

ANÁLISE DOS FENÔMENOS TRANSITÓRIOS EM CÂMARAS DE ECLUSAS
ATRAVÉS DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS BI-DIMENSIONAL

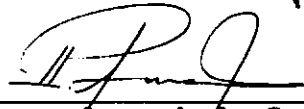
Alba Valéria Bodart Brandão

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

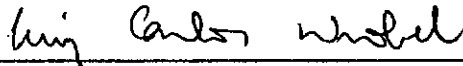
Aprovada por:



Prof. Bela Petry, M.Sc.
(Presidente)



Prof. Podalyro Amaral de Souza, Ph.D.



Prof. Luiz Carlos Wrobel, Ph.D.



Prof. Rui Carlos Vieira da Silva, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1989

BRANDÃO, ALBA VALÉRIA BODART

Análise dos Fenômenos Transitórios em Câmaras de Eclusas
Através do Método das Características Bi-Dimensional [Rio
de Janeiro] 1989

XVII, 154 p. 29,7 cm (COPPE/UF RJ , M. Sc., Engenharia
Civil, 1989)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

I. Escoamentos Transitórios com Superfície livre I.

COPPE/UF RJ

II. Título (série).

Para Aloadyr e Wilda,
por terem feito de todos os seus dias
o dia dos filhos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Bela Petry pelo apoio e cooperação irrestritos em todas as etapas deste trabalho. Minha admiração pelo excelente professor e amigo revelado no decorrer destes dois anos.

Ao meu marido, pela paciência com que suportou as minhas constantes ausências e pela amizade e carinho que me ajudaram a superar os momentos difíceis.

Ao Prof. Robson Sarmento da Universidade Federal do Espírito Santo pelo incentivo para que eu fizesse o mestrado em hidráulica e pelo interesse manifestado na pesquisa que originou esta tese.

Aos professores Jonatas Costa Moreira, Jerson Kelman, Paulo Canedo, João Sergio Roldão, Luiz Carlos Wrobel e Rui Carlos Vieira da Silva da COPPE pelo entusiasmo com que encaram a tarefa de ensinar a despeito de todas as dificuldades.

Aos amigos Letícia, Luiz Rafael, Carlos Eduardo, Lina, Ricardo e Evandro pela amizade demonstrada desde o primeiro dia de aula na COPPE.

Aos amigos Ana Paula Simões, Luciene P. da Silva e Jorge Prodanoff pela contribuição na elaboração da defesa e na divulgação deste trabalho.

Aos engenheiros Aluísio Canholi e Virginia Pimentel da THEMAG engenharia sempre tão solícitos e cooperativos no fornecimento de dados e explicações indispensáveis à elaboração deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

ANÁLISE DOS FENÔMENOS TRANSITÓRIOS EM CÂMARAS DE ECLUSAS
ATRAVÉS DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS BI-DIMENSIONAL.

Alba Valéria Bodart Brandão

Maio de 1989

Orientador: Bela Petry

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por finalidade a modelagem matemática das oscilações de grande comprimento de onda do nível d'água em câmaras de Eclusas durante operações de enchimento ou esvaziamento.

O fenômeno hidrodinâmico decorrente da alimentação não uniforme da câmara foi equacionado matematicamente considerando as duas direções do plano horizontal da câmara. A solução foi obtida pelo emprego do Método das Características.

Foram elaborados dois exemplos de alimentação da câmara onde é possível ter solução matemática exata e os resultados comparados com aqueles obtidos do emprego do Método das Características em duas dimensões. A concordância entre os resultados foi muito boa.

Dados de modelo reduzido da Eclusa de Jusante da Usina de Tucuruí foram utilizados para comparação com as oscilações do nível d'água obtidas do modelo matemático para a mesma condição

de enchimento. Os poucos dados confiáveis obtidos de modelo físico dificultam uma comparação mais detalhada, sendo possível apenas concluir que a declividade média da linha d'água na direção longitudinal da câmara é da mesma ordem de magnitude no modelo matemático e no modelo físico.

Também conclue-se que as declividades da linha d'água na direção transversal são da mesma ordem de grandeza das anteriores.

Neste trabalho também são feitas recomendações para trabalhos futuros com o objetivo de obter-se uma modelagem mais completa do fenômeno hidrodinâmico que ocorre em câmaras de Eclusas.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

ANALYSIS OF TRANSIENT PHENOMENA IN NAVIGATION LOCK CHAMBERS USING THE TWO DIMENSIONAAL METHOD OF CHARACTERISTICS.

Alba Valéria Bodart Brandão

May of 1989

Thesis Supervisor: Bela Petry

Department: Civil Engineering

This thesis has the purpose of developing a mathematical model representing the long waves which occur in navigation lock chambers during filling or emptying procedures.

The hydrodynamic phenomena are caused by unsteady filling and were studied considering the chamber's two horizontal directions. The solution was obtained using the Method of Characteristics.

Two theoretical examples of filling were developed and their exact mathematical solutions determined. These solutions were in close agreement with the numerical model results.

Data of water level oscillations from the Tucuruí Navigation Lock II reduced scale model were compared with results obtained from the mathematical model. The scarcity of data available from the reduced scale model, and the fact that these were not entirely reliable made it difficult to carry out

a detailed comparison. It was only possible to conclude that longitudinal slope of water surface is of the same order of magnitude in both models.

It was also concluded that the water surface slope in transversal direction is of the same order of magnitude as the one in longitudinal direction.

This thesis also points out in what directions future research should be conducted in order to achieve a complete modeling of the dynamic phenomena occurring in navigation lock chambers.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	5
II.1 - Generalidades	5
II.2 - Tipos de Eclusas de Navegação	5
II.3 - Problemas Associados à Operação de Eclusas ...	9
II.4 - Importância do Modelo Matemático	10
CAPÍTULO III - PESQUISA BIBLIOGRÁFICA	12
III.1 - Aspectos Relacionados com o Funcionamento de Eclusas de Alta Queda	12
III.2 - Conceitos de escoamentos Transitórios à Superfície Livre	15
III.2.1 - Formação de Ondas	15
III.2.2 - Causas dos Transitórios.....	16
III.2.3 - Celeridade e Altura da Onda	17
III.3 - Equacionamento Matemático do Fenômeno Físico	22
III.4 - Resolução Numérica	24
III.4.1 - Método das Características	24
III.4.2 - Método de Diferenças Finitas	25
CAPÍTULO IV - MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	26
IV.1 - O Processo de Propagação e o Conceito de Característica	26
IV.2 - O Processo de Propagação em Sistemas Contínuos: Geração de uma Superfície de Solução por Característica	29

IV.3 - A Solução de Problemas de Propagação em Sistemas Contínuos: O Método das Características	33
IV.3.1 - Apresentação das Equações Diferenciais para Escoamentos Não- - Permanentes Uni-Dimensionais em Canais Abertos	33
IV.3.2 - Solução pelo Método das Características	35
IV.4 - Erros de Interpolação	41
IV.5 - O Método do Grid de Características	43
 CAPÍTULO V - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO DO FENÔMENO HIDRÁULICO	48
V.1 - Hipóteses Simplificadoras Admitidas no Equacionamento	49
V.2 - Equação da Continuidade	50
V.3 - Equação do Movimento	53
V.4 - Equações Características	58
V.5 - Integração Numérica	59
V.6 - Interpolações	64
V.7 - Condições Iniciais e de Contorno	65
 CAPÍTULO VI - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO	68
VI.1 - Procedimento de Cálculo Adotado	68
VI.2 - Dados de Entrada	71
VI.3 - Algoritmo e Fluxograma do Programa	72

CAPÍTULO VII - APLICAÇÃO E APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS	78
VII.1 - Exemplo de Alimentação com Variação Uni-	
-Dimensional	79
VII.1.1 - Descrição do Equacionamento	79
VII.1.2 - Método das Características	82
VII.1.3 - Desenvolvimento em Série de Fourier	87
VII.1.4 - Análise de Convergência das Séries	92
VII.1.5 - Avaliação do Coeficiente de	
Ponderação Delta (δ) do Modelo	
Matemático do Capítulo IV	94
VII.1.6 - Apresentação de Resultados	99
VII.2 - Exemplo de Alimentação com Variação	
Bi-Dimensional	106
VII.2.1 - Apresentação de Resultados	115
 CAPÍTULO VIII - APLICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO À UMA SITUAÇÃO DE	
ENCHIMENTO DA ECLUSA II DE TUCURUÍ E COMPARAÇÃO COM OS	
RESULTADOS OBTIDOS EM MODELO REDUZIDO.....	128
VIII.1 - Dados de Ensaio Disponíveis.....	128
VIII.2 - Tratamento Dispensado às medições para utili-	
zação em Modelo Matemático	129
VIII.2.1 - Modelo de Aporcionamento de Vazões	
num Difusor.....	130
VIII.3 - Condições de Ensaio em Modelo Reduzido.....	135
VIII.4 - Comparação das Medições do Modelo Reduzido	
com os Resultados no Modelo Matemático.....	140
VIII.5 - Conclusão.....	142

CAPÍTULO IX - CONCLUSÃO FINAL E RECOMENDAÇÕES.....	144
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	148
APÊNDICE I - VALORES CARACTERÍSTICO E FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.....	151

LISTA DE SÍMBOLOS

Maiúsculas Romanas:

- A - Área do elemento de fluido normal ao escoamento
- A - Área da seção transversal do difusor
- A₀ - Área do orifício do difusor
- A₁ - Área normal ao escoamento na seção 1 do canal
- A₂ - Área normal ao escoamento na seção 2 do canal
- C_d - Coeficiente de vazão nos orifícios
- C_x⁺ - Característica positiva na direção-x
- C_x⁻ - Característica negativa na direção-x
- C_y⁺ - Característica positiva na direção-y
- C_y⁻ - Característica negativa na direção-y
- C₀ - Celeridade da onda no exemplo de alimentação com variação uni-dimensional
- C_m - Constante empírica da equação de Manning
- Fr - Resultante das forças agindo no volume de controle
- H₀ - Altura de água no interior da câmara no instante t=0
- NDX - Número de discretizações da malha na direção-x
- NDY - Número de discretizações da malha na direção-y
- Q - Vazão por unidade de largura
- Q_i(t) - Vazão no trecho entre as seções i-1 e i de um difusor
- Q₀ - Vazão de enchimento conhecida
- Q₀(t) - Vazão total de entrada no difusor
- Q₁ - Vazão na seção 1 do canal

- Q_2 - Vazão na seção 2 do canal
 Q_x - Vazão por unidade de largura na direção-x
 Q_y - Vazão por unidade de comprimento na direção-y
 R - Raio hidráulico
 S_f - Declividade da linha de energia
 S_o - Declividade do fundo do canal
 T - Solução particular (oscilação harmônica) de uma equação diferencial de segunda ordem
 T - Largura da seção prismática do canal na linha d'água
TENCH - Tempo de enchimento ou esvaziamento da câmara da Eclusa
TESP - Tempo de espaçamento entre as matrizes de velocidades do arquivo de dados
 T_v - Tempo de manobra da válvula
 U - Velocidade média na vertical na direção-x
 U_1 - Velocidade média na seção 1
 U_2 - Velocidade média na seção 2
 U_w - Velocidade absoluta da onda no canal
 V - Velocidade média na vertical na direção-y
 W - Função de alimentação da câmara
 W_o - Velocidade equivalente de entrada/saída de água no fundo da câmara
 W_{max} - Valor máximo da velocidade equivalente de entrada
 X - Solução da equação diferencial de segunda ordem, função apenas de x
 Z - Nível de água na câmara
 Z_o - Cota do eixo do Difusor

Minúsculas Romanas

- a - Dimensão longitudinal da câmara da Eclusa
- b - Dimensão transversal da câmara da Eclusa
- c - Celeridade da onda (velocidade da onda em relação à velocidade média do fluido onde está se propagando)
- \bar{c} - Aproximação de segunda ordem da celeridade
- $\frac{d}{dt}$ - Derivada total em relação ao tempo
- f - Coeficiente de perda de carga
- g - Aceleração da gravidade
- $h(x,y,t)$ - Altura média de água no ponto de coordenadas (x,y) no instante de tempo t
- h_i - Carga piezométrica hidráulica na seção i
- ℓ - Maior dimensão do tanque
- n - Coeficiente de atrito de Manning
- p - Pressão
- q - Vazão de entrada lateral por unidade de comprimento
- $q_i(t)$ - Vazão do i-ésimo orifício
- t - Tempo
- t_0 - Instante de tempo inicial ($t=0$)
- u - Velocidade com a qual as partículas do fluido movem-se no sentido do comprimento da câmara da Eclusa (direção-x)
- v - Velocidade com a qual as partículas do fluido movem-se no sentido da largura da câmara da Eclusa (direção-y)
- w - Velocidade vertical

- x - Distância de um ponto até a origem do eixo de coordenadas na direção-x
- y - Distância de um ponto até a origem do eixo de coordenadas na direção-y
- y - Profundidade do fluido normal ao fundo do canal
- y_1 - Profundidade na seção 1 do canal
- y_2 - Profundidade na seção 2 do canal
- \bar{y}_1 - Profundidade do centróide da área 1
- \bar{y}_2 - Profundidade do centróide da área 2
- z - Altura da onda

Maiúsculas Gregas

- Δt - Intervalo de tempo computacional
- Δx - Comprimento do elemento de discretização na direção-x
- Δy - Comprimento do elemento de discretização na direção-y
- Δz - Comprimento do elemento de discretização na direção-z

Minúsculas Gregas

- α - Fator de proporcionalidade da malha em $y \times t$ ($\Delta t / \Delta y$)
- α - Ângulo de inclinação do canal em relação a horizontal

- δ - Coeficiente de ponderação na avaliação de segunda ordem
- γ - Peso específico da água
- η - Perturbação do nível d'água em relação à altura média (h)
- $\frac{\partial}{\partial x}$ - Derivada parcial em relação a x
- $\frac{\partial}{\partial t}$ - Derivada parcial em relação a t
- $\frac{\partial}{\partial y}$ - Derivada parcial em relação a y
- $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ - Multiplicadores desconhecidos no Método das Características
- ξ - Peso usado na interpolação do Método das Características com intervalos de tempo especificados (valor entre 0 e 1)
- ρ - Massa específica da água
- θ - Fator de proporcionalidade da malha em $x*t$ ($\Delta t/\Delta x$)
- τ_0 - Coeficiente de atrito lateral

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

A navegação fluvial no Brasil não teve desenvolvimento acentuado por diversos motivos de ordem social e econômica ainda que o país disponha de rede fluvial de boas características de navegabilidade em que contudo é necessária a realização de obras de engenharia tais como portos, sistemas de transposição, canalizações e conexões intermodais.

Com a evolução da construção de usinas hidrelétricas melhoraram as condições de navegabilidade de numerosos cursos d'água tais como o Paraná, o São Francisco, o Tocantins e o Jacuí, tanto pela regularização de vazões quanto pela transformação de trechos de rios em reservatório. Isto tem feito com que em alguns cursos d'água tenha havido um aumento da densidade de tráfego fluvial.

A uma usina hidrelétrica associa-se em geral a existência de uma ou mais Eclusas de navegação que permitem a transposição dos desníveis por parte das embarcações.

O grande potencial hídrico do Brasil permitirá ainda a construção de várias usinas hidrelétricas de grande porte às quais estarão associadas construções de Eclusas com diferentes características físicas e necessidades operacionais.

Muitas das Eclusas em operação no Brasil tiveram seus projetos elaborados na Europa e nos Estados Unidos, tendo as empresas brasileiras começado a desenvolver tais projetos nos últimos vinte anos ainda baseando-se na experiência e nos resultados obtidos em Eclusas construídas fora do Brasil.

Visto que o potencial hídrico para aproveitamento em usinas de grande porte nos Estados Unidos e na Europa já está

praticamente esgotado existe, por parte destes, um interesse menor em desenvolver novas técnicas para projetos de Eclusas. Assim, quase todo o desenvolvimento tecnológico que se fizer necessário para o projeto de Eclusas no Brasil terá que ser realizado aqui.

Algumas das Eclusas existentes no Brasil já foram totalmente projetadas por empresas nacionais. As dificuldades na elaboração de tais projetos despertaram nos projetistas o interesse em contar com instrumentos que possibilitem otimizar seu trabalho.

Atualmente o projeto de uma Eclusa é baseado em outras existentes e de eficiência comprovada. Ainda existe uma grande dependência de modelos físicos o que vem, por motivo de ordem prática limitar a liberdade do profissional ao elaborar alternativas para o projeto de uma Eclusa. O projetista ainda só conta com instrumentos limitados que possam lhe antecipar de que forma determinada parte do projeto irá comportar-se durante a operação de eclusagem, isto só é analisado nos ensaios em modelo reduzido quando fica difícil proceder qualquer modificação no projeto inicial.

Dentre os problemas mais graves que podem ocorrer durante uma operação de eclusagem se destaca a oscilação excessiva do nível d'água na câmara que pode ser perigosa para a embarcação. Esta oscilação é função da manobra das válvulas e do sistema de distribuição pelo qual se processa o enchimento e esvaziamento da câmara.

O desejável seria testar a eficiência do sistema de distribuição independente do modelo reduzido e processar mudanças sem implicar em gastos vultuosos ou atraso no projeto

que fatalmente acontecem se for necessário construir vários modelos físicos. Isto seria possível com a existência de um modelo matemático que simulasse os fenômenos que ocorrem no interior da câmara durante o enchimento ou esvaziamento.

O presente trabalho visa a elaboração de tal modelo matemático. É preciso esclarecer que este ainda não é um modelo definitivo pois conta com algumas simplificações que deverão ser melhor analisadas em estudo posterior.

O objetivo principal é mostrar a possibilidade de elaboração do modelo matemático e da utilização de um método numérico comprovadamente eficiente na análise de problemas de transientes para a obtenção de resultados com precisão satisfatória.

Esta dissertação está dividida em capítulos que explicam as diversas etapas desenvolvidas no decorrer do trabalho visando atingir o objetivo estabelecido.

No Capítulo II apresenta-se uma visão geral dos vários tipos de Eclusas existentes e dos problemas associados a cada uma delas. Descreve-se o tipo de Eclusa que será considerado neste trabalho.

O Capítulo III contém uma exposição do que foi encontrado na pesquisa bibliográfica realizada e como tais conceitos foram aproveitados e desenvolvidos.

No Capítulo IV introduz-se o método numérico que será utilizado, suas variações, vantagens e desvantagens. Faz-se uma aplicação deste método para um escoamento não-permanente uni-dimensional em canal prismático.

No Capítulo V é feito o equacionamento matemático do escoamento não-permanente bi-dimensional que ocorre no interior

da câmara da Eclusa durante o enchimento ou esvaziamento da mesma. Aplica-se o método numérico escolhido para a obtenção de equações explícitas das incógnitas.

No Capítulo VI encontram-se: a descrição do programa computacional desenvolvido, uma explicação do procedimento de cálculo adotado, o algoritmo e o fluxograma do programa.

O Capítulo VII é uma aplicação do modelo matemático elaborado com dois exemplos de alimentação da câmara. Os exemplos são casos em que é possível obter-se solução analítica exata através de desenvolvimento em série de Fourier .É feita uma comparação entre os resultados exatos e aqueles obtidos do modelo matemático desenvolvido para determinar a precisão deste último.

O Capítulo VIII mostra a aplicação do modelo a um exemplo real de enchimento da Eclusa II de Tucuruí e a comparação dos resultados com aqueles obtidos em ensaios em modelo reduzido.

No Capítulo IX faz-se uma análise dos resultados obtidos, sendo sugerida a elaboração de estudos que leve em consideração fatores desconsiderados neste trabalho, como a presença de embarcação no interior da câmara e introdução de parcela referente à dissipação de energia na entrada do fluxo d'água à câmara.

CAPÍTULO II - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.

II.1 - GENERALIDADES.

Historicamente as primeiras Eclusas de que se tem notícias datam do fim do século XV na Europa. Naqueles tempos não estavam disponíveis todas as facilidades de transporte hoje existentes, principalmente no que diz respeito ao transporte de grandes massas. Desta forma, a navegação fluvial desempenhou um papel de grande importância como meio de transporte interior. Para que os rios pudessem ser utilizados na navegação fez-se necessária a escavação de muitos canais bem como a construção de obras de controle de nível d'água e transposição de desnível.

II.2 - TIPOS DE ECLUSAS DE NAVEGAÇÃO.

A literatura técnica de forma geral divide a evolução das Eclusas em três estágios de acordo com o desnível alcançado e o sistema de adução e esgotamento utilizado.

O primeiro estágio teve início no século XVI e limita os desníveis a três metros. Estas eclusas eram dotadas de sistemas de enchimento bastante primários, feitos através das próprias portas. O baixo nível de esforços sobre as embarcações era garantido pelo enchimento e esvaziamento em ritmo lento.

O segundo estágio inclui Eclusas com até quinze metros de desnível, o que só foi possível com a evolução dos sistemas de enchimento e esgotamento. O principal aspecto a exigir uma grande sofisticação nos sistemas de distribuição do fluxo d'água no interior das Eclusas foi o atendimento aos critérios

existentes de esforços máximos nas amarras das embarcações aliado a tempos de enchimento e esvaziamento compatíveis com as necessidades do tráfego fluvial.

Neste estágio formaram-se duas tendências de planejamento de sistemas de adução e esgotamento, a saber: a européia que se caracteriza por dispositivos localizados nas extremidades de montante e jusante independente das portas e acionados segundo as necessidades de enchimento e esvaziamento da câmara da Eclusa (FIG.II.1) e a norte-americana que usa aquedutos com orifícios embutidos nos muros laterais (FIG.II.2). As duas soluções apresentam resultados operativos satisfatórios sendo que o conceito americano permite a construção de Eclusas com desníveis maiores enquanto o europeu se destaca pela maior simplicidade gerando economia significativa.

Com estes dois tipos de sistemas de distribuição de água não foi possível alcançar desníveis maiores do que quinze metros pois ambos apresentam o inconveniente de gerar oscilações excessivas da superfície d'água na câmara da Eclusa. Tal problema é mais acentuado quando os enchimentos e esvaziamentos são feitos pelas extremidades da câmara, tal como na concepção européia, devido à formação de ondas de translação, sendo também observado na prática norte-americana onde tais oscilações são provocadas pela má distribuição das vazões nos orifícios.

É importante ressaltar que as oscilações do nível d'água no interior da câmara constituem um aspecto de grande relevância uma vez que estas geram esforços nas amarrações que podem provocar o rompimento das amarras e a colisão da embarcação com as portas ou as paredes laterais da câmara.

O terceiro estágio caracteriza-se por incluir Eclusas com desníveis de até trinta e cinco metros. Para alcançar desníveis nesta faixa a prática mostrou a necessidade da utilização de sistemas de enchimento e esvaziamento "hidrodinamicamente equilibrados", onde a entrada dos aquedutos à câmara é feita pelo centro e a distribuição através de subcondutos e difusores é realizada de forma a equilibrar os comprimentos de inércia e perdas de carga. Esses sistemas hidráulicos possibilitam a distribuição da vazão afluyente à câmara de forma balanceada, de maneira a uniformizar o enchimento e o esvaziamento da mesma, visando minimizar os fenômenos de turbulência e ondulações característicos, e por conseguinte favorecer a realização de eclusagens mais rápidas e seguras (FIG.II.3).

Este sistema oferece ainda a vantagem de resultar em operações de enchimento e esgotamento seguras mesmo com a operação de apenas uma válvula, o que é possível pelo fato da alimentação pelo centro da câmara originar uma correta partição da vazão.

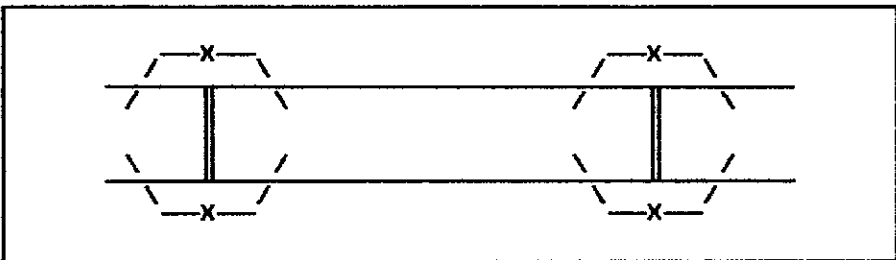


FIG.II.1 - Sistema de Enchimento e Esgotamento nas extremidades de jusante e montante, independente das portas.

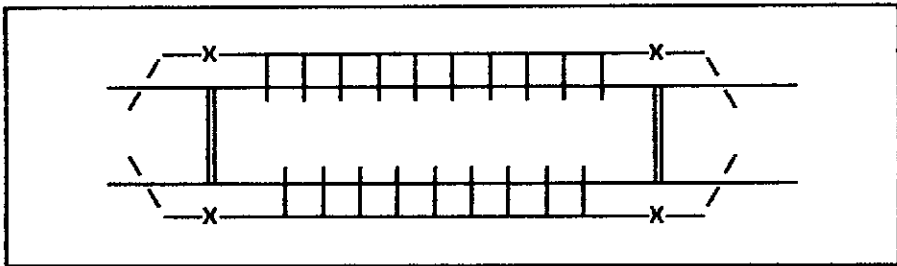


FIG.II.2 - Sistema de Enchimento e Esgotamento através de orifícios nas paredes laterais.

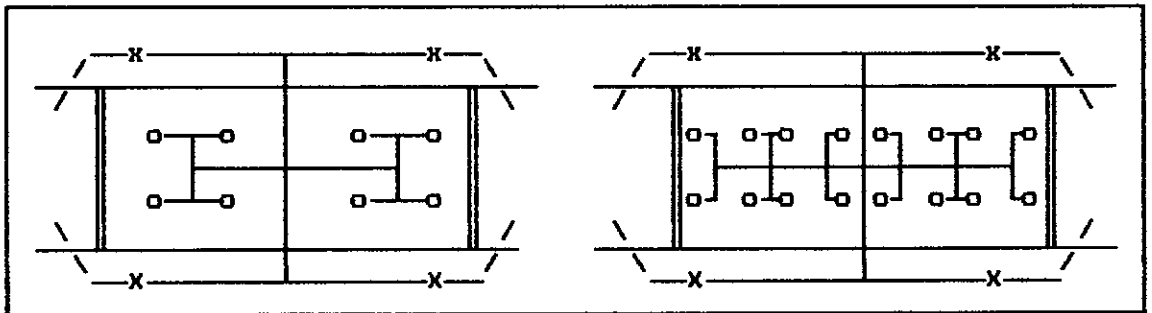


FIG.II.3 - Sistemas Hidrodinamicamente Equilibrados

Um dos primeiros sistemas de distribuição balanceados foi o utilizado na Eclusa de S.Pierre-Donzère-Mondragon no Rio Ródano na França (1952) construída com complexos sistemas de aquedutos de fundo, e uma laje perfurada assegurando a uniforme distribuição do fluxo. Este sistema e variações do mesmo foram e ainda são bastante utilizados na Europa [14].

As principais Eclusas ultimamente projetadas pelo Corps of Engineers (Waterways Experimental Station) nos Estados Unidos, como Lower Granite (Snake River), Bay Springs (Tennessee-Tombigbee Waterway), Millers Ferry (Alabama River) e mais recentemente Walter Bouldin apresentam sistemas de distribuição hidráulicamente balanceados. No Brasil podem ser

citadas as Eclusas de Sobradinho (Rio São Francisco), em operação e Porto Primavera (Rio Paraná), Três Irmãos (Rio Tietê), Tucuruí (Rio Tocantins) e Ilha Grande (Rio Paraná), todas em projeto e/ou construção. Estas Eclusas apresentam desníveis entre quinze e trinta e cinco metros [14].

II.3 - PROBLEMAS ASSOCIADOS À OPERAÇÃO DE ECLUSAS.

Dentro da concepção de projetos de Eclusas com sistemas hidráulicamente balanceados existem inúmeras variações, com o fluxo sendo distribuído à câmara através de difusores dispostos das mais diferentes formas no interior da mesma.

O motivo de tantas modificações feitas nos sistemas de enchimento e esgotamento de um projeto para o outro dá-se principalmente devido à relação dimensão da câmara * desnível * tempo de operação exigido, ser uma característica peculiar a cada planejamento.

A preocupação de manter os esforços de amarração dentro dos limites de segurança determinados pela legislação vigente no país influencia sobremaneira o projeto hidráulico, notadamente os sistemas de distribuição do fluxo d'água no interior da câmara. Esses esforços são determinados fundamentalmente através de ensaios em modelo reduzido.

Os esforços de amarração são medidos no plano horizontal, nas direções longitudinal e transversal da câmara da Eclusa. Na direção vertical, a embarcação deve mover-se livremente sem no entanto estar sujeita a qualquer esforço.

A presença de grandes embarcações no interior da Eclusa afeta o comportamento das oscilações. Quer dizer, o movimento

oscilatório não ocorre independentemente da embarcação, existindo uma interação entre eles [14].

A posição das embarcações também apresenta uma grande influência nos esforços aplicados às embarcações eclusadas. Este fato decorre, principalmente, da ocorrência de oscilações localizadas no interior da câmara, que induzem esforços diferenciados de acordo com a posição relativa do comboio em relação ao sistema de distribuição.

Os resultados mais relevantes dizem respeito às diferenças observadas entre os esforços obtidos para o comboio completo, que ocupa praticamente toda a câmara, e aos referentes ao meio comboio.

Nos resultados obtidos no modelo físico da Eclusa I de Tucuruí, em ensaios para comboios com e sem o empurrador foram constatadas diferenças de até 50% nestes esforços, ou seja a assimetria imposta pelo empurrador provocou um forte aumento nos esforços resultantes [4].

A diferença no deslocamento entre o comboio completo e o meio comboio mostra a grande influência exercida pelas oscilações localizadas.

II.4 - IMPORTÂNCIA DO MODELO MATEMÁTICO.

De forma geral, o dimensionamento hidráulico básico e o detalhamento dos sistemas de enchimento e esgotamento tem sido feitos com base em estudos e investigações em modelos reduzidos. Tal procedimento leva a muitas limitações uma vez que fica-se restrito a projetos com somente pequenas variações e adaptações, em torno de soluções já estudadas e de eficiência conhecida.

Aorescente-se a isso as operações demoradas, a pouca versatilidade e os custos elevados dos modelos reduzidos.

Não restam dúvidas quanto à importância de se desenvolver os cálculos hidráulicos através de modelos matemáticos, com o objetivo de ter descrições qualitativas e quantitativas dos fenômenos hidráulicos que ocorrem na superfície livre da câmara nas operações de enchimento e esvaziamento das Eclusas. O modelo matemático seria, desta forma, um instrumento bastante útil tanto nas primeiras avaliações do comportamento das oscilações em função do sistema de enchimento quanto numa fase mais avançada do projeto, no detalhamento de informações obtidas do modelo reduzido.

Vale ressaltar, que tal modelo matemático não visa a substituição do modelo físico uma vez que o desempenho de outras partes da Eclusa só podem ser conhecidos através de investigação em modelo físico como é o caso das condições de escoamento junto às comportas de controle de vazão, onde as condições de cavitação são críticas, assim como a determinação de coeficientes de vazão específicos de cada projeto. A implementação de modelos matemáticos objetiva tornar os modelos físicos parciais e restritos às áreas de análise onde são indispensáveis.

CAPÍTULO III - PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

A pesquisa bibliográfica realizada visando a elaboração do presente trabalho será aqui apresentada dividida em quatro partes. Tal divisão visa ressaltar a importância desta pesquisa em todas as etapas desenvolvidas nesta dissertação. A divisão que posteriormente será detalhada se refere aos seguintes temas:

- 1) Aspectos relacionados com o funcionamento de Eclusas de alta queda.
- 2) Conceitos de Escoamentos transitórios a superfície livre.
- 3) Equacionamento matemático do fenômeno físico.
- 4) Resolução numérica através do Método das Características.

A seguir será descrito o que foi encontrado na bibliografia pesquisada de acordo com a divisão supracitada e como tais conceitos foram aproveitados no estudo realizado.

III.1 - ASPECTOS RELACIONADOS COM O FUNCIONAMENTO DE ECLUSAS DE ALTA QUEDA.

A obtenção de literatura técnica tratando especificamente dos fenômenos hidráulicos relacionados com as Eclusas apresenta dificuldades. Os estudos encontrados em livros técnicos sobre Eclusas de navegação tratam em sua maioria dos fenômenos que ocorrem no interior dos condutos forçados pouco se encontrando sobre os transitórios na câmara. Encontra-se mais facilmente estudos sobre este assunto em trabalhos isolados realizados em universidades ou por órgãos estatais responsáveis pela operação

de Eclusas. Entre os trabalhos atuais encontrados e que foram utilizados destacam-se as referências bibliográficas [4] e [14].

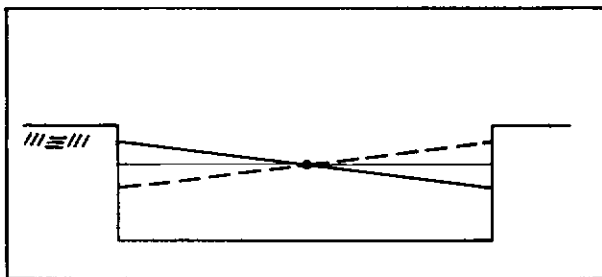
Como ficou demonstrado por USSAMI [14] as situações mais severas do ponto de vista de escoamentos transitórios na superfície livre da câmara ocorrem durante o primeiro estágio do processo de enchimento quando a câmara se encontra com o tirante d'água menor. Este estágio se limita aos minutos iniciais do processo. Baseado nesta constatação concentrar-se-á as análises a este período, o que possibilitará economia de tempo considerável no processo computacional utilizado.

As oscilações da superfície livre da câmara são mais significativas nos sistemas de enchimento das figuras FIG.II.1 e FIG.II.2. Os sistemas de enchimento hidrodinamicamente equilibrados apresentam oscilações menos severas pois tentam alcançar um processo de enchimento mais uniforme.

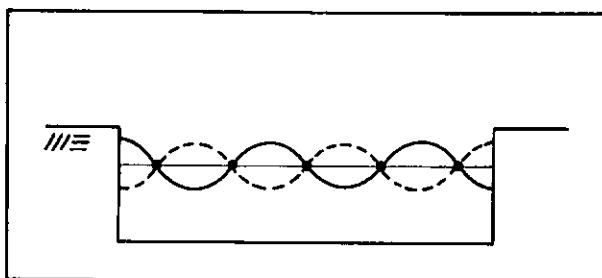
A extinção por completo de tais oscilações implicaria em conseguir um enchimento muito lento o que seria economicamente inviável.

O tipo de oscilação que ocorre na superfície d'água varia de acordo com o sistema de enchimento da câmara. Em geral estas oscilações são do tipo uninodal (FIG.III.1.1.(a)). Neste caso uma vez iniciado o movimento oscilatório este persiste por longo tempo pois a dissipação de energia é muito pequena. Outra característica da oscilação uninodal é a de contar com períodos e amplitudes pequenas mas que ainda assim provocam tensões inaceitáveis nos cabos de amarração. Oscilações de ordem mais elevadas tem amplitudes mais reduzidas do que as anteriores

(FIG. III.1.1.(b)) sendo conseqüentemente menos prejudiciais às embarcações.



(a) Uninodal



(b) Multinodal

FIG. III.1.1 - Oscilações Harmônicas na câmara da Eclusa.

A análise destas oscilações tem sido feita através de medições em modelos reduzidos. Tanto as oscilações longitudinais como as transversais são de interesse uma vez que ambas interferem nos esforços de amarração das embarcações. A tarefa de medir tais oscilações é bastante árdua por exigir medidores de alta precisão pois é necessário medir simultaneamente as oscilações e a variação do nível d'água médio da câmara.

Estes conceitos tanto serão úteis na elaboração do modelo matemático quanto no estabelecimento do intervalo de tempo a ser mais rigorosamente analisado além de reforçar a importância do

estudo desenvolvido face às dificuldades na medição das oscilações em modelo reduzido.

III.2 - CONCEITOS DE ESCOAMENTOS TRANSITÓRIOS À SUPERFÍCIE LIVRE

O escoamento hidráulico em canais ou outros corpos de água é classificado como sendo permanente ou não-permanente. O escoamento que ocorre em rios, canais abertos, reservatórios, lagos, condutos, tubulações, galerias e túneis onde a velocidade e/ou profundidade variam com o tempo é definido como não-permanente ou transitório.

De acordo com a razão de variação do escoamento e da profundidade o escoamento não-permanente pode ser rapidamente variável ou gradualmente variável. No primeiro caso a variação da superfície d'água é rápida. Um exemplo deste tipo de escoamento são as ondas nos canais causadas por mudança na operação das turbinas e as ondas de maré em estuários. Nos escoamentos gradualmente variados a superfície livre varia lentamente como ocorre em escoamentos em rios [10].

III.2.1 - FORMAÇÃO DE ONDAS

Os escoamentos transitórios em canais abertos são usualmente associados a propagação de ondas. Uma onda é definida como uma variação temporal da vazão ou da superfície d'água.

A velocidade da onda relativa à velocidade média do fluido onde está se propagando é chamada de celeridade da onda (c). É importante ressaltar que a celeridade é diferente da

velocidade do fluido (u) com a qual as partículas do fluido movem-se como resultado da propagação da onda. A velocidade absoluta da onda (U_w) é igual a soma vetorial da celeridade e da velocidade do fluido.

$$\vec{U}_w = \vec{u} + \vec{c} \quad \text{III.2.1.1}$$

Em um escoamento uni-dimensional existe apenas uma direção, desta forma a celeridade da onda pode ter o sentido do escoamento (para jusante) ou o sentido oposto (para montante). Considerando o sentido para jusante como positivo, a equação III.2.1.1 pode ser escrita como

$$U_w = u \pm c \quad \text{III.2.1.2}$$

Na equação III.2.1.2 o sinal positivo refere-se à onda propagando para jusante e o sinal negativo é usado quando ocorre a propagação para montante.

III.2.2 - CAUSAS DOS TRANSITÓRIOS

Um estado de escoamento transitório ocorre em canais abertos sempre que a vazão ou a profundidade do fluido ou ambos variam no tempo em uma seção. Estas mudanças podem ser planejadas ou acidentais, naturais ou produzidas por iniciativa humana. A seguir exemplifica-se alguns dos fatores comumente causadores de escoamentos transitórios:

1) Cheias em rios e lagos causadas por derretimento de neve, chuvas intensas ou manobras de abertura e fechamento de comportas;

2) Ondas em canais artificiais causadas pela entrada ou saída de operação de turbinas, partida ou parada de bombas e manobras de comportas;

3) ondas na câmara da Eclusa causadas por operações de enchimento ou esvaziamento da mesma;

4) ondas em rios ou reservatórios causadas pelo rompimento de uma barragem;

5) circulação em rios ou reservatórios devido aos ventos ou correntes;

6) ondas de maré em estuários.

III.2.3 - CELERIDADE E ALTURA DA ONDA

Tanto a celeridade quanto a altura da onda são características importantes na análise dos transitórios à superfície livre o que justifica um maior detalhamento destes dois aspectos [5].

Na figura FIG.III.2.3.1 o escoamento no canal será considerado permanente no instante $t=0$ quando a comporta a montante abre-se fazendo com que a vazão aumente de Q_1 para Q_2 . Este aumento na vazão provoca uma onda de altura "z" que propaga-se para jusante.

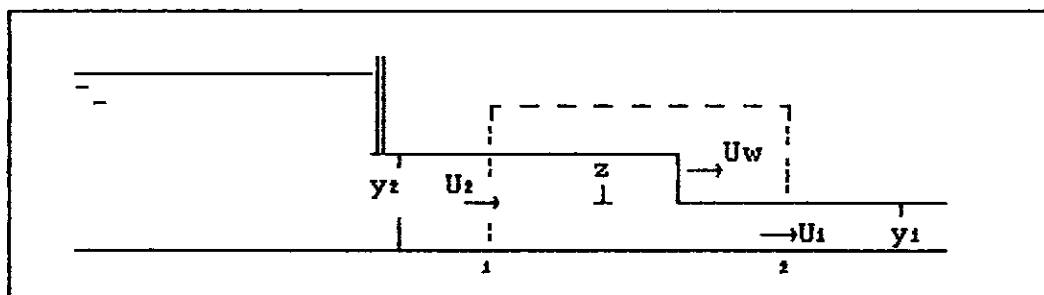


FIG.III.2.3.1 - Escoamento não-permanente (volume de controle fixo ao canal).

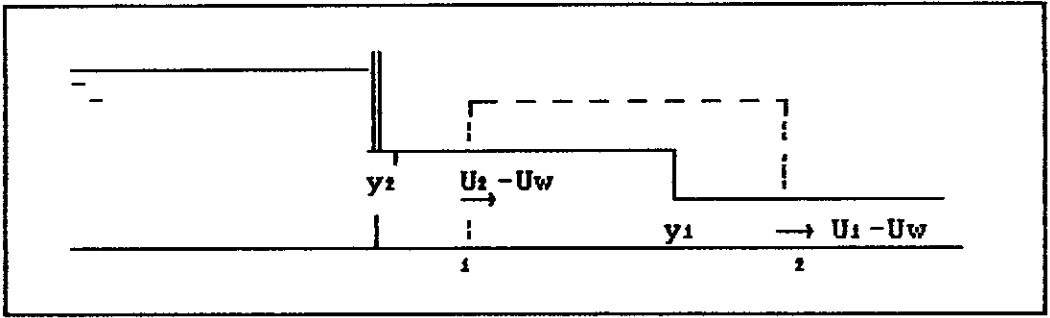


FIG. III.2.3.2 - Escoamento permanente equivalente (volume de controle movendo-se com velocidade U_w).

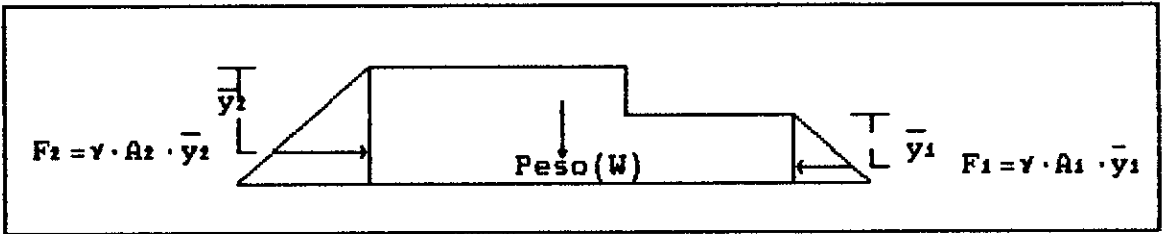


FIG. III.2.3.3 - Diagrama das forças atuando no volume de controle.

A profundidade e a velocidade do fluido à direita da onda serão chamados de y_1 e U_1 respectivamente e as variáveis correspondentes no lado esquerdo de y_2 e U_2 (FIG. III.2.3.1). Sendo U_w a velocidade absoluta da onda, pode-se transformar o escoamento não-permanente em escoamento permanente adicionando à velocidade do escoamento uma velocidade U_w para montante como pode ser visto na FIG. III.2.3.2. Observando que neste esquema a velocidade é considerada positiva no sentido montante para jusante.

Aplicando a equação da continuidade ao esquema da FIG.III.2.3.2 tem-se que

$$A_1 \cdot (U_1 - U_w) = A_2 \cdot (U_2 - U_w) \quad \text{III.2.3.1}$$

Assumindo distribuição hidrostática de pressões nas seções 1 e 2, o canal horizontal e desconsiderando as perdas por fricção, as forças que atuam no volume de controle (FIG.III.2.3.3) são:

$$\text{Força para montante: } F_1 = \gamma \cdot \bar{y}_1 \cdot A_1 \quad \text{III.2.3.2}$$

$$\text{Força para jusante : } F_2 = \gamma \cdot \bar{y}_2 \cdot A_2 \quad \text{III.2.3.3}$$

onde \bar{y}_1 e \bar{y}_2 são as profundidades do centróide das áreas A_1 e A_2 e γ é o peso específico da água.

A variação da quantidade de movimento no volume de controle será,

$$\begin{aligned} &= \frac{\gamma}{g} \cdot A_1 \cdot (U_1 - U_w) \cdot [(U_1 - U_w) - (U_2 - U_w)] \\ &= \frac{\gamma}{g} \cdot A_1 \cdot (U_1 - U_w) \cdot (U_1 - U_2) \end{aligned}$$

A resultante das forças (F_r) agindo sobre o volume de controle será

$$F_r = F_2 - F_1 = \gamma \cdot (A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1) \quad \text{III.2.3.4}$$

E aplicando a 2ª Lei de Newton,

$$\frac{\gamma}{g} \cdot A_1 \cdot (U_1 - U_w) \cdot (U_1 - U_2) = \gamma \cdot (A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1) \quad \text{III.2.3.5}$$

Eliminando U_2 das equações III.2.3.1 e III.2.3.5 e rearranjando a equação resultante chega-se a,

$$(U_1 - U_w)^2 = \frac{g \cdot A_2}{A_1 \cdot (A_2 - A_1)} \cdot (A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1) \quad \text{III.2.3.6}$$

Considerando que a onda está se propagando para jusante, a sua velocidade deve ser maior do que a velocidade inicial do fluido (U_1). Desta forma, da equação III.2.3.6 vem que,

$$U_w = U_1 + \sqrt{\frac{g \cdot A_2}{A_1 \cdot (A_2 - A_1)} \cdot (A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1)} \quad \text{III.2.3.7}$$

Se não existir escoamento inicial ($U_1 = 0$) a velocidade absoluta da onda (U_w) será igual ao termo sob radical da equação III.2.3.7. Transpondo U_1 para a esquerda,

$$U_w - U_1 = \sqrt{\frac{g \cdot A_2}{A_1 \cdot (A_2 - A_1)} \cdot (A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1)} \quad \text{III.2.3.8}$$

Como já foi dito anteriormente, a celeridade c é a velocidade da onda relativa à velocidade média do fluido onde se propaga. Uma vez que $U_w - U_1$ é a velocidade da onda relativa a velocidade inicial U_1 , pode-se facilmente obter a equação geral de c a partir da equação III.2.3.8.

$$c = \pm \sqrt{\frac{g \cdot A_2}{A_1 \cdot (A_2 - A_1)} \cdot (A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1)} \quad \text{III.2.3.9}$$

Aqui mais uma vez o sinal positivo é usado quando a onda caminha para jusante e o negativo quando para montante.

A obtenção de uma relação entre as velocidades e as profundidades do escoamento nas seções 1 e 2 é realizada eliminando-se U_w das equações III.2.3.1 e III.2.3.5.

$$A_2 \cdot \bar{y}_2 - A_1 \cdot \bar{y}_1 = \frac{A_1 \cdot A_2}{g \cdot (A_2 - A_1)} \cdot (U_1 - U_2)^2 \quad \text{III.2.3.10}$$

A altura da onda "z" é igual a $(y_2 - y_1)$. Se $y_2 > y_1$ a onda é chamada de positiva e se $y_2 < y_1$ ela é negativa.

As equações III.2.3.1 e III.2.3.10 contam com cinco variáveis, quais sejam y_1 , U_1 , y_2 , U_2 e U_w . Os valores de y_1 e U_1 podem ser determinados por tentativa e erro nas equações citadas se os valores das outras três variáveis forem conhecidos.

É importante ressaltar que as equações III.2.3.9 e III.2.3.10 são gerais e podem ser usadas em canais com qualquer seção transversal.

Particularizando para um canal retangular com: largura = B , $\bar{y}_1 = \frac{y_1}{2}$, $\bar{y}_2 = \frac{y_2}{2}$, $A_1 = B \cdot y_1$ e $A_2 = B \cdot y_2$ e substituindo estas expressões em III.2.3.9 obtém-se:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot y_2}{2 \cdot y_1} \cdot (y_2 + y_1)} \quad \text{III.2.3.11}$$

Se a altura da onda for pequena comparada com a profundidade do canal podemos admitir $y_1 \approx y_2 \approx y$, que levado em III.2.3.11 traz,

$$c = \sqrt{g \cdot y} \quad \text{III.2.3.12}$$

Como é amplamente conhecido, para escoamentos sub-críticos o número de Froude é menor do que 1 ($F < 1$), o que equivale dizer que,

$$\frac{u}{\sqrt{g \cdot y}} < 1 \quad \text{III.2.3.13}$$

ou

$$u < \sqrt{g \cdot y} \quad \text{III.2.3.14}$$

Levando a equação III.2.2.12 em III.2.2.14 é possível escrever,

$$u < c \quad \text{III.2.3.15}$$

Desta forma, das equações III.2.1.2 e III.2.3.15 chega-se que U_w é negativo se a onda propaga-se para montante. Em outras palavras, o distúrbio propaga-se nos dois sentidos (montante e jusante). Para escoamentos supercríticos ($F > 1$) a onda só propaga-se para jusante uma vez que a velocidade do fluido é maior do que a celeridade da onda e U_w é sempre positivo.

III.3 - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO DO FENÔMENO FÍSICO

O tratamento matemático dos escoamentos não-permanentes em canais abertos é tão importante quanto difícil. A dificuldade se encontra no número de variáveis envolvidas na formulação e no fato das equações diferenciais não poderem ser integradas de forma fechada exceto se forem consideradas simplificações que tornam a resolução de aplicabilidade limitada. A formulação matemática desenvolvida para estes escoamentos é uma aproximação, o que significa dizer que o profissional deve estar atento às limitações que este fato introduz, como a aplicação apenas em casos que atendam às hipóteses simplificadoras.

O estudo dos escoamentos não-permanentes em canais abertos começou há mais de 150 anos atrás com o trabalho de dois matemáticos franceses, Laplace e Lagrange.

Barré de Saint-Venant publicou em 1871 através da Academia Francesa de Ciências dois trabalhos tratando da teoria dos escoamentos não-permanentes à superfície livre. A primeira parte do primeiro trabalho trata da celeridade das ondas, a segunda parte constitui a sua mais importante contribuição e ficou conhecida como "as equações diferenciais parciais de Saint-Venant para escoamentos não-permanentes".

Estas duas equações mantiveram-se inalteradas por mais de 100 anos apesar das inúmeras tentativas de modificá-las ou completá-las. As equações resultantes destas alterações são mais completas e sofisticadas mas reduzem-se às equações básicas de Saint-Venant quando simplificadas para uso prático.

É importante ressaltar que o trabalho de Barré de Saint-Venant contou com a contribuição de outros estudos predecessores e contemporâneos aos seus.

As hipóteses fundamentais a sustentar o equacionamento de Saint-Venant são:

(1) a superfície da onda varia gradualmente o que equivale dizer que a distribuição de pressões é hidrostática e que as acelerações verticais são muito pequenas;

(2) o cálculo das perdas de carga não é significativamente diferente do realizado para escoamentos permanentes;

(3) a inclinação média do fundo do canal é tão pequena que o seno de α pode ser igualado à tangente de α e o coseno de α é igual a unidade, onde α é o ângulo que o fundo do canal faz com a horizontal.

As equações de Saint-Venant ou equações da continuidade e da quantidade de movimento como serão referidas neste trabalho são amplamente divulgadas e encontradas em livros de hidráulica. No Capítulo IV estas equações serão deduzidas e utilizadas como ferramenta na obtenção do perfil hidráulico da superfície d'água da câmara de Eclusas de navegação durante o enchimento ou esvaziamento.

III.4 - RESOLUÇÃO NUMÉRICA

Todos os métodos de análise dos escoamentos não-permanentes partem das equações da quantidade de movimento e da continuidade ou da conservação da energia acrescidas das condições de contorno e outras propriedades físicas do fluido. A partir destas equações vários métodos com diferentes hipóteses simplificadoras foram desenvolvidos. Os métodos mais comumente utilizados nas análises de escoamentos transitórios à superfície livre são o Método de Diferenças Finitas e o Método das Características. A seguir será feito um resumo das particularidades de cada um.

III.4.1 - MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O Método das Características aplicado a uma dimensão de espaço converte as duas equações diferenciais parciais da continuidade e da quantidade de movimento em quatro equações diferenciais ordinárias. Estas equações são então expressas em termos de diferenças finitas gerando um sistema de equações simultâneas que é resolvido em intervalos de tempo pré estabelecidos com o uso de um computador.

A principal vantagem do Método das Características é a de preservar os fenômenos físicos acompanhando-os de perto. Isto o torna adequado para análise de fenômenos transitórios. A Teoria das Características conta com um critério de estabilidade e tem sido reconhecida por dar resultados precisos nos problemas de transitórios hidráulicos.

III.4.2 - MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas é um dos procedimentos que podem ser utilizados com sucesso para solucionar uma classe de problemas de escoamentos não-permanentes. Sua aplicação mais ampla é em escoamentos à superfície livre embora tenha sido utilizado também em outras aplicações.

O método é formulado com a preocupação de minorar a exigência de se manter uma relação entre o incremento de tempo Δt e o elemento da discretização Δx . Este fato possibilita uma malha mais flexível quando se lida com sistemas complexos do que outros métodos.

O método de Diferenças Finitas pode ser utilizado de forma explícita ou implícita. Usando-se o método implícito não é necessário utilizar um critério de estabilidade pois o método já é estável, entretanto é necessário fazer uso de uma solução simultânea para obtenção de todas as incógnitas em cada instante de tempo calculado. No uso do método explícito é preciso apoiá-lo à condição de Courant que relaciona o incremento de tempo com o elemento da discretização para garantir a estabilidade do processo. Nestes casos as vantagens deste método se perdem.

Tendo em vista o acima exposto decidiu-se utilizar na presente pesquisa o Método das Características ainda que se encontre na literatura muito pouca aplicação das características à problemas de escoamentos transitórios à duas dimensões.

CAPÍTULO IV - MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

IV.1 - O PROCESSO DE PROPAGAÇÃO E O CONCEITO DE CARACTERÍSTICA

Para iniciar este capítulo que se propõe a tratar do Método das Características vamos definir resumidamente o que vem a ser 'característica'. Segundo ABBOT [1], uma característica é uma trajetória seguida por um atributo, como uma forma geométrica ou uma perturbação física, quando esta se propaga.

Uma melhor explicação deste fenômeno pode ser obtida utilizando a exposição criada por ABBOT [1] que se encontra a seguir.

Uma malha de rodovias, como a indicada na figura FIG.IV.1.1 pode ser considerada como tendo duas famílias de trajetórias de propagação ao longo das quais os veículos se desenvolvem.

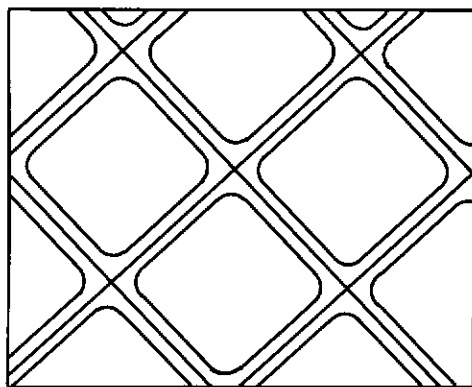


FIG.IV.1.1 - Um sistema de rodovias visto como um sistema de trajetórias de propagação [1].

Os membros de uma família de trajetórias poderiam estar associados com as rodovias orientadas em uma direção enquanto os

membros da outra família estariam associados com a outra direção. Portanto, desta noção bastante intuitiva de característica, as duas famílias de linhas corresponderiam a duas famílias de características.

É importante observar que as trajetórias de propagação continuam bem definidas mesmo que em um instante qualquer de tempo não haja propagação. Desta forma, mesmo que não haja veículos na estrada ainda considera-se as trajetórias como definidas. Tais trajetórias de propagação, compartilham de uma propriedade comum à maioria dos sistemas de características, que é o fato de se relacionarem mais com a capacidade de propagação do que com qualquer processo de propagação em particular.

No exemplo considerado, as trajetórias poderiam ser representadas por linhas em um plano físico em termos de duas coordenadas, como x e y por exemplo. Nos casos práticos, não apenas as dimensões físicas estão envolvidas mas também o tempo apresenta-se como uma dimensão, de sorte que devem ser consideradas como coordenadas no processo propagatório as duas distâncias físicas e o tempo. Na malha de rodovias pode-se considerar uma coluna de veículos movendo-se da esquerda para a direita. Supondo que tal coluna seja fotografada em sucessivos instantes de tempo de tal forma que a distância entre fotografias sucessivas é proporcional ao intervalo de tempo entre elas obtém-se a ilustração da FIG.IV.1.2 .

Tem-se de fato uma fotografia da posição de veículos individuais como se estes estivessem se movendo ao longo de linhas no espaço formadas pelo plano das fotografias e do tempo. Estas linhas ligando as posições sucessivas de cada veículo representam trajetórias de propagação no espaço, sendo que estas

trajetórias são física e matematicamente características.

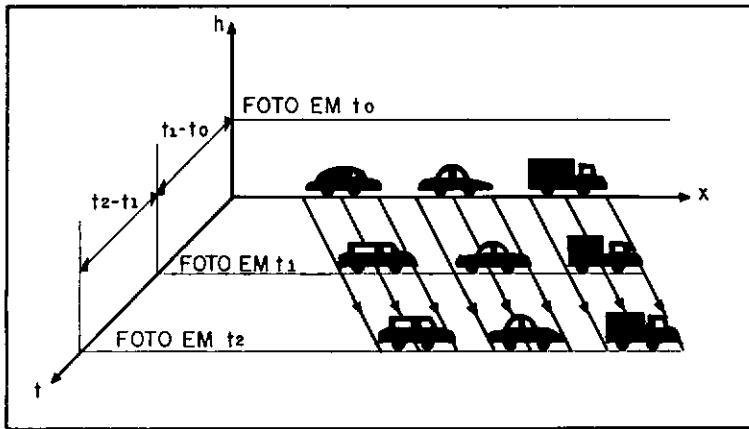


FIG.IV.1.2 - Características como trajetórias de propagação de veículos no tempo [1].

No caso de uma única coluna de veículos tem-se apenas uma família de características, correspondente ao conjunto de linhas que representam o movimento de cada veículo. Em uma rodovia real, onde há normalmente duas colunas movendo-se em sentidos opostos, existem então duas famílias de características. A FIG.IV.1.3 mostra este fenômeno no plano distância x tempo (plano x-t).

Se a velocidade das colunas são v_1 e $-v_2$, onde v_1 e v_2 são valores positivos e a direção esquerda para direita é tomada como sendo positiva, então a inclinação das características será dada por,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = v_1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = -v_2 \quad ,$$

onde o sub-índice '+' refere-se a característica que desenvolve-se da esquerda para a direita (dx/dt positivo), enquanto que o sub-índice '-' refere-se a característica no sentido direita para esquerda (dx/dt negativo). A primeira característica é comumente chamada de C^+ e a segunda é conhecida

por característica C^- . Quando todos os veículos de uma coluna caminham a uma velocidade constante, de forma que todas as linhas características de uma família tem a mesma inclinação, a região coberta pelo sistema de características retas e paralelas é chamada de "região de condições inalteradas". Em todos os sistemas contínuos e homogêneos, onde os fenômenos ocorrem nas duas direções, tem-se duas famílias de características, sendo possível ocorrerem regiões de condições inalteradas.

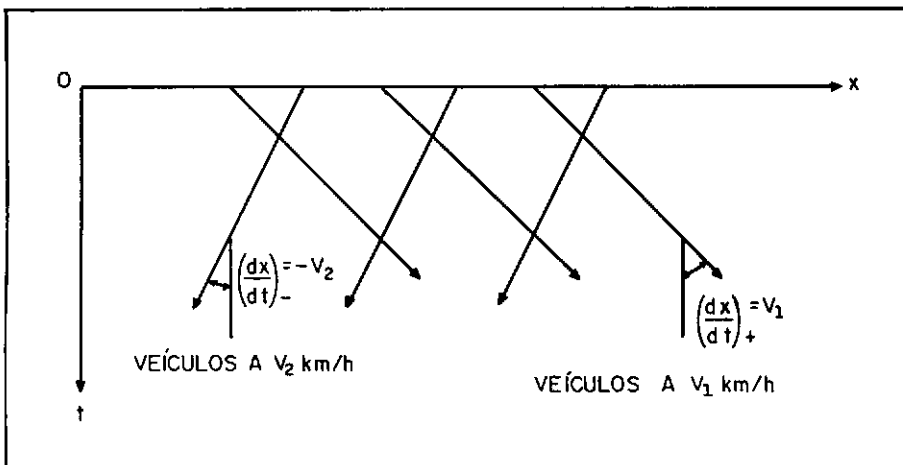


FIG.IV.1.3 - Características geradas por duas colunas de veículos e projetadas no plano $x-t$ [1].

IV.2 - O PROCESSO DE PROPAGAÇÃO EM SISTEMAS CONTÍNUOS: A GERAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE DE SOLUÇÃO POR CARACTERÍSTICAS.

De forma geral os problemas envolvendo propagação de fenômenos geométricos podem ser equacionados através de características. Mais adiante serão introduzidas as equações diferenciais parciais que definem a translação de tais fenômenos e será possível derivar características de tais equações. Doravante tratar-se-á das propagações de estados físicos em

escoamentos de água e das características associadas a estas propagações. Será considerado o caso de uma onda propagando-se em um canal linear e uniforme. Como no exemplo dos veículos supõe-se que os perfis do canal podem ser determinados em função do tempo como mostra a FIG.IV.2.1 .

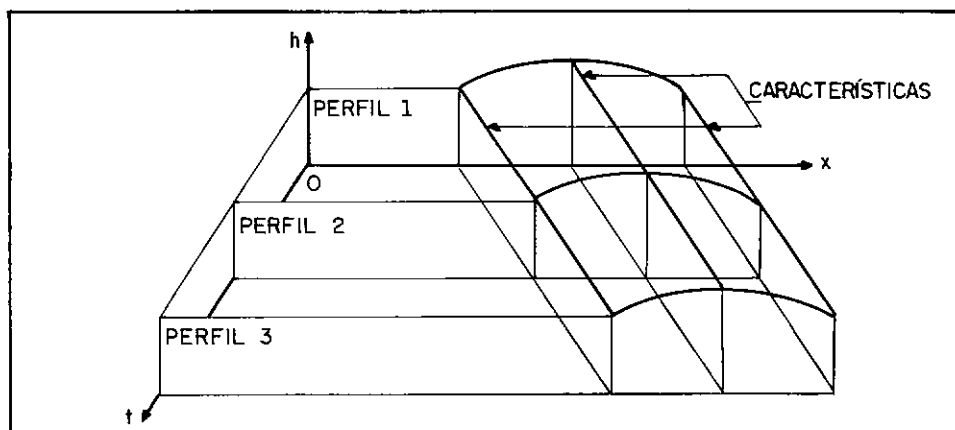


FIG.IV.2.1 - Características como trajetórias de propagação de ondas no tempo [1].

Pode-se ver que na propagação um distúrbio inicial gera uma superfície em três dimensões quais sejam, a distancia x , o tempo t e a profundidade de fluido h . De forma geral, a propagação ocorre em duas direções: para montante e para jusante da superfície mencionada. As linhas sobre as quais tais distúrbios propagam-se são evidentemente as características C^+ e C^- , enquanto que a superfície associada a tal fenômeno é chamada de "superfície hidráulica". Evidentemente se esta superfície fosse conhecida poder-se-ia imediatamente determinar desta os valores de h para qualquer ponto $x * t$. Sendo assim, o problema de determinar o valor de h em termos de x e t , problema real enfrentado pelo engenheiro hidráulico, pode ser resumido ao problema de achar a superfície hidráulica. Este último vem a ser

o problema de achar as características.

Uma descrição completa da onda de propagação corresponde então a uma superfície hidráulica num espaço de quatro dimensões, $R(h,u;x,t)$, do qual a FIG.IV.2.1 representa uma projeção para o espaço $R(h;x,t)$.

Os principais fatores a influenciar a superfície hidráulica são:

- 1) as condições iniciais;
- 2) as leis físicas que regem o fenômeno, neste caso as leis da conservação da massa e do movimento;
- 3) as condições existentes no meio onde a propagação ocorre.

Analisando estes três fatores mais detalhadamente tem-se que:

(1) O perfil da superfície hidráulica é obviamente afetado pelo perfil da onda no instante inicial ($t=0$). Se este perfil inicial mudar então evidentemente toda a superfície hidráulica sofrerá uma alteração correspondente o que torna óbvio concluir que para cada condição inicial haverá uma superfície hidráulica única.

(2) Como seria muito difícil descrever empiricamente o comportamento de todos os tipos de ondas em todas as circunstâncias em que se apresentam, procura-se definir genericamente tais comportamentos. As leis da conservação da massa e do movimento permitem tal generalização, que a despeito de algumas simplificações (como a não consideração das tensões superficiais) são suficientes para descrever o mecanismo que rege a propagação de ondas. Tal mecanismo é usualmente descrito matematicamente em termos dos fatores que afetam um elemento de

fluido, elemento de dimensões tão pequenas que permite admitir relações diferenciais lineares entre os fatores intervenientes e conseqüentemente a formulação de uma equação diferencial. Esta equação descreve o movimento do fluido em cada ponto $x-t$.

As equações diferenciais são desta forma uma representação genérica do comportamento real, formulada para simplificar um comportamento muito complexo.

(3) Após a análise das forças que agem sobre o elemento de fluido e a formação das equações diferenciais que representam o fenômeno é necessário aplicar tal equação a todo o canal através de um processo de integração. Este processo começa a partir das condições iniciais e tem continuidade nos estágios subsequentes através das condições físicas (profundidade, contornos, etc..) da região considerada. As condições físicas entram junto com as equações diferenciais no processo de integração visando tornar o equacionamento geral uma descrição particular do fenômeno que está sendo estudado.

Através do processo de formular uma equação diferencial e posteriormente integrá-la obtém-se expressões que relacionam a profundidade de água h e a velocidade U com todas as combinações de distância e tempo na região de integração. Estas expressões podem ser representadas por uma superfície no espaço $R(h,u;x,t)$ ou sua projeção $R(h;x,t)$. A superfície que origina-se da integração das equações diferenciais é chamada de "superfície integral".

Na prática, à medida que a onda caminha no espaço e no tempo, sujeita principalmente às leis da conservação ela gera uma superfície hidráulica única. São estas leis de conservação que estão expressas na equação diferencial, de forma que,

começando com as mesmas condições iniciais e estando o corpo d'água sujeito às mesmas condições físicas, espera-se encontrar uma única superfície integral gerada pelas equações diferenciais. Sendo assim, se a formulação corresponde à realidade, então a superfície integral coincidirá exatamente com a superfície hidráulica. Evidentemente tudo o que foi dito sobre as superfícies integrais também se aplica às linhas características embutidas nestas.

IV.3 - A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO EM SISTEMAS CONTÍNUOS: O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

Neste ítem as equações diferenciais dos escoamentos não permanentes uni-dimensionais a superfície livre são apresentadas e resolvidas numericamente pelo Método das Características com intervalos de tempo especificados segundo STREETER-WYLIE [15].

IV.3.1 - APRESENTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ESCOAMENTOS NÃO-PERMANENTES UNI-DIMENSIONAIS EM CANAIS ABERTOS.

As equações básicas para escoamentos uni-dimensionais usadas consideram um canal prismático de seção irregular. As perdas de carga foram incluídas usando as equações de Manning e Chezy. Considerou-se uma vazão lateral ao longo do canal que pode ser proveniente de águas subterrâneas, esvaziamento ou enchimento de Eclusas, saída para sistemas de irrigação, entrada de águas pluviais, etc.. O canal foi considerado como tendo uma inclinação α muito pequena tal que $\cos \alpha \approx 1$. Assumiu-se também uma distribuição hidrostática de pressões ao longo de qualquer

linha vertical no fluido o que equivale dizer que não existem acelerações verticais.

A FIG.IV.3.1 mostra o elemento de fluido considerado na dedução das equações abaixo apresentadas.

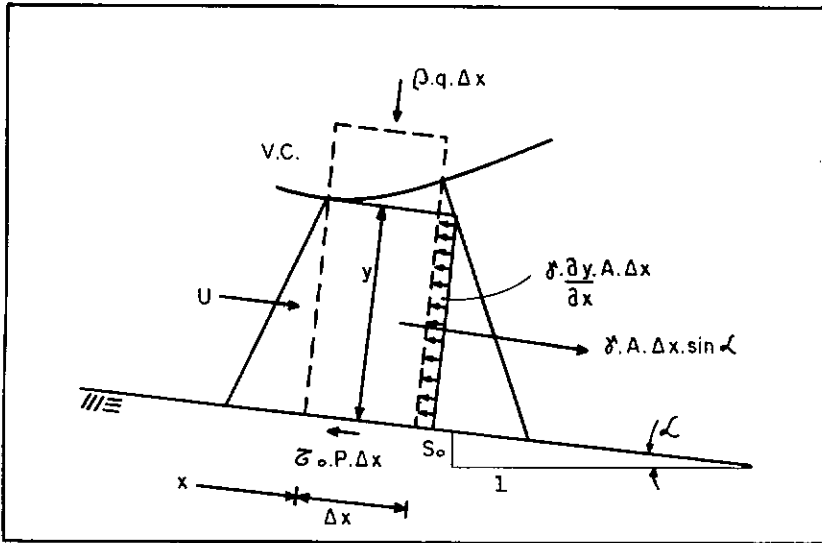


FIG.IV.3.1 - Volume de controle utilizado na dedução das equações da Continuidade e do Movimento [15].

$$\text{Equação da continuidade : } U \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = q \quad \text{IV.3.1}$$

Equação do Movimento :

$$g \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + g \cdot S - g \cdot \sin \alpha + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{A} \cdot q = 0 \quad \text{IV.3.2}$$

$$\text{Equação de Manning : } S = \frac{n^2 \cdot U^2}{C_m^2 \cdot R^{4/3}}$$

onde:

q = vazão de entrada lateral por unidade de comprimento

[$\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$]

y = profundidade do fluido tomada normal ao fundo [m]

U = velocidade do fluido [m/s]

S = declividade da linha de energia

R = raio hidráulico [m]

A = área do elemento de fluido normal ao escoamento [m²]

g = aceleração da gravidade [m/s²]

n = coeficiente de atrito de Manning

Cm = constante empírica [=1 no S.I.]

Considerando A(y(x,t), x) é possível escrever que :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{y=\text{constante}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = T \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\text{Para canais prismáticos : } \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{y=\text{constante}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial x} = T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

onde T = largura da seção prismática na linha d'água (m).

A equação IV.3.1 pode ser escrita como:

$$U \cdot T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + T \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - q = 0 \quad \text{IV.3.3}$$

As Equações Diferenciais IV.3.2 e IV.3.3 descrevem o

comportamento do escoamento gradualmente variado a superfície livre em canais prismáticos.

IV.3.2 - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

Considerando as equações acima descritas,

$$L_0 = U \cdot T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + T \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - q = 0 \quad \text{e}$$

$$L_1 = g \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + g \cdot S - g \cdot \sin \alpha + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{A} \cdot q = 0 \quad , \quad \text{estas}$$

podem ser combinadas linearmente usando um multiplicador desconhecido λ .

$$L = L_1 + \lambda \cdot L_0$$

$$L = \left[\frac{\partial U}{\partial x} \cdot (U + \lambda \cdot A) + \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \lambda \cdot T \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial x} \cdot (U + \frac{g}{\lambda \cdot T}) + \frac{\partial y}{\partial t} \right] +$$

$$+ g(S - S_0) + q \cdot \left(\frac{U}{A} - \lambda \right) = 0 \quad \text{IV.3.4}$$

Quaisquer dois valores reais de λ levam a duas equações em termos das variáveis dependentes y e U que são equivalentes às equações IV.3.2 e IV.3.3.

Para que os termos no primeiro par de colchetes se tornem a derivada total da velocidade $(\frac{dU}{dt})$, é preciso que,

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda \cdot A$$

Da mesma forma, para que os termos contidos no segundo par de colchetes se tornem a derivada total da profundidade $(\frac{dy}{dt})$, é necessário que,

$$\frac{dx}{dt} = U + \frac{g}{\lambda \cdot T}$$

Como as duas expressões de dx/dt tem que serem iguais,

$$U + \lambda \cdot A = U + \frac{g}{\lambda \cdot T} \text{ e conseqüentemente } \lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{A \cdot T}}$$

Sendo assim,

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{g \cdot \frac{A}{T}} \quad \text{IV.3.5}$$

Se a seção transversal for particularizada para um retângulo, é fácil notar que a equação IV.3.5 torna-se a equação da velocidade da onda de superfície.

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{g \cdot y} \quad \text{IV.3.6}$$

Fazendo $c = \sqrt{g \cdot y}$ (IV.3.7) onde c é a celeridade da onda e introduzindo os valores de λ na equação IV.3.4 pode-se escrever,

$$\frac{dU}{dt} \pm \frac{g}{c} \cdot \frac{dy}{dt} + g(S - S_0) + \frac{g}{A} \cdot (U \pm c) = 0 \quad \text{IV.3.8}$$

sujeito a:

$$\frac{dx}{dt} = U \pm c \quad \text{IV.3.9}$$

É importante ressaltar que nenhuma aproximação foi introduzida nesta transformação de duas equações diferenciais parciais para quatro equações diferenciais ordinárias.

Assumindo as variáveis independentes como conhecidas nos pontos R e S na FIG. IV.3.2, pode-se escrever quatro equações em termos das incógnitas U_p, y_p, x_p e t_p . Isto envolve a integração das equações IV.3.8 e IV.3.9 como segue.

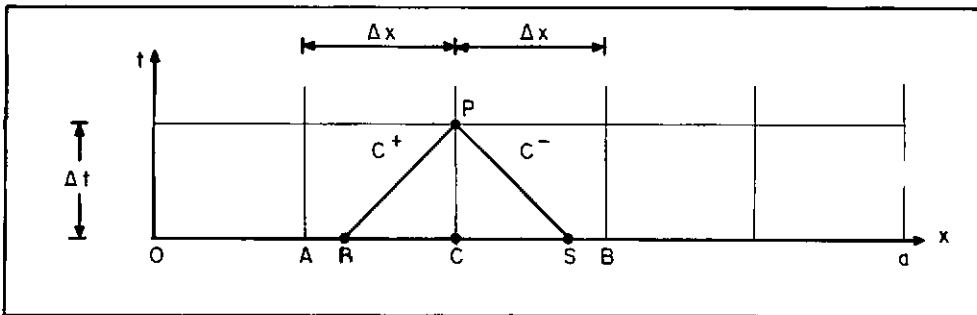


FIG. IV.3.2 - Método das Características com intervalos de tempo especificados [15].

$$C^+ \left[U_p - U_R + g \cdot \int_{y_R}^{y_P} \frac{1}{c} dy + \int_{t_R}^{t_P} \left[g(S-S_0) + \frac{q}{A}(U-c) \right] dt = 0 \right. \quad \text{IV.3.10}$$

$$\left. x_p - x_R = \int_{t_R}^{t_P} (U + c) dt \quad \text{IV.3.11} \right.$$

$$C^- \left[U_p - U_S - g \cdot \int_{y_S}^{y_P} \frac{1}{c} dy + \int_{t_S}^{t_P} \left[g(S-S_0) + \frac{q}{A}(U+c) \right] dt = 0 \right. \quad \text{IV.3.12}$$

$$\left. x_p - x_S = \int_{t_S}^{t_P} (U - c) dt \quad \text{IV.3.13} \right.$$

As equações IV.3.10 a IV.3.13 se encontram em duas chaves para enfatizar sua dependência. Na avaliação da integral introduz-se uma aproximação, uma vez que as incógnitas U , c , A e S são funções desconhecidas do tempo no transitório. A integração trapezoidal produz um sistema de equações algébricas que levam a uma solução estável desde que a condição de Courant seja satisfeita.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U| + c} \quad \text{IV.3.14}$$

As equações resultantes são não lineares mas em geral uma integração de primeira ordem é satisfatória e resulta em uma solução explícita e estável [15].

As quatro equações apresentam-se em termos das incógnitas x_p , t_p , y_p e U_p . Dois caminhos podem ser seguidos para a obtenção de uma solução numérica utilizando o Método das Características: usar o Grid de Características ou intervalos de tempo especificados. Este último oferece algumas vantagens na maioria dos problemas de transitórios hidráulicos, uma vez que x_p e t_p tem valores definidos no desenvolvimento do processo o que permite soluções ordenadas. Entretanto, se a vazão ou a celeridade variarem muito com x e t , como acontece em fluidos muito compressíveis, o Grid de Características é mais indicado por propiciar melhor precisão nos resultados. Este método será melhor explicado no item IV.5.

No Método das Características com intervalos de tempo especificados, o canal é dividido em discretizações de comprimento Δx e o intervalo de tempo Δt a ser considerado é obtido da equação IV.3.14.

Para iniciar o cálculo é necessário que os valores de U e y sejam conhecidos em todos os pontos no tempo inicial ($t=0$).

Desta forma é possível calcular os valores das incógnitas em um intervalo de tempo Δt posterior (ponto p na FIG. IV.3.2).

Uma integração de primeira ordem das equações IV.3.10 a IV.3.13 leva a :

$$U_p - U_R + \frac{g}{c_R} \cdot (y_p - y_R) + g \cdot (S_R - S_0) \cdot \Delta t + \frac{q}{A_R} \cdot (U_R - c_R) \cdot \Delta t = 0 \quad \text{IV.3.15}$$

$$x_p - x_R = (U_R + c_R) \cdot \Delta t \quad \text{IV.3.16}$$

$$U_p - U_S - \frac{g}{c_S} \cdot (y_p - y_S) + g \cdot (S_S - S_0) \cdot \Delta t + \frac{q}{A_S} \cdot (U_S + c_S) \cdot \Delta t = 0 \quad \text{IV.3.17}$$

$$x_p - x_S = (U_S - c_S) \cdot \Delta t \quad \text{IV.3.18}$$

Nestas equações, o sub-índice R indica que o valor deve ser tomado no ponto R (FIG. IV.3.2), sendo válido o mesmo conceito para os sub-índices S. Os valores nestes pontos são determinados através de interpolação linear dos valores conhecidos nos pontos A, C e B. Esta interpolação introduz um fator dispersivo ao processo numérico que pode ser minimizado interpolando-se o mínimo possível, isto é, mantendo um incremento de tempo tal que o ponto R fique próximo ao ponto A na FIG. IV.3.2 e usando um grande número de discretizações Δx . A interpolação linear para obtenção do valor de U_R é obtida usando-se a proporção:

$$\frac{U_C - U_R}{U_C - U_A} = \frac{x_C - x_R}{\Delta x} = \frac{x_P - x_R}{\Delta x} = \theta (U_R + c_R) \quad \text{IV.3.19}$$

$$\text{onde } \theta = \frac{\Delta t}{\Delta x} .$$

Analogamente,

$$\frac{c_C - c_R}{c_C - c_A} = \theta \cdot (U_R + c_R) \quad \text{IV.3.20}$$

Resolvendo IV.3.19 e IV.3.20 simultaneamente obtém-se:

$$U_R = \frac{U_C + \theta \cdot (-U_C \cdot c_A + c_C \cdot U_A)}{1 + \theta \cdot (U_C - U_A + c_C - c_A)} \quad \text{IV.3.21}$$

O valor de c_R é determinado a partir da equação IV.3.20 e para o caso especial de uma secção retangular da equação IV.3.7.

Para o caso de uma secção qualquer, y_R é obtido de:

$$\frac{y_C - y_R}{y_C - y_A} = \theta \cdot (U_R + c_R) \quad \text{IV.3.22}$$

usando-se os valores já calculados de U_R e c_R .

Para escoamentos sub-críticos, os mais comumente encontrados, a velocidade média (U) é menor do que c e o ponto S encontra-se entre os pontos C e B na FIG.IV.3.2. Seguindo o mesmo raciocínio acima mencionado pode-se achar os valores das variáveis no ponto S.

$$U_S = \frac{U_C - \theta \cdot (U_C \cdot c_B - c_C \cdot U_B)}{1 - \theta \cdot (U_C - U_B - c_C - c_B)} \quad \text{IV.3.23}$$

$$c_S = \frac{c_C + U_S \cdot \theta \cdot (c_C - c_B)}{1 + \theta \cdot (c_C - c_B)} \quad \text{IV.3.24}$$

$$y_S = y_C + \theta \cdot (U_S - c_S) \cdot (y_C - y_B) \quad \text{IV.3.25}$$

De posse dos valores nos pontos R e S e resolvendo as equações IV.3.15 e IV.3.17 simultaneamente obtém-se y_p e U_p .

$$y_P = \frac{1}{c_R + c_S} \cdot \left[y_S \cdot c_R + y_R \cdot c_S + c_R \cdot c_S \cdot \left[\frac{1}{g} \cdot (U_R - U_S) - \Delta t \cdot (S_R - S_S) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q \cdot \Delta t}{g} \cdot \left[\frac{1}{A_R} \cdot (U_R - c_R) - \frac{1}{A_S} \cdot (U_S + c_S) \right] \right] \right] \quad \text{IV.3.26}$$

$$U_P = U_R - g \cdot \frac{y_P - y_R}{c_R} - g \cdot \Delta t \cdot (S_R - S_0) - \frac{q \cdot \Delta t}{A_R} \cdot (U_R - c_R) \quad \text{IV.3.27}$$

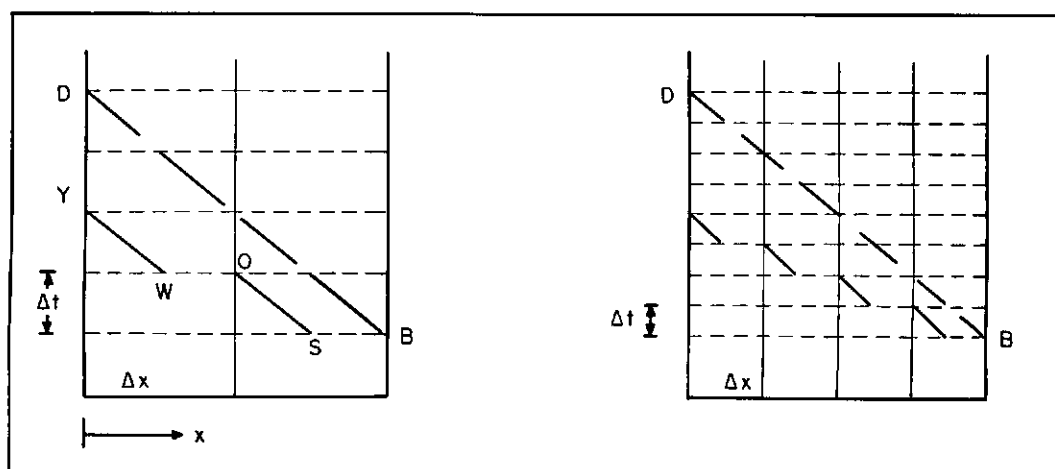
Nas extremidades do canal existe apenas uma equação característica (IV.3.15 ou IV.3.17) e duas incógnitas, U_P e y_P . Desta forma faz-se necessária uma condição conhecida que permita o prosseguimento do cálculo. Tal condição é chamada "condição de contorno" e pode ser o valor conhecido de uma variável (nível d'água constante, velocidade nula, etc..) ou uma relação entre as duas incógnitas (lei de manobra de uma válvula).

Uma integração de segunda ordem poderia ser utilizada na avaliação das equações IV.3.10 a IV.3.13 visando tornar mais precisa a representação das equações diferenciais por diferenças finitas, entretanto isto tornaria o manuseio das equações muito mais complicado e ainda seria necessário fazer uso de interpolações. Considerando-se que em geral são utilizadas discretizações Δx pequenas para reduzir o efeito dispersivo das interpolações, não justifica o uso de equações mais complicadas do que as deduzidas neste capítulo.

IV.4 - ERROS DE INTERPOLAÇÃO

Uma das vantagens do uso do Método das Características com intervalos de tempos especificados com interpolação é o de permitir uma solução ordenada com o conhecimento dos valores das

variáveis dependentes em todos os pontos da malha de discretização em um mesmo instante de tempo. A maior desvantagem é o fato da interpolação introduzir um amortecimento numérico artificial à solução.



(a)

(b)

FIG.IV.4.1 - Erros de interpolação no plano x-t [15].

A forma pela qual o amortecimento influencia a solução pode ser visualizada no escoamento sem atrito da FIG.IV.4.1. Se um transitório é introduzido no ponto B no plano x-t, então seu efeito se fará sentir na outra extremidade do canal no ponto D. Entretanto se apenas duas discretizações forem usadas, FIG.IV.4.1(a), e uma interpolação de 50% estiver sendo usada na solução numérica ($\xi = \theta \cdot c = 0.5$) nota-se que 50% do efeito será transferido para S e daí para o ponto O no tempo Δt . Tem-se ainda que 50% do efeito que chegou a O será transmitido para o ponto Y. Desta forma 25% da perturbação inicial chegará antecipadamente ao outro lado do canal e será refletida para o

ponto de partida antes da onda física, amortecendo o transitório.

Esta situação pode ser melhorada com o uso de um maior número de discretizações, FIG.IV.4.1.(b). Com quatro discretizações o distúrbio chega a extremidade do canal no mesmo instante de tempo mas com magnitude bem reduzida. Uma interpolação menor (ponto S bem próximo do ponto B) é igualmente benéfica na tentativa de diminuir o erro numérico [15].

É preciso ressaltar que o fator mais importante para evitar o acúmulo de erros ao longo do tempo e garantir a estabilidade do processo é a satisfação da condição de 'Courant'.

IV.5 - O MÉTODO DO GRID DE CARACTERÍSTICAS

No item IV.4 deste capítulo foi descrito o Método das Características usando intervalos de tempo especificados que gera soluções ordenadas em uma análise computacional. Quando o fenômeno a ser analisado conta com velocidades muito variáveis, a interpolação utilizada no processo com intervalos de tempo especificados gera erros apreciáveis. Da mesma forma, quando ocorrem celeridades muito baixas, a velocidade do fluido pode ser da mesma ordem de magnitude da celeridade e mais uma vez a interpolação com intervalos de tempo especificados que conta com uma malha de discretização regular é indesejável.

O método do Grid de Características não permite a ocorrência de tais erros de interpolação pois parte diretamente das equações IV.3.15 a IV.3.18 para chegar a solução das incógnitas x_p , t_p , y_p e U_p . A malha desenvolvida no plano $x-t$

por este método é bastante irregular uma vez que a posição de intersecção das linhas características não é fixa. A FIG.IV.5.1 mostra uma malha originada do método do Grid de Características. Os valores das variáveis são considerados conhecidos em todos os pontos do canal no instante inicial ($t=0$), e através das equações IV.3.15 a IV.3.18 pode-se chegar aos valores nos pontos a, b e c (FIG.IV.5.1). Com os valores de x , t , U e y conhecidos em cada um desses pontos a formação do grid pode continuar para os pontos d e f e assim sucessivamente.

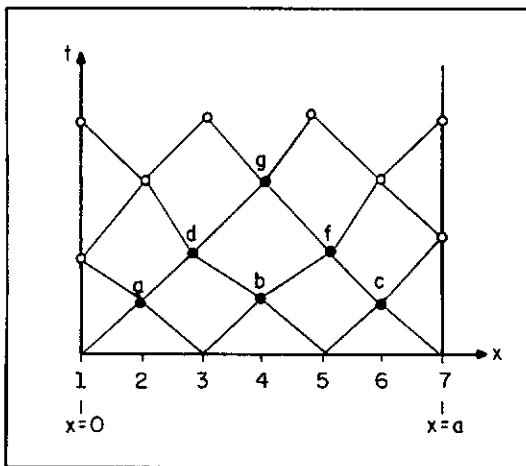


FIG.IV.5.1 - Grid de Características

Nas extremidades do canal faz-se necessário o uso de condições de contorno da mesma forma como é feito no método com intervalos de tempo especificados.

Segue-se uma avaliação do desempenho dos dois métodos citados neste capítulo, o Grid de Características (GC) e o grid retangular (GR) com intervalos de tempo especificados segundo WYLIE e STREETER [15].

1)O método do GC usa uma malha irregular comparado à malha retangular do GR. O primeiro é consideravelmente mais econômico em termos de tempo computacional para precisões equivalente.

2)O método GC apresenta resultados com boa precisão nos pontos de intersecção do grid. Entretanto os resultados não estão vinculados a um mesmo instante de tempo ao longo do canal e nem a secções fixas ao longo do tempo. Interpolações devem ser feitas caso estas informações sejam desejadas. O método com GR apresenta os resultados onde são desejados, mas apresenta erros introduzidos pelas interpolações em cada instante de tempo sendo tão maior o erro quanto maior for a interpolação.

3)No Grid de Características não é possível manter um controle da localização dos pontos de intersecção no plano $x-t$. Estes pontos podem cair fora da região do canal fazendo com que o processo perca o significado físico. Para solucionar este problema de distorção do grid no método do GC o procedimento geralmente adotado é o de regularizar o grid ajustando o mesmo após determinado número de etapas de cálculo. isto envolve uma interpolação dupla no plano $x-t$ dos dados já calculados. Assim chega-se a um espaçamento regular e o método GC pode novamente ser aplicado por mais um período de tempo.

O número de vezes que tal interpolação é necessária depende de quão severa é a variação da celeridade. O amortecimento numérico introduzido com esta interpolação não é tão significativo quanto aquele introduzido no grid retangular.

4)A condição de Courant para estabilidade do processo é sempre satisfeita no método do GC enquanto que no GR é preciso

ficar atento para que o grid gerado satisfaça tal condição em todas as etapas de cálculo.

5) No método do GC não há meios de se manter um controle da entrada das variáveis de contorno no tempo enquanto no GR as condições de contorno entram no cálculo em tempos pré-definidos. Isto torna o método do GC desapropriado para sistemas complexos ao mesmo tempo em que é uma grande vantagem do método com GR.

6) As dimensões das discretizações devem ser escolhidas e mantidas inalteradas ao longo do canal no método com GR.

7) O Método das Características usando o GR apresenta dois inconvenientes para aplicação em canais abertos. O primeiro é a limitação do incremento de tempo pela condição de Courant e o segundo é a necessidade de uma discretização com elementos de iguais comprimentos para reduzir os erros de interpolação. Em transitórios lentos, o primeiro fator pode tornar o uso deste método anti-econômico e na modelagem de canais naturais o segundo fator torna o uso do método inadequado.

Esta análise permite concluir que os dois métodos são igualmente eficazes ficando a escolha vinculada ao fenômeno que será estudado.

No caso específico dos transitórios hidráulicos a superfície livre que ocorrem no interior da câmara da eclusa optou-se pelo método com grid retangular ou com intervalos de tempo especificados pois a irregularidade do grid no método do Grid de Características tornaria a análise do fenômeno a duas dimensões bastante difícil. Além disso é desejável o conhecimento do valor das variáveis dependentes em pontos específicos sendo também importante ter em mãos o comportamento

do fenômeno em todos os pontos da malha em um mesmo instante de tempo, o que só é possível com o grid retangular.

Apesar dos transitórios que ocorrem no interior da câmara de uma Eclusa serem lentos ainda é economicamente viável do ponto de vista de tempo computacional usar o Método das Características com intervalos de tempo especificados tendo em vista que a cada instante de tempo não é necessário resolver um grande sistema de equações pois as características são resolvidas aos pares.

CAPÍTULO V - EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO DO FENÔMENO HIDRÁULICO

Neste capítulo serão estudadas as ondas que se formam na superfície d'água da câmara de uma Eclusa resultantes do enchimento ou esvaziamento da mesma. As equações diferenciais da Continuidade e do Movimento serão deduzidas para posterior resolução numérica pelo Método das Características com intervalos de tempo especificados.

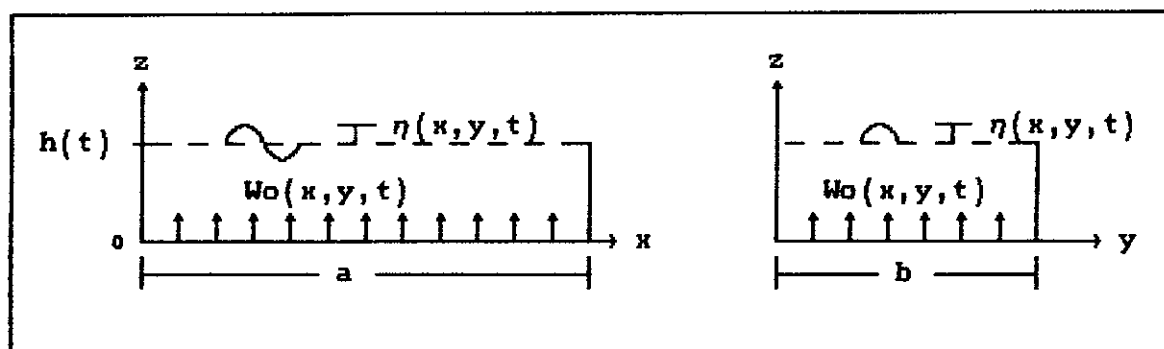


FIG.V.1 - Sistemas de Eixos Ortogonais Utilizado

onde:

a : Dimensão longitudinal da câmara da Eclusa [m]

b : Dimensão transversal da câmara da Eclusa [m]

$w_0(x,y,t)$: Velocidade equivalente de entrada/saída de água no fundo da câmara [m/s]

$h(t)$: Altura média de água no interior da câmara no instante de tempo t [m]

$\eta(x,y,t)$: Perturbação do nível de água em relação a altura média no ponto de coordenadas (x,y) no instante de tempo t [m]

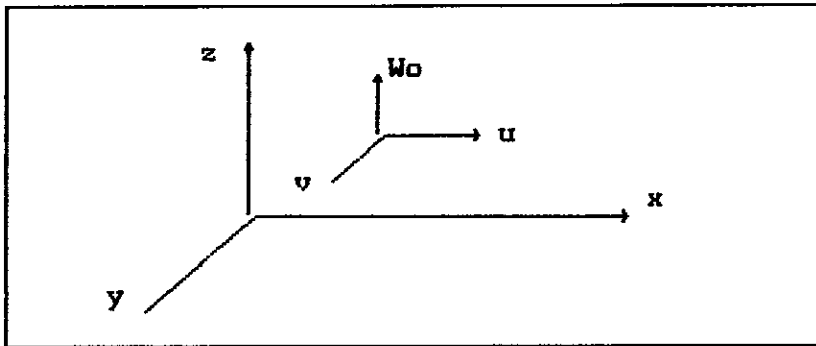


FIG.V.2 - Componentes das velocidades

onde:

u : Velocidade do escoamento na direção-x [m/s]

v : Velocidade do escoamento na direção-y [m/s]

V.1. - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS ADMITIDAS NO EQUACIONAMENTO:

1)As Eclusas consideradas neste estudo possuem sistemas de adução e esgotamento hidrodinamicamente equilibrados. Tais sistemas permitem operações de enchimento e esvaziamento isentas de ondas de translação muito severas, o que torna válida a hipótese do escoamento no interior da câmara ser quasi-paralelo onde não ocorrem acelerações verticais significativas e a distribuição das pressões é hidrostática.

2)Em escoamentos a superfície livre como o que ocorre no interior da câmara é intuitivo supor que todos os esforços impostos ao corpo de água serão acomodados pela superfície livre sendo possível admitir o fluido, no caso a água, como sendo incompressível.

3)As baixas velocidades do escoamento na câmara possibilitam a não consideração de mecanismos de dissipação de

energia na formulação matemática. Tais mecanismos são relevantes no final do processo de enchimento quando atuam amortecendo as perturbações geradas, entretanto como o período crítico na formação de ondas ocorre nos cinco minutos iniciais do enchimento [14] foi possível desconsiderar o atrito sem perda na precisão.

4) Assumiu-se ainda que não existem embarcações no interior da Eclusa e que as comportas reguladoras de vazão serão abertas gradualmente.

V.2 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A equação da Continuidade traduz o princípio da conservação da massa: O acréscimo de massa do líquido no volume de controle durante um intervalo de tempo Δt , é igual à soma das massas do líquido que entra no volume de controle diminuída da massa do líquido que sai do mesmo.

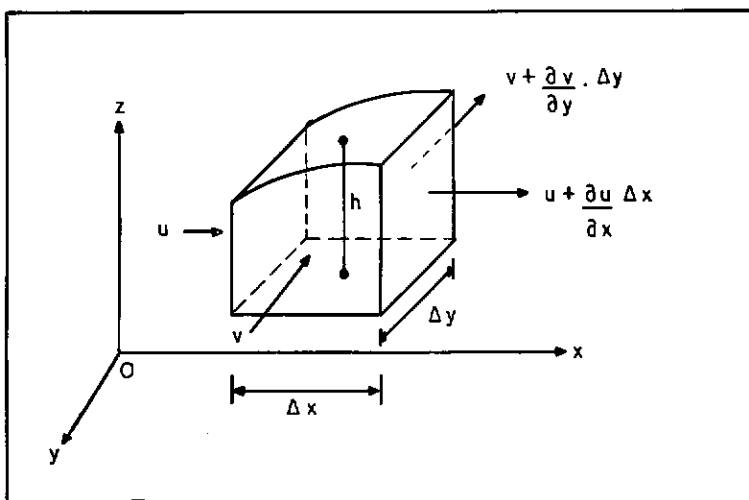


FIG.V.2.1 - Elemento de Fluido considerado na dedução da Equação da Continuidade.

As seguintes parcelas atuam no volume de controle representado na FIG.V.2.1:

$$\rho \int_0^{(h+\eta)} u \cdot \Delta y dz = \text{vazão de massa que entra no volume de controle na direção-x.}$$

$$\rho \int_0^{(h+\eta)} \left[u \cdot \Delta y + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \Delta y) \cdot \Delta x \right] dz = \text{vazão de massa que sai do volume de controle (vazão que entra somada à variação desta na direção-x).}$$

$$\rho \int_0^{(h+\eta)} v \cdot \Delta x dz = \text{vazão de massa que entra no volume de controle na direção-y.}$$

$$\rho \int_0^{(h+\eta)} \left[v \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot \Delta x) \cdot \Delta y \right] dz = \text{vazão de massa que sai do volume de controle (vazão que entra somada à variação desta na direção-y).}$$

$$\rho \cdot W_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \text{vazão de massa que entra pelo fundo do volume de controle}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (h+\eta)) = \text{variação de massa no volume de controle no tempo}$$

Do Princípio da Conservação da Massa chega-se a:

$$\rho \int_0^{(h+\eta)} u \cdot \Delta y dz - \int_0^{(h+\eta)} \left[u \cdot \Delta y + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \Delta y) \cdot \Delta x \right] dz + \rho \int_0^{(h+\eta)} v \cdot \Delta x dz -$$

$$\int_0^{(h+\eta)} \left[v \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot \Delta x) \cdot \Delta y \right] dz + \rho \cdot W_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (h+\eta))$$

Pela hipótese do escoamento quasi-paralelo será considerada uma velocidade média na vertical na direção-x (U) e uma velocidade média na vertical na direção-y (V). Desta forma:

$$\int_0^{(h+\eta)} u \cdot dz = (h+\eta) \cdot U \quad \text{V.2.2}$$

$$\int_0^{(h+\eta)} v \cdot dz = (h+\eta) \cdot V \quad \text{V.2.3}$$

$$\int_0^{(h+\eta)} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{(h+\eta)} u \cdot dz \right] - u \Big|_{(h+\eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (h+\eta)$$

onde: $u \Big|_{(h+\eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (h+\eta) \approx 0$ pois $|u| \ll 1$ e $|\frac{\partial}{\partial x} (h+\eta)| \ll 1$.

$$\text{Desta forma: } \int_0^{(h+\eta)} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{(h+\eta)} u \cdot dz \right] = \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta) \cdot U] \quad \text{V.2.4}$$

Similarmente na direção-y :

$$\int_0^{(h+\eta)} \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^{(h+\eta)} v \cdot dz \right] - v \Big|_{(h+\eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (h+\eta)$$

onde: $v \Big|_{(h+\eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (h+\eta) \approx 0$ pois $|v| \ll 1$ e $|\frac{\partial}{\partial y} (h+\eta)| \ll 1$.

$$\text{Desta forma: } \int_0^{(h+\eta)} \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^{(h+\eta)} v \cdot dz \right] = \frac{\partial}{\partial y} [(h+\eta) \cdot V] \quad \text{V.2.5}$$

As equações V.2.4 e V.2.5 foram levadas em V.2.1 e obteve-se:

$$\begin{aligned} & -\rho \cdot \Delta y \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta) \cdot U] - \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(h+\eta) \cdot V] + \rho \cdot W_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \\ & = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial t} (h+\eta) \end{aligned} \quad \text{V.2.6}$$

Simplificando a equação V.2.6 obtém-se como equação da Continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h+\eta) + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta) \cdot U] + \frac{\partial}{\partial y} [(h+\eta) \cdot V] - W_0 = 0 \quad \text{V.2.7}$$

Optou-se pelo uso das vazões e altura do nível d'água como variáveis dependentes, sendo assim a equação V.2.7 torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h+\eta) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - W_o = 0 \quad \text{V.2.8}$$

onde: $Q_x = (h+\eta) \cdot U =$ vazão por unidade de largura na direção-x $[m^3/s/m]$.

$Q_y = (h+\eta) \cdot V =$ vazão por unidade de comprimento na direção-y $[m^3/s/m]$.

V.3 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

A conservação da quantidade de movimento (Q.M.) num volume definido, é obtida considerando a soma dos vetores na direção longitudinal. Portanto a Q.M. que entra, menos a Q.M. que sai, mais a Q.M. devido a contribuição lateral e as forças que atuam no corpo de água é igual a variação de Q.M. no tempo. Sendo assim, a somatória das forças que agem no volume é igual à variação total da Q.M. no tempo (equação V.3.1).

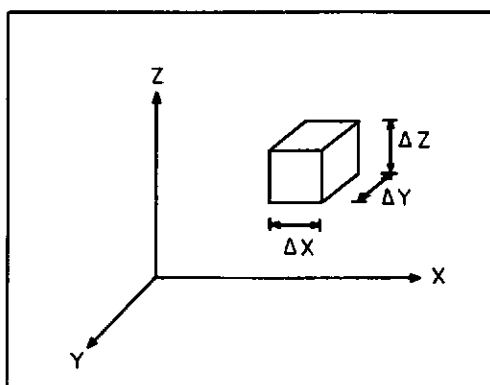


FIG.V.3.1 - Volume de Controle considerado na dedução da Equação do Movimento.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) \quad \text{V.3.1}$$

Considerando as hipóteses simplificadoras, a única força atuando no elemento de fluido considerado é a força de pressão visto que a força de gravidade é ortogonal às direções consideradas.

Uma vez que a quantidade de movimento é uma grandeza vetorial, esta deve ser considerada separadamente nas duas direções.

Força de Pressão

Direção-x:

$$p \cdot \Delta y \cdot \Delta z - \left[p \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = R_x \quad \text{V.3.2}$$

Direção-y:

$$p \cdot \Delta x \cdot \Delta z - \left[p \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = R_y \quad \text{V.3.3}$$

Variação da Quantidade de Movimento no Tempo

É a derivada no tempo da Quantidade de Movimento do fluido no volume de controle.

$$\text{Direção-x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot u) \quad \text{V.3.4}$$

$$\text{Direção-y} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v) \quad \text{V.3.5}$$

Variação da Quantidade de Movimento no Espaço

Como o elemento de fluido considerado não é uni-dimensional, faz-se necessário considerar que a quantidade de movimento em uma direção sofre a influência do movimento nas outras direções. Sendo assim tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Direção-x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot u^2) \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot u \cdot v) \cdot \Delta y + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot u \cdot w) \cdot \Delta z \end{aligned} \quad \text{V.3.6}$$

$$\begin{aligned} \text{Direção-y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot v^2) \cdot \Delta y + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot u \cdot v) \cdot \Delta x + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot v \cdot w) \cdot \Delta z \end{aligned} \quad \text{V.3.7}$$

Aplicação da Conservação da Quantidade de Movimento

Direção-x :

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w) \quad \text{V.3.8}$$

Direção-y:

$$- \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v \cdot w) \quad \text{V.3.9}$$

Expandindo V.3.8,

$$\begin{aligned} - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + u^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2 \cdot \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \\ &+ u \cdot v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + w \cdot u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{V.3.10}$$

Levando a equação da Continuidade $(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0)$ em V.3.10 :

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{V.3.11}$$

Como as velocidades do escoamento são muito pequenas com relação a velocidade de propagação das perturbações ($u, v, w \ll c$), os termos convectivos que são o produto de dois valores pequenos se tornam desprezíveis.

Desconsiderando os termos convectivos em V.3.11 :

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{V.3.12}$$

Analogamente, expandindo V.3.9 chega-se a :

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{V.3.13}$$

Considerando a distribuição hidrostática de pressões:

$$p = \rho \cdot g \cdot [(h+\eta) - z] \quad \text{V.3.14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) \quad \text{V.3.15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial y}(h+\eta) \quad \text{V.3.16}$$

Levando V.3.15 em V.3.12 e V.3.16 em V.3.13 :

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = - \rho \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) \quad \text{V.3.17}$$

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = - \rho \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial y}(h+\eta) \quad \text{V.3.18}$$

Integrando V.3.17 e V.3.18 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{(h+\eta)} u \cdot dz + g \int_0^{(h+\eta)} \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) dz = 0 \quad \text{V.3.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{(h+\eta)} v \cdot dz + g \int_0^{(h+\eta)} \frac{\partial}{\partial y}(h+\eta) dz = 0 \quad \text{V.3.20}$$

Na direção-x:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot [U \cdot (h+\eta)] + g \cdot (h+\eta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (h+\eta) = 0 \quad \text{V.3.21}$$

Na direção-y:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot [V \cdot (h+\eta)] + g \cdot (h+\eta) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot (h+\eta) = 0 \quad \text{V.3.22}$$

Utilizando vazões e altura do nível d'água como variáveis

dependentes:

Na direção-x:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot (Qx) + g \cdot (h+\eta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (h+\eta) = 0 \quad \text{V.3.23}$$

Na direção-y:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot (Qy) + g \cdot (h+\eta) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot (h+\eta) = 0 \quad V.3.24$$

V.4 - EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

As equações da continuidade (V.2.8) e do movimento (V.3.23 na direção-x e V.3.24 na direção-y) são equações diferenciais parciais hiperbólicas e quase lineares em termos de três variáveis dependentes (vazão na direção-x, vazão na direção-y e nível de água) e três variáveis independentes (discretizações em y e em x e o tempo). Estas equações serão transformadas em oito equações diferenciais ordinárias pelo Método das Características.

As equações da Continuidade e do Movimento serão identificadas por L_0 , L_1 e L_2 como se segue.

$$L_0 : \frac{\partial}{\partial t}(h+\eta) + \frac{\partial Qx}{\partial x} + \frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 = 0 \quad V.4.1$$

$$L_1 : \frac{\partial Qx}{\partial t} + g \cdot (h+\eta) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) = 0 \quad V.4.2$$

$$L_2 : \frac{\partial Qy}{\partial t} + g \cdot (h+\eta) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(h+\eta) = 0 \quad V.4.3$$

Tendo em vista que η (perturbação do nível d'água) é pequeno comparado a h (nível d'água médio no instante t), nas equações L_1 e L_2 será admitido que $(h+\eta) \cong h$.

É possível combinar linearmente estas equações fazendo uso de multiplicadores desconhecidos (λ_1 e λ_2).

$$L_I = L_0 + \lambda_1 \cdot L_1$$

$$L_I = \frac{\partial}{\partial t}(h+\eta) + \frac{\partial Qx}{\partial x} + \frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 + \lambda_1 \cdot \left[\frac{\partial Qx}{\partial t} + g \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) \right]$$

V.4.4

Fazendo $g \cdot h = c^2$ e rearranjando L_I obtém-se,

$$L_I = \left[\frac{\partial}{\partial t}(h+\eta) + \lambda_1 \cdot c^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) \right] + \lambda_1 \cdot \left[\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - W_0 = 0 \quad \text{V.4.5}$$

Quaisquer dois valores distintos de λ_1 levarão a duas equações em termos das variáveis dependentes $(h+\eta)$ e Q_x equivalentes as equações L_0 e L_1 . O Método das Características consiste em selecionar dois valores particulares de λ_1 que resultem na conversão da equação L_I em um par de equações diferenciais ordinárias.

Em uma das equações aparecerá ainda uma derivada parcial que será tratada como resíduo.

Considerando que $Q_x = Q_x(x, y, t)$ e $(h+\eta) = (h+\eta)(x, y, t)$ são soluções das equações L_0 e L_1 temos que:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial Q_x}{\partial t} \quad \text{V.4.6}$$

$$\frac{d}{dt}(h+\eta) = \frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(h+\eta) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}(h+\eta) \quad \text{V.4.7}$$

Levando estas equações em V.4.5 vem que:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 \cdot c^2 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \pm \frac{1}{c} \quad \text{V.4.8}$$

Desta forma a equação V.4.5 pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(h+\eta) \pm \frac{1}{c} \cdot \frac{dQ_x}{dt} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - W_0 = 0$$

sujeita a :

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

As quatro equações diferenciais ordinárias na direção-x

são:

$$C_x^+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(h+\eta) + \frac{1}{c} \cdot \frac{dQ_x}{dt} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - W_0 = 0 \quad \text{V.4.9} \\ \frac{dx}{dt} = +c \quad \text{V.4.10} \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{V.4.11} \end{array} \right.$$

$$C_{x^-} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(h+\eta) - \frac{1}{c} \cdot \frac{dQ_x}{dt} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - W_0 = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} V.4.12 \\ V.4.13 \end{array} \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad V.4.14$$

Analogamente ao que foi feito para obtenção de L_1 é possível combinar linearmente L_0 e L_2 com o multiplicador λ_2 e seguindo o mesmo raciocínio obtém-se dois pares de equações Características na direção-y, que são:

$$C_{y^+} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(h+\eta) + \frac{1}{c} \cdot \frac{dQ_y}{dt} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - W_0 = 0 \\ \frac{dy}{dt} = +c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} V.4.15 \\ V.4.16 \end{array} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad V.4.17$$

$$C_{y^-} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(h+\eta) - \frac{1}{c} \cdot \frac{dQ_y}{dt} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - W_0 = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} V.4.18 \\ V.4.19 \end{array} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad V.4.20$$

V.5 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

As equações Características se encontram agrupadas em quatro chaves para enfatizar sua dependência, a integração numérica deve ser feita ao longo das linhas Características. Uma aproximação é introduzida na avaliação da integral uma vez que Q_x , Q_y , c e $(h+\eta)$ são funções desconhecidas. A integração trapezoidal produz equações algébricas que levam a soluções estáveis desde que a condição de "Courant" seja observada.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad V.5.1$$

Uma integração de primeira ordem é em geral satisfatória. Esta leva a um método de solução explícito e estável. Segue-se a

integração numérica das Equações Características.

Assumindo as variáveis dependentes Q_x , Q_y , e $(h+\eta)$ conhecidas nos pontos R, S, T e J (FIG.V.5.1), oito equações podem se escritas em termos das incógnitas Q_{x_p} , Q_{y_p} , x_p , y_p , $(h+\eta)_p$ e t_p . Isto envolve a integração das equações V.4.9 a V.4.19

Na aplicação do Método das Características às equações diferenciais da continuidade e do movimento não foi possível transformar todas as derivadas parciais em derivadas totais, desta forma na integração as derivadas parciais serão avaliadas com uma aproximação de segunda ordem usando um coeficiente de ponderação delta (δ) que será posteriormente analisado.

Visto que as velocidades de enchimento/esvaziamento (W_0), que são dados de entrada do programa são valores conhecidos em instantes específicos, para a integração das características é necessário recorrer a um sistema de interpolação.

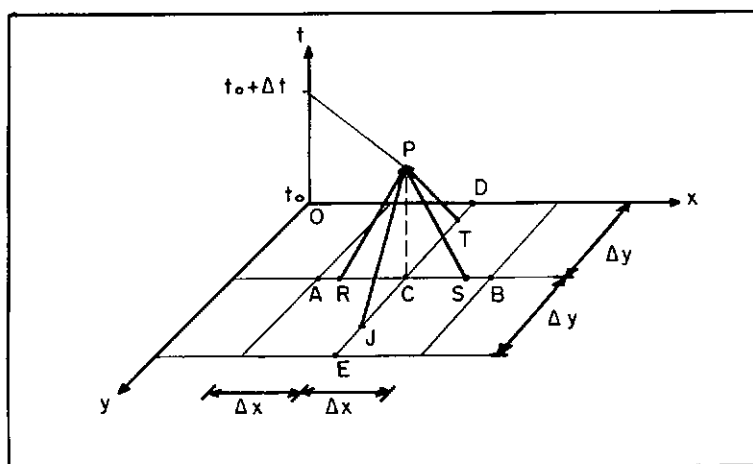


FIG.V.5.1 - Linhas Características

Tendo o valor da celeridade sido considerado constante em cada instante de tempo t conclui-se que $c_R = c_S = c_T = c_J$. Doravante a aproximação de segunda ordem da celeridade nas integrações acima

será conhecida por \bar{c} [onde $\bar{c} = \delta \cdot c_{R,S,T,J} + (1-\delta) \cdot c_P$] visando simplificar as fórmulas.

Integração na direção-x :

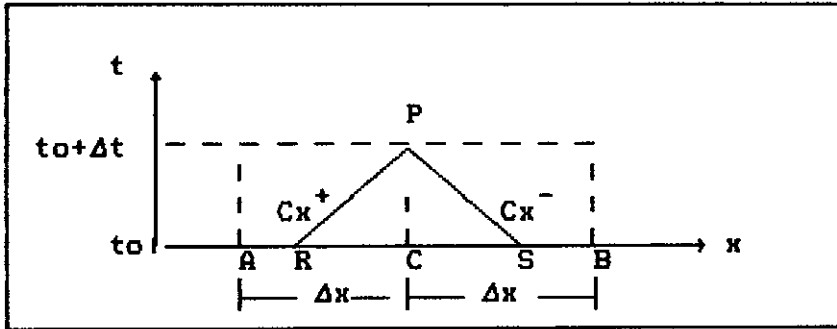


FIG.V.5.2 - Discretização do Método das Características com intervalos de tempo especificados na direção-x.

Característica Positiva:

$$\int_R^P d(h+\eta) + \int_R^P \frac{1}{\bar{c}} \cdot dQx + \int_R^P \frac{\partial Qy}{\partial y} \cdot dt - \int_R^P W_0 \cdot dt = 0$$

$$(h+\eta)_P - (h+\eta)_R + \frac{1}{\bar{c}} \cdot (Qx_P - Qx_R) + \left[\delta \cdot \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} \right)_R + \right.$$

$$\left. + (1-\delta) \cdot \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} \right)_P \right] \cdot \Delta t - \left[\delta \cdot W_{0R} + (1-\delta) \cdot W_{0P} \right] \cdot \Delta t = 0 \quad V.5.2$$

Característica Negativa:

$$\int_S^P d(h+\eta) - \int_S^P \frac{1}{\bar{c}} \cdot dQx + \int_S^P \frac{\partial Qy}{\partial y} \cdot dt - \int_S^P W_0 \cdot dt = 0$$

$$(h+\eta)_P - (h+\eta)_S - \frac{1}{c} \cdot (Q_{xP} - Q_{xS}) + \left[\delta \cdot \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} \right)_S + (1-\delta) \cdot \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} \right)_P \right] \cdot \Delta t - \left[\delta \cdot Wo_S + (1-\delta) \cdot Wo_P \right] \cdot \Delta t = 0 \quad \text{V.5.3}$$

Integração na direção-y:

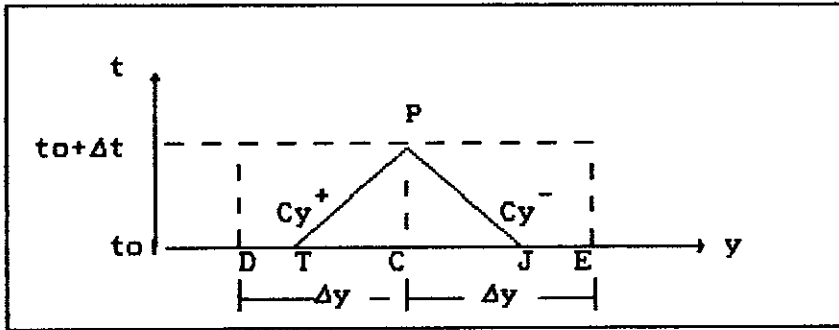


FIG.V.5.3 - Discretização do Método das Características com intervalos de tempo especificados na direção-y.

Característica Positiva:

$$\int_T^P d(h+\eta) + \int_T^P \frac{1}{c} \cdot dQy + \int_T^P \frac{\partial Qx}{\partial x} \cdot dt - \int_T^P Wo \cdot dt = 0$$

$$(h+\eta)_P - (h+\eta)_T + \frac{1}{c} \cdot (Qy_P - Qy_T) + \left[\delta \cdot \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} \right)_T + (1-\delta) \cdot \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} \right)_P \right] \cdot \Delta t - \left[\delta \cdot Wo_T + (1-\delta) \cdot Wo_P \right] \cdot \Delta t = 0 \quad \text{V.5.4}$$

Característica Negativa:

$$\int_J^P d(h+\eta) - \int_J^P \frac{1}{c} \cdot dQy + \int_J^P \frac{\partial Qx}{\partial x} \cdot dt - \int_J^P Wo \cdot dt = 0$$

$$\begin{aligned}
 (h+\eta)_P - (h+\eta)_J - \frac{1}{\bar{c}} \cdot (Qy_P - Qy_J) + \left[\delta \cdot \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} \right)_J + \right. \\
 \left. + (1-\delta) \cdot \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} \right)_P \right] \cdot \Delta t - \left[\delta \cdot W_{0J} + (1-\delta) \cdot W_{0P} \right] \cdot \Delta t = 0 \quad V.5.5
 \end{aligned}$$

Resolvendo simultaneamente as equações V.5.2, V.5.3, V.5.4 e V.5.5 é possível chegar a equações explícitas para as incógnitas. Desta forma:

Subtraindo as duas equações Características na direção-x:

$$\begin{aligned}
 Qx_P = \frac{\bar{c}}{2} \cdot \left[(h+\eta)_R - (h+\eta)_S + \frac{1}{\bar{c}} \cdot (Qx_R + Qx_S) + \delta \cdot \Delta t \cdot \left[\left(\frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 \right)_S - \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 \right)_R \right] \right] \quad V.5.6
 \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações Características na direção-y:

$$\begin{aligned}
 Qy_P = \frac{\bar{c}}{2} \cdot \left[(h+\eta)_T - (h+\eta)_J + \frac{1}{\bar{c}} \cdot (Qy_T + Qy_J) + \delta \cdot \Delta t \cdot \left[\left(\frac{\partial Qx}{\partial x} - W_0 \right)_J - \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} - W_0 \right)_T \right] \right] \quad V.5.7
 \end{aligned}$$

Somando as quatro equações Características:

$$\begin{aligned}
 (h+\eta)_P = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{Qx_R - Qx_S + Qy_T - Qy_J}{\bar{c}} + (h+\eta)_R + (h+\eta)_S + (h+\eta)_J + (h+\eta)_T - \right. \\
 - \Delta t \cdot \left[\delta \cdot \left[\left(\frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 \right)_R + \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 \right)_S + \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} - W_0 \right)_T + \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} - W_0 \right)_J \right] + \right. \\
 \left. + (1-\delta) \cdot \left[2 \cdot 0 \cdot \left(\frac{\partial Qy}{\partial y} - W_0 \right)_P + 2 \cdot 0 \cdot \left(\frac{\partial Qx}{\partial x} - W_0 \right)_P \right] \right] \quad V.5.8
 \end{aligned}$$

As equações V.5.6, V.5.7 e V.5.8 permitem determinar as três incógnitas Qx_P , Qy_P e $(h+\eta)_P$ em cada ponto da malha em

função dos dados do tempo anterior.

V.6 - INTERPOLAÇÕES

Nas equações V.5.6 a V.5.8 os sub-índices indicam que os valores das variáveis devem ser tomados nestes pontos (figuras FIG.V.5.2 e FIG.V.5.3). Isto leva a uma interpolação linear dos valores conhecidos nos pontos A, B, C, D e E da malha de discretização. Como já foi explicado no Capítulo IV isto introduz um fator dispersivo ao sistema numérico que pode ser minimizado interpolando-se o mínimo possível.

A interpolação linear para Qx_R é expressa pela proporção:

$$\frac{Qx_C - Qx_R}{Qx_C - Qx_A} = \frac{x_C - x_R}{\Delta x} = \frac{x_P - x_R}{\Delta x} = \theta \cdot \bar{c}$$

onde:

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{V.6.1}$$

$$Qx_R = Qx_C - \theta \cdot \bar{c} \cdot (Qx_C - Qx_A) \quad \text{V.6.2}$$

Analogamente:

$$(h+\eta)_R = (h+\eta)_C - \theta \cdot \bar{c} \cdot \left[(h+\eta)_C - (h+\eta)_A \right] \quad \text{V.6.3}$$

$$W_R = W_C - \theta \cdot \bar{c} \cdot (W_C - W_A) \quad \text{V.6.4}$$

Usando a interpolação para achar os valores no ponto S:

$$\frac{Qx_S - Qx_C}{Qx_B - Qx_C} = \frac{x_S - x_C}{\Delta x} = \frac{x_S - x_P}{\Delta x} = \theta \cdot \bar{c}$$

$$Qx_S = Qx_C + \theta \cdot \bar{c} \cdot (Qx_B - Qx_C) \quad \text{V.6.5}$$

$$(h+\eta)_S = (h+\eta)_C + \theta \cdot \bar{c} \cdot \left[(h+\eta)_B - (h+\eta)_C \right] \quad \text{V.6.6}$$

$$W_S = W_C + \theta \cdot \bar{c} \cdot (W_B - W_C) \quad \text{V.6.7}$$

Na direção-y a interpolação leva aos seguintes valores

nos pontos T e J :

$$Qy_T = Qy_C - \alpha \cdot \bar{c} \cdot (Qy_C - Qy_D) \quad \text{V.6.8}$$

onde:

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad \text{V.6.9}$$

$$(h+\eta)_T = (h+\eta)_C - \alpha \cdot \bar{c} \cdot \left[(h+\eta)_C - (h+\eta)_D \right] \quad \text{V.6.10}$$

$$W_T = W_C - \alpha \cdot \bar{c} \cdot (W_C - W_D) \quad \text{V.6.11}$$

$$Qy_J = Qy_C + \alpha \cdot \bar{c} \cdot (Qy_E - Qy_C) \quad \text{V.6.12}$$

$$(h+\eta)_J = (h+\eta)_C + \alpha \cdot \bar{c} \cdot \left[(h+\eta)_E - (h+\eta)_C \right] \quad \text{V.6.13}$$

$$W_J = W_C + \alpha \cdot \bar{c} \cdot (W_E - W_C) \quad \text{V.6.14}$$

V.7 - CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

A solução para problemas de transitórios hidráulicos geralmente começa com condições de escoamento uniforme no instante inicial ($t=0$), de forma que os valores de H (nível), Qx e Qy são conhecidos neste instante em todos os pontos da discretização. A solução consiste em achar os valores de $(h+\eta)$, Qx e Qy para toda a malha no instante $t = \Delta t$, depois no instante $t = 2 \cdot \Delta t$ e assim sucessivamente até alcançar o tempo de análise desejado. Em qualquer ponto interior da malha de discretização, de coordenadas (i, j) genéricas (FIG.V.7.1) as quatro equações características são resolvidas simultaneamente para as incógnitas $Qx_p(i, j)$, $Qy_p(i, j)$ e $(h+\eta)_p(i, j)$.

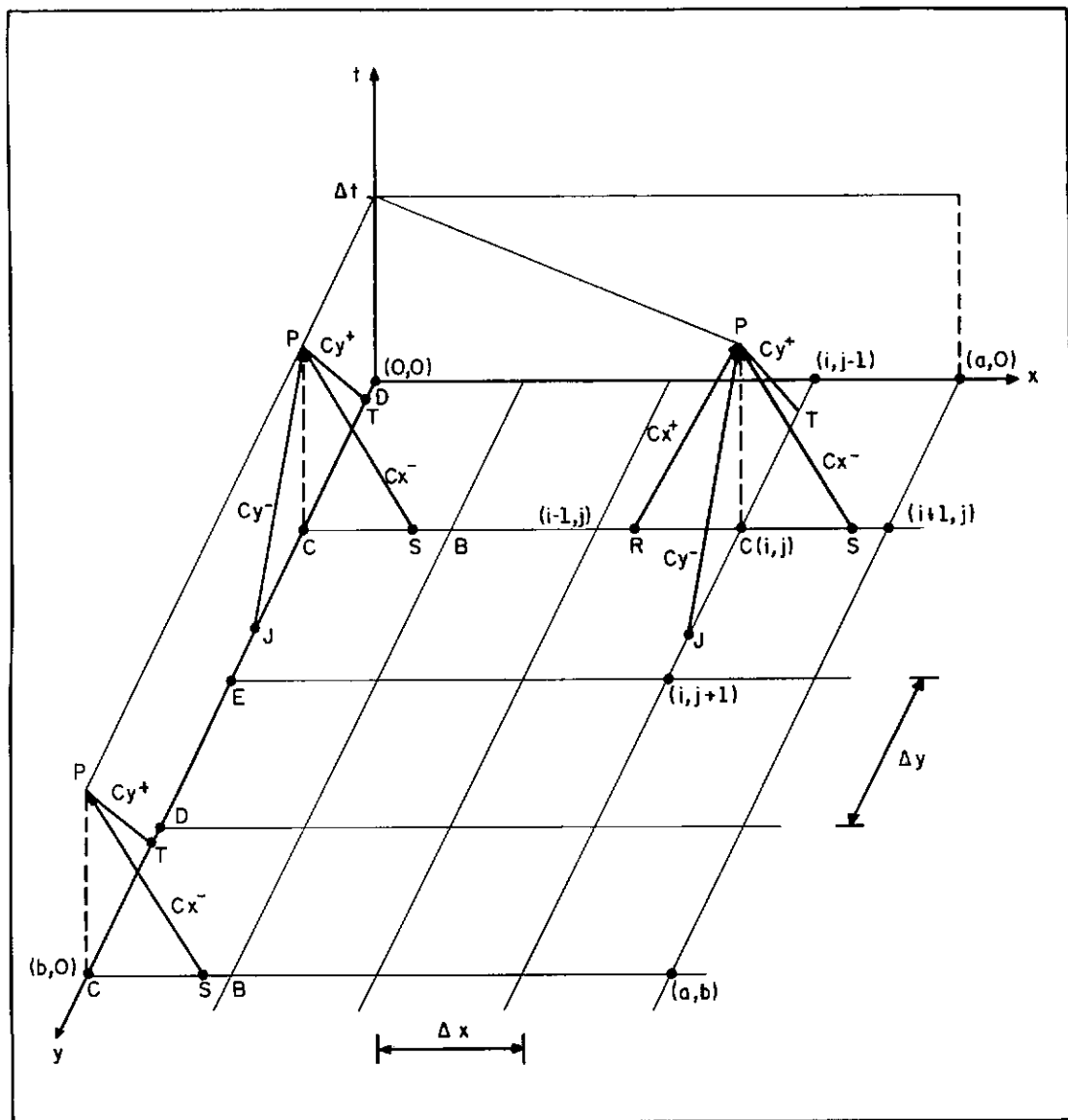


FIG.V.7.1 - Linhas características no plano x - y - t .

Uma observação mais cuidadosa da malha da Fig.V.7.1 evidencia que os pontos extremos do sistema começam a influenciar os pontos internos após o primeiro intervalo de tempo. Desta forma para dar continuidade à solução em qualquer instante de tempo faz-se necessária a introdução de condições de contorno apropriadas.

Em cada linha lateral da câmara da Eclusa encontram-se disponíveis três características e no encontro de duas linhas

apenas duas equações características. Como já foi dito anteriormente, são necessárias duas equações características em cada direção para explicitar os valores das incógnitas Q_{x_p} , Q_{y_p} e $(h+\eta)_p$, desta forma torna-se evidente que para os pontos localizados nas linhas limites laterais será preciso obter uma equação auxiliar especificando a vazão, o nível ou uma relação entre eles. Esta equação deve transmitir informações sobre o comportamento deste contorno. Seguem-se as condições iniciais e de contorno da Eclusa em questão.

Condição Inicial:

No instante inicial ($t=0$) não existe escoamento no interior da eclusa nem perturbação do nível de água. Desta forma as vazões são nulas ($Q_x=0$ e $Q_y=0$) e o nível é constante ($h=H_0$)

Condições de Contorno:

Para $x = 0$ e $x = a$ $Q_x = 0$ (não há vazão na direção-x)

Para $y = 0$ e $y = b$ $Q_y = 0$ (não há vazão na direção-y)

A velocidade equivalente de alimentação no fundo da Eclusa representada no modelo matemático por W_0 será um dado de entrada durante todo o tempo de enchimento/esvaziamento. O conhecimento de tal velocidade e conseqüentemente da vazão aduzida à câmara, uma vez que é conhecida a dimensão da câmara, permite o conhecimento da altura de água média no interior da Eclusa em cada instante de tempo calculado.

$$h(t) = H_0 + \int_0^t \frac{Q_0(t)}{a \cdot b} \cdot dt \quad e$$

$$Q_0(t) = \int_0^a \int_0^b W_0(x, y, t) \cdot dx \cdot dy \quad V.7.1$$

onde: $Q_0(t)$ - Função de enchimento conhecida

H_0 - Altura de água no interior da câmara no instante $t=0$.

CAPÍTULO VI - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO

Com base no modelo matemático desenvolvido no Capítulo V, foi elaborado um programa para micro-computadores do tipo PC-XT/AT na linguagem FORTRAN 77.

VI.1 - PROCEDIMENTO DE CÁLCULO ADOTADO

Visando a elaboração de um algoritmo estruturado foi utilizado o artifício de criar uma orla de pontos fictícios em torno da discretização real da Eclusa (FIG.VI.1.1). Com a criação desta orla todos os pontos pertencentes ao espaço físico da Eclusa se tornaram pontos internos da malha de discretização para onde convergem as quatro equações características, o que uniformiza o procedimento de cálculo.

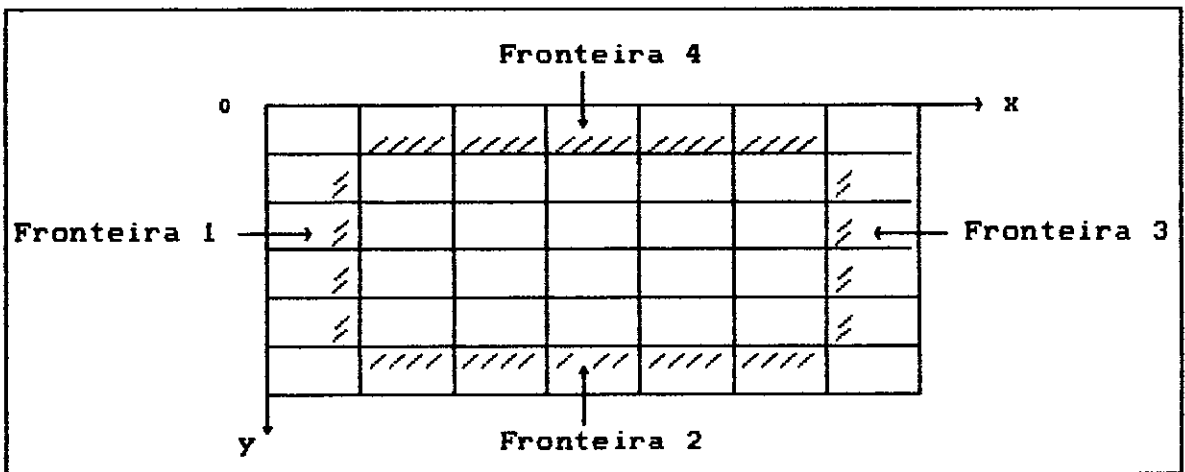
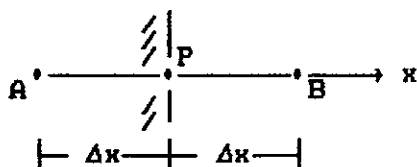


FIG.VI.1.1 - Discretização do fundo da Eclusa.

As condições de Contorno nos pontos localizados nas paredes e portas da câmara da Eclusa foram satisfeitas no

preenchimento dos pontos de orla (pontos fictícios) como mostra o esquema a seguir.

Condições de Contorno na fronteira 1:



onde : A = Ponto fictício da orla

B = Ponto interno da malha de discretização equidistante do ponto A .

P = Ponto da malha de discretização localizado no instante de tempo imediatamente posterior àquele dos pontos A e B.

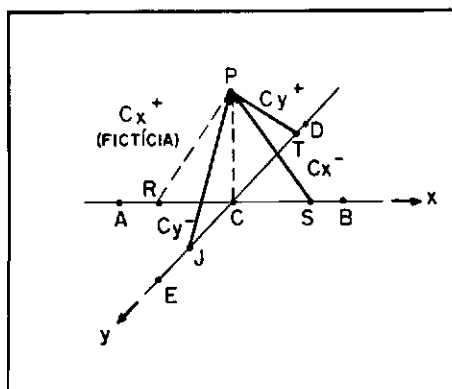


FIG.VI.1.2 - Características que convergem para o ponto P

Valores atribuídos ao ponto fictício 'A' visando atender a condição de contorno $Q_x(x=0, t) = 0$ no ponto 'P'.

$$(h+\eta)_{x=A} = (h+\eta)_{x=B} \quad \text{VI.1.1}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} \Big|_{x=A} = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Big|_{x=B} \quad \text{VI.1.2}$$

$$W_o \Big|_{x=A} = W_o \Big|_{x=B} \quad \text{VI.1.3}$$

$$Q_x \Big|_{x=A} = -Q_x \Big|_{x=B} \quad \text{VI.1.4}$$

Levando os valores acima na equação V.5.6 satisfaz-se a Condição de Contorno na Fronteira 1 ($Qx_p(x=0,t)=0$). O valor de Qy_p pode ser obtido da subtração das duas equações características na direção-y (equação V.5.7) e o valor de $(h+\eta)_p$ é obtido da soma das equações características nas duas direções (equação V.5.8).

Observe-se que a característica fictícia CX^+ não introduz erro pois com os valores impostos (VI.1.1 a VI.1.4) a soma das 4 características feita para a obtenção de V.5.8 é equivalente a somar apenas as 3 características reais e assumir a condição de contorno $Qx(0,t)=0$.

Nas demais Fronteiras (FIG.VI.1.1) foi seguido raciocínio análogo para atender as Condições de Contorno.

A alternativa Clássica do Método das Características para o cálculo das incógnitas nos pontos de fronteira seria o uso das Equações Características reais aliado à Condição de Contorno conhecida. A desvantagem desta opção se encontra no fato de serem necessários oito procedimentos de cálculo para os pontos de Fronteira, a saber:

Fronteira 1 : Equações Características CY^+ , CY^- e CX^- e a condição de contorno $Qx = 0$.

Fronteira 2 : Equações Características CY^+ , CX^+ e CX^- e a condição de contorno $Qy = 0$

Fronteira 3 : Equações Características CY^+ , CY^- e CX^+ e a condição de contorno $Qx = 0$

Fronteira 4 : Equações Características CX^+ , CX^- e CY^+ e a condição de contorno $Qy = 0$

Ponto comum às Fronteiras 1 e 2 : Equações Características CX^- , CY^+ e as Condições de Contorno $Qx=0$ e $Qy=0$.

Ponto comum às Fronteiras 1 e 4 : Equações Características CX^- , CY^- e as Condições de Contorno $Q_x=0$ e $Q_y=0$.

Ponto comum às Fronteiras 3 e 4 : Equações Características CX^+ , CY^- e as Condições de Contorno $Q_x=0$ e $Q_y=0$.

Ponto comum às Fronteiras 2 e 3 : Equações Características CX^+ , CY^+ e as Condições de Contorno $Q_x=0$ e $Q_y=0$.

No algoritmo idealizado não foram usadas diretamente as equações V.5.6, V.5.7 e V.5.8. Foram criadas subrotinas que calculam as parcelas referentes a cada equação característica e posteriormente estas parcelas foram adicionadas e subtraídas convenientemente para obtenção das incógnitas. Este procedimento visa apenas um programa mais fácil de ser entendido além de evitar o uso de equações que ocupam várias linhas de programação.

Em cada instante de tempo utilizam-se os valores das vazões e níveis do tempo anterior para calcular as incógnitas, os valores achados se tornarão base para o cálculo das variáveis $(h+\eta)$, Q_x e Q_y no instante de tempo seguinte.

VI.2 - DADOS DE ENTRADA

O programa admite como dados de entrada:

VI.2.1 - Dimensões da Eclusa:

a = Dimensão Longitudinal da câmara.

b = Dimensão Transversal

VI.2.2 - Nível de água no interior da câmara em cada instante de tempo = $h(t)$.

VI.2.3 - Número de discretizações nas duas direções da câmara.

NDX = Número de discretizações na direção x.

NDY = Número de discretizações na direção y.

VI.2.4 - Tempo de Cálculo desejado

TENCH = Tempo de enchimento/evazamento.

VI.2.5 - Coeficiente de ponderação da aproximação secundária no modelo matemático = DELTA

VI.2.6 - Matrizes com as velocidades equivalentes de entrada/saída de água no fundo da câmara. O intervalo de tempo entre duas matrizes consecutivas no arquivo de dados de entrada é considerado constante e também um dado de entrada.

TESP = tempo de espaçamento entre as matrizes de velocidades de entrada de água na câmara no arquivo de dados.

Os dados de entrada supra-citados devem se encontrar num arquivo previamente criado ao qual o programa associa o número lógico '5'.

O sistema de medidas usado é o S.I. (Sistema Internacional - M.K.S.)

VI.3 - ALGORITMO E FLUXOGRAMA DO PROGRAMA

ALGORITMO:

- INÍCIO
- Leitura dos dados de Entrada
- Definição das Constantes.
- Verificação do número de discretizações em relação ao dimensionamento das matrizes do programa.

- t = 0

- INÍCIO DA RESOLUÇÃO NUMÉRICA.

- Cálculo da celeridade (C)
- Cálculo do incremento de tempo Δt
- $t = t + \Delta t$
- Se $t > TENCH \Rightarrow STOP$

Método das Características

- Cálculo dos valores das Vazões Q_x e Q_y em todos os pontos internos da malha de discretização e posterior preenchimento dos pontos de orla.

- Cálculo das Derivadas das Vazões e preenchimento da orla.

- Cálculo do nível em todos os pontos internos da matriz de discretização e preenchimento da orla.

- Atribuição dos valores das vazões, dos níveis e das velocidades de entrada do tempo $t+\Delta t$ ao tempo t .

- Volta ao começo da resolução numérica para cálculo das incógnitas em um novo instante de tempo.

Para chegar aos valores das vazões e posteriormente aos dos níveis são inicialmente calculado os valores das 4 (quatro) Equações Características que, somadas como demonstrado no modelo matemático, torna possível a obtenção dos valores desejados.

O cálculo das vazões no tempo t antecede ao dos níveis pois para obter estes últimos faz-se necessário a obtenção dos valores das derivadas das vazões no tempo t .

O programa também conta com uma subrotina que interpola os valores das vazões e níveis entre os pontos da discretização para chegar aos valores nos pontos reais de partida das Características quando estes pontos não coincidem com os pontos

da malha. Esta Subrotina é utilizada no cálculo das parcelas das 4 equações Características.

FLUXOGRAMA:

INÍCIO

- Introdução das condições iniciais de vazões nulas e derivadas das vazões nulas em todos os pontos da malha.
- Leitura dos dados de entrada : a, b, Ho, TESP, NDX, NDY, TENCH e DELTA.
- Definição das constantes.
- Introdução das Condições Iniciais do nível e da celeridade → Para $t=0$: $(h+\eta)(x,y) = H_0$ e $C = \sqrt{g \cdot H_0}$

Início da Resolução Numérica

- Cálculo do primeiro Δt : $\Delta t = \frac{\text{minimo entre } \Delta x \text{ e } \Delta y}{C(t=0)}$

- Cálculo do primeiro tempo de cálculo: $t = t + \Delta t$

→ (1)

- SUBROTINA VELENT - Lê do arquivo de dados o nível médio de água e as velocidades equivalentes de entrada nos pontos da malha de discretização, interpola linearmente para chegar às velocidades equivalentes no instante de tempo que está sendo calculado.

- Cálculo da celeridade no instante t (C_p)
- Cálculo da celeridade média (\bar{C}) : $\bar{C} = \delta \cdot C + (1-\delta) \cdot C_p$

MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

- Sendo conhecidos os valores das vazões, níveis e velocidades de entrada no instante de tempo anterior, a SUBROTINA INTERP acha o valor destas variáveis nos pontos reais de partida das quatro características segundo as equações V.6.1 a V.6.15.

- Calcula a soma das parcelas referentes ao ponto de partida da característica Cx^+ (parcelas com sub-índice R) na equação V.5.2 chamando esta parcela de C_1 .

- Calcula a soma das parcelas referentes ao ponto de partida da característica Cx^- (parcelas com sub-índice S) na equação V.5.3 chamando esta parcela de C_2 .

- Calcula a soma das parcelas referentes ao ponto de partida da característica Cy^+ (parcelas com sub-índice T) na equação V.5.4 chamando esta parcela de C_3 .

- Calcula a soma das parcelas referentes ao ponto de partida da característica Cy^- (parcelas com sub-índice J) na equação V.5.5 chamando esta parcela de C_4 .

- Cálculo das vazões na direção-x e na direção-y (Q_{x_p} e Q_{y_p} respectivamente) no instante de tempo t em todos os pontos da malha de discretização segundo as equações V.5.6 e V.5.7.

- Preenchimento da orla em torno das matrizes Q_{x_p} e Q_{y_p} tornando os pontos de fronteira da Eclusa pontos internos de cálculo satisfazendo também as condições de contorno nestes pontos.



- Cálculo das matrizes das derivadas das vazões:
 DQ_x = Derivada da vazão na direção-x em relação a x
 DQ_y = derivada da vazão na direção-y em relação a y



- Preenchimento da orla em torno das matrizes das derivadas



- Cálculo das parcelas das equações características em x e em y referentes ao ponto de chegada da característica (parcelas do lado direito da equação V.5.8 que contam com o sub-índice P).



- Cálculo dos níveis em todos os pontos da malha de discretização segundo a equação V.5.8.



- Criação da orla em torno da matriz dos níveis.



- Impressão de Resultados.



- Atribuição dos valores calculados neste instante de tempo ao tempo anterior para ser usado na próxima etapa de cálculo.



- Cálculo do novo incremento de tempo Δt :

$$\Delta t = \frac{\text{mínimo entre } \Delta x \text{ e } \Delta y}{C(\text{tempo ora calculado})}$$



- Determinação do novo tempo de cálculo: $t = t + \Delta t$



Se $t > \text{TENCH}$

SIM → FIM

↓
NÃO

↓
(1)

CAPÍTULO VII - APLICAÇÃO E APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Com a finalidade de verificar a precisão do modelo desenvolvido no Capítulo V fez-se necessária a elaboração de exemplos exatos para efeito de comparação dos resultados finais.

Sabendo-se que a distribuição de vazões nos orifícios do sistema de distribuição de uma Eclusa varia preferencialmente na direção longitudinal e em alguns casos (dependendo do sistema de distribuição) também varia na direção transversal decidiu-se pela comparação em dois exemplos de enchimento possuindo solução exata.

1) Função de alimentação onde a vazão nos orifícios varia linearmente apenas na direção longitudinal do tanque. A adução e retirada simultânea de vazões iguais mantém constante o nível médio d'água na câmara.

Para este exemplo foram efetuadas duas análises comparativas. A primeira foi uma aplicação do Método das Características a uma dimensão visto que na outra dimensão horizontal não há variação do escoamento. O segundo foi a resolução exata do problema utilizando-se uma expansão em série de Fourier.

2) Função de alimentação com a vazão aduzida pelos orifícios variando linearmente nas duas direções. Como no exemplo anterior não ocorre acúmulo de volume no interior do tanque e a altura média de água permanece constante durante todo o processo. O resultado exato deste exemplo também foi obtido através de desenvolvimento em série de Fourier.

Tais exemplos são descritos a seguir com os equacionamentos exatos utilizados para a obtenção dos

resultados.

VII.1 - EXEMPLO DE ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO

UNI-DIMENSIONAL

VII.1.1 - DESCRIÇÃO DO EQUACIONAMENTO

O equacionamento a seguir tem como referência os eixos coordenados da FIG.VII.1.1.1.

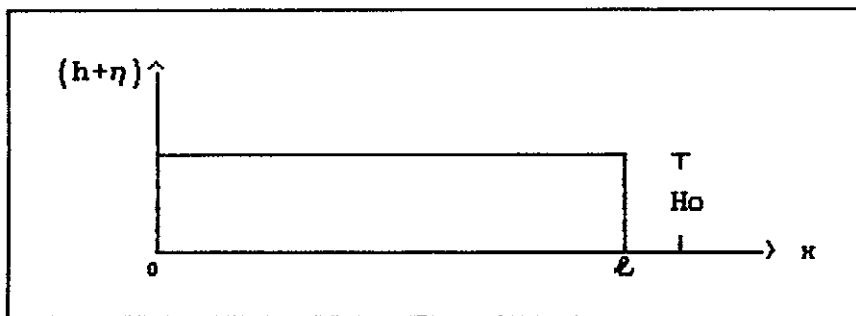


FIG.VII.1.1.1 - Eixos coordenados usados no equacionamento.

Equação da Continuidade :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (h + \eta) = W(x, t) \quad \text{VII.1.1.1}$$

Equação do Movimento :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(h + \eta)^2}{2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot (h + \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) = 0 \quad \text{VII.1.1.2}$$

onde:

$Q(x, t)$ = Vazão por unidade de largura [$\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$]

$\eta(x, t)$ = perturbação do nível d'água em relação ao nível médio no instante t [m].

h = Nível de água médio no interior do tanque [m] - Valor constante.

Função de Alimentação:

$$W(x, t) = W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\ell}\right) \cdot f(t) \quad \text{VII.1.1.3}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 1 & \text{para } t > T \end{cases}$$

onde:

W_{\max} = Valor máximo da velocidade de entrada nos orifícios [m/s].

T = Instante de tempo a partir do qual a velocidade em todos os orifícios não varia com o tempo [s].

ℓ = Maior dimensão do tanque [m]

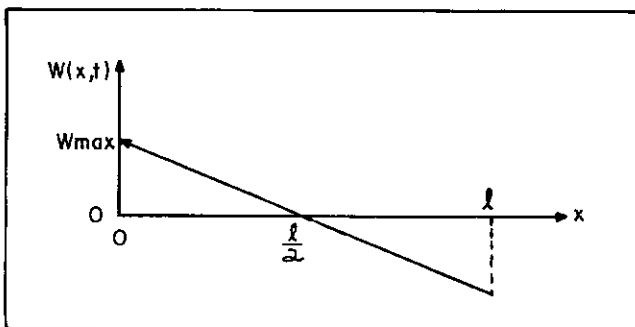


FIG.VII.1.1.2 - Gráfico da alimentação em função do comprimento (ℓ) do tanque.

A função $W(x, t)$ considera que a válvula será aberta gradualmente até o tempo $t = T$ e depois a alimentação será constante como mostra a FIG.VII.1.1.3.

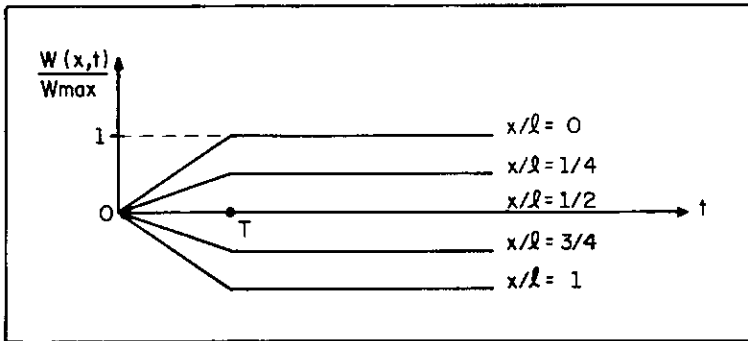


FIG.VII.1.1.3 - Gráfico da alimentação em função do tempo.

A função de alimentação $W(x,t)$ utilizada neste exemplo garante que não haverá acúmulo de volume no interior do tanque, o que permite algumas simplificações nas equações VII.1.1.1 e VII.1.1.2.

Sendo $h \gg \eta$ e $h = h_0$ (constante), desta forma :

$$(h + \eta) \cong h = h_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(h + \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ pois } h \text{ não varia com } x.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h + \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \text{ pois } h \text{ não varia com } t.$$

Em VII.1.1.1 :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = W(x,t) \quad \text{VII.1.1.4}$$

Em VII.1.1.2 :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{VII.1.1.5}$$

Fazendo $Co^2 = g \cdot h_0$ em (VII.1.1.5) onde Co é a

celeridade da onda [m/s],

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + Co^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{VII.1.1.6}$$

VII.1.2 - MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Chamando as equações VII.1.1.4 e VII.1.1.6 de L_0 e L_1 respectivamente para facilitar as operações:

$$L_0 : \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = W(x, t) \quad \text{VII.1.2.1}$$

$$L_1 : \frac{\partial Q}{\partial t} + C_0^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{VII.1.2.2}$$

Combinando as equações L_0 e L_1 :

$$L = L_0 + \lambda \cdot L_1$$

$$L = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda \cdot C_0^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = W(x, t)$$

$$L = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \lambda \cdot C_0^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \lambda \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = W(x, t)$$

VII.1.2.3

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot C_0^2 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{C_0}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_0$$

VII.1.2.4

Equações Características :

$$C^+ \left[\begin{array}{l} \frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{C_0} \cdot \frac{dQ}{dt} = W(x, t) \\ \frac{dx}{dt} = C_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{VII.1.2.5} \\ \text{VII.1.2.6} \end{array}$$

$$C^- \left[\begin{array}{l} \frac{d\eta}{dt} - \frac{1}{C_0} \cdot \frac{dQ}{dt} = W(x, t) \\ \frac{dx}{dt} = -C_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{VII.1.2.7} \\ \text{VII.1.2.8} \end{array}$$

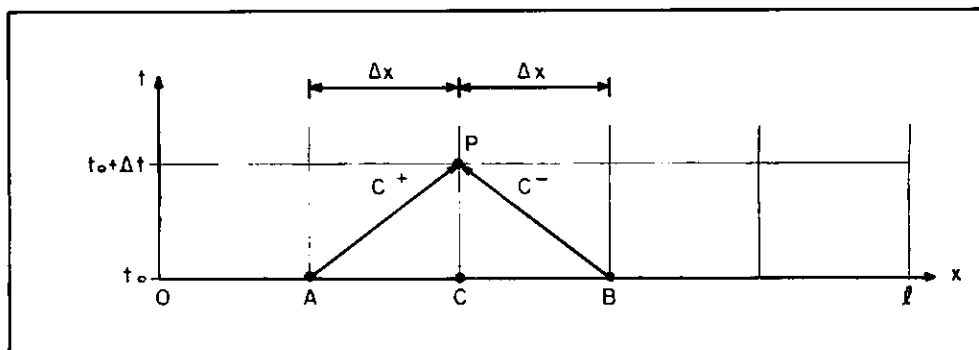


FIG.VII.1.2.1 - Linhas Características no plano x-t.

Integrando as equações VII.1.2.5 a VII.1.2.8 entre os pontos A, B e P obtêm-se:

$$C^+ : \int_{x_A}^x dx = Co \cdot \int_{t_A}^t dt \quad \Rightarrow \quad x - x_A = Co \cdot (t - t_A)$$

$$x = x_A + Co \cdot (t - t_A) \quad \text{VII.1.2.9}$$

$$\int_A^P d\eta + \frac{1}{Co} \cdot \int_A^P dQ = \int_{t_A}^{t_P} W [(x_A + Co \cdot (t - t_A)), t] dt$$

$$\text{VII.1.2.10}$$

$$C^- : \int_{x_B}^x dx = -Co \cdot \int_{t_B}^t dt \quad \Rightarrow \quad x - x_B = -Co \cdot (t - t_B)$$

$$x = x_B - Co \cdot (t - t_B) \quad \text{VII.1.2.11}$$

$$\int_B^P d\eta - \frac{1}{Co} \cdot \int_B^P dQ = \int_{t_B}^{t_P} W [(x_B - Co \cdot (t - t_B)), t] dt$$

$$\text{VII.1.2.12}$$

onde: x_A = abscissa do ponto A

x_B = abscissa do ponto B

$t_A = t_B$ = tempo nos pontos A e B

Para $0 \leq t \leq T$

$$\int_{t_A}^{t_P} W[(x_A + Co \cdot (t - t_A)), t] dt =$$

$$= \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \left[\ell \cdot (t_A + \frac{\Delta t}{2}) - t_A (2 \cdot x_P - \Delta x) - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\frac{6}{3} \cdot x_P - \frac{2}{3} \cdot \Delta x) \right]$$

VII.1.2.13

$$\int_{t_B}^{t_P} W[(x_B - Co \cdot (t - t_B)), t] dt =$$

$$= \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \left[\ell \cdot (t_B + \frac{\Delta t}{2}) - t_B (2 \cdot x_P + \Delta x) - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\frac{6}{3} \cdot x_P + \frac{2}{3} \cdot \Delta x) \right]$$

VII.1.2.14

Para $t > T$:

$$\int_{t_A}^{t_P} W[(x_A + Co \cdot (t - t_A)), t] dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell} \cdot (\ell - 2 \cdot x_P + \Delta x)$$

VII.1.2.15

$$\int_{t_B}^{t_P} W[(x_B - Co \cdot (t - t_B)), t] dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell} \cdot (\ell - 2 \cdot x_P - \Delta x)$$

VII.1.2.16

Equações Características :

Para $0 \leq t \leq T$:

$$C^+ : \left[\begin{array}{l} \eta_P - \eta_A + \frac{1}{C_0} \cdot (Q_P - Q_A) = \frac{W_{max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \cdot \left[\ell \cdot \left(t_A + \frac{\Delta t}{2} \right) - \right. \\ \left. - t_A \cdot (2 \cdot x_P - \Delta x) - \Delta t \cdot \left(x_P - \frac{1}{3} \cdot \Delta x \right) \right] \quad \text{VII.1.2.17} \\ \Delta x = C_0 \cdot \Delta t \quad \text{VII.1.2.18} \end{array} \right.$$

$$C^- : \left[\begin{array}{l} \eta_P - \eta_B - \frac{1}{C_0} \cdot (Q_P - Q_B) = \frac{W_{max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \cdot \left[\ell \cdot \left(t_B + \frac{\Delta t}{2} \right) - \right. \\ \left. - t_B \cdot (2 \cdot x_P + \Delta x) - \Delta t \cdot \left(x_P + \frac{1}{3} \cdot \Delta x \right) \right] \quad \text{VII.1.2.19} \\ \Delta x = - C_0 \cdot \Delta t \quad \text{VII.1.2.20} \end{array} \right.$$

Para $t > T$

$$C^+ : \left[\begin{array}{l} \eta_P - \eta_A + \frac{1}{C_0} \cdot (Q_P - Q_A) = \frac{W_{max} \cdot \Delta t}{\ell} \cdot (\ell - 2 \cdot x_P + \Delta x) \quad \text{VII.1.2.21} \\ \Delta x = C_0 \cdot \Delta t \quad \text{VII.1.2.22} \end{array} \right.$$

$$C^- : \left[\begin{array}{l} \eta_P - \eta_B - \frac{1}{C_0} \cdot (Q_P - Q_B) = \frac{W_{max} \cdot \Delta t}{\ell} \cdot (\ell - 2 \cdot x_P - \Delta x) \quad \text{VI.1.2.23} \\ \Delta x = - C_0 \cdot \Delta t \quad \text{VII.1.2.24} \end{array} \right.$$

Resolvendo simultaneamente as equações características é possível explicitar os valores Q_P e η_P (vazão e perturbação do nível no tempo em questão).

Para $0 \leq t \leq T$

$$\eta_P = \frac{1}{2} \cdot \left[\eta_A + \eta_B + \frac{1}{C_0} \cdot (Q_A - Q_B) + \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{L \cdot T} \cdot \left[L \cdot (2 \cdot t_{\text{ant}} + \Delta t) - 4 \cdot x_P \cdot t_{\text{ant}} - 2 \cdot \Delta t \cdot x_P \right] \right] \quad \text{VII.1.2.25}$$

$$Q_P = \frac{C_0}{2} \cdot \left[\eta_A - \eta_B + \frac{1}{C_0} \cdot (Q_A + Q_B) + \frac{2 \cdot W_{\max} \cdot \Delta t}{L \cdot T} \cdot \left[t_{\text{ant}} \cdot \Delta x + \frac{1}{3} \cdot \Delta t \cdot \Delta x \right] \right] \quad \text{VII.1.2.26}$$

Para $t > T$

$$\eta_P = \frac{1}{2} \cdot \left[\eta_A + \eta_B + \frac{1}{C_0} \cdot (Q_A - Q_B) + \frac{2 \cdot W_{\max} \cdot \Delta t}{L} \cdot (L - 2 \cdot x_P) \right] \quad \text{VII.1.2.27}$$

$$Q_P = \frac{C_0}{2} \cdot \left[\eta_A - \eta_B + \frac{1}{C_0} \cdot (Q_A + Q_B) + \frac{2 \cdot W_{\max} \cdot \Delta t \cdot \Delta x}{L} \right] \quad \text{VII.1.2.28}$$

Observe que $t_{\text{ant}} = t_A = t_B$ e os sub-índices indicam o ponto onde o valor da variável deve ser tomado de acordo com a FIG.VII.1.2.1.

Condições de Contorno

Para os pontos da extremidade ($x=0$ e $x=L$ na FIG.VII.1.1.1), a vazão é nula em qualquer instante de tempo ($Q=0 \forall t$).

Condições Iniciais

No instante inicial não há escoamento [$Q(x,0)=0$] nem perturbação do nível de água [$\eta(x,0)=0$].

As equações VII.1.2.25 a VII.1.2.28 acrescidas das condições de contorno nas extremidades e das condições iniciais

possibilitam o cálculo das vazões e dos níveis nos pontos da discretização ao longo da dimensão longitudinal da eclusa.

O equacionamento acima foi utilizado na elaboração de um programa de computador para um tanque com 100 metros de comprimento dividido em dez discretizações de 10 metros cada ($\Delta x=10$).

VII.1.3 - DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER

Uma resolução analítica das equações VII.1.1.4 e VII.1.1.6 sujeitas a função de alimentação VII.1.1.3 foi obtida adotando-se uma expansão em série de Fourier das variáveis Q e η da forma abaixo.

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.3.1}$$

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.3.2}$$

Observe-se que esta série corresponde à expansão da solução procurada na série das funções características do problema. O detalhamento matemático da expansão utilizada encontra-se no Apêndice I. Também é fácil constatar que esta representação em série de funções ortogonais é completa não deixando qualquer dúvida quanto às suas características de convergência.

Substituindo VII.1.3.1 e VII.1.3.2 em VII.1.1.4 e VII.1.1.6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n \cdot \pi}{a} \cdot \varphi_n(t) + f'_n(t) \right] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) = W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{a}\right) \cdot f(t) \quad \text{VII.1.3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_n(t) - \frac{n \cdot \pi \cdot \cos^2}{a} \cdot f_n(t) \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) = 0 \quad \text{VII.1.3.4}$$

Multiplicando VII.1.3.3 por $\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right)$ e integrando na direção x :

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n \cdot \pi}{a} \cdot \varphi_n(t) + f'_n(t) \right] \cdot \cos^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot dx =$$

$$= W_{\max} \cdot f(t) \cdot \int_0^a \left(1 - \frac{2 \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx \quad \text{VII.1.3.5}$$

$$\int_0^a \cos^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot dx = \frac{a}{2} \quad \text{VII.1.3.6}$$

$$\int_0^a \left(1 - \frac{2 \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot dx = \frac{2 \cdot a}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \left(1 - (-1)^n\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4 \cdot a}{n^2 \cdot \pi^2} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad \text{VII.1.3.7}$$

Como só interessa o valor significativo da integral, a variável n da série de Fourier só terá valores ímpares.

$$\left[\frac{n \cdot \pi}{a} \cdot \varphi_n(t) + f'_n(t) \right] \cdot \frac{a}{2} = \frac{4 \cdot a \cdot W_{\max}}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot f(t) \quad \text{VII.1.3.8}$$

Em VII.1.3.4 $\sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right)$ não é nulo em todos os pontos, desta forma :

$$\varphi'_n(t) - \frac{n \cdot \pi \cdot C_0^2}{a} \cdot f_n(t) = 0 \quad \text{VII.1.3.9}$$

Derivando VII.1.3.8 em relação ao tempo e substituindo em VII.1.3.9 :

$$f''_n(t) + \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot C_0^2}{a^2} f_n(t) = \frac{8 \cdot W_{\max}}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot f'(t) \quad \text{VII.1.3.10}$$

Com os valores iniciais $f_n(0) = f'_n(0) = 0$

$$\text{Fazendo } W_n^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot C_0^2}{a^2} \text{ e } A_n = \frac{8 \cdot W_{\max}}{n^2 \cdot \pi^2} \text{ e levando em}$$

VII.1.3.10 tem-se:

$$f''_n(t) + W_n^2 \cdot f_n(t) = A_n f'(t) \quad \text{VII.1.3.11}$$

$$f_n(0) = f'_n(0) = 0$$

É possível resolver VII.1.3.11 aplicando o operador Transformada de Laplace a esta equação.

$$\mathcal{L}\{f''_n(t) + W_n^2 \cdot f_n(t)\} = A_n \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} \quad \text{VII.1.3.12}$$

Pela linearidade do operador Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f''_n(t) + W_n^2 \cdot f_n(t)\} = \mathcal{L}\{f''_n(t)\} + W_n^2 \cdot \mathcal{L}\{f_n(t)\}$$

Sejam $f_n^*(s)$ e $f^*(s)$ as Transformadas de Laplace de $f_n(t)$ e $f(t)$ respectivamente, recorrendo a uma tabela de Transformadas:

$$\mathcal{L}\{f''_n(t)\} = s^2 \cdot f_n^*(s) - s \cdot f_n(0) - f'_n(0) = s^2 \cdot f_n^*(s)$$

$$\mathcal{L}\{f_n(t)\} = f_n^*(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot f^*(s) - f(0) = s \cdot f^*(s)$$

Em VII.1.3.12 :

$$s^2 \cdot fn^* + Wn^2 \cdot fn^* = An \cdot f^* \cdot s \quad \text{VII.1.3.13}$$

$$(s^2 + Wn^2) \cdot fn^* = An \cdot f^* \cdot s$$

$$fn^* = \frac{An}{Wn} \cdot \frac{s \cdot Wn}{s^2 + Wn^2} \cdot f^* \quad \text{VII.1.3.14}$$

Finalmente observa-se que VII.1.3.14 é o produto de duas Transformadas de Laplace:

$$fn^* = \frac{An}{Wn} \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\sin(Wn \cdot t)\}$$

Aplicando o Operador Convolução :

$$fn(t) = \frac{An}{Wn} \cdot \int_0^t f'(\tau) \cdot \sin\{Wn \cdot (t-\tau)\} \cdot d\tau \quad \text{VII.1.3.15}$$

Para $0 \leq t \leq T$

$$f(\tau) = \frac{\tau}{T} \quad \Rightarrow \quad f'(\tau) = \frac{1}{T}$$

$$fn(t) = \frac{An}{Wn \cdot T} \cdot \int_0^t \sin\{Wn \cdot (t-\tau)\} \cdot d\tau$$

$$fn(t) = \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot (1 - \cos(Wn \cdot t)) \quad \text{VII.1.3.16}$$

Para $t > T$

$$f_n(t) = \frac{An}{Wn \cdot T} \cdot \int_0^T \sin(Wn \cdot (t-\tau)) d\tau + \\ + \frac{An}{Wn} \cdot \int_T^t f'(\tau) \cdot \sin(Wn \cdot (t-\tau)) d\tau \quad \text{VII.1.3.17}$$

Para $t > T$ $f(\tau) = 1 \Rightarrow f'(\tau) = 0$

$$f_n(t) = \frac{An}{Wn \cdot T} \cdot \int_0^T \sin(Wn \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot \left[\cos(Wn \cdot (t-T)) - \cos(Wn \cdot t) \right] \quad \text{VII.1.3.18}$$

Substituindo VII.1.3.16 e VII.1.3.18 em VII.1.3.2 :

Para $0 \leq t \leq T$:

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot \left[1 - \cos(Wn \cdot t) \right] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.3.19}$$

Para $t > T$

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot \left[\cos(Wn \cdot (t-T)) - \cos(Wn \cdot t) \right] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \\ \text{VII.1.3.20}$$

Levando VII.1.3.16 e VII.1.3.18 em VII.1.3.9 e integrando em relação ao tempo obtém-se $\varphi_n(t)$.

Para $0 \leq t \leq T$

$$\varphi_n(t) = \frac{n \cdot \pi \cdot Co^2}{a} \cdot \int_0^t \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot (1 - \cos(Wn \cdot t)) \cdot dt$$

$$\varphi_n(t) = \frac{An \cdot a}{n \cdot \pi \cdot T} \cdot \left(t - \frac{\sin(Wn \cdot t)}{Wn} \right) \quad \text{VII.1.3.21}$$

Para $t > T$

$$\varphi_n(t) = \frac{n \cdot \pi \cdot Co^2}{a} \cdot \left[\int_0^T \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot (1 - \cos(Wn \cdot t)) \cdot dt + \right. \\ \left. + \int_T^t \frac{An}{Wn^2 \cdot T} \cdot (\cos(Wn(t-T)) - \cos(Wn \cdot t)) \cdot dt \right]$$

$$\varphi_n(t) = \frac{An \cdot a}{n \cdot \pi} \left(1 + \frac{\sin(Wn \cdot (t-T))}{Wn \cdot T} - \frac{\sin(Wn \cdot t)}{Wn \cdot T} \right) \quad \text{VII.1.3.22}$$

Levando VII.1.3.21 e VII.1.3.22 em VII.1.3.1 obtém-se :

Para $0 \leq t \leq T$:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{An \cdot a}{n \cdot \pi \cdot T} \cdot \left[t - \frac{\sin(Wn \cdot t)}{Wn} \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.3.23}$$

Para $t > T$:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{An \cdot a}{n \cdot \pi} \cdot \left[1 + \frac{\sin(Wn \cdot (t-T))}{Wn \cdot T} - \frac{\sin(Wn \cdot t)}{Wn \cdot T} \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.3.24}$$

VII.1.4 - ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES

Embora seja amplamente conhecida a característica de convergência das séries de funções ortogonais de Fourier fez-se

uma análise das séries obtidas visando comprovar a convergência das mesmas.

Substituindo os valores de W_n e A_n nas equações VII.1.3.19, VII.1.3.20, VII.1.3.23 e VII.1.3.24.

Para $0 \leq t \leq T$:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a^2}{n^4 \cdot \pi^4 \cdot T \cdot Co^2} \left[1 - \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot Co \cdot t}{a}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.4.1}$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a}{n^3 \cdot \pi^3} \left[\frac{t}{T} - \frac{a}{n \cdot \pi \cdot Co \cdot T} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot Co \cdot t}{a}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.4.2}$$

Para $t > T$:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a^2}{n^4 \cdot \pi^4 \cdot T \cdot Co^2} \left[\cos\left[\frac{n \cdot \pi \cdot Co}{a}(t-T) - \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot Co \cdot t}{a}\right)\right] \right] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.4.3}$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a}{n^3 \cdot \pi^3} \left[1 + \frac{a}{n \cdot \pi \cdot Co \cdot T} \cdot \sin\left[\frac{n \cdot \pi \cdot Co}{a} \cdot (t-T)\right] - \frac{a}{n \cdot \pi \cdot Co \cdot T} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot Co \cdot t}{a}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.1.4.4}$$

Em todas as equações acima as funções seno e coseno variam de 0 a 1 para qualquer valor de n . Analisaremos as outras parcelas da série que não são função seno ou coseno.

Em VII.1.4.1 a parcela $\frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a^2}{n^4 \cdot \pi^4 \cdot T \cdot Co^2}$ tem valores constantes exceto o n , logo esta parcela tende para zero quando n tende para o infinito na razão $\frac{1}{n^4}$. Como as outras parcelas da série

são multiplicadas por $\frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a^2}{n^4 \cdot \pi^4 \cdot T \cdot Co^2}$ é fácil concluir que a série converge.

Na equação VII.1.4.2 a parcela $\frac{t}{T}$ varia de 0 a 1 pois esta equação só é válida no intervalo $0 \leq t \leq T$ e a parcela $\frac{8 \cdot W_{\max} \cdot a}{n^3 \cdot \pi^3}$ que conta com os valores W_{\max} , a e π constantes tende a zero quando n tende ao infinito a razão $\frac{1}{n^3}$ fazendo com que a série seja convergente.

As equações VII.4.1.3 e VII.4.1.4 convergem pelos mesmos motivos das equações VII.1.4.1 e VII.4.1.2 respectivamente.

As equações VII.1.3.19 , VII.1.3.20 , VII.1.3.23 e VII.1.2.24 possibilitam o cálculo das vazões e níveis. Tal equacionamento foi aplicado na elaboração de um programa de computador para um tanque com 100 (cem) metros de comprimento e discretizações de 5 metros ($\Delta x = 5.00$) e intervalos de tempo Δt igual a 0.505 segundos.

O valor de n da série de Fourier foi obtido por tentativa para os valores de $W_{\max}(1.0 \text{ m/s})$, $a(100 \text{ m})$, $T(111.06 \text{ s})$ e $Co(9.9045 \text{ m/s})$ usados no exemplo em questão. O valor de n encontrado foi $n = 25$.

VII.1.5 - AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DELTA (δ) DO MODELO MATEMÁTICO DO CAPÍTULO IV.

Como foi visto no item V.5, as parcelas que não estão representadas por derivadas totais nas equações (V.4.15) e (V.4.18), (celeridade, derivada parcial da vazão e velocidades

nos orifícios de entrada/saída) serão avaliadas na integração através de uma aproximação secundária com o coeficiente de ponderação delta (δ).

O valor deste coeficiente para o exemplo de alimentação em questão será avaliado comparando-se a integração da equação da velocidade nos orifícios (VII.1.1.3) com a aproximação secundária da velocidade ponderada com o coeficiente δ usado no modelo matemático descrito no capítulo V onde supõem-se conhecidos os valores discretos da velocidade nos orifícios ao longo do tempo.

Para $0 \leq t \leq T$:

Característica Positiva

1) Integração da equação VII.1.1.3:

$$\int_{t_A}^{t_P} W(x, t) dt = \int_{t_A}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{L}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt$$

$$\int_{t_A}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{L}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{L \cdot T} \cdot \left[L \cdot t_A - 2 \cdot x_A \cdot t_A + L \cdot \frac{\Delta t}{2} - \right.$$

$$\left. - x_A \cdot \Delta t - Co \cdot t_A \cdot \Delta t - \frac{2}{3} \cdot Co \cdot \Delta t^2 \right] \quad \text{VII.1.5.1}$$

2) Ponderação com o coeficiente δ :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_P} W(x, t) dt &= \int_{t_A}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{L}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt = \\ &= \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{L \cdot T} \cdot \left[L \cdot (\delta \cdot t_A + (1-\delta) \cdot t_P) - 2 \cdot (\delta \cdot x_A \cdot t_A + (1-\delta) \cdot x_P \cdot t_P) \right] \end{aligned}$$

$$\int_{t_A}^{t_P} W(x, t) dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\mathcal{L} \cdot T} \left[\mathcal{L} \cdot t_A + \mathcal{L} \cdot \Delta t \cdot (1 - \delta) - 2 \cdot x_A \cdot t_A - 2 \cdot (1 - \delta) \cdot x_A \cdot \Delta t - 2 \cdot (1 - \delta) \cdot t_A \cdot Co \cdot \Delta t - 2 \cdot (1 - \delta) \cdot Co \cdot \Delta t^2 \right] \quad \text{VII.1.5.2}$$

Igualando (VII.1.5.1) a (VII.1.5.2) para obtenção de δ :

$$\left(\frac{\mathcal{L}}{2} - x_A - Co \cdot t_A - Co \cdot \Delta t \right) \cdot \left(\delta - \frac{1}{2} \right) + \frac{Co \cdot \Delta t}{6} = 0$$

$$\left(\frac{\mathcal{L}}{2} - (x_A + Co \cdot (t_A + \Delta t)) \right) \cdot \left(\delta - \frac{1}{2} \right) + \frac{Co \cdot \Delta t}{6} = 0$$

$$|x_A + Co(t_A + \Delta t)| \leq \mathcal{L}$$

$$\left(\frac{\mathcal{L}}{2} - \mathcal{L} \right) \cdot \left(\delta - \frac{1}{2} \right) + \frac{Co \cdot \Delta t}{6} = 0$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{Co \cdot \Delta t}{3 \cdot \mathcal{L}}$$

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{Co \cdot \Delta t}{9 \cdot \mathcal{L}}$$

Temos que :

$$Co \cdot \Delta t = \Delta x \quad \text{e} \quad \frac{\Delta x}{\mathcal{L}} = \frac{1}{N} \quad \text{onde:}$$

N = número de discretizações

Logo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{9 \cdot N} \leq \delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot N}$$

$$\text{Para } N = 20 : \frac{1}{2} - \frac{1}{180} \leq \delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{60}$$

Característica Negativa:

1) Integração da equação VII.1.1.3:

$$\int_{t_B}^{t_P} W(x, t) dt = \int_{t_B}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\mathcal{L}} \right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt$$

$$\int_{t_B}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\ell}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \cdot \left[\ell \cdot t_B - 2 \cdot x_B \cdot t_B + \ell \cdot \frac{\Delta t}{2} - \right. \\ \left. - x_B \cdot \Delta t + Co \cdot t_B \cdot \Delta t + \frac{2}{3} \cdot Co \cdot \Delta t^2 \right] \quad \text{VII.1.5.3}$$

2) Ponderação com o coeficiente δ :

$$\int_{t_B}^{t_P} W(x, t) dt = \int_{t_B}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\ell}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt = \\ = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \cdot \left[\ell \cdot (\delta \cdot t_B + (1-\delta) \cdot t_P) - 2 \cdot (\delta \cdot x_B \cdot t_B + (1-\delta) \cdot x_P \cdot t_P) \right]$$

$$\int_{t_B}^{t_P} W(x, t) dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell \cdot T} \cdot \left[\ell \cdot t_B + \ell \cdot \Delta t \cdot (1-\delta) - 2 \cdot x_B \cdot t_B - \right. \\ \left. - 2 \cdot (1-\delta) \cdot x_B \cdot \Delta t + 2 \cdot (1-\delta) \cdot t_B \cdot Co \cdot \Delta t + 2 \cdot (1-\delta) \cdot Co \cdot \Delta t^2 \right] \quad \text{VII.1.5.4}$$

Igualando (VII.1.5.3) a (VII.1.5.4) para obtenção de δ :

$$\left(\frac{\ell}{2} - x_B + Co \cdot t_B + Co \cdot \Delta t \right) \cdot \left(\delta - \frac{1}{2} \right) - \frac{Co \cdot \Delta t}{6} = 0$$

$$\left(\frac{\ell}{2} - (x_B - Co \cdot (t_B + \Delta t)) \right) \cdot \left(\delta - \frac{1}{2} \right) - \frac{Co \cdot \Delta t}{6} = 0$$

$$|x_B - Co(t_B + \Delta t)| \leq \ell$$

$$\left(\frac{\ell}{2} + \ell \right) \cdot \left(\delta - \frac{1}{2} \right) - \frac{Co \cdot \Delta t}{6} = 0$$

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{Co \cdot \Delta t}{3 \cdot \ell}$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{Co \cdot \Delta t}{9 \cdot \ell}$$

Substituindo $\frac{Co \cdot \Delta t}{\ell} = \frac{1}{N}$ tem-se:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot N} \leq \delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{9 \cdot N}$$

$$\text{Para } N = 20 : \frac{1}{2} - \frac{1}{60} \leq \delta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{180}$$

Para $t > T$:

1) Integração da equação VII.1.1.3:

$$\int_{t_{A,B}}^{t_P} W(x,t) dt = \int_{t_{A,B}}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\ell}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt$$

$$\int_{t_{A,B}}^{t_P} W_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\ell}\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell} \cdot \left[\ell - 2 \cdot x_{A,B} + Co \cdot \Delta t \right]$$

VII.1.5.5

2) Ponderação com o coeficiente δ :

$$\int_{t_A}^{t_P} W(x,t) dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell} \cdot \left[\ell - 2 \cdot (\delta \cdot x_{A,B} + (1-\delta) \cdot x_P) \right]$$

$$\int_{t_A}^{t_P} W(x,t) dt = \frac{W_{\max} \cdot \Delta t}{\ell} \left[\ell - 2 \cdot x_{A,B} + 2 \cdot Co \cdot \Delta t (1-\delta) \right]$$

VII.1.5.6

Igualando (VII.1.5.5) a (VII.1.5.6) para obtenção de δ :

$$\ell - 2 \cdot x_{A,B} + 2 \cdot Co \cdot \Delta t \cdot (1 - \delta) = \ell - 2 \cdot x_{A,B} + Co \cdot \Delta t \quad \text{O}$$

$$2 \cdot Co \cdot \Delta t \cdot (1 - \delta) = Co \cdot \Delta t$$

$$\delta = \frac{1}{2}$$

Visando facilitar as etapas de cálculo optou-se por um único valor de δ , $\delta = \frac{1}{2}$, que satisfaz a todos os intervalos de variação de δ exigidos.

VII.1.6 - APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS.

Os valores das oscilações de nível no caso onde a alimentação da câmara possui variação apenas na direção longitudinal da câmara foram conseguidos através de equacionamento usando o Método das Características (item VII.1.2) e também do desenvolvimento em série de Fourier (item VII.1.3) empregando-se programas computacionais.

Dos resultados obtidos observou-se que:

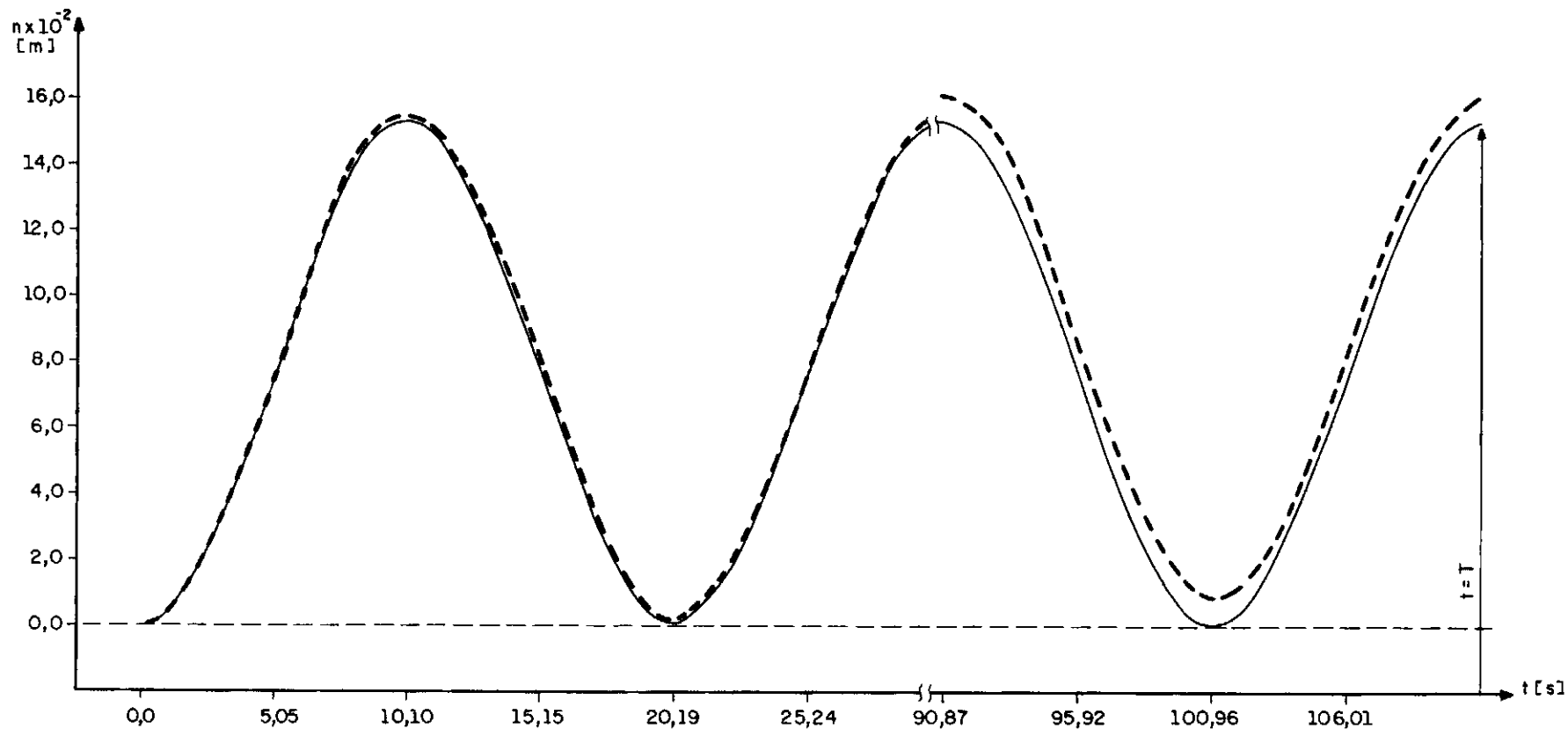
1) Como era de se esperar não apareceram vazões na direção transversal, assim como o valor das oscilações de nível só varia na direção longitudinal (FIG.VII.1.6.1).

2) Dois pontos equidistantes do eixo transversal central da câmara tem oscilação com mesmo valor e sinais opostos (FIG. VII.6.1).

3) A modelagem dos níveis é melhor do que da vazão, o que é normal em transitórios.

A figura FIG.VII.1.6.1 apresenta o perfil da linha d'água em um instante de tempo genérico.

Os valores das oscilações nos pontos de coordenadas $x=0$, $x= 20$ m e $x= 40$ m e y qualquer obtidos através dos dois métodos foram plotados e se encontram nos gráficos VII.1.6.1 a VII.1.6.6.



ESCALA=1/2

- SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.1.6.1 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO UNIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=0m$ E y QUALQUER PARA $t \geq 0$ E $t \leq T$.

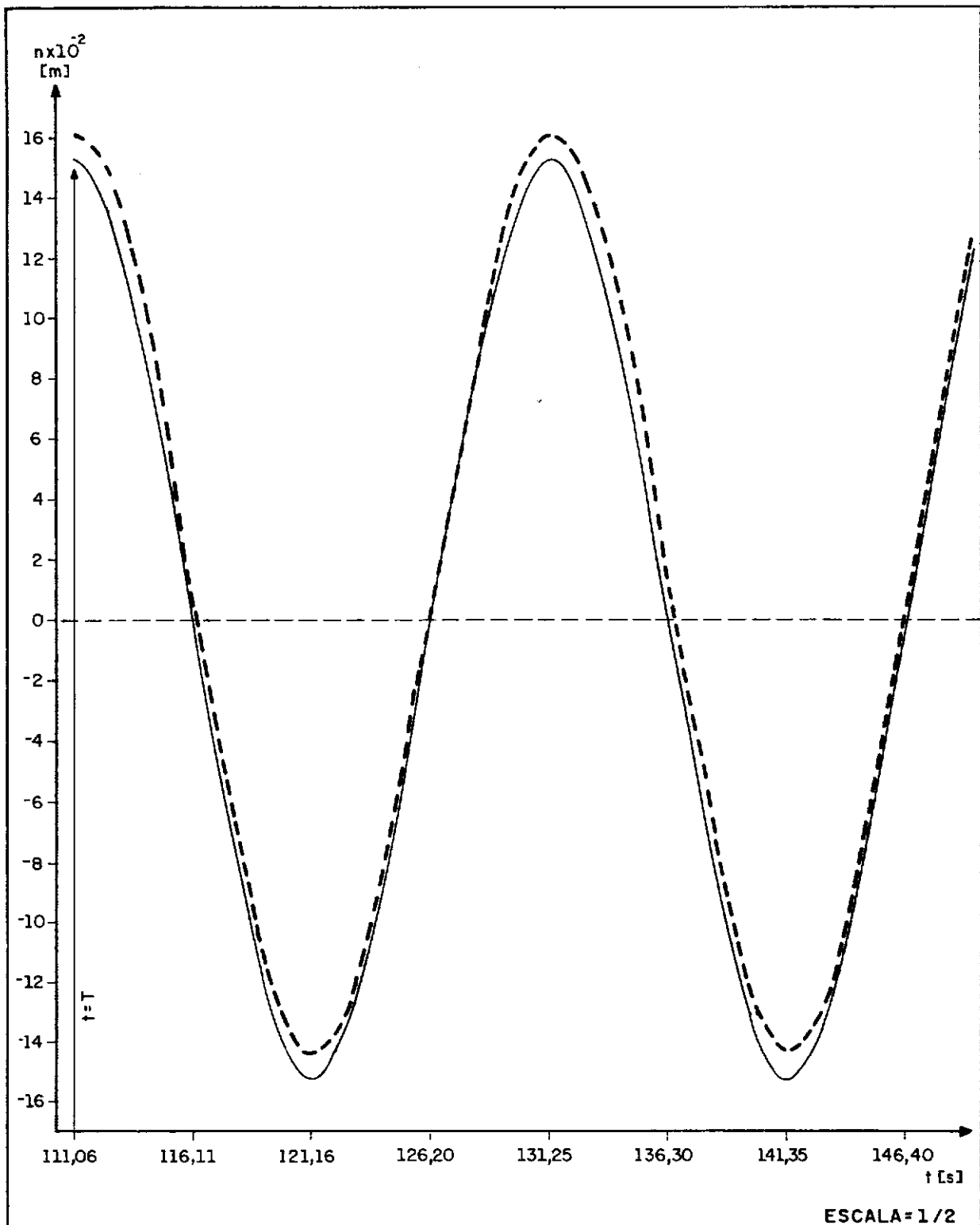
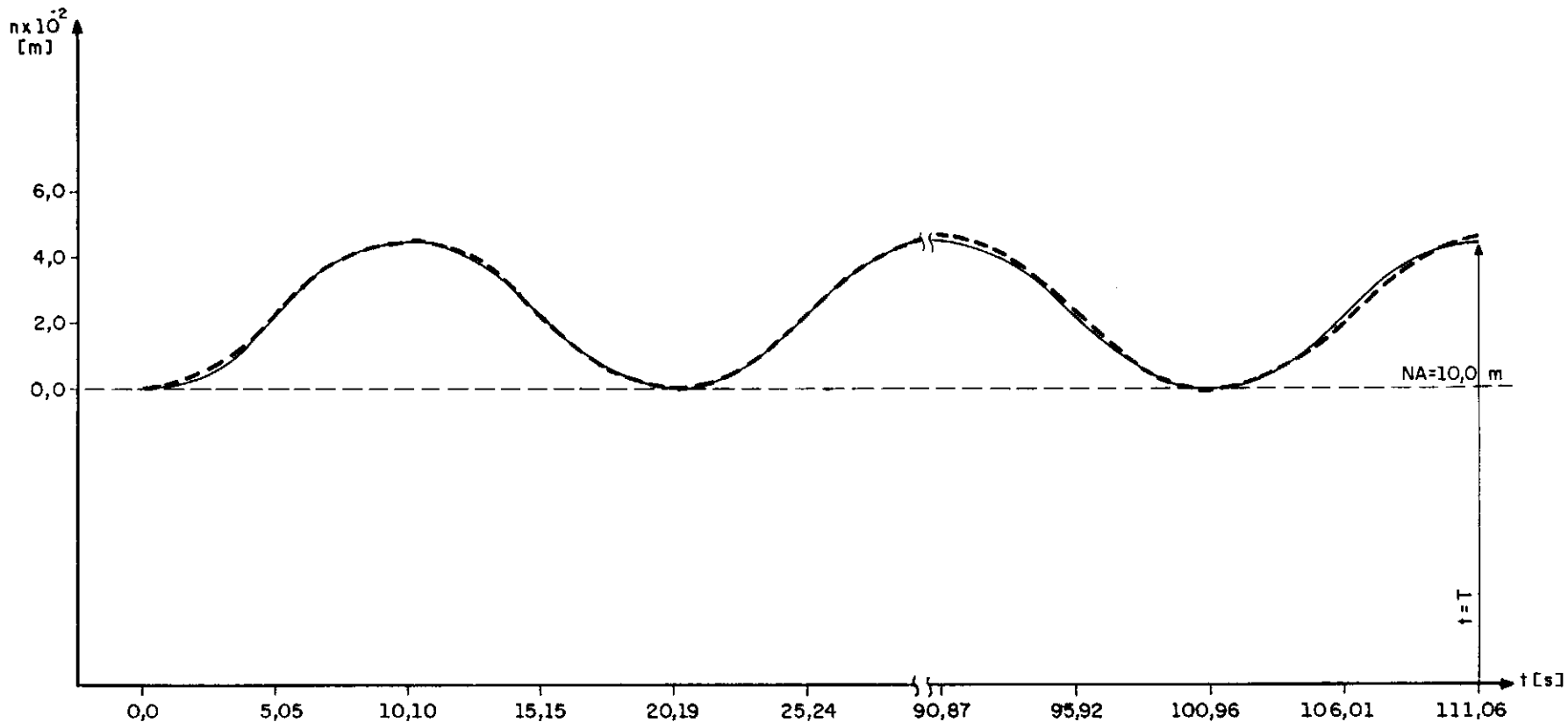
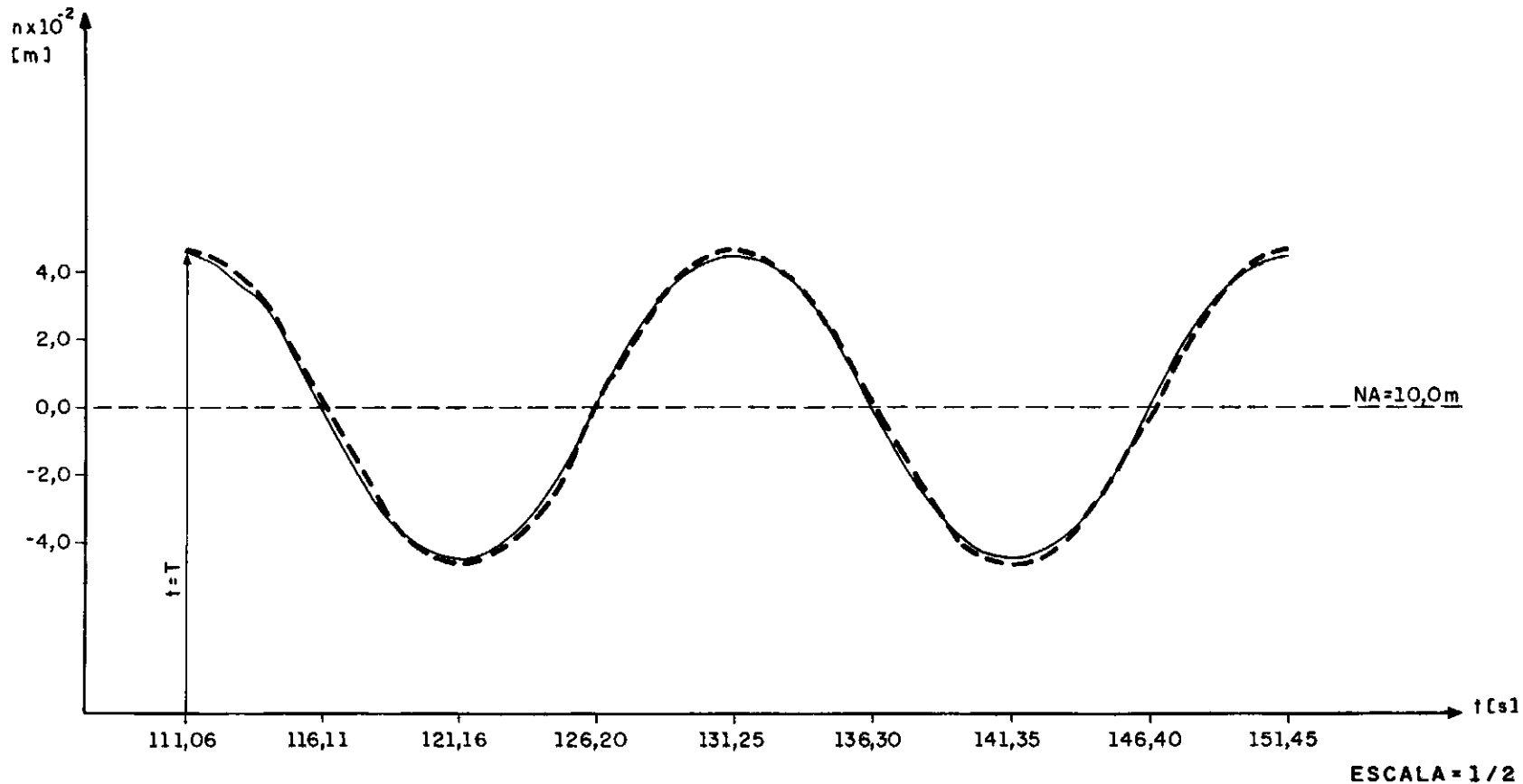


GRÁFICO VII.1.6.2 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO UNIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=0$ E y QUALQUER PARA $t>T$.



- SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.1.6.3 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO UNIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=40$ m E y QUALQUER PARA $0 \leq t \leq T$.



— SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.

- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.6.1.4 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO UNIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=40m$ E y QUALQUER PARA $t > T$.

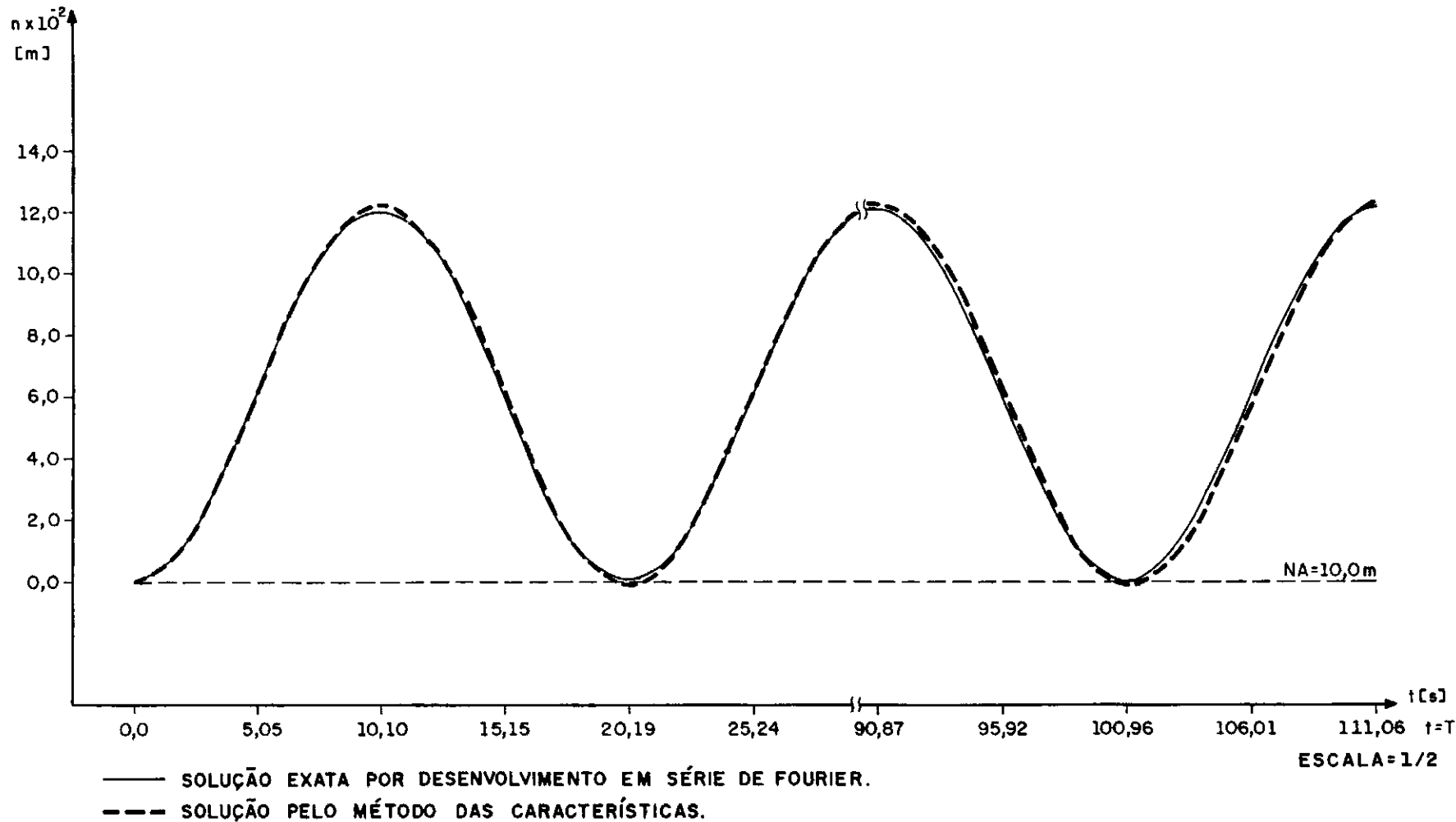


GRÁFICO VII.6.1.5 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO UNIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=20\text{m}$ E y QUALQUER PARA $0 \leq t \leq T$.

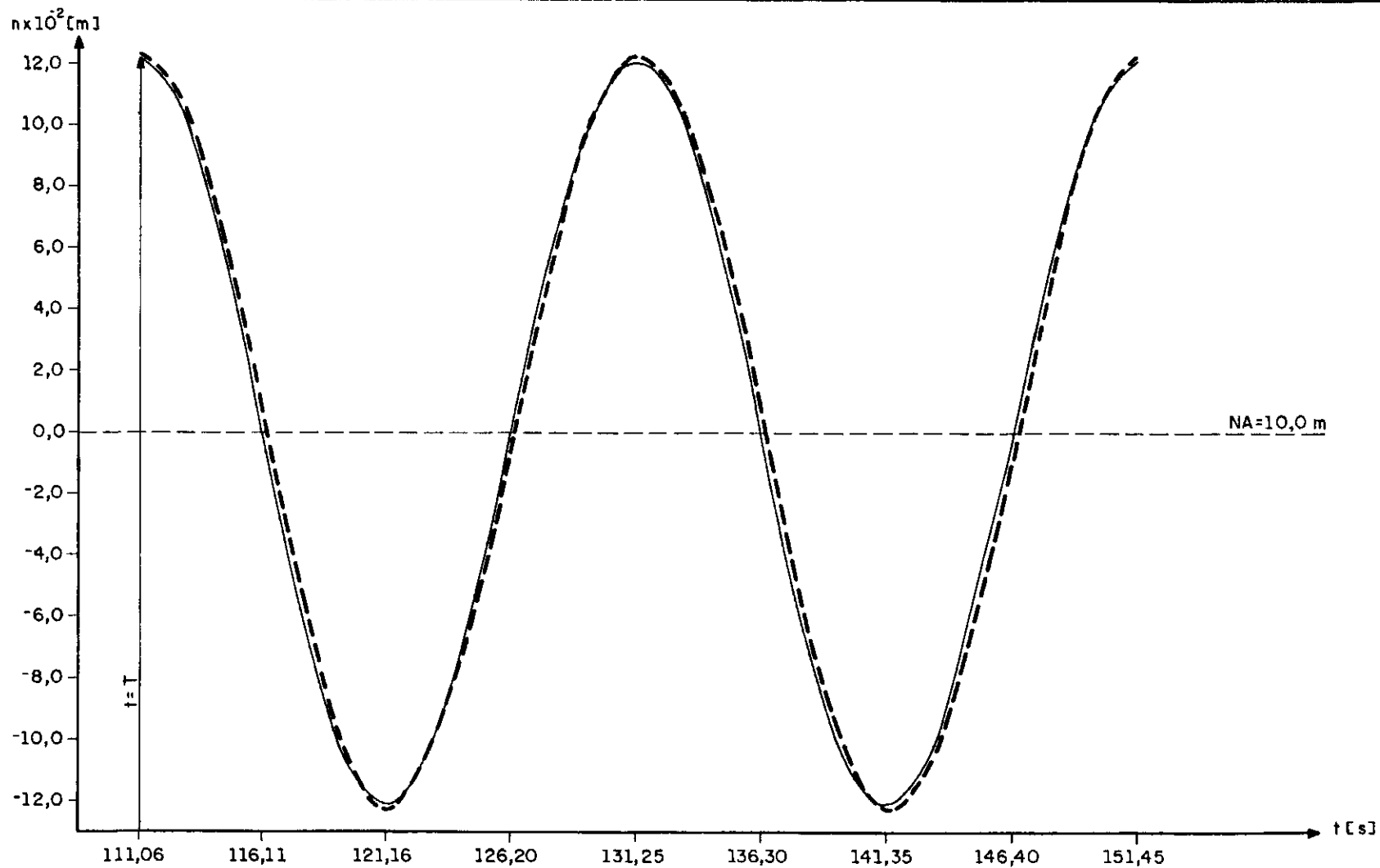


GRÁFICO VII.6.1.6 - PERTUBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO UNIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x = 20$ m E QUALQUER PARA $t > T$.

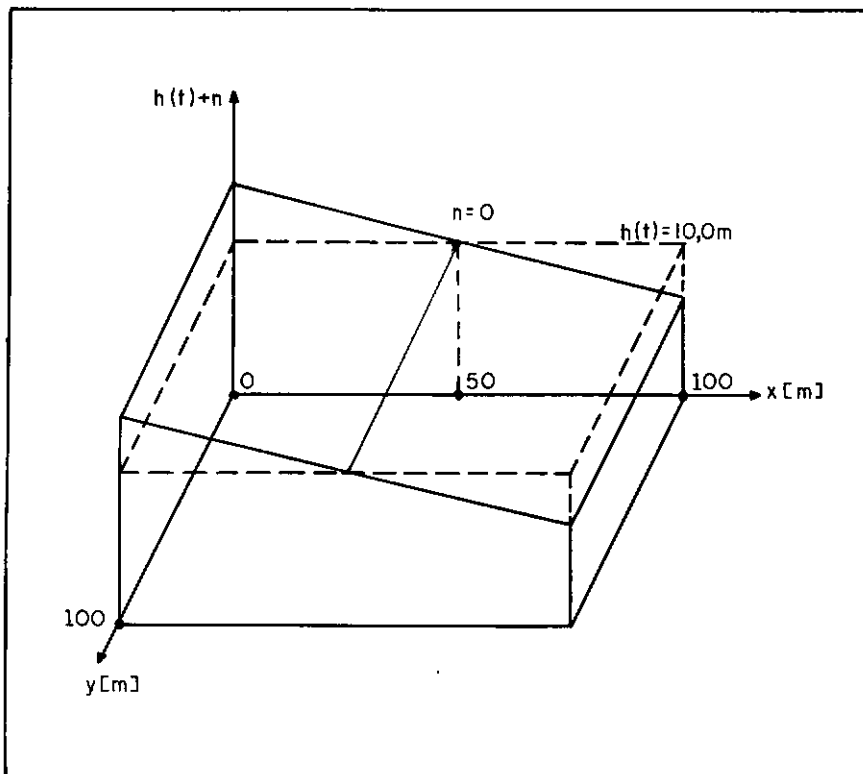


FIG.VII.1.6.1 - Perfil da linha d'água em um instante de tempo.

VII.2 - EXEMPLO DE ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BI-DIMENSIONAL

Ainda visando fornecer dados para checar a eficiência do programa descrito no capítulo VI foi elaborada uma função de enchimento com variação nas direções x e y do tanque. As equações utilizadas foram as da continuidade e do movimento na direção x e na direção y separadamente (equações VII.2.1 a VII.2.3). A variação bi-dimensional provoca fluxo no interior do tanque nas duas direções.

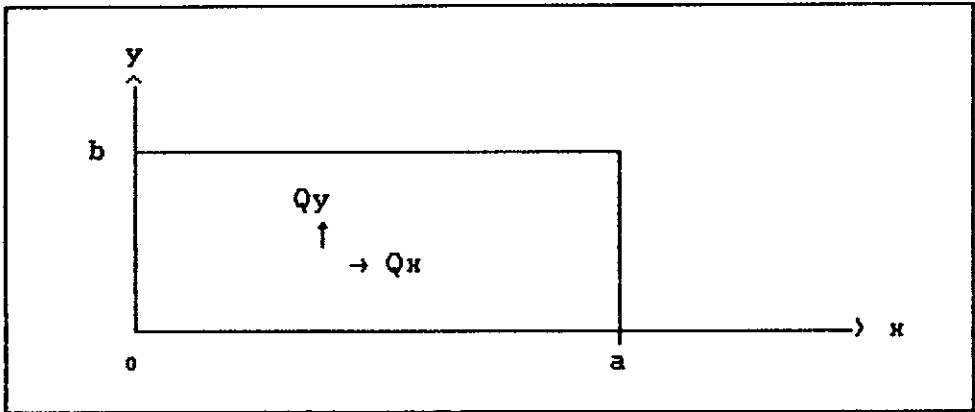


FIG.VII.2.1 - Eixos Coordenados considerados

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = W(x, y, t) \quad \text{Equação da Continuidade}$$

VII.2.1

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + C_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{Equação do movimento na direção } x$$

VII.2.2

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} + C_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \text{Equação do movimento na direção } y$$

VII.2.3

$$W(x, y, t) = \frac{W_{\max}}{a \cdot b} \cdot (a - 2 \cdot x) \cdot (b - 2 \cdot y) \cdot f(t) \quad \text{Função de Enchimento}$$

VII.2.4

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 1 & \text{para } t > T \end{cases}$$

onde : Q_x = Fluxo de vazão por unidade de largura na direção x ($m^2/s/m$).

Q_y = Fluxo de vazão por unidade de comprimento na direção y ($m^2/s/m$).

η = perturbação do nível de água em relação ao nível de água médio (m)

As equações VII.2.1 , VII.2.2 e VII.2.3 estão sujeitas

Condições de Contorno :

$$Q_x(x=0, y, t) = Q_x(x=a, y, t) = 0$$

$$Q_y(x, y=0, t) = Q_y(x, y=b, t) = 0$$

Condições iniciais :

$$Q_x(x, y, t=0) = Q_y(x, y, t=0) = 0$$

$$\eta(x, y, t=0) = 0$$

Adotando uma expansão em série de Fourier das incógnitas

Q_x, Q_y e η :

$$Q_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{xmn}(t) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.5}$$

$$Q_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ymn}(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.2.6}$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.7}$$

A explicação matemática para as séries acima é análoga a existente no Apêndice I, e da mesma forma como foi dito no item VII.1.1 a representação em séries de funções ortogonais é completa e não deixa qualquer dúvida quanto às suas características de convergência.

Levando VII.2.5, VII.2.6 e VII.2.7 nas equações da continuidade e do movimento :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \varphi_{xmn}(t) + \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \varphi_{ymn}(t) + f'_{mn}(t) \right] \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \\ = W(x, y, t) \quad \text{VII.2.8}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{xmn}(t) - Co^2 \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot f_{mn}(t) \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) = 0$$

VII.2.9

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{ymn}(t) - Co^2 \cdot \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot f_{mn}(t) \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) = 0$$

VII.2.10

Nas equações VII.2.9 e VII.2.10 as parcelas $\sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right)$, $\cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right)$, $\sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$ e $\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$ não são nulas em todos os pontos, logo:

$$\varphi'_{xmn}(t) = \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot Co^2 \cdot f_{mn}(t) \quad \text{VII.2.11}$$

$$\varphi'_{ymn}(t) = \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot Co^2 \cdot f_{mn}(t) \quad \text{VII.2.12}$$

Multiplicando VII.2.8 por $\cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$ e integrando no plano x-y :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \varphi_{xmn}(t) + \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \varphi_{ymn}(t) + f'_{mn}(t) \right] \cdot$$

$$\int_0^a \int_0^b \cos^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot dx dy =$$

$$\int_0^a \int_0^b \frac{W_{\max}}{a \cdot b} \cdot (a-2 \cdot x) \cdot (b-2 \cdot y) \cdot f(t) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) dx dy$$

VII.2.13

onde:

$$\int_0^a \int_0^b \frac{W_{\max}}{a \cdot b} \cdot (a-2x) \cdot (b-2y) \cdot f(t) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) dx dy =$$

$$= \frac{W_{\max}}{a \cdot b} \cdot f(t) \cdot \frac{4 \cdot a^2 \cdot b^2}{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4} \cdot \left[1 - (-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} \right]$$

VII.2.14

Fazendo uma análise dos índices m e n na equação

VII.2.14:

Para : $m=\text{par}$ e $n=\text{ímpar}$:

$$\cdot \left[1 - (-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} \right] = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$m=\text{par}$ e $n=\text{par}$:

$$\cdot \left[1 - (-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} \right] = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

$m=\text{ímpar}$ e $n=\text{par}$:

$$\cdot \left[1 - (-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} \right] = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$m=\text{ímpar}$ e $n=\text{ímpar}$:

$$\cdot \left[1 - (-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} \right] = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Como só interessa o valor significativo da integral, as variáveis n e m da série de Fourier só terão valores ímpares.

Desta forma, a equação VII.2.14 pode ser escrita como sendo:

$$\int_0^a \int_0^b \frac{W_{\max}}{a \cdot b} \cdot (a-2x) \cdot (b-2y) \cdot f(t) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) dx dy =$$

$$= \frac{16 \cdot a \cdot b}{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4} \cdot W_{\max} \cdot f(t) \quad \text{VII.2.15}$$

Ainda na equação VII.2.13 :

$$\int_0^a \cos^2\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \quad \text{VII.2.16}$$

$$\int_0^b \cos^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) dy = \frac{b}{2} \quad \text{VII.2.17}$$

Provando que as funções são ortogonais:

$$\int_0^a \cos\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx = \int_0^a \frac{m_1}{m_2} \cdot \sin\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx$$

$$\int_0^a \cos\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx = \frac{m_1}{m_2} \int_0^a \frac{m_1}{m_2} \cdot \cos\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx$$

$$\int_0^a \cos\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx = \frac{m_1^2}{m_2^2} \int_0^a \cos\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx$$

Logo para $m_1 \neq m_2$ $\int_0^a \cos\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) dx = 0$, o que

demonstra serem as funções ortogonais.

Levando as equações VII.2.15, VII.2.16 e VII.2.17 em VII.2.13 vem:

$$\left[\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \varphi_{xmn}(t) + \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \varphi_{ymn}(t) + f''_{mn}(t) \right] \cdot \frac{a \cdot b}{4} = \frac{16 \cdot a \cdot b}{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4} \cdot W_{\max} \cdot f(t)$$

VII.2.18

Derivando VII.2.18 em relação ao tempo :

$$\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \varphi'_{xmn}(t) + \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \varphi'_{ymn}(t) + f'''_{mn}(t) = \frac{64 \cdot W_{\max}}{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4} \cdot f'(t)$$

VII.2.19

Levando VII.2.11 e VII.2.12 em VII.2.19 :

$$f'''_{mn}(t) + \left[\frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2} \right] \cdot Co^2 \cdot f_{mn}(t) = \frac{64 \cdot W_{\max}}{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4} \cdot f'(t) \quad \text{VII.2.20}$$

$$\text{fazendo : } W_{mn}^2 = Co^2 \cdot \left[\frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2} \right] \quad \text{e} \quad A_{mn} = \frac{64 \cdot W_{\max}}{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4}$$

e substituindo em VII.2.20 :

$$f''_{mn}(t) + W_{mn}^2 \cdot f_{mn}(t) = A_{mn} \cdot f'(t) \quad \text{VII.2.21}$$

$$\text{sujeito a : } f_{mn}(0) = f'_{mn}(0) = 0 \quad f(0) = 0$$

É possível resolver VII.2.21 pelo Método das

Transformadas de Laplace

Sejam $f_{mn}^*(s)$ e $f^*(s)$ as transformadas de Laplace de $f_{mn}(t)$ e $f(t)$ respectivamente e tomando a transformada de ambos os membros da equação VII.2.21 :

$$\mathcal{L}\{f''_{mn}(t) + W_{mn}^2 \cdot f_{mn}(t)\} = \mathcal{L}\{A_{mn} \cdot f'(t)\} \quad \text{VII.2.22}$$

Pela linearidade do Operador Transformada de Laplace

temos que :

$$\mathcal{L}\{f''_{mn}(t)\} + W_{mn}^2 \cdot \mathcal{L}\{f_{mn}(t)\} = A_{mn} \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} \quad \text{VII.2.23}$$

Da tabela de Transformadas :

$$\mathcal{L}\{f''_{mn}(t)\} = s^2 \cdot f_{mn}^*(s) - s \cdot f_{mn}(0) - f'_{mn}(0) = s^2 \cdot f_{mn}^*$$

$$\mathcal{L}\{f_{mn}(t)\} = f_{mn}^*$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot f^* - f(0) = s \cdot f^*$$

Em VII.2.2.3 :

$$(s^2 + W_{mn}^2) \cdot f_{mn}^* = A_{mn} \cdot s \cdot f^*$$

$$f_{mn}^* = A_{mn} \cdot \frac{s}{(s^2 + W_{mn}^2)} \cdot f^* \quad \text{VII.2.24}$$

É fácil observar que a equação VII.2.24 é o produto de duas Transformadas de Laplace a saber :

$$f_{mn}^* = \frac{A_{mn}}{W_{mn}} \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\sin(W_{mn} \cdot t)\} \quad \text{VII.2.25}$$

Aplicando o operador convolução em VII.2.25 :

$$f_{mn}(t) = \frac{A_{mn}}{W_{mn}} \cdot \int_0^t f'(\tau) \cdot \sin(W_{mn}(t-\tau)) \cdot d\tau \quad \text{VII.2.26}$$

Para $0 \leq t \leq T$:

$$f(\tau) = \frac{\tau}{T} \quad \Rightarrow \quad f'(\tau) = \frac{1}{T}$$

$$f_{mn}(t) = \frac{A_{mn}}{W_{mn} \cdot T} \cdot \int_0^t \sin(W_{mn}(t-\tau)) d\tau$$

$$f_{mn}(t) = \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot (1 - \cos(W_{mn} \cdot t)) \quad \text{VII.2.27}$$

Para $t > T$

$$f(\tau) = \frac{1}{T} \Rightarrow f'(\tau) = 0$$

$$f_{mn}(t) = \frac{A_{mn}}{W_{mn}} \cdot \left[\int_0^T \frac{1}{T} \cdot \sin(W_{mn} \cdot (t-\tau)) d\tau + \int_T^t 0 \cdot \sin(W_{mn}(t-\tau)) d\tau \right]$$

$$f_{mn}(t) = \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left[\cos(W_{mn}(t-T)) - \cos(W_{mn} \cdot t) \right] \quad \text{VII.2.28}$$

Levando VII.2.27 e VII.2.28 em VII.2.11 e VII.2.12 obtem-se:

Para $0 \leq t \leq T$:

$$\varphi_{xmn}(t) = \frac{m \cdot n \cdot C_0^2 \cdot A_{mn}}{a \cdot W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left(t - \frac{\sin(W_{mn} \cdot t)}{W_{mn}} \right) \quad \text{VII.2.29}$$

$$\varphi_{ymn}(t) = \frac{n \cdot n \cdot C_0^2 \cdot A_{mn}}{b \cdot W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left(t - \frac{\sin(W_{mn} \cdot t)}{W_{mn}} \right) \quad \text{VII.2.30}$$

Para $t > T$:

$$\varphi_{xmn}(t) = \frac{m \cdot n \cdot C_0^2 \cdot A_{mn}}{a \cdot W_{mn}^3 \cdot T} \cdot (T \cdot W_{mn} + \sin(W_{mn}(t-T)) - \sin(W_{mn} \cdot t)) \quad \text{VII.2.31}$$

$$\varphi_{ymn}(t) = \frac{n \cdot n \cdot C_0^2 \cdot A_{mn}}{b \cdot W_{mn}^3 \cdot T} \cdot (T \cdot W_{mn} + \sin(W_{mn}(t-T)) - \sin(W_{mn} \cdot t)) \quad \text{VII.2.32}$$

Substituindo as equações VII.2.27 a VII.2.32 nas equações VII.2.5 , VII.2.6 e VII.2.7 chegamos à séries explícitas das incógnitas :

Para $0 \leq t \leq T$:

$$Q_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \cdot n}{a} \cdot \text{Co}^2 \cdot \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left(t - \frac{\sin(W_{mn} \cdot t)}{W_{mn}} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot n \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot n \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.33}$$

$$Q_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n}{b} \cdot \text{Co}^2 \cdot \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left(t - \frac{\sin(W_{mn} \cdot t)}{W_{mn}} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot n \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot n \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.34}$$

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left(1 - \cos(W_{mn} \cdot t) \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot n \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot n \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.35}$$

Para $t > T$:

$$Q_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m \cdot n}{a} \cdot \text{Co}^2 \cdot \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left[T \cdot W_{mn} + \sin(W_{mn}(t-T)) - \sin(W_{mn} \cdot t) \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot n \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot n \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.36}$$

$$Q_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n}{b} \cdot \text{Co}^2 \cdot \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left[T \cdot W_{mn} + \sin(W_{mn}(t-T)) - \sin(W_{mn} \cdot t) \right] \cdot \sin\left(\frac{n \cdot n \cdot y}{b}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot n \cdot x}{a}\right) \quad \text{VII.2.37}$$

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{W_{mn}^2 \cdot T} \cdot \left[\cos(W_{mn}(t-T)) - \cos(W_{mn} \cdot t) \right] \cdot \cos\left(\frac{m \cdot n \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot n \cdot y}{b}\right) \quad \text{VII.2.38}$$

A convergência de tais séries pode ser facilmente comprovada com uma análise similar a existente no item VII.1.4

deste capítulo.

As equações VII.2.33 a VII.2.38 possibilitam o cálculo das vazões e níveis. Tal equacionamento foi aplicado através de um programa de computador para um tanque com 100 (cem) metros de comprimento e 100 (cem) metros de largura onde foram realizadas discretizações de 5 metros nas duas direções ($\Delta x = \Delta y = 5 \text{ m}$) e intervalos de tempo da ordem de 0.5 segundos ($\Delta t = 0.505 \text{ s}$).

Para este exemplo também foi encontrado experimentalmente os valores de m e n da série de Fourier para os valores de $a(100 \text{ m})$, $b(100 \text{ m})$, $W_{\max}(1.0 \text{ m/s})$, $C_0(9.904 \text{ m/s})$, $T(111.06 \text{ s})$ e $n(3.141516)$ adotados tendo-se chegado aos valores $m = 25$ e $n = 25$ como satisfatórios.

O coeficiente de ponderação secundária delta (δ) foi encontrado fazendo uma integração da função de enchimento VII.2.4 e comparando o resultado com àquele obtido do uso de δ na mesma equação. Tal raciocínio é idêntico ao desenvolvido no item VII.1.5 sendo que no presente caso a integração é feita em uma direção e depois na outra. Como o desenvolvimento já foi explicado em VII.1.5 é desnecessária sua repetição. O resultado obtido foi $\delta = \frac{1}{2}$ como já era esperado.

VII.2.1 - APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os valores das oscilações de nível no caso onde a alimentação da câmara possui variação nas direções longitudinal e transversal do plano horizontal foram obtidas através do modelo matemático desenvolvido no Capítulo V e do equacionamento usando um desenvolvimento em série de Fourier empregando-se programas computacionais.

Dos resultados obtidos observou-se que:

1) Houve o aparecimento de vazões na direção transversal.

2) A oscilação do nível nos eixos é sempre nula.

3) Dois pontos equidistantes do eixo transversal e do contorno longitudinal da câmara ou equidistantes do eixo longitudinal e do contorno transversal da câmara tem oscilações com mesmo valor absoluto e sinais opostos.

4) A somatória das oscilações em um instante de tempo qualquer é nula.

5) No contorno o ajuste entre as curvas é prejudicado.

6) A modelagem dos níveis é melhor do que a da vazão.

A figura FIG.VII.2.1.1 apresenta o perfil da linha d'água em um instante de tempo.

Os valores das oscilações nos pontos de coordenadas: $x=0$ e $y=0$, $x=20$ m e $y=0$, $x=40$ m e $y=0$, $x=20$ m e $y=20$ m e $x=40$ m e $y=40$ m para $0 \leq t \leq T$ e $t > T$ encontram-se nos gráficos VII.2.1 a VII.2.10.

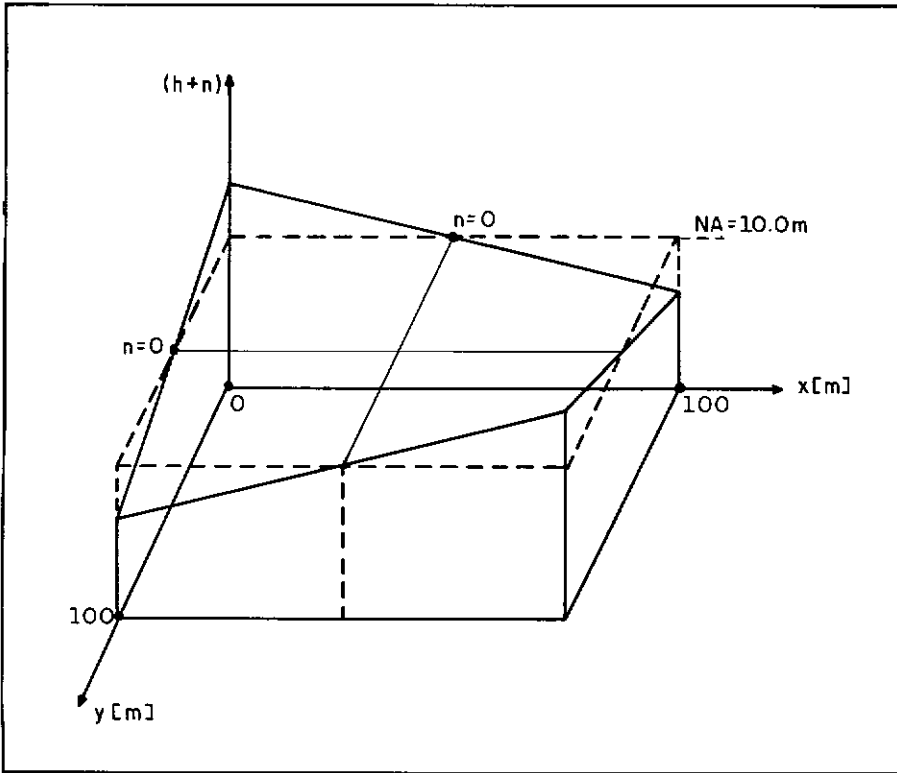


FIG.VII.2.1.1 - Perfil da linha d'água em um instante de tempo t .

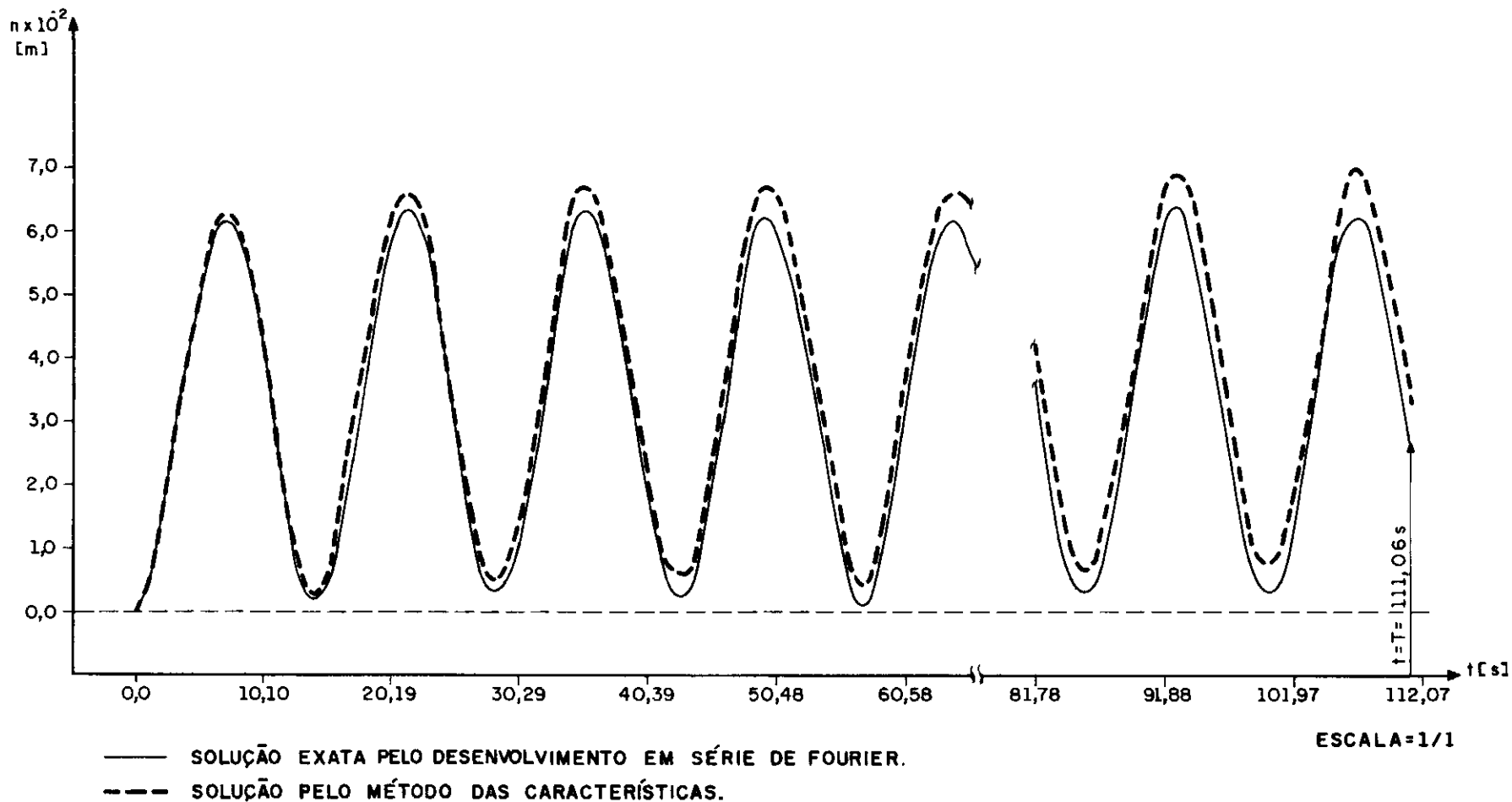
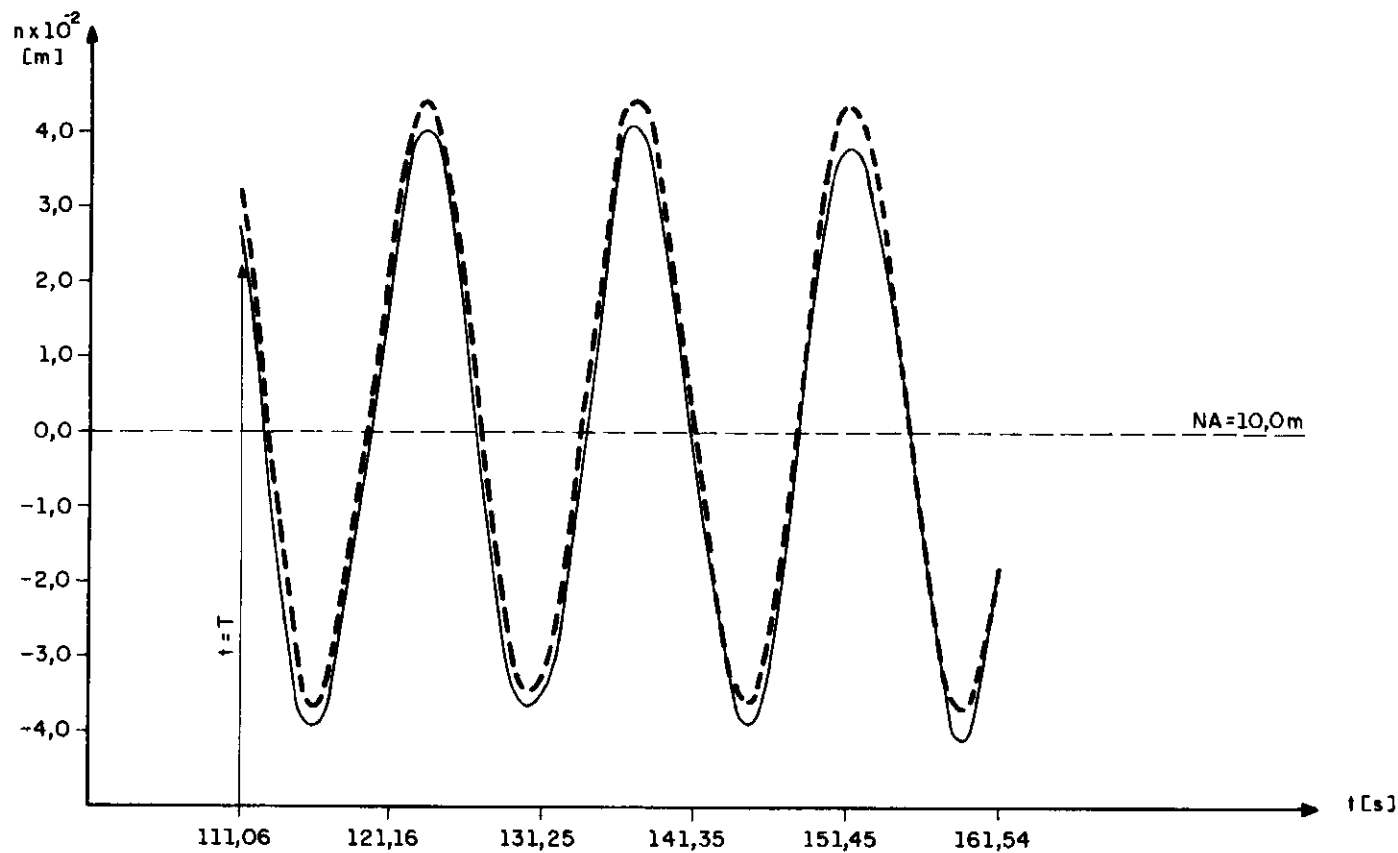


GRÁFICO VII.2.1.1 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=0$ E $y=0$ PARA $0 \leq t \leq T$.



- SOLUÇÃO EXATA PELO DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
 - - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

ESCALA=1/1

GRÁFICO VII.2.1.2 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=0$ E $y=0$ PARA $t>T$.

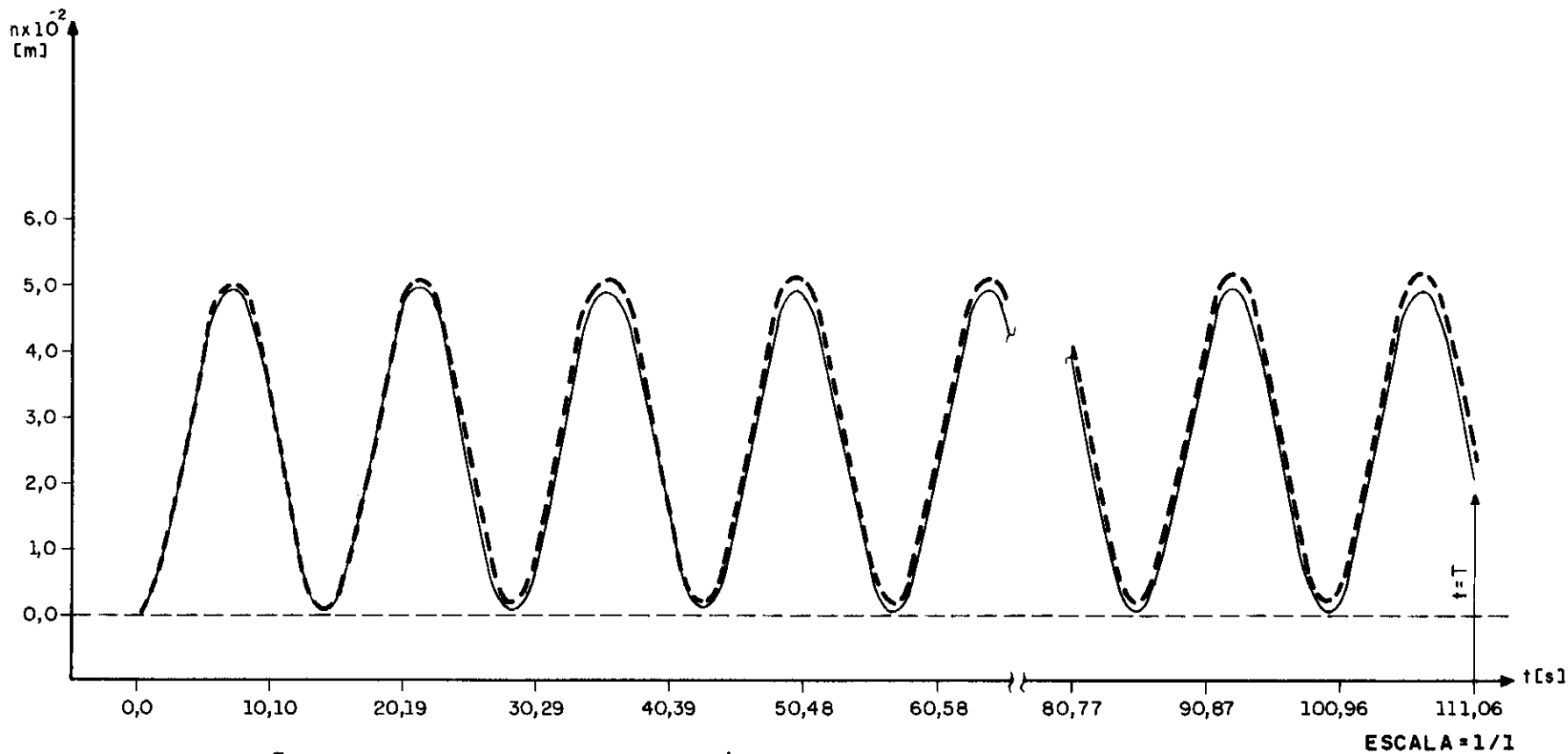
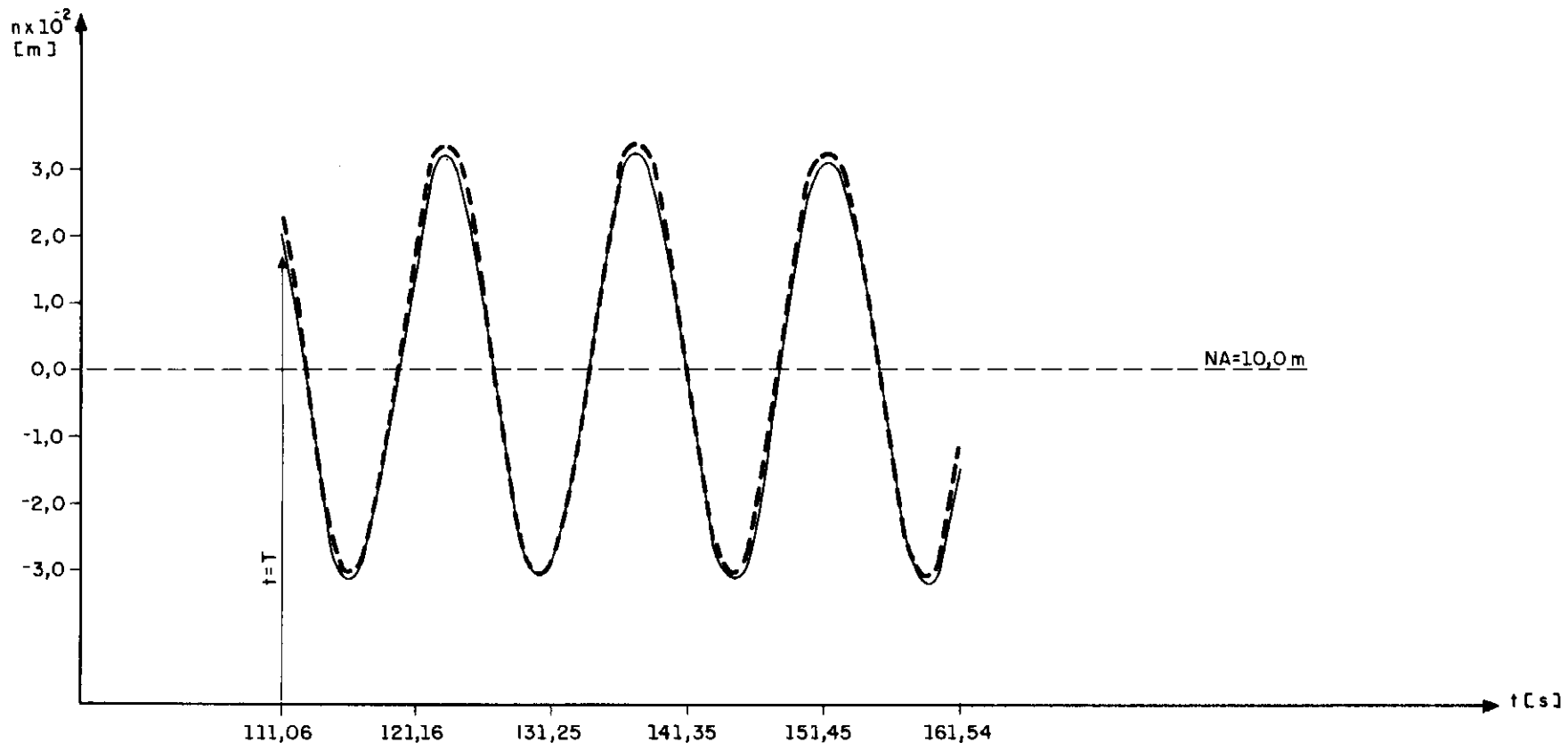


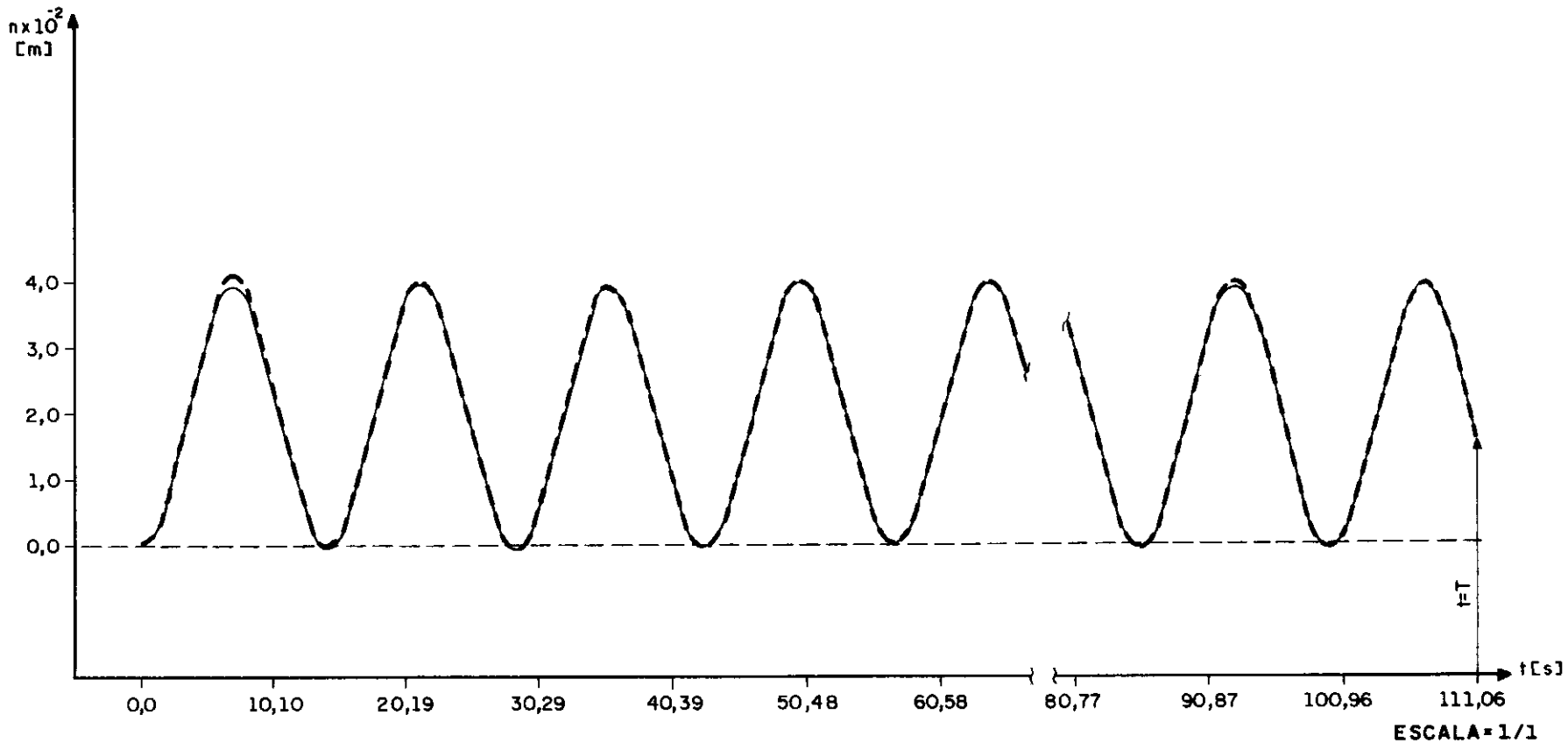
GRÁFICO VII.2.1.3 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=20\text{m}$ E $y=0$ PARA $0 \leq t \leq T$.



ESCALA = 1/1

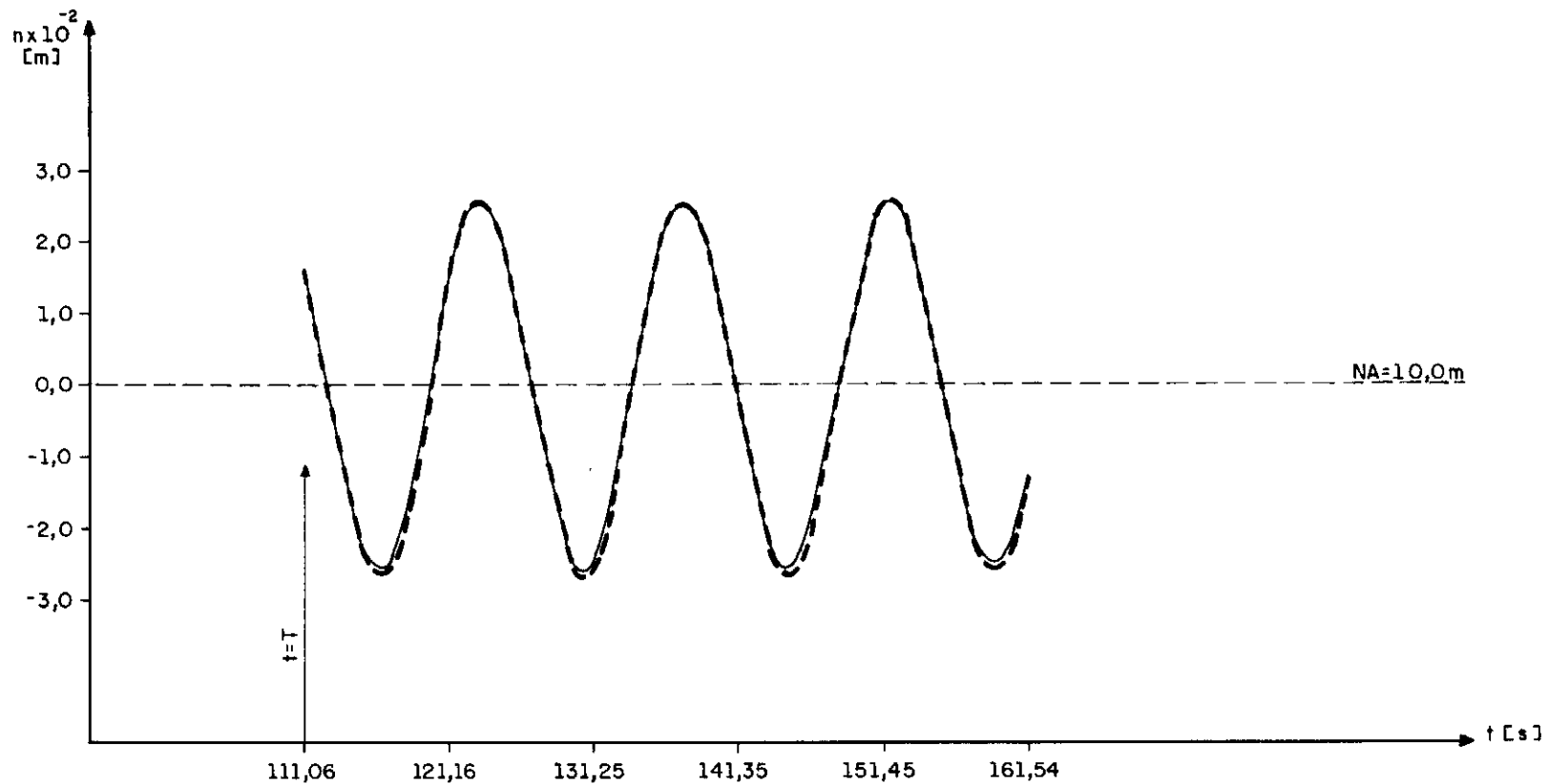
- SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.2.1.4 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=20m$ E $y=0$ PARA $t > T$.



— SOLUÇÃO EXATA PELO DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
 - - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

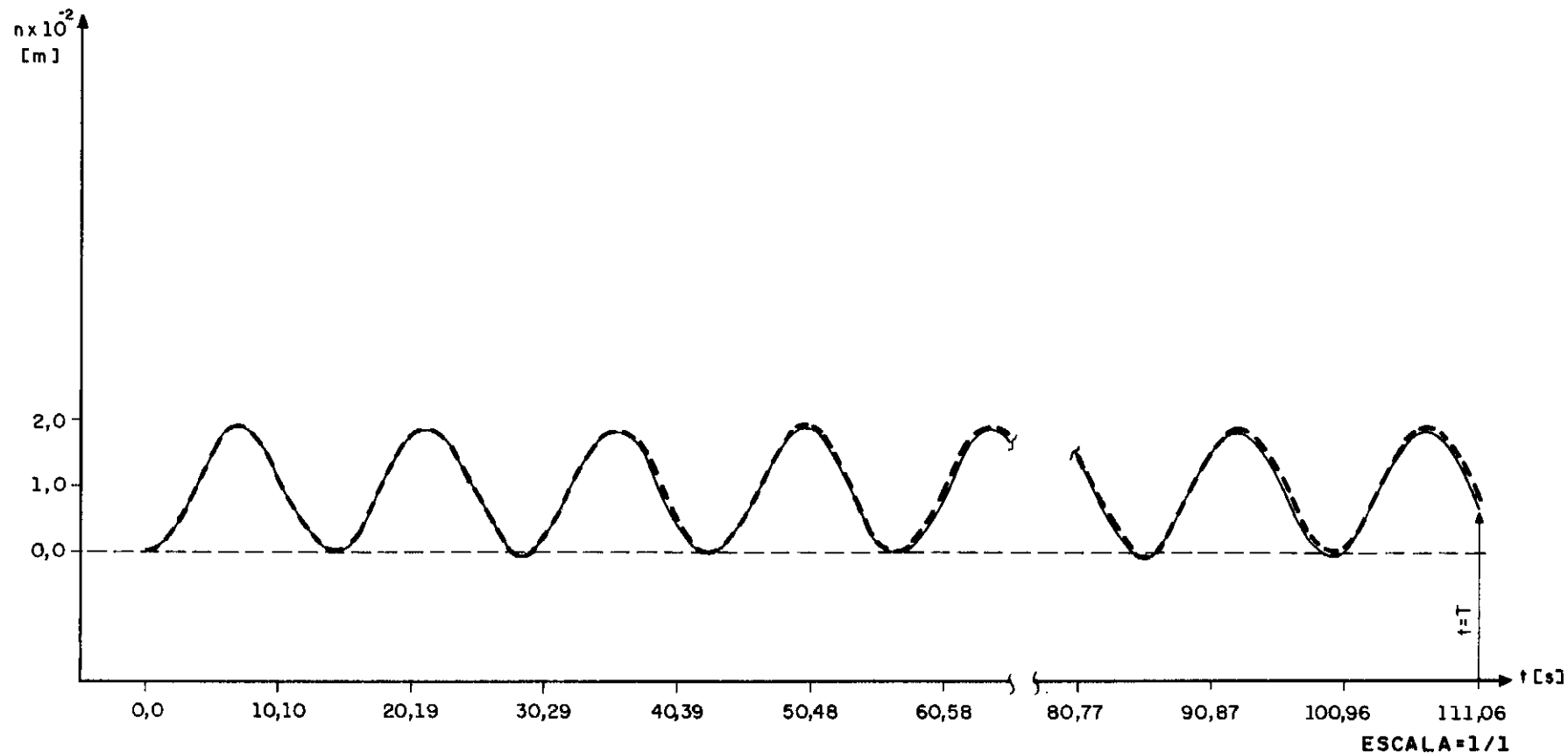
GRÁFICO VII.2.1.5 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=20\text{m}$ E $y=20\text{m}$ PARA $0 \leq t \leq T$



— SOLUÇÃO EXATA PELO DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
 - - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

ESCALA = 1/1

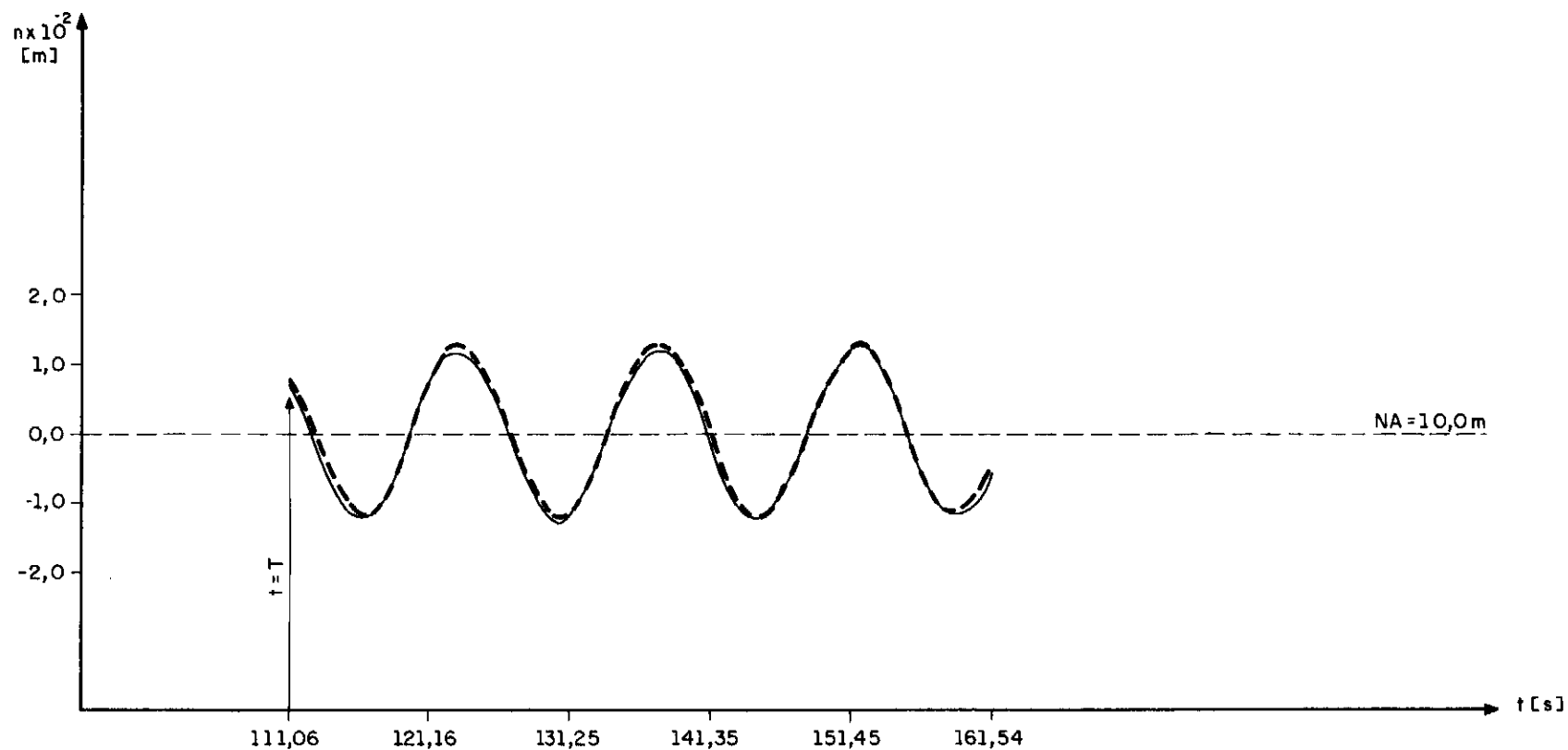
GRÁFICO VII.2.1.6 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=20m$ E $y=20m$ PARA $t > T$.



— SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.

- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.2.1.7 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=40\text{m}$ E $y=0$ PARA $0 \leq t \leq T$.

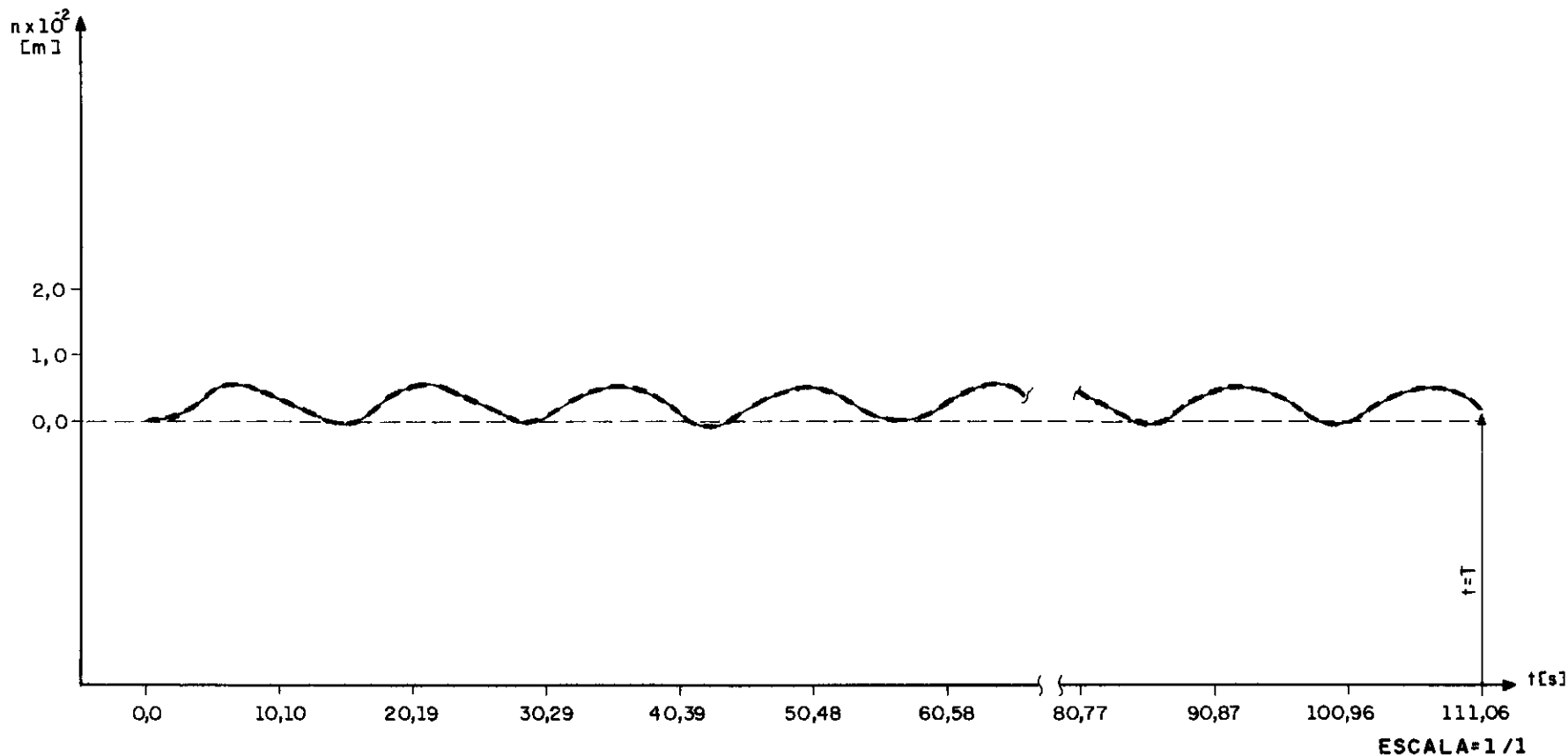


ESCALA=1/1

— SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.

- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

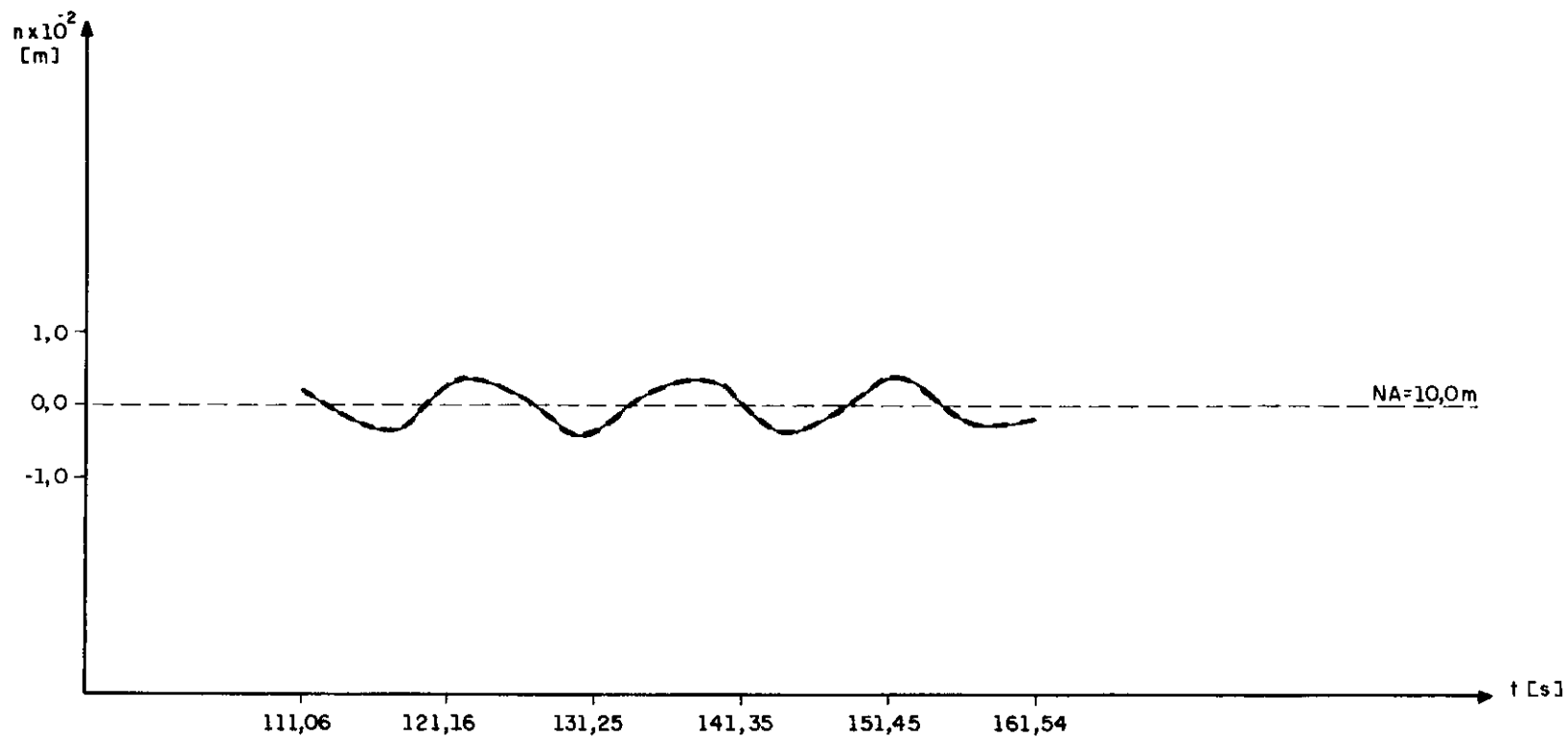
GRÁFICO VII.2.1.8 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=40m$ E $y=0$ PARA $t > T$.



— SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.

- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.2.1.9 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=40\text{m}$ E $y=40\text{m}$ PARA $0 \leq t \leq T$.



ESCALA = 1 / 1

- SOLUÇÃO EXATA POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER.
- - - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.

GRÁFICO VII.2.1.10 - PERTURBAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA PARA ALIMENTAÇÃO COM VARIAÇÃO BIDIMENSIONAL NO PONTO DE COORDENADAS $x=40m$ E $y=40m$ PARA $t > T$.

CAPÍTULO VIII - APLICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO A UMA SITUAÇÃO DE ENCHIMENTO DA ECLUSA II DE TUCURUI E COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS OBTIDOS EM MODELO REDUZIDO

No Capítulo VII verificou-se que, nos exemplos de enchimento que permitem solução analítica exata o modelo matemático desenvolvido simula satisfatoriamente as oscilações de nível.

Sendo o objetivo do presente modelo a simulação de oscilações de nível em câmaras de Eclusas de navegação, faz-se necessária a verificação da precisão deste frente a valores medidos em protótipo. A obtenção de dados de protótipo não foi possível pois não se tem notícias de Eclusas no Brasil que tenham as oscilações do nível d'água na câmara monitoradas durante a operação de enchimento com detalhe suficiente para possibilitar comparações conclusivas. Por este motivo optou-se pela comparação com valores medidos durante simulações de enchimento em modelos reduzidos. As medições existentes não são em grande número nem foram realizadas de maneira muito precisa, como será explicado posteriormente, mas ainda assim serão utilizadas para uma comparação qualitativa com os resultados obtidos do modelo matemático.

VIII.1 - DADOS DE ENSAIOS DISPONÍVEIS

As medições aqui utilizadas foram realizadas pelo INPH (Instituto de Pesquisas Hidroviárias) nos modelos reduzidos das Eclusas da Usina Hidrelétrica de Tucuruí no contexto dos estudos do projeto [11].

O projeto da Usina de Tucuruí conta com duas câmaras de Eclusas que aqui serão referidas como Eclusa I (câmara de montante) e Eclusa II (câmara de jusante).

Foram realizados ensaios nos modelos reduzidos das duas câmaras, no entanto foram utilizadas apenas as medições da Eclusa II que apresentam informações mais completas relativas aos gráficos de oscilação de nível e curvas de enchimento da câmara (tempo x nível médio de água).

Para que seja possível a comparação entre os dois modelos é necessário que a curva de enchimento usada no modelo matemático seja a mesma encontrada no ensaio em modelo reduzido.

VIII.2 - TRATAMENTO DISPENSADO ÀS MEDIÇÕES PARA UTILIZAÇÃO NO MODELO MATEMÁTICO

Como foi descrito no Capítulo V, o modelo matemático desenvolve-se a partir dos valores de velocidades equivalentes de entrada de água no fundo da câmara (W_0) em cada instante de tempo. Desta forma, é preciso conhecer a curva de vazões (vazão de entrada x tempo) e a distribuição espacial desta vazão durante o enchimento.

As vazões totais de alimentação da câmara da Eclusa foram obtidas com base nos registros nível x tempo utilizando-se o programa SEECII desenvolvido por USSAMI [14]. Este programa fornece o valor da vazão de entrada na câmara em cada instante de tempo.

A partir da vazão total de entrada é preciso encontrar as vazões em cada orifício do difusor (FIG. VIII.2.1.1) e finalmente as velocidades equivalentes de entrada de água (W_0)

em cada ponto da malha de discretização.

Para chegar aos valores de vazão nos orifícios admitiu-se que na entrada de cada um dos oito difusores (FIG. VIII.3.2) a vazão é equivalente a $\frac{1}{8}$ da vazão total de entrada na câmara. No cálculo foi considerado metade do difusor, uma vez que este é simétrico em relação ao eixo longitudinal. Utilizou-se um modelo de aporcionamento de vazões onde foi utilizada a técnica de RUNGE-KUTTA de 4ª ordem para achar a solução das equações diferenciais que regem o escoamento transitório em cada difusor. O desenvolvimento matemático realizado está descrito a seguir.

VIII.2.1 - MODELO DE APORCIONAMENTO DE VAZÕES NUM DIFUSOR

O modelo foi desenvolvido considerando a figura FIG.VIII.2.1.1, as equações e variáveis abaixo descritas.

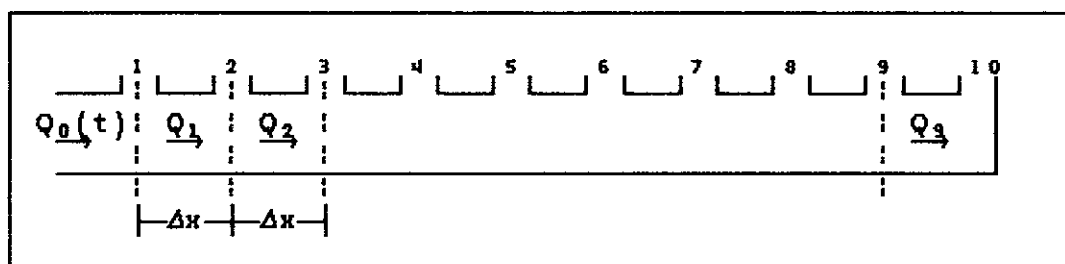


FIG.VIII.2.1.1 - Difusor considerado no desenvolvimento matemático.

Na FIG.VIII.2.1.1 foram considerados os seguintes dados geométricos:

A_0 = Área do orifício = 0.32 m^2 .

R = Raio hidráulico da seção transversal do difusor = 0.33 m .

A = Área da seção transversal do difusor = 3.04 m^2 .

Δx = Espaçamento constante entre orifícios = 3.00 m .

Condições de escoamento:

C_d = Coeficiente de vazão nos orifícios = 0.60 .

f = Coeficiente de perda de carga = 0.02 .

$Q_0(t)$ = Vazão total de entrada no difusor [m^3/s].

$q_i(t)$ = Vazão do i -ésimo orifício [m^3/s].

Z = Nível de água na câmara [m].

Z_0 = Cota do eixo do difusor [m].

h_i = Carga piezométrica hidráulica na seção i [m].

$Q_i(t)$ = Vazão no trecho entre as seções $i-1$ e i [m^3/s].

Equações que regem o escoamento:

1) Equação da Quantidade de Movimento (oscilações de massa).

$$\gamma \cdot A \cdot \left[h_i - h_{i+1} - f \cdot \frac{\Delta x}{4 \cdot R} \cdot \frac{Q_i \cdot |Q_i|}{2 \cdot g \cdot A^2} \right] = \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{d}{dt}(Q_i) \quad , i = 1, 9$$

VIII.2.1.1

onde $\frac{d}{dt}(Q_i)$ = Derivada total da vazão no trecho entre seções i e $i+1$.

2) Equação do Escoamento pelos orifícios.

$$q_i = C_d \cdot A_o \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h_i - z} \quad , h_i - z \geq 0 \quad , i = 1, 10$$

VIII.2.1.2

$$q_i = -C_d \cdot A_o \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{z - h_i} \quad , h_i - z < 0 \quad , i = 1, 10$$

VIII.2.1.3

Equação da Continuidade.

$$q_i = Q_{i-1} - Q_i \quad i = 1, 10 \quad \text{VIII.2.1.4}$$

observe-se que $Q_{10} = 0$

Das equações VIII.2.1.2 e VIII.2.1.3 tem-se:

$$h_i - z = \frac{1}{2 \cdot g \cdot Cd^2 \cdot Ao^2} \cdot q_i \cdot |q_i| \quad \text{VIII.2.1.5}$$

Levando VIII.2.1.5 em VIII.2.1.1 chega-se a :

$$\frac{d}{dt}(Q_i) = \frac{g \cdot A}{\Delta x} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot g \cdot Cd^2 \cdot Ao^2} \cdot \left[q_i \cdot |q_i| - q_{i+1} \cdot |q_{i+1}| \right] - \right. \\ \left. f \cdot \frac{\Delta x}{8 \cdot R \cdot g \cdot A^2} \cdot Q_i \cdot |Q_i| \right] \quad i = 1, 9 \quad \text{VIII.2.1.6}$$

Da equação VIII.2.1.4 é possível escrever:

$$q_i \cdot |q_i| - q_{i+1} \cdot |q_{i+1}| = (Q_{i-1} - Q_i) \cdot |Q_{i-1} - Q_i| - \\ (Q_i - Q_{i+1}) \cdot |Q_i - Q_{i+1}| \quad \text{VIII.2.1.7}$$

Para simplificar a equação VIII.2.1.6 foi considerado:

$$K_1 = \frac{g \cdot A}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot Ao^2 \cdot Cd^2} \quad \text{VIII.2.1.8}$$

$$K_2 = \frac{g \cdot A}{\Delta x} \cdot \frac{f \cdot \Delta x}{8 \cdot R \cdot g \cdot A^2} \quad \text{VIII.2.1.9}$$

Levando as equações VIII.2.1.7, VIII.2.1.8 e VIII.2.1.9 na equação VIII.2.1.6 chega-se a:

$$\frac{d}{dt}(Q_i) = K_1 \cdot \left[(Q_{i-1} - Q_i) \cdot |Q_{i-1} - Q_i| - (Q_i - Q_{i+1}) \cdot |Q_i - Q_{i+1}| \right] - K_2 \cdot Q_i \cdot |Q_i| \quad i = 1, 9 \quad \text{VIII.2.1.10}$$

sujeita às condições iniciais:

$$Q_0(t=0) = 0$$

$$Q_i(t=0) = 0 \quad i=1, 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(Q_i)_{(t=0)} = 0$$

A solução da equação VIII.2.1.10 pode ser obtida pelo Método de RUNGE-KUTTA de 4ª ordem como mostrado a seguir.

A equação VIII.2.1.10 pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(Q_i) = F_i(Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}, t) \quad i=1, 9$$

onde :

$$Q_0 = Q_0(t) \text{ conhecido em qualquer instante } t.$$

No instante genérico t_0 são conhecidos $Q_i(t_0)$ e o incremento de tempo Δt .

No método utilizado, a declividade da curva Q_i x t é avaliada no ponto inicial, no meio e no fim do intervalo Δt . O cálculo das parcelas é feito segundo as equações abaixo:

$$u_{1i} = \Delta t \cdot F_i \left[Q_{i-1}(t_0), Q_i(t_0), Q_{i+1}(t_0) \right] \quad i = 1, 9 \quad \text{VIII.2.1.11}$$

onde:

$$Q_0 = Q_0(t_0)$$

$$u_{2_i} = \Delta t \cdot F_i \left[\left(Q_{i-1}(t_0) + \frac{u_{1_{i-1}}}{2} \right), \left(Q_i(t_0) + \frac{u_{1_i}}{2} \right), \left(Q_{i+1}(t_0) + \frac{u_{1_{i+1}}}{2} \right) \right]$$

$i = 1, 9$ VIII.2.1.12

onde:

$$Q_0 = Q_0(t_0 + \frac{\Delta t}{2})$$

$$u_{3_i} = \Delta t \cdot F_i \left[\left(Q_{i-1}(t_0) + \frac{u_{2_{i-1}}}{2} \right), \left(Q_i(t_0) + \frac{u_{2_i}}{2} \right), \left(Q_{i+1}(t_0) + \frac{u_{2_{i+1}}}{2} \right) \right]$$

$i = 1, 9$ VIII.2.1.13

onde:

$$Q_0 = Q_0(t_0 + \frac{\Delta t}{2})$$

$$u_{4_i} = \Delta t \cdot F_i \left[\left(Q_{i-1}(t_0) + u_{3_{i-1}} \right), \left(Q_i(t_0) + u_{3_i} \right), \left(Q_{i+1}(t_0) + u_{3_{i+1}} \right) \right]$$

$i = 1, 9$ VIII.2.1.14

onde:

$$Q_0 = Q_0(t_0 + \Delta t)$$

O valor de Q_i é obtido da equação:

$$Q_i(t_0 + \Delta t) = Q_i(t_0) + (u_{1_i} + 2 \cdot u_{2_i} + 2 \cdot u_{3_i} + u_{4_i}) / 6 \cdot \theta \quad i=1, 9$$

VIII.2.1.15

Levando os valores de $Q_i(t_0 + \Delta t)$ na equação VIII.2.1.4 é possível obter o valor da vazão nos dez orifícios.

O procedimento é repetido até o instante de tempo desejado.

As vazões nos orifícios foram transformadas em velocidades equivalentes nos elementos da malha de discretização onde ocorrem as entradas de água à câmara.

Estes valores foram introduzidos no programa ECLUSA descrito no Capítulo VI e as oscilações de nível calculadas.

Na transformação das vazões nos orifícios em velocidades equivalentes nos pontos da malha foram feitas as seguintes simplificações:

1) A vazão que no modelo reduzido entra na câmara paralela ao fundo foi considerada como sendo uma vazão vertical no elemento de discretização da modelagem matemática.

2) No modelo matemático não foram considerados os defletores existentes no projeto e no modelo reduzido (FIG. VIII.3.2).

VIII.3 - CONDIÇÕES DE ENSAIO EM MODELO REDUZIDO

Como já foi mencionado anteriormente, os ensaios em modelo reduzido da Eclusa de jusante da usina Hidrelétrica de Tucuruí foram realizadas pelo INPH. Os ensaios que interessam a este trabalho são os que resultaram na medição das oscilações do nível de água da câmara [11].

Os aspectos relevantes destes ensaios são:

Dimensão da câmara (protótipo) = 220.00 m x 33.00 m

N.A. montante = 38.00 m

N.A. jusante = 3.50 m

Tempo de manobra das válvulas (T_v) = 60 s

Manobra : Duas válvulas simultâneas

As oscilações do nível d'água foram medidas durante operações de enchimento da câmara ao longo do eixo central (FIG. VIII.3.1) por dois processos diferentes.

Um primeiro no qual se obteve sempre a pressão diferencial (em m.c.a.) entre cada ponto situado no referido

eixo, e uma tomada de água externa em um vaso comunicante, aqui denominado por "VC".

VC com 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9.

O outro processo consistiu em se medir diretamente as pressões diferenciais entre pontos consecutivos e/ou intercalados, situados sobre o eixo central.

Na Figura VIII.3.1 - 2.1/2.2, 2.2/2.3, 2.3/2.4, 2.4/2.5, 2.5/2.6, 2.6/2.7, 2.7/2.8 e 2.8/2.9.

Dos registros das oscilações, foram extraídos e tabelados os desníveis obtidos entre os pares de tomadas de pressão e entre cada ponto e o V.C. (tabela VIII.3.1), em diversos instantes intermediários do enchimento, quais sejam, os correspondentes aos níveis 6.00, 9.00, 12.00, 15.00 e 18.00 m. Destes valores achou-se a declividade média do espelho d'água (tabela VIII.3.2) para os níveis mencionados.

N.A. CÂMARA (m)	D E S N Í V E I S (cm) ENTRE O VASO COMUNICANTE (VC) E OS PONTOS:								
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
6.0	+0.5	-3.0	-0.5	0.0	+1.5	-2.5	0.0	-2.5	+0.5
9.0	0.0	-4.5	-1.7	-2.0	0.0	-3.0	-0.3	-3.5	-1.5
12.0	0.0	-3.0	-1.5	-2.0	-0.5	-2.0	-0.3	-1.5	0.0
15.0	+1.3	-1.0	-1.0	-1.5	-1.0	-1.0	0.0	-2.0	-0.5
18.0	+1.3	0.0	-0.5	-0.5	+0.5	-0.5	+0.3	-2.0	0.0

Tabela VIII.3.1 - Medições de oscilações na câmara.

Nota:

(-) Desnível a favor do vaso comunicante.

(+) Desnível a favor dos pontos do eixo longitudinal.

N.A. CÂMARA (m)	DECLIVIDADE ($\times 10^{-6}$)	
	MODELO MATEMÁTICO	MODELO REDUZIDO
6.0	113.79	183.00
9.0	19.34	92.90
12.0	6.47	0.70
15.0	3.96	180.60
18.0	54.48	78.19

Tabela VIII.3.2 - Declividade da linha d'água no eixo longitudinal da câmara.

Os valores de declividade em Modelo Reduzido foram obtidos através de valores medidos de desnível nos gráficos dos ensaios. Nestes gráficos o nível tem variação acentuada para incrementos pequenos de tempo logo qualquer pequeno erro na medição acarreta erro no valor significativo da declividade não afetando no entanto a ordem de magnitude desta.

É importante salientar que, em virtude das medições terem sido realizadas por uma única célula, foram necessárias sucessivas operações de enchimento para varrer toda a câmara e caracterizar os perfis longitudinais. Desta forma, os perfis representam, apenas de maneira aproximada, instantes de uma

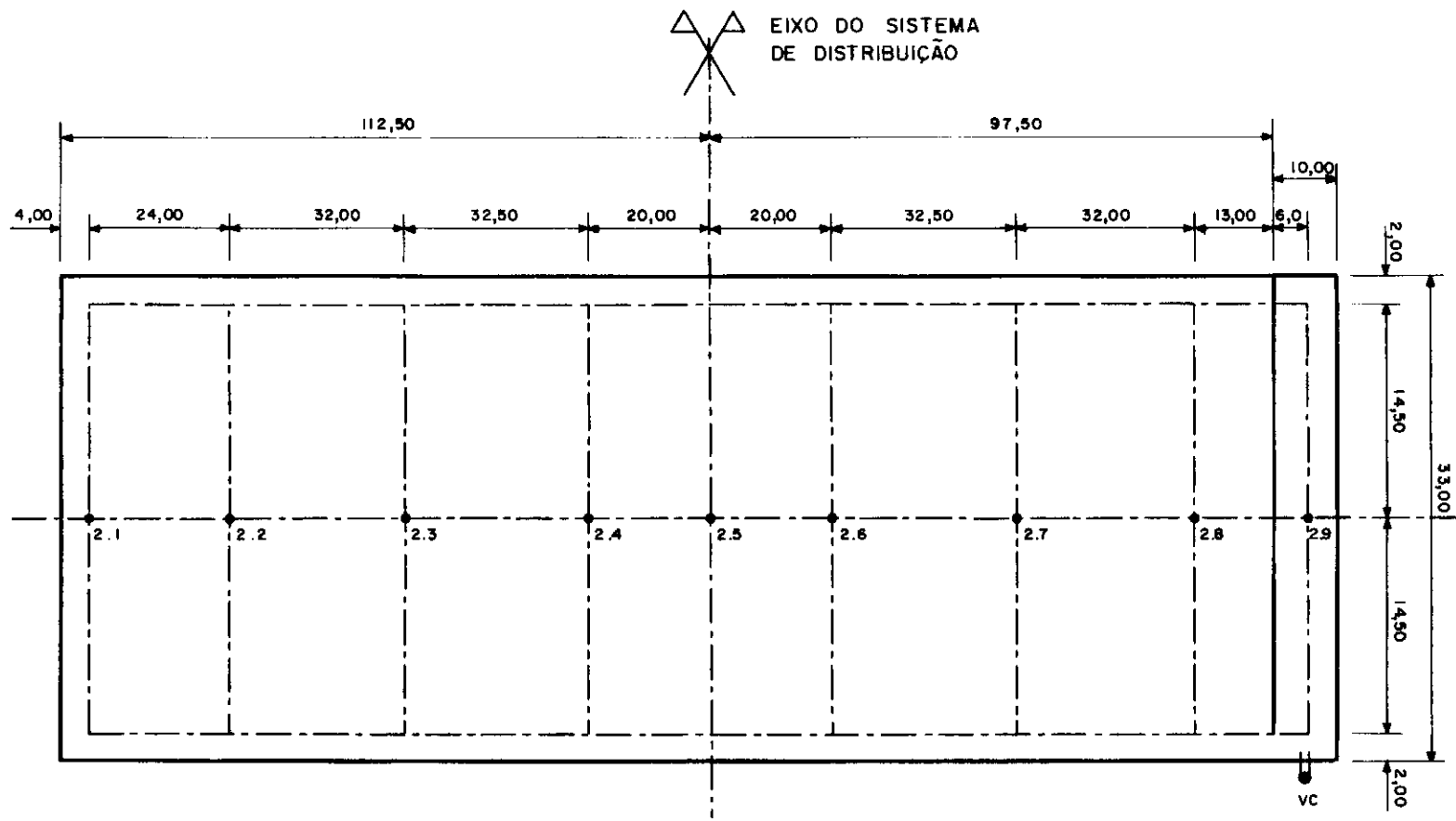
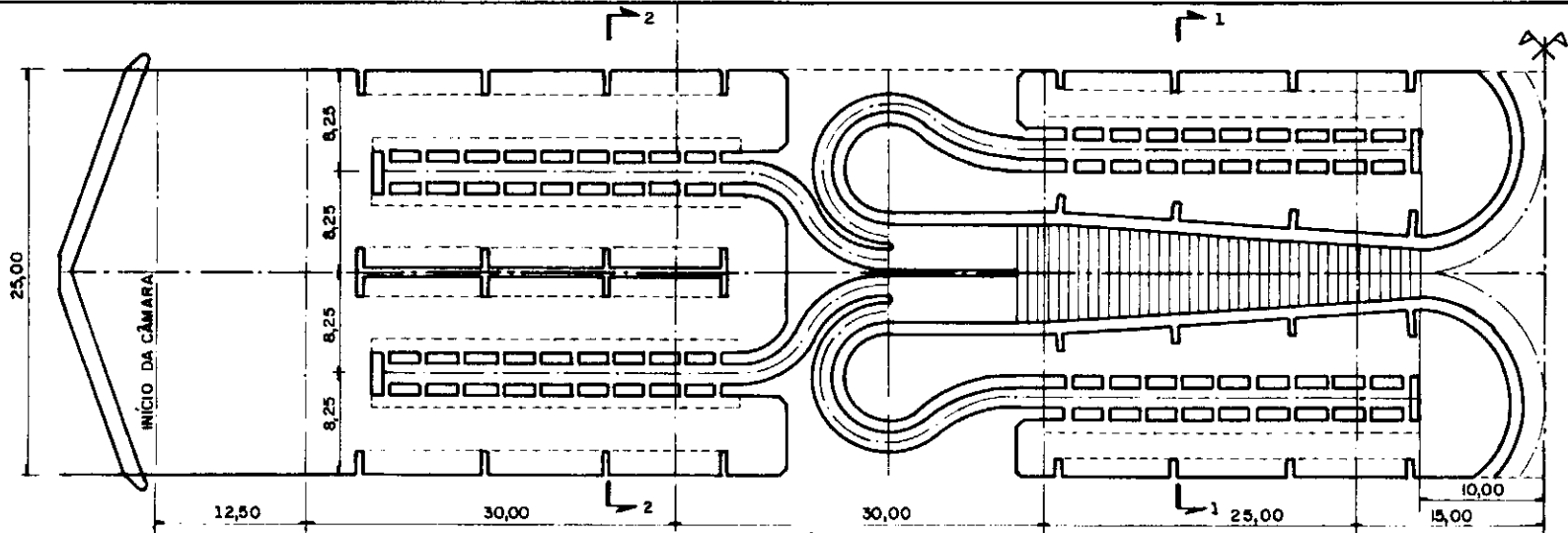
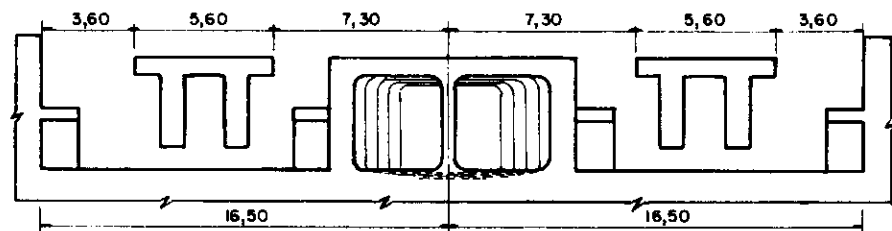


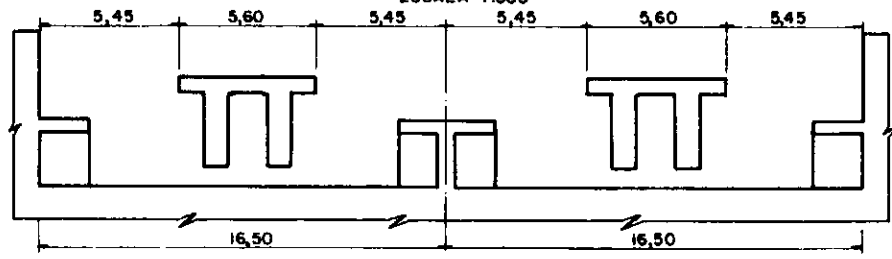
FIG. VIII.3.1 - LOCALIZAÇÃO DAS TOMADAS DE PRESSÃO NO MODELO REDUZIDO DA ECLUSA DE JUSANTE DO SISTEMA DE TRANSPOSIÇÃO DA BARRAGEM DE TUCURUÍ.



PLANTA NÍVEL - 7,40
ESCALA 1:600



CORTE 1-1
ESCALA 1:300



CORTE 2-2
ESCALA 1:300

UHE TUCURUÍ
FIG. VIII.3.2 - PLANTA E CORTES ESQUEMÁTICOS
DA ECLUSA II

operação de enchimento.

VIII.4 - COMPARAÇÃO DAS MEDIÇÕES DO MODELO REDUZIDO COM OS RESULTADOS DO MODELO MATEMÁTICO

A comparação entre as oscilações medidas no modelo reduzido e aquelas obtidas da modelagem matemática foi realizada considerando-se os mesmos pontos analisados nos ensaios (FIG. VIII.3.1).

Os valores da oscilação de nível foram obtidos subtraindo-se em cada ponto da malha o nível calculado pelo programa do nível médio de água no interior da câmara naquele instante de tempo.

Como os únicos dados disponíveis dos ensaios são os gráficos de desnível entre pontos consecutivos e o desnível entre cada ponto e o vaso comunicante as comparações realizadas foram as seguintes:

1) Dos valores de oscilação fornecidos pelo programa foram considerados apenas aqueles situados à distância correspondente aos pontos 2.1 a 2.9 na figura VIII.3.1. Em todos os instantes de tempo foi verificado o desnível entre cada dois pontos consecutivos (2.1/2.2, 2.2/2.3, 2.3/2.4, 2.4/2.5, 2.5/2.6, 2.6/2.7, 2.7/2.8, 2.8/2.9) e os valores achados foram plotados.

Desta comparação observou-se que a frequência das oscilações é bastante semelhante mas a amplitude das mesmas é menor no modelo matemático.

2) Os valores das oscilações nos pontos 2.1 a 2.9 também foram plotados para serem comparados com o desnível obtido entre cada ponto da câmara e o vaso comunicante.

Também nesta comparação a frequência é semelhante entre os dois modelos sendo que neste caso a amplitude medida nos ensaios é muito maior do que aquelas provenientes da modelagem matemática.

3) Nos instantes de tempo correspondentes aos níveis médios 6.00, 9.00, 12.00, 15.00 e 18.00 foi calculada a declividade média da linha d'água no eixo longitudinal da câmara para comparação com o valores medidos nos ensaios.

A tabela VIII.3.2 mostra uma comparação entre as declividades longitudinais do nível d'água na câmara da Eclusa conforme determinação a partir do modelo reduzido físico e do modelo matemático.

A tabela VIII.4.1 mostra a declividade transversal da linha d'água na câmara nos pontos 2.1 a 2.5 (eixo do sistema de distribuição) nos instantes de tempo correspondentes aos níveis médios 6.0, 9.0, 12.0, 15.0 e 18.0 metros.

N.A. CÂMARA (m)	DECLIVIDADE (x 10 ⁻⁶)				
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
6.0	152.38	146.66	- 1.91	-355.24	-360.95
9.0	49.52	72.38	- 24.76	- 88.57	-190.48
12.0	31.43	39.05	4.76	- 12.38	-145.71
15.0	54.29	21.91	- 49.52	- 51.43	- 53.33
18.0	45.71	.95	- 39.05	- 45.71	- 13.33

Tabela VIII.4.1 - Declividade da linha d'água no sentido transversal da câmara nos pontos 2.1 a 2.5.

Embora o modelo reduzido não tenha computado dados de declividade transversal da linha d'água na câmara, o modelo matemático indica que tais inclinações são da mesma ordem de magnitude das inclinações longitudinais e portanto não devem ser desconsideradas.

Esta comparação não pretende esgotar o assunto e tem um caráter qualitativo em virtude do número limitado de informações disponíveis da modelagem física e das potenciais limitações de precisão das medições realizadas. Permite contudo verificar a semelhança de frequências de oscilação e de declividades da linha d'água das duas determinações.

VIII.5 - CONCLUSÃO

Embora o modelo matemático seja capaz de gerar um perfil hidráulico bastante detalhado em cada instante de tempo os poucos dados existentes dos ensaios em modelo reduzido impossibilitam uma melhor comparação.

A própria medição nos ensaios já é pouco precisa uma vez que os valores de oscilações de nível são pequenos mesmo para protótipo e quando se tenta medi-los em modelo reduzido qualquer pequeno erro fornecerá resultados com grande margem de imprecisão.

O fato de terem sido necessárias várias operações de enchimento para se traçar o perfil da linha d'água em cada instante de tempo introduz erros, pois mesmo que a curva de enchimento seja a mesma, fatores externos influenciam diferentemente cada operação.

A simplificação introduzida na distribuição das vazões de entrada provoca alteração no valor das oscilações de nível que só pode ser avaliada se formulada uma modelagem desta distribuição mais próxima da real.

Desta comparação é possível concluir que para uma análise mais detalhada dos resultados do modelo matemático é fundamental que se tenha valores medidos no modelo reduzido mais abrangentes e confiáveis e também uma melhor simulação das vazões de entrada no fundo da câmara no modelo matemático.

A análise expedita realizada permitiu constatar que o período das oscilações calculadas foram próximos àqueles medidos e que a inclinação da linha d'água também apresenta valores próximos aos medidos.

CAPÍTULO IX - CONCLUSÃO FINAL E RECOMENDAÇÕES

O trabalho realizado neste projeto de pesquisa foi um primeiro passo para a obtenção de um modelo matemático que seja capaz de simular com precisão as oscilações do nível d'água no interior da câmara de uma Eclusa de navegação durante o enchimento ou esvaziamento.

O equacionamento matemático do fenômeno hidráulico estudado foi baseado nas equações da continuidade e da quantidade de movimento e levou em conta algumas simplificações tais como: a não existência de embarcação no interior da câmara, não inclusão de análise dos jatos de água que ocorrem na saída dos orifícios e também a não consideração do atrito responsável pelo amortecimento das oscilações.

O método numérico usado foi o Método das Características que é muito empregado no estudo de escoamentos transitórios a uma dimensão de espaço, entretanto pouco se encontra na literatura de aplicação deste método em escoamentos que exigem análise em duas dimensões.

O desenvolvimento de um modelo matemático que utiliza o Método das Características para resolver problemas de transitórios à superfície livre em duas dimensões já pode ser considerado uma boa contribuição.

A verificação da precisão matemática do modelo desenvolvido foi efetuada criando-se exemplos de escoamentos que pudessem ter solução analítica exata para comparação com os resultados obtidos do uso do modelo matemático.

Os dois exemplos elaborados tem solução possível através de desenvolvimento em série de Fourier por não apresentarem

acúmulo de água no interior da câmara e desta forma contarem com valor constante de celeridade e do nível médio de água em qualquer instante de tempo.

O primeiro exemplo de escoamento tem variação uni-dimensional das velocidades equivalentes de entrada de água à câmara. Esta variação é segundo a direção longitudinal do plano horizontal. Os resultados do modelo matemático e os do desenvolvimento em série de Fourier são muito próximos. O método numérico não introduziu erros ao longo do tempo. Verificou-se o não aparecimento de vazões na direção transversal, como era de se esperar. As oscilações de nível tiveram ajuste melhor do que as vazões.

O segundo exemplo elaborado teve variação das vazões de entrada nas duas direções do plano horizontal. Também neste caso os resultados obtidos pelos dois métodos foram próximos não deixando dúvidas quanto a validade do equacionamento matemático e da aplicação do método numérico, uma vez que também neste exemplo não houve aumento do erro com o tempo. No contorno a diferença entre os dois resultados foi maior do que no centro da câmara mas tal erro não aumentou com o tempo ficando em torno de 10% e sendo maior nas vazões do que nas oscilações de nível.

A comparação entre os valores de oscilação obtidos através do modelo matemático e aqueles observados em ensaios em modelo reduzido foi prejudicada pelos poucos dados existentes de medições em ensaios e de uma matriz de velocidades equivalentes de entrada à câmara (W_0) muito simplificada.

Mesmo com a distribuição espacial das velocidades de entrada (W_0) inadequada, o modelo preserva todas as características típicas dos movimentos oscilatórios da câmara

fornecendo valores de inclinação da linha d'água compatíveis com a realidade (mesma ordem de magnitude dos ensaios em modelo reduzido).

Existem algumas melhorias e posteriores desenvolvimentos a serem feitos para que o modelo melhor represente condições reais de interesse. As sugestões que devem ser levadas em consideração em estudos futuros são principalmente:

- melhorar a modelagem do contorno visto que na comparação com a solução exata os valores do contorno tiveram ajuste pior do que os do centro da malha.

- introduzir a presença de embarcação no interior da câmara. Segundo USSAMI [14] e CANHOLI [4] a presença de embarcação e sua localização no interior da câmara influenciam as oscilações de maneira significativa. É importante ressaltar que o conhecimento das oscilações do nível da câmara leva aos valores dos esforços nas amarras das embarcações durante a eclusagem. Os esforços nas amarras devem estar dentro de limites tecnicamente corretos visando assegurar operações de eclusagem seguras.

- o atrito no interior da câmara é o responsável pelo amortecimento das oscilações com o tempo. É também de interesse do projetista conhecer a maneira como as ondas se propagam após o fim do enchimento/esvaziamento. O modelo matemático só poderá fornecer estes dados quando contar com parcelas que simulem o atrito existente.

- melhorar a Subrotina que modela o sistema de distribuição espacial das vazões de entrada. O sistema de distribuição é sem dúvida o maior responsável pelas oscilações

de nível, desta forma o modelo matemático deve modelá-lo o mais próximo possível do real.

- as oscilações localizadas devido a difusão dos jatos, apesar de não muito importantes, também deveriam ser adequadamente simuladas tendo em vista uma descrição mais completa do fenômeno envolvido. Tais oscilações também poderão ser incluídas em modelos futuros.

A introdução destas parcelas fornecerá um modelo capaz de simular o fenômeno hidráulico com melhor precisão.

É preciso ressaltar que a evolução da análise de transitórios depende do monitoramento de protótipos, de preferência em câmaras grandes em construção ou operação para que se possa checar a precisão do modelo matemático sem precisar recorrer a ensaios em modelos reduzidos.

No estágio atual o modelo serve principalmente como instrumento de análise comparativa entre alternativas de projetos de sistemas de alimentação. Evidentemente o modelo desenvolvido também se presta à análise de operações de esvaziamento de câmaras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABBOT, M. B. , An Introduction to The Methods of Characteristics", London, Thames and Hudson, 1965
- [2] ABBOT, M. B., Computational Hydraulics - Elements of the Theory of Free Surface Flows, London, Pitman Publishing Limited, 1979.
- [3] BRAUN, M., Equações Diferenciais e suas Aplicações , Rio de Janeiro, Editora Campus, 1979.
- [4] CANHOLI, A. P., "Alguns Aspectos dos Esforços de Amarração no Projeto Hidráulico de Eclusas de Navegação", Dissertação Apresentada à Escola Politécnica da U.S.P. para obtenção do Título de Mestre em Engenharia, São Paulo, 1984
- [5] CHAUDRY, M. H., Applied Hydraulic Transients , New York , Van Nostrand Reinhold Company, 1979
- [6] CHOW, V. T., Open-Channel Hydraulics , Singapore, McGraw Hill International Book Company, 1973
- [7] CHURCHILL, R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems , New York, McGraw-Hill Book Company, 1963

- [8] DAUBERT, A. e GIRAFFE, O. , "Quelques Aspects des Écoulements Presque Horizontaux a Deux Dimensions en Plan et Non Permanents Application aux Estuaires" ,La Houille Blanche, n^o 8/1967, pp 847-859, Paris, 1967
- [9] KREIDER, D., KULLER, R.C., OSTBERG, D.R. e PERKINS, F.W., Introdução à Análise Linear - Séries de Fourier , Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., Volume 2, 1972
- [10] MAHMOOD, K. e YEVJEVICH, V., Unsteady Flow in Open Channels , Colorado, Water Resources Publications, Volumes I e II, 1975
- [11] PORTOBRÁS / INPH - " Sistemas de Transposição de Barragens de Tucuruí - Estudos Hidráulicos em Modelos Reduzidos - Eclusa de Jusante - Medições de Oscilações na Câmara", Nota Técnica n^o 10, Rio de Janeiro, 1984.
- [12] PORTO, Rubem de La Laina , TUCCI, C.E.M. e CHAUDRY, M. H., " Anais do Intercâmbio Internacional sobre Transientes Hidráulicos e Cavitação ", Oficina do Centro Tecnológico de Hidráulica do Departamento de Águas e Energia Elétrica, Volume 2, pp G1.1 - G2.32, São Paulo, 1982
- [13] STREETER, V. L. e WYLIE, E. B. , Hydraulic Transients , New York, McGraw-Hill Book Company, 1967

[14] USSAMI, Hideaki, " Comportamento Hidráulico dos Sistemas de Enchimento e Esgotamento de Eclusas de Navegação", Dissertação Apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia, São Paulo, 1980

[15] WYLIE, E. B. e STREETER, V. L., Fluid Transients, New York, McGraw Hill Book Company, 1978

APÊNDICE I - VALORES CARACTERÍSTICOS E FUNÇÕES
CARACTERÍSTICAS

A explicação do uso da série de Fourier como solução geral da variável $Q(x,t)$ na equação VII.1.3.1 será iniciada utilizando-se as equações da continuidade e do movimento em uma dimensão (equações VII.1.1.4 e VII.1.1.6) que aparecem a seguir:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = W(x,t) \quad \text{Equação da Continuidade} \quad \text{A.I.1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + Co^2 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{Equação do Movimento} \quad \text{A.I.2}$$

Derivando (A.I.1) em relação a x e (A.I.2.) em relação a t e substituindo uma na outra chega-se a equação :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - Co^2 \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \quad \text{A.I.3}$$

Para chegar a solução geral de $Q(x,t)$ em A.I.3 deve-se achar primeiro a solução da equação homogênea associada de A.I.3 que vem a ser a equação da onda em uma dimensão.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - Co^2 \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad \text{A.I.4}$$

Esta equação deve satisfazer as condições de contorno:

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(L,t) = 0 \quad \text{e} \quad \text{A.I.5}$$

$$Q(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{A.I.6}$$

Para achar a solução de A.I.4 sujeito as condições de contorno A.I.5 e A.I.6 usando equações diferenciais ordinárias faz-se necessário primeiro determinar as funções do tipo

$$Q(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

que satisfazem as condições citadas, onde X é função apenas de x

e T é função apenas de t .

Se Q satisfaz a A.I.4 então:

$$X(x) \cdot T''(t) = Co^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \quad A.I.7$$

Em A.I.7 é possível separar as variáveis,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{Co^2 \cdot T(t)} = -w^2 \quad A.I.8$$

Como o membro da direita é apenas função de x não pode variar com t , entretanto este é igual a uma função apenas de t que por sua vez não pode variar com x . Sendo assim, tais membros devem equivaler a um valor constante que será conhecido como $-w^2$.

$$X''(x) = -w^2 \cdot X(x) \quad T''(t) = -w^2 \cdot Co^2 \cdot T(t) \quad A.I.9$$

Se Q satisfaz a primeira condição de contorno então $X(0) \cdot T(t)$ deve existir para qualquer valor de t ($t > 0$). A condição de contorno $T(t) = 0$ para todo t é trivial uma vez que $Q=0$ sempre satisfaz a equação homogênea, sendo assim $X(0)=0$. Da mesma forma a segunda condição de A.I.5 é satisfeita para Q se $X(L) = 0$ e a condição A.I.6 é satisfeita para $T(0) = 0$.

Desta forma, Q satisfaz a equação A.I.4 e as condições de contorno A.I.5 se X e T satisfizerem aos dois problemas homogêneos que se seguem:

$$X''(x) + w^2 \cdot X(x) = 0, \quad X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0 \quad A.I.10$$

$$T''(t) + w^2 \cdot Co^2 \cdot T(t) = 0, \quad T(0) = 0 \quad A.I.11$$

onde o parâmetro w^2 tem o mesmo valor nos dois problemas. Para achar soluções não triviais destas equações nota-se primeiro que a equação A.I.11 tem apenas uma condição de contorno o que implica admitir várias soluções para λ .

Se $w^2=0$, a equação diferencial A.I.10 se torna $X''(x) = 0$ e sua solução geral é $X = A \cdot x + B$. Como $B=0$ se $w^2=0$, então

$X(L) = A \cdot L = 0$ somente se $A=0$, logo este problema tem apenas a solução trivial $X(x) = 0$ quando $w^2=0$.

Se $w^2 > 0$ a solução geral de $X'' + w^2 \cdot X = 0$ é:

$$X(x) = C_1 \cdot \sin(w \cdot x) + C_2 \cdot \cos(w \cdot x)$$

Para $x = 0$: $C_2 = 0$

Para $x = L$: $\sin(L \cdot w) = 0$ logo $L \cdot w = n \cdot \pi$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$)

$$\text{Desta forma : } X = \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad \text{A.I.12}$$

Os valores de w^2 para os quais a equação A.I.10 tem valores diferentes do trivial se chamam valores característicos desta equação e a função A.I.12 é a função característica correspondente.

Quando $w^2 < 0$, fazendo $w^2 = -\mu^2$, onde μ é real, tem-se $X=C_3 \cdot \sinh(\mu \cdot x)$ como solução de $X'' - \mu^2 \cdot X = 0$ que satisfaz a condição $X(0) = 0$. Como $\sinh(\mu \cdot x) \neq 0$, $C_3=0$ se $X(L)=0$. Sendo assim não há valores característicos negativos para as equações em questão.

Para $w^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2}$ a equação A.I.10 é distinta para cada valor positivo e inteiro de n . Para um n fixo tem-se a solução A.I.12 e a equação A.I.11 torna-se:

$$T''(t) + \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot Co^2}{L^2} \cdot T(t) = 0 \quad , T(0) = 0 ,$$

que leva a solução $T = \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot Co \cdot t}{L}\right)$.

Sendo assim a função infinita ,

$$Q_n(t) = \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot Co \cdot t}{L}\right), \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad \text{A.I.13,}$$

satisfaz a equação A.I.4 e as condições de contorno A.I.5.

Segundo CHURCHILL [7] se cada uma das n funções u_1, u_2, \dots, u_n satisfaz a equação diferencial homogênea, então

todas as combinações lineares destas funções,

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

para qualquer valor de c constante, satisfaz esta equação diferencial. E se cada uma das n funções satisfaz a condição de contorno linear homogênea, então todas as combinações lineares também satisfazem a estas condições.

Ainda segundo o teorema 2 de CHURCHILL [7] a função

$$Q_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot C_0 \cdot t}{L}\right) \text{ satisfaz as condições}$$

das equações A.I.4 e A.I.5 e é convergente. Observe-se que b_n é um coeficiente da série a ser determinado.

$$\text{O item VII.1.4 parte da série } Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

para chegar a solução geral das equações VII.1.1.4 e VII.1.1.6 o que é perfeitamente válido pois como foi demonstrado neste Apêndice a solução destas equações pode ser encontrada com um desenvolvimento em série de Fourier de duas funções, uma de x e uma de t , tendo ficado demonstrado também que a função de x tem a forma $\sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$.

Raciocínio analogo leva a uma série de Fourier para chegar ao valor da incógnita $\eta(x, t)$.

Todo este desenvolvimento foi feito também visando chegar às séries de Fourier das incógnitas $Q_x(x, y, t)$, $Q_y(x, y, t)$ e $\eta(x, y, t)$ do item VII.2.