um corpo sob a ação de cargas aplicadas. A representação das condições de equilíbrio de um modelo de elementos finitos que idealiza um problema físico pode ser expressa pela equação [20]:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{P} - {}^{t}\underset{\sim}{F} = 0 \qquad \text{(IV.1)} $$

onde $\underset{\sim}{P}$ é o vetor de cargas externas, aplicadas nos pontos nodais em uma dada configuração de equilíbrio caracterizada por um tempo t, e $\underset{\sim}{F}$ é o vetor de esforços internos correspondente às tensões nesta mesma configuração.

Para uma análise não-linear estática, o tempo t é uma variável conveniente que denota as diferentes intensidades de aplicação da carga e suas correspondentes configurações. A solução do problema não linear é obtida satisfazendo a relação de equilíbrio (IV.1) através da história da aplicação da carga, tomando a variável de tempo t desde zero até o tempo máximo de interesse.

O cálculo da resposta não-linear é normalmente efetuado através de uma análise incremental passo a passo, onde a

carga total aplicada é dividida em níveis. Assume-se que a solução para um tempo t é conhecida, e procura-se a solução para o tempo $t+\Delta t$, onde Δt é um incremento discreto de tempo convenientemente escolhido. Então, considerando a equação de equilíbrio no tempo $t+\Delta t$, tem-se:

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{P} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F} = 0 \qquad \text{(IV.2)} $$

Os esforços no tempo $t+\Delta t$ podem ser expressos a partir da solução conhecida no tempo t:

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F} = {}^{t}\underset{\sim}{F} + \Delta\underset{\sim}{F} \qquad \text{(IV.3)} $$

onde $\Delta\underset{\sim}{F}$ é o incremento das forças internas do tempo t ao tempo $t+\Delta t$. Assumindo uma linearização no entorno da configuração atual, pode-se obter uma aproximação para este vetor através da seguinte expressão:

$$ \Delta\underset{\sim}{F} \simeq {}^{t}\underset{\sim}{K}\,\Delta\underset{\sim}{u} \qquad \text{(IV.4)} $$

onde ${}^{t}\underset{\sim}{K}$ é a matriz de rigidez tangente que corresponde às condições físicas e geométricas no tempo t, e $\Delta\underset{\sim}{u}$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nodais. De (IV.4) se obtem, considerando também (IV.3) e (IV.2), que:

$$ {}^{t}\underset{\sim}{K}\,\Delta\underset{\sim}{u} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{P} - {}^{t}\underset{\sim}{F} \qquad \text{(IV.5)} $$

Uma aproximação para os deslocamentos no tempo $t+\Delta t$ pode então ser obtida resolvendo-se (IV.5) para $\Delta\underset{\sim}{u}$ e fazendo

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u} \simeq {}^{t}\underset{\sim}{u} + \Delta\underset{\sim}{u} \qquad \text{(IV.6)} $$

Poderia-se agora avaliar uma aproximação para as tensões e os correspondentes esforços nodais no tempo $t+\Delta t$, e então prosseguir para o cálculo do próximo incremento de tempo.

No entanto, devido à aproximação assumida em (IV.4), a solução pode estar sujeita a erros significativos, dependendo do tamanho dos incrementos. É necessário então utilizar um processo iterativo para a verificação do equilíbrio, iterando até obter-se uma solução com uma precisão adequada.

Os métodos iterativos mais utilizados são os de *Newton-Raphson* e suas derivações. As equações empregadas neste método são as seguintes, para $i = 1,2,3...$:

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{K}^{(i-1)} \cdot \Delta\underset{\sim}{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{P} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(i-1)} \qquad \text{(IV.7)} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{u}^{(i-1)} + \Delta\underset{\sim}{u}^{(i)} \qquad \text{(IV.8)} $$

com as condições iniciais

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{K}^{(0)} = {}^{t}\underset{\sim}{K} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(0)} = {}^{t}\underset{\sim}{F} \qquad \text{(IV.9)} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{U}^{(0)} = {}^{t}\underset{\sim}{U} $$

A iteração continua até que algum critério de convergência apropriado seja satisfeito.

O método de *Newton-Raphson padrão* consiste em reavaliar a matriz de rigidez tangente ${}^{t}\underset{\sim}{K}^{(i)}$ a cada iteração, apresentando um alto custo computacional que de modo geral não corresponde aos benefícios obtidos.

Uma variação deste método, algumas vezes referida como o método das *tensões iniciais* (initial stress), é definida pelo uso da matriz de rigidez inicial ${}^{0}\underset{\sim}{K}$ durante todo o processo incremental:

$$ {}^{0}\underset{\sim}{K} \cdot \Delta\underset{\sim}{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{P} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(i-1)} \qquad \text{(IV.10)} $$

Neste caso a matriz ${}^{0}\underset{\sim}{K}$ precisa ser avaliada e fatorizada apenas uma vez, evitando o custo de múltiplas reavaliações e decomposições de matrizes tangentes. Este método corresponde à linearização da resposta sobre a configuração inicial do sistema de elementos finitos, e pode resultar numa solução de convergência lenta ou na sua divergência.

Uma estratégia intermediária usualmente referida como o método de *Newton-Raphson Modificado* consiste em atualizar a matriz de rigidez ao início de todos ou alguns incrementos de tempo, e mantê-la constante durante as iterações. A escolha de em quais incrementos a matriz deve ser atualizada pode ser feita em função do grau de não linearidade e do tipo da resposta do sistema.

Para este método as equações de equilíbrio podem ser escritas da forma:

$$\tau_{\underset{\sim}{K}} \cdot \Delta\underset{\sim}{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{P} - {}^{t+\Delta t}\underset{\sim}{F}^{(i-1)} \qquad \text{(IV.11)}$$

onde τ corresponde a uma das configurações de equilíbrio escolhidas para a reavaliação. Caso não se conheça o comportamento do sistema, toma-se a princípio τ igual a t, ou seja, a reavaliação é efetuada no início de cada incremento de tempo.

IV.2) Considerações sobre a determinação da carga limite

Diversas abordagens costumam ser empregadas para a determinação da carga crítica ou limite em problemas de instabilidade estrutural, que variam de acordo com os problemas em que são aplicados, com o rigor que se exige para a solução e com o custo computacional que pode ser dispendido.

a) Flambagem linearizada

O procedimento mais simples é o conhecido como *flambagem linearizada* [21], onde a condição de equilíbrio é definida por um problema de autovalor:

$$(\underset{\sim}{K}_L - \lambda\, \underset{\sim}{K}_G)\, \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(IV.12)}$$

onde $\underset{\sim}{K}_L$ é a matriz de rigidez linear, e $\underset{\sim}{K}_G$ é a matriz de rigidez geométrica; o menor autovalor λ_1 fornece o fator da

carga crítica, e o autovetor $\underset{\sim}{\phi}_1$ correspondente fornece o modo de flambagem.

Este método supõe que os deslocamentos pré-críticos são desprezíveis, e neste caso pode fornecer uma aproximação razoável para a carga limite; no entanto, não é recomendado para problemas com um grau de não linearidade significativo.

BATHE e DVORKIN [21] sugerem uma abordagem semelhante, onde ao invés de tomar-se um problema de autovalor com a matriz de rigidez linear, efetua-se uma análise não-linear incremental até um determinado instante t, a partir do qual resolve-se o seguinte problema de autovalor:

$$({}^{t}\underset{\sim}{K} + \gamma\ {}^{t-\Delta t}\underset{\sim}{K}) \cdot \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(IV.13)}$$

O fator de carga crítica seria então dado por

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 - \gamma_1} \qquad \text{(IV.14)}$$

onde γ_1 é novamente o menor autovalor de (IV.13).

O principal problema desta abordagem é exatamente determinar até que nível de carga deve-se efetuar a análise não-linear incremental. Quando não se conhece o comportamento da estrutura previamente, a utilização desta estratégia pode ser ao mesmo tempo anti-econômica e superestimar a carga limite, já que assume que a partir do instante $t - \Delta t$ o comportamento é linear.

b) Análise não-linear completa

Para a consideração adequada de todos os efeitos não-lineares, a abordagem correta seria empregar uma análise não-linear incremental-iterativa completa. No entanto, o principal obstáculo para a utilização desta abordagem continua sendo a determinação prévia dos níveis de carga para cada incremento.

Sem o conhecimento quantitativo do comportamento da estrutura, pode-se prescrever incrementos muito pequenos, tornando a solução muito cara, ou ao contrário pode-se prescrever incrementos grandes demais que levam a problemas de convergência no processo iterativo de verificação de equilíbrio.

No mesmo trabalho [21], BATHE e DVORKIN apresentam um procedimento baseado em uma análise não-linear incremental-iterativa completa, com uma técnica de seleção automática de incrementos de carga. Outros autores apresentam procedimentos semelhantes (p.ex. [22,23,24]), que procuram contornar a ausência de um conhecimento prévio na determinação da carga limite, e permitem também acompanhar o comportamento pós-crítico da estrutura.

Abordagens intermediárias utilizam uma análise não-linear incremental-iterativa apenas para determinar a carga limite, que pode ser detectada quando o processo iterativo de verificação do equilíbrio não consegue convergir para um dado incremento de carga correspondente a

um instante t, ou quando o algoritmo de solução do sistema de equações lineares utilizado detecta que a matriz de rigidez tangente deixa de ser positiva-definida.

Neste último caso a fatorização da matriz de rigidez tangente, reavaliada a cada incremento, acusa a presença de um ou mais pivôs negativos, ou seja, quando algum componente d_{ii} da matriz diagonal $\underset{\sim}{D}$ de

$$^{t+\Delta t}\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{L}^{T} \qquad \text{(IV.15)}$$

for negativo.

Nestas situações, o nível de carga correspondente ao instante anterior constitui-se em um limite inferior para a carga de colapso, e o nível de carga corrente pode ser tomado como um limite superior.

Alguns autores [25] propõem técnicas para refinar esta estimativa. Se a passagem pela carga limite foi detectada pela presença de um pivô negativo, pode-se construir um problema de autovalor baseado na diferença das matrizes tangentes deste instante e do instante anterior:

$$(^{t}\underset{\sim}{K} - \lambda\ \Delta\underset{\sim}{K})\ \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(IV.16)}$$

O menor autovalor λ_1 fornece então o parâmetro de carga crítica, e o autovetor correspondente ϕ_1 o modo de colapso.

Por outro lado, se a passagem da carga limite foi

detectada por problemas de convergência pode-se, como proposto em [25], reiniciar a análise não-linear a partir do instante t utilizando-se incrementos de carga menores, e com uma estratégia puramente incremental, sem efetuar iterações para o equilíbrio, até que a passagem pela carga limite seja novamente detectada por um pivô negativo, quando então pode-se adotar o procedimento mencionado acima de montar e resolver o problema de autovalor (IV.16).

c) Controle de deslocamentos

O algoritmo de controle de deslocamento sugerido por HAISLER e STRICKLIN [26] tem sido empregado no estudo de problemas de instabilidade estrutural em conjunto com análises não-lineares incremental-iterativas. Considerando o sistema incremental da equação (IV.5), e definindo um parâmetro de carga λ, o carregamento pode ser expresso por:

$$\underset{\sim}{P} = \lambda \, \overline{\underset{\sim}{P}} \qquad \text{(IV.17)}$$

onde $\overline{\underset{\sim}{P}}$ é a distribuição espacial do vetor de carregamento.

Então,

$$\underset{\sim}{K} \, \Delta\underset{\sim}{u} = \lambda \, \overline{\underset{\sim}{P}} - \underset{\sim}{F} \qquad \text{(IV.18)}$$

O algoritmo de controle de deslocamento consiste em incrementar-se um dos componentes de deslocamento ao invés da carga. Supondo-se que o deslocamento Δu_i seja especificado, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \underset{\sim}{K}_{12} \\ \underset{\sim}{K}_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underset{\sim}{u}_1 \\ \Delta u_i \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \overline{\underset{\sim}{P}}_1 \\ \overline{P}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.19)}$$

onde:

$\Delta \underset{\sim}{u}_1$ é o vetor de deslocamentos não especificado

$\underset{\sim}{K}_{11}$ é a matriz $\underset{\sim}{K}$ retirando-se a coluna e a linha *i*

$\underset{\sim}{K}_{21}$ é a linha *i* da matriz $\underset{\sim}{K}$ retirando-se a coluna *i*

$\underset{\sim}{K}_{12}$ é a coluna *i* da matriz $\underset{\sim}{K}$ retirando-se a linha *i*

K_{22} é o elemento K_{ii} da matriz $\underset{\sim}{K}$

$\overline{\underset{\sim}{P}}_1$ é o vetor $\overline{\underset{\sim}{P}}$ com a linha *i* removida

$\overline{P}_2$ é o elemento $\overline{P}_i$ do vetor $\overline{\underset{\sim}{P}}$

$\underset{\sim}{F}_1$ é o vetor $\underset{\sim}{F}$ com a linha *i* removida

F_2 é o elemento F_i do vetor $\underset{\sim}{F}$

Removendo Δu_i do lado esquerdo da expressão (IV.19):

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & -\overline{\underset{\sim}{P}}_1 \\ \underset{\sim}{K}_{21} & -\overline{P}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underset{\sim}{u}_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} - \Delta u_i \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{K}_{12} \\ K_{22} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.20)}$$

A expressão acima é um sistema de *n* equações com *n* incógnitas, incluindo λ. A matriz dos coeficientes é agora não simétrica, consequentemente a solução de (IV.20) é computacionalmente ineficiente. Para contornar este problema, expande-se (IV.20), obtendo-se:

$$\underset{\sim}{K}_{11} \Delta \underset{\sim}{u}_1 = \lambda \overline{\underset{\sim}{P}}_1 - \underset{\sim}{F}_1 - \Delta u_i \underset{\sim}{K}_{12} \qquad \text{(IV.21)}$$

$$\underset{\sim}{K}_{21}\ \Delta\underset{\sim}{u}_1 - \lambda\ \overline{P}_2 = -\ F_2 - \Delta u_i\ K_{22} \qquad \text{(IV.22)}$$

Sendo o lado direito de (IV.21) linear em λ, a solução para $\Delta\underset{\sim}{u}_1$ pode ser expressa por:

$$\Delta\underset{\sim}{u}_1 = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\ \lambda \qquad \text{(IV.23)}$$

onde $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$ são as soluções das equações abaixo:

$$\underset{\sim}{K}_{11}\ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{F}_1 - \Delta u_i\ \underset{\sim}{K}_{12} \qquad \text{(IV.24)}$$

$$\underset{\sim}{K}_{11}\ \underset{\sim}{B} = \overline{\underset{\sim}{P}}_1 \qquad \text{(IV.25)}$$

Substituindo-se (IV.23) em (IV.22), tem-se:

$$\lambda = \frac{-F_2 - \underset{\sim}{K}_{21}\ \underset{\sim}{A} - K_{22}\ \Delta u_i}{\underset{\sim}{K}_{21}\ \underset{\sim}{B} - \overline{P}_2} \qquad \text{(IV.26)}$$

Obtendo-se o valor de λ, a solução para $\Delta\underset{\sim}{u}_1$ é obtida substituindo-se em (IV.23).

Considerando a equação (IV.11) do M.N.R.M., obtem-se:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \overline{\underset{\sim}{P}}_1 \\ \underset{\sim}{K}_{21} & \overline{P}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\underset{\sim}{u}_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.27)}$$

A utilização de (IV.27) para o controle de deslocamentos procede da mesma forma que (IV.20). A única diferença é que os valores dos deslocamentos no início do processo iterativo são calculados usando um incremento de

deslocamentos fixado. O elemento de $\Delta \underset{\sim}{u}^{(i+1)}$ correspondente à direção na qual o incremento de deslocamento foi especificado permanece nulo durante as iterações.

IV.3) Determinação da carga limite de tubulações submarinas

Para a determinação da carga crítica de tubulações submarinas submetidas a elevadas pressões hidrostáticas externas, será empregada uma estratégia baseada em uma análise não-linear completa, com um procedimento incremental-iterativo que utiliza o algoritmo de Newton-Raphson modificado, e com a utilização opcional da técnica de controle de deslocamentos.

Um fator que inibe a utilização generalizada desta técnica é a definição de qual grau de liberdade deve ser controlado, e quais os incrementos de deslocamento que devem ser aplicados.

No caso da aplicação em tubulações submarinas, sabe-se que a configuração de colapso é caracterizada pelo achatamento da seção transversal. A análise não-linear pode então ser efetuada aplicando-se sucessivos incrementos de deslocamento na direção radial de um grau de liberdade da superfície média do tubo. No comportamento pós-crítico este deslocamento não pode atingir valores maiores do que o raio menos metade da espessura da tubulação, e sabe-se que o colapso ocorre para deslocamentos correspondentes a uma fração do valor do raio da tubulação.

Assim, a técnica de controle de deslocamentos permite determinar valores mais precisos para os incrementos da análise não-linear, podendo-se estimar, por exemplo, que o colapso ocorre para deslocamentos menores do que um décimo do raio, e desta forma obter mais facilmente o valor máximo do parâmetro de carga que irá definir a pressão de colapso.

A matriz de rigidez tangente é reavaliada ao início de cada incremento; a falha na convergência do processo iterativo de verificação do equilíbrio em um determinado instante, ou a ocorrência de um pivô negativo durante a triangularização da matriz de rigidez tangente, irá indicar que o nível de carga correspondente ao incremento anterior constitui-se em um limite inferior que fornece uma boa estimativa da carga de colapso. Esta estimativa pode ainda ser refinada através da montagem e solução de um problema de autovalor, como mencionado no item anterior.

Estes procedimentos foram implantados no programa de análise não-linear deste trabalho, que utiliza a estratégia incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson modificado, juntamente com a técnica de controle de deslocamentos e com o elemento de casca espessa não-linear descrito no capítulo anterior. O capítulo V a seguir apresenta os resultados da aplicação deste programa em alguns casos.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1) Introdução

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações do sistema computacional que foi desenvolvido baseado nas considerações apresentadas anteriormente, e que está implementado no computador VAX 8810 do NCE - Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ.

As primeiras aplicações consistem na determinação da pressão hidrostática externa que determina o colapso em configurações de tubulações submarinas, caracterizadas por diferentes relações diâmetro-espessura (D/t) e pela presença de imperfeições iniciais.

Para a geração das malhas de elementos finitos utilizadas nestas aplicações, são considerados os seguintes aspectos:

a) O comportamento do colapso é conhecido, como descrito no Capítulo II, e compõe-se no achatamento da seção da tubulação. Este modo de colapso apresenta dupla simetria, e pode-se portanto discretizar apenas um quarto da seção transversal, levando-se em conta a simetria em relação aos eixos x e y que definem a seção.

b) Pode-se discretizar um trecho finito da tubulação, utilizando-se apenas uma fila de elementos de casca e aplicando-se as devidas condições de simetria em relação ao plano *xy*.

As aplicações seguintes buscam a determinação, para certos valores de pressão hidrostática, do momento de colapso; esta determinação é útil no estudo de operações de lançamento ("laying") de tubulações submarinas.

V.2) Exemplo 1

Neste exemplo procura-se determinar a pressão de colapso de uma tubulação submarina instalada no fundo do mar, com relação D/t = 20 e as seguintes características geométricas e físicas:

$$D = 1.389"$$

$$t = 0.069"$$

$$\sigma_y = 60500 \text{ psi}$$

$$H = 3.55 \times 10^6 \text{ psi}$$

A malha de elementos finitos elaborada para este exemplo segue as considerações apresentadas no item anterior e está apresentada na figura V.1, sendo constituída por quatro elementos de casca espessa.

A análise foi feita utilizando-se a técnica de controle de deslocamentos, incrementando-se o deslocamento na direção radial do nó 9. A passagem pelo ponto crítico foi detectada

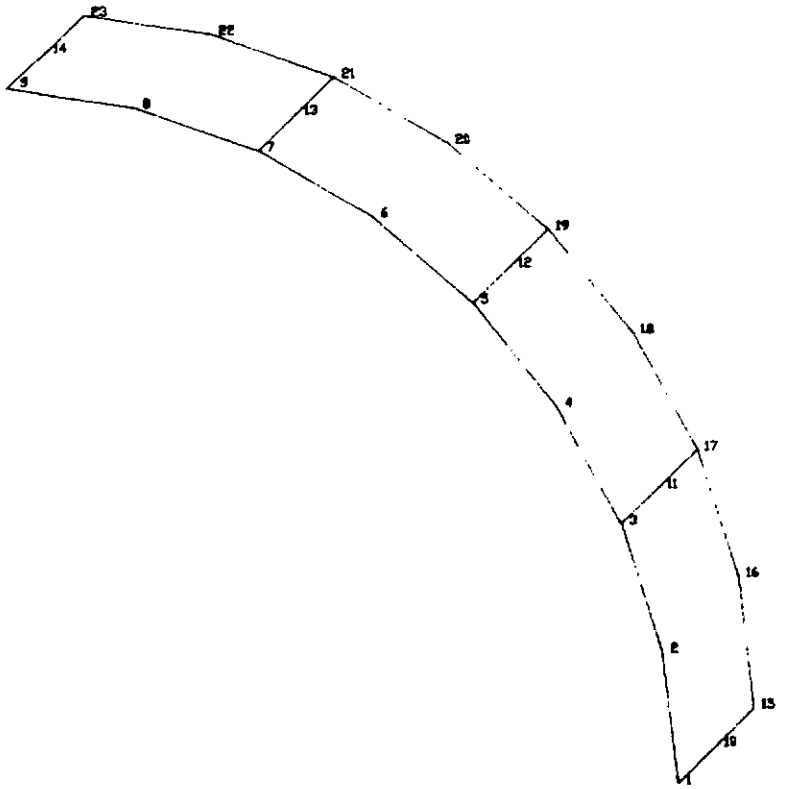


Figura V.1

Exemplo 1 - Malha de Elementos Finitos

no 16^{0} incremento, correspondente a um valor de deslocamento radial de 0.0026", quando o algoritmo de solução do sistema de equações acusou um pivô negativo.

A figura V.2 apresenta a curva com pontos deslocamento *x* parâmetro de carga obtidos ao longo desta análise, correspondentes ao deslocamento radial do nó 9. Observa-se que esta curva não apresenta uma tangente muito próxima de zero no ponto crítico. Este fato parece indicar que trata-se não de um ponto limite mas de um ponto de bifurcação, como poderia ser esperado no caso de um problema sem

imperfeições[1].

Deve-se observar também que, como o estudo do comportamento pós-crítico não está entre os objetivos deste trabalho, não se procurou implantar técnicas que permitissem prosseguir a análise além do ponto crítico (como as mencionadas em [21,22,23,24]). Assim, não se obteve uma representação da configuração deformada correspondente ao colapso, como a comentada na introdução deste capítulo. A figura V.3 apresenta uma configuração deformada da tubulação, correspondente ao incremento imediatamente anterior àquele em que foi detectado o ponto crítico.

Nesta figura observa-se um encolhimento ou diminuição uniforme do raio da tubulação sob a ação da pressão externa. Esta figura não representa a magnitude real dos deslocamentos pré-críticos, que são pequenos em relação às dimensões da tubulação e estão afetados por um fator de escala para permitir sua visualização.

É interessante mencionar-se também que, como era de se esperar para um tubo perfeito sob pressão hidrostática externa constante, a plastificação ocorreu em todos os pontos de Gauss de todos os elementos simultaneamente, em um incremento correspondente ao ponto da curva apresentada na

---

[1]A estratégia utilizada neste trabalho não permite distinguir se um ponto crítico detectado se constitui em um ponto limite ou de bifurcação; o desenvolvimento de técnicas com esta finalidade, em análises não-linear incrementais pelo MEF, é um campo de pesquisa ainda pouco explorado (ver p.ex. [23]).

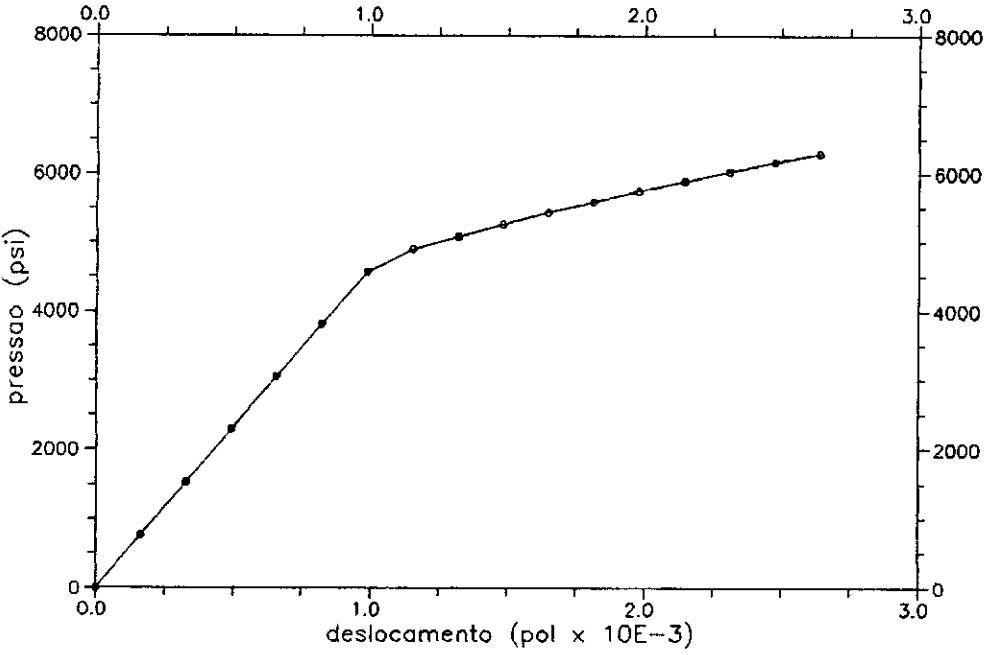


Figura V.2
Exemplo 1 – Curva de Resposta

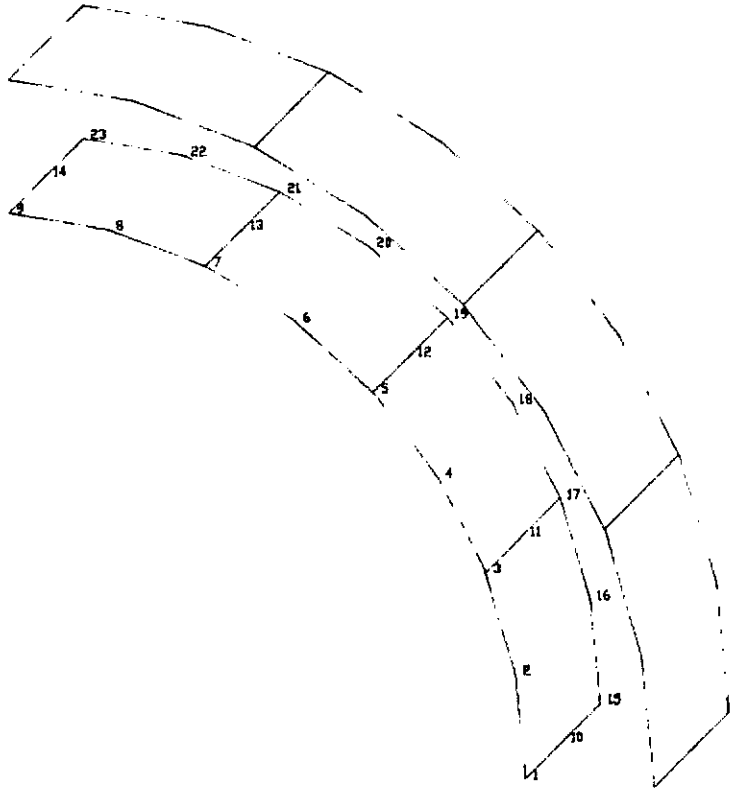


Figura V.3

Exemplo 1 - Configuração Deformada

figura V.2 onde se verifica uma mudança brusca de declividade. Como o modelo elastoplástico considera um endurecimento do material, o colapso não ocorre neste ponto mas um pouco mais adiante.

O parâmetro de carga correspondente ao incremento anterior ao ponto crítico indica um valor de pressão hidrostática igual a 6285.6 psi. Este resultado é comparado com o apresentado na referência [8], no qual a pressão de colapso vale 6300 psi.

V.3) Exemplo 2

Este exemplo difere do anterior pela relação diâmetro/espessura considerada, que vale agora 16 e indica uma tubulação ainda mais espessa. As características geométricas e físicas são as seguintes:

$$D = 1.426"$$

$$t = 0.089"$$

$$\sigma_y = 60500 \text{ psi}$$

$$H = 2.07 \times 10^6 \text{ psi}$$

A malha de elementos finitos é semelhante à adotada no exemplo anterior (fig. V.1), também composta por quatro elementos de casca com seis camadas ao longo da espessura, e seguindo-se as mesmas considerações ali mencionadas.

Novamente utilizou-se a técnica de controle de deslocamentos, incrementando-se o deslocamento na direção

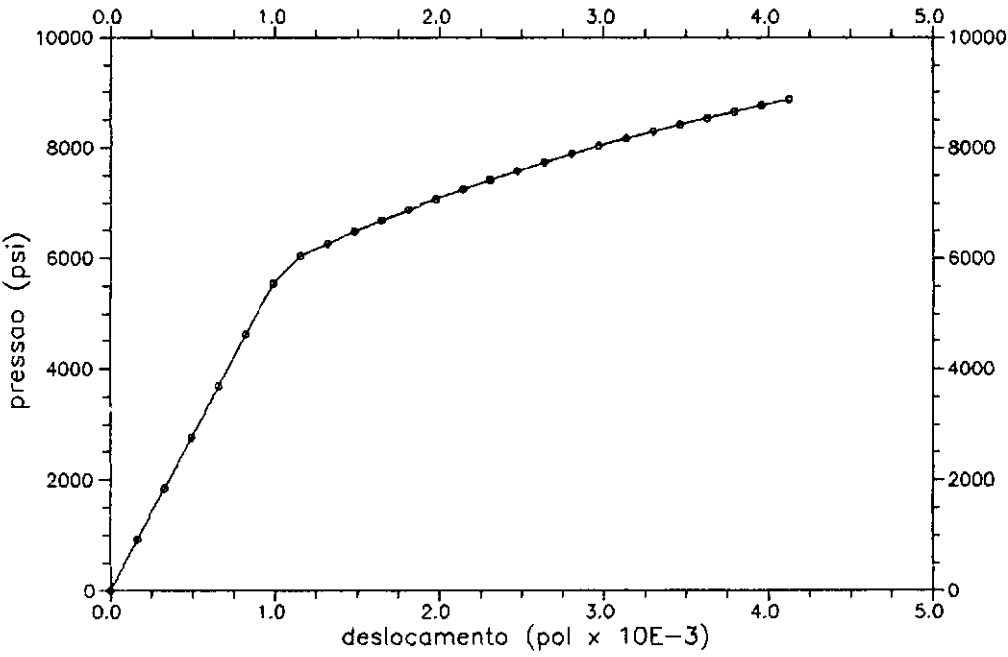


Figura V.4
Exemplo 2 - Curva de Resposta

radial do nó 9. A passagem por um ponto crítico foi detectada no 25^0 incremento, correspondente a um valor de deslocamento radial de 0.0041", quando, de modo semelhante ao observado no exemplo anterior, o algoritmo de solução do sistema de equações acusou um pivô negativo.

A curva carga *x* deslocamento está apresentada na figura V.4; permanecem válidos os comentários apresentados a respeito do exemplo anterior. A configuração deformada antes do colapso é semelhante à apresentada na figura V.3.

O parâmetro de carga correspondente ao incremento anterior ao ponto crítico indica um limite inferior para o valor de pressão hidrostática de colapso igual a 8882 psi. A tabela V.1 resume os resultados deste exemplo e do anterior,

comparando-os com os resultados analíticos apresentados na referência [8].

Exemplo	Carga Crítica (psi)	
	MEF	Ref. [8]
1	6286	6300
2	8882	9000

TABELA V.1

V.4) Exemplo 3

Neste exemplo analisa-se a tubulação com as características apresentadas no item V.2 que descreve o exemplo 1, porém agora considerando-se uma imperfeição inicial na tubulação, correspondente a uma ovalização de 2%. Esta ovalização corresponde a um valor de deformação inicial w_o = 0.007", como representado na figura V.5.

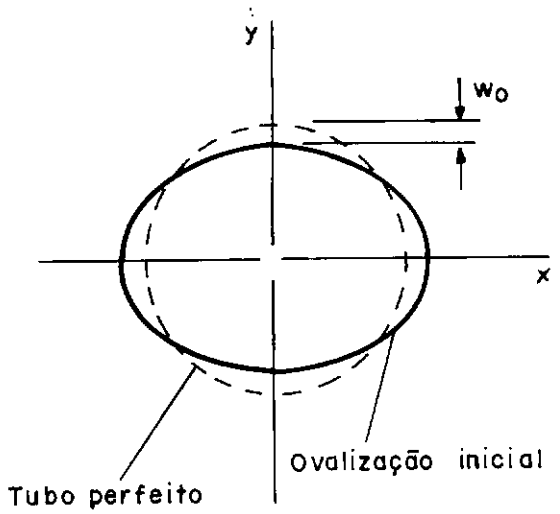


Figura V.5

Tubulação Ovalizada

A malha de elementos finitos é semelhante à adotada para o exemplo 1 (fig. V.1), também composta por quatro elementos de casca e seguindo-se as mesmas considerações ali mencionadas, mas naturalmente levando em conta a geometria ovalizada apresentada na figura V.5.

Novamente utilizou-se a técnica de controle de deslocamentos, incrementando-se o deslocamento na direção radial do nó 9. A passagem pelo ponto crítico foi detectada no 51^{o} incremento, correspondente a um valor de deslocamento radial de 0.0084", quando a convergência não foi alcançada após 45 iterações.

A figura V.6 apresenta a curva com os pontos deslocamento *x* parâmetro de carga obtidos ao longo desta análise, apresentando uma tangente próxima de zero no ponto crítico.

A figura V.7 apresenta a configuração deformada da tubulação, correspondente ao incremento imediatamente anterior àquele em que foi detectado o ponto crítico. A configuração deformada está superposta à geometria inicial, e neste caso não está afetada por nenhum fator de escala. A configuração deformada indica a numeração dos nós, de modo a ajudar na sua distinção contra a geometria inicial.

Neste caso a plastificação do tubo é gradual e não se verifica uma mudança brusca na declividade da curva de resposta. A plastificação teve início no incremento correspondente ao deslocamento de $3{,}63 \times 10^{-3}$ pol, no

elemento 1 (situado na direção do maior raio, cf. Fig. V.5, eixo x), nos dois pontos de Gauss situados mais próximo ao eixo x e na camada mais interna do tubo.

Em seguida ocorreu a plastificação, no elemento 4 (situado na direção de menor raio, cf. Fig. V.5, eixo y), dos dois pontos de Gauss situados mais próximo ao eixo y e na camada mais externa do tubo.

Este processo prosseguiu nos incrementos seguintes, até que, no incremento anterior ao ponto crítico, estavam plastificados todos os pontos de Gauss das três camadas mais internas do elemento 1; no elemento 4, todos os pontos de Gauss das duas camadas mais externas, e os dois pontos de Gauss situados mais próximo ao eixo y da terceira camada mais externa; e alguns pontos dos dois elementos intermediários.

O parâmetro de carga correspondente ao incremento anterior ao ponto crítico indica um valor de pressão hidrostática igual a 3557 psi. Este valor é consideravelmente inferior ao obtido para o tubo perfeito correspondente, apresentado no exemplo 1, indicando a importância da consideração de imperfeições iniciais.

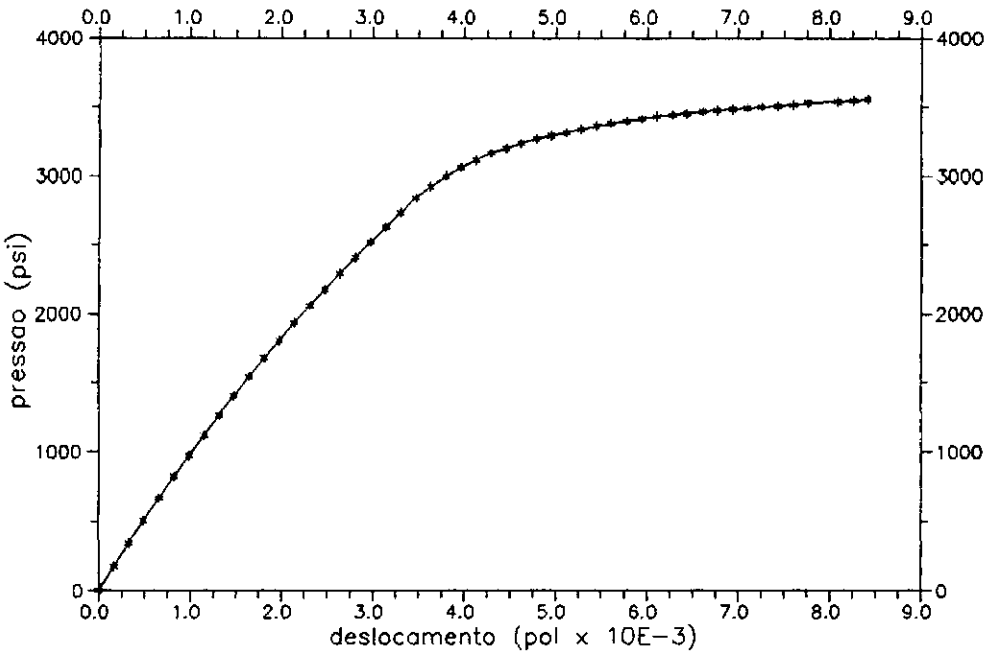


Figura V.6
Exemplo 3 – Curva de Resposta

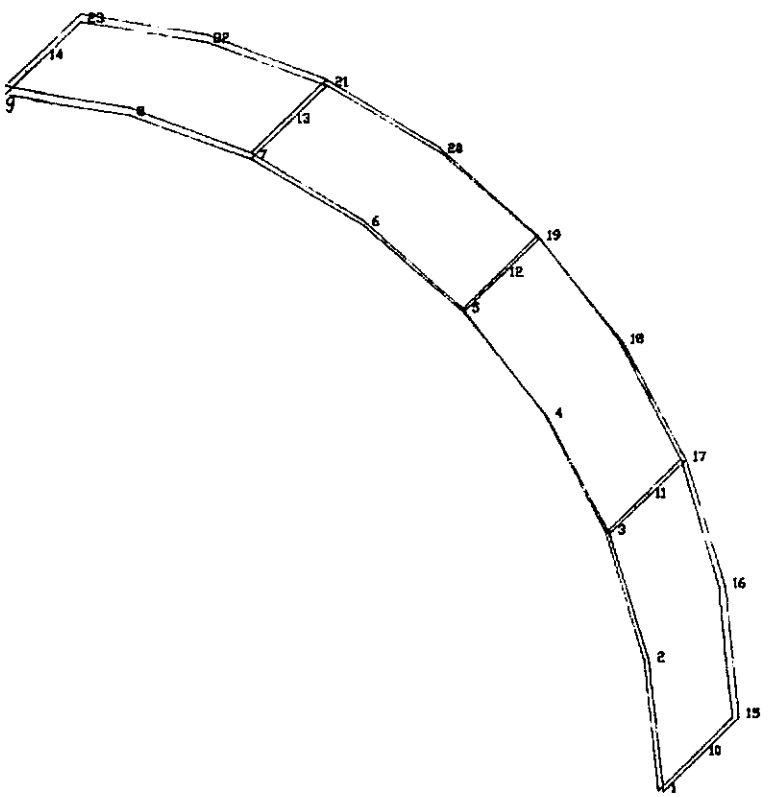


Figura V.7

Exemplo 3 - Configuração Deformada

V.5) Exemplo 4

Este exemplo e os seguintes são orientados à análise de operações de lançamento ("laying") de tubulações submarinas, que são feitas a partir de um navio equipado para este tipo de tarefa. Nestas operações, na região em que a tubulação se torna horizontal no contato com o solo ("sagbend"), além das cargas de pressão externa determinadas pelo fato de a tubulação estar vazia (para minimizar os custos e a carga dos equipamentos de lançamento), existem também efeitos de flexão. Torna-se então importante, uma vez conhecida a profundidade do local de lançamento e portanto a pressão hidrostática, determinar o máximo momento que a tubulação pode suportar, que corresponde ao momento de colapso.

Considera-se a tubulação com as características físicas e geométricas do exemplo 1; no entanto, para a aplicação do momento a malha de elementos finitos discretiza agora a metade da seção da tubulação, e é composta por 8 elementos de casca espessa, com seis camadas ao longo da espessura, conforme apresentado na figura V.8.

Este exemplo consiste na determinação do momento de colapso para uma tubulação sob pressão hidrostática externa de 1000 psi, correspondente a uma profundidade de aproximadamente 700 m. Efetua-se a análise não-linear aplicando-se inicialmente o valor integral da pressão, que permanece constante ao longo da análise, e em seguida aplicando-se uma carga de momento em incrementos crescentes. Neste caso existem duas distribuições espaciais distintas de

carregamento, e portanto não se aplica o algoritmo de controle de deslocamentos apresentado no item IV.2.c.

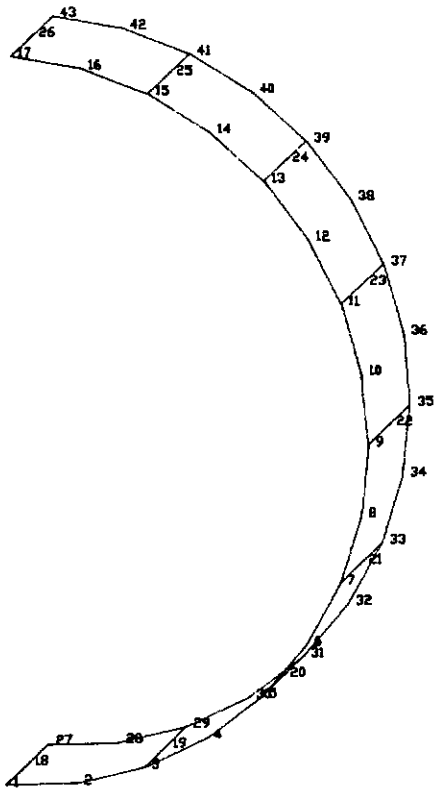


Figura V.8

Exemplo 4 - Malha de Elementos Finitos

A plastificação teve início no incremento correspondente ao deslocamento de $0,22 \times 10^{-3}$ pol. Ocorreu em pontos de Gauss do elemento no lado mais comprimido da tubulação devido à aplicação do momento, atingindo rapidamente todas as camadas ao longo da espessura.

O processo de plastificação prosseguiu atingindo os demais pontos e camadas deste elemento e do elemento vizinho; mais adiante atingiu o elemento do lado da fibra menos comprimida, até que no incremento anterior ao colapso

a plastificação havia atingido todos as camadas de todos os pontos de Gauss da tubulação.

A figura V.9 apresenta a curva momento *x* deslocamento que resulta desta análise, apresentando uma tangente próxima de zero no ponto crítico, detectado no 47^{o} incremento, quando o algoritmo de solução do sistema de equações acusou um pivô negativo. O valor correspondente para o momento de colapso é de 9400 lb.pol. Este valor será comparado com resultados analíticos e experimentais ao final da descrição do exemplo 6.

A figura V.10 apresenta uma configuração deformada da tubulação, indicada pela numeração dos nós, e superposta à geometria inicial. Esta configuração corresponde ao incremento imediatamente anterior àquele em que foi detectado o ponto crítico.

Esta figura representa a magnitude real dos deslocamentos, já que a configuração deformada não está afetada por nenhum fator de escala.

V.6) Exemplo 5

Este exemplo difere do anterior pelo valor da pressão hidrostática externa constante, que vale agora 2000 psi, correspondente a uma profundidade de aproximadamente 1400 m. A malha de elementos finitos é a mesma representada na figura V.8, e os carregamentos são aplicados seguindo-se as considerações apresentadas no item anterior.

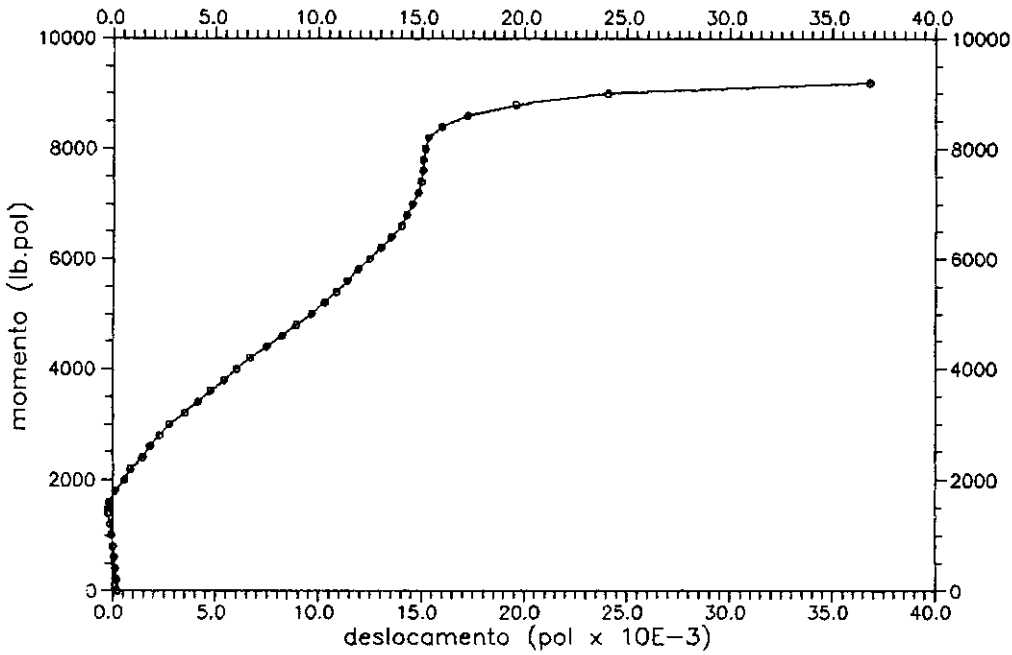


Figura V.9
Exemplo 4 – Curva de Resposta

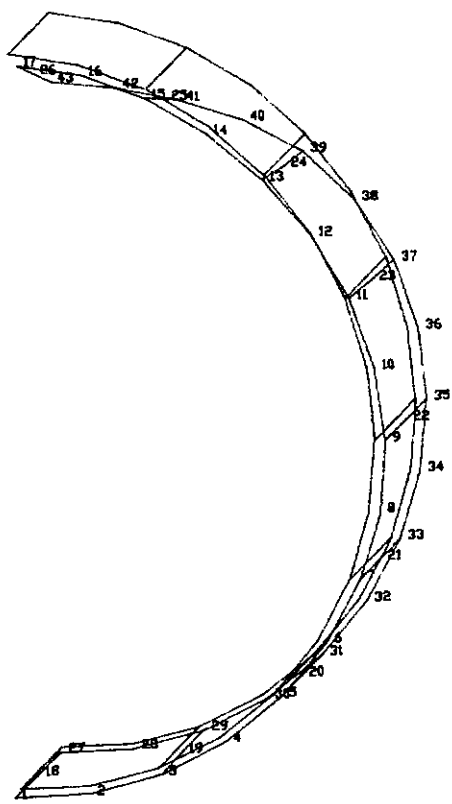


Figura V.10

Exemplo 4 - Configuração Deformada

A plastificação se inicia no incremento correspondente ao deslocamento de $0,11 \times 10^{-3}$ pol., e seguindo um processo semelhante ao descrito para o exemplo anterior, começa em pontos de Gauss do elemento no lado mais comprimido da tubulação devido à aplicação do momento. A diferença é que agora a plastificação prossegue mais rapidamente pelos elementos vizinhos e demora um pouco mais a atingir o elemento do lado da fibra menos comprimida, já que neste elemento os efeitos da pressão e do momento são opostos. Novamente, no incremento anterior ao colapso a plastificação atinge todos as camadas de todos os pontos de Gauss da tubulação.

A figura V.11 apresenta a curva momento *x* deslocamento que resulta desta análise, apresentando uma tangente próxima de zero no ponto crítico, detectado no 28^{0} incremento, quando o algoritmo de solução do sistema de equações acusou um pivô negativo. O valor correspondente para o momento de colapso é de 9333 lb.pol. Este valor será comparado com resultados analíticos e experimentais ao final da descrição do exemplo 6.

A figura V.12 apresenta a configuração deformada da tubulação, superposta à geometria inicial, e correspondente ao incremento imediatamente anterior àquele em que foi detectado o ponto crítico. Esta configuração deformada não está afetada por nenhum fator de escala.

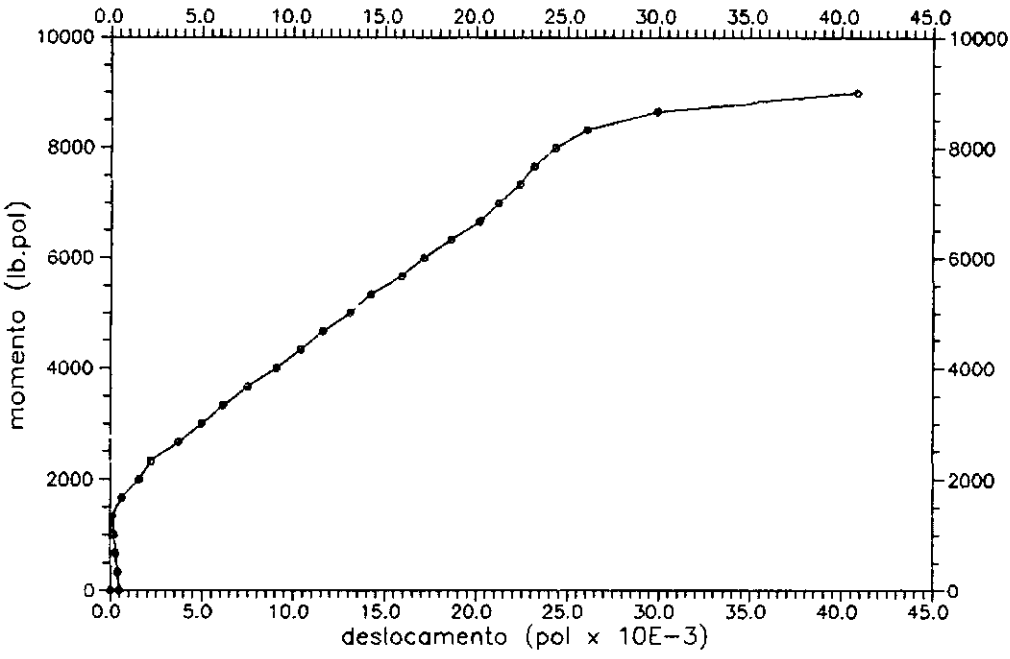


Figura V.11
Exemplo 5 – Curva de Resposta

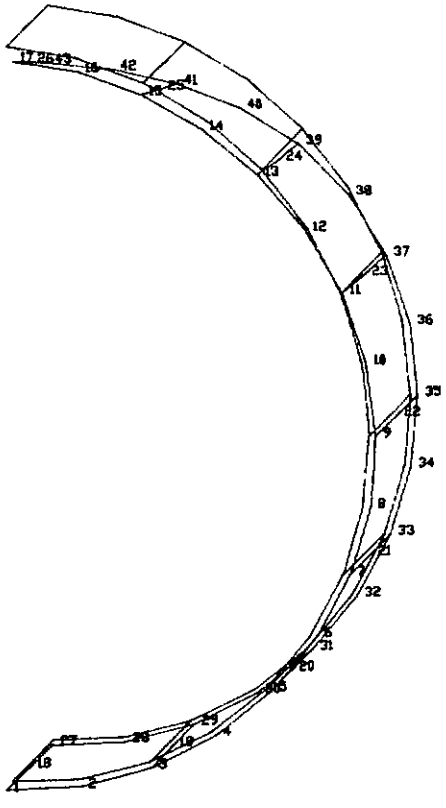


Figura V.12

Exemplo 5 - Configuração Deformada

V.7) Exemplo 6

Este exemplo difere dos dois anteriores pelo valor da pressão hidrostática externa constante, que vale agora 3000 psi, correspondente a uma profundidade de aproximadamente 2100 m.

O processo da plastificação tem início no incremento cujo deslocamento é $0,35 \times 10^{-3}$ pol., e é semelhante ao descrito para os dois exemplos anteriores; no entanto, agora a plastificação do elemento do lado da fibra menos comprimida somente se inicia após o terceiro elemento do lado mais comprimido haver plastificado. Novamente, no incremento anterior ao colapso, a plastificação atinge todos as camadas de todos os pontos de Gauss da tubulação.

A figura V.13 apresenta a curva momento *x* deslocamento que resulta desta análise. A passagem pelo ponto limite foi detectada no 38^{0} incremento, quando a convergência não foi alcançada após 45 iterações.

A figura V.14 apresenta a configuração deformada correspondente ao incremento imediatamente anterior àquele em que foi detectado o ponto crítico. Esta configuração representa a magnitude real dos deslocamentos, e está superposta à geometria inicial e indicada pela numeração dos nós.

A tabela V.2 resume os resultados deste exemplo e dos dois anteriores, comparando-os com os resultados analíticos e experimentais fornecidos na ref. [8]. Observa-se nestes

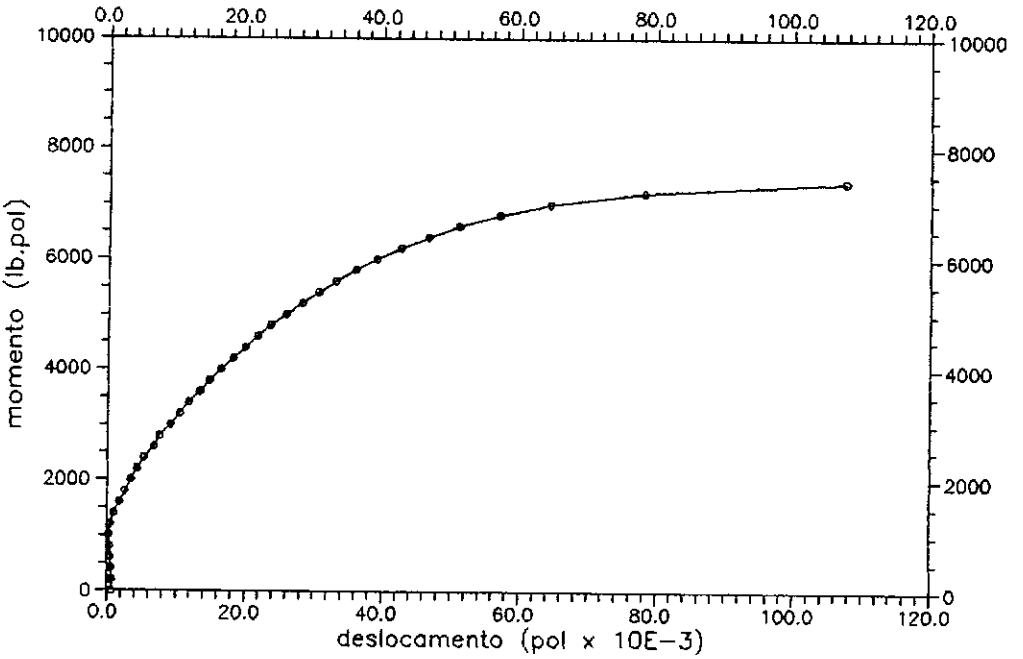


Figura V.13
Exemplo 6 – Curva de Resposta

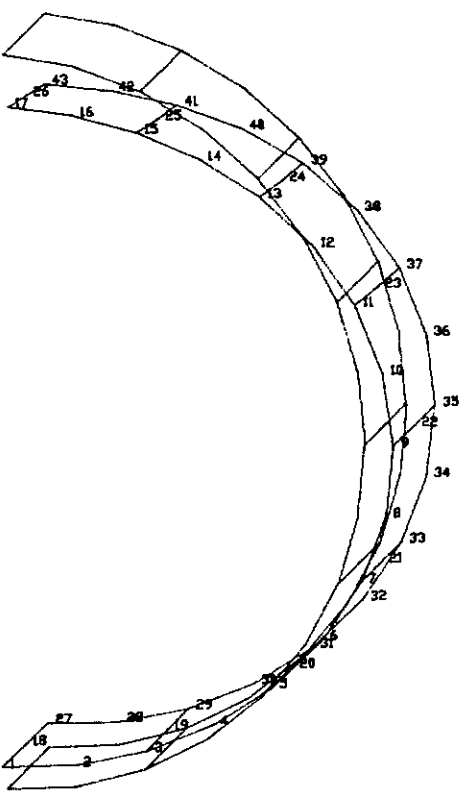


Figura V.14

Exemplo 6 - Configuração Deformada

casos um bom comportamento destas análises de elementos finitos, que aproximam-se mais dos resultados experimentais de [8] do que os resultados analíticos ali apresentados.

Exemplo	Momento de colapso (lb.pol)		
	Experimental	MEF	Analítico
4	9250	9400	9550
5	8900	9333	9400
6	8000	7600	9100

TABELA V.2

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste trabalho procurou-se desenvolver uma ferramenta computacional para a análise do colapso de tubulações submarinas em águas profundas, através da utilização do Método dos Elementos Finitos. Para isto consideraram-se elementos de casca espessa com formulação isoparamétrica degenerada, que levam em conta os devidos efeitos não lineares geométricos e físicos, e utilizam um modelo em camadas, de modo a efetuar uma representação mais realística de tubulações com baixas relações diâmetro/espessura.

As aplicações apresentadas demonstram o potencial do sistema computacional desenvolvido, já que os resultados obtidos mostram uma boa concordância com outras soluções publicadas na literatura, demonstrando assim a validade e precisão da abordagem através do método de elementos finitos, mesmo com a utilização de malhas pouco refinadas.

Na análise de operações de lançamento de tubulações, a comparação dos resultados aqui obtidos com os resultados analíticos e experimentais apresentados na referência [8] permite deduzir que o modelo analítico apresentado naquela referência é prejudicado pelas hipóteses de casca fina consideradas em sua formulação. Este fato ressalta portanto a importância da utilização de uma formulação adequada para

cascas espessas, como a apresentada neste trabalho, para a correta representação do comportamento de tubulações submarinas em águas profundas.

A partir dos resultados do capítulo anterior, algumas deduções podem ser mencionadas. Uma delas diz respeito à importância da representação de imperfeições iniciais, já que, no exemplo aonde a tubulação apresenta uma ovalização de 2%, ocorre uma redução de aproximadamente 50% na resistência do tubo a pressões externas.

Constatou-se também que as tensões combinadas devidas à pressão hidrostática e à flexão diminuem a capacidade da tubulação de suportar grandes profundidades.

Para uma adequação mais completa do programa desenvolvido ao estudo do colapso de tubulações submarinas, algumas questões devem ainda ser abordadas. A mais importante delas talvez seja a representação do comportamento elasto-plástico do material.

De fato, o modelo elasto-plástico bilinear aqui utilizado, descrito por um módulo de elasticidade, uma tensão de escoamento uniaxial e um módulo de endurecimento, não é o mais apropriado para simular uma curva tensão *x* deformação obtida por um ensaio, como a apresentada na referência [8]. Assim, pode ser interessante estudar a viabilidade de implementar um modelo elastoplástico aonde a curva tensão *x* deformação possa ser representada por

segmentos de reta.

Outra questão diz respeito à discretização da tubulação por uma determinada malha de elementos finitos, em relação ao modo de colapso assumido para a tubulação. Em tubulações instaladas no fundo do mar, o modo de colapso consiste na ovalização e achatamento da seção transversal, como mencionado no Capítulo II e na introdução do Capítulo V.

Em operações de lançamento, este modo de colapso é também o dominante, mas na referência [8] menciona-se que, para maiores relações diâmetro/espessura, pode ocorrer um fenômeno de flambagem localizada caracterizado por pequenas ondas no lado comprimido da seção da tubulação. Neste caso, uma malha como a empregada nos Exemplos 4 a 6 do Capítulo V pode não ser capaz de detectar este fenômeno.

Estas considerações ressaltam assim a necessidade de, em estudos posteriores, verificar-se a influência da utilização de malhas mais refinadas no estudo do processo de colapso de tubulações submarinas. O uso de malhas mais refinadas não irá se constituir em um empecilho para a utilização do sistema computacional aqui desenvolvido, já que, mesmo em um computador de médio porte como o VAX 8810 utilizado nas aplicações apresentadas, o custo computacional foi relativamente pequeno, nunca ultrapassando-se 20 minutos de CPU.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] SRISKANDARAJAH, T., MAHENDRAN, I.K., "Parametric Considerations of Design and Installation of Deepwater Pipelines", *European Seminar of Offshore Oil and Gas Pipeline Technology,* London, 1987.

[2] CHEN, T., SHEN, W., LIN, Z., "A Model of Analysis of Buckling Propagation in Marine Pipelines", *Proceedings of the Fifth Conference on Behavior of Offshore Structures*, Vol. 3, pp. 1331-1341, 1988.

[3] YEH, M.K., KYRIAKIDES, S., "Collapse of Deepwater Pipelines", *Offshore Technology Conference*, Vol. 2, pp. 511-520, 1986.

[4] CORONA, E., KYRIAKIDES, S., "Collapse of Pipelines under Combined Bending and External Pressure", *Proceedings of the Fifth Conference on Behavior of Offshore Structures*, Vol. 3, pp. 953-964, 1988.

[5] MURPHEY, C.E., LANGNER C.G., "Ultimate Pipe Strength Under Bending, Collapse, and Fatigue", *Proceedings of the Fourth International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, pp. 467-477, 1985.

[6] WINTER, P.E., "A Method of Analysis for Collapse of Submarine Pipelines", *Proceedings of the Third Conference on Behavior of Offshore Structures*, Vol. 2, pp. 169-186, 1982.

[7] NOMOTO, T., ENOSAWA, M., FUJITA, Y., "Simplified Method of Analysis for Collapse Strength of Submarine Pipelines Under Combined Bending, External Pressure and Axial Tension", *Proceedings of the Fifth International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering,* Vol. 3, pp. 692-699, 1986.

[8] KINZEL, G.L., SAMPATH S.G., POPELAR C.H., JOHNS T.G., and SORENSON J.E. - *The Inelastic Collapse and Buckling of Deep Water Pipelines Under Combined Moment, Pressure, and Axial Tension,* Deep Water Offshore Pipeline Group, BATTELLE, Columbus Laboratories, Ohio, USA, 1976.

[9] JENSEN, H.M., "Tube Collapse due to External Pressure", *Proceedings of the International Conference on Computational Plasticity,* Barcelona, Spain, 1987.

[10] JENSEN, H.M., "Collapse of Hidrostatically Loaded Cylindrical Shells", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 24, pp. 51-64, 1988.

[11] TOKIMASA, K., TANAKA, K., "FEM Analysis of the Collapse Strength of a Tube", *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol.108, pp. 158-164, 1986.

[12] CHEDMAIL, J.F., OELBERMANN, J., RIGON, A., "Three-Dimensional Dynamic Study of the Collapse Behavior of Thick-Walled Submarine Pipeline", *Proceedings of the Third International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 1, pp. 608-623, 1984.

[13] ZIENKIEWICZ, O.C. - *The Finite Element Method in Engineering*, 3rd. Edition, McGraw-Hill, 1977.

[14] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., and TOO, J.M., "Reduced Integration Technique in General analysis of Plates and Shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, pp. 275-290, 1971.

[15] OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., "Elasto-plastic Analysis of Anisotropic Plates and Shells by the Semiloof Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 521-539, 1983.

[16] OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., "Anisotropic Elasto-plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 541-566, 1983.

[17] HINTON, E., OWEN, D.R.J. - *Finite Element Software for Plates and Shells,* Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984.

[18] OWEN, D.R.J., and HINTON, E. - *Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice,* Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980.

[19] COOK, R.D., MALKUS, D.S., and PLESHA, M.E. - *Concepts and Applicatios of Finite Element Analysis,* Wiley Inc., USA, 1989.

[20] BATHE, K.J. - *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1982.

[21] BATHE, K.J., DVORKIN, E.N., "On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Computer and Structures*, Vol. 17, pp. 871-879, 1983.

[22] FELIPPA, C.A., *Notas do Seminário sobre Métodos de Elementos Finitos Não-Lineares*, AMCE - Associação para Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, Novembro de 1987.

[23] FELIPPA, C.A., "Traversing Critical Points with Penalty Springs", *Proceedings of NUMETA'87 Conference*, Swansea, Wales, July 1987.

[24] JEUSETTE, J.P., LASCHET, G. e IDELSOHN, S., "An Effective Automatic Incremental-Iterative Method for Static Nonlinear Structural Analysis", *Computer & Structures*, vol. 32 n. 1, pp. 125-135, 1989.

[25] FUJIKAKE, M., "A Simple Approach to Bifurcation and

Limit Point Calculations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 183-191, 1985.

[26] HAISLER, W.E., STRICKLIN, J.A., KEY, J.E., "Displacement Incrementation in Non-linear Structural Analysis by the Self-correcting Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 3-10, 1977.