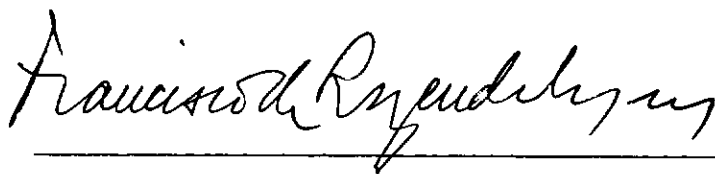


## CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE FUNDAÇÕES EM RADIER

Mauro Jorge da Costa Santos


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada:



FRANCISCO DE REZENDE LOPES

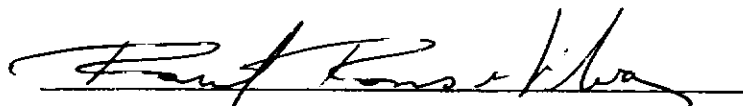
( Orientador )



DIRCEU DE ALENCAR VELLOSO



HUMBERTO LIMA SORIANO



RAUL ROSAS E SILVA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1987

SANTOS, MAURO JORGE DA COSTA

Contribuição ao Projeto de Fundações em Radier (Rio de Janeiro) 1987.

XI, 196 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1987).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Estudo de esforços em placas sobre base elástica  
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

CURRICULUM VITAE

Engenheiro Civil - PUC-RJ - dezembro de 1973.

Engenheiro Estrutural - Estudos Técnicos e Projetos  
ETEP-LTDA - janeiro 1974/maio 1985.

Engenheiro Estrutural - Krebs Engenharia LTDA - a  
partir de junho de 1985.

Professor Assistente do Departamento de Engenharia  
Civil da Universidade Santa Úrsula - a partir de  
agosto de 1978.

A minha esposa e filhos

Marlúcia

Maria Christina

Maria Carolina

Mauro Lúcio

pelo carinho e incentivo.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Francisco de Rezende Lopes, pela orientação deste trabalho.

Aos colegas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Santa Úrsula pelo incentivo e apoio recebidos.

Ao corpo docente do Programa de Engenharia Civil da COPPE, pelos ensinamentos recebidos no curso de mestrado.

À Pedro Paulo de Souza Pereira Junior, pela ajuda nos trabalhos de computação.

À Gilberto Antônio Candido e Evandro da Silva Machado pela preparação dos desenhos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

**CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE  
FUNDAÇÕES EM RADIER**

**Mauro Jôrge da Costa Santos**

**Junho de 1987**

**Orientador: Francisco de Rezende Lopes**

**Programa : Engenharia Civil**

Este trabalho apresenta uma revisão dos métodos mais conhecidos para o cálculo de fundações em radier e a aplicação em exemplos práticos.

O objetivo principal da tese é a obtenção de critérios de cálculo de esforços solicitantes em raders, através do estudo comparativo entre vários modelos e métodos sugeridos em publicações e normas de cálculo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/URFJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science(M.Sc.)

**A CONTRIBUTION TO THE DESIGN OF  
MAT FOUNDATIONS**

**Mauro Jorge da Costa Santos**

**June, 1987**

**Chairman: Francisco de Rezende Lopes**

**Department: Civil Engineering**

The thesis presents a review of the better known design methods for mat foundations and their application to practical cases.

The main objective of the thesis is to establish criteria for the computation of internal forces in mat foundations, following a comparative study of the various models and methods proposed in the technical literature and Codes of Practice.

Resumé de la thèse présentée à COPPE/UFRJ d'après les demandes pour obtenir le degré de Maîtrise en Sciences (M.Sc.)

CONTRIBUTION POUR LE PROJET DE FONDATIONS  
EN RADIER

Mauro Jorge da Costa Santos

June, 1987

Conseiller: Francisco de Rezende Lopes

Programmé : Génie Civil

Ce travail présente une révision des méthodes plus connues pour le calcul des fondations en radier et l'application à des exemples pratiques.

L'objectif principal de la thèse est d'obtenir des critères de calcul des efforts sollicités en radiers, par l'étude comparative entre plusieurs modèles et méthodes présentés dont des publications et normes de calculs.

	<b>ÍNDICE</b>	<b>Página</b>
I.	INTRODUÇÃO.....	.1 .
II.	REVISÃO DA LITERATURA .....	.3 .
II.1	- Radier- Definição .....	.3 .
II.2	- Sistemas Estruturais Empregados em Ra- dier .....	.3 .
II.3	- Métodos de Análise da Interação Solo - Estrutura .....	.4 .
II.4	- Métodos de Solução.....	.5 .
III.	MÉTODOS DE CÁLCULO ESTUDADOS .....	.15 .
III.1	- Métodos Selecionados .....	.15 .
III.2	- Modelização do Solo.....	.15 .
III.3	- Método das Diferenças Finitas.....	.15 .
III.3.1	- Base Teórica .....	.15 .
III.3.2	- Condições Gerais de Aplicação.....	.21 .
III.3.3	- Metodologia de Cálculo Empre- gada .....	.22 .
III.3.4	- Estrutura Básica do Programa.....	.22 .
III.4	- Método da Grelha sobre Base Elástica.....	.26 .
III.4.1	- Base Teórica .....	.26 .
III.4.2	- Condições Gerais de Aplicação.....	.27 .
III.4.3	- Metodologia de Cálculo Empre- gada .....	.28 .
III.5	- Método da Viga sobre Base Elástica .....	.28 .
III.5.1	- Base Teórica .....	.28 .
III.5.2	- Condições Gerais de Aplicação.....	.29 .
III.5.3	- Metodologia de Cálculo Empre- gada .....	.29 .

<b>ÍNDICE</b>	<b>Página</b>
III.6 - Método dos Elementos Finitos .....	.29.
III.6.1 - Base Teórica .....	.29.
III.6.2 - Considerações Gerais de Aplicação .....	.32.
III.6.3 - Metodologia de Cálculo Empregada .....	.32.
III.7 - Método do ACI .....	.33.
III.7.1 - Base Teórica .....	.33.
III.7.2 - Condições Gerais de Aplicação do ACI (20) .....	.37.
III.7.3 - Metodologia de Cálculo Empregada .....	.39.
III.7.4 - Estrutura Básica do Programa .....	.39.
IV. APLICAÇÃO A CASOS REAIS .....	.73.
IV.1 - Exemplo 1: Radier com Distribuição Regular de Pilares .....	.73.
IV.1.1 - Métodos dos Elementos Finitos .....	.73.
IV.1.2 - Método das Diferenças Finitas .....	.74.
IV.1.3 - Método do ACI .....	.74.
IV.1.4 - Método da Grelha sobre Base Elástica .....	.74.
IV.1.5 - Método da Viga Sobre Base Elástica .....	.75.
IV.1.6 - Análise dos Métodos de Cálculo .....	.76.
IV.2 - Exemplo 2: Radier com Distribuição Irregular de Pilares .....	.83.

	<b>ÍNDICE</b>	<b>Página</b>
IV.2.1	- Método dos Elementos Finitos.	.83.
IV.2.2	- Método das Diferenças Finitas	.83.
IV.2.3	- Método do ACI	.84.
IV.2.4	- Método da Grelha sobre Base Elástica .....	.84.
IV.2.5	- Método da Viga sobre Base Elástica .....	.84.
IV.2.6	- Análise dos Resultados .....	.85.
V.	CONCLUSÕES .....	.162.
V.1	- Análise Geral .....	.162.
V.2	- Recomendações para o Projeto de Radiers..	.164.
V.3	- Sugestões para os Desenvolvimentos Futuros .....	.166.
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	.170.
	APÊNDICE A: Fundações em Radier por Diferenças Finitas..	.173.
	APÊNDICE B: Fundações em Radier pelo Método do ACI(20)..	.186.
	NOMENCLATURA.....	.195.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar e comparar diferentes métodos de cálculo de fundações em radier. Inicialmente foram selecionados alguns métodos mais facilmente empregados em escritórios de projeto. Foram revistas as bases teóricas dos métodos selecionados e desenvolvidos programas para micro-computadores aplicáveis a dois deles.

Em seguida, exemplos de projetos correntes foram resolvidos com o objetivo de se avaliar os procedimentos de cálculo mais indicados. A análise aqui apresentada aborda apenas aspectos estruturais do radier como placa sobre uma base elástica. Não houve intenção neste trabalho de discutir questões geotécnicas, como, por exemplo, a escolha de parâmetros dos solos.

A importância do tema escolhido para este trabalho se deve ao fato de que fundações em radier são empregadas em grande número de estruturas, tais como silos, metrô, edifícios com maquinárias pesadas, tanques, edifícios residenciais e comerciais, castelos d'água e torres de chaminés de grande altura.

Em contrapartida, a bibliografia que trata especificamente do cálculo de radiers é pouco extensa, acarretando ao engenheiro estrutural uma série de dúvidas quando surge a necessidade de projetar uma fundação em radier. Os trabalhos e livros nacionais e internacionais apresentam na maioria das vezes casos particulares de placas sobre base elástica ou métodos simplificados empregados no cálculo de radiers. Estas simplificações visam eliminar as dificuldades de um cálculo matemático exato, possibi

litando ao engenheiro a elaboração do projeto estrutural do radier, empregando tabelas e procedimentos usuais; ocorre, entretanto, que na maioria dos casos há um super dimensionamento da estrutura, com repercussões sensíveis na economia da obra. Com a facilidade de acesso aos micro e grandes computadores, existe uma tendência natural do emprego de métodos numéricos como os das Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Elementos de Contorno, contornando-se assim as dificuldades e deficiências das formulações teóricas e obtendo-se através de cálculos mais exatos uma economia na estrutura projetada e um maior rigor científico no dimensionamento e especificações dos materiais empregados no radier. Deste modo este trabalho se preocupou prioritariamente com a análise de métodos numéricos, em detrimento de uma revisão extensa da literatura no que se refere a técnicas simplificadas e casos particulares de placas sobre apoio elástico.

Do Capítulo II consta uma revisão da literatura, apresentando principalmente os métodos de análise de interação solo x estrutura. No Capítulo III estão detalhados os métodos de cálculo selecionados para serem programados e empregados nos exemplos numéricos. O Capítulo IV apresenta a aplicação dos métodos descritos no Capítulo anterior a dois exemplos de fundações em radier e a análise comparativa dos resultados obtidos através das várias soluções empregadas. O Capítulo V procura apresentar as conclusões gerais obtidas pelo presente trabalho, sugerindo ainda procedimentos para cálculo, bem como possíveis temas de tese. Os apêndices A e B apresentam, respectivamente, os fluxogramas básicos e as listagens dos programas de cálculo de radier baseados no Método das Diferenças Finitas e no Método do ACI (20).

## CAPÍTULO II

### REVISÃO DA LITERATURA

#### II.1 - RADIER - DEFINIÇÃO

O radier é uma placa de fundação em concreto que recebe o carregamento total de uma estrutura ( FIG. II.1 ), transmitindo-o ao terreno de fundação, ou a um conjunto de estacas, no caso dos chamados " raders estaqueados ", que não serão tratados nesta tese.

Na maioria dos casos, o radier é utilizado em solos com baixa capacidade de suporte, onde, descarregando-se os pilares numa placa englobando vários pilares, consegue-se uma redução na pressão transmitida ao terreno e uma maior capacidade de carga pelo aumento de largura e profundidade total da fundação ( FIG. II.2 ).

A adoção do radier acarreta ainda uma sensível redução nos recalques totais da estrutura e, por solidarizar vários pilares, reduz também os recalques diferenciais, que são os que maiores danos causam à obra e suas instalações.

#### II.2 - SISTEMAS ESTRUTURAIS EMPREGADOS EM RADIER

Os tipos mais usuais estão descritos na FIG.II.3.

A escolha e emprego do tipo mais adequado dependerá das condições particulares de cada obra, tais como:

- cargas a transmitir
- terreno de fundação
- recalques máximos permitidos
- método e prazo de execução
- viabilidade econômica

### II.3 - MÉTODOS DE ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

Os métodos de análise podem ser classificados (i) quanto ao modelo de representação do solo e (ii) quanto à consideração ou não da linearidade nestes modelos.

Quanto ao modelo de representação do solo, há dois tipos principais:

- solo representado por um sistema de molas ( Modelo de Winkler (1867) )
- solo representado por um semi espaço (elástico ou não)

O modelo de Winkler (FIG.II.4) equivale a uma placa sobre fluido denso, onde a tensão de contato despertada num ponto é diretamente proporcional ao deslocamento (recalque) sofrido pelo ponto. A relação do modelo de Winkler,  $q = K_0 w$ , é análoga à do princípio de Arquimedes, sendo o módulo  $K_0$  idêntico ao peso específico do fluido.

No modelo do semi-espaço ( FIG.II.5), o solo é idealizado como um meio contínuo, onde a superfície deformada do terreno de fundação não ocorrerá somente na região carregada. Esta modelagem emprega a teoria clássica da elasticidade e conduz, no caso da interação solo-estrutura, à resolução de problemas de complexa formulação matemática.

Quanto à consideração da não linearidade, existem basicamente duas possibilidades:

- modelos elásticos
- modelos elasto-plásticos

Os modelos elásticos utilizam características puramente elásticas como o módulo de reação vertical  $K_0$  empregado no método de Winkler ou o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e coefici-

ente de Poisson  $\mu$  empregados nos métodos de semi-espaço, com relações constitutivas lineares entre tensão e deformação.

Os modelos elasto-plásticos consideram a não linearidade das relações tensão deformação em que, cessada a causa (carregamento), parte da deformação ocorrida no solo permanece de maneira residual. Os modelos elasto-plásticos não são empregados no momento, na prática dos escritórios de projeto. Uma revisão deste tipo de modelo pode ser encontrada em Selvadurai (12).

#### II.4 - MÉTODOS DE SOLUÇÃO

(a) Soluções Fechadas: São soluções matemáticas do problema de uma placa sobre apoio elástico. Como em outras áreas da engenharia, as soluções fechadas só são disponíveis para casos simples, como problemas axissimétricos e plano deformação. Uma vez que o problema a ser resolvido se enquadra numa dessas soluções fechadas, o trabalho é grandemente facilitado pelo emprego de abacos e tabelas já elaborados. O livro de Selvadurai(12) cita como exemplos os trabalhos de Schleicher (1926), Hetényi (1946), Timoshenko e Woinowsky - Krieger(1959), Kerr(1963), Fryba (1972), Panc (1975), Westergaard (1923, 1926, 1948), Wiseman (1973), Leonards and Harr (1959), Richart and Zia (1963), Naghdi and Rowley(1953), Reissner (1945, 1947, 1955), Selvadurai (1977), Nadai (1963), Brotchie e Silverter (1969), Walcott (1970), Andrews (1974), Le Pichon(1973), Mc Nutt e Merand(1978), Cathles (1975), Filonenko - Borodick (1940), Paster-nack (1954), Vlazov e Leontiev (1966), Panc (1975), Korenev (1951, 1960), Key (1973), Hogg (1938), Holl(1938),

Popov (1971), Shekhter (1937,1939), Leonev (1939), Pickett (1951), Sneddon (1975), Pister e Westmann (1962, 1963), Burmister (1943,1945), Fox (1948), Acum and Fox (1951), Jones (1962), Plevako (1972), Hoskin e Lee (1959), Pister (1963), Murphy (1937), Gladwell (1975), Pu e Hussain (1970), Gladwell e Iyer (1974), Svec(1974), Laermann (1976,1977), Yoon e Rim (1971), Tsai (1974) , Green (1952). Os trabalhos de Beyer (26), Kany (27) e Grasshof (28) apresentam soluções para cálculo de placas circulares ( problema axissimétrico) ou corridas ( problema plano-deformação).

(b) Soluções Aproximadas: Se caracterizam por simplificações no esquema e na modelagem estrutural do radier. Como exemplo, pode-se citar uma prática muito utilizada de se calcular um radier como se fosse uma laje com carregamento vertical de baixo para cima gerado pela reação do terreno suposta uniformemente distribuída ou com distribuição linear, empregando-se no cálculo dos esforços solicitantes e no dimensionamento as tabelas usuais de lajes.

Um outro exemplo é o método simplificado do ACI (20) , que calcula a influência isolada das cargas em cada ponto do radier, totalizando depois os efeitos parciais de cada carga e obtendo os esforços no ponto em estudo.

O método de Gorbunov - Posadov (1959) reproduzido por Selvadurai (12) trata de placas lisas com uma distribuição regular de pilares. O método foi classificado como aproximado por Selvadurai (12) porque não consi-

dera o efeito dos bordos. É um método bastante semelhante ao do ACI (20) .

O método de Zemochkim e Sinitsyn (1947), descrito também por Salvadurai (12) , analisa de forma aproximada placas retangulares apoiadas em um meio elástico. As pressões de contato são determinadas pela compatibilização entre a deformação da laje e do meio elástico , conectados através de barras rígidas, conforme Figura II.6.

Scott (11) apresenta o método de Baker (1948), utilizado também no cálculo de vigas em base elástica e adaptado para o cálculo aproximado de radiers.

- (c) Soluções Numéricas: Consistem em se obter uma solução discreta (em pontos discretos) para o problema que será tão aproximada quanto refinados forem a discretização e o tipo de solução. Pode-se citar como exemplos bastante difundidos os Métodos dos Elementos Finitos , das Diferenças Finitas e dos Elementos de Contorno.

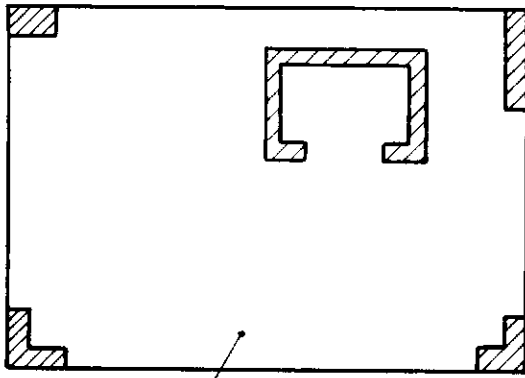
Exemplos do emprego do Método de Elementos Finitos, realizados por Cheung e Zienkiewicz (1965) utilizando elementos retangulares, Svec e Gladwell (1973) utilizando elementos triangulares e Yang (1972) utilizando uma técnica interativa de Elementos Finitos com elementos retangulares, acham-se descritos por Salvadurai (12) . Bowles (9) utiliza elementos de grelha na modelagem através do Método de Elementos Finitos ao invés de elementos de placa.

Exemplos do emprego do Método das Diferenças Finitas

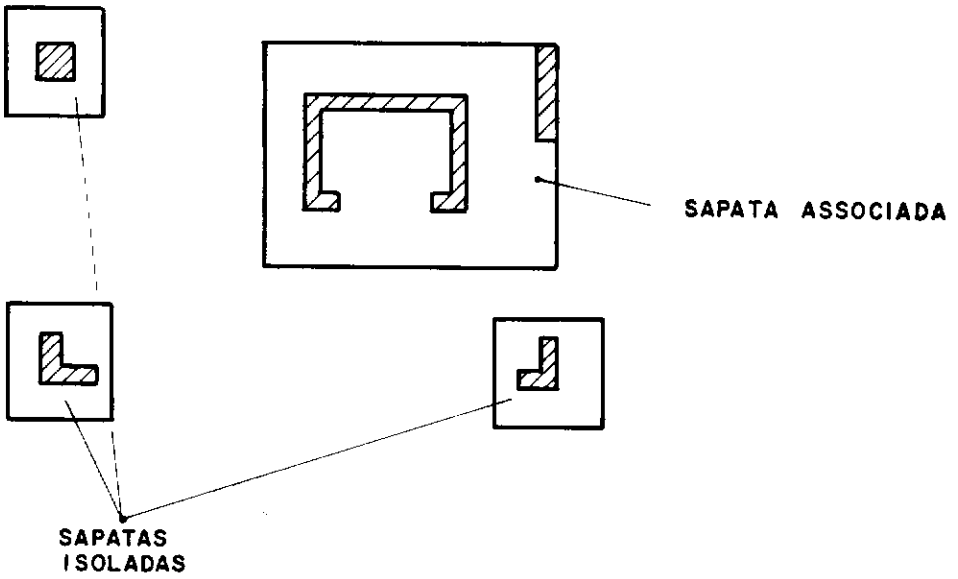
são apresentados por Bowles (9) , através de várias aplicações práticas.

Uma outra forma de discretização é a modelagem proposta por Hudson e Matlock (1966) e ilustrada na Fig. II.7. Uma apresentação resumida deste modelo é feita por Salvadurai (12) .

Outro exemplo de aplicação do Método dos Elementos Finitos a radiers é o trabalho de De Mello (23) .



RADIER

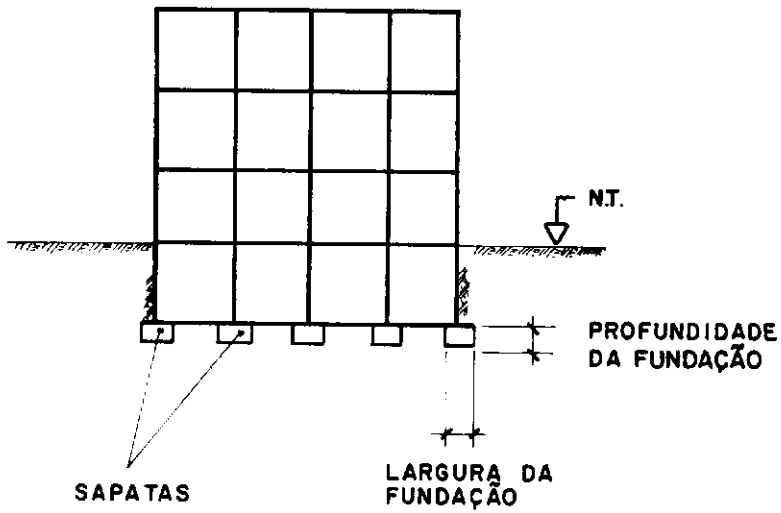


SAPATA ASSOCIADA

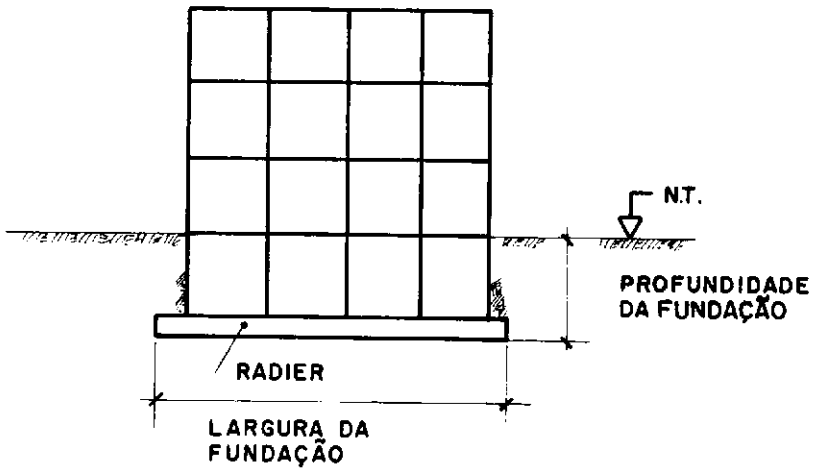
SAPATAS ISOLADAS

FIGII.1 - RADIER E SAPATA ASSOCIADA

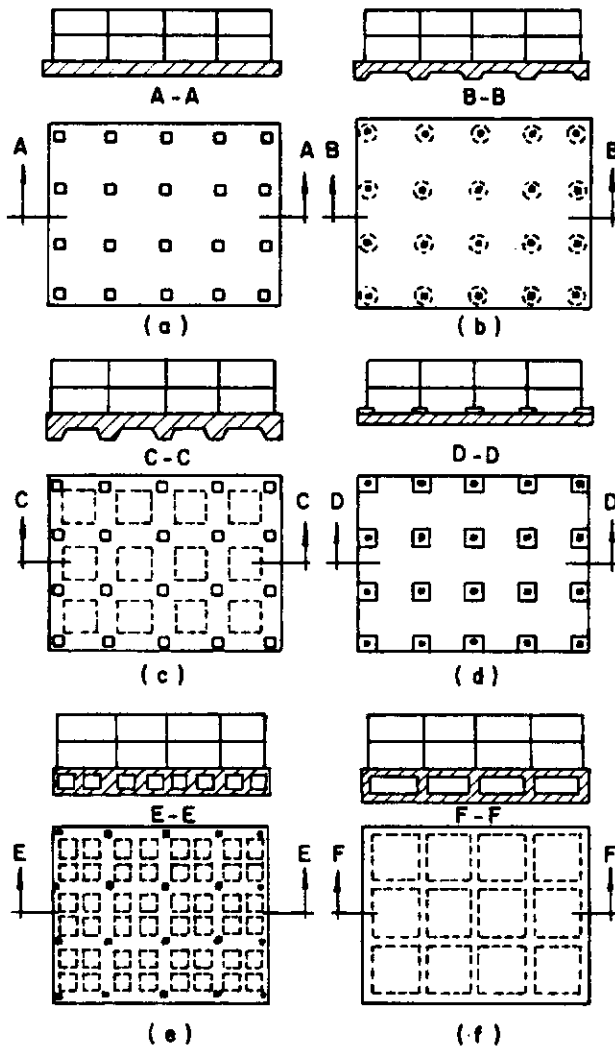
### SAPATAS ISOLADAS



### RADIER



**FIG. II.2 - PROFUNDIDADE E LARGURA DA FUNDAÇÃO NO CASO DE SAPATAS ISOLADAS E RADIER**



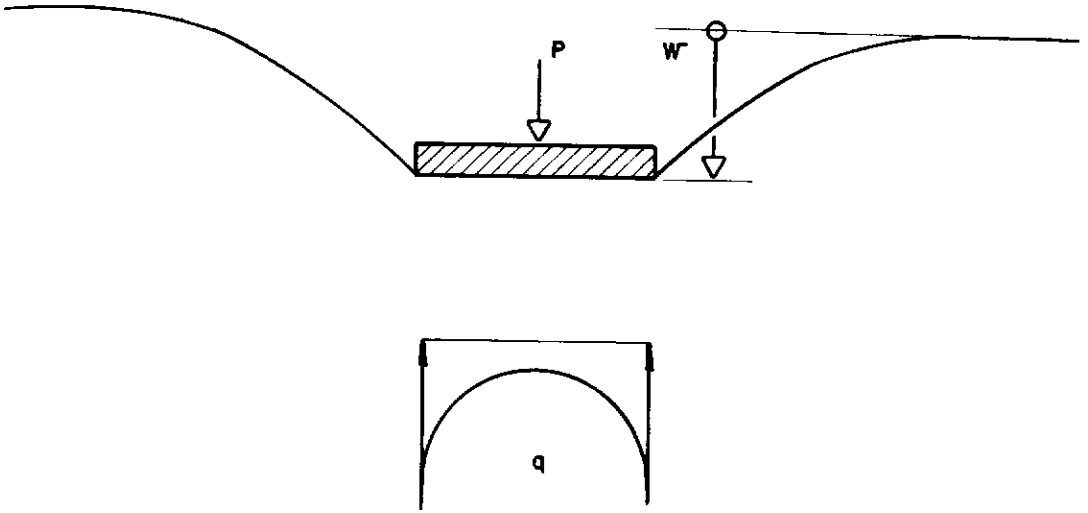
**FIG.II.3 - TIPOS COMUNS DE RADIER**

*a) Radier liso*

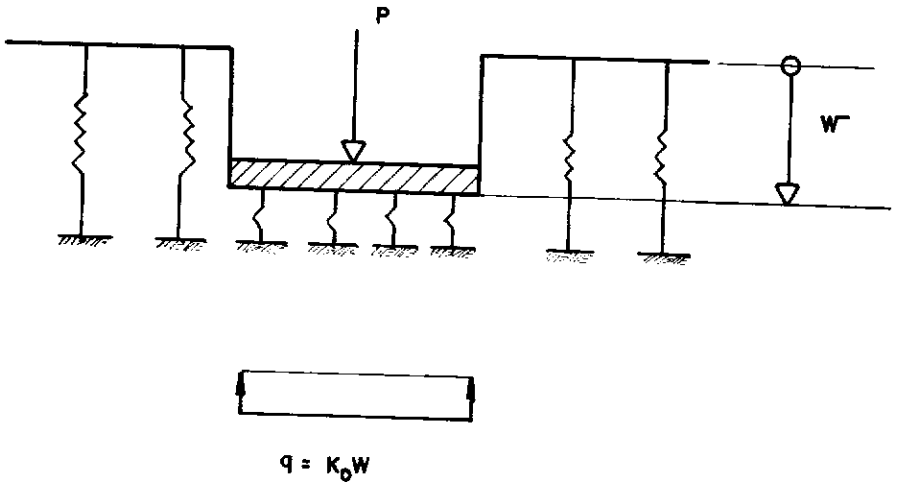
*b) Radier liso com capitel*

*c-d) Radier nervurado*

*e-f) Radier em caixão celular*



**FIG.II. 5-SOLO NA HIPOTESE DE SEMI-ESPAÇO CONTÍNUO.**



**FIG.II. 4-SOLO NA HIPOTESE DE WINKLER**

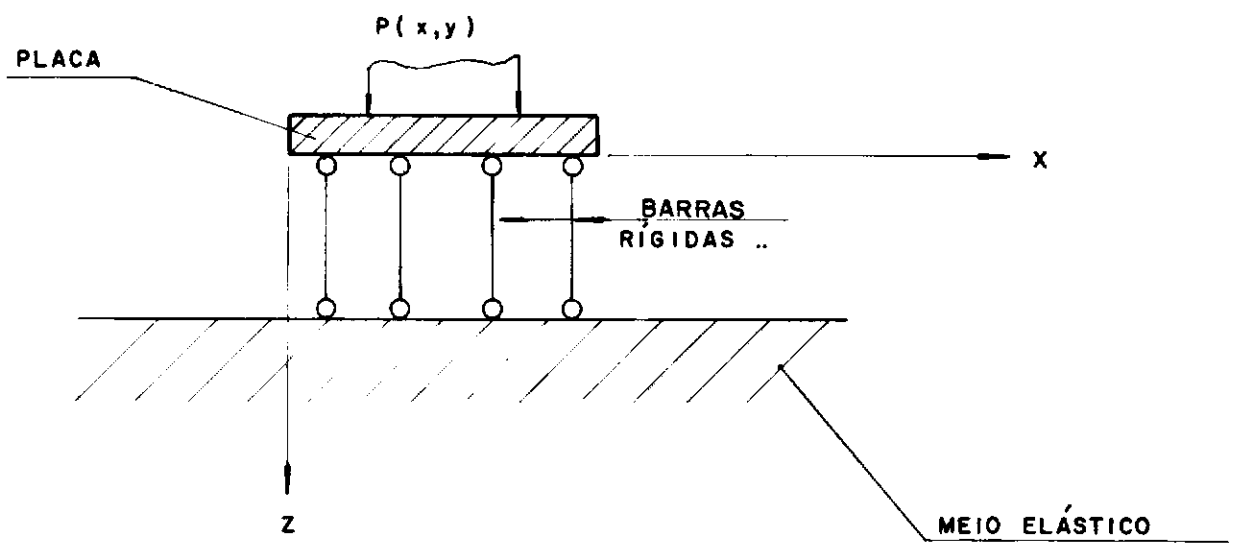
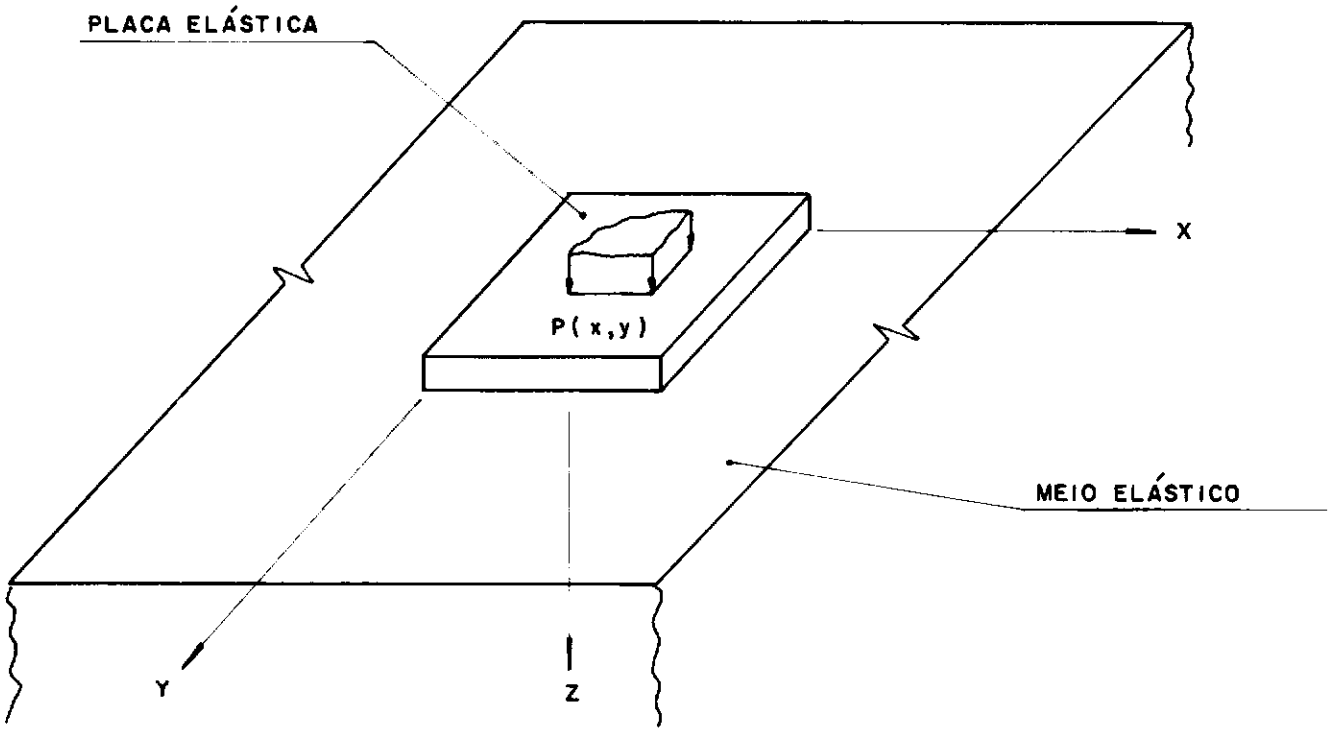
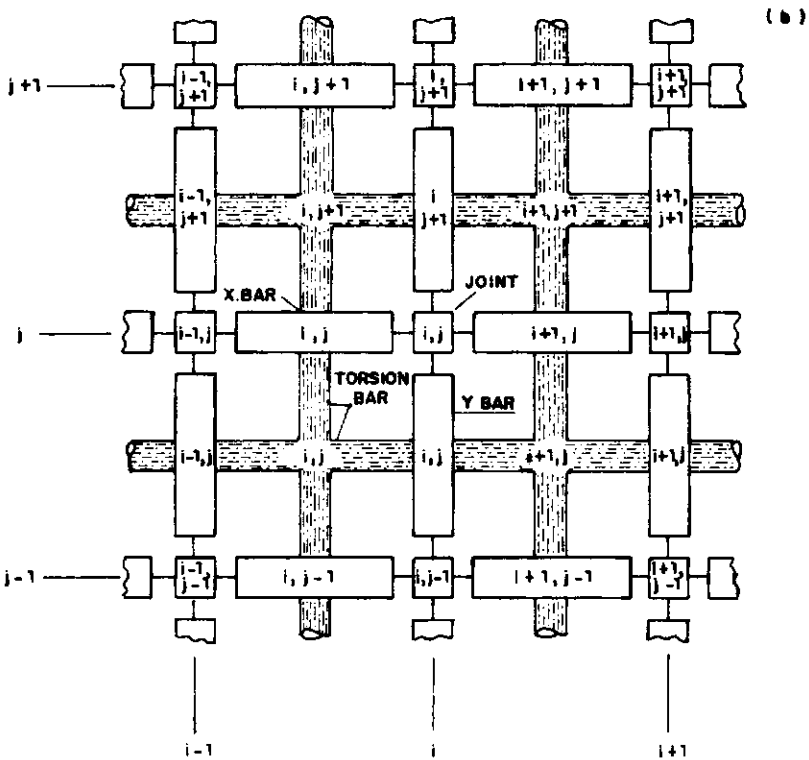
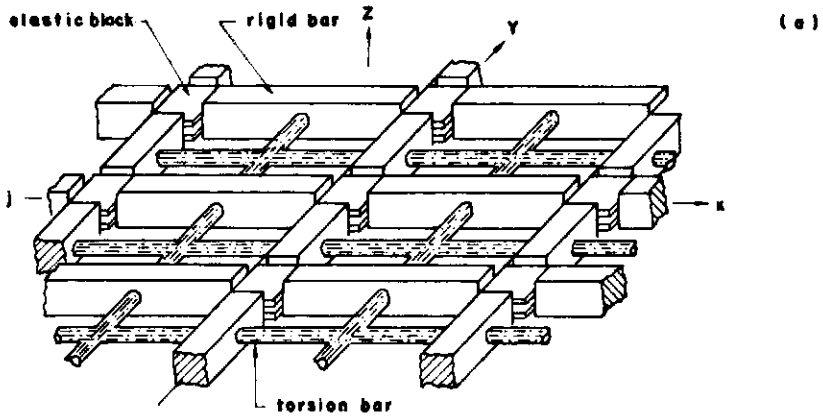


FIG.II.6 - MÉTODO DE ZEMOCHKIN E SINITSYN



(a) The discret element model of a plate or slab.

(b) Plan view of the plate el showing all parts with generalized numbering system ( after HUDSON and Matlock )

**FIG.II.7- a) MODELO DE DISCRETIZAÇÃO DO RADIER**  
**b) MODELAGEM DO RADIER**

## CAPÍTULO III

### MÉTODOS DE CÁLCULO ESTUDADOS

#### III.1 - MÉTODOS SELECIONADOS

Como base para o estudo dos procedimentos de cálculo, selecionou-se os seguintes métodos:

- Método das Diferenças Finitas
- Método da Grelha sobre Base Elástica
- Método da Viga sobre Base Elástica
- Método dos Elementos Finitos
- Método do ACI (20)

#### III.2 - MODELAGEM DO SOLO

O solo será considerado como um material puramente elástico, deformando-se sob a ação de um sistema de forças externas, o qual cessando fará que o mesmo retome à sua configuração inicial.

O modelo adotado para representar o solo será o proposto por Winkler (1867), onde a pressão de contato  $q$  no ponto é diretamente proporcional ao seu deslocamento, independente dos deslocamentos no restante da superfície do radier, ou seja (FIG. III.1):

$$q_{\text{ponto}} = K_0 w_{\text{ponto}}$$

O coeficiente  $K_0$  é denominado coeficiente de reação vertical e será constante com a dimensão  $FL^{-3}$ .

#### III.3 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

##### III.3.1 - Base Teórica

Será analisado o comportamento de uma placa delgada finita apoiada em um meio elástico linear.

Sendo a placa de espessura uniforme  $h$  e tendo como suporte um terreno com modulo de reação vertical constante de valor  $k_0$ , obedecendo ao modelo de Winkler, temos a seguinte equação diferencial para um elemento de placa (FIG.III.2):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} - \frac{k_0 w}{D}$$

$$D = \text{rigidez a flexão da placa} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

$E$  = módulo elasticidade longitudinal do material da placa

$\mu$  = coeficiente de Poisson do material da placa

Para se contornar as dificuldades matemáticas da resolução da equação diferencial acima e obter-se uma solução aproximada, pode-se substituir o meio contínuo da placa por uma malha formada por setores finitos ( FIG.III.3).

A superfície deformada da placa com curvatura contínua se transforma em uma superfície poliedrica, o que significa matematicamente a transformação da equação diferencial parcial em uma equação de diferenças finitas.

Os coeficientes diferenciais são substituídos então por funções dos deslocamentos  $w_k$  dos nós da malha. Usando então uma interpolação com operadores centrais obtem-se:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\Delta x} = \frac{\Delta w_k}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k = \frac{w_l - w_j}{2\Delta y} = \frac{\Delta w_k}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{w_{l+1} - w_{l-1} - w_{i+1} + w_{i-1}}{4 \Delta x \Delta y} = \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x \Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k = \frac{w_l - 2w_k + w_j}{\Delta y^2} = \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_K = \frac{w_{K+2} - 2w_{K+1} + 2w_{K-1} - w_{K-2}}{2\Delta x^3} = \frac{\Delta^3 w_K}{\Delta x^3}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_K = \frac{w_m - 2w_l + 2w_i - w_h}{2\Delta y^3} = \frac{\Delta^3 w_K}{\Delta y^3}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_K &= \frac{4w_K - 2(w_{K+1} + w_{K-1} + w_l + w_i) + (w_{i-1} + w_{i+1} + w_{l+1} + w_{l-1})}{\Delta x^2 \Delta y^2} = \\ &= \frac{\Delta^4 w_K}{\Delta x^2 \Delta y^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_K = \frac{w_{K+2} - 4w_{K+1} + 6w_K - 4w_{K-1} + w_{K-2}}{\Delta x^4} = \frac{\Delta^4 w_K}{\Delta x^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_K = \frac{w_m - 4w_l + 6w_K - 4w_i + w_h}{\Delta y^4} = \frac{\Delta^4 w_K}{\Delta y^4}$$

A equação diferencial de flexão da placa se transforma em:

$$\frac{\Delta^4 w_K}{\Delta x^4} + \frac{2\Delta^4 w_K}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_K}{\Delta y^4} = \frac{p_K}{D} - \frac{k_0 w_K}{D}$$

Examinando as expressões obtidas constata-se que para os pontos da placa próximos ao seu contorno é necessário o uso de nós fictícios situados fora do domínio da placa, conforme mostrado na FIG.III.4.

Nas expressões  $p_K$  é o valor da intensidade da carga distribuída no ponto K fazendo  $\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = \alpha$  temos

$$\begin{aligned} &w_K \left(6 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 8\right) - 4(1 + \alpha)(w_{K+1} + w_{K-1}) + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(w_l + w_i) + 2(w_{i-1} + w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1}) + \\ &+ \alpha(w_{K+2} + w_{K-2}) + \frac{1}{\alpha}(w_m + w_h) = \\ &= p_K \alpha \frac{\Delta x^4}{D} - k_0 w_K \alpha \frac{\Delta x^4}{D} \end{aligned}$$

Caso  $\Delta x = \Delta y = s$ , tem-se uma expressão bastante simplificada.

$$\begin{aligned}
 & 20w_k - 8(w_{k-1} + w_{\ell} + w_{k+1} + w_i) + \\
 & + 2(w_{i-1} + w_{\ell-1} + w_{\ell+1} + w_{i+1}) + \\
 & + (w_{k-2} + w_m + w_{k+2} + w_h) = \\
 & = P_k \frac{s^4}{D} - \kappa_0 w_k \frac{s^4}{D}
 \end{aligned}$$

Utilizando as condições de contorno de Kirchhoff associadas com uma placa retangular com os bordos livre tem-se:

(a) bordos verticais

$$M_x(0, y) = M_x(\ell_x, y) = 0$$

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } x = \ell_x$$

(b) bordos horizontais

$$M_y(x, 0) = M_y(x, \ell_y) = 0$$

$$V_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = \ell_y$$

Adicionalmente tem-se as condições de reações nulas nos cantos das placas:

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \text{ para} & x = 0 & \quad y = 0 \\
 & & x = \ell_x & \quad y = 0 \\
 & & x = 0 & \quad y = \ell_y \\
 & & x = \ell_x & \quad y = \ell_y
 \end{aligned}$$

Considerando uma malha de m x n pontos nodais tem-se para o sistema mostrado na FIG.III.5 um total de (mn + 4m + 4n + 4) incôgnitas ou seja deslocamentos verticais  $w_k$ .

Pelas equações aplicadas a cada ponto da malha dentro do domínio da placa obtêm-se mn equações.

Considerando as condições de contorno de Kirchhoff de momento fletor  $M_x$  e  $M_y$  nulos bem como  $V_x$  e  $V_y$  tem-se 4 (m + n) equações adicionais.

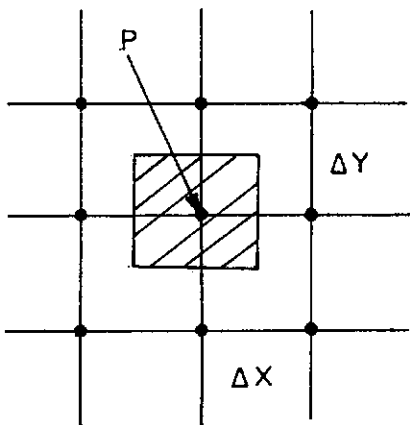
As 4 (quatro) equações remanescentes são obtidas através da condição de reação nula nos cantos da placa.

Consequentemente a partir desse conjunto de equações linearmente independentes, os deslocamentos  $w_k$  podem ser obtidos através da resolução do sistema assim gerado.

O número de equações pode ser bastante reduzido ao se utilizar as condições de contorno, exprimindo-se os valores dos deslocamentos dos pontos fictícios em termos de deslocamentos dos pontos do domínio da placa, restando portanto um sistema de  $m \times n$  equações que fornecerão diretamente os valores das  $m \times n$  deslocamentos  $w_k$  dos pontos nodais da placa.

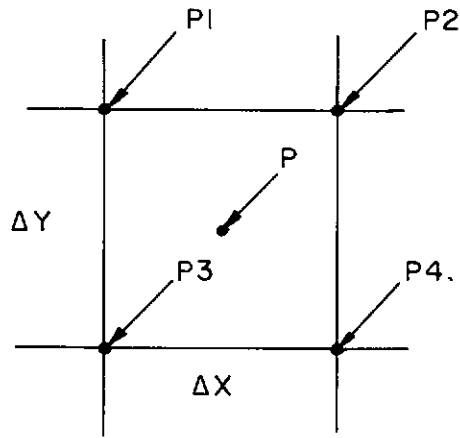
Esse processo é utilizado por Joseph E. Bowles (9) e reproduzido nas figuras III.6 e III.7.

Nas deduções feitas até o momento, assumiu-se que a carga externa atuante em toda placa seja um carregamento distribuído de intensidade  $P = P(x, y)$  com a dimensão  $FL^{-2}$ . Quando a carga aplicada for concentrada em um ponto do domínio de placa, seus efeitos podem ser levados em consideração de uma maneira aproximada, substituindo-a por uma carga distribuída equivalente, como abaixo.



carga concentrada:  $p$   
 carga distribuída equivalente:  $p = \frac{P}{\Delta x \Delta y}$

Se a carga concentrada não atuar exatamente em um n<sup>o</sup> da placa, basta distribuí-la pelos n<sup>os</sup> vizinhos, como abaixo:



Incluindo a carga concentrada, a equação diferencial de flexão da placa em termos de diferenças finitas será:

$$\frac{\Delta^4 w_K}{\Delta x^4} + \frac{2\Delta^4 w_K}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_K}{\Delta y^4} = \frac{P}{D} - \frac{P_K}{D} + \frac{P_K}{D\Delta x \Delta y}$$

$\nearrow P_K$ 
 $\nearrow P$

Após o cálculo dos deslocamentos dos pontos da malha pode-se também empregando a interpolação por diferenças finitas centrais calcular os esforços solicitantes e reações do terreno, conforme mostrado a seguir na FIG.III.8.

Pela teoria das placas temos as seguintes equações diferenciais parciais que exprimem os valores dos momentos fletores e esforços cortantes:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{yx} = -M_{xy} = -D (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{y,x}}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{x,y}}{\partial x}$$

Utilizando-se diferenças finitas temos as seguintes expressões em termos dos deslocamentos nodais para um ponto K genérico

$$M_{x,k} = D \left( \frac{-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{\mu(-w_i + 2w_k - w_l)}{\Delta y^2} \right)$$

$$M_{y,x} = D \left( \frac{\mu(-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1})}{\Delta x^2} + \frac{(-w_i + 2w_k - w_l)}{\Delta y^2} \right)$$

$$M_{xy,k} = \frac{D(1-\mu)}{4\Delta x \Delta y} (w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i-1} + w_{i+1})$$

$$Q_{x,k} \approx \frac{M_{x,k+1} - M_{x,k-1}}{2\Delta x}$$

$$Q_{y,k} \approx \frac{M_{y,l} - M_{y,i}}{2\Delta y}$$

As pressões no terreno são obtidas facilmente através do conceito do módulo de reação vertical do terreno.

$$K_o = \frac{q_k}{\Delta x \Delta y w_k}$$

$$q_k = K_o \Delta x \Delta y w_k$$

Os esforços cortantes obtidos são expressos por unidade de comprimento  $FL^{-1}$  o mesmo ocorrendo para os momentos fletores  $FLL^{-1}$  ( dimensão de força).

### III.3.2 - Condições Gerais de Aplicação

Para os casos de radier com formato regular na sua geometria.

No caso de placas com reentrâncias ou saliências, a montagem das equações se torna bastante complexa nos limites do domínio da estrutura.

Teoricamente é sempre possível estabelecer-se um sistema de equações linearmente independentes que simulem as condições de contorno da placa, e cuja solução nos forneça os valores dos deslocamentos da estrutura.

### III.3.3 - Metodologia de Cálculo Empregada

Para a aplicação e análise do método da resolução de placas, empregando a interpolação por diferenças finitas, foi desenvolvido um programa em linguagem BASIC para o micro-computador da linha PC com aproximadamente 60 K de memória RAM.

Este programa foi baseado na metodologia empregada por Bowles (9) .

Com o objetivo de se aperfeiçoar a metodologia empregada por Bowles (9) , utilizou-se a técnica do armazenamento dos coeficientes das equações em forma de matriz retangular e o conceito de faixa, bem como a resolução do sistema de equações pelo método de Gauss, o que não é feito por Bowles (9) . Obtivemos assim uma grande economia de posições de memórias do micro-computador. Esta adaptação foi realizada de acordo com os conceitos desenvolvidos na disciplina Técnicas Computacionais em Análise Estrutural da COPPE-UF RJ.

### III.3.4 - Estrutura Básica do Programa

O programa subdivide o radier gerando automaticamente uma malha retangular com  $m$  divisões na direção horizontal ( $X$ ) e  $n$  divisões na direção vertical ( $Y$ ). (FIG.III.9)

Os dados necessários para a definição da geometria, mate-

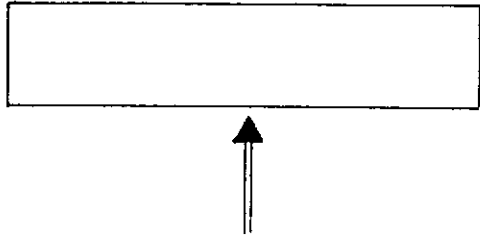
rial e carregamento atuante no radier são introduzidos via teclado:

- título do programa
- vão na direção X
- vão na direção Y
- divisões na direção X
- divisões na direção Y
- módulo de reação vertical do terreno  $K_0$
- espessura do radier =  $h$
- módulo de elasticidade do radier =  $E$
- peso específico do radier ( o programa concentra as cargas devidas ao peso próprio nos pontos da malha)
- coeficiente de Poisson do radier =  $\mu$
- valores das intensidades das cargas concentradas e seus respectivos pontos de aplicação =  $P_K$

No caso de carga externa distribuída, basta se adotar um peso específico equivalente para se levar em consideração a ação deste tipo de carregamento.

O programa realiza automaticamente a subdivisão do radier gerando uma malha formada por elementos retangulares.

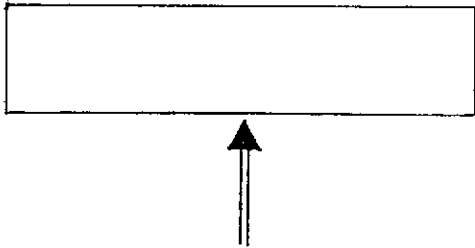
Utilizando-se os coeficientes de deslocamento de cada ponto segundo Bowles (9) (FIG.III.6), monta-se ponto a ponto a respectiva equação diferencial da placa em termos de diferenças finitas, já embutidas as condições de contorno para os bordos livres



$$= \frac{p_k r^2 h^4}{D} + \frac{P_k r h^2}{D} - \frac{k_o r^2 h^4 w_k}{D}$$

equação de deslocamento  
do ponto

Como os coeficientes dos deslocamentos do Bowles (9) estão divididos por  $r^2$  teremos:



$$+ \frac{k_o h^4 w_k}{D} = \underbrace{\frac{p_k h^4}{D} + \frac{P_k h^2}{rD}}_{\text{termos de carga}}$$

equação com os coeficientes  
divididos por  $r^2$

termos de carga

O programa utiliza a matriz  $\tilde{W}$  para armazenar os coeficientes dos deslocamentos de cada ponto em que o raio é dividido. É como se fosse a "matriz de rigidez do ponto", análogo à matriz de rigidez de uma barra em estruturas reticuladas (FIG.III.10 e III.11)

A equação montada é a seguir armazenada na matriz  $\tilde{Y}$ .

Repetindo-se este processo para cada ponto do radier temos desta forma um sistema  $K \times K$  de equações linearmente independentes, sendo  $K$  o número de pontos nodais:  $K = (m+1) \times (n+1)$ . A matriz  $\tilde{Y}$  é a "matriz de rigidez do radier", análogo à matriz de rigidez global de uma estrutura.

Ao montar-se a matriz  $\tilde{Y}$  (FIG.III.12), nota-se que ela é simétrica, positiva definida e possui um índice de esparsidade bastante elevada.

Para se evitar o desperdício de posições de memória com armazenamento de grande quantidade de termos nulos, pode-se trabalhar com os coeficientes da matriz  $\tilde{Y}$  em um arranjo retangular, contendo somente os elementos não nulos situados na diagonal principal e na parte superior da mesma, utilizando-se a técnica da largura de faixa.

No nosso caso a largura de faixa será:  $(m+1) \times 2+1 = 2m+3$ , onde  $m$  é o nº de divisões do radier na direção  $X$ .

A matriz  $\tilde{Y}$  se transforma da dimensão  $K \times K$  para a dimensão  $(K, 2m+4)$ , já se utilizando uma coluna para o armazenamento dos termos de carga (FIG.III.13).

O programa realiza a resolução do sistema de equação utilizando o método de Gauss, conforme o algoritmo descrito por Humberto Lima Soriano (3), obtendo-se os deslocamentos verticais dos pontos nodais da malha do radier.

Verifica-se se houve tração em cada nó, eliminando-se a parcela de reação do terreno nos pontos onde tal fato ocorre:

$$\frac{K_o h^4 w_k}{D} = 0$$
, repetindo-se o processo até chegar-se a todos os valores de reação no solo de compressão.

O programa executa o cálculo ponto a ponto dos esforços so

licitantes utilizando os deslocamentos calculadas, e finalmente imprime os valores dos deslocamentos, momentos fletores e torsões.

Através do somatório das reações no solo calculadas a partir dos deslocamentos pode-se comparar com a resultante das cargas aplicadas, verificando-se assim a precisão dos resultados.

O fluxograma básico da estrutura do programa e a respectiva listagem encontram-se no Apêndice A.

### III.4 - MÉTODO DA GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA

#### III.4.1 - Base Teórica

Será analisado o comportamento de uma placa finita, subdividida em uma série de vigas fictícias apoiadas em um meio elástico linear (FIG.III.14).

Temos então uma grelha formada pelas várias vigas em que foi subdividido o radier, com as respectivas cargas aplicadas.

A reação do solo será discretizada nos pontos nodais da malha, através de uma mola linear com rigidez constante  $K$  (FIG. III.15).

Caso o solo possua um módulo de reação vertical  $K_0$ , com a dimensão ( $FL^{-3}$ ), a rigidez de cada mola será obtida diretamente através do produto de  $K_0$  pela área de influência respectiva da mola (FIG.III.16).

A dimensão da rigidez  $K$  será ( $FL^{-1}$ ).

Note-se que o somatório das rigidez de cada mola deverá ser igual ao produto do módulo de reação vertical do terreno pela

$$\begin{aligned} \text{área do radier: } & i = n^{\circ} \text{ molas} \\ & \sum_{i=1} K_i = K_0 \times \text{área radier} \\ & i = 1 \end{aligned}$$

As constantes elásticas da grelha serão idênticas ao do radier ou sejam módulos de elasticidade longitudinal( $E$ ) e trans

versal (G).

O peso específico adotado será a metade do peso específico do radier, já que ele entra no cálculo em ambas as direções X e Y.

As barras de grelha serão dotadas de características geométricas que conferir-lhes a rigidez a flexão e a torção (FIG.III.17).

Efetuada o cálculo estático da grelha obtemos então os valores dos esforços solicitantes e das reações do terreno.

Mostra-se na FIG.III.18 um nó típico da grelha com os resultados obtidos e o respectivo cálculo dos momentos fletores nas direções X e Y, que deve ser feito utilizando-se os momentos fletores e de torção do nó, conforme descrito por Bowles (9).

Como alternativa pode-se realizar o cálculo da grelha sem a consideração da rigidez à torção das vigas, conforme descrito por Kurt Beyer (13). Neste caso os valores dos momentos fletores obtidos em cada nó serão diretamente os momentos  $M_x$  e  $M_y$  da placa no ponto em questão. (FIG.III.19).

#### III.4.2 - Condições Gerais de Aplicação

Este método pode ser empregado para qualquer radier com a mais diversa configuração geométrica, incluindo alturas variáveis, furos e reentrâncias.

O sistema de cargas também pode ser bastante diversificado tais como:

- momentos fletores e de torção concentrados.
- cargas distribuídas e concentradas em qualquer posição
- deslocamentos impostos

Pode-se, também, variando a rigidez da mola em cada ponto, simular-se possíveis heterogeneidades do terreno de fundação.

### III.4.3 - Metodologia de Cálculo Empregada

Para a aplicação deste método nos exemplos numéricos, foi utilizado o sistema LORANE LINEAR implantado no NCE da UFRJ.

Utilizou-se o elemento de grelha abaixo detalhado:

Nome: "GP"

Plano de definição: XY

Incôgnitas nodais: w, u, v

Características básicas: uma grelha é uma estrutura contida em um plano, com carregamento perpendicular ao plano ou momentos cujos eixos estão contidos no plano da grelha. As solicitações são esforços cortante, momento fletor e momento torsor, e respectivos deslocamentos. Opicionalmente pode-se levar em conta a deformação por corte, na consideração dos deslocamentos. O elemento é linear, de eixo reto.

## III.5 - MÉTODO DA VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA

### III.5.1 - Base Teórica

A base teórica é a mesma empregada no caso do método de grelha sobre base elástica descrito no Item III.4.

A placa é subdividida em uma série de vigas em ambas as direções (FIG.III.14), e o solo modelizado por molas lineares de constante  $K$  ( $FL^{-1}$ ). (FIG.III.16).

A diferença fundamental consiste no cálculo estático da placa nas direções X e Y sem a consideração da continuidade entre as várias faixas.

O método realiza o cálculo das várias vigas sem a consideração de qualquer interação entre elas.(FIG.III.20).

As constantes elásticas das vigas são as mesmas do radier:

- modulo de elasticidade: E

O peso específico e os carregamentos externos serão adotados na sua totalidade para o cálculo em ambas as direções X e Y do radier.

As barras das vigas serão dotadas somente de rigidez a flexão.(FIG.III.21).

Efetuada o cálculo estático das várias vigas, temos os valores dos esforços solicitantes, reações do terreno e a linha elástica das vigas em configuração deformada.

Conforme demonstrado este método é um caso particular do método da grelha sobre base elástica.

### III.5.2 - Condições Gerais de Aplicação

As mesmas condições do método da grelha, ressaltando-se sempre que deve-se avaliar com bastante critério o fato de não se levar em consideração as interações entre as várias faixas nas quais o radier foi subdividido.

### III.5.3 - Metodologia de Cálculo Empregado

Para a aplicação deste método nos exemplos numéricos, utilizou-se o sistema LORANE LINEAR e o SAP IV implantado no NCE da UFRJ.

Foi utilizado sempre o elemento de pórtico plano sobre vínculos elásticos para se especificar as constantes de mola de cada ponto.

## III.6 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### III.6.1 - Base Teórica

Considerando-se o caso de uma placa finita sobre um meio

elástico linear segundo a modelagem de Winkler.

O domínio da placa é dividido em uma malha de elementos de placa.(FIG.III.22).

A superfície de contato entre o radier e o terreno é representado por um conjunto de molas situadas nos pontos nodais da malha. Desta maneira a reação do terreno será transmitida a placa por uma série de cargas concentradas oriundas das reações das molas.(FIG.III.23).

A rigidez de cada mola  $K$  com a dimensão  $(FL^{-1})$  será calculada a partir do produto  $K_0 \times (\Delta x \Delta y)$ , onde  $K_0$   $(FL^{-3})$  é o módulo de reação vertical do terreno e  $(\Delta x \Delta y)$  a área do solo representada pela mola.(FIG.III.23).

Os elementos de placas são supostos interligados nos pontos nodais e os deslocamentos destes pontos são as incógnitas básicas.

Uma função (ou conjunto de funções) é escolhida para definir univocamente o estado de deslocamentos de cada elemento em termos dos deslocamentos nodais.

As funções dos deslocamentos definem também univocamente as deformações específicas de cada ponto nodal em termos dos seus deslocamentos.

A partir das deformações específicas e das propriedades elásticas dos materiais, o estado de tensões do elemento é definido empregando as relações constitutivas.

Baseado nas funções que definem o estado de deslocamentos é desenvolvida a matriz de rigidez de cada elemento  $\tilde{K}$ , utilizando-se o princípio do trabalho virtual ou o princípio da energia potencial total mínima. A matriz de rigidez  $\tilde{K}$  relaciona o sistema das forças  $\tilde{F}^*$  concentradas nos pontos nodais com os seus respectivos deslocamentos  $\tilde{\delta}$ . O sistema de forças nodais em equilíbrio com

os esforços atuantes no contorno do elemento e em conjunto com as cargas externas distribuídas no elemento, resultam numa relação de rigidez do tipo abaixo:

$$\tilde{\mathbf{F}}^* + \tilde{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbf{F}}_E = \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}$$

onde:

- $\tilde{\mathbf{F}}_p$  é o vetor de forças nodais que simulam as cargas distribuídas aplicadas ao elemento.
- $\tilde{\mathbf{F}}_E$  é o vetor de forças nodais que simulam as condições de contorno iniciais.
- $\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}$  representa o sistema de forças induzidas pelos deslocamentos nodais.

Nem sempre as funções dos deslocamentos adotados para o elemento conseguem satisfazer a continuidade dos deslocamentos entre elementos adjacentes. Esta compatibilidade pode ser violada nos contornos, porém sempre existirá no seu interior e nos pontos nodais devido a solução ser unívoca.

Ao substituir-se as cargas aplicadas por cargas nodais equivalentes, as condições de equilíbrio global serão sempre satisfeitas, o mesmo porém poderá não ocorrer para pontos no interior e no contorno dos elementos.

Após a determinação da matriz de rigidez de cada elemento, obtêm-se a matriz de rigidez global da placa pela superposição da contribuição em cada ponto nodal dos diversos elementos que nele incidem.

Pela formulação e resolução das equações de equilíbrio exprimindo o relacionamento entre as forças nodais aplicadas e o respectivo deslocamento, calculam-se as incógnitas básicas que são os respectivos deslocamentos nodais de cada ponto da malha.

A partir dos deslocamentos obtidos e utilizando-se a rigidez de cada elemento pode-se determinar o correspondente estado de tensões do elemento, os quais integrados fornecerão os esforços solicitantes.

### III.6.2- Considerações Gerais de Aplicação

As mesmas descritas no método da grelha sobre base elástica. Convém porém resaltar que a precisão dos resultados está estreitamente ligada ao tipo de elemento adotado, à malha utilizada na modelagem do radier, e ao seu refinamento.

Como exemplo cita-se que o elemento retangular R12 de quatro nós utilizado em flexão de placas apresenta pouca confiabilidade nos resultados relativos aos valores dos momentos de torção.

Este elemento é utilizado pelos programas SAP VI e LORANE.

### III.6.3 - Metodologia de Cálculo Empregada

Para a aplicação do método dos elementos finitos, foi utilizado o sistema LORANE LINEAR e o tipo de elemento descrito abaixo:

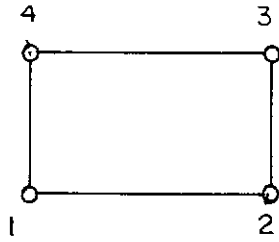
Nome: FPRNC (elemento retangular não conforme)

Plano de definição: XY

Incôgnitas nodais: w, ru, rv

Modelo: de deslocamentos

Características básicas: este é um elemento de placa delgada, retangular de quatro nós. A implementação deste elemento é baseado em uma variação do tipo polinômio incompleto de quarta ordem para o deslocamento transversal w. Não existindo compatibilidade inter-elemento para os pendentés normais aos lados do elemento, o mesmo resulta ser do tipo não conforme.



FPRNC

Na literatura este elemento é conhecido como R12.

### III.7 - MÉTODO DO ACI (20)

#### III.7.1 - Base Teórica

O método do ACI é baseado na solução de Westergaard para placas de pavimentos apoiadas em um meio elástico linear (FIG. III.24).

Neste caso a equação diferencial da placa delgada de espessura constante  $h$  suportada por um solo com um módulo de reação vertical uniforme de valor  $K_0$ , segundo o modelo de Winkler é:

$$D \left( \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2 d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} \right) + K_0 w = 0$$

$$D = \text{rigidez a flexão da placa} = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

$E$  = módulo elasticidade longitudinal do material da placa

$\mu$  = coeficiente de Poisson do material da placa

Considerando a atuação de uma carga concentrada na origem, podemos tratar o modelo como axissimétrico reescrevendo a equação diferencial em termos de coordenadas polares, já tirando partido da simetria de revolução onde as grandezas independem do ângulo  $\theta$ . (FIG. III.25).

$$D \left( \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) + K_0 w = 0$$

Sendo nulo o carregamento externo distribuído  $p$ .

Definindo a grandeza  $L = \sqrt[4]{\frac{D}{K}}$  como o raio da rigidez efetiva, a solução da equação diferencial acima será:

$$W = C_1 Z_1(x/L) + C_2 Z_2(x/L) + C_3 Z_3(x/L) + C_4 Z_4(x/L)$$

onde:

$$C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{constantes}$$

$$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 = \text{funções de caráter exponencial}$$

sendo  $x = r/L$  o argumento, as funções  $Z_i$  podem ser escritas na forma de série de potenciais conforme mostrado a seguir:

$$Z_1(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2! \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{4! \cdot 2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{12}}{6! \cdot 2} + \dots$$

$$Z_2(x) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1! \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3! \cdot 2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{5! \cdot 2} + \dots$$

$$Z_3(x) = \frac{Z_1(x)}{2} - \frac{2}{\pi} \left( R_1 + \log_e \left\{ \frac{\gamma x}{2} \right\} \right) \times Z_2(x)$$

$$Z_4(x) = \frac{Z_2(x)}{2} + \frac{2}{\pi} \left( R_2 + \log_e \left\{ \frac{\gamma x}{2} \right\} \right) \times Z_1(x)$$

$$R_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{f(3)}{3! \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{f(5)}{5! \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \dots$$

$$R_2 = \frac{f(2)}{2! \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{f(4)}{4! \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^8 + \frac{f(6)}{6! \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{12} - \dots$$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\log_e \gamma = 0.577216 = \text{constante de Euler}$$

Apresenta-se a seguir o gráfico das funções  $Z_i$  e das suas primeiras derivadas ( FIG.III.26)

Conforme os gráficos apresentados nota-se que  $Z_1$  e  $Z_2$  crescem rapidamente com o acréscimo do argumento  $x$  sendo que  $Z_3$  e  $Z_4$  ao contrário decrescem rapidamente com o acréscimo do argumento  $x$ .

Retomando ao cálculo inicial, considerando uma laje infinita carregada na origem por uma carga concentrada  $P$ , atuando portanto em  $r = 0$ , serão determinadas as constantes  $C_i$ , conforme a análise apresentada por Hetenyi (18):

- deslocamento vertical e rotação da placa nulos em  $r = \infty \rightarrow C_1 = C_2 = 0$

- rotação nula na origem em  $r = 0 \rightarrow C_4 = 0$

A equação solução da linha elástica será:

$$W = C_3 Z_3 (r/L)$$

A constante  $C_3$  é obtida igualando-se a carga aplicada  $P$  com a reação do terreno na hipótese de Winkler, obtendo-se então:

$$W = \frac{PL^2}{4D} Z_3 (r/L)$$

Os esforços solicitantes e as rotações são obtidos através das equações diferenciais correspondentes:

$$\theta = \frac{dw}{dr} = \frac{PL^2}{4D} Z'_3 (r/L)$$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{P}{4} (Z_4(r/L) - (1-\mu) \frac{Z'_3(r/L)}{r/L})$$

$$M_\theta = -D \left( \mu \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{P}{4} (\mu Z_4(r/L) + (1-\mu) \frac{Z'_3(r/L)}{r/L})$$

$$Q_r = -D \left( \frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{P}{4L} Z'_4 (r/L)$$

onde  $Z'_3$  e  $Z'_4$  são as primeiras derivadas de  $Z_3$  e  $Z_4$ .

Para a análise dos resultados obtidos serão plotados (FIG. III.27) os valores dos esforços e deslocamentos obtidos, ressaltando-se que os momentos são expressos por unidade de comprimento

ou seja com a seguinte dimensão  $(FL^{-1})$  ( dimensão de Força F ) e o esforço cortante também por unidade de comprimento  $(FL^{-1})$ .

Pela análise dos diagramas obtidos verifica-se que os efeitos gerados pela carga concentrada P são rapidamente amortecidos, e que para distâncias da ordem de  $x = \frac{r}{L} \geq 5$  os valores remanescentes são praticamente nulos, ou seja para distâncias  $r \geq 5 L$  os efeitos gerados pelo carregamento são desprezíveis.

Outro fato que os diagramas apontam, é que os esforços gerados na origem  $r = 0$  ou seja no ponto de aplicação da carga tendem para infinito.

Isto mostra que a teoria aplicada ao nosso modelo não é satisfatória nas regiões próximas à carga concentrada.

Para se contornar esta falha será assumido que na realidade a força concentrada se distribui em uma pequena área, por exemplo sobre um círculo de raio C. (FIG.III.28).

Neste caso segundo "STRESSES ON CONCRETE PAVEMENTS COMPUTED BY THEORETICAL ANALYSIS de WESTERGAARD" descritos por Selvadurai (12) e Scott (11) os esforços solicitantes no ponto de aplicação da carga serão:

$$M_r (r=0) = M_\theta (r=0) = \frac{(1 + \mu)P}{4\pi} \left( \log_e \frac{2L}{C} + \frac{1}{2} - \gamma \right)$$

$$\gamma = \text{constante de Euler} = 0.5772157$$

$$Q_r (r=0) = \frac{P}{2\pi C}$$

Para se converter os esforços obtidos em termos de coor-

denadas polares para cartesianas, usaremos o procedimento normal da teoria das placas abaixo resumido:

$$M_x = M_r \cos^2 \theta + M_\theta \sin^2 \theta$$

$$M_y = M_r \sin^2 \theta + M_\theta \cos^2 \theta$$

$$Q_x = Q_r \cos \theta$$

$$Q_y = Q_r \sin \theta$$

### III.7.2 - Condições Gerais de Aplicação (ACI (20) item 7.3)

Para os casos gerais de radiers suportando cargas com posições e valores aleatórios, o procedimento de projeto pode ser baseado na teoria vista. Os efeitos gerados pelas cargas concentradas, conforme foi demonstrado, são rapidamente amortecidos. Desta maneira é possível considerar o radier como uma placa e determinar os efeitos das cargas na vizinhança da mesma ou seja  $r \leq 5 L$ .

Usando o princípio de superposição, pode-se determinar os esforços solicitantes e deslocamentos em qualquer ponto do radier, considerando apenas as cargas na zona de influência do ponto. Esta zona de influência geralmente não é muito extensa, não sendo necessário considerar muitas cargas para o cálculo. Como o efeito da carga em um determinado ponto é transmitido pelo radier na direção radial, o uso de coordenadas polares se impõe.

O seguinte roteiro é recomendado:

(1) Determinação da espessura do radier levando em conta o efeito de punção.

(2) Determinação do módulo de reação vertical  $K_0$  do terreno.

(3) Cálculo da rigidez à flexão da placa  $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$

$E$  = modulo elasticidade longitudinal

$\mu$  = coeficiente de Poisson

(4) Cálculo do raio da rigidez efetiva

$$L = \sqrt[4]{\frac{D}{K_0}}$$

(5) Cálculo dos momentos radial e tangencial máximo atuantes no radier em cada ponto utilizado para o dimensionamento

$$M_r = - \frac{P}{4} \left( Z_4 \left( \frac{r}{L} \right) - (1-\mu) \frac{Z_3' \left( \frac{r}{L} \right)}{r/L} \right)$$

$$M_\theta = - \frac{P}{4} \left( \mu Z_4 \left( \frac{r}{L} \right) + (1-\mu) \frac{Z_3' \left( \frac{r}{L} \right)}{r/L} \right)$$

$r$  = distância da carga ao ponto em estudo (metros)

$M_r$  = momento radial ( mt/m )

$M_\theta$  = momento tangencial ( mt/m )

$P$  = carga concentrada ( t )

$Z_3'$  e  $Z_4$  = funções descritas na teoria apresentada

(6) Conversão dos esforços para coordenadas retangulares

$$M_x = M_r \cos^2 \theta + M_\theta \sin^2 \theta$$

$$M_y = M_r \sin^2 \theta + M_\theta \cos^2 \theta$$

(7) Cálculo do esforço cortante radial

$$Q_r = - \frac{P}{4L} Z_4' \left( \frac{r}{L} \right)$$

$Q_r$  = cortante radial ( t/m )

$Z_4'$  = função descrita na teoria apresentada

(8) Quando o contorno do radier estiver na zona de influência das cargas aplicadas, os esforços deverão ser computados ao longo do contorno como se a descontinuidade não existisse. Momentos e cortantes de módulos iguais e sinais contrários aos calculados deverão ser aplicados no contorno para restabelecer as condições de momento e cortante nulos ao longo dos bordos livres.

Os efeitos dessas correções devem ser somados aos já calculados para cada ponto do radier.

(9) (item não incluído no ACI)

Para os pontos situados sobre as cargas aplicadas, os valores dos esforços solicitantes serão calculados conforme Selva durai (12) e Scott (11).

$$M_r (r=0) = M_\theta (r=0) = \frac{(1-\nu) P}{4\pi} \log_e \frac{2L}{C} + \frac{1}{2} - \gamma$$

$$\gamma = \text{constante de Euler} = 0.5772157$$

$C$  = raio da seção transversal do pilar ou no caso de pilar quadrado de lado  $s$  o valor de  $C$  é  $C = 0.56418 s$

$$Q_r (r=0) = \frac{P}{2\pi C} \quad - \text{pilar com seção circular}$$

$$Q_r (r=0) = \frac{P}{4s} \quad - \text{pilar com seção quadrada de lado } s$$

### III.7.3 - Metodologia de Cálculo Empregada

Para a aplicação deste método aos exemplos numéricos, foi desenvolvido um programa em linguagem BASIC para o micro computador DISMAC da linha Apple com 48 K de memória RAM.

### III.7.4 - Estrutura Básica do Programa

O programa gera uma reticula de pontos nodais formando uma malha retangular com  $m$  divisões na direção  $X$  (horizontal) e  $n$  divisões na direção  $Y$ . (vertical) - FIG.III.29.

Utiliza-se então uma matriz de trabalho  $\tilde{Y}$  para armazenamento das coordenadas dos pontos nodais gerados, das cargas aplicadas e dos esforços solicitantes a serem calculados.(FIG.III.30)

Os dados necessários à inicialização do programa são introduzidos via teclado, tais como:

- título do programa
- vão na direção X
- vão na direção Y
- divisões na direção X
- divisões na direção Y
- modulo de reação vertical do terreno
- espessura do radier
- modulo de elasticidade do radier
- peso específico do radier ( no caso de valor não nulo o programa concentra as cargas devidas ao peso próprio nos pontos nodais, somando-as as cargas concentradas aplicadas)
- coeficiente de Poisson do radier
- raio da seção transversal do pilar
- cargas concentradas aplicadas nos pontos nodais da malha do radier.

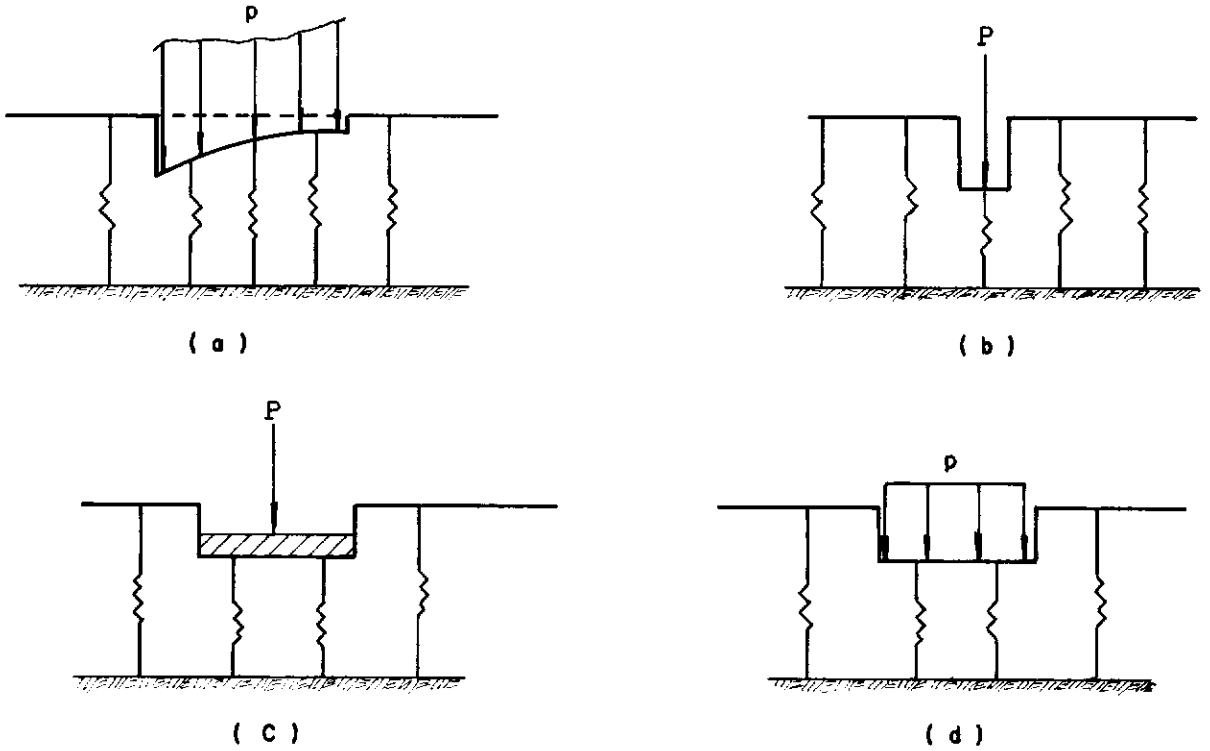
O programa após a geração dos pontos nodais executa o cálculo ponto a ponto dos esforços solicitantes, armazenando-os na matriz  $\tilde{Y}$  para a impressão final.

A compatibilização dos esforços solicitantes nos bordos da placa é feita conforme determina o ACI, através de uma subrotina específica, programada utilizando-se as expressões de Hetenyi (18) para o cálculo de vigas em base elástica.

Este programa devido aos polinômios utilizados nas fun-

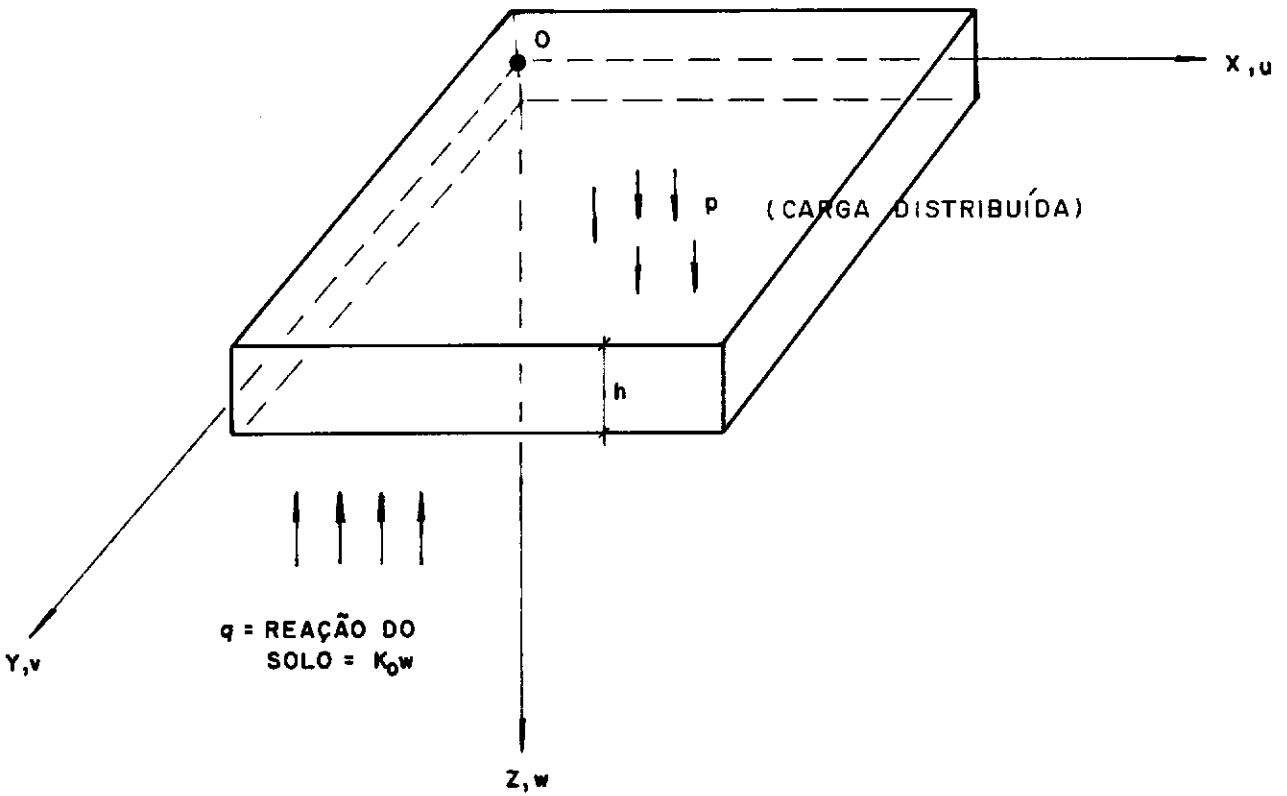
ções de Hetényi (18) , apresenta um elevado consumo de tempo de máquina.

É apresentado no Apêndice B o fluxograma básico da estrtura do programa descrito, bem como a sua respectiva listagem onde se encontram identificados as variáveis utilizadas.

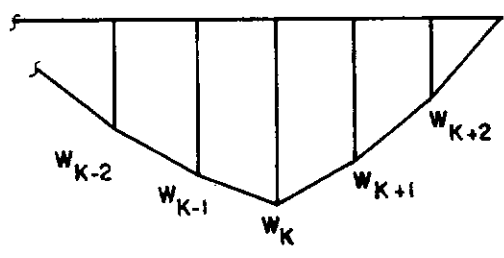
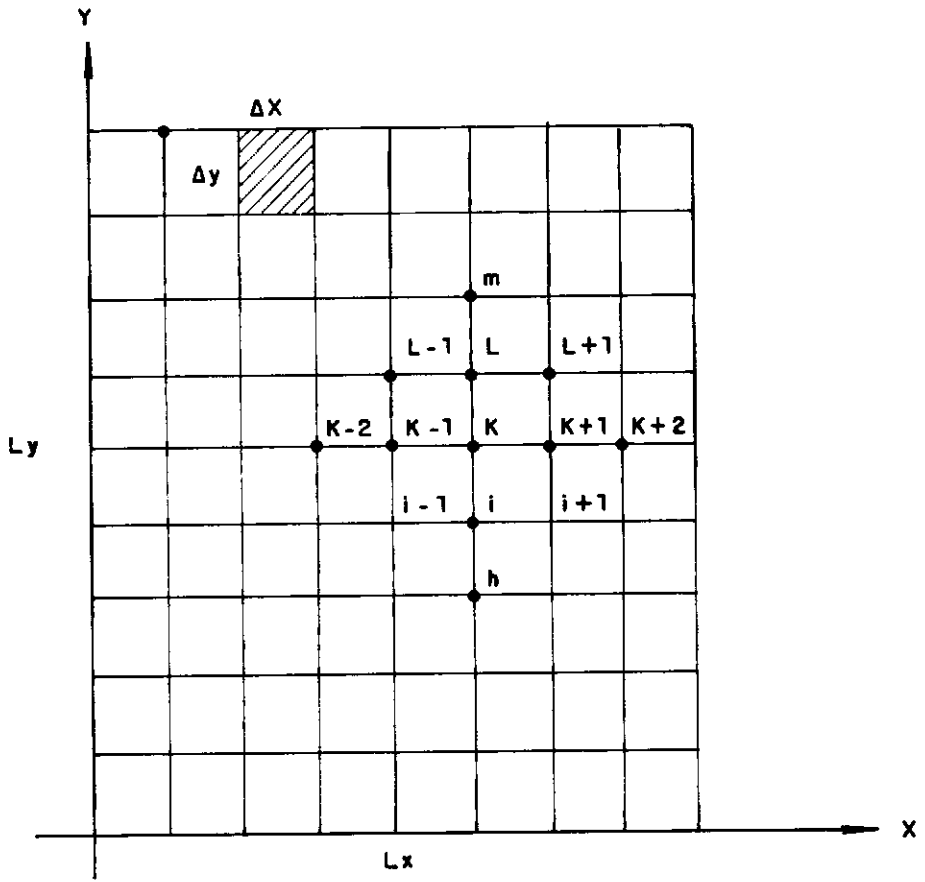


**FIG. III.1 - DESLOCAMENTOS SEGUNDO A TEORIA DE WINKLER .**

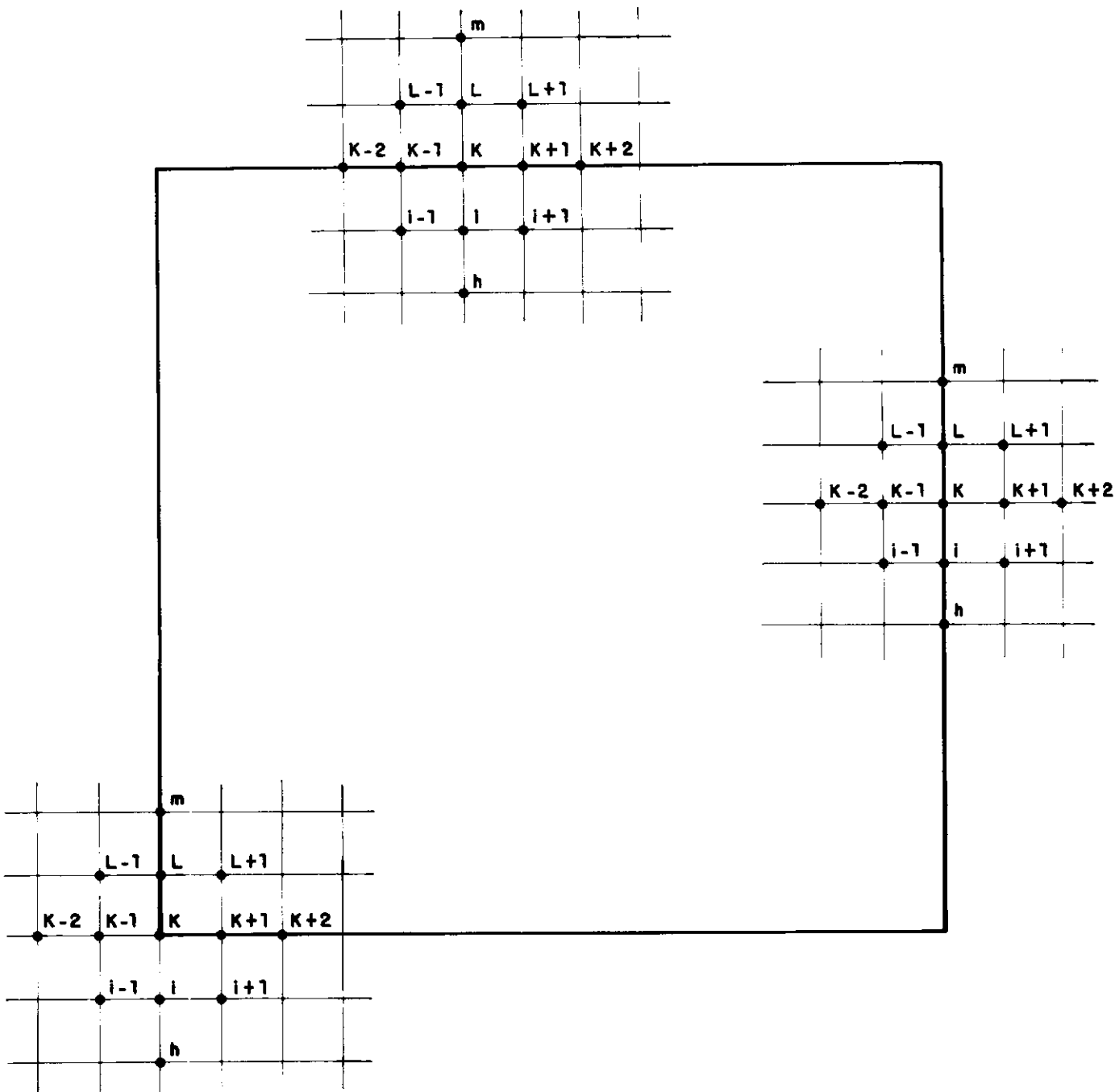
- a - Carregamento distribuído não uniforme .**
- b - Carga concentrada isolada .**
- c - Carga concentrada sobre estrutura rígida .**
- d - Carregamento distribuído uniforme .**



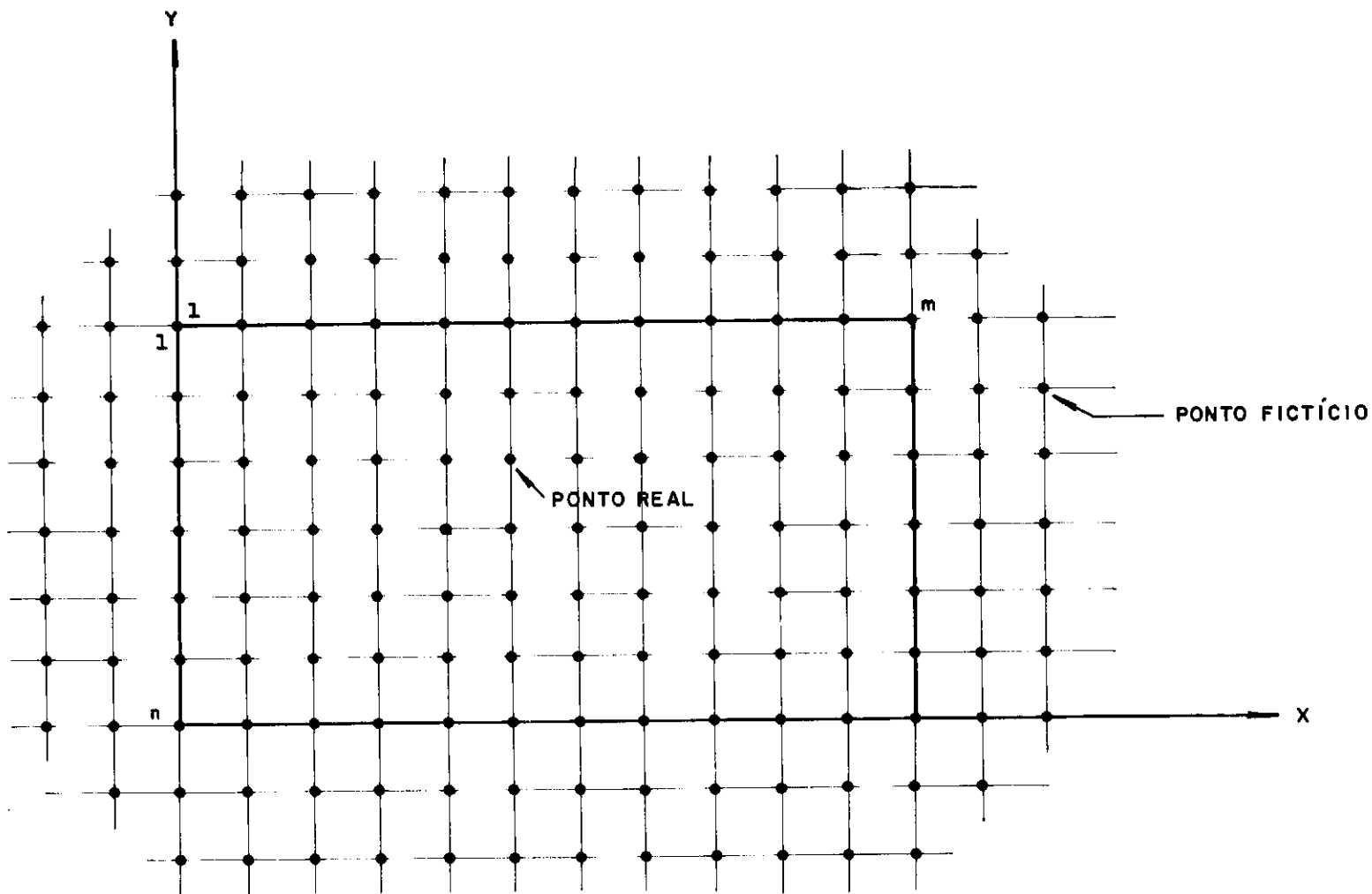
**FIG. III.2 - ELEMENTO DE PLACA COM CARGAS ATUANTES E A RESPECTIVA REAÇÃO DO TERRENO**



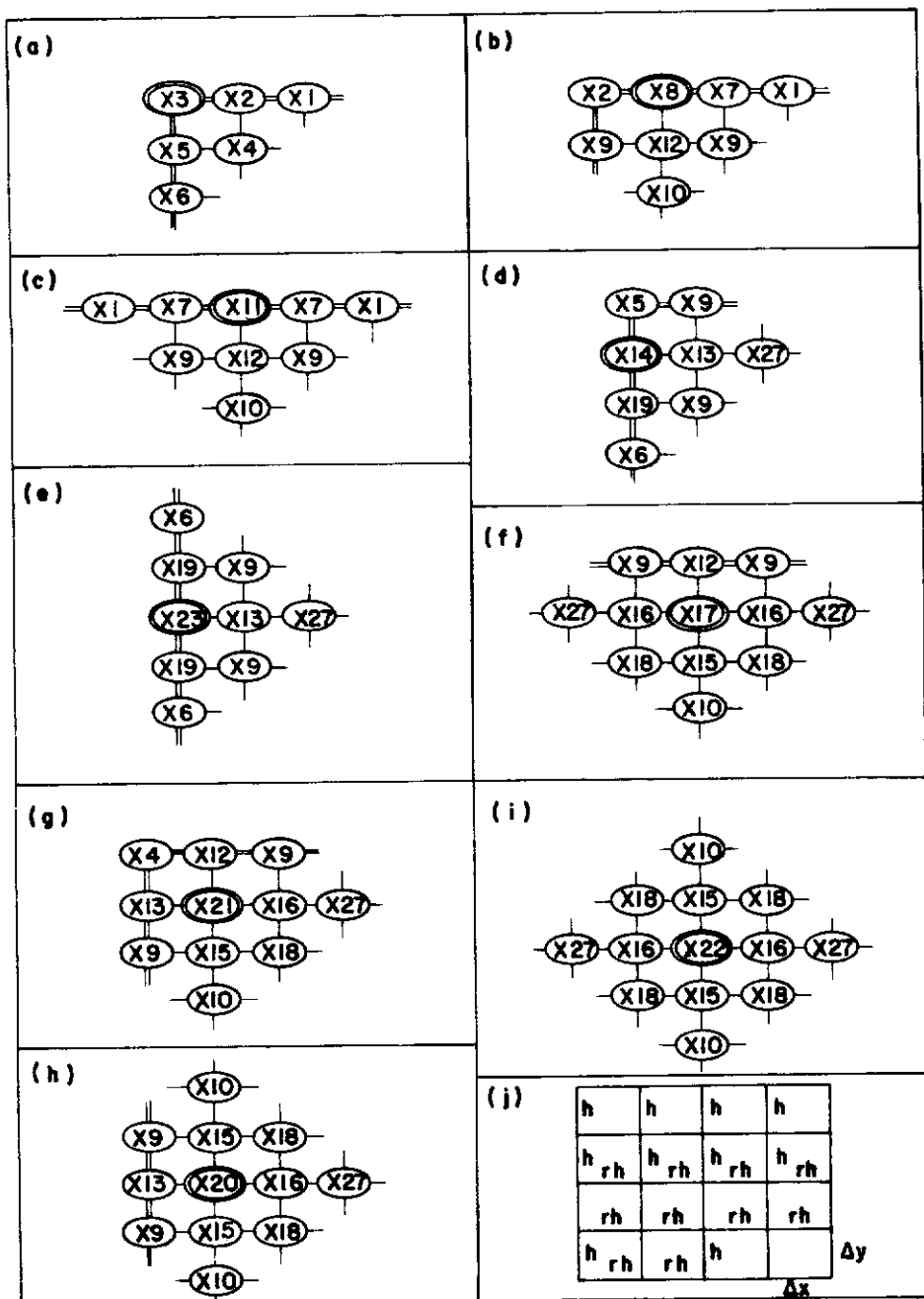
**FIG. III.3 - MALHA FORMADA POR SETORES FINITOS E A RESPECTIVA SUPERFÍCIE DEFORMADA**



**FIG. III. 4 - PONTOS PRÓXIMOS AO CONTORNO DA PLACA**



**FIG. III.5 - MALHA DE  $m \times n$  PONTOS NODAIS ACARRETANDO NA UTILIZAÇÃO DE  $(mn + 4m + 4n + 4)$  PONTOS**

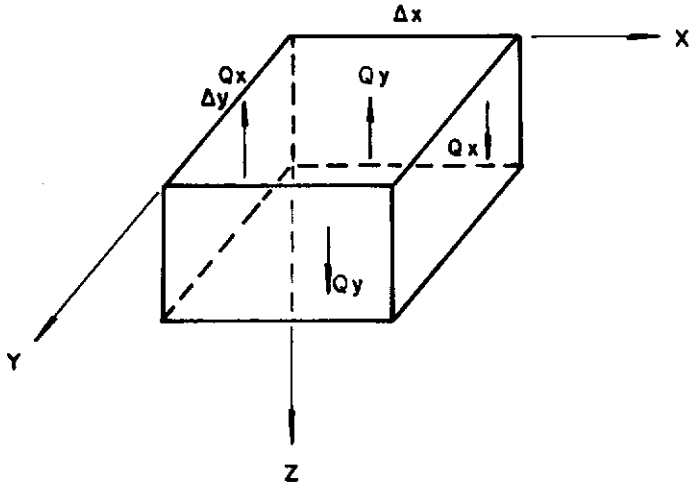
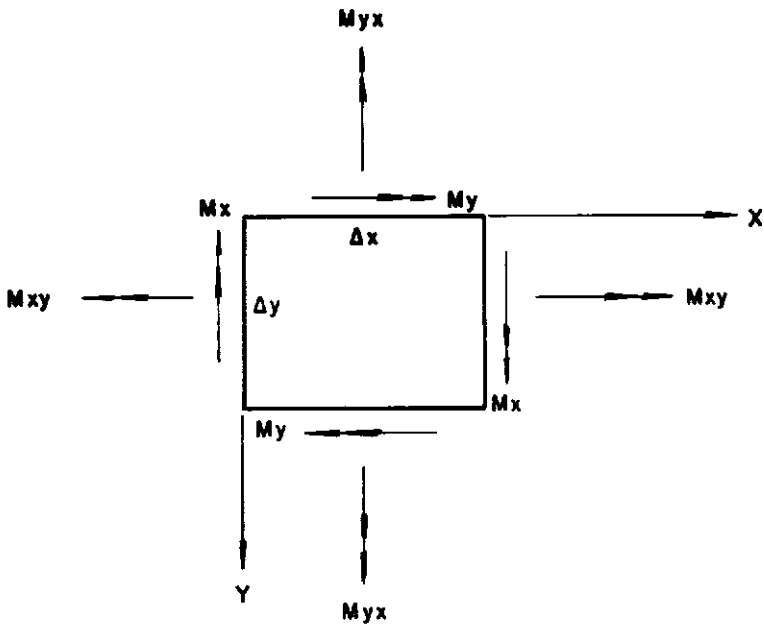


Deflection-coefficient matrix for indicated nodes. All horizontal grid dimensions are  $rh$ ; all vertical values are  $h$ . Any set of grid coefficients is equated to nodal loads of  $Ph^4/Drh^2 - (k_0rh^2/D) w_{ij}$ .

FIG. III. 6 - IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS DOS COEFICIENTES DOS DESLOCAMENTOS ONDE  $\Delta x = rh$  e  $\Delta y = h$ .

$$\begin{aligned}
 X1 &= \frac{1}{2r^4}(1-\mu^2) & X2 &= -\frac{1}{r^4}(1-\mu^2) - \frac{2}{r^2}(1-\mu) \\
 X3 &= \frac{1}{2r^4}(1-\mu^2) + \frac{2}{r^2}(1-\mu) + \frac{1}{2}(1-\mu^2) & X4 &= \frac{2}{r^2}(1-\mu) \\
 X5 &= -\frac{2}{r^2}(1-\mu) - (1-\mu^2) & X6 &= \frac{1}{2}(1-\mu^2) \\
 X7 &= -\frac{2}{r^4}(1-\mu^2) - \frac{2}{r^2}(1-\mu) & X8 &= \frac{5}{2r^4}(1-\mu^2) + \frac{4}{r^2}(1-\mu) + 1.0 \\
 X9 &= \frac{1}{r}(2-\mu) & X10 &= 1.0 \\
 X11 &= \frac{3}{r^4}(1-\mu^2) + \frac{4}{r^2}(1-\mu) + 1.0 & X12 &= -\frac{2}{r^2}(2-\mu) - 2.0 \\
 X13 &= -\frac{2}{r^4} - \frac{2}{r^2}(2-\mu) & X14 &= \frac{1}{r^4} + \frac{4}{r^2}(1-\mu) + \frac{5}{2}(1-\mu^2) \\
 X15 &= -\frac{4}{r^2} - 4 & X16 &= -\frac{4}{r^4} - \frac{4}{r^2} \\
 X17 &= \frac{6}{r^4} + \frac{8}{r^2} + 5 & X18 &= \frac{2}{r^2} \\
 X19 &= -\frac{2}{r^2}(1-\mu) - 2(1-\mu^2) & X20 &= \frac{5}{r^4} + \frac{8}{r^2} + 6 \\
 X21 &= \frac{5}{r^4} + \frac{8}{r^2} + 5 & X22 &= \frac{6}{r^4} + \frac{8}{r^2} + 6 \\
 X23 &= \frac{1}{r^4} + \frac{4}{r^2}(1-\mu) + 3(1-\mu^2) & X27 &= \frac{1}{r^4}
 \end{aligned}$$

**FIG. III.7 - COEFICIENTES DOS DESLOCAMENTOS EM TERMOS DOS PONTOS DO DOMINIO DA PLACA**  
 (MULTIPLICADO PELO FATOR  $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{r^2}$   
 ONDE  $r = \Delta x / \Delta y$ )



**FIG. III. 8 - ESFORÇOS SOLICITANTES NUM ELEMENTO DE PLACA NOS SENTIDOS CONVENCIONADOS COMO POSITIVO**

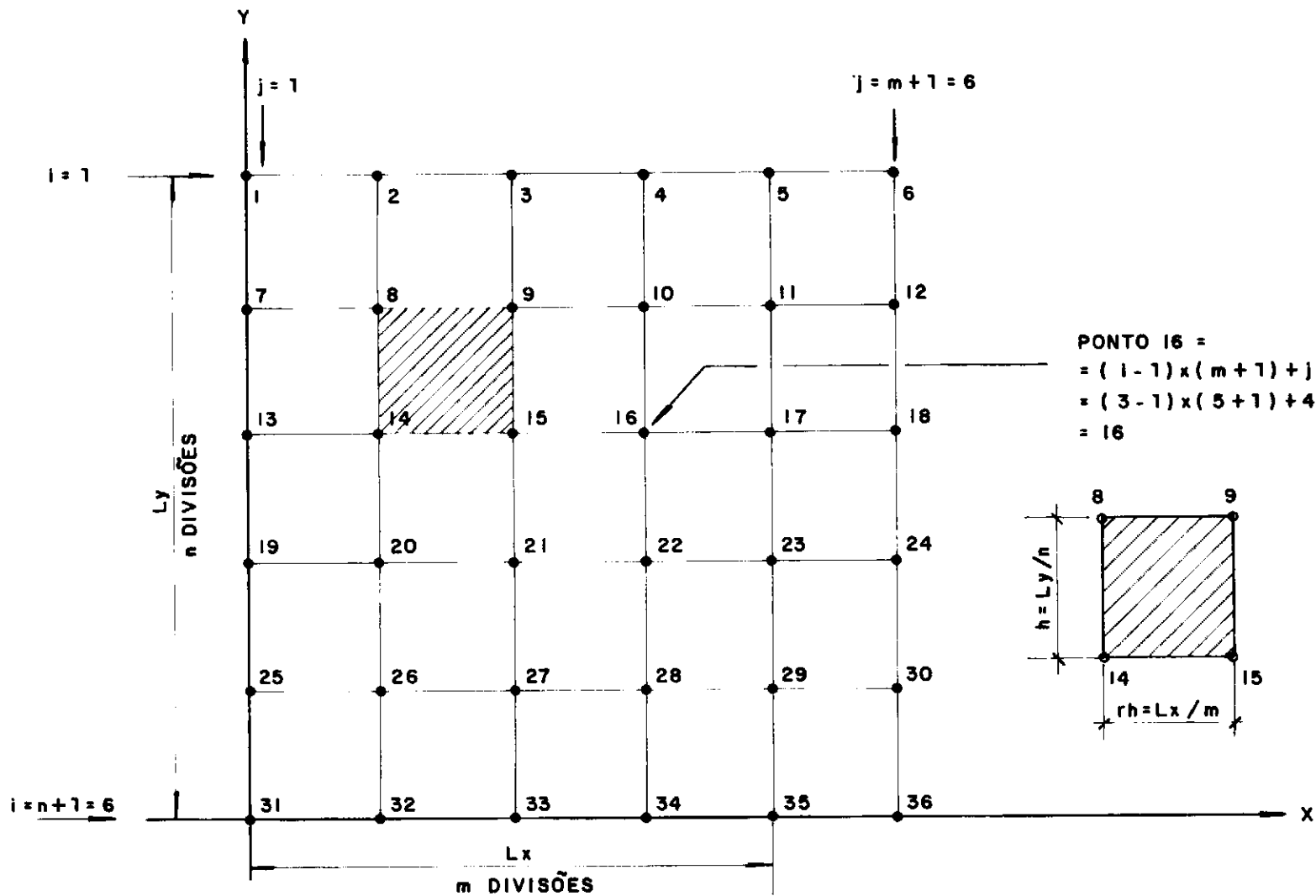


FIG. III.9 - MALHA RETANGULAR GERADA POR UM RADIÉR ONDE  $m = n = 5$

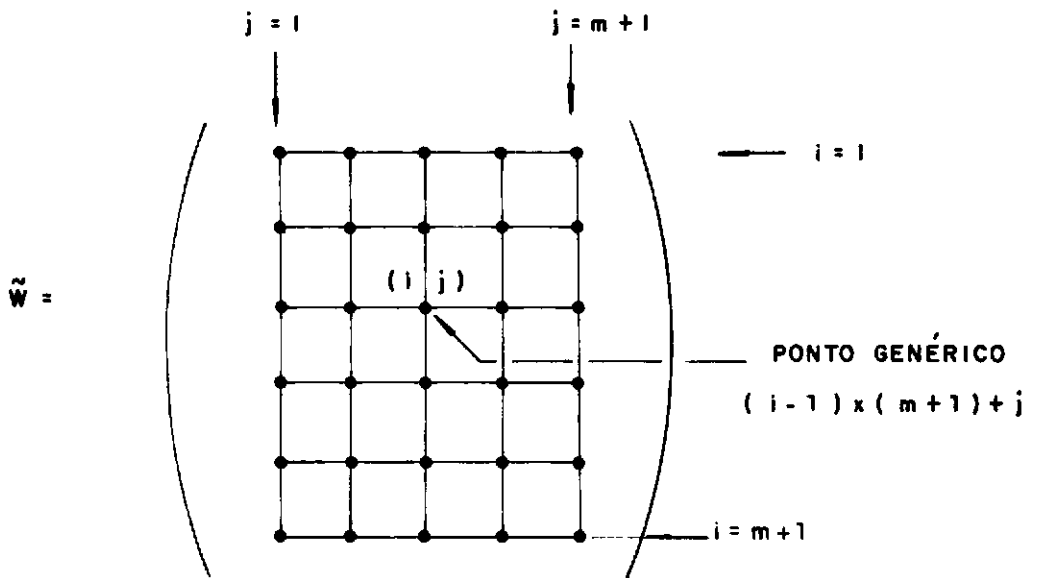


FIG. III.10 - MATRIZ  $\tilde{W}$  DOS COEFICIENTES DOS PONTOS NODAIS

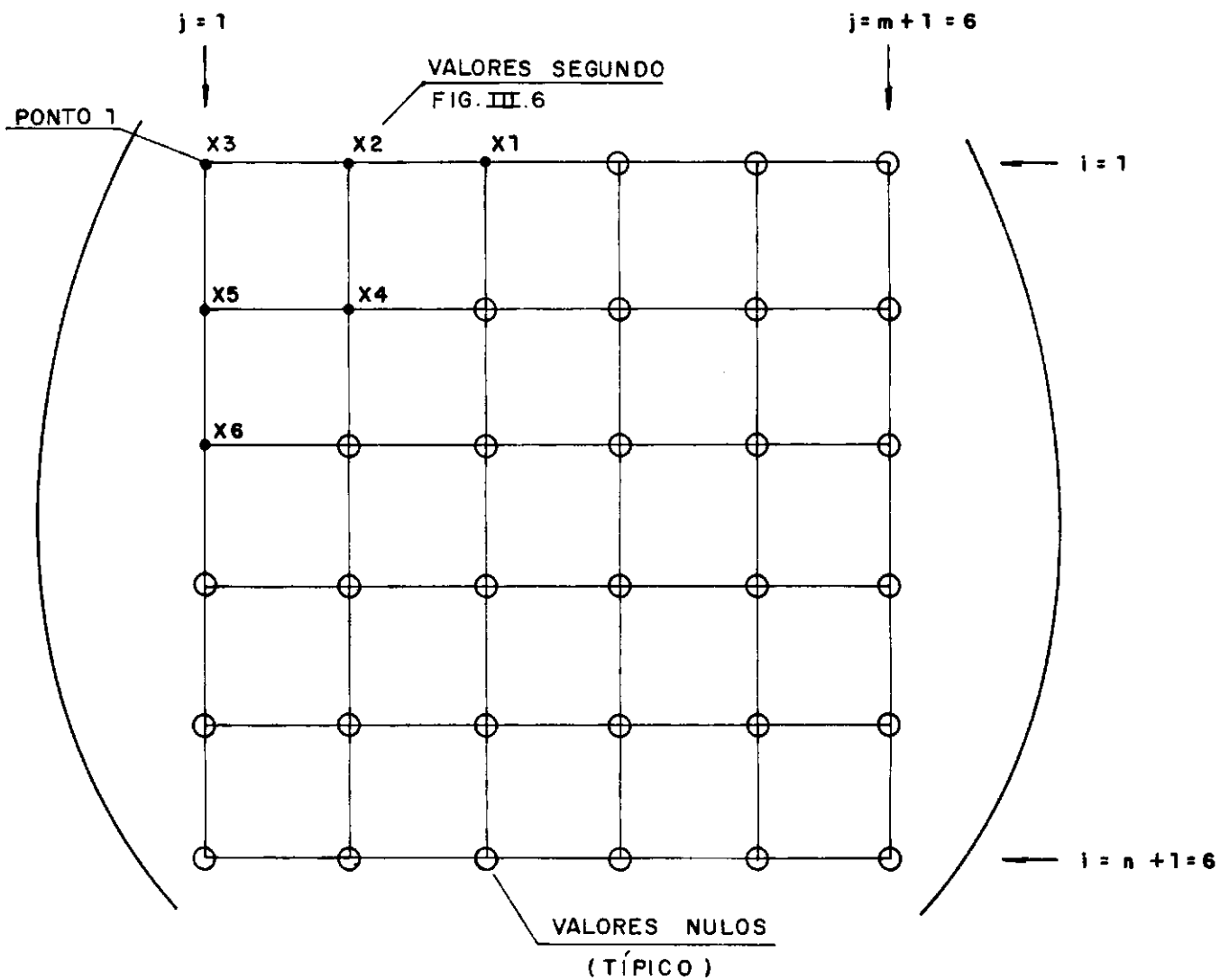
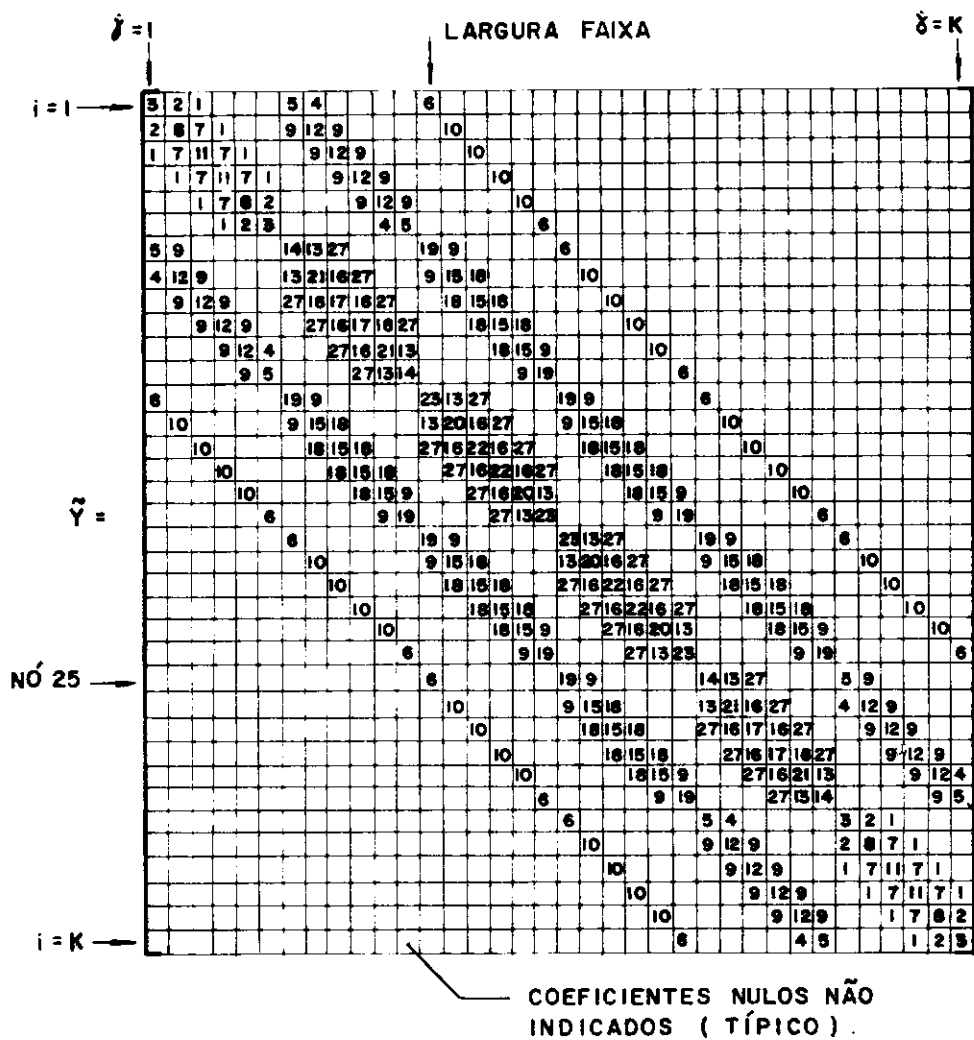


FIG. III.11 - MATRIZ  $\tilde{W}$  DO PONTO 1 DE UM RADIER  
ONDE  $m = n = 5$



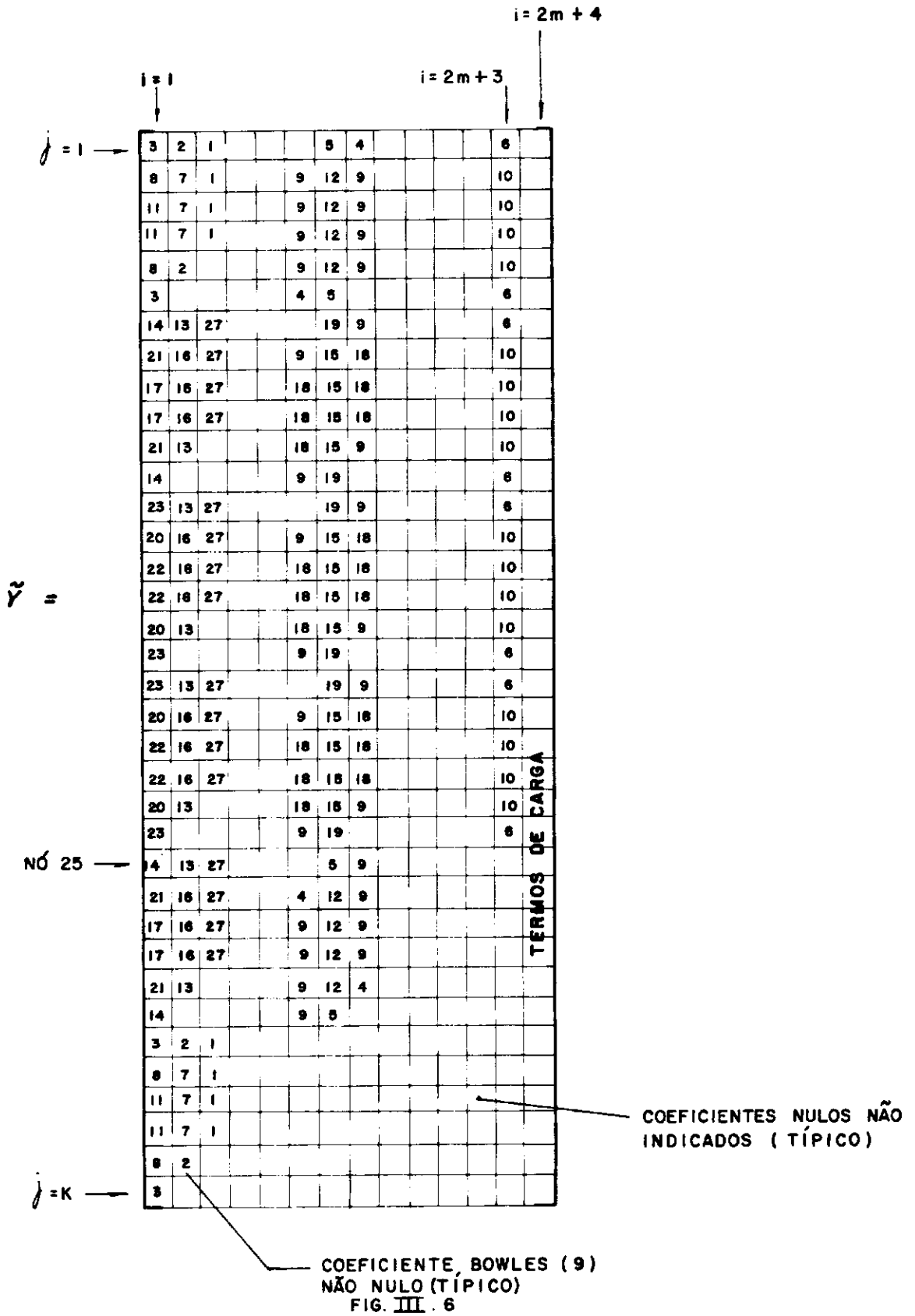
LARGURA FAIXA  
 $(m+1) \times 2 + 1 =$   
 $= 2m + 3$

ARMAZENADA NA MATRIZ  
 $Y(K, 2m+3)$

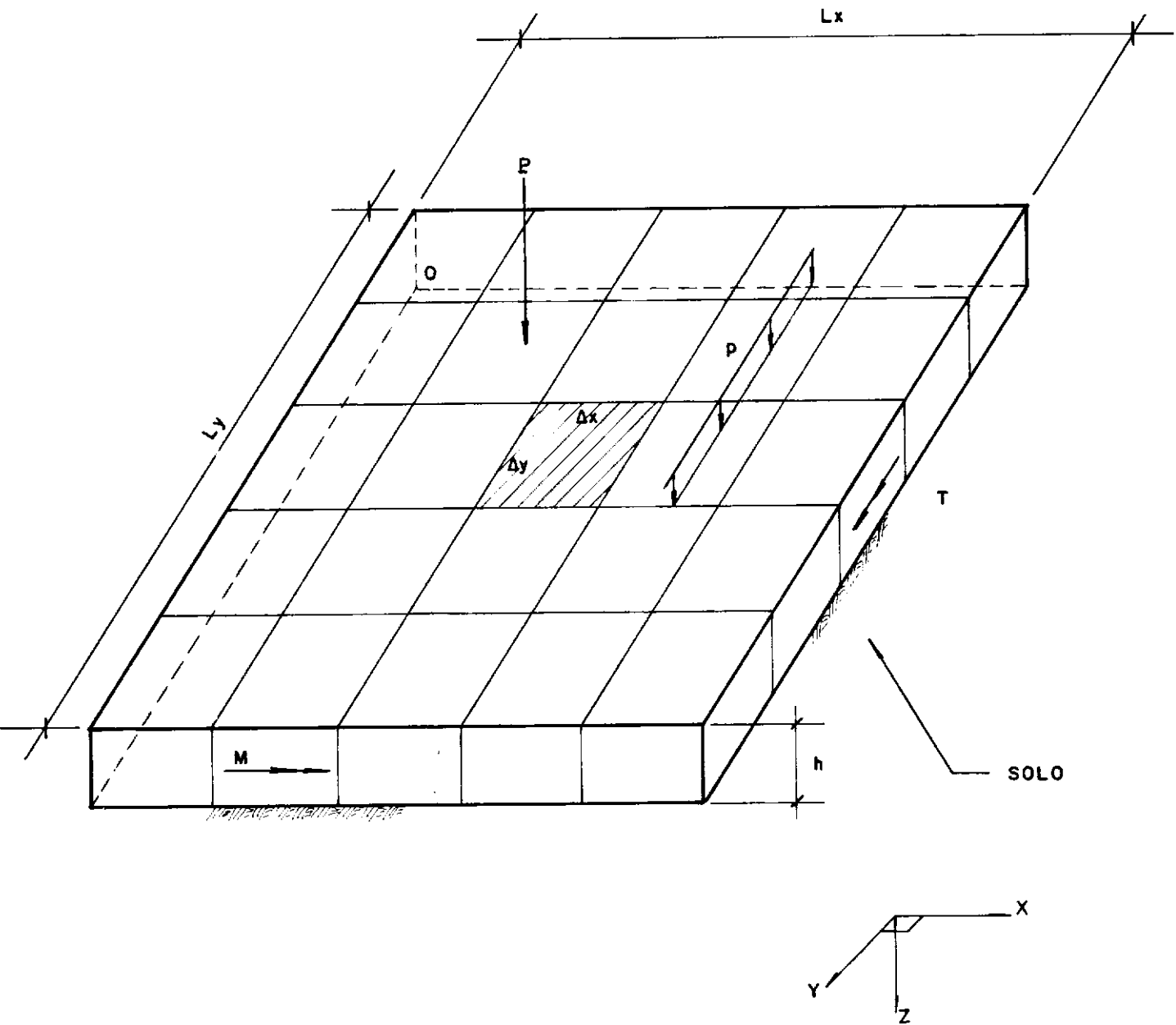
EXEMPLO :  
 $m = 5$  largura faixa  
 $= 2 \times 5 + 3 = 13$

COEFICIENTE  
 BOWLES (9)  
 NÃO NULO  
 (TÍPICO)  
 FIG. III . 6

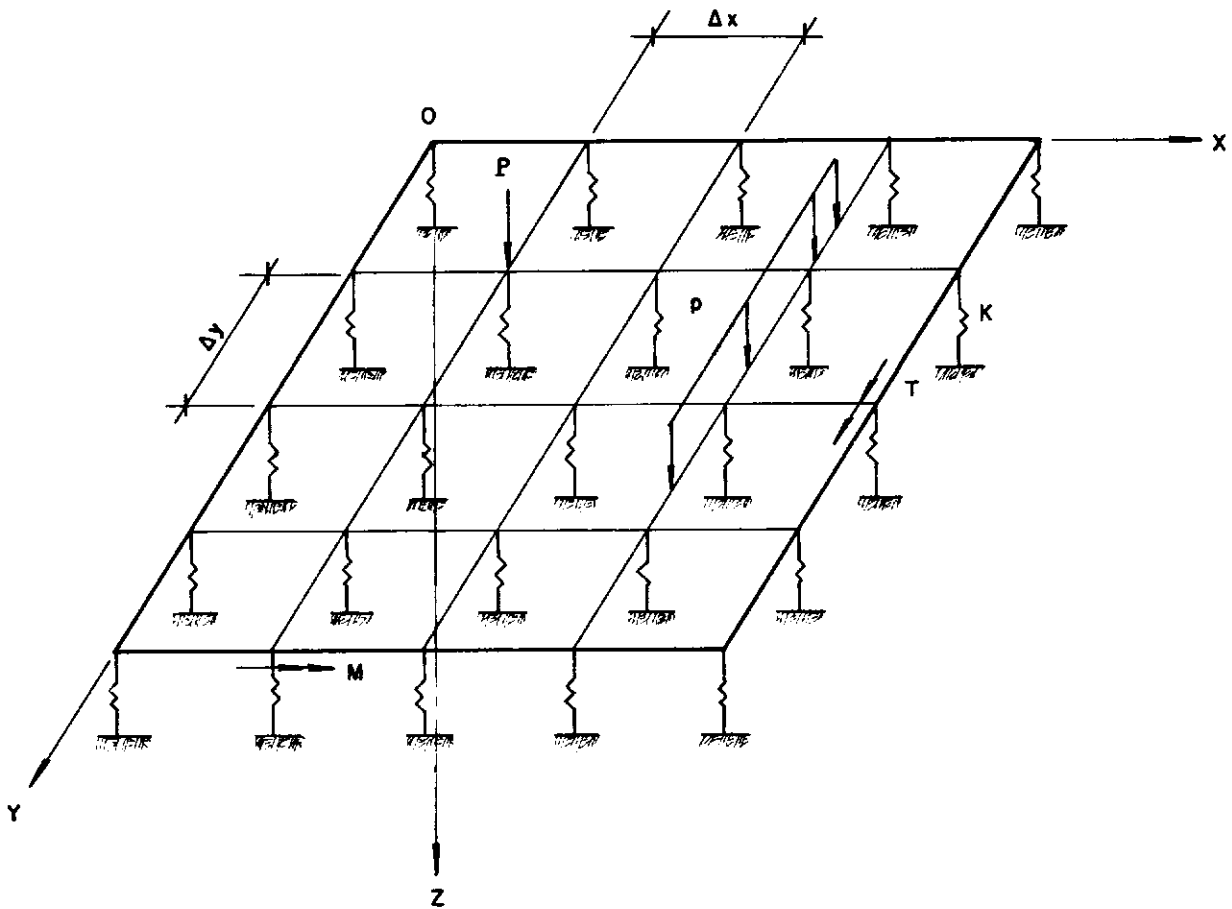
FIG. III.12 - MATRIZ  $\tilde{Y}$  PARA  $m=n=5 \therefore K=36$



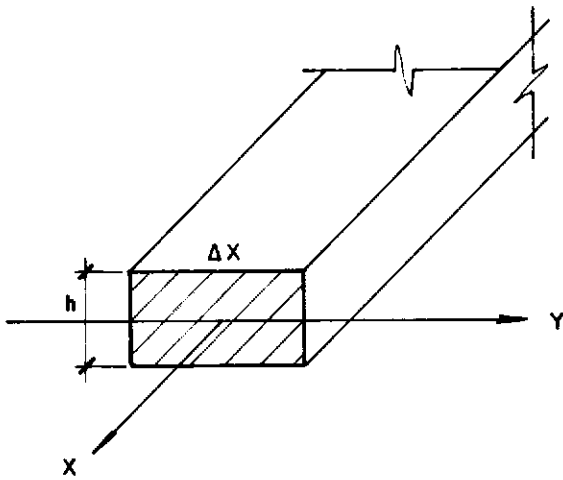
**FIG. III 13 - MATRIZ  $\tilde{Y}$  ARMAZENADA EM ARRANJO RETANGULAR**  
 $m = n = 5$      $K = 36$



**FIG. III.14 - ELEMENTO DE PLACA SUBDIVIDIDO EM FAIXAS FORMANDO UMA GRELHA**



**FIG. III. 15 - MODELAGEM DO RADIER POR UMA GRELHA SOBRE MOLAS**



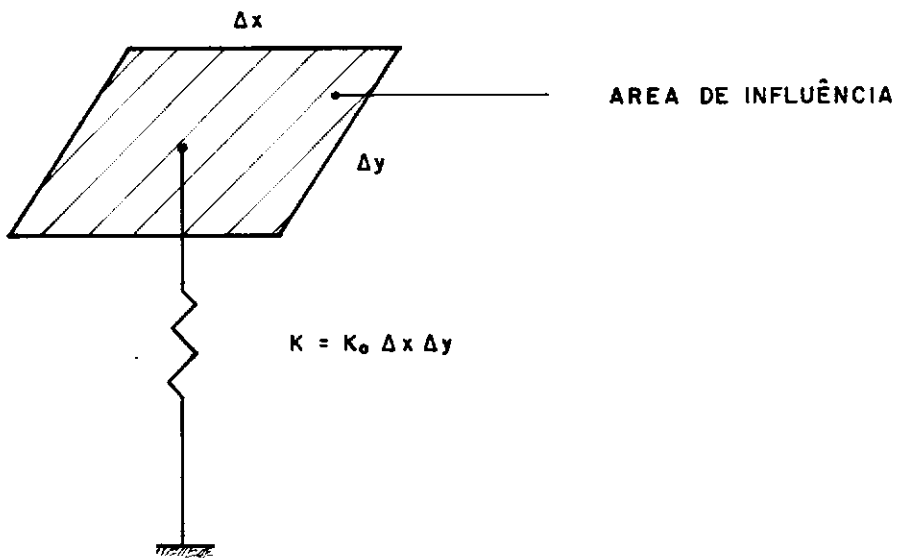
MOMENTO DE INERCIA A FLEXÃO :  $I_y = \frac{\Delta x h^3}{12}$

MOMENTO DE INERCIA A TORÇÃO :  $I_x = n \Delta x h^3 \therefore (\Delta x > h)$

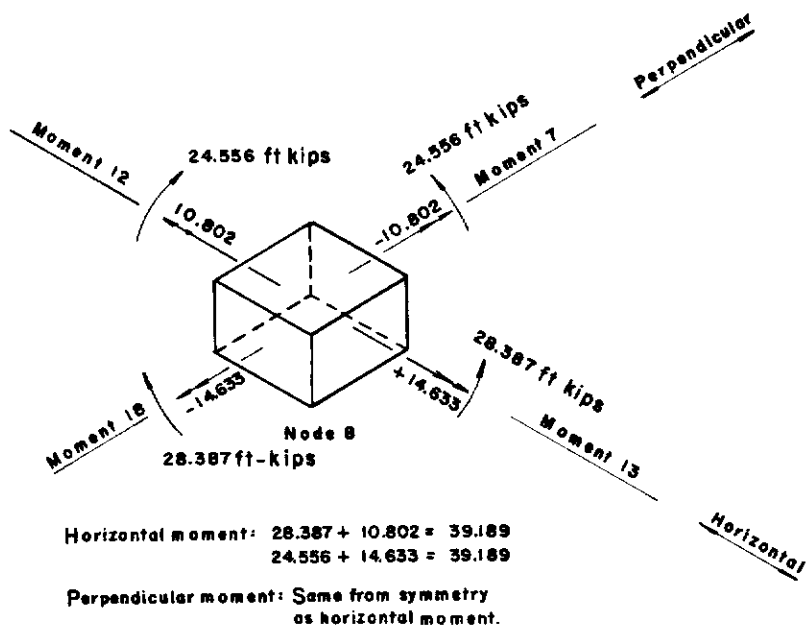
MÓDULO ELASTICIDADE LONGITUDINAL : E

MÓDULO ELASTICIDADE TRANSVERSAL : G

**FIG. III-17- CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS E GEOMÉTRICAS DE UM MEMBRO DA GRELHA**



**FIG. III. 16 - DISCRETIZAÇÃO DA REAÇÃO DO SOLO**



Computing the nodal bending moments for design using the computer output.

**FIG. III. 18 - CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES NAS DIREÇÕES X e Y SEGUNDO BOWLES EM "ANALYTICAL AND COMPUTER METHODS IN FOUNDATION ENGINEERING". CAPITULO 7.9 [9]**

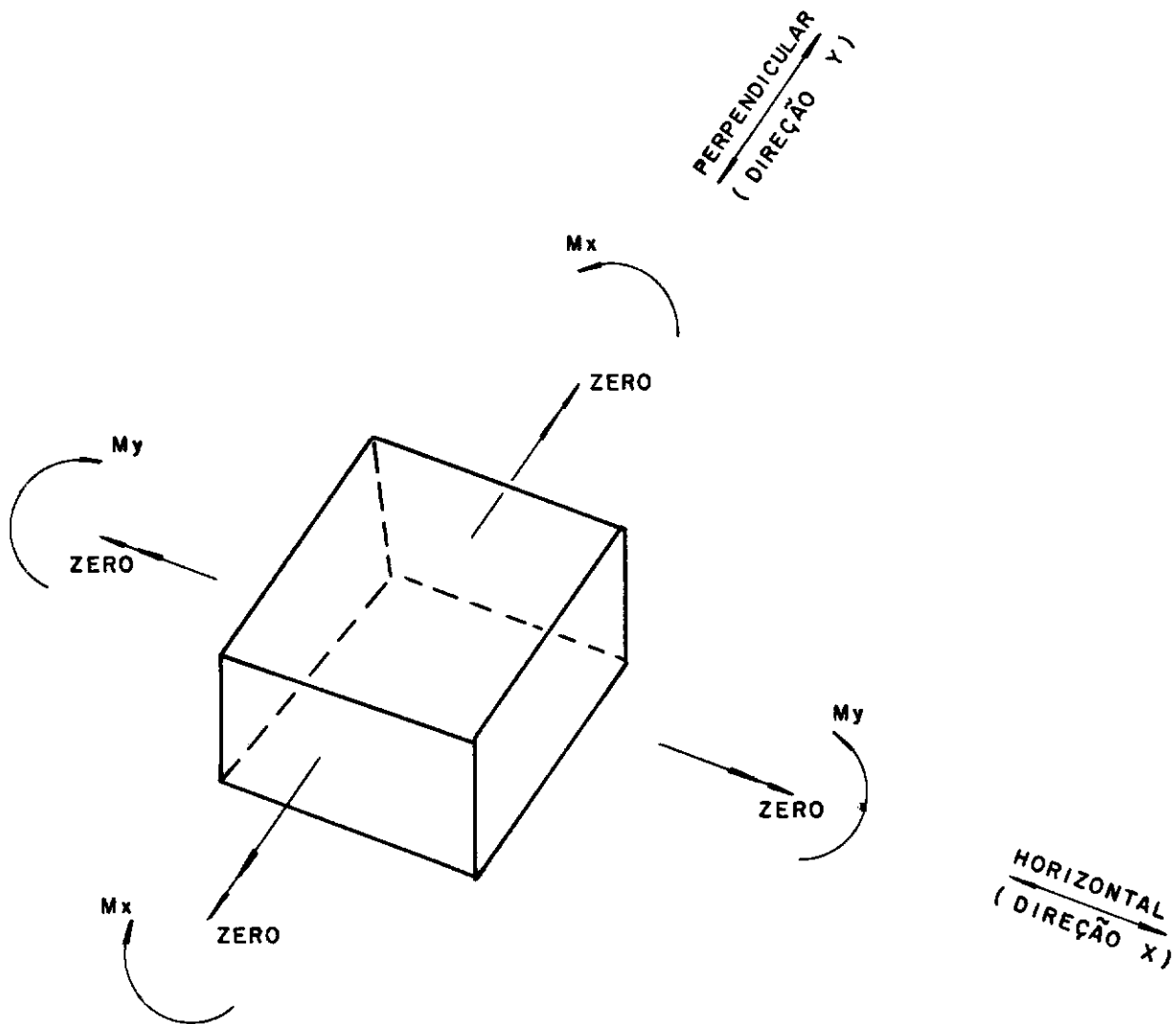
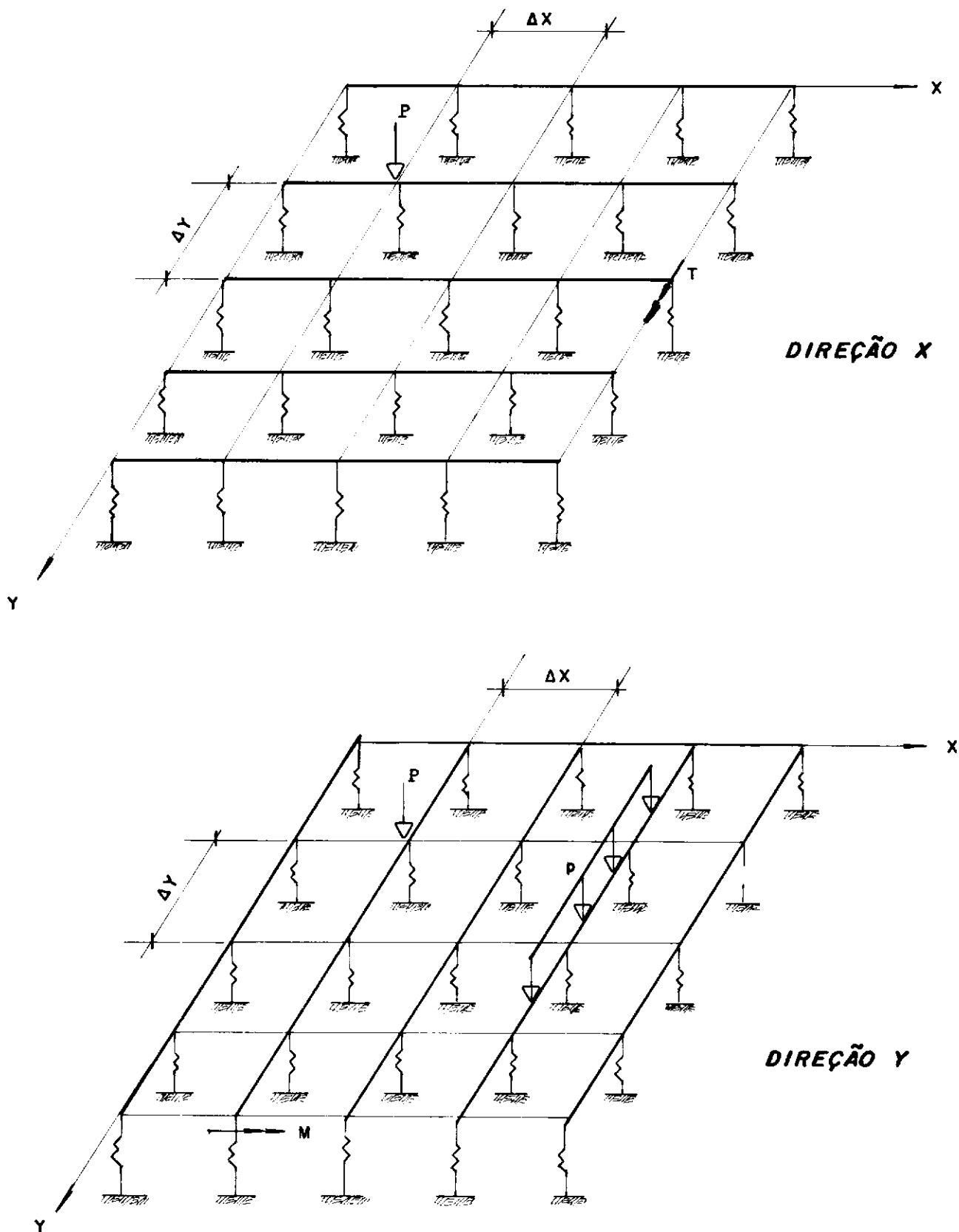
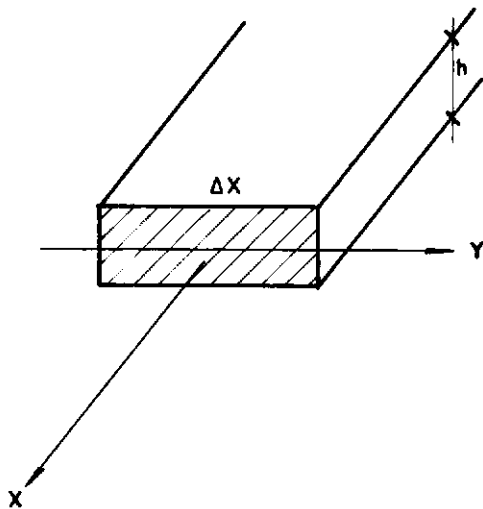


FIG. III. 19 - MOMENTOS FLETORES NAS DIREÇÕES  $X$  e  $Y$  SEGUNDO KURT BEYER [13]



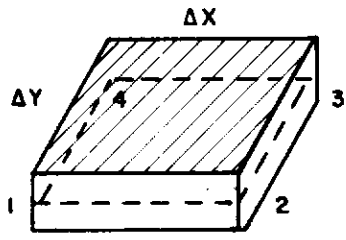
**FIG.III-20- MODELAGEM DO RADIER POR VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA**



MOMENTO DE INÉRCIA A FLEXÃO  $I_y = \frac{\Delta x h^3}{12}$

MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL : E

**FIG. III. 21 - CARCTERÍSTICAS ELÁSTICAS E GEOMÉTRICAS DE UM MEMBRO DE VIGA**



ELEMENTO DE PLACA

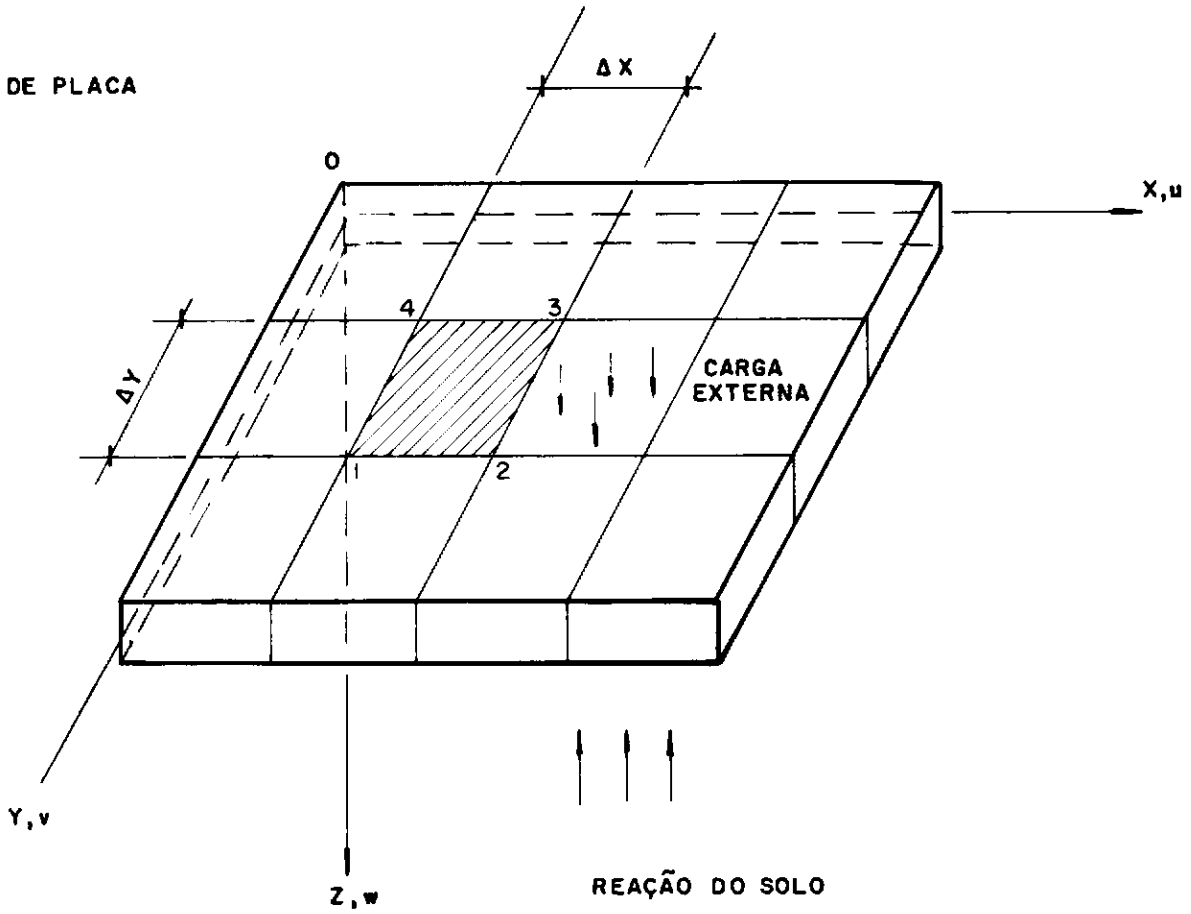
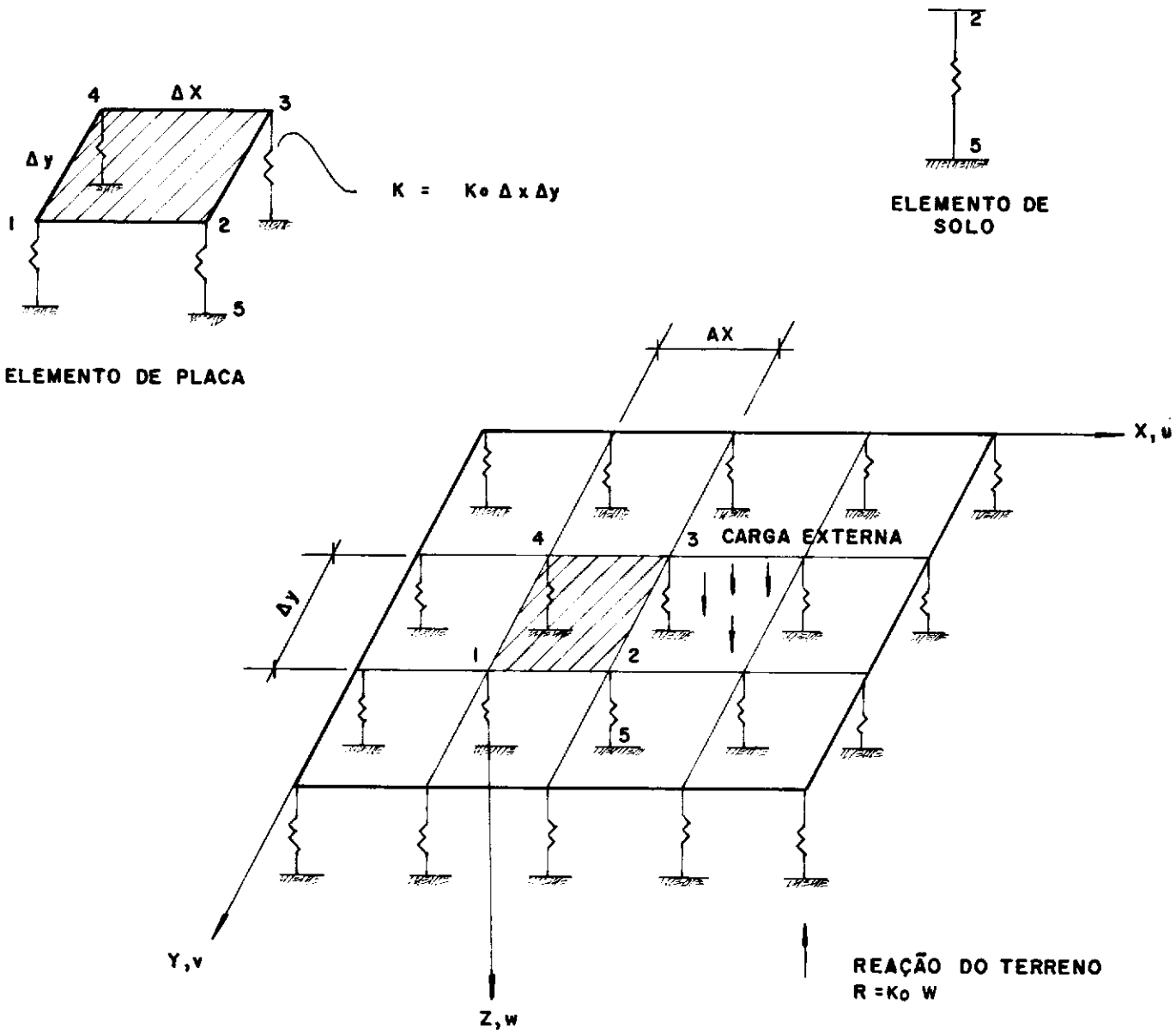
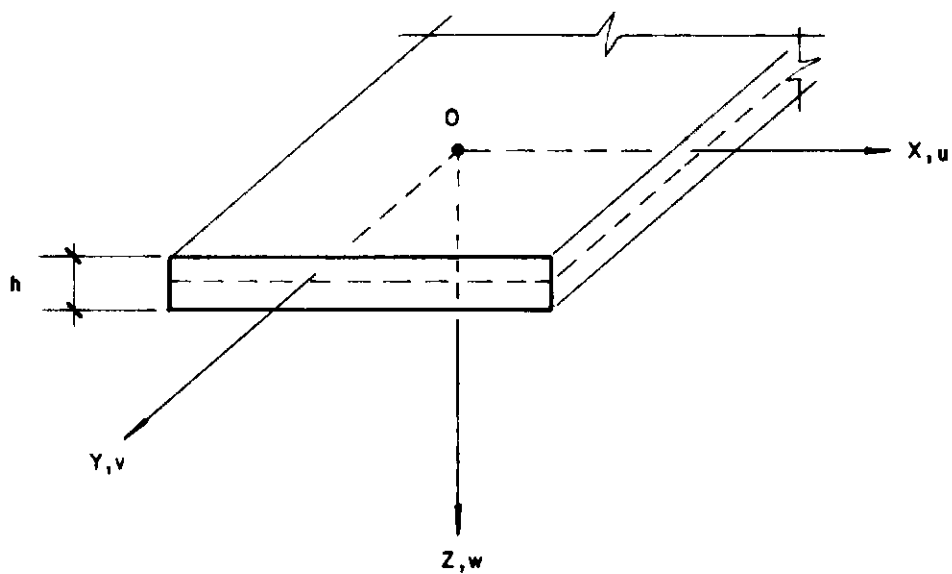


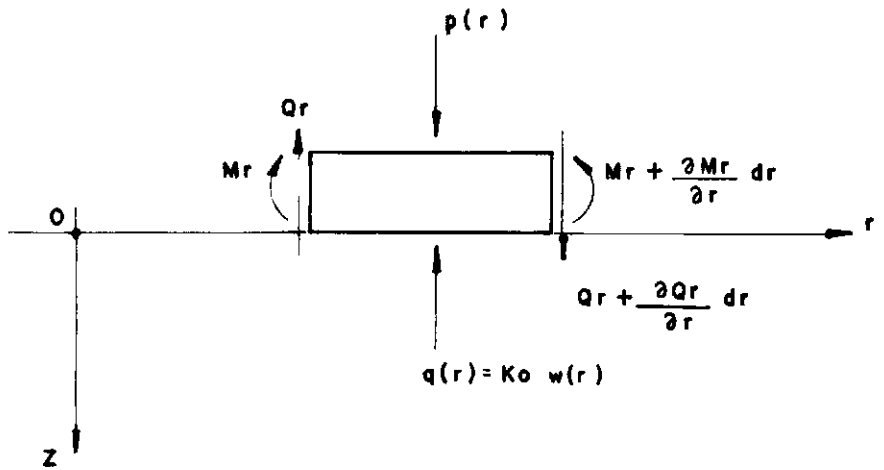
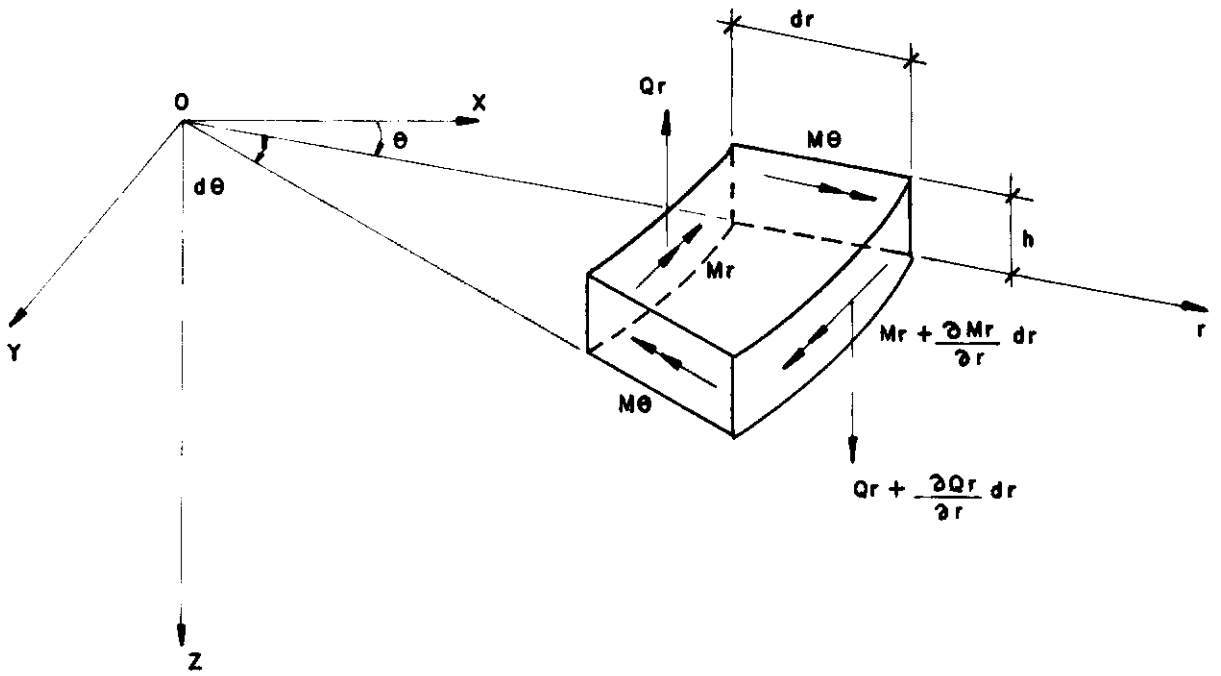
FIG. III.22 - PLACA FINITA COM CARGAS ATUANTES E RESPECTIVA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



**FIG. III. 23 - PLACA FINITA COM CARGAS ATUANTES E MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS DA PLACA E DO SOLO**



**FIG. III. 24 - ELEMENTO DE PLACA NA CONFIGURAÇÃO INDEFORMADA**



**FIG. III. 25 - ELEMENTO DE PLACA SOB AÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES E SUBMETIDO AO CARREGAMENTO EXTERNO DISTRIBUÍDO  $p$  E A REAÇÃO DE CONTATO  $q$**

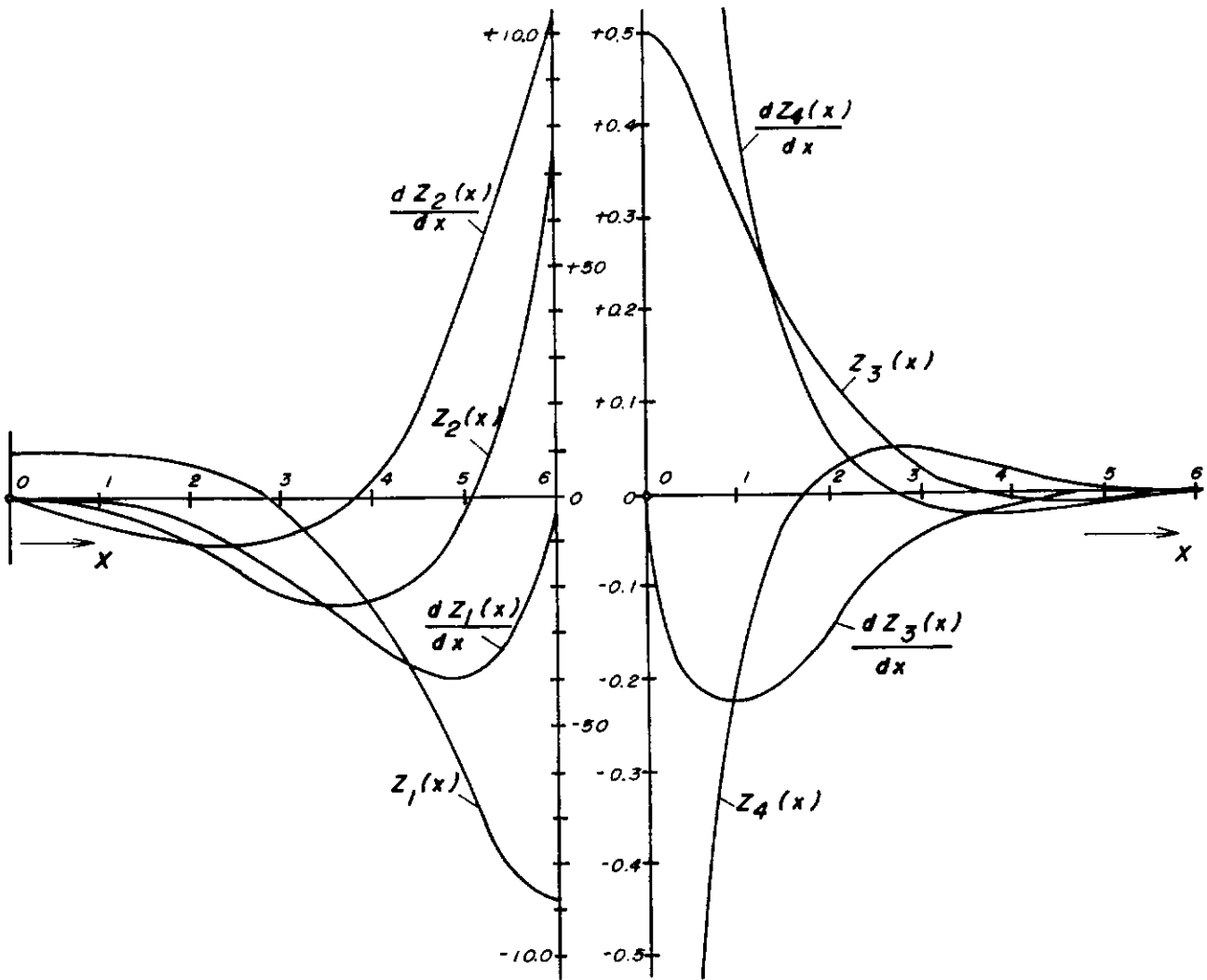


FIG. III. 26 - FUNÇÕES  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$   
 $Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4$

BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION  
 M. HETÉNYI [18]

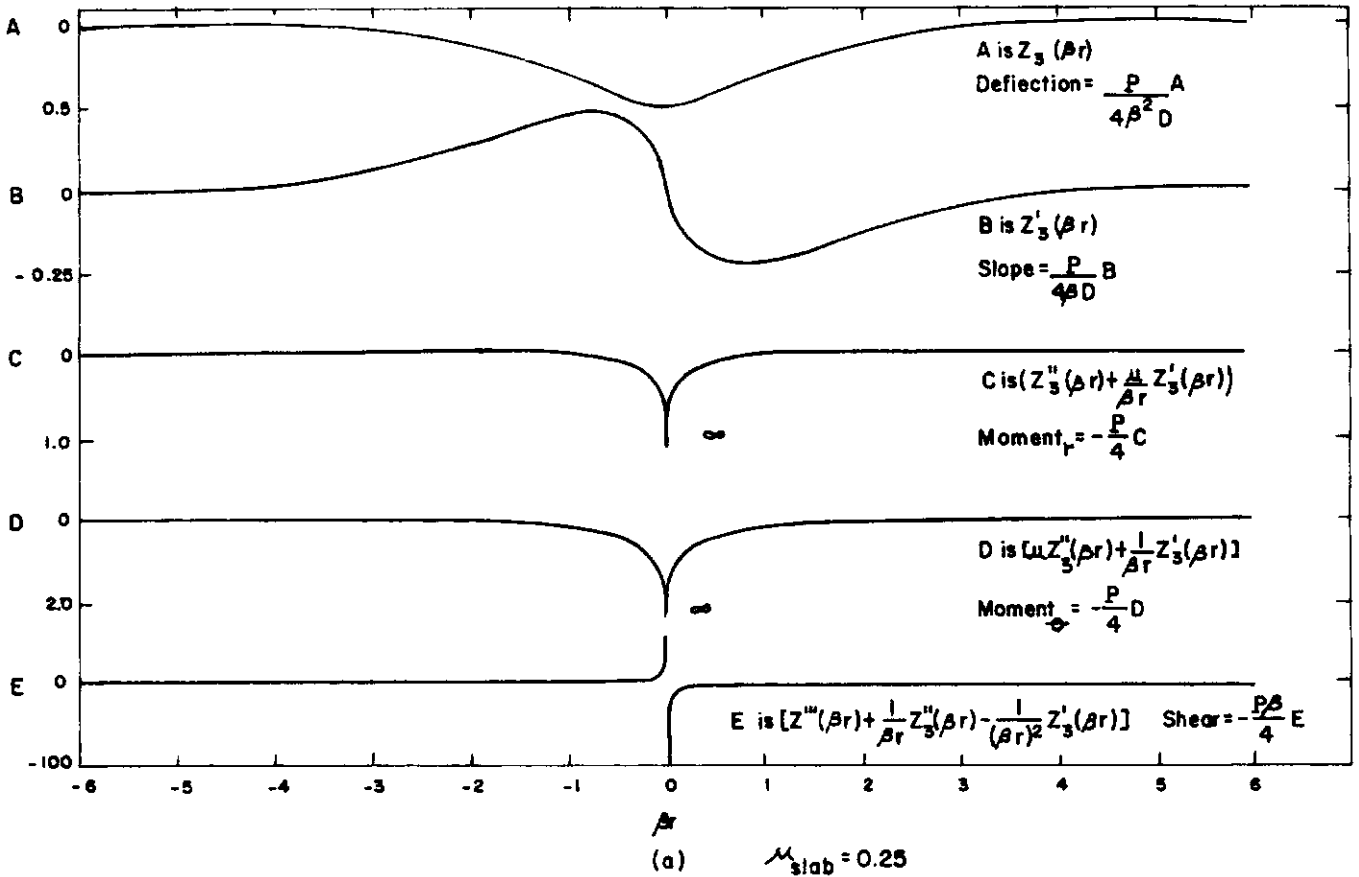
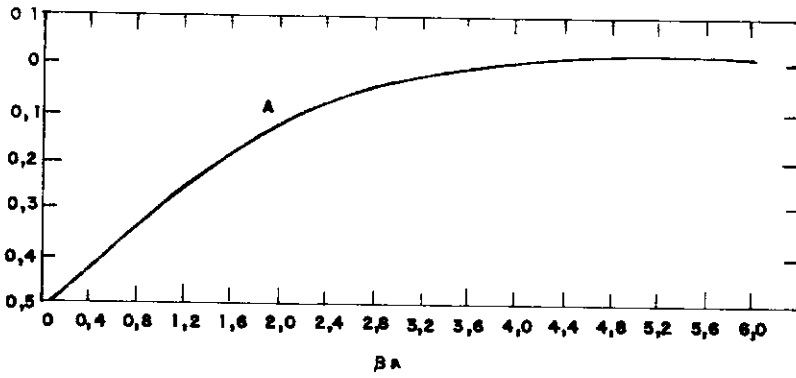
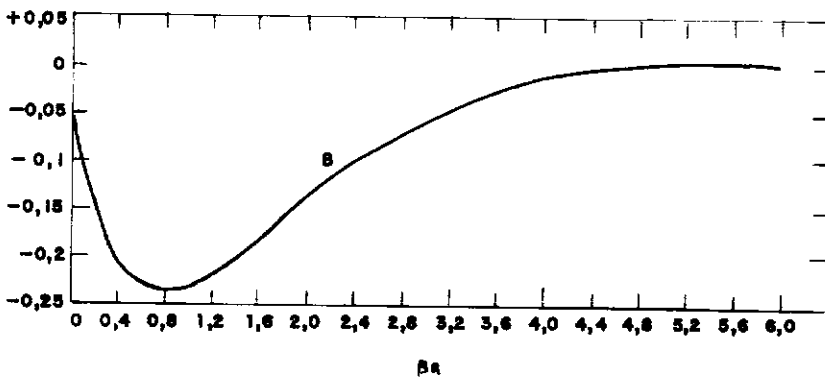


FIG. III. 27 - ANÁLISE EFETUADA POR SCOTT [11]

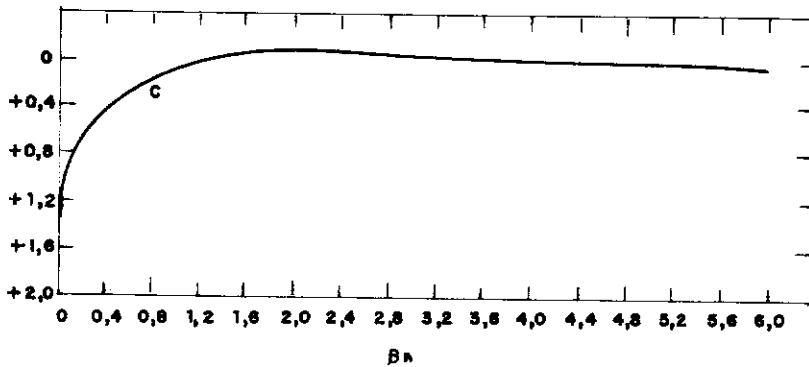
a) DESLOCAMENTO VERTICAL, ROTAÇÃO, MOMENTOS  
 TANGENCIAL E RADIAL E ESFORÇO CORTANTE RADIAL  
 b) a f) GRÁFICOS AMPLIADOS  
 $\beta r = r/L$  ONDE  $\beta = 1/L$



Deflection  
(b)

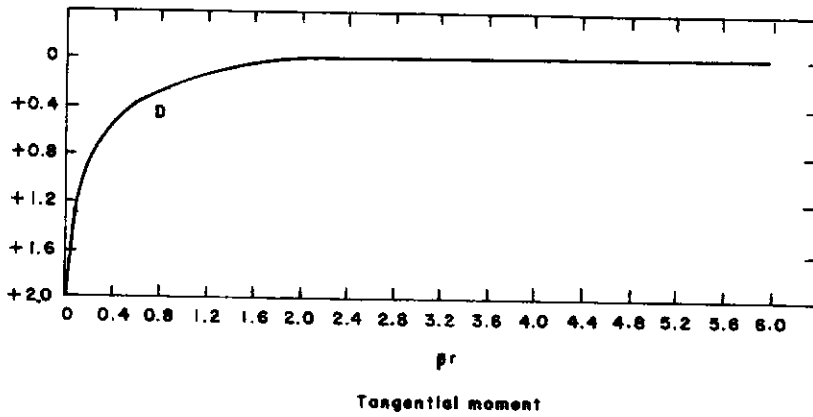


Slope  
(c)



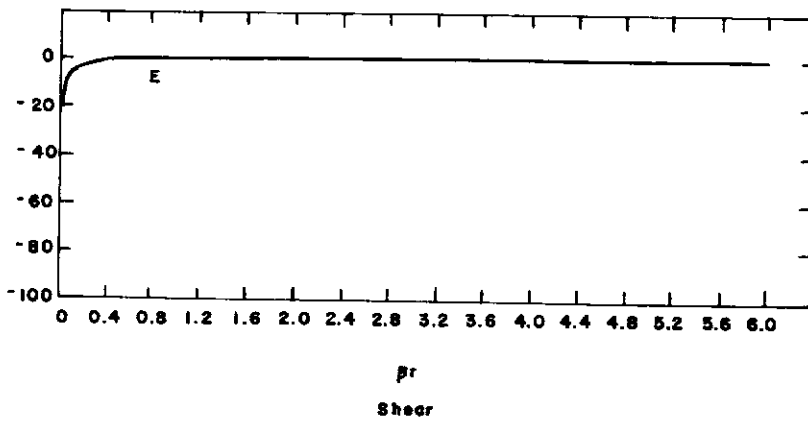
Radial moment  
(d)

FIG. III. 27 - CONTINUAÇÃO



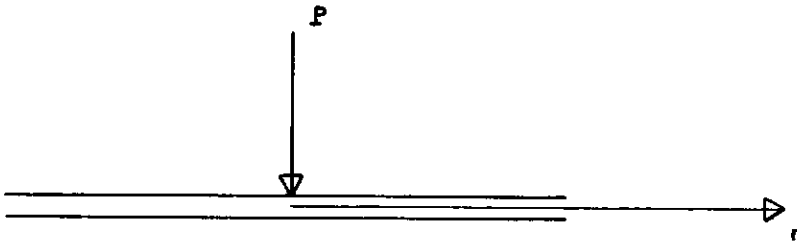
(e)

Flexible Beams and Slabs on Winkler Foundation

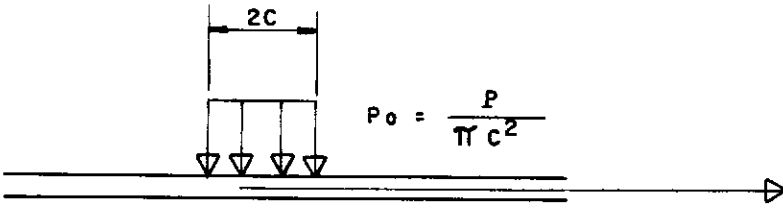


(f)

FIG. III. 27 - continuação



( a )



( b )

**FIG. III.28 - a) CARGA CONCENTRADA TEORICA**  
**b) CARGA DISTRIBUIDA REAL**

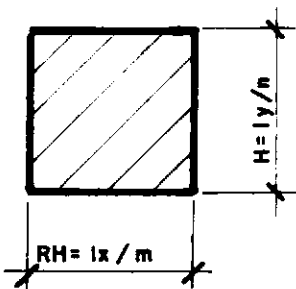
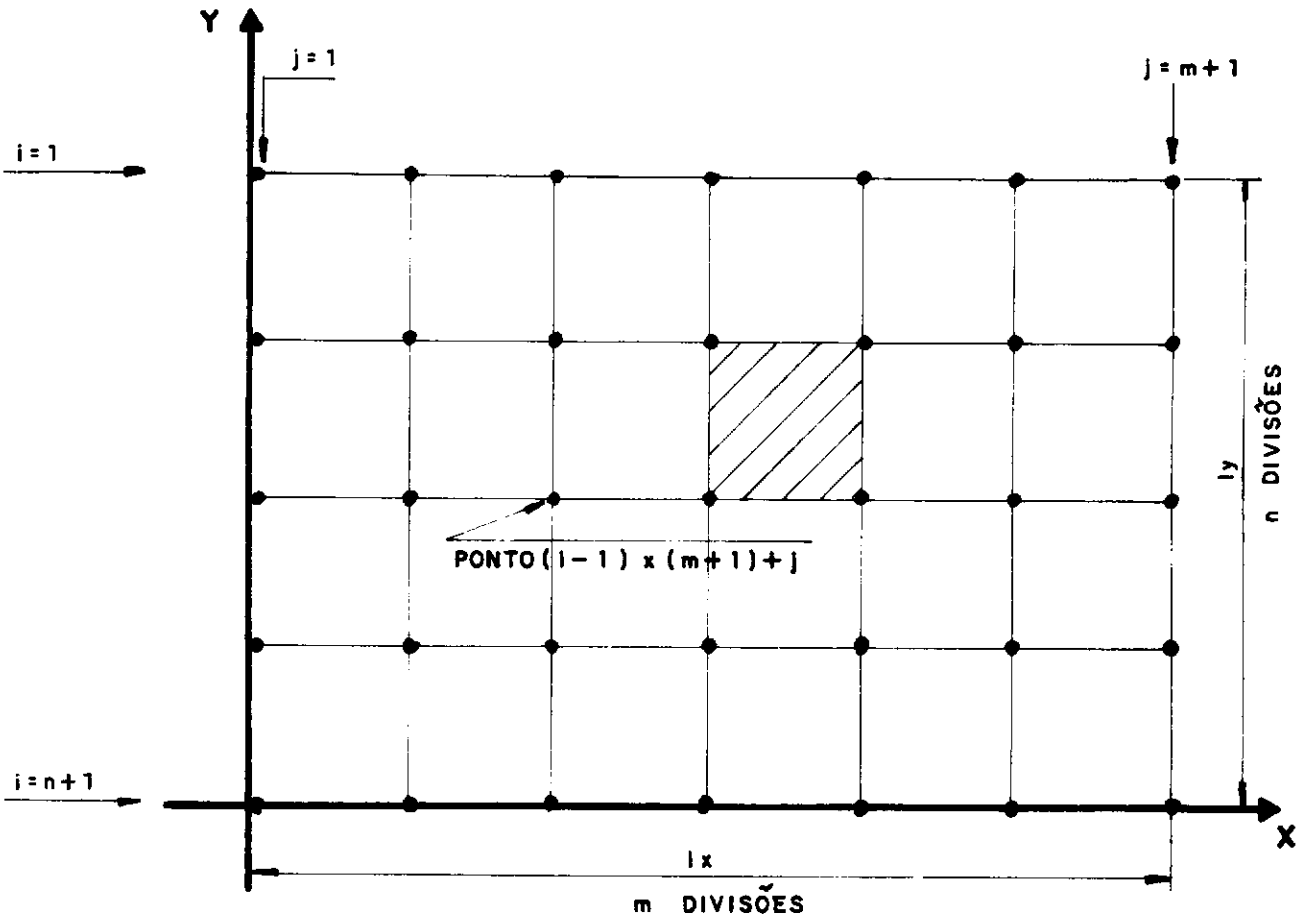


FIG. III. 29 - MALHA DE PONTOS NODAIS GERADOS

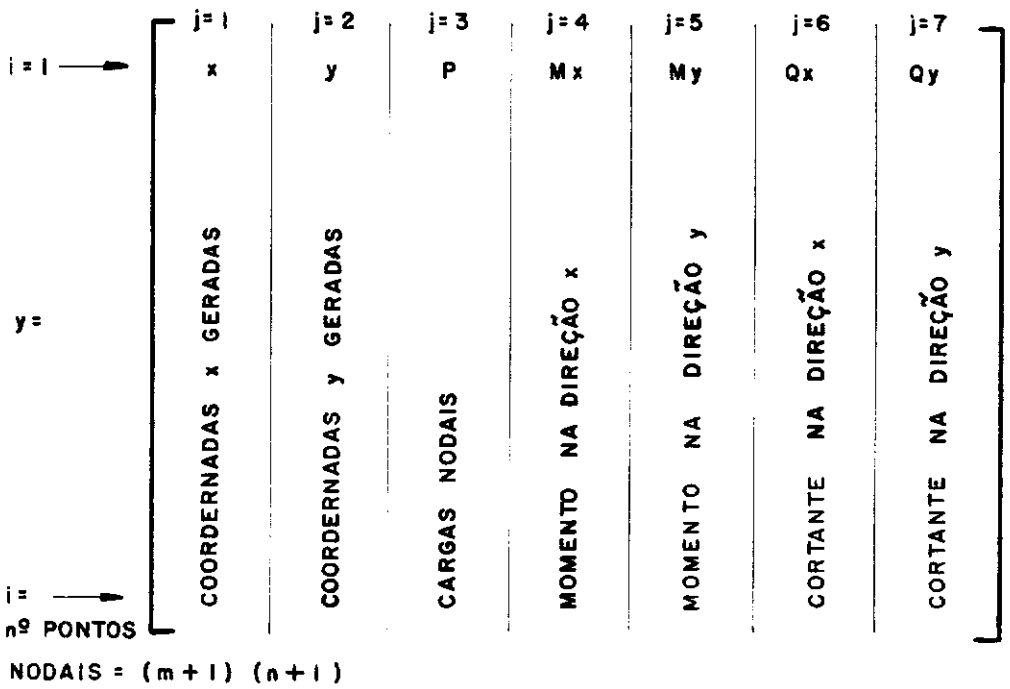


FIG. III. 30 - ESTRUTURA DA MATRIZ  $\tilde{Y}$

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÃO A CASOS REAIS

Neste Capítulo serão analisados dois radiers de edifícios no Rio de Janeiro, o primeiro com uma distribuição bastante regular de pilares e cargas e o segundo com uma distribuição irregular, com o objetivo de se verificar a aplicabilidade dos métodos descritos no Capítulo III a casos da prática e comparar seus resultados.

#### IV.1 - EXEMPLO 1: RADIER COM DISTRIBUIÇÃO REGULAR DE PILARES

O primeiro radier a ser analisado tem dimensões em planta de 45m x 52.5m, com uma modulação uniforme para os pilares (Figuras IV.1 e IV.2).

As cargas transmitidas ao radier são forças concentradas de intensidade elevada. O estudo será feito para um radier composto por placa lisa em concreto. A análise será efetuada para 2 (duas) espessuras:

- 1º caso: espessura = 2,50m
- 2º caso: espessura = 1,70m

A seguir são apresentadas as modelagens do radier para cada método de análise, e os respectivos diagramas de momentos fletores nas direções X e Y da placa.

##### IV.1.1 - Método dos Elementos Finitos

Na análise foi utilizado o programa LORANE LINEAR e o elemento de placa retangular não conforme descrito no item III.6.3 com vínculos elásticos (molas) nos seus quatros pontos nodais. Devido à dupla simetria geométrica e das cargas aplicadas, foi

modelado apenas um quarto do radier.

Na Figura IV.3 é apresentada a modelagem adotada.

Nas Figuras IV.4 a IV.7 estão apresentados os diagramas de momentos fletores para as direções X e Y relativos às alturas de 1,70m e 2,50m.

#### IV.1.2 - Método das Diferenças Finitas

Na análise foi utilizado o programa descrito no item III.3.4 e Apêndice A.

O cálculo foi elaborado segundo a modelagem apresentada na Figura IV.8, utilizando-se o radier total, pois o programa não simula as condições de simetria do exemplo em estudo.

Os valores dos momentos fletores estão apresentados nas Figuras IV.9 a IV.12, para um quarto do radier e alturas de 1,70m e 2,50m.

#### IV.1.3 - Método do ACI

O cálculo foi elaborado utilizando-se o programa descrito no item III.7.4 e Apêndice B, que elabora, conforme já descrito, a compatibilização das condições de contorno da placa exigido pelo ACI (20).

A escolha de pontos onde os esforços são calculados seguiu a malha do Método das Diferenças Finitas (FIG.IV.8). Como no caso anterior, não se pode tirar partido da dupla simetria.

Nas Figuras IV.13 a IV.16 estão apresentados os diagramas de momentos fletores em um quarto do radier para ambas as direções e para alturas de 1,70 e 2,50m.

#### IV.1.4 - Método da Grelha sobre Base Elástica

Na análise foi utilizado o programa LORANE LINEAR e o ele

mento de grelha descrito no item III.4.3 com v̄nculos el̄sticos (molas) nos pontos de cruzamento das vigas da grelha e tamb̄m nos pontos intermedīrios e do contorno, essenciais para um correto desempenho do modelo em estudo. (FIG.IV.17).

Neste caso tamb̄m foi tirado partido da dupla simetria existente, sendo calculado um quarto do radier.

Nas Figuras IV.18 a IV.21 est̄o apresentados os valores dos momentos fletores nas direç̄es X e Y no caso de consideraç̄o ou n̄o da rigidez à torç̄o das barras de grelha descrita no item III.4.1, para a altura do radier de 1,70m.

Nas Figuras IV.22 a IV.25 est̄o apresentados os resultados para a altura do radier de 2,50m.

#### IV.1.5 - M̄todo da Viga sobre Base El̄stica

Conforme a Figura IV.26, a modelagem adotada dividiu o radier em vigas independentes nas direç̄es X e Y, sem qualquer v̄nculos entre elas conforme descrito no item III.5.1. Esta divis̄o serviu como base para se efetuar o c̄lculo do radier por faixas em ambas as direç̄es:

(i) faixas das vigas externas (englobando as linhas de pilares pr̄ximas ao contorno externo) .

(ii) faixas das vigas internas (englobando as linhas de pilares internas).

O carregamento adotado foi o total para ambas as direç̄es, conforme ̄ usual no c̄lculo de lajes cogumelo.

Para a an̄lise foram utilizados elementos de viga com v̄nculos el̄sticos nos pontos nodais sendo o c̄lculo elaborado pelos programas SAP IV e LORANE LINEAR conforme j̄ descrito no item III.5.3.

Os valores dos momentos fletores totais obtidos para cada viga estão apresentados nas Figuras IV.27 a IV.30 para as alturas de 1,70m e 2,50m.

#### IV.1.6 - Análise dos Métodos de Cálculo

Será efetuada a análise dos resultados dos diversos métodos de cálculo, comparando os valores dos momentos fletores nas diversas faixas em que foi dividido o radier.

Como a distribuição dos pilares é regular, poder-se-á dividir o radier em duas faixas (para cada direção de estudo), a exemplo do que se faz em lajes cogumelo.

Teremos 2(dois) tipos de faixas (FIG.IV.31 e IV.32).

- as faixas coincidentes com os eixos dos pilares, denominada de faixa dos pilares.

- as faixas situadas entre 2(duas) linhas de pilares, denominada de faixa interna.

A análise será efetuada para 2(duas) alturas distintas do radier 1,70m e 2,50m.

É conveniente lembrar que os Métodos dos Elementos Finitos, Diferenças Finitas e ACI, fornecem os valores dos esforços por unidade de comprimento. Para se obter o valor do momento fletor total atuando na faixa deve-se efetuar a integração dos valores apresentados nos diagramas solicitantes.

Os Métodos da Grelha e da Viga sobre Base Elástica já apresentam os valores, dos esforços totais em cada faixa, dispensando portanto cálculos adicionais.

Apresenta-se nas Figuras IV.33 e IV.34 um resumo dos momentos fletores totais nas cinco faixas em que o radier foi dividido na direção X e nas Figuras IV.36 e IV.37 um resumo dos momentos fletores totais nas quatro faixas em que o radier da direção Y.

As Figuras IV.35 e IV.38 apresentam um resumo com a soma dos momentos fletores entre a faixa dos pilares e a metade dos momentos fletores de cada faixa interna vizinha à faixa dos pilares considerada, de modo a se poder comparar com os valores obtidos no cálculo do Método da Viga em Base Elástica, para as direções X e Y.

(a) **Direção X:**

Os momentos fletores obtidos a partir do emprego dos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas, apresentam valores significativamente próximos. As diferenças médias dos resultados se situam em torno dos 15%. (ver Figura IV.33 e IV.34).

Os momentos fletores calculados pelo Método do ACI se aproximam dos valores dos métodos anteriores, para pontos do radier afastados dos bordos. As diferenças médias dos resultados obtidos pelo ACI, Elementos Finitos e Diferenças Finitas são de ordem dos 20%. Para os pontos próximos aos bordos os valores obtidos diferem de até 48%, apresentando resultados sempre inferiores, denotando que o Método do ACI não simula de modo correto as condições do contorno da placa.

Lembramos que os valores dos esforços nos bordos já se acham compatibilizados conforme o item 7.3.8 da ACI.

Para o Método da Grelha sobre Base Elástica, os valores dos momentos Fletores nos casos da consideração ou não da torção, diferem entre si em média de 15%. Com o objetivo de não sobrecarregar a nossa análise, plotou-se nas FIG. IV.33 e IV.34 apenas os resultados

numéricos do caso da grelha com torção. Observando-se os valores dos momentos fletores, concluímos que os mesmos diferem bastante dos obtidos pelos outros métodos. Para pontos do balanço em torno de 60% (trecho entre a linha de pilares e o bordo da laje) e para os centros do 1º vão em torno de 35% (trecho entre os 2(dois) pilares extremos de uma faixa). Esta diferença entre os resultados é devida a modelagem adotada, que resulta sempre em trechos com balanços para os bordos de placa. Desta maneira o "maior quinhão de cargas" das faixas dos pilares fica com uma esquematização deficiente, não conseguindo interagir entre duas faixas de balanço consecutivas, acarretando um fraco momento fletor e uma correspondente majoração dos momentos positivos no 1º vão. Note-se ainda que para as faixas internas os momentos fletores obtidos se aproximam em média cerca dos 20% dos obtidos pelos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas.

Os valores totais dos momentos fletores do cálculo como viga sobre base elástica se diferenciam dos valores totais médios da soma dos momentos fletores das faixas dos pilares e da faixa interna de no máximo 20% (em relação aos Métodos das Diferenças Finitas e Elementos Finitos - FIG.IV.35). Observa-se que, ao menos para o exemplo 1, este método aproximado fornece resultados totais satisfatórios, faltando apenas definir-se o modo da distribuição dos momentos fletores entre as diversas faixas do radier. A NB-1 (22),

sugere a seguinte distribuição para lajes do tipo có-gumelo:

- faixas dos pilares:
  - momentos positivos : 55%
  - momentos negativos : 75%
- faixas internas:
  - momentos positivos : 45%
  - momentos negativos : 25%

Baseado nos resultados obtidos, observa-se uma pequena alteração nos valores acima, para o seguinte modo de distribuição na direção **X**:

- faixas dos pilares:
  - momentos positivos : 52%
  - momentos negativos : 68%
- faixas internas:
  - momentos positivos : 48%
  - momentos negativos : 32%

Convém ressaltar que conforme explicado no item IV.1.5 foi tomada para cada direção de estudo como viga, a totalidade da carga nos pilares.

Na análise dos resultados obtidos nos casos do radier com a altura de 1,70m ou 2,50m, os valores dos momentos fletores variaram de no máximo 10%.

Como exceção temos os momentos do centro do 1º vão (trecho entre os dois pilares extremos de uma mesma faixa), onde para a placa com uma altura de 2,5 metros foram atingidas majorações de em média 25%. Como ilus

tração, a variação do "raio da rigidez relativa" placa X terreno é da ordem de 25% e a variação da rigidez a flexão da placa da ordem de 70%, conforme demonstrado abaixo:

1º caso: espessura do radier = 1,70m

$$\text{rigidez a flexão da placa} = D \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$E = 3000000 \text{ t/m}^2$$

$$\mu = 0,20 \quad \rightarrow D = 1279427.1 \text{ tm}$$

$$h = 1,70\text{m}$$

$$\text{módulo reação vertical do terreno: } K_o = 3000 \text{ t/m}^3$$

$$\text{raio de rigidez relativa} = \sqrt[4]{\frac{D}{K_o}} = \sqrt[4]{\frac{1279427.1}{3000}} = 4,54\text{m}$$

2º caso: espessura do radier = 2,50m

$$\text{rigidez a flexão da placa} = D \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$E = 3000000 \text{ t/m}^2$$

$$\mu = 0,20 \quad \rightarrow D = 4069010.4 \text{ tm}$$

$$h = 2,50\text{m}$$

$$\text{módulo reação vertical do terreno: } K_o = 3000 \text{ t/m}^3$$

$$\text{raio da rigidez relativa} = \sqrt[4]{\frac{D}{K_o}} = \sqrt[4]{\frac{4069010.4}{3000}} = 6,07\text{m}$$

A Figuras IV.39 e IV.40 apresentam as pressões de contato (reações do terreno) nos casos de  $h = 1,70\text{m}$  e  $h = 2,50\text{m}$ , respectivamente, onde se constata uma melhor distribuição das pressões no caso do radier com altura de 2,50m em relação ao de 1,70m de altura. As variações atingiram uma média de 10% nos bordos e de 15% no interior do radier, bastante distante das va-

riações do raio da rigidez relativa e da rigidez a flexão da placa. A distribuição de pressões obtida explica as variações ocorridas nos diagramas de momentos fletores nos casos das duas alturas do radier que foram analisadas neste exemplo.

(b) **Direção Y:**

A comparação entre os momentos fletores resultante do emprego dos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas, apresentaram valores com diferenças médias da ordem de 13% para as faixas dos pilares (1ª e 3ª faixas). Para as faixas internas (2ª e 4ª faixas), as diferenças atingiram até 46%. Nestas faixas internas os valores dos esforços são da ordem de 20% dos esforços das faixas dos pilares. Por este motivo apesar da variação em termos absolutos entre os 2(dois) métodos de cálculo analisados, terem mantidos a mesma ordem de grandeza (ver FIG.IV.36 e IV.37), em termos relativos as diferenças constatadas se tornam elevadas.

O Método do ACI, mantém alguma aproximação dos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas para pontos do interior da placa, e resultados inferiores para pontos próximos ao contorno.

O Método da Grelha sobre base elástica apresenta valores próximos (diferenças médias não superiores a 15%), para os casos da consideração ou não da rigidez à torção das barras. Continuaremos de maneira análoga a análise efetuando para a direção X, a plotar nas FIG.IV.36 e IV.37 os resultados numéricos do caso da

grelha com torção. Para a direção **Y**, esse método apresentou momentos fletores com diferenças médias da ordem de 45% em relação aos outros métodos, para as faixas dos pilares. Esta majoração dos esforços nestas faixas, acarretou em contrapartida uma diminuição nos valores absolutos das faixas internas, tornando as diferenças relativas aos outros métodos bastante significativas. As observações feitas para a direção **X**, com respeito à modelagem adotada para os pontos dos balanços (trechos entre os bordos do radier e a linha de pilares), também se verificam.

De modo semelhante a direção **X**, o Método da Viga sobre Base Elástica, apresenta valores totais dos momentos fletores com diferenças médias da ordem de 21% (exceto em 2(dois) pontos não representativos do trecho em balanço no Método dos Elementos Finitos) em relação aos valores totais médios da soma dos momentos fletores das faixas internas e da faixa dos pilares (em comparação com o Método das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos). O modo de distribuição observado nas diversas faixas, foi o seguinte:

( FIG.IV.38).

- faixa dos pilares:

- momentos positivos : 68%
- momentos negativos : 90%

- faixas internas:

- momentos positivos : 32%
- momentos negativos : 10%

A variação dos resultados numéricos dos momentos fletores para a direção Y, entre as alturas do radier de 1,70m e 2,50m se situaram na média de 15%. Esta variação ocorreu de forma aleatoria ao contrário da direção X.

#### IV.2 - EXEMPLO 2 - RADIER COM DISTRIBUIÇÃO IRREGULAR DE PILARES

Este exemplo refere-se a um radier com 8,00m de largura e 16,00m de comprimento, com um arranjo de pilares bastante irregular. As cargas concentradas tem valores moderados (Figura IV.41 e IV.42).

O radier é uma placa lisa em concreto e a análise será feita para 2(duas) espessuras:

- 1º caso: espessura 0,50m
- 2º caso: espessura 0,80m

A seguir são apresentados, em conjunto com a modelagem do radier para cada método já descrito no Capítulo III, os respectivos diagramas de momentos fletores nas direções X e Y.

##### IV.2.1 - Método dos Elementos Finitos

A análise foi elaborada utilizando-se o programa LORANE LINEAR e o elemento de placa retangular não conforme descrito no item III.6.3 com molas nos pontos nodais.

A Figura IV.43 apresenta a modelagem e as cargas atuantes.

As Figuras IV.44 a IV.47 apresentam os diagramas de momentos fletores para as direções X e Y e alturas 0,50m e 0,80m.

##### IV.2.2 - Método das Diferenças Finitas

A análise utilizou o programa já descrito no item III.3.4

e Apêndice A. A malha adotada e as cargas estão apresentadas na Figura IV.43.

Os momentos fletores para as direções X e Y e alturas de 0,50m e 0,80m estão apresentados nas Figuras IV.48 a IV.51.

#### IV.2.3 - Método do ACI

A escolha dos pontos de cálculo seguiu a malha empregada no Método das Diferenças Finitas (FIG.IV.43).

As Figuras IV.52 a IV.55 apresentam os diagramas de momentos fletores para as alturas de 0,50m e 0,80m nas direções X e Y. O programa descrito no item III.7.4 e Apêndice B foi utilizado para os cálculos dos esforços, incluindo a compatibilização das condições de contorno conforme determina o ACI (20) .

#### IV.2.4 - Método da Grelha sobre Base Elástica

Efetou-se a análise através do programa LORANE LINEAR , utilizando-se o elemento de grelha com vínculos elásticos nos pontos de cruzamento das vigas da grelha, pontos intermediários e do balanço, a exemplo do que foi explicado no item IV.1.4 do exemplo 1.

As cargas aplicadas estão descritas na Figura IV.57 e a modelagem empregada na Figura IV.56.

Os diagramas dos momentos fletores para os casos da consideração ou não da rigidez à torção das barras estão apresentadas nas Figuras IV.58 a IV.65 para as direções X e Y e para as alturas de 0,50m e 0,80m.

#### IV.2.5 - Método da Viga sobre Base Elástica

Conforme as Figuras IV.66 e IV.67, o radier foi dividido em quatro vigas no sentido horizontal (direção X) e em cinco vi-

gas no sentido vertical (direção Y).

O emprego deste método constou do cálculo das vigas acima descritas utilizando-se o elemento de viga do programa LORANE LINEAR com vinculação elástica nos pontos nodais de cada elemento. As vigas não interagem entre si, sendo o trabalho de cada uma totalmente independente das demais. As cargas totais foram aplicadas em ambas as direções X e Y. Os valores dos momentos fletores para as vigas 1 a 9 acham-se apresentadas nas Figuras IV.68 a IV.71.

#### IV.2.6 - Análise dos Resultados

De maneira análoga ao exemplo 1, a análise será feita baseando-se nos resultados dos valores dos momentos fletores obtidos para cada método.

Por não existir uma uniformidade na distribuição dos pilares, a análise feita no exemplo 1, onde subdividimos o radier em faixas denominadas internas e faixas dos pilares, fica sem sentido.

A avaliação dos resultados será baseada de maneira total nas FIG. IV.43 e IV.71.

Os esforços obtidos no Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas e Método do ACI, apresentam os resultados numéricos dos momentos fletores por unidade de comprimento, ou seja mt/m. No caso do Método da Grelha sobre Base Elástica e Viga sobre Base Elástica os momentos fletores apresentados já são totais para cada trecho correspondente do radier, ou seja mt.

##### (a) Direções X e Y

Os momentos fletores do Método dos Elementos Finitos comparados com os Método das Diferenças Finitas, apresentaram valores muito próximos. As diferenças não

suplantaram o valor de 10%, exceto para 2(dois) pontos localizados do radier. Estes pontos são exatamente os situados sob os pilares  $P_2$  e  $P_{10}$  que tem cargas elevadas junto ao bordo da laje. Neste caso a diferença nos valores dos momentos fletores atingiu o máximo de 36%.

O Método do ACI, comparado com os anteriores, atingiu diferenças relativas elevadas. Este método em toda a extensão da placa apresentou sempre valores inferiores, da ordem de 75% aos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas.

No Método da Grelha sobre Base Elástica, a comparação entre os casos da consideração ou não da rigidez a torção das barras, conduz a resultados com diferenças pouco significativas (da ordem de no máximo 10%). Desse modo efetuamos, seguindo o já feito para o exemplo 1, a análise para o caso da grelha com rigidez a torção das barras. A comparação deste método com os anteriores mostra que os valores diferem de maneira aleatória variando entre 24% e 80%.

Em alguns pontos os valores são totalmente invertidos. É conveniente ressaltar que para a comparação entre os valores numéricos, os resultados da grelha são os momentos totais correspondentes a 2,00m de largura, enquanto que no Método das Diferenças Finitas, ACI e Elementos Finitos, os momentos fletores são apresentados para os pontos nodais de cada elemento, que neste caso tem 1,00m de largura. A comparação deve ser feita integrando-se os esforços neste trecho de 2,00m

para possibilitar a comparação.

O Método da Viga sobre Base Elástica apresentou a mesma configuração do Método da Grelha sobre Base Elástica, embora com valores um pouco mais próximos do Método dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas. Estes valores apresentaram diferenças relativas aos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas, entre 8% e 70%. Este método também apresenta os valores totais dos momentos fletores para uma faixa de 2,00m.

No tocante as diferenças verificadas nos momentos fletores para as espessuras do radier de 0,50m e 0,80m, pode-se resumir o seguinte:

- os Métodos dos Elementos Finitos, ACI, e das Diferenças Finitas apresentaram uma redução da ordem de 20% no pico dos momentos, nos pontos onde atuam cargas concentradas, no caso da majoração da espessura do radier de 0,50m para 0,80m. Em contrapartida ocorreu um aumento da ordem de 30% nos momentos fletores do restante da placa.
- O Método da Grelha sobre Base Elástica apresentou variações pequenas, da ordem de 10% sempre com momentos menores nos pontos sob a ação de cargas concentradas, e maiores no restante da placa, quando da majoração da espessura de 0,50m para 0,80m.
- O Método da Viga sobre Base Elástica apresentou grandes variações, da ordem de 50%, seguindo o modo dos métodos anteriores, ou seja redução nos picos dos momentos e uma conseqüente majoração em outros pontos.

Como ilustração, conforme demonstrado abaixo o raio da rigidez relativa variou de 30% e a rigidez a flexão da placa de 75%, quando da alteração das espessuras.

1º caso: espessura:  $t = 0,50\text{m}$

$$\text{rigidez a flexão da placa} = D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$E = 3000000 \text{ t/m}^2$$

$$h = 0,50\text{m} \quad \rightarrow D = 32552 \text{ tm}$$

$$\mu = 0,20$$

$$\text{raio da rigidez relativa} = L = \sqrt[4]{\frac{D}{K_0}}$$

$$K_0 = 3000 \text{ t/m}^3 \quad \rightarrow L = 1,81\text{m}$$

2º caso: espessura:  $t = 0,80\text{m}$

$$\text{rigidez a flexão da placa} = D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$E = 3000000 \text{ t/m}^2$$

$$h = 0,80\text{m} \quad \rightarrow D = 133333 \text{ tm}$$

$$\mu = 0,20$$

$$\text{raio da rigidez relativa} = L = \sqrt[4]{\frac{D}{K_0}}$$

$$K_0 = 3000 \text{ t/m}^3 \quad \rightarrow L = 2,58\text{m}$$

A rigidez relativa radier-solo influe nas pressões de contato, conforme pode ser observado nas Figuras IV.72 e IV.73, que apresenta os resultados obtidos para o Método das Diferenças Finitas. Os pontos internos do radier apresentaram uma variação nas pressões médias de 30% para o contorno e de 25% para o interior da placa.

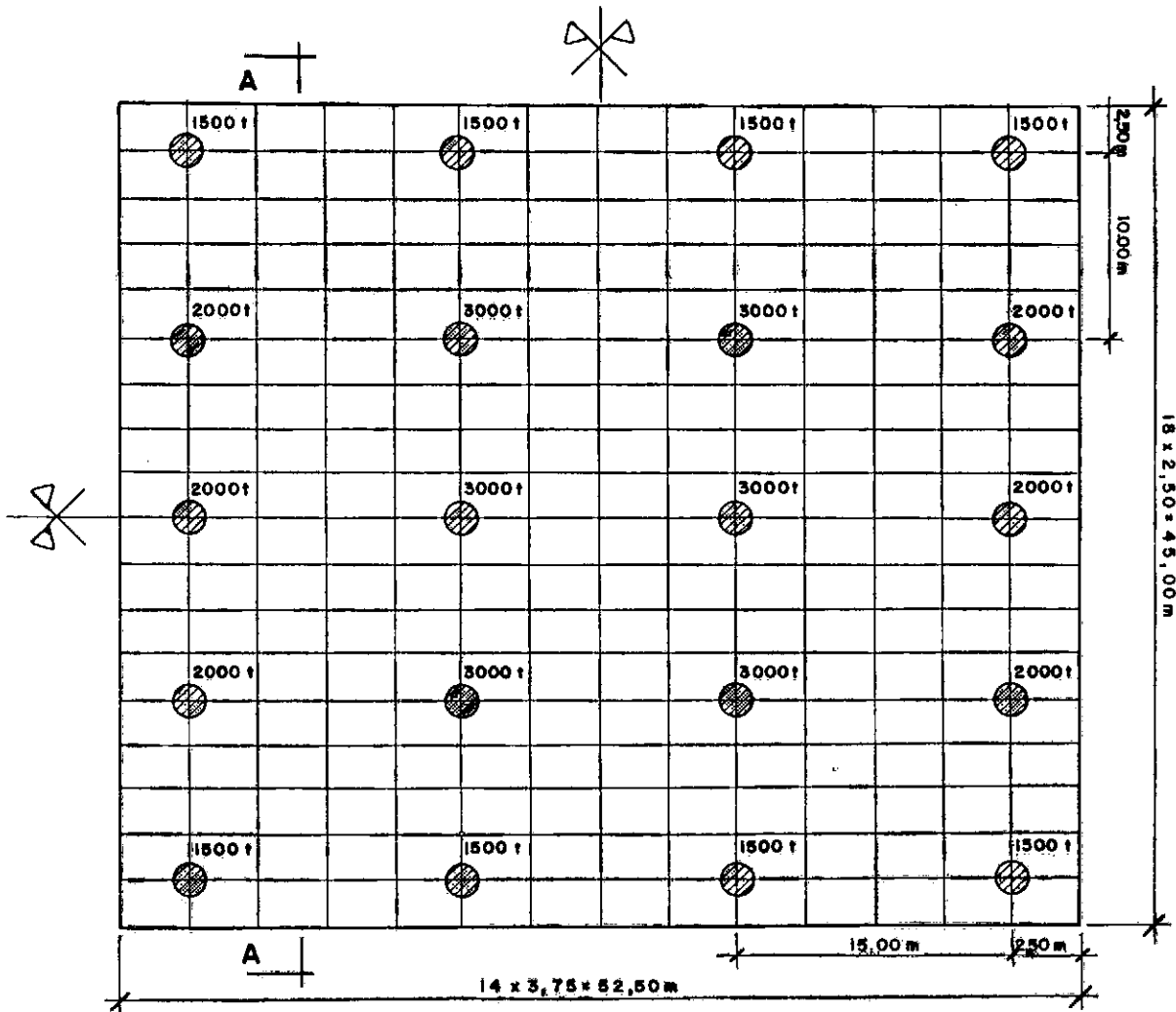
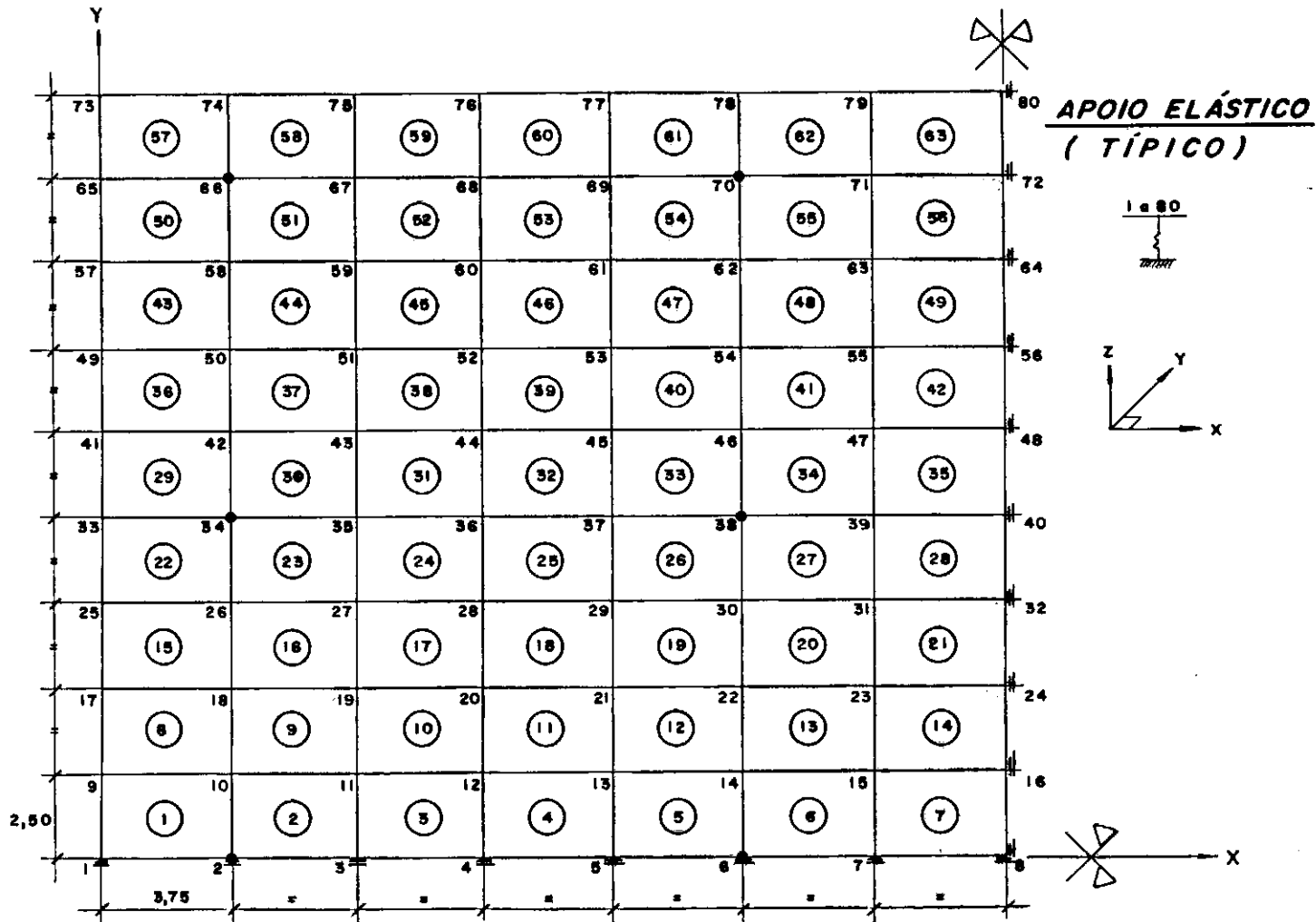


FIG. IV. 1-RADIER - FORMAS



TERRENO : MÓDULO DE REAÇÃO VERTICAL =  $3000 \text{ t/m}^3$   
 RADIER : PESO ESPECÍFICO =  $2,50 \text{ t/m}^3$   
 MÓDULO ELASTICIDADE =  $E = 3000000 \text{ t/m}^2$   
 COEFICIENTE POISSON =  $0,2 = \mu$   
 $G \approx 0,4 E = 1.200.000 \text{ t/m}^2$

**FIG. IV.2 - CORTE A - A •**  
**CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS**



**FIG. IV. 3 - MODELAGEM DA PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA  
MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS**

( E / cm )

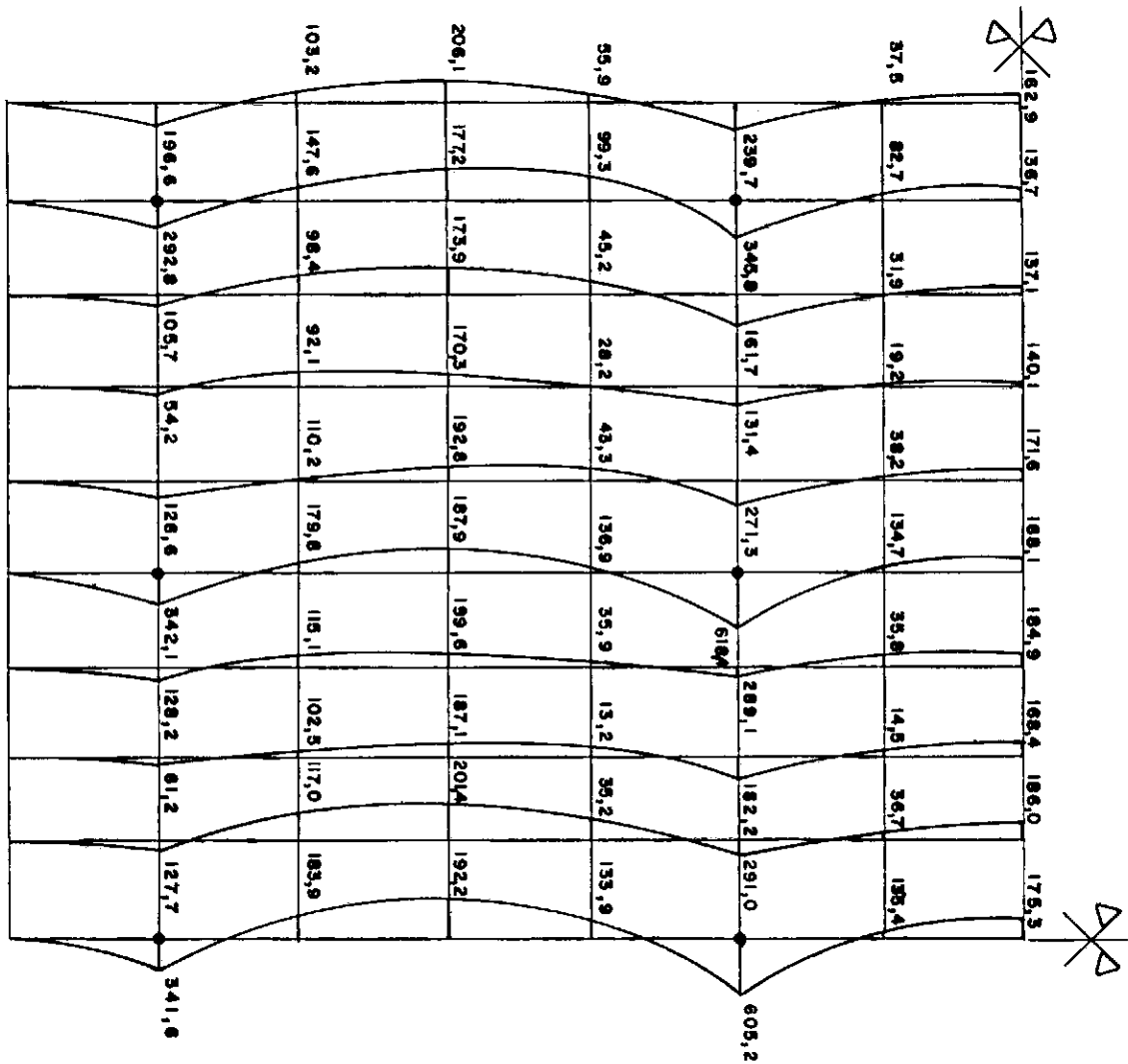


FIG. IV. 4 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
 DIREÇÃO X  
 h = 1,70 m

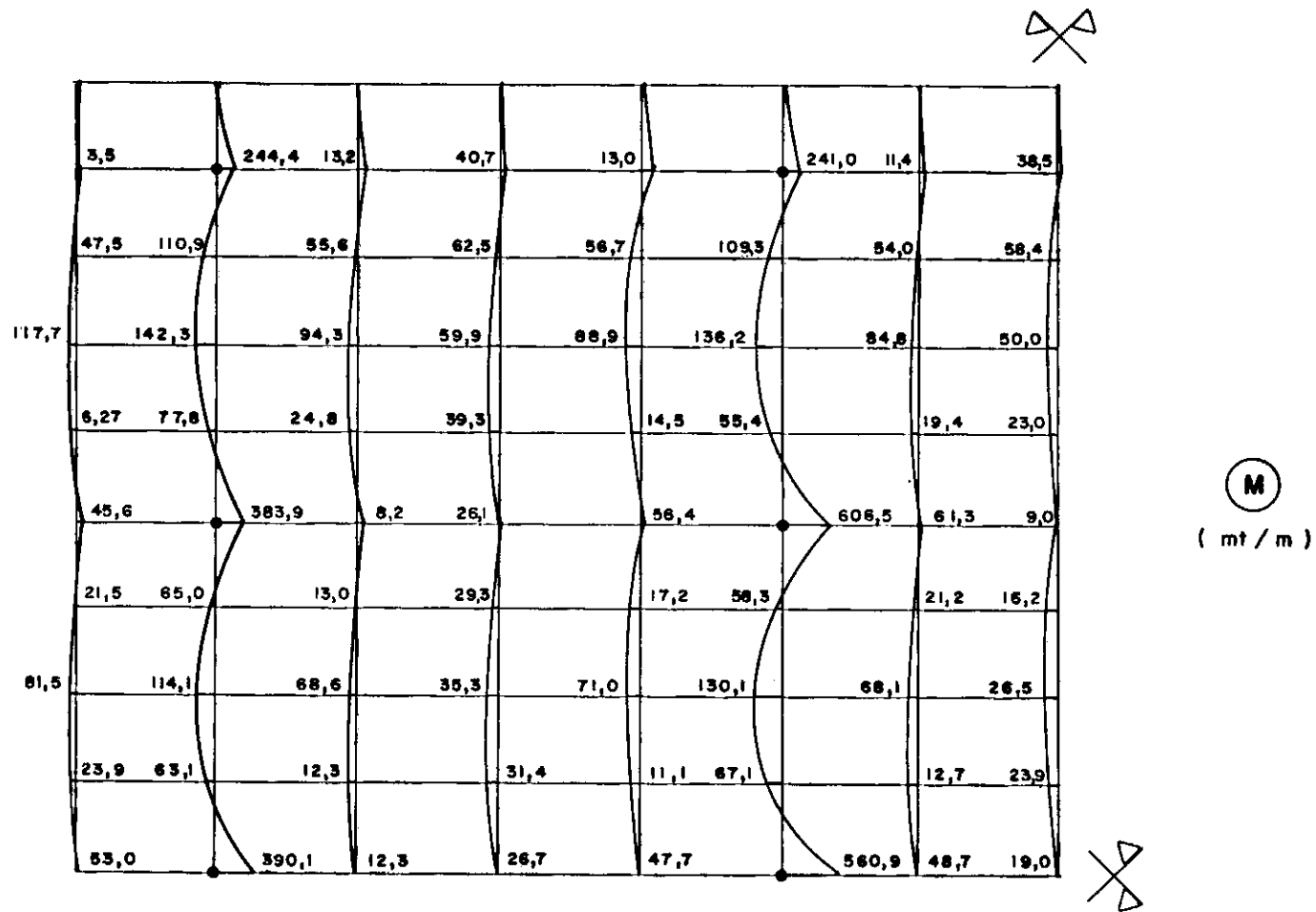
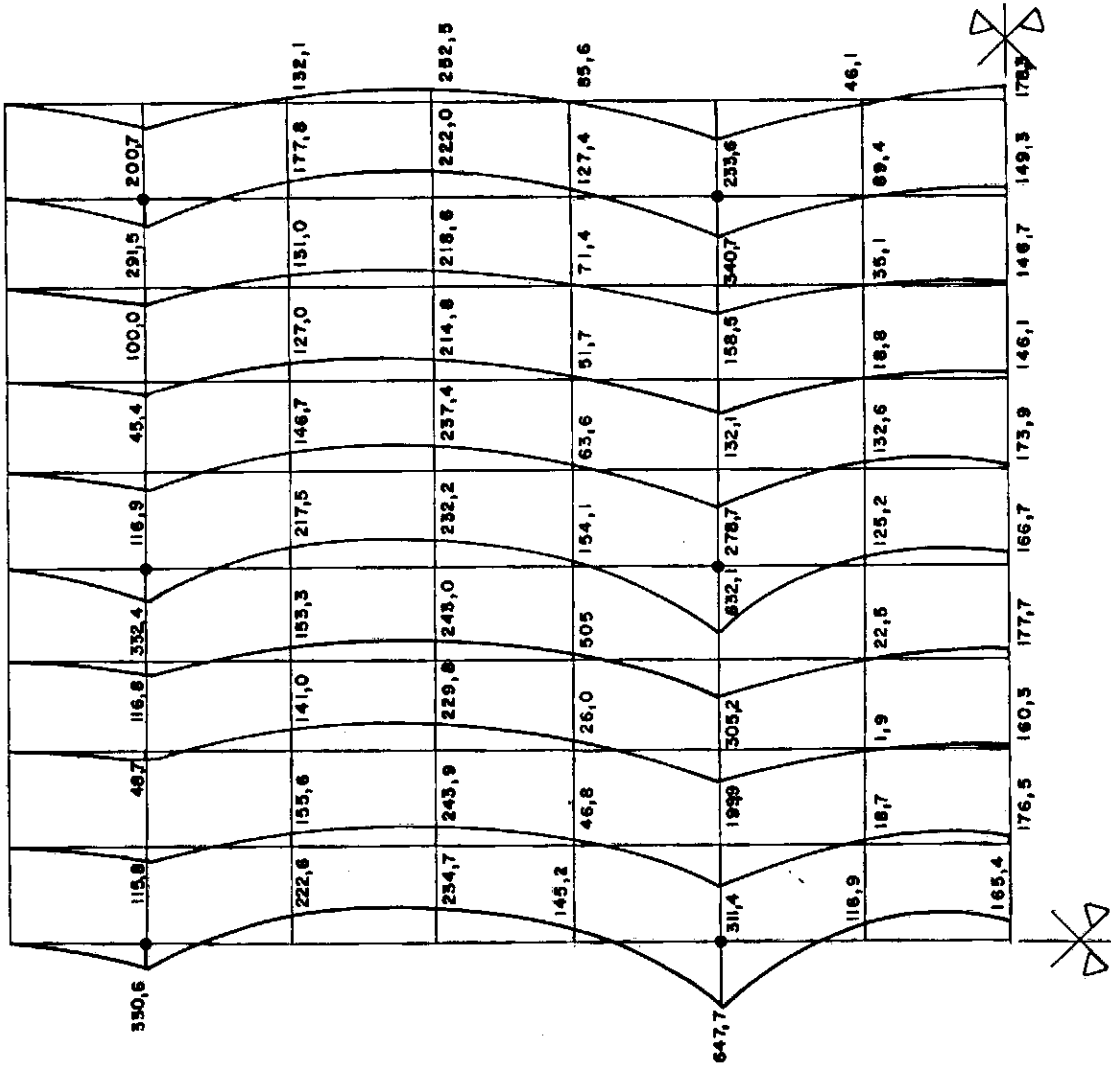


FIG. IV. 5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
DIREÇÃO Y  
h = 1,7 m



( M )  
( kN / m )

**FIG.IV. 6 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**  
**DIREÇÃO X**  
**h = 2,5 m**

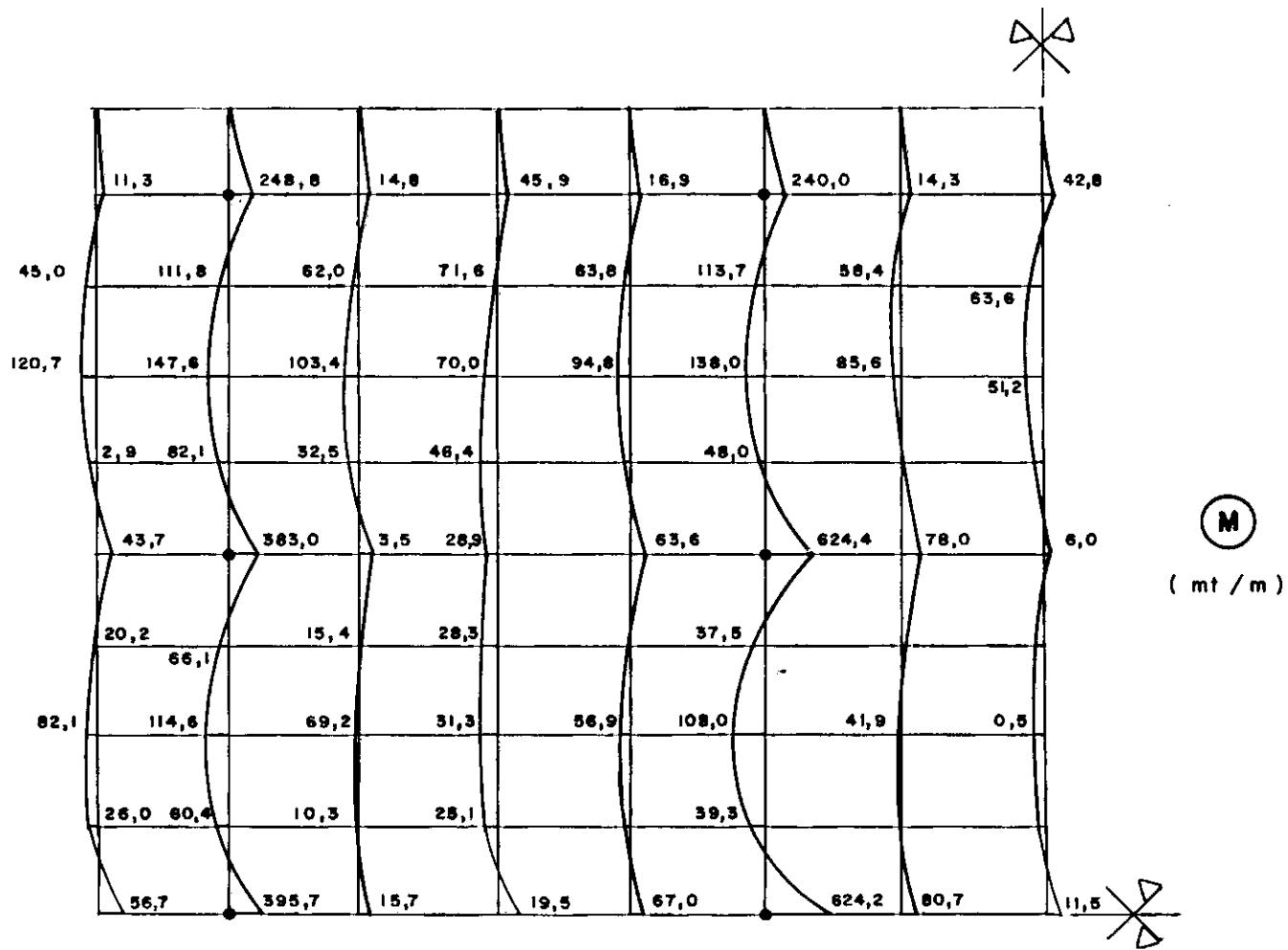
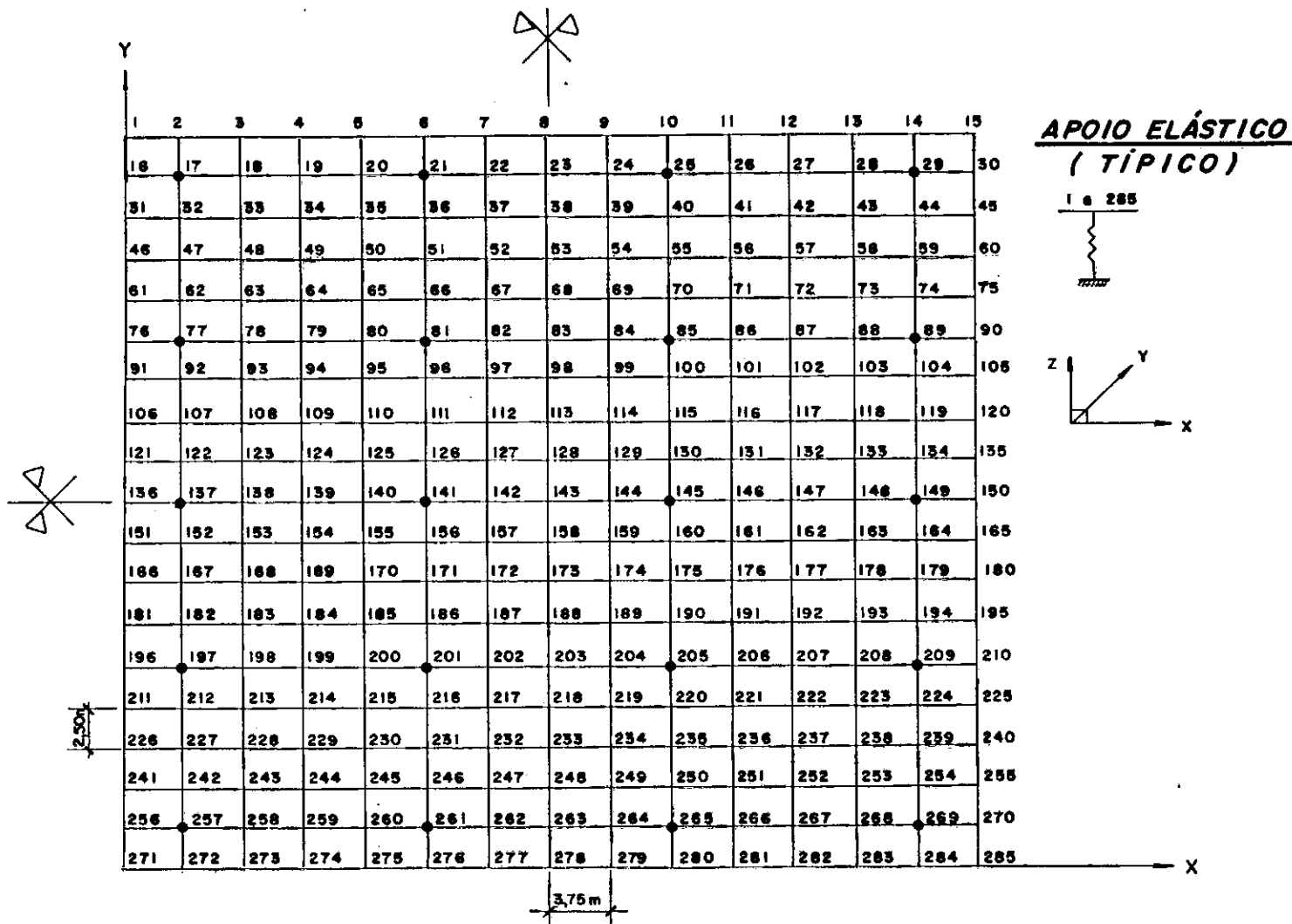


FIG. IV. 7 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
DIREÇÃO Y  
 $h = 2,5 \text{ m}$



**FIG. IV. 8 - MODELAGEM DA PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA  
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS •  
MÉTODO DO ACI**

(M)  
(mt/m)

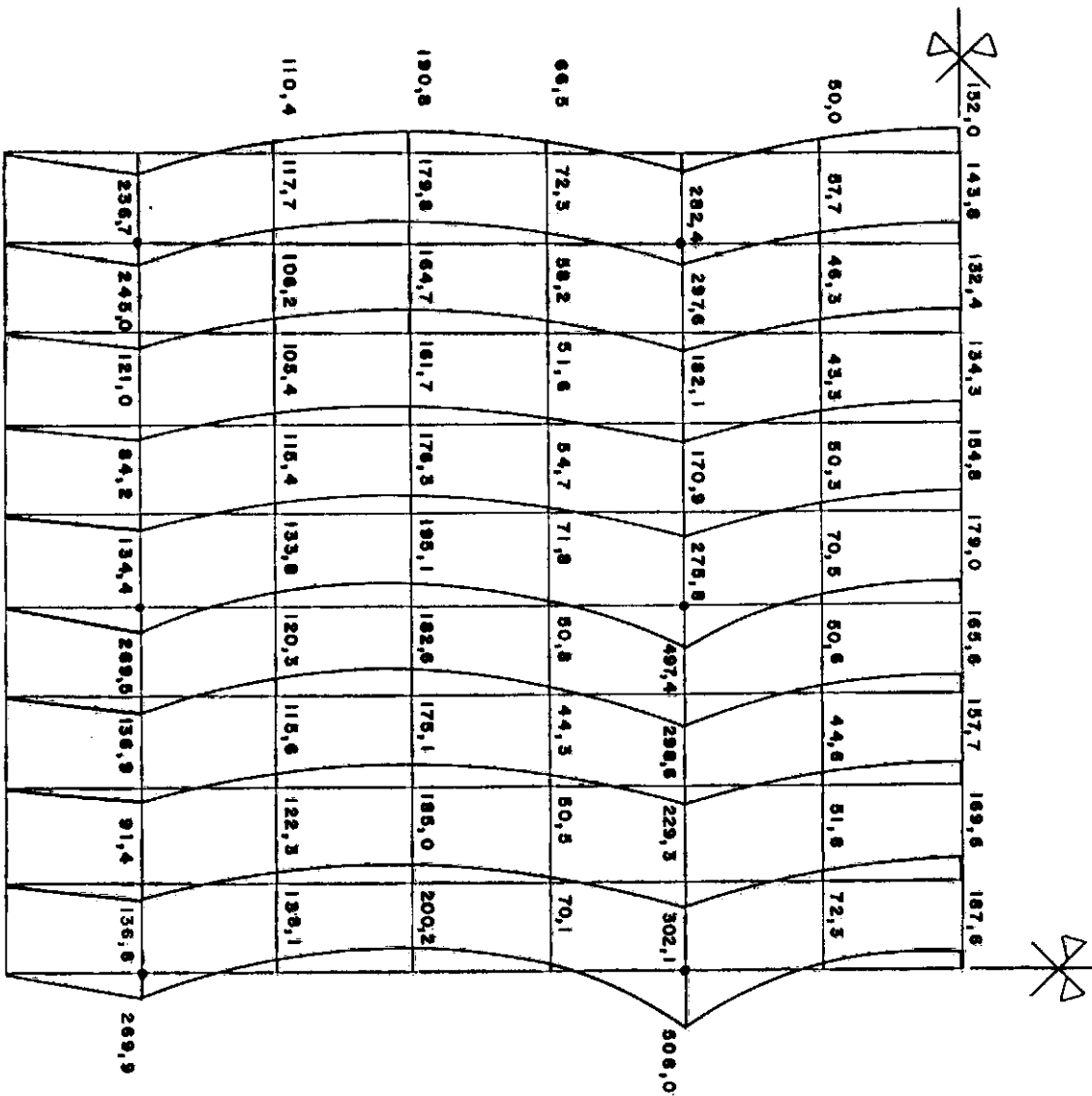


FIG. IV. 9 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
DIREÇÃO X  
h = 1,70 m

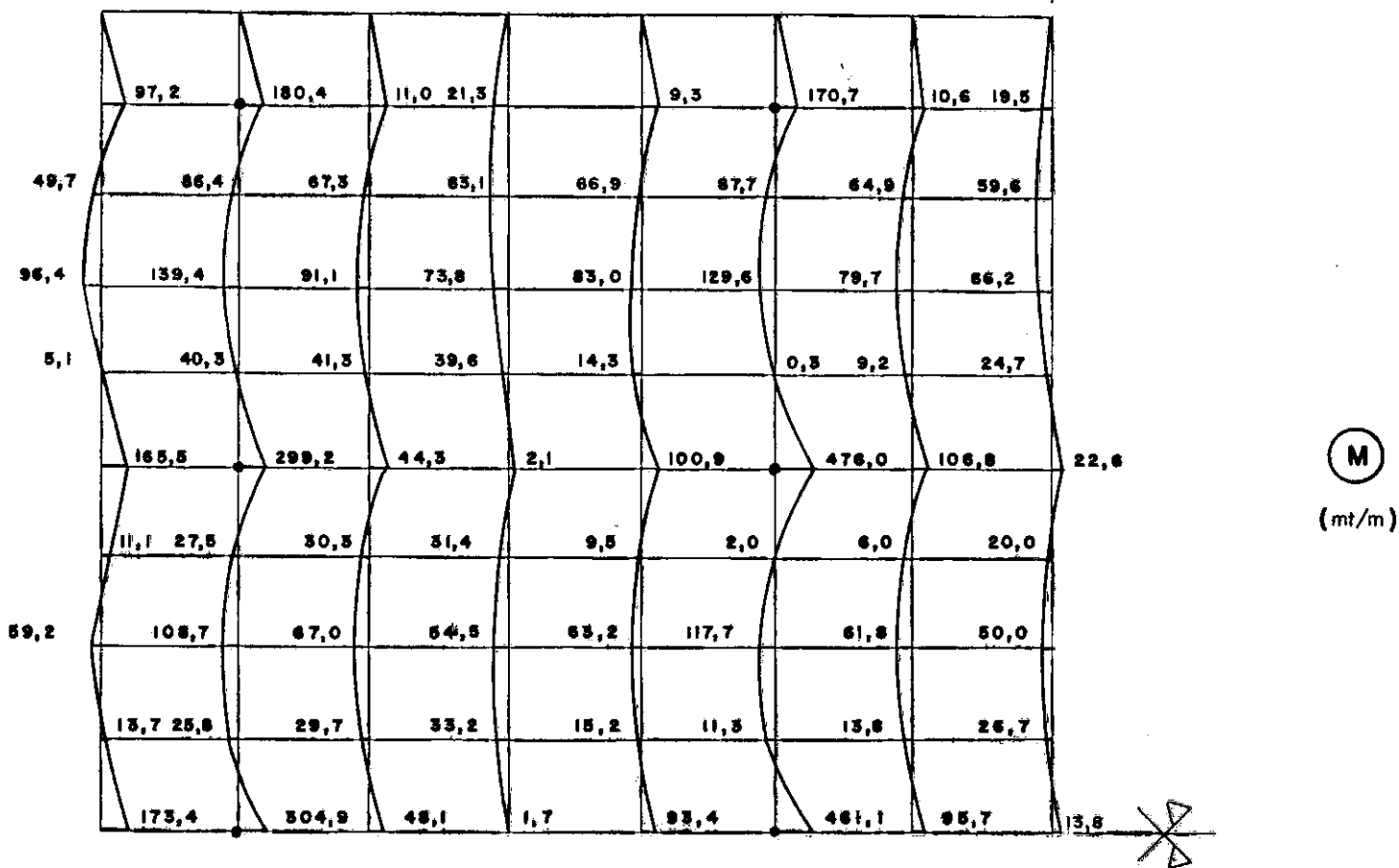


FIG. IX.10- MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
DIREÇÃO Y  
 $h = 1,70 \text{ m}$

M  
(mt/m)

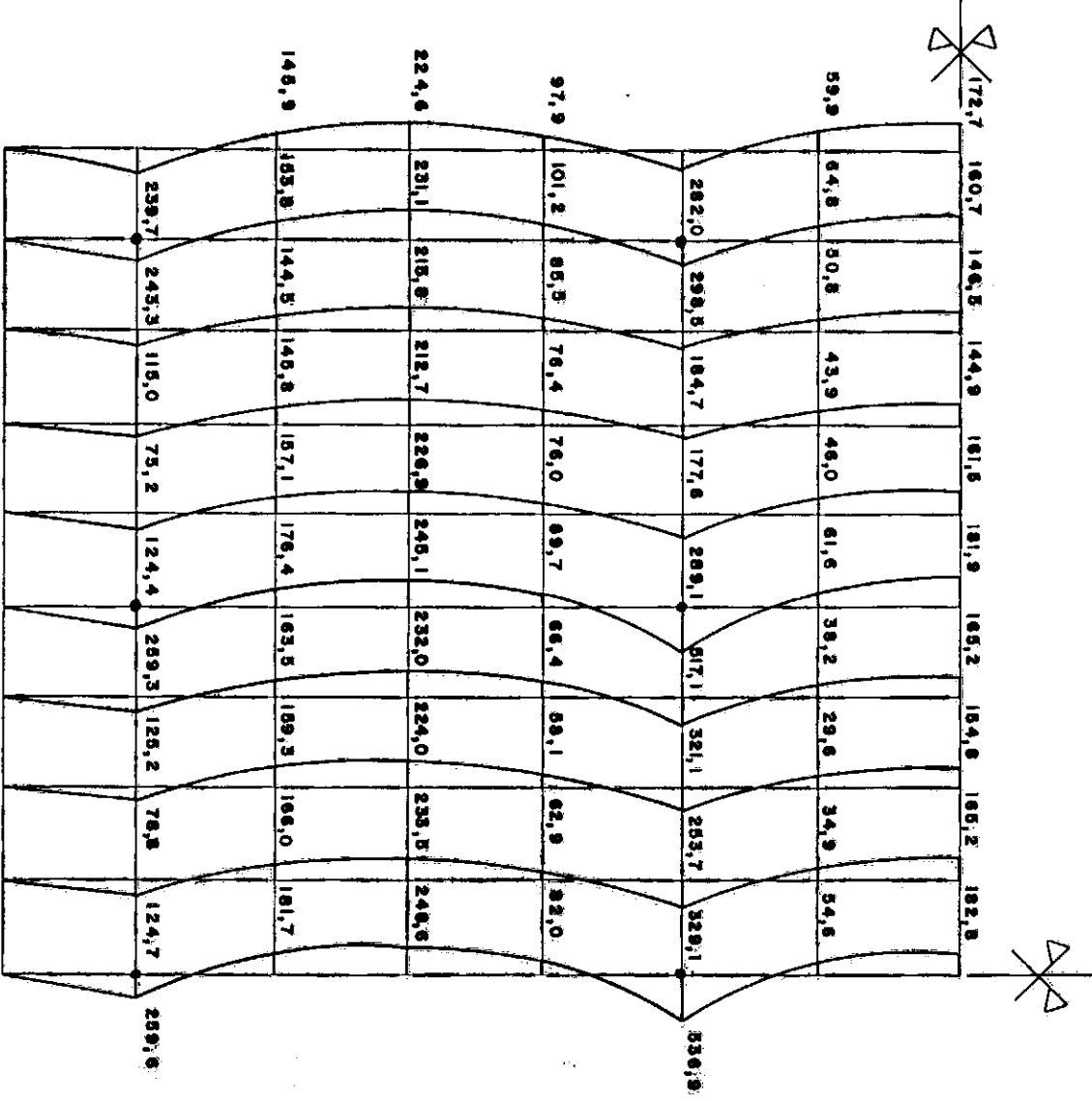


FIG. IV. 11. - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
DIREÇÃO X  
h = 2,5m

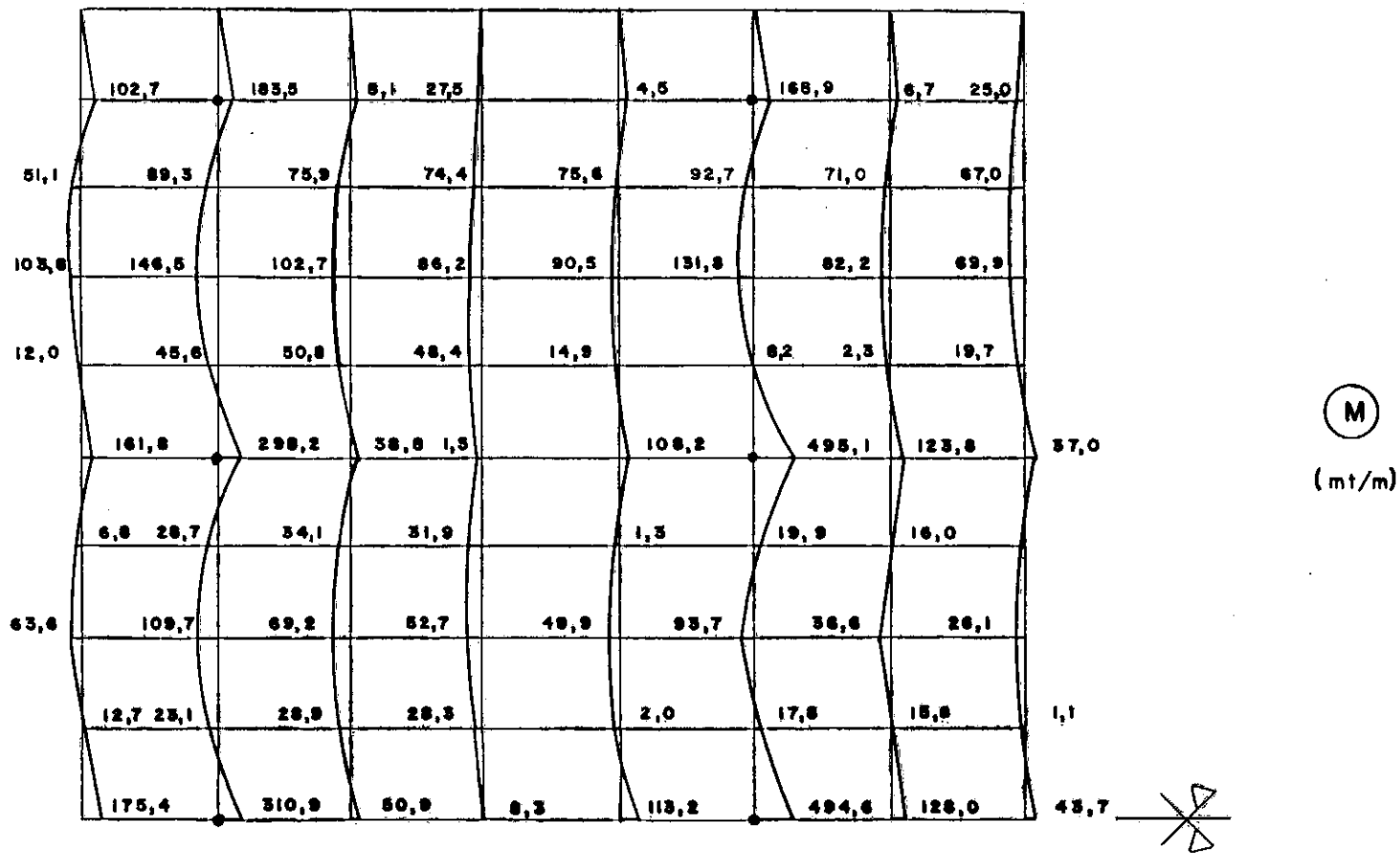


FIG. IV. 12 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
 DIREÇÃO Y  
 $h = 2,50 \text{ m}$

( M / m )

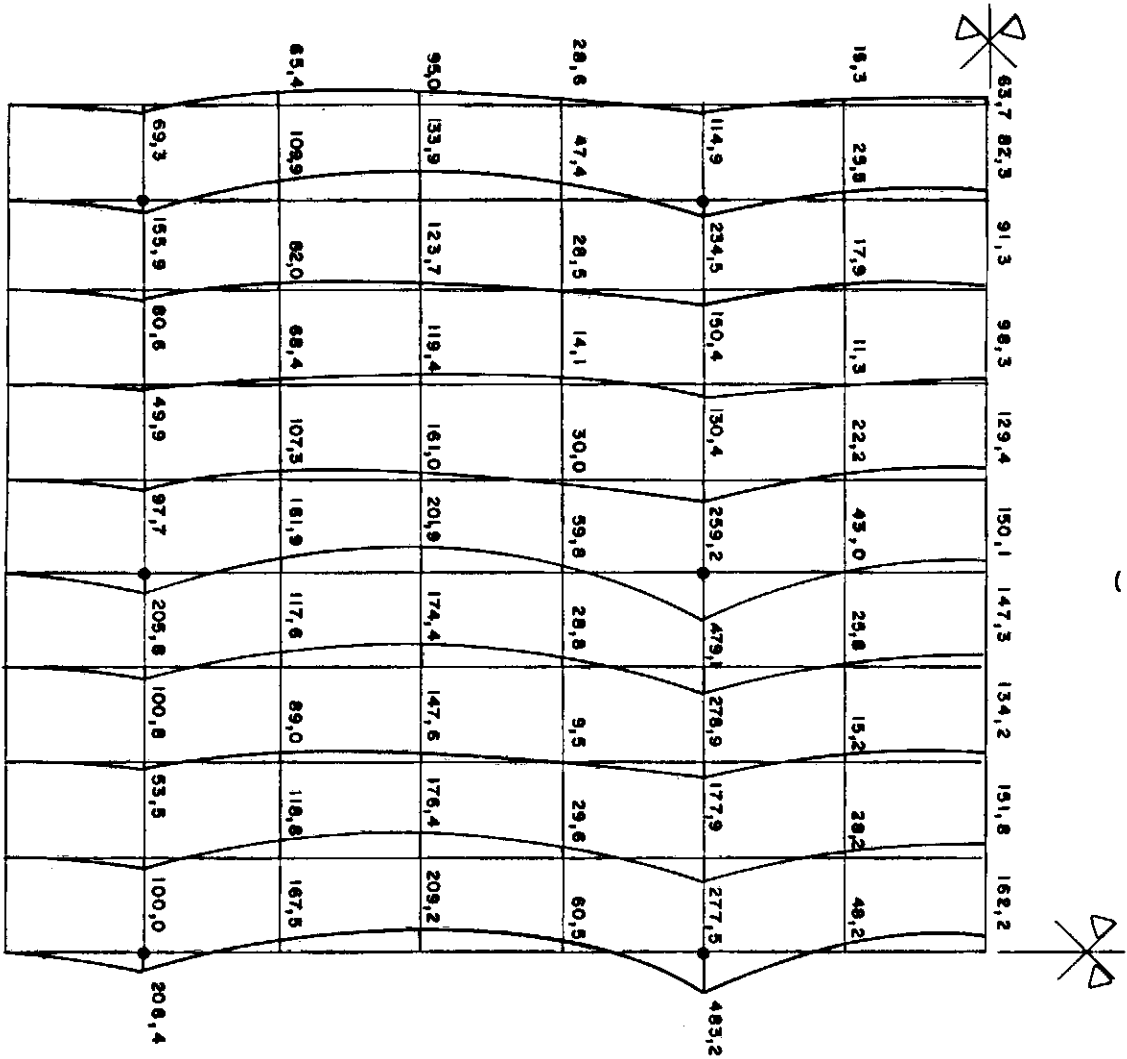
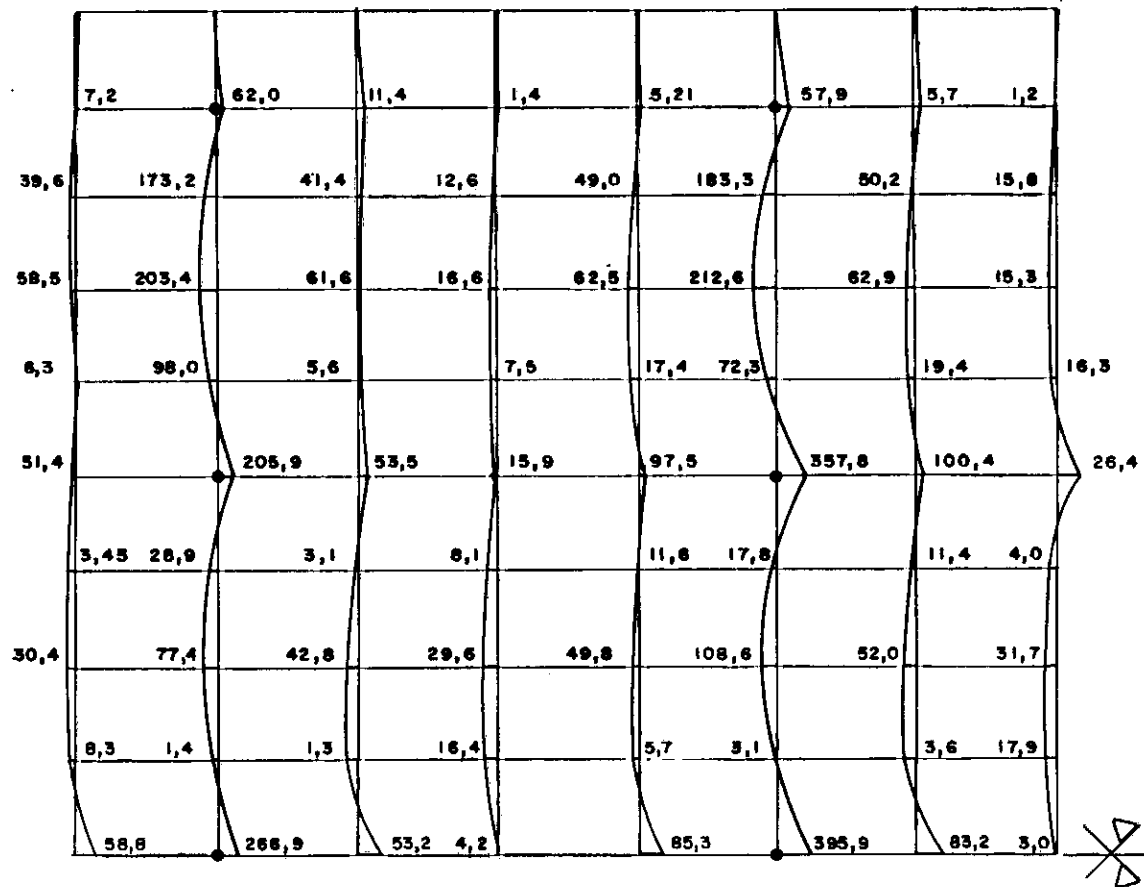


FIG. IV. 13 - MÉTODO DO ACI  
 DIREÇÃO X  
 h = 1,7 m



(M)  
( mt / m )

. 102 .

FIG. IV. 14 - MÉTODO DO ACI  
DIREÇÃO Y  
h = 1,7 m

( M / m )

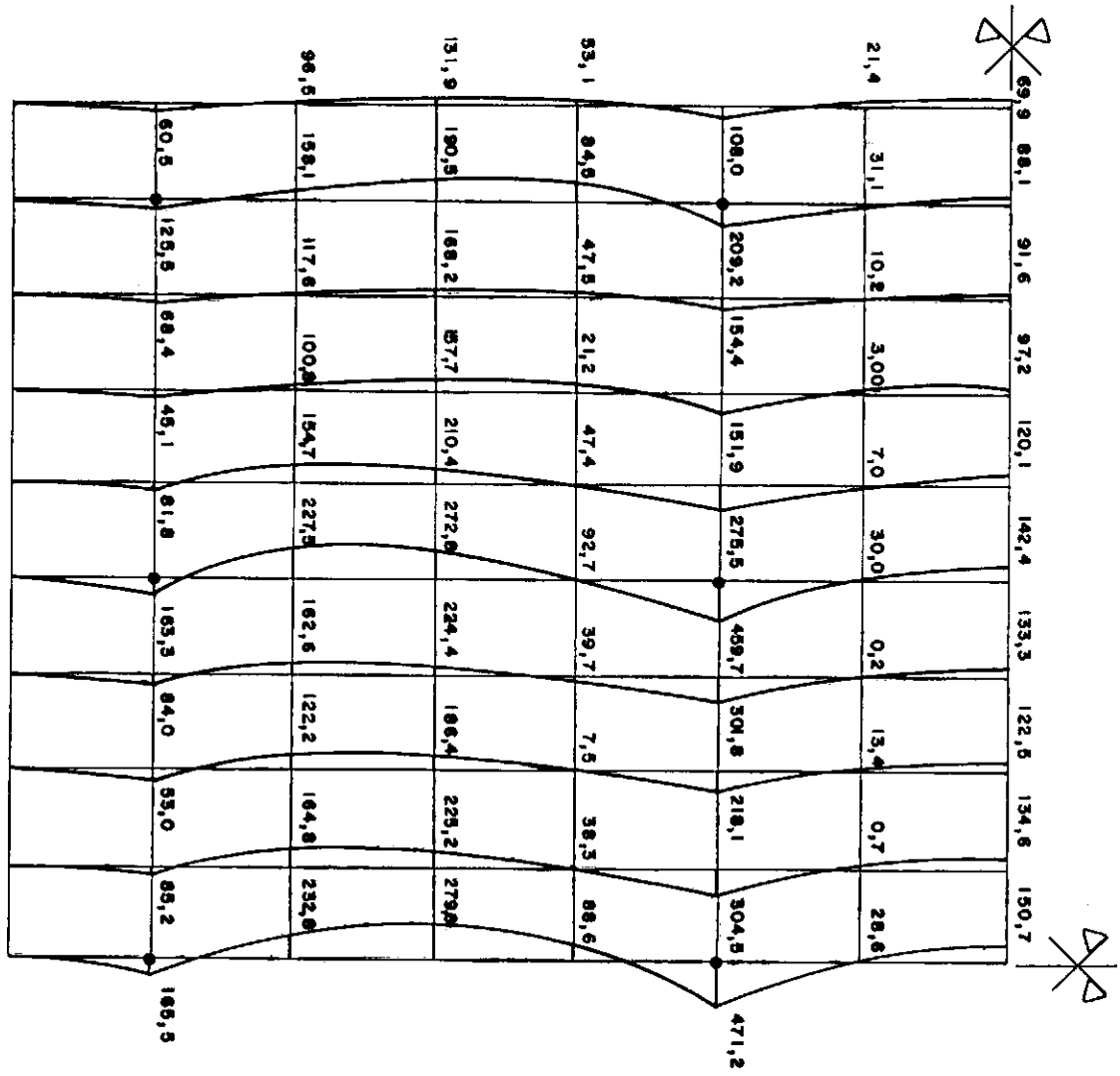


FIG. IV. 15 - MÉTODO DO ACI  
 DIREÇÃO X  
 h = 2,5 m

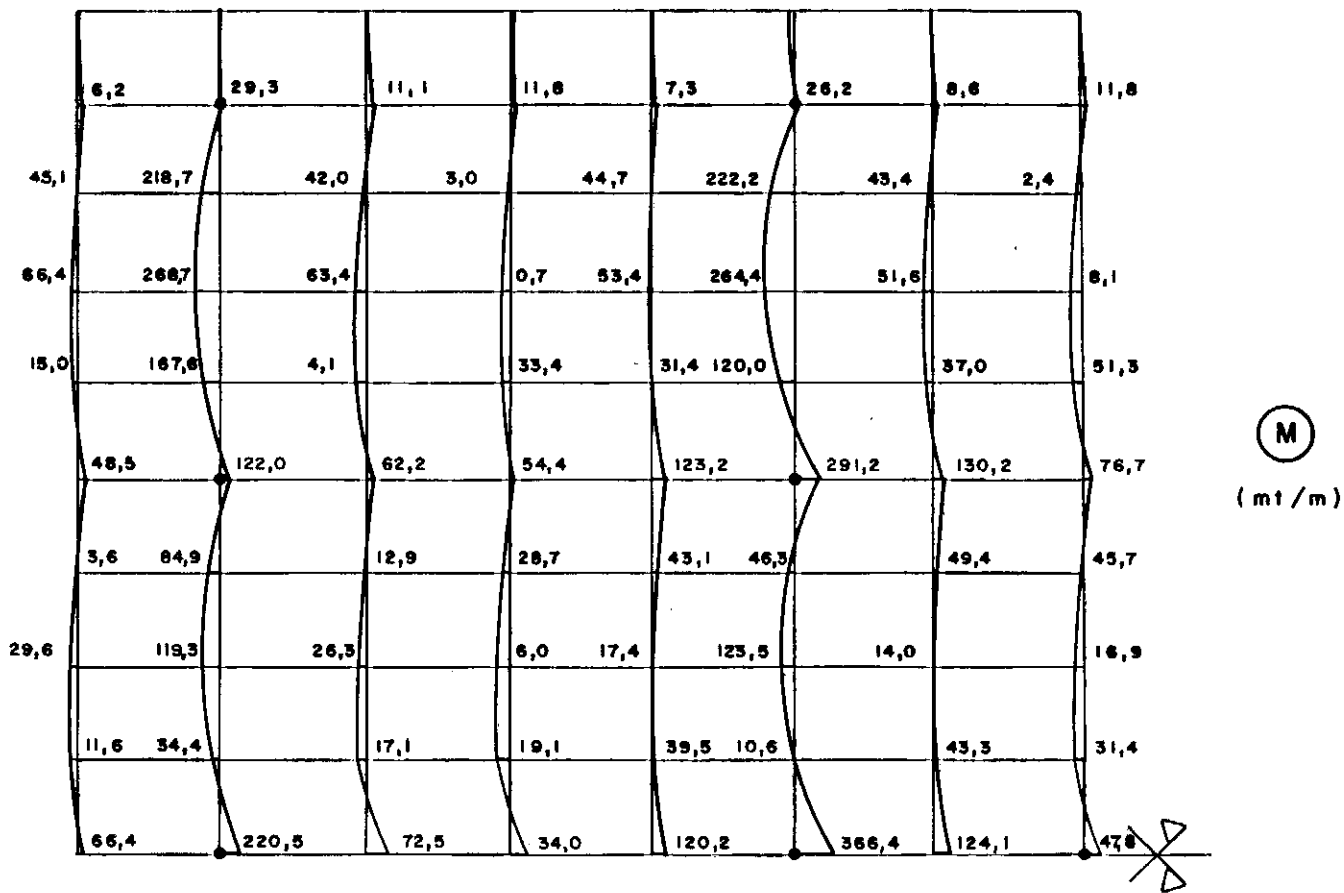


FIG. IV. 16 - MÉTODO DO ACI  
DIREÇÃO Y  
 $h = 2,5\text{ m}$

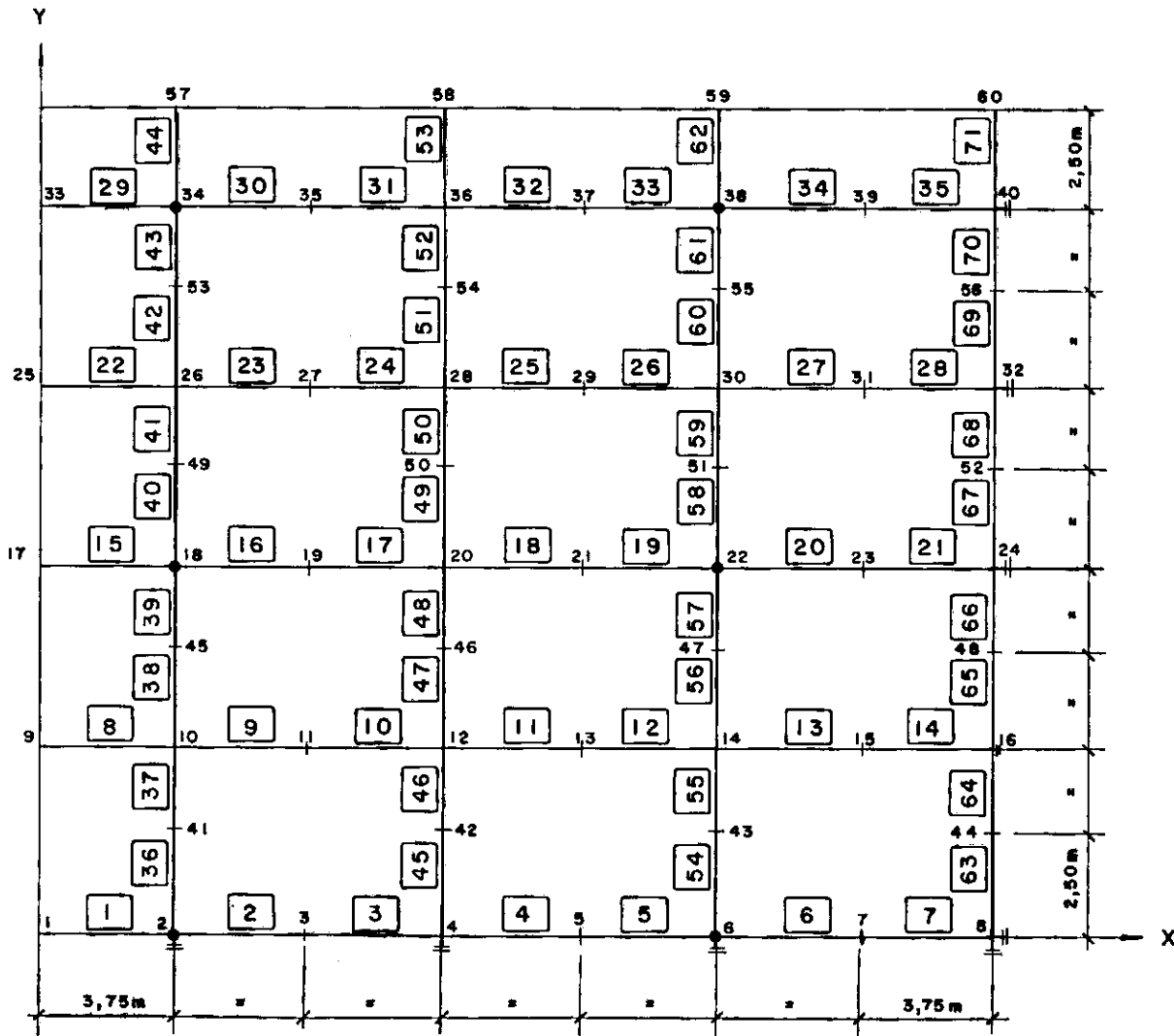


FIG. IV. 17 - MODELAGEM DO RADIER  
GRELHA EM BASE ELÁSTICA

APOIO ELÁSTICO  
( TÍPICO )



( M )  
( mt )

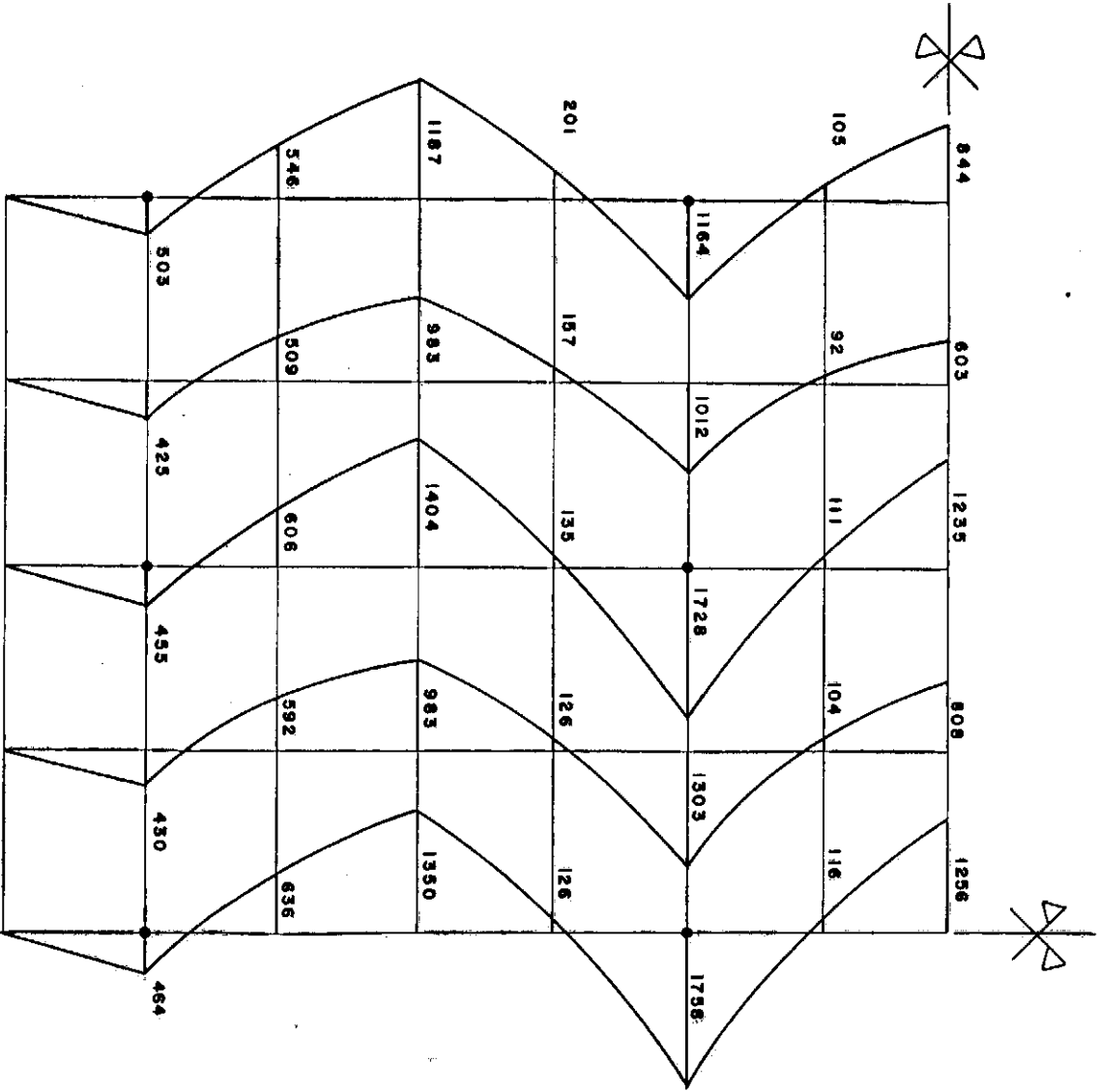
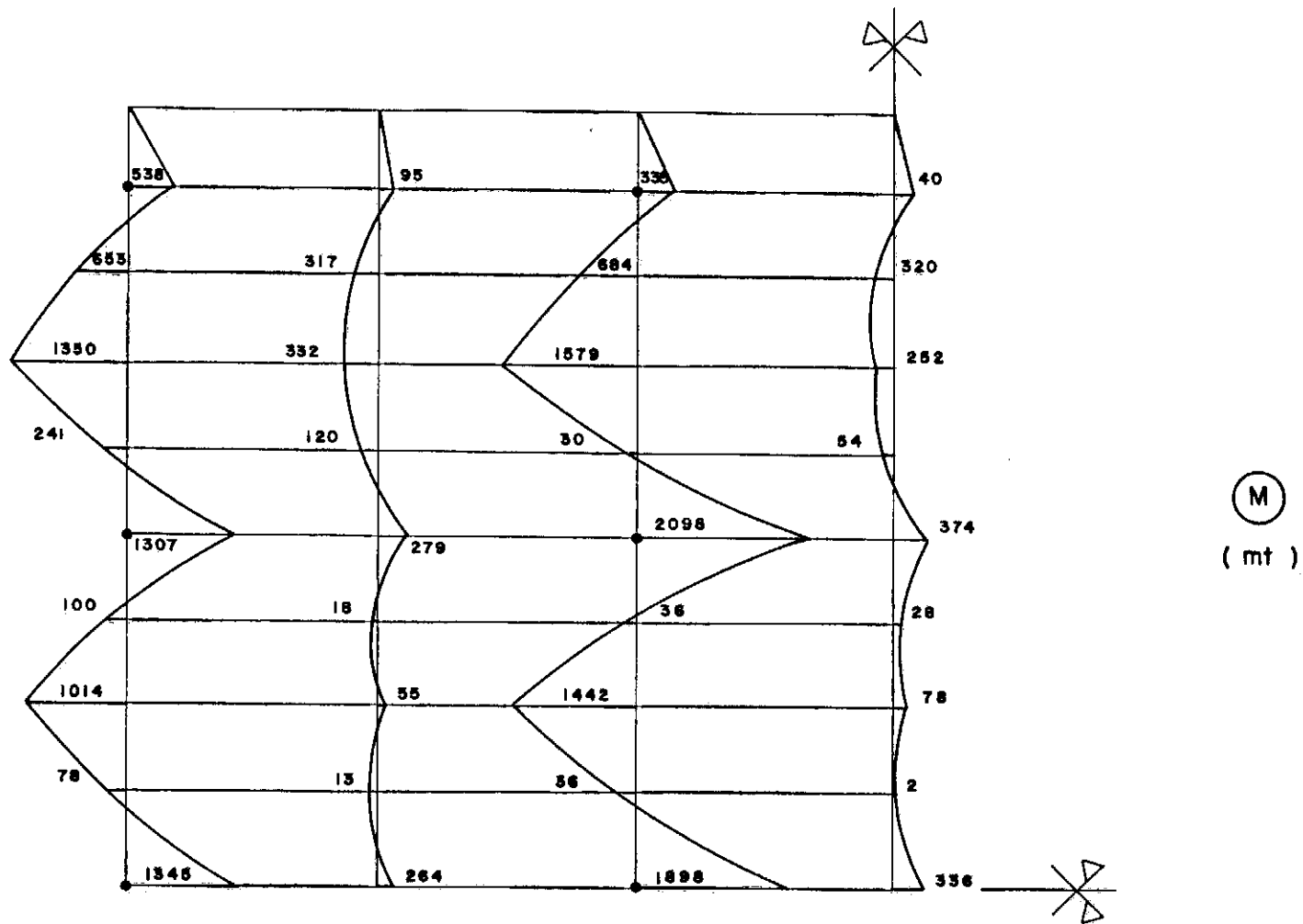


FIG. IV. 18 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
COM TORÇÃO DIREÇÃO X  
h = 1,70 m



**FIG.IV.19 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
 COM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
 $h = 1,70 \text{ m}$**

( M )  
( t e )

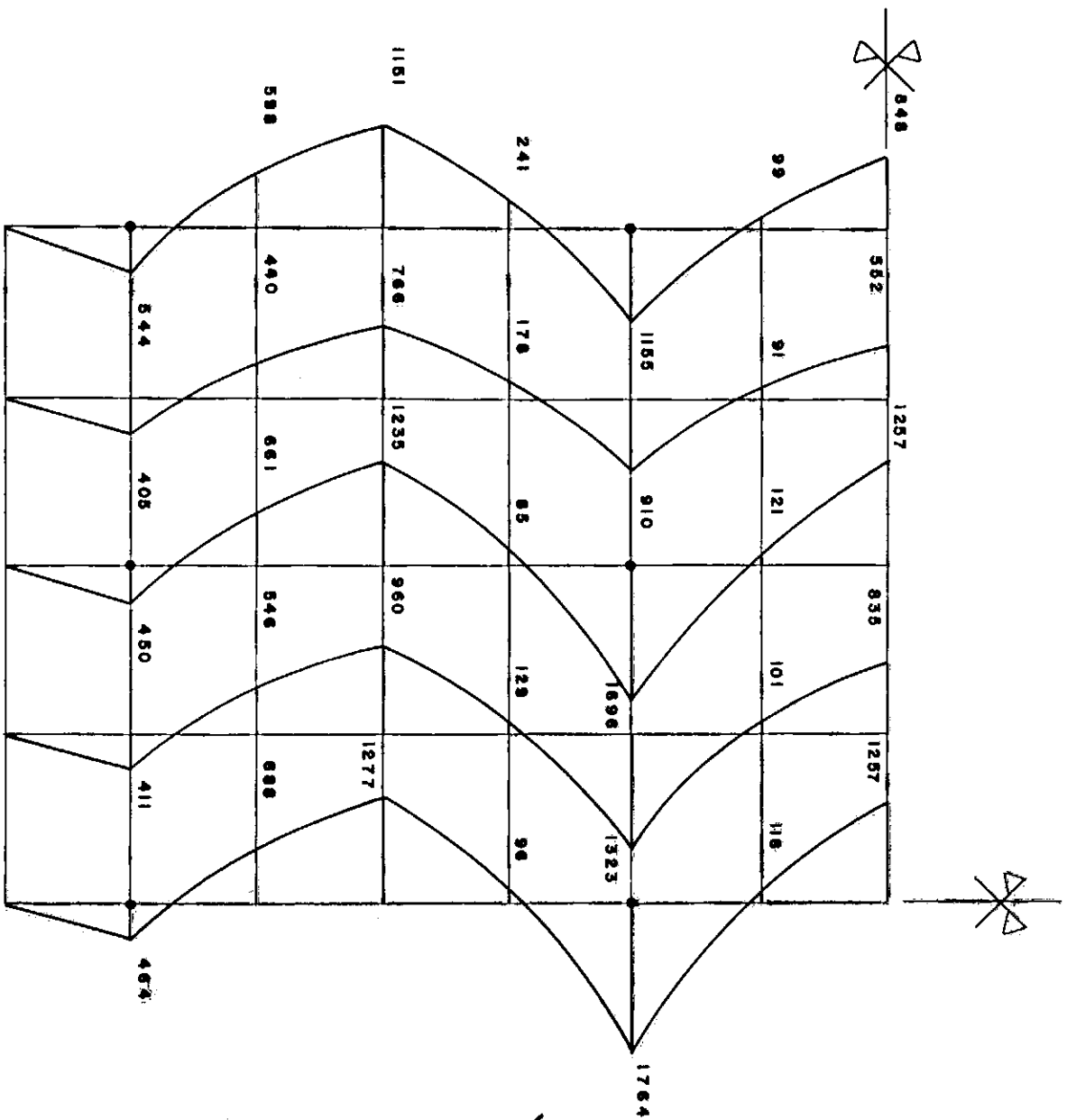


FIG. IV. 20 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
SEM TORÇÃO DIREÇÃO X  
h = 1,7 m

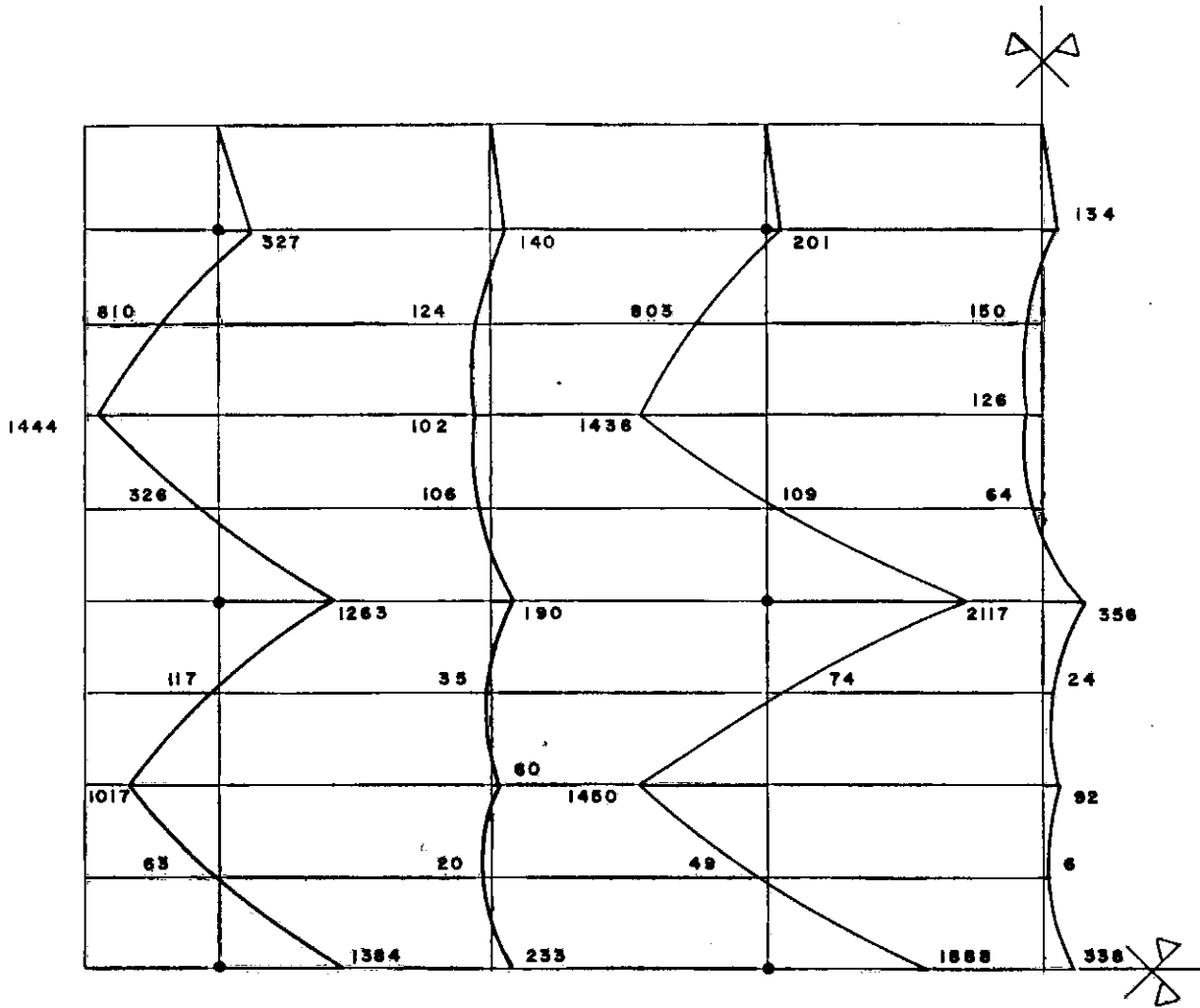


FIG. IV. 21.- GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
SEM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
-h = 1,7 m

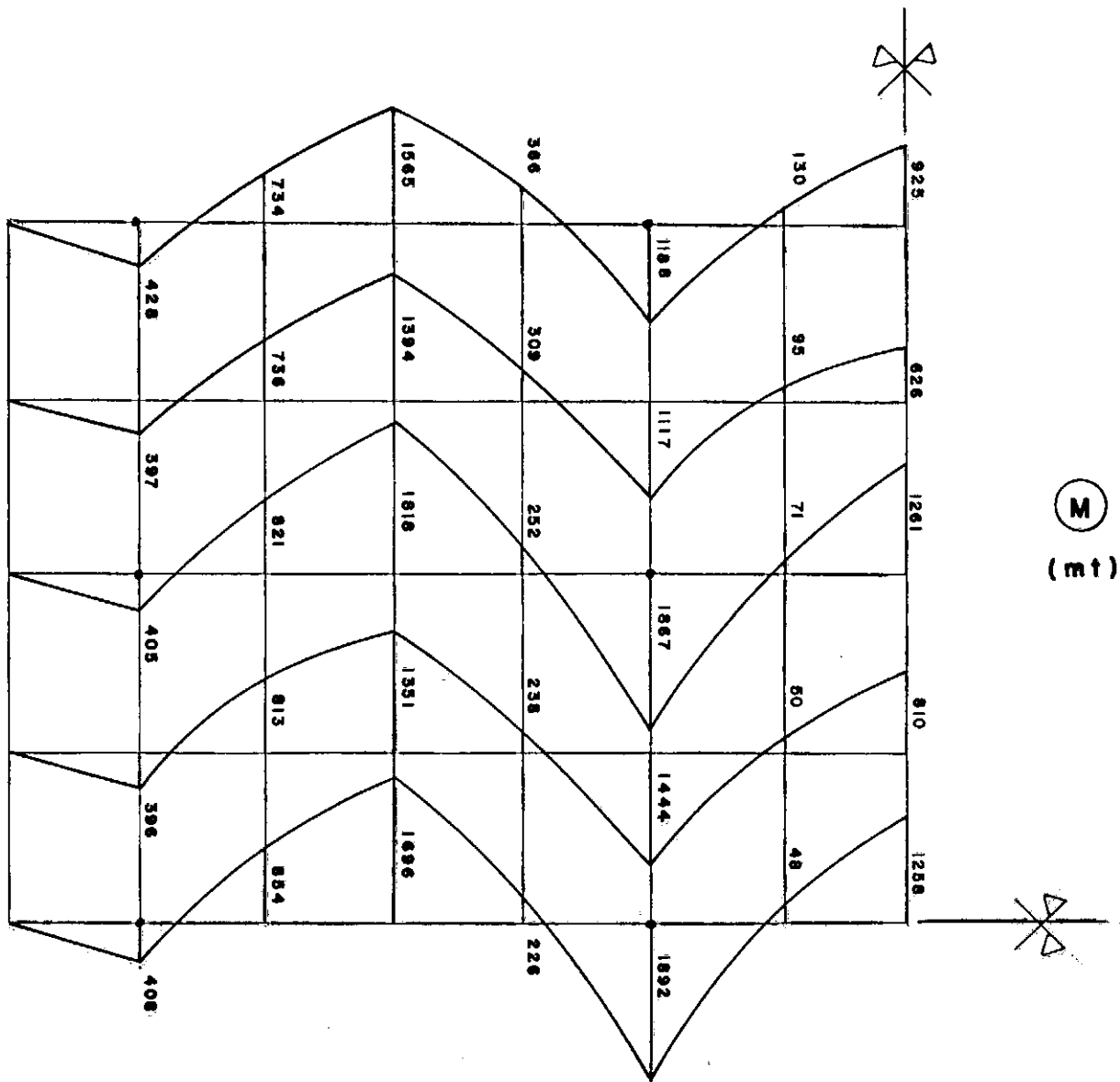


FIG. IV.22 - GRELHA SOBRE BASE ELETRICA  
 COM TORÇÃO DIREÇÃO X  
 $h = 2,5 m$

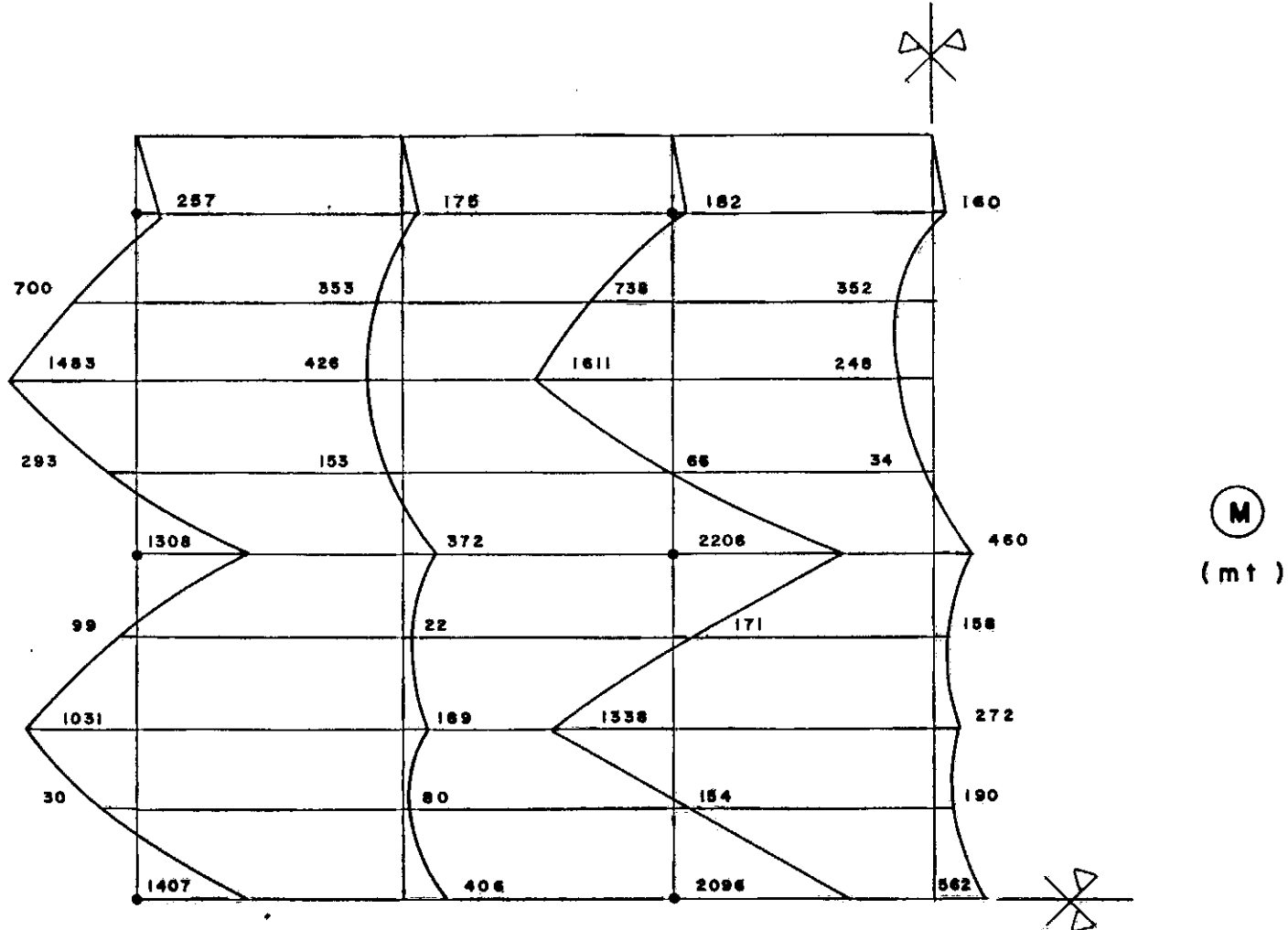


FIG. IV.23- GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
 COM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
 $h = 2,5 \text{ m}$

( M ) ( mt )

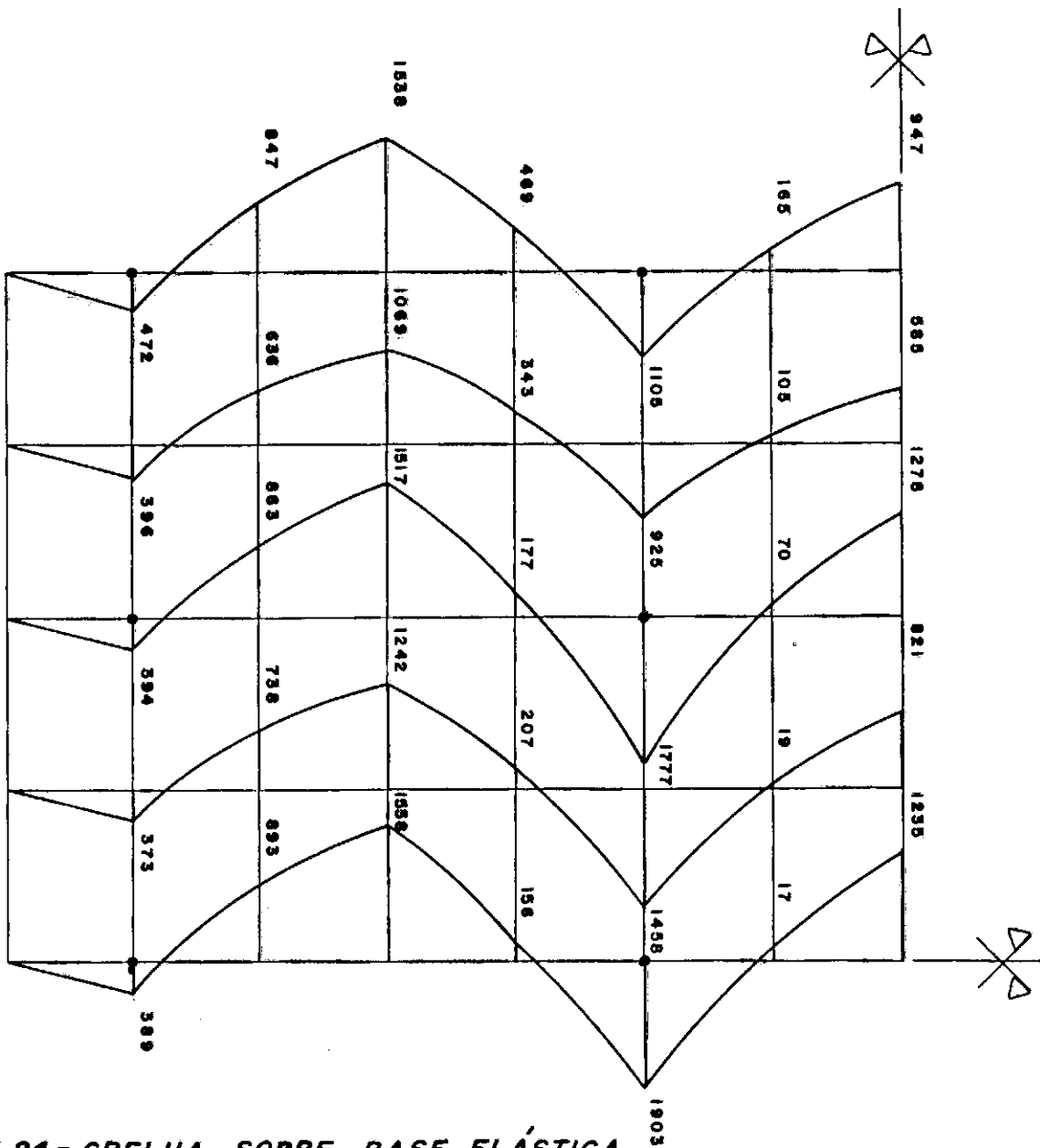
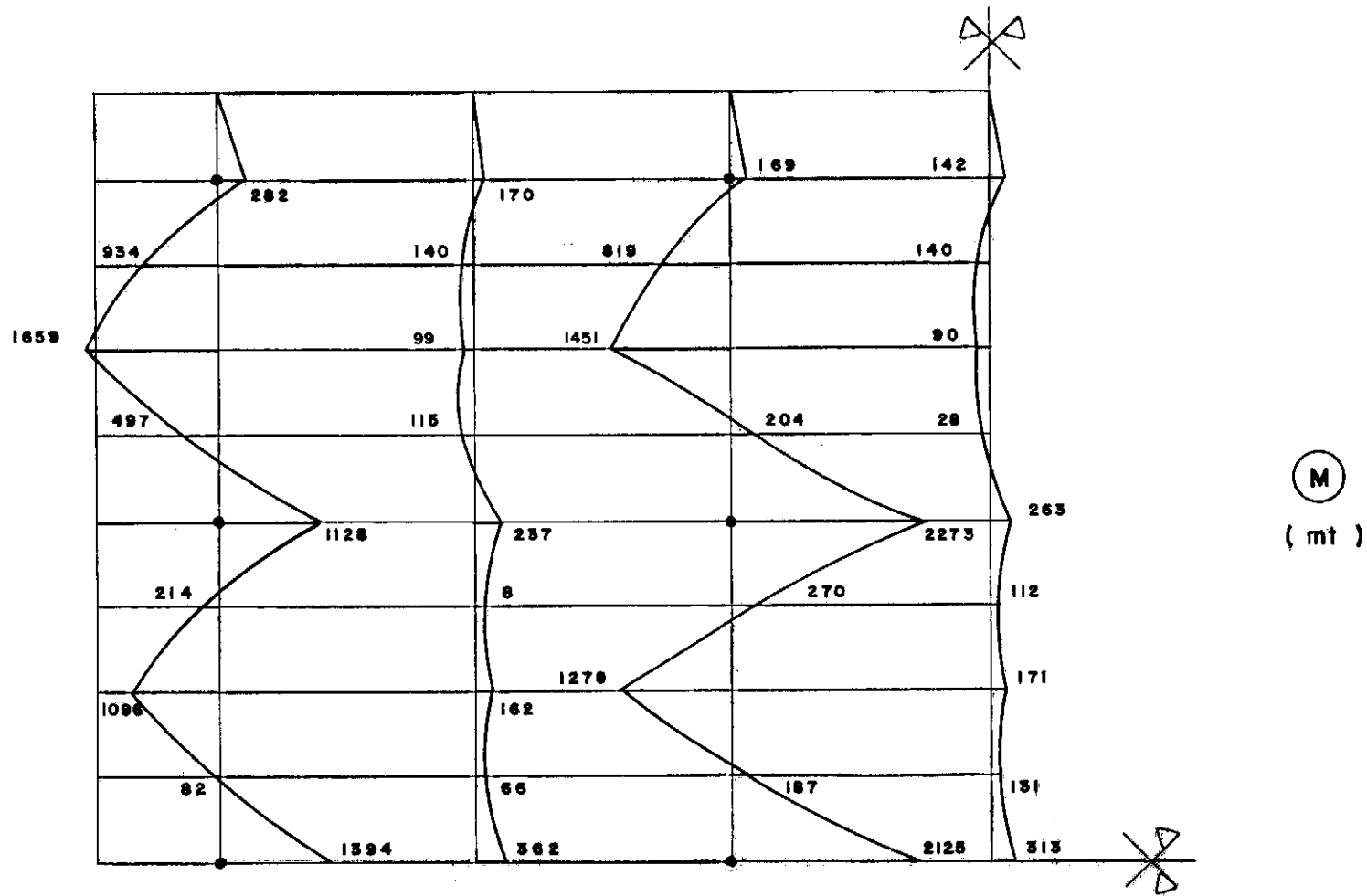


FIG. IV. 24 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA SEM TORÇÃO DIREÇÃO X  
 $h = 2,5 m$



.113.

FIG. IV.25 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
SEM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
h = 2,5 m

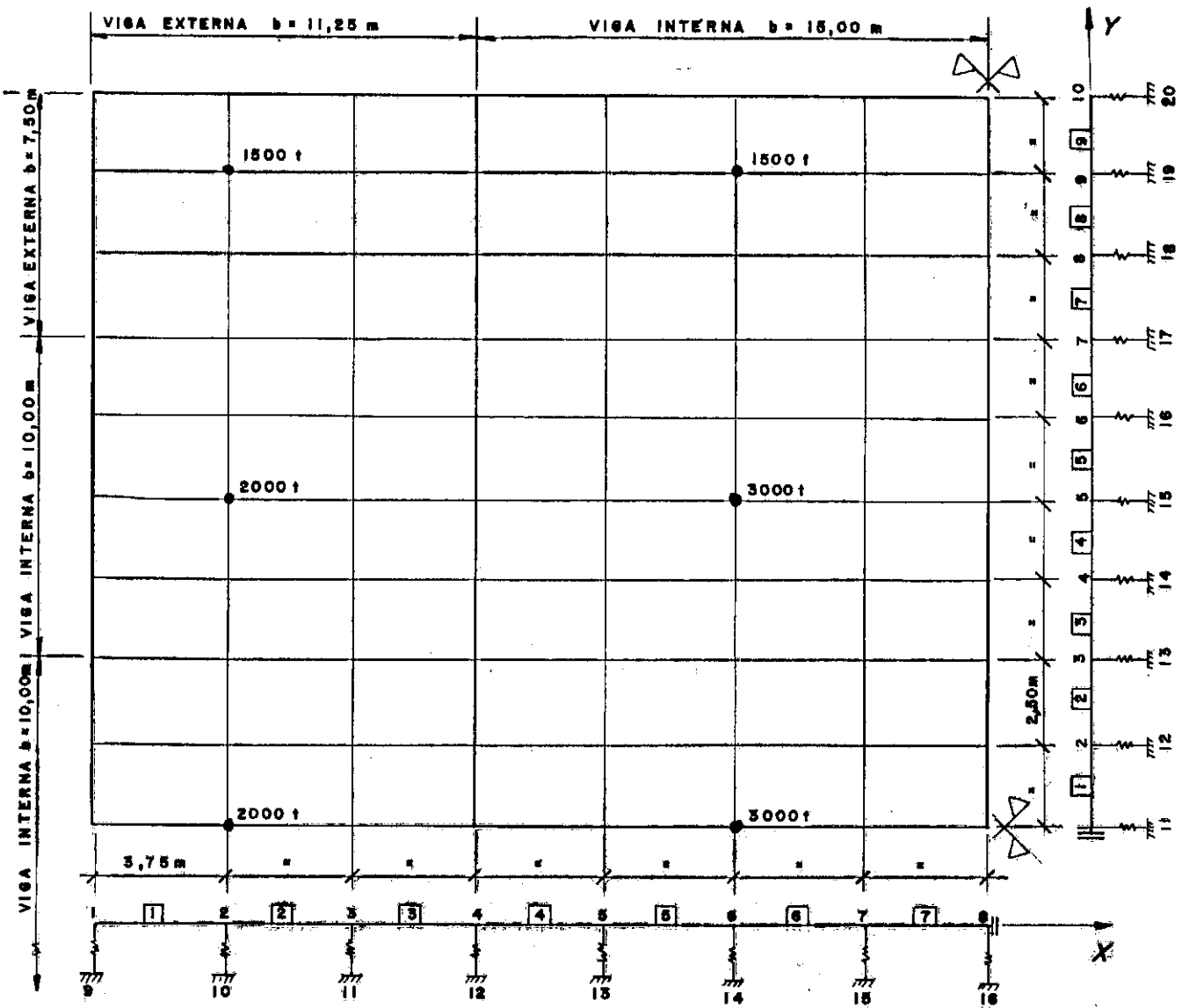


FIG. IV. 26 - MODELAGEM DO RADIER  
MÉTODO DA VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA

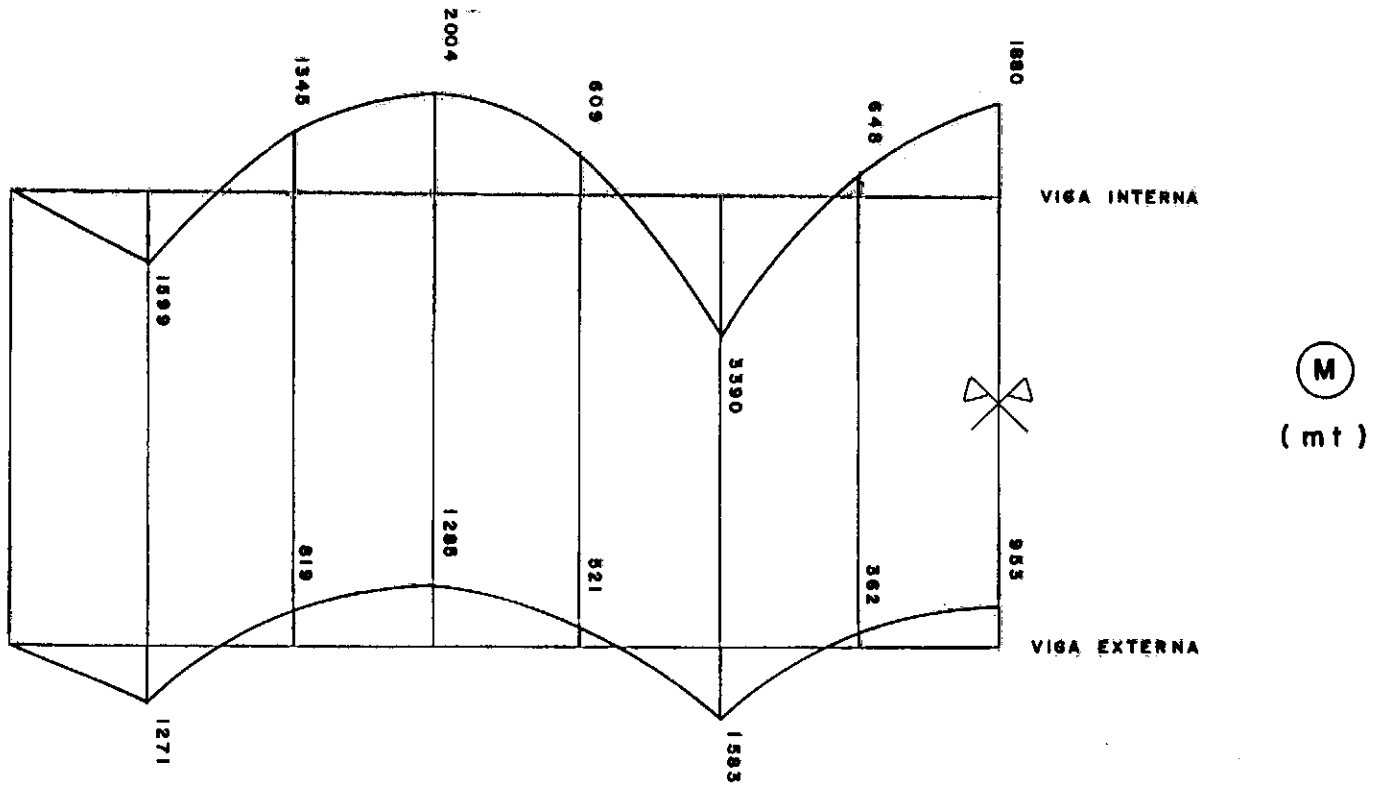


FIG. IV. 27 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
 DIREÇÃO X  
 $h = 1,7 m$

VIGA INTERNA

VIGA EXTERNA

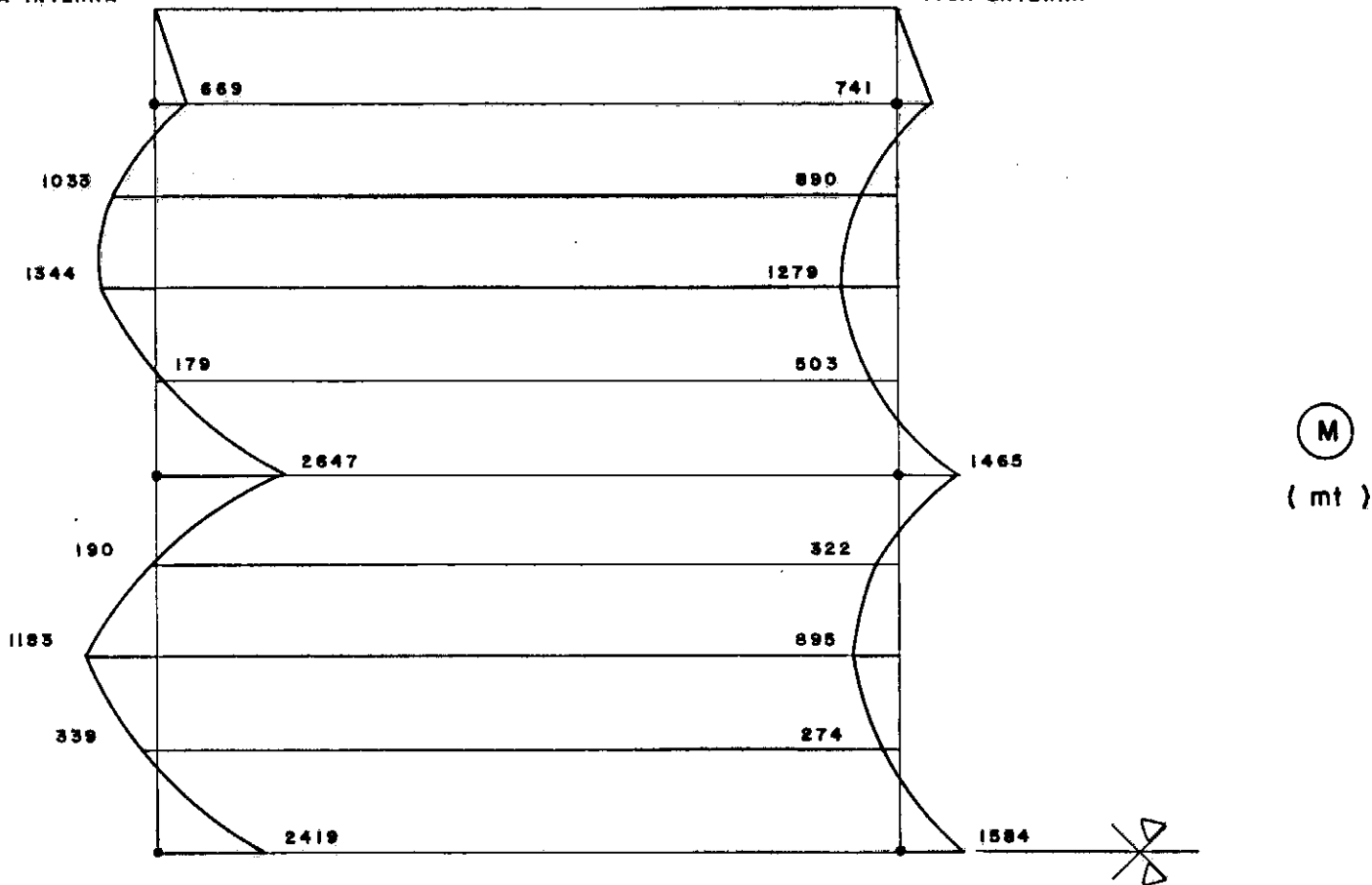
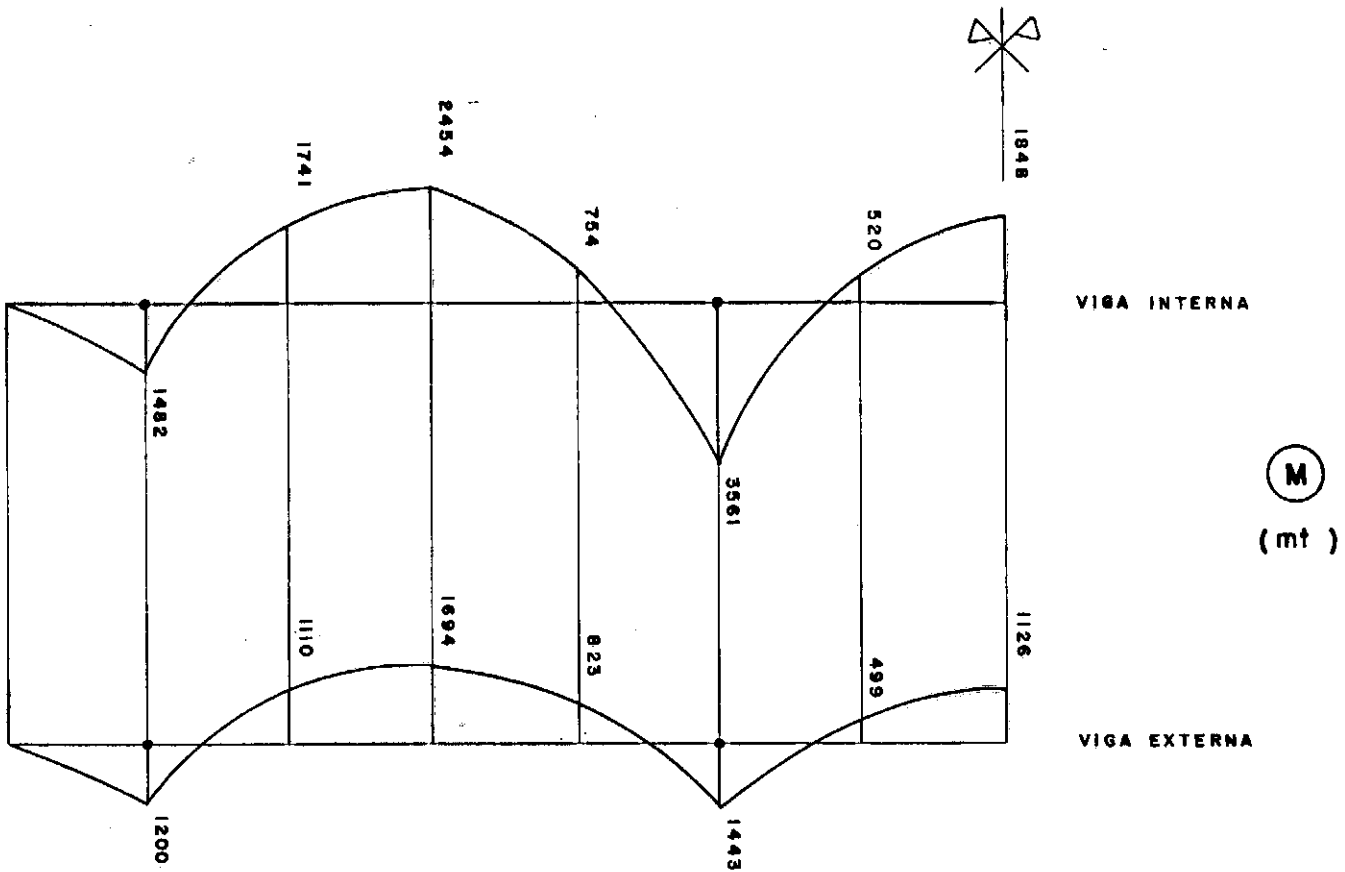


FIG. IV. 28 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
DIREÇÃO Y  
 $h = 1,7 m$



**FIG. IV. 29 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA**  
**DIREÇÃO X**  
 **$h = 2,5m$**

VIGA INTERNA

VIGA EXTERNA

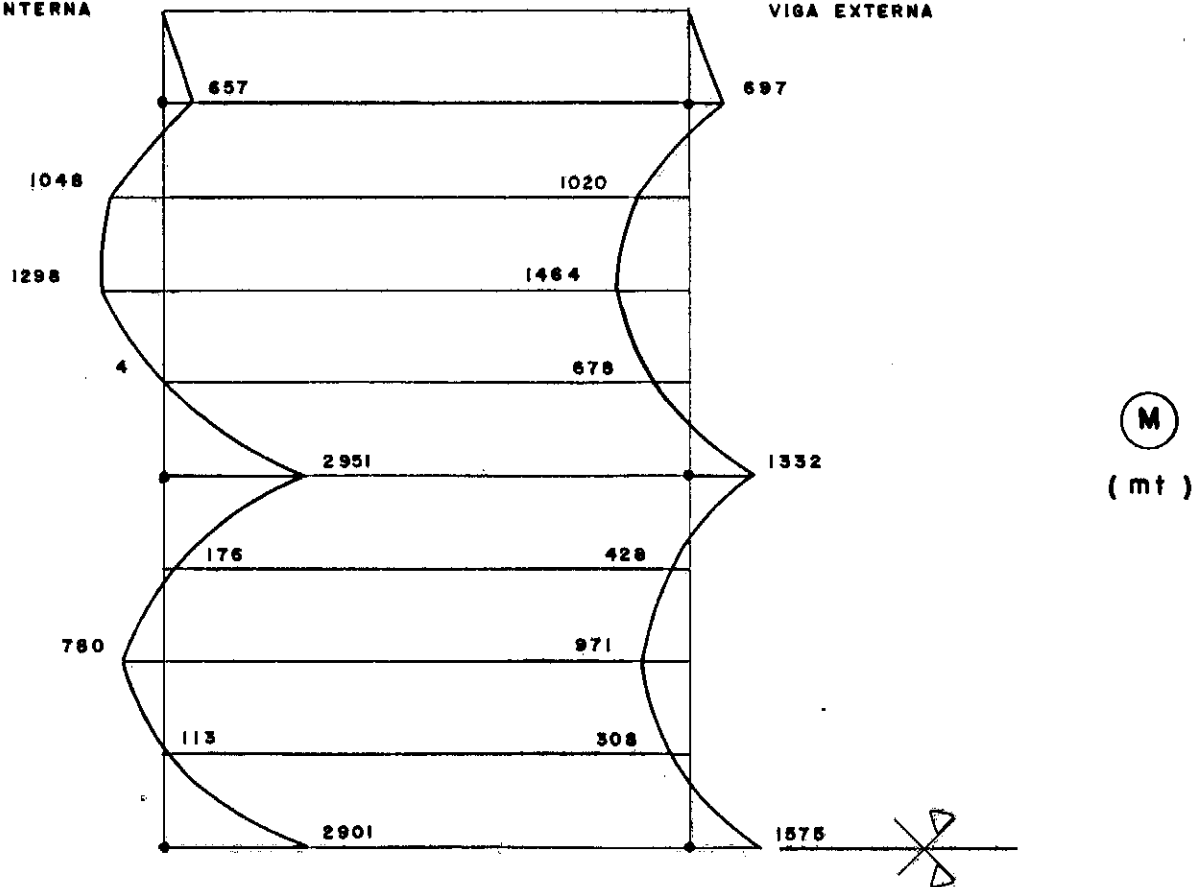
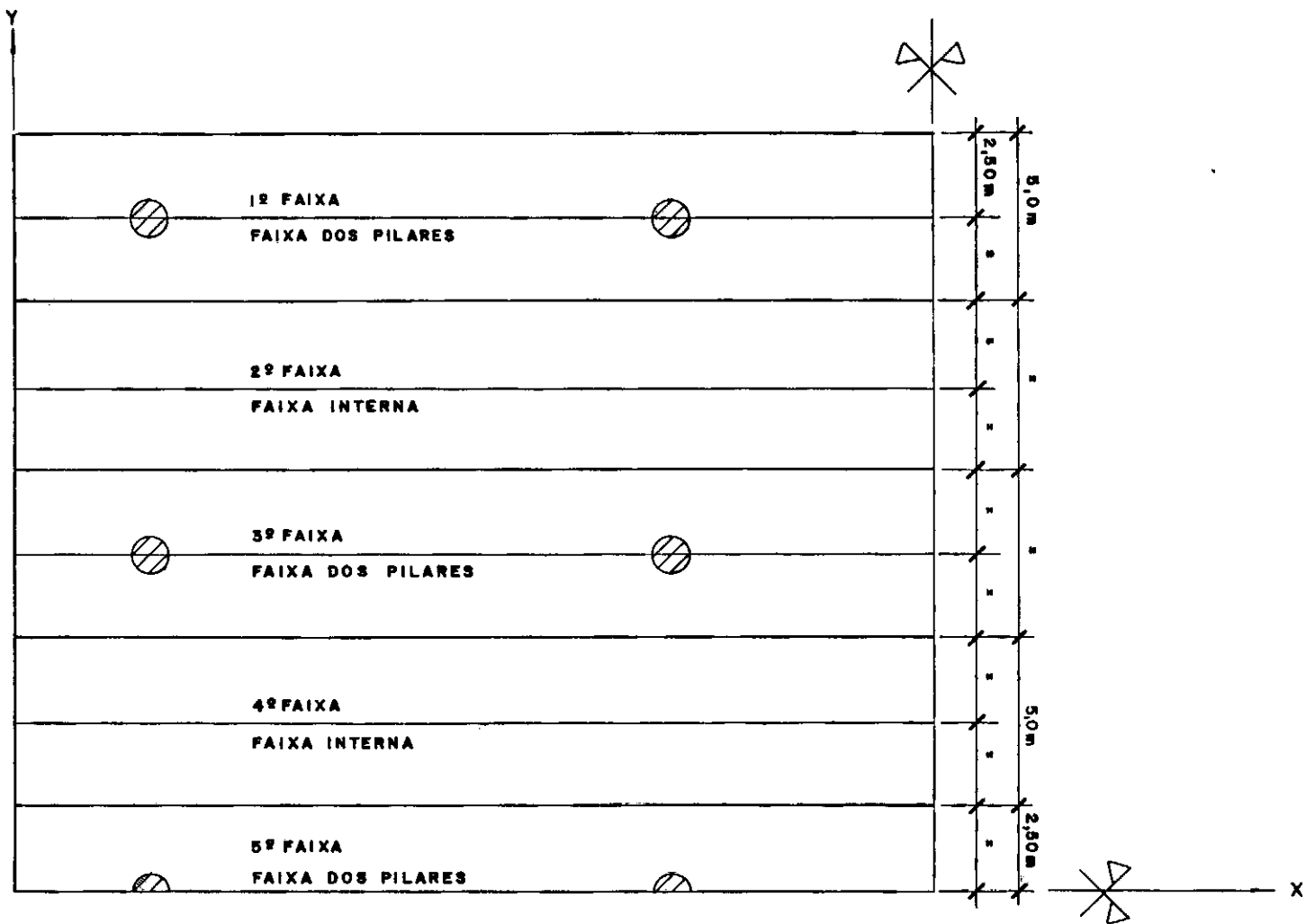


FIG. IV. 30 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
DIREÇÃO Y  
 $h = 2,5 m$



**FIG.IV.31- FAIXAS RESULTANTES DA  
 DIVISÃO DO RADIER NA DIREÇÃO X  
 $h = 1,70\text{ m}$  e  $h = 2,50\text{ m}$**

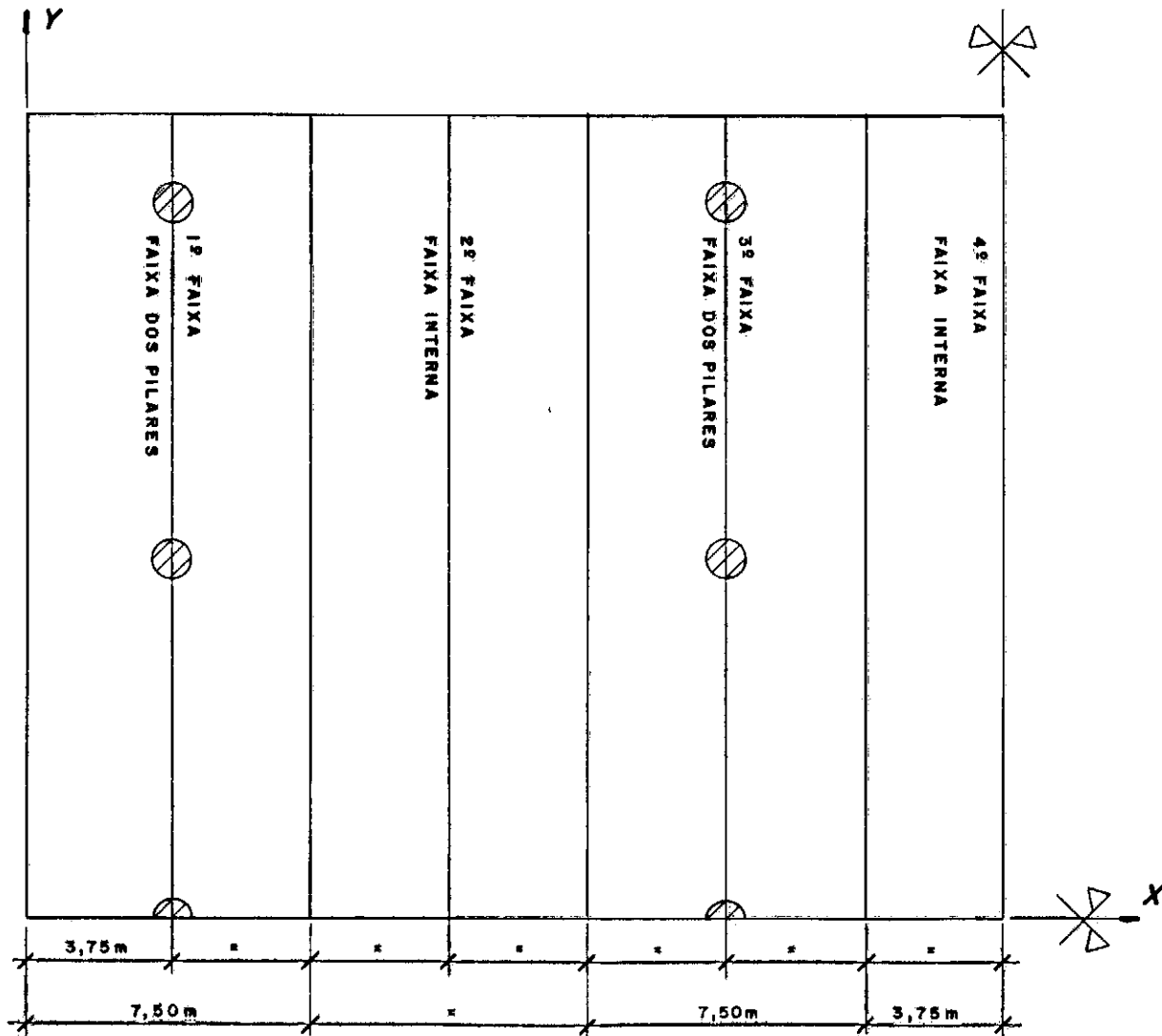
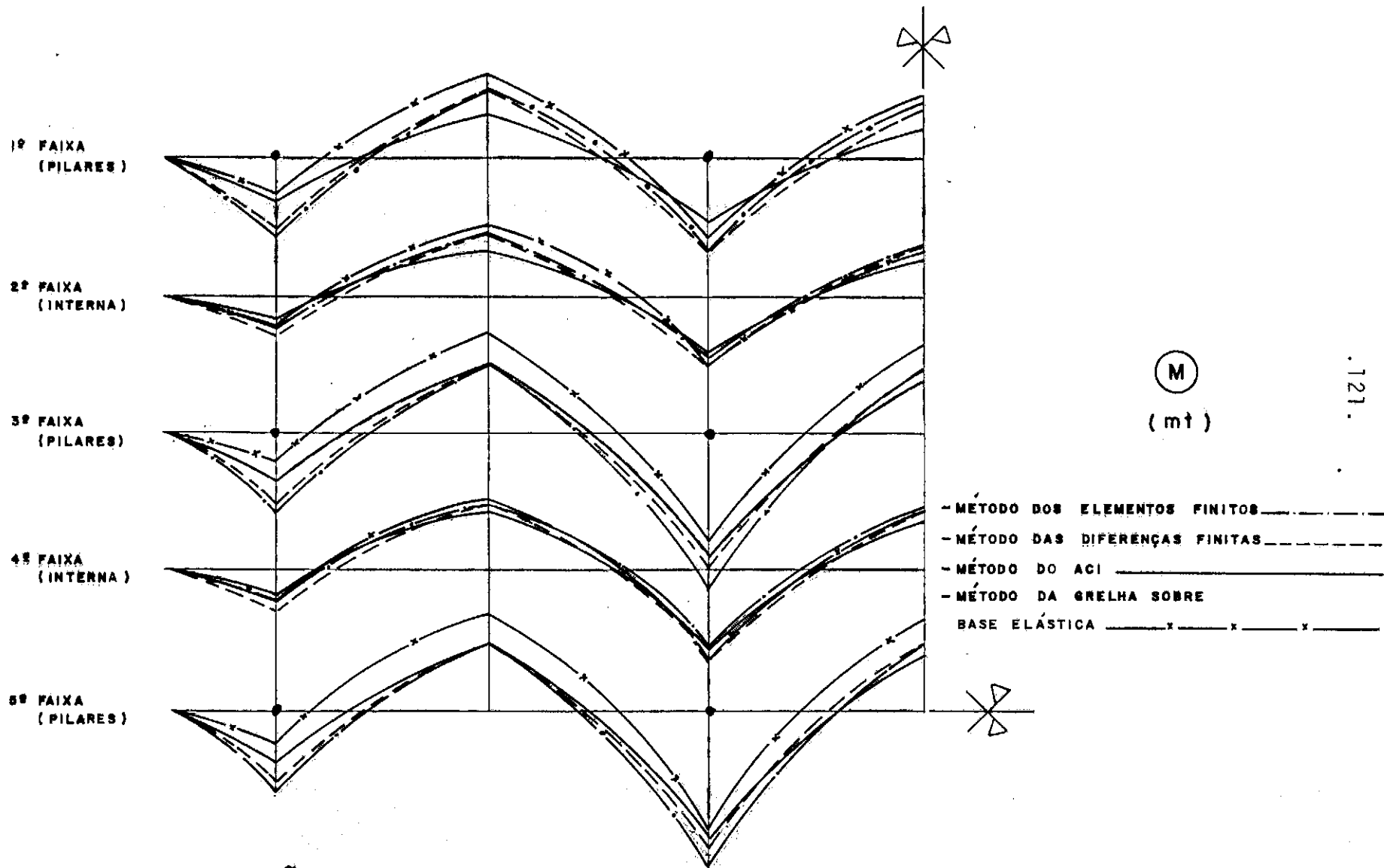
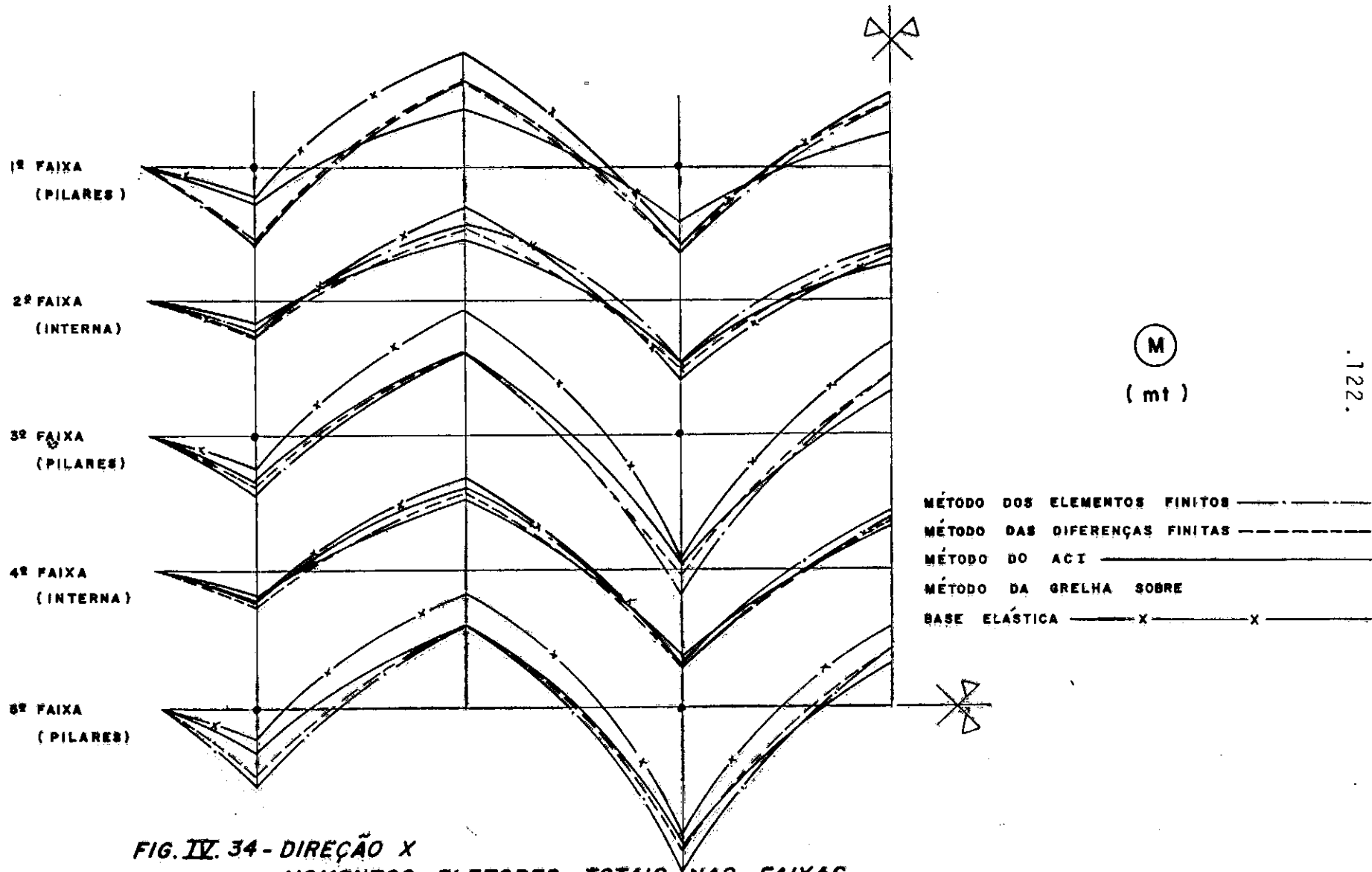


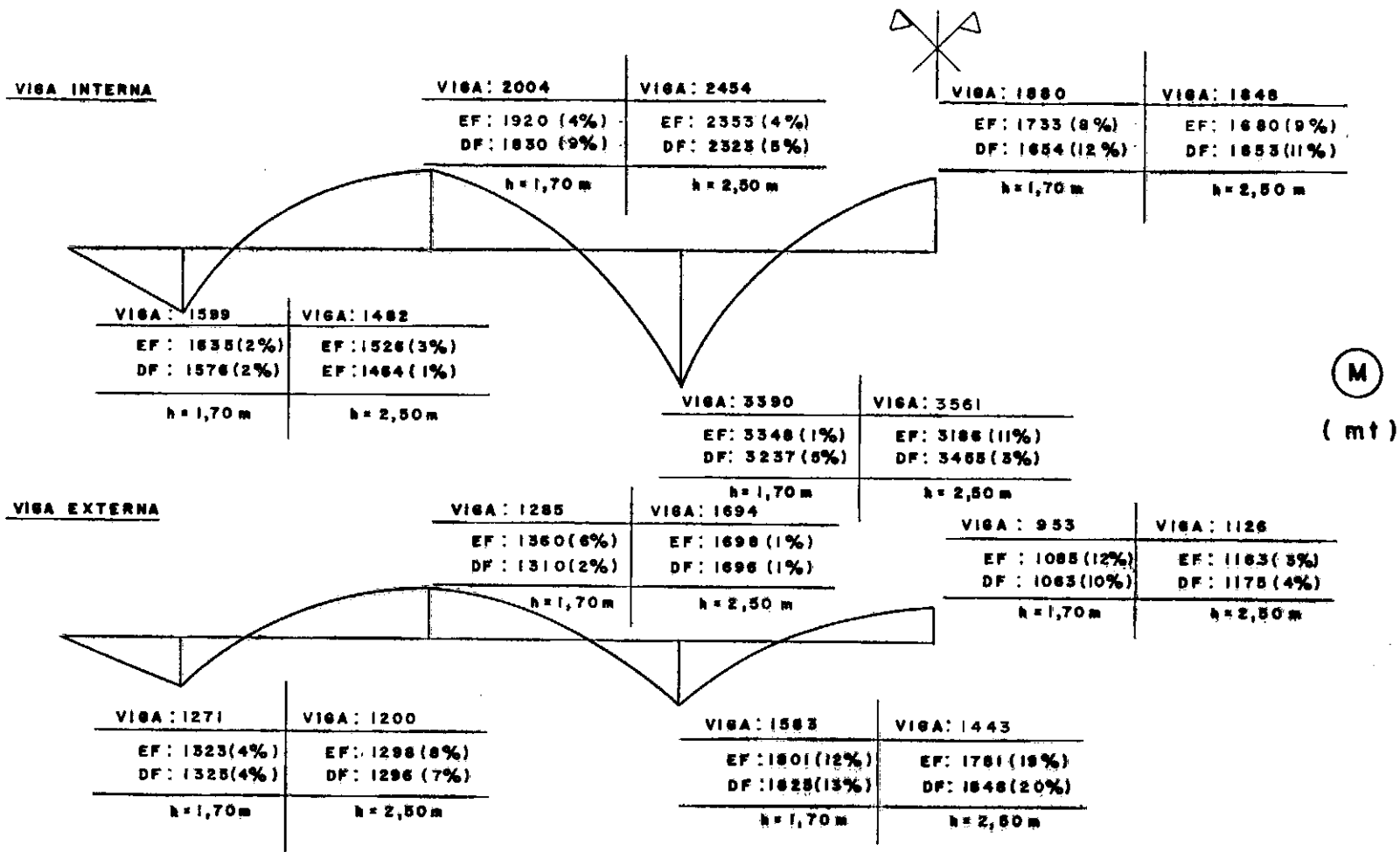
FIG. IV. 32 - FAIXAS RESULTANTES DA  
DIVISÃO DO RADIER NA DIREÇÃO Y  
 $h = 1,70m$  e  $h = 2,50m$



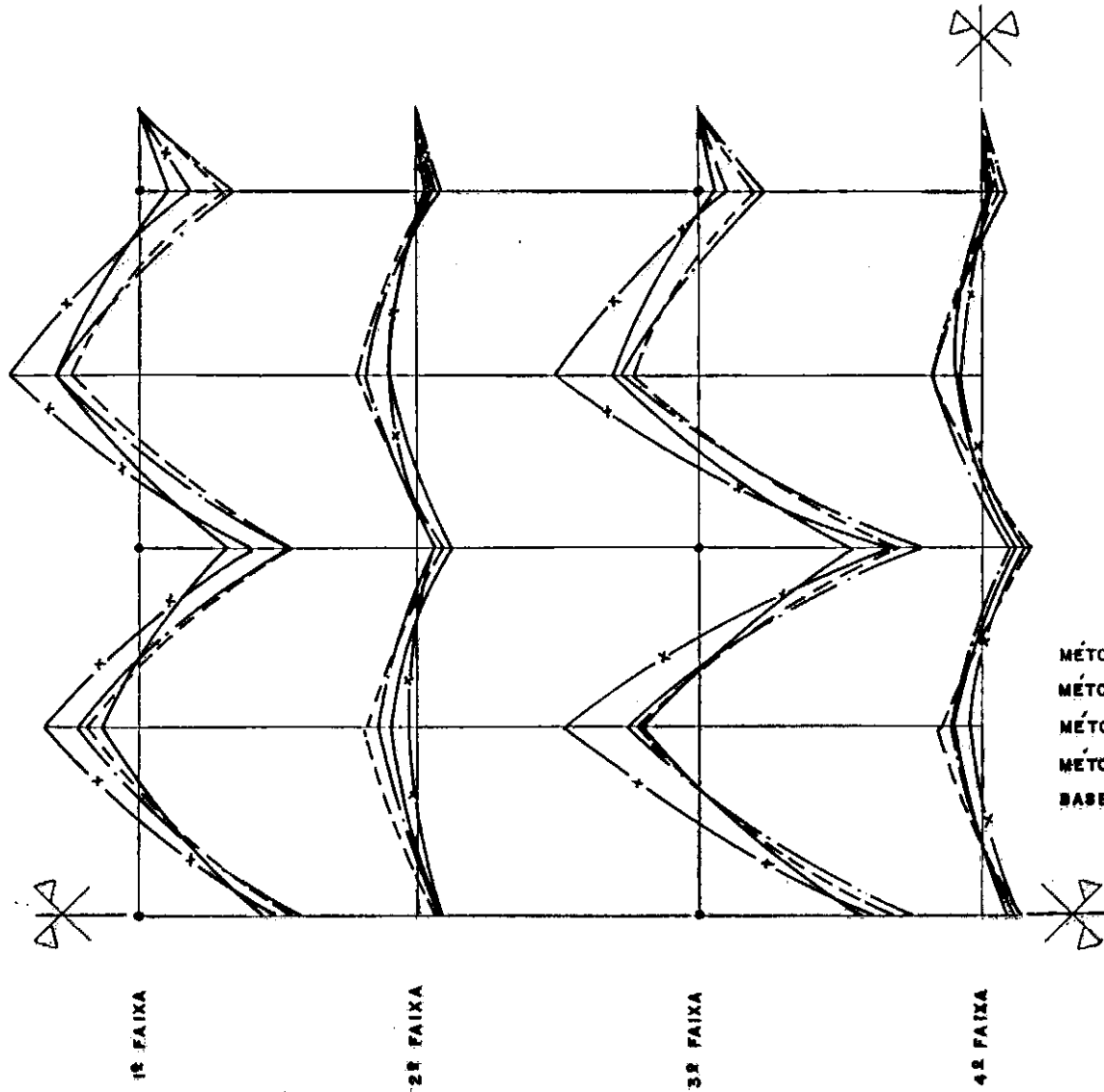
**FIG. IV.33 - DIREÇÃO X**  
**MOMENTOS FLETORES TOTAIS**  
**NAS FAIXAS INTERNAS E NAS FAIXAS DOS PILARES**  
 **$h = 1,70 \text{ m}$ , ESCALA  $1 \text{ cm} = 500 \text{ mt}$**



**FIG. IV. 34 - DIREÇÃO X**  
**MOMENTOS FLETORES TOTAIS NAS FAIXAS**  
**INTERNAS e NAS FAIXAS DOS PILARES**  
**h = 2,50 m. ESCALA: 1 cm = 500 mt**



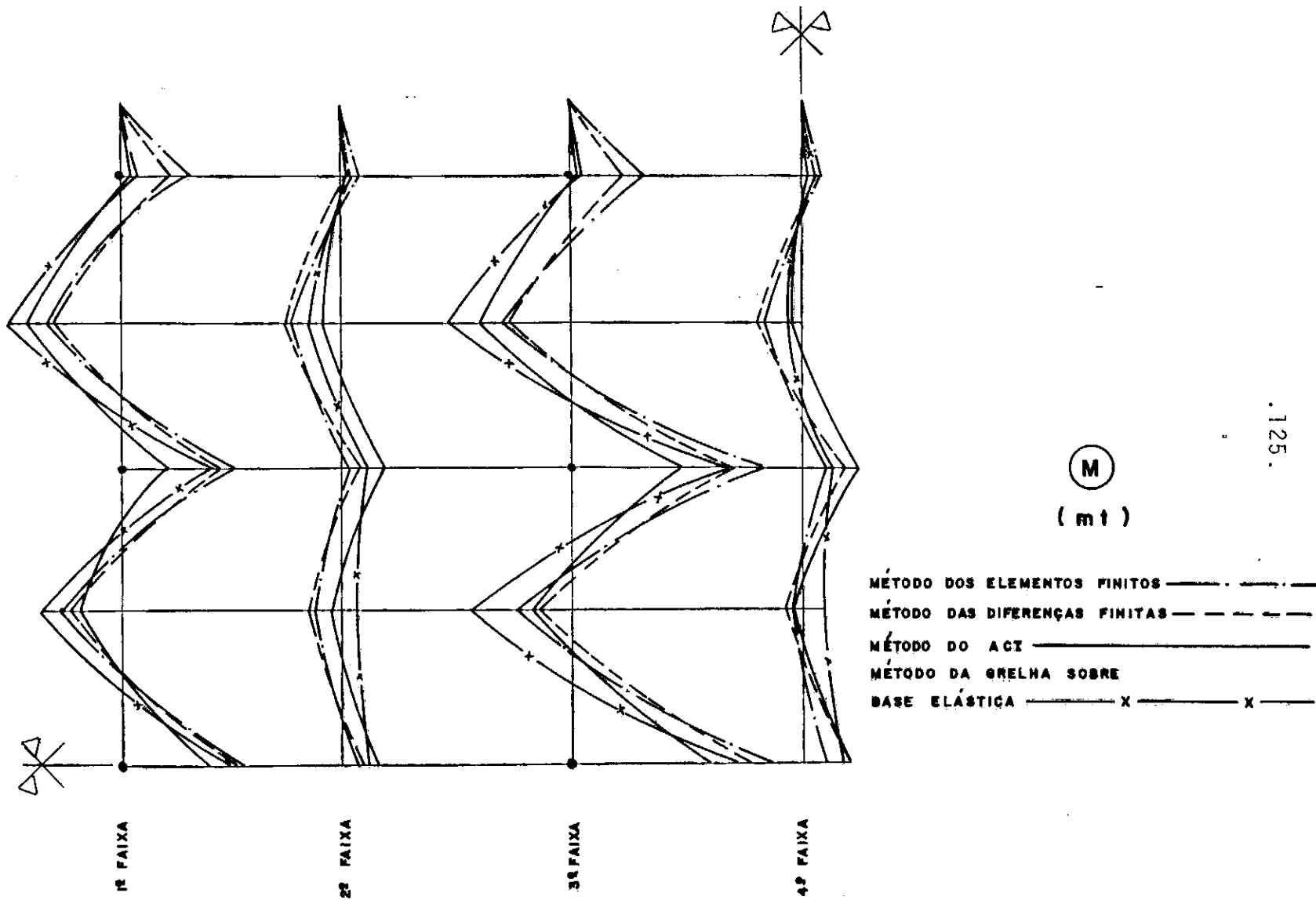
**FIG. IV.35 - ANÁLISE DA SOMA DOS MOMENTOS FLETORES ENTRE AS FAIXAS DOS PILARES E AS FAIXAS INTERNAS DIREÇÃO X**  
 $h = 1,70 \text{ m}$  e  $h = 2,50 \text{ m}$



(M)  
(mt)

- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ..... - - - - -
- MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS - - - - -
- MÉTODO DO ACI —————
- MÉTODO DA GRELHA SOBRE
- BASE ELÁSTICA ——— x ——— x ———

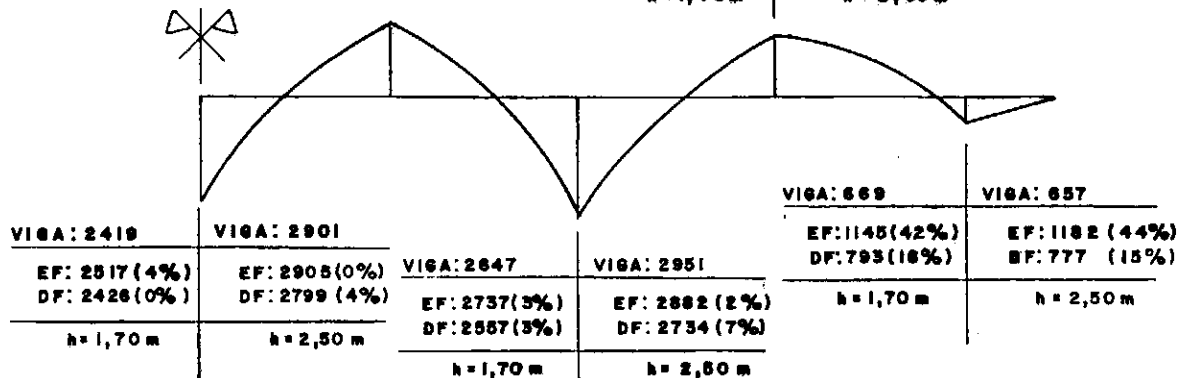
FIG. IV. 36 - DIREÇÃO Y -  
MOMENTOS FLETORES TOTAIS NAS FAIXAS  
INTERNAS e NAS FAIXAS DOS PILARES  
h = 1,70 m. ESCALA: 1 cm = 500 mt



**FIG. IV. 37 - DIREÇÃO Y**  
**MOMENTOS FLETORES TOTAIS NAS FAIXAS**  
**INTERNAS e NAS FAIXAS DOS PILARES**  
 **$h = 2,50$  m. ESCALA:  $1\text{ cm} = 500\text{ mt}$**

**VIGA INTERNA**

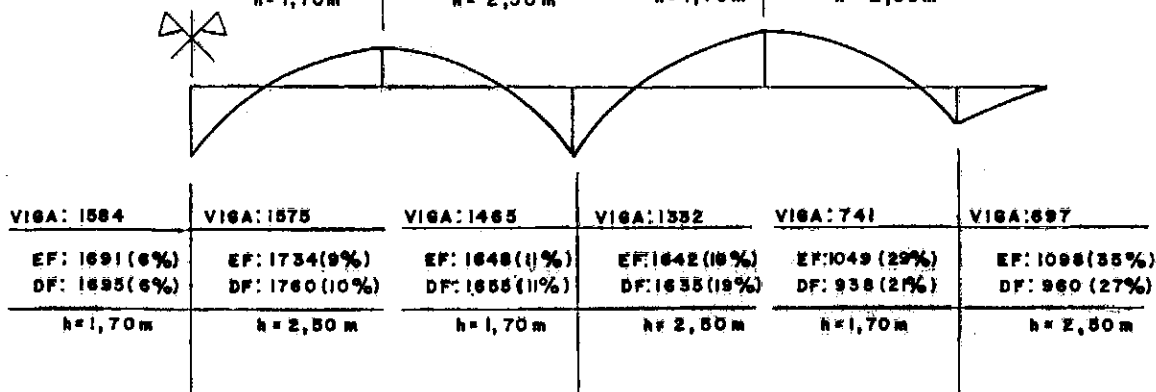
VIGA: 1183	VIGA: 780	VIGA: 1344	VIGA: 1298
EF: 1127(5%) DF: 1110(6%)	EF: 847(8%) DF: 842(7%)	EF: 1376(2%) DF: 1366(6%)	EF: 1429(9%) DF: 1446(10%)
h = 1,70 m	h = 2,50 m	h = 1,70 m	h = 2,50 m



VIGA: 2419	VIGA: 2901	VIGA: 2647	VIGA: 2951	VIGA: 669	VIGA: 657
EF: 2517(4%) DF: 2426(0%)	EF: 2905(0%) DF: 2799(4%)	EF: 2737(3%) DF: 2587(3%)	EF: 2682(2%) DF: 2734(7%)	EF: 1145(42%) DF: 793(16%)	EF: 1182(44%) DF: 777(15%)
h = 1,70 m	h = 2,50 m	h = 1,70 m	h = 2,50 m	h = 1,70 m	h = 2,50 m

**VIGA EXTERNA**

VIGA: 895	VIGA: 971	VIGA: 1279	VIGA: 1464
EF: 806(1%) DF: 669(3%)	EF: 890(8%) DF: 871(10%)	EF: 1215(8%) DF: 1176(8%)	EF: 1291(12%) DF: 1280(13%)
h = 1,70 m	h = 2,50 m	h = 1,70 m	h = 2,50 m



VIGA: 1584	VIGA: 1575	VIGA: 1465	VIGA: 1352	VIGA: 741	VIGA: 697
EF: 1691(6%) DF: 1695(6%)	EF: 1734(9%) DF: 1760(10%)	EF: 1648(11%) DF: 1658(11%)	EF: 1642(10%) DF: 1635(19%)	EF: 1049(29%) DF: 938(27%)	EF: 1096(35%) DF: 960(27%)
h = 1,70 m	h = 2,50 m	h = 1,70 m	h = 2,50 m	h = 1,70 m	h = 2,50 m

**FIG. IV.38- ANÁLISE DE SOMA DOS MOMENTOS FLETORES ENTRE AS FAIXAS DOS PILARES E FAIXAS INTERNAS DIREÇÃO Y  
h = 1,70 m e h = 2,50 m**

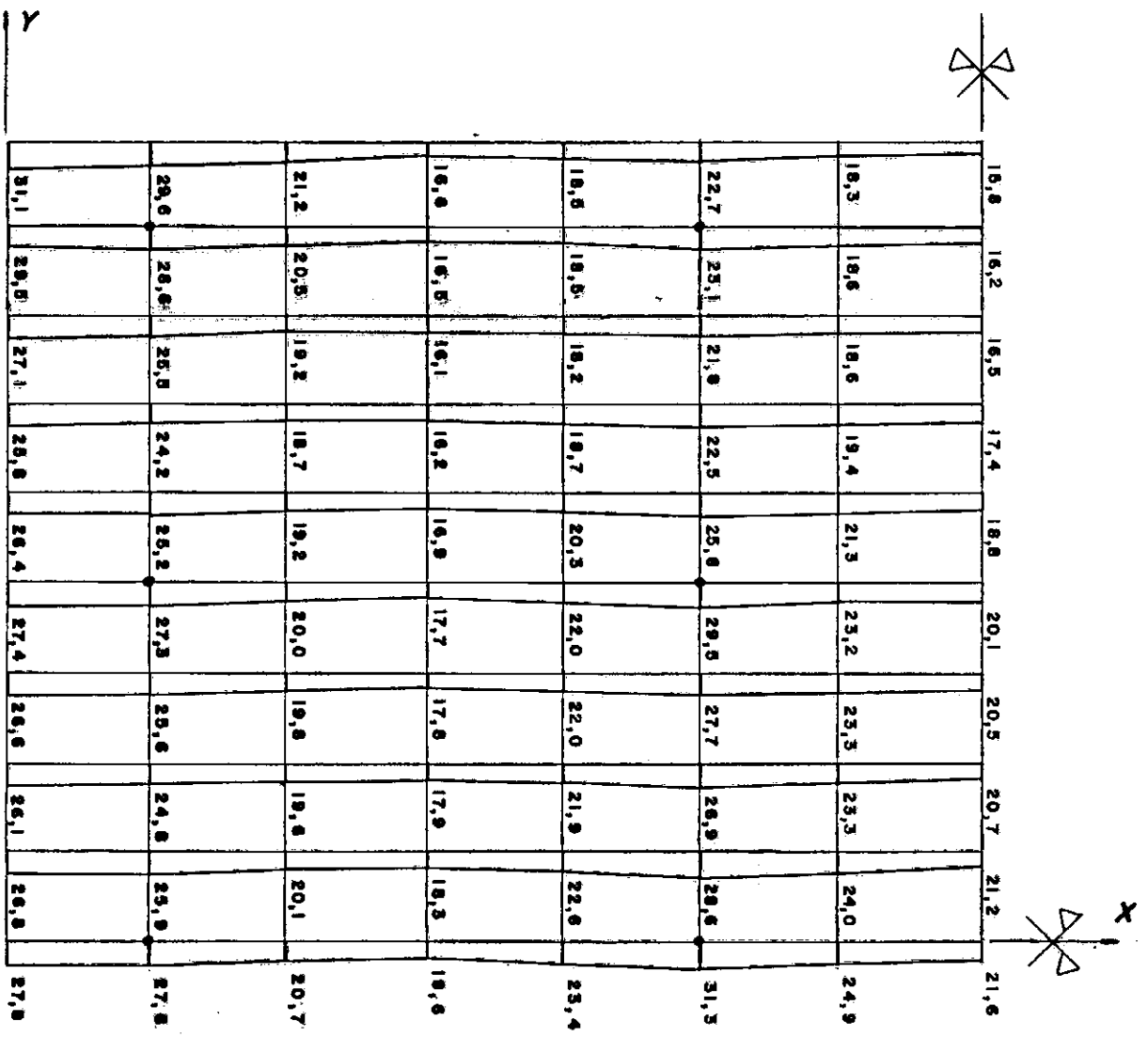


FIG. IV. 39. - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
 PRESSÃO DE CONTATO SOLO X RADIER ( $t/m^2$ )  
 $h = 1,70 m$

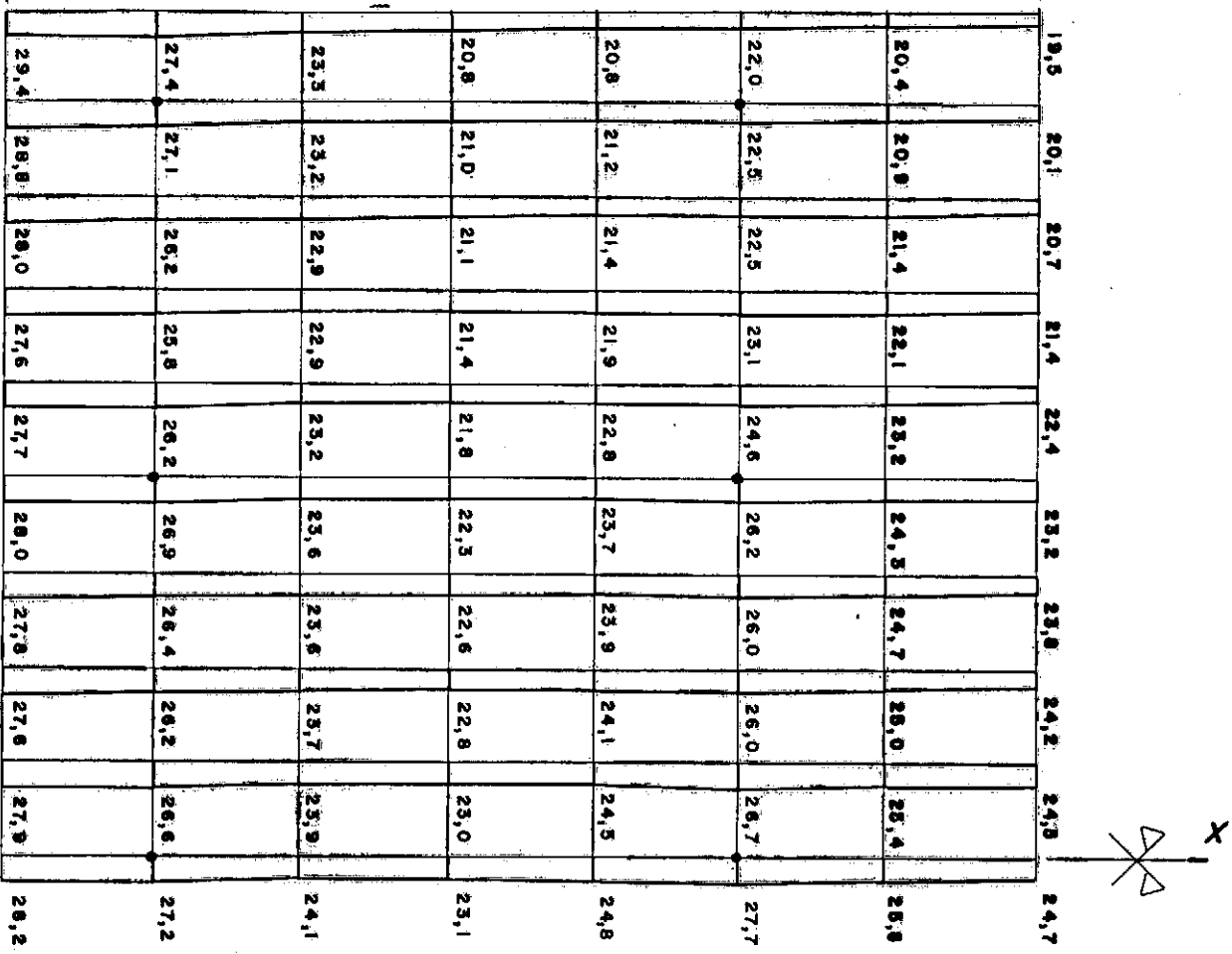


FIG. IV. 40 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
 PRESSÃO DE CONTATO SOLO X RADIER ( $t/m^2$ )  
 $h = 2,50 m$

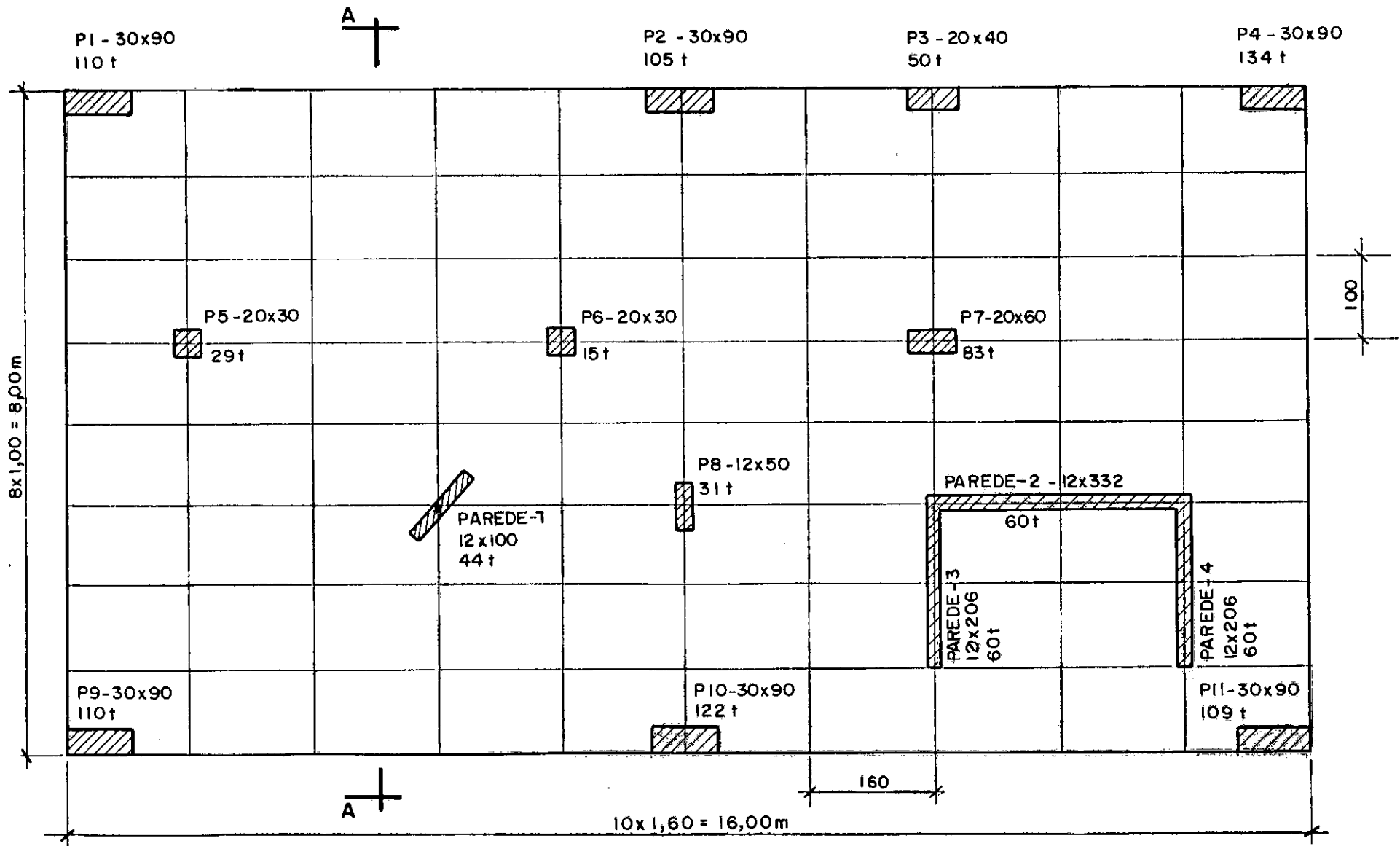
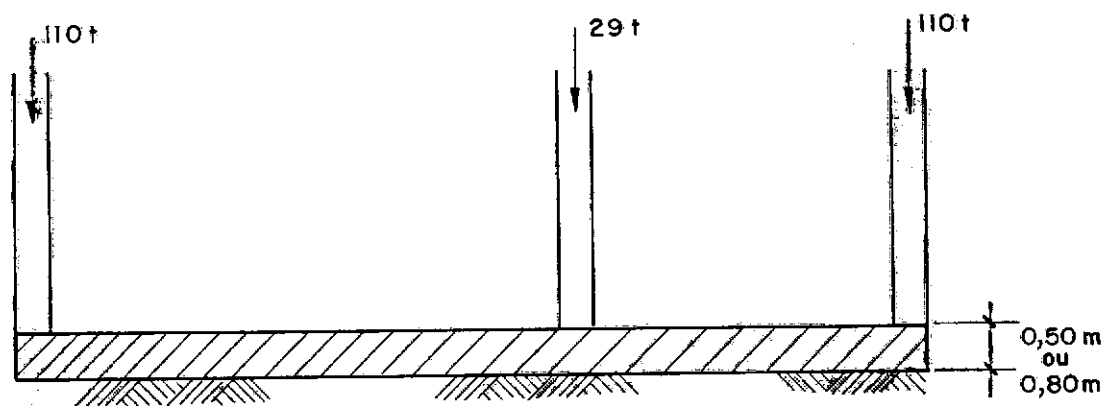
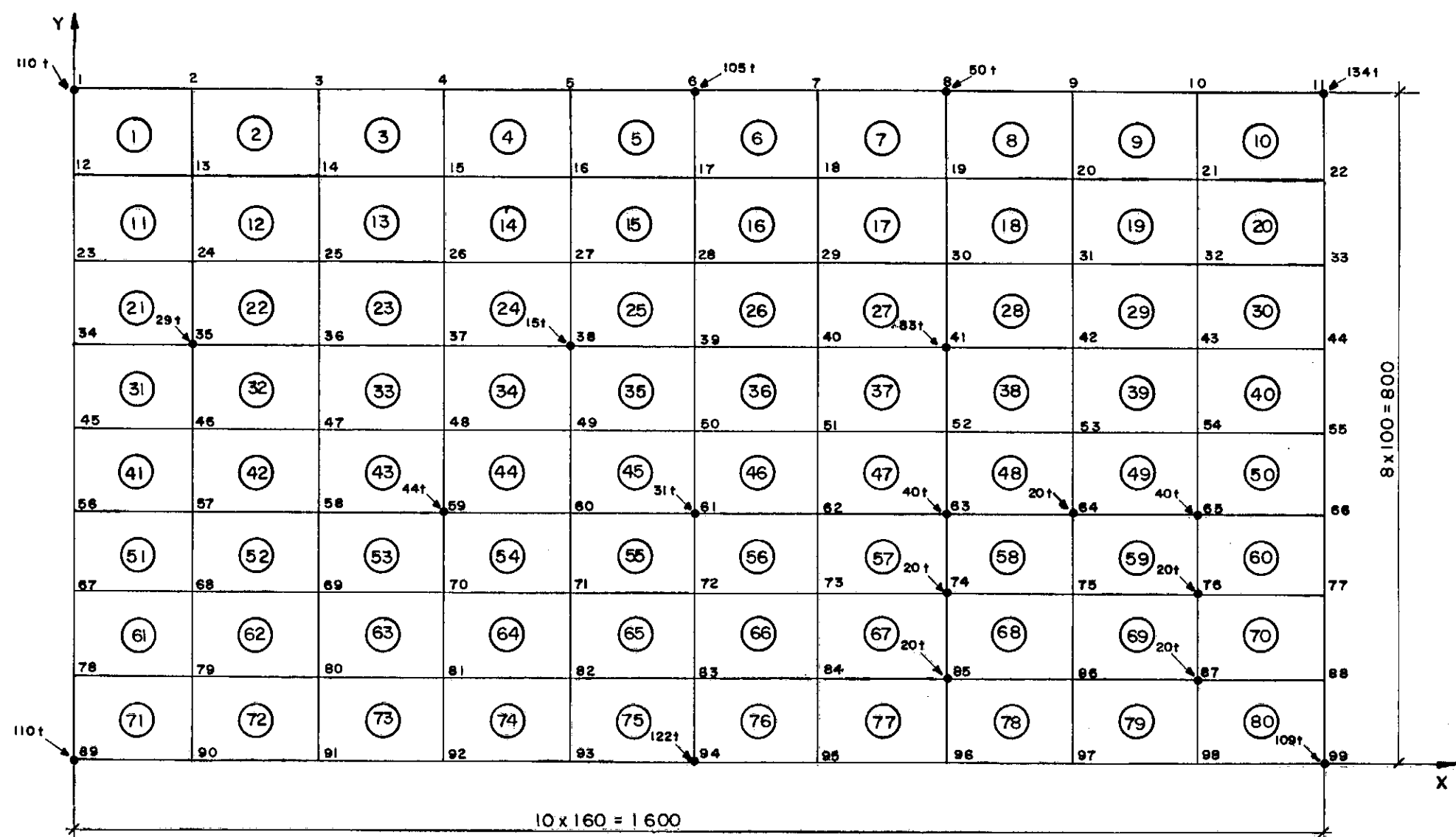


FIG. IV. 41 RADIER-FORMAS



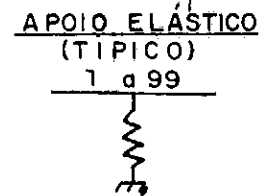
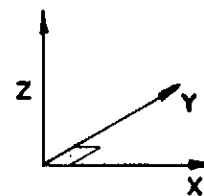
TERRENO: MÓDULO DE REAÇÃO VERTICAL =  $3000 \text{ t/m}^3$   
RÁDIER : PESO ESPECÍFICO =  $2,50 \text{ t/m}^3$   
MÓDULO ELASTICIDADE =  $E = 3000\,000 \text{ t/m}^2$   
COEFICIENTE DE POISSON =  $0,2 = \mu$   
 $G = 0,4 E = 1200\,000 \text{ t/m}^2$

FIG. IV. 42 - CORTE A-A E CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS



.131.

**FIG. IV. 43 - MODELAGEM DA PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA**  
**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**  
**MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS**  
**MÉTODO DO ACI**



(M)  
(m/tm)

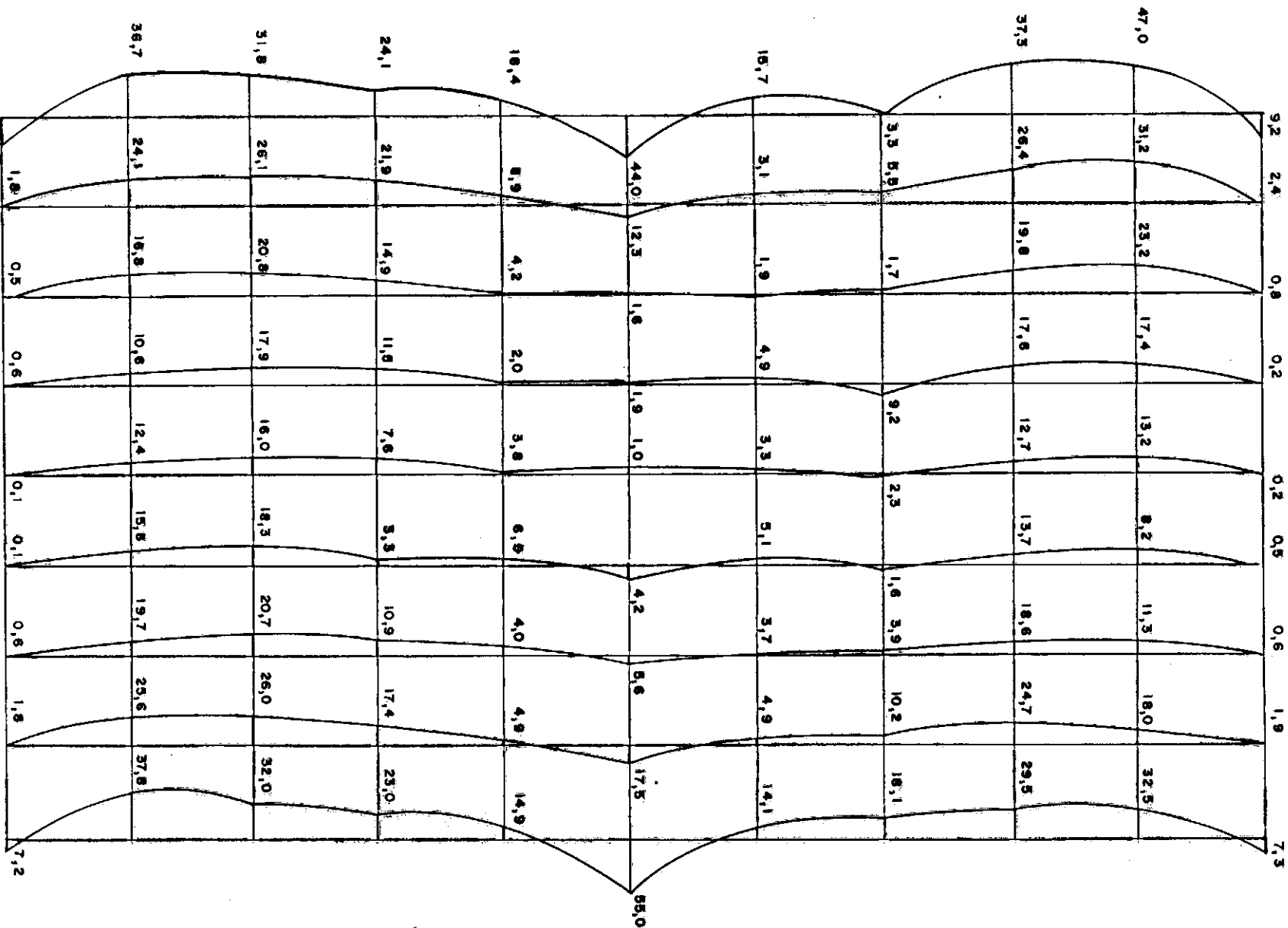
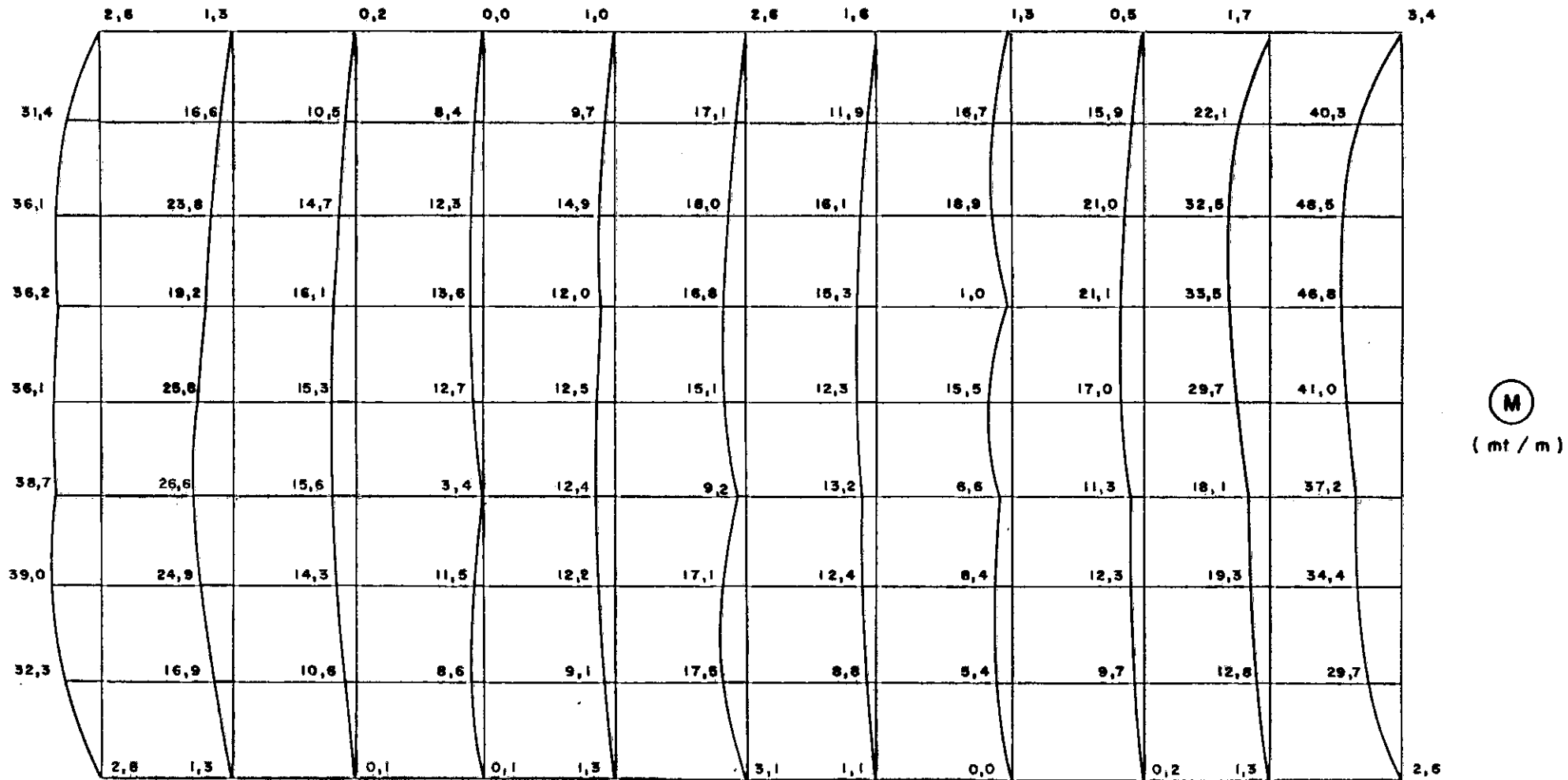


FIG. IV. 44 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
DIREÇÃO X  
h = 0,5 m



**FIG. IV. 45 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**  
**DIREÇÃO Y**  
 **$h = 0,5 m$**

( M / E )

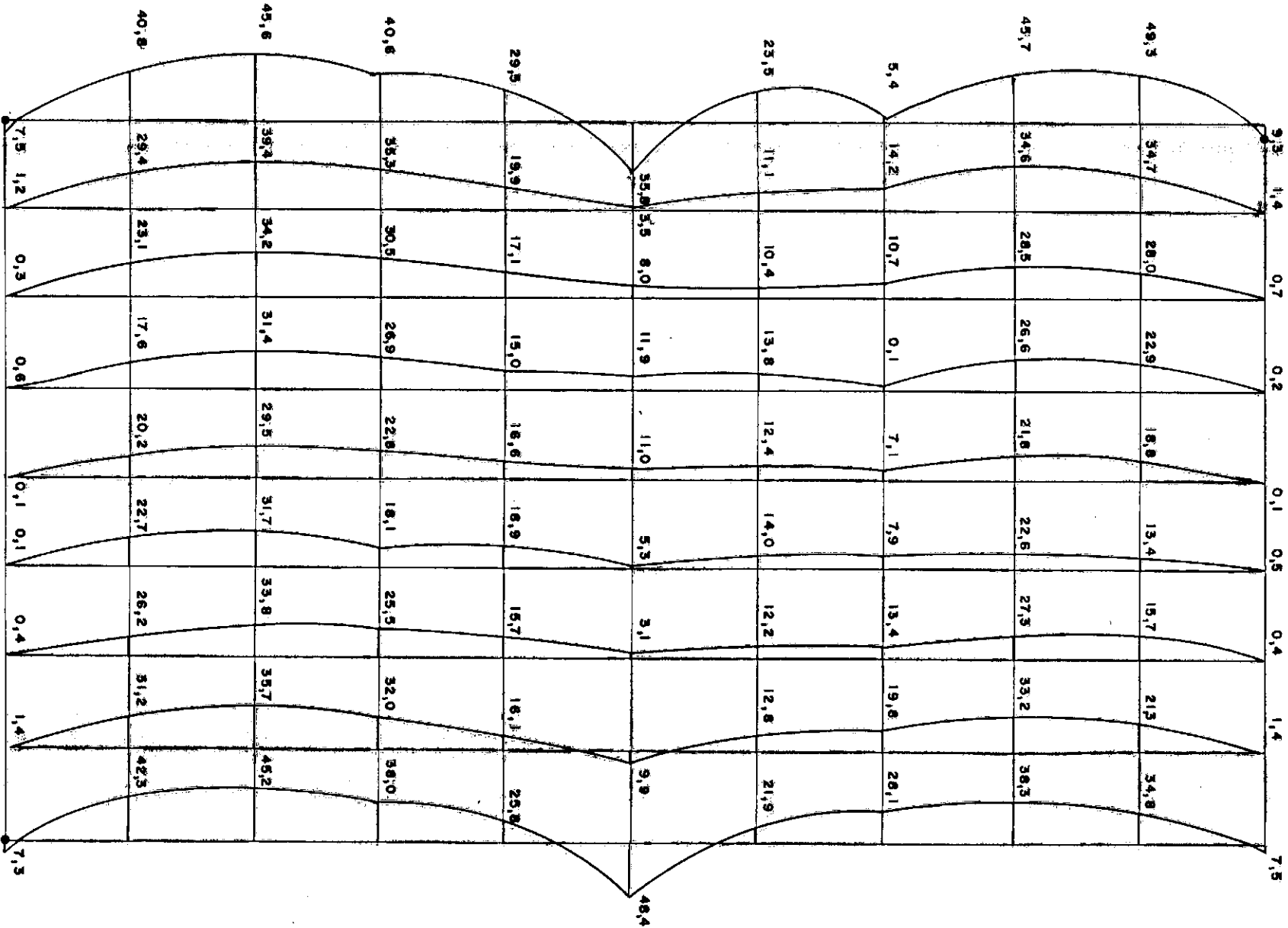
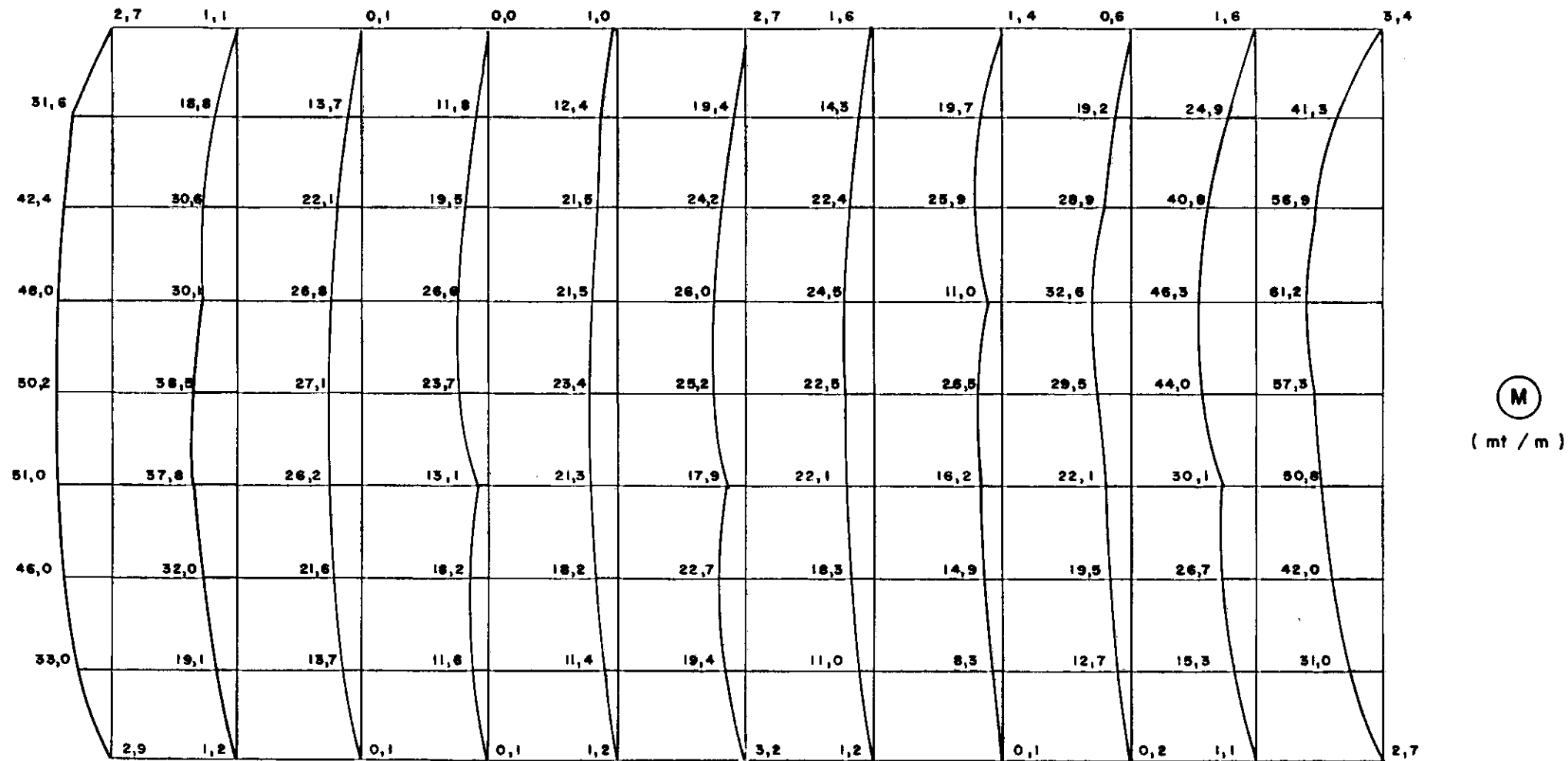


FIG. IV. 46 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
DIREÇÃO X  
h = 0,8 m



**FIG. IV. 47 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**  
**DIREÇÃO Y**  
 **$h = 0,8 m$**

( m / m )

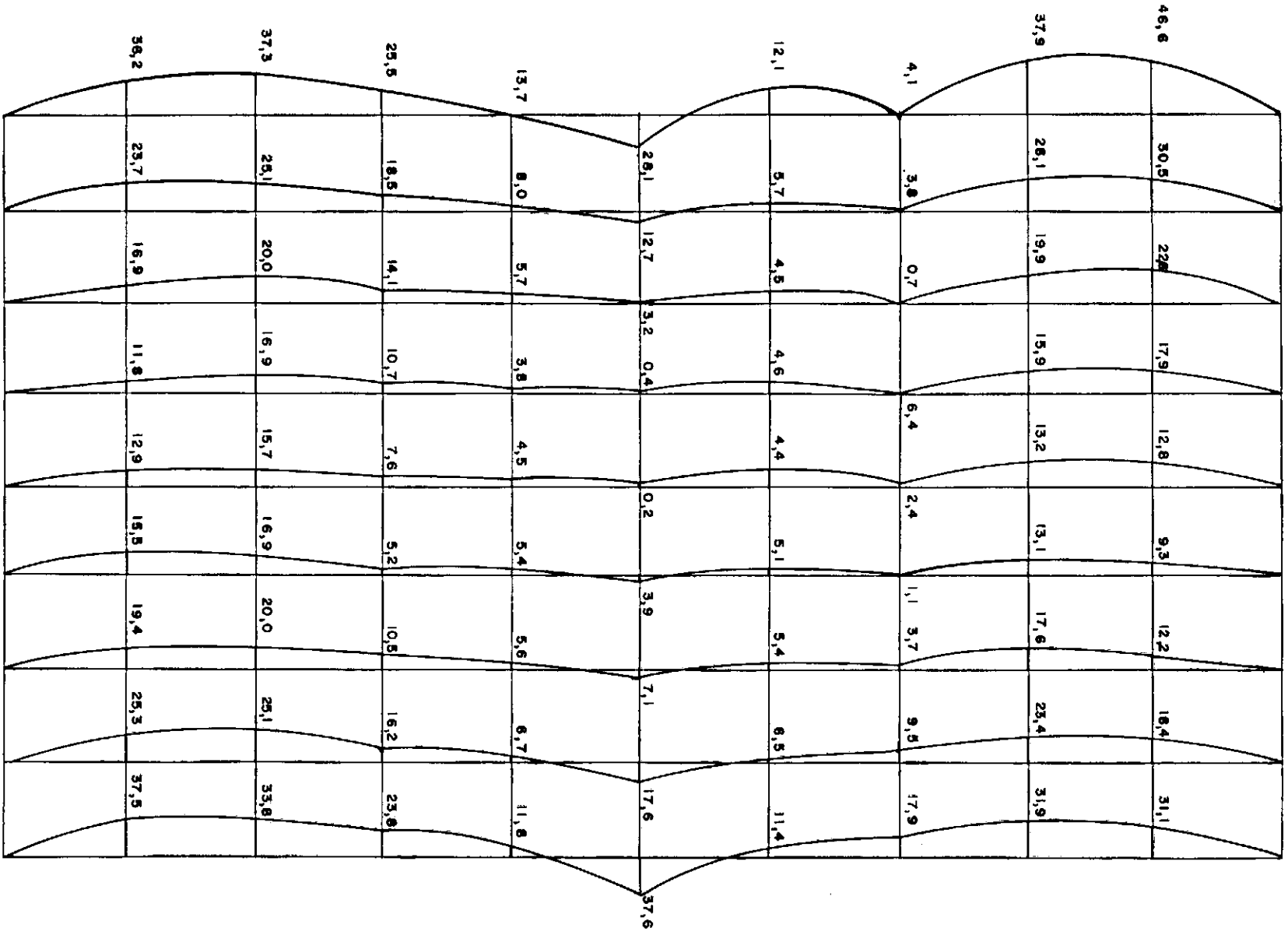
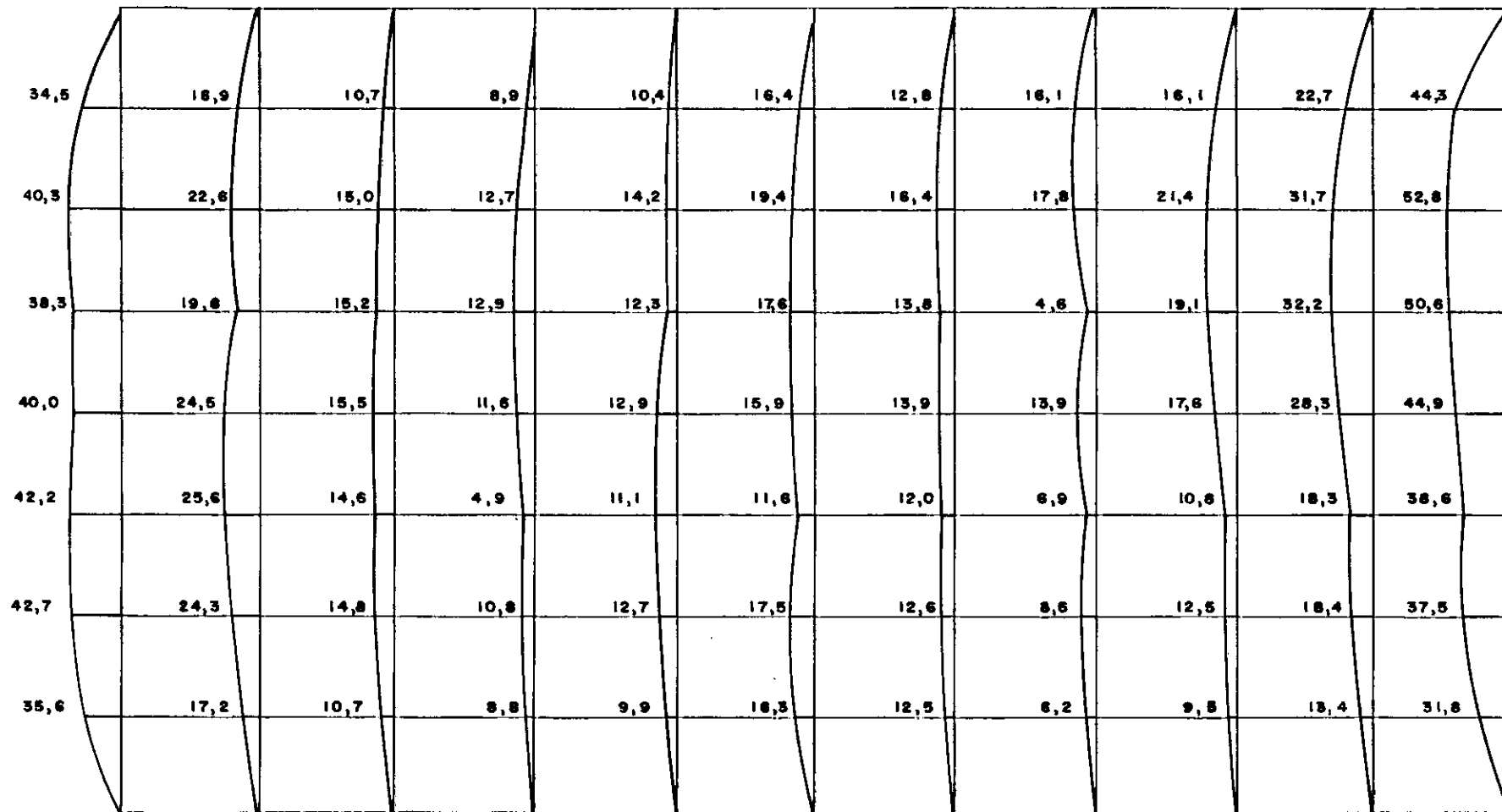


FIG. IV. 48 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
DIREÇÃO X  
h = 0,50 m

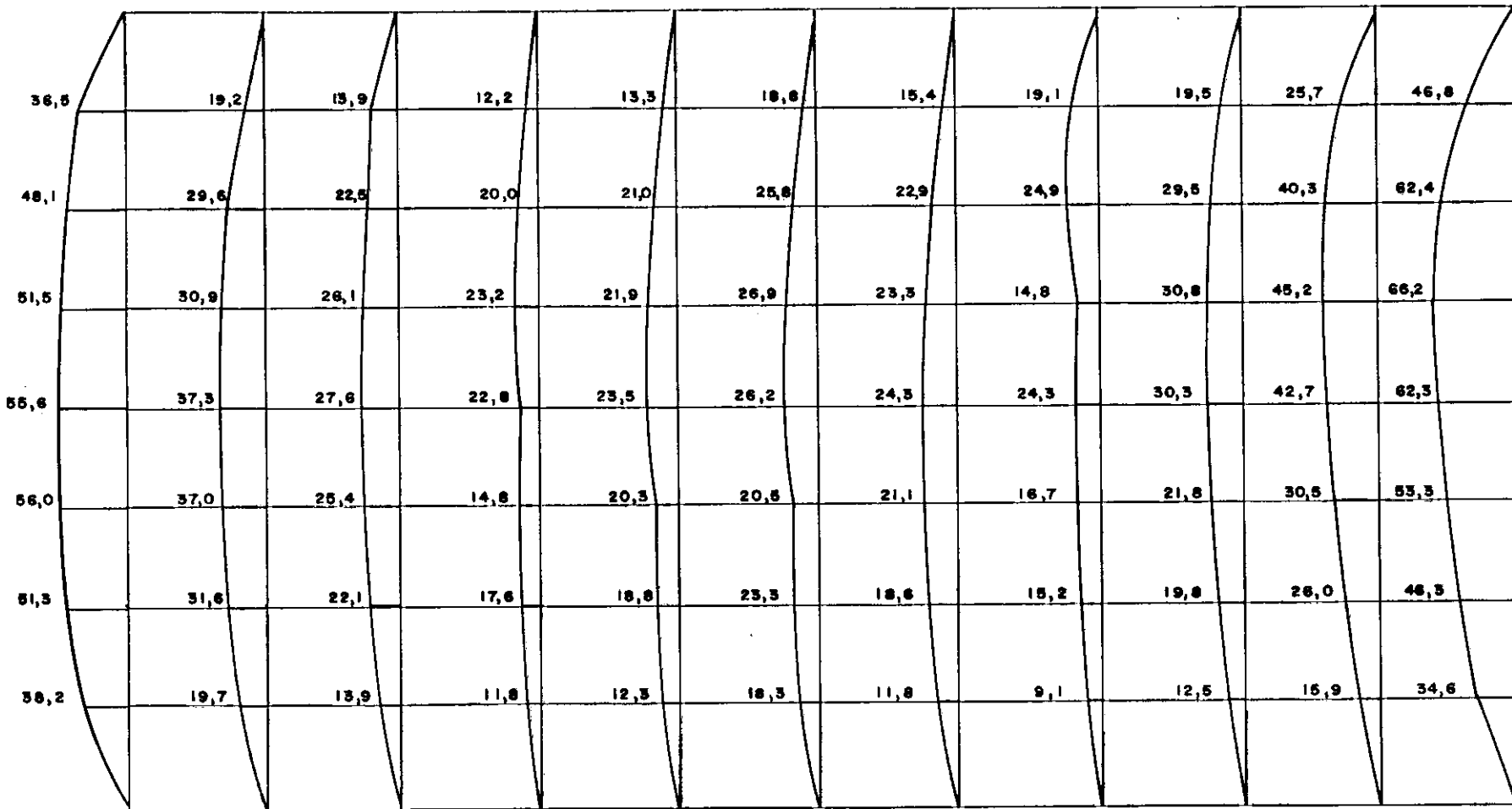


( M )  
( mt / m )

. 137 .

**FIG. IV. 49 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
DIREÇÃO Y  
h = 0,50 m**





M  
 ( mt / m )

**FIG. IV. 51- MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS**  
**DIREÇÃO Y**  
 **$h = 0,80 \text{ m}$**

(M)  
(mt/m)

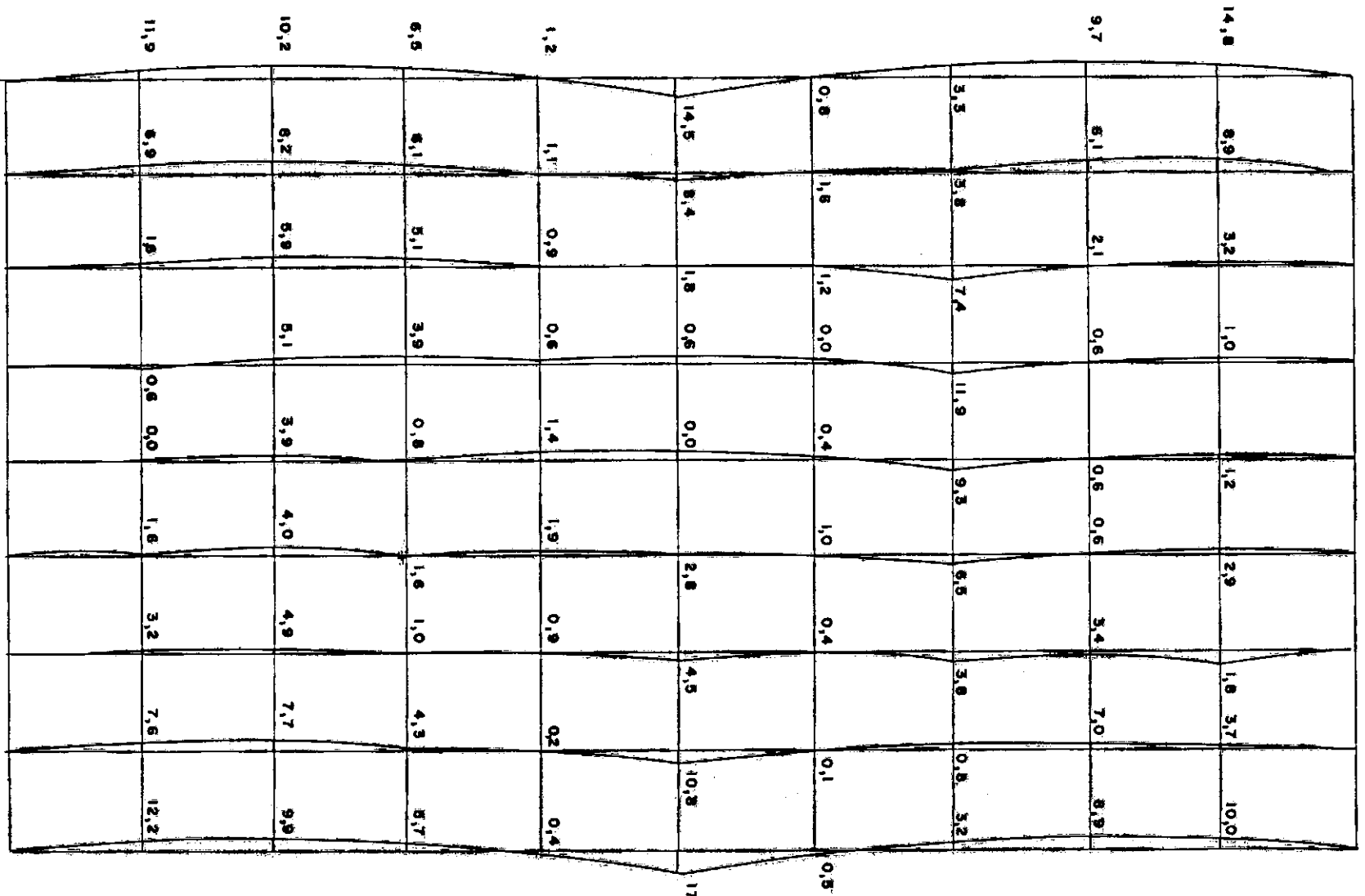
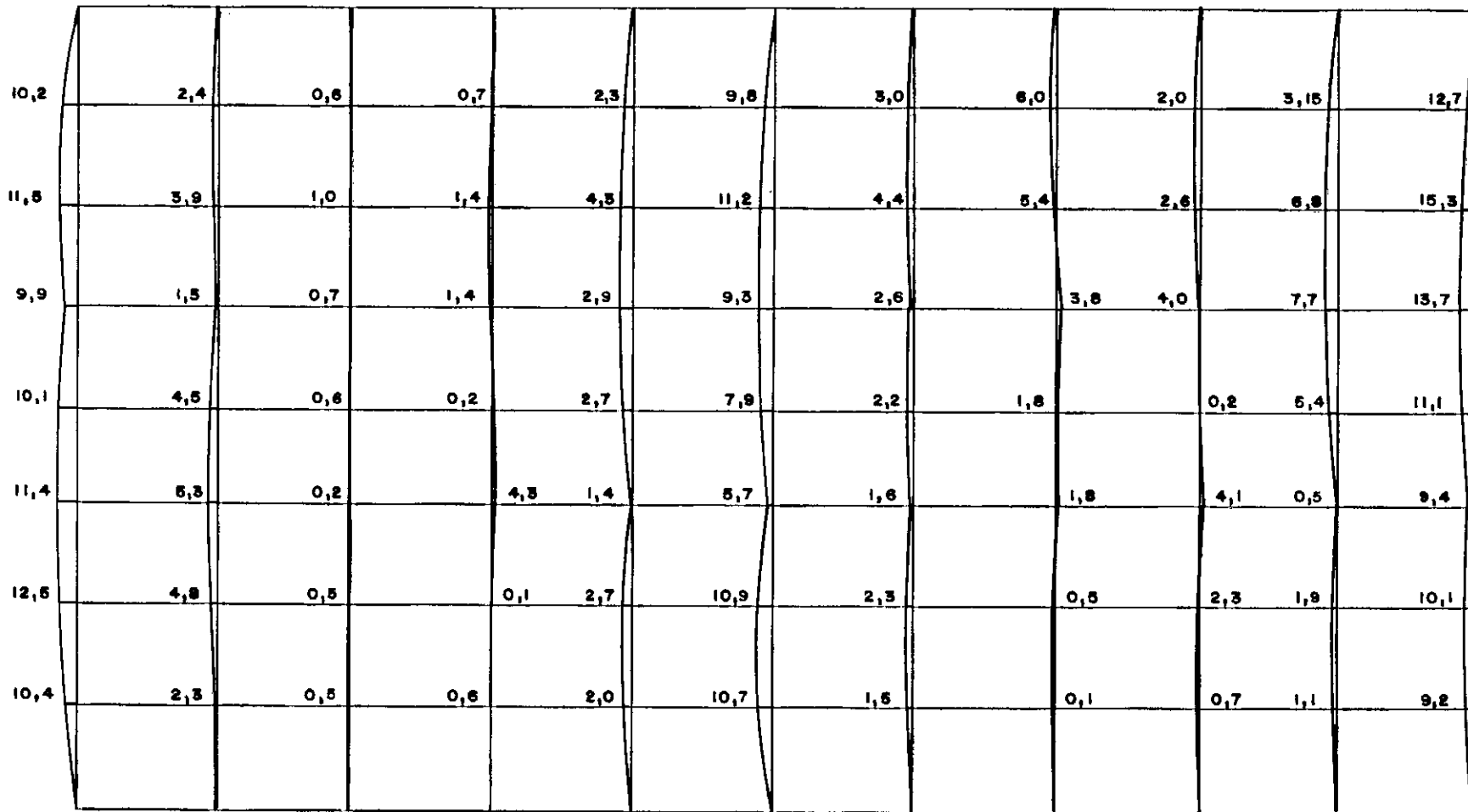


FIG. IV. 52 - MÉTODO DO ACI  
 DIREÇÃO X  
 h = 0,5 m



(M)  
(mt/m)

.147.

FIG. IV. 53 - MÉTODO DO AÇI  
DIREÇÃO Y  
 $h = 0,5m$

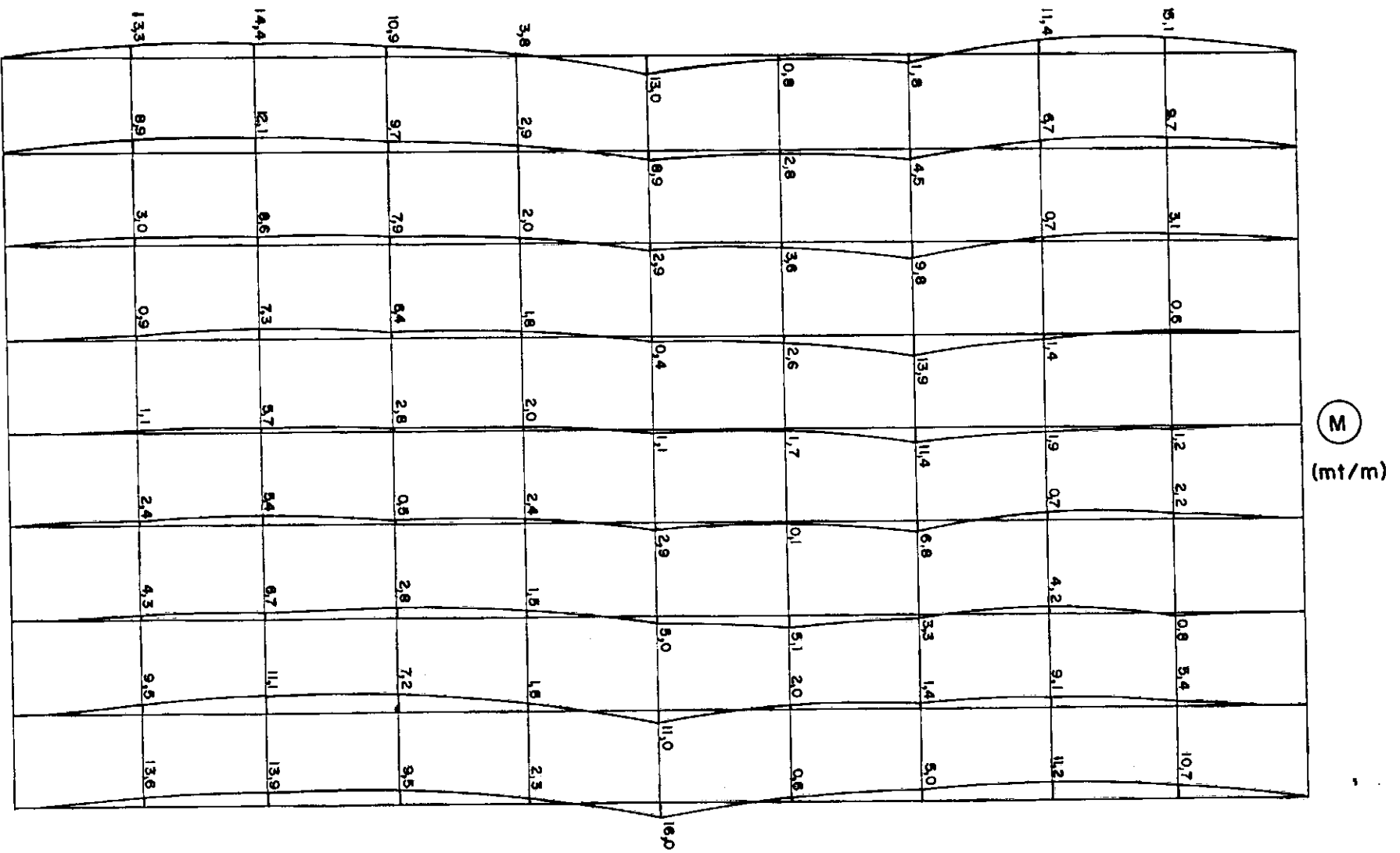
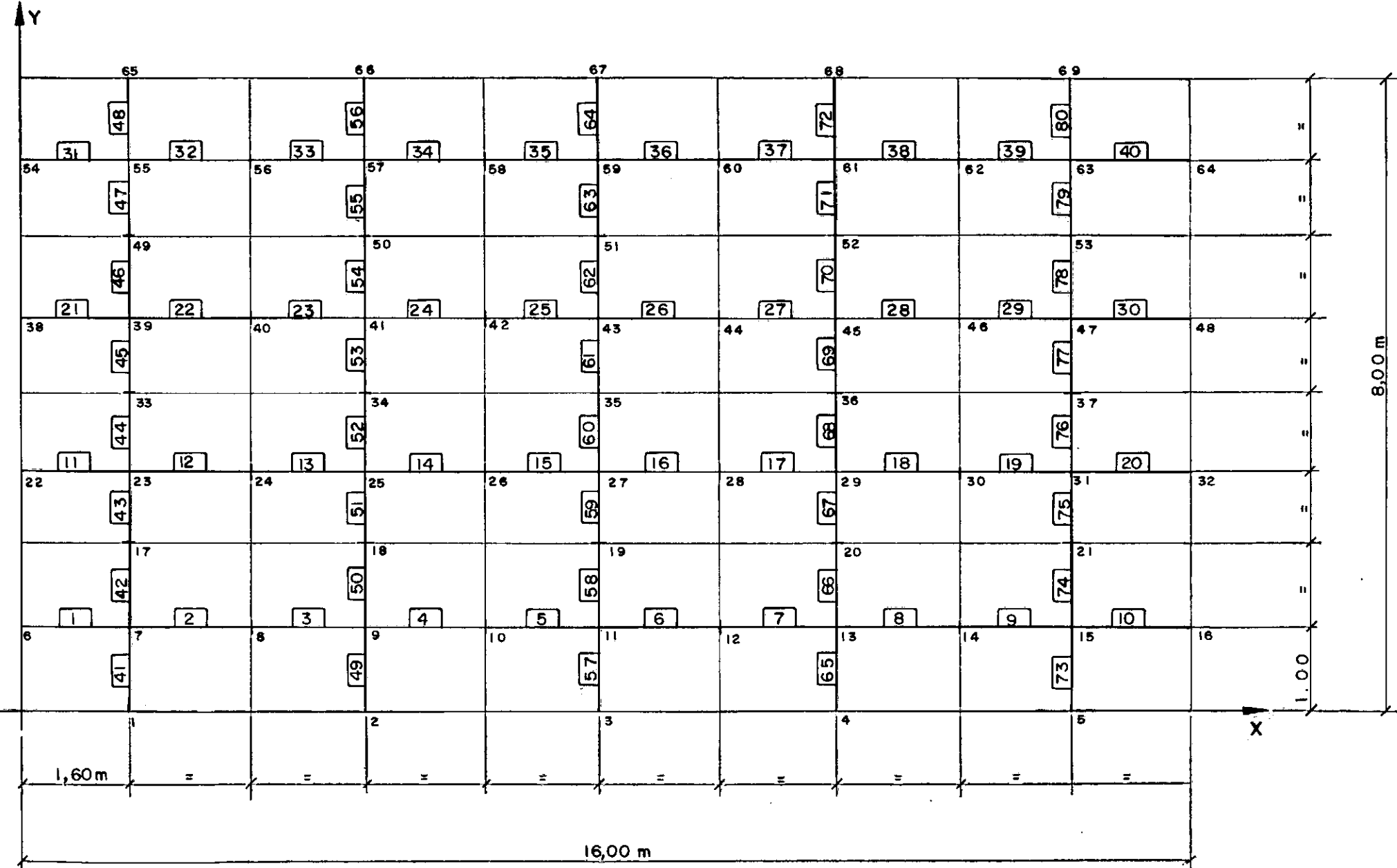


FIG. IV. 54 - MÉTODO DO ACI  
DIREÇÃO X  
h = 0,8 m

(M)  
( mt/m )

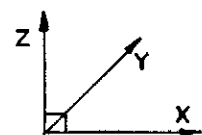
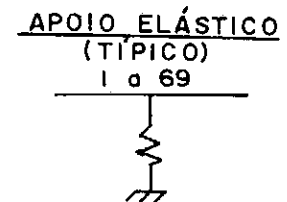
10,3	2,8	0,4	0,4	2,5	9,7	3,7	6,1	2,2	4,0	12,7
14,1	5,2	0,7	1,1	5,0	13,2	5,8	6,5	3,3	8,1	18,1
14,6	3,8	0,5	1,1	4,1	12,9	4,5	1,1	1,9	10,7	18,6
18,9	6,8	0,3	0,2	3,8	11,8	4,2	3,7	0,6	9,2	16,7
16,1	7,3	0,3	4,3	2,3	9,5	3,3	0,3	3,2	3,8	14,1
18,2	6,1	0,1	0,6	3,2	12,7	3,4	0,8	1,8	4,0	12,6
10,5	2,7	0,2	0,3	2,1	10,6	2,0	0,5	0,5	2,2	9,3

FIG. IV 55- MÉTODO DO ACI  
DIREÇÃO Y  
h = 0,8 m



.144.

**FIG.IV. 56 - MODELAGEM DO RADIER  
GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA**



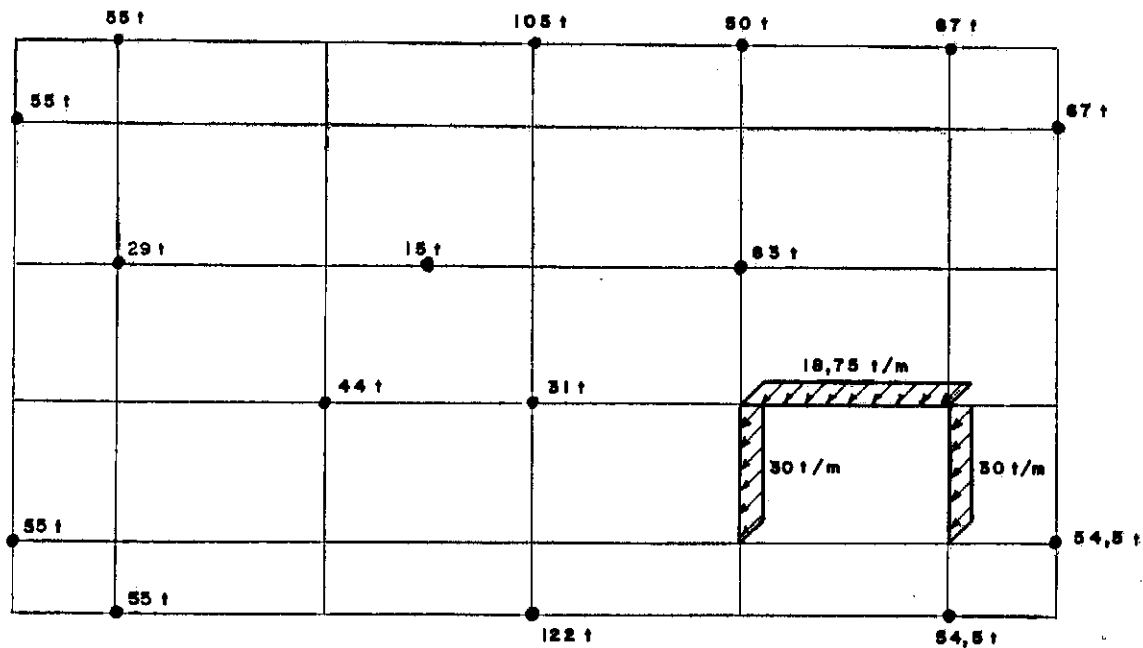


FIG. IV. 57 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
CARGAS ATUANTES

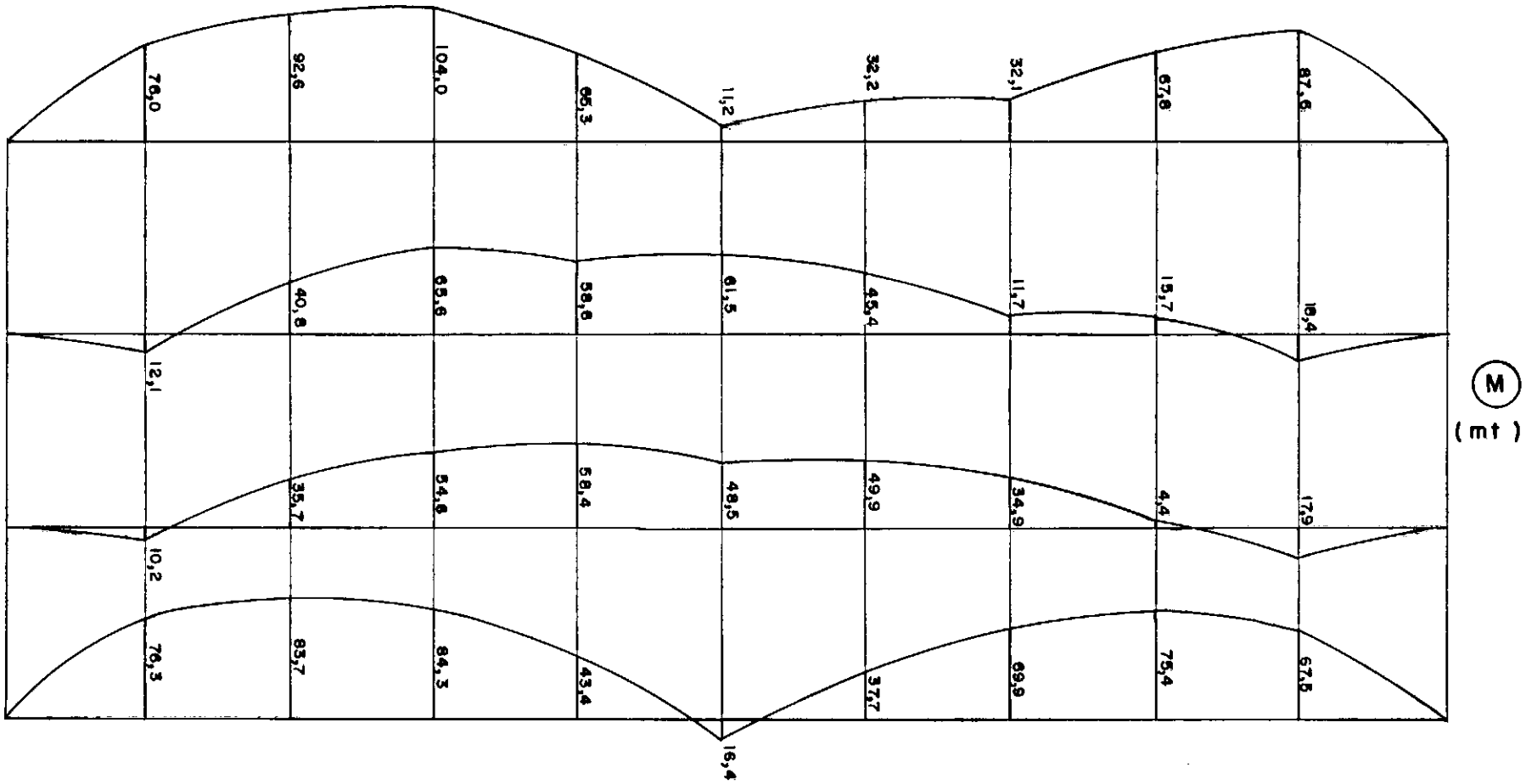
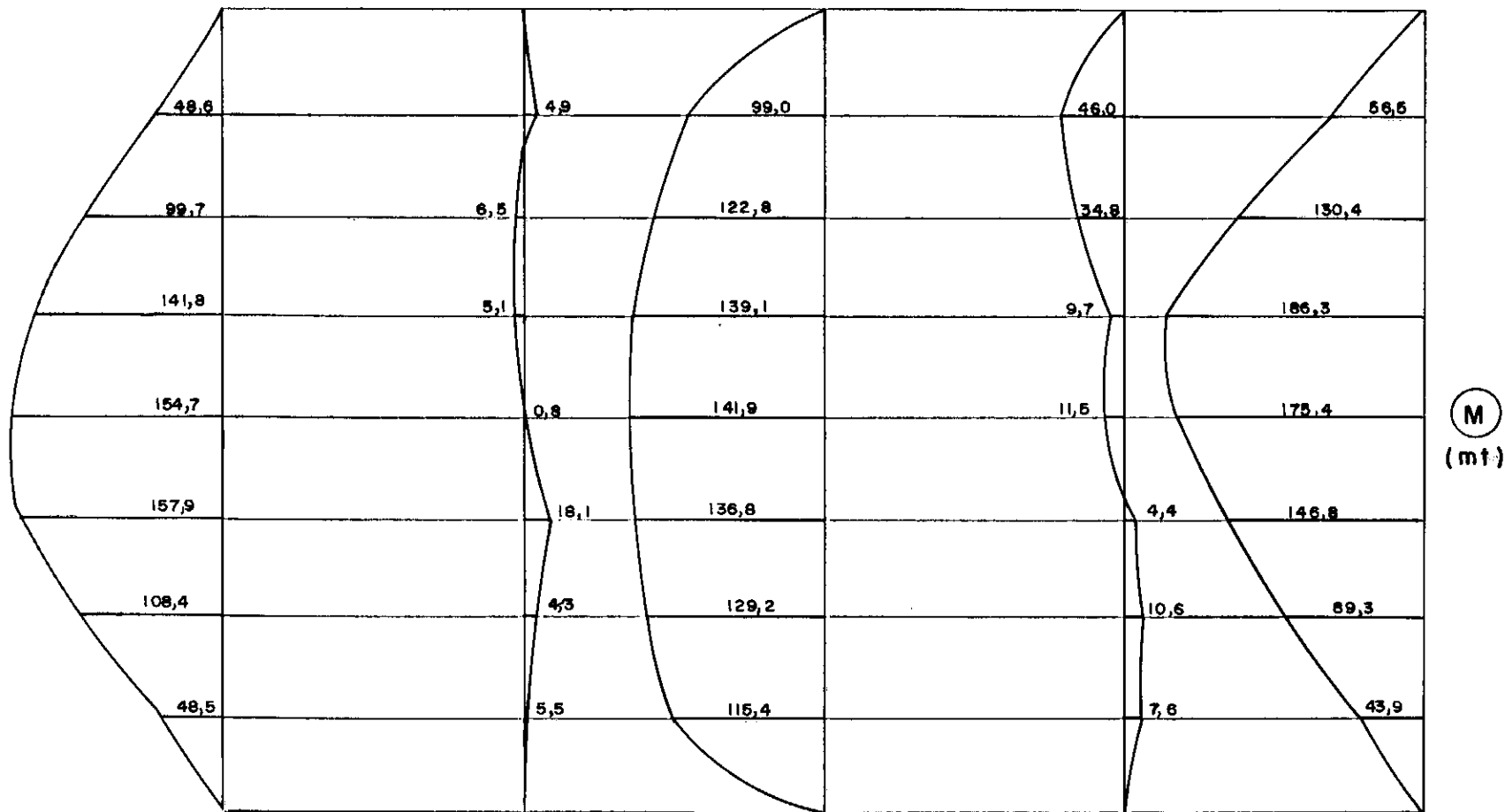


FIG. IV. 58 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
COM TORÇÃO DIREÇÃO X  
 $h = 0,50 m$



.147.

FIG. IV 59 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
COM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
 $h = 0,50 m$

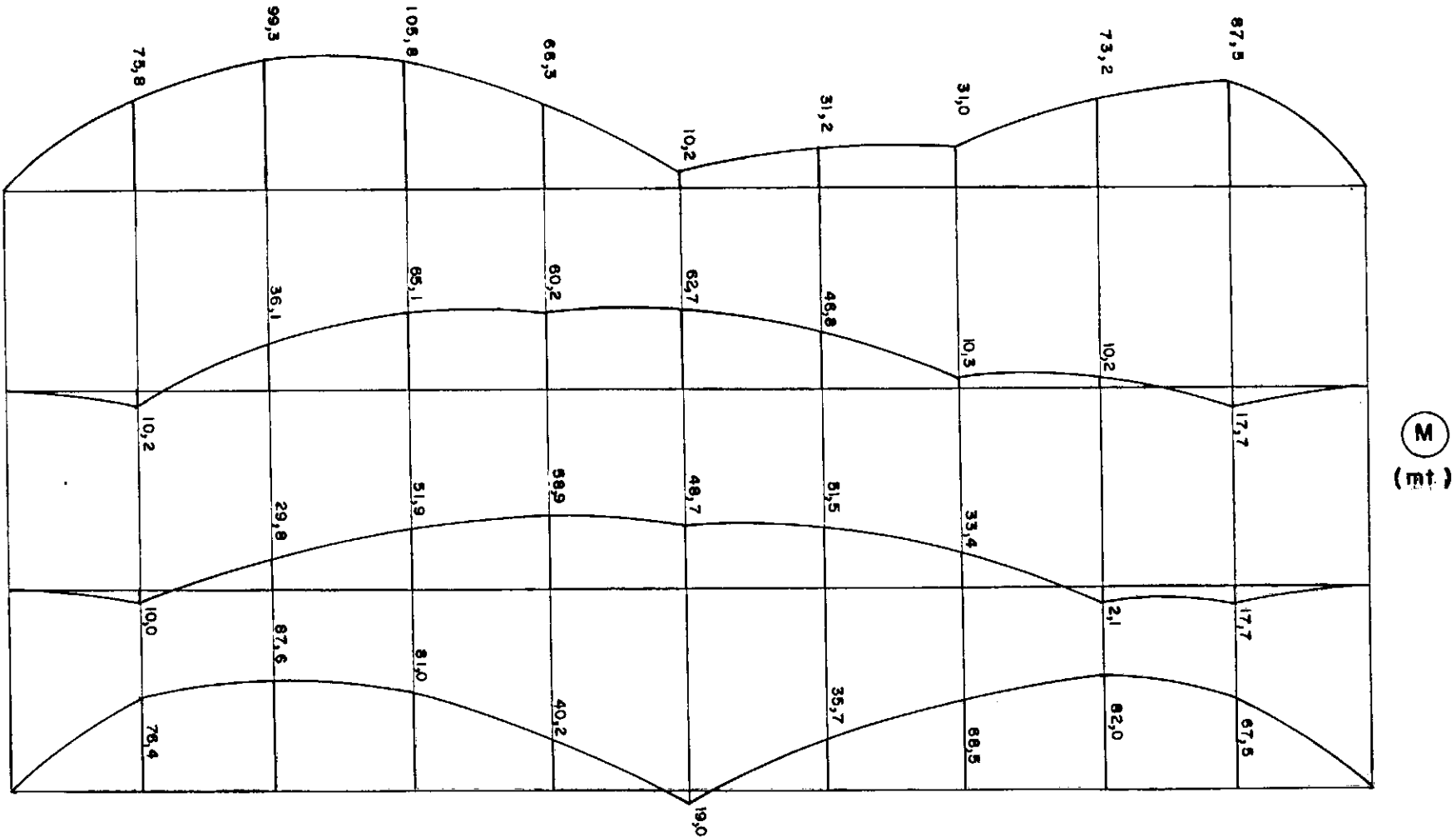


FIG. IV. 60 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
SEM TORÇÃO DIREÇÃO X  
h = 0,50 m

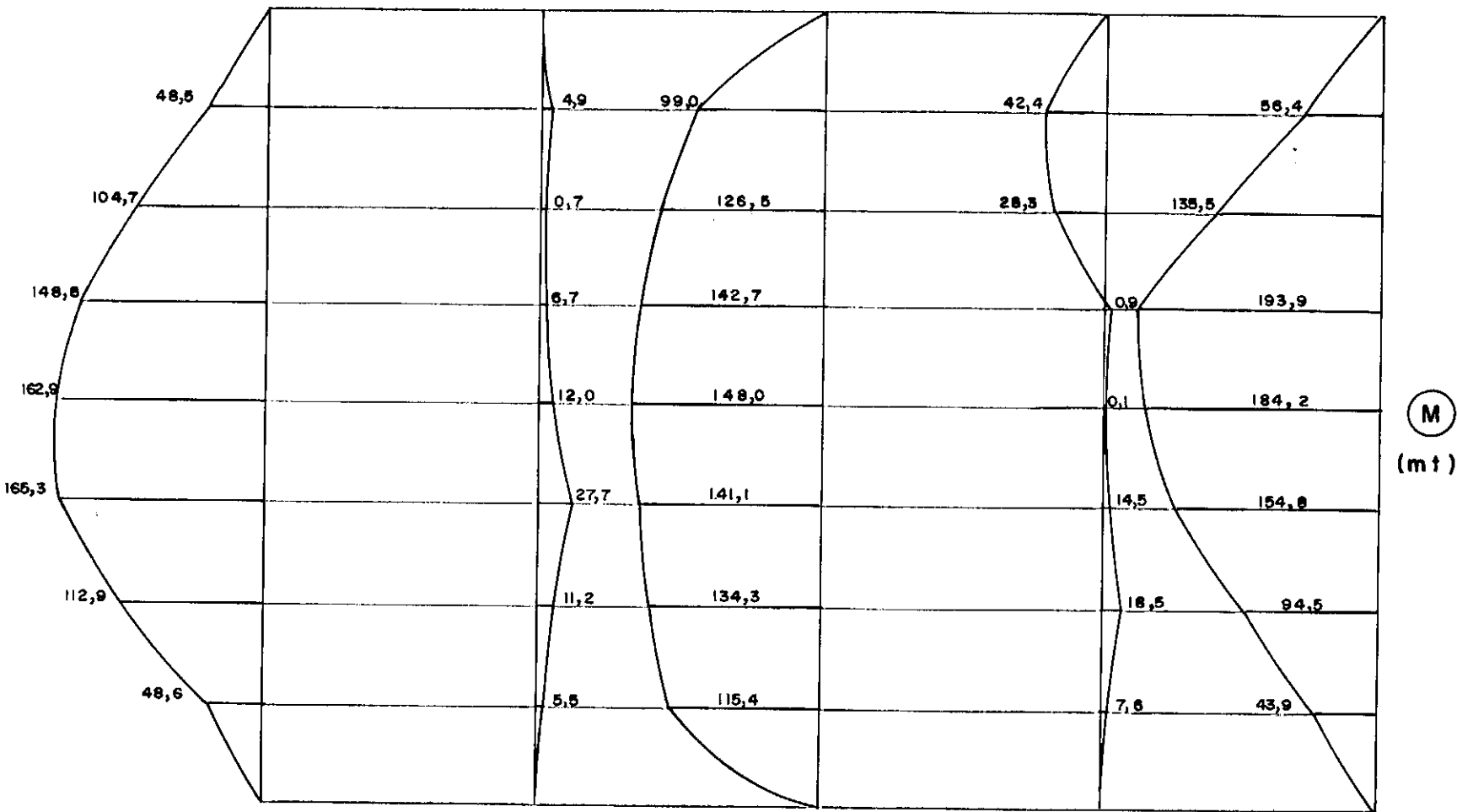


FIG.IV. 61- GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
SEM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
 $h = 0,50 m$

(M)  
(mt)

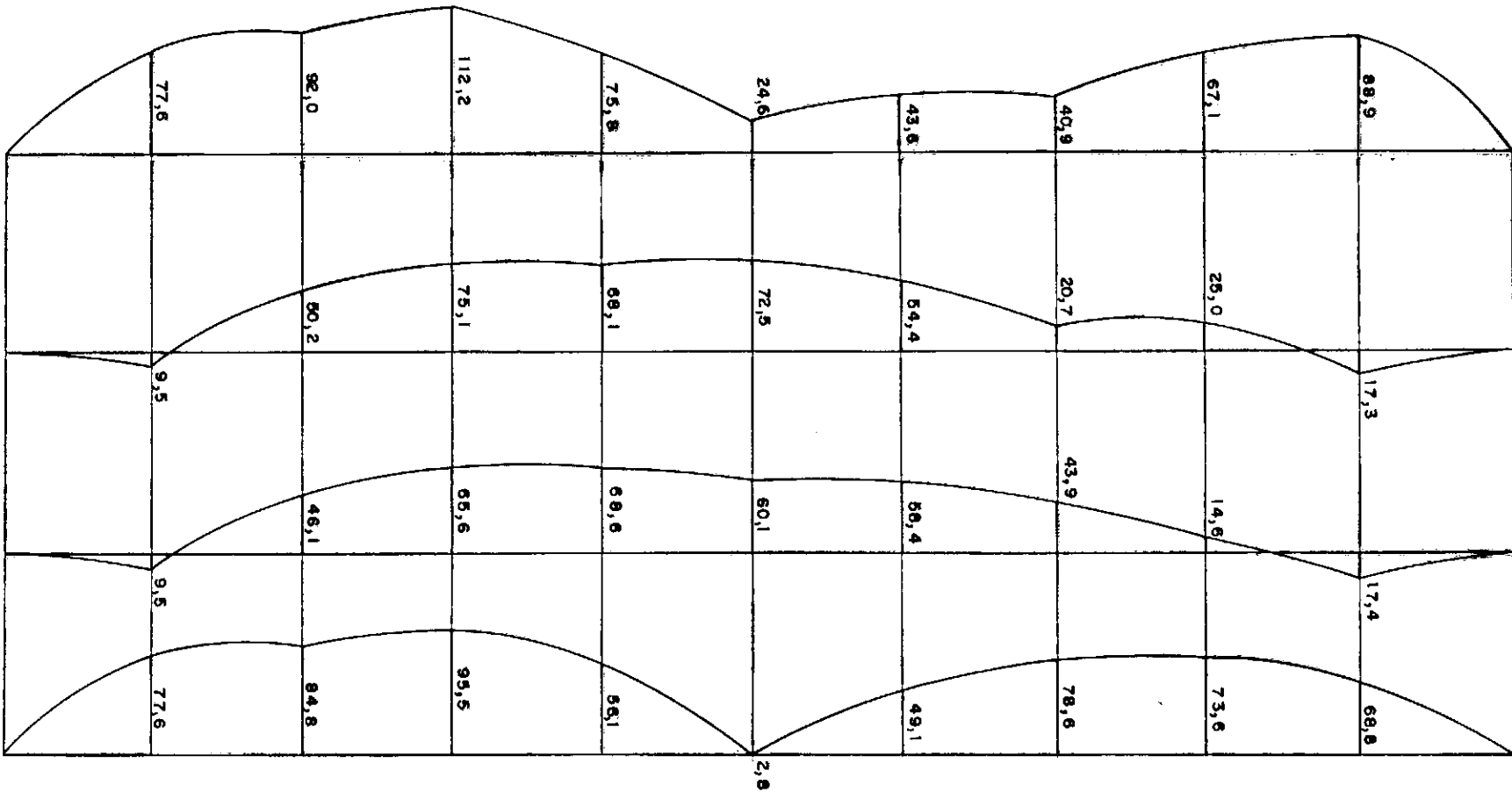


FIG. IV 62- GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
COM TORÇÃO DIREÇÃO X  
h = 0,80 m

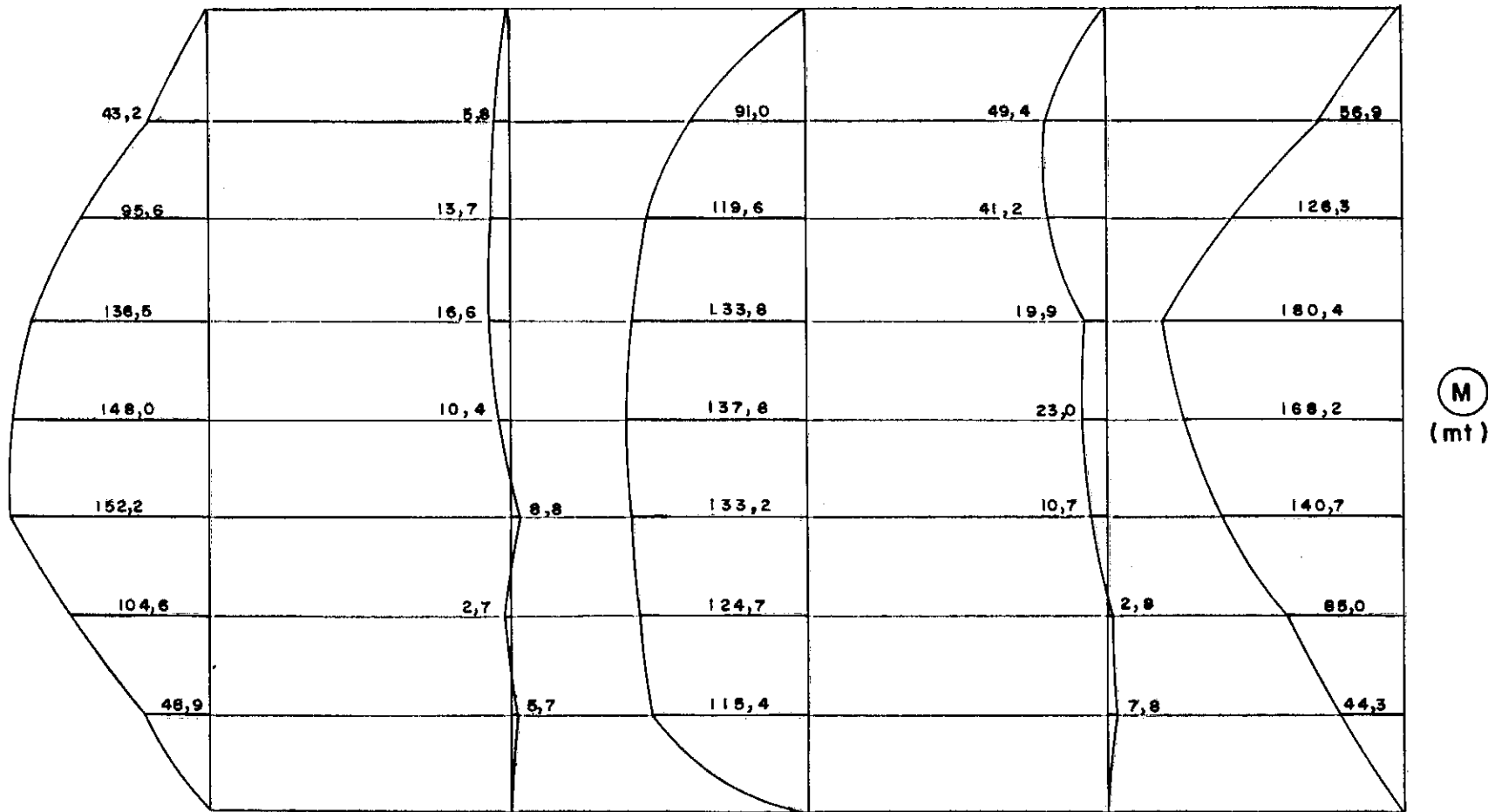


FIG. IV. 63 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
 COM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
 $h = 0,80m$



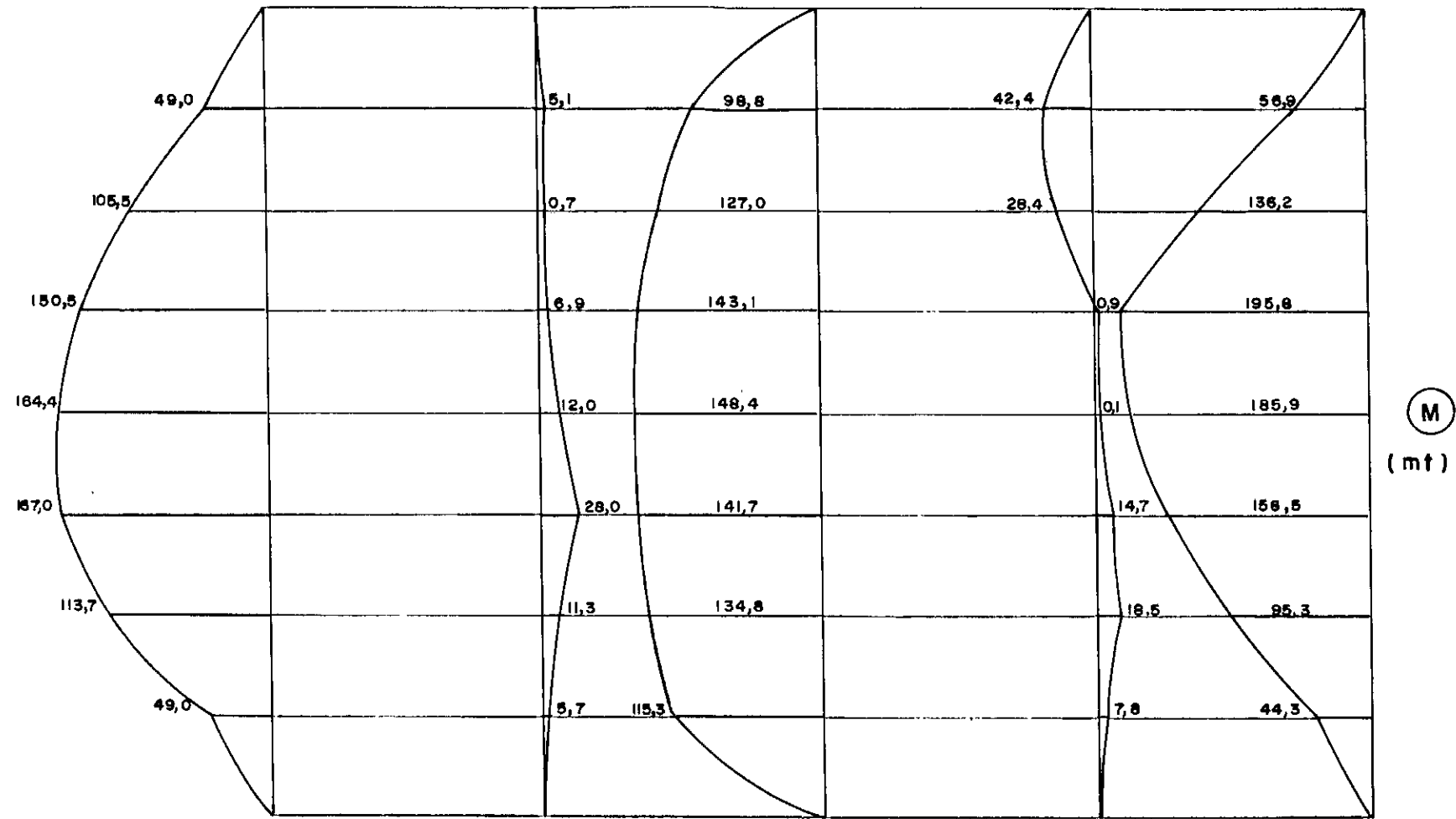


FIG. IV. 65 - GRELHA SOBRE BASE ELÁSTICA  
 SEM TORÇÃO DIREÇÃO Y  
 $h = 0,80 \text{ m}$

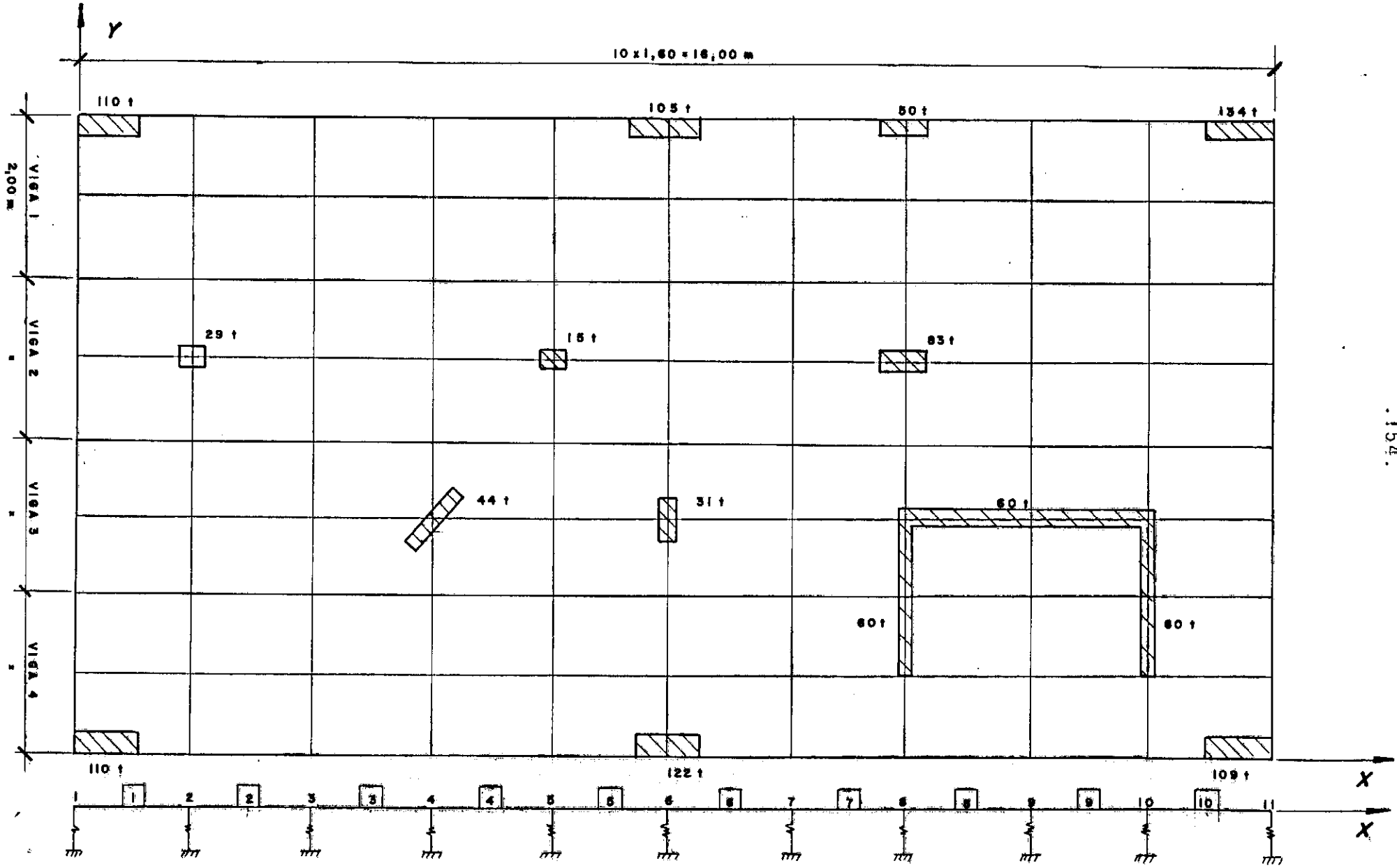


FIG. IV.66 - MODELAGEM DO RADIER  
MÉTODO DA VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA - DIREÇÃO X

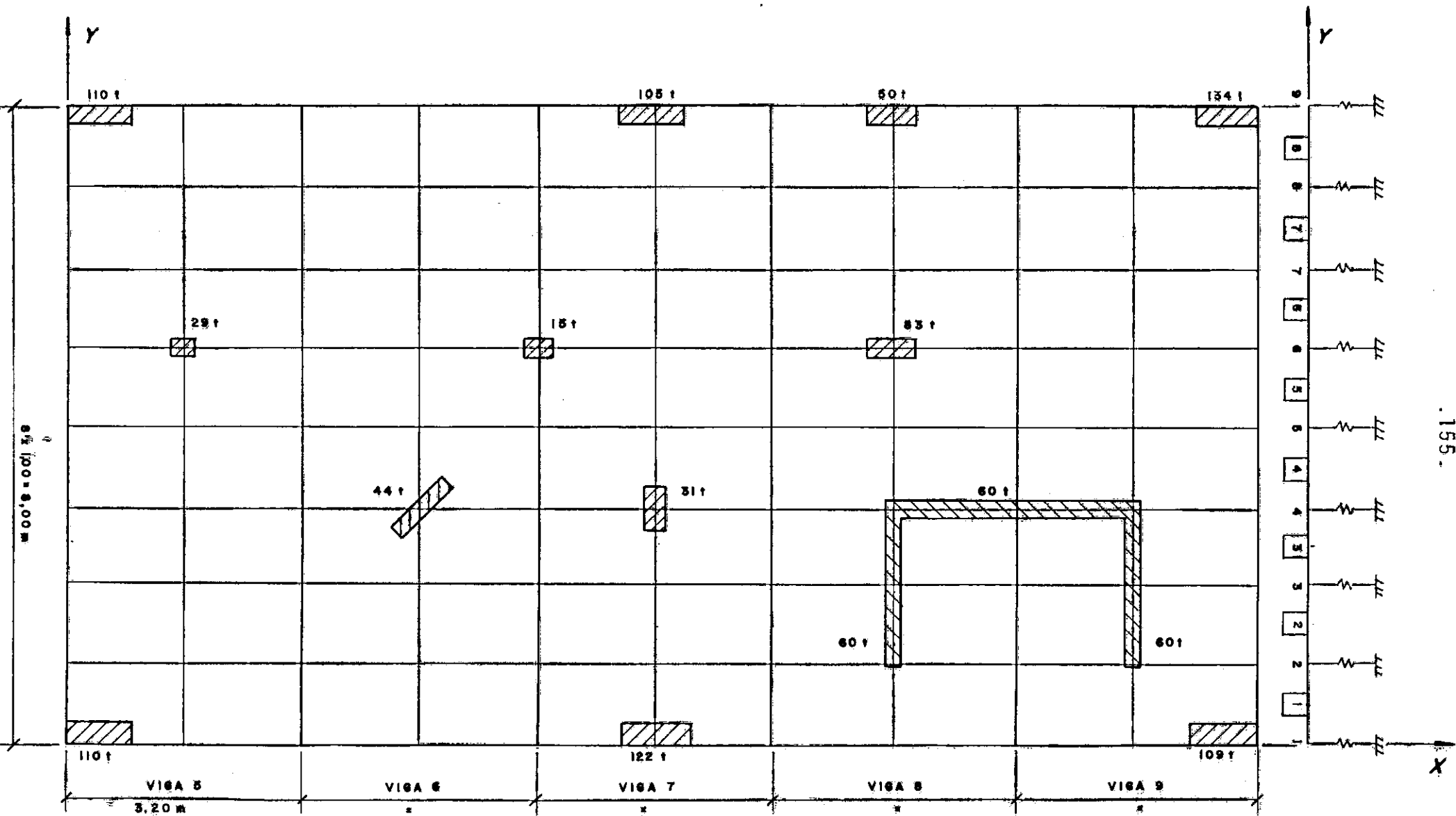
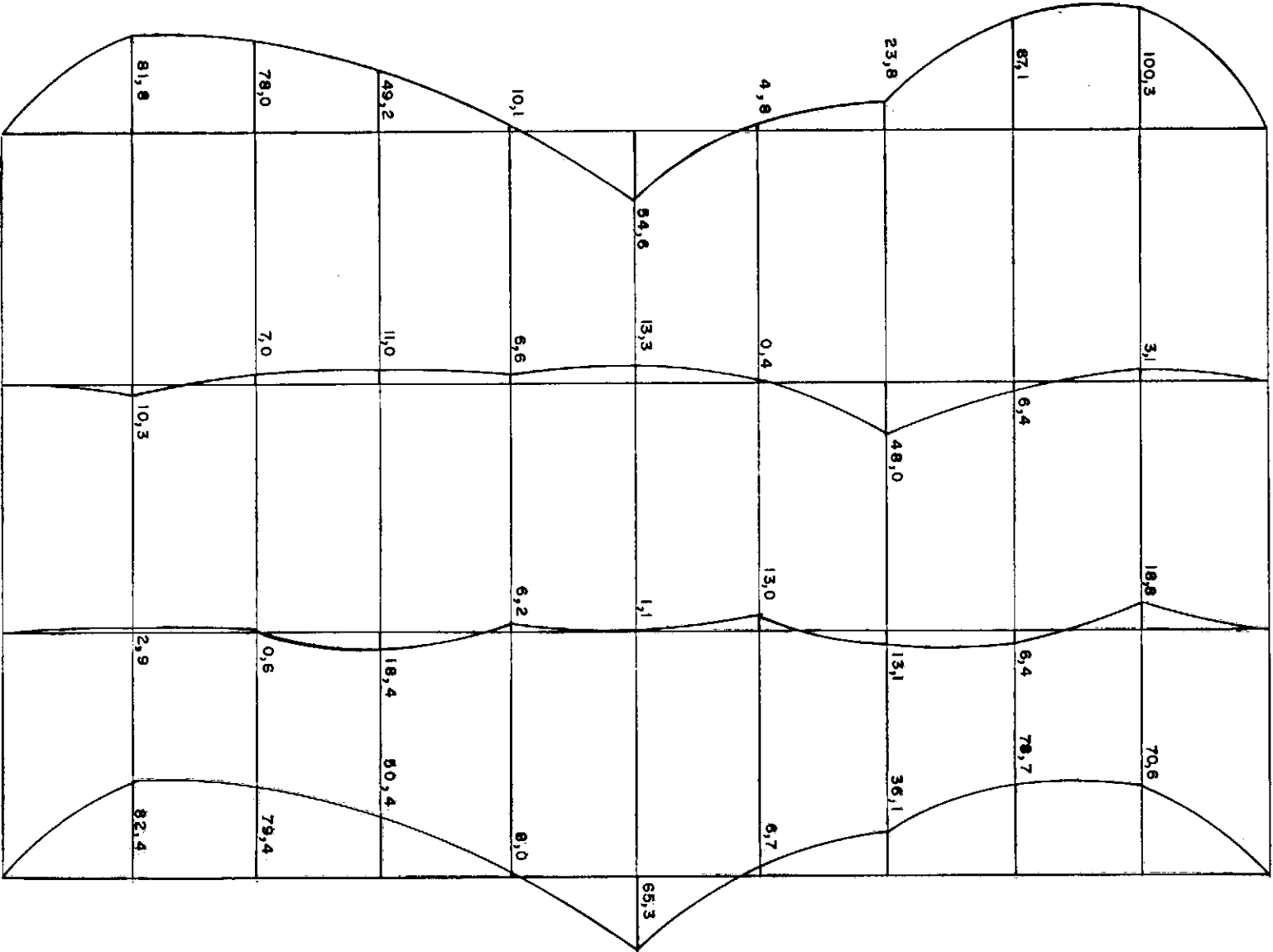


FIG. IV. 67 - MODELAGEM DO RADIER  
MÉTODO DA VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA - DIREÇÃO Y

(M)  
(mt)



VIGA 1

VIGA 2

VIGA 3

VIGA 4

FIG. IV. 68 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
DIREÇÃO X h = 0,50 m

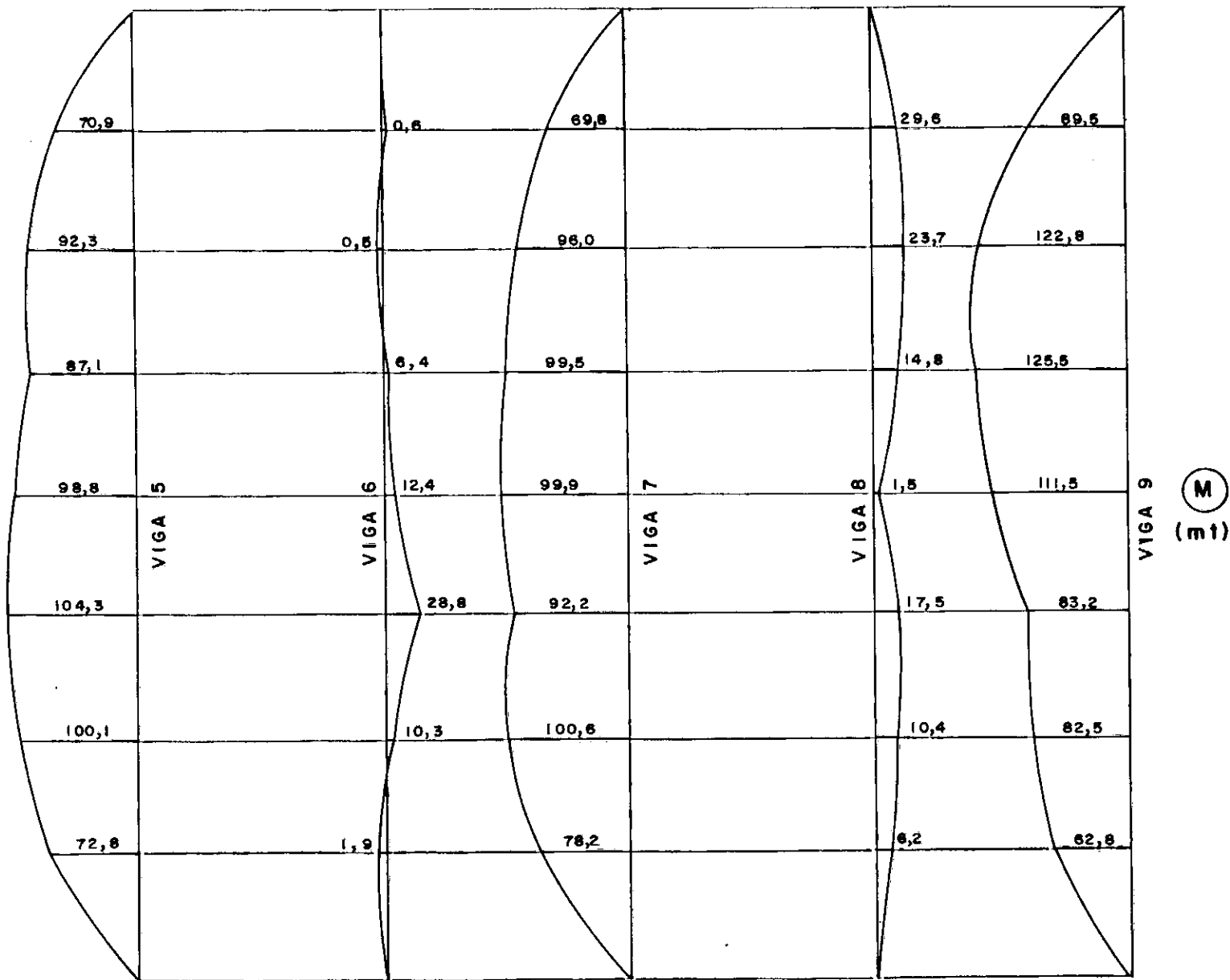


FIG. IV. 69 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
DIREÇÃO Y  $h=0,50m$

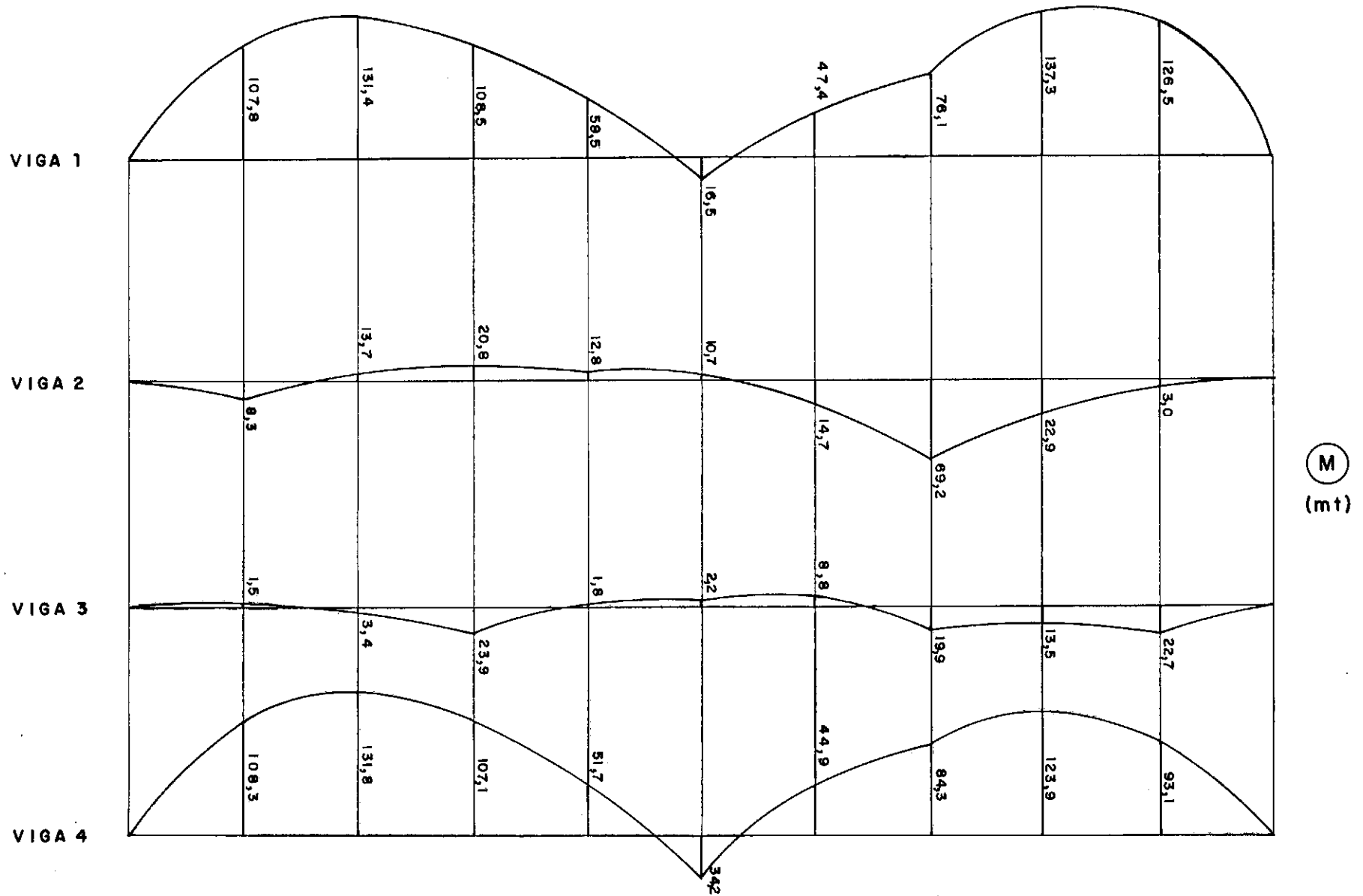


FIG. IV. 70 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
DIREÇÃO X  $h = 0,80m$

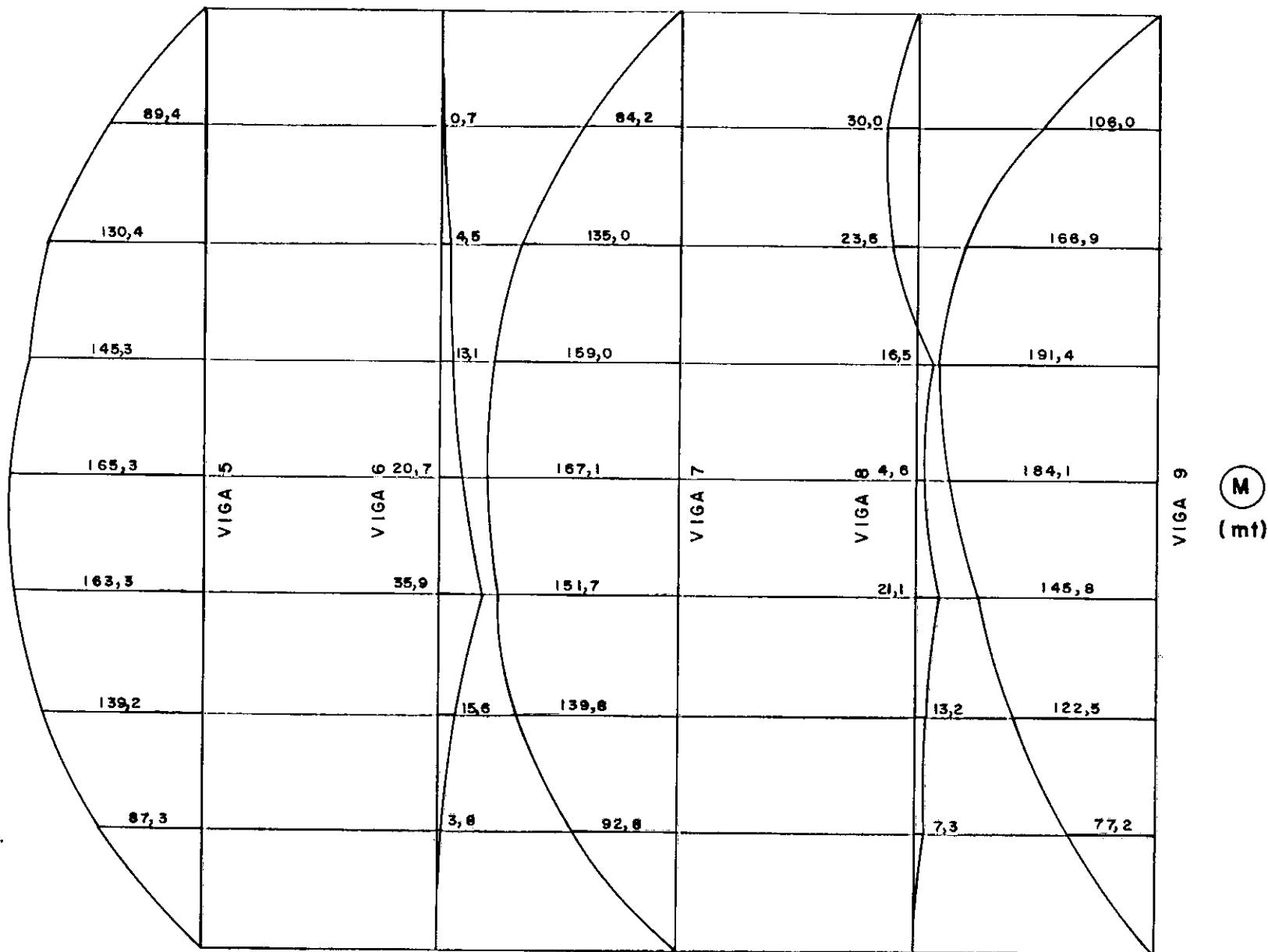


FIG. IV. 71 - VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA  
DIREÇÃO Y  $h = 0,80m$

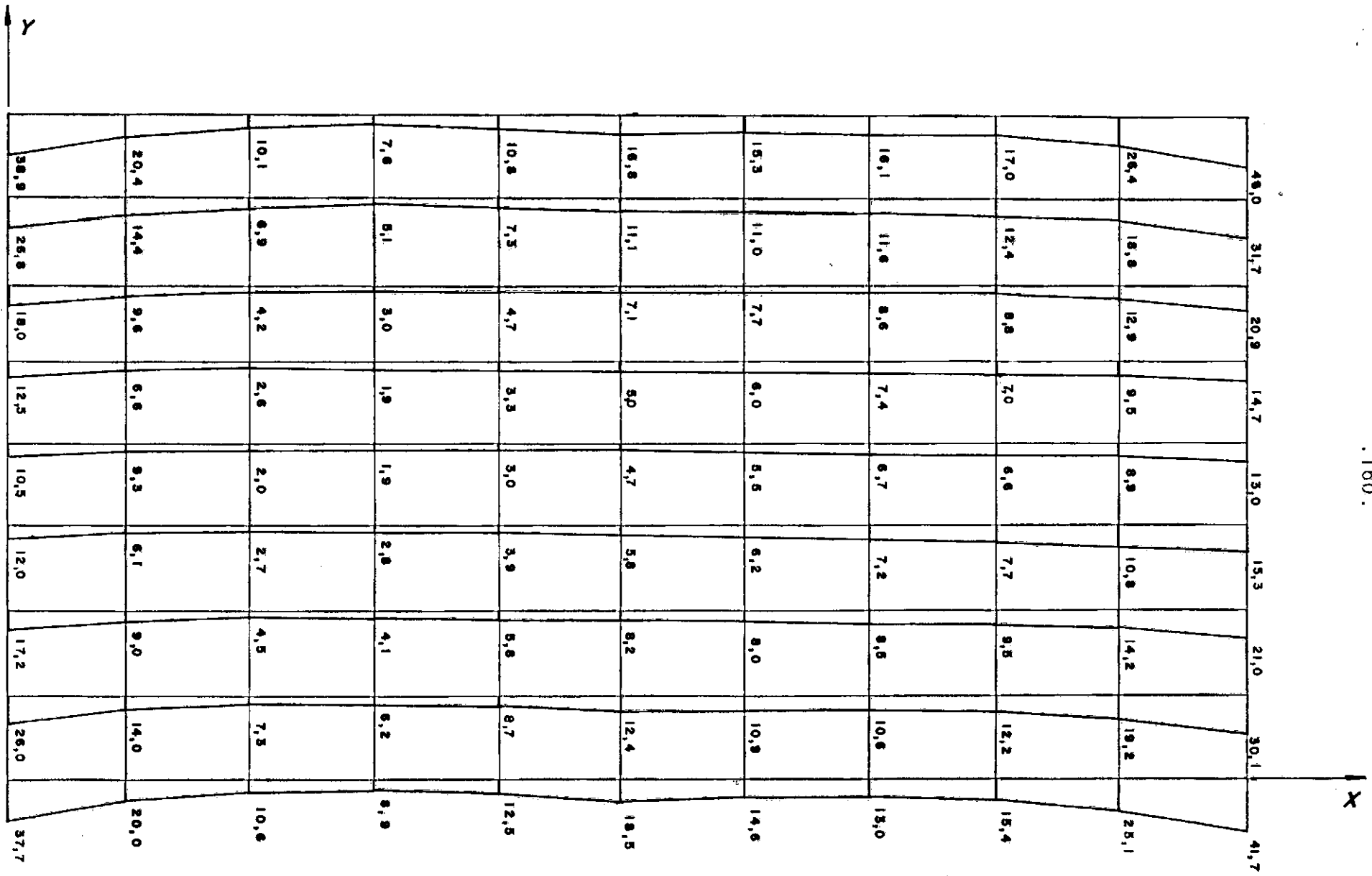


FIG. IV. 72 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
PRESÃO DE CONTATO SOLO X RADIER ( $1/m^2$ )  
 $h = 0,50m$

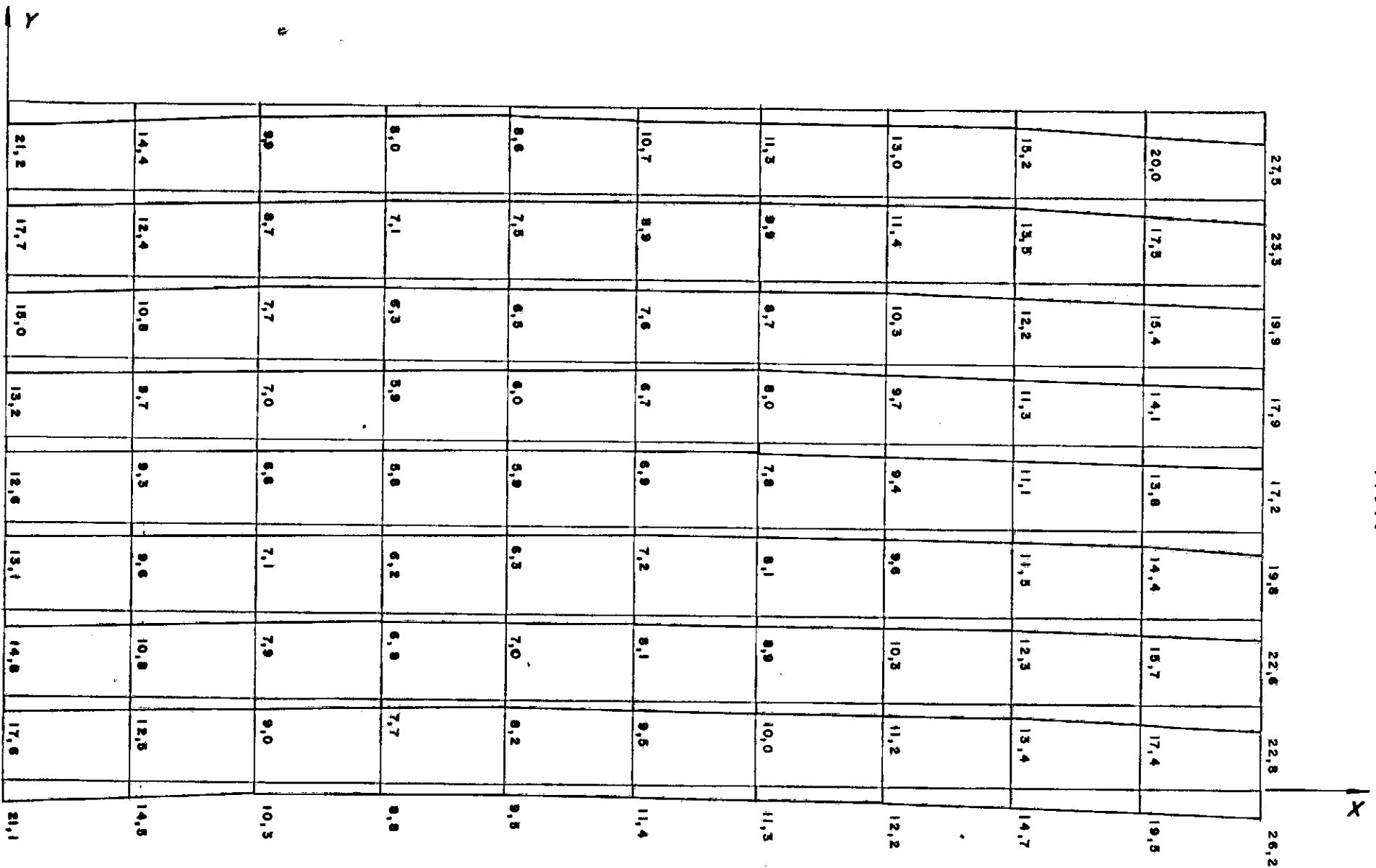


FIG. IV. 73 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS  
 PRESSÃO DE CONTATO SOLO X RADIER (1/m<sup>2</sup>)  
 h = 0,80 m

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES

#### V.1 - ANÁLISE GERAL

Com base nos resultados dos exemplos estudados e na teoria dos diversos métodos expostos, pode-se apresentar as seguintes conclusões:

- O Método dos Elementos Finitos, para o elemento retangular não conforme da biblioteca do programa LORANE, apresentou sempre na proximidade das cargas concentradas descontinuidades nos valores dos momentos fletores. O fato ocorreu nos nós comuns a dois elementos nodais, independente do refinamento da malha adotada. Este elemento não parece se comportar bem para cargas concentradas; talvez devido a este fato, o programa SAP IV, que trabalha com o mesmo elemento, só fornece os esforços no centro do elemento e não em seus pontos nodais. Nos exemplos adotou-se como momento fletor no ponto a média aritmética dos momentos nos pontos nodais dos elementos que concorrem no ponto em estudo. Este procedimento pode não ser o mais indicado e a média aritmética não ser a melhor forma de avaliação. Conforme comentado anteriormente, os valores numéricos dos momentos torsores não estão condizentes com a realidade conhecida através de exemplos teóricos. Os torsores resultantes do emprego do elemento retangular de placa apresentaram valores, em alguns casos, da mesma ordem de grandeza que os momentos fletores, o que não é correto. No cômputo geral, este elemento fornece uma razoável precisão apenas para os valores dos momentos fletores e das flechas.

- O Método das Diferenças Finitas, onde são clássicas as

dificuldades da modelagem, das condições de contorno nos bordos, não apresentou aparentemente nenhuma distorção ou dúvidas em seus resultados. Os valores dos deslocamentos, momentos fletores e torsores se mostraram bastante compatíveis, inclusive o cálculo da reação total do terreno, obtida a partir dos deslocamentos calculadas, apresentou uma diferença praticamente nula em relação às cargas aplicadas. Com o programa implantado em micro-computador da linha PC, este método se mostrou realmente bastante eficiente.

- Os Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas apresentaram valores bastante semelhantes nos dois exemplos analisados, exceto para os momentos torsores onde os valores obtidos no Método dos Elementos Finitos são bastante superiores ao das Diferenças Finitas.

- O Método do ACI não se mostrou confiável, pois na maioria dos pontos do radier, os momentos fletores apresentaram valores bastante inferiores aos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas. Este Método só parece ter uma razoável performance para pontos distantes dos bordos da placa, bem como para cargas aplicadas longe do contorno. No tocante à parte computacional, o emprego das funções de Hetényi (18) conduz a grandes tempos de processamento.

- O Método da Grelha sobre Base Elástica, apesar de se mostrar muito prático, apresentou valores bastante diversos dos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas. Estes valores foram na maioria das vezes superiores aos Métodos citados. O emprego de barras sem rigidez à torção é mais prático do que a consideração da torção, não acarretando grandes diferenças numéricas.

- O Método da Viga sobre Base Elástica apresentou praticamente a mesma performance do Método da Grelha sobre Base Elástica, no caso de radiers irregulares (exemplo 2). Para os radiers regulares (exemplo 1), este Método se mostrou um Método aproximado com excelentes resultados.

- É interessante comparar o tempo gasto na solução dos dois exemplos pelos diferentes Métodos. A TABELA V.1 apresenta os tempos aproximados empregados na preparação e entrada dos dados e obtenção dos resultados para os exemplos 1 e 2. Para o Método das Diferenças Finitas e do ACI, foi utilizado um micro-computador e para os Métodos restantes utilizou-se os programas SAP IV e LORANE LINEAR implantados no Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ ( que dispõe de um sistema Borroughs 6700). Observou-se que a grande rapidez de processamento obtida no NCE-UFRJ é grandemente perdida no tempo gasto em espera na fila para processamento e na liberação da respectiva listagem. Tendo em vista a grande facilidade na introdução dos dados no micro-computador, onde as correções são feitas em paralelo sem a necessidade da espera de listagens, a vantagem operacional obtida é insuperável, desde que o problema se limite, logicamente, à memória central disponível no micro-computador.

## V.2 - RECOMENDAÇÕES PARA O PROJETO DE RADIERS

Com base no estudo realizado, sugerem-se os seguintes procedimentos de cálculo:

- O cálculo empregando o Método das Diferenças Finitas é o que mostrou resultados mais confiáveis. Os exemplos foram sempre de placas com geometria bastante regular, sem variações de espessuras e ou reentrâncias. O solo foi sempre homogêneo ao longo do

domínio da placa ( sem variações no modulo de reação vertical). Na elaboração do programa descrito no Capítulo III , os testes feitos para comparação com resultados analíticos ( incluindo os exemplos do Capítulo 7 do Livro do Bowles (9) ) apresentaram resultados coincidentes.

- O cálculo empregando o Método dos Elementos Finitos ( elemento retangular de flexão de placas conhecido como R12) apresentou resultados menos razoáveis que o Método das Diferenças Finitas. Este Método conduz a valores razoáveis para os momentos fletores e flechas. Tem a seu favor a vantagem da existência de software desenvolvido para vários sistemas computacionais, tais como SAP IV, LORANE e EASE 2. Aplicando tal Método em conjunto com outros tipos de elementos finitos, pode-se simular por exemplo:

- apoios em estacas
- terrenos heterogeneos
- variação de espessura
- inclusão da superestrutura
- carregamentos dinâmicos e estáticos
- retração e deformação lenta do concreto
- esforços de origem térmica
- forças de protensão

- A utilização do Método da Grelha sobre Base Elástica deve ser feita com bastante critério, pois apesar de apresentar configuração idêntica, os esforços solicitantes não se mostraram compatíveis com os Métodos anteriores. É preferível neste caso calcular a grelha não considerando a rigidez à torção das barras.

- O cálculo empregando o Método da Viga sobre Base Elástica pode ser adotado como um Método aproximado nos casos de radiers regulares, com os pilares possuindo distribuição uniforme na placa e simetria nos valores das cargas transmitidas.

- Os resultados do Método do ACI devem ser encarados com restrição, pois o Método não simula com exatidão os esforços solicitantes na estrutura, especialmente próximo aos bordos.

### V.3 - SUGESTÕES PARA OS DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Pode-se sugerir os seguintes tópicos sequenciais a este trabalho:

- Desenvolvimento de um programa que elabore o cálculo de radiers utilizando o Método das Diferenças Finitas para os casos mais gerais de geometria, condições de contorno, apoios sobre estacas, terrenos heterogêneos ( com diferentes módulos de reação vertical) e diferentes espessuras da placa.

- Análise do comportamento de uma placa sobre base elástica, com a utilização de uma série de tipos de elementos finitos seguida de análise comparativa dos resultados gerados.

- Análise de Métodos de cálculo para o projeto de fundações em radiers, utilizando o modelo de Filonenko-Borodich para o solo, conforme citado por Selvadurai (12) . Este modelo simula a interação entre as várias molas utilizadas no modelo de Winkler , conectando-as através de uma membrana elástica (ver FIG.V.1). Considerando o equilíbrio membrana X mola, obtêm-se a pressão  $q$  em termos da deformação  $w$  da placa:

$$q(x,y) = K_0 w(x,y) - T \nabla^2 w(x,y)$$

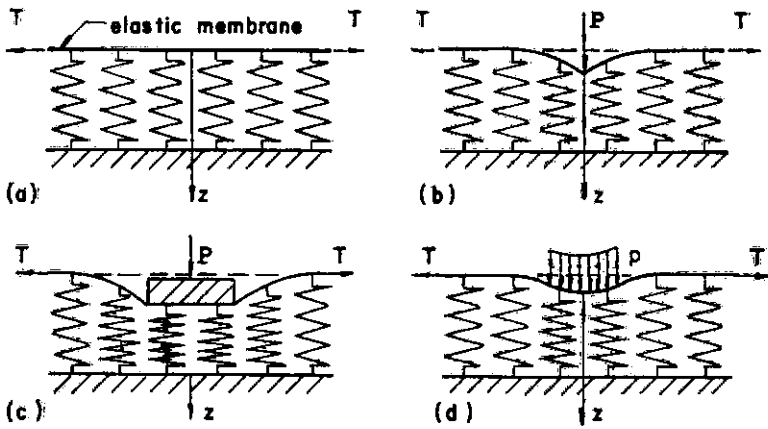
onde  $K_0$  é o modulo de reação vertical do terreno e  $\tau$  a tensão constante atuante na membrana.

Neste caso tem-se duas constantes elásticas para caracterizar o modelo adotado para o solo.

- Análise do comportamento de uma placa espessa sobre base elástica, utilizando-se os métodos da presente tese.

	EXEMPLO 1					EXEMPLO 2				
	MEF	MDF	ACI	GRELHA	VISA	MEF	MDF	ACI	GRELHA	VISA
PREPARAÇÃO DOS DADOS	6	6	6	8	5	8	8	8	10	7
INPUT DOS DADOS ( INCLUSIVE CORREÇÕES )	3	1	1	4	3	4	1	1	5	4
TEMPO DE PROCESSAMENTO ( OU AGUARDANDO A SAÍDA DOS RESULTADOS )	3	2	3	4	2	4	2	3	5	4
TEMPO TOTAL	12	9	10	16	10	16	11	12	20	15

**TABELA .V. 1 - TEMPO EM HORAS GASTO  
NA ELABORAÇÃO E PROCESSAMENTO  
COMPUTACIONAL DOS EXEMPLOS 1 e 2**



Surface displacements of the Filonko-Borodich model. (a) Basic model, (b) concentrated load, (c) rigid load, (d) uniform flexible load.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1 ) - TIMOSHENKO, STEPHEN e KRIEGER, S. WOINOWSKI, Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill International , New York, 2<sup>a</sup> edição, 1959.
- (2 ) - TABORDA, Notas de Aula de Teoria das Placas, Coppe/UFRJ, 1983.
- (3 ) - SORIANO, HUMBERTO LIMA, Notas de Aula de Técnicas Computacionais em Análise Estrutural, Coppe/UFRJ, 1983.
- (4 ) - POULOS, H. G. e FAVIS, E. H., Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics, John Wiley and Sons Inc. 1<sup>a</sup> edição, 1973.
- (5 ) - REIMBERT, MARCEL e REIMBERT, ANDRÉ, Méthode Pratique de Calcul des Planchers Dalles et des Plaques, Editions Eyrolles, Paris, 1<sup>a</sup> edição, 1971.
- (6 ) - MIRANDA, CONSTANCIO e NAIR, KESHAVAN, "Beams on Elastic Foundation", ASCE - Journal of the Structural Division, abril de 1966.
- (7 ) - TING, BING - YUAN, "Finite Beams on Elastic Foundation with Restraints", ASCE - Journal of the Structural Division, p.p. 611-621 - março de 1982
- (8 ) - VESIC, A. S., Dalles sur Appui Elastique et L' Hypothèse de Winkler, Symposium IESA, Rio de Janeiro - maio de 1980.
- (9 ) - BOWLES, JOSEPH E., Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering, Mc Graw-Hill, New York , 1<sup>a</sup> edição, 1974.

- (10) - BOWLES, JOSEPH E., Foundation Analysis and Design, Mc Graw-Hill, New York, 1<sup>a</sup> edição, 1968.
- (11) - SCOTT, RONALD F., Foundation Analysis, Prentice - Hall Inc., Londres, 1<sup>a</sup> edição, 1981.
- (12) - SELVADURAI, A.P.S., Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Elsevier Scientific Publishing Company, Amisterdam, 1<sup>a</sup> edição, 1979.
- (13) - BEYER, KURT, Estática del Hormigon Armado, Tomo II, Libreria y Editorial Nigor, Buenos Aires, 1959.
- (14) - URFJ, Manual do Programa Lorane Linear, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro.
- (15) - BATHE, KLAUSS-JURGEN, WILSON, EDWARD L. e PETERSON , FRED E., A Structutal Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Sistems-SAP IV , Junho 1973.
- (16) - PUC-RJ, Curso de Cálculo Numérico, Departamento de Informática, Rio de Janeiro, Setembro de 1970.
- (17) - SUSSEKIND, JOSÉ CARLOS, Curso de Análise Estrutural , VOL.2, Editora Globo, 2<sup>a</sup> edição, Porto Alegre , 1977.
- (18) - HETÉNYI, M. , Beams on Elastic Foundations, Ann Arbor : The University of Michigan Press, 1<sup>a</sup> edição, Michigan, 1946.
- (19) - LOPES, FRANCISCO DE REZENDE, Notas de Aula de Fundações, Coppe/UFRJ, 1983.

- (20) - ACI, COMMITTEE 436, " Suggested Design Procedures for Combined Footings and Mats", Journal of the American Concrete Institute, 1966.
- (21) - IONESCU, IULIAN, " Calculation of Bays of Lock Foundation Mats", International Symposium on Soil Structure Interaction, Departament of Civil Engineering, University of Roorkee - India, Janeiro de 1977.
- (22) - ABNT - Norma para o Cálculo e Execução de Estruturas de Concreto - NB-1, Rio de Janeiro, 1977.
- (23) - DE MELO, CARLOS EMANUEL e GUADALUPE, LUCIANA TOSTES , " Análise Comparativa de Quatro Métodos de Cálculo de Radiers", Solo e Rocha - Associação Brasileira de Mecânica dos Solos, VOL.4, p.p. 3-22, Agosto 1981.
- (24) - ROCHEY, K. C. e EVANS, H. R. e GRIFFITHS, D. W. e NETHERCOI, D. A., The Finite Element Method, 2<sup>a</sup> edição, Londres.
- (25) - YARDANYAN, V. V., " Theory of Shells and Plates", Academy of Sciences of the Armenian, USSR.
- (26) - BEYER, K., Die Statik in Stahlbetonbau, Springer Verlag, Berlim, 1956.
- (27) - KANY, M., Berechnung Von Flächengründungen, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlim, 1959.
- (28) - GRASSHOF, H., Das Steife Bauwerk auf Nachgiebigem Untergrund, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlim, 1966.

## APÊNDICE A

### FUNDAÇÕES EM RADIER POR DIFERENÇAS FINITAS

Apresenta-se a seguir o fluxograma básico e a respectiva listagem do programa em linguagem BASIC destinado ao cálculo de placas de espessuras constantes sobre base elástica de módulo  $K_0$  com os bordos livres e submetidas aos carregamentos gerados pelo peso próprio, cargas distribuídas uniformemente e cargas concentradas.

A capacidade do programa é limitada a:

- computador da linha PC com 60 K de memória RAM: 252 elementos de placa totalizando 285 pontos nodais.

- computador da linha APPLE com 48 K de memória RAM: 121 elementos de placa totalizando 144 pontos nodais.

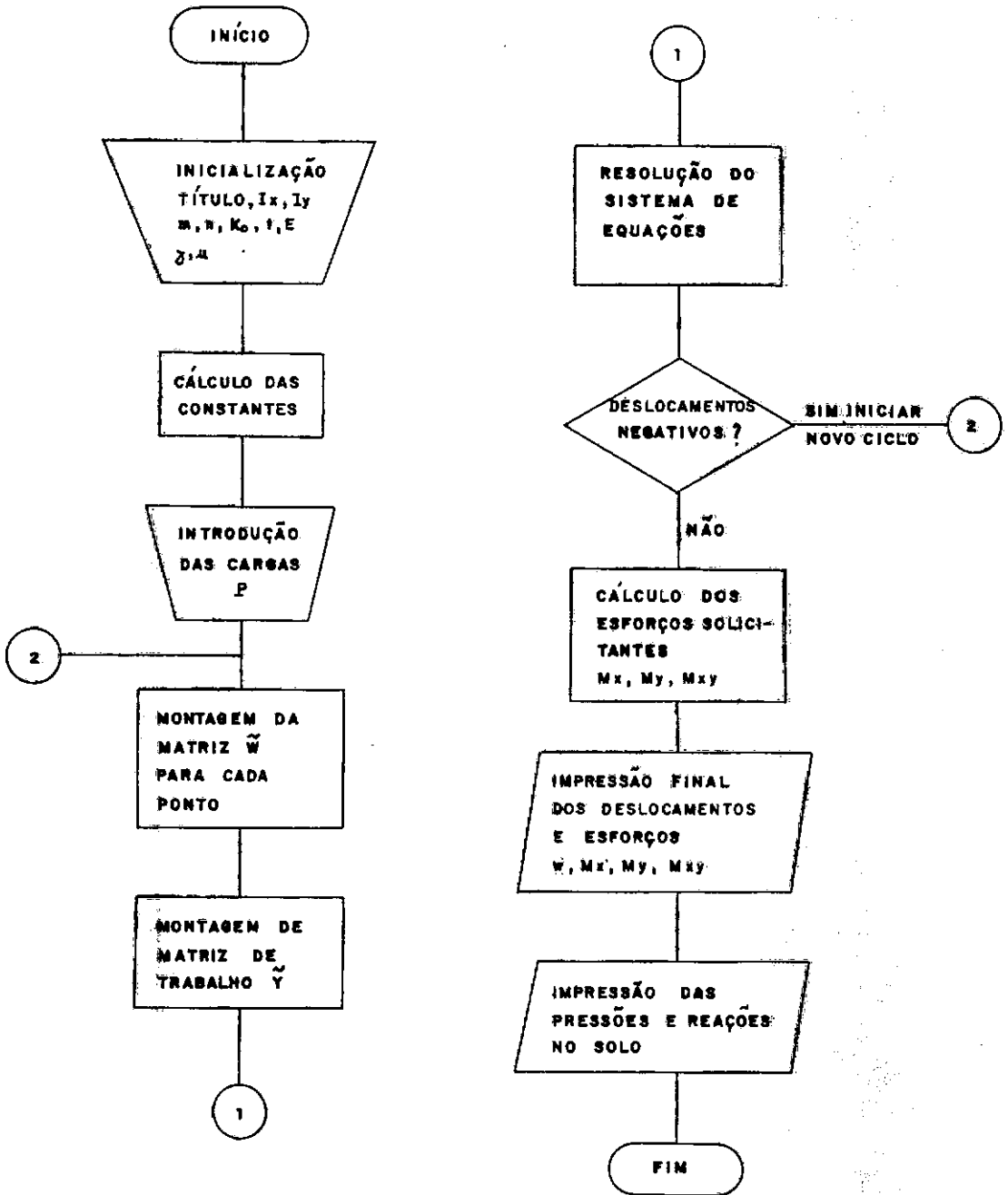


FIG. A.1 - FLUXOGRAMA BÁSICO

JLISR

```

10  REM -FUNDACOES EM RADIER POR DIFERENCAS FINITAS
11  PR# 1
12  PRINT "FUNDACOES EM RADIER - DIFERENCAS FINITAS"
13  PRINT "Mauro Jorge da Costa Santos -CREA 23947-0"
14  PRINT "VERSÃO 2 -dezembro 1986"
15  PR# 0
16  GOSUB 790
20  DIM W(12,12),Y(144,26),Z(27),X(144)
100  REM DADOS DE ENTRADA
110  INPUT "TITULO?";A$
120  INPUT "VÃO NA DIREÇÃO X(metros)?";LX
125  IF LX < = 0. THEN 120
130  INPUT "VÃO NA DIREÇÃO Y(metros)?";LY
135  IF LY < = 0. THEN 130
140  INPUT "DIVISÕES NA DIREÇÃO X(>=4 <=11)?";M
150  IF M < 4 OR M > 11 THEN 140
160  INPUT "DIVISÕES NA DIREÇÃO Y(>=4 <=11)?";N
170  IF N < 4 OR N > 11 THEN 160
180  INPUT "MÓDULO DE REACÃO VERTICAL (t/m3)?";SM
185  IF SM < 0. THEN 180
190  INPUT "ESPESSURA DO RADIER(metros)?";T
195  IF T = < 0. THEN 190
200  INPUT "MÓDULO DE ELASTICIDADE(t/m2)?";E
201  IF E < = 0. THEN 200
210  INPUT "PESO ESPECÍFICO(t/m3)?";G
215  IF G < 0. THEN 210
220  INPUT "COEFICIENTE POISSON?";XM
221  IF XM < 0. THEN 220
225  PR# 1
226  PRINT "TITULO=";A$
227  PRINT "VÃO NA DIREÇÃO X=";LX;"metros"
228  PRINT "VÃO NA DIREÇÃO Y=";LY;"metros"
229  PRINT "DIVISÕES NA DIREÇÃO X=";M
230  PRINT "DIVISÕES NA DIREÇÃO Y=";N
231  PRINT "MÓDULO DE REACÃO VERTICAL=";SM;"t/m3"
232  PRINT "ESPESSURA DO RADIER=";T;"metros"
233  PRINT "MÓDULO DE ELASTICIDADE=";E;"t/m2"
234  PRINT "PESO ESPECÍFICO=";G;"t/m3"
235  PRINT "COEFICIENTE DE POISSON=";XM
236  PR# 0
400  REM CÁLCULO DAS CONSTANTES
410  H = LY / N
420  R = LX / (M * H)
430  D = E * T ^ 3 / (12 * (1 - XM ^ 2))
440  DD = H ^ 2 / (D * R)
441  W = G * T * H ^ 2 * R
442  K = (M + 1) * (N + 1)
443  NN = 0

```

```

444 LD = 0
445 C = D / ((R * H) ^ 2)
446 CC = XM * D / H ^ 2
447 F = D / H ^ 2
448 FF = XM * C
450 U1 = 1 - XM
460 U2 = 1 - XM ^ 2
470 R2 = R ^ 2
480 R4 = R ^ 4
481 ZZ = (D * (1 - XM)) / (4 * R * H ^ 2)
485 REM -FOR I= 1 TO 27:Z(I) = I: NEXT I: GOTO 789
490 Z(1) = (.5 * U2) / R4
500 Z(2) = (- 1. * U2 - 2 * U1 * R2) / R4
510 Z(3) = (.5 * U2 + 2 * U1 * R2 + .5 * U2 * R4) / R4
520 Z(4) = (2 * U1 * R2) / R4
530 Z(5) = (- 2 * U1 * R2 - U2 * R4) / R4
540 Z(6) = (.5 * U2 * R4) / R4
550 Z(7) = (- 2 * U2 - 2 * U1 * R2) / R4
560 Z(8) = (2.5 * U2 + 4 * U1 * R2 + R4) / R4
570 Z(9) = ((2 - XM) * R2) / R4
580 Z(10) = R4 / R4
590 Z(11) = (3 * U2 + 4 * U1 * R2 + R4) / R4
600 Z(12) = (- 2 * (2 - XM) * R2 - 2 * R4) / R4
610 Z(13) = (- 2 - 2 * (2 - XM) * R2) / R4
620 Z(14) = (1 + 4 * U1 * R2 + 2.5 * U2 * R4) / R4
630 Z(15) = (- 4 * R2 - 4 * R4) / R4
640 Z(16) = (- 4 - 4 * R2) / R4
650 Z(17) = (6 + 8 * R2 + 5 * R4) / R4
660 Z(18) = (2 * R2) / R4
670 Z(19) = (- 2 * U1 * R2 - 2 * U2 * R4) / R4
680 Z(20) = (5 + 8 * R2 + 6 * R4) / R4
690 Z(21) = (5 + 8 * R2 + 5 * R4) / R4
700 Z(22) = (6 + 8 * R2 + 6 * R4) / R4
710 Z(23) = (1 + 4 * U1 * R2 + 3 * U2 * R4) / R4
720 Z(24) = SM * H ^ 4 / D
730 Z(25) = Z(24) / 4
740 Z(26) = Z(24) / 2
741 Z(27) = 1. / R4
750 REM :PR#1:PRINT H,R,D,DD,W,K,NN,LD,C,CC,F,FF,U1,U2,R2,R4: FOR I = 1
    TO 27: PRINT "PONTO=";I,Z(I): NEXT I: PR# 0
789 GOTO 900
790 REM -SUBROTINA PARA PULAR LINHAS
791 PR# 1
792 PRINT
793 PRINT
794 PR# 0
795 RETURN
800 GOSUB 1000
805 GOSUB 950

```

```

810 GOSUB 1500
820 GOSUB 2500
830 GOSUB 3300
840 GOSUB 3800
850 GOSUB 4300
855 GOSUB 5000
860 GOSUB 4500
900 END
950 REM SUBROTINA PARA TORNAR UNITARIO O VETOR X
955 IF LD > 0 GOTO 990
960 FOR I = 1 TO K
970 X(I) = 1
980 NEXT I
990 RETURN
1000 REM -SUBROTINA CARGAS-ARMAZENADAS NA COLUNA Y(I,2*M+4)
1005 IF LD > 0 GOTO 1290
1010 INPUT "NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS?";NQ
1011 IF NQ < 0 THEN 1010
1020 SP = 0
1040 FOR I = 1 TO K
1050 Y(I,2 * M + 4) = 0
1060 NEXT I
1065 IF NQ = 0 THEN 1111
1070 FOR J = 1 TO NQ
1080 INPUT "NUMERO DO NO, CARGA CONCENTRADA(toneladas-positiva p/baixo)"
      ;I,P
1085 IF I = < K AND I > 0 THEN 1090
1086 PRINT "NUMERO DO NO ERRADO"
1087 GOTO 1080
1090 Y(I,2 * M + 4) = Y(I,2 * M + 4) + P * DD
1100 SP = SP + P
1110 NEXT J
1111 GOSUB 790
1112 PR# 1
1114 PRINT "NO", "CARGA CONCENTRADA(t)"
1115 FOR I = 1 TO K
1116 PRINT I, Y(I,2 * M + 4) / DD
1117 NEXT I
1118 PRINT "CARGA TOTAL=";SP;"toneladas"
1119 GOSUB 790
1120 PR# 1
1121 PRINT "NO", "CARGA DISTRIBUIDA-resultante(t)"
1122 SQ = 0
1130 FOR I = 1 TO N + 1
1140 FOR J = 1 TO M + 1
1150 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
1160 IF (I = 1 OR I = N + 1) AND (J = 1 OR J = M + 1) THEN 1215
1170 IF (I = 1 OR I = N + 1) AND (J > 1 AND J < M + 1) THEN 1250

```

```

1180 IF (I > 1 AND I < N + 1) AND (J = 1 OR J = M + 1) THEN 1250
1190 Y(I1,2 * M + 4) = Y(I1,2 * M + 4) + W * DD
1191 PRINT I1,W
1200 SQ = SQ + W.
1210 GOTO 1270
1215 Y(I1,2 * M + 4) = Y(I1,2 * M + 4) + (W / 4) * DD
1216 PRINT I1,W / 4
1220 SQ = SQ + W / 4
1240 GOTO 1270
1250 Y(I1,2 * M + 4) = Y(I1,2 * M + 4) + (W / 2) * DD
1251 PRINT I1,W / 2
1260 SQ = SQ + W / 2
1270 NEXT J
1280 NEXT I
1281 PRINT "CARGA TOTAL PESO PROPRIO=";SQ;"toneladas"
1282 PR# 0
1290 RETURN
1500 REM -MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DE DEFORMACAO
1510 LL = 1
1520 FOR I = 1 TO N + 1
1530 FOR J = 1 TO M + 1
1540 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
1550 GOSUB 2000
1560 KI = 1
1570 KJ = 1
1580 IF (LL > = 16 AND LL < = 25) THEN KI = - 1
1590 IF (LL = 4 OR LL = 5 OR LL = 9 OR LL = 10 OR LL = 14) THEN KJ = -
1
1591 IF (LL = 15 OR LL = 19 OR LL = 20 OR LL = 24 OR LL = 25) THEN KJ =
- 1
1592 ON LL GOTO 1595,1603,1613,1603,1595,1625,1636,1649,1636,1625,1664,
1676,1690,1676,1664,1625,1636,1649,1636,1625,1595,1603,1613,1603,15
95
1595 W(I,J) = Z(3) + Z(25)
1596 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I,J) = Z(3)
1597 W(I,J + KJ) = Z(2)
1598 W(I,J + 2 * KJ) = Z(1)
1599 W(I + KI,J) = Z(5)
1600 W(I + KI,J + KJ) = Z(4)
1601 W(I + 2 * KI,J) = Z(6)
1602 GOTO 1710
1603 W(I,J) = Z(8) + Z(26)
1604 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I,J) = Z(8)
1605 W(I,J + 2 * KJ) = Z(1)
1606 W(I,J + KJ) = Z(7)
1607 W(I,J - KJ) = Z(2)
1608 W(I + KI,J) = Z(12)
1609 W(I + KI,J + 1) = Z(9)

```

```

1610 W(I + KI, J - 1) = Z(9)
1611 W(I + 2 * KI, J) = Z(10)
1612 GOTO 1710
1613 W(I, J) = Z(11) + Z(26)
1614 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(11)
1615 W(I, J - 1) = Z(7)
1616 W(I, J + 1) = Z(7)
1617 W(I, J - 2) = Z(1)
1618 W(I, J + 2) = Z(1)
1619 W(I + KI, J) = Z(12)
1620 W(I + KI, J - 1) = Z(9)
1621 W(I + KI, J + 1) = Z(9)
1622 W(I + 2 * KI, J) = Z(10)
1623 IF (J < M - 1) THEN LL = LL - 1
1624 GOTO 1710
1625 W(I, J) = Z(14) + Z(26)
1626 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(14)
1627 W(I - KI, J) = Z(5)
1628 W(I + KI, J) = Z(19)
1629 W(I + 2 * KI, J) = Z(6)
1630 W(I, J + KJ) = Z(13)
1631 W(I - 1, J + KJ) = Z(9)
1632 W(I + 1, J + KJ) = Z(9)
1633 W(I, J + 2 * KJ) = Z(27)
1635 GOTO 1710
1636 W(I, J) = Z(21) + Z(24)
1637 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(21)
1638 W(I, J + KJ) = Z(16)
1639 W(I, J + 2 * KJ) = Z(27)
1640 W(I, J - KJ) = Z(13)
1641 W(I - KI, J) = Z(12)
1642 W(I - KI, J + KJ) = Z(9)
1643 W(I - KI, J - KJ) = Z(4)
1644 W(I + KI, J) = Z(15)
1645 W(I + KI, J + KJ) = Z(19)
1646 W(I + KI, J - KJ) = Z(9)
1647 W(I + 2 * KI, J) = Z(10)
1648 GOTO 1710
1649 W(I, J) = Z(17) + Z(24)
1650 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(17)
1651 W(I, J - 1) = Z(16)
1652 W(I, J + 1) = Z(16)
1653 W(I, J - 2) = Z(27)
1654 W(I, J + 2) = Z(27)
1655 W(I - KI, J) = Z(12)
1656 W(I - KI, J + 1) = Z(9)
1657 W(I - KI, J - 1) = Z(9)
1658 W(I + KI, J + 1) = Z(18)

```

```

1659 W(I + KI, J - 1) = Z(18)
1660 W(I + 2 * KI, J) = Z(10)
1661 W(I + KI, J) = Z(15)
1662 IF (J < M - 1) THEN LL = LL - 1
1663 GOTO 1710
1664 W(I, J) = Z(23) + Z(26)
1665 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(23)
1666 W(I, J + KJ) = Z(13)
1667 W(I, J + 2 * KJ) = Z(27)
1668 W(I - 1, J) = Z(19)
1669 W(I + 1, J) = Z(19)
1670 W(I - 1, J + KJ) = Z(9)
1671 W(I + 1, J + KJ) = Z(9)
1672 W(I - 2, J) = Z(6)
1673 W(I + 2, J) = Z(6)
1674 IF (J = M + 1 AND I < N - 1) THEN LL = 10
1675 GOTO 1710
1676 W(I, J) = Z(20) + Z(24)
1677 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(20)
1678 W(I, J + KJ) = Z(16)
1679 W(I, J + 2 * KJ) = Z(27)
1680 W(I, J - KJ) = Z(13)
1681 W(I - 1, J + KJ) = Z(18)
1682 W(I + 1, J + KJ) = Z(18)
1683 W(I + 1, J) = Z(15)
1684 W(I - 1, J) = Z(15)
1685 W(I - 2, J) = Z(10)
1686 W(I + 2, J) = Z(10)
1687 W(I - 1, J - KJ) = Z(9)
1688 W(I + 1, J - KJ) = Z(9)
1689 GOTO 1710
1690 W(I, J) = Z(22) + Z(24)
1691 IF (X(I1) < = 0) THEN W(I, J) = Z(22)
1692 W(I, J - 1) = Z(16)
1693 W(I, J + 1) = Z(16)
1694 W(I, J + 2) = Z(27)
1695 W(I, J - 2) = Z(27)
1696 W(I + 1, J - 1) = Z(18)
1697 W(I - 1, J + 1) = Z(18)
1698 W(I + 1, J + 1) = Z(18)
1699 W(I - 1, J - 1) = Z(18)
1700 W(I - 2, J) = Z(10)
1701 W(I + 2, J) = Z(10)
1702 W(I - 1, J) = Z(15)
1703 W(I + 1, J) = Z(15)
1704 IF (J < M - 1) THEN LL = LL - 1
1710 GOSUB 2100
1720 LL = LL + 1
1730 NEXT J
1740 NEXT I
1745 REM -PR#1:FOR IJ = 1 TO K: FOR JI = 1 TO 2 * M + 4: PRINT "Y=";IJ:
",";JI,Y(IJ,JI): NEXT JI: NEXT IJ: PR# 0

```

```

1750 RETURN
2000 REM -SUBROTINA PARA ZERAR A MATRIZ W
2010 FOR IJ = 1 TO N + 1
2020 FOR JI = 1 TO M + 1
2030 W(IJ,JI) = 0
2040 NEXT JI
2050 NEXT IJ
2060 RETURN
2100 REM -SUBROTINA PARA GERAR A MATRIZ Y DO SISTEMA DE EQUACOES
2101 REM -PR#1:FOR IJ = 1 TO N + 1: FOR JI = 1 TO M + 1: PRINT "W=";IJ;
    ", "IJ, W(IJ,JI), LL;KJ;KY: NEXT JI: NEXT IJ: PR# 0: GOSUB 790
2110 II = I
2115 JJ = J
2120 FOR JI = 1 TO 2 * M + 3
2125 IF II > N + 1 GOTO 2160
2130 Y(II,JI) = W(II, JJ)
2135 IF JJ < M + 1 GOTO 2150
2140 JJ = 0
2145 II = II + 1
2150 JJ = JJ + 1
2155 GOTO 2170
2160 Y(II,JI) = 0
2170 NEXT JI
2180 RETURN
2500 REM -SUBROTINA PARA A RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES-METODO DE
    GAUSS - ANALISE ESTRUTURAS RETICULADAS HUMBERTO SORIANO
2501 REM -GRAVANDO OS TERMOS DE CARGA NA MATRIZ W
2504 FOR I = 1 TO N + 1
2505 FOR J = 1 TO M + 1
2506 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
2507 W(I, J) = Y(I1, 2 * M + 4)
2508 NEXT J
2509 NEXT I
2520 REM -FASE DE TRIANGULARIZACAO
2530 FOR L = 1 TO K - 1
2540 I2 = L + 2 * M + 2
2550 IF I2 > K THEN I2 = K
2560 REM -TESTE DE ESTABILIDADE NUMERICA
2570 IF ABS (Y(L,1)) > 0. GOTO 2620
2580 PR# 1
2590 PRINT "SUBROTINA NAO ADEQUADA PARA A RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUAC
    DES"
2600 PR# 0
2610 STOP
2620 FOR I = L + 1 TO 12
2630 AU = Y(L, I - L + 1) / Y(L, 1)
2640 I3 = K - I + 1
2650 I4 = L + 2 * M + 3 - I

```

```

2660 IF I4 > I3 THEN I4 = I3
2670 FOR J = 1 TO I4
2680 Y(I,J) = Y(I,J) - AU * Y(L,J - L + 1)
2690 NEXT J
2700 REM -FASE DE SUBSTITUICAO
2710 Y(I,2 * M + 4) = Y(I,2 * M + 4) - AU * Y(L,2 * M + 4)
2740 NEXT I
2750 NEXT L
2755 REM -TESTE DA SINGULARIEDADE DO SISTEMA
2756 IF ABS (Y(K,1)) < = 0. GOTO 2580
2759 REM -PR#1:FOR IJ = 1 TO K: FOR JI = 1 TO 2 * M + 4: PRINT "Y=";IJ;
", ";JI,Y(IJ,JI): NEXT JI: NEXT IJ: PR# 0
2760 REM -FASE DE RETROSUBSTITUICAO
2770 X(K) = Y(K,2 * M + 4) / Y(K,1)
2780 FOR I2 = 1 TO K - 1
2790 I = K - I2
2800 AU = Y(I,2 * M + 4)
2810 I3 = I + 2 * M + 2
2820 IF I3 > K THEN I3 = K
2830 FOR KK = I + 1 TO I3
2840 AU = AU - Y(I,KK - I + 1) * X(KK)
2860 X(I) = AU / Y(I,1)
2865 NEXT KK
2870 NEXT I2
3020 RETURN
3300 REM -SUBROTINA PARA VERIFICAR AS DEFORMACOES NODAIS NEGATIVAS E IN
ICIAR NOVA INTERACAO
3305 LL = 0
3310 FOR I = 1 TO K
3320 IF X(I) > 0 GOTO 3340
3330 LL = LL + 1
3340 NEXT I
3350 IF LL = NN GOTO 3410
3355 GOSUB 790
3356 PR# 1
3360 PRINT "PONTO", "DEFORMACAO (m) - INTERACAO=";LO + 1
3370 FOR I = 1 TO K
3380 PRINT I,X(I)
3390 NEXT I
3395 LO = LO + 1
3396 NN = LL
3397 GOSUB 3600
3400 GOTO 800
3410 RETURN
3600 REM -SUBROTINA PARA REGRAVAR OS TERMOS DE CARGA NA MATRIZ Y(I,2*M
+4)
3620 FOR I = 1 TO N + 1

```

```

3630 FOR J = 1 TO M + 1
3635 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
3640 Y(I1, 2 * M + 4) = W(I, J)
3650 NEXT J
3660 NEXT I
3680 RETURN
3800 REM -SUBROTINA PARA CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES-ARMAZENADOS NAS
      COLUNAS Y(I, 1) E Y(I, 2)
3810 FOR I = 1 TO N + 1
3820 FOR J = 1 TO M + 1
3830 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
3840 W(I, J) = X(I1)
3850 NEXT J
3860 NEXT I
3870 FOR J = 1 TO N + 1
3880 FOR KK = 1 TO M + 1
3890 I1 = (J - 1) * (M + 1) + KK
3900 IF J = 1 OR J = N + 1 GOTO 3920
3910 IF J > 1 GOTO 4030
3920 IF KK = 1 OR KK = M + 1 GOTO 4000
3930 IF J = N + 1 GOTO 3970
3940 Y(I1, 1) = C * (W(J, KK - 1) - 2 * W(J, KK) + W(J, KK + 1)) + CC * (W(J
      + 2, KK) - 2 * W(J + 1, KK) + W(J, KK))
3950 Y(I1, 2) = 0
3960 GOTO 4130
3970 Y(I1, 1) = C * (W(J, KK - 1) - 2 * W(J, KK) + W(J, KK + 1)) + CC * (W(J
      - 2, KK) - 2 * W(J - 1, KK) + W(J, KK))
3980 Y(I1, 2) = 0
3990 GOTO 4130
4000 Y(I1, 1) = 0
4010 Y(I1, 2) = 0
4020 GOTO 4130
4030 IF KK = 1 GOTO 4080
4040 IF KK = M + 1 GOTO 4110
4050 Y(I1, 1) = C * (W(J, KK - 1) - 2 * W(J, KK) + W(J, KK + 1)) + CC * (W(J
      - 1, KK) - 2 * W(J, KK) + W(J + 1, KK))
4060 Y(I1, 2) = F * (W(J - 1, KK) - 2 * W(J, KK) + W(J + 1, KK)) + FF * (W(J
      , KK - 1) - 2 * W(J, KK) + W(J, KK + 1))
4070 GOTO 4130
4080 Y(I1, 1) = 0
4090 Y(I1, 2) = F * (W(J - 1, KK) - 2 * W(J, KK) + W(J + 1, KK)) + FF * (W(J
      , KK + 2) - 2 * W(J, KK + 1) + W(J, KK))
4100 GOTO 4130
4110 Y(I1, 1) = 0
4120 Y(I1, 2) = F * (W(J - 1, KK) - 2 * W(J, KK) + W(J + 1, KK)) + FF * (W(J
      , KK - 2) - 2 * W(J, KK - 1) + W(J, KK))
4130 NEXT KK

```

```

4140 NEXT J
4150 RETURN
4300 REM -SUBROTINA PARA CALCULO DAS REACOES E PRESSOES DO SOLD-ARMAZEN
      ADAS NAS COLUNAS Y(I,3),Y(I,4)
4310 SR = 0
4320 FOR I = 1 TO N + 1
4325 FOR J = 1 TO M + 1
4326 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
4330 LL = 1.
4340 Y(I1,4) = X(I1) * SM
4345 IF X(I1) < = 0. THEN Y(I1,4) = 0.
4350 IF (I = 1 OR I = N + 1) THEN LL = .50 * LL
4360 IF (J = 1 OR J = M + 1) THEN LL = .5 * LL
4370 Y(I1,3) = LL * Y(I1,4) * R * H ^ 2
4380 SR = SR + Y(I1,3)
4385 NEXT J
4390 NEXT I
4400 RETURN
4500 REM -SUBROTINA PARA IMPRESSAO DOS RESULTADOS
4501 GOSUB 790
4502 PR# 1
4600 PRINT "PONTO", "DEFORMACAO(metros)"
4700 FOR I = 1 TO K
4710 PRINT I, X(I)
4720 NEXT I
4730 GOSUB 790
4740 PR# 1
4745 PRINT TAB( 1); "PONTO"; TAB( 11); "MXX(mt)"; TAB( 27); "MYX(mt)"
4750 FOR I = 1 TO K
4760 PRINT TAB( 1); I; TAB( 11); - Y(I,1); TAB( 27); - Y(I,2)
4770 NEXT I
4775 GOSUB 790
4776 PR# 1
4777 PRINT TAB( 1); "PONTO"; TAB( 11); "MXY(mt)"
4778 FOR I = 1 TO K
4779 PRINT TAB( 1); I; TAB( 11); Y(I,5)
4780 NEXT I
4781 GOSUB 790
4782 PR# 1
4784 PRINT TAB( 1); "PONTO"; TAB( 11); "PRESSAO(t/m2)"; TAB( 31); "REACAO
      (t)"
4785 FOR I = 1 TO K
4790 PRINT TAB( 1); I; TAB( 11); Y(I,4); TAB( 31); Y(I,3)
4795 NEXT I
4800 PRINT "REACAO TOTAL DO SOLD="; SR; "toneladas"
4810 PR# 0
4820 RETURN
5000 REM - SUBROTINA PARA CALCULO DOS MOMENTOS TORSORES -ARMAZENADOS

```

NA COLUNA Y(I,S)

```
5010 FOR I = 1 TO N + 1
5020 FOR J = 1 TO M + 1
5030 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
5040 IJ = 0
5050 JI = 0
5060 IF I = 1 THEN IJ = 1
5070 IF I = N + 1 THEN IJ = - 1
5080 IF J = 1 THEN JI = 1
5090 IF J = M + 1 THEN JI = - 1
5100 Y(I1,S) = ZZ * (W(I - 1 + IJ,J - 1 + JI) - W(I - 1 + IJ,J + 1 + JI)
    - W(I + 1 + IJ,J - 1 + JI) + W(I + 1 + IJ,J + 1 + JI))
5110 NEXT J
5120 NEXT I
5130 RETURN
```

APÊNDICE BFUNDAÇÕES EM RADIER PELO MÉTODO DO ACI (20)

A listagem em linguagem BASIC e o fluxograma básico do programa elaborados para os cálculos efetuados no Capítulo IV são apresentados a seguir. O programa é destinado ao cálculo de radier de espessura constante sobre base elástica de módulo  $K_0$  e submetida a ação de cargas concentradas. As condições de contorno de bordo livre são corrigidos por uma sub rotina específica.

A capacidade do programa é limitado a:

- computador de linha APPLE com 48 K de memória RAM: 529 pontos de cálculo.

O programa também permite o cálculo para cargas, distribuídas em toda a extensão da placa.

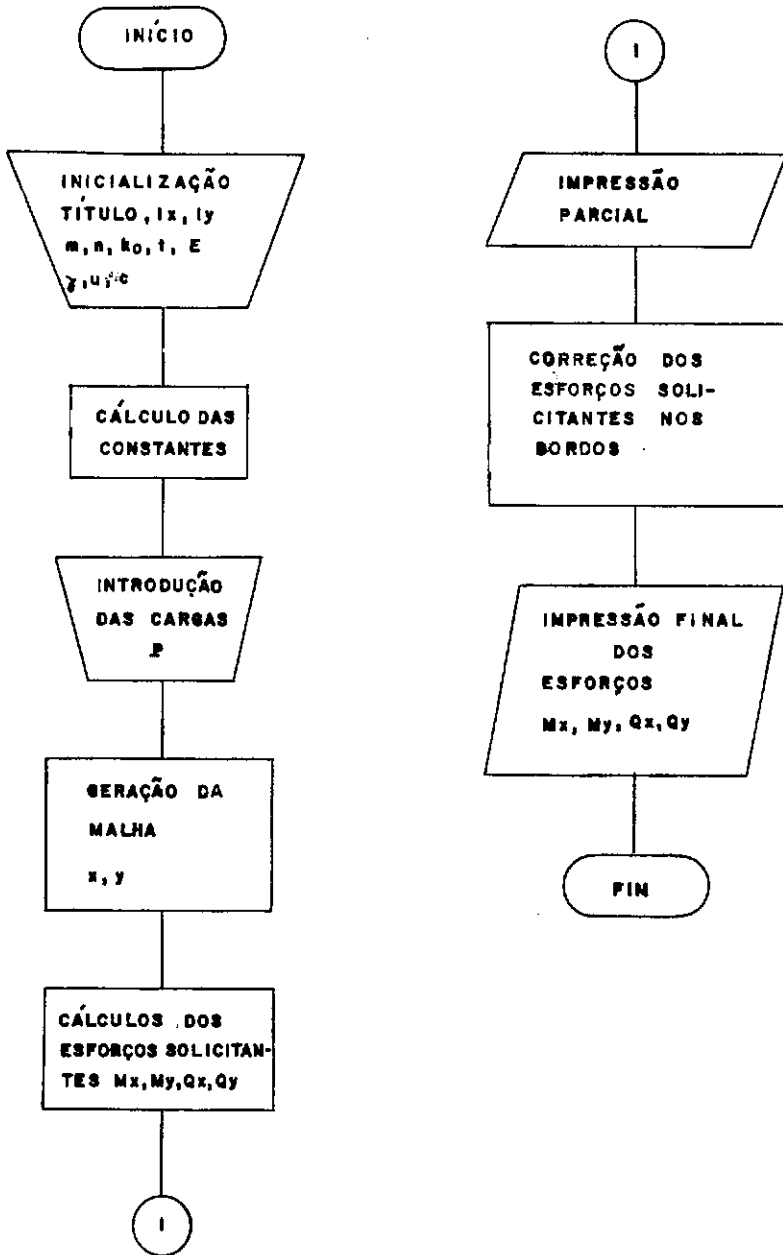


FIG.A.2 - FLUXOGRAMA BÁSICO

## LIST

```

100 REM - FUNDACOES EM RADIER PELO METODO DO ACI
110 PR# 1
120 PRINT "FUNDACOES EM RADIER - METODO ACI"
130 PRINT "Mauro Jorge da Costa Santos -CREA 23947-D"
140 PRINT "VERSAO 1 - dezembro 1984"
150 PR# 0
160 GOSUB 1000
170 DIM Y(529,7)
180 REM - DADOS DE ENTRADA
190 INPUT "TITULO?";A$
200 INPUT "VAO NA DIRECAO X(metros)?";LX
210 IF LX < = 0. THEN 200
220 INPUT "VAO NA DIRECAO Y(metros)?";LY
230 IF LY < = 0. THEN 220
240 INPUT "DIVISOES NA DIRECAO X(<=22)?";M
250 IF M > 22 OR M = < 0 THEN 240
260 INPUT "DIVISOES NA DIRECAO Y(<=22)?";N
270 IF N > 22 OR N < = 0 THEN 260
280 INPUT "MODULO DE REACAO VERTICAL(t/m3)?";SM
290 IF SM = < 0. THEN 280
300 INPUT "ESPESSURA DO RADIER(metros)?";T
310 IF T < = 0. THEN 300
320 INPUT "MODULO DE ELASTICIDADE(t/m2)?";E
330 IF E < = 0. THEN 320
340 INPUT "PESO ESPECIFICO(t/m3)?";G
350 IF G < 0. THEN 340
360 INPUT "COEFICIENTE DE POISSON?";XM
370 IF XM < 0. THEN 360
375 INPUT "RAIO DO FILAR(metros)?";C
376 IF C < = 0. GOTO 375
380 PR# 1
390 PRINT "TITULO=";A$
400 PRINT "VAO NA DIRECAO X=";LX;"metros"
410 PRINT "VAO NA DIRECAO Y=";LY;"metros"
420 PRINT "DIVISOES NA DIRECAO X=";M
430 PRINT "DIVISOES NA DIRECAO Y=";N
440 PRINT "MODULO DE REACAO VERTICAL=";SM;"t/m3"
450 PRINT "ESPESSURA DO RADIER=";T;"metros"
460 PRINT "MODULO DE ELASTICIDADE=";E;"t/m2"
470 PRINT "PESO ESPECIFICO=";G;"t/m3"
480 PRINT "COEFICIENTE DE POISSON=";XM
485 PRINT "RAIO DO FILAR=";C;"metros"
490 PR# 0
500 REM - CALCULO DAS CONSTANTES
510 H = LY / N
520 R = LX / (M * H)
530 D = E * T ^ 3 / (12 * (1 - XM ^ 2))

```

```

540 W = G * I * H ^ 2 * R
550 K = (M + 1) * (N + 1)
560 L = (D / .5M) ^ .25
561 DEF FN A(W) = ( EXP (W) - EXP ( - W) ) / 2
562 DEF FN B(W) = ( EXP (W) + EXP ( - W) ) / 2
563 FF = 0
565 REM -PRINT H,R,D,W,K,L
900 GOSUB 1500
910 GOSUB 2000
920 GOSUB 3000
924 GOSUB 3500
925 GOSUB 4000
930 GOSUB 3500
940 END
1000 REM - SUBROTINA PARA PULAR LINHAS
1010 PR# 1
1020 PRINT
1030 PRINT
1040 PR# 0
1050 RETURN
1500 REM - SUBROTINA CARGAS - ARMAZENADAS NA COLUNA Y(I,3)
1510 INPUT "NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS?";NQ
1520 IF NQ < 0 THEN 1510
1530 SP = 0.
1540 FOR I = 1 TO K
1550 Y(I,3) = 0.
1560 NEXT I
1570 IF NQ = 0 THEN 1660
1580 FOR J = 1 TO NQ
1585 PRINT "AS CARGAS CONCENTRADAS NAO PODEM ATUAR NOS BORDOS DO RADIER
"
1590 INPUT "NUMERO NO,CARGA CONCENTRADA(ton,positiva para baixo)?";I,P
1600 IF I < = K AND I > 0 THEN 1630
1610 PRINT "NUMERO DO NO ERRADO"
1620 GOTO 1590
1630 Y(I,3) = Y(I,3) + P
1640 SP = SP + P
1650 NEXT J
1660 GOSUB 1000
1670 PR# 1
1680 PRINT "NO","CARGA CONCENTRADA(t)"
1690 FOR I = 1 TO K
1700 PRINT I,Y(I,3)
1710 NEXT I
1720 PRINT "CARGA TOTAL=";SP;"toneladas
1725 IF G = 0. GOTO 1910
1730 GOSUB 1000
1740 PR# 1
1750 PRINT "NO","CARGA DISTRIBUIDA-resultante(t)"

```

```

1760 SQ = 0.
1770 FOR I = 1 TO N + 1
1780 FOR J = 1 TO M + 1
1790 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
1800 IJ = 1.
1810 JI = 1
1820 IF J = 1 OR J = M + 1 THEN JI = .5
1830 IF I = 1 OR I = N + 1 THEN IJ = .5
1850 PRINT I1,W * IJ * JI
1860 SQ = SQ + W * IJ * JI
1865 Y(I1,3) = Y(I1,3) + W * IJ * JI
1870 NEXT J
1880 NEXT I
1890 PRINT "CARGA TOTAL PESO PROPRIO=";SQ;"toneladas"
1900 PR# 0
1910 RETURN
2000 REM - SUBROTINA PARA CALCULAR AS COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS
2010 FOR I = 1 TO N + 1
2020 FOR J = 1 TO M + 1
2030 X = (J - 1) * R * H
2040 Y = LY - (I - 1) * H
2050 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
2060 Y(I1,1) = X
2070 Y(I1,2) = Y
2080 NEXT J
2090 NEXT I
2100 RETURN
3000 REM - SUBROTINA PARA CALCULO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES MXX,MYX,
QXZ,QYZ - ARMAZENADOS NAS COLUNAS Y(I,4),Y(I,5),Y(I,6),Y(I,7)
3010 FOR I = 1 TO K
3020 Y(I,4) = 0.
3030 Y(I,5) = 0.
3040 Y(I,6) = 0.
3044 Y(I,7) = 0.
3045 REM -GDSUB 1000: PR# 1: PRINT Y(I,1),Y(I,2),Y(I,3): PR# 0
3050 NEXT I
3060 FOR II = 1 TO K
3065 PR# 0: PRINT II
3066 IF Y(II,3) = 0. GOTO 3420
3070 FOR I = 1 TO N + 1
3080 FOR J = 1 TO M + 1
3090 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
3095 IF II = I1 GOTO 3330
3100 RR = ((Y(I1,1) - Y(II,1)) ^ 2 + (Y(I1,2) - Y(II,2)) ^ 2) ^ .5
3105 IF Y(I1,1) = Y(II,1) GOTO 3125
3110 TA = ABS ((Y(I1,2) - Y(II,2)) / (Y(I1,1) - Y(II,1)))
3120 A = ATN (TA)
3124 GOTO 3140
3125 A = 3.1415926535897 / 2

```

```

3140 X = RR / L
3145 IF X >= 5. GOTO 3400
3146 REM -FOR X = .25 TO 8 STEP .25
3150 Z1 = 1 - (X ^ 4) / 64 + (X ^ 8) / 147456 - (X ^ 12) / 2123366400 +
(X ^ 16) / (65536 * 40320 ^ 2)
3160 T1 = - (X ^ 3) / 16 + (X ^ 7) / 18432 - (X ^ 11) / 176947200 + (16
* X ^ 15) / (65536 * 40320 ^ 2)
3170 Z2 = - (X ^ 2) / 4 + (X ^ 6) / 2304 - (X ^ 10) / 14745600 + (X ^ 1
4) / (16384 * 25401600)
3180 T2 = - (X / 2) + (X ^ 5) / 384 - (X ^ 9) / 1474560 + (14 * X ^ 13)
/ (16384 * 25401600)
3190 R1 = (X ^ 2) / 4 - 11 * (X ^ 6) / 13824 + 137 * (X ^ 10) / 88473600
0 - (1089 * X ^ 14) / (25401600 * 420 * 16384) + (1026575 * X ^ 18)
/ (362880 * 262144 * 362880 ^ 2)
3200 S1 = X / 2 - 11 * (X ^ 5) / 2304 + 137 * (X ^ 9) / 88473600 - (14 *
1089 * X ^ 13) / (25401600 * 420 * 16384) + (18 * 1026575 * X ^ 17)
/ (362880 * 262144 * 362880 ^ 2)
3210 R2 = 3 * (X ^ 4) / 128 - 25 * (X ^ 8) / 1769472 + 49 * (X ^ 12) / 4
2467328000 - (109584 * X ^ 16) / (40320 * 65536 * 40320 ^ 2) + (106
28640 * X ^ 20) / (3628800 * 1048580 * 3628800 ^ 2)
3220 S2 = 3 * (X ^ 3) / 32 - 25 * (X ^ 7) / 221184 + 49 * (X ^ 11) / 353
8944000 - (16 * 109584 * X ^ 15) / (40320 * 65536 * 40320 ^ 2) + (2
0 * 10628640 * X ^ 19) / (3628800 * 1048580 * 3628800 ^ 2)
3230 R3 = 0.577216 + LOG (X / 2)
3240 S3 = 1 / X
3250 Z3 = (Z1 / 2) - (2 / 3.1415927) * (R1 + R3 * Z2)
3260 T3 = (T1 / 2) - (2 / 3.1415927) * (S1 + S3 * Z2 + R3 * T2)
3270 Z4 = (Z2 / 2) + (2 / 3.1415927) * (R2 + R3 * Z1)
3280 T4 = (T2 / 2) + (2 / 3.1415927) * (S2 + S3 * Z1 + R3 * T1)
3285 REM -PR# 1: PRINT X: PRINT Z1,Z2: PRINT T1,T2: PRINT Z3,Z4: PRINT
T3,T4: GOSUB 1000: NEXT X: END
3290 MR = - (Y(11,3) / 4) * (Z4 - (1 - XM) * T3 * L / RR)
3300 MT = - (Y(11,3) / 4) * (XM * Z4 + (1 - XM) * T3 * L / RR)
3310 Q = - (Y(11,3) / (4 * L)) * T4
3315 REM - GOSUB1000:PR#1:PRINT I1, I1:PRINT RR,A=180/3.141,X:PRINT T3,Z4,
T4:PRINT MR,MT,Q:PR#0
3320 GOTO 3350
3330 MR = ((1. - XM) * Y(11,3) / (4 * 3.1415927)) * ( LOG (L / C) + .616
)
3340 MI = MR
3345 Q = 0.
3346 A = 0.
3350 MY = MR * ( SIN (A)) ^ 2 + MI * ( COS (A)) ^ 2
3360 MX = MR * ( COS (A)) ^ 2 + MT * ( SIN (A)) ^ 2
3361 QX = Q * COS (A)
3362 QY = Q * SIN (A)
3363 IF Y(11,1) < Y(11,1) THEN QX = - 1. * QX
3364 IF Y(11,2) < Y(11,2) THEN QY = - 1. * QY

```

```

3365 REM - GOSUB1000:PR#1:PRINTMX,MY:PRINTY(I,4),Y(I,5),Y(I,6):PR#0
3370 Y(I,4) = Y(I,4) + MX
3380 Y(I,5) = Y(I,5) + MY
3390 Y(I,6) = Y(I,6) + OX
3395 Y(I,7) = Y(I,7) + OY
3400 NEXT J
3410 NEXT I
3420 NEXT II
3430 RETURN
3500 REM - SUBROTINA PARA IMPRESSAO DOS RESULTADOS
3505 FF = FF + 1
3510 GOSUB 1000
3520 PR# 1
3530 PRINT TAB( 1);"PONTO"; TAB( 11);"MXX(mt)"; TAB( 27);"MYX(mt)"
3540 FOR I = 1 TO K
3550 PRINT TAB( 1);I; TAB( 11);Y(I,4); TAB( 27);Y(I,5)
3560 NEXT I
3570 GOSUB 1000
3580 PR# 1
3590 PRINT TAB( 1);"PONTO"; TAB( 11);"QXZ(t)"; TAB( 27);"QYZ(t)"
3600 FOR I = 1 TO K
3601 IF Y(I,3) = 0. GOTO 3610
3602 Q = Y(I,3) / (2 * 3.1415927 * C)
3603 PRINT TAB( 1);I;"esq"; TAB( 11);Y(I,6) + Q; TAB( 27);Y(I,7) + Q
3604 PRINT TAB( 1);I;"dir"; TAB( 11);Y(I,6) - Q; TAB( 27);Y(I,7) - Q
3605 GOTO 3620
3610 PRINT TAB( 1);I; TAB( 11);Y(I,6); TAB( 27);Y(I,7)
3620 NEXT I
3625 IF FF = 2 GOTO 3670
3630 GOSUB 1000
3640 PR# 1
3650 PRINT "OS ESFORCOS SOLICITANTES NOS BORDOS DO RADIER DEVERAO SER C
OMPATIBILIZADOS DE ACORDO COM O ITEM 7.3.8 DA ACI"
3660 PR# 0
3670 RETURN
4000 REM - SUBROTINA PARA COMPATIBILIZACAO DOS ESFORCOS SOLICITANTES N
OS BORDOS
4010 II = 1
4020 KK = M + 1
4030 FOR I = 1 TO N + 1
4040 FOR J = 1 TO M + 1
4050 II = (I - 1) * (M + 1) + J
4060 IJ = 1
4070 IF I = 1 OR I = N + 1 THEN IJ = .5
4080 B1 = ((SM * H * IJ) / (4 * E * H * IJ * T ^ 3 / 12)) ^ .25
4090 X1 = LX * B1
4100 X2 = Y(II,1) * B1
4110 X3 = (LX - Y(II,1)) * B1

```

```

4120 P = Y(II,6)
4125 M3 = - Y(II,4)
4126 REM -GOSUB 1000: PR# 1: PRINT II,B1,X1 / B1,X2 / B1,X3 / B1,P,M3,Y
      (II,4),Y(II,6)
4127 IF II = I1 GOTO 4160
4130 GOSUB 6000
4140 Y(II,4) = Y(II,4) + M1 + M2
4150 Y(II,6) = Y(II,6) + Q1 + Q2
4155 REM -PRINT M1,M2,Q1,Q2,Y(II,4),Y(II,6)
4160 X2 = X3
4170 X3 = (LX - X2 / B1) * B1
4180 P = - Y(KK,6)
4185 M3 = - Y(KK,4)
4186 IF KK = I1 OR II = I1 GOTO 4220
4187 REM -GOSUB 1000: PR# 1: PRINT II,B1,X1 / B1,X2 / B1,X3 / B1,P,M3,Y
      (II,4),Y(II,6)
4190 GOSUB 6000
4200 Y(II,4) = Y(II,4) + M1 + M2
4210 Y(II,6) = Y(II,6) - Q1 - Q2
4215 REM -PRINT M1,M2,Q1,Q2,Y(II,4),Y(II,6)
4220 NEXT J
4225 Y(II,4) = 0.:Y(II,6) = 0.
4226 Y(KK,6) = 0.:Y(KK,4) = 0.
4230 II = II + M + 1
4240 KK = KK + M + 1
4250 NEXT I
4260 II = 1
4270 KK = (M + 1) * N + 1
4280 FOR J = 1 TO M + 1
4290 FOR I = 1 TO N + 1
4300 I1 = (I - 1) * (M + 1) + J
4310 JI = 1
4320 IF J = 1 OR J = M + 1 THEN JI = .5
4340 B1 = ((SM * H * R * JI) / (4 * E * H * R * JI * T ^ 3 / 12)) ^ .25
4350 X1 = LY * B1
4360 X3 = Y(II,2) * B1
4370 X2 = (LY - Y(II,2)) * B1
4380 P = - Y(II,7)
4390 M3 = - Y(II,5)
4395 IF II = I1 GOTO 4430
4400 GOSUB 6000
4410 Y(II,5) = Y(II,5) + M1 + M2
4420 Y(II,7) = Y(II,7) - Q1 - Q2
4430 X2 = X3
4435 X3 = (LY - X2 / B1) * B1
4440 P = Y(KK,7)
4460 M3 = - Y(KK,5)
4465 IF KK = I1 OR II = I1 GOTO 4500

```

```

4470 GOSUB 6000
4480 Y(I1,5) = Y(I1,5) + M1 + M2
4490 Y(I1,7) = Y(I1,7) + Q1 + Q2
4500 NEXT I
4505 Y(I1,5) = 0.:Y(I1,7) = 0.
4506 Y(KK,7) = 0.:Y(KK,5) = 0.
4510 I1 = I1 + 1
4520 KK = KK + 1
4530 NEXT J
4540 RETURN
6000 REM - SUBROTINA - VIGA EM BASE ELASTICA COM CARGA VERTICAL E MOMEN-
      NTO CONCENTRADOS NO EXTREMO
6005 REM -DEFFN A(W) = ( EXP ( W) - EXP ( - W)) / 2: DEF FN B(W) = ( E
      XP ( W) + EXP ( - W)) / 2:B1 = .8:P = 1:L = 10: FOR X = 0 TO 10:X1
      = L * B1:X2 = X * B1:X3 = (L - X) * B1:M3 = 1
6010 M1 = ( - P * ( FN A(X1) * SIN (X2) * FN A(X3) - SIN (X1) * FN A
      (X2) * SIN (X3))) / (B1 * (( FN A(X1)) ^ 2 - ( SIN (X1)) ^ 2))
6020 Q1 = ( - P * ( FN A(X1) * ( COS (X2) * FN A(X3) - SIN (X2) * FN
      B(X3)) - SIN (X1) * ( FN B(X2) * SIN (X3) - FN A(X2) * COS (X3)
      ))) / (( FN A(X1)) ^ 2 - ( SIN (X1)) ^ 2)
6030 M2 = (M3 * ( FN A(X1) * ( FN A(X3) * COS (X2) + FN B(X3) * SIN (
      X2)) - SIN (X1) * ( FN A(X2) * COS (X3) + FN B(X2) * SIN (X3)))
      ) / (( FN A(X1)) ^ 2 - ( SIN (X1)) ^ 2)
6040 Q2 = ( - 2 * M3 * B1 * ( FN A(X1) * FN A(X3) * SIN (X2) + SIN (X
      1) * FN A(X2) * SIN (X3))) / (( FN A(X1)) ^ 2 - ( SIN (X1)) ^ 2)
6050 REM -PR#1:PRINT X,M1,Q1: PRINT : PRINT X,M2,Q2: NEXT X
6060 RETURN

```

NOMENCLATURA

- $h$  = altura total do radier  
 $K_0$  = modulo de reação vertical do solo  
 $q$  = reação do terreno na superfície de interação com o radier  
 $w$  = deslocamento vertical de um ponto do radier( direção Z)  
 $P$  = carga concentrada vertical  
 $E$  = modulo de elasticidade longitudinal do material do radier  
 $\mu$  = coeficiente de Poisson do material do radier  
 $G$  = modulo de elasticidade transversal do material do radier  
 $\hat{p}$  = carga distribuida vertical na superfície do radier  
 $X, Y, Z$  = eixos coordenados  
 $u$  = deslocamento horizontal na direção X de um ponto do radier  
 $v$  = deslocamento horizontal na direção Y de um ponto do radier  
 $D$  = rigidez a flexão do radier  
 $\bar{x}_x$  = vão do radier na direção X  
 $\bar{x}_y$  = vão do radier na direção Y  
 $m, \ell, k, i$  = pontos nodais de uma malha  
 $\Delta x$  = lado na direção X de um elemento de placa  
 $\Delta y$  = lado na direção Y de um elemento de placa  
 $M_x$  = momento fletor na direção X de um ponto da placa

$M_y$  = momento fletor na direção Y de um ponto da placa

$M_{xy} = M_{yx}$  = momentos torsores de um ponto da placa

$Q_x$  = esforço cortante na direção X de um ponto da placa

$Q_y$  = esforço cortante na direção Y de um ponto da placa

$K$  = rigidez de uma mola linear adotada para a discretização do solo

$L$  = raio da rigidez relativa

$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  = funções de HETENYI (18)

$C$  = raio da seção transversal de um pilar circular

$M_\theta$  = momento fletor tangencial

$M_r$  = momento fletor radial

$Q_r$  = esforço cortante radial

$\gamma$  = constante de Euler

$s$  = lado da seção transversal de um pilar quadrado