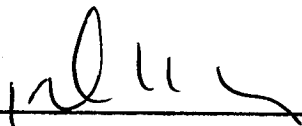


# ESTUDO COMPARATIVO DE FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Beatris Maria Teixeira Neitzel

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.  
( Presidente )



Prof. Webe João Mansur, Ph.d.



Prof. Luiz Henry Monken e Silva, Dr.Eng.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1991

**NEITZEL, BEATRIS MARIA TEIXEIRA**

**Estudo Comparativo de Formulações Alternativas do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional [ Rio de Janeiro ] 1991.**

**vii, 72 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1991)**

**Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE**

**1. Elementos de Contorno    2. Elasticidade Bidimensional**

**I. COPPE/UFRJ**

**II. Título ( série ).**

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. José Claudio de Faria Telles.

Aos meus amigos Rosane M. Alves, Beatriz S. L. P de Lima e Severino F. Silva Neto.

À Universidade Estadual de Maringá ( PR ).

À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior ( CAPES ).

Para o meu marido, Ivo.

**Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências ( M.Sc. ).**

**ESTUDO COMPARATIVO DE FORMULACÕES ALTERNATIVAS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL**

**Beatris Maria Teixeira Neitzel  
MAIO, 1991**

**Orientador: Prof. José Claudio de Faria Telles  
Programa: Engenharia Civil**

**Neste trabalho apresenta-se um estudo comparativo de formulações alternativas do Método dos Elementos de Contorno para problemas de elasticidade bidimensional.**

**Este estudo, realizado através de testes computacionais, utilizou-se das formulações direta e indireta do Método dos Elementos de Contorno, do Método da Superposição e do Método das Descontinuidades de Deslocamentos.**

**Nos testes realizados avaliou-se o comportamento dos métodos acima citados em pontos do domínio e do contorno.**

**Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.).**

**A COMPARATIVE STUDY OF ALTERNATIVE FORMULATIONS OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL ELASTOSTATICS.**

**Beatris Maria Teixeira Neitzel  
MAY, 1991**

**Thesis Supervisor: José Claudio de Faria Telles  
Department: Civil Engineering**

**A comparative study with alternative formulations to the Boundary Element Method was made for two-dimensional elasticity problems.**

**The direct Boundary Element Method, indirect Boundary Element Method, Superposition Method and the Displacement Discontinuity Method were compared through computational tests applied at internal and boundary points.**

## **Conteúdo**

- 1 - Introdução, 1
- 2 - Formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, 3
- 3 - Formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno, 13
- 4 - Método da Superposição, 20
- 5 - Método das Descontinuidades de Deslocamentos, 26
- 6 - Aplicações, 35
- 7 - Conclusão, 59
- Apêndices, 63
- Bibliografia, 71

## 1

# INTRODUÇÃO

A formulação matemática de problemas de engenharia é, de maneira geral, feita através de sistemas de equações diferenciais ou integrais.

As técnicas de contorno utilizam, para solução de problemas, formulações integrais ou representações integrais de algumas das variáveis envolvidas. As representações devem satisfazer os sistemas de equações diferenciais que descrevem os problemas e contêm distribuições incógnitas, que são determinadas para que as variáveis presentes nas representações satisfaçam as condições de contorno. Estas distribuições podem ser quantidades relacionadas aos problemas ou quantidades auxiliares.

Quando as representações integrais contêm distribuições auxiliares, a formulação é denominada indireta. Se as distribuições são relacionadas com variáveis do problema, a formulação é denominada direta (Silva, 1988).

Aplicações de formulações indiretas à problemas de elasticidade foram feitas por Jaswon e Symm (Jaswon, Symm, 1977), Banerjee e Butterfield (Banerjee, Butterfield, 1981), Crouch e Starfield (Crouch, Starfield, 1974), Burgess e Mahajerin (Burgess, Mahajerin, 1984), Hartmann (Hartmann, 1981) e outros. Formulações diretas foram aplicadas à mesma classe de problemas por Brebbia (Brebbia, 1978), Telles (Telles, 1983), Brebbia, Telles e Wrobel (Brebbia, Telles, Wrobel, 1984), Crouch e Starfield (Crouch, Starfield, 1974), Banerjee e Butterfield (Banerjee, Butterfield, 1984) e outros.

No presente trabalho, problemas bidimensionais de elasticidade foram avaliados através de uma formulação direta, a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, e três formulações indiretas. Das formulações indiretas, duas são formulações integrais, a formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno e o Método das Descontinuidades de Deslocamentos e, a terceira, um procedimento de colocação, o Método da Superposição . Nesta análise, feita através de testes computacionais, avaliou-se o comportamento de pontos do contorno e do domínio dos problemas em relação à algumas das variáveis dos mesmos e os resultados foram comparados às suas soluções analíticas.

As formulações dos métodos utilizados e as aplicações numéricas com as quais foram testados são apresentadas a seguir.

## **2**

# **FORMULAÇÃO DIRETA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

## **INTRODUÇÃO**

Em formulações diretas as incógnitas das equações integrais são as variáveis físicas do problema, podendo ser citados como exemplos os deslocamentos e as forças de superfície nos problemas de elasticidade ( Telles,1983 ).

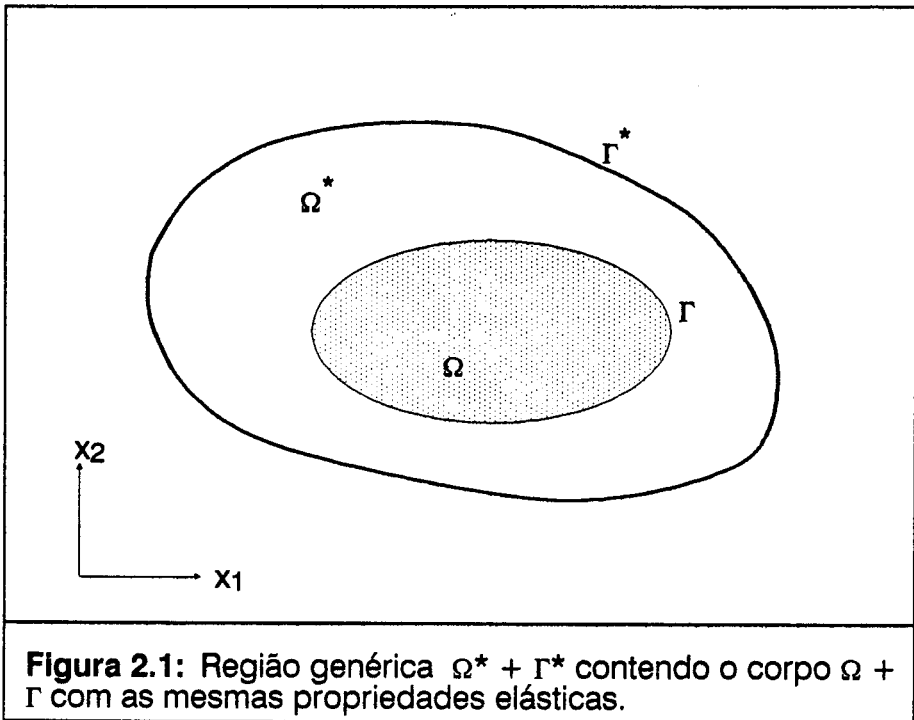
Apresenta-se, a seguir, a forma pela qual um problema de elasticidade bidimensional governado pela equação de Navier, com condições de contorno prescritas, é transformado em uma equação integral e solucionado numericamente através da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno.

Inicialmente, obtém-se uma relação de reciprocidade que dá origem à identidade de Somigliana para os deslocamentos.

Após, através de um procedimento de limite, determina-se a equação integral de contorno, cuja aplicação é apresentada para regiões finitas e infinitas.

Continuando, apresenta-se a forma de obtenção das tensões no domínio do problema e, a seguir, a forma geral de procedimento para solução numérica das equações integrais.

Os conceitos de região regular utilizados são os definidos por Kellog e a solução singular utilizada para a equação de Navier é a solução de Kelvin ( Apêndice 2 ).



## IDENTIDADE DE SOMIGLIANA

Considere-se um corpo com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  em estado de equilíbrio, sob a ação de forças e deslocamentos prescritos. Este estado será representado por tensões  $\sigma_{ij}$ , deformações  $\epsilon_{ij}$ , deslocamentos  $u_i$ , forças de superfície  $p_i$  e forças de volume  $b_i$  ( Telles, 1983 ).

Considere-se, também, um domínio  $\Omega^*$  e um contorno  $\Gamma^*$  contendo o corpo anteriormente citado ( figura 2.1 ). Esta nova região, considerada igualmente em equilíbrio, será representada por  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\epsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$  e  $b_i^*$ .

Se as propriedades elásticas são válidas para os dois casos, pode-se escrever a seguinte equação integral, observada a simetria dos tensores envolvidos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (2.1)$$

Integrando-se por partes a equação [ 2.1 ] e utilizando-se as equações [ A1.1 ] e [ A1.2 ], tem-se

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (2.2)$$

que corresponde ao segundo teorema de Betti.

Admitindo-se que as componentes das forças de volume  $b_i^*$  correspondem à forças unitárias concentradas  $P_i$  aplicadas num ponto  $\xi$  no domínio  $\Omega^*$  em duas direções ortogonais correspondentes ao sistema cartesiano considerado, tem-se

$$b_j^* = \delta(\xi, x) P_j \quad (2.3)$$

onde  $\delta(\xi, x)$  é a função delta de Dirac.

Observadas as propriedades da função delta de Dirac, a primeira integral da equação [ 2.2 ] torna-se, para  $\xi \in \Omega$ ,

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) P_i \quad (2.4)$$

Entretanto, se cada carga concentrada atuar de forma independente, os deslocamentos e as forças de superfície podem ser escritos sob a forma

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (2.5)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (2.6)$$

onde  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  representam, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  do ponto  $x$ , denominado ponto campo, devido à uma força unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ , denominado ponto fonte.

Substituindo-se as equações [ 2.5 ] e [ 2.6 ] na equação [ 2.2 ], pode-se representar as duas componentes isoladas de deslocamentos em  $\xi$  sob a forma

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \dots \\ + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (2.7)$$

A equação [ 2.7 ] é conhecida como Identidade de Somigliana para os deslocamentos e foi obtida através de uma relação de reciprocidade e uma solução singular da equação de Navier satisfazendo

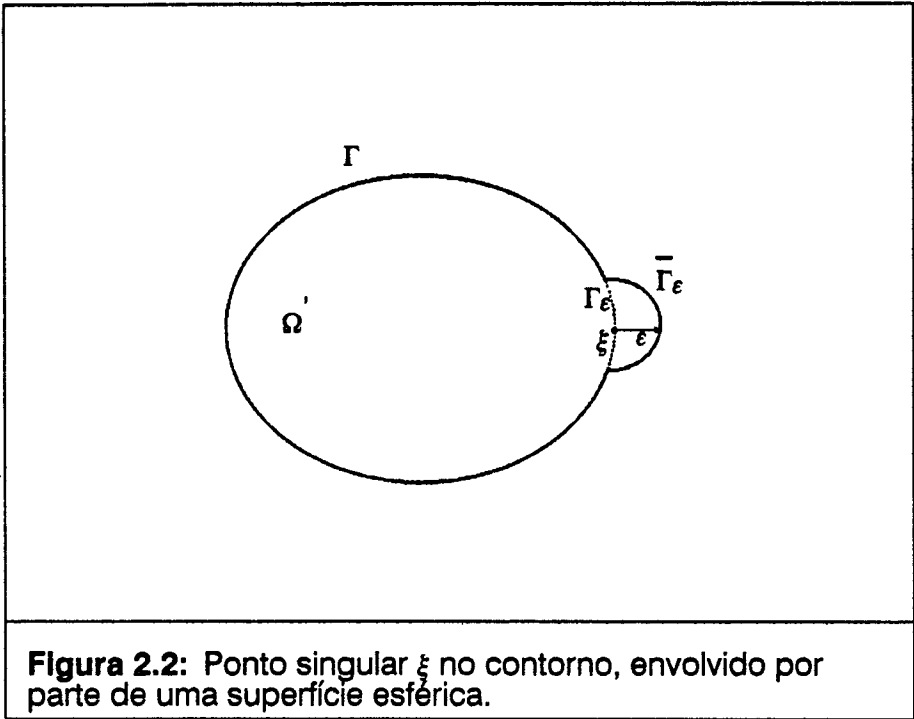
$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + \delta(\xi, x) P_j = 0 \quad (2.8)$$

As soluções da equação [ 2.8 ] são denominadas soluções fundamentais.

## EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A obtenção da identidade de Somigliana apresentada anteriormente independe da solução fundamental a ser utilizada. Entretanto, sua aplicação para a solução proposta por Kelvin ( Apêndice 2 ) torna-se possível, apenas, quando os valores de deslocamentos e forças de superfície são conhecidos no contorno ( Brebbia, Telles, Wrobel, 1984 ).

Assumindo-se que, o corpo em consideração pode ser representado como na figura [ 2.2 ], onde  $\xi$  é um ponto interno, envolvido por parte de uma superfície circular de raio  $\varepsilon$ , a equação [ 2.7 ] pode ser escrita como



**Figura 2.2:** Ponto singular  $\xi$  no contorno, envolvido por parte de uma superfície esférica.

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \dots$$

$$+ \int_{\Omega'} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (2.9)$$

Aplicando-se um procedimento de limite às integrais da equação [ 2.9 ] quando  $\epsilon$  tende à zero obtém-se a equação

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) =$$

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega \quad (2.10)$$

Nesta equação, a integral à esquerda deve ser efetuada no sentido do valor principal de Cauchy e o termo  $C_{ij}$  é representado por

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (2.11)$$

Caso o contorno em  $\xi$  seja suave

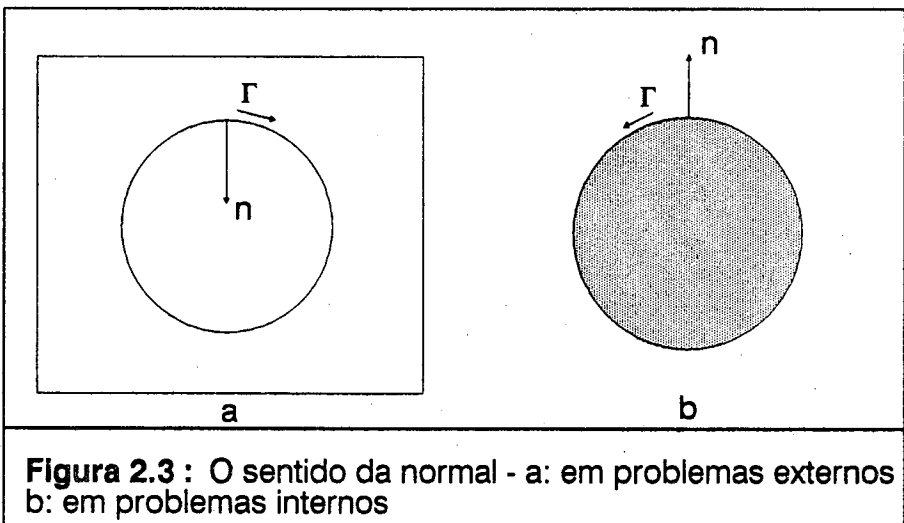
$$C_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad (2.12)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( Apêndice 1 ). Outros casos são apresentados por Hartmann ( Hartmann, 1981 ). Estes valores podem ser determinados, ainda, através da aplicação de movimentos de corpo rígido à equação [ 2.10 ].

A equação [ 2.10 ] relaciona deslocamentos e forças de superfície no contorno e, portanto, quando as condições de contorno são utilizadas pode-se obter, através dela, as incógnitas no mesmo.

## REGIÕES INFINITAS

Para aplicação da equação [ 2.10 ] na solução de problemas em domínios infinitos, devem ser observadas algumas hipóteses relacionadas ao comportamento das funções envolvidas. Estas hipóteses referem-se às condições de regularidade das funções para uma superfície infinitamente distante ( Brebbia, Telles, Wrobel, 1984 ).



**Figura 2.3 :** O sentido da normal - a: em problemas externos  
b: em problemas internos

Considerando-se as condições de regularidade satisfeitas e, para simplificação, que as forças de volume  $b_i(x)$  sejam nulas, problemas de cavidades em meio infinito podem ser solucionados por

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (2.13)$$

A identidade de Somigliana é, igualmente, válida para regiões infinitas, devendo ser observada a diferença da posição da normal ao contorno que, em regiões infinitas, aponta para dentro da cavidade. Em regiões finitas, aponta para fora do corpo ( figura [ 2.3 ] ).

## TENSÕES EM PONTOS INTERNOS

A equação [ 2.7 ] é uma representação contínua dos deslocamentos em um ponto  $\xi \in \Omega$ . O estado de tensão neste ponto pode ser obtido através da derivação da equação [ 2.7 ] em relação às coordenadas de  $\xi$  ( Brebbia, Telles, Wrobel, 1984 ). Esta derivada, combinada com a lei de Hooke, fornece a expressão

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) \dots \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para problemas bidimensionais  $u_{ijk}^*$  e  $p_{ijk}^*$  têm a forma

$$u_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk} - r_{,k} \delta_{ij}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (2.15)$$

$$p_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + r(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \dots \right]$$

$$+ 4\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (4n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} ] \quad (2.16)$$

A equação [ 2.14 ] é válida para o estado plano de deformação, podendo ser utilizada para o estado plano de tensão desde que  $\nu$  seja substituído por  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ .

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para solução aproximada da equação [ 2.10 ] aplica-se um procedimento numérico onde o contorno  $\Gamma$  é discretizado em uma série de elementos. Supondo-se esta discretização ser de  $N$  elementos e, omitindo-se por simplicidade as forças de volume, a equação [ 2.10 ] torna-se, para cada ponto nodal  $\xi_i$  do contorno  $\Gamma$

$$C_{ij}(\xi_i) u_j(\xi_i) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(\xi_i, x) u_j(x) d\Gamma_k(x) =$$

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(\xi_i, x) p_j(x) d\Gamma_k(x) \quad (2.17)$$

Sobre cada um dos  $N$  elementos, os deslocamentos e forças de superfície terão aproximação constante ou de ordem superior, tais como aproximações lineares, quadráticas, etc.

Após a discretização, a equação [ 2.17 ] é aplicada aos nós funcionais  $\xi_i$  de  $\Gamma$  e as integrais são efetuadas sobre cada elemento, em geral, numericamente. Deve-se observar que, quando os pontos fonte e campo coincidem, estas integrais serão singulares. Desta forma, é obtido um sistema de  $M$  equações algébricas lineares, envolvendo um conjunto de  $M$  valores nodais de deslocamentos e  $M$  valores nodais de forças de superfície. Os valores de deslocamentos e tensões em pontos do domínio poderão, a partir da solução das incógnitas no contorno, ser deter-

minados através das equações apropriadas ( equações [ 2.7 ] e [ 2.14 ] ), também sob forma discretizada ( Brebbia, Telles, Wrobel, 1984 ).

Na equação [ 2.17 ], as formas matriciais dos termos para o caso bidimensional são

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad \underline{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Considerando-se uma distribuição de deslocamentos e forças de superfície constantes, a equação [ 2.17 ] torna-se

$$C_{ij}(\xi_i) u_j(\xi_i) + \sum_{k=1}^N u_j(x) \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(\xi_i, x) d\Gamma_k(x) = \sum_{k=1}^N p_j(x) \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(\xi_i, x) d\Gamma_k(x) \quad (2.20)$$

Sob forma matricial, tem-se

$$\underline{C}(\xi_i) \underline{u}(\xi_i) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \underline{p}^* d\Gamma \underline{u} = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \underline{u}^* d\Gamma \underline{p} \quad (2.21)$$

Para aproximações de deslocamentos e forças de superfície de ordem superior, o número de nós funcionais sobre o elemento estará ligado à função de forma utilizada para descrever a aproximação. De forma geral, os deslocamentos e forças de superfície poderão ser escritos, em função de seus valores nodais e das funções de forma adotadas como

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^n \quad (2.22 a)$$

$$\underline{p} = \underline{N} \underline{p}^n \quad (2.22 b)$$

onde a matriz  $\underline{N}$  contém as funções de forma e os vetores  $\underline{u}^n$  e  $\underline{p}^n$  os valores de deslocamentos e forças de superfície nos pontos escolhidos (nós funcionais).

Utilizando-se as equações [ 2.22 ] pode-se escrever a equação [ 2.17 ] sob forma matricial

$$\underline{C}(\xi_i) \underline{u}(\xi_i) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma \underline{u}^n = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma \underline{p}^n \quad (2.23)$$

Após a discretização da equação [ 2.17 ] com a respectiva escolha da aproximação de deslocamentos e forças de superfície, é feita a sua aplicação em todos os nós funcionais. O resultado será um sistema de equações com dimensão igual à duas vezes o número de nós funcionais e com a forma

$$[\underline{C} + \underline{H}] \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (2.24)$$

Na equação [ 2.24 ] os vetores  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  contêm os valores dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais. Os elementos das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  serão obtidos através de integração sobre os elementos e são denominados coeficientes de influência. A matriz  $\underline{C}$  ( Hartmann, 1981 ) será incorporada à matriz  $\underline{H}$  e a equação [ 2.24 ] torna-se

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (2.25)$$

Com a introdução das condições de contorno, obtém-se a forma final do sistema de equações que, após solucionado, fornece os valores de incógnitas no contorno. Obtidos estes valores pode-se determinar deslocamentos e tensões em qualquer ponto do domínio.

# 3

## FORMULAÇÃO INDIRETA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

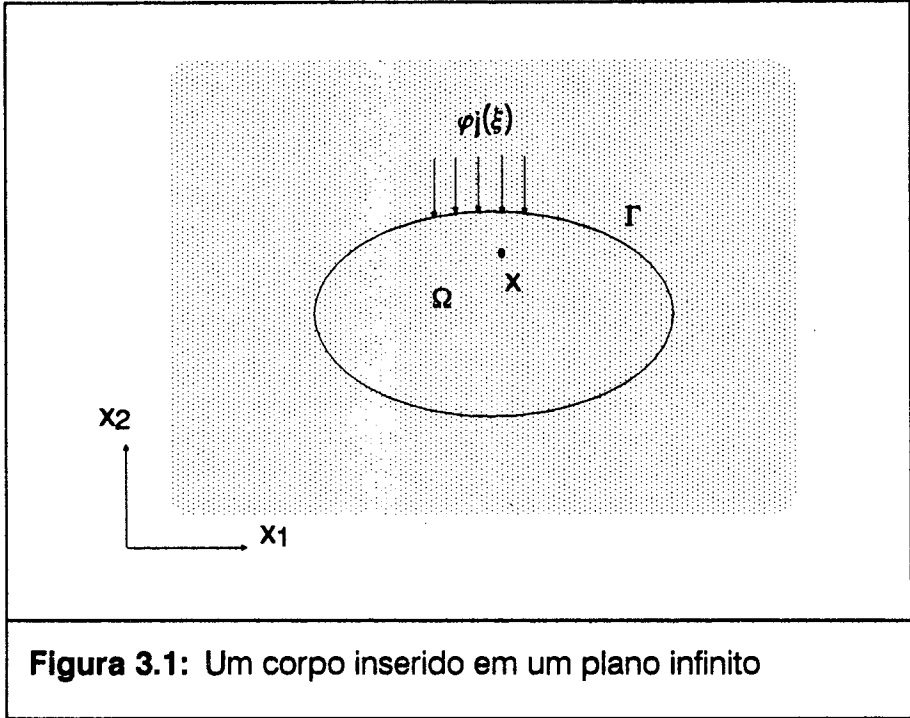
### INTRODUÇÃO

As formulações indiretas introduzem, nas equações integrais que descrevem o problema, distribuições auxiliares que não possuem significado físico para o mesmo.

Apresenta-se, a seguir, a formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno para problemas bidimensionais de elasticidade. Esta formulação tem origem na teoria de potencial ( Jaswon, Symm, 1977 ) e suas equações integrais são obtidas utilizando-se o conceito de potencial vetorial de camada simples ( Hartmann, 1981 ).

As equações apresentadas permitem determinações de deslocamentos e forças de superfície no contorno e deslocamentos e tensões no domínio do problema. Mostra-se, também, um procedimento genérico para solução numérica das mesmas.

Ainda, o tipo de região considerada é no sentido definido por Liapunov ( Jaswon, Symm, 1977 ) e a solução fundamental da equação de Navier utilizada é a proposta por Kelvin ( Apêndice 2 ).



## FORMULAÇÃO BÁSICA

Considere-se um corpo bidimensional, homogêneo, isotrópico, elástico linear, limitado por um contorno  $\Gamma$ , em um meio elástico infinito ( figura [ 3.1 ] ).

Os deslocamentos  $u_j$  em um ponto  $x$  no domínio  $\Omega$  do corpo devido a uma fonte (carga) de intensidade  $\varphi_i$  aplicada em um ponto  $\xi$  no contorno  $\Gamma$  do corpo podem ser obtidos através da solução de Kelvin (Apêndice 2). Se uma distribuição de intensidades de fonte  $\varphi_i$  for imaginada atuando sobre todo o contorno  $\Gamma$  do corpo, os deslocamentos em um ponto  $x_j$  no interior do corpo podem ser determinados por superposição, integrando-se a solução singular em relação às intensidades de fonte  $\varphi_i$ . Considerando-se nulas as forças de volume, tem-se

$$u_j(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \varphi_i(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (3.1)$$

onde  $d\Gamma(\xi)$  indica a variável de integração,  $x$  o ponto campo e  $\xi$  o ponto fonte.

Deve-se observar que os campos de deslocamentos e tensões determinados no domínio  $\Omega$  satisfazem as condições de equilíbrio e compatibilidade neste domínio pois, a solução singular utilizada para obtê-los, satisfaz estas condições ( Hartmann, 1981 ).

Se o ponto campo  $x$  for tomado como um ponto do contorno  $\Gamma$ , os valores de deslocamentos e forças de superfície obtidos por superposição poderão ser interpretados como condições de contorno. Estes deslocamentos e forças de superfície poderão ser escritos como

$$u_j(x_0) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x_0) \varphi_i(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (3.2)$$

$$p_j(x_0) = \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x_0) \varphi_i(\xi) d\Gamma(\xi) \pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \varphi_i(x_0) \quad (3.3)$$

onde a equação [ 3.3 ] pode ser obtida através de derivação e limites similares à formulação direta do Método dos Elementos de Contorno.

Para utilização das equações [ 3.2 ] e [ 3.3 ], o ponto  $x_0$  deve pertencer a um contorno suave e a integral da equação [ 3.3 ] deve ser entendida no sentido do valor principal de Cauchy ( Banerjee, Butterfield, 1981 ).

O termo  $\pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \varphi_i(x_0)$  na equação [ 3.3 ] terá seu sinal definido de acordo com o tipo de problema a ser resolvido. Será positivo para regiões finitas e negativo para regiões infinitas.

As equações [ 3.2 ] e [ 3.3 ] formam o conjunto de equações integrais que solucionam problemas bidimensionais de elasticidade através da formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno. Assim, caso sejam especificados os deslocamentos no contorno  $\Gamma$ , a equação [ 3.2 ] fornecerá os valores das intensidades de fonte  $\varphi_i(\xi)$  correspondentes e que permitirão a determinação das demais incógnitas no contorno  $\Gamma$  e valores de deslocamentos e tensões em pontos do domínio  $\Omega$ . Da mesma forma, valores de  $\varphi_j(\xi)$  poderão ser determinados com a equação [ 3.3 ], caso sejam fornecidas as forças de superfície no contorno  $\Gamma$ . Problemas com condições de contorno mistas poderão ser resolvidos utilizando-se

as equações [ 3.2 ] e [ 3.3 ] em conjunto, aplicadas às partes do contorno correspondentes.

## TENSÕES EM PONTOS INTERNOS

As tensões em pontos do domínio  $\Omega$  poderão ser obtidas, a partir da relação tensão-deformação, com a expressão ( Banerjee, Butterfield, 1981 )

$$\sigma_{jk}(x) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) \varphi_i(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (3.4)$$

onde

$$u_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,ij} \delta_{lk} + r_{,il} \delta_{jk} - r_{,ik} \delta_{lj}) + 2r_{,il} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (3.5)$$

A equação [ 3.4 ] é válida para o estado plano de deformação. Sua utilização para o estado plano de tensão é possível desde que, o coeficiente de Poisson  $\nu$  seja substituído por  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ .

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para solução das equações [ 3.2 ] e [ 3.3 ] aplica-se um procedimento numérico onde o contorno  $\Gamma$  é discretizado em uma série de elementos sobre os quais é admitida uma aproximação das intensidades de fonte  $\varphi_i(\xi)$  ( Banerjee, Butterfield, 1981 ).

Supondo-se o contorno  $\Gamma$  discretizado em  $N$  elementos, as equações [ 3.2 ] e [ 3.3 ] tornam-se, para cada um dos  $x_0$  pontos de  $\Gamma$

$$u_j(x_0) = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(\xi, x_0) \varphi_i(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (3.6)$$

$$p_j(x_0) = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(\xi, x_0) \varphi_i(\xi) d\Gamma(\xi) \pm \frac{1}{2} \varphi_j(x_0) \quad (3.7)$$

Nas equações [ 3.6 ] e [ 3.7 ] as formas matriciais dos termos são, para o caso bidimensional

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}^T \quad \underline{\rho}^* = \begin{bmatrix} \rho_{11}^* & \rho_{12}^* \\ \rho_{21}^* & \rho_{22}^* \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

e as expressões de  $u_{ij}^*$  e  $\rho_{ij}^*$  são a solução de Kelvin ( Apêndice 2 ).

Sobre cada um dos  $N$  elementos da discretização do contorno  $\Gamma$  será, então, admitida uma aproximação das intensidades de fonte  $\varphi_i(\xi)$  (interpolação), que poderá ser constante ou de ordem superior, como aproximações lineares, quadráticas, etc.

Após a discretização, as equações [ 3.6 ] e [ 3.7 ] são aplicadas aos nós funcionais  $x_0$  do contorno  $\Gamma$  e, as integrais, efetuadas sobre os elementos. Em geral, estas integrais são efetuadas numericamente, sendo necessárias considerações especiais apenas para os casos onde os pontos fonte e campo coincidem.

O resultado da aplicação das equações discretizadas sobre os nós funcionais do contorno é um sistema de  $M$  equações algébricas lineares que podem envolver  $M$  deslocamentos prescritos,  $M$  forças de superfície prescritas ou, no caso de problemas mistos,  $M_1$  deslocamentos prescritos,  $M_2$  forças prescritas, com  $M_1 + M_2 = M$ .

Aplicadas as condições de contorno relacionadas aos  $x_0$  nós funcionais de  $\Gamma$ , o sistema de equações é resolvido e as incógnitas nodais  $\varphi_i(\xi)$  são determinadas. A partir deste resultado, pode-se determinar as incógnitas ( $u_j$  e  $\rho_j$ ) no contorno e quaisquer valores de deslocamentos e tensões no domínio do corpo.

Caso sejam utilizadas aproximações constantes de  $\varphi_1(\xi)$  sobre os elementos do contorno  $\Gamma$ , as equações [ 3.6 ] e [ 3.7 ] tornam-se

$$u_j(x_0) = \sum_{k=1}^N \varphi_1(\xi) \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(\xi, x_0) d\Gamma(\xi) \quad (3.10)$$

$$p_j(x_0) = \sum_{k=1}^N \varphi_1(\xi) \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(\xi, x_0) d\Gamma(\xi) \pm \frac{1}{2} \varphi_j(x_0) \quad (3.11)$$

De acordo com a notação matricial descrita nas equações [ 3.8 ] e [ 3.9 ], as equações [ 3.10 ] e [ 3.11 ] são escritas

$$\underline{u}(x_0) = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \underline{u}^* d\Gamma \underline{\varphi}(\xi) \quad (3.12)$$

$$\underline{p}(x_0) = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \underline{p}^* d\Gamma \underline{\varphi}(\xi) \pm \frac{1}{2} \underline{\varphi}(x_0) \quad (3.13)$$

Para aproximações de  $\varphi_1(\xi)$  de ordem superior, o número de nós funcionais onde as equações [ 3.6 ] e [ 3.7 ] serão aplicadas estarão ligados à função de forma utilizada para descrever estas aproximações. De maneira geral, as intensidades de fonte  $\varphi_1(\xi)$  serão escritas como função de seus valores nodais e das funções de forma adotadas e terão a forma

$$\underline{\varphi} = \underline{N} \underline{\varphi}^n \quad (3.14)$$

onde a matriz  $\underline{N}$  contém as funções de forma e o vetor  $\underline{\varphi}^n$  os valores nodais das intensidades de fonte.

Escrevendo-se as equações [ 3.6 ] e [ 3.7 ] sob forma matricial utilizando-se as equações [ 3.8 ], [ 3.9 ] e [ 3.14 ] tem-se

$$\underline{u}(x_0) = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma \underline{\varphi}^n \quad (3.15)$$

$$\underline{p}(x_0) = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma \underline{\varphi}^n \pm \frac{1}{2} \underline{\varphi}(x_0) \quad (3.16)$$

Após a discretização das equações [ 3.6 ] e [ 3.7 ] e a escolha da aproximação de intensidades de fonte, as equações resultantes são aplicadas aos nós funcionais correspondentes. O sistema de equações resultante terá, no caso bidimensional, dimensão igual à duas vezes o número de nós funcionais e a forma matricial a seguir, que corresponde a problemas mistos

$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \cdot \underline{\varphi} \quad (3.17)$$

Na equação [ 3.17 ], os vetores  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  contêm as condições de contorno nas  $x_j$  direções dos nós funcionais. As matrizes  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  contêm os coeficientes de influência obtidos através das integrações realizadas sobre os elementos. O vetor  $\underline{\varphi}$  contêm as intensidades de fonte incognitas nas  $x_i$  direções dos pontos fonte  $\xi$ .

# 4

## MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO

### INTRODUÇÃO

O método da superposição é caracterizado pela utilização de um contorno auxiliar, congruente ao contorno real, onde uma distribuição de cargas concentradas é aplicada. Esta distribuição constitui a incógnita do problema, não possuindo significado físico para o mesmo.

Neste método, escolhe-se no contorno um determinado número de pontos. Os elementos das matrizes de coeficientes de influência são obtidos através da determinação de valores da solução singular sobre estes pontos. Como os contornos real e congruente têm sempre entre si uma distância finita, não haverá singularidades na determinação destes coeficientes.

Os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno real e no domínio do problema serão determinados por superposição de efeitos da distribuição de cargas concentradas.

Um ponto crítico do método é a determinação da distância  $D$  entre o contorno real e o contorno congruente. Foi constatado por Burgess e Mahajerin ( Burgess, Mahajerin, 1984 ) que a distância  $D$  deverá ter, no mínimo, o tamanho da maior diagonal obtida no corpo em questão.

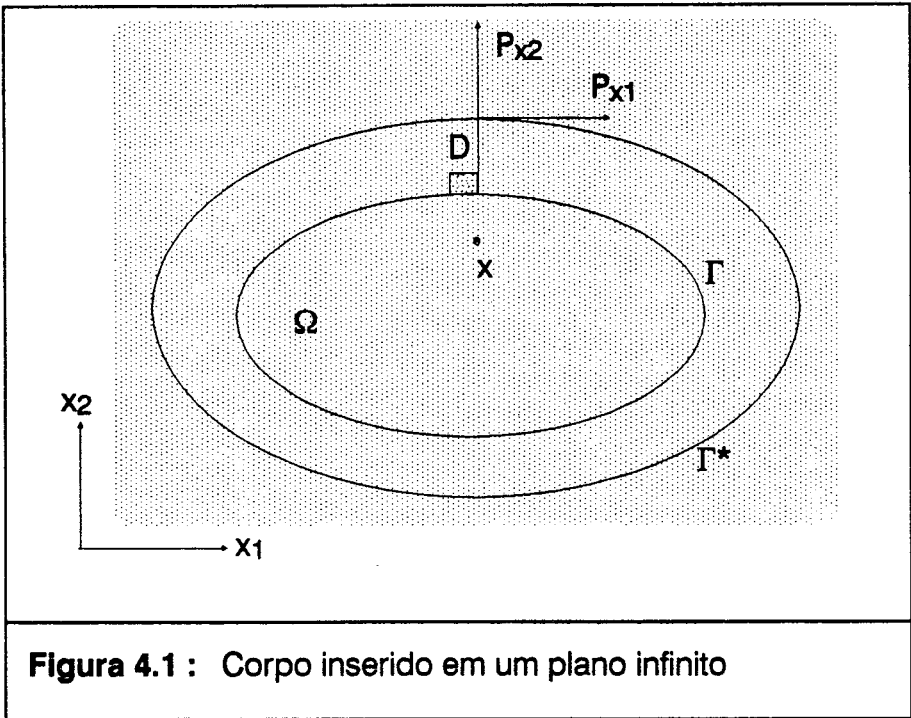
A seguir, apresenta-se a formulação do Método da Superposição para problemas bidimensionais de elasticidade ( Burgess, Mahajerin, 1984 ), com as expressões principais do mesmo, a forma de determinação de

tensões em pontos do domínio e sua solução numérica, aplicável à domínios finitos e infinitos.

A solução singular a ser utilizada é a solução de Kelvin ( Apêndice 2 ).

## FORMULAÇÃO DO MÉTODO

Seja um corpo bidimensional, homogêneo, isotrópico, elástico linear, com contorno  $\Gamma$  em um meio infinito ( Burgess, Mahajerin, 1984 ). Considere-



**Figura 4.1 :** Corpo inserido em um plano infinito

se, também, um contorno imaginário  $\Gamma^*$ , fora do corpo, congruente com o contorno  $\Gamma$  ( figura 4.1 ).

A distância entre o contorno  $\Gamma$  e o contorno congruente  $\Gamma^*$  é definida por um parâmetro  $D$ , que caracteriza o contorno  $\Gamma^*$

Um número  $N$  de pares de cargas concentradas é aplicado ao longo do contorno  $\Gamma^*$  e a distribuição resultante é utilizada para determinar deslocamentos, forças de superfície e tensões no contorno real  $\Gamma$  e no domínio  $\Omega$  do corpo considerado através de superposição.

As condições de contorno deverão ser satisfeitas de maneira semelhante à formulação indireta clássica do Método dos Elementos de Contorno. As intensidades de carga nos pontos de atuação das cargas concentradas no contorno congruente são obtidas de forma a satisfazer estas condições de contorno, prescritas nos  $N$  pontos do contorno  $\Gamma$ . Em verdade, quando o Método da Superposição é utilizado, os  $N$  pontos do contorno  $\Gamma$  são escolhidos em primeiro lugar. Os  $N$  pares de cargas concentradas  $P_i$  serão aplicados em pontos do contorno  $\Gamma^*$  onde a normal ao ponto do contorno real  $\Gamma$  intercepta o contorno congruente  $\Gamma^*$ . Após, é aplicado um procedimento de colocação, utilizando-se uma solução de carga concentrada ( solução fundamental ) transladada ( Burgess, Mahajerin, 1984 ).

Assim, para um ponto  $x$  no domínio  $\Omega$ , os deslocamentos serão determinados através de

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^N u_{ij}^*(\xi, x) P_k(\xi) \quad (4.1)$$

onde  $i, j = 1, 2$  e  $P_i$  são os valores dos  $N$  pares de cargas concentradas.

Para deslocamentos prescritos nas  $j$  direções de um ponto  $x_0$  sobre o contorno  $\Gamma$ , a distribuição de cargas concentradas  $P_i$  sobre os  $N$  pontos  $\xi$  do contorno  $\Gamma^*$  deverão satisfazer à

$$u_j(x_0) = \sum_{k=1}^N u_{ij}^*(\xi, x_0) P_k(\xi) \quad (4.2)$$

onde o termo  $u_{ij}^*$  é a solução de Kelvin ( Apêndice 2 ) e representa o deslocamento na direção  $j$  do ponto  $x_0$  do contorno  $\Gamma$  devido à uma carga concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$  do contorno  $\Gamma^*$ .

Para forças de superfície prescritas nas  $j$  direções do ponto  $x_0$  do contorno  $\Gamma$ , a distribuição de cargas concentradas  $P_i$  sobre os  $N$  pontos do contorno  $\Gamma^*$  deverão satisfazer à

$$\rho_j(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_{ij}^*(\xi, x_0) P^k(\xi) \quad (4.3)$$

onde o termo  $\rho_{ij}^*$  ( Apêndice 2 ) representa a força de superfície na direção  $j$  do ponto  $x_0$  sobre  $\Gamma$  devido à uma carga concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$  sobre  $\Gamma^*$ .

As equações acima são válidas para domínios finitos e infinitos.

## TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS

As tensões nos pontos internos serão, igualmente, determinadas por superposição de efeitos da distribuição de cargas através da expressão

$$\sigma_{jk}(x) = \sum_{m=1}^N u_{ijk}^*(\xi, x) P^m(\xi) \quad (4.4)$$

onde

$$u_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.5)$$

A equação [4.4] é válida para o estado plano de deformação. Para sua utilização no estado plano de tensão o coeficiente de Poisson  $\nu$  deve ser substituído por  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ .

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para obter-se as intensidades da distribuição de forças  $P_1$ , incógnitas no problema, as equações [4.2] e [4.3] são utilizadas, de acordo com as condições de contorno prescritas em  $\Gamma$ , dando origem à um sistema de equações algébricas lineares, de ordem igual à duas vezes o número de pontos  $N$ , em casos bidimensionais.

Se as condições de contorno prescritas forem deslocamentos, a equação [4.2], sob forma matricial, torna-se

$$\underline{u} = \underline{G} \underline{P} \quad (4.6)$$

onde o vetor  $\underline{u}$  contém os  $2N$  deslocamentos prescritos em  $\Gamma$ , o vetor  $\underline{P}$  a distribuição de  $2N$  cargas concentradas incógnitas em  $\Gamma^*$ . A matriz  $\underline{G}$  é a matriz dos coeficientes de influência. Seus elementos são matrizes  $2 \times 2$ , que representam a influência na direção  $j$  do ponto  $x_0$  de  $\Gamma$  devido à uma carga concentrada unitária na direção  $i$  do ponto  $\xi$  de  $\Gamma^*$ . Os valores destes elementos são obtidos através da expressão de  $u_{ij}^*$  da solução de Kelvin ( Apêndice 2 ).

Caso sejam prescritas as forças de superfície, será utilizada a equação [4.3] que, sob forma matricial, torna-se

$$\underline{p} = \underline{H} \underline{P} \quad (4.7)$$

onde o vetor  $\underline{p}$  contém as  $2N$  forças de superfície prescritas em  $\Gamma$ . O vetor  $\underline{P}$  é o descrito anteriormente. A matriz  $\underline{H}$  contém os coeficientes de influência correspondentes às condições de contorno prescritas e seus elementos têm a mesma forma dos elementos da matriz  $\underline{G}$ , sendo obtidos através da expressão de  $p_{ij}^*$  (Apêndice 2).

Para condições de contorno mistas as equações [4.6] e [4.7] serão utilizadas em conjunto, sendo aplicadas nas partes do contorno correspondentes às condições de contorno que representam.

Em todos os casos acima, após a resolução do sistema de equações resultante da aplicação das condições de contorno, a distribuição de cargas  $P$  é determinada, possibilitando a obtenção dos valores restantes dos deslocamentos e forças de superfície no contorno  $\Gamma$  e de valores de deslocamentos e tensões no domínio  $\Omega$  do corpo.

# 5

## MÉTODO DAS DESCONTINUIDADES DE DESLOCAMENTOS

### INTRODUÇÃO

O Método das Descontinuidades de Deslocamentos é um método de elementos de contorno baseado na solução analítica de um problema de descontinuidade de deslocamentos sobre um segmento finito no plano de um sólido elástico infinito.

Fisicamente, imagina-se a descontinuidade de deslocamento como o deslocamento relativo entre as duas superfícies de uma fissura. Na exposição do método feita a seguir, este deslocamento relativo será considerado constante. Entretanto, esta distribuição poderá ser arbitrária.

O método baseia-se na idéia de que pode ser feita a aproximação discreta de uma distribuição contínua de deslocamentos ao longo de uma fissura. Isto significa a divisão da mesma em  $N$  elementos (elementos de contorno) onde a descontinuidade de deslocamentos será, no presente caso, considerada constante sobre cada um dos elementos.

Conhecendo-se a solução analítica para uma descontinuidade de deslocamentos elementar constante, aplica-se uma solução numérica ao

problema que consiste na soma dos efeitos dos  $N$  elementos (superposição).

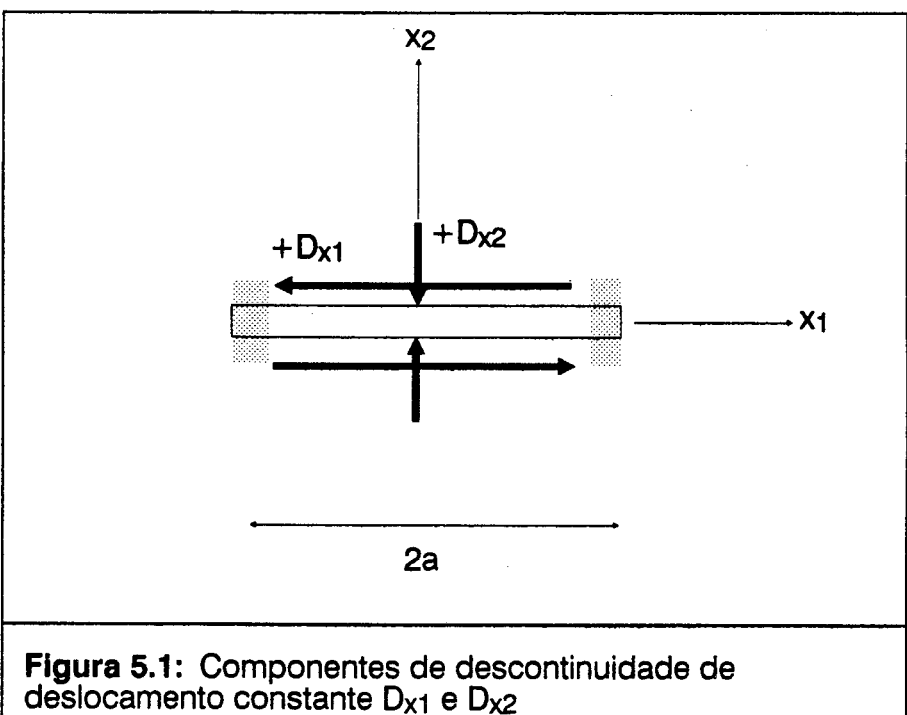
A apresentação do método feita a seguir inicia-se com a solução analítica de uma descontinuidade elementar de deslocamentos. Após, segue-se a solução numérica para o mesmo ( Crouch, Starfield, 1983 ).

A solução analítica de uma descontinuidade elementar de deslocamentos é obtida a partir da solução de Kelvin integrada ( Apêndice 3 ).

## DESCONTINUIDADE DE DESLOCAMENTOS EM UM SÓLIDO INFINITO

(solução analítica para uma descontinuidade elementar de deslocamentos)

O problema de descontinuidade de deslocamentos constante sobre um segmento finito no plano de um sólido elástico infinito é especificado pela condição de que, o deslocamento, é contínuo em todo o sólido, exceto no segmento em questão.



**Figura 5.1:** Componentes de descontinuidade de deslocamento constante  $D_{x1}$  e  $D_{x2}$

O segmento onde a descontinuidade de deslocamentos é definida será escolhido de forma a ocupar uma porção do eixo  $x_1$  ( figura [ 5.1 ] ) igual a  $|x_1| \leq a$  e  $x_2 = 0$ . Neste segmento, considerado como uma fissura, pode-se distinguir duas superfícies sendo, uma delas, sobre o lado positivo do eixo  $x_2 = 0$ , denominado  $x_2 = 0^+$ , e, a outra, sobre o lado negativo, denominado  $x_2 = 0^-$  ( figura [ 5.1 ] ).

Passando-se de uma das superfícies do segmento para a outra, o deslocamento sofre uma troca de valores  $D_i = (D_{x_1}, D_{x_2})$ , especificada como constante. Esta troca de valores define a descontinuidade de deslocamentos como a diferença entre os deslocamentos das duas superfícies do segmento, podendo ser escrita como

$$D_i = u_i(x_1, 0^-) - u_i(x_1, 0^+) \quad (5.1)$$

com  $i=1,2$  ou, ainda, como

$$D_{x_1} = u_{x_1}(x_1, 0^-) - u_{x_1}(x_1, 0^+) \quad (5.2)$$

$$D_{x_2} = u_{x_2}(x_2, 0^-) - u_{x_2}(x_2, 0^+)$$

Os sentidos positivos de  $u_i$  são os mesmos dos eixos coordenados e os sentidos positivos de  $D_i$  são os indicados na figura [ 5.1 ] .

Os valores positivos de  $D_{x_2}$  sugerem que os dois lados da fissura sofrem sobreposição. Como, fisicamente, isto é impossível, evita-se esta dificuldade conceitual considerando-se que a fissura possui espessura finita, pequena em relação ao seu comprimento e que, a magnitude da componente de descontinuidade de deslocamento  $D_{x_2}$  é sempre menor do que esta espessura ( Crouch, Starfield, 1983 ).

A solução para o problema é fornecida por Crouch ( Crouch, Starfield, 1983 ), com os deslocamentos e tensões escritos como:

$$u_{x_1} = D_{x_1} \left[ 2(1-\nu) f_{i,x_2} - x_2 f_{i,x_1 x_1} \right] + D_{x_2} \left[ - (1-2\nu) f_{i,x_1} - x_2 f_{i,x_1 x_2} \right] \quad (5.3)$$

$$u_{x_2} = D_{x_1} \left[ (1-2\nu) f_{i,x_1} - x_2 f_{i,x_1 x_2} \right] + D_{x_2} \left[ 2(1-\nu) f_{i,x_2} - x_2 f_{i,x_2 x_2} \right]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1x_1} &= 2 G D_{x_1} \left[ 2 f_{,x_1x_2} + x_2 f_{,x_1x_2x_2} \right] + 2 G D_{x_2} \left[ f_{,x_2x_2} + x_2 f_{,x_2x_2x_2} \right] \\ \sigma_{x_2x_2} &= 2 G D_{x_1} \left[ -x_2 f_{,x_1x_2x_2} \right] + 2 G D_{x_2} \left[ f_{,x_2x_2} - x_2 f_{,x_2x_2x_2} \right] \\ \sigma_{x_1x_2} &= 2 G D_{x_1} \left[ f_{,x_2x_2} + x_2 f_{,x_2x_2x_2} \right] + 2 G D_{x_2} \left[ -x_2 f_{,x_1x_2x_2} \right]\end{aligned}\tag{5.4}$$

A função  $f(x_1, x_2)$  é obtida com a integração da solução de Kelvin ( Apêndice 3 ).

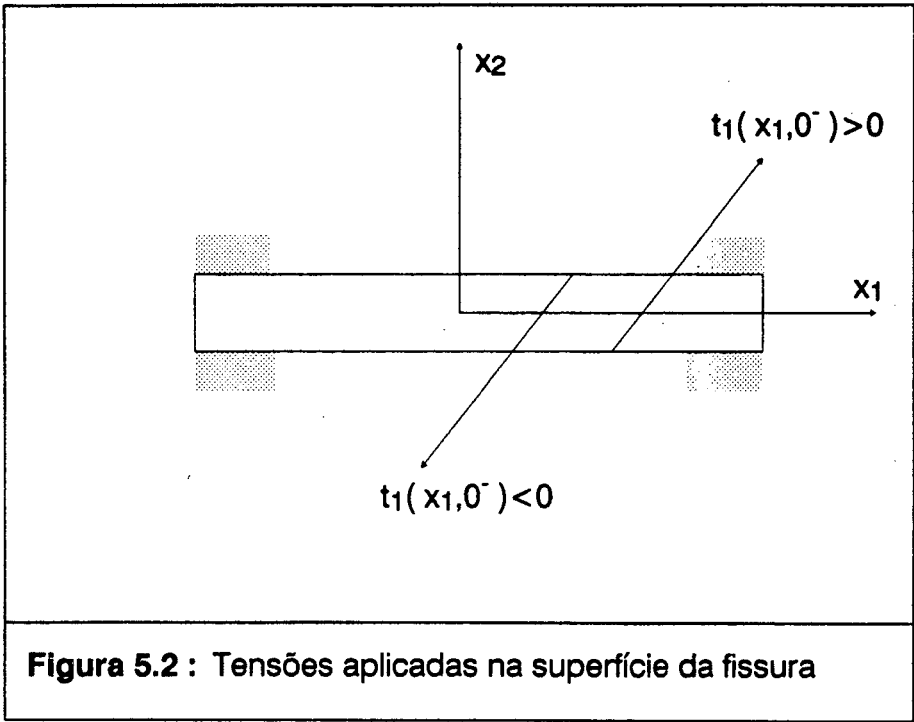
Pela análise dos deslocamentos da equação [ 5.3 ] verifica-se que, os mesmos, são contínuos sobre o sólido infinito exceto sobre o segmento  $|x_1| \leq a, x_2 = 0$ . As tensões serão singulares e descontínuas em  $x_1 = \pm a$ , mas são finitas e contínuas nos demais pontos ao longo de  $x_2 = 0$ . A análise detalhada das expressões das equações [ 5.3 ] e [ 5.4 ] encontra-se em Crouch, Starfield ( Crouch, Starfield, 1983 ).

Verificando-se as direções das componentes do vetor das forças de superfície nas duas superfícies da fissura ( figura [ 5.2 ] ), considerando-se  $D_{x_1} > 0$  e  $D_{x_2} > 0$  e as equações de tensão ( Crouch, Starfield, 1983 ), conclui-se que  $p_1(x_1, 0^+) = -p_1(x_1, 0^-)$  e, portanto, as tensões resultantes  $p_1(x_1, 0) = p_1(x_1, 0^+) + p_1(x_1, 0^-)$  aplicadas sobre a fissura são iguais a zero.

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

Obtidas as expressões das discontinuidades elementares de deslocamentos, é aplicada uma solução numérica para resolução do problema.

Para ilustrar este procedimento, considere-se uma fissura que será representada através de  $N$  segmentos. As posições e orientações dos segmentos serão especificadas em relação ao sistema global de coordenadas  $x_1, x_2$ .



**Figura 5.2 :** Tensões aplicadas na superfície da fissura

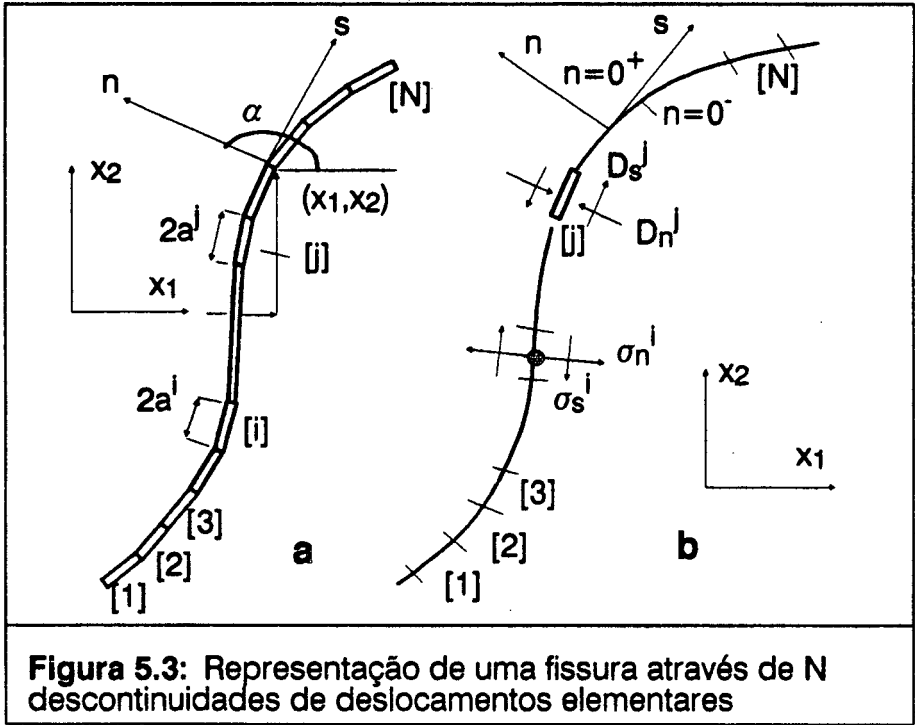
Se as superfícies da fissura estão sujeitas a tensão, deslocam-se uma em relação à outra. O Método das Descontinuidades de Deslocamentos é uma forma de determinar-se uma aproximação discreta da distribuição de deslocamentos relativos (descontinuidade de deslocamentos) que existem na realidade. Esta aproximação é determinada através das  $N$  subdivisões da fissura ( figura [ 5.3 ] ). Cada uma destas subdivisões é um elemento de contorno e representa uma descontinuidade de deslocamentos elementar.

As descontinuidades de deslocamentos elementares são definidas em relação às coordenadas locais do elemento  $s$  e  $n$ . A figura [ 5.3.a ] mostra uma descontinuidade de deslocamentos elementar para o  $j$ -ésimo segmento da fissura. As componentes da descontinuidade nas direções  $s$  e  $n$  são denominadas, neste segmento,  $D_s^j$  e  $D_n^j$ , sendo definidas como

$$D_s^j = u_s^{j-} - u_s^{j+} \quad (5.6)$$

$$D_n^j = u_n^{j-} - u_n^{j+}$$

Nas equações [ 5.6 ]  $u_s^j$  e  $u_n^j$  são, respectivamente, os deslocamentos tangencial e normal do  $j$ -ésimo segmento da fissura. Os sinais nos



**Figura 5.3:** Representação de uma fissura através de  $N$  descontinuidades de deslocamentos elementares

deslocamentos indicam as superfícies positiva e negativa da fissura em relação à coordenada  $n$ . Os deslocamentos  $u_s^j$  e  $u_n^j$  serão as duas componentes de um vetor, assumindo valores positivos de acordo com as direções positivas do sistema local de coordenadas  $s$  e  $n$ , independente da superfície da fissura que está sendo considerada.

O efeito de uma descontinuidade elementar de deslocamentos sobre os deslocamentos e tensões em um ponto arbitrário de um sólido infinito pode ser obtido através das equações [ 5.3 ] e [ 5.4 ] desde que, as mesmas sejam transformadas, considerando a posição e orientação do segmento em questão.

Para o ponto médio do  $i$ -ésimo elemento ( figura [ 5.3 ] ), as tensões normais e tangenciais poderão ser expressas, em função da descontinuidade de deslocamentos do  $j$ -ésimo elemento, como

$$\sigma_s^i = A_{s s}^{j i} D_s^j + A_{s n}^{j i} D_n^j \quad (5.7)$$

$$\sigma_n^i = A_{n s}^{j i} D_s^j + A_{n n}^{j i} D_n^j$$

com  $i = 1, N$ .

Nas equações [ 5.7 ]  $A_{ss}^{ij}$  ,  $A_{sn}^{ij}$  , etc, são os coeficientes de influência para as tensões. O coeficiente  $A_{ns}^{ij}$  , por exemplo, fornece a tensão normal no ponto médio do  $i$ -ésimo elemento ( $\sigma_n^i$ ) devido à uma descontinuidade de deslocamentos tangencial, unitária e constante, sobre o  $j$ -ésimo elemento ( $D_n^j=1$ ).

Considerando-se, agora, descontinuidades elementares de deslocamentos sobre os  $N$  segmentos ao longo da fissura ( figura [ 5.3.a ] ), aplicando-se a equação [ 5.7 ], tem-se

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \quad (5.8)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j$$

Especificando-se os valores das tensões  $\sigma_s^i$  e  $\sigma_n^i$  para cada um dos  $N$  elementos da fissura, de acordo com as equações [ 5.8 ], o resultado é um sistema de  $2N$  equações algébricas lineares com  $2N$  incógnitas  $D_s^i$  e  $D_n^i$  , para  $i = 1, N$  , que são as componentes de descontinuidade elementar de deslocamentos. Com a resolução do sistema de equações obtém-se os valores de  $D_s^i$  e  $D_n^i$  , o que permite a determinação de deslocamentos e tensões em pontos do corpo através do princípio da superposição.

Pode-se escrever, ainda, as expressões dos deslocamentos ao longo da fissura ( figura [ 5.3.a ] ) sob a forma:

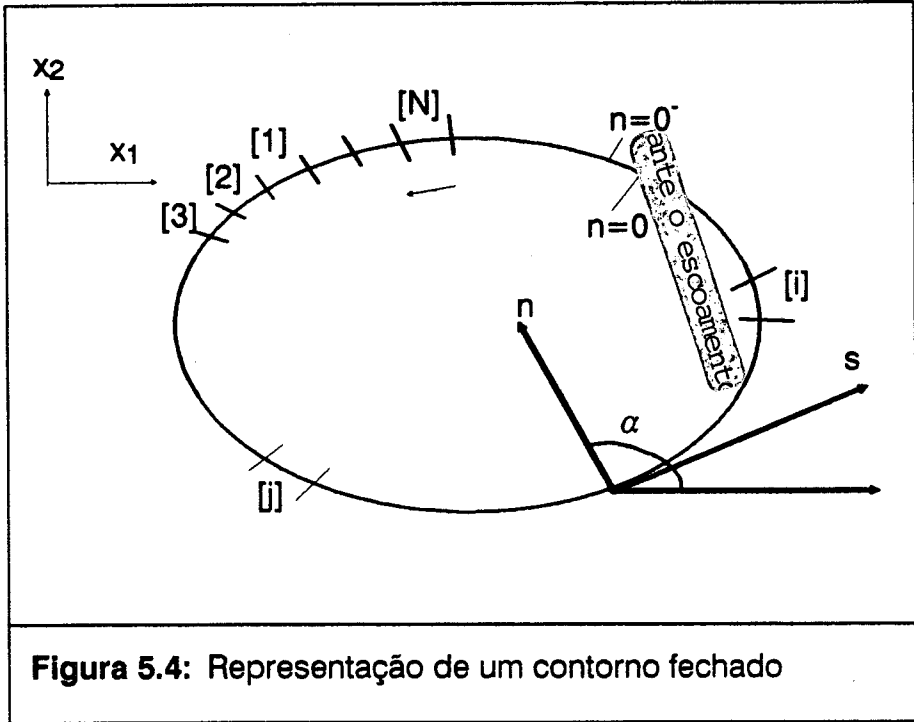
$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \quad (5.9)$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j$$

com  $i = 1, N$ .

Nas equações [ 5.9 ]  $B_{s_0}^{ij}, B_{s_n}^{ij}$ , etc, são os coeficientes de influência para os deslocamentos.

Detalhes sobre a obtenção dos coeficientes de influência para o método encontram-se em Crouch, Starfield ( Crouch, Starfield, 1983 ).



**Figura 5.4:** Representação de um contorno fechado

Em problemas de fissuras, as componentes da descontinuidade de deslocamentos possuem significado físico, uma vez que o contorno da região em estudo é, efetivamente, um segmento. Entretanto, se for considerada a situação onde todas as descontinuidades elementares de deslocamentos são conectadas de modo a formar um contorno fechado dentro do corpo infinito, o contorno consistirá de duas linhas ( figura [ 5.3 ] ). Uma delas ( $n=0^-$ ), define o contorno de uma cavidade em meio infinito e, a outra ( $n=0^+$ ), define o contorno de um corpo finito. As componentes de descontinuidade de deslocamentos  $D_s^i$  e  $D_n^i$ , para  $i = 1, N$ , definem o deslocamento relativo entre estes dois contornos nas direções  $s$  e  $n$ .

Então, exceto quando a região interior e a exterior existem para um mesmo problema, estas quantidades ( $D_s^i$  e  $D_n^i$ ) são fictícias.

Nas equações [ 5.8 ], as tensões  $\sigma_s^I$  e  $\sigma_n^I$  representam as condições de contorno sobre o lésimo elemento. Da mesma forma, nas equações [ 5.9 ], os deslocamentos  $u_s^I$  e  $u_n^I$  representam as condições de contorno. Em ambos os casos, estas condições, isoladamente, geram o sistema de equações que soluciona o problema. Para problemas mistos, onde poderão ser prescritos  $u_s^I$  e  $\sigma_n^I$  ou  $u_n^I$  e  $\sigma_s^I$ , o sistema de equações é obtido selecionando-se adequadamente as equações dos grupos [ 5.8 ] e [ 5.9 ].

# 6

## APLICAÇÕES

### INTRODUÇÃO

As aplicações numéricas apresentadas neste capítulo objetivam mostrar o comportamento dos métodos apresentados nos capítulos anteriores em relação a alguns problemas de elasticidade bidimensional.

Os resultados da análise de cada método foram comparados à solução analítica dos problemas correspondentes e mostrados através de tabelas e gráficos de desvio percentual. Para esta análise foram utilizados números fixos de nós funcionais, escolhidos através de testes de convergência para cada aplicação.

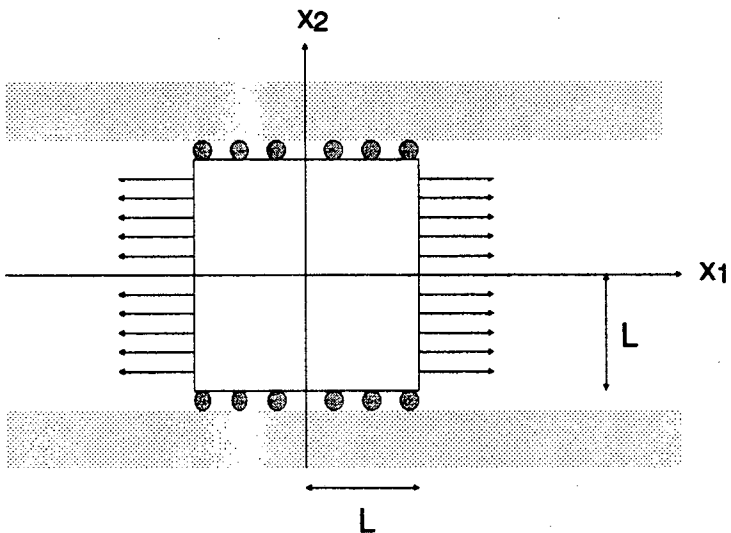
A descrição da aproximação utilizada para os contornos e as variáveis é apresentada nas aplicações.

Ainda cabe observar que, os domínios multiconectados apresentados, foram analisados com discretização da quarta parte do contorno total levando-se em consideração a simetria dos problemas e os eixos de simetria foram incluídos como parte deste contorno, o que os tornou simplesmente conectados.

# APLICAÇÕES NUMÉRICAS

## PLACA QUADRADA SUJEITA À FORÇA BIAIXIAL

A placa quadrada da figura [ 6.1 ] está submetida à uma força de superfície constante de tração na direção  $X_1$  e tem deslocamentos prescritos na direção  $X_2$  em suas faces paralelas à  $X_1$ .



**FIGURA 6.1:** Placa quadrada sujeita à força biaxial

Esta estrutura teve seu contorno discretizado integralmente para ser analisada através dos métodos expostos nos capítulos anteriores. A discretização do contorno, exceto para o Método da Superposição, foi feita através de elementos retos e os tipos de aproximação das variáveis sobre estes elementos foram:

Formulação direta do Método dos Elementos de Contorno ( DMEC ):

- aproximação linear ( elemento linear )

Formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno ( IMEC ):

- aproximação constante ( elemento constante )

- aproximação linear, com deslocamento do nó funcional em elementos com uma das extremidades pertencentes a partes do contorno com normal descontínua ( elemento descontínuo )

Método das Descontinuidades de Deslocamentos ( MDD ):

- aproximação constante (elemento constante)

No Método da Superposição ( SUP ) o contorno é descrito através de pontos.

Em todos os métodos foram utilizados oito nós funcionais nas faces da placa paralelas ao eixo  $X_2$  e nove nós funcionais nas faces paralelas ao eixo  $X_1$ . No caso da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno e da utilização dos elementos descontínuos na formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno, o número total de nós funcionais foi alterado devido à consideração de nó duplo para simular a descontinuidade das condições de contorno.

Os resultados de cada método foram comparados à solução analítica do problema ( Timoshenko, Goodier, 1980 ). Para isto foram utilizados valores de deslocamentos e forças no contorno e em seis pontos do domínio do mesmo.

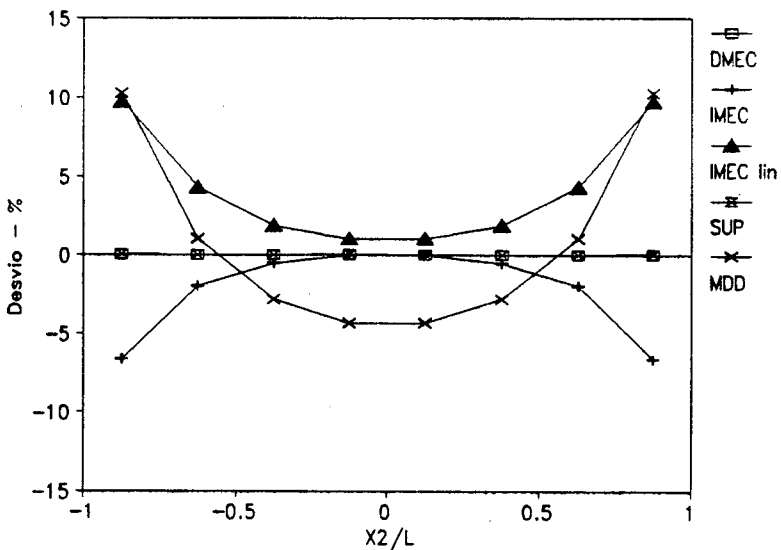
Adotou-se, para características do material, um módulo de elasticidade  $E = 5.0$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , para a força na direção  $X_1$ ,  $p_{x_1} = 2$ , e, para o comprimento  $L$  indicado na figura [ 6.1 ], 2 unidades de comprimento.

Avaliando-se os métodos através da figura [ 6.2 ] que apresenta os desvios percentuais dos resultados da tabela [ 6.1 ] em relação à solução analítica observa-se que os maiores desvios ocorreram para o Método das Descontinuidades de Deslocamentos, sendo em torno de 10% para pontos próximos aos vértices da placa. A formulação direta do Método dos Elementos de Contorno e o Método da Superposição apresentaram resultados muito precisos. A formulação indireta do Método dos elementos de contorno apresentou regularidade de comportamento em pontos afastados dos vértices da placa, desviando-se da solução analítica nos pontos próximos aos vértices. Nota-se que os pontos mais próximos do vértices apresentaram, para o elemento constante, desvio em torno de

X2	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
-1.75	0.7280	0.7280	0.6799	0.7988	0.7283	0.8024
-1.25	0.7280	0.7280	0.7136	0.7596	0.7279	0.7354
-0.75	0.7280	0.7280	0.7241	0.7416	0.7281	0.7077
-0.25	0.7280	0.7280	0.7280	0.7354	0.7283	0.6965
0.25	0.7280	0.7280	0.7280	0.7354	0.7281	0.6965
0.75	0.7280	0.7280	0.7241	0.7416	0.7280	0.7077
1.25	0.7280	0.7280	0.7136	0.7596	0.7281	0.7354
1.75	0.7280	0.7280	0.6799	0.7988	0.7283	0.8024

**TABELA 6.1:** Placa quadrada - deslocamentos na direção  $X_1$  face paralela a  $X_2$

7%, com aproximação inferior da solução analítica e, para o elemento linear descontínuo, em torno de 10%, com aproximação superior da solução analítica.

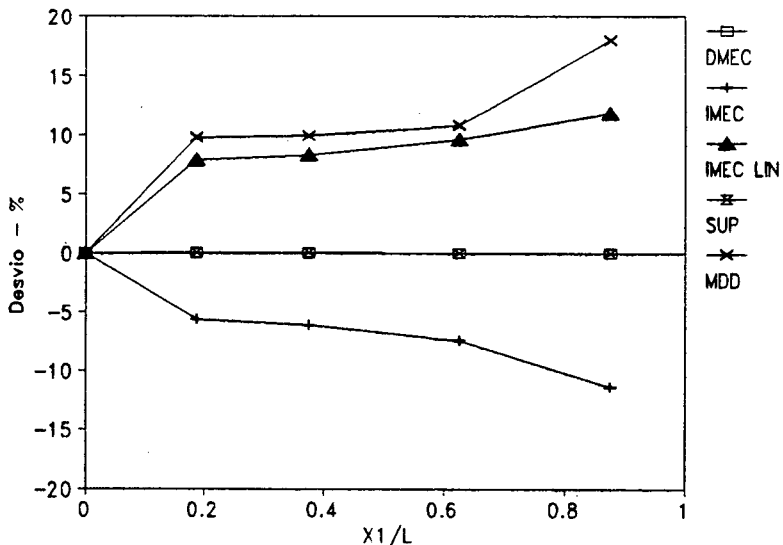


**FIGURA 6.2:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.1

Na figura [ 6.3 ] apresenta-se os desvios percentuais dos resultados da tabela [ 6.2 ], onde pode-se observar o mesmo tipo de comportamento anterior, com os maiores desvios, partindo-se do ponto central da face analisada em direção ao vértice da placa, foram apresentados pelo Método das Descontinuidades de Deslocamentos. No ponto mais próximo ao vértice o desvio aproximou-se de 20%. A formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno mostrou, no mesmo ponto, desvio em torno de 12% com aproximação inferior para o elemento constante e 10% com aproximação superior para o elemento linear

$X_1$	analítica	DMEC	IMEC	IMEC I	SUP	MDD
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.38	0.1365	0.1365	0.1288	0.1473	0.1366	0.1498
0.75	0.2730	0.2730	0.2564	0.2958	0.2731	0.3000
1.25	0.4550	0.4550	0.4212	0.4987	0.4551	0.5043
1.75	0.6370	0.6370	0.5644	0.7127	0.6372	0.7514

**TABELA 6.2:** Placa quadrada - deslocamentos na direção  $X_1$  face paralela a  $X_1$



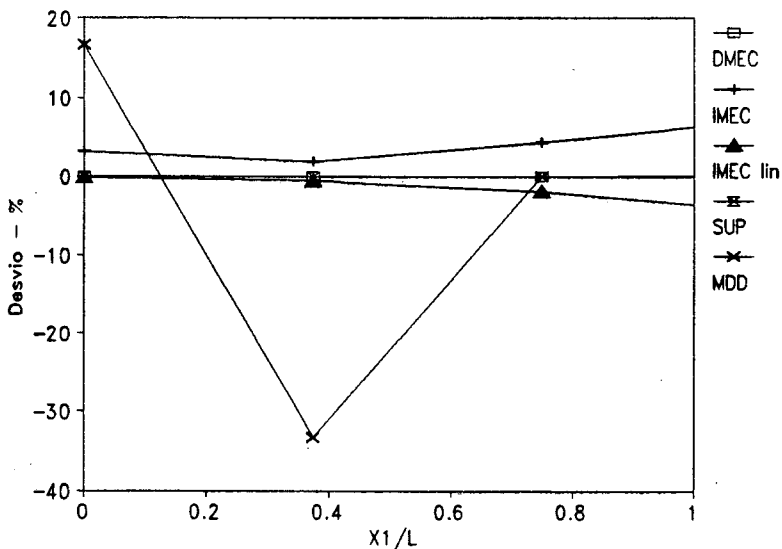
**FIGURA 6.3:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.2

descontínuo. Os melhores resultados foram obtidos com a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno e com o Método da Superposição.

A figura [ 6.4 ] apresenta os desvios percentuais das forças de superfície da tabela [ 6.3 ] . Pode-se observar um comportamento bastante regular de todos os métodos partindo-se do ponto central em direção ao vértice da placa com exceção do Método da Descontinuidades de Deslocamentos, que tornou-se muito preciso a partir do terceiro ponto considerado. Quanto à formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno, a

$X_1$	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0.00	0.6000	0.6000	0.6195	0.5991	0.5998	0.7000
0.38	0.6000	0.6000	0.6112	0.5968	0.6000	0.4000
0.75	0.6000	0.6000	0.6260	0.5887	0.5999	0.6000
1.25	0.6000	0.6000	0.6494	0.5696	0.6005	0.6000
1.75	0.6000	0.6000	0.5431	0.5639	0.6000	0.6000

**TABELA 6.3** Forças de superfície na direção  $X_2$   
face paralela a  $X_1$



**FIGURA 6.4:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.3

aproximação do vértice da placa, conforme resultados anteriores, desviou os resultados em torno de 10% para o elemento constante. Os demais desvios ficaram em torno de 5%.

(x1;x2)	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0;0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1;0	0.3640	0.3640	0.3647	0.3690	0.3642	0.3472
0;1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000
0.5;0.5	0.1820	0.1820	0.1811	0.1864	0.1821	0.1768
1;1	0.3640	0.3640	0.3570	0.3786	0.3642	0.3658
1.5;1.5	0.5460	0.5460	0.5213	0.5841	0.5462	0.5799

**TABELA 6.4:** Deslocamentos na direção X<sub>1</sub>

(x1;x2)	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0;0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000
1;0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0;1	0.0000	0.0000	0.0049	0.0049	0.0000	0.0154
0.5;0.5	0.0000	0.0000	0.0034	0.0034	0.0000	0.0095
1;1	0.0000	0.0000	0.0062	0.0062	0.0001	0.0168
1.5;1.5	0.0000	0.0000	0.0067	0.0067	0.0000	0.0217

**TABELA 6.5:** Deslocamentos na direção X<sub>2</sub>

(x1;x2)	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0;0	2.0000	2.0000	1.9900	2.0500	2.0000	2.0622
0.5;0.5	2.0000	2.0000	1.9850	2.0550	2.0000	2.1000
0;1	2.0000	2.0000	1.9530	2.0880	2.0000	2.2000
1;0	2.0000	2.0000	2.0010	2.0310	2.0000	2.0000
1;1	2.0000	2.0000	1.9730	2.0720	2.0000	2.1000
1.5;1.5	2.0000	2.0000	1.9490	2.1300	2.0000	2.2000

TABELA 6.6: Tensão  $\sigma_{x1}$ 

(x1;x2)	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0;0	0.6000	0.6000	0.5651	0.6502	0.6000	0.7234
0.5;0.5	0.6000	0.6000	0.5698	0.6458	0.6001	0.7000
0;1	0.6000	0.6000	0.5821	0.6299	0.6000	0.7000
1;0	0.6000	0.6000	0.5787	0.6475	0.6001	0.7000
1;1	0.6000	0.6000	0.5726	0.6362	0.6001	0.7000
1.5;1.5	0.6000	0.6000	0.5330	0.6207	0.6004	0.8000

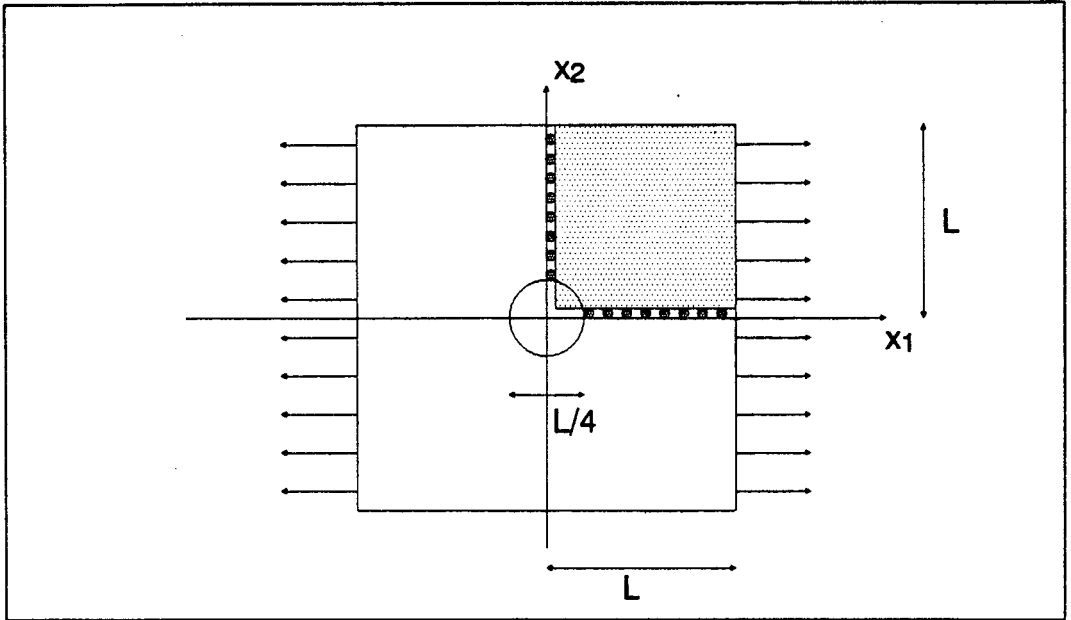
TABELA 6.7: Tensão  $\sigma_{x2}$ 

(x1;x2)	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0;0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5;0.5	0.0000	0.0000	0.0074	0.0100	0.0001	0.0000
0;1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000
1;0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1;1	0.0000	0.0000	0.0266	0.0400	0.0000	0.1000
1.5;1.5	0.0000	0.0000	0.0676	0.0833	0.0001	0.2000

TABELA 6.8: Tensão  $\tau_{x1x2}$

As tabelas [ 6.4 ] a [ 6.8 ] apresentam deslocamentos e tensões em seis pontos do domínio da placa, todas confirmando os comportamentos anteriores dos métodos.

### PLACA TRACIONADA COM ORIFÍCIO CIRCULAR CENTRAL



**FIGURA 6.5:** Placa quadrada com orifício central

A placa apresentada na figura [ 6.5 ] está submetida à tração uniforme na direção  $X_1$  e possui um orifício circular central.

Esta estrutura teve sua quarta parte discretizada, utilizando-se suas condições de simetria. Nesta discretização, os eixos de simetria foram considerados como parte do contorno.

Para análise dos deslocamentos e tensões no domínio considerou-se uma região limitada por um anel de raio interno  $L/8$  e raio externo  $L$  (Timoshenko, Goodier, 1980 ), onde  $L$  é o comprimento indicado na figura [ 6.5 ].

As formas de discretização do contorno e aproximação das variáveis são as mesmas utilizadas para a placa quadrada sob força biaxial.

Em todos os testes foram utilizados oito nós funcionais nas faces da placa paralelas a  $X_1$  e  $X_2$ , sete sobre os eixos de simetria e nove sobre a porção do contorno correspondente ao orifício. As formulações direta e indireta do Método dos Elementos de Contorno sofreram alteração no número de nós funcionais devido à utilização do nó duplo, conforme citado na aplicação anterior.

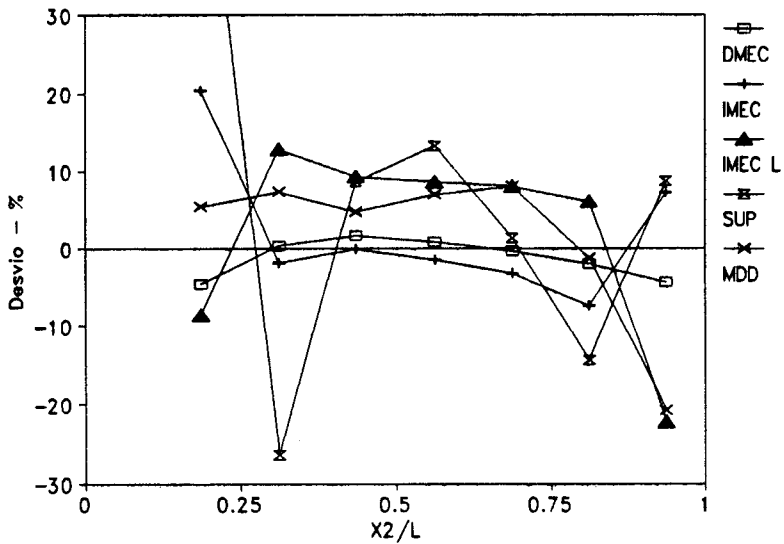
Os resultados obtidos foram comparados à solução analítica do problema ( Timoshenko, Goodier, 1980 ). Os pontos do domínio correspondem à um ângulo de  $45^\circ$ , dentro dos limites do anel acima citado. Para avaliação dos deslocamentos no contorno considerou-se, como solução analítica, resultados da placa sem orifício, analisando-se pontos afastados do ponto de tangência do anel ao contorno da placa.

Adotou-se, como característica do material, um módulo de elasticidade  $E = 5.0$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , para a força na direção  $X_1$ ,  $p = 1.0$  e, para o comprimento  $L$  indicado na figura [ 6.2 ], 4 unidades de comprimento.

A tabela [ 6.9 ] apresenta as forças de superfície na direção  $X_1$  do contorno da placa, para a face paralela à  $X_2$  sobre o eixo de simetria. Os desvios percentuais em relação à solução analítica estão na figura [ 6.6 ]. O comportamento mais regular foi apresentado pela formulação direta do

$X_2$	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0.75	-1.5185	-1.4491	-1.8280	-1.3880	-2.4300	-1.6000
1.25	-1.1184	-1.1217	-1.0980	-1.2620	-0.8246	-1.2000
1.75	-1.0508	-1.0678	-1.0500	-1.1480	-1.1400	-1.1000
2.25	-1.0283	-1.0365	-1.0130	-1.1161	-1.1640	-1.1000
2.75	-1.0182	-1.0146	-0.9858	-1.1000	-1.0320	-1.1000
3.25	-1.0127	-0.9928	-0.9382	-1.0740	-0.8676	-1.0000

**TABELA 6.9:** Forças de superfície na direção  $X_1$  da face paralela a  $X_2$  sobre o eixo de simetria



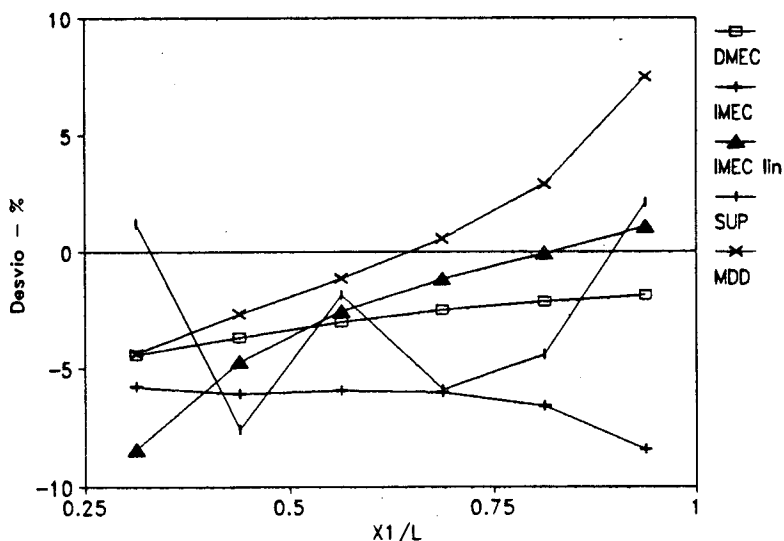
**FIGURA 6.6:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.9

Método dos Elementos de Contorno e, o mais irregular, pelo Método da Superposição.

Os resultados da tabela [ 6.10 ] são apresentados, em relação aos desvios percentuais da solução analítica, na figura [ 6.7 ], onde podem ser observados desvios em torno de 5% e 10% para todos os métodos. Neste gráfico, assim como no anterior, pode-se verificar uma melhora de

$X_1$	analítica	DEMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
1.25	0.2500	0.2390	0.2356	0.2289	0.2530	0.2391
1.75	0.3500	0.3372	0.3288	0.3335	0.3235	0.3407
2.25	0.4500	0.4365	0.4233	0.4384	0.4415	0.4448
2.75	0.5500	0.5363	0.5170	0.5436	0.5176	0.5530
3.25	0.6500	0.6361	0.6072	0.6495	0.6213	0.6686
3.75	0.7500	0.7359	0.6867	0.7580	0.7657	0.8062

**TABELA 6.10:** Deslocamentos na direção  $X_1$  face paralela a  $X_1$



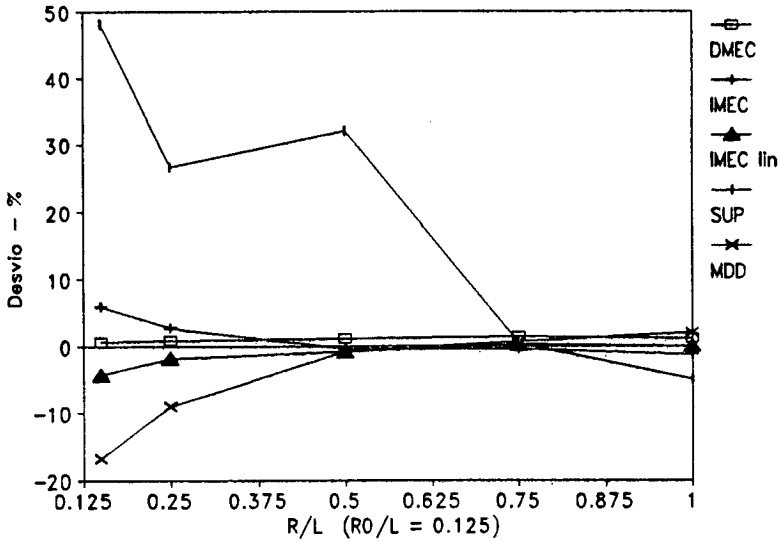
**FIGURA 6.7:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.10

resultados, com relação às formulações indiretas, para pontos próximos aos vértices da placa quando foi utilizado o elemento linear descontínuo na formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno. Novamente, o comportamento mais irregular foi apresentado pelo Método da Superposição.

Os resultados mostrados na tabela [ 6.11 ] estão, em relação aos desvios percentuais da solução analítica, indicados na figura [ 6.8 ] e representam os deslocamentos na direção radial  $u_r$ . Pode-se observar o comportamento muito irregular do Método da Superposição, que chegou a

R	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0.60	0.0962	0.0967	0.1018	0.0920	0.1425	0.0800
1.00	0.1025	0.1034	0.1053	0.1006	0.1298	0.0932
2.00	0.1563	0.1579	0.1556	0.1549	0.2063	0.1549
3.00	0.2200	0.2232	0.2191	0.2206	0.2211	0.2213
4.00	0.2881	0.2913	0.2845	0.2879	0.2737	0.2936

**TABELA 6.11:** Deslocamento radial  $u_r$  para  $\theta = 45^\circ$



**FIGURA 6.8:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.11

apresentar desvio próximo à 50% em um dos pontos analisados. A formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno apresentou desvios em torno de 5% nos primeiros pontos analisados, tanto para o elemento constante quanto para o linear descontínuo e regularizou-se em seguida. O Método das Descontinuidades de Deslocamentos apresentou apenas dois pontos com desvios superiores à 10%, com os demais pontos situando-se, também, em 5%. Os melhores resultados foram os da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno.

R	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0.60	0.1528	0.1594	0.1254	0.1845	0.0530	0.2500
1.00	0.3750	0.3818	0.3357	0.3778	0.2243	0.5000
2.00	0.4688	0.4745	0.4605	0.4646	0.4571	0.5500
3.00	0.4861	0.4911	0.4789	0.4873	0.4561	0.5500
4.00	0.4922	0.4973	0.4785	0.4910	0.5072	0.5500

**TABELA 6.12:** Tensão  $\sigma_r$  para  $\theta = 45^\circ$

As tabelas [ 6.12 ], [ 6.13 ] e [ 6.14 ] apresentam as tensões calculadas em pontos do domínio para um ângulo de  $45^\circ$  e são, respectivamente, os resultados da componente normal da tensão na direção radial  $\sigma_r$ , da componente normal na direção circunferencial  $\sigma_\theta$  e da componente cisalhante  $\tau_{r\theta}$ . Os desvios percentuais correspondentes estão nas figuras [ 6.9 ], [ 6.10 ] e [ 6.11 ].

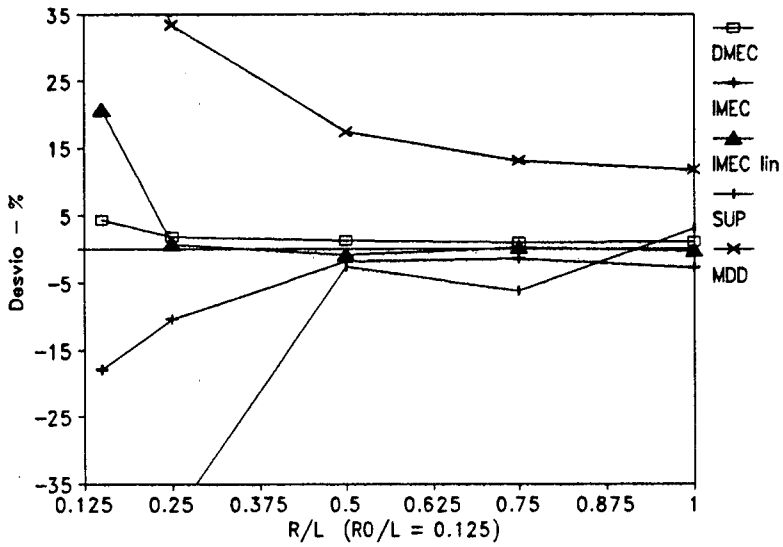
R	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0.60	0.8472	0.8608	0.7630	0.8923	0.6262	1.0500
1.00	0.6250	0.6336	0.6231	0.5834	0.6557	0.7000
2.00	0.5313	0.5385	0.5259	0.5078	0.5463	0.5500
3.00	0.5139	0.5199	0.5100	0.5025	0.5147	0.5500
4.00	0.5078	0.5095	0.5066	0.5121	0.4714	0.5500

**TABELA 6.13:** Tensão  $\sigma_\theta$  para  $\theta = 45^\circ$

R	analítica	DMEC	IMEC	IMEC lin	SUP	MDD
0.60	-0.4711	-0.5091	-0.4116	-0.5446	-0.5575	-0.5500
1.00	-0.6563	-0.6916	-0.6716	-0.6974	-0.6870	-0.8000
2.00	-0.5098	-0.5780	-0.5878	-0.5888	-0.5723	-0.6500
3.00	-0.5266	-0.5315	-0.5437	-0.5341	-0.5346	-0.5500
4.00	-0.5153	-0.5072	-0.5154	-0.5075	-0.4979	-0.5500

**TABELA 6.14:** Tensão  $\tau_{r\theta}$  para  $\theta = 45^\circ$

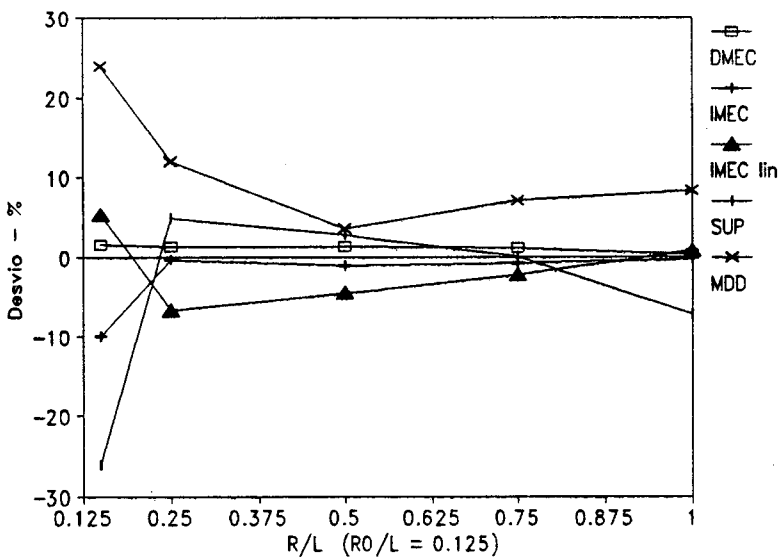
Observando-se a figura [ 6.9 ] (  $\sigma_r$  ), verifica-se os grandes desvios apresentados pelos métodos da Superposição e Descontinuidade de Deslocamentos. As maiores regularidades foram apresentadas pela formulação direta do Método dos Elementos de Contorno e pela formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno com elemento



**FIGURA 6.9:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.12

linear descontínuo onde, excluindo-se o primeiro ponto da formulação indireta, os desvios não foram superiores à 5%.

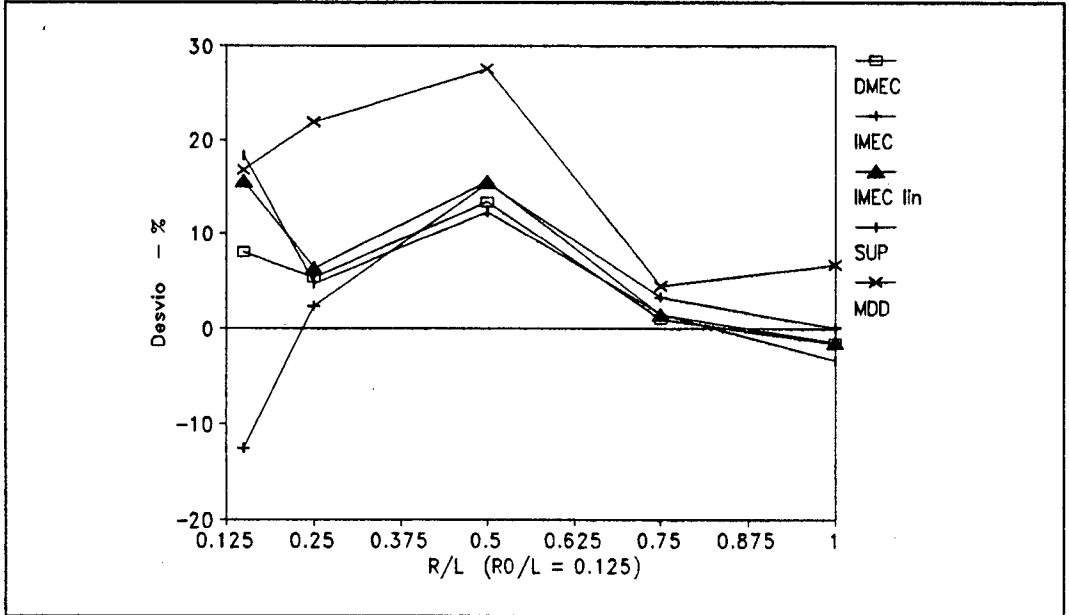
A figura [ 6.10 ] (  $\sigma_{\theta}$  ), confirma o comportamento irregular do Método das Descontinuidades de Deslocamentos e do Método da Superposição ,



**FIGURA 6.10:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.13

ficando os demais com desvios nos pontos iniciais em torno de 10%, diminuindo para os demais pontos.

Os valores de  $\tau_{r\theta}$  estão na figura [ 6.11 ], onde pode-se observar desvios em torno de 15% para os pontos iniciais de todos os métodos. O Método das Descontinuidades de Deslocamentos apresentou desvios ainda maiores.

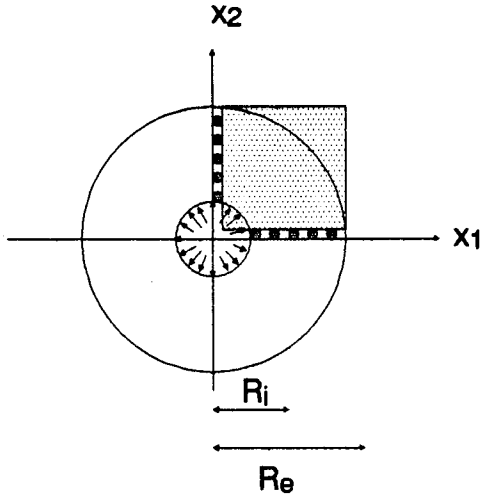


**FIGURA 6.11:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.14

Os resultados desta aplicação mostraram uma alteração de comportamento do Método da Superposição em relação à aplicação anterior. No presente caso, este método apresentou comportamento muito irregular, com grandes desvios da solução analítica. Da mesma forma, os demais métodos apresentaram desvios maiores em relação à placa sujeita à força biaxial mas, devido à sua grande regularidade anterior, o Método da Superposição destacou-se.

### CILINDRO DE PAREDE ESPESSA

O cilindro de parede espessa apresentado na figura [ 6.12 ] está submetido à uma pressão interna uniforme e foi analisado em estado plano de deformação.



**FIGURA 6.12:** Cilindro de parede espessa sujeito à pressão interna uniforme

Para esta análise, o contorno foi discretizado em sua quarta parte, onde os eixos de simetria foram considerados como parte do mesmo.

Esta discretização foi feita, exceto para o Método da Superposição, através de elementos retos e os tipos de aproximação das variáveis utilizadas sobre estes elementos foram:

Formulação direta do Método dos Elementos de Contorno ( DMEC )

- aproximação linear ( elemento linear )

Formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno ( IMEC )

- aproximação constante ( elemento constante )

Método das descontinuidades de Deslocamentos ( MDD )

- aproximação constante ( elemento constante )

Para todos os métodos foram utilizados vinte e oito nós funcionais sendo cinco sobre as partes dos eixos de simetria pertencentes ao contorno considerado e nove sobre as partes circulares. Estes nós, no caso da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, foram acrescidos de oito devido à consideração de descontinuidade de condições de contorno.

A pressão interna constante foi considerada  $p = 2 \text{ N/mm}^2$ , os raios interno e externo, respectivamente,  $10 \text{ mm}$  e  $20 \text{ mm}$ . Para características do material utilizou-se um módulo de elasticidade  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ .

Os resultados obtidos foram comparados à solução analítica do problema ( Lin, 1968 ), utilizando-se um angulo de  $45^\circ$  e pontos do domínio onde foram avaliados o deslocamento na direção radial  $u_r$  e as tensões normais na direção radial ( $\sigma_r$ ) e circunferencial ( $\sigma_\theta$ ).

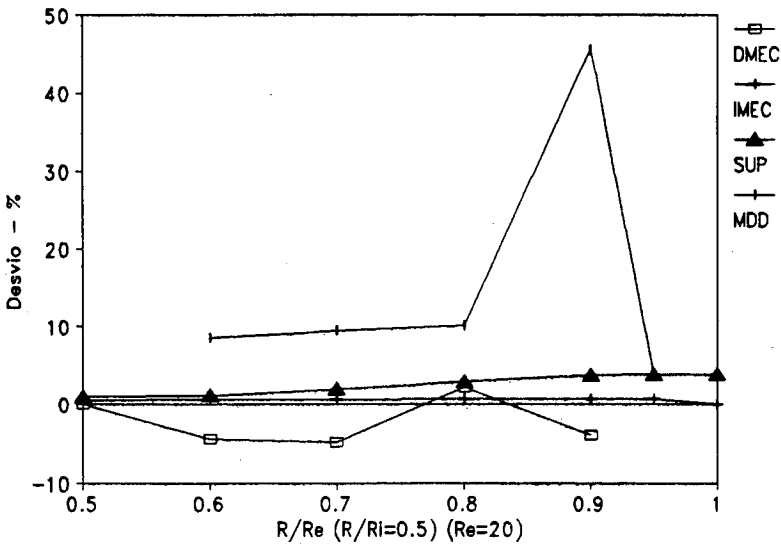
A seguir, apresenta-se as tabelas e gráficos de desvios percentuais correspondentes aos resultados.

Os desvios percentuais dos resultados da tabela [ 6.15 ] constam da figura [ 6.13 ]. Os métodos que mais aproximaram-se da solução analítica foram a formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno e o Método da Superposição. O Método das descontinuidades de Deslocamentos apresentou os maiores desvios.

Os valores da tensão  $\sigma_r$  estão contidos na tabela [ 6.16 ] e a figura [ 6.14 ] mostra os desvios percentuais dos mesmos em relação à solução

R	analítica	DMEC	IMEC	SUP	MDD
10.00	1.84	1.84	1.85	1.86	-
12.00	1.63	1.56	1.64	1.65	1.77
14.00	1.48	1.41	1.49	1.51	1.62
16.00	1.38	1.41	1.39	1.42	1.52
18.00	1.32	1.27	1.33	1.37	1.92
19.00	1.30	-	1.31	1.35	1.35
20.00	1.28	1.27	1.28	1.33	-

**TABELA 6.15:** Deslocamento  $u_r$  para  $\theta = 45^\circ$   
(os valores da tabela devem ser multiplicados por  $10^{-3}$ )



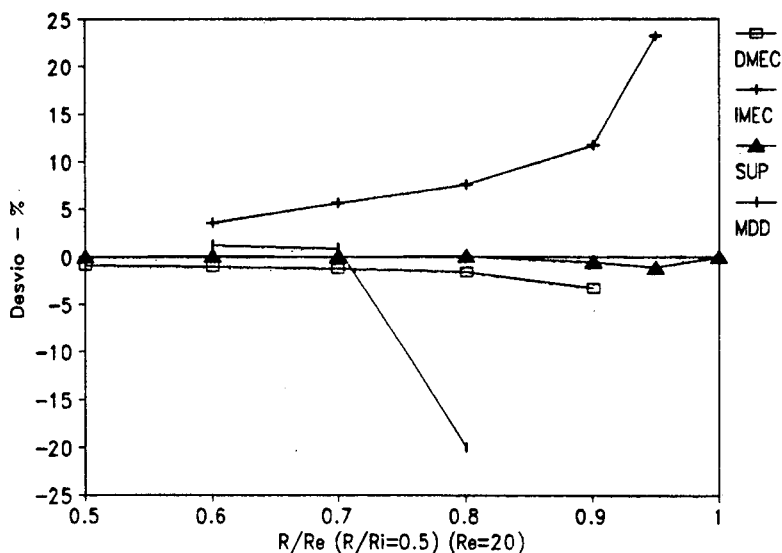
**FIGURA 6.13:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.15

analítica. O Método da Superposição manteve a regularidade apresentada no gráfico anterior e, para esta tensão, a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno apresentou-se muito regular, com desvios em torno de 3%. As maiores irregularidades ocorreram com a formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno e o Método das descontinuidades de Deslocamentos.

R	analítica	DMEC	IMEC	SUP	MDD
10.00	-2.0000	-1.9823	-	-1.9995	-
12.00	-1.1852	-1.1725	-1.2274	-1.1862	-1.2000
14.00	-0.6939	-0.6852	-0.7330	-0.6942	-0.7000
16.00	-0.3750	-0.3693	-0.4033	-0.3752	-0.3000
18.00	-0.1564	-0.1512	-0.1747	-0.1556	-
19.00	-0.0720	0.0032	-0.0887	-0.0712	-
20.00	0.0000	-	0.0000	-0.0001	-

**TABELA 6.16:** Tensão  $\sigma_r$  para  $\theta = 45^\circ$

Os resultados para a tensão  $\sigma_\theta$  são apresentados na tabela [ 6.17 ] e na figura [ 6.15 ]. Os comportamentos do Método da Superposição e da

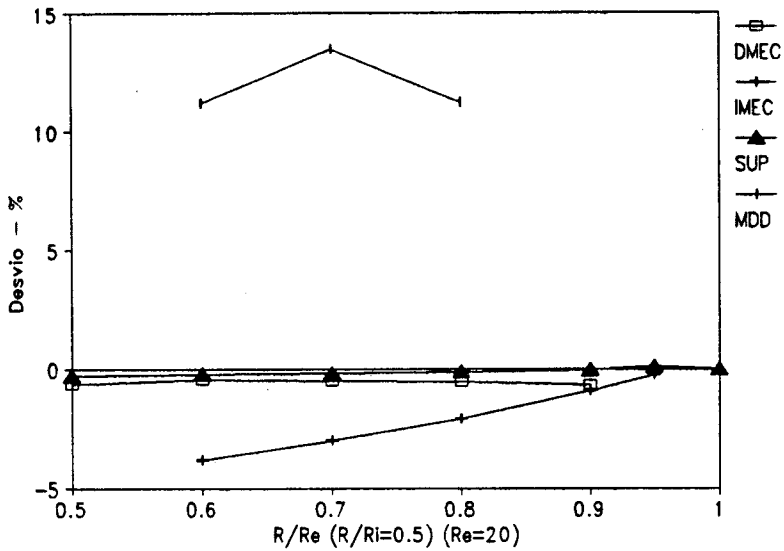


**FIGURA 6.14:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.16

formulação direta do Método dos Elementos de Contorno foi mantido em relação ao gráfico anterior. A formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno apresentou variações de até 4% e o Método das Descontinuidades de Deslocamentos foi o mais irregular.

R	analítica	DMEC	IMEC	SUP	MDD
10.00	3.3333	3.3133	-	3.3245	-
12.00	2.5185	2.5071	2.4226	2.5139	2.8000
14.00	2.0272	2.0176	1.9670	2.0239	2.3000
16.00	1.7083	1.6998	1.6727	1.7069	1.9000
18.00	1.4897	1.4799	1.4763	1.4895	-
19.00	1.4054	-	1.4019	1.4068	-
20.00	1.3333	-	-	1.3384	-

**TABELA 6.17:** Tensão  $\sigma_\theta$  para  $\theta = 45^\circ$



**FIGURA 6.15:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.17

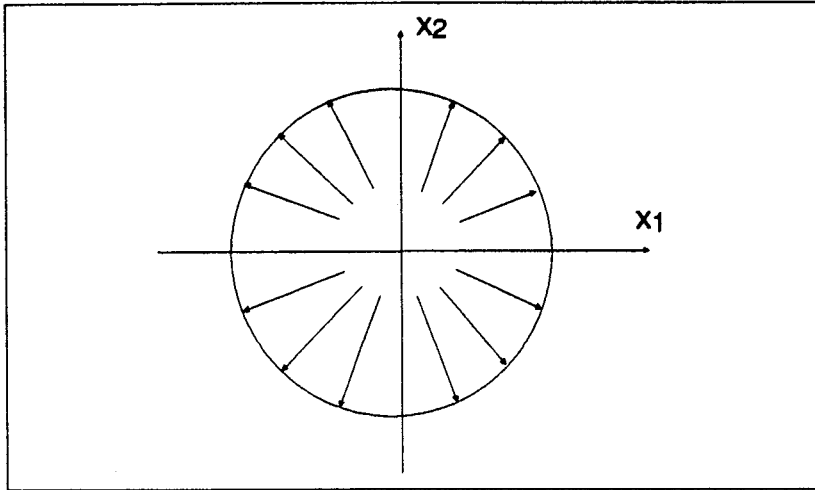
### CAVIDADE CIRCULAR EM MEIO INFINITO

Neste exemplo, foi analisada a cavidade circular em meio infinito sujeita à pressão interna constante (figura [ 6.16 ]).

As formas de discretização do contorno e as aproximações utilizadas para as variáveis são idênticas às do cilindro de parede espessa da aplicação anterior. O número de nós funcionais foi de trinta e seis em todos os casos e o contorno foi discretizado integralmente.

Adotou-se, para características do material, um módulo de elasticidade  $E=21.$ , um coeficiente de Poisson  $\nu = 0.1$ . Para a pressão interna uniforme foi utilizado  $p = 15$  e o raio do círculo igual à 10 unidades de comprimento. Os resultados obtidos foram comparados à solução analítica do problema ( Sokolnikoff, 1956 ), utilizando-se um ângulo de  $45^\circ$  e pontos do domínio e são apresentados a seguir.

Os resultados obtidos para os deslocamentos radiais  $u_r$  em seis pontos do domínio da cavidade circular estão contidos na tabela [ 6.18 ]. Os desvios percentuais em relação à solução analítica estão na figura



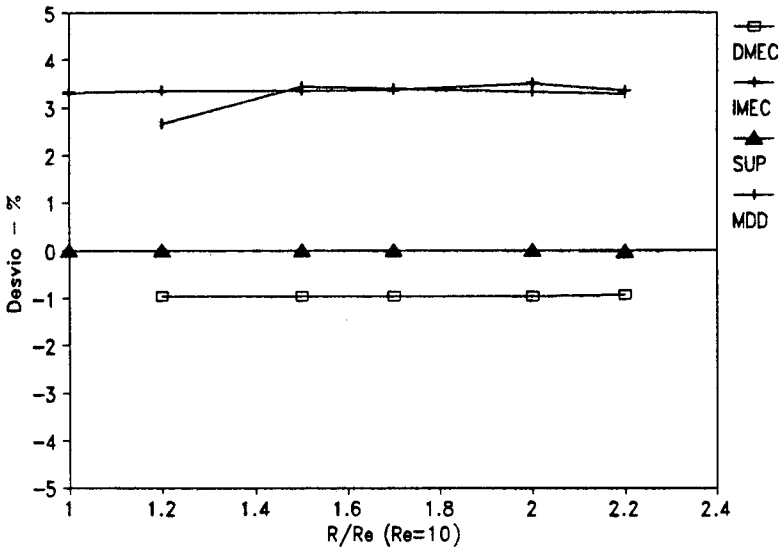
**FIGURA 6.16:** Cavidade circular em meio infinito

[ 6.17 ], onde pode-se observar a regularidade de todos os métodos, com o maior desvio em torno de 3%. Os resultados mais próximos à solução analítica foram apresentados pelo Método da Superposição.

A figura [ 6.18 ] apresenta os desvios percentuais das tensões normais radial e circunferencial  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  que, para este caso, obedecem a relação  $\sigma_r = -\sigma_\theta$  . Pode-se observar a confirmação de comportamento de todos

R	analítica	DMEC	IMEC	SUP	MDD
10.00	7.8571	-	8.1176	7.8574	-
12.00	6.5476	6.4856	6.7670	6.5478	6.7212
15.00	5.2381	5.1885	5.4136	5.2382	5.4181
17.00	4.6219	4.5781	4.7772	4.6216	4.7787
20.00	3.9286	3.8914	4.0660	3.9287	4.0591
22.00	3.5714	3.5377	3.6911	3.5709	3.6886

**TABELA 6.18:** Deslocamento  $u_r$  para  $\theta = 45^\circ$

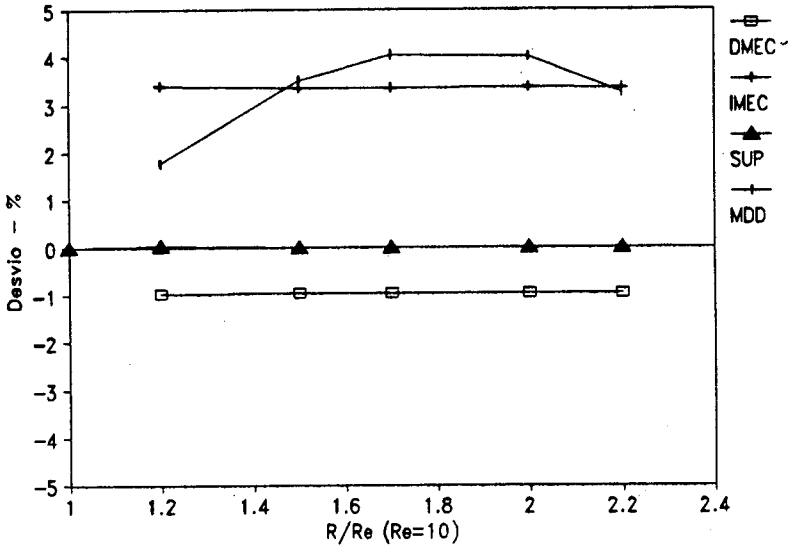


**FIGURA 6.17:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.18

os métodos em relação aos resultados anteriores com exceção do Método das Descontinuidades de Deslocamentos, que mostrou desvios em torno de 4% para alguns pontos.

R	analítica	DMEC	IMEC	SUP	MDD
10.00	-15.0000	-	-	-15.0000	-
12.00	-10.4167	-10.3160	-10.7700	-10.4200	-10.6000
15.00	-6.6667	-6.6036	-6.8900	-6.6670	-6.9000
17.00	-5.1903	-5.1411	-5.3640	-5.1900	-5.4000
20.00	-3.7500	-3.7145	-3.8760	-3.7500	-3.9000
22.00	-3.0992	-3.0698	-3.2030	-3.0990	-3.2000

**TABELA 6.19:** Tensões  $\sigma_r = -\sigma_\theta$  para  $\theta = 45^\circ$



**FIGURA 6.18:** Desvio percentual da solução analítica para a tabela 6.19

# 7

## CONCLUSÃO

De acordo com os resultados apresentados nos itens anteriores, algumas observações sobre o comportamento dos métodos testados podem ser feitas:

### **Formulação direta do Método dos Elementos de Contorno**

A formulação direta do Método dos Elementos de Contorno apresentou resultados coincidentes com a solução analítica do problema no caso da placa quadrada sujeita à carga biaxial e pequenos desvios percentuais nos demais casos. Os maiores desvios ocorreram para a placa quadrada com orifício central e ficaram em torno de 5%. De acordo com os testes realizados esta formulação apresentou o melhor comportamento.

### **Formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno**

Quanto à formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno, as maiores irregularidades ocorreram com as aplicações cujos contornos não eram suaves. Foram os casos da placa quadrada sujeita à força biaxial e da placa quadrada com orifício central. Conforme pode-se observar nos resultados obtidos, os valores determinados no contorno em nós funcionais próximos à partes do mesmo com descontinuidades

em suas normais afastaram-se da solução analítica. Segundo Jaswon e Symm ( Jaswon, Symm, 1977 ), isto ocorre devido à forma da função harmônica que possui seus valores prescritos nestas partes do contorno. Estas funções possuem derivadas infinitas em magnitude nestes locais e, quando isto ocorre, torna-se difícil a determinação precisa de seus valores nestas regiões. Com o intuito de minorar este efeito e verificar o comportamento do método próximo a estas regiões, as duas placas foram analisadas, também, utilizando-se o elemento descontínuo, com o deslocamento do nó funcional que estivesse localizado em pontos de normal descontínua. A melhora de resultados mais significativa ocorreu para a placa com orifício central, em relação aos deslocamentos na face paralela ao eixo  $X_2$ .

As aplicações de contornos suaves, casos do cilindro e da cavidade circular em meio infinito, apresentaram comportamento bastante regular, embora as variáveis destes casos só hajam sido aproximadas de forma constante. Os desvios máximos apresentados foram de 4%. A utilização do elemento linear descontínuo não apresentou vantagens para estes casos, uma vez que dobrava o número de nós funcionais pois, cada um deles, passava a fazer parte de uma região de normal descontínua, sendo transformado em nó duplo.

## **Método da Superposição**

Conforme pode ser observado nas aplicações, o Método da Superposição apresentou resultados iguais à solução analítica para os domínios simplesmente conectados ou seja, para a placa quadrada sujeita a força biaxial e para a cavidade em meio infinito.

Quanto aos demais exemplos, este método apresentou resultados muito próximos da solução analítica para o caso do cilindro de parede espessa. Para a placa com orifício central observou-se um comportamento muito irregular do método, com resultados muito afastados da solução analítica. De acordo com os testes executados, o problema parece residir na criação do contorno congruente ao contorno real, uma vez que o método não apresenta problemas de singularidade. O fornecimento de um único

valor para o parâmetro  $D$ , que cria o contorno congruente, distorce-o de tal forma a resultarem valores com desvios de até 100% em relação à solução analítica. Utilizou-se, então, obedecendo-se aos critérios citados por Burgess e Mahajerin ( Burgess, Mahajerin, 1984 ) para escolha deste parâmetro, valores diferentes para o mesmo, de acordo com a parte do contorno envolvida. Os resultados apresentados para o cilindro e para a placa com orifício central foram obtidos com este critério ou seja, foram fornecidos dois parâmetros para a criação do contorno congruente,  $D_1$  e  $D_2$ , de acordo com a parte do contorno considerada. Obteve-se uma boa resposta no caso do cilindro, em cujo contorno predominavam as formas circulares. No caso de placa com orifício central, de contorno mais irregular, houveram desvios de até 35%, conforme pode ser verificado nos gráficos apresentados.

## **Método das Descontinuidades de Deslocamentos**

O Método das Descontinuidades de Deslocamentos apresentou o comportamento mais irregular em relação à solução analítica dos problemas analisados.

De acordo com Crouch e Starfield ( Crouch, Starfield, 1983 ), melhores resultados estão vinculados à uma discretização com um número maior de pontos nodais. Como, no presente trabalho optou-se por um número fixo de nós funcionais para todos os métodos em cada aplicação feita, os resultados foram analisados através destes nós. Sob este aspecto, o Método das Descontinuidades de Deslocamentos apresentou, em relação aos demais métodos testados, as maiores irregularidades.

## **Sugestões**

Após estas observações, algumas sugestões de estudos sobre as formulações indiretas e os tipos de problemas aqui apresentadas podem ser feitas.

- Quanto à formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno, sugere-se o estudo dos domínios multiconectados com discretização integral do contorno e com a inserção de condições de simetria, sem a inclusão dos eixos em relação aos quais a simetria ocorre como parte do contorno.
- Da mesma forma, as sugestões em relação ao Método da Superposição estão relacionadas aos domínios multiconectados e referem-se à criação do contorno congruente ao contorno real, à discretização total do contorno real e à utilização de condições de simetria sob a forma acima citada.
- Em relação ao Método das Descontinuidades de Deslocamentos, sugere-se a utilização de aproximações de ordem superior para descrever as variáveis.
- Testes com a formulação direta hipersingular do Método dos Elementos de Contorno.

# Apêndice 1

## EQUAÇÕES GOVERNANTES DA TEORIA DA ELASTICIDADE

### ELASTICIDADE PLANA

Considere-se um corpo elástico isotrópico, em relação à um sistema de coordenadas cartesianas  $x_i$ , com  $i=1,2$ . A equação diferencial de equilíbrio para um elemento infinitesimal no interior do corpo será ( Telles, 1983 ):

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (\text{A 1.1})$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões e  $b_j$  as componentes das forças de volume. As derivadas são indicadas por uma vírgula. Assim, tem-se

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \sigma_{ij,i}$$

As condições de equilíbrio de momentos conduzem à

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Considerando-se conhecidas as componentes do tensor de tensões em um ponto, as forças de superfície que agem num plano que contenha o ponto podem ser escritas como

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A 1.2})$$

onde  $n_j$  representa os cossenos diretores da normal ao plano.

Sob a ação de forças, o corpo é deslocado de sua posição original. Se a posição de um ponto  $P$  na configuração inicial do corpo é  $x_i$  e, na configuração final,  $x_i + u_i$ ,  $u_i$  representa as componentes de deslocamento, sendo uma função continua de  $x_i$ . Para deslocamentos cuja primeira derivada seja tão pequena de forma a tornar os termos quadráticos e os produtos de suas derivadas desprezíveis, as deformações poderão ser representadas pelo tensor infinitesimal de Cauchy:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A 1.3})$$

Para um material elástico isotrópico, a relação tensão-deformação poderá ser expressa através da lei de Hooke como

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + 2G \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A 1.4})$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\delta_{ij}$  o símbolo do delta de Kronecker, assumindo os valores  $\delta_{ij}=1$  para  $i=j$  e  $\delta_{ij}=0$  para  $i \neq j$ . Utilizando-se o módulo de elasticidade longitudinal  $E$ , pode-se escrever

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Substituindo-se a equação [ A 1.3 ] na equação [ A 1.4 ] e o resultado na equação [ A 1.1 ], obtém-se a equação de Navier sob a forma

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (\text{A 1.5})$$

A equação [ A 1.5 ] é a equação diferencial governante para problemas bidimensionais de elasticidade.

As equações de [ A 1.1 ] a [ A 1.5 ] são válidas para o estado plano de deformação. Pode-se utilizá-las, também, para o estado plano de tensão, substituindo-se o coeficiente de Poisson  $\nu$  por  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu}$ .

## Apêndice 2

### SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Considerando-se  $\Omega^*$  um meio elástico infinito e  $\Gamma^*$  à uma distância infinita ( figura [ 1.1 ] ), a solução singular para a equação de Navier corresponde à solução de Kelvin. As expressões de deslocamentos e forças de superfície fundamentais serão, para problemas bidimensionais de elasticidade em estado plano de deformação ( Telles,1983 ):

$$u_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[ (3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \quad (A 2.1)$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ ((1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right] \quad (A 2.2)$$

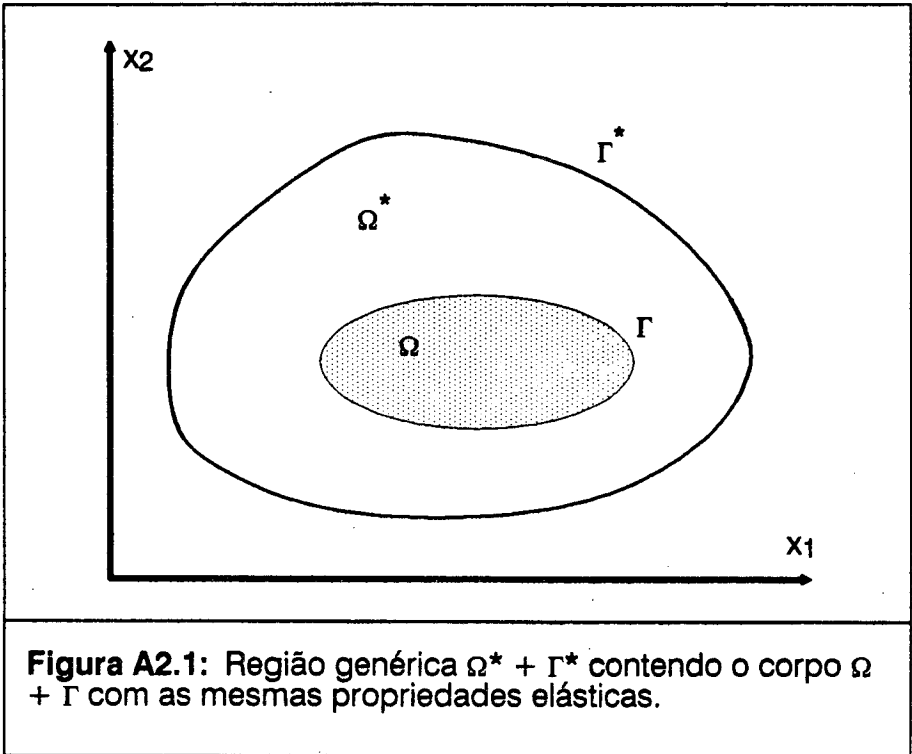
onde  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  representam, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  do ponto  $x$ , denominado ponto campo, devido à uma carga concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ , denominado ponto fonte. A distância entre os pontos fonte e campo é representada por  $r = r(\xi, x)$ . As derivadas de  $r$  em relação às coordenadas do ponto campo  $x$  são:

$$r = \sqrt{r_1 r_1}$$

$$r_{,i} = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (A 2.3)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_{,i}}{r}$$

Para a utilização das equações [ A 2.1 ] e [ A 2.2 ] em casos de estado plano de deformação, substitui-se  $\nu$  por  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ .



## Apêndice 3

### FORÇAS DE SUPERFÍCIE

### CONSTANTES SOBRE UM

### SEGMENTO FINITO EM UM

### SÓLIDO ELÁSTICO INFINITO

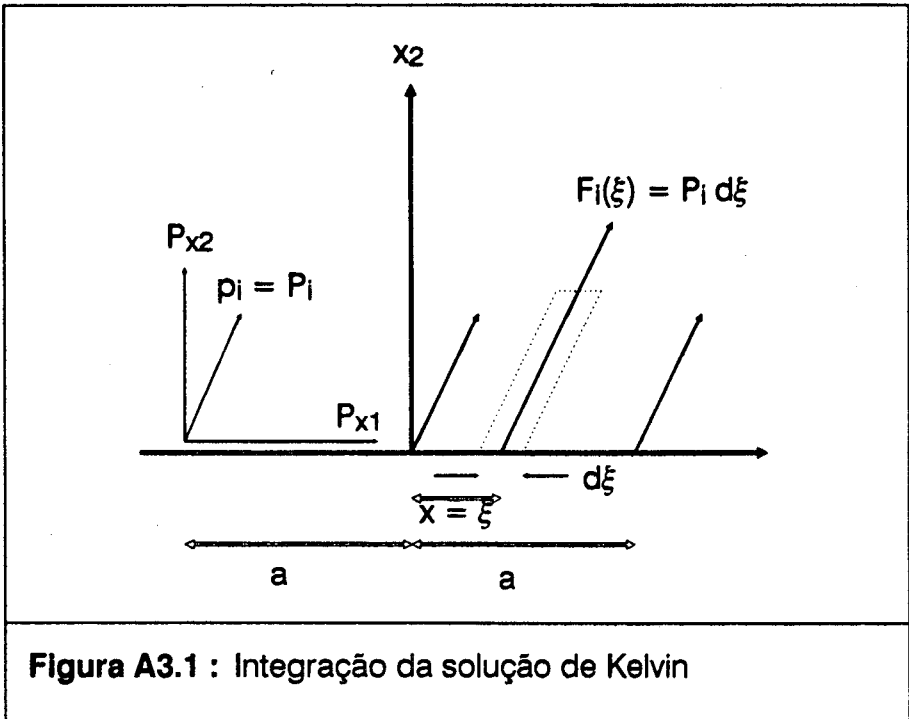
O problema de forças de superfície constantes  $p_{x_1} = P_{x_1}$  e  $p_{x_2} = P_{x_2}$  aplicadas sobre um segmento finito  $|x_1| \leq a$ ,  $x_2 = 0$  em um sólido elástico infinito poderá ser resolvido através da integração da solução de Kelvin para o estado plano de deformação. Esta solução é expressa pela função (Crouch, Starfield, 1983)

$$g(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \quad (\text{A 3.1})$$

O segmento em questão ( $|x_1| \leq a$ ,  $x_2 = 0$ ) é dividido em elementos de comprimento  $d\xi$  e a força resultante sobre um elemento centrado em  $x_1 = \xi$  e  $x_2 = 0$  será

$$F_i(\xi) = P_i d\xi \quad (\text{A 3.2})$$

onde  $i$  representa  $x_1$  ou  $x_2$  (figura [ A3.1 ] ). Substituindo-se  $x_1$  por  $x_1 - \xi$  e integrando-se o resultado em relação à  $\xi$  entre  $-a$  e  $a$



$$f(x_1, x_2) = \int_{-a}^a g(x_1 - \xi, x_2) d\xi \quad (\text{A 3.3})$$

tem-se

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ x_2 \left( \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} - \arctan \frac{x_2}{x_1 + a} \right) \dots \right. \\ \left. - (x_1 - a) \ln \left[ (x_1 - a)^2 + x_2^2 \right]^{1/2} + (x_1 + a) \ln \left[ (x_1 + a)^2 + x_2^2 \right]^{1/2} \right] \quad (\text{A 3.4})$$

Para construção das soluções do problema (deslocamentos e tensões) serão necessárias as derivadas da função  $f(x_1, x_2)$ . Estas derivadas são apresentadas a seguir:

$$f_{,x_1} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \left[ (x_1 - a)^2 + x_2^2 \right]^{1/2} - \ln \left[ (x_1 + a)^2 + x_2^2 \right]^{1/2} \right] \quad (\text{A 3.5})$$

$$f_{,x_2} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{x_2}{x_1 - a} - \arctan \frac{x_2}{x_1 + a} \right] \quad (\text{A 3.6})$$

$$f_{,x_1 x_2} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x_2}{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - \frac{x_2}{(x_1 + a)^2 + x_2^2} \right] \quad (\text{A 3.7})$$

$$f_{,x_1 x_1} = -f_{,x_2 x_2} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x_1 - a}{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - \frac{x_1 + a}{(x_1 + a)^2 + x_2^2} \right] \quad (\text{A 3.8})$$

$$f_{,x_1 x_2 x_2} = -f_{,x_1 x_1 x_1} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x_1 - a)^2 - x_2^2}{\left[ (x_1 - a)^2 + x_2^2 \right]^2} - \frac{(x_1 + a)^2 - x_2^2}{\left[ (x_1 + a)^2 + x_2^2 \right]^2} \right]$$

(A 3.9)

$$f_{,x_2 x_2 x_2} = -f_{,x_1 x_1 x_2} = \frac{2x_2}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x_1 - a}{\left[ (x_1 - a)^2 + x_2^2 \right]^2} - \frac{x_1 + a}{\left[ (x_1 + a)^2 + x_2^2 \right]^2} \right]$$

(A 3.10)

As equações de [ A3.1 ] a [ A3.10 ] são, também, utilizadas para construir a solução de problemas de descontinuidade de deslocamentos constante sobre um segmento finito no plano  $x_1, x_2$  de um sólido elástico infinito.

## BIBLIOGRAFIA

- BANERJEE, P. K., BUTTERFIELD, R. ( 1981 ),** Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw - Hill Book Company ( UK ) Limited, 1981.
- BREBBIA, C. A. ( 1978 ),** The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1978.
- BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. E WROBEL, L. C. ( 1984 ),** Boundary Element Techniques, Theory and Aplications in Engineering, Springer - Verlag, 1984.
- BURGESS, G., MAHAJERIN, E. (1984),** A Comparison of Boundary Element and Superposition Methods, Computers & Structures, volume 19, p. 697 - 705, 1984.
- CROUCH, S. L. ( 1976 ),** Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discontinuity Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 10, p. 301 - 343, 1976.
- CROUCH, S. L., STARFIELD, A. M. ( 1983 ),** Boundary Element Methods in Solid Mechanics, George Allen & Unwin ( Publishers ) Ltd, 1983.
- DYM, C. L., SHAMES, I. H. ( 1973 ),** Solid Mechanics, A Variational Approach, McGraw - Hill Book Company, Inc., 1973.
- HARTMANN, F. ( 1981 ),** Elastostatics, in BREBBIA, C. A., Progress in Boundary Element Methods, volume 1, Pentech Press, 1981.
- JASWON, M. A., SYMM, G. T. ( 1977 ),** Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, 1977.
- KELLOG, O. D. ( 1967 ),** Foundations of Potential Theory, Springer - Verlag, 1967.
- KUTT, H. R. (1975),** On the Numerical Evoluon of Finite-part Integrals Involving an Algebraic Singularity, Special Report, 1975.
- LIN, T. H. ( 1968 ),** Theory of Inelastic Structures, John Wiley and Sons, Inc., 1968.
- SILVA, L. H. M. (1988),** Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecanica, Tese de Doutorado apresentada na Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.
- SOKOLNIKOFF, I. S. ( 1956 ),** Mathematical Theory of Elasticity, McGraw - Hill Book Company, Inc., 1956.
- TELLES, J. C. F. ( 1983 ),** The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems, Springer - Verlag, 1983.

**TELLES, J. C. F. ( 1987 ), A Self-adaptative Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integral, International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 24, p. 959 - 973, 1987.**

**TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. ( 1980 ), Editora Guanabara Dois S. A., 1980.**