

**ANÁLISE LIMITE DE LAJES VIA PROGRAMAÇÃO LINEAR
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

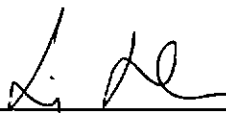
Luís Fernando Nunes Mello

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
(M. Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

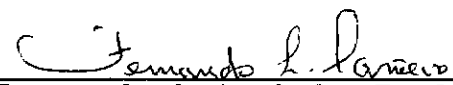
Aprovada por:



Prof. Luiz Eloy Vaz
(Presidente)



Prof. Luiz Landau
(Co-orientador)



Prof. Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro



Prof. Benjamin Ernani Diaz

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1987

MELLO, LUÍS FERNANDO NUNES,

Análise Limite de Lajes Via Programação Linear
Através do Método dos Elementos Finitos (Rio de
Janeiro), 1987.

xi, 262 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Enge-
nharia Civil, 1987)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE.

1. Análise Limite Via Programação Linear
 2. Análise Limite de Lajes
 3. Teoria das Linhas de Ruptura
 4. Programação Linear
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que possuem um ideal e que lutam por aquilo em que acreditam; porque se os obstáculos são muitos, o prazer da chegada é bem maior.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela oportunidade de ser e construir, sonhar e realizar, aprender e evoluir.

À minha família pelo carinho, pela compreensão, pelo incentivo, pela confiança, pela paciência e por todas aquelas outras coisas que nos dão força e vontade de ir sempre em frente.

Aos amigos, de hoje, de ontem e de sempre, pela convivência agradável, pelas críticas oportunas, pela ajuda constante e, principalmente, pela amizade.

Aos orientadores pela confiança, pelas críticas sempre bem vindas e pela paciência de ensinar.

Aos professores da COPPE pela camaradagem e pelos ensinamentos recebidos e aos funcionários por toda a ajuda e atenção dispensadas.

Ao pessoal do NCE pela boa vontade e por todos os recursos colocados à disposição; em especial a Lucia Bruno pela gentileza e pela presteza em solucionar os inúmeros problemas que surgiram no decorrer desse trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro recebido, sem o qual a realização desse trabalho teria sido impossível.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos
requisitos necessários para obtenção do grau de
Mestre em Ciências (M. Sc.)

ANÁLISE LIMITE DE LAJES VIA PROGRAMAÇÃO LINEAR
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luís Fernando Nunes Mello

Dezembro de 1987

Orientador: Luiz Eloy Vaz

Programa: Engenharia Civil

Com base na Teoria das Linhas de Ruptura (Johansen, 1932) formulou-se um elemento finito não-conven-
cional para a análise de lajes cuja lei constitutiva ficou
definida através de uma curva momento versus rotação na se-
ção transversal à linha de ruptura. Assim, apenas com o
deslocamento perpendicular à superfície média da laje em oca-
da um dos quatro pontos nodais, o elemento mostra-se exce-
lente para representar e encontrar a configuração e o fator
de colapso a partir de uma discretização criteriosa e racio-
nal, podendo ser usado tanto na análise limite via programa-
ção linear quanto na análise elasto-plástica, considerando-
se cargas crescendo proporcionalmente (Colapso Estático)
ou independentemente umas das outras (Comportamento de
Adaptação da Estrutura).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial
fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science (M. Sc.)

LIMIT ANALYSIS OF SLABS BY LINEAR PROGRAMMING
THROUGH THE FINITE ELEMENT METHOD

Lúís Fernando Nunes Mello

December, 1987

Chairman: Luiz Eloy Vaz

Department: Civil Engineering

Based upon the Yield-Line Theory (Johansen, 1932) a non-conventional finite element is formulated for the analysis of slabs whose constitutive law is defined through a moment-rotation curve at the section transversal to the yield-line. Thus only with the displacement perpendicular to the slab medium surface at each one of the four nodal points, the element shows to be excellent to represent and find the configuration and the factor of collapse beginning from a criterious and rational discretization. It can be used in the limit analysis by linear programming or in the elastic-plastic analysis, considering forces increasing proportionally (Static Collapse) or independently from each other (Shakedown Analysis).

ÍNDICE

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | - Introdução | 1 |
| II | - A Análise Limite | |
| | .1 - Os Princípios Extremos para Materiais Rígido- Plásticos | 4 |
| | .1 - O Teorema do Limite Inferior | 5 |
| | .2 - O Teorema do Limite Superior | 6 |
| | .3 - O Teorema da Unicidade: Limites Coincidentes | 7 |
| | .2 - A Análise Limite em Lajes | 9 |
| III | - Os Fundamentos da Teoria das Linhas de Ruptura .. | 15 |
| | .1 - Ductilidade: um Requisito Importante | 17 |
| | .2 - Condições de Formação da Configuração de Colapso | 18 |
| | .3 - Momentos Resistentes: o Critério de Escoamento (Ruptura) de Johansen | 23 |
| | .4 - Métodos para a Determinação da Carga de Colapso | 30 |
| | .1 - Trabalhos Virtuais | 31 |
| | .2 - Equações de Equilíbrio | 33 |
| | .5 - Configurações de Colapso Aproximadas: o Método da Tentativa-e-erro | 35 |
| | .6 - A Comprovação Experimental | 38 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| IV | - O Modelo Teórico Proposto | |
| | .1 - A Concepção do Elemento-Charneira: o CHARPLAS | 40 |
| | .2 - A Formulação do Elemento | 42 |
| | .1 - O Sistema Local de Coordenadas Generalizadas | 42 |
| | .2 - A Equação de Compatibilidade | 43 |
| | .3 - A Equação de Equilíbrio | 50 |
| | .4 - A Matriz de Rigidez Tangente | 52 |
| | .5 - As Forças Nodais Equivalentes | 58 |
| | .1 - Força Concentrada em Ponto Interno | 60 |
| | .2 - Força Uniformemente Distribuída .. | 60 |
| | .3 - Momento ao Longo do Lado | 62 |
| | .4 - Momento Uniformemente Distribuído | 62 |
| | .5 - Força Linearmente Distribuída .. | 65 |
| | .6 - Força Uniforme e Parcialmente Distribuída | 67 |
| | .6 - As Forças Elásticas Internas | 68 |
| | .3 - O Sistema Global de Coordenadas Generalizadas | 69 |
| | .4 - O Elemento-Rótula Elasto-Plástico: o ROTPLAS | 73 |
| V | - A Programação Matemática na Análise Limite | 77 |
| | .1 - O Problema das Cargas Proporcionais | 79 |
| | .1 - Formulação | 79 |
| | .2 - A Dualidade e a Aproximação do Mecanismo | 82 |

| | |
|---|------------|
| .3 - Método de Solução: o Algoritmo de Livesley | 88 |
| .1 - Os Esforços Internos e o Fator de Colapso | 89 |
| .2 - A Configuração de Colapso | 97 |
| .2 - O Problema das Cargas Independentes | 101 |
| .1 - O Teorema da Adaptação da Estrutura às Cargas | 107 |
| .2 - Formulação | 114 |
| .3 - Método de Solução: o Algoritmo Simplex .. | 116 |
| | |
| VI - A Análise Elasto-Plástica como Opção | |
| .1 - Formulação: os Problemas de Convergência ... | 118 |
| .2 - O Mecanismo de Colapso | 124 |
| .3 - Condensação Cinemática: Redução do Número Total de Graus de Liberdade | 126 |
| | |
| VII - A Implementação Computacional do Modelo | 130 |
| .1 - O Pré-Processador | 131 |
| .2 - O Processador | 133 |
| .3 - O Pós-Processador | 134 |
| | |
| VIII - Aplicações | 147 |
| .1 - Problemas de Colapso Estático | 148 |
| .1 - <u>Exemplo 1</u> : Laje Quadrada Simplesmente Apoiada, Carregada no Centro | 148 |
| .2 - <u>Exemplo 2</u> : Laje Quadrada Simplesmente Apoiada, Carregada Uniformemente | 155 |
| .3 - <u>Exemplo 3</u> : Laje Retangular Simplesmente Apoiada, Carregada no Centro | 160 |

| | | |
|-----|---|-----|
| .4 | - <u>Exemplo 4</u> : Laje Retangular Simplesmente Apoiada com Furo Retangular, Carregada Uniformemente | 172 |
| .5 | - <u>Exemplo 5</u> : Laje Retangular com Três Lados Adjacentes Engastados e o Outro Livre, Carregada Uniformemente | 174 |
| .6 | - <u>Exemplo 6</u> : Laje Quadrada Apoiada num Lado e numa Coluna, Carregada Uniformemente | 176 |
| .7 | - <u>Exemplo 7</u> : Laje Circular Engastada, Carregada Uniformemente | 185 |
| .8 | - <u>Exemplo 8</u> : Laje Quadrada Simplesmente Apoiada, com Momentos Resistentes Últimos Diferentes em Várias Seções, Carregada Uniformemente | 189 |
| .9 | - <u>Exemplo 9</u> : Laje Circular Apoiada em Oito Colunas Dispostas Circularmente, Carregada Uniformemente | 192 |
| .10 | - <u>Exemplo 10</u> : Laje Retangular Apoiada num dos Lados e em Duas Colunas, Carregada Uniformemente | 196 |
| .2 | - Problemas de Adaptação da Estrutura | 198 |
| .1 | - <u>Exemplo 1</u> : Viga Contínua de Dois Vãos Iguais, Carregada no Centro de Cada Vão | 199 |
| .2 | - <u>Exemplo 2</u> : Laje Retangular Contínua de Dois Vãos Iguais, Carregada no Centro de Cada Vão | 201 |

| | | |
|----|--|-----|
| .3 | - <u>Exemplo 3</u> : Laje Retangular Contínua de Dois Vãos Iguais, Carregada Uniformemente em Cada Vão | 207 |
| .4 | - <u>Exemplo 4</u> : Laje Retangular Contínua de Dois Vãos Desiguais, Carregada Uniformemente | 212 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| IX | - Conclusões, Discussões, Recomendações e Sugestões para Novos Estudos | 221 |
|-----------|---|------------|

| | |
|--|------------|
| APÊNDICE A | 230 |
| Curva Aproximada Momento Versus Curvatura para Seções Retangulares de Concreto Armado com Armadura Dupla. | |

| | |
|--|------------|
| APÊNDICE B | 241 |
| Prova da Derivação do Modo de Colapso. | |

| | |
|---|------------|
| APÊNDICE C | 244 |
| Procedimentos e Algoritmos Utilizados na Implementa- ção do Programa CHAPLIN para Determinação de Cargas e Configurações de Colapso em Lajes. | |

| | |
|---|------------|
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 256 |
|---|------------|

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O principal objetivo da análise estrutural é garantir a segurança da estrutura contra a ruína através de um fator adequado, mantendo, entretanto, a sua funcionalidade para cargas em serviço.

Apesar do uso generalizado, a análise elástica como base para o projeto estrutural tem as suas limitações. A maior delas é não fornecer uma indicação precisa do fator de segurança à ruptura, justamente porque, nessa condição, os materiais podem comportar-se plasticamente, violando assim a hipótese de comportamento elástico. Uma das opções para solucionar esse impasse é a análise elasto-plástica; contudo, a descrição das propriedades do material não-linear em termos matemáticos aplicáveis, frequentemente não possui precisão suficiente para justificar o enorme esforço computacional geralmente envolvido nesse procedimento. Isso é especialmente verdade para muitas estruturas de concreto armado.

No caso particular das lajes, a Teoria das Linhas de Ruptura aparece como alternativa. Apesar de não fornecer qualquer informação do comportamento em serviço, é sempre possível a obtenção de um valor realístico da carga de ruptura para muitas situações de carregamentos e geometrias. Além disso, a relativa facilidade de aplicação em casos não

muito complexos e a comprovação experimental de muitas das soluções previstas fazem com que se destaque entre os outros métodos de mesma filosofia.

Todavia, como em quase todos os métodos analíticos em engenharia, a aplicação prática efetiva dessa teoria fica limitada a lajes de espessura constante, geometria simples, distribuição de armadura uniforme e submetidas a carregamentos também não muito complexos. Apesar do elevado número de soluções existentes para o uso prático, como, por exemplo, as muito bem desenvolvidas por VAN LANGENDOCK [01], a utilização em problemas reais e, portanto, mais complexos, é demorada, dispendiosa e, por vezes, muito trabalhosa devido à variedade de possíveis mecanismos de ruptura que precisam ser investigados.

A intenção do presente trabalho é, então, mostrar um método para tentar superar alguns desses obstáculos. Através da formulação de um elemento baseado no Método dos Elementos Finitos, com enfoque pelo Modelo de Deslocamentos, mostra-se ser possível encontrar o fator de colapso e o correspondente mecanismo de ruptura diretamente via análise limite, sem que haja a necessidade de conhecer a história das deformações. Pelas características do elemento proposto e a consideração de materiais perfeitamente plásticos, pode-se formular o problema em termos dos teoremas dos limites inferior e superior, chegando-se naturalmente a um problema de Programação Matemática, tão em evidência atualmente pela potencialidade de utilização no dimensionamento e na otimização estrutural. O problema de programação linear (PL) é,

então, formulado para a análise de cargas variando proporcionalmente e aleatoriamente entre dois limites, respectivamente, colapso estático e colapso incremental. Além de algoritmos eficientes para a solução do problema de programação linear, apresenta-se, também, as bases do programa computacional desenvolvido pelo autor para análise e avaliação do modelo proposto.

CAPÍTULO II

A ANÁLISE LIMITE

II.1 - Os Princípios Extremos para Materiais Rígido-Plásticos

Um material rígido-plástico perfeito é definido como aquele para o qual não há deformação alguma quando as tensões estão abaixo de certo limite: o ponto de escoamento. Nesse ponto, grandes deformações podem ocorrer sem que haja qualquer mudança nas tensões. Apesar de não existirem corpos de comportamento rígido-plástico perfeito, o modelo pode ser usado sempre que as deformações plásticas forem muito maiores que as elásticas.

Quando as cargas são aumentadas monotonicamente até o ponto em que a estrutura não consiga mais suportá-las, o corpo é dito haver atingido o *colapso*. A carga correspondente é chamada *carga de colapso*, *carga de ruptura*, *carga última* ou *capacidade de carga*, entre outros. O estado de deformação do corpo nesse instante é conhecido como *mecanismo de colapso*, *mecanismo de ruptura*, *configuração de ruptura* ou *configuração de colapso*, entre outros. A teoria para a determinação da carga de colapso em corpos rígido-plásticos é denominada *análise limite* e utiliza os princípios extremos formulados primeiramente por GVOZDEV [02] em 1938 e independentemente por DRUCKER et alia [03] em 1952. Tratar-se-á

aqui somente dos seus enunciados e interpretações; a sua demonstração completa pode ser obtida, por exemplo, em KACHANOV [04].

II.1.1 - O Teorema do Limite Inferior

"Se a carga atuante tem uma magnitude que permite encontrar um campo de tensão correspondente a tensões dentro ou sobre a superfície de colapso, satisfazendo às condições de equilíbrio e às condições estáticas do contorno, então essa carga é menor ou igual à carga de colapso da estrutura."

Um campo de tensão desse tipo é denominado *seguro* ou *estaticamente admissível*. É possível, claro, supor campos de tensão em equilíbrio com a carga, mas em regiões acima do ponto de escoamento; entretanto, somente se for possível encontrar um que corresponda a tensões, em qualquer ponto, abaixo ou coincidentes com o ponto de escoamento é que essa carga será um limite inferior da carga de colapso.

Definindo-se o carregamento externo aplicado por um parâmetro estritamente positivo λ de modo que as componentes individuais das cargas lhe sejam proporcionais, tem-se o que se chama *carregamento proporcional* ou, simplesmente, *cargas proporcionais*. O colapso provocado por esse tipo de carregamento é conhecido como *colapso estático*. O teorema pode então ser utilizado para encontrar valores de carga menores ou iguais à carga de colapso correspondente ao fator

de proporcionalidade λ_c , conhecido como *fator de colapso* ou *fator de ruptura*, daí o nome Teorema do Limite Inferior.

Então, para todos os carregamentos λ para os quais um campo de tensão seguro e estaticamente admissível pode ser encontrado,

$$\lambda \leq \lambda_c \quad (II.01)$$

sendo a igualdade verificada quando surge a configuração de colapso. Tudo isso também se aplica quando parte do carregamento é proporcional a λ e o restante, por exemplo, peso próprio, é constante.

II.1.2 - O Teorema do Limite Superior

"Considerando-se um campo de deslocamento geometricamente possível, uma carga que realize trabalho externo maior do que o trabalho interno plástico necessário para deformar o corpo sob um campo de deformação compatível com esse campo de deslocamento será maior ou igual à carga de colapso."

Através da mesma definição de carregamento proporcional, esse teorema pode ser usado para encontrar valores de carga que são maiores ou iguais à carga de colapso, isto é, se valores de λ forem determinados de modo que o trabalho realizado seja igual à resistência contra o campo de deslocamento, então, mesmo o menor incremento desse carregamento

não poderá ser suportado pelo corpo. Daí pode ser visto que a carga encontrada é maior ou igual à carga de colapso, ou seja,

$$\lambda \geq \lambda_c \quad (II.02)$$

sendo a igualdade verificada quando o mecanismo corresponde ao do colapso.

Deve-se ainda notar que as tensões correspondentes ao campo de deformação geometricamente possível não necessitam satisfazer às condições de equilíbrio.

Pode-se concluir, então que, se vários campos de deformação geometricamente possíveis são considerados, a equação do trabalho pode ser utilizada para encontrar valores da capacidade de carga que são maiores ou iguais à verdadeira; daí o nome Teorema do Limite Superior.

II.1.3 - O Teorema da Unicidade: Limites Coinidentes

De acordo com os dois teoremas da análise limite para corpos rígido-plásticos e carregamento proporcional, pode ser encontrada uma carga de forma que:

CONDIÇÃO 1: Exista um campo de tensão estaticamente admissível correspondente às tensões dentro ou sobre a superfície de colapso.

CONDIÇÃO 2: As deformações correspondentes às tensões de acordo com a condição de escoamento (ruptura) podem ser obtidas a partir de um campo de deslocamento geometricamente possível.

Isso é verdade porque carregamentos satisfazendo à condição 1 são menores ou iguais à carga de colapso, e carregamentos satisfazendo à condição 2 são maiores ou iguais à carga de colapso. Quando ambas as condições são satisfeitas simultaneamente, a carga encontrada é igual à carga de colapso, que é assim determinada de maneira única.

Nem sempre o corpo todo "participa" do colapso. Frequentemente ocorre que apenas parte está deformada nesse instante; o restante do mesmo, permanecendo rígido, impede que as tensões sejam determinadas de modo único; sabe-se apenas que correspondem a pontos dentro ou sobre a superfície de colapso. Também ocorre de vários campos de deformação geometricamente possíveis levarem à mesma capacidade de carga. Contudo, pode ser mostrado que, quando se está trabalhando com dois desses campos de deformação correspondentes ao mesmo carregamento externo, as tensões são idênticas nas partes do corpo onde, nos dois casos, ocorrem deformações não-nulas; isto é, nem o mecanismo de ruptura, nem o campo de tensão é determinado de maneira única para um corpo rígido-plástico; apenas a carga de colapso.

Em resumo, limites inferiores e superiores para carregamentos proporcionais podem ser encontrados pelos teo-

remas desenvolvidos. Um limite superior é encontrado considerando-se um mecanismo de colapso geometricamente possível e resolvendo-se a equação do trabalho. Um limite inferior pode ser obtido da consideração de um campo de tensão estaticamente admissível correspondendo a tensões dentro ou sobre a superfície de colapso.

Uma solução exata requer a construção de um campo de tensão estaticamente admissível correspondendo a tensões dentro ou sobre a superfície de colapso no corpo todo, bem como a verificação de que um campo de deformação geometricamente possível, satisfazendo às equações constitutivas, corresponde a esse campo de tensão. Esse tipo de solução, entretanto, é apenas de interesse matemático, não representando ganho algum para a engenharia prática.

II.2 - A Análise Limite em Lajes

A análise limite reconhece que, devido à plasticidade, a redistribuição de esforços pode ocorrer antes que a carga de ruptura seja atingida. Por exemplo, em seções típicas de concreto armado, uma vez alcançado o escoamento do aço tracionado, ou seja, o início de plastificação da seção, o aumento da curvatura provoca pouca mudança nos momentos. Assim, quando determinadas regiões atingem o momento de plastificação, tendem a manter a capacidade resistente próxima da resistência à flexão, mesmo com um aumento adicional de curvatura; com o aumento da carga, o escoamento da armadura propaga-se para as outras seções da laje. A análise

limite computa, então, a carga última e a distribuição dos momentos e esforços ortantes na configuração de colapso supondo que as seções da laje sejam suficientemente dúcteis para permitir a requerida redistribuição de momentos fletores. Para isso, pode ser usado o teorema do limite inferior ou do limite superior já apresentados.

O teorema do limite inferior requer uma distribuição de momentos na laje tal que:

1. As condições de equilíbrio sejam satisfeitas em todos os pontos;
2. O critério de escoamento (ruptura), definindo a resistência última das seções da laje, não seja excedido em lugar algum;
3. As condições de contorno em esforços sejam respeitadas.

A partir das equações de equilíbrio e da distribuição de momentos considerada, o teorema do limite inferior fornece uma carga de colapso cujo valor é o correto ou abaixo dele, ou seja, a capacidade de carga nunca é superestimada.

O teorema do limite superior considera um mecanismo de colapso para a laje tal que:

1. Os momentos nas regiões de plastificação não sejam maiores que os momentos resistentes últimos das seções;
2. O mecanismo de colapso seja geometricamente compatível.

O mecanismo de colapso é composto de partes rígidas da laje separadas por regiões de plastificação, sendo a carga de ruptura calculada através desse mecanismo arbitrado. Entretanto, essas partes rígidas não são examinadas para garantir que os momentos aí não excedem os momentos resistentes últimos daquelas seções, o que certamente acontecerá se for arbitrado um mecanismo outro que o correto. Para uma dada laje, o teorema do limite superior fornece uma carga de colapso que é a correta ou mais alta que esta; contudo, se todos os possíveis mecanismos de colapso forem examinados, o que fornecer a carga de ruptura mais baixa será o correto. É evidente que se o mecanismo correto não for usado, a carga de colapso estará sendo superestimada.

A diferença entre os dois métodos pode ser ilustrada para o caso simples de uma laje retangular armada numa direção, carregada uniformemente na superfície e engastada somente em dois dos lados opostos, conforme a figura (II.01.a). Os momentos resistentes últimos por unidade de largura da laje são m'_r (negativo) e m_r (positivo). Para um limite inferior, o diagrama elástico da figura (II.01.b) pode ser escolhido. Essa distribuição de momentos é uma solução possível porque os momentos resistentes últimos não são

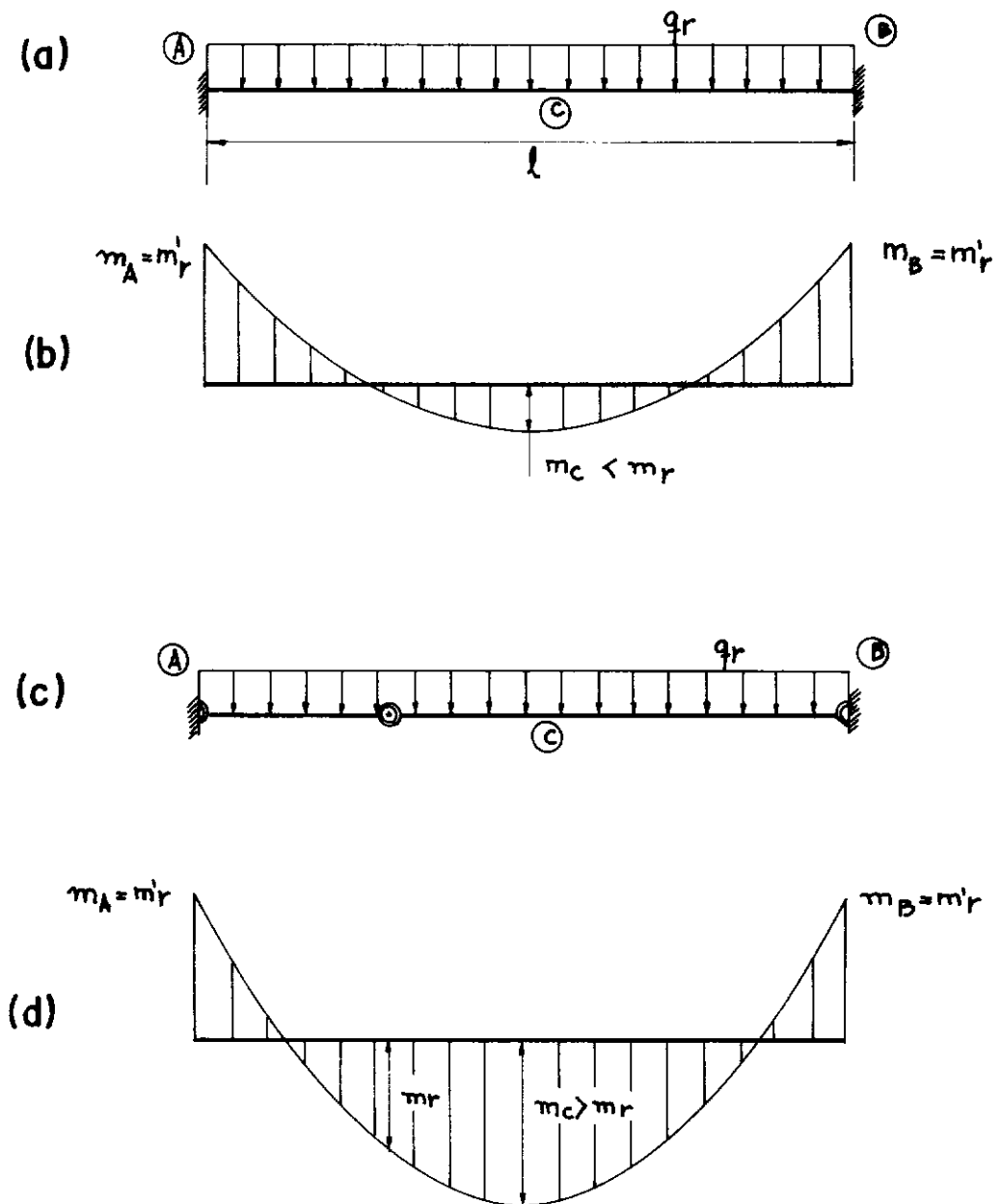


Figura II.Ø1 - Exemplo Elucidativo da Aplicação dos Teoremas dos limites Inferior e Superior

excedidos em lugar algum da laje e as condições de equilíbrio são atendidas. Como fica evidente pela estática, a carga de colapso por unidade de largura (q_r) calculada para esse diagrama está muito baixa porque os momentos resistentes últimos não são atingidos em todas as seções críticas; antes que a carga de ruptura seja calculada, o diagrama precisa ser modificado para que isso aconteça. Alternativamente, para um limite superior, pode ser escolhido o mecanismo de colapso da figura (II.01.c). É evidente que a carga de colapso prevista por esse mecanismo possível é incorreta e fornece um valor muito alto, como pode ser visto no diagrama de momentos limites da figura (II.01.d), no qual o momento resistente último positivo é excedido. Esse exemplo pode parecer trivial porque a solução correta pode ser obtida simplesmente por inspeção, visto que o mecanismo de colapso e a carga de ruptura corretos ocorrem quando as regiões de plastificação se formam nos apoios e no meio do vão; entretanto, as soluções da análise limite em lajes com geometria e condições de contorno mais complexas é bem mais difícil e nem sempre é tão evidente se a solução correta foi obtida.

A aproximação do limite inferior mais comumente usada é o *Método da Faixa de Hillerborg* [05,06], que obtém a distribuição de momentos e esforços cortantes substituindo a laje por faixas em duas direções que repartem a carga. A ação da faixa é um procedimento válido porque se o carregamento é suportado inteiramente por flexão, satisfazendo dessa maneira os requisitos da estática, nenhuma consideração dos efeitos de torção é necessária. Já foi mostrado em muitos trabalhos que aproximações alternativas para o limite

inferior incluindo torção são difíceis de se obter em muitos casos.

O teorema do limite superior para lajes é representado pela *Teoria das Linhas de Ruptura*, sendo adotada no presente trabalho porque, aliada à simplicidade, a sua comprovação experimental mostra ser possível obter um valor realístico para a carga de ruptura para muitos casos; inclusive, a análise pela *Teoria das Linhas de Ruptura* com configurações simples parece ser a avaliação mais próxima da ruína real do que uma solução do tipo limite inferior.

CAPÍTULO III**OS FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA**

Apesar de já haver sido introduzida por INGERSLEV [07] em 1923 e generalizada por JOHANSEN [08] em 1932, até cerca de 1950, a Teoria das Linhas de Ruptura permaneceu sob uma certa desconfiança; parecia ser sempre possível descobrir um novo mecanismo, ligeiramente mais complicado que o anterior, cuja carga última apresentava-se pouco abaixo da anteriormente encontrada. Parte desse problema só foi resolvida quando PRAGER & HODGE [09] formulando de maneira rigorosa os teoremas da análise limite, mostraram que a carga última mais baixa seria determinada se fosse possível encontrar um limite inferior coincidente com outro limite superior. Daí em diante, parecia que a Teoria das Linhas de Ruptura havia sido posta, pela primeira vez, sobre fundamentos sólidos. Tudo o que restava fazer era acumular uma série de limites inferiores e superiores coincidentes para se conhecer a carga última de vários casos. Entretanto, apesar de um esforço generalizado, muito poucas soluções desse tipo puderam ser obtidas. A principal dificuldade com os limites inferiores era que as linhas de ruptura positivas e negativas só podiam encontrar-se em ângulos retos, já que se utilizava o conceito de momentos principais. Isso, juntamente com a presença de descontinuidades dos campos de tensão entre duas regiões adjacentes, tornava o problema matemático quase insuperável. Dessa forma, viu-se a necessidade pre-

mente de se abandonar qualquer esperança de encontrar soluções coincidentes. Esquecendo-se por completo a idéia de momentos principais, chegou-se a um critério de escoamento (ruptura) que considera somente o valor do momento normal à linha de ruptura, ficando a determinação da carga última vinculada somente à consideração da flexão. Por conseguinte, pôde-se definir diretamente esse momento normal apenas com referência às tensões normais no aço e no concreto, não sofrendo a expressão para o seu cálculo qualquer interferência dos outros componentes de tensão. Felizmente, essa hipótese simples é considerada conservadora quando comparada com os resultados experimentais.

A Teoria das Linhas de Ruptura é especialmente aplicável a lajes uniformemente armadas; como geralmente a armação é posta em duas direções ortogonais X e Y , será este o caso aqui analisado. A área da seção armada por unidade de largura é considerada constante através de toda a laje, podendo ser diferente para armaduras nas duas direções e/ou diferente para armaduras inferiores e superiores. Assim, o momento resistente último por unidade de largura (m_r) terá um valor constante ao longo de qualquer linha reta no plano da placa. A análise, através da Teoria das Linhas de Ruptura, de lajes com armadura não-uniformemente distribuída também é possível, mas existem alguns problemas que impedem a generalização do processo ao nível que está para a armação uniformemente distribuída.

III.1 - Ductilidade: um Requisito Importante

A distribuição dos momentos na configuração de colapso depende tanto da resistência à flexão das seções da laje quanto do carregamento e das condições de contorno. Para formar a configuração de colapso, uma significativa redistribuição de momentos fletores pode ser necessária, implicando que essas seções sejam suficientemente dúcteis para permitir a rotação plástica das seções críticas enquanto a plastificação se desenvolve no resto da laje. Essa ductilidade disponível depende, basicamente, da forma da curva momento versus curvatura da seção. A figura (A.02) ilustra uma curva momento versus curvatura típica. A relação é aproximadamente trilinear com um trecho inicial até a primeira fissura do concreto traicionado, um segundo trecho até o escoamento do aço traicionado e, finalmente, um trecho onde o momento resistente permanece bem próximo ao valor último até que o concreto atinja a sua deformação limite.

Uma medida da ductilidade da seção é o *fator de ductilidade da curvatura*, definido como a razão entre a curvatura quando ocorre o esmagamento do concreto e a curvatura quando o aço traicionado escoar; entretanto, nenhum procedimento analítico simples foi até agora imaginado para permitir o cálculo do fator de ductilidade da curvatura para lajes.

A presença de aço comprimido nas seções pode aumentar a ductilidade disponível. Contudo, testes evidenciaram que, para a maior parte das lajes, as taxas de aço tra-

oionado serão suficientemente baixas para assegurar que as seções sejam razoavelmente dúcteis.

O aumento de resistência à flexão devido ao endurecimento (*strain hardening*) do aço, além de ser difícil de se incluir na formulação, ainda não é considerado pelo fato de não ser definida nas especificações a deformação na qual esse endurecimento se inicia.

Sendo assim, a Teoria das Linhas de Ruptura considera que há sempre ductilidade suficiente nas seções críticas para permitir que a laje possa formar a sua configuração de colapso com os momentos resistentes últimos mantidos em todas as regiões de plastificação.

III.2 - Condições de Formação da Configuração de Colapso

Considere-se uma laje de concreto armado sendo progressivamente carregada até a ruptura. Para cargas baixas, antes da fissuração do concreto tracionado, a distribuição dos momentos fletores está de acordo com a Teoria Elástica para Placas. Depois da fissuração, essa distribuição muda devido ao decréscimo da rigidez à flexão das regiões fissuradas. Continuando-se a carregar, eventualmente ocorre o escoamento do aço tracionado na(s) seção(ões) de momento fletor máximo e a laje sofre uma grande mudança de curvatura nessas seções plastificadas, permanecendo aí os momentos praticamente constantes e iguais ao momento resistente último. A partir desse ponto, à medida que a carga na

laje é aumentada, pode haver uma grande redistribuição de momentos fletores, surgindo regiões de intensa fissuração nas quais o aço traicionado já escoou, e que propagam-se por toda a laje até que se formem em número suficiente para dividi-la em segmentos que componham um mecanismo de ruptura; nesse estado, então, a laje não mais suporta qualquer aumento de carga.

Apesar do escoamento do aço traicionado começar primeiramente na seção onde o momento atuante atinge o momento resistente último, a plastificação desenvolvida pelo aumento crescente das cargas tem a(s) sua(s) direção(ões) guiada(s) pela disposição da(s) armadura(s), pelas condições de contorno e pelo tipo de carregamento.

Para os objetivos de análise, a região plastificada e de intensa fissuração é idealizada por uma simples linha no seu centro, conhecida como *linha de ruptura* ou *charneira plástica*, sendo este o único ponto de descontinuidade considerado entre duas regiões rígidas adjacentes. As lajes deformadas dessa maneira podem ser vistas como uma série de planos inclinados interconectados formando uma superfície poliédrica. A partir da interseção desses planos segue-se a conclusão de que as linhas de ruptura podem ser consideradas como segmentos de reta, exceto para regiões totalmente plastificadas, como é o caso de uma superfície esférica ou cônica sob a ação de flexão pura; na verdade, serão o limite de superfícies poliédricas.

Para que a configuração de colapso se forme, então, é necessário que as regiões rígidas que se encontram tenham as mesmas deflexões verticais, não sendo considerados, por hipótese da Teoria das Linhas de Ruptura, as forças normais e os movimentos horizontais correspondentes no contorno dessas regiões. Desde que apenas superfícies planas se encontram nesse mecanismo idealizado, as únicas deformações que devem ser estudadas são aquelas devidas às rotações normais às linhas de ruptura; e ainda mais, sendo essas rotações resistidas apenas por momentos normais, o complexo relacionamento entre os momentos, as forças e as deformações fica vinculado apenas à avaliação desses momentos normais e das suas respectivas rotações.

Quando o mecanismo de ruína já se desenvolveu, as deformações plásticas ao longo das linhas de ruptura são muito maiores do que as deformações elásticas dos segmentos de laje entre as charneiras e, portanto, é razoável não considerá-las em presença das primeiras. Dessa forma, com objetivos de simplificação, adota-se o material como rígido-plástico.

Como consequência de tudo o que foi discutido, pode-se concluir que:

1. Para poder fazer parte de uma configuração de colapso, as linhas de ruptura devem ser segmentos de reta formando eixos de rotação para os movimentos dos segmentos de laje, tomando o conjunto o aspecto de uma superfície poliédrica; o limite

destas superfícies poliédricas são as superfícies cônicas ou esféricas;

2. Os apoios da laje vão agir como eixos de rotação. Se um lado estiver engastado, uma linha de ruptura pode formar-se ao longo do mesmo. Eixos de rotação passam sobre colunas;

3. Por compatibilidade de deformação, uma linha de ruptura deve passar pela intersecção dos eixos de rotação dos segmentos de laje adjacentes.

Na figura (III.01) podem ser vistas algumas configurações de colapso possíveis. Note-se a relação de dependência entre o mecanismo de ruptura e as condições de contorno.

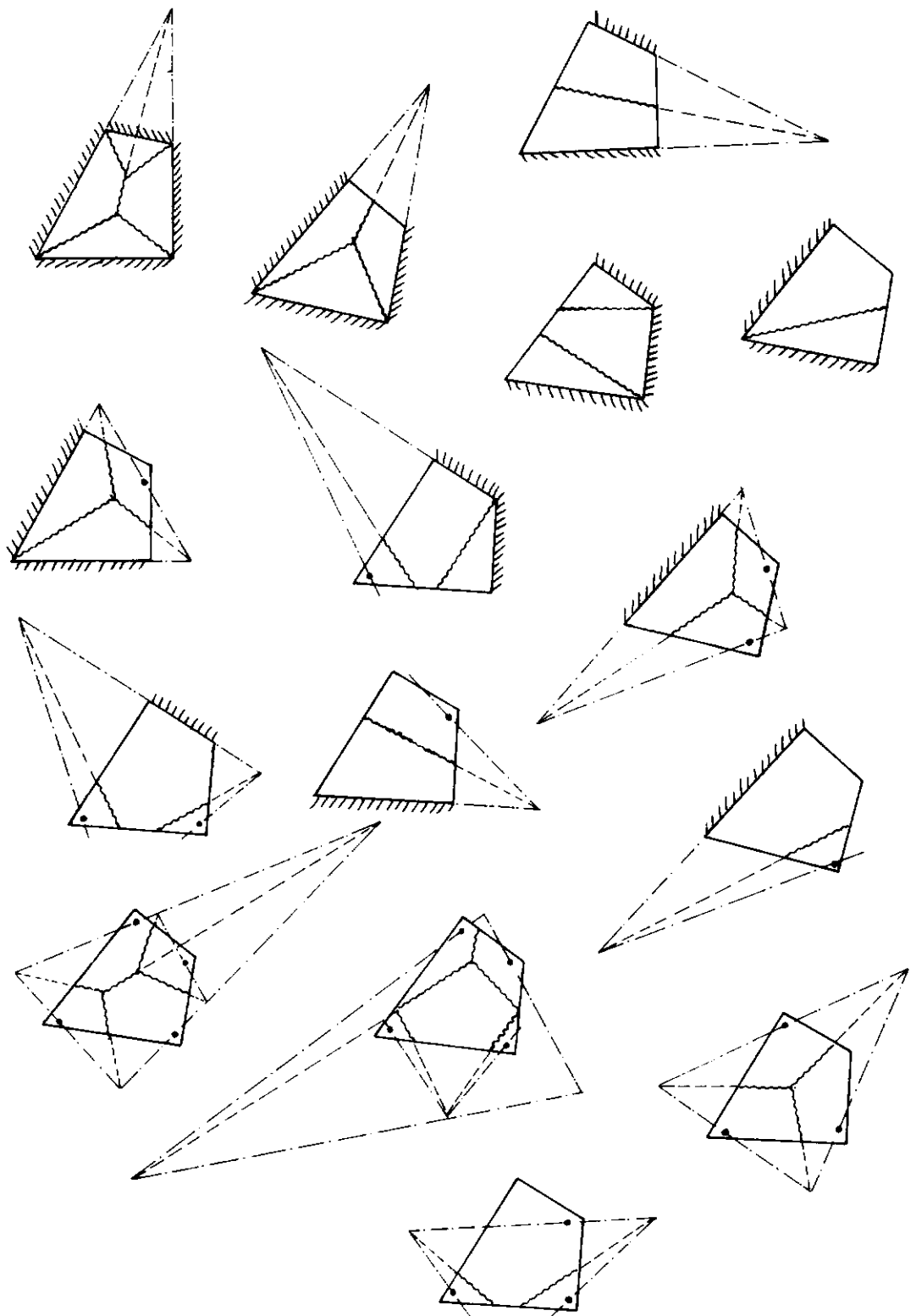


Figura III.01- Exemplos de Configurações de Colapso

III.3 - Momentos Resistentes: o Critério de Escoamento (Ruptura) de Johansen

No caso comum de lajes armadas com barras dispostas ortogonalmente nas direções X e Y , os momentos resistentes últimos por unidade de largura das duas direções serão, geralmente, diferentes para áreas de aço e recobrimento distintos. Se a laje for armada em várias direções, os momentos resistentes últimos em cada uma delas podem ser projetados nas direções X e Y . No caso geral de uma linha de ruptura que não seja ortogonal a nenhuma dessas duas direções é necessário determinar o momento resistente último por unidade de largura ao longo da mesma, inclusive porque, além dos momentos de flexão, existirão momentos torsores. Para lajes armadas nas duas faces, considera-se cada uma em separado, obtendo-se, desse modo, um par de momentos, positivo e negativo. Então, os momentos resistentes últimos de flexão e torção atuando numa linha de ruptura qualquer podem ser obtidos através do *Critério de Escoamento de Johansen*, que define a resistência última de um dado elemento de laje submetido a um campo de momentos genérico. Assim, no caso de armadura nas direções X e Y , relaciona-se os momentos resistentes últimos por unidade de largura (m_{rx} e m_{ry}) do elemento de laje aos momentos aplicados por unidade de largura (m_x , m_y e m_{xy}) devidos ao carregamento externo quando o elemento escoar.

Considerando-se que o aço nas duas direções atravessando a linha de ruptura atinja o escoamento, o momento resistente último por unidade de largura numa linha de rup-

tura que faz um ângulo qualquer com a armação é suposto como devido às componentes dos momentos resistentes últimos nas direções da armação. A figura (III.02) mostra um elemento de laje submetido a momentos genéricos com uma linha de ruptura na direção \underline{t} que forma um ângulo α com o eixo \underline{y} . A linha de ruptura real é substituída por uma "escalonada", que consiste numa série de pequenos degraus ortogonais a cada uma das direções da armação. Na mesma figura tem-se um pequeno elemento triangular \underline{abc} dessa mesma linha de ruptura sob a ação dos momentos resistentes últimos. O momento resistente último normal, agindo na direção \underline{n} ao longo da linha de ruptura, é encontrado através da consideração do equilíbrio do elemento tomando-se momentos em relação a \underline{ab} :

$$m_{rn} \text{ ab} = m_{rx} \text{ ac} \cos \alpha + m_{ry} \text{ bc} \sin \alpha \quad (\text{III.01})$$

$$\begin{aligned} m_{rn} &= m_{rx} \cos^2 \alpha + m_{ry} \sin^2 \alpha \\ &= m_{rx} + (m_{rx} - m_{ry}) \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (\text{III.01}')$$

É evidente que, no caso geral, o equilíbrio do elemento requer a existência de um momento resistente torsional (m_{rt}) ao longo da linha de ruptura; esse momento é encontrado tomando-se momentos também segundo a direção \underline{ab} :

$$m_{rt} \text{ ab} = m_{rx} \text{ ac} \sin \alpha - m_{ry} \text{ bc} \cos \alpha \quad (\text{III.02})$$

$$m_{rt} = (m_{rx} - m_{ry}) \cos \alpha \sin \alpha \quad (\text{III.02}')$$

Se $m_{rx} = m_{ry}$, então, pelas equações (III.01) e (III.02), $m_{rn} = m_{rx} = m_{ry}$ e $m_{rt} = 0$. Assim, para esse caso,

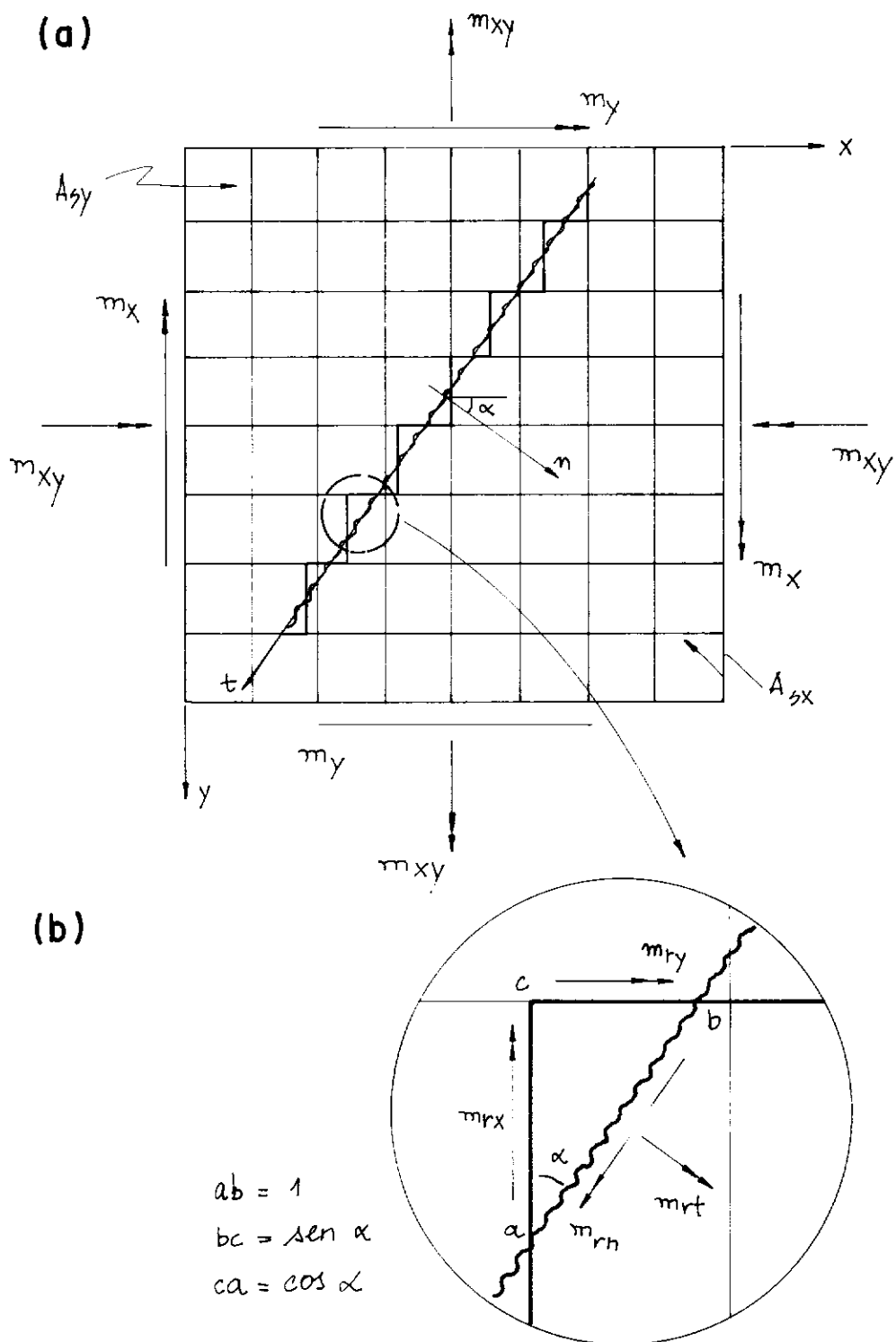


Figura III.Ø2 - Consideração de uma linha de Ruptura num Elemento de laje Submetido a um Campo de Momentos Genérico

os momentos resistentes últimos normais por unidade de largura são iguais em todas as direções e o momento torsor por unidade de largura ao longo da linha de ruptura é nulo. Esse tipo de laje é dita *isotrópica* ou armada *isotropicamente*. Quando $m_{rx} \neq m_{ry}$, é evidente que o momento resistente último por unidade de largura depende da direção da linha de ruptura, existindo um momento torsor ao longo da mesma. Essa laje é dita *ortotrópica* ou armada *ortotropicamente*.

Devido à simplicidade, muitas das soluções para lajes têm sido obtidas para o caso de armação isotrópica; entretanto, para a maioria das lajes, o uso da ortotropia é desejável em termos de economia porque possibilita seguir mais proximamente a distribuição de momentos da Teoria Elástica para Placas. Sendo assim, JOHANSEN [08] também desenvolveu um teorema que permite a obtenção de soluções para lajes ortotrópicas baseadas em soluções de lajes isotrópicas, o *Teorema da Afinidade*, mostrando que, alterando-se os comprimentos dos lados e o carregamento da laje ortotrópica por proporções que dependem da relação entre os momentos resistentes últimos por unidade de largura nas duas direções, pode-se transformá-la numa laje isotrópica equivalente e, dessa forma, solucioná-la com os critérios de isotropia desenvolvidos.

Esse critério de escoamento supõe ainda que o elemento atinja a sua resistência última quando o momento normal (m_n) devido aos momentos das cargas aplicadas (m_x , m_y e m_{xy}) torna-se igual ao momento resistente último normal (m_{rn}), ou seja, requer que, para o elemento:

$$m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha \leq m_{rn} \quad (\text{III.03})$$

Existe uma série de aspectos no que diz respeito às hipóteses feitas ou envolvidas na dedução das expressões dos momentos normal e torsor, que tem causado controvérsia e levado a investigações na tentativa de encontrar expressões melhores. Um deles é que essa dedução supõe que os momentos resistentes últimos (m_{rx} e m_{ry}) atuando nas direções das armaduras não são acompanhados por qualquer momento torsional; ficam assim sendo momentos principais, não existindo, como consequência, torção nos lados bc e ac do elemento. Essa hipótese bastante intuitiva leva a simplificações na dedução da equação; testes posteriores indicaram que essas torções, quando existem, têm efeito irrelevante no critério de escoamento. A dedução mostra, também, a presença de um momento torsional (m_{rt}) ao longo da linha de ruptura geralmente não considerado, visto o critério estar baseado apenas no momento normal.

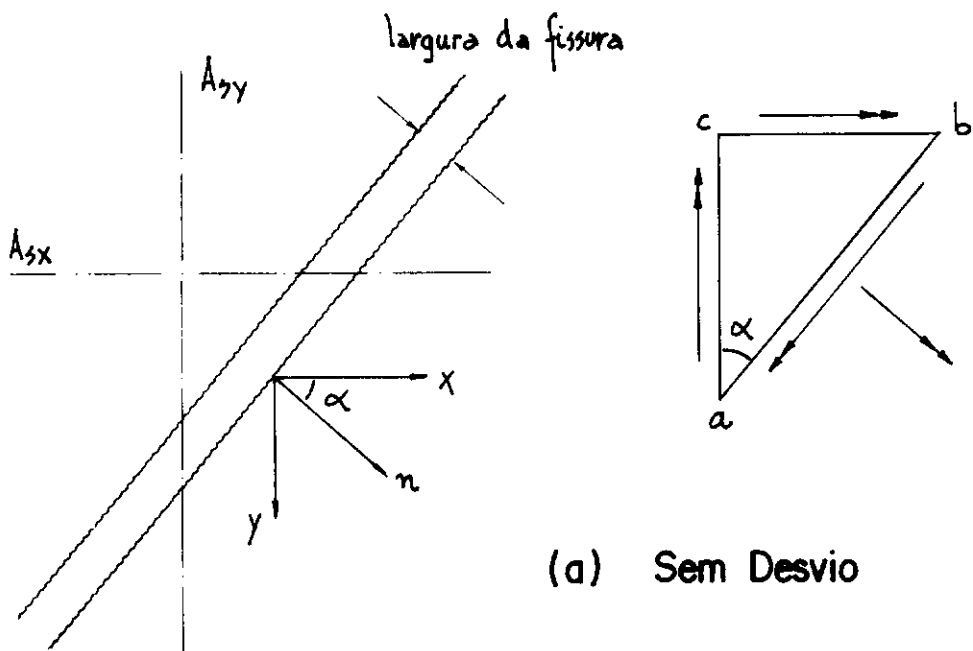
Um outro ponto é que a adição dos componentes m_{rx} e m_{ry} para encontrar m_{rn} ao invés da determinação direta dos componentes das forças nas barras na direção n, leva a pequenos erros no braço de alavanca interno dos momentos resistentes últimos; entretanto, essa diferença é muito pequena para a maioria das lajes que aparecem na prática.

Outro aspecto é utilizar-se a resistência uniaxial de compressão do concreto no cálculo dos momentos apesar de grande parte do concreto comprimido da laje estar, na reali-

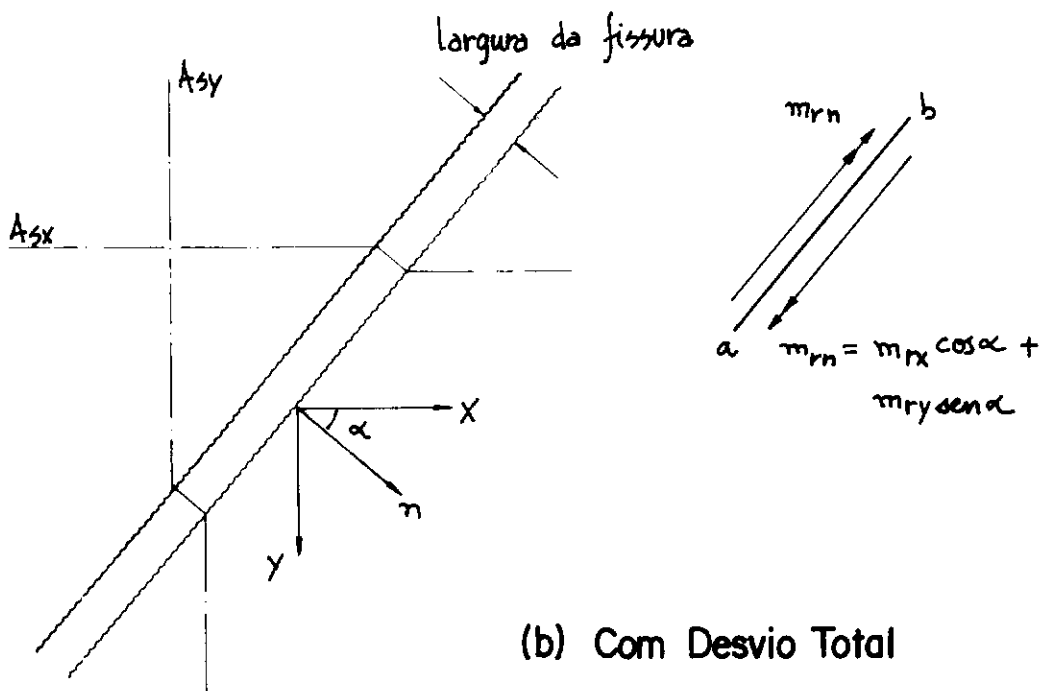
dade, num estado de compressão biaxial. Por exemplo, onde os momentos principais são ambos positivos ou ambos negativos, o efeito da compressão biaxial é pequeno e praticamente compensa o também pequeno erro no cálculo do braço de alavanca interno. O caso fica mais sério quando há tração numa direção e compressão na outra, pois já foi mostrado que a resistência à compressão do concreto pode sofrer uma significativa redução; contudo, uma vez fissurado o concreto, as trações transversais são aliviadas e não se nota mais diminuições relevantes no momento resistente último normal.

Aspecto interessante é o fenômeno conhecido como *prequeamento* (*kinking*). Observou-se que, devido à largura finita da fissura do concreto, a armadura que está inclinada em relação à linha de ruptura pode ser "arrastada" perpendicularmente à fissura e mudar de direção, conforme mostra a figura (III.03). Dessa maneira, haveria uma mudança no valor do momento resistente último na linha de ruptura; contudo, os inúmeros testes realizados parecem indicar que esse efeito pode ser negligenciado nos cálculos de resistência.

Convém ainda notar que esse critério de escoamento somente pode ser utilizado quando não há efeitos de membrana na laje, pois é bem sabido que o momento resistente último pode aumentar significativamente na presença de esforços de membrana ou reduzir-se perigosamente sob a ação de esforços de tração axial.



(a) Sem Desvio



(b) Com Desvio Total

Figura III.03- Desvio das Barras das Armaduras nas Fissuras

Em resumo, apesar de consideráveis críticas e controvérsias, o momento resistente último normal utilizado pelo critério de escoamento (ruptura) de Johansen não parece requerer melhorias. O peso das evidências experimentais indica que a equação é suficientemente precisa para o uso geral quando as forças no plano da laje não são significativas.

III.4 - Métodos para a Determinação da Carga de Colapso

O primeiro passo em qualquer solução através da Teoria das Linhas de Ruptura é arbitrar uma configuração de colapso usando as regras já estabelecidas. A configuração, em geral, conterá dimensões desconhecidas que localizam as posições das linhas de ruptura, podendo existir mais de uma família de linhas de ruptura para uma laje em particular. Deve-se, portanto, estar seguro da possibilidade de representação de todos os possíveis mecanismos, visto ser o correto aquele que fornecer a menor carga de ruptura; pois caso falte alguma configuração, não se poderá ter confiança na carga de colapso obtida.

A carga última pode ser encontrada da configuração de colapso usando o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* ou as *Equações de Equilíbrio*. Cada uma dessas aproximações tem as suas vantagens e desvantagens para algumas situações. Em geral, é mais simples utilizar o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, embora haja alguma dificuldade de manipulação algébrica; entretanto, atualmente está bastante claro que o

Método das Equações de Equilíbrio nada mais é do que uma outra forma de se apresentar o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

III.4.1 - Trabalhos Virtuais

"Se a um corpo rígido em equilíbrio estático sob a ação de um sistema de forças é dado um pequeno deslocamento virtual, o somatório do trabalho virtual realizado pelas forças é nulo."

Para aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais, cada uma das partes rígidas da configuração de colapso arbitrada pode ser vista como um corpo rígido porque as deformações da laje, com conseqüente deflexão, ocorrem somente nas linhas de ruptura. Estando os segmentos de laje em equilíbrio sob o carregamento externo, os momentos de flexão e torção e o esforço cortante ao longo das linhas de ruptura, escolhe-se um ponto conveniente para ser dado um deslocamento virtual na direção da carga. Então, os deslocamentos de todos os outros pontos e as rotações dos segmentos de laje em relação às linhas de ruptura são calculados em função desse deslocamento virtual dado e das dimensões geométricas. O trabalho será realizado pelo carregamento externo (*trabalho externo*), e pelos esforços internos ao longo das linhas de ruptura (*trabalho interno*). Por exemplo, o trabalho realizado por uma carga uniformemente distribuída na superfície por unidade de área (q_r) pode ser obtido considerando-se o trabalho de todos os segmentos:

$$W_e = \iint q_r \delta(x,y) dx dy = \sum Q_r \Delta \quad (\text{III.04})$$

onde Q_r é a carga total num segmento da laje e Δ o deslocamento do seu centróide. As reações nos apoios não contribuem já que estes não sofrem deslocamento. O trabalho interno realizado pelos momentos torsionais e os esforços cortantes é nulo quando se faz o somatório sobre toda a laje, já que, sendo as ações em cada lado da linha de ruptura iguais e opostas, para qualquer deslocamento da configuração de colapso, não existe movimento relativo entre os lados da linha de ruptura correspondendo aos momentos torsionais e aos esforços cortantes. Entretanto, desde que existe rotação relativa entre os dois lados da linha de ruptura, existe movimento relativo correspondendo aos momentos fletores. Assim, o trabalho interno total realizado ao longo de todas as linhas de ruptura é devido exclusivamente aos momentos fletores últimos e dado por

$$W_i = \sum -m_{rn} \varphi \ell \quad (\text{III.05})$$

onde ℓ é o comprimento da linha de ruptura e φ a rotação relativa sobre a linha de ruptura entre dois segmentos adjacentes. O sinal é negativo porque os momentos fletores estarão agindo na direção do carregamento. Assim, a equação do trabalho virtual pode ser escrita como

$$\sum Q_r \Delta - \sum m_{rn} \varphi \ell = 0 \quad (\text{III.06})$$

Quando aplicado a uma laje em particular, o deslocamento virtual cancela-se na equação e a carga é dada em termos das dimensões da laje e dos momentos resistentes últimos. Nos casos onde a configuração de colapso não pode ser desenhada sem se conhecer as dimensões que localizam as posições das linhas de ruptura, deve-se incluí-las na equação do trabalho virtual, ficando a equação também em função dessas dimensões. Desde que está sendo usada uma aproximação pelo limite superior, os valores requeridos são aqueles que minimizam o trabalho virtual Q_r e podem ser encontrados resolvendo-se o sistema de equações gerado pela derivação da expressão do trabalho virtual em relação a cada uma das dimensões desconhecidas. Substituindo-se esses valores na equação da carga última, obtém-se a carga de ruptura mínima.

III.4.2 - Equações de Equilíbrio

Nesse método é considerado, individualmente, o equilíbrio de cada segmento da configuração de colapso sob a ação de momentos fletores, momentos torsores, esforços cortantes e forças externas. Geralmente, as equações de equilíbrio são escritas em número suficiente tomando-se os momentos das ações em relação a eixos adequados; ao serem resolvidas simultaneamente permitem a eliminação das dimensões desconhecidas e o encontro da carga de ruptura. Nenhum processo de derivação é necessário e na maior parte dos casos a manipulação algébrica requerida para obter a solução é menor do que pelo Método dos Trabalhos Virtuais.

Pelo fato dos segmentos serem considerados separadamente, numa solução através das Equações de Equilíbrio todas as ações na linha de ruptura precisam ser conhecidas antes que a solução possa ser obtida. A expressão para o momento torsional nas linhas de ruptura, dado pelo Critério de Escoamento (Ruptura) de Johansen, está representada pela equação (III.02). Já a dedução dos esforços cortantes atuantes nas linhas de ruptura é o aspecto mais difícil na Teoria das Linhas de Ruptura e tem causado controvérsias. Um tratamento matemático rigoroso mostrou que alguns dos teoremas originais de Johansen para a sua determinação têm algumas limitações; contudo, quando conhecidas permitem a sua utilização com segurança. Em se considerando o equilíbrio das partes como um todo, basicamente, esses teoremas propõem como representar esses esforços ao longo da linha de ruptura por duas forças concentradas, de efeito estaticamente equivalente, atuando nos pontos terminais da linha de ruptura.

Em resumo, para resolver uma laje via Método das Equações de Equilíbrio, pode-se seguir o seguinte processo:

1. Arbitra-se uma configuração de colapso;
2. Calcula-se os valores das forças nodais necessárias;
3. Escreve-se as equações de equilíbrio tomando-se momentos em relação a eixos de rotação e, se preciso, achando as forças verticais em cada segmento de laje. O número necessário de equações de

equilíbrio é uma unidade a mais do que o número de dimensões desconhecidas requeridas para definir a posição das linhas de ruptura na configuração de colapso. Ao tomar os momentos para as equações de equilíbrio é melhor considerar a linha de ruptura como sendo "escalonada" nas direções da armação, pois assim, conforme já foi visto, os momentos torsionais não precisam ser considerados porque serão nulos nessas direções;

4. Soluciona-se o sistema de equações de equilíbrio para determinar as dimensões desconhecidas e daí encontrar a carga última.

III.5 - Configurações de Colapso Aproximadas: o Método da Tentativa-e-erro

É evidente que em casos onde uma ou mais dimensões desconhecidas precisam ser determinadas para bem definir a configuração de colapso, a quantidade de esforço algébrico necessário para alcançar a solução pode ser significativa. No método do trabalho virtual isso significa resolver simultaneamente as equações obtidas pela diferenciação da expressão da carga última com respeito a cada uma dessas dimensões por vez. No método do equilíbrio o sistema de equações de equilíbrio tem que ser resolvido para encontrar as dimensões desconhecidas. Em muitos casos, as equações a serem resolvidas não são lineares. Um aspecto infeliz da Teoria das Linhas de Ruptura é esse, porque, sendo uma aproximação pelo

para a configuração de colapso correspondente, obtendo-se assim uma ótima aproximação para a carga última. Dessa maneira, o método utiliza as equações de equilíbrio para determinar boas aproximações para as posições das linhas de ruptura e então obtém uma aproximação bem próxima da carga última através da equação do trabalho virtual. A partir daí, monta-se toda uma série de fórmulas aplicáveis a cada caso de carga e geometria de laje, resultando, ao final, sempre na solução de equações ou sistemas de equações, lineares ou não. Como não raro a solução exata é difícil, senão impossível, é comum, a favor da segurança, tomar-se aqui uma adaptação do *Princípio da Superposição de Efeitos*, facilmente demonstrado e cujo enunciado diz que a soma dos momentos últimos para uma série de carregamentos é maior ou igual ao momento último produzido quando todas as cargas atuam simultaneamente, pressupondo-se, naturalmente, que todos os momentos sejam de mesmo sinal.

Como em geral calcula-se a segurança à ruptura, a Teoria das Linhas de Ruptura fornece bons valores para os momentos resistentes últimos e daí o valor do coeficiente de segurança. A Teoria Elástica fornece segurança exagerada, sendo, portanto, anti-econômica, porque só é válida antes da fissuração; ao surgirem as fissuras, haverá uma redistribuição de esforços e a situação aproxima-se das hipóteses feitas na Teoria das Linhas de Ruptura. Todavia, embora essa teoria possibilite a determinação correta dos esforços que servirão de base ao dimensionamento, não fornece porém, qualquer informação quanto às deformações sob a ação das cargas de serviço. Para essa verificação, deve-se lançar

limite superior, o fracasso no uso dos valores corretos dessas dimensões na equação de carga significa uma carga última para a laje superestimada, levando a uma situação contra a segurança. Isso pareceria desencorajar o uso de configurações de ruptura aproximadas, felizmente, entretanto, pode ser mostrado que utilizando-se o método do trabalho virtual, uma configuração de colapso que difira apenas levemente da configuração correta dará uma estimativa próxima do valor real para a carga última. Dessa maneira, aproximações razoáveis com respeito à configuração de colapso podem ser utilizadas para simplificar as equações de carga última em muitos casos. A precisão na maior parte dos casos de engenharia é bastante boa.

Em algumas situações, entretanto, fica difícil decidir por uma posição aproximada para as linhas de ruptura que forneça precisão suficiente. Então, com o objetivo de evitar a pesada álgebra envolvida na solução exata, adota-se um procedimento de tentativa-e-erro. Numa solução de tentativa-e-erro, uma configuração de colapso provável é considerada; a partir daí, utiliza-se as equações de equilíbrio para calcular a carga última suportada por cada segmento rígido dessa configuração de ruptura. Se as cargas últimas assim encontradas não estiverem próximas, pois somente serão iguais se o mecanismo considerado for o correto, a configuração de colapso é alterada. Repetindo-se o processo até que haja melhor concordância entre as cargas últimas; uma inspeção indicará a maneira de alterar a configuração de ruptura de modo a melhorar os resultados. Quando se chegar ao ponto desejado, escreve-se a equação do trabalho virtual

mão de métodos para determinação de flechas em regime elástico.

III.6 - A Comprovação Experimental

Parece óbvio que a validade das hipóteses feitas na Teoria das Linhas de Ruptura devesse ser verificada através de testes experimentais antes que o método fosse usado com confiabilidade em análise e projeto. Era particularmente importante que o método devesse dar uma estimativa segura da carga última da laje e que lajes projetadas pelo método se comportassem satisfatoriamente quando sob a ação das cargas de serviço. Com esse intuito, um grande número de testes foram realizados desde a proposição da teoria.

JOHANSEN[08] concluiu que a série de testes conduzidos pela *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton* fornece ampla evidência da real natureza das linhas de ruptura e da validade da teoria. As diferenças entre a teoria e os testes foram pequenas e principalmente para o lado conservador.

O testes do *IRABA (Institute of Applied Research on Reinforced Concrete)* [10] concluíram que a configuração de ruptura de uma laje pode ser prevista com precisão utilizando-se a Teoria das Linhas de Ruptura. Os tipos de aço utilizados e as comparações das cargas últimas mostraram que a teoria é aplicável a aços com patamar de escoamento curto ou mesmo com tensão de escoamento não muito bem definida.

Testes realizados por JAEGER [11], pelo *TNO Institute for Building Materials and Structures* [12], por TAYLOR [13,14] e por PARR [15] mostraram que a Teoria das Linhas de Ruptura fornece uma estimativa segura da carga última: o valor medido nos testes mostrou-se acima do previsto pela teoria. Esse "ganho" de resistência foi atribuído ao endurecimento (*strain hardening*) da armação e ao efeito de membrana desenvolvido ao nível das grandes deformações. Em serviço, as lajes comportaram-se satisfatoriamente; entretanto, JAEGER [11] faz a ressalva de que uma disposição da armadura de maneira não consistente com a Teoria Elástica deve ser evitada porque pode levar a uma fissuração generalizada quando em serviço.

CAPÍTULO IV

O MODELO TEÓRICO PROPOSTO

IV.1 - A Concepção do Elemento-Charneira: o CHARPLAS

Apesar de ser bastante intuitiva e fornecer bons resultados, a Teoria das Linhas de Ruptura não raramente causa certos transtornos ao recair na solução de sistemas de equações não-lineares. Além disso, sendo uma aproximação para o limite superior, é necessário analisar-se todos os mecanismos de colapso possíveis de modo a não superestimar a carga última, não sendo difícil num mesmo problema enfrentar-se mais de uma vez a solução de complicados sistemas de equações. Outro fator de dificuldade é a utilização de materiais não-homogêneos, por exemplo, armação variável, o que leva a uma maior complicação tanto das equações quanto da própria definição do problema.

Já foram feitas anteriormente algumas tentativas no sentido de automatizar todo esse procedimento, mas sempre fica-se limitado a uma série de geometrias e carregamentos específicos e não muito complexos. Em vista disso, a utilização da Teoria das Linhas de Ruptura na forma em que se encontra está para a formulação que será aqui apresentada assim como a Teoria da Elasticidade para os métodos numéricos de solução, tipo Elementos Finitos, Diferenças Finitas ou Elementos de Contorno.

Embora já exista uma série de elementos finitos adequados à análise elasto-plástica de placas, o seu uso para determinar a carga de colapso é pouco eficiente se comparado com a análise limite: o tempo computacional envolvido é bastante elevado e devido, principalmente, às inúmeras iterações para a solução do sistema de equações não-lineares. O problema mais sério é que a análise elasto-plástica via elementos finitos só reproduz a carga de ruptura quando levada até o colapso partindo-se do regime elástico e não de forma direta como se consegue com o uso das técnicas de análise limite.

A idéia do elemento-charneira (CHARPLAS) introduzido por VAZ[23] é, com base na discretização fornecida pelos elementos finitos (Modelo de Deslocamentos), possibilitar a busca automática do mecanismo de ruptura com uma definição simples da superfície de colapso a nível dos esforços seccionais. O elemento também pode ser usado na análise elasto-plástica, apresentando a vantagem do pequeno número de graus de liberdade em relação aos elementos finitos convencionais e a definição simples das relações constitutivas.

Neste ítem serão apresentadas as equações básicas do elemento utilizadas, posteriormente, na formulação do problema de análise limite, da adaptação da estrutura e da análise elasto-plástica.

A idéia fundamental do modelo é, considerando-se o elemento absolutamente rígido, concentrar as propriedades de

flexão em uma mola elasto-plástica com comportamento definido por uma simples curva momento versus rotação. Uma boa analogia para o elemento seria uma dobradiça. Cada elemento é, então, o mínimo essencial para representar as propriedades elasto-plásticas da estrutura na sua região; em outras palavras, está se considerando que a configuração de colapso pode ser representada pelos elementos, isto é, cada mola elasto-plástica representa, potencialmente, uma charneira plástica, embora isto não signifique que todas as molas tornar-se-ão charneiras plásticas. Espera-se, todavia, que possíveis configurações de colapso estejam incluídas na malha feita para tentar representar o colapso da estrutura.

IV.2 - A Formulação do Elemento

IV.2.1 - O Sistema Local de Coordenadas Generalizadas

O esquema do elemento-charneira encontra-se na figura (IV.01). O elemento possui quatro graus de liberdade, correspondendo aos deslocamentos na direção z (ou Z) dos quatro pontos nodais. Com referência sempre ao plano médio da laje, os nós 1 (nó inicial) e 2 (nó final) definem a direção do eixo x . O eixo z tem direção perpendicular ao eixo x e sentido dado através da formação de um triedro direto de maneira que o nó 3 tenha coordenada y positiva e o nó 4, coordenada y negativa. As propriedades de flexão na direção x da região formada pelos nós 1234, como já foi dito, estão concentradas na mola elasto-plástica ao longo da reta que

une os nós 1 e 2, que nada mais é do que a representação da linha de ruptura ou charneira plástica; assim, nada mais natural do que referenciar o elemento através dos nós inicial e final. O comportamento dessa mola fica definido por uma curva relacionando o momento e a rotação na mesma. Os triângulos formados pelos nós 123 e 214 são considerado absolutamente rígidos e interligados através da charneira.

IV.2.2 - A Equação de Compatibilidade

De acordo com as definições já feitas, o objetivo é determinar a relação entre a rotação da charneira e os deslocamentos nodais. O procedimento para tal é análogo à determinação das funções de forma de um elemento finito qualquer, desde que se considere a rotação como o "deslocamento" no interior do elemento e adote-se as hipóteses básicas da Teoria das Linhas de Ruptura no que diz respeito a deslocamentos e rotações.

Considere-se o vetor de deslocamentos nodais do elemento:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (IV.01)$$

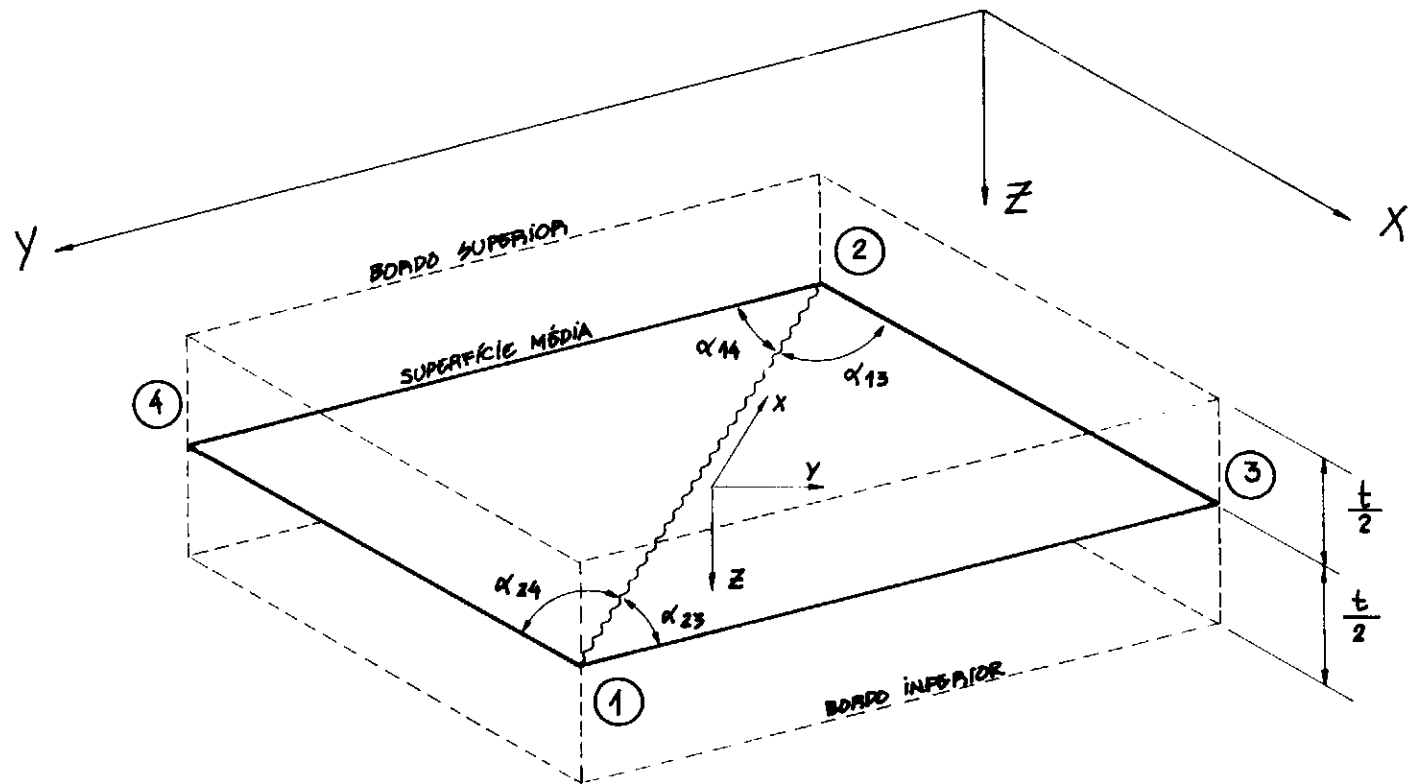


Figura IV.Ø1 - Esquema do Elemento-Charneira Elasto-Plástico

onde \bar{u}_i representa o deslocamento do nó i na direção z . A rotação total da charneira φ pode ser determinada pela contribuição de cada parcela de rotação $\Delta\varphi_i$ provocada por cada deslocamento nodal i , ou seja,

$$\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_4 \quad (\text{IV.02.a})$$

Seja cada uma dessas parcelas de rotação diretamente proporcional ao deslocamento nodal \bar{u}_i , isto é,

$$\Delta\varphi_i = \bar{H}_i \bar{u}_i \quad (\text{IV.02.b})$$

Escrevendo-se matricialmente:

$$\varphi = \bar{H}^T \bar{u} \quad (\text{IV.02.c})$$

A equação (IV.02.c) é a equação de compatibilidade de deslocamentos, que relaciona a rotação na charneira com os deslocamentos nodais através do vetor \bar{H} . A convenção de sinais adotada é a mesma dos momentos fletores, qual seja, positiva quando as fibras inferiores são tracionadas e negativa em caso contrário.

Seja agora calcular a rotação $\Delta\varphi_1$. Seguindo-se a definição, produz-se um deslocamento \bar{u}_1 , mantendo-se todos os outros nulos; assim, pela figura (IV.02.a):

$$\text{tg } \Delta\varphi_1^a = \frac{\bar{u}_1}{e_1^a} = \frac{\bar{u}_1}{e} \text{cotg } \alpha_{14} \quad (\text{IV.03.a})$$

Figura IV.02.a - Configuração para

$$\bar{u}_1 \neq \emptyset, \bar{u}_2 = \emptyset, \bar{u}_3 = \emptyset, \bar{u}_4 = \emptyset$$

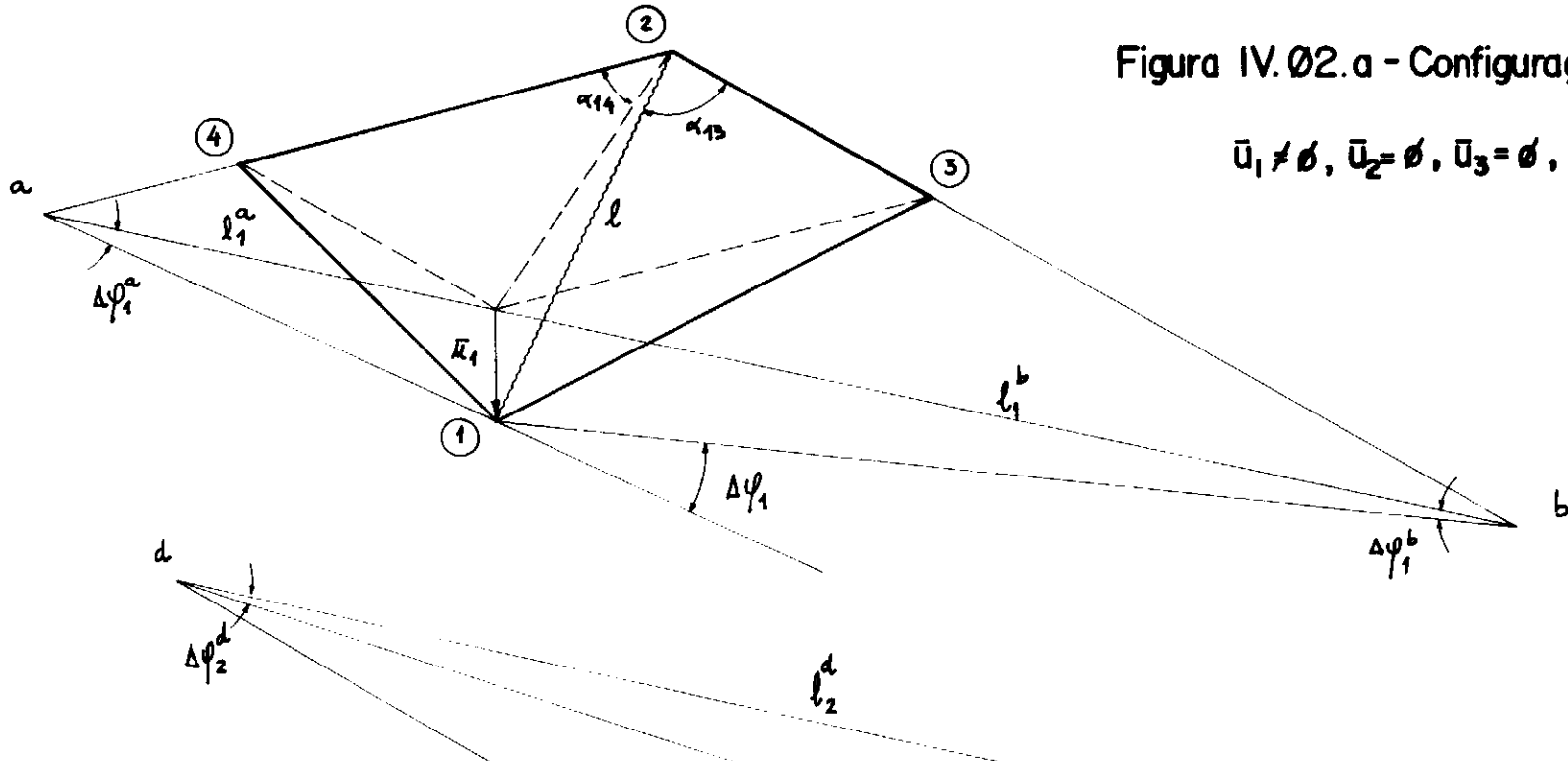
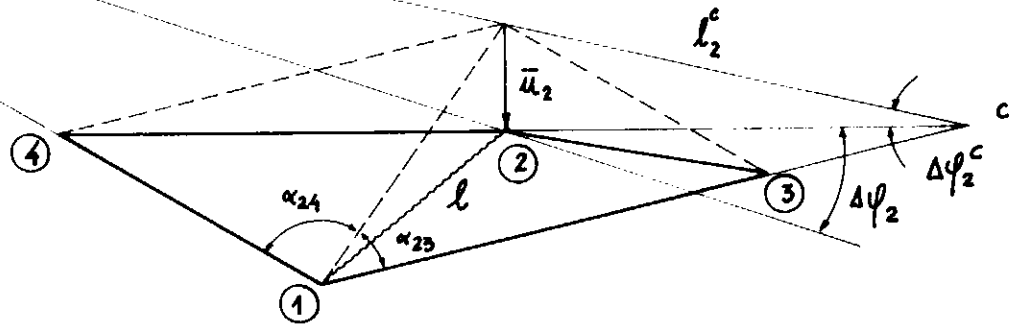


Figura IV.02.b - Configuração para

$$\bar{u}_1 = \emptyset, \bar{u}_2 \neq \emptyset, \bar{u}_3 = \emptyset, \bar{u}_4 = \emptyset$$



$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_1^b = \frac{\bar{u}_1}{\ell_1^b} = \frac{\bar{u}_1}{\ell} \operatorname{cotg} \alpha_{13} \quad (\text{IV.03.b})$$

sendo ℓ o comprimento da charneira. No âmbito dos pequenos deslocamentos, pode-se aproximar a tangente do ângulo pelo próprio ângulo, ou seja,

$$\operatorname{tg} \varphi \cong \varphi \quad (\text{IV.03.c})$$

Donde

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \Delta\varphi_1^a + \Delta\varphi_1^b \\ &= \frac{\bar{u}_1}{\ell} \left[\operatorname{cotg} \alpha_{13} + \operatorname{cotg} \alpha_{14} \right] \\ &= \bar{H}_1 \bar{u}_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.03.d})$$

Analogamente, pela figura (IV.02.b), para $\Delta\varphi_2$ tem-se

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2 &= \frac{\bar{u}_2}{\ell} \left[\operatorname{cotg} \alpha_{23} + \operatorname{cotg} \alpha_{24} \right] \\ &= \bar{H}_2 \bar{u}_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.04})$$

Pela geometria da figura (IV.02.c),

$$\ell = h_3 \operatorname{cotg} \alpha_{13} + h_3 \operatorname{cotg} \alpha_{23} \quad (\text{IV.05.a})$$

Assim, determina-se $\Delta\varphi_3$:

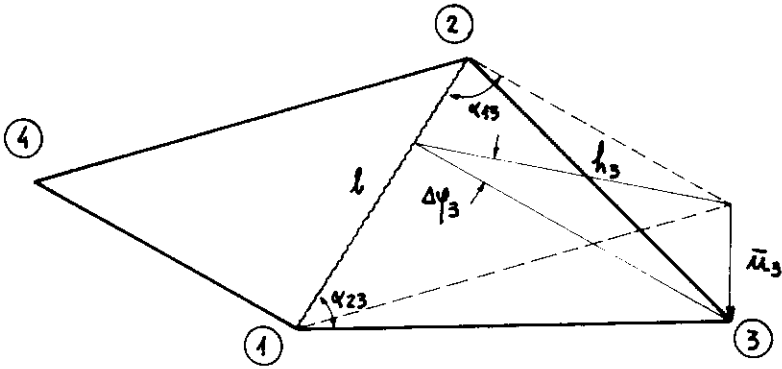


Figura IV.02.c - Configuração para

$$\bar{u}_1 = \emptyset, \bar{u}_2 = \emptyset, \bar{u}_3 \neq \emptyset, \bar{u}_4 = \emptyset$$

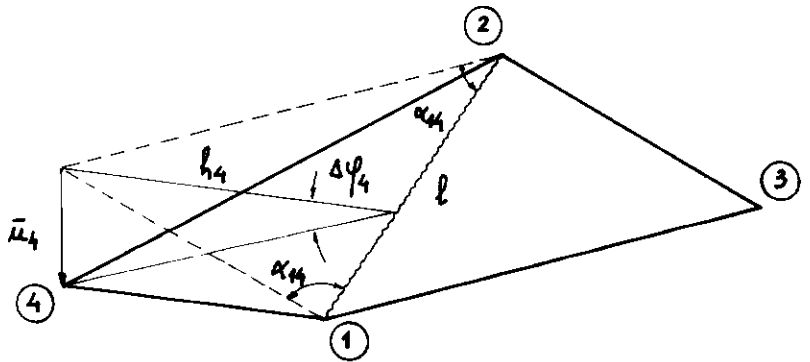


Figura IV.02.d - Configuração para

$$\bar{u}_1 = \emptyset, \bar{u}_2 = \emptyset, \bar{u}_3 = \emptyset, \bar{u}_4 \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_3 &= - \frac{\bar{u}_3}{h_3} \\
 &= - \frac{\bar{u}_3}{\ell} \left[\cotg \alpha_{13} + \cotg \alpha_{23} \right] \\
 &= \bar{H}_3 \bar{u}_3 \qquad \qquad \qquad (IV.05.b)
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, tem-se $\Delta\varphi_4$ pela figura (IV.02.d):

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi_4 &= - \frac{\bar{u}_4}{\ell} \left[\cotg \alpha_{14} + \cotg \alpha_{24} \right] \\
 &= \bar{H}_4 \bar{u}_4 \qquad \qquad \qquad (IV.06)
 \end{aligned}$$

O vetor \bar{H} , então, será dado por

$$\bar{H} = \frac{1}{\ell} \left\{ \begin{array}{l} \cotg \alpha_{13} + \cotg \alpha_{14} \\ \cotg \alpha_{23} + \cotg \alpha_{24} \\ - \cotg \alpha_{13} - \cotg \alpha_{23} \\ - \cotg \alpha_{14} - \cotg \alpha_{24} \end{array} \right\} \qquad (IV.07)$$

onde \bar{H}_i pode ser definido como sendo a rotação devida ao deslocamento unitário \bar{u}_i do nó i , ou seja, \bar{H} é o vetor de interpolação do elemento.

Uma nota importante deve ser feita. Apesar de ser formulado com quatro nós, à semelhança dos elementos finitos isoparamétricos, o elemento-charneira pode degenerar-se, ou seja, um dos nós, 3 ou 4, pode não existir, ficando o elemento com apenas três graus de liberdade; nesse caso, toda a formulação continua sendo válida, fazendo-se $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 90^\circ$ se o nó 3 não existir ou $\alpha_{14} = \alpha_{24} = 90^\circ$ caso o nó 4 não exista. As situações em que isto acontece serão vistas mais

adiante.

A primeira vista, pode parecer paradoxal, ou mesmo completamente errado, considerar-se pequenos deslocamentos na análise plástica limite; entretanto, tal fato é explicado por estar se tomando o elemento exatamente no instante da ruptura. Em outras palavras, quando se chega ao limiar da configuração de colapso, qualquer acréscimo de deslocamento, infinitesimal que seja, provocará a ruína, levando os deslocamentos ao "infinito", à semelhança do que acontece nas rótulas plásticas.

IV.2.3 - A Equação de Equilíbrio

O objetivo agora é determinar a relação entre as forças externas aplicadas e o momento total resistente da charneira de modo a equilibrar o elemento. Seja o grupo de forças externas \bar{F}_i aplicadas na direção dos deslocamentos nodais representado por

$$\bar{F} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.08})$$

Essas forças tentarão deformá-lo e ele resistirá através do momento total resistente \underline{M} na mola, dado por

$$\underline{M} = m \epsilon \quad (\text{IV.09})$$

onde \underline{m} é o momento resistente da seção transversal da laje por unidade de largura. Para formular o problema, utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais que, para um deslocamento virtual nos nós do elemento, afirma que a primeira variação do trabalho externo realizado é igual à primeira variação da energia interna de deformação. Assim, seja o deslocamento virtual $\underline{\delta\bar{u}}$ provocando uma rotação virtual $\underline{\delta\varphi}$. A primeira variação do trabalho realizado pelas forças aplicadas é dada por

$$\delta^1 W = (\underline{\delta\bar{u}})^T \underline{\bar{f}} \quad (\text{IV.10.a})$$

A primeira variação da energia de deformação é, simplesmente,

$$\delta^1 U = (\underline{\delta\varphi})^T \underline{M} \quad (\text{IV.10.b})$$

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se

$$(\underline{\delta\bar{u}})^T \underline{\bar{f}} = (\underline{\delta\varphi})^T \underline{M} \quad (\text{IV.10.c})$$

Levando-se a equação (IV.02.c) na equação (IV.10.c), obtém-se

$$(\underline{\delta\bar{u}})^T \underline{\bar{f}} = (\underline{\delta\bar{u}})^T \underline{\bar{H}} \underline{M} \quad (\text{IV.10.d})$$

Como o deslocamento virtual pode ser qualquer, desde que compatível com a hipótese de pequenos deslocamentos, para que a igualdade (IV.10.d) se verifique é necessário que

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{H}} \mathbf{M} \quad (\text{IV.11})$$

A equação (IV.11) é a equação de equilíbrio ao nível do elemento e , juntamente com a equação (IV.02.o), representa o *Princípio da Contra-gradiente*, também conhecido como *Dualidade Estático-cinematica*.

Uma outra forma de se chegar a esses mesmos resultados seria aplicar diretamente os princípios de equilíbrio num elemento-charneira (por exemplo, $\Sigma M_{12} = 0$, $\Sigma M_{23} = 0$, $\Sigma F_y = 0$).

IV.2.4 - A Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez é indispensável na formulação de uma análise elástica ou elasto-plástica, onde se deseja informações sobre os deslocamentos nodais ou sobre a história das deformações. Sendo assim, apesar desse modelo ser dirigido a uma análise limite onde somente a carga e a configuração de colapso são de interesse, também pode ser usado na análise elasto-plástica desde que se conheça a expressão da sua matriz de rigidez. Entretanto, para isso é necessária a definição do comportamento do material nos regimes elástico e plástico devido a dois motivos principais:

- A formulação de análise elasto-plástica é feita via formulação incremental onde as informações no instante atual dependem do(s) instante(s) anteri

or(es); sendo assim, é muito importante uma variação suave da rigidez, principalmente devido aos conhecidos problemas de instabilidade dos algoritmos;

• Para que seja possível alcançar o ponto de colapso é necessário que o modelo inicie do regime elástico; as linhas de ruptura formar-se-ão à medida que o regime plástico (e de ruptura) for sendo atingido.

Para poder encontrar a matriz de rigidez tangente do elemento-charneira, é necessário definir melhor a relação entre o momento atuante e a rotação na linha de ruptura. Definir-se-á, inicialmente, a relação entre a rotação e a curvatura numa seção qualquer, tendo em vista que, normalmente, as propriedades das seções transversais serem dadas em termos desses parâmetros.

Seja a região triangular da laje conforme a figura (IV.03). Se o material tiver comportamento linear-elástico e \bar{u}_s e \bar{u}_i forem, respectivamente, os deslocamentos das fibras superiores e inferiores da seção \bar{l}_2 , as deformações específicas das respectivas fibras na região triangular cujas propriedades estão concentradas na linha de ruptura \bar{l}_2 podem ser aproximadas por

$$\epsilon_s = \frac{\bar{u}_s}{\bar{h}} \quad (\text{IV.12.a})$$

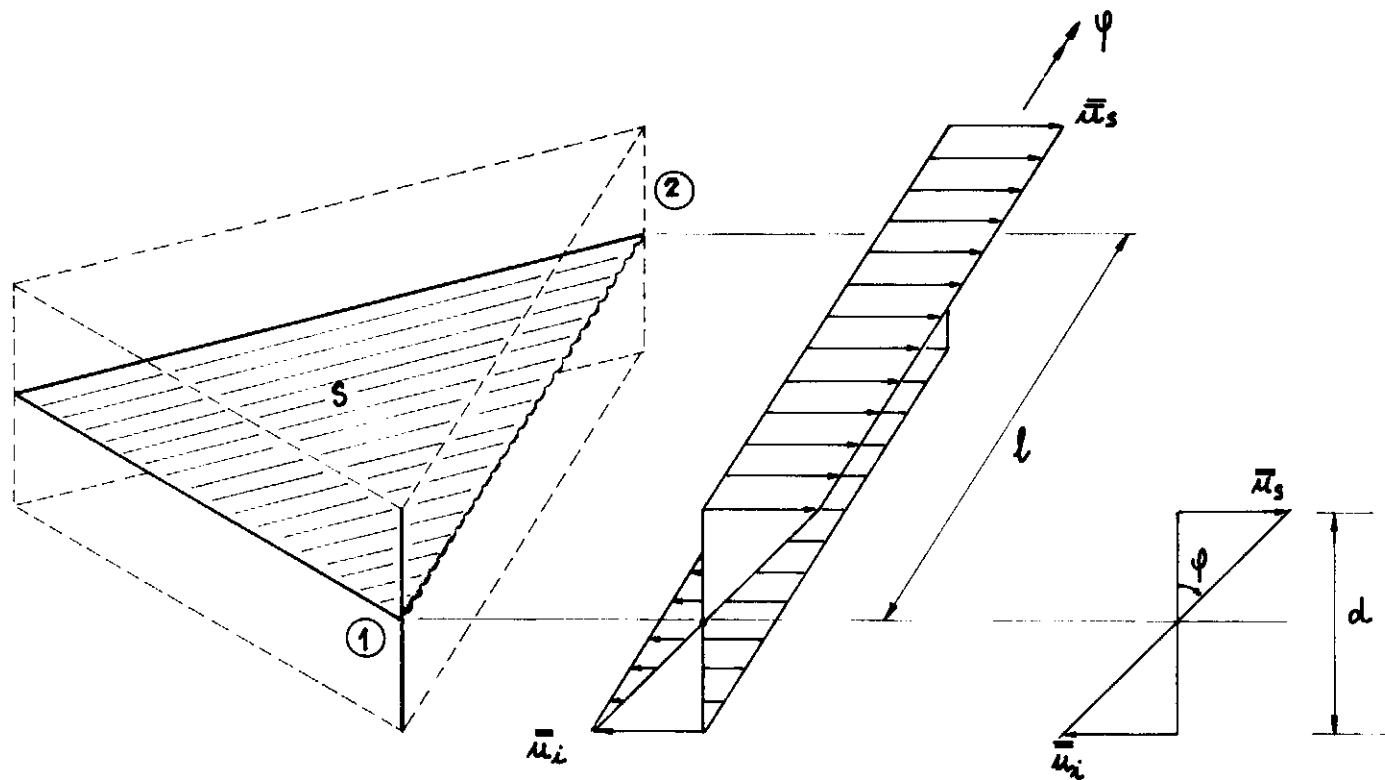


Figura IV.03 - Relação entre a Curvatura e a Rotação na Seção da Charneira

$$\varepsilon_i = \frac{\bar{u}_i}{\bar{h}} \quad (\text{IV.12.b})$$

onde

$$\bar{h} = \frac{S}{e} = \frac{e h}{2} \frac{1}{e} = \frac{h}{2} \quad (\text{IV.12.c})$$

A curvatura aproximada da seção será dada, então, por

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_i}{d} = \frac{\bar{u}_s - \bar{u}_i}{d} \frac{1}{\bar{h}} \\ &= 2 \frac{\varphi}{h} \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

onde φ é a rotação e d a altura útil da seção $\hat{1}\hat{2}$. Tomando-se um elemento-charneira completo, ter-se-á:

$$\varphi = \psi \left\{ \frac{h_3 + h_4}{2} \right\} \quad (\text{IV.14})$$

onde h_3 e h_4 são, respectivamente, as alturas dos triângulos $\hat{1}23$ e $\hat{2}14$, tomando-se como base a linha de ruptura $\hat{1}\hat{2}$.

Em acordo com todas essas considerações, definiu-se uma aproximação para a curva momento versus curvatura conforme sugerido por BIGNON [16], que pode ser vista no Apêndice A. Com a relação dada por (IV.14), transforma-se essa curva numa curva momento versus rotação para cada elemento-charneira. Como essa relação é linear, essa transformação nada mais é do que uma "mudança de escala". Numa formulação incremental considera-se, por aproximação, que a variação da rigidez é linear em cada passo. Dessa forma, para

cada trecho da curva pode se relacionar o momento e a rotação da seção através de um coeficiente que será chamado *coeficiente de rigidez tangente* (T_K), definido pela tangente à curva no ponto em consideração, isto é,

$$M = T_K \varphi \quad (\text{IV.15.a})$$

onde

$$T_K = \left. \frac{dM}{d\varphi} \right|_{\varphi_0} \quad (\text{IV.15.b})$$

Pré-multiplicando-se a equação (IV.15.a) pelo vetor de interpolação do elemento, tem-se:

$$\underline{H} M = \underline{H} T_K \varphi \quad (\text{IV.16.a})$$

Usando agora a relação (IV.02.c) na equação (IV.16.a) e observando-se a equação (IV.11), chega-se a

$$\underline{F} = \underline{H} M = \underline{H} T_K \underline{H}^T \underline{u} \quad (\text{IV.16.b})$$

que pode ser reescrita como

$$\underline{F} = \underline{T_K} \underline{u} \quad (\text{IV.16.c})$$

onde

$$\underline{T_K} = \underline{H} T_K \underline{H}^T \quad (\text{IV.16.d})$$

é a matriz de rigidez tangente do elemento-charneira elasto-plástico.

Ao considerar-se eixos de simetria da estrutura de modo a reduzir o número total de graus de liberdade aparecerá o problema das charneiras que estarão sobre esses eixos. Para esses elementos parece claro que, pela própria condição de simetria, cada triângulo, Δ_{123} e Δ_{214} , responderá por metade da rigidez do elemento, bastando, então, considerar-se metade do coeficiente de rigidez tangente para essas charneiras. Além disso, sendo os deslocamentos \bar{u}_3 e \bar{u}_4 iguais, pela equação (IV.02):

$$\varphi = \bar{H}_1 \bar{u}_1 + \bar{H}_2 \bar{u}_2 + (\bar{H}_3 + \bar{H}_4) \bar{u}_3 \quad (\text{IV.17.a})$$

onde

$$\alpha_{14} = \alpha_{13} \quad (\text{IV.17.b})$$

e

$$\alpha_{24} = \alpha_{23} \quad (\text{IV.17.c})$$

Assim, é perfeitamente possível utilizar-se toda a formulação anterior introduzindo-se as modificações dadas pelas equações (IV.17).

IV.2.5 - As Forças Nodais Equivalentes

Da mesma maneira que qualquer outro tipo de elemento finito convencional, as forças aplicadas fora dos nós do elemento-charneira podem ser transformadas em forças nodais de efeito equivalente, isto é, realizando o mesmo trabalho. Isso não só é fundamental para que se possa utilizar o Método dos Elementos Finitos como também conduz a uma facilidade muito maior da prescrição de esforços aplicados. Serão vistos aqui apenas alguns dos tipos de carga mais usuais; muitos outros podem ser criados respeitando-se as hipóteses adotadas. Nos cálculos que se seguem, para se evitar repetições desnecessárias e simplificar os procedimentos, considerar-se-ão as cargas atuando em elementos-charneira degenerados, ou sejam, apenas com os nós i , j e k . Como consequência direta desse fato, os vetores aqui utilizados serão:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{H}_j \\ \bar{H}_k \end{pmatrix} \quad (\text{IV.18.a})$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \\ \bar{F}_k \end{pmatrix} \quad (\text{IV.18.b})$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{U}_k \end{pmatrix} \quad (\text{IV.18.c})$$

Antes dos cálculos propriamente ditos, cabe aqui ainda uma consideração. Como o elemento é, por hipótese, absolutamente rígido, a variação dos deslocamentos segundo os lados é linear; desse modo, para interpolar o deslocamento de um ponto (X, Y) no interior do $\underline{\Delta}_{ijk}$, é possível a utilização da mesma função de forma do elemento finito triangular TRIN3, isto é,

$$\bar{u}(X, Y) = (\underline{A} X + \underline{B} Y + \underline{C})^T \bar{u} = \bar{N} \bar{u} \quad (\text{IV.19.a})$$

onde

$$\underline{A} = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} Y_j - Y_k \\ Y_k - Y_i \\ Y_i - Y_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19.b})$$

$$\underline{B} = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} B_i \\ B_j \\ B_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} X_k - X_j \\ X_i - X_k \\ X_j - X_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19.c})$$

$$\underline{C} = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} C_i \\ C_j \\ C_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} X_j Y_k - X_k Y_j \\ X_k Y_i - X_i Y_k \\ X_i Y_j - X_j Y_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19.d})$$

$$S = \frac{1}{2} | A_i X_i + A_j X_j + A_k X_k | \quad (\text{IV.19.e})$$

onde X_n e Y_n são as coordenadas cartesianas do nó \underline{n} e S a área do triângulo formado pelos três nós.

IV.2.5.1 - Força Concentrada em Ponto Interno

Seja \bar{u}_p o deslocamento do ponto (X,Y) provocado pela força externa \underline{P} como mostrado na figura (IV.04). Aplicando-se a equivalência de trabalho realizado juntamente com a equação (IV.19.a), tem-se:

$$\bar{\underline{u}}^T \bar{\underline{f}} = \bar{u}_p P = \bar{\underline{N}} \bar{\underline{u}} P = \bar{\underline{u}}^T \bar{\underline{N}}^T P \quad (\text{IV.20.a})$$

Para que a igualdade (IV.20.a) seja satisfeita:

$$\bar{\underline{f}} = \bar{\underline{N}}^T P \quad (\text{IV.20.b})$$

IV.2.5.2 - Força Uniformemente Distribuída

Seja o triângulo carregado com a força de volume q da figura (IV.05). O valor das forças nodais equivalentes pode ser dado pelo trabalho realizado em todo o volume do triângulo:

$$\bar{\underline{f}} = \int_V \bar{\underline{N}}^T q dV \quad (\text{IV.21.a})$$

onde V representa o volume do elemento. Sendo constante a espessura t do triângulo, pode-se reescrever a equação (IV.21.a) como a integral de superfície

$$\bar{\underline{f}} = t \int_S \bar{\underline{N}}^T q dS \quad (\text{IV.21.b})$$

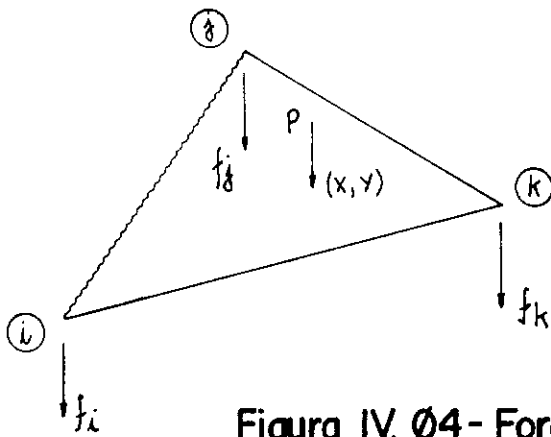


Figura IV. Ø4- Força concentrada

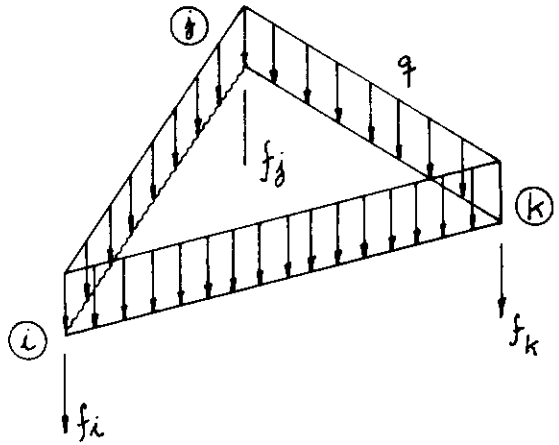


Figura IV. Ø5-Força Uniformemente Distribuída

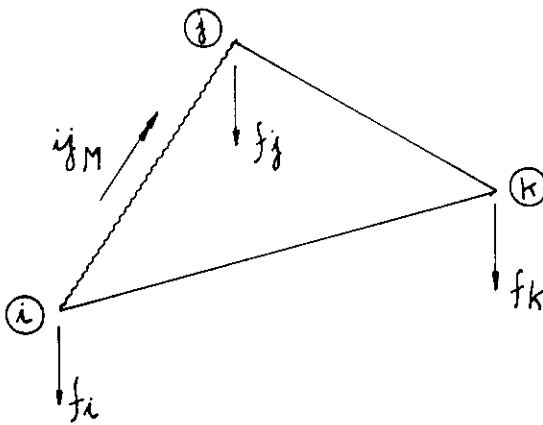


Figura IV. Ø6- Momento Concentrado num lado

Efetuada-se essa integral com a ajuda das coordenadas triangulares, obtém-se:

$$\bar{f} = \frac{tqS}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.21.c})$$

Se a carga for apenas na superfície, basta tomar a espessura unitária nas equações (IV.21.b,c).

IV.2.5.3 - Momento ao Longo do Lado

Para o momento total ${}^{ij}M$ ao longo do lado ij segundo a figura (IV.06), a equação (IV.11) fornece a relação com as forças nodais. Assim, tem-se

$$\bar{f} = \bar{H} {}^{ij}M \quad (\text{IV.22})$$

IV.2.5.4 - Momento Uniformemente Distribuído

Sejam os momentos m_x e m_y uniformemente distribuídos segundo as direções \underline{X} e \underline{Y} como mostrado na figura (IV.07.a). Projetando-se esses momentos segundo as direções dos lados ij e ik do elemento, pela figura (IV.07.b) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} {}^{ik}m \\ {}^{ij}m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{ik} & \cos \beta_{ij} \\ \sin \beta_{ik} & \sin \beta_{ij} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.23.a})$$

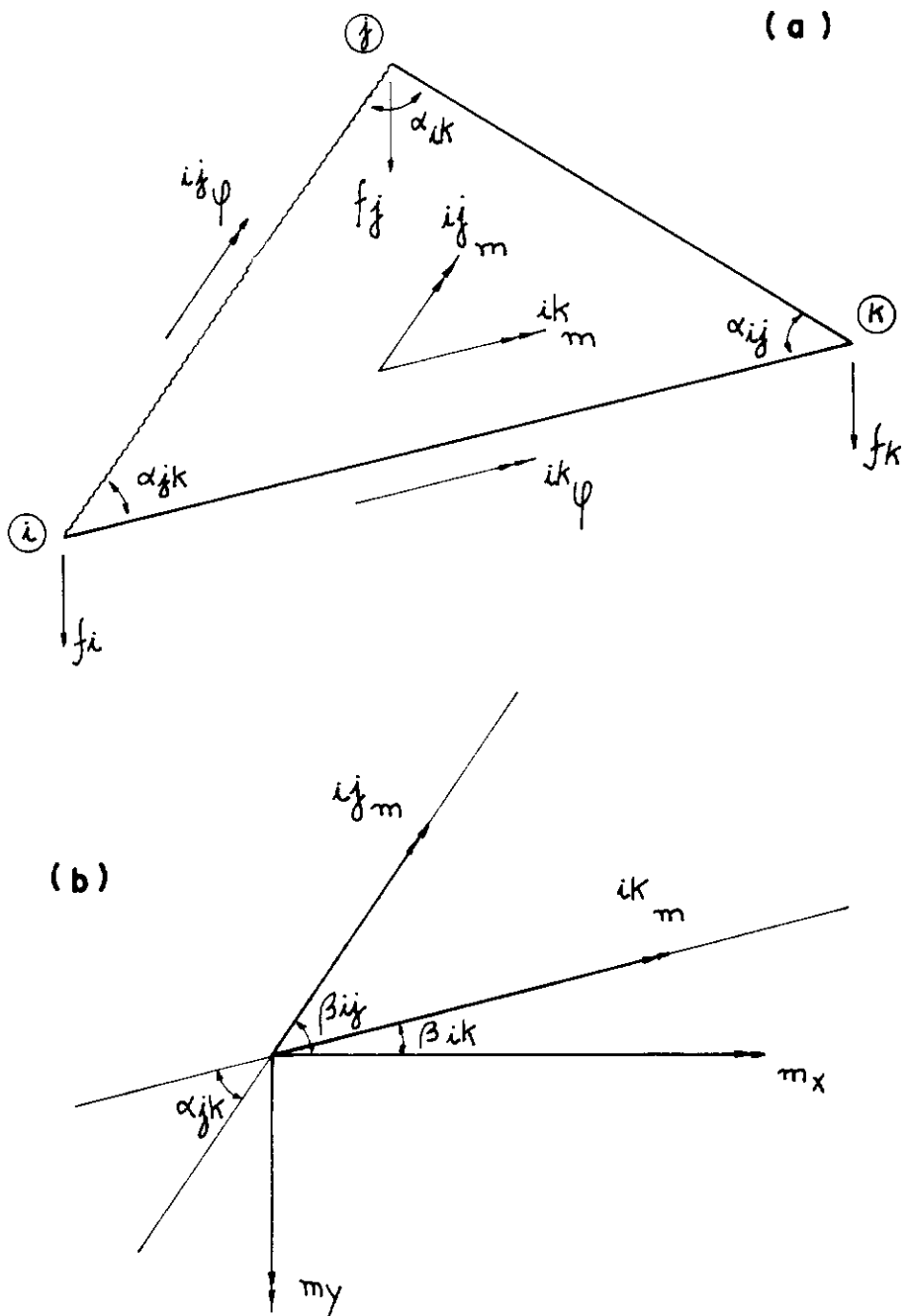


Figura IV.07 - Momentos Uniformemente Distribuídos na Superfície

onde β_{ij} e β_{ik} são, respectivamente, os ângulos formados pelos lados \underline{ij} e \underline{ik} com o eixo \underline{X} . As rotações desses mesmos lados provocadas por esses momentos são dadas por

$$ij_{\varphi} = ij_{\underline{H}}^T \underline{\bar{u}} \quad (\text{IV.23.b})$$

$$ik_{\varphi} = ik_{\underline{H}}^T \underline{\bar{u}} \quad (\text{IV.23.c})$$

onde

$$ij_{\underline{H}} = \frac{1}{e_{ij}} \left\{ \begin{array}{l} \cotg \alpha_{ik} \\ \cotg \alpha_{jk} \\ - \cotg \alpha_{ik} - \cotg \alpha_{jk} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.23.d})$$

$$ik_{\underline{H}} = \frac{1}{e_{ik}} \left\{ \begin{array}{l} \cotg \alpha_{ij} \\ - \cotg \alpha_{ij} - \cotg \alpha_{jk} \\ \cotg \alpha_{jk} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.23.e})$$

sendo e_{ij} e e_{ik} os comprimentos dos lados \underline{ij} e \underline{jk} . Pela equivalência de trabalho realizado:

$$\underline{\bar{u}}^T \underline{\bar{f}} = \int_S \left\{ ij_{\varphi}^T ij_m + ik_{\varphi}^T ik_m \right\} dS \quad (\text{IV.24.a})$$

Efetuando-se a integral de superfície e utilizando-se as equações (IV.23), tem-se:

$$\underline{\bar{u}}^T \underline{\bar{f}} = \underline{\bar{u}}^T \left\{ ij_{\underline{H}} ij_m + ik_{\underline{H}} ik_m \right\} S \quad (\text{IV.24.b})$$

Para que a igualdade se verifique:

$$\underline{\tilde{f}} = \left\{ \begin{matrix} {}^1j_H & {}^1j_m & + & {}^1k_H & {}^1k_m \end{matrix} \right\} S \quad (\text{IV.24.c})$$

IV.2.5.5 - Força Linearmente Distribuída

Seja a força uniformemente distribuída p aplicada segundo a direção da reta $aX + bY + c = 0$ desde o ponto 1 até o ponto 2 conforme a figura (IV.08.a). Uma força concentrada infinitesimal dP aplicada no ponto de coordenadas (X, Y) fornece, pela equação (IV.20.b), a seguinte contribuição ao vetor de forças nodais:

$$d\underline{\tilde{f}} = \underline{\tilde{N}}^T dP \quad (\text{IV.25.a})$$

Considerando-se que a força linearmente distribuída seja o somatório de uma sucessão de resultantes infinitesimais dP em segmentos infinitesimais ds da reta, fazendo-se o ponto (X, Y) percorrer a reta $\overline{12}$, tem-se, pela figura (IV.08.b):

$$dP = p ds \quad (\text{IV.25.b})$$

$$ds = \begin{cases} \xi_a dy & \text{se } a \neq 0 \\ \xi_b dx & \text{se } b \neq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.25.c})$$

onde

$$\xi_a = \sqrt{1 + \left[-\frac{b}{a} \right]^2}$$

ou

$$\xi_b = \sqrt{1 + \left[-\frac{a}{b} \right]^2} \quad (\text{IV.25.d})$$

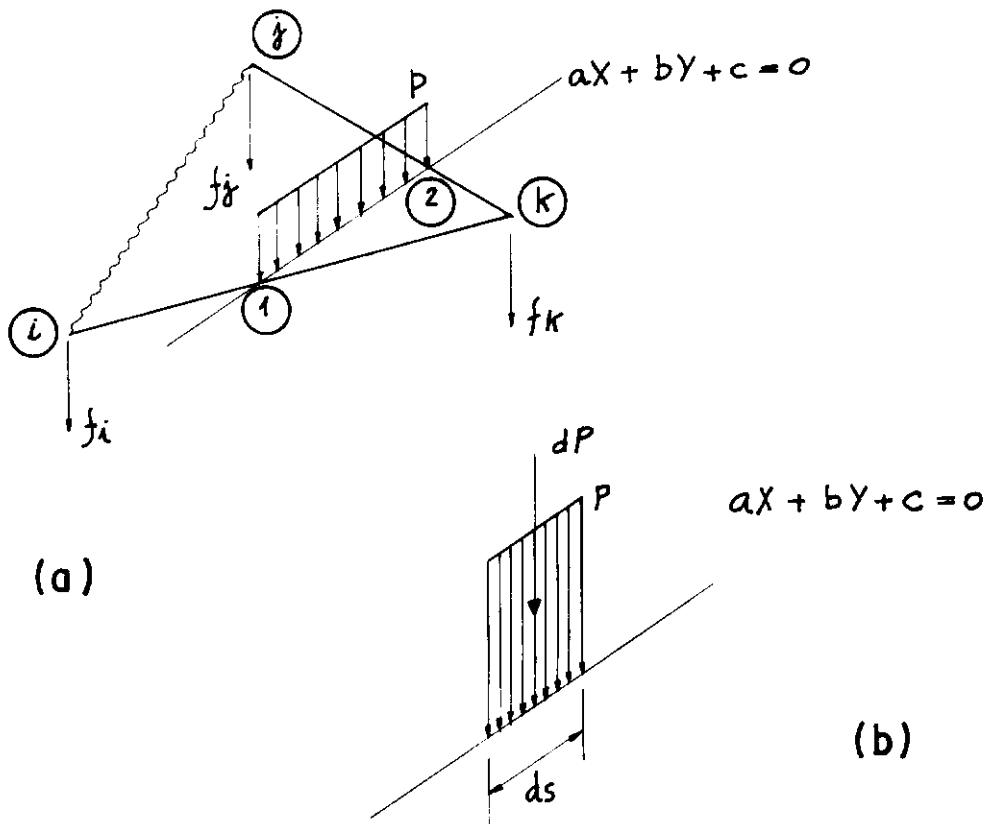


Figura IV.08 - Força Linearmente Distribuída

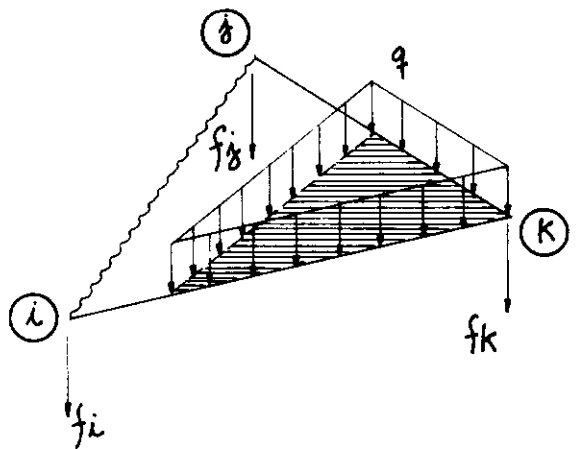


Figura IV.09 - Força Uniforme e Parcialmente Distribuída

A força total em cada nó será, então,

$$\underline{\bar{f}} = \int_1^2 d\underline{\bar{f}} \quad (\text{IV.25.e})$$

Levando-se a equação (IV.25.o) na equação (IV.25.a) e depois na equação (IV.25.e), após integrar-se, tem-se:

$$\underline{\bar{f}} = ap\underline{\xi}_a \left[(a\underline{B} - b\underline{A}) \frac{y^2}{2} + (a\underline{C} - c\underline{A}) y \right] \Bigg|_{Y_1}^{Y_2}$$

ou (IV.25.f)

$$\underline{\bar{f}} = bp\underline{\xi}_b \left[(b\underline{A} - a\underline{B}) \frac{x^2}{2} + (b\underline{C} - c\underline{B}) x \right] \Bigg|_{X_1}^{X_2}$$

caso $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, respectivamente.

IV.2.5.6 - Força Uniforme e Parcialmente Distribuída

Seja uma força uniformemente distribuída q na região hachurada S^* da figura (IV.09). Pela equação (IV.21.b),

$$\underline{\bar{f}} = t \int_{S^*} \underline{\bar{N}}^T q dS^* \quad (\text{IV.26.a})$$

Resolvendo-se a integral, obtém-se:

$$\bar{\underline{f}} = t \ q \ S^* \ (\ \underline{A}X_{CG} + \underline{B}Y_{CG} + \underline{C} \) \quad (IV.26.b)$$

onde

$$X_{CG} = \frac{1}{S^*} \int_{S^*} X \ dS^* \quad (IV.26.c)$$

e

$$Y_{CG} = \frac{1}{S^*} \int_{S^*} Y \ dS^* \quad (IV.26.d)$$

são as coordenadas cartesianas do centróide da região carregada S^* .

IV.2.6 - As Forças Elásticas Internas

Seja um elemento-charneira em equilíbrio conforme atesta a equação (IV.11). Defina-se um *coeficiente de rigidez secante* ($^S K$) como sendo, em cada instante, a razão entre o momento atuante na charneira e a correspondente rotação:

$$^S K = \frac{M}{\varphi} \Big|_{\varphi_0} \quad (IV.27)$$

Dessa forma, procedendo-se de maneira análoga àquela utilizada para a determinação da matriz de rigidez tangente, obtém-se a chamada *matriz de rigidez secante*, isto é, a responsável pela "rigidez de resistência interna" do elemento, dada por:

$$^S \bar{\underline{K}} = \underline{\underline{H}} \ ^S K \ \underline{\underline{H}}^T \quad (IV.28)$$

Com isso, pode-se escrever que as forças elásticas internas são calculadas com

$$\bar{\underline{F}} = {}^s \bar{\underline{K}} \bar{\underline{u}} \quad (\text{IV.29.a})$$

Levando-se a equação (IV.28) na equação (IV.29.a) e observando-se a equação (IV.2.c), chega-se a

$$\bar{\underline{F}} = \bar{\underline{H}} {}^s \kappa \bar{\underline{H}}^T \bar{\underline{u}} = \bar{\underline{H}} {}^s \kappa \varphi = \bar{\underline{H}} \underline{M} \quad (\text{IV.29.b})$$

onde nota-se, imediatamente, a identidade com a equação (IV.11). Pode-se, então, ver claramente que realmente o único responsável pela resistência interna do elemento-charneira num dado instante é o momento atuante na mola nesse instante.

IV.3 - O Sistema Global de Coordenadas Generalizadas

O sistema global de coordenadas fica definido da seguinte maneira: os eixos \underline{X} e \underline{Y} são os mesmos utilizados como referencial para a definição geométrica do modelo estrutural; o eixo \underline{Z} é obtido através do triedro direto com os outros dois eixos.

A incidência nodal dos elementos para o modelo da figura (IV.10.a) é dada conforme indicado na figura (IV.10.b). O primeiro e segundo nós fornecidos definem o sentido do eixo \underline{x} . Tendo os eixos \underline{Z} e \underline{z} a mesma direção e

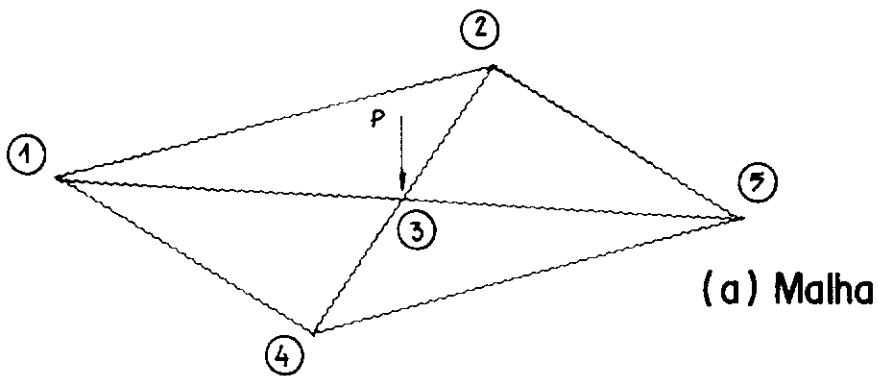
sentido, o terceiro nó deve ser o de coordenada y positiva, já que, através do triedro direto, x e z definem o sentido de y . Finalmente, o quarto nó é o de coordenada y negativa. Caso não exista o nó 3 ou o nó 4, por exemplo, em elementos no contorno ou quando se considera eixos de simetria, este não deve aparecer na lista de incidências; em outras palavras, os nós 3 e 4 devem sempre ser dados na sua posição correta, embora um, e apenas um deles possa não existir.

Apesar de parecer confuso, o fornecimento das incidências pode ser totalmente automatizado, isto é, dados somente os triângulos, as incidências podem ser geradas automaticamente.

A formação das equações já definidas a nível do elemento segue o mesmo processo de montagem do Método dos Elementos Finitos ao nível das coordenadas globais generalizadas: cada parcela a nível do sistema local de coordenadas generalizadas contribui para as equações globais na posição devida, bastando para isso que se faça a correspondência de numeração entre os graus de liberdade local e global, conforme mostram as figuras (IV.10.c,d,e). Procedendo-se assim, pode-se reescrever as principais equações do elemento como equações globais.

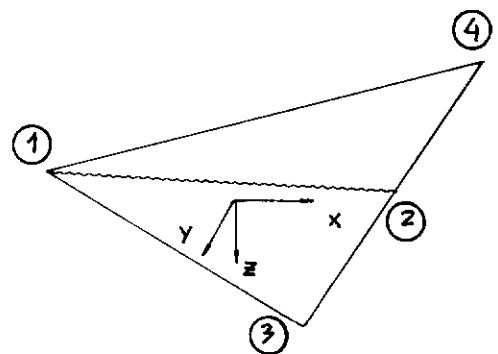
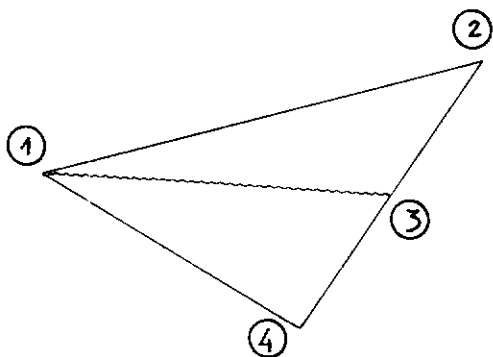
Para um modelo com q graus de liberdade e e elementos, escreve-se as seguintes equações de compatibilidade e equilíbrio:

$$\tilde{\varphi}_{exi} = \tilde{H}_{exg}^T \tilde{u}_{gxi} \quad (\text{IV.30})$$



(b) Incidência
Nodal

| | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NÓ 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| NÓ 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| NÓ 3 | 3 | 4 | — | 1 | 3 | 1 | 4 | — |
| NÓ 4 | — | 2 | 3 | 5 | — | 5 | 2 | 3 |



(c) Sistema Global

(d) Sistema Local

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 1 | \bar{K}_{11} | \bar{K}_{14} | \bar{K}_{12} | \bar{K}_{13} | |
| 2 | \bar{K}_{41} | \bar{K}_{44} | \bar{K}_{42} | \bar{K}_{43} | |
| 3 | \bar{K}_{21} | \bar{K}_{24} | \bar{K}_{22} | \bar{K}_{23} | |
| 4 | \bar{K}_{31} | \bar{K}_{34} | \bar{K}_{32} | \bar{K}_{33} | |
| 5 | | | | | |

\bar{K}

(e) Contribuição à Rigidez Global

Figura IV.10 - Exemplo de
Relação entre os Sistemas
Local e Global

$$\underline{\underline{f}}_{gx1} = \underline{\underline{H}}_{gxe} \underline{\underline{M}}_{ex1} \quad (\text{IV.31})$$

$$\underline{\underline{f}}_{gx1} = \underline{\underline{K}}_{gxg}^T \underline{\underline{u}}_{gx1} \quad (\text{IV.32})$$

onde

$\underline{\underline{\varphi}}$ é um vetor-coluna com e linhas, onde cada coeficiente φ_i representa a rotação da charneira i ;

$\underline{\underline{H}}$ é a matriz de equilíbrio global da estrutura, com g linhas e e colunas. Cada coluna i corresponde ao vetor de interpolação $\underline{\underline{H}}$ do elemento-charneira i cujos coeficientes são dispostos na numeração dos graus de liberdade globais associada aos graus de liberdade locais;

$\underline{\underline{u}}$ é um vetor-coluna com g linhas, onde cada coeficiente u_i representa o deslocamento em $\underline{\underline{Z}}$ do grau de liberdade i ;

$\underline{\underline{f}}$ tem as mesmas características de $\underline{\underline{u}}$, mas cada coeficiente f_i corresponde à força externa total atuando na direção $\underline{\underline{Z}}$ do grau de liberdade i ;

$\underline{\underline{M}}$ tem as mesmas características de $\underline{\underline{\varphi}}$, mas cada coeficiente M_i representa o momento atuante

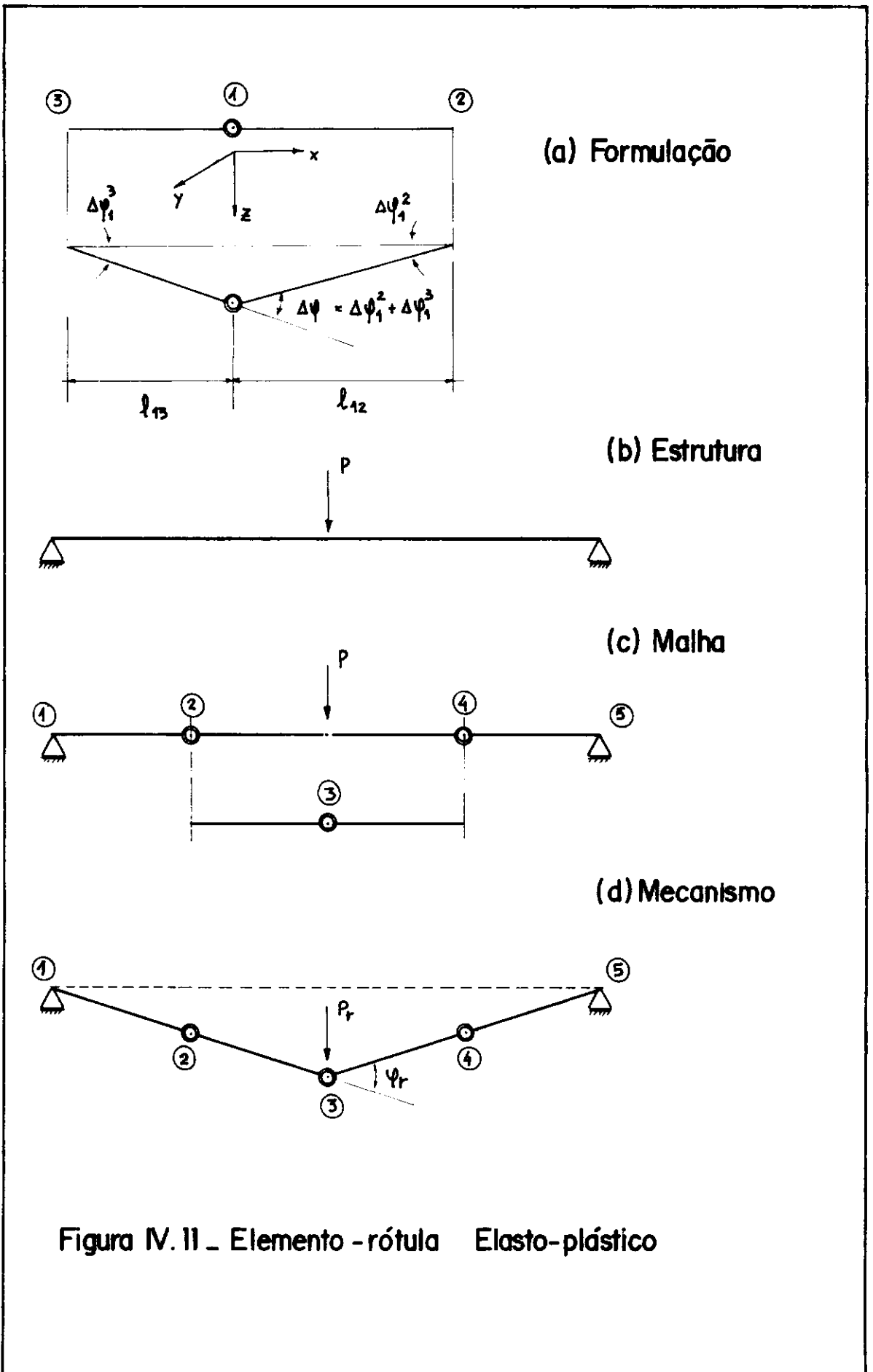
na charneira \underline{i} ;

${}^T\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez tangente global da estrutura, com \underline{q} linhas e \underline{e} colunas. Cada coeficiente ${}^T\mathbf{K}_{ij}$ corresponde à força que surge na direção \underline{Z} do grau de liberdade \underline{i} para um deslocamento unitário na direção \underline{Z} do grau de liberdade \underline{j} , mantendo-se nulos todos os outros deslocamentos.

IV.4 - O Elemento-Rótula Elasto-plástico: o ROTPLAS

De maneira análoga à formulação do elemento-charneira, pode-se desenvolver um elemento unidimensional colocando-se uma rótula elasto-plástica onde existe a charneira. Seja o elemento da figura (IV.11.a). Da mesma forma que o elemento-charneira, essa rótula também tem as suas características mecânicas definidas através de uma curva momento versus rotação, sendo absolutamente rígidos os trechos $\underline{12}$ e $\underline{13}$. O nó $\underline{1}$ define a posição da rótula, enquanto o nó $\underline{2}$ dá a direção e o sentido do eixo \underline{x} , que vai de $\underline{1}$ para $\underline{2}$ ao longo do eixo geométrico do elemento; o nó $\underline{3}$ fica, então, no sentido negativo do eixo \underline{x} . O eixo \underline{z} tem a mesma direção e sentido de \underline{Z} , enquanto \underline{y} é perpendicular a \underline{x} e \underline{z} , formando com estes um triedro direto.

Considerando-se pequenos deslocamentos, a rotação relativa da rótula pode ser escrita como



$$\varphi \cong \operatorname{tg} \varphi = \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_3}{e_{13}} + \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{e_{12}} \quad (\text{IV.33.a})$$

Reescrevendo a equação (IV.33.a) de forma análoga à equação (IV.02.o), tem-se

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{e_{13}} \\ \frac{1}{e_{13}} + \frac{1}{e_{12}} \\ \frac{1}{e_{12}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{array} \right\} \quad (\text{IV.33.b})$$

onde é possível identificar imediatamente o vetor de interpolação e o vetor de deslocamentos nodais. As expressões para as equações de equilíbrio (IV.11), para as equações constitutivas (IV.13), para a matriz de rigidez tangente (IV.16) e para as forças elásticas internas (IV.27,28,29) permanecem válidas para esses novos vetores definidos por (IV.33.b), desde que se considere o elemento com apenas três graus de liberdade. Poder-se-ia deduzir expressões para as forças nodais equivalentes neste novo elemento de modo também análogo ao CHARPLAS, entretanto, o objetivo deste item é apenas mostrar as possibilidades desse tipo de formulação, além do fato do presente trabalho voltar-se especificamente para o estudo de lajes. Limitou-se aqui, então, às forças nodais no elemento-rótula.

Da mesma forma que no elemento-charneira, é possível ter-se um elemento-rótula degenerado caso não exista o nó 2 ou o nó 3; situação esta de procedimento mais uma vez totalmente análogo ao do CHARPLAS.

A montagem dos vetores e matrizes no sistema global de coordenadas generalizadas é feita da maneira já descrita.

Justifica-se aqui a apresentação desse tipo de elemento pela sua utilidade na representação de lajes apoiadas sobre vigas, lajes nervuradas e tabuleiros de pontes, além de, entre outros, na determinação do colapso de estruturas formadas por elementos reticulados, como nas figuras (IV.11.b,c,d)

CAPÍTULO V

A PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA NA ANÁLISE LIMITE

Programação Matemática é a ciência e arte da otimização de funções com restrição, geralmente, inequações. Foi prevista por FOURIER em 1823 juntamente com a análise limite, mas passou-se mais de um século antes que essas idéias fossem completamente desenvolvidas; somente durante a Segunda Grande Guerra é que desenvolvimentos significativos tiveram lugar na Programação Matemática (PM) e na Plasticidade em Engenharia. Nos anos '50 os dois assuntos floresceram e a conexão entre eles ficou finalmente reconhecida quando as duas noções essenciais da análise limite, os teoremas do limite superior e inferior, foram generalizados e definidos de forma rigorosa, mostrando um caminho direto para a otimização com restrições.

Um tipo particular de Programação Matemática é a Programação Linear (PL) que visa, fundamentalmente, encontrar a melhor solução para problemas que têm seus modelos representados por sistemas de equações e inequações lineares. A sua grande aplicabilidade e simplicidade devem-se à linearidade do modelo e é tão importante que muitos problemas de Programação Matemática mais complexa, por exemplo, Programação Quadrática, são resolvidos linearizando-se o modelo por trechos e aplicando-se a Programação Linear a cada um. A Programação Linear consiste, então, na maximização

ou minimização de um funcional linear de variáveis (*função-objetivo*) respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades (*restrições*). Essas restrições determinam um semi-espço ao qual dá-se o nome de *conjunto de soluções viáveis*. A melhor das soluções viáveis, isto é, aquela que maximiza ou minimiza a função-objetivo, denomina-se *solução ótima*; esse tipo de problema é dito *estático* porque as condições estabelecidas para o modelo são invariantes no tempo, isto é, permanecem as mesmas até o final da solução do problema.

Dois passos são fundamentalmente necessários para a resolução de um problema de Programação Linear. O primeiro é a modelagem; no caso da análise limite de problemas bi- ou tridimensionais, a modelagem requer a discretização através de modelos de Diferenças Finitas ou Elementos Finitos. Segue-se-lhe o método de solução do modelo; sendo o *Simplex* o método mais utilizado.

As relações derivadas dos teoremas da análise limite ocorrem naturalmente como equações lineares e, onde não existe interação não-linear entre as tensões resultantes, as condições de escoamento (ou ruptura) aparecem como inequações lineares, caracterizando assim esse tipo de problema como de Programação Matemática Linear.

V.1 - O Problema das Cargas Proporcionais

V.1.1 - Formulação

Esse problema pode ser colocado da seguinte maneira:

Dada uma estrutura sob a ação de cargas proporcionais, isto é, que mantém entre si uma relação constante, por qual fator λ_c deve se multiplicar essas cargas de modo a levar a estrutura ao ponto de colapso ?

No caso de uma estrutura isostática o problema é trivial, já que as equações de equilíbrio podem ser resolvidas explicitamente em função de \underline{M} ; multiplicando-se os esforços pelo fator de colapso, multiplica-se cada componente de \underline{M} pelo mesmo fator, sendo o fator de ruptura simplesmente o valor de λ correspondente ao aparecimento do primeiro escoamento.

Numa estrutura hiperestática, entretanto, o fator de colapso será consideravelmente maior do que o correspondente ao início do escoamento devido à já discutida redistribuição de esforços. Pelo Teorema do Limite Inferior, se um conjunto de esforços internos \underline{M} puder ser encontrado satisfazendo às equações de equilíbrio

$$\lambda \underline{f} = \underline{H} \underline{M}$$

(V.01.a)

e às condições de restrição

$$-{}^I\tilde{M}_r \leq \tilde{M} \leq {}^S\tilde{M}_r \quad (\text{V.01.b})$$

$$-{}^I\tilde{M}_r \leq 0 \quad (\text{V.01.c})$$

$$0 \leq {}^S\tilde{M}_r \quad (\text{V.01.d})$$

sendo ${}^I\tilde{M}_r$ e ${}^S\tilde{M}_r$, respectivamente, os momentos resistentes mínimo e máximo das linhas de ruptura, então, $\lambda \in \lambda_r$. Assim, o fator de colapso λ_r é o valor máximo de λ para o qual existe uma solução da equação (V.01.a) atendendo às equações (V.01.b,c,d). Esse problema foi definido e resolvido pela primeira vez por CHARLES & LEMKE [17] em 1954.

Reescrevendo-se as equações (V.01) sob a forma da Programação Linear, tem-se:

Maximizar

$$A = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \tilde{M} \end{array} \right\} \quad (\text{V.02.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{f} & -\tilde{H} \\ 0 & \tilde{I} \\ 0 & -\tilde{I} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \tilde{M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ {}^S\tilde{M}_r \\ {}^I\tilde{M}_r \end{array} \right\} \quad (\text{V.02.b})$$

É comum colocar-se o problema na forma padrão considerando-se somente variáveis não-negativas; reescreve-se, então, \underline{M} como

$$\underline{M} = \underline{M}^+ - \underline{M}^- \quad (\text{V.03.a})$$

Assim,

$$\underline{M} = \underline{M}^+ \quad \underline{M}^- = \underline{0} \quad \text{se } \underline{M} \geq \underline{0} \quad (\text{V.03.b})$$

e

$$\underline{M} = \underline{M}^- \quad \underline{M}^+ = \underline{0} \quad \text{se } \underline{M} \leq \underline{0} \quad (\text{V.03.c})$$

Levando-se agora a equação (V.03) na equação (V.02), obtém-se o problema

Maximizar

$$\Lambda = \left\{ \begin{matrix} 1 & \underline{0} & \underline{0} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \underline{M}^+ \\ \underline{M}^- \end{matrix} \right\} \quad (\text{V.02'.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{matrix} \underline{f} & -\underline{H} & \underline{H} \\ \underline{0} & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{0} & -\underline{I} & \underline{I} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \underline{M}^+ \\ \underline{M}^- \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \underline{0} \\ \underline{s}_{\underline{M}_r} \\ \underline{I}_{\underline{M}_r} \end{matrix} \right\} \quad (\text{V.02'.b})$$

que está na forma padrão e pode ser resolvido pelos algoritmos de Programação Linear.

V.1.2 - A Dualidade e a Aproximação do Mecanismo

Uma pergunta que pode surgir é: por que utilizar a aproximação pelo limite inferior? A aproximação através do limite superior também levaria a um problema de Programação Linear que é o dual do formulado; entretanto, vale ressaltar que apesar de utilizar-se aqui o Teorema do Limite Inferior, a solução obtida será sempre um limite superior para a carga de colapso, isto porque a definição da matriz de equilíbrio (\underline{H}) é feita a partir da contra-gradiência de um vetor de interpolação ($\underline{\bar{H}}$).

Para a formulação pelo limite superior parte-se de um conjunto de deslocamentos (\underline{u}) e deformações compatíveis ($\underline{\varphi}$), isto é, satisfazendo à equação (IV.30). Para obter uma expressão para o trabalho realizado na deformação plástica, escreve-se as deformações de modo análogo ao dos momentos nas equações (V.03):

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^+ - \underline{\varphi}^- \quad (\text{V.04.a})$$

De maneira que

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^+ \quad \underline{\varphi}^- = \underline{0} \quad \text{se } \underline{\varphi} \geq \underline{0} \quad (\text{V.04.b})$$

e

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^- \quad \underline{\varphi}^+ = \underline{0} \quad \text{se } \underline{\varphi} \leq \underline{0} \quad (\text{V.04.c})$$

Assim, desde que

$$\tilde{M} = \begin{cases} \tilde{M}_r^S & \text{se } \tilde{\varphi} > 0 \\ -\tilde{M}_r^I & \text{se } \tilde{\varphi} < 0 \end{cases} \quad (\text{V.05})$$

o trabalho realizado na deformação plástica pode ser escrito como

$$W_p = \tilde{M}_r^S \tilde{\varphi}^+ + \tilde{M}_r^I \tilde{\varphi}^- \quad (\text{V.06.a})$$

O trabalho realizado pelas forças externas será

$$W_f = \lambda \tilde{f}^T \tilde{u} \quad (\text{V.06.b})$$

Assim, $W_f \geq W_p$ implica $\lambda \geq \lambda_r$. As expressões para a determinação de λ_r podem ser colocadas na forma padrão da Programação Linear. Desde que a deformação pode ter uma magnitude arbitrária, considere-se que o trabalho plástico seja igual a λ , isto é,

$$\tilde{f}^T \tilde{u} = 1 \quad (\text{V.07})$$

Escrevendo-se também a equação (IV.30) como um par de inequações, λ_r será a solução do problema

$$\text{Minimizar } \lambda \quad (\text{V.08.a})$$

submetido a

$$\lambda \geq \tilde{M}_r^S \tilde{\varphi}^+ + \tilde{M}_r^I \tilde{\varphi}^- \quad (\text{V.08.b})$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}^T & 0 & 0 \\ -\tilde{H}^T & \tilde{I} & -\tilde{I} \\ \tilde{H}^T & -\tilde{I} & \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\varphi}^+ \\ \tilde{\varphi}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.08.c})$$

Desde que o valor mínimo de λ obviamente ocorre quando a primeira inequação é satisfeita como igualdade, pode-se reescrever o problema como

Minimizar

$$\bar{\lambda} = \lambda = \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{s} \underline{M}_r^T & \underline{1} \underline{M}_r^T \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\varphi}^+ \\ \underline{\varphi}^- \end{array} \right\} \quad (\text{V.09.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{array}{ccc} \underline{f}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{H}^T & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{H}^T & -\underline{I} & \underline{I} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{u} \\ \underline{\varphi}^+ \\ \underline{\varphi}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{array} \right\} \quad (\text{V.09.b})$$

O *Princípio da Dualidade*, que tem íntima relação com os teoremas limites da Plasticidade, diz que os dois problemas de Programação Linear

$$\text{Maximizar } A = \underline{c}^T \underline{u} \quad (\text{V.10.a})$$

$$\text{submetido a } \underline{A} \underline{u} \leq \underline{b} \text{ e } \underline{u} \geq \underline{0}$$

e

$$\text{Minimizar } \bar{A} = \underline{b}^T \underline{v} \quad (\text{V.10.b})$$

$$\text{submetido a } \underline{A}^T \underline{v} \geq \underline{c} \text{ e } \underline{v} \geq \underline{0}$$

são duais. Se um tem uma solução finita, o outro também terá solução finita e

$$\text{Máximo } A = \text{Mínimo } \bar{A} \quad (\text{V.10.c})$$

Se as igualdades da equação (V.02'.b) forem subs-

tituídas por pares de inequações, obter-se-á:

Maximizar

$$\Lambda = \left\{ \begin{matrix} 1 & \underline{0} & \underline{0} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \underline{M}^+ \\ \underline{M}^- \end{matrix} \right\} \quad (\text{V.11.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{matrix} \underline{f} & -\underline{H} & \underline{H} \\ -\underline{f} & \underline{H} & -\underline{H} \\ \underline{0} & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{0} & -\underline{I} & \underline{I} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \underline{M}^+ \\ \underline{M}^- \end{matrix} \right\} \leq \left\{ \begin{matrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{S}_{M_r} \\ \underline{I}_{M_r} \end{matrix} \right\} \quad (\text{V.11.b})$$

que corresponde ao problema posto pela equação (V.10.a). É intuitivo suspeitar que o dual desse problema, que tem λ_r como mínimo, é de fato a formulação através do mecanismo do problema de colapso plástico. Escrevendo-se o dual de (V.11) através da observação de (V.10.b), tem-se

Minimizar

$$\bar{\Lambda} = \left\{ \begin{matrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{S}_{M_r}^T & \underline{I}_{M_r}^T \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{u}_1^+ \\ \underline{u}_1^- \\ \underline{u}_2^+ \\ \underline{u}_2^- \end{matrix} \right\} \quad (\text{V.12.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{matrix} \underline{f}^T & -\underline{f}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{H}^T & \underline{H}^T & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{H}^T & -\underline{H}^T & -\underline{I} & \underline{I} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \underline{u}_1^+ \\ \underline{u}_1^- \\ \underline{u}_2^+ \\ \underline{u}_2^- \end{matrix} \right\} \geq \left\{ \begin{matrix} \underline{1} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{matrix} \right\}$$

(V.12.b)

Definindo-se

$$\underline{u} = \underline{u}^+ - \underline{u}^- \quad (\text{V.13})$$

e utilizando-se a equação (V.04.a), tem-se o problema (V.12) reescrito como

Minimizar

$$\bar{A} = \underline{S}_{\underline{r}}^T \underline{\varphi}^+ + \underline{I}_{\underline{r}}^T \underline{\varphi}^- \quad (\text{V.14.a})$$

submetido a

$$\underline{f}^T \underline{u} \geq 1 \quad (\text{V.14.b})$$

e

$$\underline{H}^T \underline{u} = \underline{\varphi} \quad (\text{V.14.c})$$

A equação (V.14.c) é a mesma equação (IV.30) e representa a equação de compatibilidade. A equação (V.14.a) é simplesmente uma expressão para o trabalho realizado nas ocharneiras plásticas e a equação (V.14.b) é uma condição "de escala" sobre o trabalho externo. Escrevendo-se λ para \bar{A} , reescreve-se o problema na forma

Minimizar λ

$$(\text{V.14.d})$$

$$\text{submetido a } \lambda \underline{f}^T \underline{u} \geq \underline{S}_{\underline{r}}^T \underline{\varphi}^+ + \underline{I}_{\underline{r}}^T \underline{\varphi}^-$$

onde \underline{u} e $\underline{\varphi}$ estão relacionados pelas equações de compatibilidade (V.14.c). Claramente a solução final satisfará a expressão (V.14.d) como igualdade; assim, pode-se descrever o problema como

Minimizar $\underline{\lambda}$ de forma que o trabalho realizado pelas cargas aplicadas $\underline{\lambda f}$ seja igual ao trabalho plástico realizado na estrutura para um sistema de deformações compatíveis.

Essa afirmação do problema é precisamente a aproximação do mecanismo da Teoria Plástica Elementar. Note-se que para uma deformação φ_i em particular,

$$\varphi_i^+ = \varphi_i \quad \varphi_i^- = 0 \quad \text{se } \varphi > 0 \quad (\text{V.15.b})$$

e

$$\varphi_i^- = -\varphi_i \quad \varphi_i^+ = 0 \quad \text{se } \varphi < 0 \quad (\text{V.15.c})$$

daí haver-se multiplicado pelo momento resistente apropriado conforme a deformação fosse positiva ou negativa para se obter a equação (V.12.a).

Como já foi dito, do ponto de vista da Programação Linear, a aproximação será por equilíbrio ou mecanismo em função da formulação da matriz de equilíbrio. No caso, sendo \underline{H} uma matriz de interpolação de deslocamentos, tem-se uma aproximação por mecanismo; a simples transposição dessa matriz leva à formulação de equilíbrio correspondente. Do ponto de vista computacional, se for utilizado o método *Simplex*, é mais eficiente aplicar a formulação pelo mecanismo, já que, normalmente, conduz a um menor número de restrições; mesmo assim, a escolha fica muito dependente do algoritmo e da implementação feita. Contudo, como seria esperado, qualquer que seja a aproximação adotada obtém-se o mesmo

valor para o fator de colapso.

A primeira vista parece que a formulação de equilíbrio (V.02) fornece a distribuição interna de forças e os momentos no colapso, mas não o mecanismo em si. Entretanto, a solução do problema (V.02) pelo método *Simplex* padrão fornece como produto intermediário os valores das variáveis do problema dual que definem o mecanismo de ruína, ou sejam, \underline{u} , $\underline{\psi}^+$ e $\underline{\psi}^-$. De maneira semelhante, a distribuição das forças internas e os momentos podem ser obtidos da solução do problema (V.09).

V.1.3 - Método de Solução: o Algoritmo de Livesley

Para um problema de g graus de liberdade e e elementos-oharreira, o número de coeficientes da matriz a ser utilizada na solução via método *Simplex* é de, pelo menos, $(2e+g)(2e+1)$, além dos $(2e+1)$ coeficientes utilizados por cada um dos três vetores também necessários, conforme pode ser visto pela equação (V.02'); isso se explica pelo fato desse método não trabalhar com números negativos. Desnecessário dizer o quanto isto representa em termos de aumento na quantidade de armazenamento requerido à solução do problema e, como consequência direta, no tempo de processamento; agravando-se ainda mais a situação quando se observa que a maioria dos coeficientes é nula.

O algoritmo de Livesley [18] que será aqui apresentado e utilizado parte das idéias básicas do método

Simplex, com a grande vantagem de evitar a colocação do problema na forma padrão.

V.1.3.1 - Os Esforços Internos e o Fator de Colapso

Seja, então, resolver o problema de Programação Linear como está formulado nas equações (V.01). Se o número de graus de liberdade for maior do que o número de charneiras ($g > e$), a estrutura não suportará um conjunto arbitrário de cargas, isto é, já é um mecanismo, e a única solução é a trivial

$$\lambda_r = 0 \quad \tilde{M} = 0 \quad (V.16)$$

Se o número de graus de liberdade for igual ao número de charneiras ($g = e$), a estrutura é estaticamente determinada, podendo-se resolver a equação (V.01.a) reescrita como

$$\tilde{f} = \tilde{H} \tilde{v} \quad (V.17.a)$$

onde

$$\tilde{v} = \frac{\tilde{M}}{\lambda} \quad (V.17.b)$$

e encontrar λ_r através das restrições (V.01.b) reescritas em função de \tilde{v} :

$$-^I \tilde{M}_r \leq \lambda \tilde{v} \leq ^S \tilde{M}_r \quad (V.17.c)$$

O interesse recai, então, sobre o caso onde o número de graus de liberdade é menor que o número de charneiras ($g < e$).

Um procedimento fundamental que ocorre em várias etapas do algoritmo de Livesley é conhecido como *Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan* e consiste, para uma determinada equação i do sistema a ser operado (*equação pivot*), transformar a coluna j da matriz dos coeficientes numa coluna nula, exceto por um único coeficiente unitário na posição ij (*coluna reduzida*). Essas operações são:

Operação 1: Dividir a equação i pelo coeficiente H_{ij} (*pivot*) de modo a torná-lo unitário;

Operação 2: Exceto para a própria equação i , subtrair de cada equação k a equação i multiplicada pelo coeficiente H_{kj} ; dessa forma, anula-se todos os outros coeficientes da coluna j , a menos do coeficiente H_{ij} que tornou-se unitário no passo anterior.

Então, no escopo do presente trabalho, o termo *redução de uma coluna* será utilizado com o sentido de se aplicar o *Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan* à referida coluna.

O algoritmo de Livesley pode ser sintetizado nos quatro passos principais mostrados a seguir.

Primeiro Passo:

Reduzir a equação (V.01.a) a uma outra equivalente. Para cada uma das q equações do sistema, procura-se na matriz dos coeficientes \underline{H} a coluna \underline{j} do coeficiente não-nulo de maior módulo; embora isso não seja estritamente necessário, ajuda a manter o sistema bem condicionado. Em seguida aplica-se o Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan à equação \underline{i} , coluna \underline{j} .

Ao final, ter-se-á um novo vetor de termos independentes e uma nova matriz de coeficientes onde q colunas estão reduzidas. O sistema assim obtido terá a forma:

$$\lambda \begin{matrix} * \\ \underline{f} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & ? & 1 & ? & ? & 0 & ? & ? & \dots & 0 \\ 1 & ? & 0 & ? & ? & 0 & ? & ? & \dots & 0 \\ 0 & ? & 0 & ? & ? & 0 & ? & ? & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & ? & 0 & ? & ? & 0 & ? & ? & \dots & 0 \\ 0 & ? & 0 & ? & ? & 1 & ? & ? & \dots & 0 \\ 0 & ? & 0 & ? & ? & 0 & ? & ? & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} * \\ \underline{H} \end{matrix} \begin{matrix} \underline{M} \end{matrix} \quad (V.18)$$

onde

- ? representa um coeficiente qualquer, que não é obrigatoriamente $\underline{0}$ ou $\underline{1}$;
- ... representa uma sucessão de outros coeficientes também de valor qualquer.

Observe-se que para o caso de estruturas isostáticas ($g = e$) esse procedimento inicial fornece a solução das equações de equilíbrio.

Segundo Passo:

Dividir os elementos de \underline{H} em dois tipos de variáveis: básicas e não-básicas, segundo a terminologia da Programação Linear. Em termos simples, variáveis básicas são aquelas que ainda não atingiram nenhum dos dois limites impostos pela equação (V.01.b), podendo-se alterar os seus valores por uma quantidade finita sem que as restrições sejam violadas; correspondem às colunas reduzidas de *H e, evidentemente, serão o único tipo de variável que poderá ser alterado pelo algoritmo. As variáveis não-básicas são aquelas que, exceto num estágio inicial, quando podem ser nulas, estão num dos limites da equação (V.01.b); têm valor constante e correspondem às colunas de *H sem um arranjo específico. Então, ao se reduzir a equação (V.01.a) à forma da equação (V.18), efetivamente escolheu-se g variáveis básicas e $e-g$ variáveis não-básicas. Em termos físicos, variáveis básicas correspondem às charneiras que ainda não atingiram o escoamento e as variáveis não-básicas às charneiras já com deformações plásticas. Note-se que após esse passo cada variável básica somente aparece em uma equação e que cada equação contém somente uma variável básica.

Tome-se, inicialmente, as condições (V.16).

Terceiro Passo:

Incrementar λ alterando-se apenas as variáveis básicas até que uma delas atinja um dos limites. Imagine-se que num estágio particular tenha-se um valor λ^0 para fator de colapso e q variáveis básicas M_i^0 , satisfazendo a

$$-^I M_{i'} < M_{i'}^0 < ^S M_{i'} \quad (V.19)$$

onde o índice i' referencia a variável básica associada à equação i . Considere-se agora o efeito de um aumento $\delta\lambda$ no fator de carga. Desde que cada variável básica está estritamente entre os limites impostos pela restrição, a equação (V.18) pode continuar sendo utilizada, mantendo-se constantes todas as variáveis não-básicas e deixando-se as variáveis básicas variarem. Devido à forma de *H_i , para a equação i , tem-se:

$$\delta\lambda \ ^*f_i = \delta M_{i'} \quad (V.20)$$

Assim, se *f_i é positivo, $M_{i'}$ aumenta, diminuindo se *f_i é negativo. Se *f_i é nulo, o valor de $M_{i'}$ não é alterado com a mudança em λ . Então, os limites de $M_{i'}$ implicam

$$\delta\lambda \in \left[\frac{\bar{M}_{i'} - M_{i'}^0}{^*f_i} \right] \quad (V.21.a)$$

onde

$$\bar{M}_i = \begin{cases} {}^s M_i, & \text{se } {}^* f_i > 0 \\ -{}^I M_i, & \text{se } {}^* f_i < 0 \end{cases} \quad (\text{V.21.b})$$

O menor valor de $\delta\lambda$ dentre todas as equações determina o maior aumento possível de λ . Seja $\delta\lambda_k$ esse valor correspondendo à equação k . Então, tem-se

$$\lambda^1 = \lambda^0 + \delta\lambda_k \quad (\text{V.22.a})$$

$$M_i^1 = M_i^0 + \delta\lambda_k {}^* f_i \quad (\text{V.22.b})$$

tomados somente sobre as variáveis básicas. Assim,

$$M_k^1 = \begin{cases} {}^s M_k, & \text{se } {}^* f_k > 0 \\ -{}^I M_k, & \text{se } {}^* f_k < 0 \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

e todas as outras variáveis básicas ainda dentro dos seus limites. As variáveis não-básicas permanecem com os valores inalterados.

Quarto Passo:

Trocar a variável básica que atingiu um dos limites no passo anterior por outra não-básica (no caso, no estágio, inicial) de modo a ser possível um novo incremento do fator de carga. Parece evidente que para poder fazer qualquer outro incremento no fator de carga é necessário encon-

trar uma outra variável para tomar o lugar da variável básica da equação \underline{k} , que agora tornou-se não-básica. No estágio atual, a equação \underline{k} tem a forma

$$\lambda^1 *f_k = M_k^1 + \sum_j *H_{kj} M_j^1 \quad (V.24)$$

onde \underline{j} é um índice que representa cada uma e todas as variáveis não-básicas, quer estejam no estágio inicial ou num dos limites das condições de restrição. Observe-se que, exceto por M_k^1 , todas as variáveis básicas têm coeficientes nulos nessa equação.

Cada variável não-básica M_j^1 tem que estar em um dos três estágios:

Estágio 1: $M_j^1 = 0$

É o estágio inicial. Ambas as variações, positiva ou negativa, são, em geral, possíveis; uma delas certamente incrementará $\underline{\lambda}$ desde que $*H_{kj}$ seja diferente de zero;

Estágio 2: $M_j^1 = -^I M_j$

Apenas o aumento de M_j^1 é possível; $\underline{\lambda}$ aumentará desde que $*H_{kj}$ tenha o mesmo sinal de $*f_k$ e seja diferente de zero;

Estágio 3: $M_j^1 = ^S M_j$

Apenas a diminuição de M_j^1 é possível; $\underline{\lambda}$ aumentará desde que $*H_{kj}$ tenha sinal oposto ao de $*f_k$ e seja diferente de zero.

Precisa-se, então, de um M_j^1 que possa ser variado de forma tal que um novo incremento de $\underline{\lambda}$ seja possível. Existindo uma possibilidade de escolha, parece razoável que esta seja feita de maneira a produzir a maior taxa de aumento em $\underline{\lambda}$. Assim, dentre todas as variáveis não-básicas, determina-se o índice \underline{j} que maximiza o valor de \bar{z}_j , definido por

$$\bar{z}_j = \begin{cases} |{}^*H_{kj}| & \text{se } M_j^1 = 0 \\ {}^*H_{kj} \operatorname{sinal}({}^*f_k) & \text{se } M_j^1 = -I M_j \\ -{}^*H_{kj} \operatorname{sinal}({}^*f_k) & \text{se } M_j^1 = {}^s M_j \end{cases} \quad (V.25)$$

Seja \underline{n} o índice desse valor. Se $\bar{z}_n > 0$, então, escolhe-se M_n^1 como nova variável básica. Conseqüentemente, a aplicação do Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan à equação \underline{k} , coluna \underline{n} , reduz esta última a uma coluna de zeros, exceto por um coeficiente unitário na linha \underline{k} . Dessa forma, elimina-se os coeficientes de M_n^1 em todas as outras equações e gera-se uma coluna de coeficientes para M_k^1 . Estando agora as equações novamente numa forma correspondente ao Primeiro Passo, retorna-se ao Terceiro Passo do algoritmo para novo incremento de $\underline{\lambda}$. Nesse novo incremento, claro, a nova variável não-básica M_k^1 , permanece no limite já alcançado.

Se $\bar{z}_n \leq 0$ não é mais possível incremento algum em $\underline{\lambda}$ e a solução foi alcançada. Uma dificuldade aparece se \bar{z}_n é positivo mas muito pequeno devido aos problemas de arre-

dondamento e truncamento, pois isso implica que ${}^*H_{kj}$ seja muito pequeno e assim, a aplicação do Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan multiplica os coeficientes de *H por um número muito grande. Esse mal condicionamento ocorre quando parte de uma estrutura ainda está estaticamente indeterminada no instante do colapso. Essa dificuldade pode ser evitada comparando-se z_n com uma tolerância; por exemplo, 10^{1-s} onde s é o número de algarismos significativos com que se está trabalhando. Essa característica da análise é melhor compreendida em termos da interpretação da configuração de colapso. Será mostrado que a linha k de *H é equivalente às deformações associadas ao mecanismo de colapso. Um coeficiente nessa linha que se apresente muito pequeno, da ordem do arredondamento utilizado, corresponde a um ponto onde o momento alcançou um valor limite, mas para o qual nenhuma deformação plástica significativa ocorreu durante o colapso.

V.1.3.2 - A Configuração de Colapso

Para determinar a configuração de colapso é preciso encontrar, para um campo de deslocamento não-nulo (\underline{u}), o correspondente campo de deformação ($\underline{\psi}$) satisfazendo à equação de compatibilidade (IV.30) e às condições de escoamento:

$$\varphi_j > 0 \quad \text{se } M_j = {}^S M_j \quad (\text{V.26.a})$$

$$\varphi_j < 0 \quad \text{se } M_j = -{}^I M_j \quad (\text{V.26.b})$$

$$\varphi_j = 0 \quad \text{se } -{}^I M_j < M_j < {}^S M_j \quad (\text{V.26.c})$$

sendo arbitrária a magnitude das deformações. Esses campos podem ser determinados por uma simples extensão do procedimento descrito no ítem anterior. Reescreva-se a equação (V.01.a) na seguinte forma

$$\lambda \underline{\underline{f}} = \lambda \underline{\underline{I}} \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{M}} \quad (\text{V.27.a})$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é a matriz identidade de ordem adequada. Ao se aplicar o Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan a $\underline{\underline{f}}$ e a $\underline{\underline{H}}$, opera-se também as linhas de $\underline{\underline{I}}$; assim, ao invés de obter-se a equação (V.18), obtém-se

$$\lambda \underline{\underline{*f}} = \lambda \underline{\underline{*I}} \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{*H}} \underline{\underline{M}} \quad (\text{V.27.b})$$

onde $\underline{\underline{*f}}$ e $\underline{\underline{*H}}$ têm forma idêntica à obtida na equação (V.18). Isso não requer qualquer esforço extra visto que cada coluna de $\underline{\underline{*I}}$ é simplesmente o conjunto de multiplicadores calculados na Operação 2 do processo de Gauss-Jordan divididos pelo coeficiente pivotal apropriado.

Com essa extensão, o procedimento segue exatamente como antes. Quando o valor máximo de λ foi obtido, a equação pivotal, ou seja, a equação da última variável básica alterada terá a forma

$$\lambda \underline{\underline{*f}}_k = \lambda \underline{\underline{*I}}_k^T \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{*H}}_k^T \underline{\underline{M}} \quad (\text{V.27.c})$$

onde $\underline{\underline{*I}}_k^T$ e $\underline{\underline{*H}}_k^T$ são as linhas pivotais finais de $\underline{\underline{*I}}$ e $\underline{\underline{*H}}$. Comparando-se a equação (V.27.c) com a equação do trabalho virtual para o mecanismo de colapso:

$$\lambda \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{\varphi}}^T \underline{\underline{M}} \quad (\text{V.28})$$

nota-se que

$$\underline{\underline{u}} = {}^* \underline{\underline{I}}_k \quad (\text{V.29.a})$$

e

$$\underline{\underline{\varphi}} = {}^* \underline{\underline{H}}_k \quad (\text{V.29.b})$$

A prova dessa identidade pode ser encontrada no Apêndice B. Então, tudo o que é necessário fazer para obter o mecanismo de colapso é multiplicar as linhas ${}^* \underline{\underline{I}}_k$ e ${}^* \underline{\underline{H}}_k$ pelo sinal de ${}^* f_k$ de modo a fazer o trabalho da estrutura positivo e usar um fator de escala para os deslocamentos e para as deformações plásticas já que as magnitudes dos mesmos são arbitrárias. No caso, o fator de escala utilizado foi tal que torna o trabalho externo realizado unitário, ou seja, atende à equação (V.07):

$$\xi_{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{f}}^T \underline{\underline{u}} \quad (\text{V.30.a})$$

Pela equação (V.28),

$$\xi_{\underline{\underline{\varphi}}} = \frac{\underline{\underline{\varphi}}^T \underline{\underline{M}}}{\lambda} = 1 \quad (\text{V.30.b})$$

Assim, os deslocamentos e as deformações plásticas finais serão divididas pelos respectivos fatores de escala, quais sejam, $\xi_{\underline{\underline{u}}}$ e $\xi_{\underline{\underline{\varphi}}}$.

Essa interpretação das linhas de $*I$ e $*H$ como a forma do modo de colapso é válida em qualquer estágio dos cálculos, independentemente de ser possível ou não um posterior incremento do fator de carga. Em valores intermediários de λ , entretanto, pode ser observado que o modo tem deformações não-nulas associadas a variáveis não-básicas ainda no seu estágio inicial, ou seja, com valor nulo, o que é fisicamente incorreto. De fato, o procedimento como um todo pode ser interpretado mais no sentido de "mecanismo" do que de "equilíbrio", imaginando-se charneiras fictícias inicialmente nesses pontos. Essas charneiras são gradualmente removidas durante a análise, podendo permanecer algumas, embora com rotação nula, se parte da estrutura estiver estaticamente indeterminada no colapso.

Esse procedimento apresentado já possui consideráveis vantagens sobre uma formulação padrão de Programação Linear, especialmente em termos de quantidade de armazenamento necessário. Entretanto, uma economia ainda pode ser alcançada evitando-se o armazenamento das colunas reduzidas de $*H$. Na transformação preliminar da equação (V.27.a) na equação (V.27.b) cada aplicação do Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan reduz uma das colunas cheias de $*H$ e gera uma coluna cheia correspondente em I ; assim, o número de colunas que requerem um armazenamento completo é e . Na segunda fase, a aplicação do processo reduz a coluna da variável que se torna básica e gera uma nova coluna cheia para a variável que era básica na fase anterior e que agora é não-básica. Desta forma, o total de colunas que precisam ser completamente armazenadas é também e . Isso sugere a possi-

bilidade de um sistema usando apenas uma matriz de g linhas e e colunas com um esquema apto a identificar as variáveis associadas com as colunas. Um programa FORTRAN utilizando esse método aqui descrito pode ser encontrado em [19].

V.2 - O Problema das Cargas Independentes

Em todos os problemas tratados até agora, uma vez selecionado o carregamento mais desfavorável, as cargas que contribuíam individualmente para essa configuração não podiam ser consideradas atuando independentemente umas das outras mas, pelo contrário, eram dadas em termos de um simples parâmetro de proporcionalidade λ . Em outras palavras, uma vez fixada(s) a(s) posição(ões) crítica(s) da(s) carga(s), para os propósitos da análise, o problema era tratado como colapso estático, ou seja, todas as cargas eram imaginadas crescendo lenta e proporcionalmente até que ocorresse o colapso pela formação de um mecanismo de ruptura.

Neste ítem tratar-se-á de carregamentos onde os vários componentes têm a possibilidade de agir aleatoriamente e independentemente entre limites dados; esses limites podem, simplesmente, corresponder aos valores máximo e mínimo de cada carga em particular. Assim, ao invés de se trabalhar com valores de cargas, utiliza-se intervalos de valores. E mais, o valor de uma certa carga em particular em dado instante será, em geral, independente dos valores de todas as outras cargas, embora sempre dentro dos seus limites.

Nessa consideração de carregamento aleatório e repetido existem dois efeitos principais a serem levados em conta. O primeiro relaciona-se com a plasticidade alternada e é fácil de analisar. Pode ocorrer que sob a ação de uma certa combinação de esforços variando independentemente, desenvolvam-se linhas de ruptura, parcial ou totalmente, numa certa região da laje. Mais tarde, uma combinação diferente de esforços pode produzir plastificação na mesma região mas com momentos atuando no sentido oposto. Essa flexão alternada na região pode não ser muito prejudicial se o número de repetições for relativamente pequeno, sendo possível prever um intervalo de valores para a(s) carga(s) de modo que isso não ocorra. O fenômeno é, em qualquer caso, geralmente menos crítico do que aquele de colapso incremental, que é o segundo efeito a ser considerado.

Se conforme já foi descrito, uma certa combinação de cargas variando independentemente causar a formação de linhas de ruptura numa dada seção, então, uma pequena rotação terá lugar na posição da linha de ruptura. Essa rotação será pequena porque poucas linhas de ruptura não produzirão um mecanismo de colapso; qualquer deformação plástica será redistribuída para aquelas outras partes da laje que ainda permanecem no regime elástico. Sob uma combinação diferente é possível que outra(s) linha(s) de ruptura se forme(m) em diferentes regiões e, novamente, pequenos acréscimos de rotação podem ocorrer e serem redistribuídas. Uma terceira combinação de cargas pode levar à formação de ainda outra(s) linha(s) de ruptura e assim por diante. Note-se, conforme ficará mais claro adiante, que não se está mais tratando de

materiais rígido-plásticos e sim de um caso mais geral, ou sejam, materiais elasto-plásticos definidos por curvas momento versus rotação de modo que essas pequenas rotações elásticas descritas possam ocorrer.

Pode ser que o colapso não ocorra sob a ação de qualquer dessas combinações de carga porque o número de linhas de ruptura envolvidas é muito pequeno para formar um mecanismo completo; entretanto, se todas as linhas de ruptura formadas sob a ação de cada uma dessas combinações diferentes ocorressem simultaneamente, talvez correspondessem a uma configuração de colapso. Se isso acontecesse e os limites impostos às cargas o permitissem, um modo de colapso incremental seria possível.

Por outro lado, para valores menores das cargas é possível que alguma deformação plástica ocorra nos primeiros poucos ciclos de repetição do carregamento, mas também é possível que a partir daí todas as mudanças posteriores do carregamento sejam resistidas de maneira puramente elástica pela estrutura, significando que as deformações plásticas cessaram de desenvolver-se. Quando isso acontece, diz-se que a estrutura sofreu um processo de adaptação à repetição variada das cargas. O aqui denominado *limite de adaptação* (*shakedown limit*) é o limite entre a adaptação da estrutura ao carregamento e o colapso incremental ou a plasticidade alternada. É ainda conveniente reter a idéia de um *fator limite de adaptação* λ_a aplicado não aos valores das cargas, mas aos intervalos entre os quais essas cargas podem variar, de maneira a atribuir um valor numérico a esse limite.

Com o intuito de melhor explicar os conceitos introduzidos, considere-se a viga bi-engastada da figura (V.01.a) cujo material tem a relação momento versus curvatura do tipo elasto-perfeitamente plástica, submetida a uma força concentrada P que varia segundo os limites

$$0 \leq P \leq P^{\max} \quad (V.31)$$

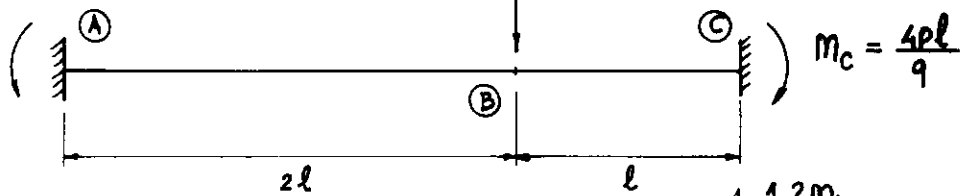
Pode ser visto claramente que nenhuma plastificação ocorrerá enquanto o momento máximo M_c for menor do que o momento de plastificação M_p da seção transversal da viga, ou seja, enquanto

$$P^{\max} \leq \frac{9}{4} \frac{M_p}{\ell} \quad (V.32)$$

Entretanto, admita-se que seja aplicado um valor $P^{\max} = 2.70 M_p/\ell$; então, os momentos elásticos hipotéticos da viga sob a ação dessa carga serão conforme mostrado na figura (V.01.b). Note-se que o ponto C aparece com um momento aparentemente impossível ($1.2 M_p$); contudo, na primeira aplicação da carga total uma rótula formar-se-ia a extremidade C e a distribuição dos momentos fletores seria a da figura (V.01.c). Com um posterior descarregamento, não existe nada que impeça a resposta de ser completamente elástica; à medida que a carga decresce do valor máximo até zero, o momento fletor em C decresce de M_p a $-0.20 M_p$. Então, a remoção total da carga externa aplicada deixará um conjunto de momentos fletores auto-equilibrados na viga cujas mag-

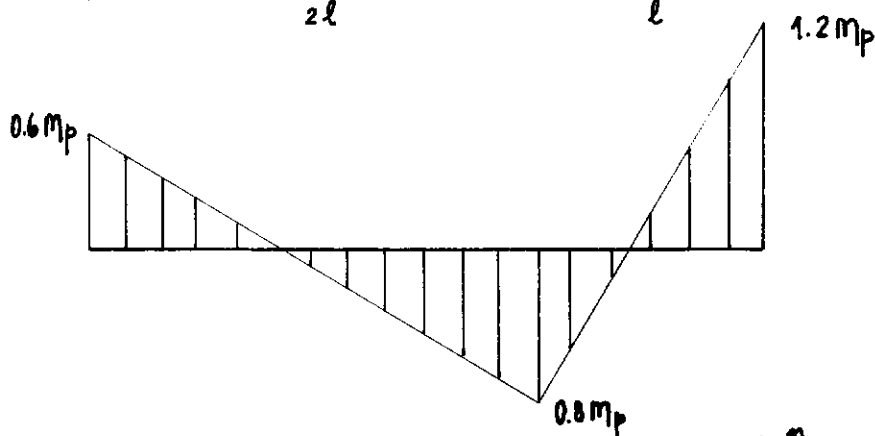
(a)

$$M_A = \frac{2Pl}{9}$$

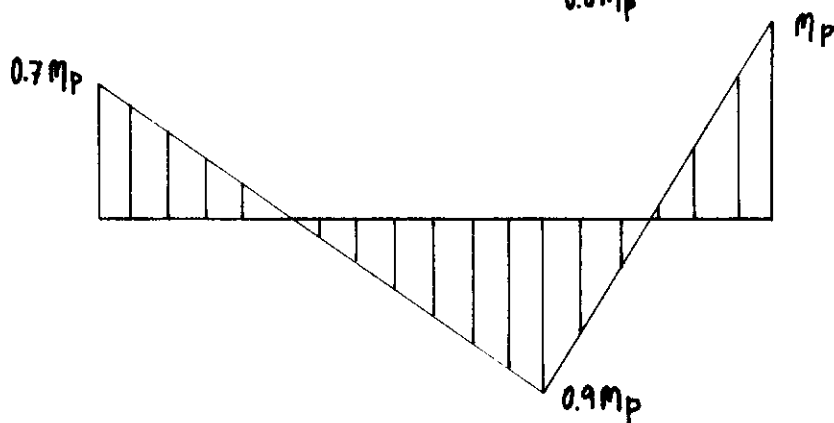


$$M_C = \frac{4Pl}{9}$$

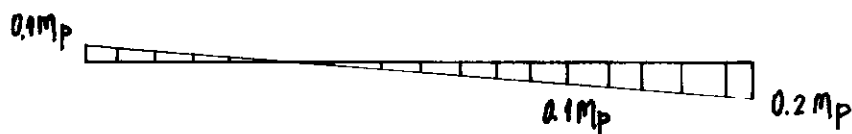
(b)



(c)



(d)



(e)

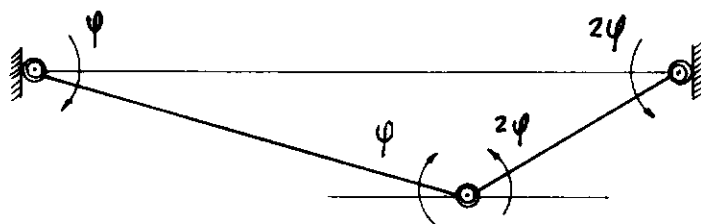


Figura V.01 - Exemplo de Processo de Plastificação

nitudes podem ser vistas na figura (V.01.d) e são simplesmente a diferença entre os diagramas de momentos das figuras (V.01.c,b). Esses momentos residuais introduzidos pela deformação plástica no primeiro carregamento farão com que um carregamento posterior seja resistido elasticamente; o momento negativo favorável de $-0.20 M_p$ permitirá a superposição de uma resposta elástica no extremo C de magnitude $1.20 M_p$ antes que o novo escoamento se inicie. Assim, a viga adaptou-se após uma simples aplicação de carga. Na realidade, neste exemplo, a carga de colapso e a carga para o limite de adaptação da estrutura são as mesmas. Desde que os momentos residuais da figura (V.01.d) estão em equilíbrio sob a ação de forças externas nulas, qualquer mecanismo φ como o da figura (V.01.e) fornecerá a relação de trabalho virtual

$$\sum_i m_i \varphi_i = 0 \quad (V.33)$$

sendo m_i o momento residual no ponto i e φ_i a respectiva deformação.

Conclusão: quando ao estender-se os limites de variação das cargas do fator λ não for mais possível obter um recarregamento elástico e, ao invés disso, a plastificação continuar indefinidamente, ter-se-á atingido o limite de adaptação da estrutura e ocorrerá o chamado *colapso incremental*.

V.2.1 - O Teorema da Adaptação da Estrutura às Cargas

O Teorema da Adaptação da Estrutura (*Shakedown Theorem*) pode ser estabelecido para materiais que tenham uma curva momento versus curvatura (ou rotação) mais geral do que a de um material somente elástico ou perfeitamente plástico. Essa curva pode ser, por exemplo, do tipo apresentado na figura (V.02). A sua única restrição é que o comportamento do material seja o mesmo para qualquer sentido de aplicação do momento fletor. Dessa forma, o primeiro escoamento ocorre para um momento M_y e o momento de plastificação completo tem o valor M_p em qualquer dos dois sentidos de curvatura; o intervalo linear elástico, assim, estende-se para um total de $2M_y$, não sendo essa suposição afetada por qualquer deformação plástica parcial que venha a ocorrer. Então, se um momento correspondendo ao valor no ponto B é aplicado à seção transversal seguido de desoarregamento, o comportamento será linear para uma diminuição total de $2M_y$.

As condições necessárias para a ocorrência da adaptação podem ser escritas em termos da solução elástica convencional e dos momentos resistentes que possam existir. A solução elástica é necessária porque o valor de λ_a procurado pressupõe que a resposta da estrutura seja inteiramente elástica. Por outro lado, desde que deformações plásticas podem ocorrer, momentos residuais aparecerão, afetando o valor total do momento fletor em qualquer seção transversal.

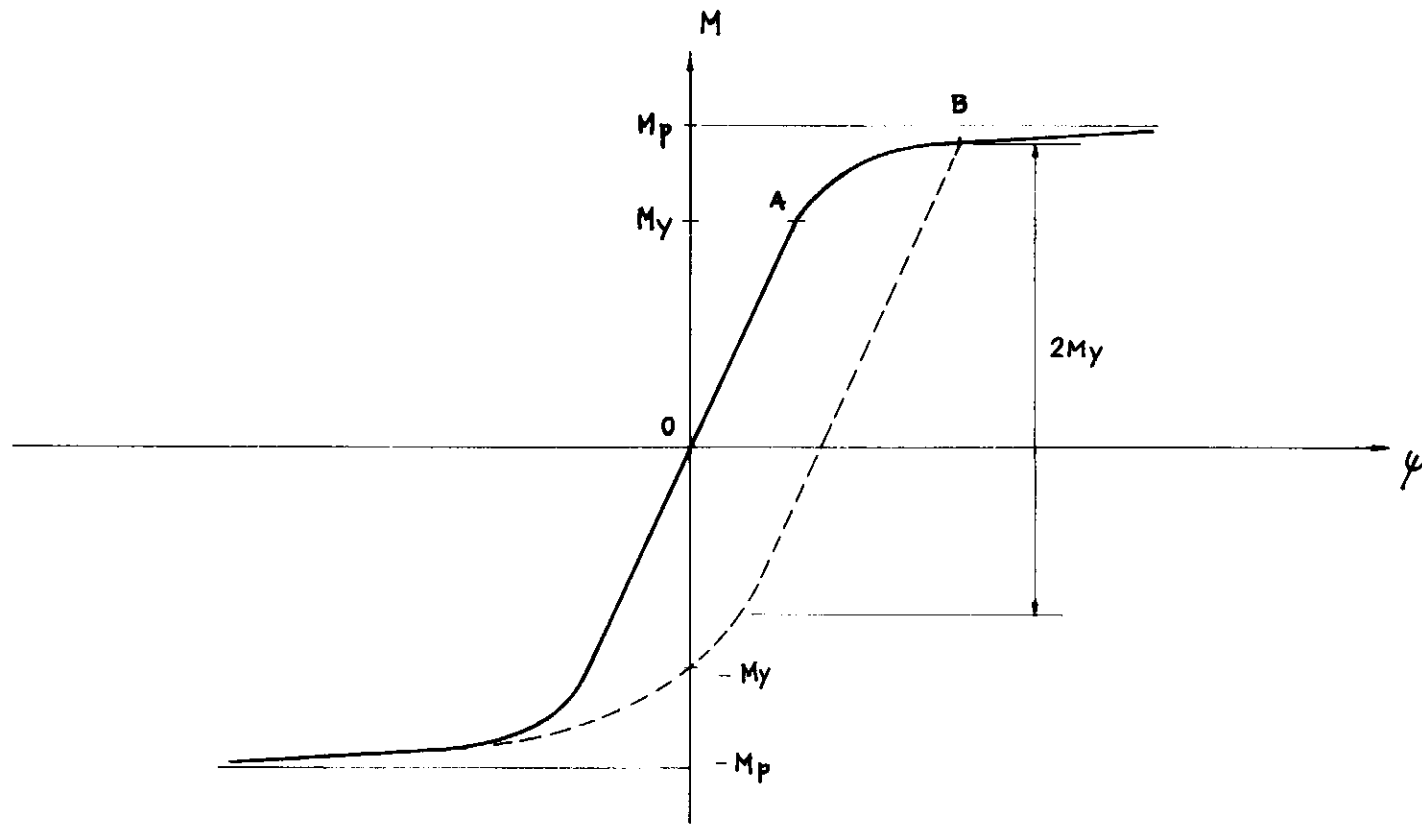


Figura V.Ø2- Aspecto de uma Curva Típica Momento versus Curvatura

Usando os valores de trabalho das cargas, o valor M_i do momento fletor elástico pode ser calculado para cada seção crítica i da estrutura. Como as cargas individuais variam entre valores máximos e mínimos prescritos, o momento M_i variará, podendo-se avaliar o maior e o menor valor, respectivamente, M_i^{\max} e M_i^{\min} . Um fator de carga λ aplicado ao intervalo de variação das cargas aumentará esses valores para λM_i^{\max} e λM_i^{\min} . Esses valores fatorados dos momentos fletores elásticos são aqueles que ocorreriam se a estrutura permanecesse indeformada, mas existirá, em geral, um momento residual m_i na seção que deve ser adicionado aos valores elásticos para dar o momento fletor total. Assim, as condições necessárias e suficientes para que ocorra a adaptação são

$$\lambda M_i^{\max} + m_i \leq (M_p)_i \quad (V.34.a)$$

$$\lambda M_i^{\min} + m_i \geq - (M_p)_i \quad (V.34.b)$$

e, para prevenir um possível perigo de plasticidade alternada, é suficiente e necessário estabelecer

$$\lambda (M_i^{\max} - M_i^{\min}) \leq 2M_y \quad (V.34.c)$$

O Teorema da Adaptação diz que qualquer conjunto de momentos residuais m_i satisfazendo às inequações (V.34.a,b) para um fator λ , ocasionará a adaptação da estrutura às cargas solicitantes nesse fator de carga, isto é, as inequações (V.34.a,b) controlam o fenômeno do colapso incremental.

A desigualdade (V.34.c) não é, normalmente, de importância crítica em projetos de lajes ou estruturas reticuladas, apesar disto não ser necessariamente verdadeiro para problemas que envolvam sistemas de tensões mais gerais. Por exemplo, o projeto plástico de vasos de pressão é governado por plasticidade alternada porque fatores de concentração de tensões de ordem 3 não são muito inócuos; assim, com um fator de colapso de 2, por exemplo, o primeiro escoamento pode ocorrer muito antes que os valores de serviço das cargas sejam aplicados. Para estruturas reticuladas usuais, projetadas para um fator de carga de 1.5 ou 2, entretanto, não é provável que o escoamento vá ocorrer para um valor do fator de carga menor que 1, a menos de acidentes devidos à instalação de apoios ou outras imperfeições. A mera remoção da carga desse tipo de estrutura não causará escoamento na direção oposta, contudo isso pode ocorrer num vaso de pressão.

Para estabelecer o teorema considere-se uma pequena mudança nos valores das cargas aplicadas. Se os momentos residuais em qualquer seção têm valor M_i num dado instante, então a variação das cargas aplicadas pode causar algum escoamento, alterando o valor do momento residual para $M_i + \delta M_i$. Durante esse processo, a mudança de curvatura $\frac{\delta M_i}{EI}$ em cada parte da estrutura que permanece elástica será compatível com quaisquer rotações $\delta \varphi_k$ que possam ocorrer nas seções em escoamento k. Assim, desde que M_i é, ele mesmo, um conjunto de momentos fletores em equilíbrio sob a ação de cargas externas nulas, a equação do trabalho virtual fornece

$$\int_S m_i \frac{\delta m_i}{EI} dS + \sum m_k \delta \varphi_k = 0 \quad (V.35.a)$$

onde a integração estende-se sobre todas as partes da estrutura que permanecem em regime elástico durante as pequenas mudanças do carregamento aplicado e o somatório inclui todas as rotações das linhas de ruptura que ocorrem.

Um conjunto de momentos residuais satisfazendo às inequações (V.34.b) será indicado por \bar{m}_i . Uma segunda aplicação da equação do trabalho virtual fornece

$$\int_S \bar{m}_i \frac{\delta m_i}{EI} dS + \sum \bar{m}_k \delta \varphi_k = 0 \quad (V.35.b)$$

Combinando-se as equações (V.35.a,b) obtém-se

$$\int_S (m_i - \bar{m}_i) \frac{\delta m_i}{EI} dS + \sum (m_k - \bar{m}_k) \delta \varphi_k = 0 \quad (V.35.c)$$

Suponha-se que numa seção particular k onde o escoamento tenha ocorrido, o valor atual de m_k seja tal que

$$(m_k - \bar{m}_k) < 0 \quad (V.36)$$

A desigualdade (V.34.a) fornece

$$\lambda M_k^{\max} + \bar{m}_k \leq (M_p)_k \quad (V.37.a)$$

isto é,

$$\lambda M_k^{\max} + m_k < (M_p)_k \quad (V.37.b)$$

onde em (V.37.b) a possibilidade de igualdade não mais existe. Assim, desde que, por hipótese, o escoamento esteja ocorrendo na seção, o momento de plastificação e o valor correspondente da rotação na linha de ruptura têm de ser negativos. Usando-se essa consideração e a equação (V.36),

$$(m_k - \bar{m}_k) \delta \varphi_k > 0 \quad (V.38)$$

De maneira análoga, fazendo-se a hipótese de $m_k > \bar{m}_k$, conclui-se que $\delta \varphi_k > 0$. Se $m_k = \bar{m}_k$, então não se tem informação alguma para o sinal de $\delta \varphi_k$; mas em todos os casos,

$$(m_k - \bar{m}_k) \delta \varphi_k \geq 0 \quad (V.39)$$

Portanto, da equação (V.35.c):

$$\int_S (m_i - \bar{m}_i) \frac{\delta m_i}{EI} dS \leq 0 \quad (V.40)$$

Agora, sendo a quantidade

$$U = \int_S \frac{(m_i - \bar{m}_i)^2}{2EI} dS \quad (V.41)$$

positiva-definida, como o carregamento muda, a desigualdade

(V.40) estabelece que $\delta U \leq 0$. Assim, o valor de \underline{U} diminui se qualquer deformação plástica estiver ocorrendo e permanece constante em caso contrário. O valor de \underline{U} deve fixar-se num valor positivo-definido ou ser nulo quando $\mathbb{M}_i = \bar{\mathbb{M}}_i$ em toda a estrutura. Em qualquer dos casos, os valores de \mathbb{M}_i tornam-se constantes e, conseqüentemente, a adaptação da estrutura ocorre.

A partir desse esboço de prova do Teorema da Adaptação será evidente que a presença de um conjunto inicial de tensões residuais não terá qualquer efeito no comportamento final da estrutura, exatamente como no caso do colapso estático. Uma estrutura que é inicialmente imperfeita ou que sofre subseqüentes acomodações estará sujeita a um conjunto de momentos residuais que podem bem causar a formação de linhas de ruptura numa ordem diferente daquela prevista pela teoria simples; entretanto, uma configuração inicial de momentos residuais será "eliminada" pelo escoamento posterior e o fator limite de adaptação λ_a terá um valor único.

É interessante anotar que os teoremas-limite para cargas proporcionais são um caso muito particular do Teorema da Adaptação da Estrutura quando os limites prescritos para todas as cargas coincidem.

V.2.2 - Formulação

Pode-se colocar o problema do seguinte modo:

Por que fator λ_a deve-se multiplicar os limites de variação das cargas de maneira a produzir um colapso incremental ?

A resposta a essa questão já foi dada pelo Teorema da Adaptação da Estrutura, que diz que a estrutura adaptar-se-á a uma dada variação de cargas se um conjunto de esforços internos auto-equilibrados puder ser encontrado de forma que a estrutura resista às cargas de maneira puramente elástica.

Da equação (V.01.a) está claro que qualquer conjunto de esforços internos que satisfaça a

$$\underline{H} \underline{M} = \underline{0} \quad (V.42)$$

será auto-equilibrado. Analisando-se elasticamente a estrutura sob a ação das várias cargas aplicadas através da equação (IV.32), pode-se obter os valores dos momentos máximos e mínimos em cada linha de ruptura, respectivamente, \underline{M}^{\max} e \underline{M}^{\min} . Havendo um estado de tensão inicial não-nulo \underline{M} os momentos máximos e mínimos serão, respectivamente, $\underline{M}^{\max} + \underline{M}$ e $\underline{M}^{\min} + \underline{M}$. A estrutura, então, adaptar-se-á às cargas aplicadas se for encontrado \underline{M} satisfazendo à equação (V.42), tal que

$$-^I \underline{M}_r \leq \underline{M}^{\min} + \underline{M} \quad (V.43.a)$$

$$\underline{\underline{M}}^{\max} + \underline{\underline{M}} \leq \underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}}_r \quad (\text{V.43.b})$$

Em se tratando de uma análise elástica, multiplicar cada carga por λ equivale a multiplicar os valores máximo e mínimo dos momentos pelo mesmo fator; assim, o cálculo do fator limite leva ao problema

Maximizar λ

submetido a

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{V.44.a})$$

$$-\underline{\underline{I}} \underline{\underline{M}}_r \leq \lambda \underline{\underline{M}}^{\min} + \underline{\underline{M}} \quad (\text{V.44.b})$$

$$\lambda \underline{\underline{M}}^{\max} + \underline{\underline{M}} \leq \underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}}_r \quad (\text{V.44.c})$$

que pode ser posta na forma matricial da Programação Linear:

Maximizar

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \underline{\underline{0}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \underline{\underline{M}} \end{array} \right\} \quad (\text{V.45.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{array}{cc} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{H}} \\ \underline{\underline{M}}^{\max} & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{M}}^{\min} & -\underline{\underline{I}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \underline{\underline{M}} \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{S}} \underline{\underline{M}}_r \\ \underline{\underline{I}} \underline{\underline{M}}_r \end{array} \right\} \quad (\text{V.45.b})$$

que é muito similar à expressão (V.02).

Como antes, pode-se escrever as expressões (V.45) considerando-se todas as variáveis não-negativas, isto é, utilizando-se as expressões (V.03), obtendo-se a equação na forma padrão:

Maximizar

$$\Lambda = \left\{ 1 \quad \underline{0} \quad \underline{0} \right\} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \underline{M}^+ \\ \underline{M}^- \end{Bmatrix} \quad (\text{V.46.a})$$

submetido a

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{H} & \underline{H} \\ \underline{M}^{\max} & \underline{I} & -\underline{I} \\ -\underline{M}^{\min} & -\underline{I} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \underline{M}^+ \\ \underline{M}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{S}_{M_r} \\ \underline{I}_{M_r} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.46.b})$$

V.2.3 - Método de Solução: o Algoritmo Simplex

Uma das características principais do algoritmo de Livesley já descrito é fazer o incremento do fator de colapso através da equação de equilíbrio (V.01.a). No problema desenvolvido para a adaptação da estrutura, o fator do limite de adaptação aparece nas condições de restrição e não na equação de equilíbrio, visto tratar-se de esforços internos auto-equilibrados, ou seja, são nulas as forças externas aplicadas. Dessa forma, considera-se que talvez seja possível modificar-se o algoritmo de Livesley para utilizá-lo também nesse tipo de problema; contudo, no presente trabalho optou-se por um algoritmo já bem conhecido: o *Algoritmo Simplex*.

Como se sabe, o conjunto de soluções viáveis de um problema de Programação Linear é convexo, isto é, toda interpolação linear de qualquer par de pontos do conjunto também pertencerá ao conjunto. Se o problema admitir solução ótima, esta será atingida para, pelo menos, um vértice do conjunto de soluções viáveis desse problema; cada vértice nada mais é do que uma solução básica possível. Ora, admitindo-se, claro, que o problema tenha solução, se entre as soluções básicas viáveis se encontra uma que é ótima, nada mais lógico do que procurar a solução ótima gerando-se as primeiras.

Partindo de uma solução básica viável inicial, o *Simplex* nada mais é do que um algoritmo capaz de gerar soluções básicas viáveis cada vez melhores até chegar a uma que não pode mais ser melhorada: é a solução ótima.

Os principais passos seguidos pelo algoritmo já foram descritos quando da apresentação do algoritmo de Livesley, pois como foi dito este último baseia-se nas mesmas idéias fundamentais do algoritmo *Simplex*. A grande restrição que se faz a esse algoritmo é que, sendo um método para resolver qualquer problema de Programação Linear, ganha generalidade, mas perde no que diz respeito a exigir a apresentação do problema numa forma padrão, somente trabalhando com variáveis não-negativas, o que acarreta um aumento considerável na quantidade de armazenamento e tempo de processamento necessários. Maiores informações a respeito desse algoritmo podem ser obtidas em [20].

CAPÍTULO VI

A ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA COMO OPÇÃO

VI.1 - Formulação: os Problemas de Convergência

Com a formulação apresentada é possível ainda obter o colapso via análise elasto-plástica uma vez que são conhecidas as expressões da matriz de rigidez (IV.16.d), das leis constitutivas (IV.15.a) e das forças elásticas internas (IV.29.b); mas para esse tipo de análise são necessários ainda alguns comentários e definições expostos a seguir.

O ponto de partida para a solução do problema elasto-plástico será a equação (IV.32). Considerando-se o comportamento do material no caso mais geral tem-se uma análise não-linear física que requer um método iterativo de solução. O método utilizado foi uma das variações do Método de Newton-Raphson, denominado *Método Secante de Newton-Raphson Modificado (MSN)*, descrito em [21,22]. Nesse método equilibra-se as forças externas com as forças elásticas internas ao final de cada iteração, acrescentando-se cada incremento de deslocamento calculado ao deslocamento total já existente até que a estrutura chegue ao colapso. A determinação desse ponto é sempre problemática pelo fato da matriz de rigidez tangente aproximar-se da singularidade quando o problema se aproxima do colapso. Isso provoca dificuldades numéricas, mesmo quando se usa um controle de deslocamentos,

porque impede que a carga de colapso real seja obtida. Uma primeira tentativa no sentido de achar um critério de convergência confiável e com pouca instabilidade está descrita por VAZ[23].

Por analogia com a curva deslocamento versus força para um sistema conservativo de um grau de liberdade apresentada na figura (VI.01), o incremento de energia de deformação total na iteração k será dado pela área hachurada da figura, ou seja,

$$\delta U_k = \frac{1}{2} \left[\underline{F}_k + \underline{F}_{k-1} \right]^T \left[\underline{u}_k - \underline{u}_{k-1} \right] \quad (\text{VI.01.a})$$

onde \underline{F}_k e \underline{u}_k representam, respectivamente, as forças elásticas internas e os deslocamentos nodais na iteração k . O trabalho potencial das forças externas nessa iteração é

$$W_f = -\underline{f}_k^T \underline{u}_k \quad (\text{VI.01.b})$$

Dessa forma, a energia de deformação total na iteração k é dada pela soma dos incrementos até a referida etapa, isto é,

$$U_k = \sum_{j=1}^k \delta U_j \quad (\text{VI.01.c})$$

A energia potencial total para um sistema conservativo pode ser dada por

$$\pi = U + W_f \quad (\text{VI.02})$$

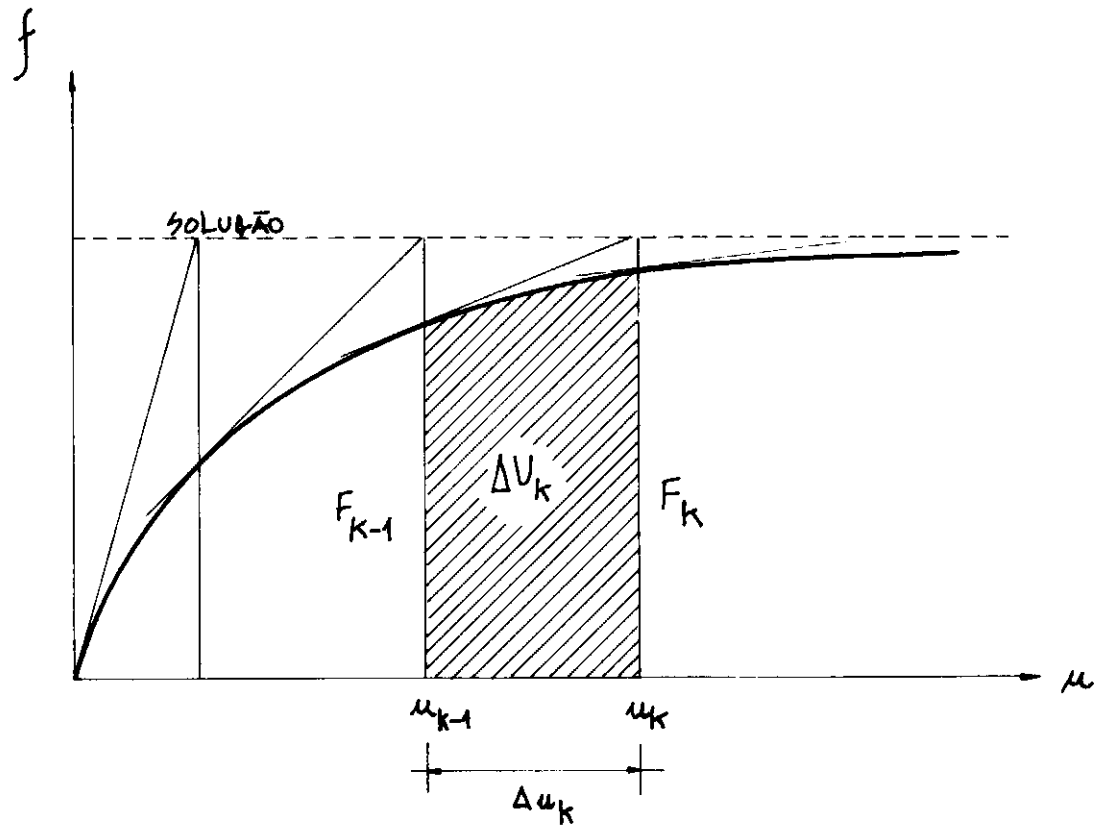


Figura VI.Ø1 - Curva Deslocamento versus Força para 1 grau de liberdade

Para materiais de comportamento perfeitamente dúctil, a expressão (VI.02) pode ser colocada na forma gráfica da figura (VI.02). O Princípio da Energia Potencial Total Mínima estabelece que dentre todos os campos de deslocamento possíveis (\underline{u}), existe um, correspondente à configuração de equilíbrio do sistema conservativo, que torna essa energia potencial um mínimo: é o ponto $(\pi_{\min}, \bar{u}_{eq})$ da figura (VI.02), onde $\bar{u} = \|\underline{u}\|$. Calculando-se esse ponto de equilíbrio para cada \underline{f} variando de zero a um valor limite (\underline{f}_r) para o comportamento elasto-plástico do material, obtém-se o gráfico da figura (VI.03), análogo ao da figura (VI.02). Quando ocorre o colapso todo incremento do trabalho potencial das cargas externas se transforma em trabalho interno plástico, não havendo incremento da energia potencial total; nesse caso vale a equação

$$\frac{d\pi}{d\bar{u}} = 0 \quad (\text{VI.03})$$

Assim, π é máximo de $\underline{f} = 0$ e é mínimo de $\underline{f} = \underline{f}_r$.

O critério de convergência inicialmente adotado seria baseado nestas conclusões. Calculando-se π para cada iteração, o colapso seria atingido quando

$$\frac{\delta\pi}{\delta\bar{u}} < \text{TOL} \quad (\text{VI.04.a})$$

e

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta\bar{u}^2} > 0 \quad (\text{VI.04.b})$$

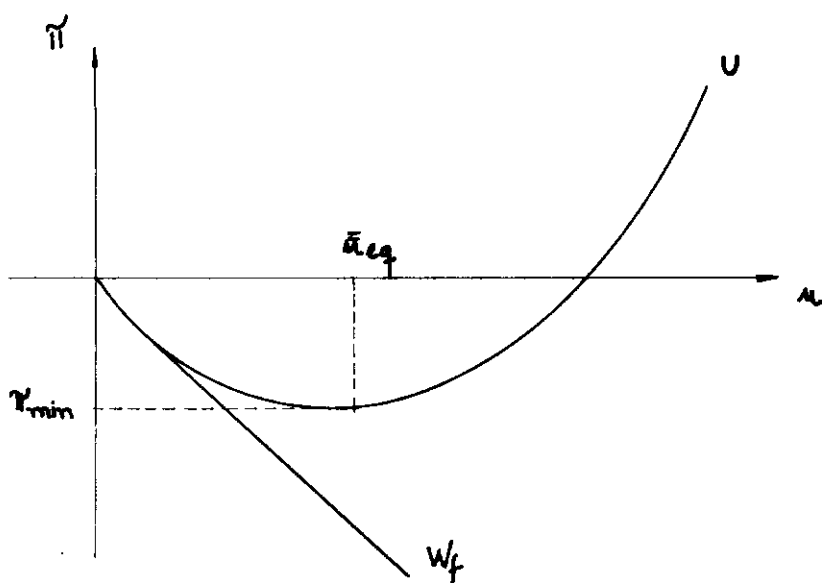


Figura VI.02_ Energia Potencial Total versus Norma dos Deslocamentos

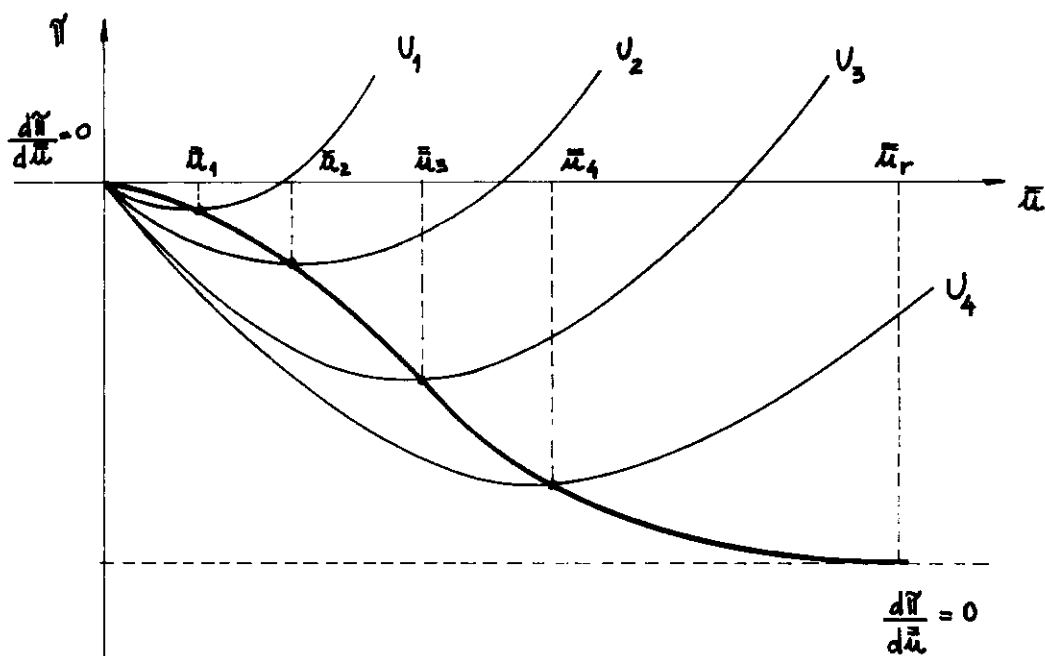


Figura VI. 03_ Condição de Equilíbrio para cada Valor da Força Aplicada

onde TOL é um parâmetro de tolerância especificado. Contudo, apesar de parecer simples, mesmo depois de várias tentativas não foi possível estabelecer um valor de TOL que fosse completamente independente das características particulares do problema analisado. Em pesquisas posteriores utilizou-se outro critério; considerando-se na fase plástica uma pequena rigidez tangente de maneira a permitir que a estrutura continuasse a se deformar, o colapso seria atingido quando

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta \bar{u}^2} > \text{TOL} \quad (\text{VI.05.a})$$

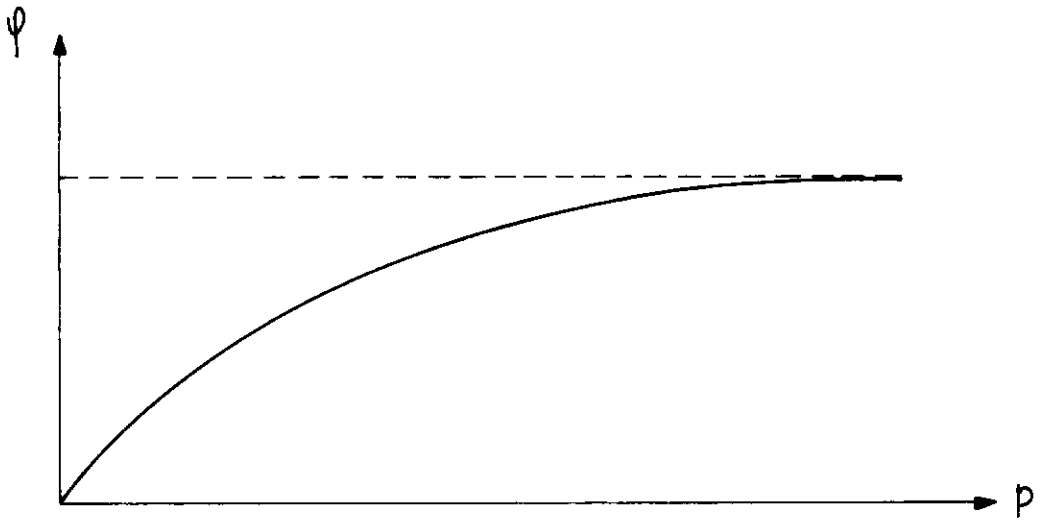
onde agora TOL é um parâmetro independente do problema em questão. Entretanto, a consideração dessa rigidez tangente fictícia na fase plástica por vezes levava a uma carga de colapso maior do que a obtida pela análise limite via Programação Linear pelo fato de permitir-se que a estrutura pudesse ter uma rigidez maior do que na realidade teria. O critério realmente adotado foi o que pareceu mais intuitivo: sempre que a estrutura ultrapassa a carga de colapso, fato esse detectado quando há divergência no Método de Newton-Raphson Modificado, o incremento de carga é diminuído numa seqüência tal que, quando a diferença entre as cargas obtidas em duas iterações convergentes sucessivas estiver abaixo de determinada tolerância especificada considera-se que o colapso foi atingido. Esse critério apresenta bons resultados e uma precisão bastante boa.

VI.2 - O Mecanismo de Colapso

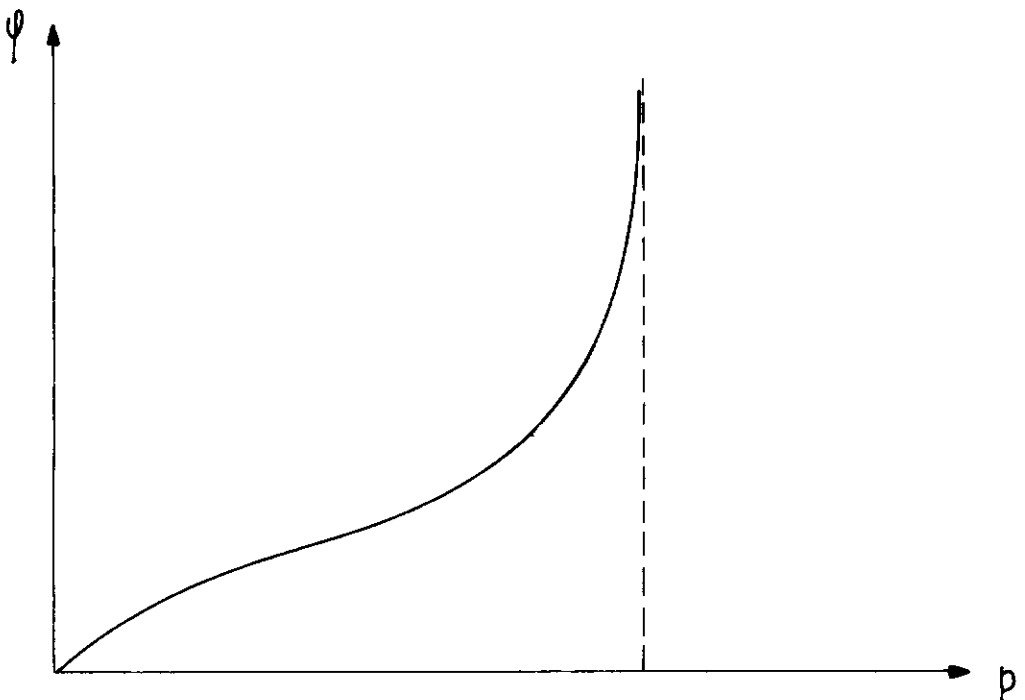
O grande problema desse tipo de análise é a possibilidade de várias charneiras se plastificarem na configuração de colapso sem que todas façam realmente parte do mecanismo de ruína. A maneira de diferenciá-las é bastante trabalhosa em termos computacionais e baseia-se na consideração da *estabilização das rotações*.

Após algumas análises, observou-se que ao atingir o valor de plastificação máximo algumas charneiras tinham a sua rotação estacionada, ou seja, o seu valor não mudava de maneira significativa, enquanto outras continuavam com a rotação crescente. Fazendo-se um gráfico carga versus rotação na charneira, pode-se representar esses dois tipos como nas figuras (VI.04.a,b). As charneiras que se estabilizam (*inativas*) não farão parte da configuração de colapso; somente as que continuam a deformar-se (*ativas*) constituirão o mecanismo final de ruptura, conforme intuitivamente é de se esperar considerando-se a própria idéia do processo de plastificação.

Todo esse procedimento, entretanto, apesar da simplicidade, é bastante difícil de se implementar de uma forma automatizada; por exemplo, qual será a tolerância especificada para considerar que as rotações se estabilizaram? Nos estudos realizados, notou-se que essa tolerância pode variar muito de problema para problema.



(a) Charneiras Inativas : estabilizadas



(b) Charneiras Ativas : deformando-se

Figura VI.04 - Esquema da Estabilização das Rotações

A conclusão de tudo isso é que a análise elasto-plástica aparece como uma opção possível para obtenção de cargas de colapso, contudo, levando-se em conta os problemas que aparecem, considera-se a sua utilização na análise limite somente quando se deseja conhecer a história das deformações até o colapso.

VI.3 - Condensação Cinemática: Redução do Número Total de Graus de Liberdade

Conforme já foi dito anteriormente, algumas charneiras se estabilizam enquanto outras continuam no processo de deformação progressiva. Já que aquelas que se estabilizam não farão parte da configuração de colapso, seria bom que pudessem ser eliminadas da análise, reduzindo-se, assim, o número total de elementos e o número total de graus de liberdade.

Seja a equação (IV.30). Num dado instante da análise tem-se i charneiras estabilizadas, isto é, inativas. Escolhe-se, então, i valores de deslocamentos (u) entre os r valores relacionados com as rotações das charneiras inativas e rearranja-se a equação (IV.30):

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_i \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ii}^T & H_{iv}^T & 0 \\ H_{ji}^T & H_{jv}^T & H_{jw}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_v \\ u_w \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.06})$$

onde

$$v = r - i$$

$$w = g - i$$

$$j = e - i$$

$\bar{\psi}_i$ representa as i charneiras estabilizadas.

Pode-se considerar que as charneiras estabilizadas formam painéis rígidos tomando-se $\bar{\psi}_i = 0$; assim,

$$\bar{u}_i = -[\bar{H}_{ii}^T]^{-1} \bar{H}_{iV}^T \bar{u}_V = \bar{J} \bar{u}_V \quad (\text{VI.07})$$

Com a equação (VI.07) pode-se também escrever

$$\bar{u}_e = \bar{B} \bar{u}_j \quad (\text{VI.08.a})$$

onde

$$\bar{u}_e = \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_i \\ \bar{u}_V \\ \bar{u}_W \end{array} \right\} \quad (\text{VI.08.b})$$

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{cc} \bar{J} & 0 \\ \bar{I} & 0 \\ 0 & \bar{I} \end{array} \right] \quad (\text{VI.08.c})$$

$$\bar{u}_j = \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_V \\ \bar{u}_W \end{array} \right\} \quad (\text{VI.08.d})$$

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\underline{u}_e^T \underline{f} = \underline{u}_j^T \underline{f}_j \quad (\text{VI.09.a})$$

Levando-se a equação (VI.08.a) na equação acima:

$$\underline{u}_j^T \underline{B}^T \underline{f}_e^T = \underline{u}_j^T \underline{f}_j \quad (\text{VI.09.b})$$

Para que a igualdade sempre se verifique:

$$\underline{f}_j = \underline{B}^T \underline{f}_e \quad (\text{VI.09.c})$$

As equações (VI.08.a) e (VI.09.c) representam o Princípio da Contra-gradiente. Seja agora a equação (IV.32) também rearranjada conforme (VI.06):

$$\underline{f}_e = \underline{K}_e^T \underline{u}_e \quad (\text{VI.10})$$

Pré-multiplicando-se (VI.10.a) por \underline{B}^T e levando-se em conta as relações (VI.09.c) e (VI.08.a), tem-se

$$\underline{f}_j = \underline{K}_j^T \underline{u}_j \quad (\text{VI.11.a})$$

onde

$$\underline{K}_j^T = \underline{B}^T \underline{K}_e^T \underline{B} \quad (\text{VI.11.b})$$

Com isso, foi visto ser realmente possível uma condensação cinemática no desenvolver da análise. A grande vantagem desta técnica está na redução gradativa da dimensão

do problema e, conseqüentemente, também do tempo de processamento total para a solução; restando, ao final, somente as charneiras plásticas que fazem parte do mecanismo de colapso, ou sejam, as charneiras realmente rompidas.

Note-se que para o sucesso dessa técnica de condensação é necessário que as charneiras que se estabilizam sejam detectadas corretamente; caso contrário, poder-se-ia eliminar charneiras que fariam parte da configuração de colapso, modificando-se assim a solução real final. Veja-se aqui, novamente, a importância da especificação precisa de uma tolerância para a seleção de charneiras estabilizadas.

CAPÍTULO VII

A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO

Tendo em vista a verificação de toda a formulação apresentada, elaborou-se um procedimento computacional para o modelo proposto. O programa está codificado em linguagem de programação PASCAL por esta apresentar-se como a melhor opção em termos de portabilidade, legibilidade, facilidade de programação, documentação, estruturação e manutenção. Na versão atual, três tipos de análise estática são possíveis:

- Análise Limite Via Programação Linear (Algoritmo de Livesley);

- Análise de Adaptação Estrutural Via Programação Linear (Método Simplex);

- Análise Elasto-plástica Via Método Incremental Iterativo (Método de Newton-Raphson Modificado).

Existe todo um sistema para detecção e aviso de possíveis erros, tanto na geração de dados quanto na obtenção de resultados.

Basicamente pode-se dividir o programa em três blocos principais: o PRÉ-PROCESSADOR, o PROCESSADOR e o PÓS-PROCESSADOR, descritos nos próximos itens. Alguns dos algoritmos e procedimentos utilizados encontram-se também descritos no Apêndice C.

VII.1 - O PRÉ-PROCESSADOR

É o responsável pela entrada e geração de todos os dados necessários ao tipo de análise pretendido: ao sair-se do PRÉ-PROCESSADOR, todos os dados necessários para análise estão prontos e disponíveis, desde que não tenha havido algum erro grave nos comandos de entrada de dados.

Constitui-se de um interpretador em linguagem orientada, de modo a facilitar o contacto entre o usuário e o programa, e de vários geradores de malhas, nós, elementos, materiais, grupos de materiais e curvas momento versus curvatura. Assim, entre outras coisas, é possível:

- Gerar malhas quadrangulares sendo dados os quatro nós dos vértices e o número de divisões dos lados;
- Gerar malhas circulares sendo dados o nó central, o primeiro nó da malha propriamente dita, o ângulo entre os raios do primeiro e do último nó e o número de divisões desse ângulo;

- Gerar nós sobre uma reta eqüidistantemente sendo dados o nó inicial, o nó final e os números dos nós que devem ser gerados;
- Obter o nó da intersecção entre duas retas definidas por dois nós incidentes cada;
- Gerar incidências sendo dados o tipo de incidência (zig-zag ou leque);
- Fazer a consideração de simetrias sendo dados apenas os eixos de simetria X e/ou Y;
- Gerar a curva momento versus curvatura sendo dadas as características do aço e do concreto e as armaduras com as direções e os recobrimentos respectivos;
- Gerar todos os elementos-charneira possíveis sendo dados três nós não-colineares. O programa se encarrega de verificar a pré-existência de charneiras e faz as alterações que se mostrarem necessárias nas incidências;
- Calcular coordenadas de um nó em função de outro já definido;
- Manter ou alterar dados para uma análise posterior sem que seja necessário fornecê-los novamente;

- Gerar e especificar grupos de charneiras.
- Controlar a impressão seletiva de dados e resultados;
- Comandar a depuração discriminada da análise em processo;
- Especificar tolerâncias de convergência;
- Checar dados e carregamentos sem que seja efetuada a análise, contando, inclusive, com a plotagem da malha fornecida ou criada com a diferenciação entre elementos completos e degenerados;
- A partir das restrições nodais, determinar automática e rapidamente os elementos que estão ativos, os que fazem parte do contorno ou estão sobre eixos de simetria.

VII.2 - O PROCESSADOR

Representa o coração do programa, isto é, nele processa-se toda a análise numérica do problema. Constitui-se de um interpretador de cargas, de um analisador elasto-plástico e de um analisador limite.

O interpretador de cargas considera a entrada das cargas aplicadas, também em linguagem orientada; podem ser especificadas forças nodais, forças concentradas e forças uniformemente distribuídas na superfície, além de momentos fletores conforme descritos no item referente à dedução das forças nodais equivalentes. Os analisadores, elasto-plástico e limite, processam as análises elástica ou elasto-plástica e a análise limite via Programação Linear, respectivamente. Os algoritmos utilizados são os apresentados neste trabalho, obviamente. São geradas informações quanto aos deslocamentos nodais, às rotações e aos momentos nas charneiras; para o caso de análise elasto-plástica tem-se ainda informações sobre as energias e suas variações.

VII.3 - O PÓS-PROCESSADOR

Opera a saída gráfica da análise. Para cada carregamento, pode ser pedida a plotagem da configuração inicial, ou seja, da malha propriamente dita, da configuração final e, no caso da análise elasto-plástica, das curvas norma_dos_deslocamentos versus energia_potencial_total e norma_dos_deslocamentos versus norma_das_forças_externas. As opções de saída gráfica permitem a impressão em qualquer tamanho e ângulo de projeção, ou sejam, perspectivas e/ou vistas, inclusive legendas com texto explicativo.

As figuras (VII.01,02,03) mostram o aspecto de três análises pedidas ao programa. A figura (VII.04) mostra um esquema simplificado do tipo "Railroad Diagram" com todas as opções disponíveis na versão atual do programa.

```

$IDENTIFICACAO
#1 FIGURA VIII.01.A - MALHA A
#2 LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS
$DEPURACAO
$ANALISE LIMITE CARGAS PROPORCIONAIS
$GEOMETRIA
NO 1 X 0.0 Y 0.0 FIXO
N 2 X 1.0 Y 0.0 F
NO 3 X 0.5 Y 0.5 LIVR
NO 4 X 0.0 Y 1.0 FIX
N 5 X 1.0 Y 1.0 FI
TRIANGULO 1 2 3 G 1 T 2 5 3 G 1 TRIANG 3 5 4 G 1
TRI 4 1 3 G 1
$TOPOLOGIA
MATERIAL 1 FATOR 1.0
ACO FYK 500000.0 / 1.15 TIPO A E 210000000.0
ALONGAMENTO 0.0100 ENCURTAMENTO -0.0035
CONCRETO FCK 15000.0 / 1.40 E 210000000.0
ALONGAMENTO 0.0 ENCURTAMENTO -0.0035
GRUPO 1 MATERIAL 1 ESPESSURA 0.11
DIRECAO 1 ANG 90.0 INF AS 0.001 R 0.01
SUP AS 0.001 R 0.01
DIRECAO 2 ANG 0.0 INF AS 0.001 R 0.01
SUP AS 0.001 R 0.01
$HISTORICO FINAL 300.0 INCREM 50.0
$FUNCOES FUNCAO 1 T 0.0 FT 0.0 T 1.0E+4 FT 1.0E+4
$CARREGAMENTO
# 1 FORCA CONCENTRADA CENTRAL
# 2 FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 305.19 NUMERICO =
IMPRESSAO TOTAL
FORCA CONCENTRADA 1.0 VARIACAO 1 NO 3
$PLOTAR CONFIG FINAL GRAFIC FORCA-EXTERNA GRAFIC
ENERGIA-POTENCIAL
$FIM

```

\$IDENTIFICACAO

#1 FIGURA VIII.06.D - MALHA A (10 X 10)
 #2 LAJE QUADRADA APOIADA NUM LADO E EM 1 COLUNA
 \$ANALISE LIMITE CARGAS_PROPORCIONAIS

\$GEOMETRIA

MALHA RETANGULAR NO 1 X 0.0 Y 0.0 COLUNA
 NO 2 X 12.0 Y 0.0
 NO 4 X 12.0 Y 12.0
 NO 3 X 0.0 Y 12.0

RET 1 2 LIVRE DIVISOES 10 RE 2 4 LIVR R 3 4 FIX
 RETA 3 1 LI D 10

INC 2 PRIMEIRO 1 GRUPO 1

\$TOPOLOGIA

GRUPO 1 MATERIAL 0 ESPESSURA 0.11

DIRECAO 1 ANG 90.0 INF AS 0.001 R 0.01

SUP AS 0.001 R 0.01

DIRECAO 2 ANG 0.0 INF AS 0.001 R 0.01

SUP AS 0.001 R 0.01

\$HISTORICO FINAL 100.0 INCREM 10.0

\$FUNCOES FUNCAO 1 T 0.0 FT 0.0 T 1.0E+4 FT 1.0E+4

\$CARREGAMENTO

1 FORCA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFICIE

2 FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 1.37 NUMERICO =

FORCA SUPERFICIE 1.00 VARIACAO 1 T 0 0 0

\$PLOTAR CONFIG FINAL GRAFIC FORCA-EXTERNA GRAFIC

ENERGIA-POTENCIAL

\$FIM

```

$IDENTIFICACAO
#1 FIGURA VIII.09.A - MALHA A
#2 LAJE CIRCULAR APOIADA EM 8 COLUNAS
$ANALISE LIMITE CARGAS_PROPORCIONAIS
$GEOMETRIA
SIMETRIA_NOS_EIXOS X Y
NO 1 X 0.0 Y 0.0 LIVRE
NO 2 X 4.0 Y 0.0 COLUNA
NO 5 X 5.0 Y 0.0 LIVRE
MALHA CIRCULAR CENTRO 1 INICIO 2 ANGULO 90.0 DIVISOES 2
SOMENTE NOS GRUPO 1
MALHA CIRCULAR CENTRO 1 INICIO 5 ANGULO 90.0 DIVISOES 4
SOMENTE NOS GRUPO 1
NO 10 INTERSECAO 3 5 COM 2 7 LIVRE
NO 11 INTERSECAO 3 9 COM 4 7 LIVRE
INCIDENCIA GRUPO 1 LEQUE 1 2 10 3 11 4
INCIDENCIA GRUPO 1 LEQUE 11 4 9 8 7 3
INCIDENCIA GRUPO 1 LEQUE 10 3 7 6 5 2
$TOPOLOGIA
GRUPO 1 MATERIAL 0 ESPESSURA 0.11
DIRECAO 1 ANG 90.0 INF AS 0.001 R 0.01
SUP AS 0.001 R 0.01
DIRECAO 2 ANG 0.0 INF AS 0.001 R 0.01
SUP AS 0.001 R 0.01
$HISTORICO FINAL 100.0 INCREM 10.0
$FUNCOES FUNCAO 1 T 0.0 FT 0.0 T 1.0E+4 FT 1.0E+4
$CARREGAMENTO
# 1 FORCA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFICIE
# 2 FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 19.78 NUMERICO =
FORCA SUPERFICIE 1.00 VARIACAO 1 T 0 0 0
$PLOTAR CONFIG FINAL GRAFIC FORCA-EXTERNA GRAFIC
ENERGIA-POTENCIAL
$FIM

```

```

          (T01)      : TEXTO COM 70 CARACTERES

0 < (I01)

0 < (I02) <= NMAXNOS

0 < (I03) <= NMAXGRP

0 < (I04)

0 =( (I05) <= NMAXMAT

0 < (I06) <= NMAXFUN

          (R01)      : NUMERO REAL QUALQUER

0.0 < (R02)

```

OPCOES DO INTERPRETADOR:

```

          |<---(-5)-----+
          |               |
$IDENTIFICACAO --- # (I01) (T01) -----|

          |<-----+
          |               |
$ANALISE --- ESTATICA --- <LINEARIDADE> -----|
          |               |
          |- DINAMICA --- <LINEARIDADE> --- <ALGORITMO> -|
          |               |
          |- LIMITE --- CARGAS_PROPORCIONAIS -----|
          |               |
          |               |- SHAKEDOWN --- <LINEARIDADE> -----|
          |               |
          |- CHECAR_DADOS -----|

<LINEARIDADE>

--- LINEAR -----|
|               |
|- NAO_LINEAR --- FISICA -----|
|               |
|               |- GEOMETRICA -|

<ALGORITMO>

ALGORITMO --- NEWMARK -----|
|               |
|- DIFERENCA_CENTRAL -|

```

Figura VII.04 - Entrada de Dados do CHAPLIN

```

      | <-----+
      |
$GEOMETRIA --- <NO> <RESTRICAO> -----|
      |
      |- NO <I02> <RESTRICAO> -|
      |
      |- <CHARNEIRA> -----|
      |
      |- <TRIANGULO> -----|
      |
      |- <NOS_SOBRE_RETA> -----|
      |
      |- <INCIDENCIAS> -----|
      |
      |- <EIXOS_DE_SIMETRIA> ---|
      |
      |- <MALHA> -----|
      |
      |- ESPELHAR -----|
      |
      |- OK -----|

```

<NO>

```

      | <-----+
      |
NO <I02> --- X <R01> -----|
      |
      |- Y <R01> -----|
      |
      |- = <I02> -----|
      |
      |- <INTERSECAO> -|

```

<RESTRICAO>

```

--- LIVRE -----|
|
| - APOIO ---|
|
| - COLUNA --|
|
| - ENGASTE -|

```

<INTERSECAO>

```

INTERSECAO <I02> <I02> COM <I02> <I02> -----|

```

<TRIANGULO>

```

TRIANGULO <I02> <I02> <I02> -----|
                                     |
                                     | - GRUPO <I03> -|

```

<CHARNEIRA>

```

CHARNEIRA <I02> ----- <I02> -----
      |           |           |           |
      | - + <I04> - |           | - + <I04> - |
      |           |           |           |
      | - - <I04> - |           | - - <I04> - |

----- GRUPO <I03> -----
      |           |
      | - * <I04> - |

```

<INCIDENCIAS>

```

                                     | <--(+3)--+
                                     |           |
INCIDENCIA --- GRUPO <I03> --- ZIGZAG ----- <I02> -----
                                     |           |
                                     | - LEQUE --|

```

<MALHA>

```

      | <-----+
      |           |
MALHA --- <RETANGULAR> -----
      |           |
      | - <CIRCULAR> ---|

```

<RETANGULAR>

```

      | <-----+
      |           |
      | | <--(=4)--+
      | |           |
RETANGULAR ----- <NO> -----
      |           |
      | | <--(=4)--+
      | |           |
      | --- <LADO> -----|
      |           |
      | - <DIAGONAIS> -----|
      |           |
      | - GRUPO <I03> -----|
      |           |
      | - SOMENTE --- NOS -----|
      |           |
      | - INCIDENCIAS -|

```

<LADO>

```

RETA <I02> <I02> <RESTRICAO> -----
      |           |
      | - DIVISOES <I04> --|

```

<DIAGONAIS>

```

INCIDENCIA_DAS_DIAGONAIS <I04> -----|
|                                     |<----+ |
|                                     |   | |
| - FIXA_EM ----- X -----|
|                                     |   | |
|                                     | - Y -|

```

<CIRCULAR>

```

|<-----|
|                                     |
CIRCULAR --- CENTRO <I02> -----|
|                                     |
| - INICIO <I02> -----|
|                                     |
| - ANGULO_X <R01> -----|
|                                     |
| - ARCTG <R01> -----|
|                                     |
|                                     | - / <R01> -|
|                                     |
| - DIVISOES <I04> -----|
|                                     |
| - SOMENTE --- NOS -----|
|                                     |
|                                     | - INCIDENCIAS -|
|                                     |
| - GRUPO <I03> -----|

```

<NOS SOBRE RETA>

```

|<--(-50)--+
|                                     |
RETA <I02> <I02> NOS --- <I02> -----|

```

<EIXOS DE SIMETRIA>

```

|<--(-2)---+
|                                     |
SIMETRIA_NO_EIXO --- X -----|
|                                     |
| - Y -----|

```

```

|<--(-10)-----+
|                                     |
|                                     |<--(+4)-----+ |
|                                     |   | |
$FUNCOES --- FUNCAO <I06> --- T <R01> -----|
|                                     |   | |
|                                     | - FT <R01> -|

```

```

      |<-----+
      |
$TOPOLOGIA --- <MATERIAL> -----|
      |
      |- <GRUPO> ----|

```

<MATERIAL>

```

      |<--(=2)-----+
      |
MATERIAL <I05> --- FATOR_SEGURANCA <R02> --- <ACO> -----|
      |
      |- <CONCRETO> -|

```

<ACO>

```

      |<-----+
      |
ACO --- FYK <R02> ----- E <R02> -----|
      |           | |
      |- / <R02> ----| |- ALONGAMENTO_MAXIMO <R01> --|
      |           | |
      |- TIPO --- A -| |- ENCURTAMENTO_MAXIMO <R01> -|
      |           | |
      |           |- B -|
      |           |
      |- = <I02> ----|

```

<CONCRETO>

```

      |<-----+
      |
CONCRETO --- FCK <R02> ----- E <R02> -----|
      |           | |
      |- / <R02> ----| |- ALONGAMENTO_MAXIMO <R01> --|
      |           | |
      |- = <I02> ----| |- ENCURTAMENTO_MAXIMO <R01> -|

```

<GRUPO>

```

      |<-----+ |<--(=2)-----+
      |           | |
GRUPO <I03> --- MATERIAL <I05> ----- <DIRECAO> ----|
      |           |
      |- ESPESSURA <R02> ----|

```

<DIRECAO>

```

      |<--(=2)-----+
      |
DIRECAO <I04> ANGULOX <R01> --- INFERIOR --- <ARMACAO> ----|
      |           |
      |- SUPERIOR -|

```

```

<ARMAÇAO>

|<-----+
|
|-----|
| ARMADURA <R02> -----|
|
|-----|
| RECOBRIMENTO <R02> -|
|
|-----|
| MP <R01> -----|

      |<-----+
      |
      |-----|
$HISTORICO --- INCREMENTO <R02> -----|
      |
      |-----|
      | FINAL <R02> -----|

      |<-----+
      |
      |-----|
$ITERACOES --- CORRECOES <I04> -----|
      |
      |-----|
      | TENTATIVAS_DE_CONVERGENCIA <I04> -----|
      |
      |-----+
      |
      |-----|
      | TOLERANCIA --- FORÇA_RESIDUAL <R02> ---|
      |
      |-----|
      | DESLOCAMENTO <R02> ---|
      |
      |-----|
      | CARGA_CRITICA <R02> ---|
      |
      |-----|
      | ZERO <R02> -----|

      |<-----+
      |
      |-----+
      |
      |-----|
$IMPRESSAO --- NOS -----|
      |
      |-----|
      | SIM -| | ELEMENTOS -|
      |
      |-----|
      | NAO -| | MATERIAIS -|
      |
      |-----|
      | GRUPOS -----|
      |
      |-----|
      | FUNCOES ---|
      |
      |-----|
      | DADOS -----|
      |
      |-----|
      | CURVAS -----|

$LIMPAR_MEMORIA -----|

```

Figura VII.04 - Entrada de Dados do CHAPLIN (continuação)

<CARGA_EM_TRIANGULO>

```

----- TRIANGULO <I02> <I02> <I02> -----|
|                                     |
| - VARIACAO <I06> - |

```

<SUPERFICIE>

```

| <-----+
|                                     |
SUPERFICIE <R01> --- <CARGA_EM_TRIANGULO> -----|

```

<MOMENTO>

```

| <-----+
|                                     |
MOMENTO <R01> --- <CARGA_EM_CHARNEIRA> -----|

```

<IMPRIMIR>

```

| <-----+
|                                     |
IMPRIMIR --- <ETAPAS> -----|
|                                     |
|                                     | <-----+ |
|                                     |                                     | |
|----- TOTAL -----|
| SIM | | CORRECAO -----|
| NAO | | HISTORICO -----|
|                                     |
|                                     | ENERGIAS -----|
|                                     |
|                                     | RESPOSTA -----|
|                                     |
|                                     | <ESFORCOS_IMPRESSOS> -|

```

<ESFORCOS_IMPRESSOS>

```

| <-----+
|                                     |
ESFORCOS -----|
|                                     |
| SIM | | ATIVOS ---|
| NAO | | INATIVOS -|
|                                     |
|                                     | EL -----|
|                                     |
|                                     | PL -----|
|                                     |
|                                     | RU -----|

```

Figura VII.04 - Entrada de Dados do CHAPLIN (continuação)

<ETAPAS>

```

|<-----+
|
--- ANTES_DA_RUPTURA ----- REGIMELASTICO -----|
| | | | |
|- DEPOIS_DA_RUPTURA-| | SIM -| | ESCOANDO -----|
| | | | |
| | NAO -| | ROMPENDO -----|
| | | | |
| | ROMPIDA -----|

```

```

|<-----+
|
$PLOTAR --- MALHA -----|
| | | | |
|- CONFIGURACAO --- INICIAL -----|
| | | | |
| | | FINAL ---| |
| | | | |
|- GRAFICO --- FORCAS_EXTERNAS -----|
| | | | |
| | ENERGIA_POTENCIAL_TOTAL -|

```

```

$DEPURAR -----|

```

```

$FIM -----|

```

CAPÍTULO VIII

APLICAÇÕES

Foram analisados alguns dos exemplos encontrados nas diversas referências cuja solução se conhece ou estima-se. Muitas observações interessantes puderam ser feitas entre as respostas analítica e a obtida pelo modelo numérico proposto. Não se analisou um problema estrutural mais complexo, principalmente, devido à implementação atual do programa computacional tornar grande a quantidade de memória requerida e demorado o tempo de solução de problemas de grande porte; mesmo assim, acredita-se que nenhuma particularidade importante deixou de ser investigada, conforme se pode ver pela análise dos resultados.

Como muitas das referências utilizam-se de outros sistemas de unidades que não o adotado no Brasil (SI), para facilitar uma imediata identificação dos resultados analíticos e a utilização dos valores geométricos e topológicos das mesmas sem a necessária conversão, optou-se por valores adimensionais coerentes entre si; evitou-se assim que o presente trabalho contivesse vários sistemas de unidades ao longo do mesmo.

VIII.1 - Problemas de Colapso Estático

VIII.1.1 - Exemplo 1: Laje Quadrada Simplesmente Apoiada, Carregada no Centro

Referência:

[01], Volume I, pp 90-93, Exemplo 32.a

Características:

- dimensões da laje: 1.0 x 1.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$
- força concentrada aplicada: $P = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Malha | Analítico | Numérico |
|-------|-----------|----------|
| A | 305.19 | 305.19 |
| B | | 305.19 |
| C | | 457.78 |
| D | | 406.92 |
| E | | 381.48 |

Comentários:

Neste exemplo pôde-se verificar que o modelo proposto reproduz perfeitamente a configuração de colapso analítica quando a malha permite a sua formação, figuras (VIII.01.a,b). Entretanto, se a malha não a pode representar, um mecanismo de rup-

tura aproximado é procurado através da formação de painéis rígidos, figuras (VIII.01.o,d,e). Melhores resultados são obtidos quando se coloca charneiras nas direções de prováveis linhas de ruptura, o que não parece ser muito problemático uma vez que a maior parte dos possíveis mecanismos de colapso têm a sua forma mais ou menos bem conhecida. Assim, o refinamento da malha está muito mais ligado à disposição dos elementos-charneira do que à sua quantidade; em outras palavras, neste exemplo, obteve-se o mesmo resultado tanto com 8 quanto com 56 charneiras. É preciso deixar claro que um grande número de elementos aproximar-se-á bastante bem da configuração analítica de ruptura, contudo, o que se deseja frisar é que isto não é necessário, mesmo porque mecanismos de colapso bastante diferentes podem ter seus fatores de colapso muito próximos no sentido de aplicação na Engenharia.

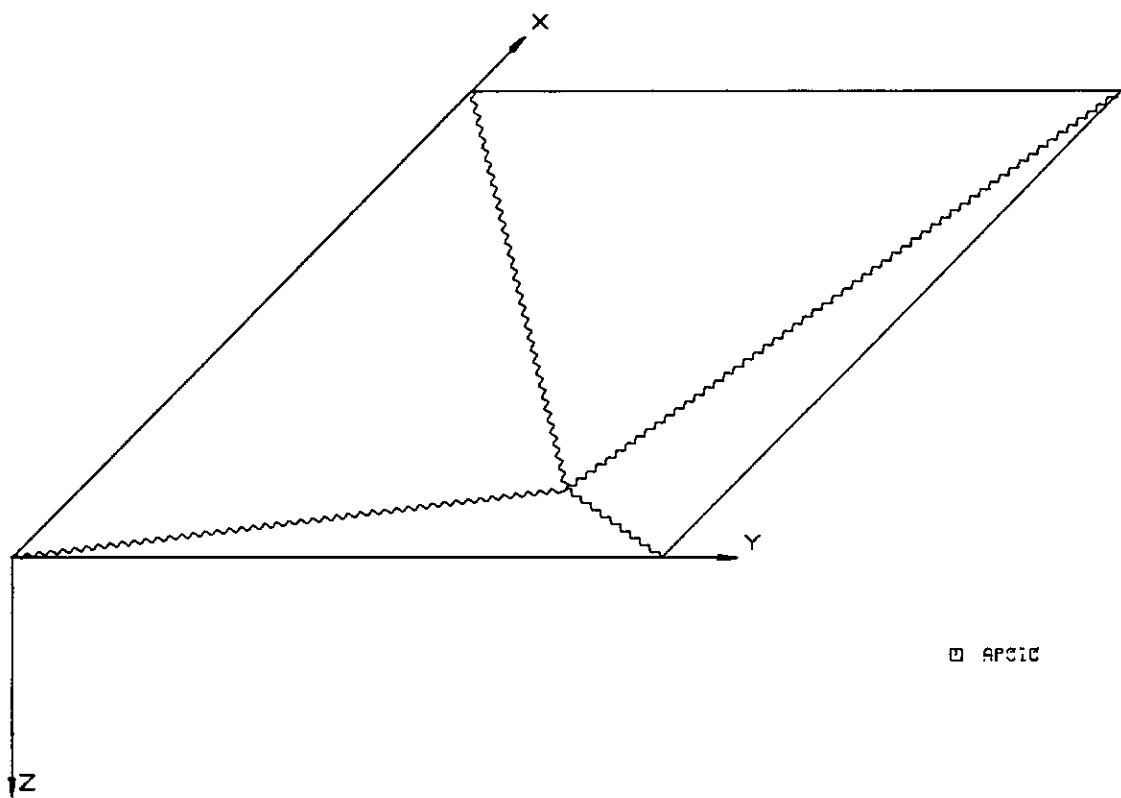
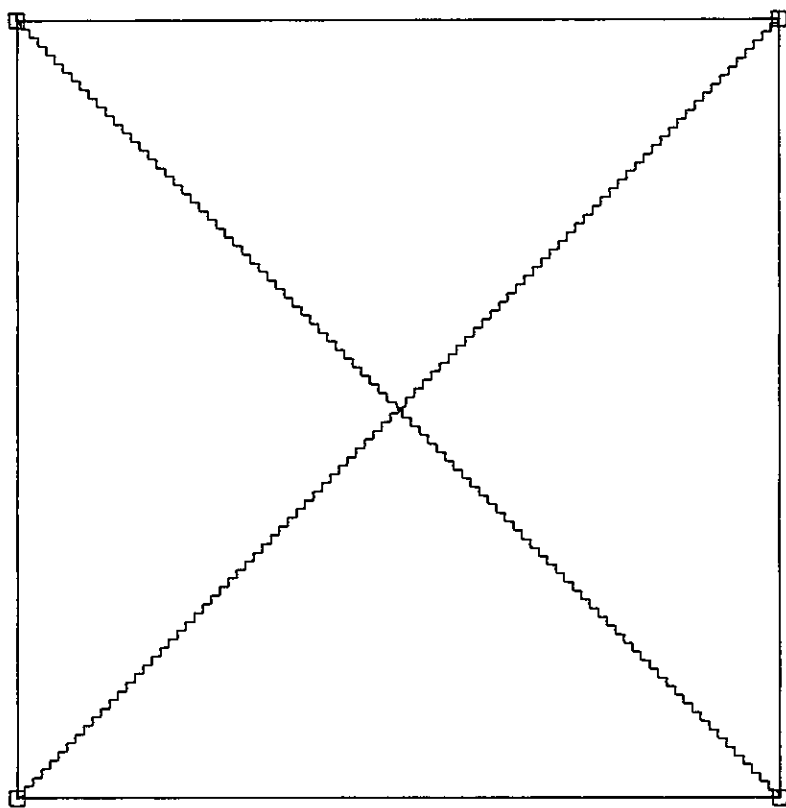
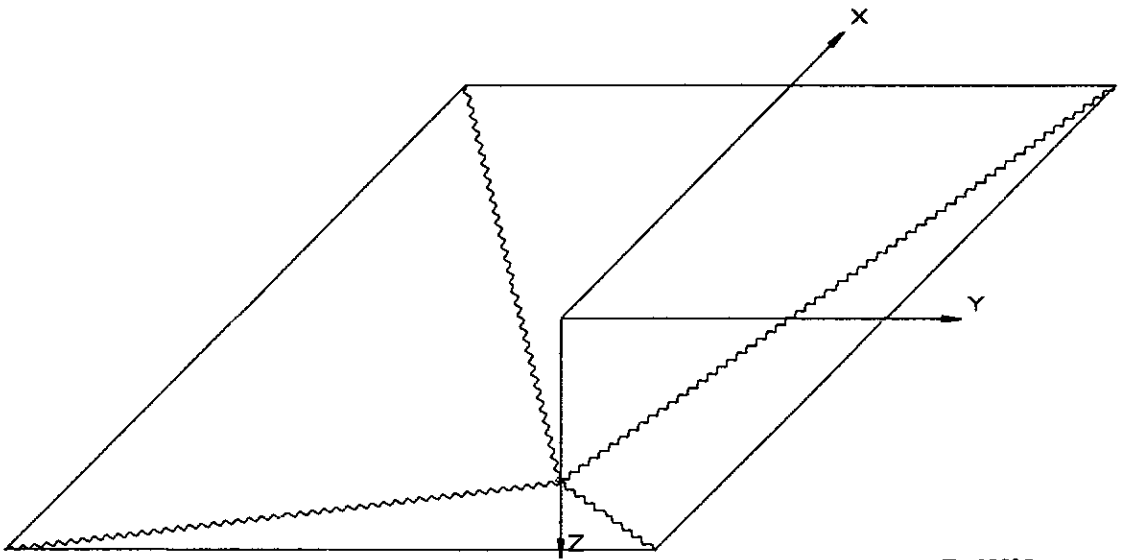
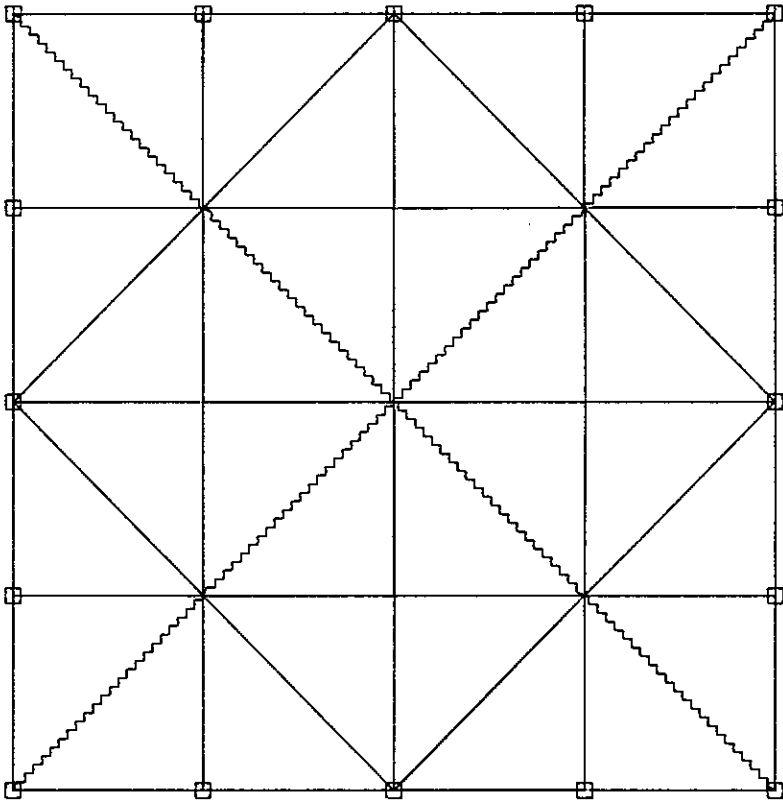


FIGURA VIII.01.A - MALHA A
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

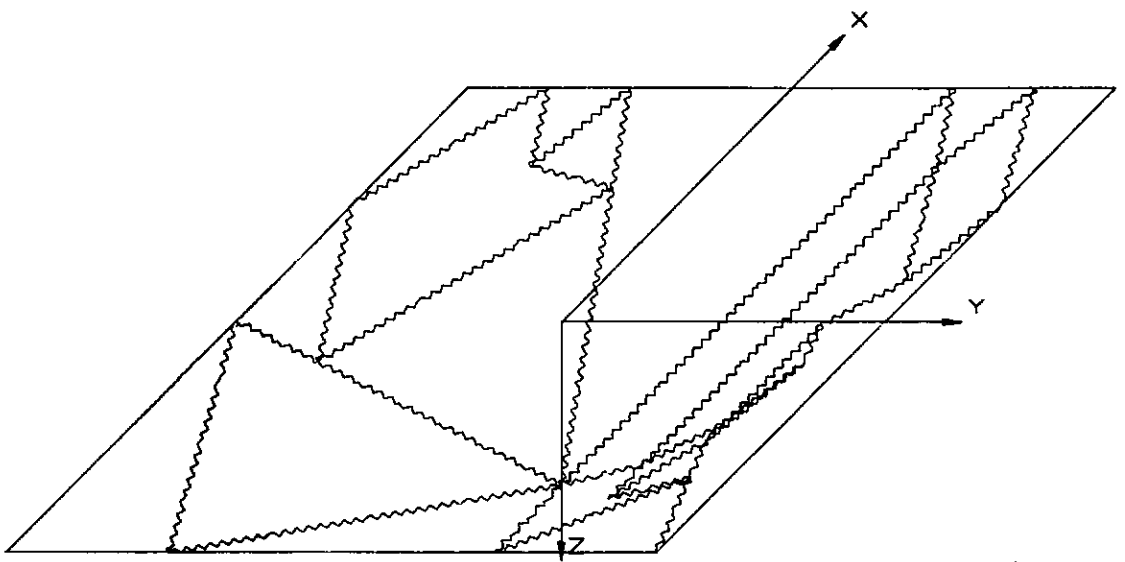
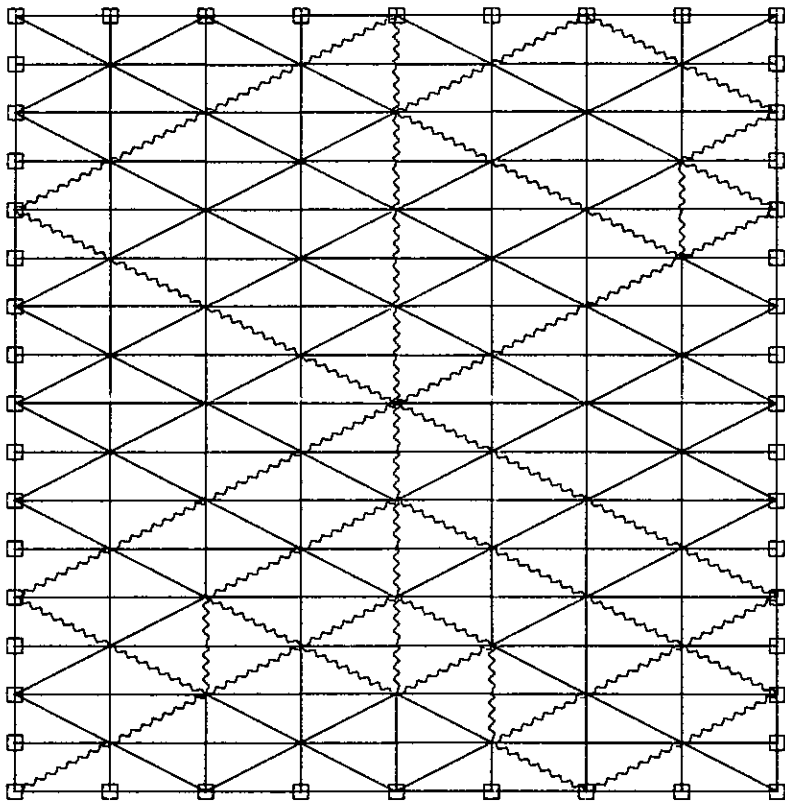
FORÇA CONCENTRADA CENTRAL.
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 305.19 NUMERICO = 305.19



□ APPLIC

FIGURA VIII.01.B - MALHA B
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

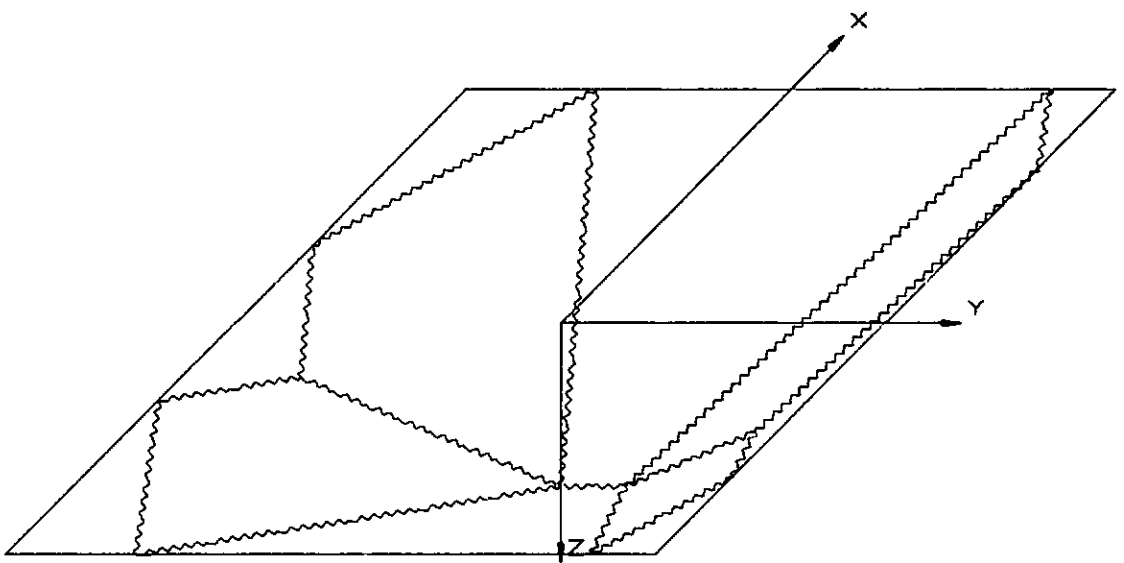
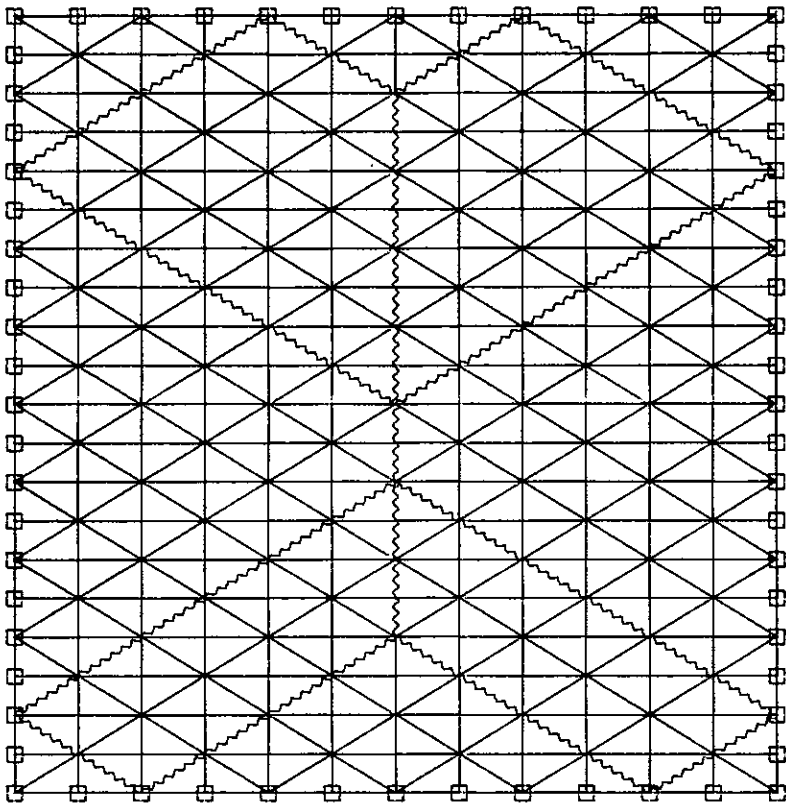
FORÇA CONCENTRADA CENTRAL.
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 305.19 NUMÉRICO = 305.19



□ APCIC

FIGURA VIII.01.C - MALHA C
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

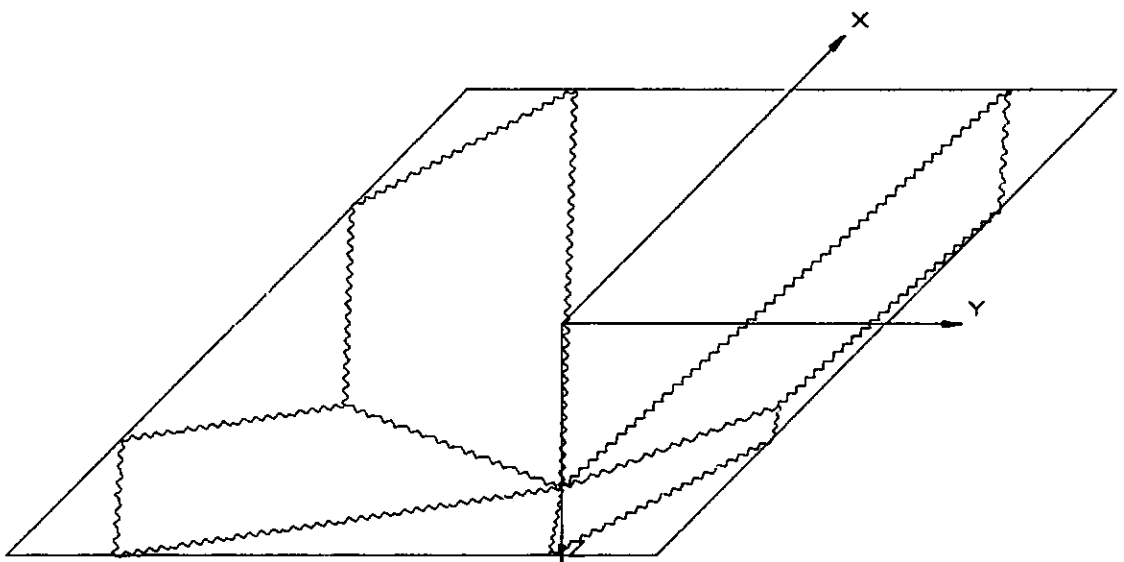
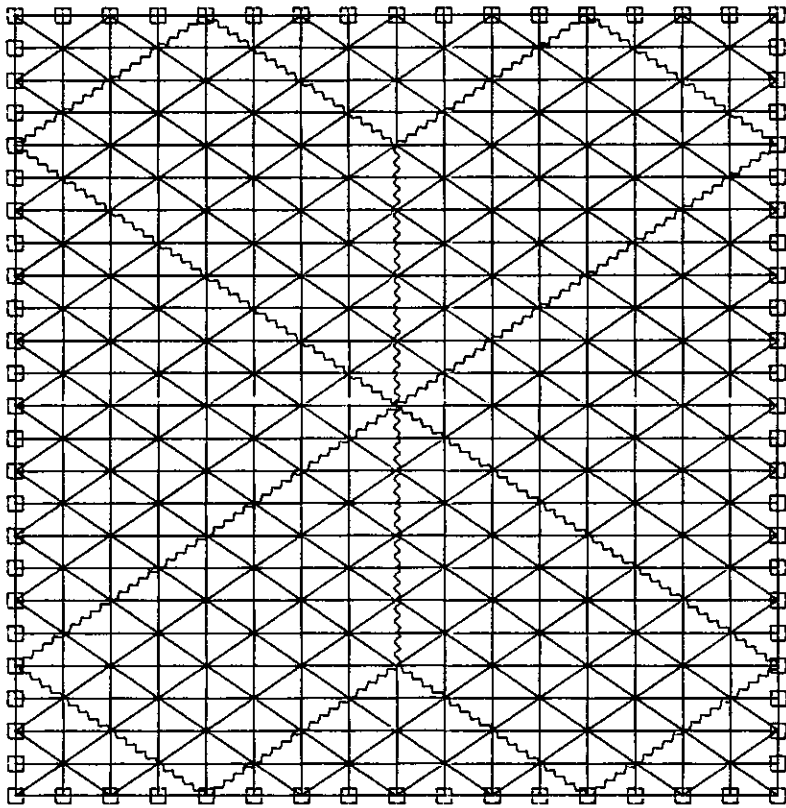
FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 305.19 NUMERICO = 457.79



□ APC10

FIGURA VIII.01.D - MALHA D
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 305.19 NUMERICO = 406.92



□ APCIC

FIGURA VIII.01.E - MALHA E
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 305.19 NUMERICO = 331.49

**VIII.1.2 - Exemplo 2: Laje Quadrada Simplesmente Apoiada,
Carregada Uniformemente**

Referências:

[24], pp 15, pp 393-398, Ítem 12.6

[25], pp 316-319, Exemplo 7.10

Características:

- dimensões da laje: 10.0 x 10.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 32.73 \\ m'_r = 0.00 \end{cases}$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

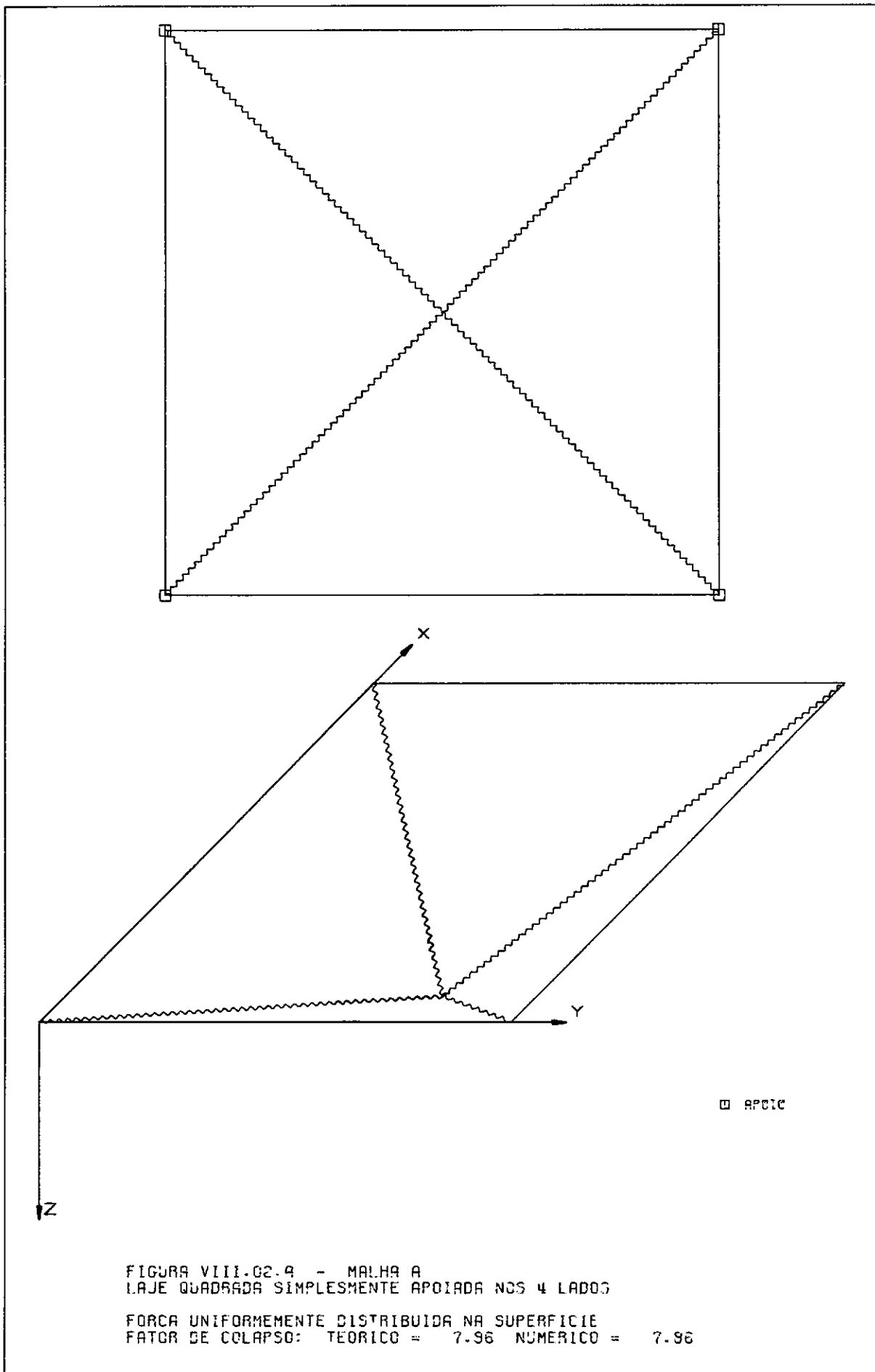
| Analítico | | |
|-----------|----------|----------|
| Config 1 | Config 2 | Config 3 |
| 7.86 | 7.18 | 7.12 |

| Malha | Numérico |
|-------|----------|
| A | 7.86 |
| B | 7.19 |
| C | 7.13 |

Comentários:

Mostra-se aqui que a solução melhora na medida em que a malha se aproxima da configuração "real". As malhas A, B e C, figuras (VIII.02.a,b,c), tentam representar os possíveis mecanismos de colapso (Configurações 1, 2 e 3) que na realidade

foram soluções testadas pelos estudiosos da Teoria das Linhas de Ruptura ao longo do tempo; atualmente já se sabe, através de estudos com funcionais, que a solução correta para esse problema tem forma semelhante à da Configuração 3, com a diferença que os leques circulares dispõem-se segundo um hipérbolo, cujo resultado fornece $\lambda_r = 7.00$ para fator de colapso. Contudo, nessas três malhas testadas, os resultados analíticos são reproduzidos com precisão; a pequena diferença na malha C pode ser explicada pelo fato de não se estar representando com perfeição o aspecto circular da configuração de colapso; fato este que poderá ser melhor visto num exemplo mais adiante. O que se deseja ressaltar é que conforme os objetivos da análise, pode-se optar por uma ou outra malha sem que haja perda significativa de precisão nos resultados.



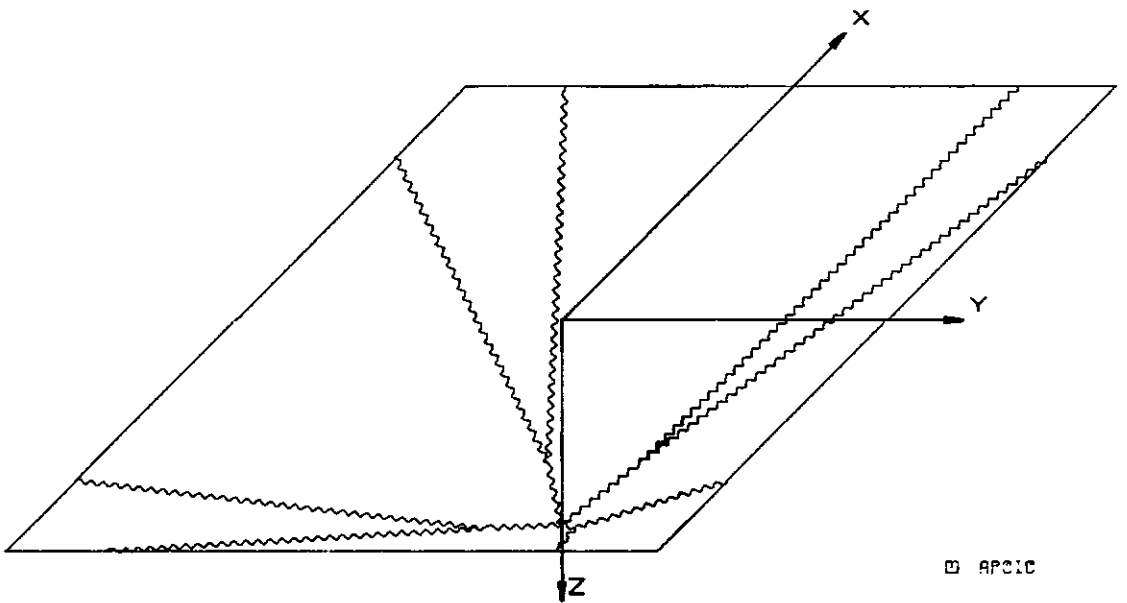
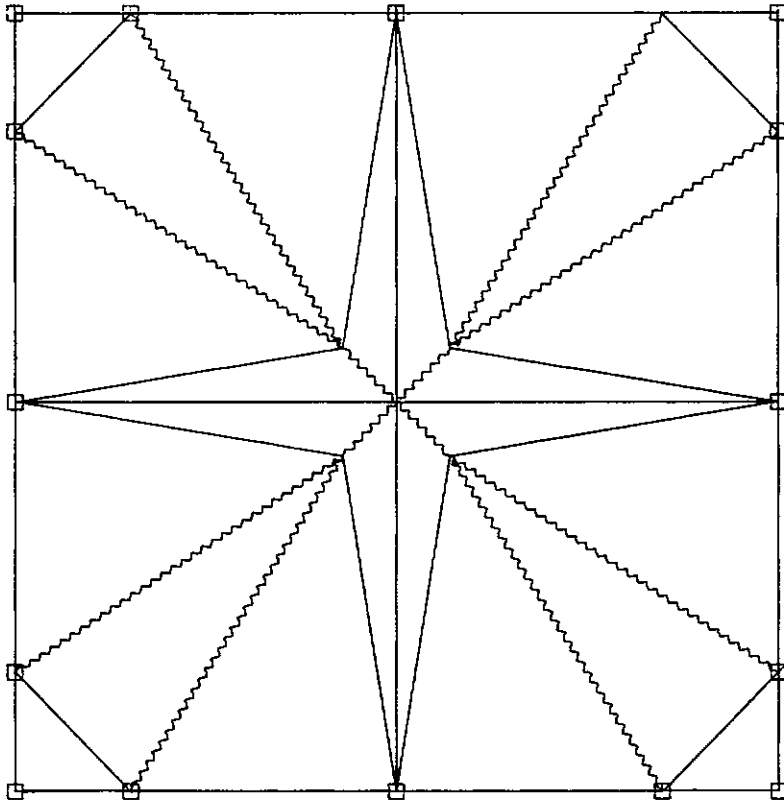


FIGURA VIII.02 B - MALHA B
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 7.19 NÚMÉRICO = 7.19

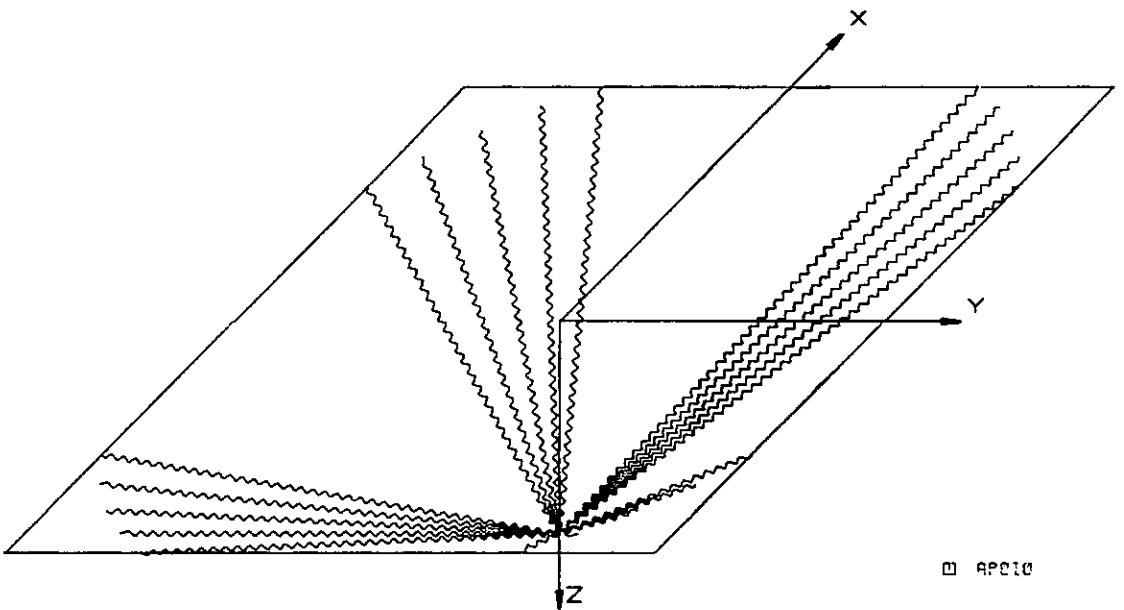
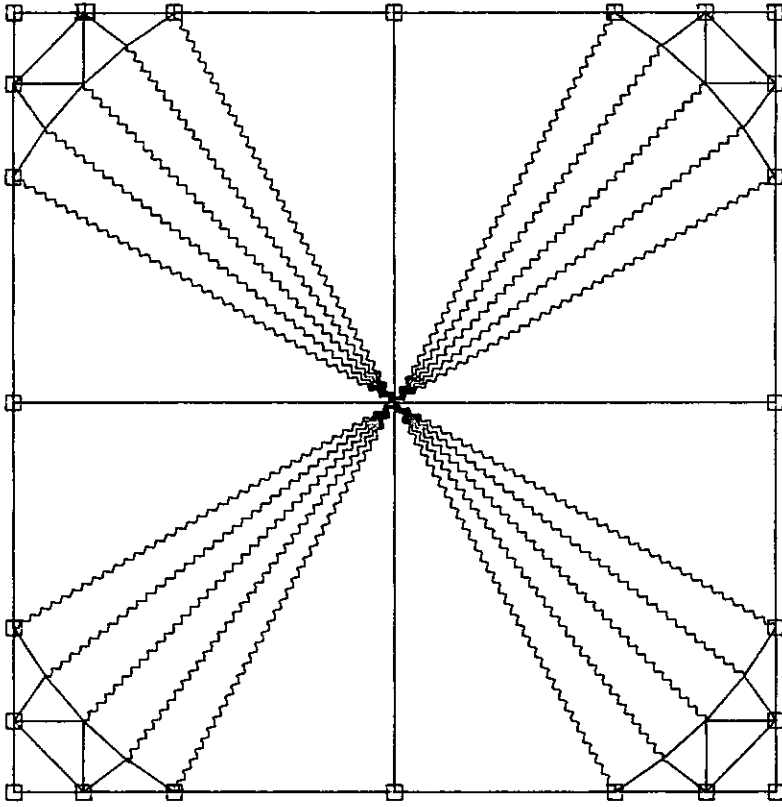


FIGURA VIII.02-C - MALHA
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA NOS 4 LADOS

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 7.12 NÚMÉRICO = 7.13

**VIII.1.3 - Exemplo 3: Laje Retangular Simplesmente
Apoiada, Carregada no Centro**

Referência:

[01], Volume I, pp 114-117, Exemplo 34.b

Características:

- dimensões da laje: 6.0 x 10.0
- momentos resistentes:

| Config Limite | m _r | m' _r |
|---------------|----------------|-----------------|
| 1 | 10.00 | -30.00 |
| 2 | 20.00 | -20.00 |
| 3 | 30.00 | -10.00 |

- força concentrada aplicada: P = 1.0

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Malha | Analítico | | |
|-------|-----------|----------|----------|
| | Config 1 | Config 2 | Config 3 |
| A | 90.68 | 181.32 | 236.80 |
| B | | | |
| C | | | |

| Malha | Numérico | | |
|-------|----------|----------|----------|
| | Config 1 | Config 2 | Config 3 |
| A | 90.67 | 181.33 | 236.91 |
| B | 90.67 | 181.33 | 272.00 |
| C | 114.67 | 229.33 | 262.67 |

Comentários:

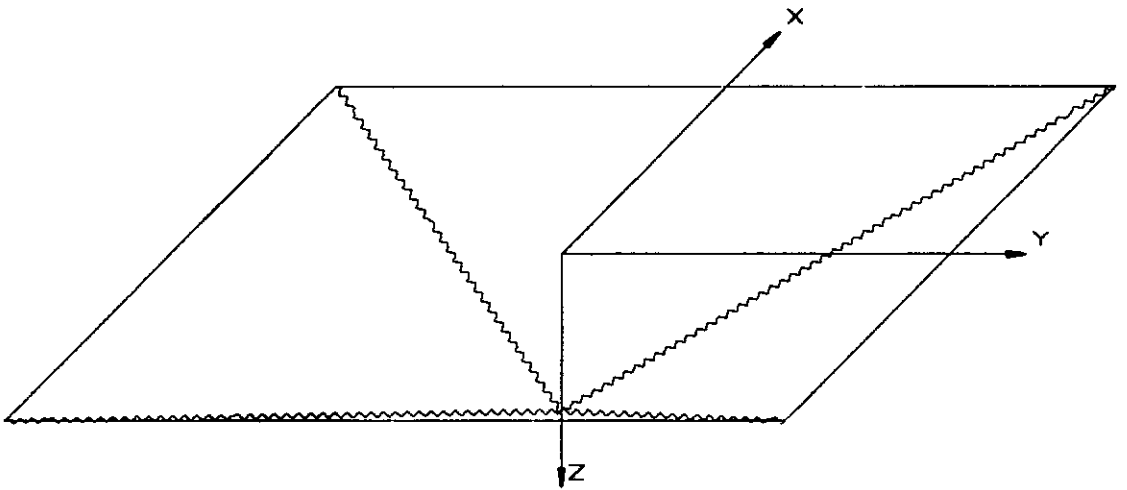
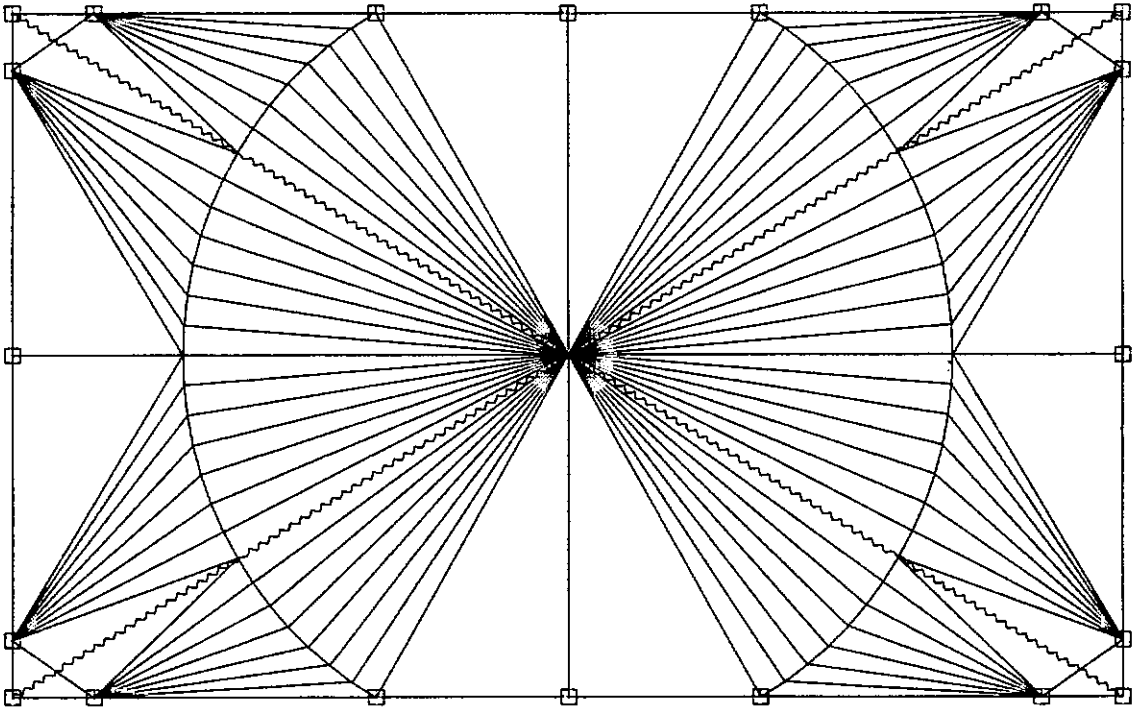
Neste exemplo estudou-se um caso em que três configurações de colapso podiam se formar dependendo da relação entre os momentos resistentes últimos positivos e negativos. A malha A, figuras (VIII.03.a,b,c), permitiu a representação exata das configurações de ruptura possíveis para cada uma das relações; a única pequena diferença na Configuração 3 pode ser atribuída ao fato de não se representar perfeitamente o carácter circular da configuração de colapso verdadeira, ou seja, aumentando-se o número de elementos formadores dos setores circulares, o resultado aproximar-se-ia cada vez mais da configuração analítica exata, contudo, a necessidade prática não o justifica.

A malha B, figuras (VIII.03.d,e,f), contém apenas uma das configurações possíveis (Configuração 1), correspondente somente à relação de identidade entre os momentos resistentes últimos positivos e negativos.

A malha C, figuras (VIII.03,g,h,i), não contém qualquer das configurações de ruptura possíveis.

O que se pode concluir dos resultados é que quando o mecanismo de colapso não está presente na malha, formam-se painéis rígidos que tendem a representar da melhor maneira possível a configura-

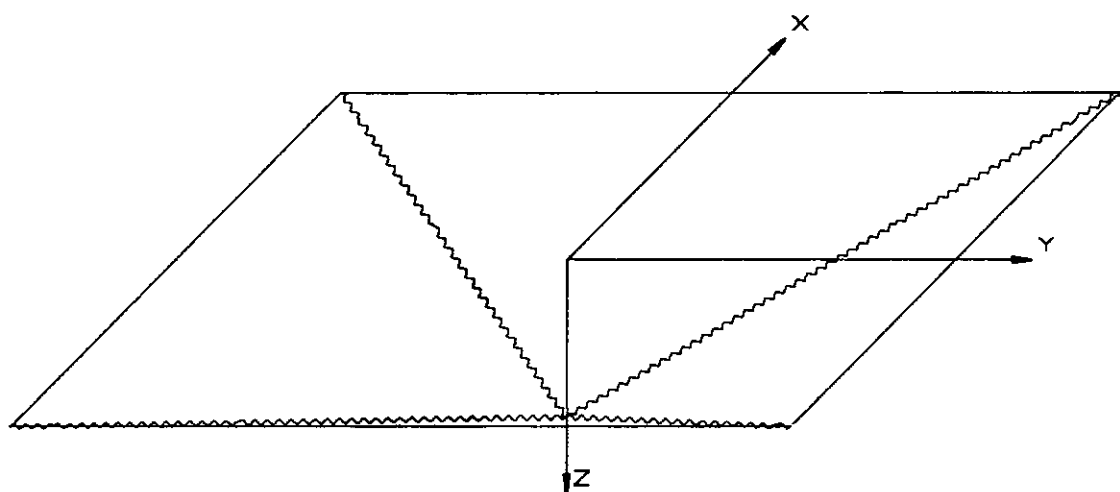
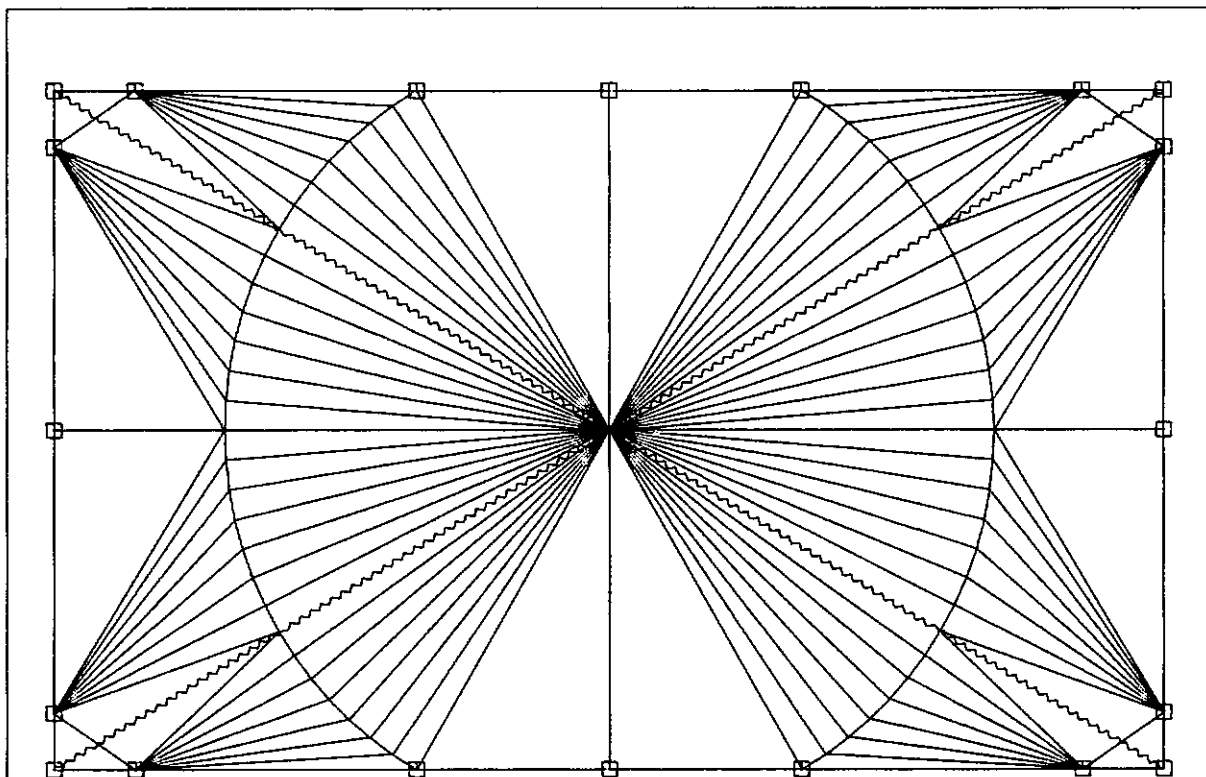
ção de colapso do problema. Muitas vezes, podem fornecer uma idéia de como melhorar a malha e, conseqüentemente, os resultados, embora isto nem sempre ocorra. Novamente pôde ser visto que a disposição dos elementos é bem mais importante que a sua quantidade e que a forma dos mesmos, mais ou menos distorcida, não tem aparentemente importância relevante nos resultados, ao contrário dos elementos finitos convencionais.



□ APCIC

FIGURA VIII.03-A - MALHA A ($M = 10$, $M_2 = 30$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 90.68 NUMERICO = 90.67

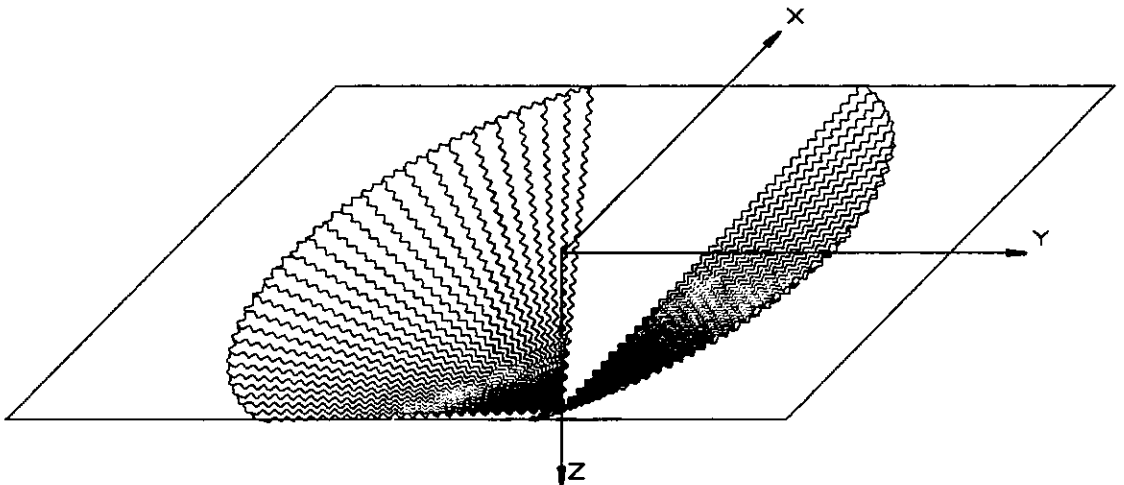
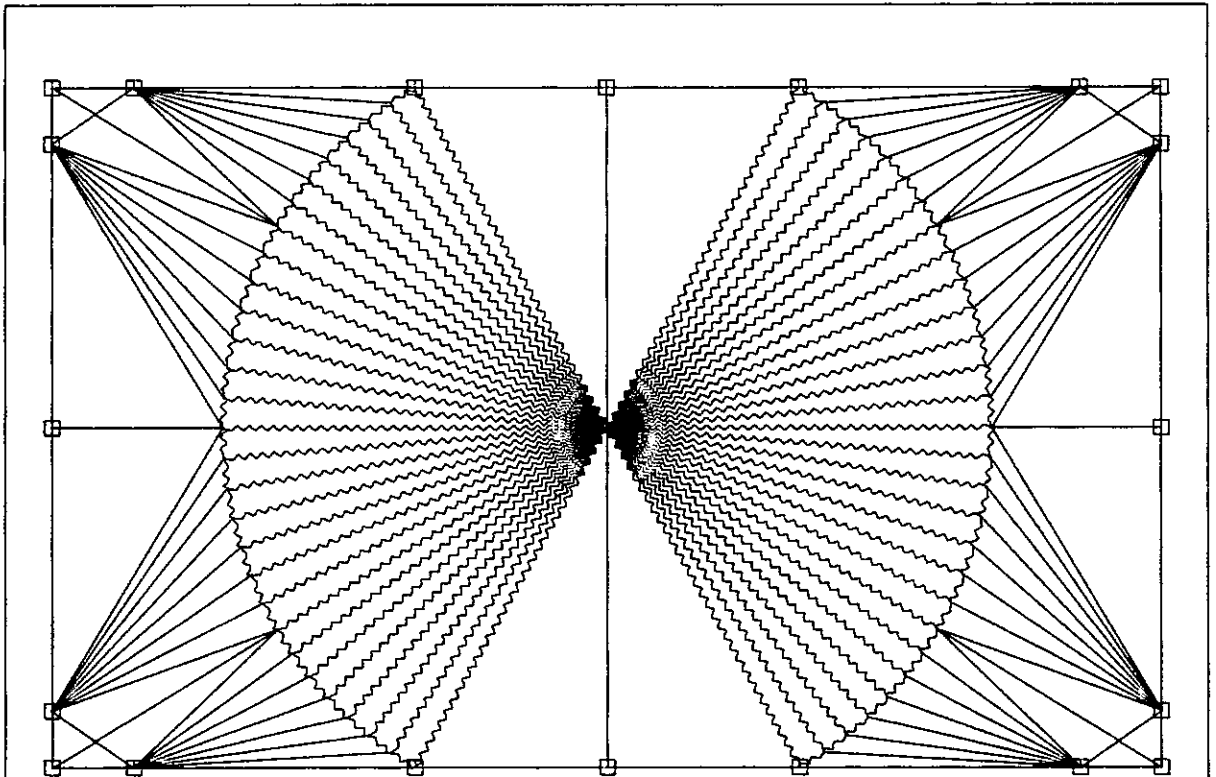


□ APCIC

FIGURA VIII.03.B - MALHA A ($M = 20$, $M- = -20$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL.

FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 191.32 NUMERICO = 191.33

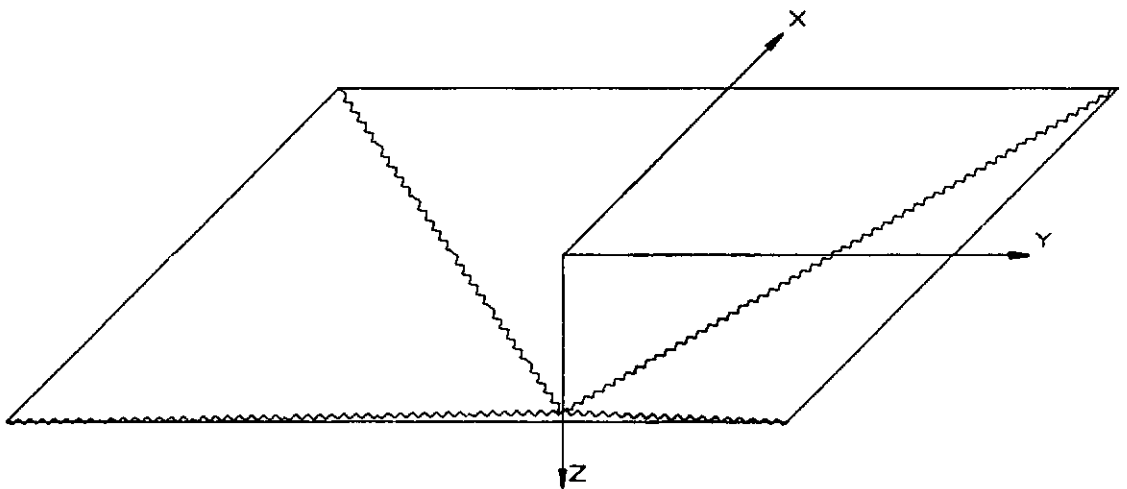
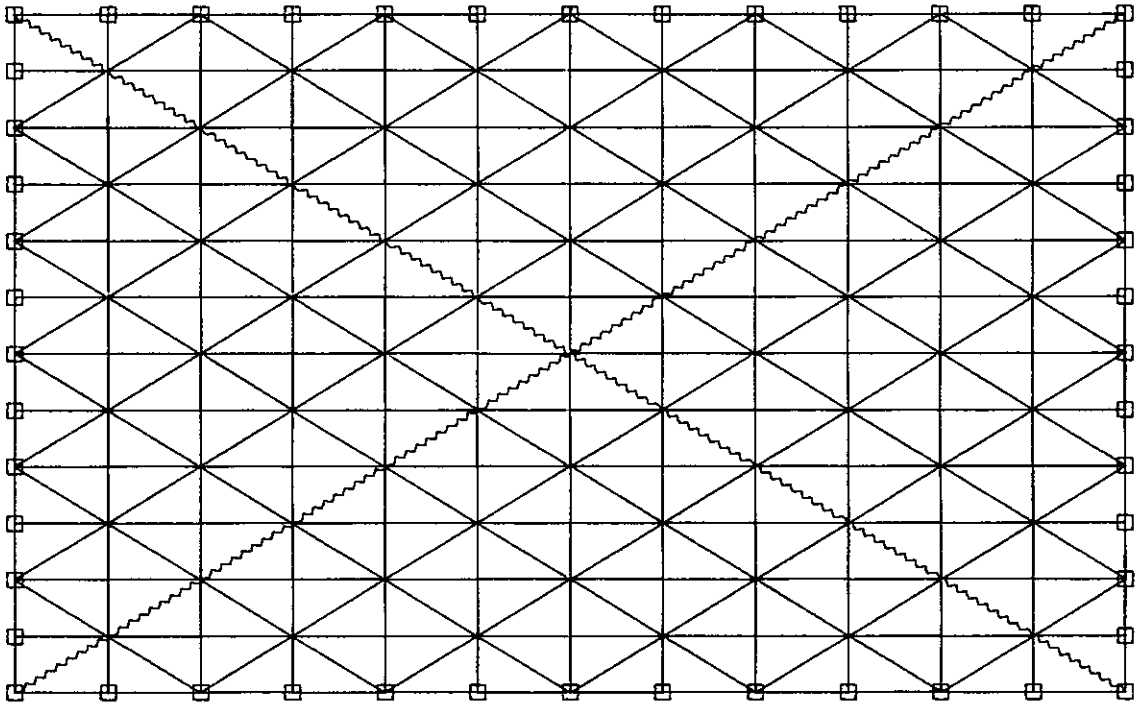


APCIC

FIGURA VIII-03.C - MALHA A ($M = 30$, $M- = -10$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL

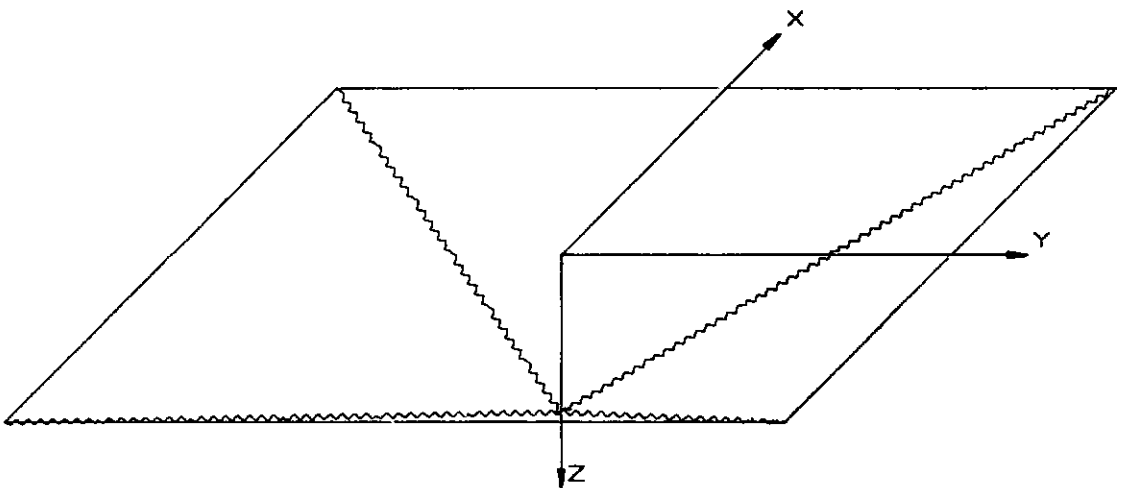
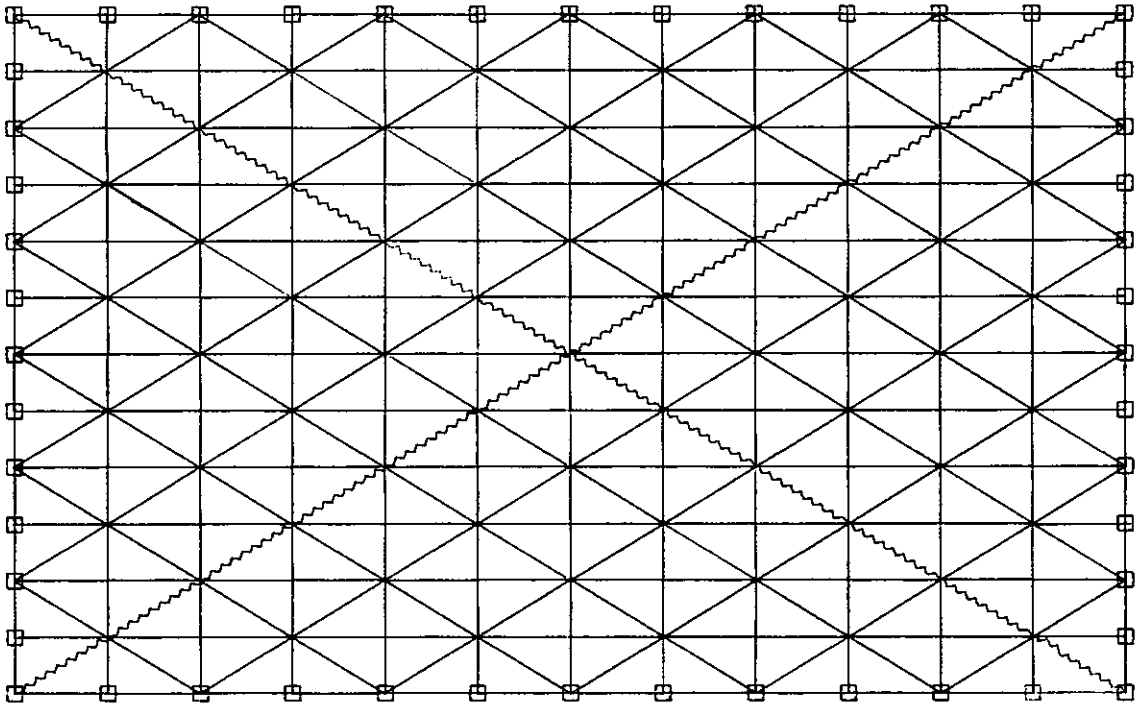
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 236.83 NUMERICO = 236.91



□ APCIC

FIGURA VIII.03.D - MALHA B ($M = 10$, $M_2 = -30$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

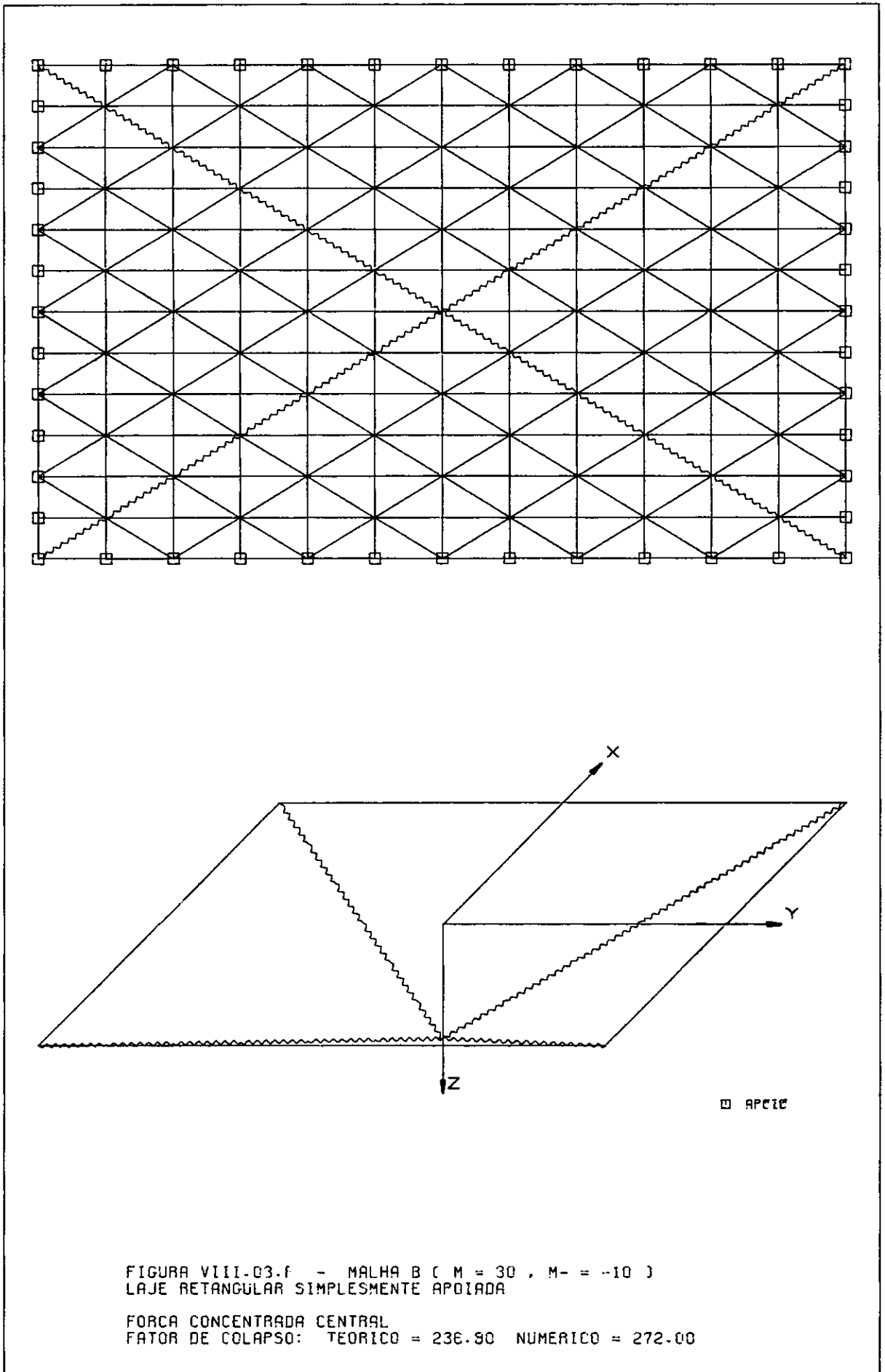
FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 90.68 NUMERICO = 90.67

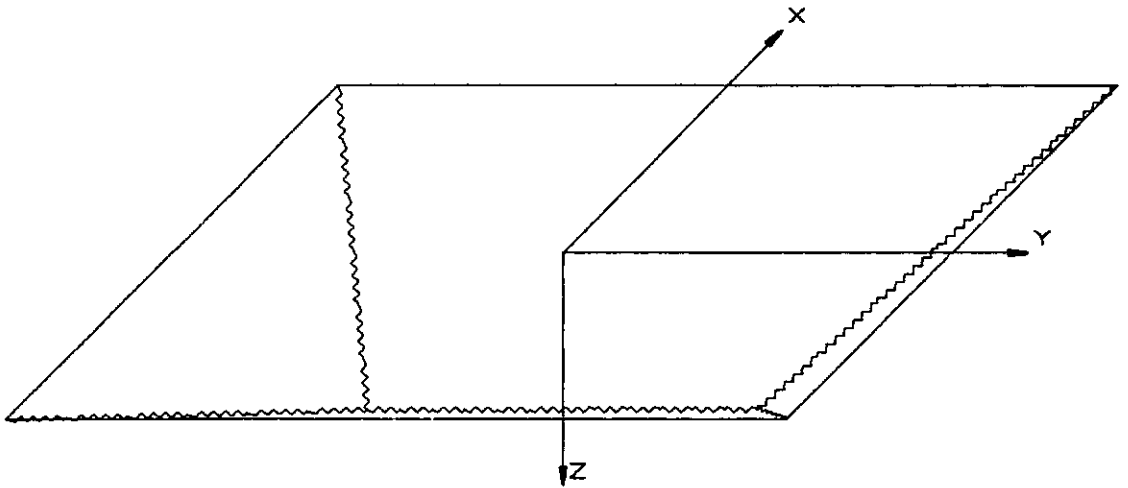
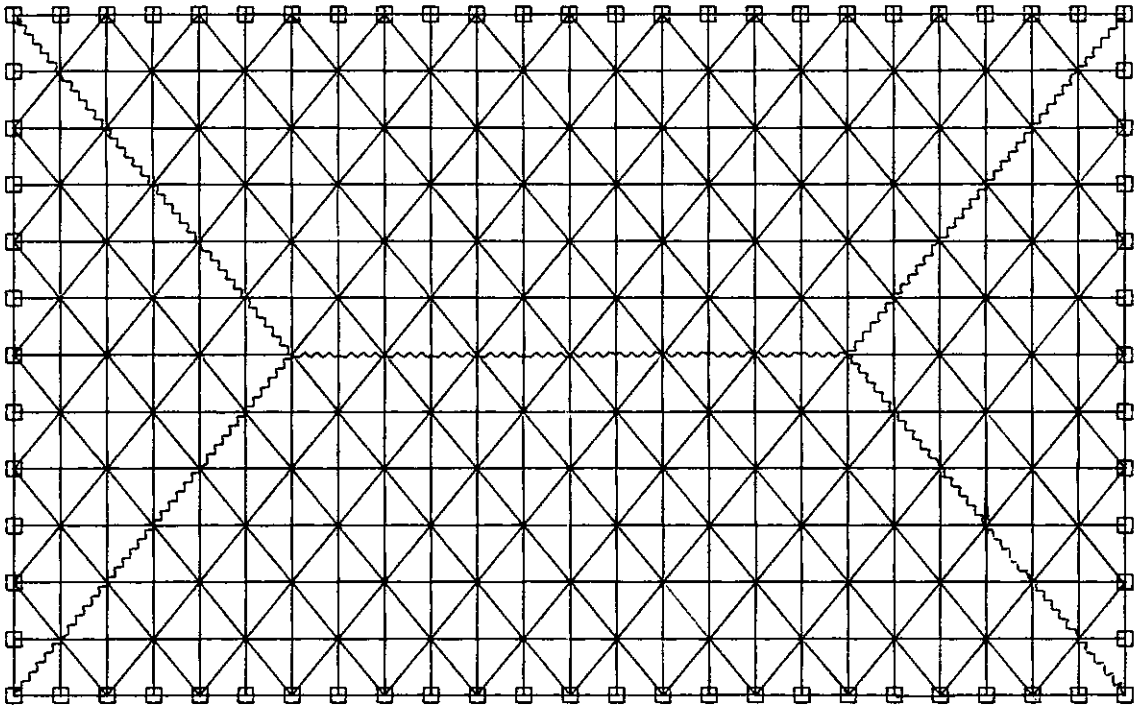


APCIG

FIGURA VIII.03.E - MALHA B ($M = 20$, $M_2 = -20$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 191.32 NUMERICO = 191.33

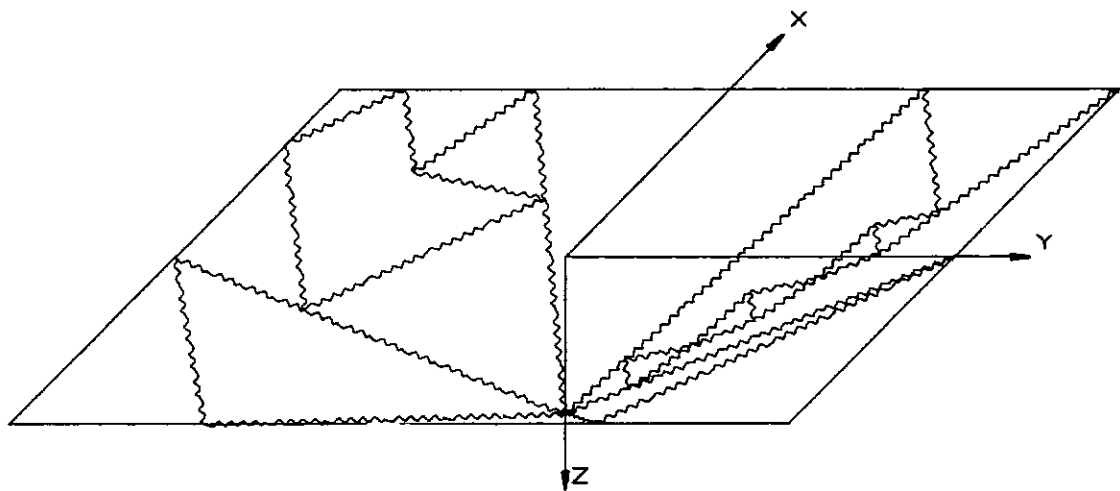
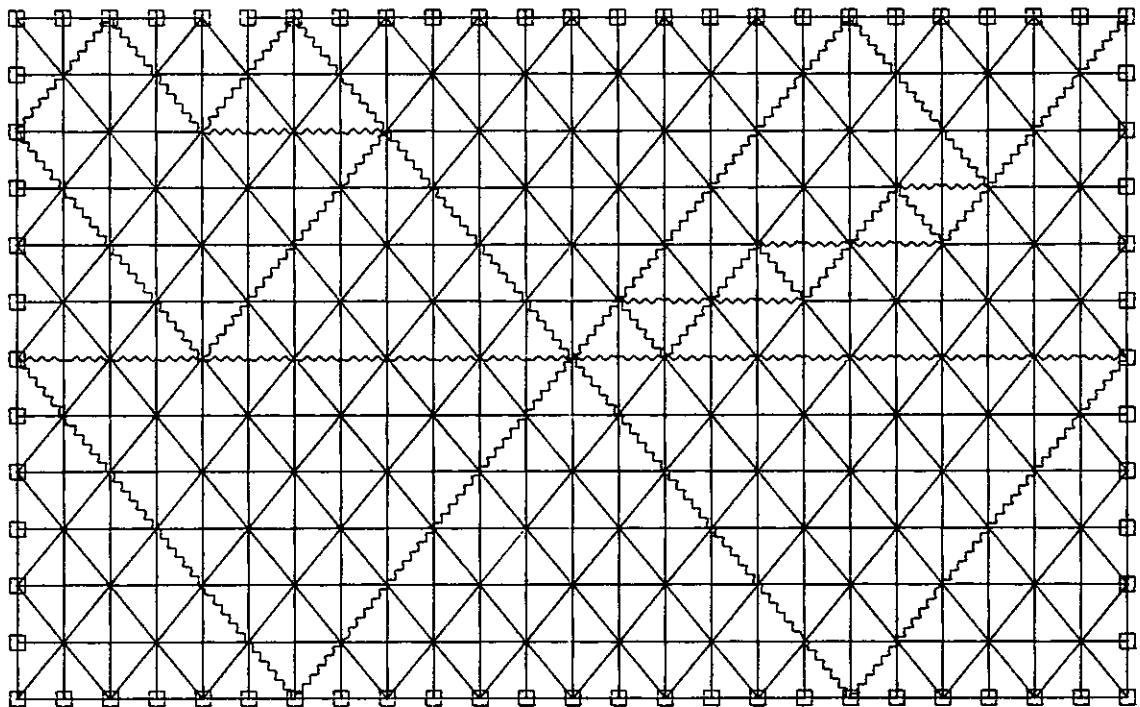




□ APCIO

FIGURA VIII.03.C - MALHA C ($M = 10$, $M_2 = 30$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

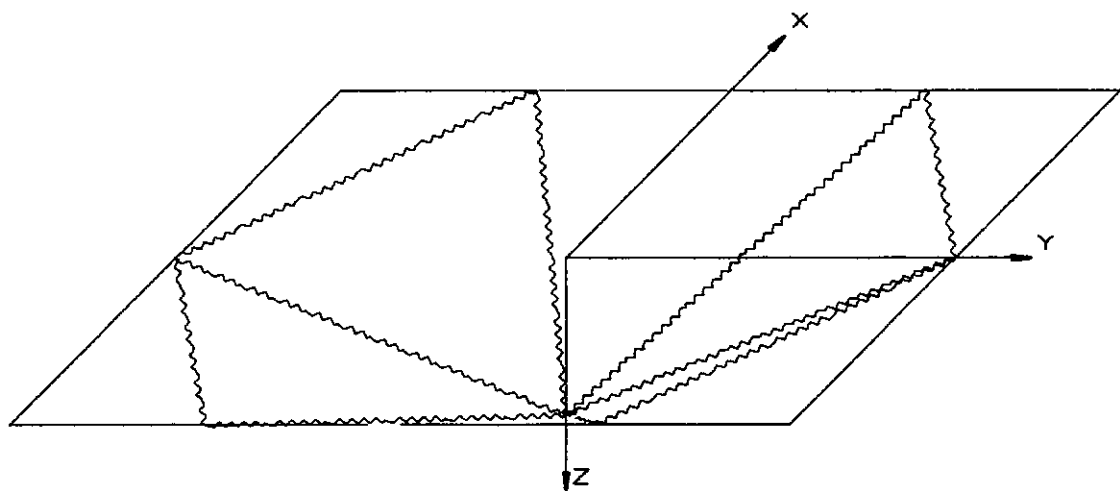
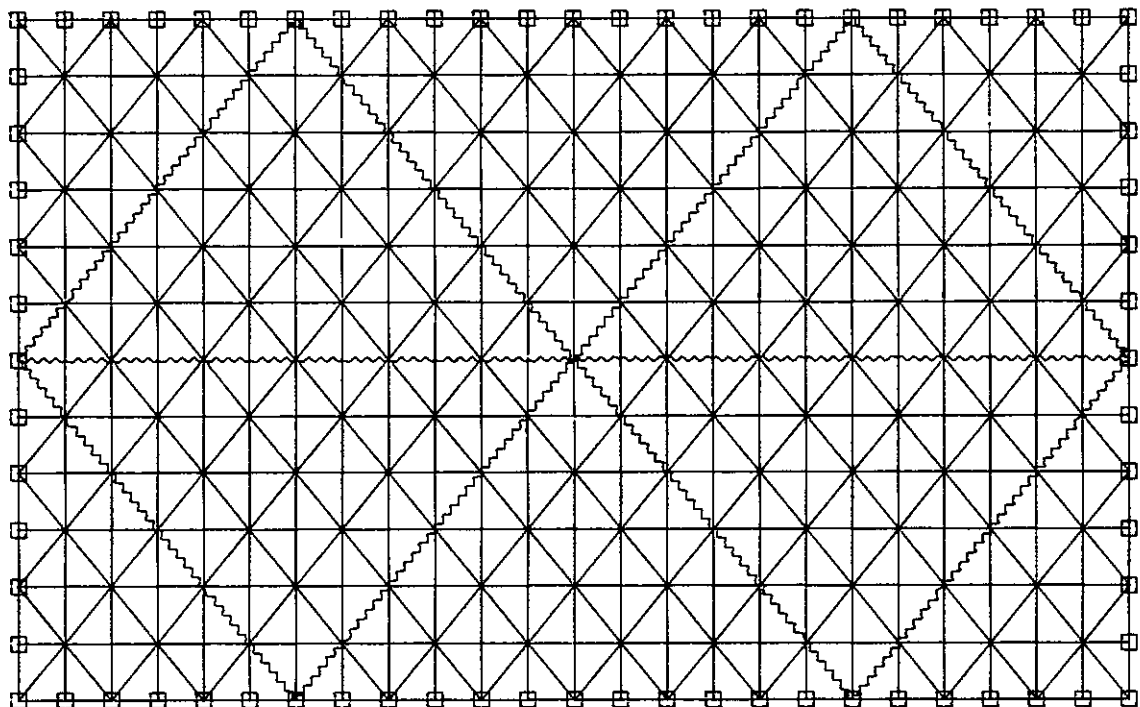
FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 90.69 NUMERICO = 114.67



□ APCIC

FIGURA VIII.03.H - MALHA C ($M = 20$, $M- = -20$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 181.32 NUMERICO = 229.33



□ APCIC

FIGURA VIII-03.i - MALHA C ($M = 30$, $M- = -10$)
LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 236.90 NUMERICO = 262.67

**VIII.1.4 - Exemplo 4: Laje Retangular Simplesmente Apoiada
com Furo Retangular, Carregada Uniformemente**

Referência:

[24], pp 130-134, Ítem 4.6, Solução 4.4

Características:

- dimensões da laje: 20.0 x 40.0
- dimensões do furo: 10.0 x 18.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 1.45 | 1.45 |

Comentários:

Com esta malha, figura (VIII.04), mostra-se a habilidade do modelo para tratar com descontinuidades, no caso, o furo e com possíveis configurações de colapso muito próximas. Tanto no valor do fator de colapso quanto no mecanismo de ruptura, os resultados estão perfeitamente de acordo.

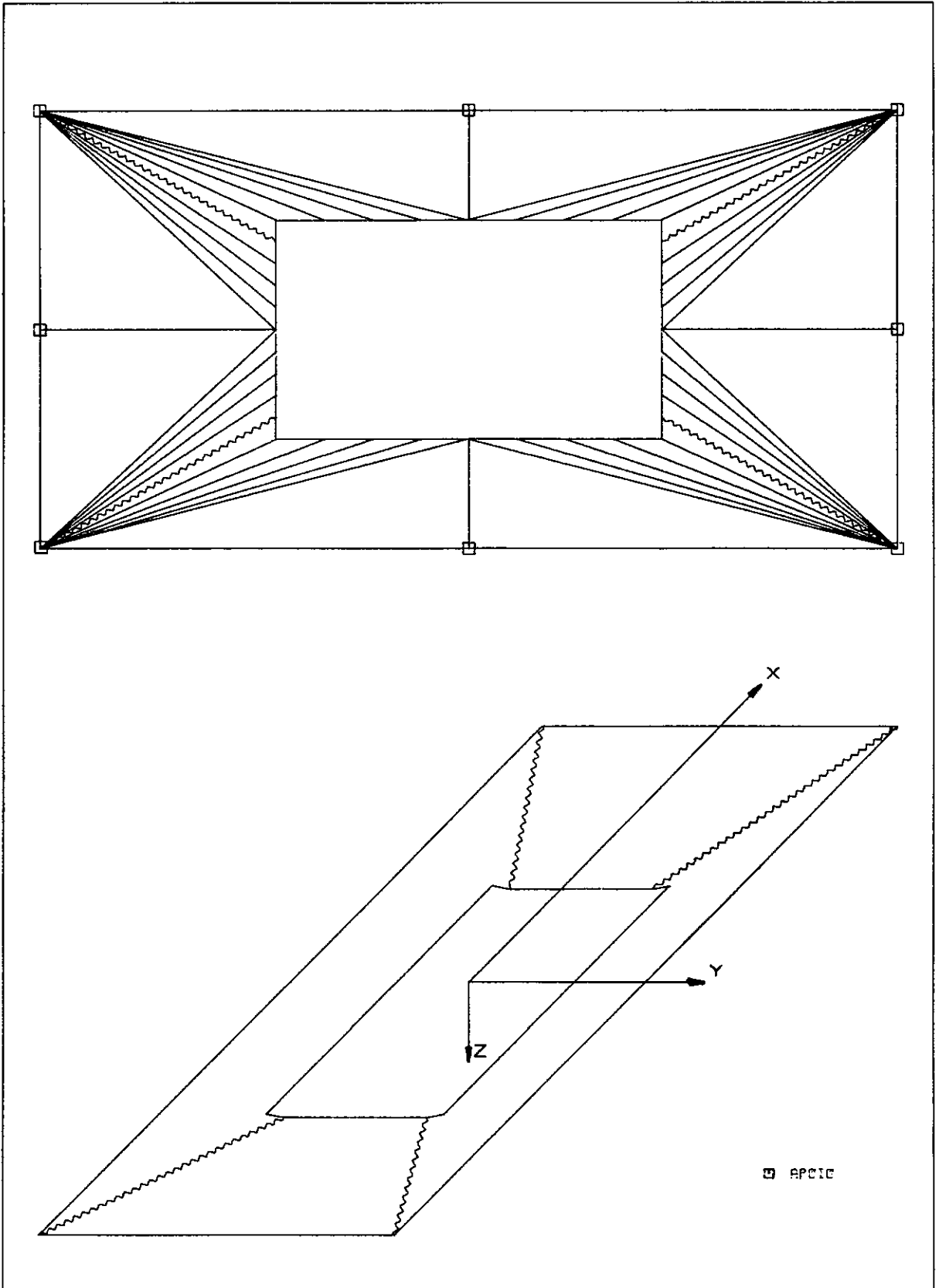


FIGURA VIII.04
LAJE RETANGULAR APOIADA COM FURO CENTRAL.

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 1.45 NUMÉRICO = 1.45

VIII.1.5 - Exemplo 5: Laje Retangular com Três Lados Adjacentes Engastados e Outro Livre, Carregada Uniformemente

Referência:

[25], pp 329-331, ítem 7.9.3

Características:

- dimensões da laje: 5.0 x 20.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 9.16 | 9.16 |

Comentários:

Nesta malha, figura (VIII.05), representou-se também várias configurações de ruptura possíveis, contudo, mais uma vez o modelo identificou a configuração e o fator de colapso corretos.

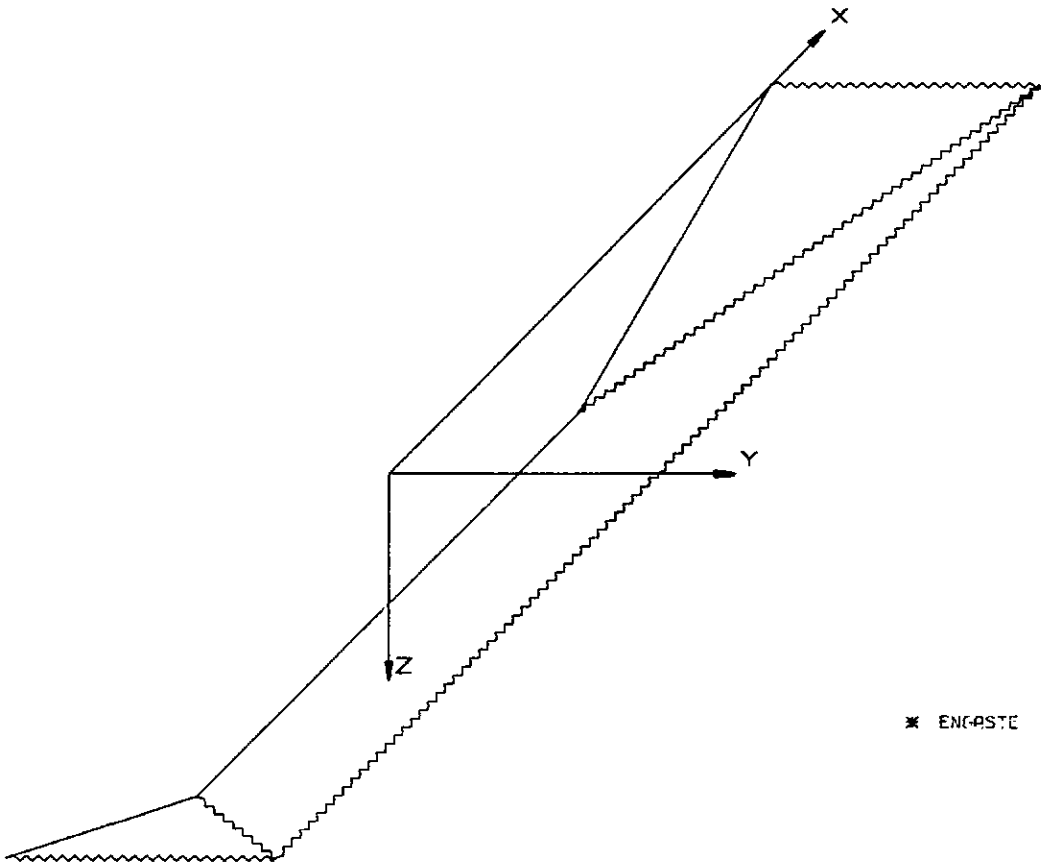
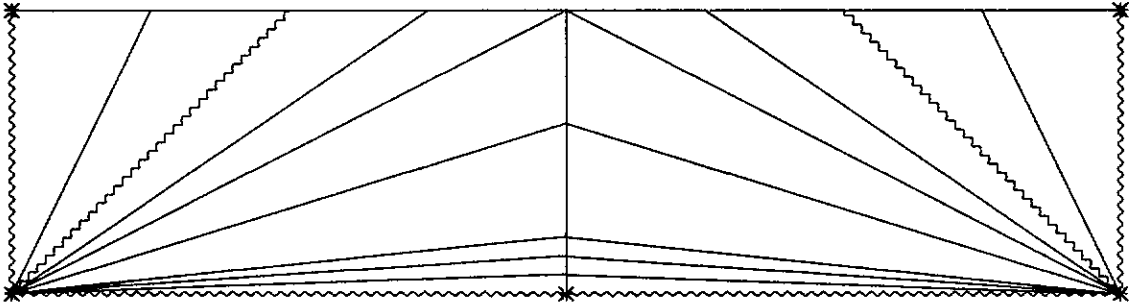


FIGURA VIII.05
LAJE RETANGULAR GASTADA L. LIVRE

FORÇA NIFORMEMENT DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TÓRICO = 0.16 NUMÉRICO = 3.16

VIII.1.6 - Exemplo 6: Laje Quadrada Apoiada num Lado e numa Coluna, Carregada Uniformemente

Referência:

[24], pp 202-207, Ítem 6.4, Solução 6.1

Características:

- dimensões da laje: 12.0 x 12.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Malha | Analítico | Numérico |
|-------|-----------|----------|
| A | 1.37 | 1.12 |
| B | | 1.07 |
| C | | 1.07 |
| D | | 1.06 |
| E | | 1.38 |
| F | | 1.39 |
| G | | 1.06 |

Comentários:

A fim de verificar mais uma vez a habilidade do modelo em representar ou indicar o mecanismo de colapso quando este não se encontra presente, analisou-se a malha A, figura (VIII.06.a), obtendo-se um fator de colapso abaixo do previsto na referência. Com pequenas variações em relação à malha

inicial, criou-se as malhas B, C e D, figuras (VIII.06.b,c,d), obtendo-se esta última como o caso mais desfavorável. Somente duas explicações seriam possíveis: ou o modelo não pôde representar corretamente o problema ou a solução analítica estaria correta para a configuração arbitrada mas esta não seria o caso crítico.

Como o modelo comportou-se muito bem para os outros exemplos, o primeiro passo foi investigar a segunda hipótese. Criou-se para isso a malha E, figura (VIII.06.e), contendo a configuração analítica da referência e obteve-se o mesmo resultado previsto por esta, confirmando-se estar esta última calculada corretamente. Ainda na tentativa de verificar se o modelo conseguiria indicar uma configuração de ruptura próxima daquela analiticamente "correta", analisou-se a malha F, figura (VIII.06.f), onde mecanismos semelhantes ao analítico, mas não o analítico em si, estavam presentes; o resultado foi a representação pelo modelo de um mecanismo bastante próximo do previsto. Já com a quase certeza da veracidade da segunda hipótese, analisou-se a malha G, figura (VIII.06.g), onde estavam presentes a configuração analítica tida como correta e a obtida pelo modelo a fim de que este determinasse qual o caso realmente crítico; o resultado obtido foi que o caso mais desfavorável para o problema está muito mais próximo daquele apontado pelo modelo que daquele da referência.

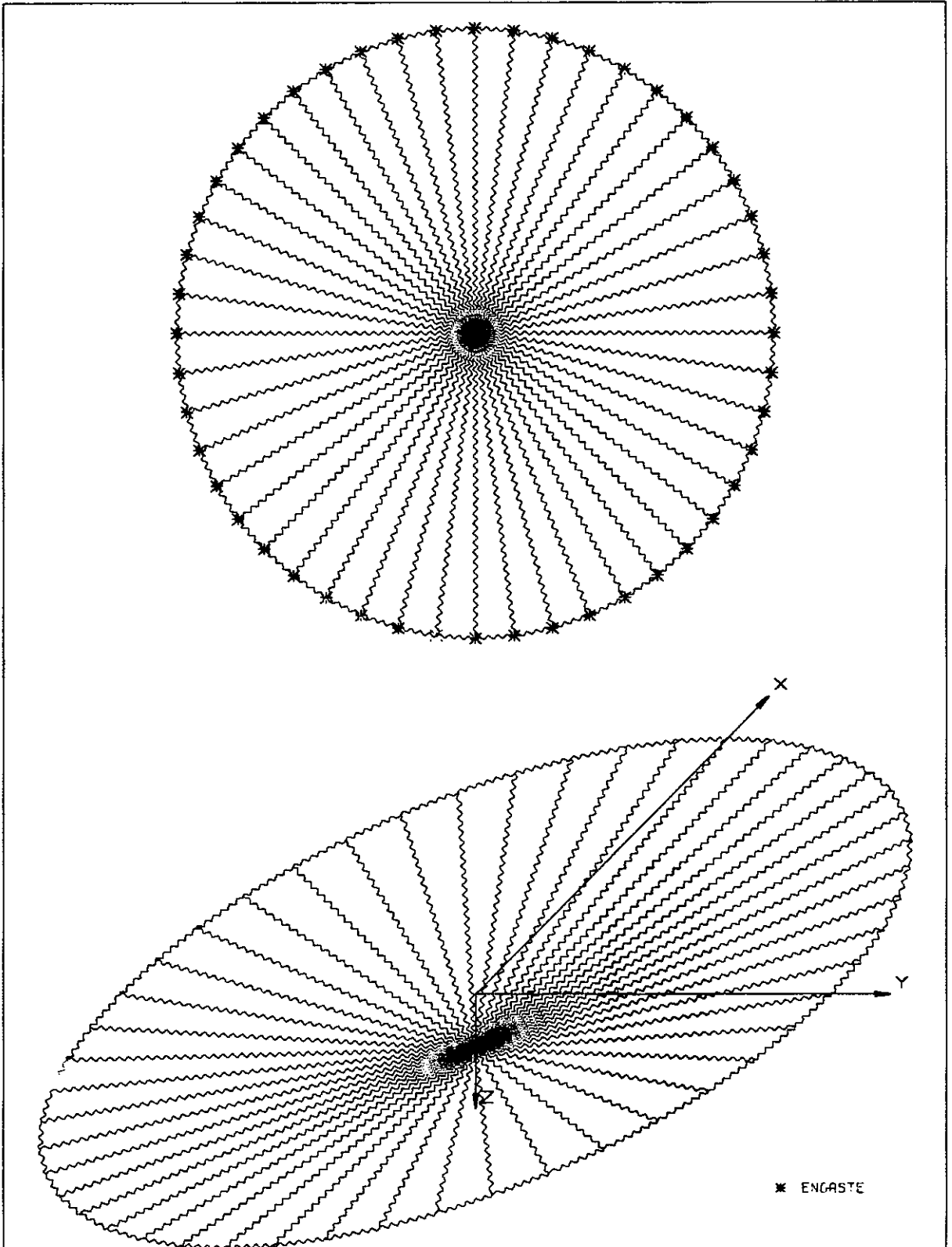


FIGURA VIII.07-A
LAJE CIRCULAR ENGASTADA

ORCA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFICIE
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 19.31 NUMERICO = 8.39

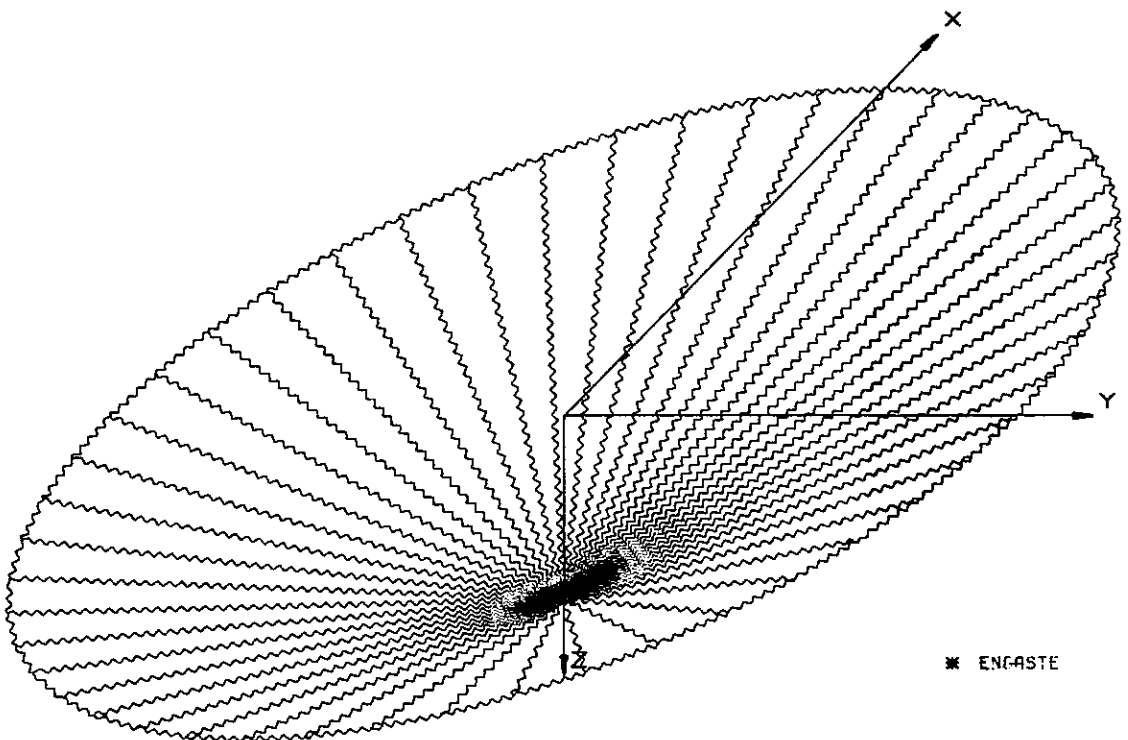
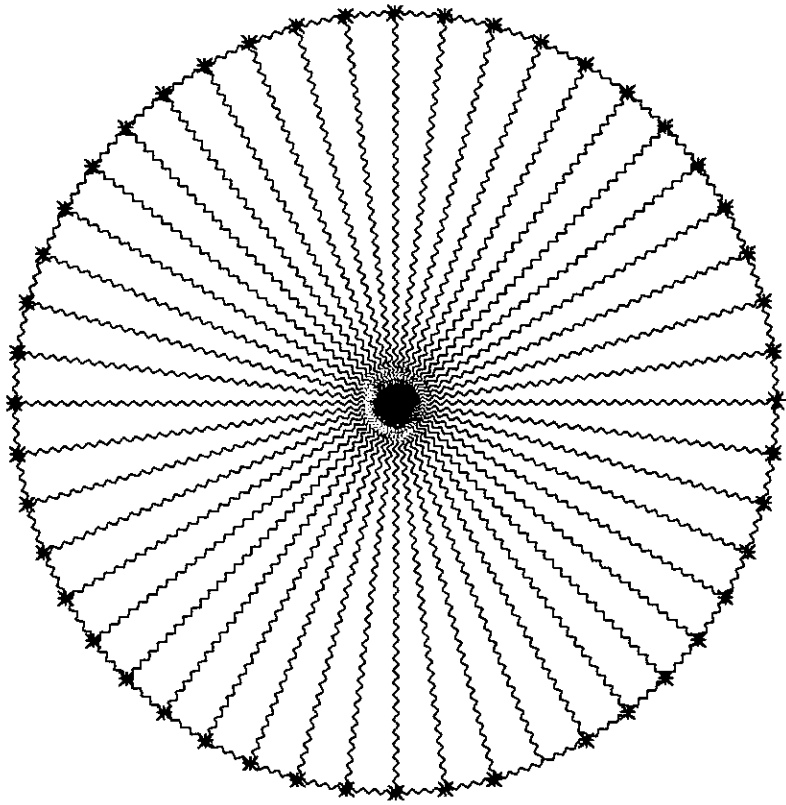


FIGURA VIII.07-B
LAJE CIRCULAR ENGASTADA

FORÇA CONCENTRADA CENTRAL
FATOR DE OLAPSO: .ORICO = 479.39 NUMERICO = 490.07

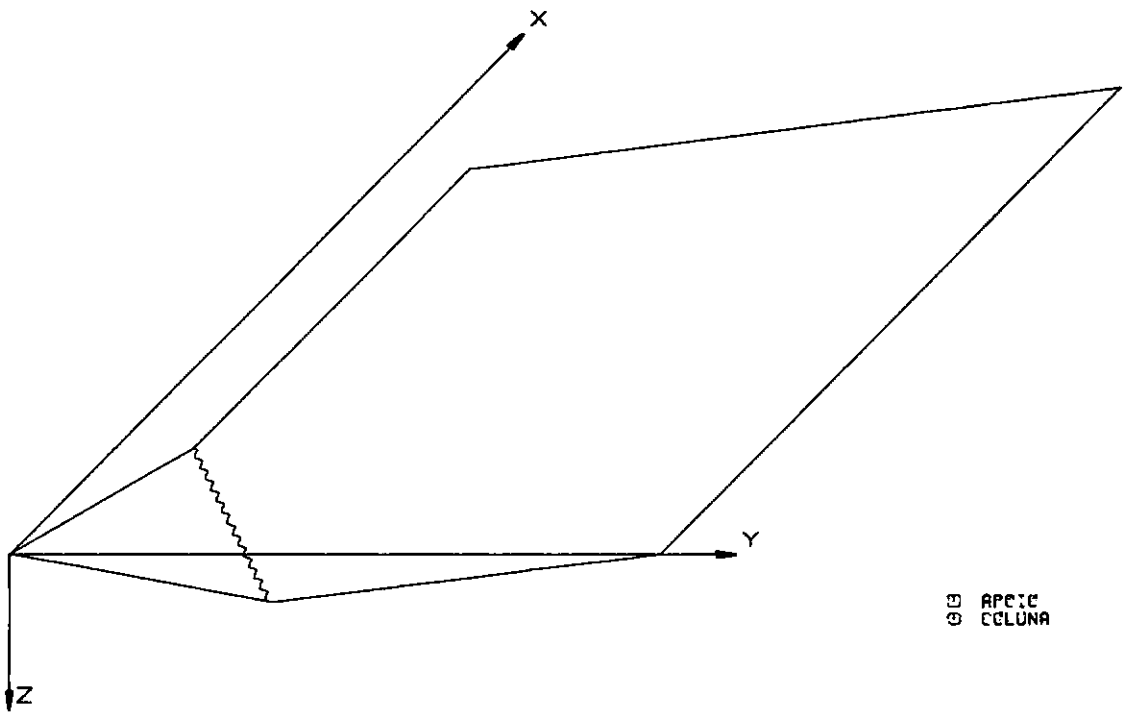
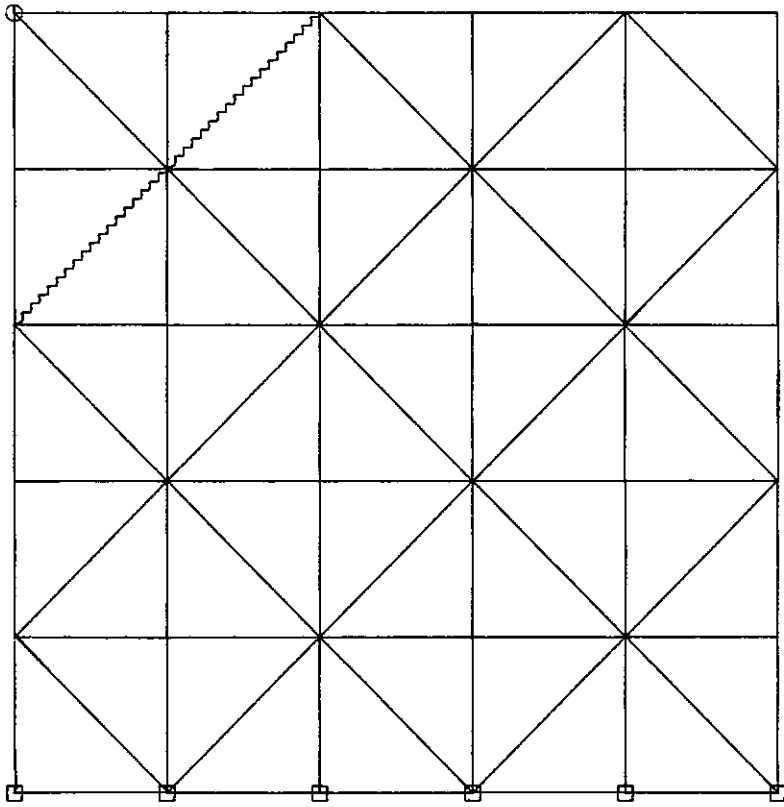


FIGURA VIII.06.A PLANO η
LAJE QUADRADA APOIADA NUM LADO E EM 1 COLUNA

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 1.37 NUMÉRICO = 1.12

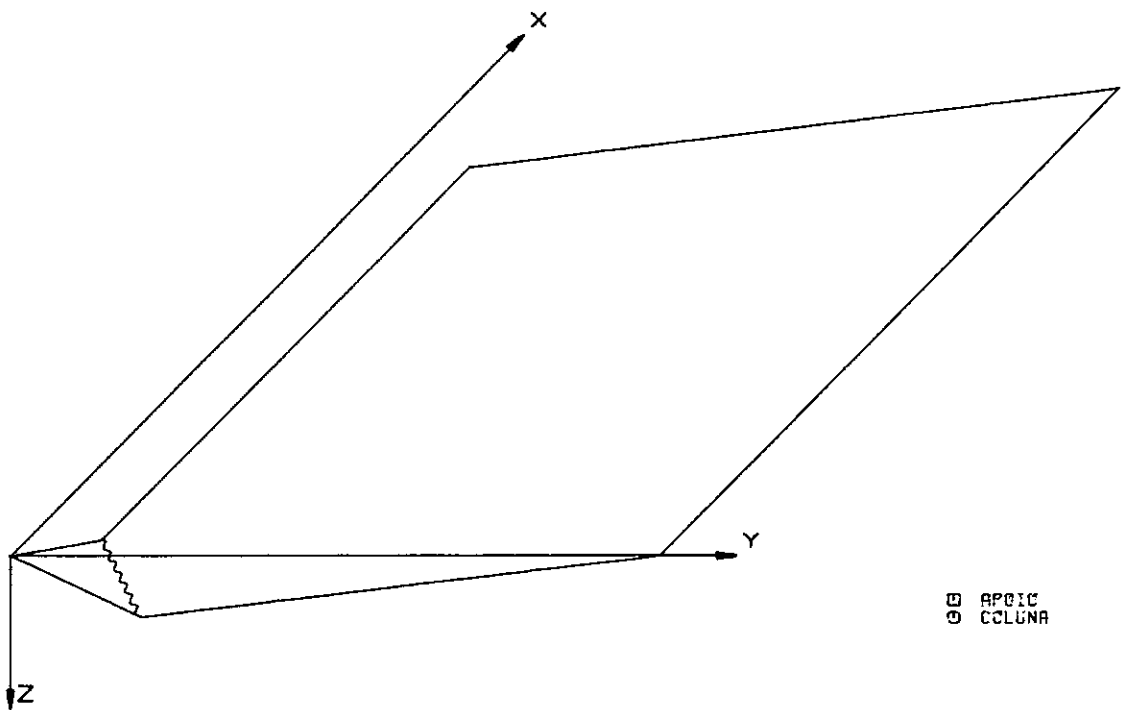
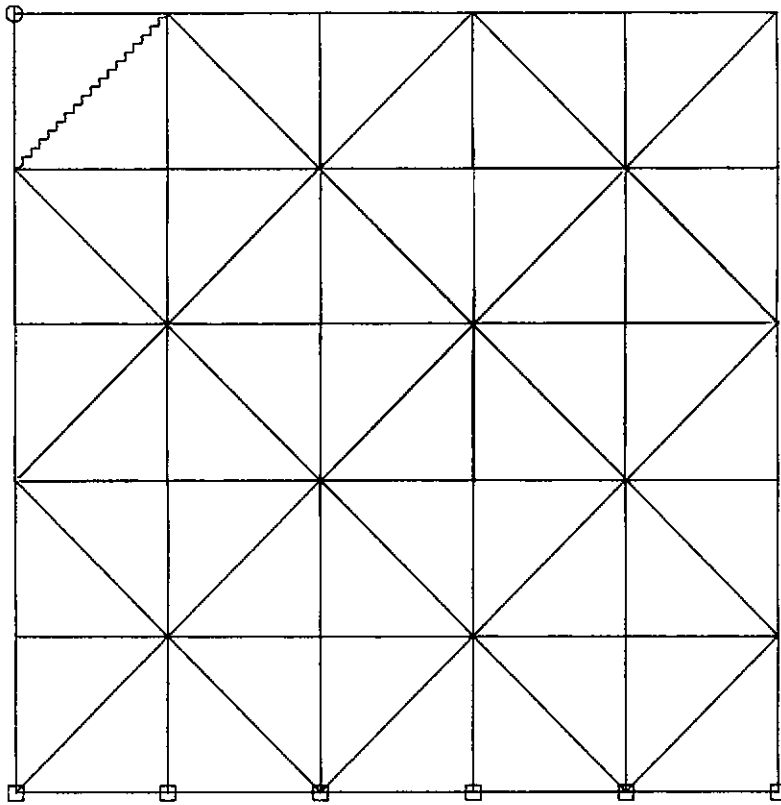


FIGURA VIII.08.6 - MALHA B
LAJE QUADRADA APOIADA NUM LADO E EM 1 COLUMNA

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFICIE
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 1.37 NUMERICO = 1.07

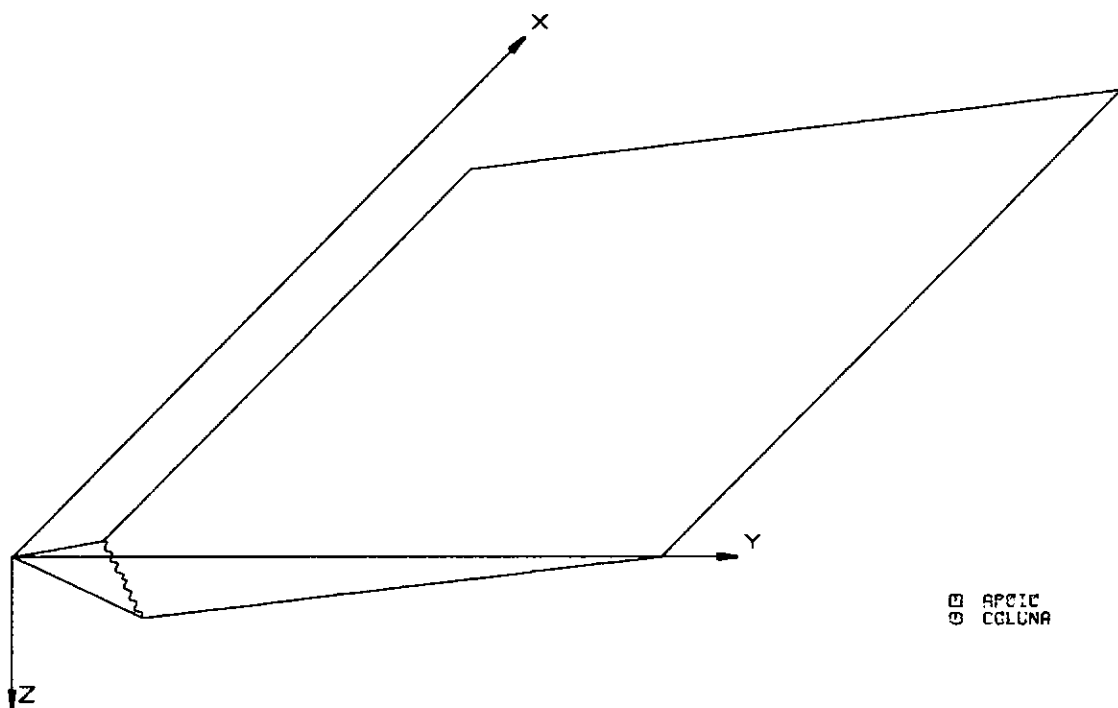
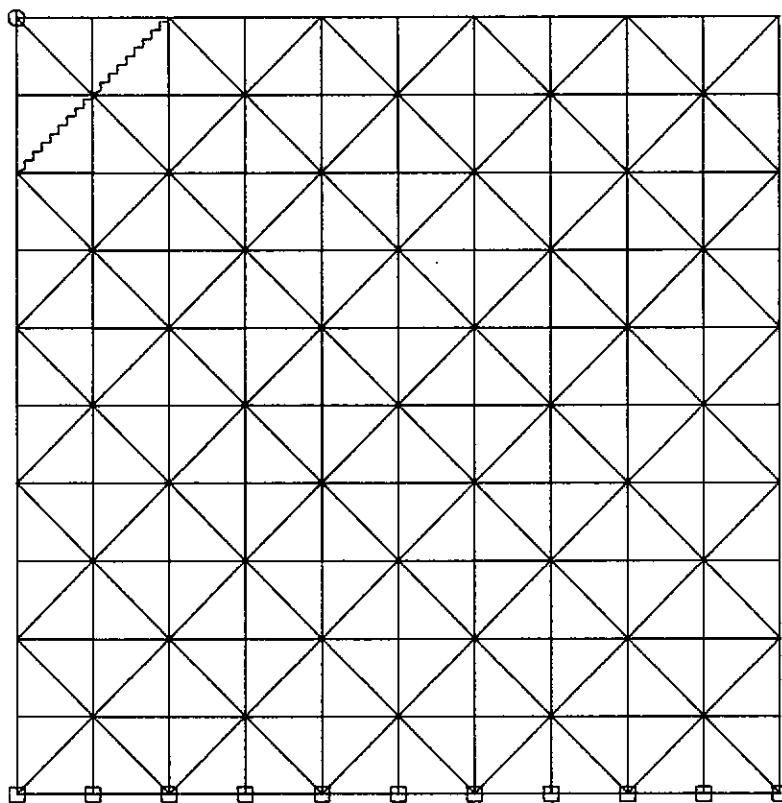


FIGURA VIII.06.C - MALHA C
LAJE QUADRADA APOIADA NUM LADO E EM 1 COLUNA

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 1.37 NÚMÉRICO = 1.07

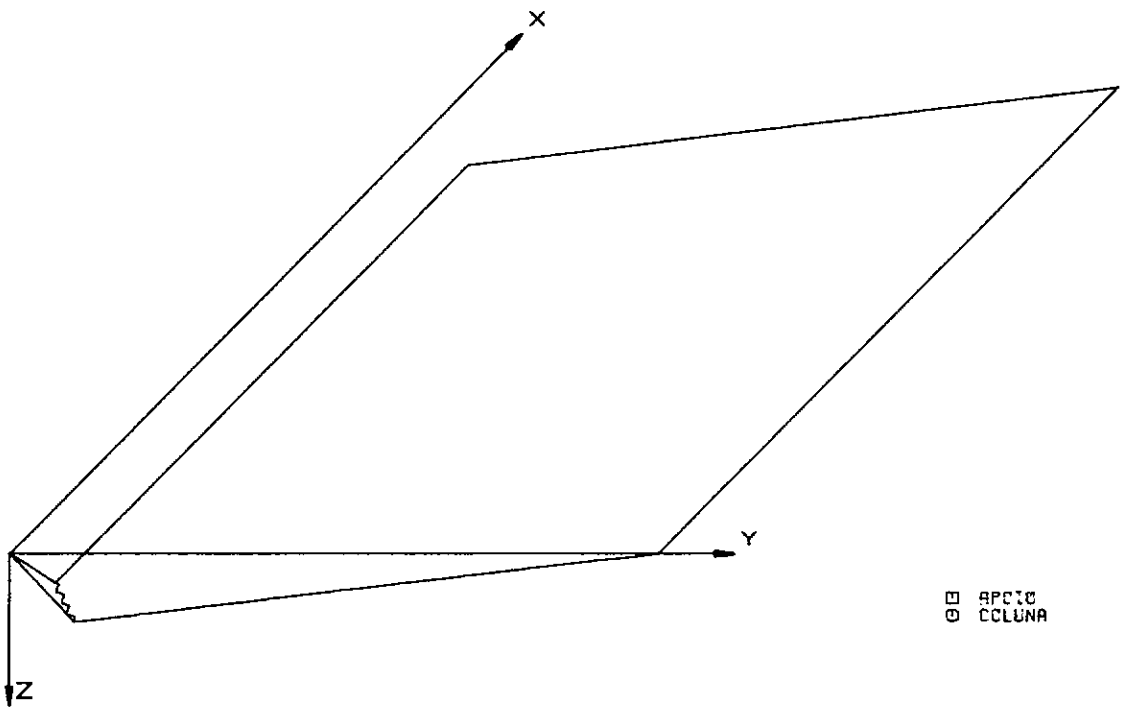
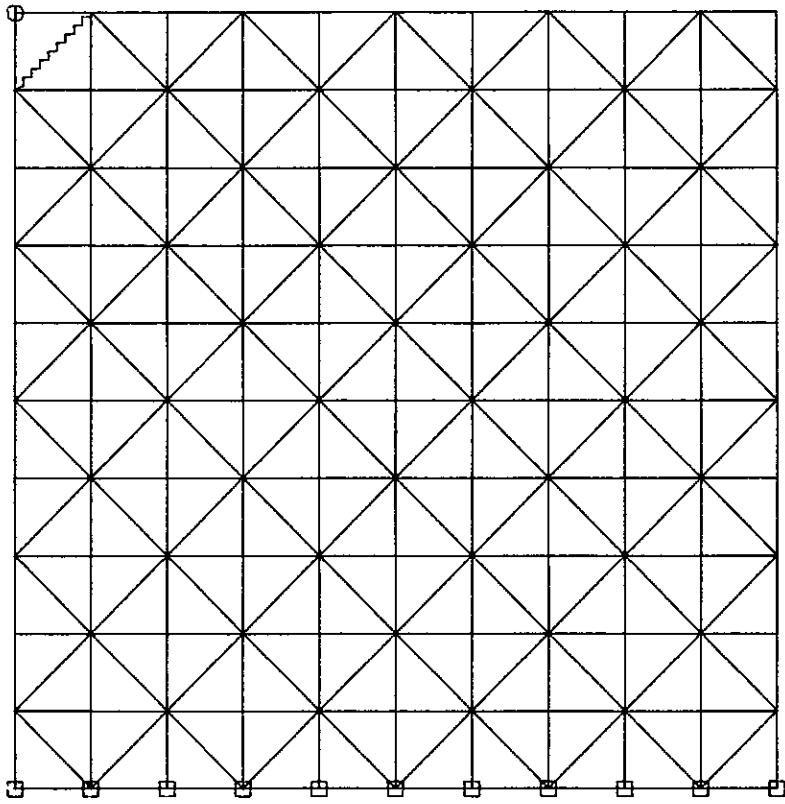
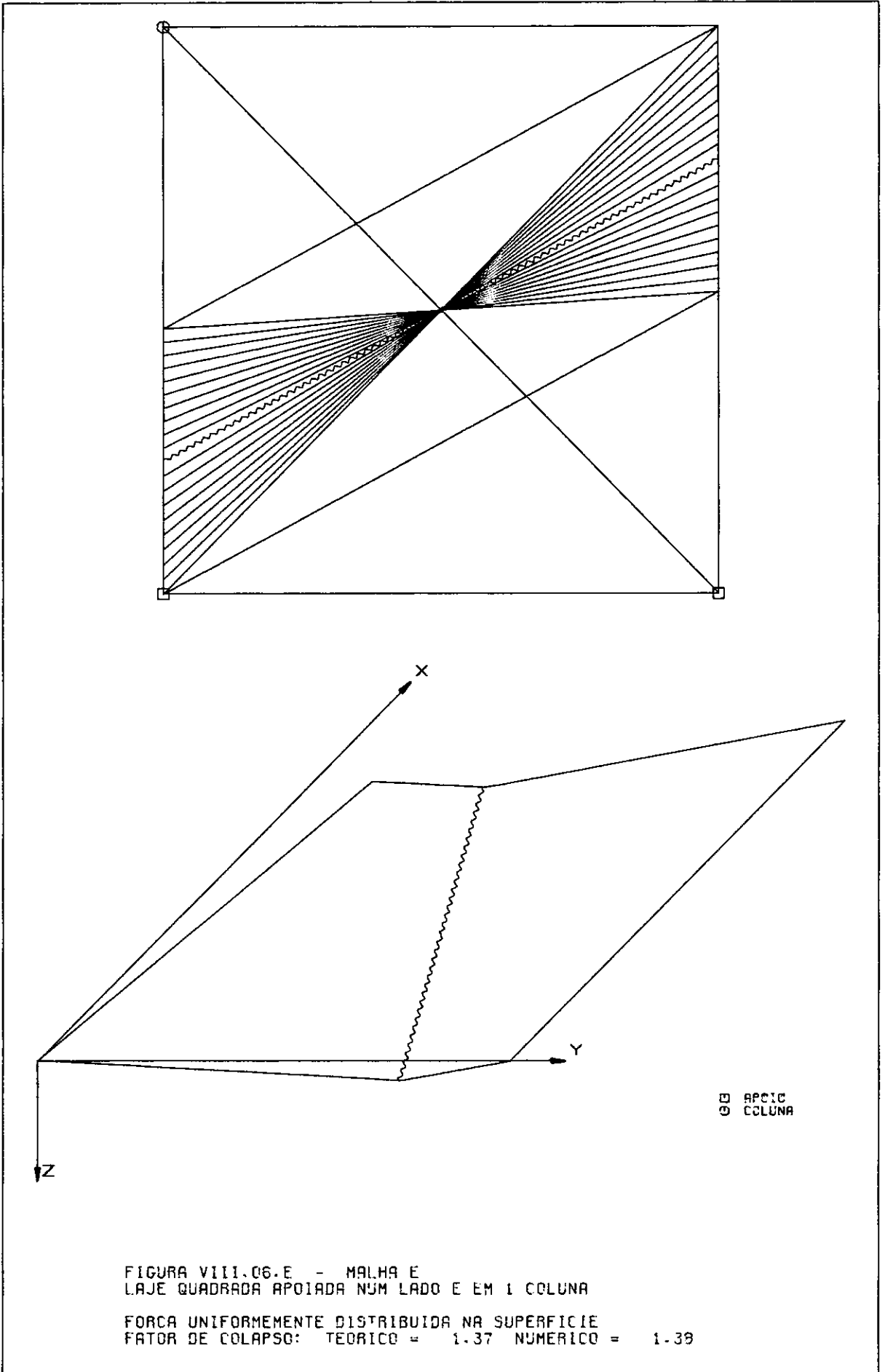
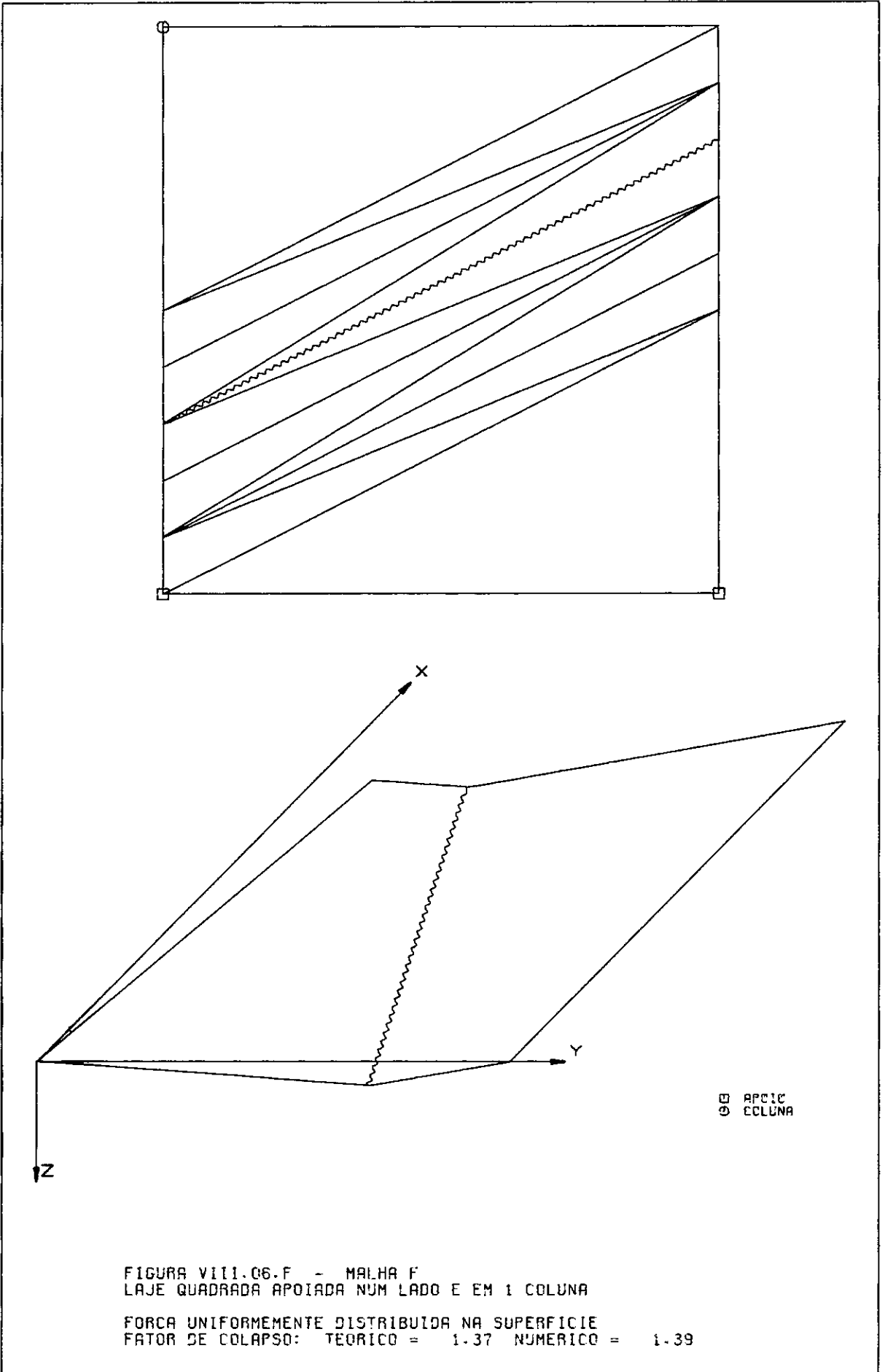


FIGURA VIII.06.D - MALHA D
LAJE QUADRADA APOIADA NUM LADO E EM 1 COLUNA

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 1.37 NUMÉRICO = 1.06





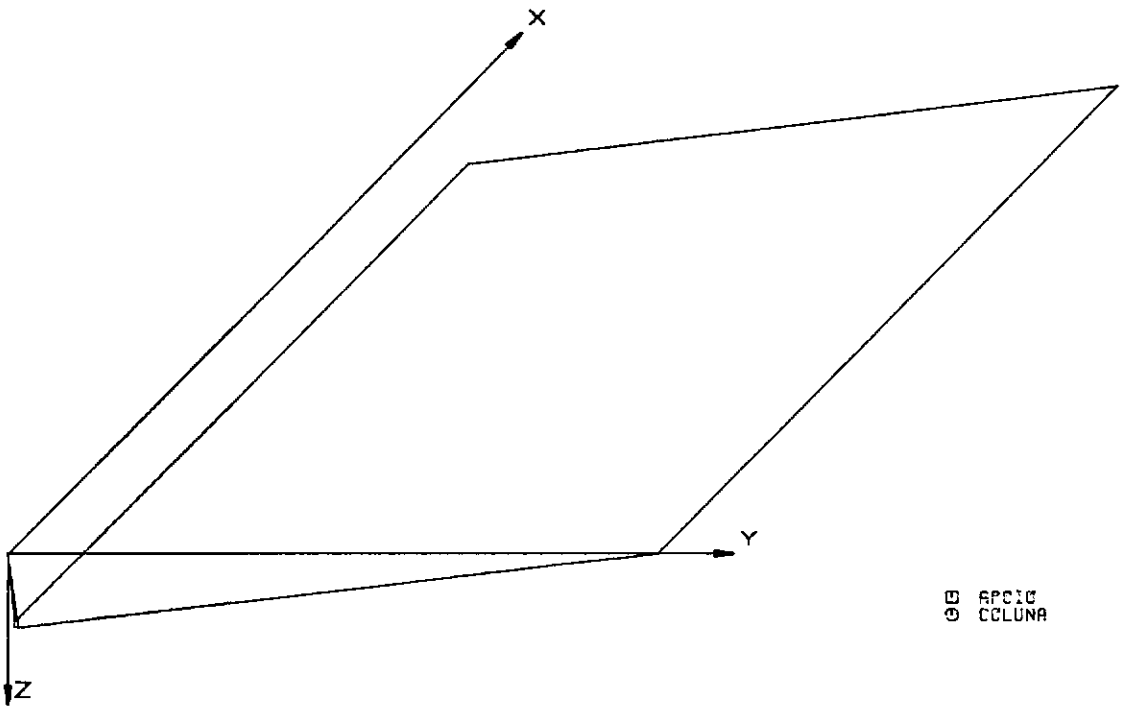
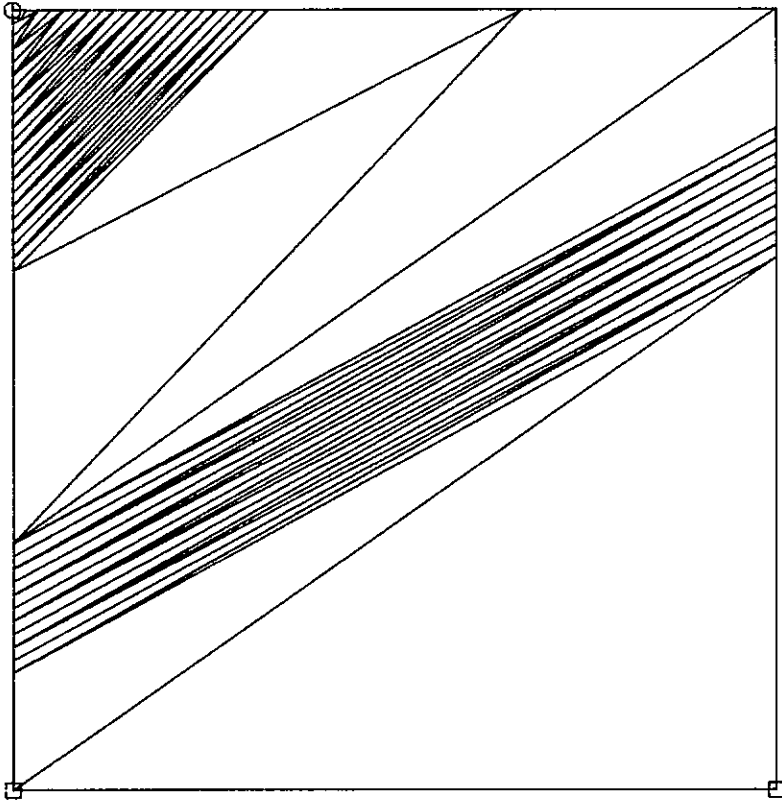


FIGURA VIII.06.G - MALHA G
LAJE QUADRADA APOIADA NUM LADO E EM 1 COLUNA

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 1.37 NÚMÉRICO = 1.06

**VIII.1.7 - Exemplo 7: Laje Circular Engastada,
Carregada Uniformemente**

Referência:

[24], pp 265-267, Ítem 9.2, Solução 9.1

Características:

- diâmetro da laje: 10.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$
- força concentrada aplicada: $P = 1.0$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

Para $P = 0.0$ e $q = 1.0$:

| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 18.31 | 18.39 |

Para $P = 1.0$ e $q = 0.0$:

| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 479.39 | 480.07 |

Comentários:

Mais uma vez o modelo proposto representa muito bem tanto o fator quanto o mecanismo de colapso quando este último se encontra presente na malha, figura (VIII.07.a,b). As diferenças mínimas entre os valores analíticos e numéricos deve-se simplesmente ao número de elementos utilizados para discretizar a laje circular, que a prática

torna desnecessário melhorar. Note-se neste exemplo a solução de um problema de colapso com apenas 1 grau de liberdade!

**VIII.1.8 - Exemplo 8: Laje Quadrada Simplesmente Apoiada,
com Momentos Resistentes Últimos Diferentes em
Várias Seções, Carregada Uniformemente**

Referência:

[25], pp 426-427

Características:

- dimensões da laje: 8.0 x 8.0
- dimensões da região com armadura reforçada: 6.0 x 6.0
- momentos resistentes na região com armadura reforçada:

$$\begin{cases} m_r = 76.30 \\ m'_r = -76.30 \end{cases}$$
- momentos resistentes no resto da laje:

$$\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

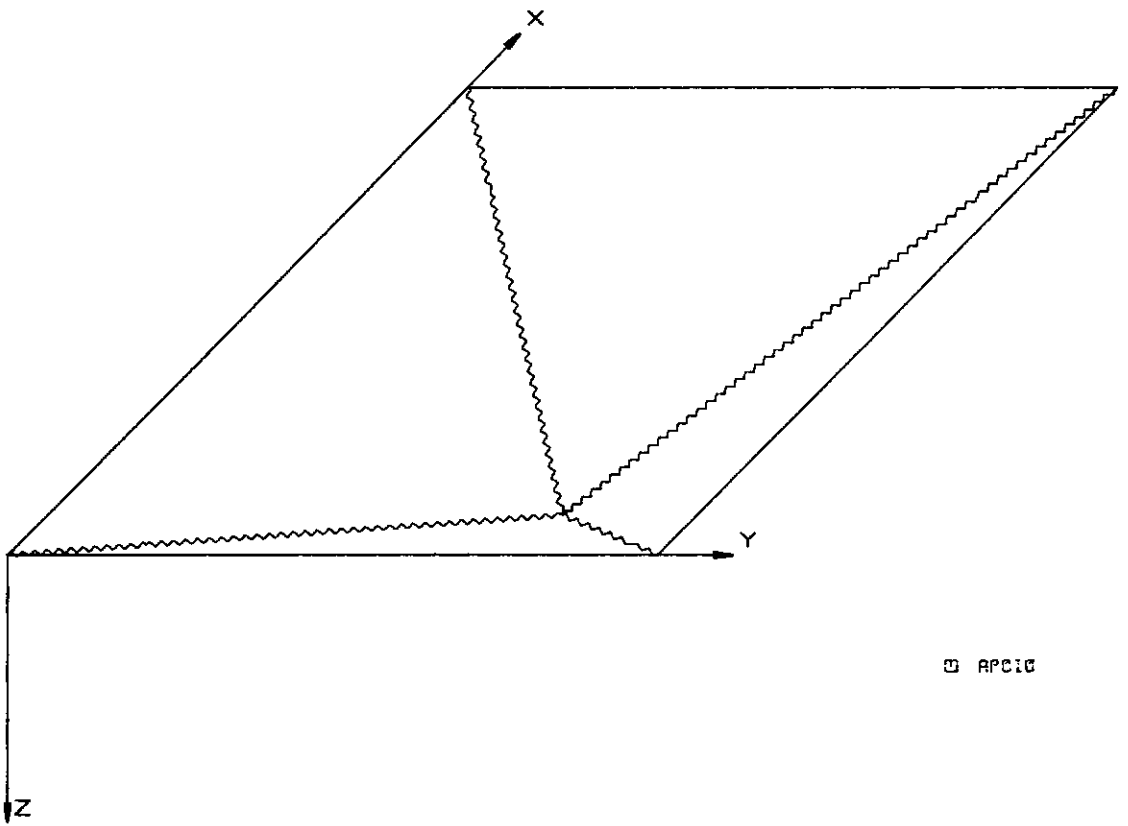
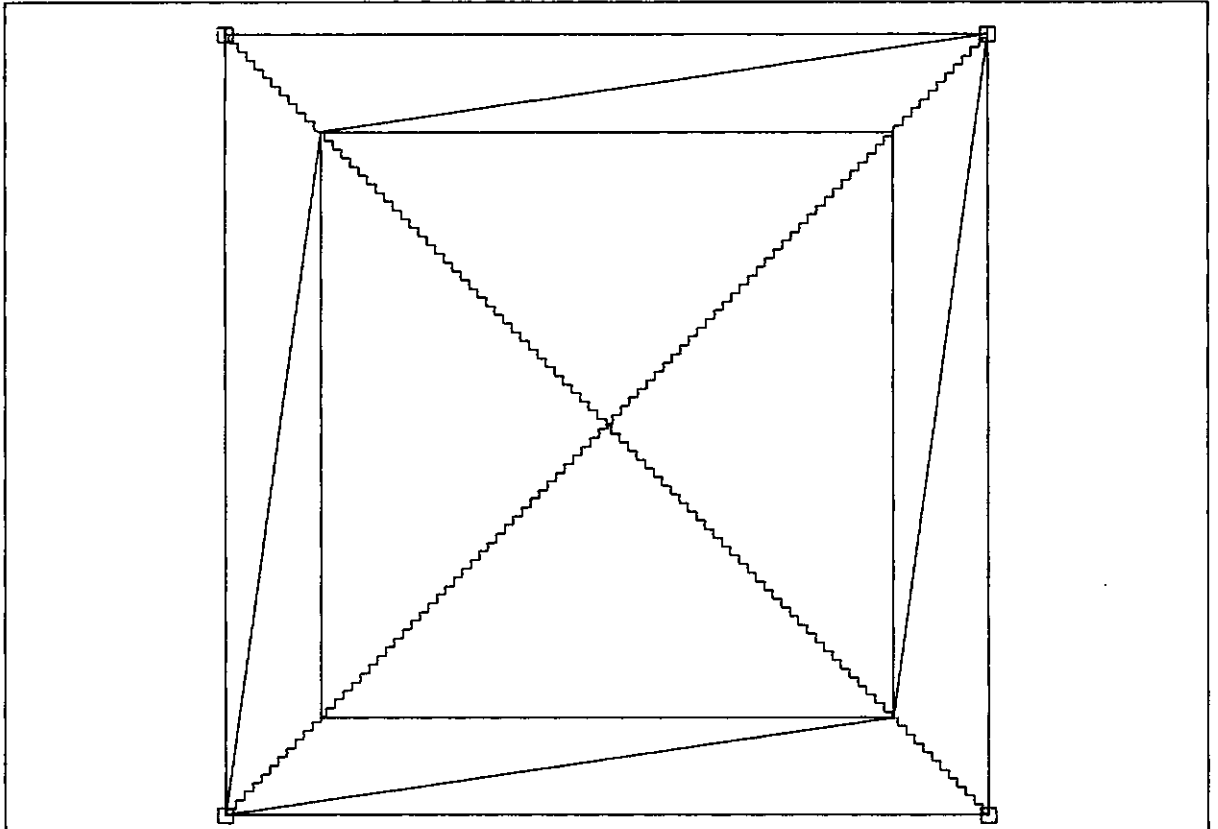
Resultados Para o Fator de Colapso:

| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 25.04 | 25.04 |

Comentários:

Este exemplo, figura (VIII.08), visa mostrar lajes armadas não-uniformemente seguindo, aproximadamente, a forma do diagrama elástico de momentos fletores de maneira a encontrar uma solução

ótima também em termos de peso estrutural. Colocando-se a armadura inferior em bandas, aproveitam-se os materiais ao máximo. Casos como este ou mesmo bem mais complexos, podem ser resolvidos com facilidade pelo elemento proposto, conforme pode ser visto nesse exemplo.



APCIG

FIGURA VIII.08 - $M_1 = 39.15$ $M_2 = 16.30$
LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 25.04 NÚMÉRICO = 25.04

VIII.1.9 - Exemplo 9: Laje Circular Apoiada em Oito Colunas Dispostas Circularmente, Carregada Uniformemente

Referência:

[25], pp 358-360, Ítem 7.13.1

Características:

- diâmetro da laje: 10.0
- distância radial de cada coluna ao centro da laje: 4.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 38.15 \\ m'_r = -38.15 \end{cases}$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Malha | Analítico | Numérico |
|-------|-----------|----------|
| A | 19.78 | 19.23 |
| B | | 19.64 |

Comentários:

Este exemplo representa uma laje cogumelo. A diferença básica entre as malhas A e B, figuras (VIII.09.a,b), está no número de elementos utilizados. Pode-se ver que os resultados mais uma vez são muito bons e que o aumento da quantidade de elementos não acrescenta qualquer ganho em termos práticos pela diminuta diferença entre os fatores de colapso e nenhuma diferença na configuração de

ruptura. Conforme já se havia mencionado anteriormente, quanto melhor se discretiza o mecanismo circular mais se aproximam os resultados analítico e numérico. No caso em questão, quando se discretiza a laje circular com um número pequeno de lados, na realidade está se representando uma laje poligonal e não circular como se deseja, daí a diferença nos valores, diferença esta que, teoricamente, não poderia existir.

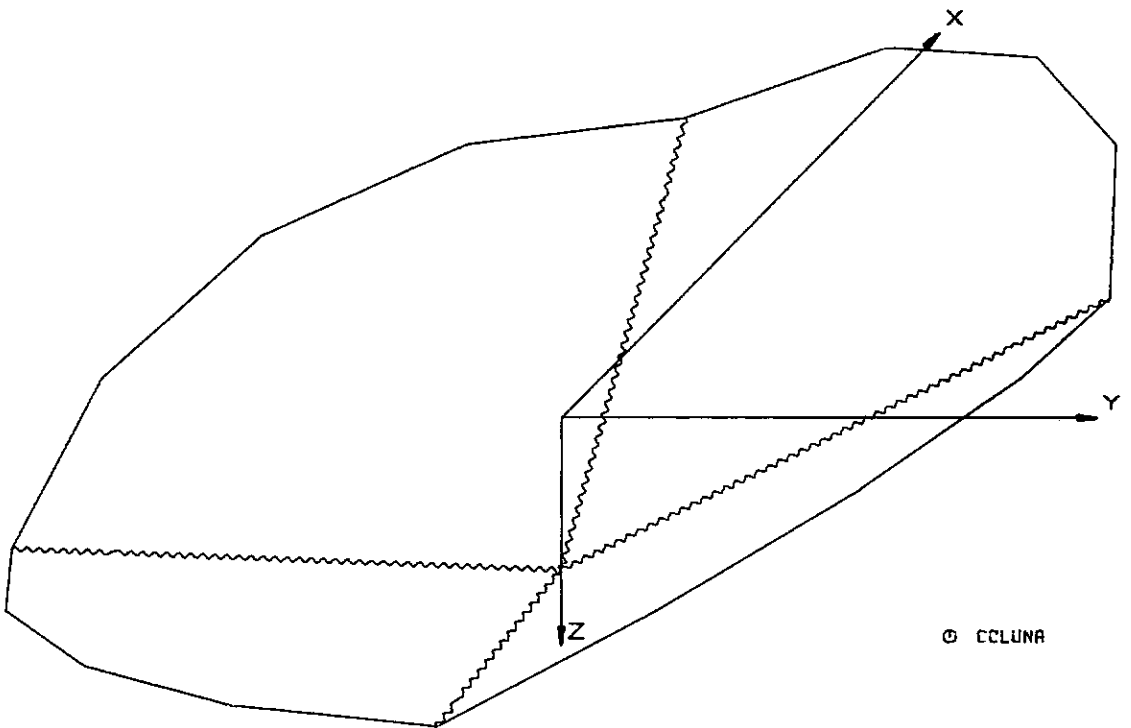
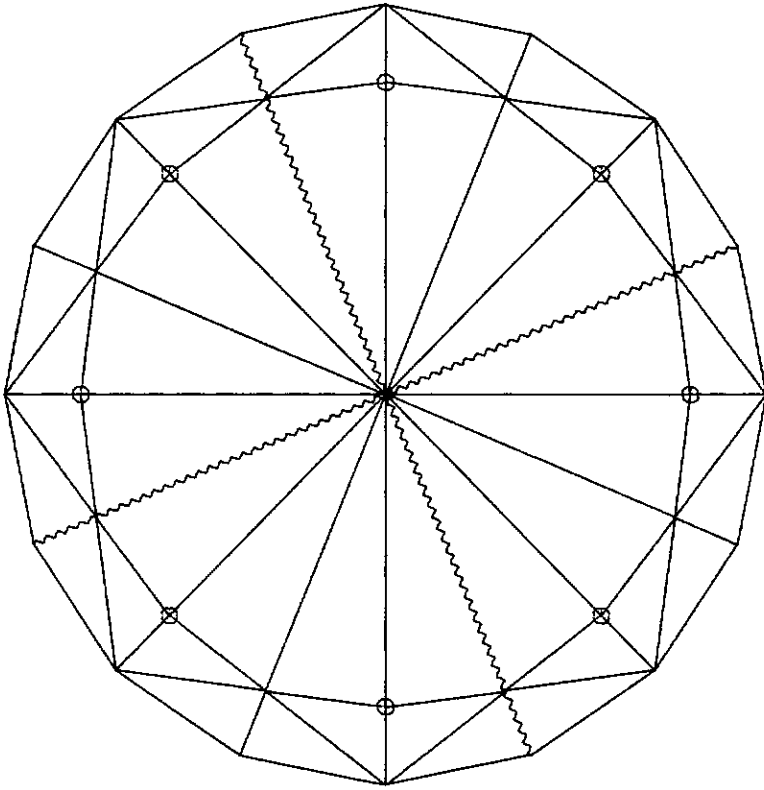
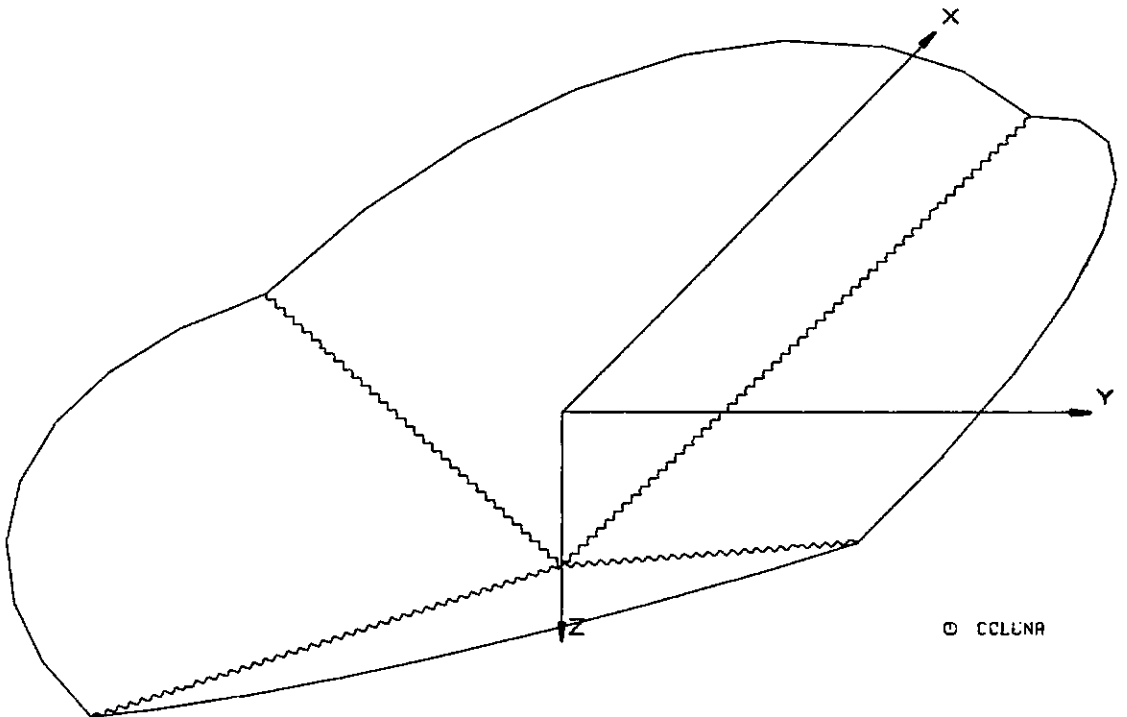
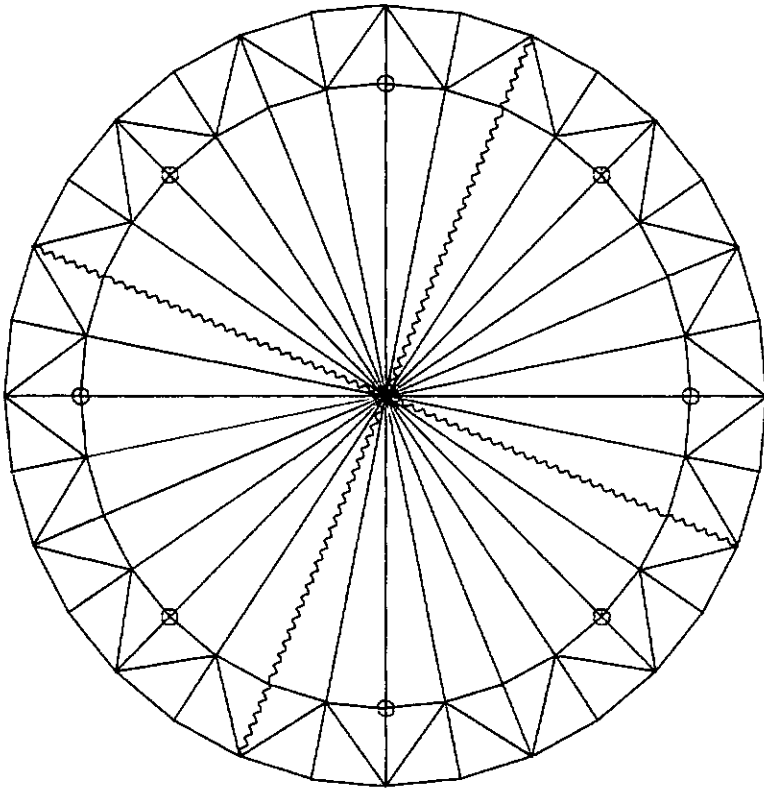


FIGURA VIII.09-A - MALHA A
LAJE CIRCULAR APOIADA EM 8 COLUNAS

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 19.78 NÚMÉRICO = 19.23



© CCLUNA

FIGURA VIII.09.B - MALHA B
LAJE CIRCULAR APOIADA EM 9 COLUNAS

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE
FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 19.78 NUMÉRICO = 19.64

VIII.1.10 - Exemplo 10: Laje Retangular Apoiada num dos Lados e em Duas Colunas, Carregada Uniformemente

Referência:

[25], pp 373-380, Ítem 7.16, Exemplo 7.16

Características:

- dimensões da laje: 12.0 x 18.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 5898.00 \\ m'_r = -5898.00 \end{cases}$
- força de superfície aplicada: $q = 1.0$

Resultados Para o Fator de Colapso:

| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 687.46 | 687.46 |

Comentários:

Nesta malha, figura (VIII.10), pretendeu-se mostrar um procedimento prático, ou seja, tendo-se uma laje, qual será o seu fator de colapso e o correspondente mecanismo de ruptura? Primeiramente verifica-se o maior número de configurações de ruptura possíveis; cria-se, então, uma malha com todas elas e processa-se o modelo. O resultado que se obtém é a seleção da configuração de colapso mais desfavorável dentre os mecanismos codificados, conforme se pode ver neste exemplo. O resultado obtido confere perfeitamente com o da referência.

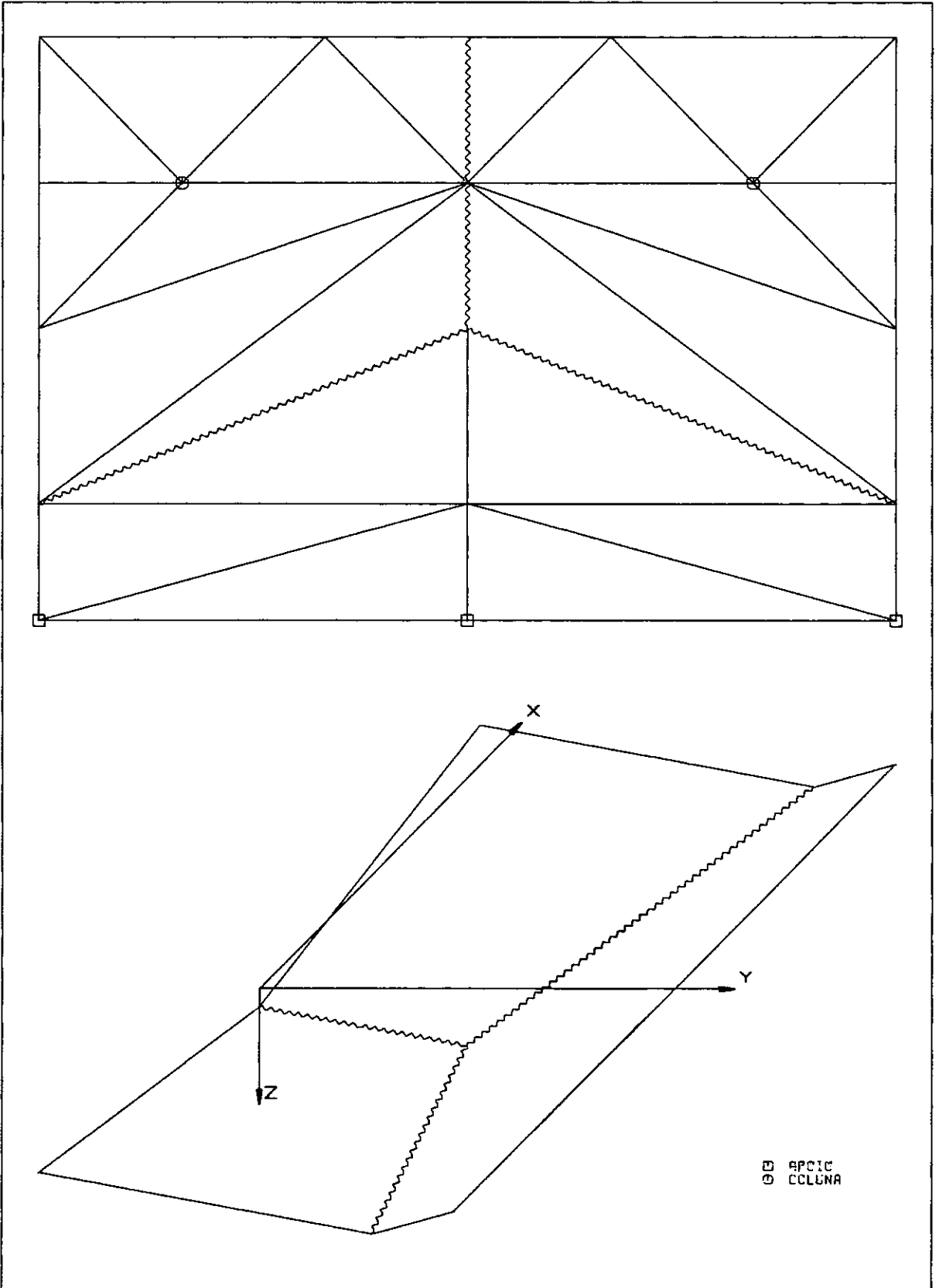


FIGURA VIII.10

LAJE RETANGULAR APOIADA N' M LADO E EM 2 COLUNAS

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE

FATOR DE COLAPSO: TEÓRICO = 697.46 NÚMÉRICO = 697.46

VIII.2 - Problemas de Adaptação da Estrutura

Nos exemplos que se seguem, devido à necessidade de uma análise elástica conforme se pode ver pelo texto teórico, os parâmetros adotados, em unidades SI, foram os seguintes:

Para os materiais:

C O N C R E T O

$$\begin{aligned}
 f_{ck} &= 15000.0 \text{ Pa} \\
 \gamma_c &= 1.40 \\
 E_c &= 21000000.0 \text{ Pa} \\
 \epsilon_{ct} &= 0.00013 \\
 \epsilon_{cc} &= -0.0035
 \end{aligned}$$

A Ç O (tipo A)

$$\begin{aligned}
 f_{yk} &= 500000.0 \text{ Pa} \\
 \gamma_s &= 1.15 \\
 E_s &= 210000000.0 \text{ Pa} \\
 \epsilon_{st} &= 0.01 \\
 \epsilon_{sc} &= -0.0035
 \end{aligned}$$

Para as armaduras:

$$\text{Na direção X} \left\{ \begin{array}{l} A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad c = 0.01 \text{ m} \\ A'_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad c' = 0.01 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\text{Na direção Y} \left\{ \begin{array}{l} A_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad c = 0.01 \text{ m} \\ A'_s = 0.001 \text{ m}^2 \quad c' = 0.01 \text{ m} \end{array} \right.$$

**VIII.2.1 - Exemplo 1: Viga Contínua de Dois Vãos Iguais,
Carregada no Centro de Cada Vão**

Referência:

[15], pp 135-138, Ítem 6.2

Características:

- comprimento de cada vão: 1.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 10.00 \\ m'_r = -10.00 \end{cases}$
- variação das cargas concentradas aplicadas em cada vão: $0 \leq P \leq 10.0$

Resultados:

Para o Fator de Colapso:

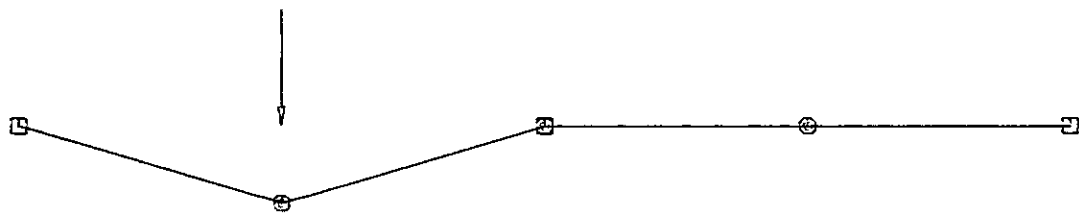
| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 6.00 | 6.00 |

Para o Fator Limite de Adaptação:

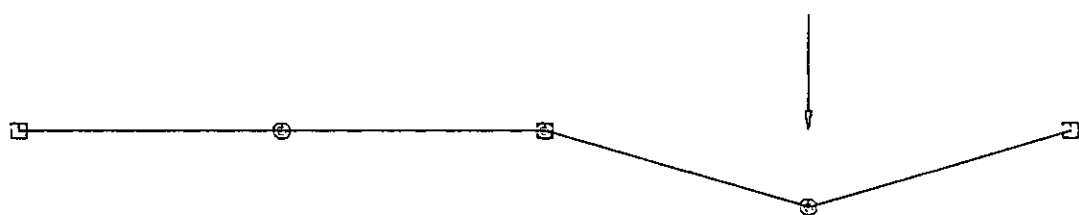
| Analítico | Numérico |
|-----------|----------|
| 5.05 | 5.05 |

Comentários:

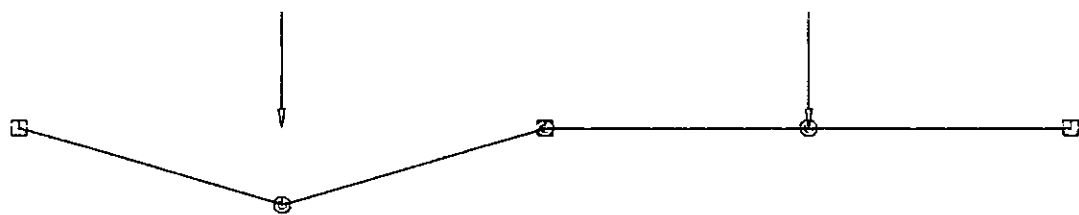
Conforme se poderia esperar da formulação, o elemento-rótula elasto-plástica reproduz exatamente os resultados analíticos como mostrado na figura (VIII.11).



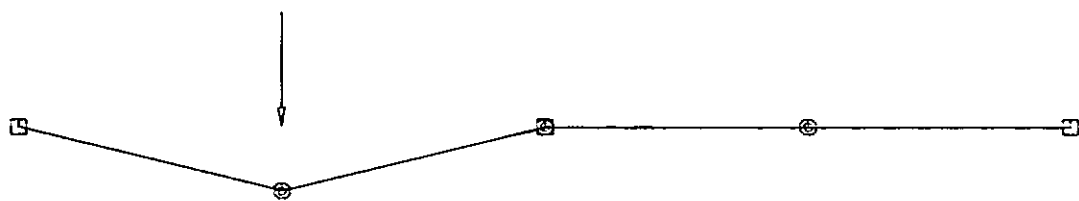
FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 6.00 NUMERICO = 6.00



FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 6.00 NUMERICO = 6.00



FATOR DE COLAPSO: TEORICO = 6.00 NUMERICO = 6.00



FATOR DE ADAPTACAO: TEORICO = 5.05 NUMERICO = 5.05

FIGURA VIII 11
VIGA CONTINUA COM DOIS VAOS IDENTICOS
COLAPSO ESTATICO E COMPORTAMENTO DE ADAPTACAO
FORÇAS CONCENTRADAS CENTRAIS

□ APCIC

VIII.2.2 - Exemplo 2: Laje Retangular Contínua de Dois Vãos Iguais, Carregada no Centro de Cada Vão

Características:

- dimensões da laje: 1.0 x 2.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 10.00 \\ m'_r = -10.00 \end{cases}$
- variação das cargas concentradas aplicadas em cada vão: $0 \leq P \leq 10.0$

Resultados:

Para o Fator de Colapso:

| |
|----------|
| Numérico |
| 6.00 |

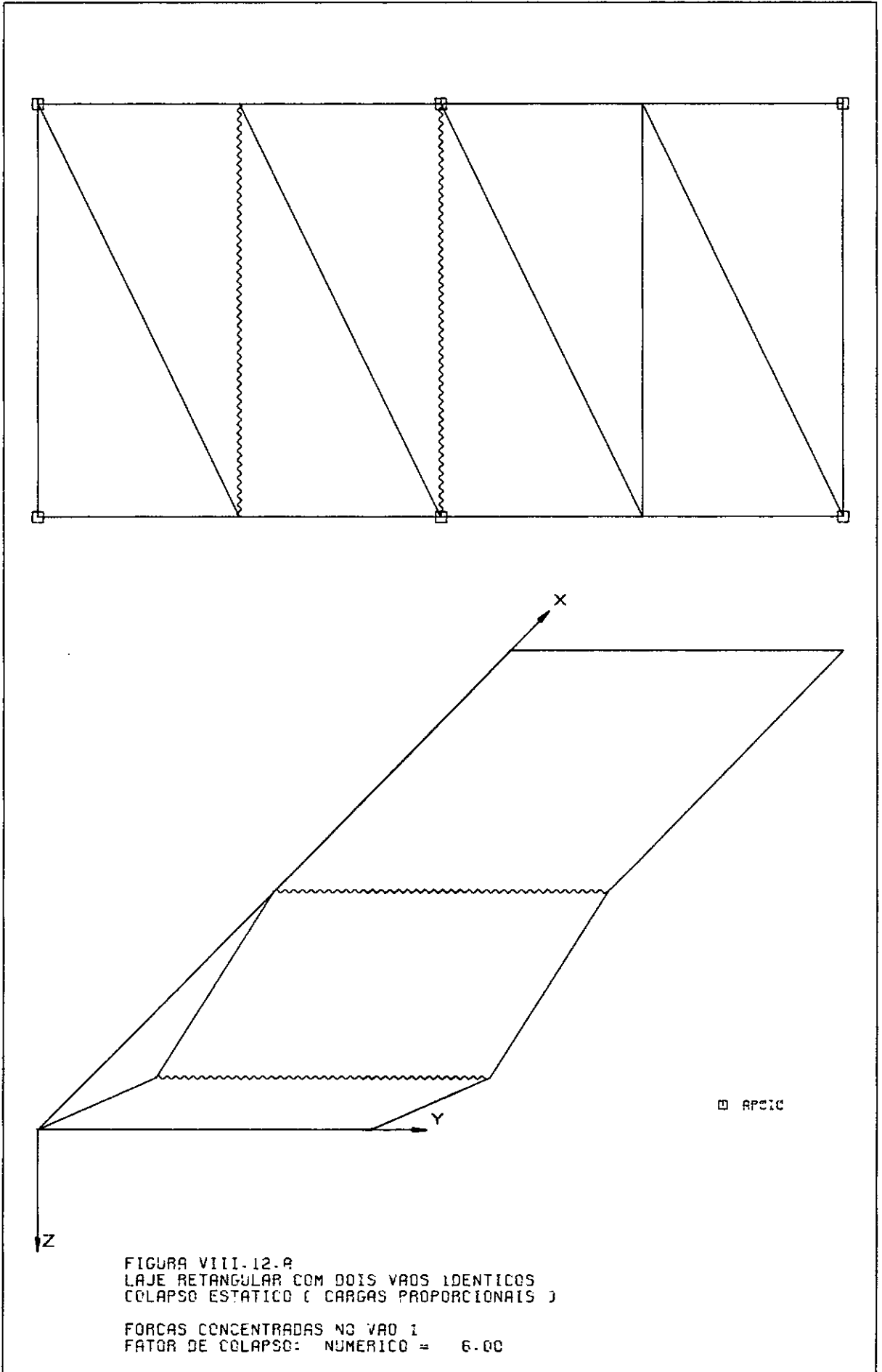
Para o Fator Limite de Adaptação:

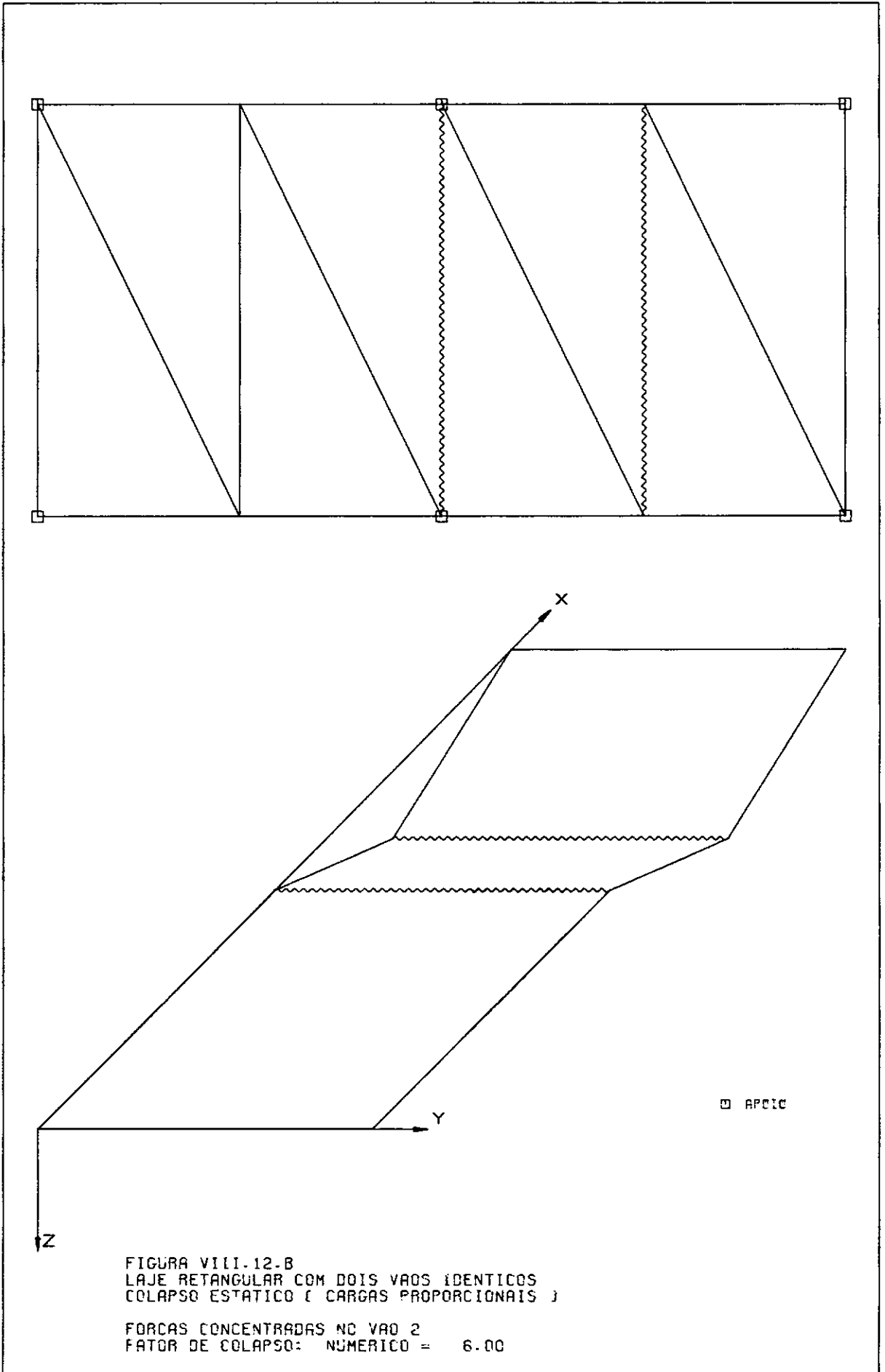
| |
|----------|
| Numérico |
| 5.22 |

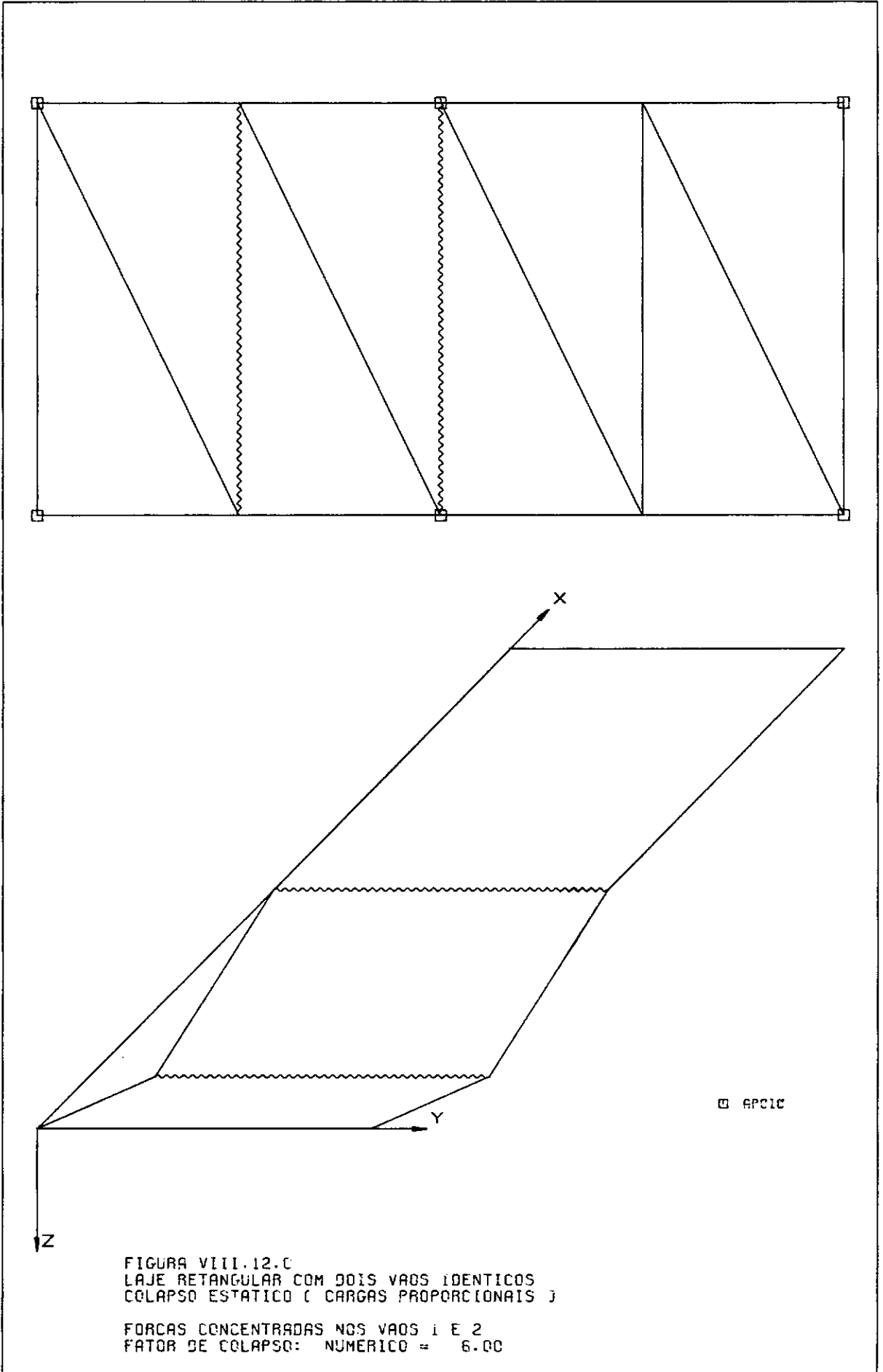
Comentários:

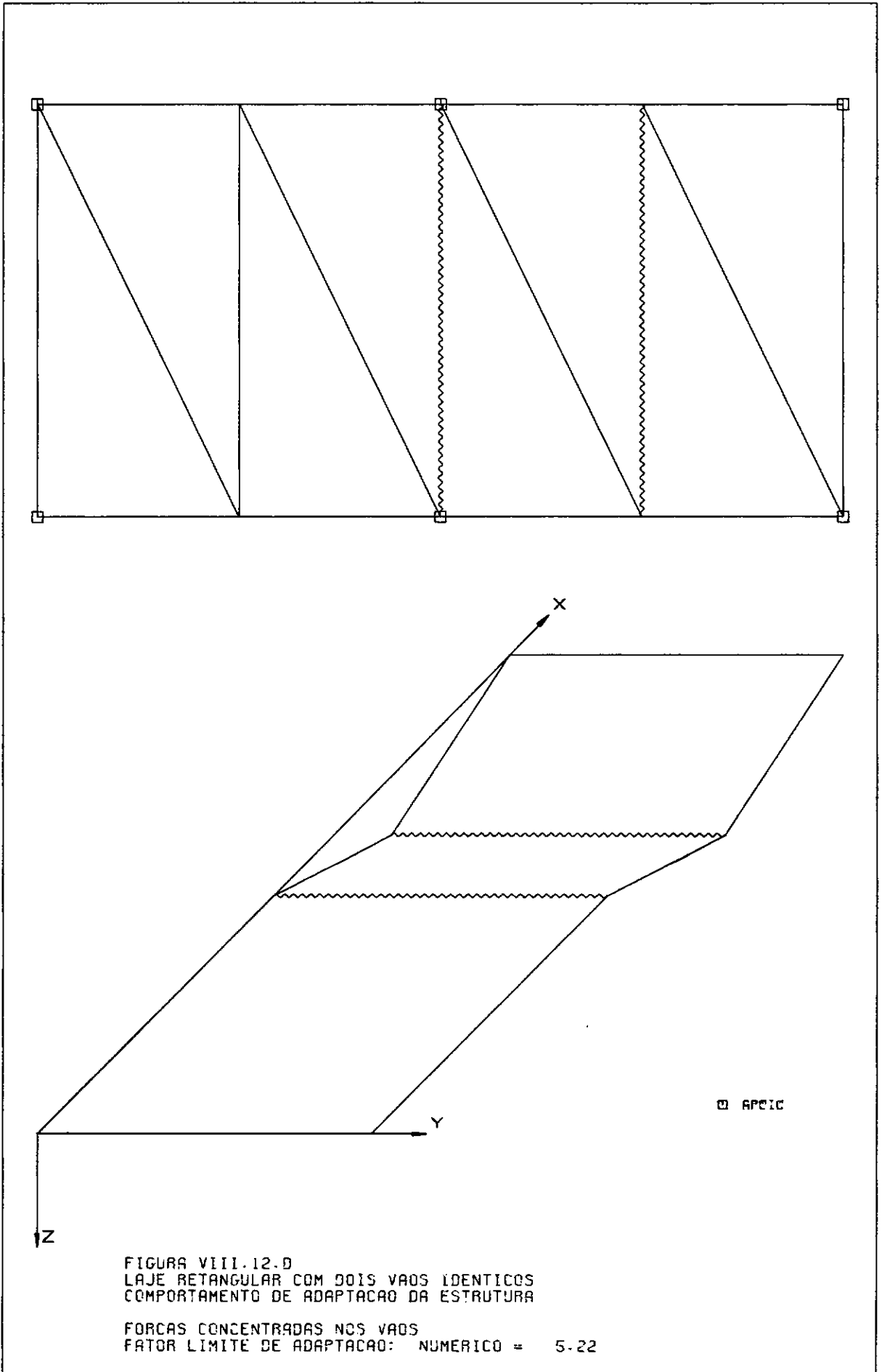
Os resultados para o colapso estático são perfeitamente reproduzidos; entretanto, o fator limite de adaptação está um pouco acima do correspondente ao caso da viga contínua vista no exemplo anterior, figuras (VIII.12.a,b,c,d). A explicação que se pode dar é que a existência de elementos-charneira nas diagonais provoca, durante a análise elástica, um campo de deslocamentos ligeiramente diferente daquele da viga contínua pela presença

das deformações elásticas. Assim, sendo os momentos resistentes últimos os mesmos nos dois casos e os momentos máximos e mínimos ligeiramente menores na laje, o fator limite de adaptação da laje tem que ser um pouco maior que o da viga de modo a "compensar" esse efeito. A situação torna-se ainda mais interessante quando se faz uma malha que introduza efeitos de torção, já que a Teoria das Linhas de Ruptura, utilizada como base para a formulação do elemento não considera momentos torsionais. Isto não acontece na análise limite porque aí não se consideram as deformações elásticas, sendo o resultado o mesmo para qualquer malha que se tome. Dessa maneira, apesar de corretos, não se pode fazer uma total analogia desses dois exemplos entre si.









VIII.2.3 - Exemplo 3: Laje Retangular Contínua de Dois Vãos Iguais, Carregada Uniformemente em Cada Vão

Características:

- dimensões da laje: 1.0 x 2.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 10.00 \\ m'_r = -10.00 \end{cases}$
- variação das cargas de superfície aplicadas em cada vão: $0 \leq q \leq 10.0$

Resultados:

Para o Fator de Colapso:

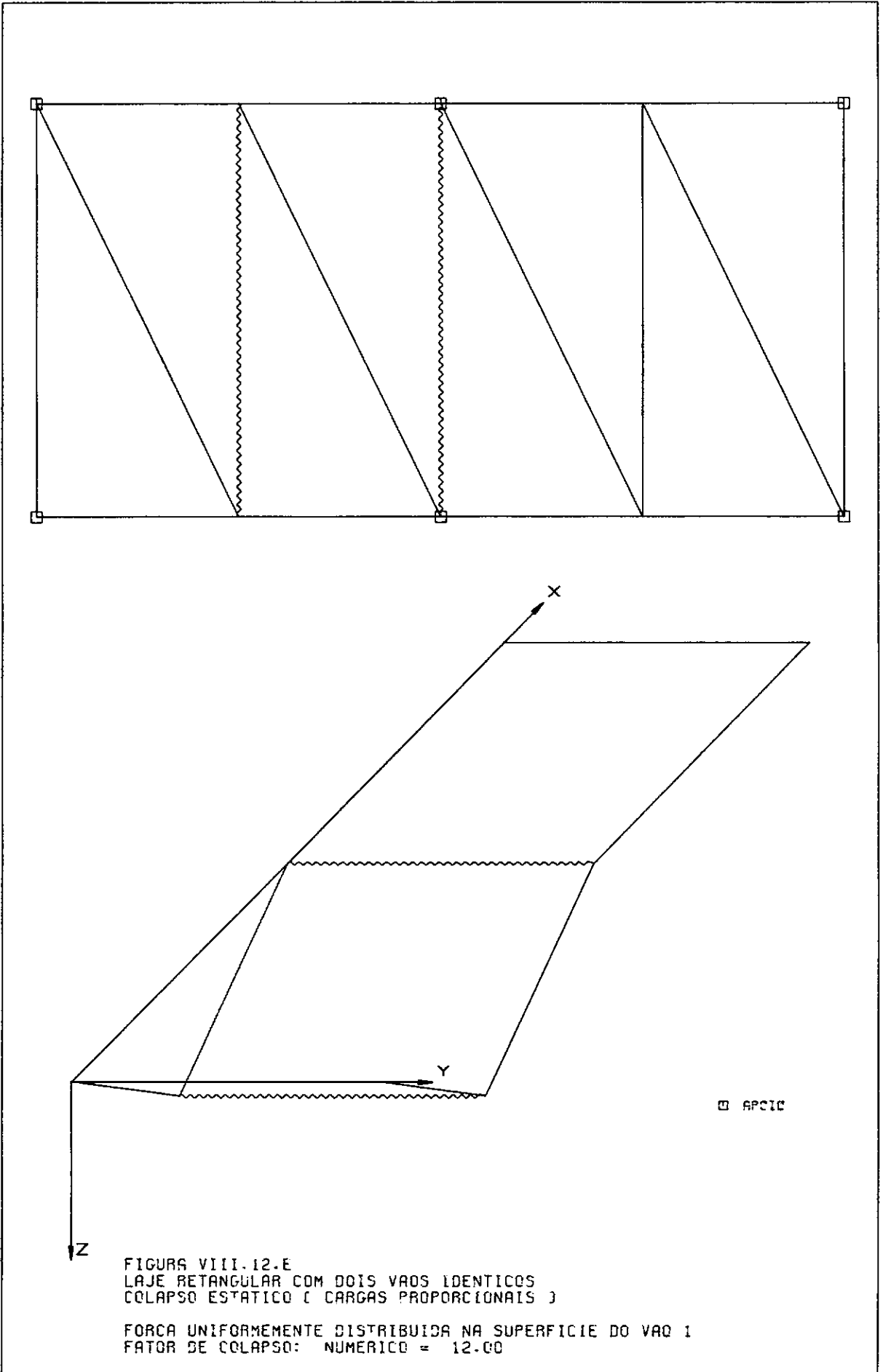
| |
|----------|
| Numérico |
| 12.00 |

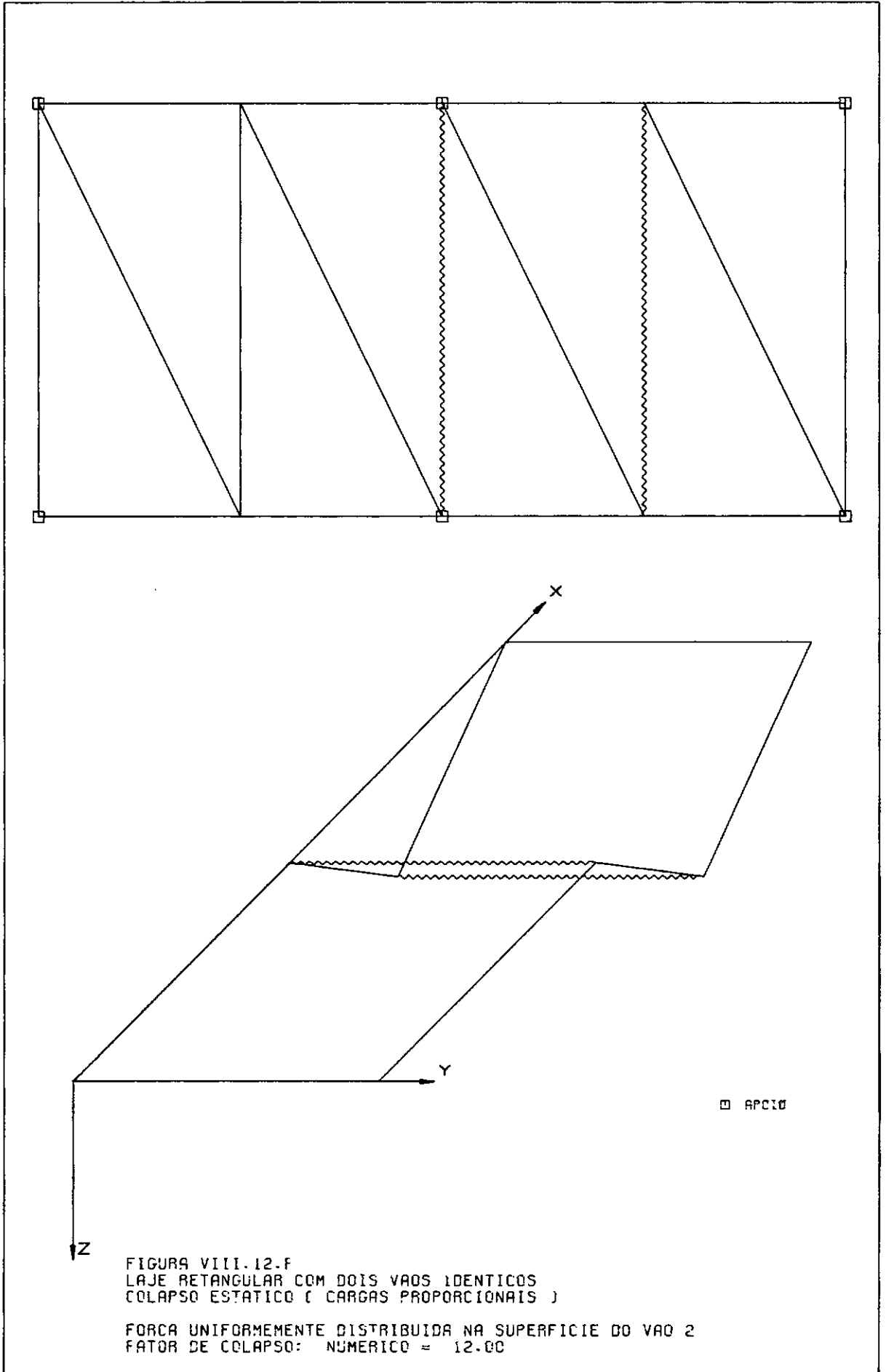
Para o Fator Limite de Adaptação:

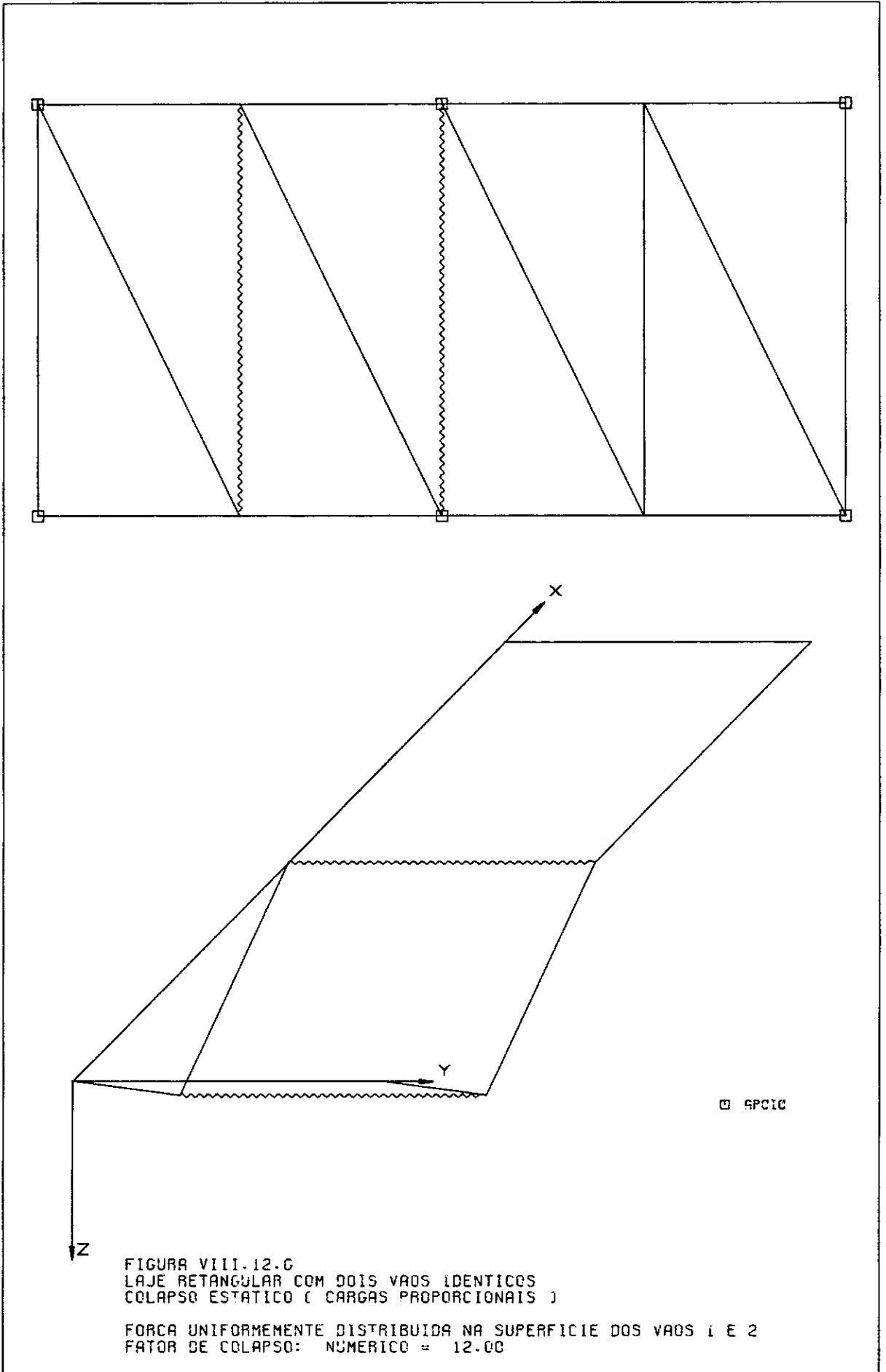
| |
|----------|
| Numérico |
| 10.60 |

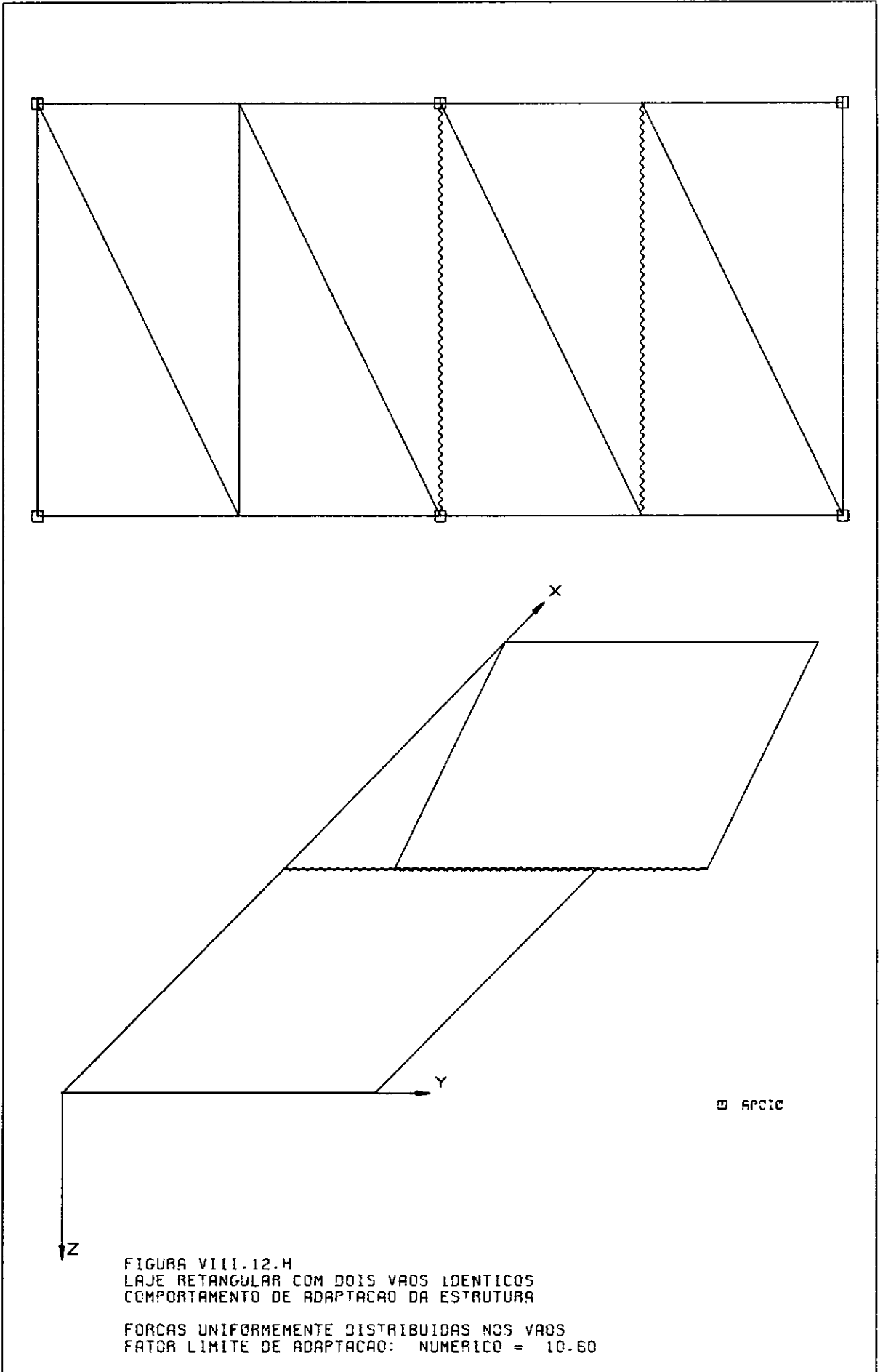
Comentários:

Os comentários para esse exemplo são análogos ao do exemplo anterior, apenas com a diferença do tipo de carga aplicada, figuras (VIII.12.e,f,g,h). Note-se em ambos os exemplos que existe uma diferença razoável entre os fatores de colapso estático e o limite de adaptação; isto significa que ficar-se-ia contra a segurança se se considerasse apenas a possibilidade do colapso estático.









VIII.2.4 - Exemplo 4: Laje Retangular Contínua de Dois Vãos Desiguais, Carregada Uniformemente

Características:

- dimensões da laje: 1.0 x 3.0
- momentos resistentes: $\begin{cases} m_r = 10.00 \\ m'_r = -10.00 \end{cases}$
- variação das cargas de superfície aplicadas em cada vão: $0 \leq q \leq 10.0$

Resultados:

Para o Fator de Colapso:

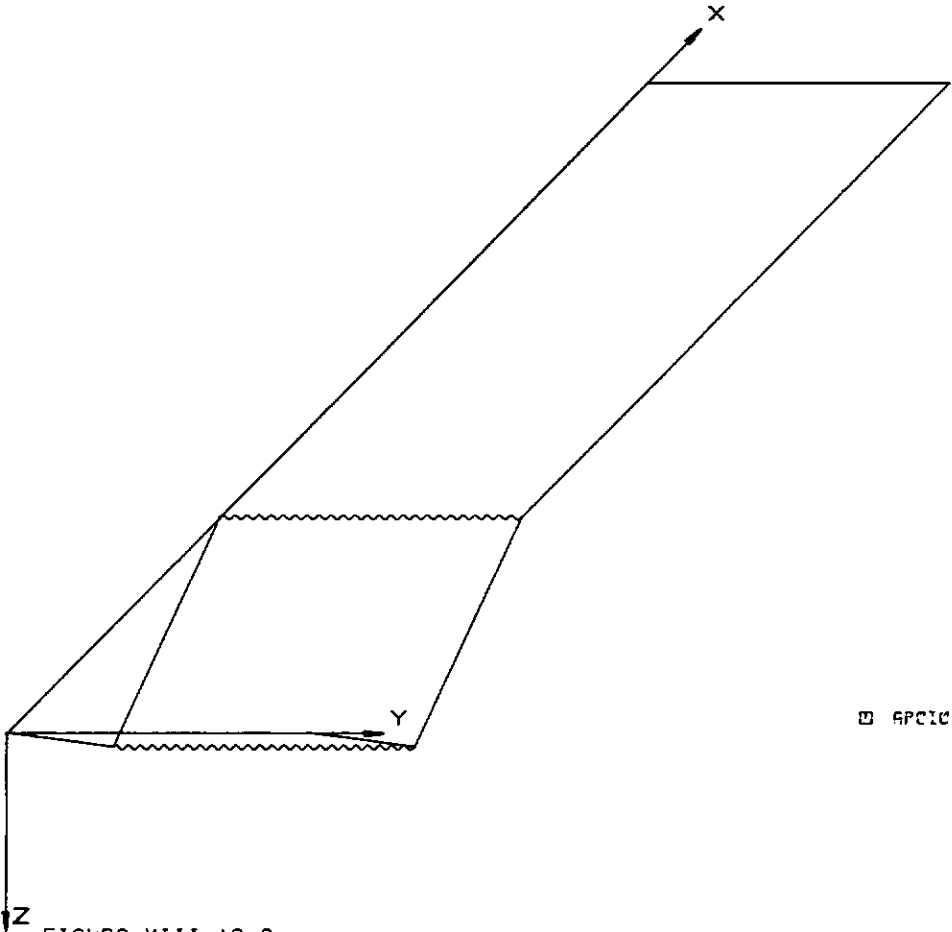
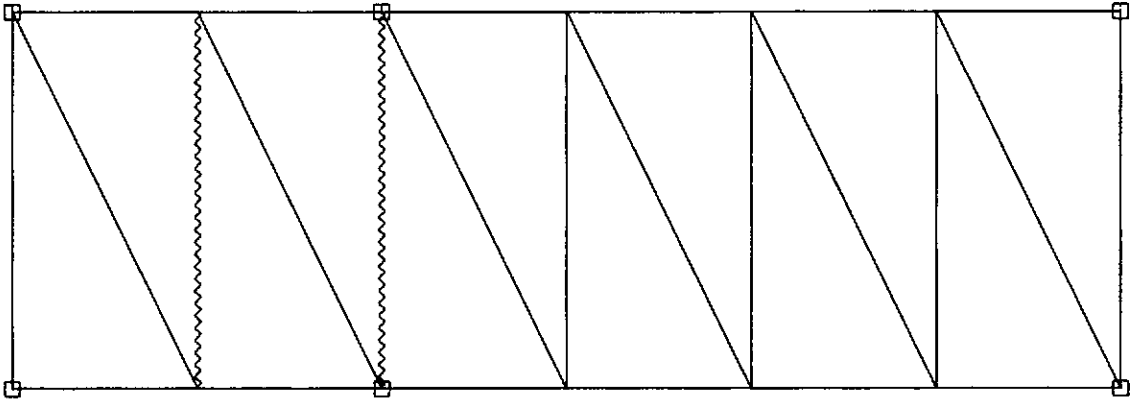
| |
|----------|
| Numérico |
| 3.00 |

Para o Fator Limite de Adaptação:

| |
|----------|
| Numérico |
| 4.07 |

Comentários:

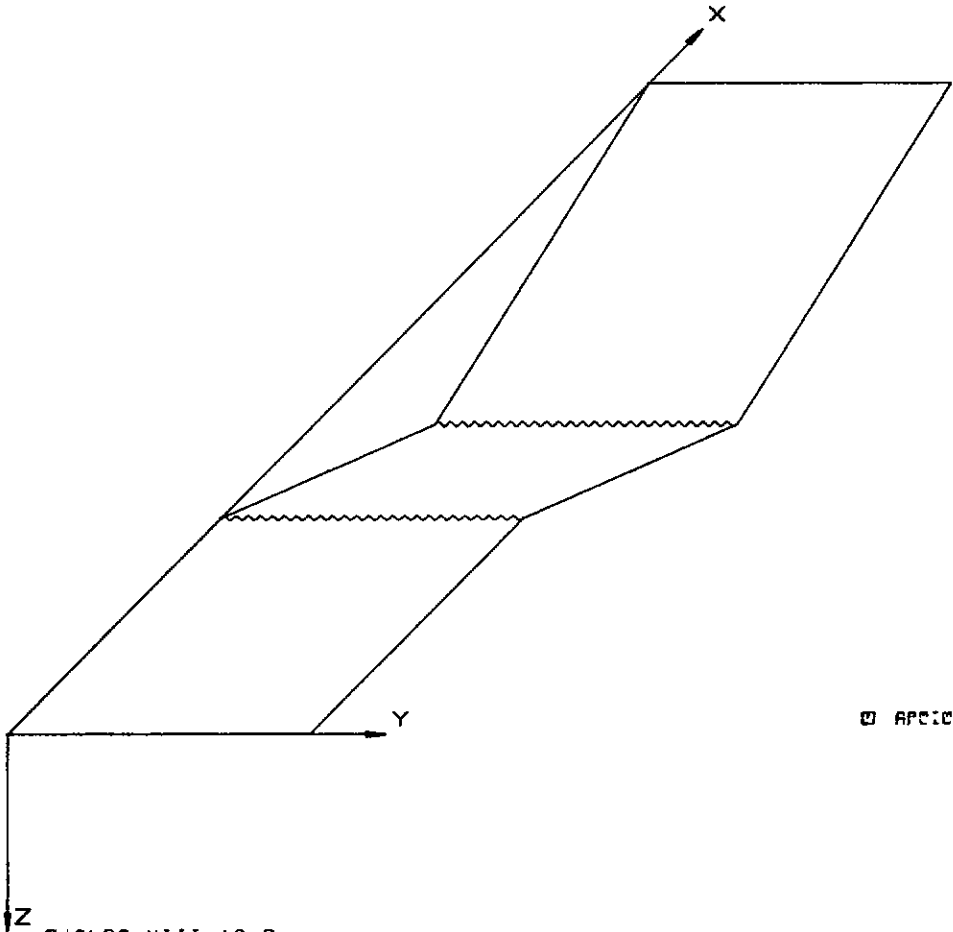
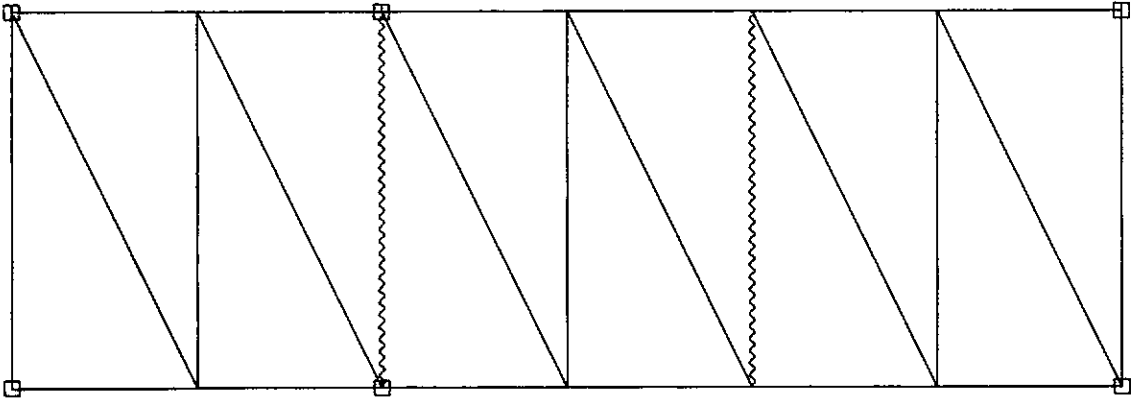
A finalidade desse último exemplo é apenas a de melhor mostrar como processar um exemplo de análise de adaptação da estrutura às cargas aplicadas, já que neste caso particular, o colapso estático é mesmo o mais crítico, figuras (VIII.13.a, b, c, d, e, f, g, h).



□ APCIC

FIGURA VIII.13-A
LAJE RETANGULAR COM DOIS VÃOS DESIGUAIS
COLAPSO ESTÁTICO (CARGAS PROPORCIONAIS)

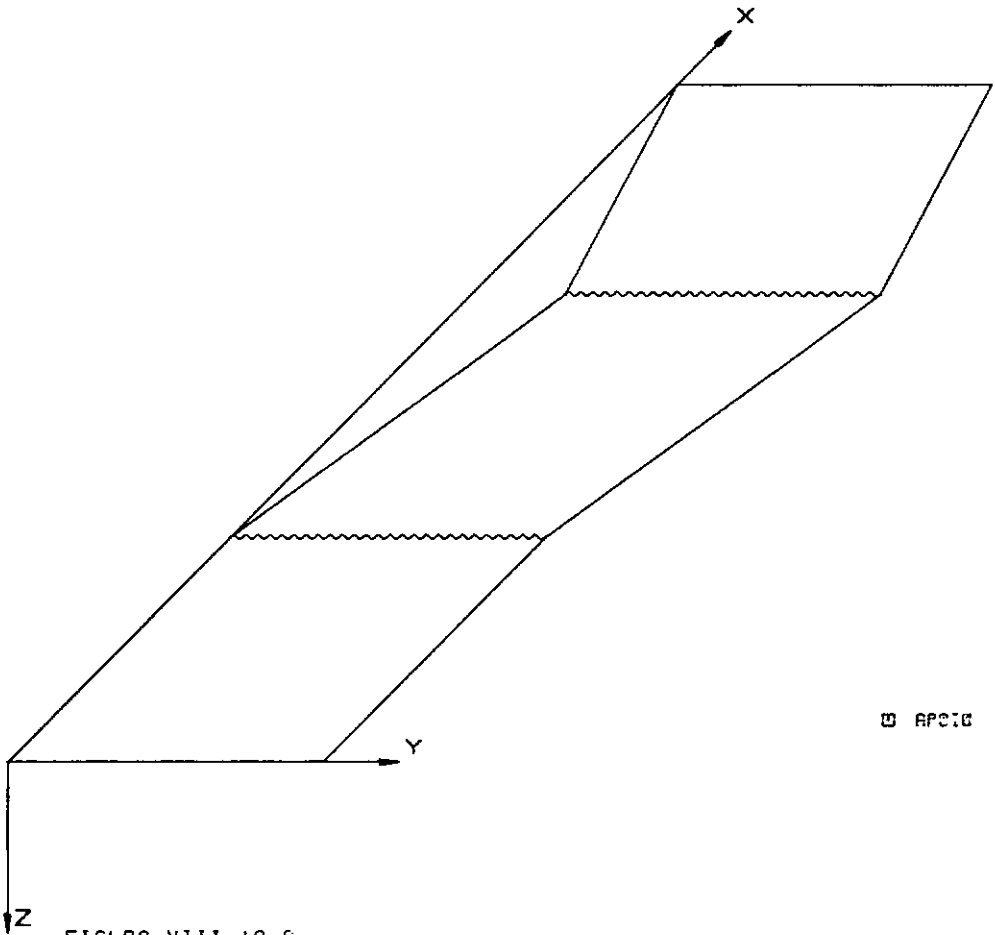
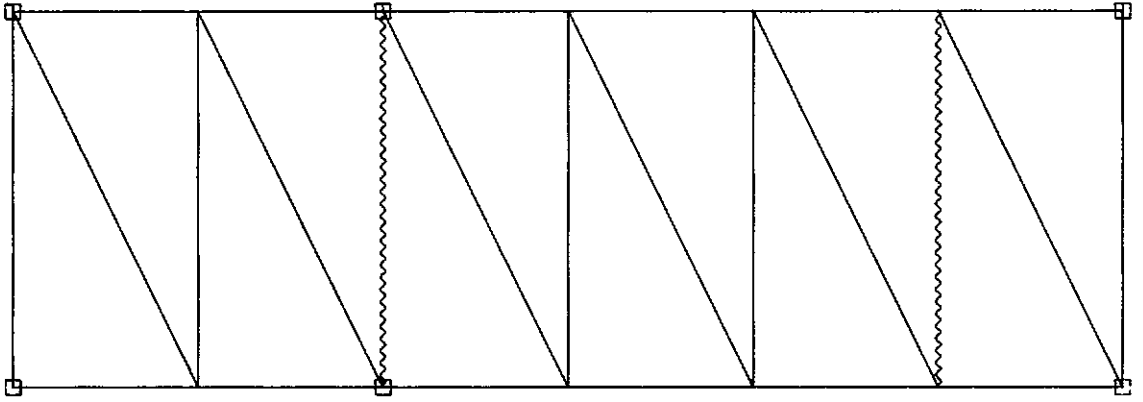
FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE DO VÃO 1
FATOR DE COLAPSO: NUMÉRICO = 12.00



APCIC

FIGURA VIII.13.B
LAJE RE ANGULAR COM DOIS VAOS DESIGUAIS
OLAPSO ESTÁTICO (ARGAS PROPORCIONAIS)

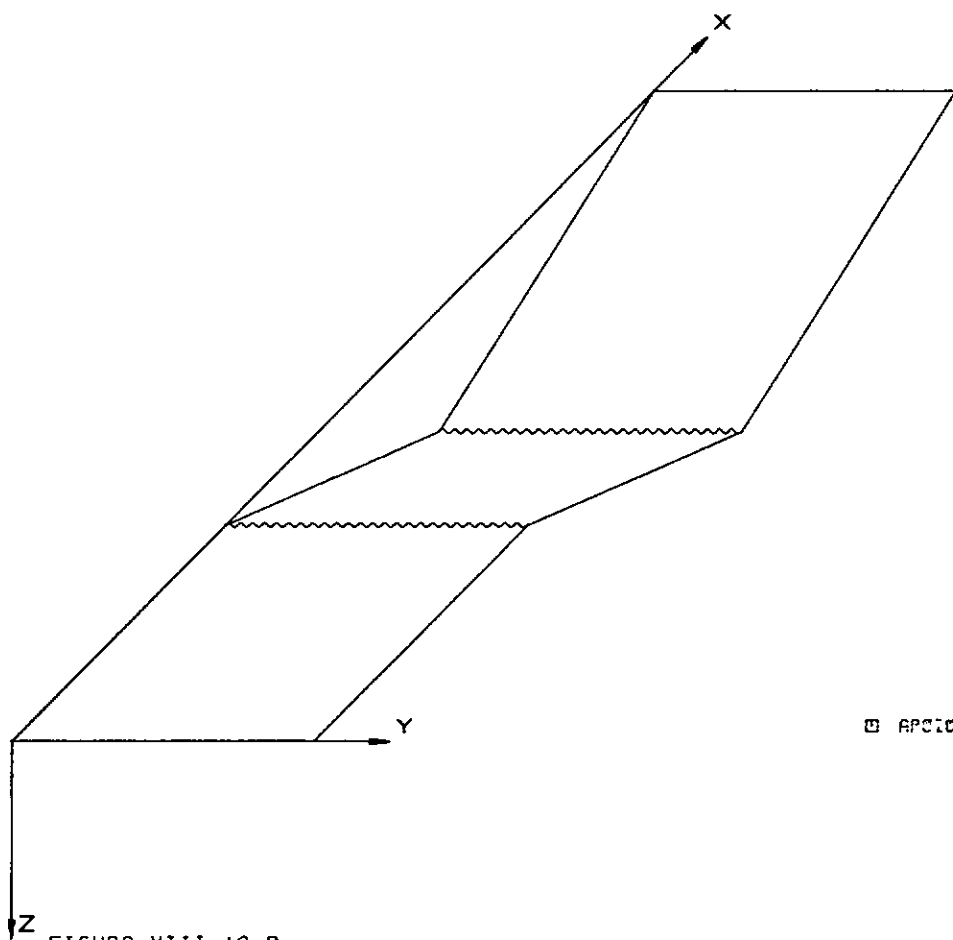
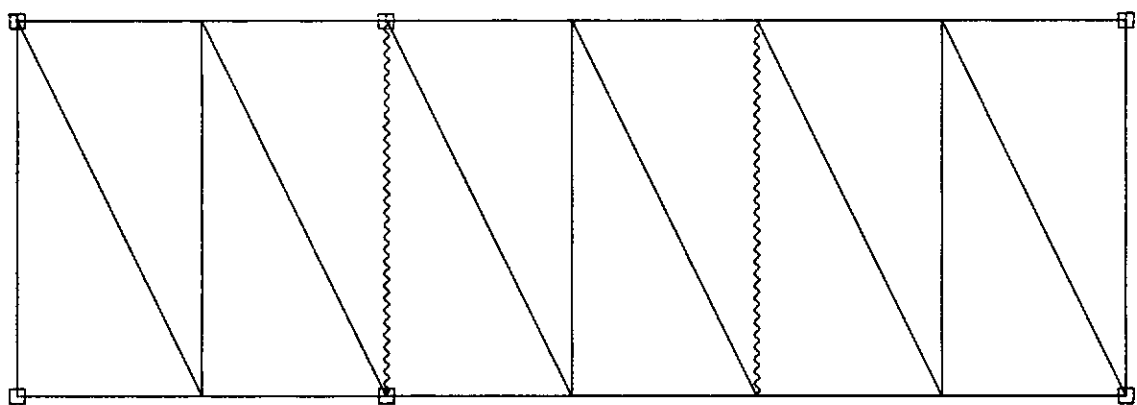
FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE DO VAO 2
FATOR DE OLAPSO: NUMÉRICO = .00



APCIG

FIGURA VIII.13.C
LAJE RETANGULAR COM DOIS VAOS DESIGUAIS
COLAPSO ESTÁTICO (CARGAS PROPORCIONAIS)

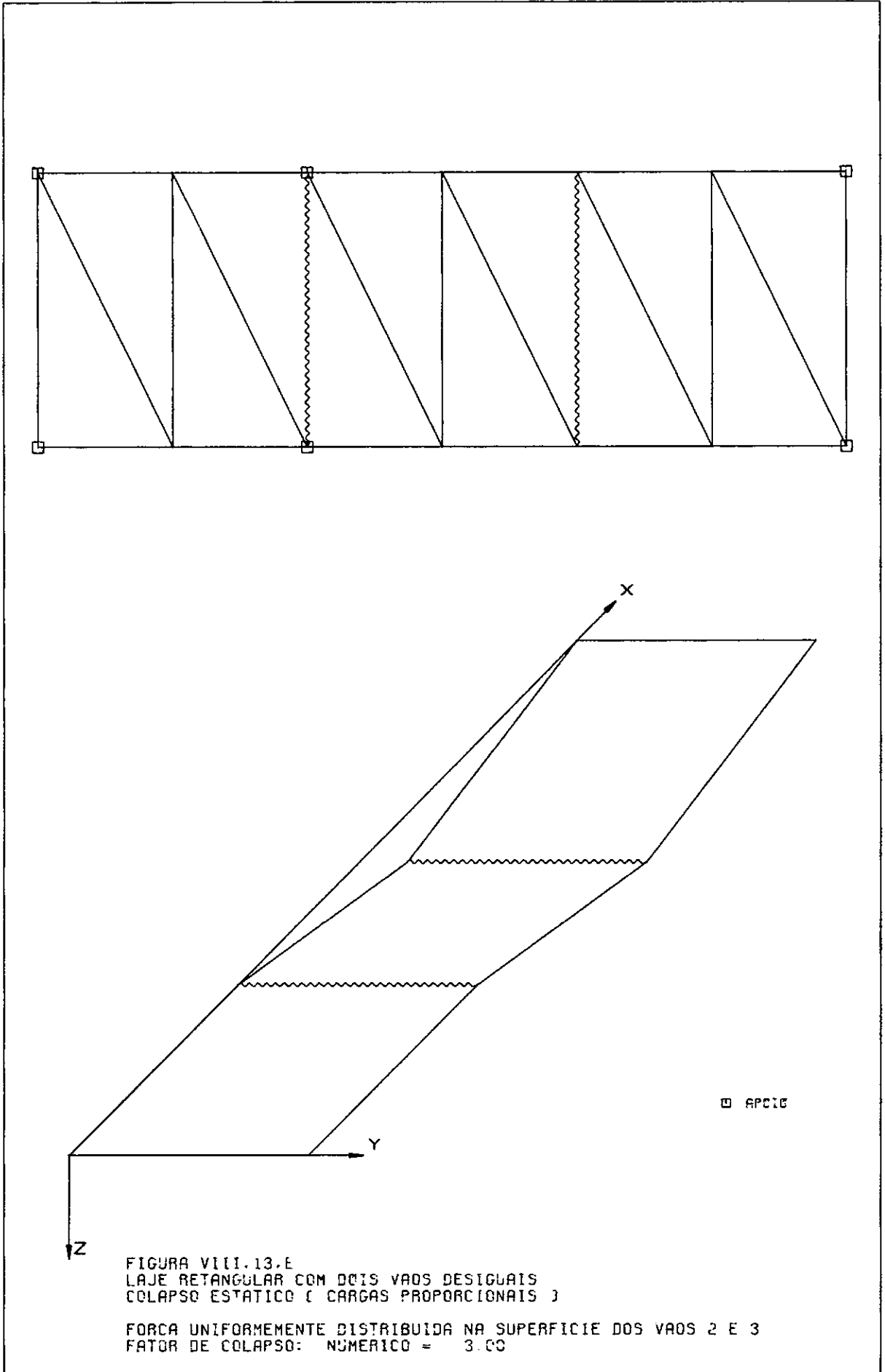
FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NA SUPERFÍCIE DO VAO 3
FATOR DE COLAPSO: NUMÉRICO = 5.00



APCIC

FIGURA VIII.13.D
LAJE RETANGULAR COM DOIS VAOS DESIGUAIS
COLAPSO ESTÁTICO (CARGAS PROPORCIONAIS)

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE DOS VAOS 1 E 2
FATOR DE COLAPSO: NUMÉRICO = 6.00



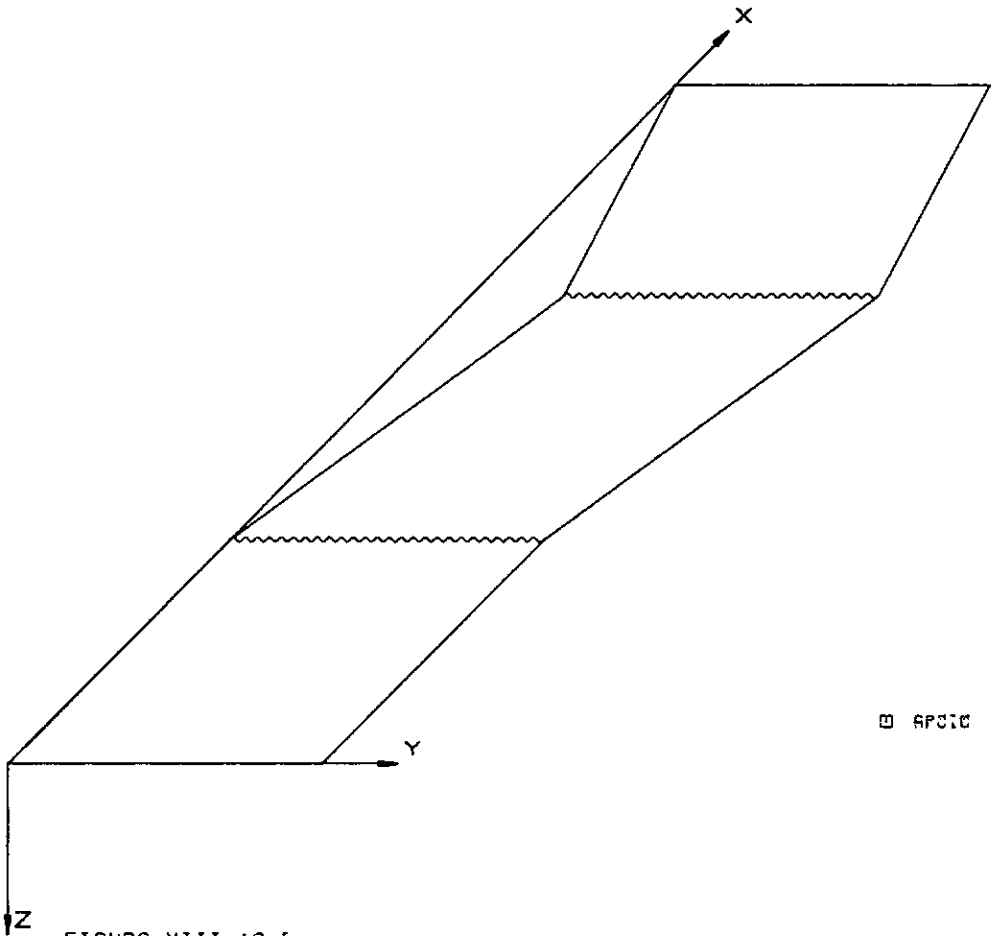
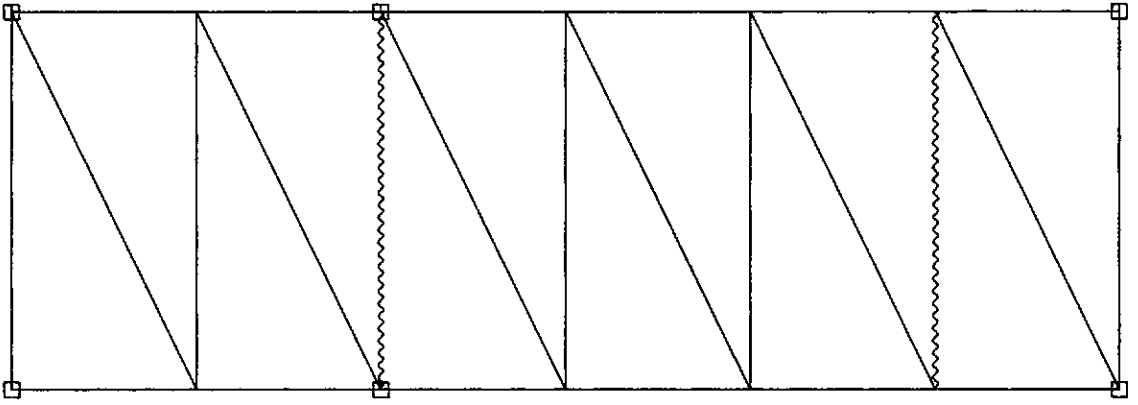
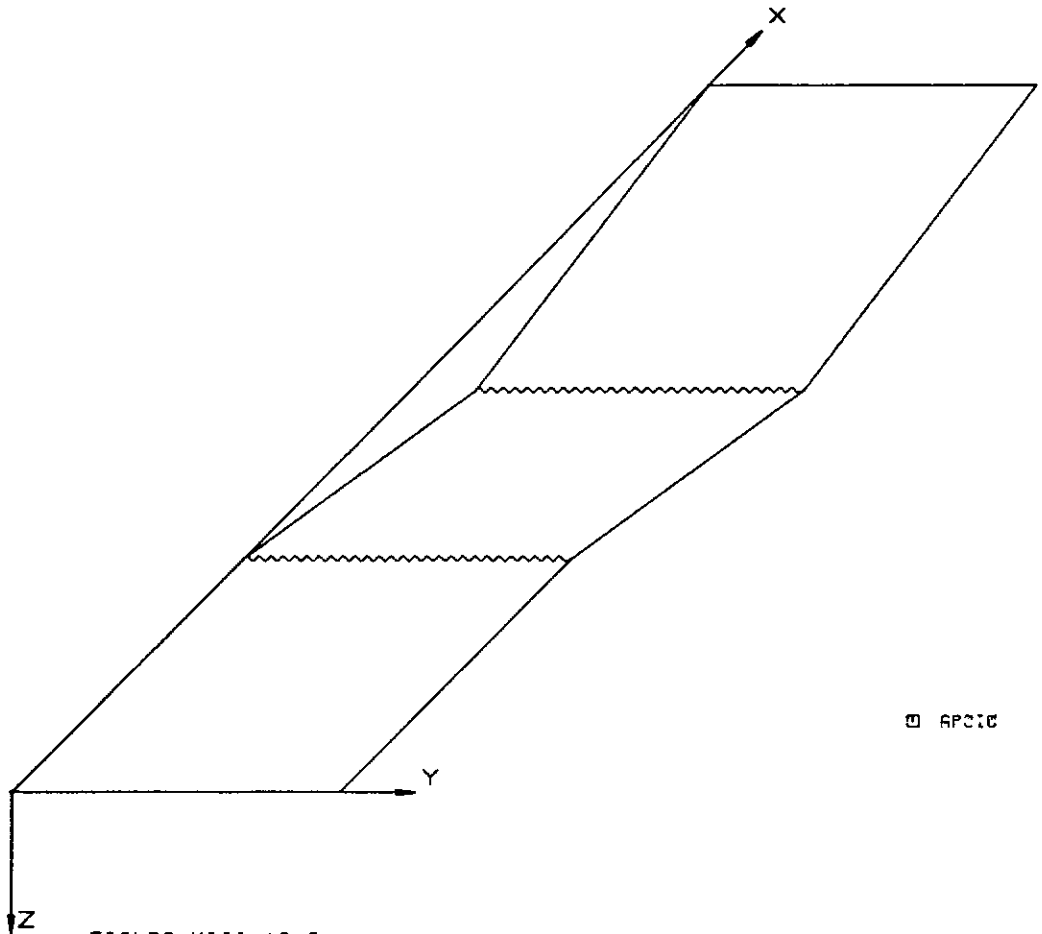
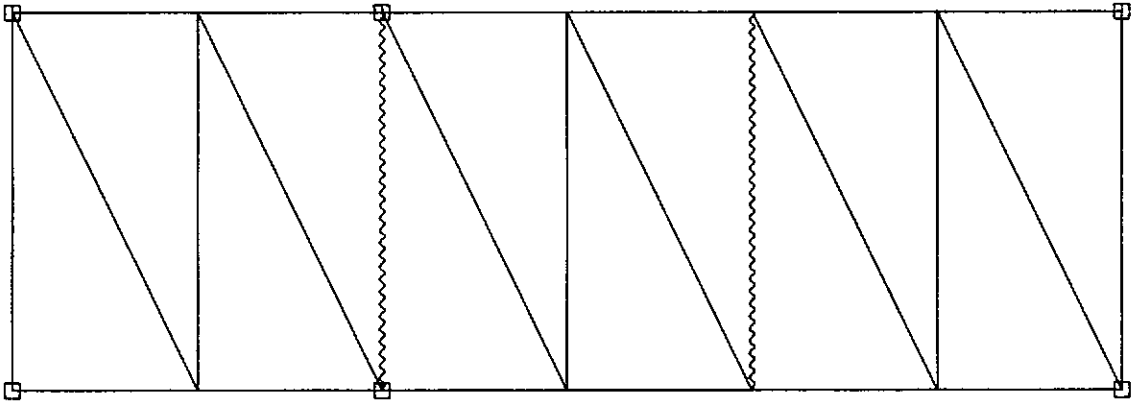


FIGURA VIII.13.F
LAJE RETANGULAR COM DOIS VAOS DESIGUAIS
COLAPSO ESTÁTICO (CARGAS PROPORCIONAIS)

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE DOS VAOS 1 E 3
FATOR DE COLAPSO: NUMÉRICO = 5.00



APCIC

FIGURA VIII.13.C
LAJE RETANGULAR COM DOIS VAOS DESIGUAIS
COLAPSO ESTÁTICO (CARGAS PROPORCIONAIS)

FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE DOS DOIS VAOS
FATOR DE COLAPSO: NUMÉRICO = 3,00

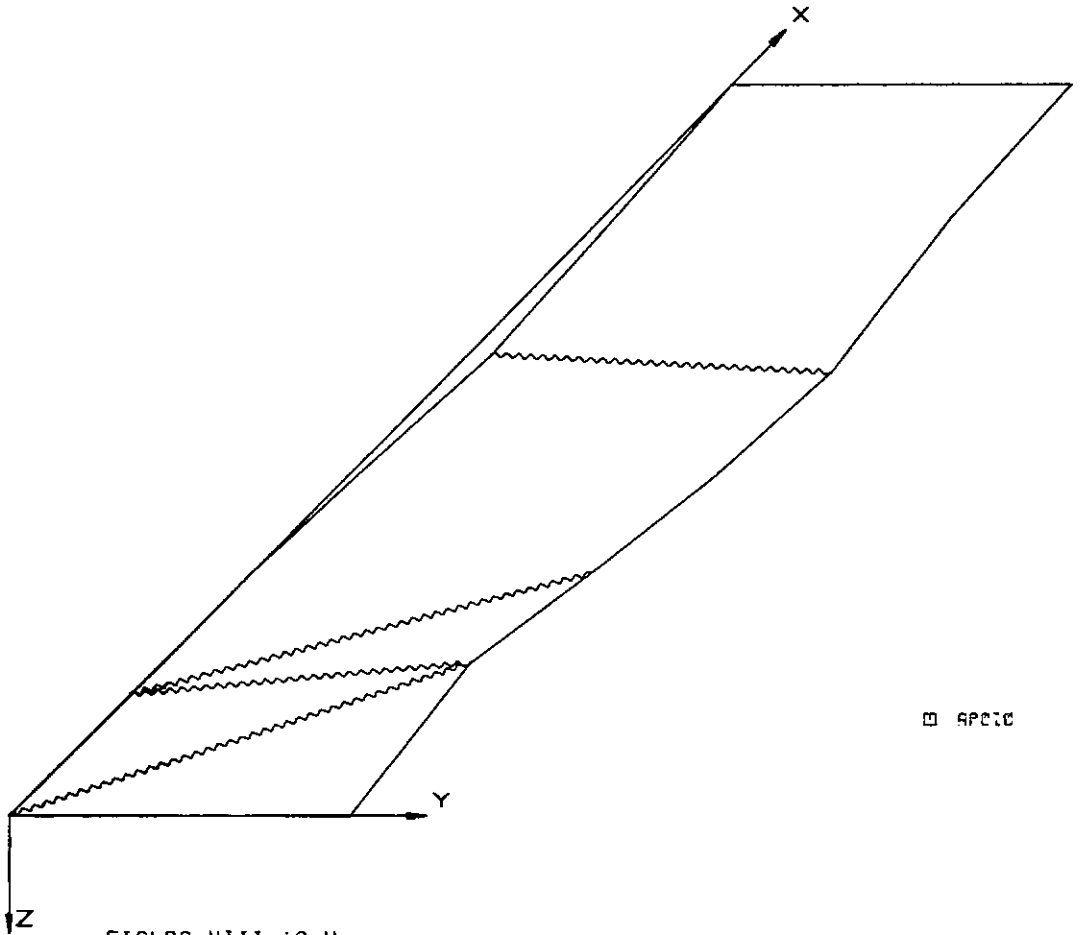
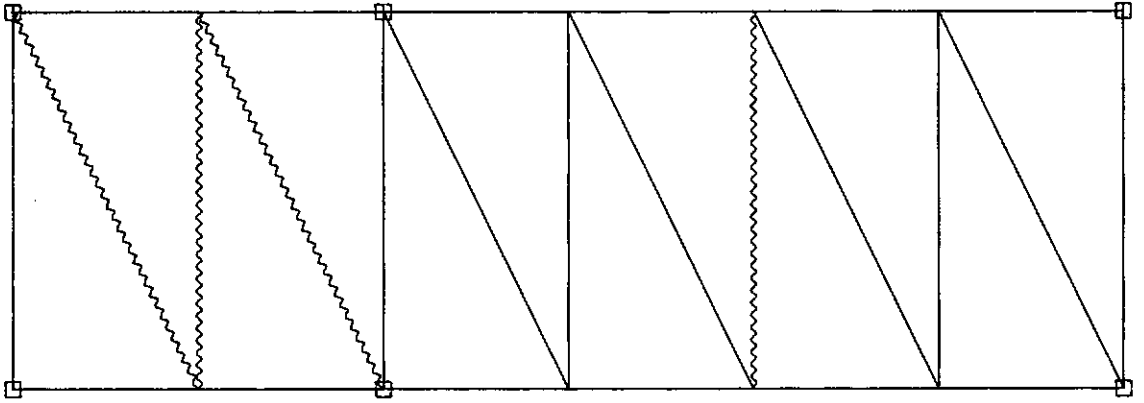


FIGURA VIII.13.H
LAJE RETANGULAR COM DOIS VAOS DESIGUAIS
COMPORTAMENTO DA ADAPTAÇÃO DA ESTRUTURA

FORÇAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS NOS VAOS
FATOR LIMITE DE ADAPTAÇÃO: NUMÉRICO = 4.07

CAPÍTULO IX
CONCLUSÕES, DISCUSSÕES, RECOMENDAÇÕES E
SUGESTÕES PARA NOVOS ESTUDOS

Ao longo de todo esse trabalho as principais características e restrições do modelo proposto foram mostradas e discutidas; contudo, alguns pontos merecem um maior destaque. O número reduzido de graus de liberdade por ponto nodal e a definição simples do critério de escoamento (ruptura) podem diminuir significativamente o esforço computacional comparativamente com elementos finitos convencionais para a flexão de placas e adequados à análise elasto-plástica, FACCIOLI[29], DA_FONSECA[30], desde que se defina a malha de maneira criteriosa e racional, especialmente levando-se em conta que a direção das linhas de ruptura influencia muito mais a qualidade da resposta do que o número de elementos ou pontos nodais utilizados na modelagem.

Ao contrário da aproximação através do funcional, CHAN[31], o modelo proposto parte da formulação das matrizes de interpolação e rigidez a nível de elementos, tornando-se transparente e totalmente consistente com a metodologia tradicional dos elementos finitos; além do fato de todas as variáveis terem um significado físico simples.

No que se refere à implementação computacional, devido à forma de recorrência, não são montadas as matrizes de rigidez ao nível dos elementos, e ainda mais, somente são calculadas as contribuições efetivas à matriz de rigidez a nível da estrutura como um todo.

Quando a malha não contém a configuração de colapso correta, o modelo cria mecanismos simples, sob a forma de painéis, mostrando, por vezes, através da direção das charneiras rompidas e/ou plastificadas a tendência para a configuração de ruptura; dessa forma, dentro das possibilidades da malha, pode-se ter uma boa idéia de como melhorá-la de maneira a aproximar-se cada vez mais do mecanismo de colapso correto. Entretanto, quando a configuração de colapso obtida pelo modelo não está próxima da analítica, a diferença entre o fator de colapso fornecido e o teórico nem sempre é pequena em termos de engenharia prática. Dessa maneira, é importante que se tenha a priori uma idéia do mecanismo de ruptura, embora isto não seja indispensável, pois é possível a atualização contínua da malha de modo a convergir para uma estimativa mais real do fator de colapso através de, por exemplo, um processo conhecido como *formulação hierárquica*, que propõe o refinamento da malha ou do polinômio característico baseado na análise de erros, RIBEIRO[32].

Apesar de mencionado no presente trabalho, a influência da relação momento versus curvatura dada para a lei constitutiva não é significativa para a definição da configuração e do fator de colapso quando de uma análise elasto-plástica. Ainda como vantagem do elemento-charneira existe

a consideração das características do material através de uma curva escalar que pode ser fornecida para cada elemento ou para um grupo de elementos, tornando a análise não-linear mais simples e, evidentemente, computacionalmente mais eficiente. Esse fato é bastante útil na formulação da análise dinâmica, quando o comportamento histerético pode ser facilmente introduzido.

A análise de lajes com espessura variável ou com armaduras não-uniformes pode ser feita com a mesma facilidade que se estuda a maioria dos casos analíticos apresentados pela Teoria das Linhas de Ruptura. Desnecessário enfatizar a oportunidade da aplicação direta do modelo a esses mesmos casos analíticos através da simples discretização da laje.

Um estudo interessante pode ser feito em problemas não-lineares associados à análise de colapso plástico. A equação (V.01) refere-se ao estado inicial indeformado da estrutura, como em qualquer análise linear elástica comum. Segue-se que o mecanismo de colapso associado ao fator λ_c deve ser estritamente visto como um deslocamento infinitesimal real a partir do estado inicial. Os vetores $\delta\psi$ e δu que definem esse deslocamento satisfazem às equações de compatibilidade (IV.30), isto é,

$$\delta\psi = \underline{H}^T \delta u \quad (\text{IX.01})$$

onde \underline{H} é a mesma matriz calculada para a geometria indeformada da estrutura. Se um deslocamento finito real ocorre, então a geometria muda e, assim, as equações de equilíbrio

(IV.31) não são mais estritamente verdadeiras. Entretanto, se H for alterada de forma a relacionar-se com a geometria deformada, então uma nova solução de (V.01) pode ser obtida fornecendo o valor de λ_c associado ao estado deformado. Pela repetição desse processo pode-se traçar um quadro completo de como o fator de ruptura varia enquanto a estrutura rompe. O interesse desse caso relaciona-se ao fato do mecanismo de colapso algumas vezes mudar à medida que as deformações da estrutura aumentam.

Uma extensão imediata da formulação aqui apresentada pode ser feita ao problema da otimização estrutural. Em geral, a determinação do projeto estrutural ótimo é complexa e ultimamente tem sido objeto de muitas pesquisas. A colocação de certos problemas de projeto plástico sob a forma de programação linear envolve um número de hipóteses de linearização que devem ser mantidas em mente quando do acesso às soluções numéricas. Entretanto, um problema de programação linear é tão mais fácil de resolver do que um não-linear que um ótimo aproximado baseado na teoria linearizada pode ser "melhor", no sentido de custos globais, do que uma solução mais "exata".

O problema que se considera normalmente é aquele de escolher dimensões ou características geométricas de uma dada estrutura de modo a ter um certo fator de colapso sob determinado carregamento fixado ou variável. Em geral, existirão vários projetos atendendo a esse critério. Para se encontrar uma solução única impõem-se a condição de que o projeto deva ser, de algum modo, o melhor. O critério prá-

tico adotado pelo engenheiro para selecionar o "melhor" projeto seria, normalmente, o custo; contudo, os custos reais são, freqüentemente, funções não-lineares e descontínuas das variáveis de projeto. Escolhe-se, então, o peso da estrutura como a função que define o seu mérito. Explícitando-o em função das características que se quer otimizar pode-se, juntamente com as considerações do projeto plástico, colocar o problema sob a forma de programação linear e, resolvendo-o, encontrar-se o projeto ótimo.

Seja, por exemplo, escolher uma seção transversal de um ou mais elementos de pórtico plano ou treliça de uma dada estrutura submetida a um esforço constante. Considerando-se o peso linear do membro i dado por:

$$w_i = \ell_i \alpha_i \quad (\text{IX.02})$$

onde

$$\alpha_i = \rho_i A_i \quad (\text{IX.03})$$

e sendo ρ_i o peso específico do material,
 A_i a área da seção transversal e
 ℓ_i o comprimento do elemento,

o peso total da estrutura será

$$W = \sum_i w_i = \underline{\ell}^T \underline{\alpha} \quad (\text{IX.04})$$

Tomando-se, agora, por aproximação, o momento resistente último em cada elemento como função linear do parâmetro α_i apropriado, pode-se escrever:

$$\tilde{M}_r^I = \tilde{B}^I \alpha \quad (\text{IX.05.a})$$

$$\tilde{M}_r^S = \tilde{B}^S \alpha \quad (\text{IX.05.b})$$

onde \tilde{B}^S e \tilde{B}^I relacionam o peso linear dos elementos aos respectivos momentos resistentes últimos. Assim, o problema de programação linear a resolver é:

Minimizar

$$W = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tilde{e}^T \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{M} \\ \alpha \end{array} \right\} \quad (\text{IX.06.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{H} & \tilde{0} \\ \tilde{I} & \tilde{B}^I \\ -\tilde{I} & \tilde{B}^S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{M} \\ \alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{f} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{array} \right\} \quad (\text{IX.06.b})$$

Para considerar-se o caso de cargas variando entre certos limites, toma-se \tilde{f} como sendo uma combinação linear de certos sistemas básicos de carregamento (\tilde{f}_i), mantendo-se, contudo, as restrições impostas pela linearidade:

$$\tilde{f} = \beta_i \tilde{f}_i \quad (\text{IX.07})$$

Combinando-se várias cargas \tilde{f}_i segundo uma matriz \tilde{F} , chega-se a

$$\underline{f} = \underline{F} \underline{\beta} \quad (\text{IX.08})$$

Imaginando-se que os multiplicadores β_i estejam restringidos por algum sistema de restrições lineares

$$\underline{R} \underline{\beta} \leq \underline{f} \quad (\text{IX.09})$$

o problema a solucionar é, então,

Minimizar

$$W = \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{e}^T & \underline{0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \underline{M} \\ \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{array} \right\} \quad (\text{IX.10.a})$$

submetido a

$$\left[\begin{array}{ccc} \underline{H} & \underline{0} & -\underline{F} \\ \underline{I} & \underline{I} \underline{B} & \underline{0} \\ -\underline{I} & \underline{S} \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{R} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{M} \\ \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{f} \end{array} \right\} \quad (\text{IX.10.b})$$

Essa aproximação produz um projeto que não romperá sob qualquer carga atuando isoladamente entre os limites prescritos. Entretanto, não garante o mesmo para uma seqüência qualquer de cargas atuando dentro desses limites. Esse tipo de projeto teria que ser feito através da análise do comportamento de adaptação da estrutura às cargas, também já visto neste trabalho.

Em adição às hipóteses de linearização mencionadas anteriormente considerou-se que os parâmetros de projeto (\underline{g}) pudessem variar continuamente. Isso claramente limita a

utilidade da aproximação quando se considera as estruturas, tendo em vista, por exemplo, que as seções de aço vêm sempre padronizadas. Essa limitação pode ser superada pela técnica conhecida como *programação inteira*, mas a sua complexidade torna-a de valor prático duvidoso.

Como sugestões para futuras pesquisas, aparecem:

- o estudo de um controle de ductilidade da seção que, conforme já foi enfatizado, é suposto ser atendido;

- a introdução na formulação dos efeitos de membrana que aparecem nas grandes deformações, permitindo assim a consideração de esforços axiais e a generalização do modelo também para a análise de cascas;

- o estudo criterioso da relação entre a rotação dos elementos e a curvatura da laje, visto ser esta fundamental para que se possa corrigir os deslocamentos nodais e assim implementar a análise dinâmica;

- a verificação da possibilidade de utilizar-se o modelo no estudo da flambagem de placas;

- a extensão da metodologia a elementos finitos mais sofisticados e equações de restrição generalizadas através da construção de superfícies de colapso dos momentos m_x , m_y e m_{xy} com a vantagem de poder levar em conta os efeitos de torção;

■ o estudo da possibilidade da inclusão do Modelo de Subcamadas[33] nesse tipo de formulação de modo a poder se considerar materiais rígido-plásticos com endurecimento na Programação Linear;

■ a formulação de um elemento finito adequado ao estudo de problemas da Mecânica dos Solos, por exemplo, fundações, através do enfoque dado nesse trabalho;

Como se pode ver, apesar das incursões no campo da análise limite via programação linear serem bastante recentes, a vastidão de possibilidades indica um futuro promissor. Evidentemente existem problemas que precisam ser melhor estudados e, conseqüentemente, solucionados, especialmente no que se refere às operações matriciais nos algoritmos de programação linear; contudo, com o desenvolvimento rápido e contínuo da tecnologia de hardware e software computacional, veja-se os processadores vetoriais, este fator não parece ser de forma alguma restritivo. Mesmo assim, grande número de pesquisadores tem se dedicado a esse estudo ultimamente e excelentes resultados têm sido obtidos. É um novo horizonte que se abre em termos de um melhor, mais racional e mais econômico critério de dimensionamento das estruturas e que está a um passo da tão almejada otimização estrutural.

APÊNDICE A**CURVA APROXIMADA MOMENTO VERSUS CURVATURA PARA SEÇÕES
RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO COM ARMADURA DUPLA**

Seja a seção transversal retangular de concreto armado com armadura dupla da figura (A.01) submetida à flexão pura. O objetivo é substituir a curva real por uma curva aproximada que bem defina a relação entre o momento fletor atuante e a curvatura da seção. Segundo estudos de BIGNON [16], a curva que melhor se apresentou é composta de três trechos lineares que representam fases distintas por que passa a seção e, conseqüentemente, as tensões durante a ação gradativa do aumento de carga, conforme pode ser visto na figura (A.02). Conhecendo-se, então, os três pontos que definem o limite de cada trecho e sabendo-se que, inicialmente, a seção encontra-se totalmente descarregada, tem-se a curva aproximada perfeitamente definida.

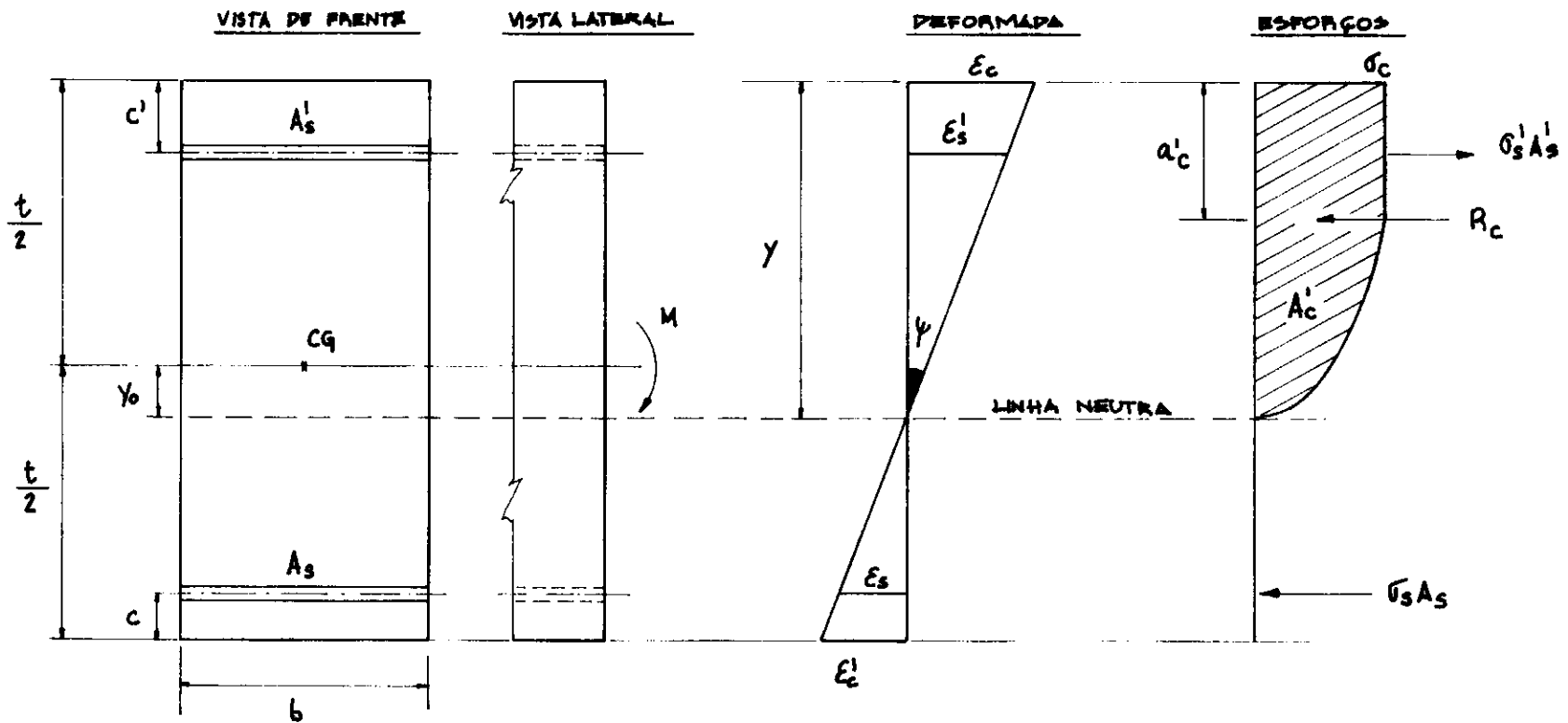
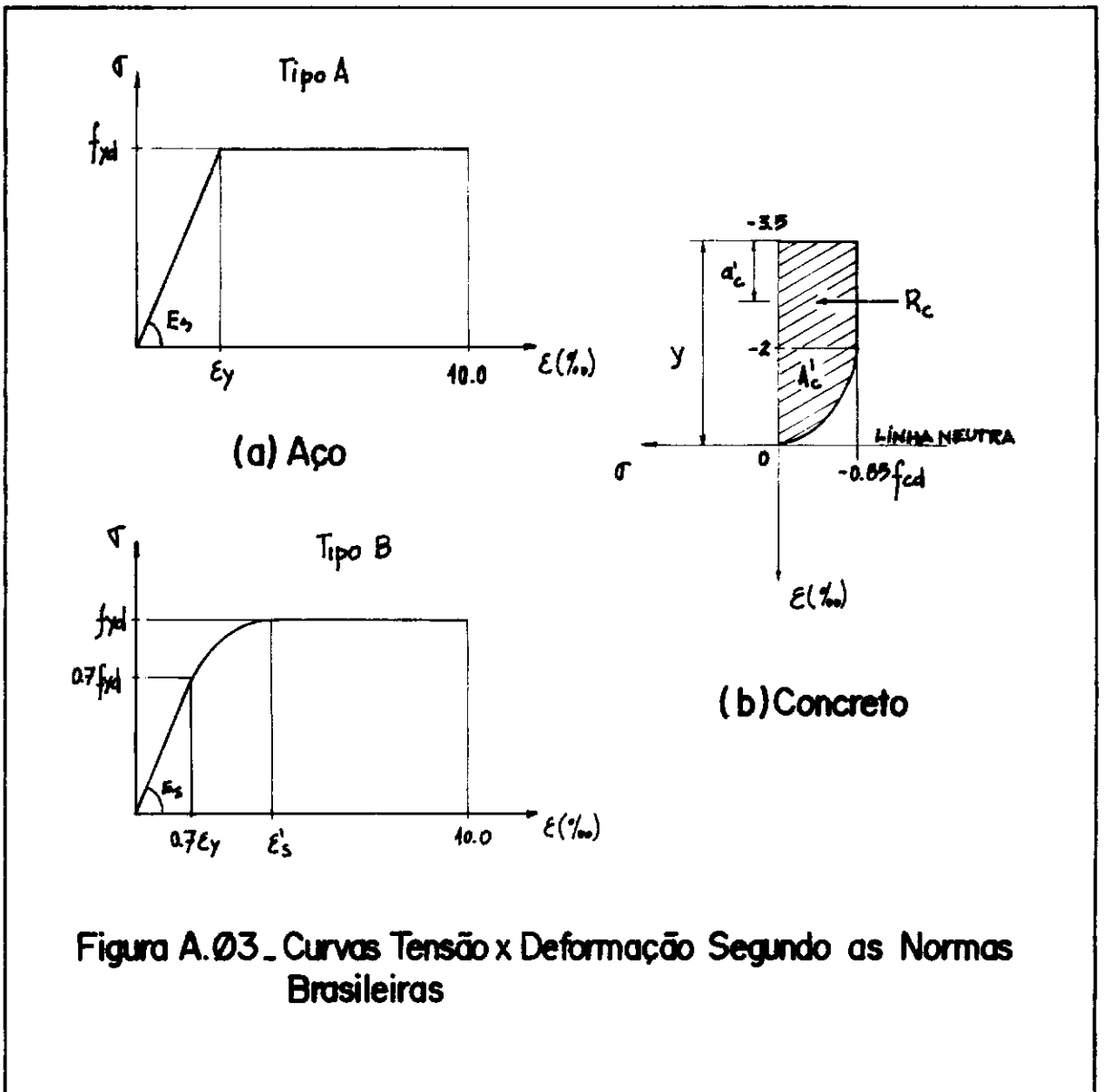
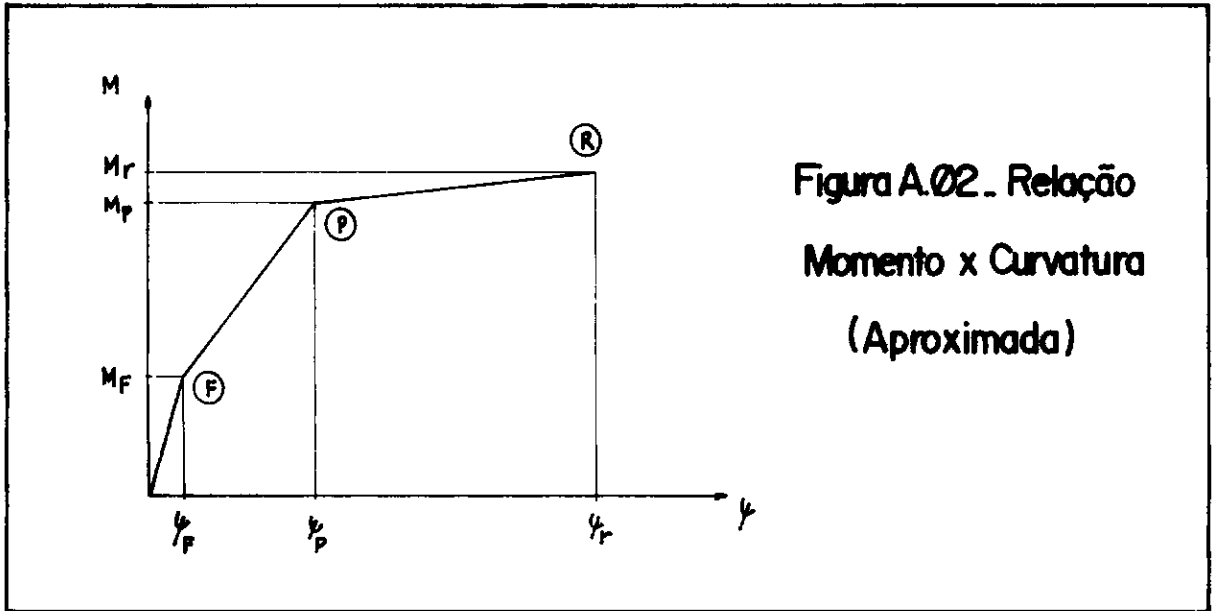


Figura A.01_ Seção Transversal Retangular de Concreto Armado com Armadura Dupla



A.1 - Os Três Pontos que Definem a Curva

A.1.1 - O Ponto F: a Primeira Fissura do Concreto Tracionado

No início do carregamento, quando a solicitação externa é pequena, mantém-se intacta a zona tracionada do concreto, podendo, assim, ser levada em consideração no cálculo da resistência final. Desde o início até o ponto limite F , quando ocorrem as primeiras fissurações do concreto, valem as leis gerais da Resistência dos Materiais, inclusive a *Lei da Homogeneização*. Nessa fase, a profundidade da linha neutra pode ser determinada pela condição de passagem pelo centro de gravidade da seção homogeneizada, conforme atesta o *Teorema dos Momentos Estáticos*, garantindo ser nulo o momento estático em relação à posição da linha neutra. Homogeneizar a seção nada mais é do que substituir-se as armaduras por seções de concreto equivalentes da forma

$$A_{sc} = \alpha_e A_s \quad (A.01.a)$$

$$A'_{sc} = \alpha_e A'_s \quad (A.01.b)$$

onde

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (A.01.c)$$

sendo E_s o módulo de elasticidade longitudinal do aço e E_c o

módulo de elasticidade longitudinal na origem do diagrama tensão-deformação de um ensaio de compressão no concreto armado, majorado eventualmente para incluir os efeitos da velocidade de deformação. Assim, a profundidade da linha neutra é dada por

$$y = y_0 + \frac{t}{2} \quad (\text{A.02.a})$$

onde

$$y_0 = \frac{A_{sc} \left[\frac{t}{2} - c \right] - A'_{sc} \left[\frac{t}{2} - c' \right]}{A_c + A_{sc} + A'_{sc}} \quad (\text{A.02.b})$$

sendo

$$A_c = b t \quad (\text{A.02.c})$$

Dessa forma, pode-se definir a rigidez nesse trecho como sendo igual à rigidez elástica da seção homogeneizada, ou seja,

$$C_1 = E_c I \quad (\text{A.03.a})$$

onde

$$I = I_0 + A_c y_0^2 + A_{sc} (t - c - y)^2 + A'_{sc} (y - c')^2 \quad (\text{A.03.b})$$

e

$$I_0 = \frac{b t^3}{12} \quad (\text{A.03.c})$$

A curvatura de fissuração é calculada considerando-se a sua correspondência ao estado no qual o bordo tracionado do concreto alcança o alongamento máximo permitido ϵ_{ct} :

$$\psi_F = \frac{\epsilon_{ct}}{y} \quad (\text{A.04.a})$$

O momento de fissuração correspondente é, então, dado por

$$M_F = C_1 \psi_F \quad (\text{A.04.b})$$

Note-se que, caso se considere o concreto não resistindo a qualquer tipo de esforço de tração, isto é, sendo nulo o alongamento máximo permitido, o ponto F coincidirá com o estado inicial da seção, ou seja, com a origem da curva.

A.1.2 - O Ponto P: o Escoamento do Aço Tracionado

Com o aumento crescente da sollicitação, chega-se a um nível de tensões tal que a armadura tracionada começa a entrar em escoamento; este primeiro escoamento é o que define o ponto P . Esse ponto pode ser determinado de forma iterativa com o seguinte procedimento:

Passo 1: Fixa-se $\epsilon_s = \epsilon_y$ e $\sigma_s = f_y$, correspondentes ao início do escoamento do aço e $\sigma_c = -0.85 f_{cd}$;

Passo 2: Seja a iteração i . Inicialmente arbitra-se um valor para ϵ_c ;

Passo 3: Calculando-se a profundidade y da linha neutra e a deformação da armadura comprimida ϵ'_s tem-se, através do diagrama tensão-deformação do aço, a tensão atuante na armadura comprimida σ'_s ;

Passo 4: Calcula-se o valor do esforço normal reduzido atuante, dado por

$$N = \frac{1}{A_c \sigma_c} \left[A_s \sigma_s + A'_s \sigma'_s + A'_c \sigma_c \right] \quad (\text{A.05})$$

onde A'_c é a área de concreto comprimido na seção.

Passo 5: Se $|N|$ estiver fora de uma tolerância especificada, então corrige-se a deformação do concreto comprimido com

$$\epsilon_c^{i+1} = \epsilon_c^{i-1} - \left[\frac{\epsilon_c^i - \epsilon_c^{i-1}}{N^i - N^{i-1}} \right] N^{i-1} \quad (\text{A.06})$$

e retorna-se ao Passo 3. Caso contrário, chegou-se ao ponto de plastificação da armadura tracionada que corresponde ao esforço normal nulo.

O momento de plastificação M_p pode ser, então, calculado com

$$M_p = A'_c \sigma_c \left[\frac{t}{2} - a'_c \right] + A_s \sigma_s \left[\frac{t}{2} - c \right] + A'_s \sigma'_s \left[\frac{t}{2} - c' \right] \quad (\text{A.07.a})$$

onde

a'_c é a profundidade do ponto de aplicação da resultante da área de concreto comprimido na seção.

A curvatura correspondente é calculada com

$$\psi_p = - \frac{\epsilon_c}{y} \quad (\text{A.07.b})$$

A.1.3 - O Ponto R: a Deformação Última no Concreto Comprimido

Define-se esse ponto como aquele em que o concreto sofreu esmagamento, isto é, atingiu o encurtamento máximo permitido (ϵ_{cc}) ao mesmo tempo em que o aço atingiu o seu alongamento máximo (ϵ_{st}). Assim, a curvatura é dada por

$$\psi_r = \frac{|\epsilon_{cc}| + |\epsilon_{st}|}{t - c} \quad (\text{A.08.a})$$

e o momento de ruptura M_r calculado através da equação (A.07.a) com as tensões correspondentes às deformações desse estado.

A.2 - Os Diagramas Tensão Versus Deformação

Os procedimentos e considerações descritos no item anterior são válidos para quaisquer diagramas tensão-deformação compatíveis adotados para o aço e para o concreto. No presente trabalho, adotou-se os diagramas preconizados pelas normas brasileiras, que podem ser vistos na figura (A.03). Assim, para o aço do tipo A,

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{se } |\varepsilon_s| < |\varepsilon_y| \\ f_{yd} & \text{se } |\varepsilon_s| \geq |\varepsilon_y| \end{cases} \quad (\text{A.09.a})$$

onde

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (\text{A.09.b})$$

Para o aço do tipo B, tem-se

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{se } |\varepsilon_s| < 0,7 |\varepsilon_s| \\ \frac{f_{yd}}{10} \left[\frac{f_{yd}}{E_s} + \sqrt{\left(\frac{f_{yd}}{E_s}\right)^2 + 4500 \varepsilon_s - 49} \right] & \dots \\ \dots & \text{se } 0,7 |\varepsilon_y| \leq |\varepsilon_s| \leq |\varepsilon'_y| \\ f_{yd} & \text{se } |\varepsilon_s| > |\varepsilon'_y| \end{cases} \quad (\text{A.10.a})$$

onde

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_y + 0,002 \quad (\text{A.10.b})$$

$$\bar{\varepsilon}_s = 7 - 225 \varepsilon_y \quad (\text{A.10.c})$$

Para o concreto, considerou-se o diagrama parábola retângulo conforme a figura (A.03.b). Assim, a área de concreto comprimido e a profundidade do ponto de aplicação do esforço resultante dessa área podem ser expressos, respectivamente, por

$$A'_c = k_1 y b \quad (\text{A.11.a})$$

$$a'_c = k_2 y \quad (\text{A.11.b})$$

onde

$$k_1 = \begin{cases} - \frac{\bar{\varepsilon}_c (6 + \bar{\varepsilon}_c)}{12} & \text{se } 0 \leq |\bar{\varepsilon}_c| \leq 2 \\ 1 + \frac{2}{3 \bar{\varepsilon}_c} & \text{se } 2 < |\bar{\varepsilon}_c| < 3,5 \end{cases}$$

(A.12)

$$k_2 = \begin{cases} \frac{8 + \bar{\varepsilon}_c}{4 (6 + \bar{\varepsilon}_c)} & \text{se } 0 \leq |\bar{\varepsilon}_c| \leq 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}_c + 1}{\bar{\varepsilon}_c (3 \bar{\varepsilon}_c + 2)} & \text{se } 2 < |\bar{\varepsilon}_c| < 3,5 \end{cases}$$

(A.13)

onde

$$\bar{\varepsilon}_c = 1000 \varepsilon_c \quad (\text{A.14})$$

Nas expressões (A.09,10,12,13,14) as incógnitas devem ser utilizadas com seus valores decimais reais, isto inclui, evidentemente, o sinal.

APÊNDICE B

PROVA DA DERIVAÇÃO DO MODO DE COLAPSO

O Algoritmo de Livesley converte o conjunto de equações de equilíbrio

$$\lambda \underline{f} = \lambda \underline{I} \underline{f} = \underline{H} \underline{M} \quad (\text{B.01.a})$$

numa série de equações da forma

$$\lambda \underline{*f} = \lambda \underline{*I} \underline{*f} = \underline{*H} \underline{*M} \quad (\text{B.01.b})$$

A equação (B.01.b) é o resultado de uma série de aplicações do Processo Padrão de Redução de Gauss-Jordan às linhas de \underline{I} e \underline{H} . As equações de compatibilidade correspondentes transformam-se de

$$\underline{u} = \underline{I}^T \underline{u} \quad (\text{B.02.a})$$

$$\underline{\varphi} = \underline{H}^T \underline{u} \quad (\text{B.02.b})$$

para

$$\underline{*u} = \underline{*I}^T \underline{*u} \quad (\text{B.03.a})$$

$$\underline{*}\varphi = \underline{*H}^T \underline{*u} \quad (\text{B.03.b})$$

iguais a zero, exceto por *u_k . Assim, a equação (B.04) torna-se

$$\underline{\varphi} = \text{coluna } k \text{ de } {}^*H^T {}^*u_k = \text{linha } k \text{ de } {}^*H {}^*u_k \quad (\text{B.05})$$

e a equação (B.03) leva a

$$\underline{u} = \text{coluna } k \text{ de } {}^*I^T {}^*u_k = \text{linha } k \text{ de } {}^*I {}^*u_k \quad (\text{B.06})$$

sendo esse o resultado que se desejava provar. *u_k é o multiplicador arbitrário que determina a quantidade de deformação da estrutura como um todo.

APÊNDICE C

PROCEDIMENTOS E ALGORITMOS UTILIZADOS NA IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA *CHAPLIN* PARA DETERMINAÇÃO DE CARGAS E CONFIGURAÇÕES DE COLAPSO EM LAJES

Antes e durante a implementação do programa computacional *CHAPLIN* (*C*h*A*r*n*eiras *P*l*á*sticas via *P*rogramação *L*inear), com o modelo proposto foram necessários estudos e adaptações de procedimentos que o tornassem eficiente e facilitasse o contacto com o usuário. Alguns desses procedimentos, obviamente, os mais relevantes, encontram-se neste apêndice expostos sob a forma de problemas seguindo-se-lhes as soluções encontradas.

C.1 - Obter Todas as Possíveis Charneiras a Partir dos Três Nós de um Triângulo

O objetivo aqui é o de evitar que se tenha que analisar todas as interfaces da malha de elementos de modo a fornecer corretamente os quatro (três) nós de cada elemento. Com o procedimento aqui descrito, a compatibilidade de entrada de dados com programas de elementos finitos convencionais já existentes é completa. Dados, então, três nós formando um triângulo:

Passo 1: Ordena-se crescentemente esses três nós;

Passo 2: As charneiras passíveis de serem geradas são exatamente os três lados do triângulo; dessa forma, analisa-se as seqüências de nós

| | | |
|------|------|------|
| nó 1 | nó 2 | nó 3 |
| nó 2 | nó 3 | nó 1 |
| nó 1 | nó 3 | nó 2 |

Note-se que assim, os dois primeiros nós de cada seqüência estarão sempre em ordem crescente;

Passo 3: Para cada uma das seqüências verifica-se na tabela de elementos formados se já existe a charneira que tenha como nós inicial e final os dois primeiros nós da seqüência. Se já existir, então o terceiro nó da seqüência será o quarto nó da charneira; senão, gera-se a charneira com os três nós da seqüência.

Duas observações adicionais devem ser feitas. A primeira é que os elementos gerados ficam em ordem crescente de modo a facilitar a busca; no caso do programa em questão, utiliza-se uma árvore binária pela eficiência e rapidez de armazenamento e procura. A segunda é que esse procedimento permite que muitos erros possam ser detectados; por exemplo, se ao se tentar colocar o quarto nó em uma charneira, este já existir, pode-se enviar uma mensagem de duplicidade, ou mesmo erro, nas incidências.

C.2 - Colocar os Nós 3 e 4 nas Posições Corretas a Partir da Incidência do Elemento

Conforme já foi visto anteriormente, o nó 3 do elemento-charneira deve ficar no sentido de y , isto é, a sua coordenada y deve ser positiva. Como seria absurdo exigir-se que no instante na definição das incidências nodais do elemento esse critério fosse respeitado, criou-se um procedimento de modo que os nós 3 e 4 pudessem ser dados em qualquer sentido; o próprio programa se encarrega de colocá-los nas posições corretas.

O algoritmo para tal é muito simples. Seja a figura (C.01). Os vetores que vão do nó inicial ao nó final da charneira ($\vec{12}$) e do nó inicial ao nó fornecido como sendo o nó 3 ($\vec{13}$) são dados por

$$\vec{12} = -A_{12} \vec{i} + B_{12} \vec{j} \quad (\text{C.01.a})$$

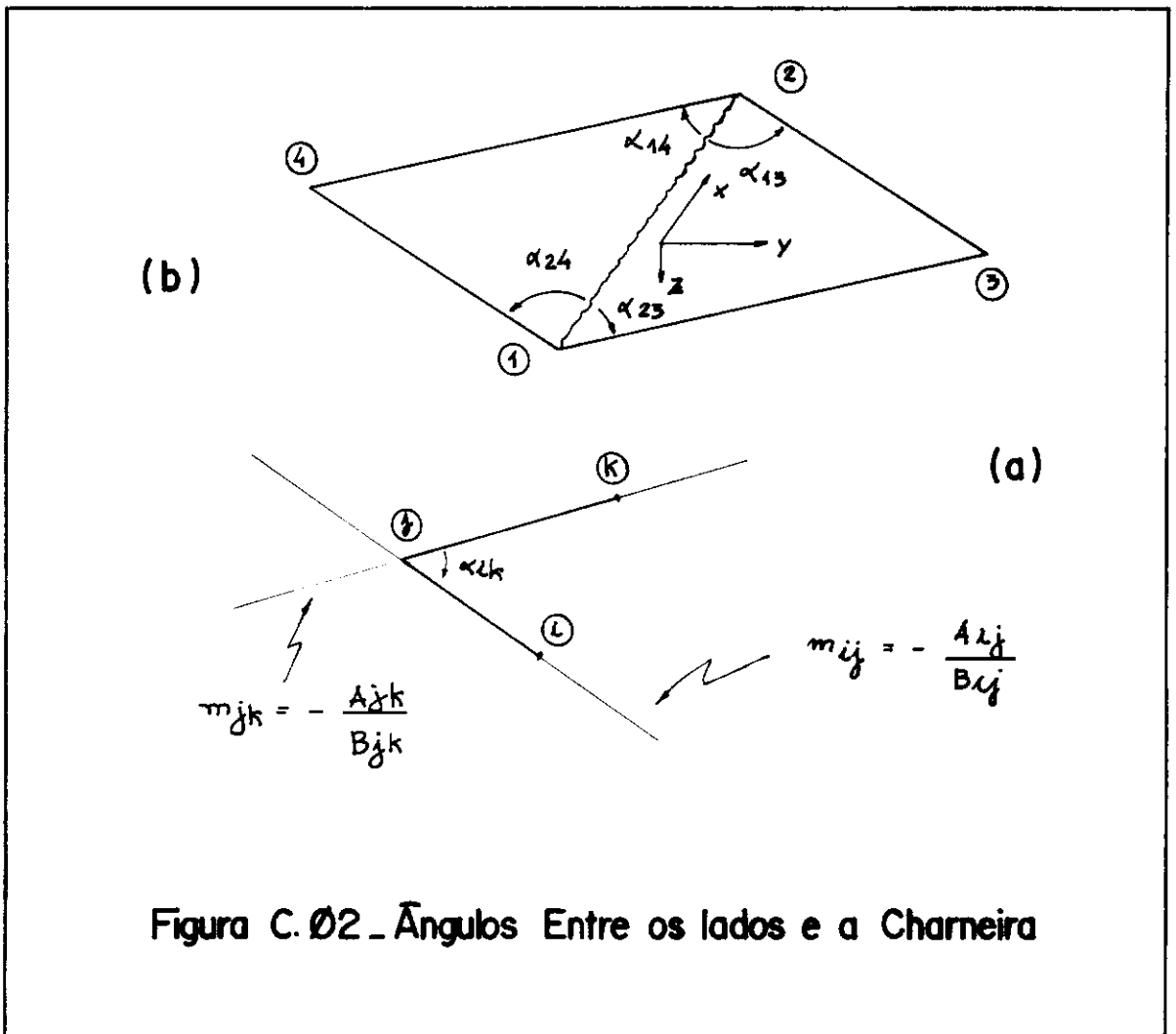
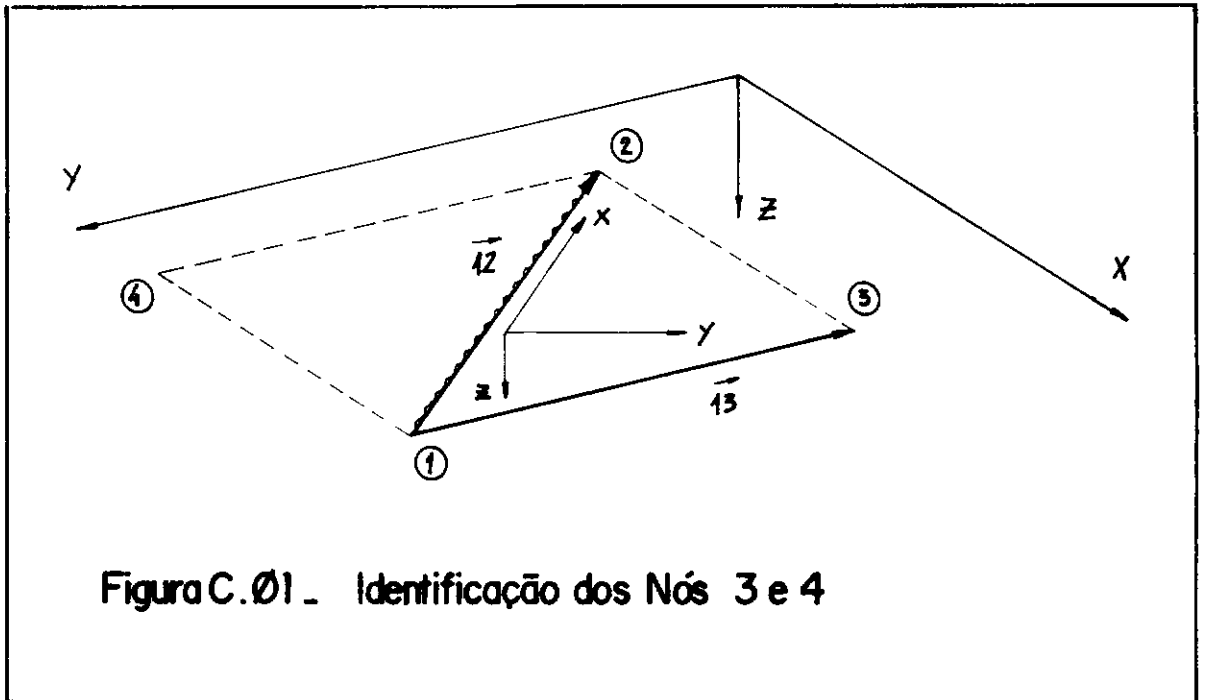
e

$$\vec{13} = -A_{13} \vec{i} + B_{13} \vec{j} \quad (\text{C.01.b})$$

onde

$$A_{ij} = Y_i - Y_j \quad (\text{C.01.c})$$

$$B_{ij} = X_j - X_i \quad (\text{C.01.d})$$



Utilizando-se o produto vetorial, gera-se um terceiro vetor perpendicular a ambos e formando com estes um triedro direto:

$$\vec{12} \times \vec{13} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -A_{12} & B_{12} & 0 \\ -A_{13} & B_{13} & 0 \end{vmatrix} = \Delta \vec{k} \quad (\text{C.02.a})$$

onde

$$\Delta = A_{13} B_{12} - A_{12} B_{13} \quad (\text{C.02.b})$$

Assim, se esse vetor gerado tem o mesmo sentido de \underline{z} (ou \underline{z}), isto é, se $\Delta > 0$, então o nó 3 realmente está no sentido de \underline{y} positivo, senão, os nós 3 e 4 estão em posições invertidas e devem ser trocados.

C.3 - Determinar os Ângulos entre os Lados do Elemento e a Charneira

Seja a figura (C.02.a). Pela trigonometria, a cotangente do menor ângulo entre duas retas \vec{ij} e \vec{jk} pode ser dada por

$$\text{cotg } \alpha_{ik} = \frac{1 + m_{ij} m_{jk}}{m_{ij} - m_{jk}} \quad (\text{C.03.a})$$

onde

$$m_{ij} = - \frac{A_{ij}}{B_{ij}} \quad (\text{C.03.b})$$

$$m_{jk} = - \frac{A_{jk}}{B_{jk}} \quad (\text{C.03.c})$$

$$A_{ij} = Y_i - Y_j \quad (\text{C.03.d})$$

$$B_{ij} = X_j - X_i \quad (\text{C.03.e})$$

$$A_{jk} = Y_j - Y_k \quad (\text{C.03.f})$$

$$B_{jk} = X_k - X_j \quad (\text{C.03.g})$$

Substituindo-se as expressões (C.03.b,c) na expressão (C.03.a), chega-se a

$$\cotg \alpha_{ik} = \frac{B_{ij} B_{jk} + A_{ij} A_{jk}}{B_{ij} A_{jk} + A_{ij} B_{jk}} = \cotg \alpha_{ki} \quad (\text{C.04})$$

Aplicando-se a equação (C.04) ao elemento-charneira da figura (C.02.b), tem-se as expressões para as cotangentes dos lados com a charneira propriamente dita:

$$\cotg \alpha_{13} = \frac{B_{12} B_{23} + A_{12} A_{23}}{B_{12} A_{23} - A_{12} B_{23}} \quad (\text{C.05.a})$$

$$\begin{aligned} \cotg \alpha_{23} &= \frac{B_{31} B_{13} + A_{31} A_{12}}{B_{31} A_{12} - A_{31} B_{12}} \\ &= - \frac{B_{12} B_{31} + A_{12} A_{31}}{B_{12} A_{31} - A_{12} B_{31}} \quad (\text{C.05.b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cotg \alpha_{14} &= \frac{B_{42} B_{21} + A_{42} A_{21}}{B_{42} A_{21} - A_{42} B_{21}} \\ &= - \frac{B_{12} B_{42} + A_{12} A_{31}}{B_{12} A_{42} - A_{12} B_{42}} \end{aligned} \quad (\text{C.05.c})$$

$$\begin{aligned} \cotg \alpha_{24} &= \frac{B_{21} B_{14} + A_{21} A_{14}}{B_{21} A_{14} - A_{21} B_{14}} \\ &= \frac{B_{12} B_{14} + A_{12} A_{14}}{B_{12} A_{14} - A_{12} B_{14}} \end{aligned} \quad (\text{C.05.d})$$

C.4 - Determinar um Possível Ponto de Intersecção entre Duas Retas

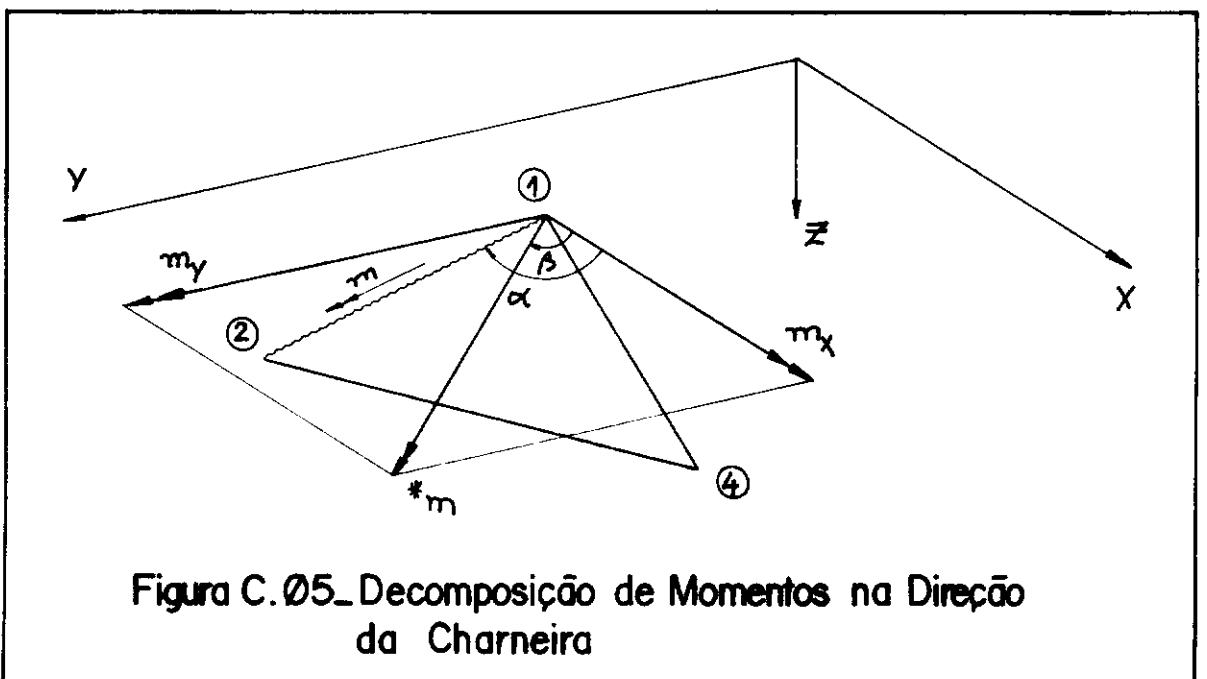
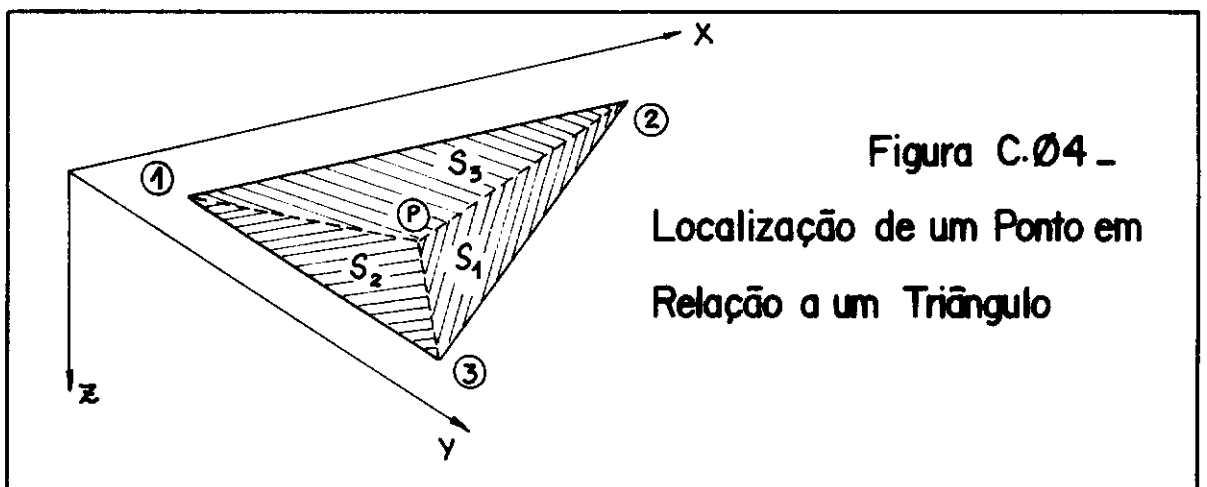
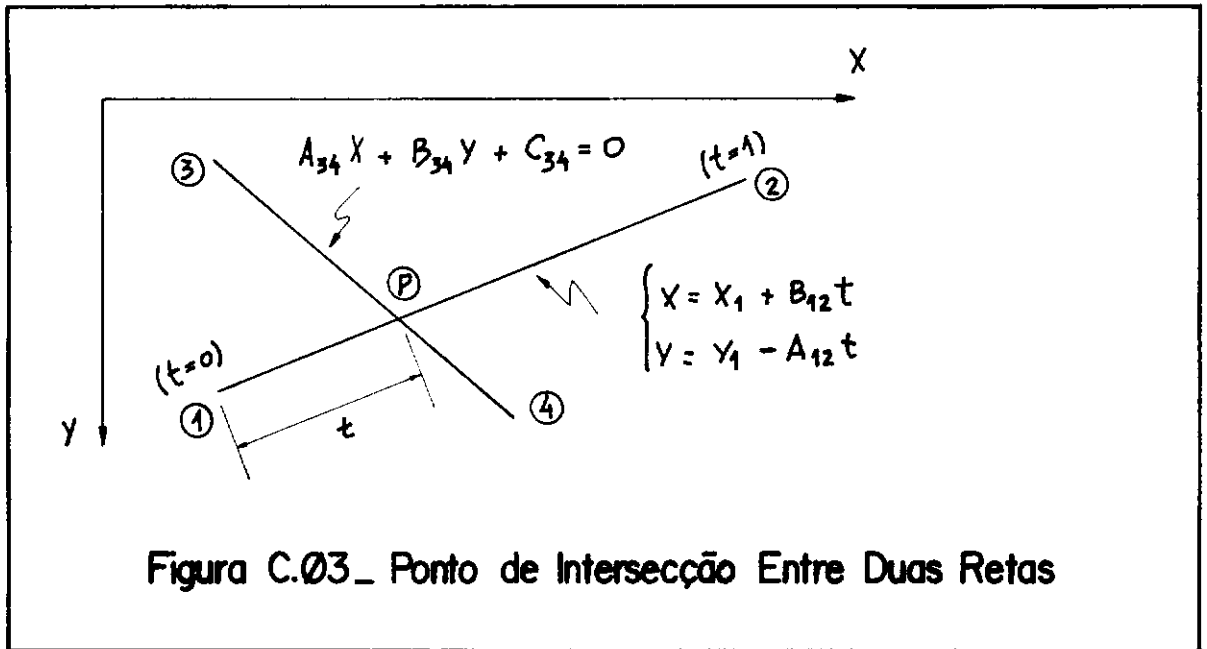
Sejam as retas $\overline{12}$ e $\overline{34}$ interceptando-se no ponto \underline{P} conforme a figura (C.03). A reta $\overline{12}$ encontra-se na forma parametrizada

$$\begin{cases} X = X_1 + B_{12} t \\ Y = Y_1 - A_{12} t \end{cases} \quad (\text{C.06.a})$$

onde

$$0 \leq t \leq 1 \quad (\text{C.06.b})$$

Note-se que, no ponto $\underline{1}$, $t = 0$ e, no ponto $\underline{2}$, $t = 1$. A equação geral da reta $\overline{34}$ é dada por



$$A_{34} X + B_{34} Y + C_{34} = 0 \quad (C.07)$$

Substituindo-se a equação (C.06.a) na equação (C.07) e colocando-se t em evidência, tem-se

$$t = - \frac{A_{34} X_1 + B_{34} Y_1 + C_{34}}{A_{34} B_{12} - B_{34} A_{12}} \quad (C.08)$$

Então, se o valor de t atender à inequação (C.06.b), o ponto de intersecção P pode ser calculado levando-se esse valor na equação (C.06.a); caso contrário, o ponto de intersecção está fora do segmento de reta $\overline{12}$, não sendo, portanto, válido para os propósitos desejados. Note-se, ainda, que o denominador nulo na equação (C.08) significa que as retas são paralelas ou coincidentes, não havendo então intersecção ou infinitas intersecções.

C.5 - Localizar um Ponto P em Relação a um Triângulo Dado

Quando se deseja um refinamento automático da malha, tendo-se definido os carregamentos em relação aos eixos de referência globais pode-se deixar por conta do algoritmo a localização do ponto de aplicação da carga e a consideração da sua contribuição para os esforços nos elementos. Um possível procedimento para a localização do ponto P , sendo dadas as suas coordenadas e os pontos que definem o triângulo, figura (C.04), está descrito a seguir.

Suponha-se, inicialmente, apenas para efeito de visualização, que o ponto P encontra-se dentro do triângulo. Unindo-o aos três vértices, define-se três áreas cujos valores podem ser calculados com

$$S_1 = \frac{1}{2} (A_{23} X_P + B_{23} Y_P + C_{23}) \quad (\text{C.08.a})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (A_{31} X_P + B_{31} Y_P + C_{31}) \quad (\text{C.08.b})$$

$$S_3 = \frac{1}{2} (A_{12} X_P + B_{12} Y_P + C_{12}) \quad (\text{C.08.c})$$

Assim:

Se $S_1 < 0$ ou $S_2 < 0$ ou $S_3 < 0$

então P está fora do triângulo

senão se $S_1 > 0$ e $S_2 > 0$ e $S_3 > 0$

então P está estritamente dentro do triângulo

senão se $S_1 = 0$

então se $S_2 = 0$

então P coincide com o nó $\underline{3}$

senão se $S_3 = 0$

então P coincide com o nó $\underline{2}$

senão P está sobre o lado $\underline{23}$

senão se $S_2 = 0$

então se $S_3 = 0$

então P coincide com o nó $\underline{1}$

senão P está sobre o lado $\underline{13}$

senão P está sobre o lado $\underline{12}$

**C.6 - Contribuição do Momento numa Direção Qualquer
ao Momento na Direção de uma Charneira**

Até agora considerou-se que as direções das armaduras fossem ortogonais e seguindo a disposição dos eixos \underline{X} e \underline{Y} ; entretanto, em muitos casos, existem outras armaduras que podem não seguir essa determinação mas cuja influência pode ser relevante para o momento resistente da charneira. O objetivo deste item é calcular a contribuição desses momentos. Seja, então, a figura (C.05). Decompondo-se o momento *m atuante numa direção β segundo as direções \underline{X} e \underline{Y} , tem-se

$$m_x = ^*m \cos \beta \quad (\text{C.09.a})$$

$$m_y = ^*m \sin \beta \quad (\text{C.09.b})$$

Pela equação (III.01') pode-se escrever

$$m_n = (^*m \cos \beta) \cos^2 \alpha + (^*m \sin \beta) \sin^2 \alpha \quad (\text{C.10})$$

Após ser trabalhada, a equação (C.10) pode ser reescrita como

$$m_n = ^*m [\sin \beta + (\cos \beta - \sin \beta) \cos^2 \alpha] \quad (\text{C.10'})$$

Sendo esta a contribuição na direção da charneira. Multiplicando-se esse momento pelo comprimento da charneira, tem-se o momento resistente total.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] VAN LANGENDOCK, T.,
Teoria Elementar das Charneiras Plásticas,
Brasil, São Paulo, Associação Brasileira de Cimento
Portland, Vols I e II, 1970.
- [02] GVOZDEV, A. A.,
"The Determination of the Value of the Collapse Load
for Statically Indeterminate Systems Undergoing
Plastic Deformations",
Int. J. Mech. Sci., Vol 1, pp 322-333, (1960),
tradução do original de 1938.
- [03] DRUCKER, D. C., GREENBERG, H. J. & PRAGER, W.,
"Extended Limit Design Theorems for Continuous Media",
Q. Appl. Math., Vol 9, pp 381-389, (1952).
- [04] KACHANOV, L. M.,
Foundations of the Theory of Plasticity,
Inglaterra, Londres, North-Holland Publishing Company,
1971.
- [05] HILLERBORG, A.,
"Theory of Equilibrium for Reinforced Concrete Slabs",
Betong, Vol 41, nº 4, pp 171-182, (1956).

- [06] HILLERBORG, A.,
Strip Method of Design,
Inglaterra, Londres, tradução da Cement and Concrete Association, 1975.
- [07] INGERSLEV, A.,
"The Strength of Rectangular Slabs",
J. Inst. Struct. Engng., Vol 1, nº 1, pp 3-14, (1923).
- [08] JOHANSEN, K. W.,
Linhas de Ruptura: Teoria e Prática,
Brasil, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A.,
tradução de MASON, J., 1962.
- [09] PRAGER, W. & HODGE Jr., P. G.
Theory of Perfectly Plastic Solids,
Estados Unidos, Nova Iorque, Wiley, 1951.
- [10] Comité Européen du Béton (CEB),
"The Application of the Yield-Line Theory to
Calculations of the Flexural Strength of Slabs and
Flat-Slab Floors",
Boletim de Informação nº 35, tradução de AMERONGEN, C.
V., Cement and Concrete Association, Londres, (1962).
- [11] SAWCZUK, A. & JAEGER, T.,
Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten,
Alemanha, Berlin, Springer-Verlag, 1953.

- [12] Commissie voor Uitvoering van Research ingesteld door de Betonvereniging,
"Experimental Investigations of the Plastic Behaviour of Slabs",
Report nº 26B, tradução nº 136, Cement and Concrete Association, Londres, (1963).
- [13] TAYLOR, R., MAHER, D. R. H. & HAYES, B.,
"Effect of the Arrangement of Reinforcement on the Behaviour of Reinforced Concrete Slabs",
Mag. Concr. Res., Vol 18, nº 55, pp 85-94, (1966).
- [14] HAYES, B. & TAYLOR, R.,
"Some Tests on Reinforced Concrete Beam-Slab Panels",
Mag. Concr. Res., Vol 21, nº 67, pp 113-120, (1969).
- [15] PARK, R.,
"The Behaviour of a Model Slab and Beam Floor Designed by Limit Design",
Civ. Eng. Trans. Inst. Eng., Aust., CE 12, nº 1, pp 1-6, (1970).
- [16] BIGNON, P. G.,
"Análise Dinâmica Não-Linear de Cascas de Concreto Armado para Centrais Nucleares",
Brasil, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Tese M.Sc., (1982).

- [17] CHARNES, A. & LEMKE, C. E.,
Computacional Theory of Linear Programming I,
ONR Res. Mem., nº 10, Graduate School of Industrial
Administration, Carnege Institute of Technology, 1954.
- [18] LIVESLEY, R. K.,
Matrix Methods of Structural Analysis,
Inglaterra, Nova Iorque, Pergamon Press, 2ª edição,
1975.
- [19] LIVESLEY, R. K.,
"A Compact Fortran Sequence for Limit Analysis",
Int. Journal for Num. Meth. in Engng., Vol 5, nº 3, pp
446-449, (1973).
- [20] CARMO, P. F. B. do, OLIVEIRA, A. A. F. de & BORNSTEIN,
C. T.,
Introdução à Programação Linear,
Brasil, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Publicação
PDD-01/79, 1979.
- [21] CRISFIELD, M. A.,
"A Faster Modified Newton-Raphson Iteration",
Comput. Meth. in Applied Mech. Engng., Vol 20, pp
267-278, (1979).

- [22] ZHANG, L. & OWEN, D. R. J.,
"A Modified Secant Newton Method for Non-linear Problems",
Computers & Structures, Vol 15, nº 5, pp 541-547,
(1982).
- [23] VAZ, L. E., FEIJÓ, B., MARTHA, L. F. R. & LOPES, M. M.,
"Determination of the Ultimate Load in Concrete Slabs by the Yield-Line Finite Element Method",
Proceedings of the Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, Brasil, Porto Alegre, pp 129-142, (1984).
- [24] JONES, L. L. & WOOD, R. H.,
Yield-Line Analysis of Slabs,
Inglaterra, Londres, Thames & Hudson and Chatto & Windus, 1967.
- [25] PARK, R. & GAMBLE, W. L.,
Reinforced Concrete Slabs,
Estados Unidos, Nova Iorque, Wiley-Interscience, 1980.
- [26] NIELSEN, M. P.,
Limit Analysis and Concrete Plasticity,
Estados Unidos, Nova Jersey, Prentice-Hall, 1984.

- [27] MAIER, G. & MUNRO, J.,
"Mathematical Programming: Applications to Engineering
Plastic Analysis",
Applied Mechanics Reviews, Vol 35, n^o 12, (1982).
- [28] HEYMAN, J.,
Plastic Design of Frames 2. Applications,
Cambridge at the University Press, 1971.
- [29] FACCIOLI, E. & VITIELLO, E.,
"A Finite Element, Linear Programming Method for the
Limit Analysis of Thin Plates",
Int. Journal for Num. Meth. of Engng., Vol 5, n^o 3, pp
311-325, (1973).
- [30] DA FONSECA, A. M. A., MUNRO, Y. & SMITH, D. L.,
"Finite Element Limit Analysis of Plates by Linear
Programming",
URSS, Moscou, IASS - Int. Conf. on Lightweight Shell
and Space Structures for Normal and Seismic Zones,
Alma-Ata, 1977, Proceedings, Sect 1, MIR Publishers,
pp 95-106, (1977).
- [31] CHAN, H. S. Y.,
"The Collapse Load of Reinforced Concrete Plates",
Int. Journal for Num. Meth. in Engng., Vol 5, n^o 1, pp
57-64, (1972).

[32]RIBEIRO, F. L. B.,

"Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento Auto-Adaptativo Versão P Aplicado a Problemas de Elasticidade",

Brasil, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Tese M.So., (1986).

[33]ZIENKIEWICS, O. C., NAYAK, G. C. & OWEN, D. R. J.,

"Composite and Overlay Models in Numerical Analysis of Elasto-Plastic Continua",

International Symposium on Foundation of Plasticity,
Warsaw, (1972).