

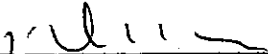
ANÁLISE DA TORÇÃO ELASTOPLÁSTICA DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

José Antonio Marques Carrer

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
WEBE JOÃO MANSUR

  
\_\_\_\_\_  
ÁLVARO MAIA DA COSTA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1987

CARRER, José Antonio Marques.

Análise da Torção Elastoplástica de Sólidos de Revolução pelo Método dos Elementos de Contorno (Rio de Janeiro, 1987).

x, 134 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1987).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro.

1. Elementos de Contorno. 2. Não Linearidade Física

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

A meus pais,  
Luigi Carrer e  
Maria de Lourdes Marques Carrer.  
À minha tia,  
Cândida Marques.  
Ao meu irmão,  
Luigi Carrer Filho.

## AGRADECIMENTOS

Aos Professores José Cláudio de Faria Telles e Webe João Mansur, pela orientação e estímulo dispensados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas José Antonio Fontes Santiago e Fernando Amorim de Paula, pela colaboração valiosa e pela ajuda nos momentos de dificuldade com o programa.

A todos os colegas e professores da COPPE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os colegas e professores da Universidade Estadual de Londrina que me incentivaram a fazer o Mestrado.

Ao pessoal de casa, que sempre me apoiou e estimulou, e a quem devo o gosto pelo estudo.

O homem é uma corda estendida entre o animal e o Super-homem: uma corda sobre um abismo. Perigoso passar um abismo - perigoso seguir esse caminho, perigoso olhar para trás, perigoso temer e parar.

A grandeza do homem consiste em ser uma ponte e não uma meta; o que se pode amar no homem, é ser ele uma ascensão e um declínio.

Amo aos que não sabem viver senão com a condição de perecer, porque, perecendo, eles passam além.

.....

Amo a todos os que são como essas gotas pesadas que caem, uma a uma, da sombria nuvem suspensa sobre os homens; anunciam que é próximo o relâmpago; e eles perecem por serem seus anunciadores.

(Nietzsche - Assim Falava Zaratustra)

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

ANÁLISE DA TORÇÃO ELASTOPLÁSTICA DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

José Antonio Marques Carrer

Agosto de 1987

Orientador: José Cláudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno para a análise do problema da torção elástica e elastoplástica de sólidos de revolução.

O problema em estudo é tri-dimensional; porém, devido à sua natureza axissimétrica, pode ser tratado como bi-dimensional, com a análise sendo feita no plano  $r-z$  do sistema de coordenadas cilíndricas  $(r;\theta;z)$ . Além disso, as suas equações são desacopladas daquelas que aparecem quando o caso axissimétrico geral é considerado.

A formulação desenvolvida emprega a solução fundamental axissimétrica, isto é, o deslocamento fundamental é aquele produzido por um anel de cargas circunferenciais unitário atuando em um corpo elástico infinito. As incógnitas do problema (ou condições de contorno prescritas) são o deslocamento transversal angular e a força de superfície correspondente.

As tensões cisalhantes são calculadas da maneira adequada: as tensões nos nós do contorno são calculadas através das forças de superfície e derivadas dos deslocamentos interpolados; as tensões nos pontos internos selecionados são calculadas através da equação integral correspondente.

A discretização numérica emprega elementos de contorno lineares ou quadráticos na análise elástica enquanto que, na análise elastoplástica, emprega elementos de contorno lineares e células internas triangulares lineares. O problema elastoplástico é resolvido utilizando um método incremental iterativo com uma formulação tipo deformações iniciais, aplicada ao critério de escoamento de von Mises.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

ELASTOPLASTIC TORSION OF SOLIDS OF REVOLUTION

BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

José Antonio Marques Carrer

August / 1987

Chairman: José Cláudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work presents the direct formulation of the Boundary Element Method for the analysis of elastic and elastoplastic torsion of solids of revolution.

The problem under consideration is tri-dimensional; however, due to its axisymmetric nature, it may be treated as a bi-dimensional one, with the analysis being made in the  $r$ - $z$  plane of the cylindrical coordinate system  $(r;\theta;z)$ . Furthermore, its equations are uncoupled from the others which appear when the general axisymmetric case is considered.

The formulation employed uses an axisymmetric fundamental solution, i.e., the fundamental displacement is that produced by a unit ring source acting in an infinite elastic body. The problem unknowns (or prescribed boundary conditions) are the angular transverse displacement and the corresponding surface traction.

Shear stresses are computed in the appropriate way; boundary stresses are calculated from surface tractions and derivatives of interpolated displacements and stresses at selected internal points are obtained by using the corresponding integral equation.

The numerical discretization employs linear or quadratic boundary elements for the elastic analysis and for elastoplastic applications, linear boundary elements and linear triangular internal cells are used. The elastoplastic problem is solved by using an initial strain incremental iterative procedure, in conjunction with the von Mises yield criterion.

## ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - TEORIA BÁSICA .....	6
II.1 - A TORÇÃO ELÁSTICA DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ....	6
II.1.1 - TENSÕES PRINCIPAIS .....	10
II.2 - PLASTICIDADE: TEORIA E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	12
II.2.1 - CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES ....	17
II.2.2 - EQUAÇÕES DE PRANDTL-REUSS .....	19
II.2.3 - RELAÇÕES DEFORMAÇÃO PLÁSTICA-DEFORMAÇÃO	
TOTAL .....	23
II.3 - EQUAÇÕES DA TORÇÃO ELASTOPLÁSTICA .....	27
CAPÍTULO III - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO	
À TORÇÃO ELÁSTICA .....	29
III.1 - A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL AXISSIMÉTRICA .....	29
III.2 - IDENTIDADE DE SOMIGLIANA .....	32
III.3 - CÁLCULO DAS TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS ....	36
III.4 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO .....	37
III.5 - DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES	
INTEGRAIS .....	38
III.5.1 - ELEMENTO LINEAR .....	44
III.5.2 - ELEMENTO QUADRÁTICO .....	47
III.6 - CÁLCULO DAS TENSÕES NOS NÓS DO CONTORNO ....	49
III.7 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....	50
III.7.1 - SÓLIDO TRONCO CÔNICO .....	51
III.7.2 - CILINDRO COM CAVIDADE ESFÉRICA .....	59
III.7.3 - CILINDRO COM ENTALHE SEMICIRCULAR .....	65

CAPÍTULO IV - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TORÇÃO ELASTOPLÁSTICA .....	68
IV.1 - IDENTIDADE DE SOMIGLIANA PARA PROBLEMAS ELASTO- PLÁSTICOS .....	68
IV.2 - CÁLCULO DAS TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS .....	70
IV.3 - DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS .....	74
IV.3.1 - CÉLULAS TRIANGULARES LINEARES .....	80
IV.3.2 - O MÉTODO DAS SUCESSIVAS APROXIMAÇÕES ELÁSTICAS .....	88
IV.4 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....	91
IV.4.1 - CILINDRO VAZADO COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE. MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO .....	91
IV.4.2 - CILINDRO MACIÇO COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE. MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO .....	95
IV.4.3 - CILINDRO MACIÇO COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE. MATERIAL COM ENDURECIMENTO LINEAR .....	98
IV.4.4 - CILINDRO COM CAVIDADE ESFÉRICA. MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO .....	102
IV.4.5 - CILINDRO COM ENTALHE SEMICIRCULAR. MATE- RIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO .....	106
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES .....	109
APÊNDICE A - OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL AXISSIMÉTRICA	113
APÊNDICE B - DERIVADAS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS EM RELA- ÇÃO ÀS COORDENADAS $\rho$ e $z_0$ DO ANEL FONTE ...	115
APÊNDICE C - EXPANSÃO POLINOMIAL DAS INTEGRAIS ELÍPTICAS K e E .....	118

APÊNDICE D - TENSÕES NOS NÓS DO CONTORNO .....	120
APÊNDICE E - CÁLCULO DE INTEGRAIS SINGULARES USANDO A QUADRATURA DE GAUSS .....	124
APÊNDICE F - CÁLCULO DO VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY POR INTEGRAÇÃO NO SENTIDO DE PARTES FINITAS .....	128
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	132

## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A análise de tensões em sólidos de geometria axissimétrica é um problema tri-dimensional, sendo conveniente, em função da geometria apresentada, a utilização de um sistema de coordenadas cilíndrico para executá-la. Se as condições de contorno são também axissimétricas, as variáveis presentes na análise tornam-se angularmente independentes, o que reduz a dimensão do problema em uma unidade, passando o mesmo a ser tratado como bi-dimensional. Neste caso, o estudo é feito sobre uma seção meridional do sólido, definida no plano  $r$ - $z$ .

Problemas axissimétricos são encontrados em muitas aplicações práticas, tais como: vasos de pressão, turbinas, certos tipos de tubulações, etc, o que justifica a procura e o emprego de métodos numéricos computacionalmente eficientes e de boa precisão numérica para a sua solução.

O Método dos Elementos de Contorno se presta muito bem a esse tipo de análise. A partir da solução fundamental tri-dimensional de Kelvin, referida ao novo sistema de coordenadas, pode-se obter a solução fundamental axissimétrica por superposição de efeitos, integrando-se aquela ao longo de uma circunferência de raio  $\rho$ , conforme apresentado em [1]. Os deslocamentos fundamentais são, então, os correspondentes a anéis de cargas nas direções radial, circunferencial e axial, aplicados em um meio elástico infinito e de intensidade unitária.

Como o estudo está sendo feito no plano da seção geratriz do sólido de revolução, o estabelecimento das equações integrais de contorno implica na discretização - para efeito de análise elástica - somente de um meridiano do sólido, o que é feito utilizando-se elementos unidimensionais sobre os quais se interpolam os valores dos deslocamentos e forças de superfície, que constituem as variáveis reais do problema (formulação direta do método). A discretização apenas do contorno (o eixo de simetria não necessita ser discretizado) implica numa grande redução na preparação dos dados necessários para se executar um programa de computador, que é uma das características mais importantes do método. Além desta, as outras características são também conservadas, a saber: a) sistema de equações lineares de ordem reduzida, b) cálculo de tensões e deslocamentos somente nos pontos internos selecionados e c) boa precisão na resolução de problemas onde ocorre concentração de tensões.

Muitos autores têm-se dedicado ao estudo do problema axissimétrico utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Problemas envolvendo carregamento radial e axial foram estudados por CRUSE e outros [2] e KERMANIDIS [3], com a utilização de formulações diferentes do método. O primeiro autor também considerou no seu estudo a ação de cargas térmicas e forças centrífugas; o último, a torção.

RIZZO e outros [4], no seu estudo do problema da torção, apresentam um procedimento alternativo para a obtenção da solução fundamental axissimétrica, procedimento este baseado na equação de equilíbrio de Navier e na solução fundamental tridimensional para problemas de campo  $1/R$ , na qual  $R$  é a distân-

cia do ponto fonte ao ponto campo.

MAYR [5] também analisa o problema axissimétrico envolvendo carregamento radial e axial e também apresenta uma formulação para problemas de elasticidade axissimétrica com condições de contorno arbitrárias. Em [6], o autor e colaborador analisam o problema da torção e apresentam exemplos que ilustram a eficiência e a precisão do método.

A aplicação do Método dos Elementos de Contorno a problemas que envolvem não linearidade física é relativamente recente: somente em 1971 apareceu a primeira publicação que tratava do assunto.

Se a aplicação do método é recente, mais recente ainda é a sua formulação geral. Para a análise de problemas inelásticos, há necessidade de se discretizar o domínio para que seja considerada a influência das deformações inelásticas (formulação tipo deformações iniciais) ou das tensões correspondentes a essas deformações (formulação tipo tensões iniciais). Essa discretização é feita utilizando células internas sobre as quais são interpolados os valores dos termos inelásticos (deformações ou tensões).

A maior dificuldade encontrada para o desenvolvimento da formulação geral foi a obtenção das expressões corretas para o cálculo das tensões nos pontos internos, isto é, das derivadas das integrais de domínio, relativas aos termos inelásticos. Aqui a derivação, ao contrário da derivação das integrais de contorno, não pode ser efetuada diretamente sobre os tensores fundamentais. Somente em 1978, BUI [7] apresenta um artigo no qual e

le demonstra a existência de um "termo livre", resultante da derivação das integrais de domínio, que não havia sido considerado em nenhuma publicação anterior. A integral de domínio à qual esse "termo livre" é associado deve, contudo, ser calculada no sentido de valor principal.

Em 1979, TELLES e BREBBIA [15] apresentam a formulação completa do método para problemas de plasticidade bi e tri-dimensionais, incluindo aí as expressões corretas das derivadas das integrais dos termos plásticos e os "termos livres" associados. Essas expressões, levando em conta as duas formulações (deformação inicial e tensão inicial), estão apresentadas em [8] juntamente com um procedimento alternativo mais geral - baseado na aplicação de um campo uniforme de deformações plásticas nas equações integrais discretizadas - que permite calcular diretamente as integrais no sentido de valor principal, mais os "termos livres" associados. O uso desse procedimento é recomendado quando as funções de interpolação utilizadas são de ordem elevada (a integração de células triangulares lineares não acarreta grandes dificuldades e, tendo em conta a minimização do esforço computacional, deve ser efetuada diretamente). A obra citada também apresenta uma formulação viscoplástica do método, que possibilita tratar de problemas que envolvem plasticidade, viscoplasticidade e fluência de uma maneira unificada.

A extensão da formulação para problemas axissimétricos envolvendo carregamento radial e axial, seguindo o procedimento descrito na referência [8], já foi efetuada pelo mesmo autor e apresentada em [9,16] para problemas elastoplásticos. O problema da torção elastoplástica já foi analisado por CHEN [10], porém, com a utilização de uma formulação diferente, na qual as

tensões nos pontos internos são calculadas de forma menos precisa através da derivação numérica dos deslocamentos.

Este trabalho apresenta uma formulação direta do Método dos Elementos de Contorno para o problema da torção elástica e elastoplástica de cilindros de seção transversal circular com diâmetro variável. Para a análise elástica foram implementados os elementos linear e quadrático; para a análise elastoplástica, elementos lineares e células triangulares lineares (que são integradas de maneira adequada). A formulação utilizada foi a das "deformações iniciais" (associada ao critério de escoamento de von Mises). As tensões nos pontos internos são calculadas diretamente, através das equações integrais correspondentes, prescindindo-se do esquema de derivação numérica dos deslocamentos apresentado em [10].

É importante observar que, na análise elastoplástica, somente a região do domínio onde se prevê a ocorrência de deformações plásticas necessita ser discretizada, somando-se essa característica do método às demais.

## CAPÍTULO II

## TEORIA BÁSICA

## II.1 - A TORÇÃO ELÁSTICA DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Seja a análise elástica de tensões de um cilindro com seção transversal circular de diâmetro variável, isto é, do sólido gerado a partir da rotação de uma seção meridional em relação a um eixo e submetido à ação de conjugados aplicados nas extremidades e/ou ao longo da sua superfície lateral.

Definindo um sistema de coordenadas cilíndrico  $(r; \theta; z)$  - no qual o eixo de rotação do cilindro coincide com o eixo  $z$  e a posição de um elemento no plano de uma seção transversal é definida em função das coordenadas  $r$  e  $\theta$  - obtêm-se, para esse sistema de coordenadas, o tensor de tensões representado abaixo

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

As componentes de deslocamento nas direções radial e circunferencial podem ser designadas por  $u_r$  e  $u_\theta$  e a componente na direção  $z$ , por  $u_z$ . Em função de  $u_r$ ,  $u_\theta$  e  $u_z$  encontram-se as seguintes expressões para as componentes do tensor de deformações

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} ; \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

(II.2)

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)$$

As equações diferenciais de equilíbrio de um elemento infinitesimal, supondo a ausência de forças de volume, são as seguintes

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Conhecido o estado tensional em um ponto qualquer, as componentes da força de superfície que atua sobre um plano que passa através desse ponto são calculadas a partir da consideração de equilíbrio. Obtém-se, então, a seguinte relação matricial

$$\underline{p} = \underline{\tau} \underline{n} \quad (\text{II.4})$$

na qual

$\underline{\tau}$  é o tensor de tensões no ponto considerado;

$\underline{n}$  representa a normal ao plano; em função das suas compo

entes  $\underline{n} = [n_r \ n_\theta \ n_z]^T$  e

$\underline{p}$  representa a força de superfície; em função das suas componentes  $\underline{p} = [p_r \ p_\theta \ p_z]^T$ .

Para a resolução do problema apresentado, admite-se a validade da Lei de Hooke, isto é, que a análise de tensões será feita em corpos constituídos por materiais elásticos isotrópicos. Utilizando-se o método *semi-inverso* [14] - através da hipótese de que a única componente de deslocamento não nula é a circunferencial  $u_\theta$  - e considerando que, devido à simetria, essa componente não nula é independente da variável angular  $\theta$ , o problema da torção fica caracterizado pelo seguinte conjunto de equações

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

(relações deformação-deslocamento)

(II.5)

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = 2G\epsilon_{r\theta}$$

(Lei de Hooke) (II.6)

$$\tau_{\theta z} = 2G\epsilon_{\theta z}$$

(G é o módulo de elasticidade transversal do material)

e

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

(II.7)

Como se demonstra em [14], a hipótese adotada ( $u_\theta \neq 0$ ) conduz a uma solução adequada que satisfaz a todas as equações da elasticidade.

O problema da torção também fica completamente caracterizado pela equação de equilíbrio de Navier (equação (II.7) expressa em termos da componente circunferencial de deslocamento  $u_\theta$ ):

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Resolvida a equação acima (analiticamente ou numericamente), as componentes de deformação são obtidas através das equações (II.5) e as componentes de tensão, através da Lei de Hooke (equações (II.6)).

O tensor de tensões fica reduzido a

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{\theta r} & 0 & \tau_{\theta z} \\ 0 & \tau_{z\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

A força de superfície  $\underline{p}$ , dada pela equação (II.4), se reduz à sua componente circunferencial  $p_\theta$ :

$$\underline{p} = [0 \quad p_\theta \quad 0]^T$$

com  $p_\theta$  dado por

$$p_\theta = \tau_{r\theta} n_r + \tau_{\theta z} n_z \quad (\text{II.10})$$

ou, em função de  $u_\theta$

$$p_{\theta} = G \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} n_r + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} n_z - \frac{u_{\theta}}{r} n_r \right) \quad (\text{II.11})$$

### II.1.1 - TENSÕES PRINCIPAIS

As direções principais são obtidas através da resolução do seguinte sistema de equações

$$(\underline{\tau} - \lambda \underline{I}) \underline{n} = \underline{0} \quad (\text{II.12})$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade de ordem três.

Para que a equação acima tenha soluções não triviais, o determinante dos coeficientes deve ser nulo, resultando em (após a expansão do determinante):

$$\lambda^3 - (\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2) \lambda = 0 \quad (\text{II.13})$$

Os invariantes escalares  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , habitualmente utilizados no cálculo das direções principais, são os seguintes:

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = \tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 \quad (\text{II.14})$$

$$I_3 = 0$$

As tensões principais - raízes da equação (II.13) - são iguais a

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2} \\
 \sigma_2 &= 0 \\
 \sigma_3 &= -\sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2}
 \end{aligned}
 \tag{II.15}$$

Uma vez que  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , tem-se caracterizado o estado de cisalhamento puro.

As direções principais são representadas pelos vetores

$$\begin{aligned}
 \underline{n}_1 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_1} & 1 & \frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_1} \end{bmatrix} \\
 \underline{n}_2 &= \pm \begin{bmatrix} \frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_1} & 0 & \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_3} \end{bmatrix} \\
 \underline{n}_3 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_3} & 1 & \frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{II.16}$$

Como as componentes normais do tensor de tensões  $\underline{\tau}$  são nulas, segue daí que o tensor desviador de tensões  $\underline{s}$  é igual ao tensor  $\underline{\tau}$ ; assim, os invariantes dos dois tensores também são iguais, isto é

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 0 \\
 J_2 &= \tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 \\
 J_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.17}$$

É importante observar que, ao contrário dos eixos circulares de seção transversal constante, o deslocamento circunferencial  $u_\theta$  não é mais proporcional à distância do eixo de rota

ção, isto é, os raios de uma seção transversal se encurvam durante a torção. Também é importante observar a independência deste problema em relação àquele que envolve carregamento radial e axial, ou seja, a análise elástica de tensões de um sólido de revolução submetido à ação de cargas radiais, circunferenciais e axiais pode ser feita considerando-se, separadamente, a ação das cargas radiais e axiais e a ação das cargas circunferenciais. Para o primeiro caso, o sistema de equações diferenciais de equilíbrio (II.3) fica reduzido às duas primeiras equações, a terceira sendo identicamente satisfeita; o segundo caso constitui o objeto de estudo deste trabalho e será analisado numericamente, por meio de sua equação integral característica, através da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno.

## II.2 - PLASTICIDADE: TEORIA E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Plasticidade é uma propriedade que permite que um material se deforme contínua (sem ruptura) e *permanentemente*, até um certo nível de carga, após o seu limite elástico ter sido ultrapassado. A ocorrência de deformações residuais (deformações permanentes) e a *dependência* do estado de deformação final em relação às várias etapas de aplicação do carregamento são características da plasticidade.

Na teoria clássica da plasticidade, adotada neste trabalho, as deformações plásticas são independentes do tempo de permanência do carregamento.

Considere-se o diagrama tensão-deformação apresenta

do abaixo (Figura II.1) e correspondente ao ensaio à tração de um corpo de provas cilíndrico. Entre os pontos 0 e A há uma relação linear entre as deformações e as tensões, o comportamento do material nesse intervalo é linear: após a remoção do carregamento, o cilindro volta ao seu comprimento inicial. O ponto A é o chamado *limite elástico* ou *ponto de escoamento* ("yield point") do material. Este ponto, uma vez atingido, indica o início da ocorrência de deformação residual (permanente) chamada deformação plástica. À medida que a tensão resultante da aplicação do carregamento ultrapassa a tensão correspondente ao limite elástico, a deformação total aumenta consideravelmente, com grandes acréscimos de deformação correspondendo a pequenos acréscimos de tensão. Essa correspondência - deformação plástica adicional ↔ tensão adicional - é chamada encruamento ou endurecimento ("hardening"). Uma vez atingido o ponto B, chamado *ponto de carga máxima* ou *ponto de instabilidade*, o corpo de provas começa a se deformar rapidamente e rompe em C. O ponto B, portanto, representa o limite de aplicação da teoria da plasticidade.

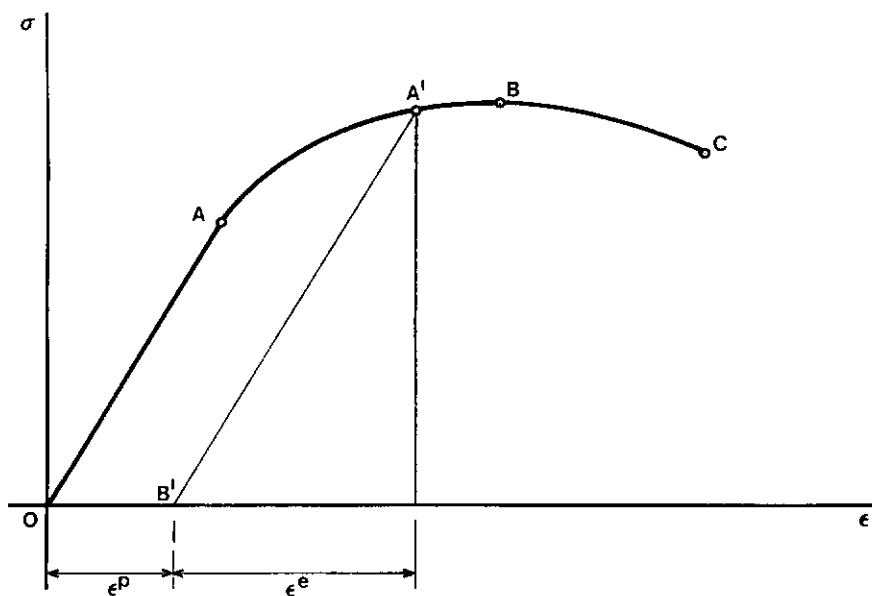


Figura II.1 - Diagrama tensão x deformação convencional

Se em qualquer ponto entre o *limite elástico* A e o *ponto de carga máxima* B o carregamento é retirado, o descarregamento ocorre segundo a linha A'B', paralela à linha elástica OA e também representada na Figura II.1. Uma parcela da deformação total é, então, recuperada e a outra permanece como deformação residual, isto é, considera-se a deformação total como sendo composta por uma parcela elástica,  $\epsilon^e$ , e uma parcela plástica,  $\epsilon^p$ :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (\text{II.18})$$

O recarregamento do corpo também se dá através da linha B'A' e não haverá escoamento até que o ponto A' seja novamente alcançado, após o que, com o prosseguimento do carregamento, completa-se o traçado da curva ao longo do segmento A'B. Nesse caso, o ponto A' pode ser considerado o novo ponto de escoamento e o ponto A passa a representar o ponto de escoamento inicial.

Neste trabalho, será utilizada a teoria isotrópica de endurecimento, que está associada à hipótese de que o endurecimento é igual tanto na tração quanto na compressão. Consequentemente, o diagrama tensão-deformação completo é admitido simétrico em relação ao ponto 0.

Assim, para simplificar, só será considerado o caso  $\sigma \geq 0$ .

Com respeito à Figura II.1, em relação ao ponto de escoamento inicial, o comportamento elástico ocorre quando

$$\sigma - \sigma_A < 0 \quad (\text{II.19})$$

Uma vez ultrapassado o valor da tensão em A , esta condição muda; agora, o comportamento elástico ocorre quando

$$\sigma - \sigma_0 < 0 \quad (\text{II.20})$$

onde  $\sigma_0$  é a nova tensão de escoamento e varia à medida que o escoamento prossegue.

Para um material que apresenta endurecimento linear (Figura II.2),  $\sigma_0$  varia de acordo com a seguinte equação

$$\sigma_0 = \sigma_A + \frac{EE_T}{E-E_T} \epsilon^p \quad (\text{II.21})$$

na qual  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $E_T$  é a inclinação da parte do diagrama que corresponde ao comportamento elastoplástico.

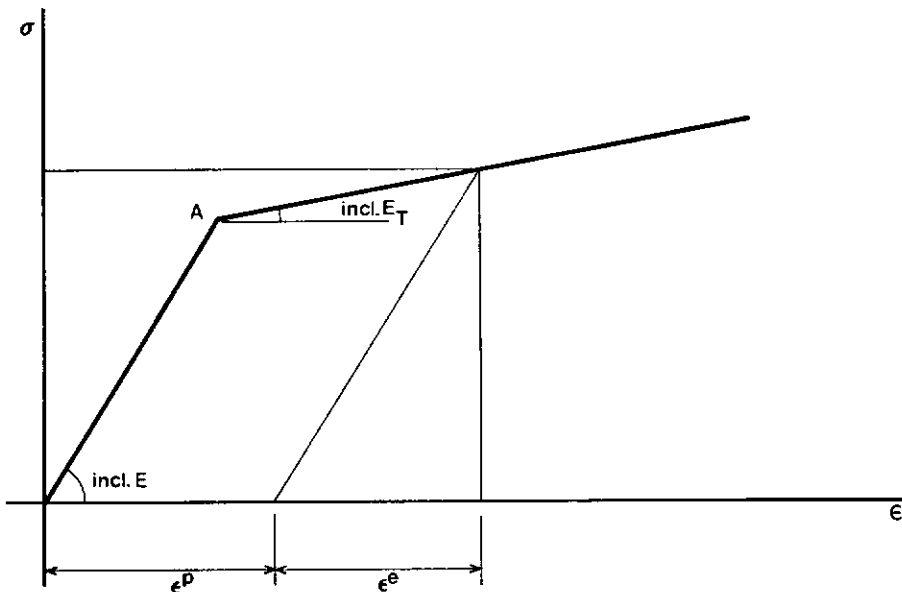


Figura II.2 - Diagrama tensão x deformação para material com endurecimento linear

Recordando a condição apresentada em (II.20), o comportamento plástico só é possível se a condição apresentada abaixo é satisfeita

$$\sigma - \sigma_0 = 0 \quad (\text{II.22})$$

A condição acima pode ser generalizada, a partir da definição de uma função de escoamento  $f(\sigma)$ , como segue

$$f(\sigma) = K \quad (\text{II.23})$$

O parâmetro  $K$  é função do trabalho plástico realizado por unidade de volume.

A equação (II.23) implica que sempre que a função  $f$  atinge o valor da constante  $K$  o escoamento tem início.

A equação (II.22) também pode ser escrita como

$$F(\sigma;K) = \sigma - \sigma_0 = 0 \quad (\text{II.24})$$

As equações (II.23) e (II.24) estão sujeitas às seguintes restrições

$$f(\sigma) \leq K \quad (\text{II.25})$$

e

$$F(\sigma;K) \leq 0 \quad (\text{II.26})$$

## II.2.1 - CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

O exemplo apresentado na seção anterior é relativamente simples, à medida que envolve uma única componente do tensor de tensões e apresenta um ponto bem definido, a partir do qual o material se comporta inelasticamente, o que simplifica o critério de escoamento (equação (II.24)). Na prática, porém, frequentemente ocorrem problemas nos quais o estado de tensão em um ponto envolve todas as componentes do tensor de tensões que são diferentes de zero. O critério de escoamento (II.24) deve, então, ser generalizado para poder englobar as várias combinações possíveis de tensões. Para o problema em estudo, uma vez que apenas duas componentes do tensor de tensões são não nulas, o critério de escoamento torna-se o seguinte

$$f(\tau_{r\theta}; \tau_{\theta z}) = K \quad (\text{II.27})$$

Como neste problema não há tensões normais,  $\tau_{r\theta}$  e  $\tau_{\theta z}$  podem ser representadas pelos invariantes do tensor desviador de tensões e a equação acima pode ser escrita da maneira usual, apresentada em [11], como segue

$$f(J_2) = K \quad (\text{II.28})$$

Obtida a expressão geral do critério de escoamento, é necessário encontrar uma relação funcional entre  $f(J_2)$  e  $K$ , o que constitui o primeiro passo da análise elastoplástica. Essa relação será obtida através do critério de escoamento de von Mises, ou teoria da energia de distorção, que assume que o escoamento começa quando a energia de distorção, para um dado nível de

carregamento, se iguala à energia de distorção, no escoamento, à tração simples. A energia de distorção  $U_d$  para o problema da torção é igual à energia de deformação elástica e é dada por

$$U_d = \frac{1}{2G} J_2 = \frac{1}{2G} (\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2) \quad (\text{II.29})$$

Para o escoamento à tração simples, tem-se

$$U_d = \frac{1}{2G} \frac{\sigma_0^2}{3} \quad (\text{II.30})$$

e a condição de escoamento torna-se

$$\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 = \frac{\sigma_0^2}{3} \quad (\text{II.31})$$

ou

$$\sqrt{3} \sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2} = \sigma_0 \quad (\text{II.32})$$

expressão que se associa rapidamente à equação (II.27).

Como  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2}$  e  $\sigma_2 = 0$ , o critério de von Mises prevê o escoamento quando a tensão principal é igual a  $1/\sqrt{3}$  vezes a tensão de escoamento à tração simples.

## II.2.2 - EQUAÇÕES DE PRANDTL-REUSS

Como as deformações plásticas dependem do modo de aplicação do carregamento, torna-se necessário, em geral, calcular os diferenciais ou incrementos dessas deformações durante as várias etapas de aplicação do carregamento e obter as deformações plásticas totais através de uma integração ou de um somatório.

Uma relação conveniente para a determinação dos incrementos de deformação plástica é dada pelas equações de Prandtl-Reuss. Essas equações assumem que em cada instante do carregamento o incremento de deformação plástica é proporcional à tensão desviada, isto é

$$d\varepsilon_{ij}^P = S_{ij} d\lambda \quad , \quad i, j = r, \theta, z \quad (\text{II.33})$$

ou, especificamente para o caso da torção

$$\frac{d\varepsilon_{r\theta}^P}{\tau_{r\theta}} = \frac{d\varepsilon_{\theta z}^P}{\tau_{\theta z}} = d\lambda \quad (\text{II.34})$$

O fator de proporcionalidade  $d\lambda$  pode variar ao longo do processo de carregamento, mas é sempre positivo.

As equações de Prandtl-Reuss também implicam que os eixos principais dos tensores de tensões e de incremento de deformações plásticas coincidem. Resta, agora, determinar o valor da constante  $d\lambda$ ; é conveniente, para esse propósito, definir uma *tensão equivalente ou efetiva*  $\sigma_e$  e um *incremento de deformação plástica equivalente ou efetivo*  $d\varepsilon_e^P$ , da seguinte maneira

$$\sigma_e = \sqrt{3} \sqrt{J_2} = \sqrt{3} \sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2} \quad (\text{II.35})$$

e

$$d\epsilon_e^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(d\epsilon_{r\theta}^p)^2 + (d\epsilon_{\theta z}^p)^2} \quad (\text{II.36})$$

Voltando à equação (II.33), o fator de proporcionalidade  $d\lambda$  pode ser obtido em termos das formas equivalentes  $\sigma_e$  e  $d\epsilon_e^p$ , como segue

$$\frac{\sqrt{3}}{2} d\epsilon_e^p = \sqrt{(d\lambda \tau_{r\theta})^2 + (d\lambda \tau_{\theta z})^2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} d\epsilon_e^p = d\lambda \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

e, finalmente

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_e^p}{\sigma_e} \quad (\text{II.37})$$

As relações tensão-incremento de deformação plástica (II.34) tornam-se

$$d\epsilon_{r\theta}^p = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_e^p}{\sigma_e} \tau_{r\theta} \quad (\text{II.38})$$

$$d\epsilon_{\theta z}^p = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_e^p}{\sigma_e} \tau_{\theta z}$$

A partir da utilização da tensão equivalente, o critério de escoamento de von Mises pode ser escrito como

$$\sigma_e - \sigma_o = 0 \quad (\text{II.39})$$

com a tensão equivalente sendo usada como a função de escoamento.

Deve-se observar que a equação (II.39) é inteiramente equivalente à equação (II.22), utilizada para o caso uniaxial.

A resolução do problema depende, então, de se encontrar uma relação entre a tensão equivalente  $\sigma_e$  e o incremento de deformação plástica equivalente  $d\varepsilon_e^P$ , o que será feito utilizando o conceito de trabalho plástico. O trabalho plástico por unidade de volume representa a energia armazenada durante a deformação plástica e é dado por

$$dW^P = S_{ij} d\varepsilon_{ij}^P = 2 \tau_{r\theta} d\varepsilon_{r\theta}^P + 2 \tau_{\theta z} d\varepsilon_{\theta z}^P \quad (\text{II.40})$$

Substituindo (II.37) em (II.40), obtém-se a expressão do trabalho plástico em função das formas equivalentes

$$dW^P = \sigma_e d\varepsilon_e^P \quad (\text{II.41})$$

A hipótese de endurecimento (*strain-hardening*) será utilizada para estabelecer uma relação funcional entre a tensão de escoamento  $\sigma_o$  e a deformação plástica equivalente  $\varepsilon_e^P$ , definida abaixo

$$\varepsilon_e^P = \int d\varepsilon_e^P \quad (\text{II.42})$$

com  $d\varepsilon_e^P$  dado pela equação (II.36).

A hipótese mencionada acima define a deformação plástica equivalente como sendo uma medida do trabalho de endurecimento. Assim sendo, assume-se que a função de escoamento é

função da deformação plástica equivalente, o que permite escrever

$$\sigma_o = H(\epsilon_e^p) \quad (\text{II.43})$$

e a relação funcional entre  $\sigma_o$  e  $\epsilon_e^p$  pode ser determinada experimentalmente. Em aplicações práticas, entretanto, a relação funcional fornecida pela equação (II.43) é baseada no diagrama tensão-deformação uniaxial, no qual a abcissa e a ordenada são trocadas por  $\epsilon_e^p$  e  $\sigma_e$ , respectivamente, como indicado na Figura II.3. Essa relação viabiliza o uso da equação (II.38).

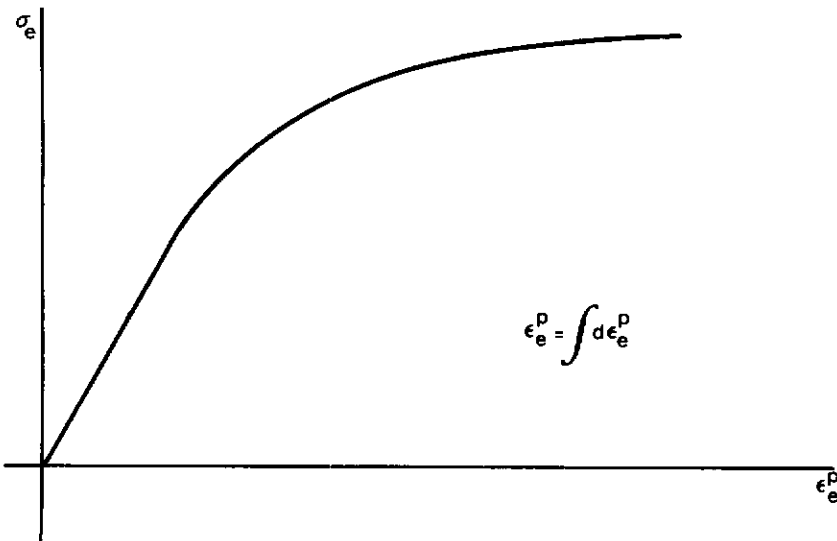


Figura II.3 - Relação entre a tensão equivalente e a deformação plástica equivalente

### II.2.3 - RELAÇÕES DEFORMAÇÃO PLÁSTICA - DEFORMAÇÃO TOTAL

Estando de posse da relação funcional entre a tensão de escoamento  $\sigma_0$  e a deformação plástica equivalente  $\epsilon_e^p$  e tendo em vista a utilização de métodos iterativos para a resolução de problemas elastoplásticos, é útil obter-se um conjunto de equações que possibilitem a determinação dos incrementos de deformação plástica a partir das deformações totais e sem a utilização explícita das tensões ([11]).

Seja um dado nível de carregamento e os correspondentes estados de tensão e de deformação plástica acumulada. Se o carregamento sofre um pequeno acréscimo, as deformações plásticas adicionais, correspondentes a esse acréscimo, podem ser representadas por  $\Delta\epsilon_{ij}^p$  e as deformações totais podem ser representadas da seguinte maneira

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + \Delta\epsilon_{ij}^p \quad (\text{II.44})$$

onde  $\epsilon_{ij}^e$  é a parcela elástica da deformação total, já incluída a deformação elástica adicional produzida pelo acréscimo de carga, e  $\epsilon_{ij}^p$  é a parcela plástica acumulada, na qual não está incluído o incremento de deformação plástica  $\Delta\epsilon_{ij}^p$  correspondente ao acréscimo de carga.

Para o estabelecimento das equações envolvendo somente deformações, é conveniente definir um *tensor de deformação total modificado* como segue

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon^p_{ij} \quad (\text{II.45})$$

ou

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon^e_{ij} + \Delta\epsilon^p_{ij} \quad (\text{II.46})$$

Subtraindo-se a deformação modificada volumétrica ( $\epsilon'_{kk}/3$ ) dos elementos da diagonal principal na equação (II.46) , encontra-se a seguinte expressão para a sua forma desviada

$$e'_{ij} = e^e_{ij} + \Delta\epsilon^p_{ij} \quad (\text{II.47})$$

ou

$$e'_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G} + \Delta\epsilon^p_{ij} \quad (\text{II.48})$$

Utilizando-se as equações de Prandtl-Reuss (II.33), a equação (II.48) pode ser escrita como

$$e'_{ij} = \left( 1 + \frac{1}{2G\Delta\lambda} \right) \Delta\epsilon^p_{ij} \quad (\text{II.49})$$

Procedendo de maneira análoga à utilizada para a obtenção da equação (II.37) e definindo uma *deformação total equivalente modificada*

$$\epsilon_{et} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{e'_{ij} e'_{ij}} \quad (\text{II.50})$$

obtém-se

$$1 + \frac{1}{2G\Delta\lambda} = \frac{\epsilon_{et}}{\Delta\epsilon^p_e} \quad (\text{II.51})$$

e, de (II.49), obtém-se a seguinte expressão para os incrementos de deformação plástica

$$\Delta \varepsilon_{ij}^P = \frac{\Delta \varepsilon_e^P}{\varepsilon_{et}} e'_{ij} \quad (\text{II.52})$$

Particularizando as expressões anteriores para o caso da torção, as seguintes expressões são encontradas

- deformação total modificada = deformação total modificada desviada

$$\varepsilon'_{r\theta} = e'_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{2G} + \Delta \varepsilon_{r\theta}^P \quad (\text{II.53})$$

$$\varepsilon'_{\theta z} = e'_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{2G} + \Delta \varepsilon_{\theta z}^P$$

- deformação total equivalente modificada

$$\varepsilon_{et} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon'_{r\theta})^2 + (\varepsilon'_{\theta z})^2} \quad (\text{II.54})$$

- incrementos de deformação plástica

$$\Delta \varepsilon_{r\theta}^P = \frac{\Delta \varepsilon_e^P}{\varepsilon_{et}} e'_{r\theta} \quad (\text{II.55})$$

$$\Delta \varepsilon_{\theta z}^P = \frac{\Delta \varepsilon_e^P}{\varepsilon_{et}} e'_{\theta z}$$

A determinação dos incrementos de deformação plástica está condicionada à determinação do incremento de deformação plástica equivalente  $\Delta \varepsilon_e^P$ . Substituindo a expressão (II.37), correspondente ao fator de proporcionalidade  $\Delta \lambda$ , em (II.51), obtêm-se

$$1 + \frac{\sigma_e}{3G\Delta\varepsilon_e^P} = \frac{\varepsilon_{et}}{\Delta\varepsilon_e^P} \quad (\text{II.56})$$

que fornece

$$\Delta\varepsilon_e^P = \varepsilon_{et} + \frac{\sigma_e}{3G} \quad (\text{II.57})$$

Como a condição apresentada em (II.39) deve ser satisfeita ao longo de todo o processo,  $\sigma_e$  pode ser substituída por  $\sigma_o$  na equação acima. Uma vez que  $\sigma_o$  corresponde à tensão de escoamento uniaxial após a aplicação do incremento de carga, seu valor é ainda desconhecido. Contudo, este valor pode ser obtido, aproximadamente, através do desenvolvimento de uma série de Taylor sobre o valor anterior  ${}^{(i-1)}\sigma_o$ . Obtém-se, então

$$\sigma_o = {}^{(i-1)}\sigma_o + {}^{(i-1)}\left(\frac{d\sigma_o}{d\varepsilon_e^P}\right)\Delta\varepsilon_e^P + \dots \quad (\text{II.58})$$

ou

$$\sigma_o = {}^{(i-1)}\sigma_o + {}^{(i-1)}H'\Delta\varepsilon_e^P + \dots \quad (\text{II.59})$$

Substituindo (II.59) em (II.57) e resolvendo para  $\Delta\varepsilon_e^P$ , obtém-se

$$\Delta\varepsilon_e^P = \frac{3G\varepsilon_{et} - {}^{(i-1)}\sigma_o}{3G + {}^{(i-1)}H'} \quad (\text{II.60})$$

Para materiais que apresentam endurecimento linear, a expressão (II.60) se simplifica para

$$\Delta\varepsilon_e^P = \frac{3G\varepsilon_{et} - (\sigma_o + H'\varepsilon_e^P)}{3G + H'} \quad (\text{II.61})$$

onde  $H'$  é constante e igual a

$$H' = \frac{EE_T}{E-E_T} \quad (\text{II.62})$$

expressão análoga à presente em (II.21).

Em (II.61), a deformação plástica equivalente  $\epsilon_e^p$  corresponde ao somatório dos (i-1) incrementos anteriores.

### II.3 - EQUAÇÕES DA TORÇÃO ELASTOPLÁSTICA

No contexto da teoria das pequenas deformações, assume-se que as deformações totais possam ser representadas por

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \epsilon_{r\theta}^e + \epsilon_{r\theta}^p \quad (\text{II.63})$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \epsilon_{\theta z}^e + \epsilon_{\theta z}^p$$

Considerando as deformações plásticas como deformações iniciais, a aplicação da Lei de Hooke à parcela elástica do tensor de deformações totais fornece as seguintes expressões para as tensões

$$\tau_{r\theta} = G \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) - 2G\epsilon_{r\theta}^p \quad (\text{II.64})$$

$$\tau_{\theta z} = G \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - 2G\epsilon_{\theta z}^p$$

Em termos de "tensões iniciais", as expressões anteriores tornam-se

$$\tau_{r\theta} = G \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) - \tau_{r\theta}^p \quad (\text{II.65})$$

$$\tau_{\theta z} = G \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} - \tau_{\theta z}^p$$

Neste trabalho utilizou-se a formulação das deformações iniciais para se efetuar a análise elastoplástica. O método incremental-iterativo utilizado, descrito nas referências [8] e [11], será discutido no Capítulo IV, onde é apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno para o problema da torção elastoplástica.

## CAPÍTULO III

## O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TORÇÃO ELÁSTICA

## III.1 - A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL AXISSIMÉTRICA

A solução fundamental axissimétrica corresponde ao campo de deslocamento produzido por um anel de cargas circunferenciais unitário atuando em um meio elástico infinito e pode ser obtida a partir da solução fundamental de Kelvin para problemas tri-dimensionais, seguindo o procedimento apresentado em [1] e rerepresentado no Apêndice A deste trabalho.

Em termos da função de Legendre de ordem zero  $Q_{+1/2}(\gamma)$ , essa solução pode ser escrita na forma

$$u_{\theta}^*(\xi; X) = \frac{1}{4\pi^2 G \sqrt{\rho r}} Q_{+1/2}(\gamma) \quad (\text{III.1})$$

na qual  $\xi$  representa o anel fonte e  $X$ , o anel campo, de acordo com a Figura III.1.

A seguinte notação foi utilizada:

$$\begin{aligned} \rho &= r(\xi) & ; & & z_0 &= z(\xi) \\ r &= r(X) & ; & & z &= z(X) \\ \tilde{z} &= z - z_0 \\ \gamma &= 1 + \frac{(r-\rho)^2 + \tilde{z}^2}{2\rho r} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

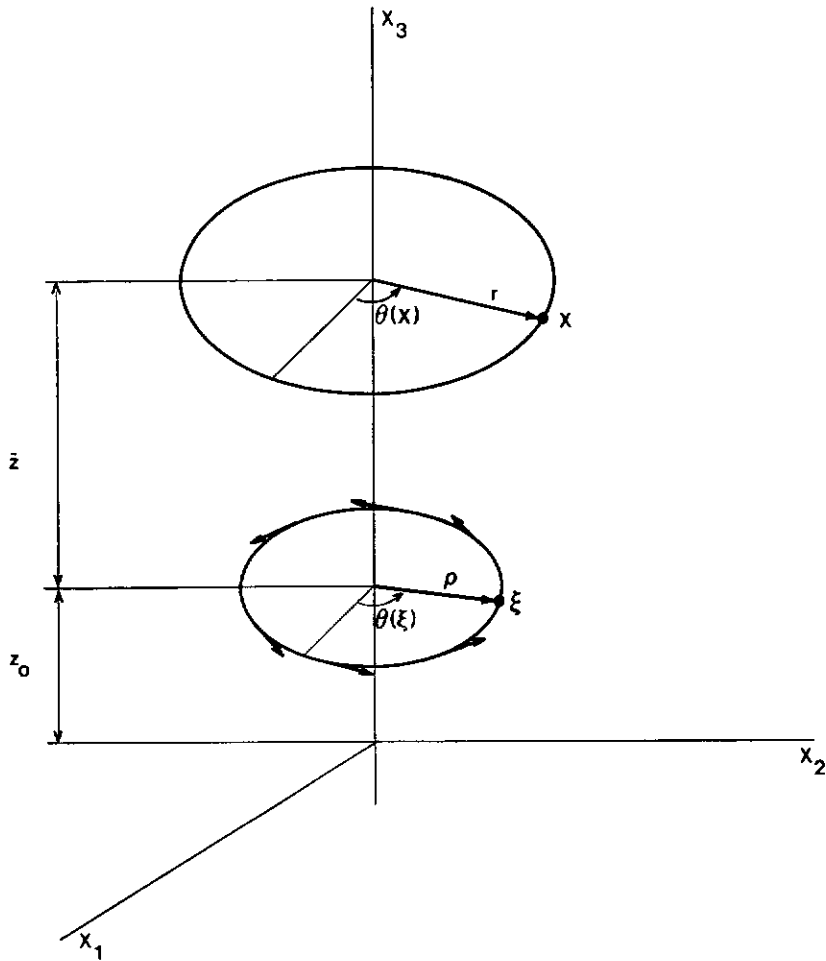


Figura III.1 - Anel fonte e anel campo

A função de Legendre  $Q_{+1/2}(\gamma)$  pode ser expressa como uma combinação de integrais elípticas completas do primeiro (K) e do segundo (E) tipos e a solução fundamental pode ser apresentada como

$$u_{\theta}^*(\xi; X) = \frac{1}{4\pi^2 G} \frac{1}{\rho r \sqrt{(r+\rho)^2 + \bar{z}^2}} \{ (r^2 + \rho^2 + \bar{z}^2) K(m) + [(r+\rho)^2 + \bar{z}^2] E(m) \} \quad (\text{III.3})$$

onde  $m$  é o chamado parâmetro das integrais elípticas, é igual ao quadrado do módulo dessas integrais e é dado por

$$m = k^2 = \frac{2}{1+\gamma} = \frac{4\rho r}{(r+\rho)^2 + \bar{z}^2} \quad (\text{III.4})$$

As tensões fundamentais são obtidas através da substituição de  $u_\theta^*(\xi; X)$  nas equações (II.6), o que conduz às seguintes expressões

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^*(\xi; X) = & \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\rho r^2 \sqrt{(r+\rho)^2 + \bar{z}^2}} \{ -2(2\rho^2 + r^2 + 2\bar{z}^2) K(m) + \\ & + [3((r+\rho)^2 + \bar{z}^2) + \frac{(r^2 + \rho^2 + \bar{z}^2)(\rho^2 - r^2 + \bar{z}^2)}{(r-\rho)^2 + \bar{z}^2}] E(m) \} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\tau_{\theta z}^*(\xi; X) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\bar{z}}{\rho r \sqrt{(r+\rho)^2 + \bar{z}^2}} \left\{ K(m) - \frac{(r^2 + \rho^2 + \bar{z}^2)}{(r-\rho)^2 + \bar{z}^2} E(m) \right\}$$

A força de superfície fundamental, obtida através da equação (II.10), é igual a

$$p_\theta^*(\xi; X) = \tau_{r\theta}^*(\xi; X) n_r(X) + \tau_{\theta z}^*(\xi; X) n_z(X) \quad (\text{III.6})$$

onde  $n_r(X)$  e  $n_z(X)$  são os cossenos diretores da normal exterior a um contorno  $\bar{\Gamma}$  e  $X \in \bar{\Gamma}$ .

Como a única componente não nula do deslocamento produzido pelo anel fonte é a circunferencial, o índice  $\theta$  não mais será utilizado para representá-la, o mesmo acontecendo em relação à força de superfície associada; portanto:

$$u^*(\xi; X) = u_\theta^*(\xi; X) \quad ; \quad p^*(\xi; X) = p_\theta^*(\xi; X)$$

e

$$u(X) = u_\theta(X) \quad ; \quad p(X) = p_\theta(X)$$

## III.2 - IDENTIDADE DE SOMIGLIANA

Seja um sólido de revolução definido por um domínio  $\tilde{\Omega}$  e um contorno  $\tilde{\Gamma}$ , em estado de equilíbrio representado por  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$ ,  $\varepsilon_{r\theta}$ ,  $\varepsilon_{\theta z}$ ,  $u$  e  $p$  (não há forças de volume). Seja também um corpo infinito, de domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$ , que contém o sólido de revolução em estudo e cujo estado de equilíbrio é representado por  $\tau_{r\theta}^*$ ,  $\tau_{\theta z}^*$ ,  $\varepsilon_{r\theta}^*$ ,  $\varepsilon_{\theta z}^*$ ,  $u^*$  e  $p^*$ .

Admitindo que as propriedades elásticas são válidas para os dois corpos, obtém-se a seguinte identidade a partir da aplicação da lei de Hooke

$$\begin{aligned} & 2[\tau_{r\theta}^*(\xi;X) \varepsilon_{r\theta}(X) + \tau_{\theta z}^*(\xi;X) \varepsilon_{\theta z}(X)] = \\ & = 2[\tau_{r\theta}(X) \varepsilon_{r\theta}^*(\xi;X) + \tau_{\theta z}(X) \varepsilon_{\theta z}^*(\xi;X)] \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

ou, com a notação simplificada e integrando ambos os lados

$$2 \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} [\tau_{r\theta}^* \varepsilon_{r\theta} + \tau_{\theta z}^* \varepsilon_{\theta z}] d\Omega = 2 \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} [\tau_{r\theta} \varepsilon_{r\theta}^* + \tau_{\theta z} \varepsilon_{\theta z}^*] d\Omega \quad (\text{III.8})$$

onde  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  é o domínio obtido quando se retira de  $\tilde{\Omega}$  um toróide com seção meridional de raio  $\varepsilon$  e contorno  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  e com centro no anel fonte. Esse procedimento elimina a singularidade que ocorre quando  $\xi \in \tilde{\Omega}$  e  $\xi = X$ .

Tendo em vista a simetria do problema, a equação (III.8) pode ser integrada em relação a  $\theta$  ( $d\Omega = r d\theta dr dz$ ), fornecendo

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{\Omega_\epsilon} 2[\tau_{r\theta}^* \epsilon_{r\theta} + \tau_{\theta z}^* \epsilon_{\theta z}] r d\Omega = \\
 & = 2\pi \int_{\Omega_\epsilon} 2[\tau_{r\theta} \epsilon_{r\theta}^* + \tau_{\theta z} \epsilon_{\theta z}^*] r d\Omega \quad \text{(III.9)}
 \end{aligned}$$

onde  $\Omega$  corresponde a um domínio bi-dimensional no plano  $r$ - $z$ , de contorno  $\Gamma$ , do qual foi retirado um círculo de raio  $\epsilon$  e contorno  $\bar{\Gamma}_\epsilon$ , com centro no ponto fonte, para formar o domínio  $\Omega_\epsilon$  (Figura III.2). A referência ao anel fonte, do espaço tri-dimensional, será feita utilizando-se a designação ponto fonte, do plano bi-dimensional; analogamente, o anel campo será designado por ponto campo.

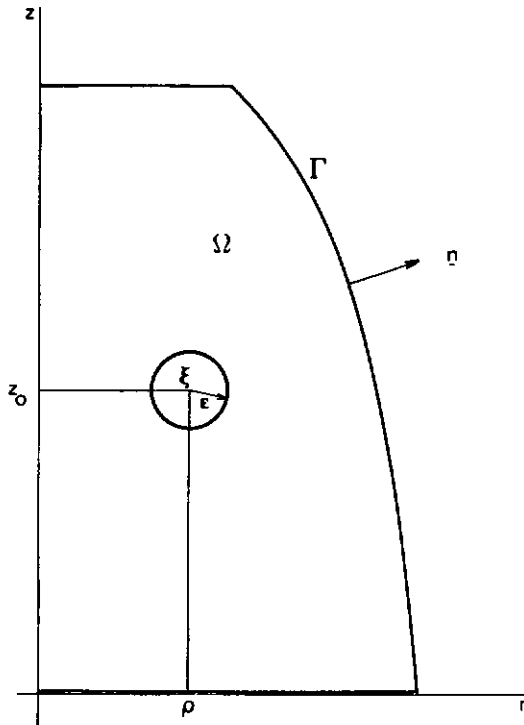


Figura III.2 - Seção meridional do sólido de revolução

Substituindo as relações deformação-deslocamento

(II.5) em (III.9), obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{\Omega_\epsilon} \left[ \tau_{r\theta}^* \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \tau_{\theta z}^* \frac{\partial u}{\partial z} \right] r d\Omega = \\
 & = 2\pi \int_{\Omega_\epsilon} \left[ \tau_{r\theta}^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial r} - \frac{u^*}{r} \right) + \tau_{\theta z}^* \frac{\partial u^*}{\partial z} \right] r d\Omega \quad \text{(III.10)}
 \end{aligned}$$

Integrando por partes e considerando a equação diferencial de equilíbrio (II.7), obtêm-se

$$2\pi \int_{\Gamma + \bar{\Gamma}_\epsilon} p^* u r d\Gamma = 2\pi \int_{\Gamma + \bar{\Gamma}_\epsilon} u^* p r d\Gamma \quad \text{(III.11)}$$

que corresponde ao teorema da reciprocidade (segundo teorema de Betti).

Seja, agora, o estudo das integrais de contorno calculadas sobre  $\bar{\Gamma}_\epsilon$  para a situação limite, isto é, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Verifica-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} u^* p r d\Gamma = 0 \quad \text{(III.12)}$$

A integral à esquerda em (III.11) pode ser decomposta da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 2\pi \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p^* u r d\Gamma &= 2\pi \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p^* [u(X) - u(\xi)] r d\Gamma + u(\xi) 2\pi \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p^* r d\Gamma \\
 &\dots \quad \text{(III.13)}
 \end{aligned}$$

Tomando-se o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a primeira integral

à direita na equação acima se anula devido à hipótese da continuidade dos deslocamentos; a segunda pode ser calculada analiticamente - utilizando-se a expressão apropriada para  $p^*$  quando os argumentos  $\gamma$  em (III.1) são pequenos - ou a partir da definição de que a solução fundamental corresponde a um anel de cargas circunferenciais unitário aplicado em  $\xi$ . A utilização desta definição conduz a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(\xi) = 2\pi \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p^* r d\Gamma = u(\xi) \quad (\text{III.14})$$

A identidade de Somigliana para o deslocamento  $u$  pode, então, ser escrita como

$$u(\xi) = 2\pi \int_{\Gamma} u^*(\xi; X) p(X) r(X) d\Gamma(X) - 2\pi \int_{\Gamma} p^*(\xi; X) u(X) r(X) d\Gamma(X) \dots \quad (\text{III.15})$$

na qual o contorno  $\Gamma$  corresponde a um dos meridianos do sólido de revolução.

## III.3 - CÁLCULO DAS TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS

A identidade de Somigliana é uma representação contínua dos deslocamentos em pontos do interior do corpo; as componentes das tensões nos pontos internos podem ser obtidas através da sua derivação em relação às coordenadas do ponto fonte e da substituição nas relações tensão-deslocamento apresentadas abaixo

$$\tau_{r\theta}(\xi) = G \left[ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \rho} - \frac{u(\xi)}{\rho} \right] \quad (\text{III.16})$$

$$\tau_{\theta z}(\xi) = G \frac{\partial u(\xi)}{\partial z_0}$$

A substituição de (III.15) em (III.16) fornece as seguintes expressões para as componentes de tensão

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(\xi) = & G 2\pi \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial \rho} - \frac{u^*(\xi; X)}{\rho} \right] p(X) r(X) d\Gamma(X) - \\ & - G 2\pi \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial p^*(\xi; X)}{\partial \rho} - \frac{p^*(\xi; X)}{\rho} \right] u(X) r(X) d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}(\xi) = & G 2\pi \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\xi; X)}{\partial z_0} p(X) r(X) d\Gamma(X) - \\ & - G 2\pi \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*(\xi; X)}{\partial z_0} u(X) r(X) d\Gamma(X) \end{aligned}$$

Para a obtenção das derivadas dos tensores fundamentais (deslocamento e tensões), as seguintes relações são empre-

gadas

$$\frac{dK(m)}{dm} = \frac{E(m) - (1-m)K(m)}{2m(1-m)} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{dE(m)}{dm} = \frac{E(m) - K(m)}{2m}$$

As expressões resultantes da derivação dos tensores fundamentais estão apresentadas no Apêndice B.

#### III.4 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A identidade de Somigliana não permite a obtenção do deslocamento  $e$ , conseqüentemente, das tensões nos pontos internos enquanto houver deslocamentos e/ou forças de superfície incôgnitos no contorno. Portanto, torna-se necessário encontrar uma forma limite da equação (III.15) para o caso em que o ponto fonte  $\xi$  pertence ao contorno.

Seguindo o procedimento apresentado em [8], encontra-se a seguinte equação, denominada Equação Integral de Contorno ( $\xi \in \Gamma$ ):

$$c(\xi)u(\xi) + 2\pi \int_{\Gamma} p^*(\xi;X)u(X)r(X)d\Gamma(X) = 2\pi \int_{\Gamma} u^*(\xi;X)p(X)r(X)d\Gamma(X) \quad \dots (\text{III.19})$$

na qual a integral ao lado esquerdo deve ser calculada no sentido de valor principal de Cauchy.

Para pontos internos,  $c(\xi) = 1$  ; para pontos do contorno que possuem uma única normal,  $c(\xi) = 1/2$  .

Em aplicações práticas,  $c(\xi)$  e seu valor principal associado são calculados de maneira indireta, quando a equação integral de contorno é utilizada para representar um movimento de corpo rígido (no caso da torção, o movimento de corpo rígido corresponde a uma rotação em torno do eixo da peça). Esse cálculo indireto será apresentado posteriormente.

### III.5 - DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Para a solução numérica da equação (III.19) e, conseqüentemente, das equações (III.15) e (III.17), assume-se inicialmente o contorno  $\Gamma$  representado por uma série de elementos, sobre os quais o deslocamento e a força de superfície são interpolados utilizando os valores nodais correspondentes desses elementos; a seguir, aplica-se a equação (III.19) na sua forma discretizada para cada ponto nodal  $\xi$  do contorno, com as integrais sendo efetuadas sobre cada elemento e, finalmente, impõem-se as condições de contorno (deslocamentos e forças de superfície prescritas) ao sistema de equações lineares formado, cuja resolução fornece os valores das incógnitas.

As coordenadas cilíndricas  $\underline{r}^{(j)}$  dos pontos localizados sobre cada elemento  $\Gamma_j$ , do contorno discretizado, são expressas em termos da função de interpolação  $\underline{\psi}$  e das coordenadas nodais  $\underline{r}^{(m)}$  do elemento através da seguinte relação matricial

$$\underline{r}^{(j)} = \underline{\psi} \underline{r}^{(m)} \quad (\text{III.20})$$

na qual o superíndice  $m$  se refere ao número de nós do contorno que definem a geometria do elemento.

Da mesma maneira, o deslocamento e a força de superfície são interpolados sobre cada elemento  $\Gamma_j$  utilizando a função de interpolação  $\underline{\phi}$  e os valores nodais  $\underline{u}^{(n)}$  e  $\underline{p}^{(n)}$  dos deslocamentos e forças de superfície. Obtém-se, então, as seguintes relações matriciais

$$\underline{u}^{(j)} = \underline{\phi} \underline{u}^{(n)} \quad (\text{III.21})$$

$$\underline{p}^{(j)} = \underline{\phi} \underline{p}^{(n)}$$

Aqui, o superíndice  $n$  se refere ao número de nós do contorno que definem a lei de variação do deslocamento  $u$  e da força de superfície  $p$  sobre cada elemento  $\Gamma_j$ . Neste trabalho,  $m=n$ , o que implica que  $\underline{\psi} = \underline{\phi}$ . Assim, elemento linear significa que o elemento possui geometria linear e variação linear para o deslocamento e a força de superfície, a mesma definição sendo válida para elemento quadrático.

Se o contorno  $\Gamma$  é discretizado em  $N$  elementos, a versão discretizada da equação (III.19) para o  $i$ -ésimo nó  $\xi_i$  é a seguinte

$$c(\xi_i)u(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \left[ 2\pi \int_{\Gamma_j} p^* \underline{\phi} r d\Gamma \right] \underline{u}^{(n)} = \sum_{j=1}^N \left[ 2\pi \int_{\Gamma_j} u^* \underline{\phi} r d\Gamma \right] \underline{p}^{(n)} \quad \dots \quad (\text{III.22})$$

As funções de interpolação que constituem  $\underline{\phi}$  são expressas em termos de um sistema de coordenadas intrínseco  $\eta$ ; em função desse sistema, pode-se escrever

$$d\Gamma = |J| d\eta \quad (\text{III.23})$$

onde  $|J|$  é o Jacobiano da transformação, definido por

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2} = \frac{d\Gamma}{d\eta} \quad (\text{III.24})$$

Quando o nó  $\xi_i$  não pertence ao elemento  $\Gamma_j$ , as integrais apresentadas em (III.22) podem ser calculadas numericamente, através da quadratura de Gauss, como apresentado abaixo

$$\underline{h}_{ij} = 2\pi \int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{\phi} r d\Gamma = 2\pi \int_{-1}^1 \underline{p}^* \underline{\phi} r |J| d\eta = 2\pi \sum_{k=1}^K (\underline{p}^* \underline{\phi} r)_k |J|_k w_k \quad (\text{III.25})$$

$$\underline{g}_{ij} = 2\pi \int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{\phi} r d\Gamma = 2\pi \int_{-1}^1 \underline{u}^* \underline{\phi} r |J| d\eta = 2\pi \sum_{k=1}^K (\underline{u}^* \underline{\phi} r)_k |J|_k w_k$$

onde  $K$  representa o número de pontos de integração de Gauss e  $w_k$ , o peso associado a cada ponto de integração.

Quando o nó  $\xi_i$  coincide com um dos nós do elemento a ser integrado, utilizam-se procedimentos alternativos para se efetuar a integração. Tais procedimentos serão discutidos posteriormente.

Para a integração numérica, representações polinômiais são empregadas (aproximações de Chebyshev) para as integrais

elípticas  $K(m)$  e  $E(m)$  que aparecem nas expressões correspondentes aos tensores fundamentais. O parâmetro  $\mu$  dos polinômios é igual ao quadrado do módulo complementar de tais integrais e é definido como

$$\mu = k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(r-\rho)^2 + \tilde{z}^2}{(r+\rho)^2 + \tilde{z}^2} \quad (\text{III.26})$$

Obtém-se, assim, as seguintes aproximações (segundo [12])

$$K(m) \cong \sum_{i=0}^n a_i \mu^i + \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) \sum_{i=0}^n b_i \mu^i \quad (\text{III.27})$$

$$E(m) \cong \sum_{i=0}^n c_i \mu^i + \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) \sum_{i=0}^n d_i \mu^i$$

nas quais

$$a_0 = \ln 4 \quad ; \quad b_0 = 1/2 \quad ; \quad \sum_{i=0}^n a_i = \pi/2 \quad (\text{III.28})$$

$$c_0 = 1 \quad ; \quad d_0 = 0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^n c_i = \pi/2$$

Neste trabalho  $n=4$ , o que fornece um erro máximo da ordem de  $10^{-8}$ , segundo a mesma referência.

Os valores dos coeficientes dos polinômios, para  $n=4$ , estão no Apêndice C.

A aplicação da equação (III.22) aos NN nós do contorno fornece um sistema de NN equações lineares, com a seguinte representação matricial

$$(\underline{c} + \underline{H})\underline{u} = \underline{Gp} \quad (\text{III.29})$$

na qual os vetores  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  contêm os valores dos deslocamentos e das forças de superfície dos nós do contorno. A matriz diagonal  $\underline{c}$  pode ser incorporada à matriz  $\underline{H}$ , resultando na seguinte representação

$$\underline{Hu} = \underline{Gp} \quad (\text{III.30})$$

Os coeficientes das diagonais principais das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são obtidos através da integração de elementos que contêm o nó  $\xi_i$  e a sua obtenção, como já foi mencionado anteriormente, não é imediata, isto é, não se dá através da integração direta dos elementos como está representado em (III.25). Os coeficientes da diagonal principal da matriz  $\underline{H}$  - que correspondem ao "termo livre"  $\underline{c}$  mais a sua integral no sentido de valor principal associada - são obtidos mediante a aplicação de uma rotação de corpo rígido (que não produz esforços) ao sólido analisado. A equação (III.30), após a aplicação de um giro unitário, torna-se

$$\underline{Hu} = \underline{0} \quad (\text{III.31})$$

Os coeficientes da diagonal principal são, então, obtidos como segue (os índices repetidos não implicam em soma)

$$h_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{NN} h_{ij} \frac{r_j}{r_i} \quad r_i \neq 0 \quad (\text{III.32})$$

O cálculo dos coeficientes da diagonal principal da matriz  $\underline{G}$  depende da função de interpolação adotada e será ilustrado quando os elementos empregados para a discretização fo

rem apresentados.

Aplicando-se as NN condições de contorno, a equação (III.30) pode ser reordenada e o sistema resultante tem a seguinte representação matricial

$$\underline{A}\underline{y} = \underline{f} \quad (\text{III.33})$$

Neste sistema,  $\underline{A}$  é uma matriz cheia de ordem  $(NN \times NN)$ ,  $\underline{y}$  é o vetor das incógnitas e  $\underline{f}$ , o vetor que contém as contribuições dos valores prescritos. Em aplicações práticas, a matriz  $\underline{A}$  é formada diretamente, prescindindo-se da formação das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ .

Uma vez resolvido o sistema (III.33), o deslocamento e as tensões nos pontos internos são obtidos através do emprego das equações (III.15) e (III.17) na forma discretizada. A integração ao longo do contorno, nesse caso, é efetuada sem problemas, pois não há integrais singulares.

É importante observar que o deslocamento e as tensões se anulam quando  $r=0$ . Como os tensores fundamentais também se anulam quando  $\xi$  ou  $X$  pertencem ao eixo de rotação, para essa situação a equação (III.22) se reduz a

$$c(\xi_k)u(\xi_k) = 0 \quad (\text{III.34})$$

com  $c(\xi_k) = 1$  e  $u(\xi_k) = 0$ , como foi mencionado acima. Então, a  $k$ -ésima linha da matriz  $\underline{H}$  possui um único coeficiente não nulo, o coeficiente  $h_{kk} = c(\xi_k)$ , enquanto que a  $k$ -ésima linha da matriz  $\underline{G}$  possui todos os coeficientes nulos.

Para a solução numérica das equações (III.15), (III.17) e (III.19) foram utilizados dois tipos de elementos: o elemento linear e o elemento quadrático.

### III.5.1 - ELEMENTO LINEAR

Para o elemento linear (Figura III.3), as funções de integração  $\underline{\psi}$  e  $\underline{\phi}$  são iguais a

$$\underline{\psi} = \underline{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2] \quad (\text{III.35})$$

onde

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\eta) \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (\text{III.36})$$

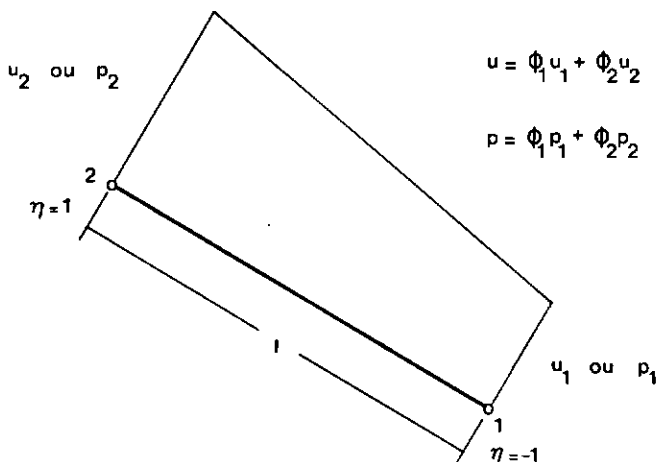


Figura III.3 - Elemento linear

Em função da figura acima, os vetores  $\underline{r}^{(m)}$ ,  $\underline{u}^{(n)}$  e  $\underline{p}^{(n)}$  podem ser representados esquematicamente como  $[( )_1 \quad ( )_2]_j^T$ ,

com os índices 1 e 2 representando, respectivamente, os nós inicial e final do elemento  $\Gamma_j$ .

O Jacobiano da transformação é constante e igual à metade do comprimento do elemento, isto é,  $|J| = \ell/2$ .

As submatrizes  $\tilde{h}_{ij}$  e  $\tilde{g}_{ij}$ , definidas em (III.25), são de ordem (1x2) e podem ser representadas como (o índice i se refere ao nó  $\xi_i$ ; o índice j, ao elemento  $\Gamma_j$ ):

$$\tilde{h}_{ij} = [h_{i1} \quad h_{i2}]_j = 2\pi \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 p^*[\phi_1 \quad \phi_2] r d\eta \quad (\text{III.37})$$

$$\tilde{g}_{ij} = [g_{i1} \quad g_{i2}]_j = 2\pi \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u^*[\phi_1 \quad \phi_2] r d\eta$$

Quando  $\xi_i$  coincide com um dos nós do elemento  $\Gamma_j$ , isto é, quando  $\xi = X$

$$m = \frac{4\rho r}{(r+\rho)^2 + \bar{z}^2} = 1 \quad (\text{ou } \mu = 0) \quad (\text{III.38})$$

e a integral elíptica  $K(m)$  apresenta singularidade logarítmica, enquanto que  $E(1) = 1$ . De acordo com o seu desenvolvimento polinomial (primeira expressão em (III.27)),

$$K(m) = \ln\left(\frac{4}{k'}\right) + 0 (k'^2 \ln k') \quad \text{quando } k' \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow 1) \quad \dots \quad (\text{III.39})$$

Para contornar essa dificuldade adicional, tendo em vista a obtenção dos coeficientes da diagonal principal da matriz  $\underline{G}$ , uma solução bastante satisfatória é obtida lembrando

que uma função qualquer  $f(\alpha) = (\alpha - \beta) \ln|\alpha - \beta|$  possui o seguinte comportamento

$$f(\alpha) = (\alpha - \beta) \ln|\alpha - \beta| \rightarrow 0 \quad \text{quando } \alpha \rightarrow \beta \quad (\text{III.40})$$

Assim, é efetuada uma transformação não-linear no sistema de coordenadas intrínseco, transformação tal que o seu Jacobiano se anula na singularidade, e integra-se normalmente u utilizando a quadratura de Gauss.

Quando  $\xi_i$  coincide com o nó inicial do elemento  $\Gamma_j$  (nó 1), a singularidade ocorre para  $\eta = -1$ ; a transformação requerida é a seguinte

$$\eta = -\frac{1}{2} (1 - \psi^2) + \psi \quad ; \quad |J| = 1 + \psi \quad (\text{III.41})$$

(notar que para  $\psi = -1$ ,  $|J| = 0$ ).

O elemento  $g_{i1}$  da submatriz  $g_{ij}$ , correspondente ao nó singular, é calculado como segue (o elemento  $g_{i2}$  é calculado normalmente)

$$g_{i1} = 2\pi \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u^* \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \psi^2) - \psi \right] r (1 + \psi) d\psi \quad (\text{III.42})$$

Quando  $\xi_i$  coincide com o nó final do elemento  $\Gamma_j$  (nó 2), a singularidade ocorre para  $\eta = 1$ ; a transformação requerida agora é a seguinte

$$\eta = \frac{1}{2} (1 - \psi^2) + \psi \quad ; \quad |J| = 1 - \psi \quad (\text{III.43})$$

(notar que para  $\psi = 1$ ,  $|J| = 0$ ).

O elemento  $g_{i2}$  da submatriz  $g_{ij}$ , correspondente ao nó singular,   calculado como segue (o elemento  $g_{i1}$    calculado normalmente)

$$g_{i2} = 2\pi \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u^* \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(1-\psi^2) + \psi \right] r(1-\psi) d\psi \quad (\text{III.44})$$

### III.5.2 - ELEMENTO QUADRÁTICO

Para o elemento quadrático (Figura III.4), as funções de interpolação  $\underline{\psi}$  e  $\underline{\phi}$  são iguais a

$$\underline{\psi} = \underline{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \quad (\text{III.45})$$

onde

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \eta(1-\eta) ; \quad \phi_2 = (1-\eta)(1+\eta) ; \quad \phi_3 = \frac{1}{2} \eta(1+\eta) \quad \dots \quad (\text{III.46})$$

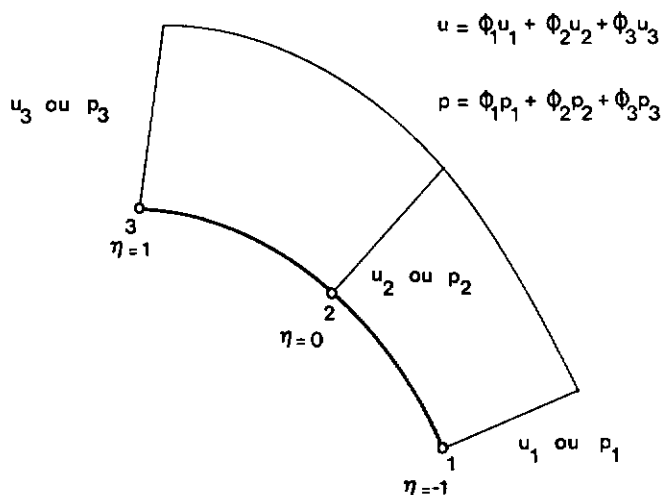


Figura III.4 - Elemento quadrático

Em função da Figura III.4, os vetores  $\underline{r}^{(m)}$ ,  $\underline{u}^{(n)}$  e  $\underline{p}^{(n)}$  podem ser representados esquematicamente como  $[(\ )_1 \ (\ )_2 \ (\ )_3]_j^T$ , com os índices 1, 2 e 3 representando, respectivamente, os nós inicial, intermediário e final do elemento  $\Gamma_j$ .

As submatrizes  $\underline{h}_{ij}$  e  $\underline{g}_{ij}$ , definidas em (III.25), são de ordem (1x3) e podem ser representadas como

$$\underline{h}_{ij} = [h_{i1} \ h_{i2} \ h_{i3}]_j = 2\pi \int_{-1}^1 p^*[\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] |J| r d\eta \quad (\text{III.47})$$

$$\underline{g}_{ij} = [g_{i1} \ g_{i2} \ g_{i3}]_j = 2\pi \int_{-1}^1 u^*[\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] |J| r d\eta$$

Para a obtenção dos elementos da submatriz  $\underline{g}_{ij}$  correspondentes à singularidade nos nós inicial ou final, empregam-se as mesmas transformações apresentadas em (III.41) e (III.43). Quando o nó singular é o nó intermediário (nó 2), o elemento correspondente -  $g_{i2}$  - é calculado como segue

$$g_{i2} = 2\pi \int_{-1}^1 u^* \phi_2' r |J| \frac{(1-\psi)}{2} d\psi + 2\pi \int_{-1}^1 u^* \phi_2'' r |J| \frac{(1+\psi)}{2} d\psi \quad \dots \quad (\text{III.48})$$

As seguintes transformações foram empregadas para

$$\phi_2' : \eta = \frac{1}{2} \left[ \psi - \frac{1}{2} (1+\psi^2) \right] ; \quad |J| = \frac{1}{2} (1-\psi) \quad (\text{III.49})$$

$$\phi_2'' : \eta = \frac{1}{2} \left[ \psi + \frac{1}{2} (1+\psi^2) \right] ; \quad |J| = \frac{1}{2} (1+\psi)$$

A obtenção das transformações (III.41), (III.43) e (III.49) está apresentada no Apêndice D.

### III.6 - CÁLCULO DAS TENSÕES NOS NÓS DO CONTORNO

O cálculo das tensões nos nós do contorno não requer nenhuma integração e só depende dos valores do deslocamento e da força de superfície interpolados sobre os elementos do contorno discretizado. As tensões são calculadas empregando as expressões abaixo

$$\tau_{r\theta}(X) = p(X)n_r(X) - G \left[ \frac{du(X)}{d\Gamma(X)} + \frac{u(X)}{r(X)} n_z(X) \right] n_z(X) \quad (\text{III.50})$$

$$\tau_{\theta z}(X) = p(X)n_z(X) + G \left[ \frac{du(X)}{d\Gamma(X)} + \frac{u(X)}{r(X)} n_z(X) \right] n_r(X)$$

A derivada de  $u(X)$  é calculada diretamente sobre as funções de interpolação.

As equações (III.50) constituem o caso mais geral, no qual a torção também pode ser produzida por um carregamento distribuído ao longo da superfície lateral da peça. A dedução dessas equações, para o caso elastoplástico, está apresentada no Apêndice E; a redução para o caso elástico é feita tomando-se as componentes de deformação plástica ali presentes iguais a zero.

### III.7 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Nas aplicações numéricas apresentadas a seguir, o conceito de nó duplo é utilizado para simular a descontinuidade de força de superfície no contorno e, também, para simular uma mudança brusca na geometria da seção meridional.

O nó duplo consiste em dois nós do contorno com as mesmas coordenadas, sem nenhum elemento entre eles (não se cria um elemento de comprimento nulo). A única limitação prática na utilização deste conceito ocorre quando ambos os nós possuem o deslocamento como condição de contorno, isto é, quando o deslocamento é prescrito nesses nós coincidentes. Tal situação gera uma matriz  $\underline{A}$  singular. Além disso, a hipótese de continuidade dos deslocamentos deixa de ser satisfeita, pois seria possível prescrever deslocamentos diferentes nesses nós coincidentes.

Um procedimento alternativo para contornar essa dificuldade foi proposto por CHAUDONNERET [17]. Nas aplicações numéricas apresentadas neste trabalho, entretanto, não houve nenhum caso no qual fosse necessário prescrever o deslocamento nos dois nós coincidentes.

## III.7.1 - EIXO TRONCO CÔNICO

Quando a superfície lateral está descarregada, o problema da torção do eixo tronco cônico possui a seguinte solução [14]:

$$u = \frac{crz}{3G(r^2+z^2)^{3/2}} \quad (\text{III.51})$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-cr^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \quad ; \quad \tau_{\theta z} = \frac{-crz}{(r^2+z^2)^{5/2}} \quad (\text{III.52})$$

onde

$$c = - \frac{M}{2\pi(2/3 - \cos\alpha + 1/3\cos^3\alpha)} \quad (\text{III.53})$$

Na expressão acima,  $M$  é o momento torçor que atua nas extremidades do eixo. O ângulo  $\alpha$  está definido na Figura III.5.

A seção meridional do eixo e as duas discretizações utilizadas na análise estão apresentadas na figura a seguir.

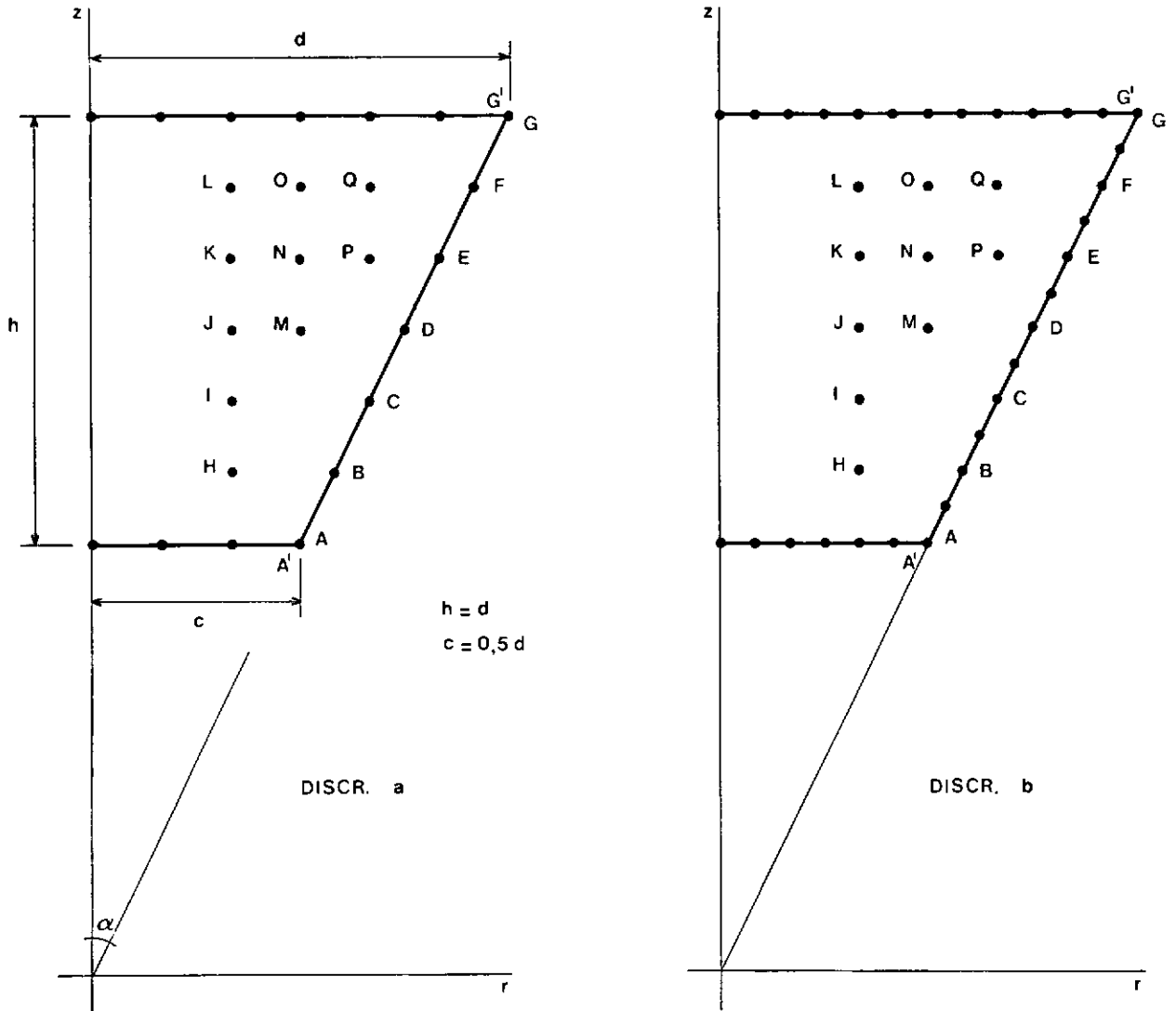


Figura III.5 - Seção meridional e discretizações do contorno

Esta aplicação numérica possui duas finalidades: em primeiro lugar, mostrar a convergência dos resultados em função do refinamento da "malha" de elementos de contorno, o que foi feito com a utilização do elemento linear; em segundo lugar, comparar os resultados obtidos com a utilização dos elementos linear e quadrático para a mesma discretização (discretização b).

Foi imposto um campo de deslocamento (equação (III.51)) nas extremidades do eixo  $e$ , na superfície lateral,

foi prescrito o valor nulo para a força de superfície. Como a finalidade deste exemplo é simplesmente didática, adotou-se para a constante  $c$  em (III.53) o valor  $c = 1000$ ; para o módulo de elasticidade transversal, adotou-se o valor  $G = 800$ .

Os resultados obtidos para o deslocamento  $u$  e para as tensões cisalhantes  $\tau_{r\theta}$  e  $\tau_{\theta z}$ , nos nós da superfície lateral comuns às duas discretizações, são apresentados nas tabelas III.1 e III.2, respectivamente.

É importante observar que: os valores dos deslocamentos foram obtidos após a resolução do sistema de equações (III.33) que, por sua vez, é formado a partir da aplicação da equação integral (III.22) a cada nó do contorno; os valores das tensões cisalhantes foram obtidos com o emprego das equações (III.50), ou seja, através da derivação dos deslocamentos interpolados, o que não fornece resultados muito precisos e torna a convergência mais lenta.

Tabela III.1 - Deslocamento nos nós da superfície lateral

NÓ	SOLUÇÃO EXATA	DISCRET. (a)	DISCRET. (b)
A	0,41409	0,41409	0,41409
B	0,30422	0,30490	0,30438
C	0,23292	0,23387	0,23316
D	0,18404	0,18476	0,18422
E	0,14907	0,14941	0,14916
F	0,12320	0,12318	0,12319
G	0,10352	0,10352	0,10352

## Observações:

- 1 - Os valores dos deslocamentos estão multiplicados por  $10^2$ .
- 2 - Os nós A(A') e G(G') são nós duplos; daí a razão pela qual os deslocamentos em A e G coincidem com os deslocamentos prescritos em A' e G', respectivamente.

Tabela III.2 - Tensões cisalhantes nos nós da superfície lateral

NÓ	SOLUÇÃO EXATA		DISCRET. (a)		DISCRET. (b)	
	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$
A	0,66254	1,32508	0,57024	1,14049	0,61296	1,22593
B	0,41723	0,83445	0,42772	0,85544	0,41941	0,83882
C	0,27951	0,55902	0,28578	0,57156	0,28109	0,56217
D	0,19631	0,39262	0,20083	0,40166	0,19742	0,39484
E	0,14311	0,28622	0,14633	0,29266	0,14393	0,28787
F	0,10752	0,21504	0,10926	0,21852	0,10808	0,21615
G	0,08282	0,16563	0,09051	0,18103	0,08620	0,17240

Os resultados relativos às tensões nos pontos internos selecionados, obtidos com o emprego das equações integrais apropriadas (equações (III.17)), são apresentados na tabela a seguir.

Tabela III.3 - Tensões cisalhantes nos pontos internos selecionados

PONTO	SOLUÇÃO EXATA		DISCRET. (a)		DISCRET. (b)	
	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$
H	0,19560	0,68460	0,18781	0,67418	0,19373	0,68188
I	0,10490	0,41961	0,10218	0,41798	0,10422	0,41911
J	0,06005	0,27022	0,05924	0,27108	0,05985	0,27040
K	0,03626	0,18132	0,03604	0,18282	0,03621	0,18168
L	0,02290	0,12594	0,02282	0,12760	0,02288	0,12635
M	0,11712	0,35136	0,11631	0,35408	0,11691	0,35200
N	0,07256	0,24185	0,07242	0,24448	0,07251	0,24248
O	0,04671	0,17126	0,04665	0,17375	0,04669	0,17188
P	0,11040	0,27600	0,11065	0,27974	0,11046	0,27689
Q	0,07283	0,20029	0,07292	0,20341	0,07285	0,20105

As três tabelas anteriores mostram a convergência dos resultados em função do refinamento da discretização. Em relação às tabelas III.2 e III.3 é importante observar que, para a mesma discretização, o emprego das equações integrais fornece resultados mais precisos para as tensões. Por exemplo, com a utilização da discretização b, o maior erro encontrado nos nós do contorno foi de 7,5%; nos pontos internos selecionados, esse valor caiu para 0,95%.

Nas tabelas seguintes, são apresentados os resultados relativos à discretização  $b$  e obtidos com a utilização dos elementos linear e quadrático.

Tabela III.4 - Deslocamento nos nós da superfície lateral

NÓ	SOLUÇÃO EXATA	ELEMENTO LINEAR	ELEMENTO QUADRÁTICO
A	0,41409	0,41409	0,41409
B	0,30422	0,30438	0,30419
C	0,23292	0,23316	0,23290
D	0,18404	0,18422	0,18403
E	0,14907	0,14916	0,14907
F	0,12320	0,12319	0,12320
G	0,10352	0,10352	0,10352

Tabela III.5 - Tensões cisalhantes nos nós da superfície lateral

NÓ	SOLUÇÃO EXATA		ELEMENTO LINEAR		ELEMENTO QUADRÁTICO	
	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$
A	0,66254	1,32508	0,61296	1,22593	0,65359	1,30717
B	0,41723	0,83445	0,41941	0,83882	0,41116	0,82232
C	0,27951	0,55902	0,28109	0,56217	0,27646	0,55292
D	0,19631	0,39262	0,19742	0,39484	0,19462	0,38923
E	0,14311	0,28622	0,14393	0,28787	0,14209	0,28418
F	0,10752	0,21504	0,10808	0,21615	0,10690	0,21381
G	0,08282	0,16563	0,08620	0,17240	0,08240	0,16480

Tabela III.6 - Tensões cisalhantes nos pontos internos selecionados

PONTO	SOLUÇÃO EXATA		ELEMENTO LINEAR		ELEMENTO QUADRÁTICO	
	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{\theta z}$
H	0,19560	0,68460	0,19373	0,68188	0,19551	0,68443
I	0,10490	0,41961	0,10422	0,41911	0,10488	0,41950
J	0,06005	0,27022	0,05985	0,27040	0,60036	0,27014
K	0,03626	0,18132	0,03621	0,18168	0,03625	0,18126
L	0,02290	0,12594	0,02282	0,12635	0,02289	0,12590
M	0,11712	0,35136	0,11691	0,35200	0,11709	0,35124
N	0,07256	0,24185	0,07251	0,24248	0,07253	0,24177
O	0,04671	0,17126	0,04669	0,17188	0,04670	0,17120
P	0,11040	0,27600	0,11046	0,27689	0,11036	0,27591
Q	0,07283	0,20029	0,07285	0,20105	0,07281	0,20022

Os resultados apresentados nas três últimas tabelas comprovam a superioridade do elemento quadrático sobre o elemento linear, embora os resultados obtidos com a utilização do elemento linear possam ser considerados satisfatórios. Para alguns nós do contorno, os resultados obtidos com a utilização do elemento linear foram melhores do que aqueles obtidos com a utilização do elemento quadrático. Isso pode ter ocorrido devido à derivação dos deslocamentos interpolados (equações (III.50)). Para os pontos internos selecionados, os resultados obtidos com a utilização do elemento quadrático foram sempre melhores.

### III.7.2 - CILINDRO COM CAVIDADE ESFÉRICA

Seja o cilindro com uma cavidade esférica interna e suficientemente longo, de tal maneira que a presença da cavidade não se faça sentir no contorno, isto é, de tal maneira que o mesmo se comporte como um cilindro maciço no que diz respeito ao campo de deslocamento e de tensões no contorno (Figura III.6).

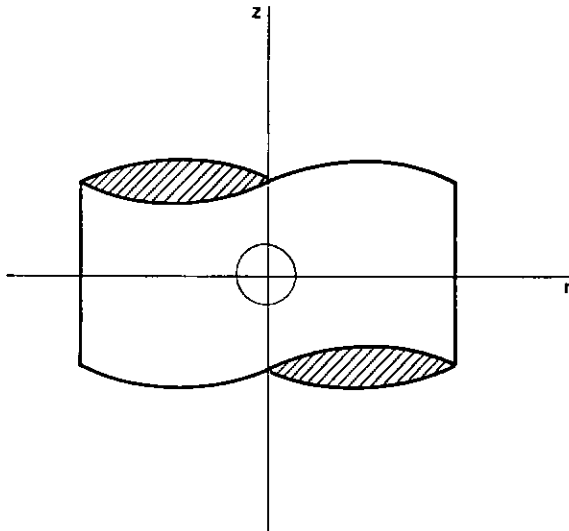


Figura III.6 - Cilindro com cavidade esférica interna

A imposição do campo de deslocamento

$$u = \alpha rz \quad (\text{III.54})$$

nas suas extremidades - tal campo de deslocamento corresponde à solução analítica da equação de Navier (II.8) para o problema da torção do cilindro maciço - gera uma única tensão não nula no contorno, a tensão  $\tau_{\theta z}$ , igual a

$$\tau_{\theta z} = G\alpha r \quad (\text{III.55})$$

Em (III.54) e (III.55),  $\alpha$  é o fator de proporcionalidade, dado por

$$\alpha = \frac{M}{GJ} \quad (\text{III.56})$$

onde

M - momento torçor correspondente ao campo de deslocamento imposto;

J - momento de inércia da seção transversal do cilindro maciço.

Os valores adotados para o módulo de elasticidade transversal e o fator de proporcionalidade foram os seguintes:

$$G = 800$$

$$\alpha = 0,0025$$

A Figura III.7 representa a seção meridional do cilindro e a primeira discretização utilizada na análise (discretização (a)). Refinando a malha, cada elemento é dividido em outros dois, de mesmo comprimento, com a introdução de um novo nó entre os dois nós já existentes (discretização (b)). O mesmo procedimento foi seguido para o segundo refinamento (discretização (c)). Assim, em relação às discretizações (a), (b) e (c), a circunferência que define a cavidade esférica foi discretizada com o auxílio de oito, dezesseis e trinta e dois elementos lineares (ou quatro, oito e dezesseis elementos quadráticos), respectivamente.

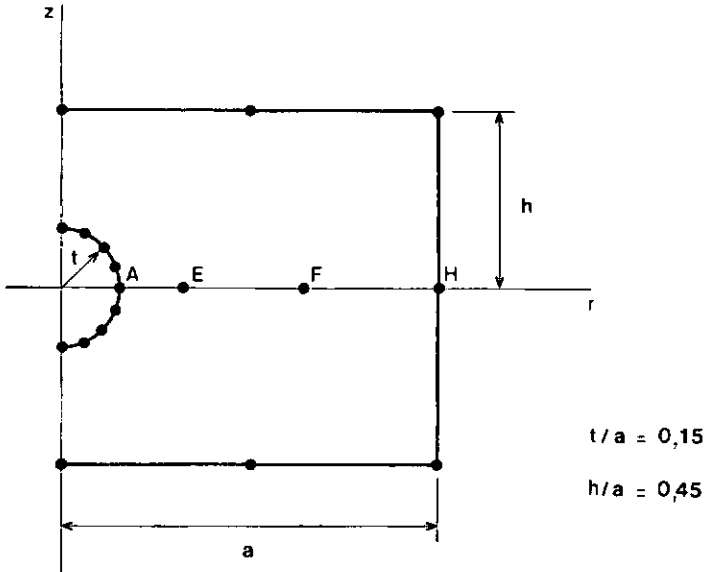


Figura III.7 - Seção meridional do cilindro

Os resultados obtidos para a tensão resultante nos nós da circunferência que define a cavidade -  $\tau_r = \sqrt{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2}$  - e a sua solução exata estão representados na figura a seguir.

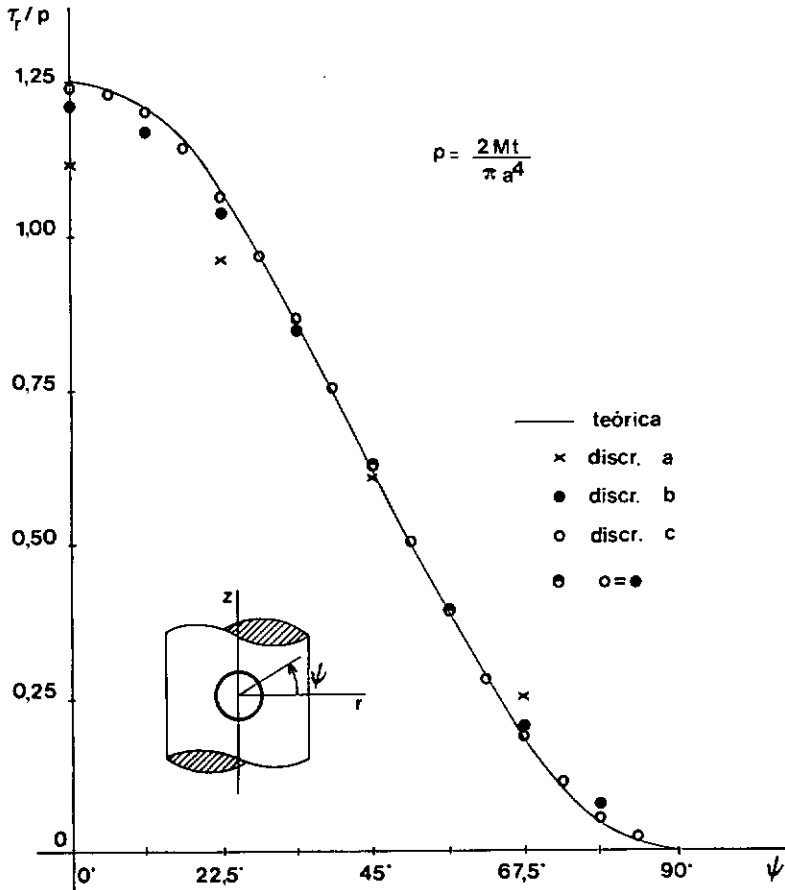


Figura III.8 - Tensão resultante no contorno da cavidade

Na região da cavidade ocorre concentração de tensões e, com exceção dos pontos sobre o eixo  $r$  na Figura III.7 (seção média), a tensão  $\tau_{r\theta}$  assume valores não nulos. A Tabela III.7 apresenta os valores obtidos para a relação entre a tensão  $\tau_{\theta z}$  nos pontos da seção média e nos pontos de mesma abscissa pertencentes ao cilindro maciço.

Tabela III.7 - Concentração de tensões na seção média

PONTO	ABCISSA $\beta=r/a$	DISCRET. (a)	DISCRET. (b)	DISCRET. (c)	$\tau_{\theta z}$ (CILINDRO MACIÇO)
A	0,150	1,108	1,213	1,241	1,50
B	0,152	1,284	1,261	1,242	1,52
C	0,160	1,179	1,179	1,180	1,60
D	0,200	1,054	1,058	1,059	2,00
E	0,320	1,005	1,005	1,005	3,20
F	0,640	1,000	1,000	1,000	6,40
G	0,980	0,988	1,001	1,000	9,80
H	1,000	1,000	1,000	1,000	10,00

A tensão nos pontos E, F e G é muito próxima daquela encontrada nos pontos de mesma abcissa e pertencentes ao cilindro maciço, ou seja, a concentração de tensões só ocorre na vizinhança da cavidade.

Para se ter idéia da precisão dos resultados apresentados na Tabela III.7, foi adotada uma variação linear para a tensão  $\tau_{\theta z}$  ao longo do eixo  $r$  e o momento torçor, nessa seção média, foi calculado através da integração de  $\tau_{\theta z}$  ao longo dos sete segmentos lineares obtidos. Comparando-se esse valor calculado aproximadamente com aquele correspondente ao campo de deslocamento imposto (III.56), as diferenças encontradas foram: -0,7% para a discretização (a); 0,06% para a discretização (b) e 0,0004% para a discretização (c). Cabe observar que a interpolação linear adotada no cálculo do momento possui ape-

nas um objetivo didático, uma vez que as tensões nos pontos internos são calculadas diretamente, com o auxílio das equações integrais apropriadas.

A utilização de elementos quadráticos (discretização (c)) forneceu, para a tensão resultante nos nós da circunferência que define a cavidade, os resultados representados na figura abaixo.

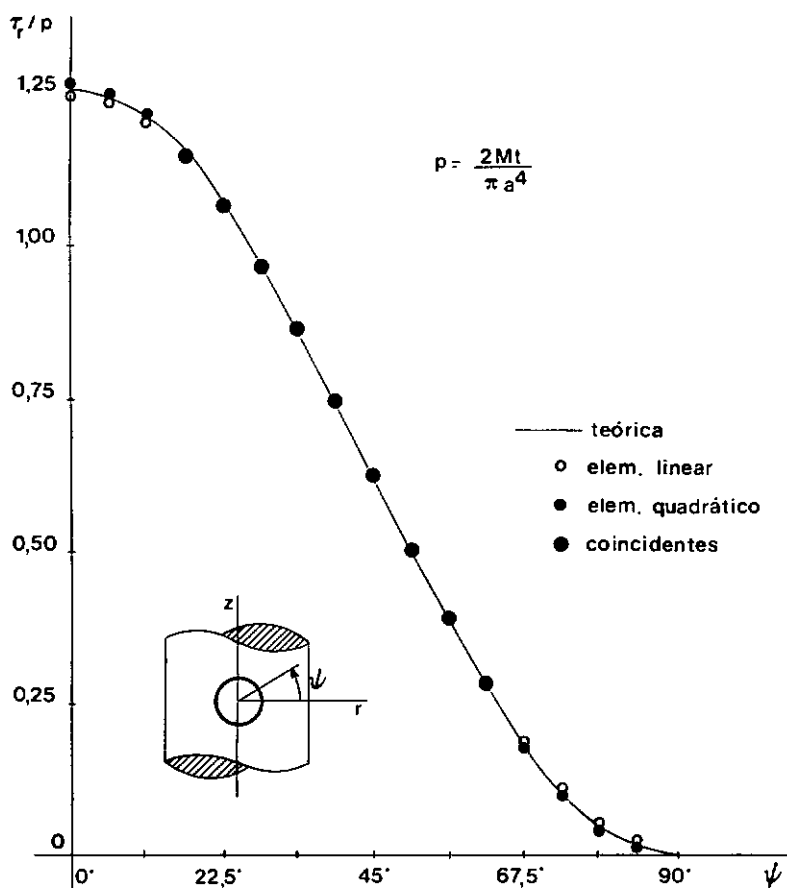


Figura III.9 - Tensão resultante no contorno da cavidade

A Figura III.8 mostra a convergência dos resultados em função do refinamento da malha de elementos de contorno; a Figura III.9 mostra a eficiência do elemento linear quando com

parado com o elemento quadrático.

### III.7.3 - CILINDRO COM ENTALHE SEMICIRCULAR

Seja o cilindro com um entalhe semicircular e sujeito à ação de conjugados aplicados nas extremidades, como representado abaixo.

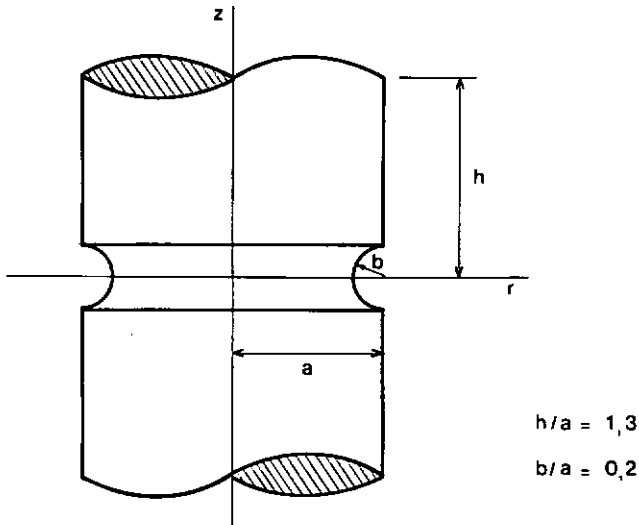


Figura III.10 - Cilindro com entalhe semicircular

Na região do entalhe ocorre uma grande concentração de tensões e, com exceção dos pontos sobre o eixo  $r$  na Figura III.10 (seção média), a tensão  $\tau_{r\theta}$  assume valores não nulos.

A Figura III.11 representa a discretização utilizada na análise, na região vizinha à circunferência que define o entalhe, e os valores obtidos para a tensão  $\tau_{\theta z}$  nos pontos pertencentes à seção média. No nó A, a tensão é máxima:  $\tau_{\theta z}^A = \tau_{\text{máx}}$ .

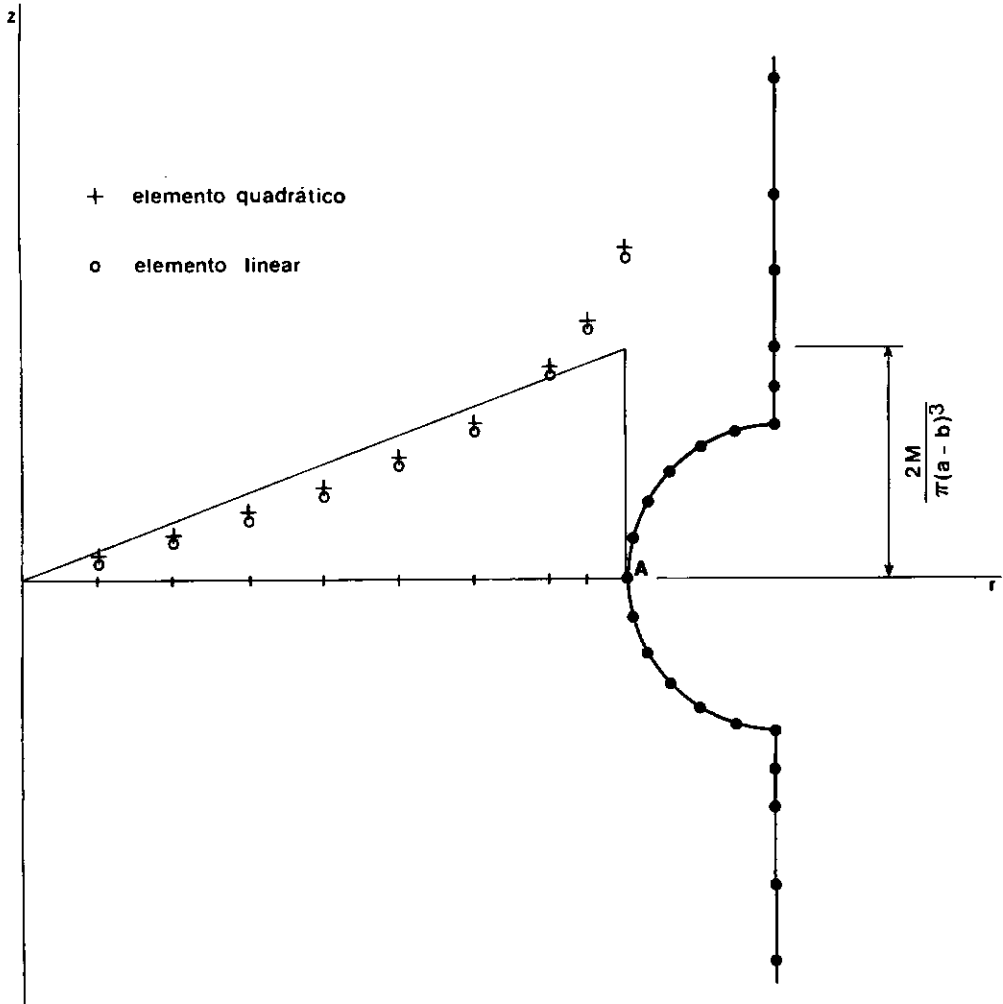


Figura III.11 - Discretização na vizinhança do entalhe e tensão nos pontos da seção média

A relação entre a tensão no nó A ( $\tau_{\text{máx}}$ ) e a máxima tensão encontrada em um cilindro maciço de raio  $(a-b)$  e sujeito à ação de conjugados de mesma intensidade dos aplicados no cilindro considerado aqui (pontos de abscissa  $(a-b)$ ), obtida com a utilização dos elementos linear e quadrático e por outros autores [6], é a seguinte:

$$\frac{\tau_{\text{m\`{a}x}}}{\frac{2M}{\Pi(a-b)^3}} =$$

1,40 : Elemento linear

1,42 : Elemento quadr\`{a}tico

1,57 : Willer

1,67 : Sonntag

1,33 : Kermanidis

1,42 : Wert

## CAPÍTULO IV

## O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TORÇÃO ELASTOPLÁSTICA

## IV.1 - IDENTIDADE DE SOMIGLIANA PARA PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS

Para problemas elastoplásticos, a equação (III.9) deve ser escrita como segue

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{\Omega\varepsilon} 2[\tau_{r\theta}^*(\xi;X) \varepsilon_{r\theta}^e(X) + \tau_{\theta z}^*(\xi;X) \varepsilon_{\theta z}^e(X)] r(X) d\Omega(X) = \\
 & = 2\pi \int_{\Omega\varepsilon} 2[\tau_{r\theta}(X) \varepsilon_{r\theta}^*(\xi;X) + \tau_{\theta z}(X) \varepsilon_{\theta z}^*(\xi;X)] r(X) d\Omega(X) \quad (IV.1)
 \end{aligned}$$

Na equação acima,  $\varepsilon_{r\theta}^e(X)$  e  $\varepsilon_{\theta z}^e(X)$  representam as parcelas elásticas das deformações totais  $\varepsilon_{r\theta}(X)$  e  $\varepsilon_{\theta z}(X)$ . Além disso

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{r\theta}^e(X) &= \varepsilon_{r\theta}(X) - \varepsilon_{r\theta}^p(X) \\
 \varepsilon_{\theta z}^e(X) &= \varepsilon_{\theta z}(X) - \varepsilon_{\theta z}^p(X)
 \end{aligned} \quad (IV.2)$$

onde  $\varepsilon_{r\theta}^p$  e  $\varepsilon_{\theta z}^p$  representam as parcelas plásticas.

A substituição de (IV.2) em (IV.1) conduz à seguinte equação

$$\begin{aligned}
2\pi \int_{\Omega_\varepsilon} 2[\tau_{r\theta}^* \varepsilon_{r\theta} + \tau_{\theta z}^* \varepsilon_{\theta z}] r d\Omega &= 2\pi \int_{\Omega_\varepsilon} 2[\tau_{r\theta} \varepsilon_{r\theta}^* + \tau_{\theta z} \varepsilon_{\theta z}^*] r d\Omega + \\
&+ 2\pi \int_{\Omega_\varepsilon} 2[\tau_{r\theta}^* \varepsilon_{r\theta}^P + \tau_{\theta z}^* \varepsilon_{\theta z}^P] r d\Omega \\
&\dots \text{ (IV.3)}
\end{aligned}$$

Integrando por partes as duas primeiras integrais em (IV.3) e tomando o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  (de maneira análoga à do capítulo anterior), obtêm-se a identidade de Somigliana para o problema elastoplástico e na qual se considera as deformações plásticas como deformações iniciais:

$$\begin{aligned}
u(\xi) &= 2\pi \int_{\Gamma} u^*(\xi; X) p(X) r(X) d\Gamma(X) - 2\pi \int_{\Gamma} p^*(\xi; X) u(X) r(X) d\Gamma(X) + \\
&+ 4\pi \int_{\Omega} [\tau_{r\theta}^*(\xi; X) \varepsilon_{r\theta}^P(X) + \tau_{\theta z}^*(\xi; X) \varepsilon_{\theta z}^P(X)] r(X) d\Omega(X) \\
&\dots \text{ (IV.4)}
\end{aligned}$$

ou, simplificadamente

$$u(\xi) = 2\pi \int_{\Gamma} u^* p r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} p^* u r d\Gamma + 4\pi \int_{\Omega} \underline{\tau}^* \underline{\varepsilon}^P r d\Omega \quad \text{(IV.5)}$$

com

$$\underline{\tau}^* = [\tau_{r\theta}^* \quad \tau_{\theta z}^*]$$

e

$$\underline{\varepsilon}^P = [\varepsilon_{r\theta}^P \quad \varepsilon_{\theta z}^P]^T$$

A equação integral de contorno correspondente ao problema elastoplástico é análoga à equação (III.19), a diferença ficando por conta da integral de domínio relativa às deformações plásticas, a exemplo da equação (IV.4), e é igual a

$$c(\xi)u(\xi) = 2\pi \int_{\Gamma} u^* p r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} p^* u r d\Gamma + 4\pi \int_{\Omega} \tau_{r\theta}^* \epsilon_{r\theta}^P r d\Omega \dots \quad (IV.6)$$

Os valores de  $c(\xi)$  são os mesmos já apresentados no capítulo anterior, seção (III.4).

#### IV.2 - CÁLCULO DAS TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS

Para o cálculo das tensões nos pontos internos, visando o estabelecimento das equações integrais apropriadas, a equação (IV.4) deve ser substituída nas equações (II.64) e, como no caso elástico, as derivadas devem ser tomadas em relação às coordenadas do ponto fonte, isto é:

$$\tau_{r\theta}(\xi) = G \left[ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \rho} - \frac{u(\xi)}{\rho} \right] - 2G \epsilon_{r\theta}^P(\xi) \quad (IV.7)$$

$$\tau_{\theta z}(\xi) = G \frac{\partial u(\xi)}{\partial z} - 2G \epsilon_{\theta z}^P(\xi)$$

As derivadas acima podem ser aplicadas diretamente sobre os tensores fundamentais nas integrais de contorno; a derivação da integral de domínio relativa às deformações plásticas requer maior atenção. Voltando à dedução da identidade de Somigliana, essa integral possui a seguinte representação for-

mal quando se toma o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$V = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{\tau}^* \tilde{\epsilon}^P r d\Omega \quad (\text{IV.8})$$

e as derivadas são representadas por

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{\tau}^* \tilde{\epsilon}^P r d\Omega \right\} \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_0} \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{\tau}^* \tilde{\epsilon}^P r d\Omega \right\}$$

Seguindo o procedimento apresentado em [8], isto é, definindo um sistema de coordenadas polar com centro em  $\xi$  e raio polar paralelo ao eixo  $r$  do sistema de coordenadas cilíndrico, a integração no domínio fica restrita a uma integração na direção angular e a outra na direção radial sendo que, nesta última, o limite inferior de integração ( $\epsilon$ ) é função da posição do ponto fonte (de suas coordenadas). Esta dependência leva à utilização da fórmula de Leibnitz para a derivação de integrais cujos limites dependem de um parâmetro. A aplicação dessa fórmula conduz às expressões abaixo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} &= 4\pi \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\tau}^*}{\partial \rho} \tilde{\epsilon}^P r d\Omega - \lim_{R_C \rightarrow 0} \frac{4\pi}{R_C} \tilde{\epsilon}^P(\xi) \int_{\Gamma_1} \tilde{\tau}^* r R_{,r} d\Gamma \\ \frac{\partial V}{\partial z_0} &= 4\pi \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\tau}^*}{\partial z_0} \tilde{\epsilon}^P r d\Omega - \lim_{R_C \rightarrow 0} \frac{4\pi}{R_C} \tilde{\epsilon}^P(\xi) \int_{\Gamma_1} \tilde{\tau}^* r R_{,z} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

nas quais as integrais de domínio devem ser calculadas no sentido de valor principal;  $\Gamma_1$  define uma circunferência de raio  $R_C$

e  $R_{,r}$  e  $R_{,z}$  representam as derivadas de  $R$  (direção radial do sistema de coordenadas polar) em relação às coordenadas  $r$  e  $z$  do ponto campo.

As integrais de contorno apresentadas em (IV.10) de vem ser calculadas levando-se em conta o comportamento da função de Legendre  $Q_{+1/2}(\gamma)$  para argumentos  $\gamma$  pequenos (isso porque pode-se tomar  $R_C$  tão pequeno quanto se deseje). De [13], obtém-se a seguinte expressão para  $Q_{+1/2}(\gamma)$

$$Q_{+1/2}(\gamma) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\gamma-1}{32}\right) - 2 \quad (\text{IV.11})$$

$$\frac{d}{d\gamma} Q_{+1/2}(\gamma) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\gamma-1)}$$

Desenvolvendo as expressões para as tensões fundamentais em função de (IV.11) e integrando em  $\Gamma_1$ , obtém-se

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 4\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tau_{r\theta}^*(\xi; X)}{\partial \rho} \epsilon_{r\theta}^P(X) + \frac{\partial \tau_{\theta z}^*(\xi; X)}{\partial \rho} \epsilon_{\theta z}^P(X) \right] r(X) d\Omega(X) + \epsilon_{r\theta}^P(\xi) \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = 4\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tau_{r\theta}^*(\xi; X)}{\partial z_0} \epsilon_{r\theta}^P(X) + \frac{\partial \tau_{\theta z}^*(\xi; X)}{\partial z_0} \epsilon_{\theta z}^P(X) \right] r(X) d\Omega(X) + \epsilon_{\theta z}^P(\xi)$$

$\epsilon_{r\theta}^P(\xi)$  e  $\epsilon_{\theta z}^P(\xi)$  são os chamados "termos livres".

As equações integrais correspondentes às tensões são as seguintes

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(\xi) = & G \left[ 2\pi \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^*}{\partial \rho} - \frac{u^*}{\rho} \right) \rho r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial p^*}{\partial \rho} - \frac{p^*}{\rho} \right) u r d\Gamma \right] + \\ & + G 4\pi \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial \rho} - \frac{\tau_{r\theta}^*}{\rho} \right) \epsilon_{r\theta}^P + \left( \frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial \rho} - \frac{\tau_{\theta z}^*}{\rho} \right) \epsilon_{\theta z}^P \right] r d\Omega - \\ & - G \epsilon_{r\theta}^P(\xi) \end{aligned} \tag{IV.13}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}(\xi) = & G \left[ 2\pi \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial z_0} \rho r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*}{\partial z_0} u r d\Gamma \right] + \\ & + G 4\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial z_0} \epsilon_{r\theta}^P + \frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial z_0} \epsilon_{\theta z}^P \right] r d\Omega - \\ & - G \epsilon_{\theta z}^P(\xi) \end{aligned}$$

Agrupando as equações (IV.13), obtêm-se a sua representação matricial

$$\begin{aligned} \underline{\tau}(\xi) = & G \left[ 2\pi \int_{\Gamma} \underline{u}^* \rho r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} \underline{p}^* u r d\Gamma \right] + \\ & + G 4\pi \int_{\Omega} \underline{\tau}^* \underline{\epsilon}^P r d\Omega - G \underline{I} \underline{\epsilon}^P(\xi) \end{aligned} \tag{IV.14}$$

na qual  $\underline{I}$  é a matriz identidade de ordem (2x2).

## IV.3 - DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Para a solução numérica das equações (IV.5) e (IV.13), a partir da solução da equação integral de contorno (IV.6), o contorno  $\Gamma$  é discretizado em uma série de elementos sobre os quais são interpolados os valores do deslocamento e da força de superfície (como foi feito na seção (III.5) do capítulo anterior) e a parte do domínio onde se prevê a ocorrência de deformações plásticas é discretizada com o auxílio de células internas sobre as quais são interpolados os valores das deformações plásticas utilizando os valores nodais correspondentes.

Uma vez que a discretização do contorno e o cálculo das respectivas integrais já foi discutido anteriormente, nesta seção estudar-se-á, em detalhes, a discretização do domínio e o cálculo das integrais relativas aos termos plásticos.

Aqui, novamente, as coordenadas cilíndricas  $\underline{r}^{(j)}$  dos pontos localizados sobre cada célula  $\Omega_j$ , do domínio discretizado, são expressas em termos da função de interpolação  $\bar{\Psi}$  e das coordenadas nodais  $\underline{r}^{(m)}$  da célula através da seguinte relação matricial

$$\underline{r}^{(j)} = \bar{\Psi} \underline{r}^{(m)} \quad (\text{IV.15})$$

na qual o superíndice  $m$  se refere ao número de pontos que definem a geometria da célula.

Da mesma maneira, as deformações plásticas  $\epsilon_{r\theta}^p$  e  $\epsilon_{\theta z}^p$  são interpoladas sobre cada célula  $\Omega_j$  utilizando a função de interpolação  $\bar{\Phi}$  e os valores nodais  $\epsilon_{\theta z}^p(n)$  das deformações

plásticas, isto é

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(j) = \underline{\underline{\bar{\phi}}} \underline{\underline{\varepsilon}}^p(n) \quad (\text{IV.16})$$

O superíndice  $n$  se refere ao número de pontos do domínio (chamados "pontos de tensão") que definem a lei de variação das deformações plásticas sobre cada célula  $\Omega_j$ .

Como no caso elástico  $m=n$  e como só existem duas componentes de deformação plástica não nulas, então  $\underline{\underline{\bar{\psi}}} = \underline{\underline{\bar{\phi}}}$ .

Se o contorno  $\Gamma$  é discretizado em  $N$  elementos e o domínio  $\Omega$  (ou parte dele) em  $M$  células, a equação (IV.6) possui a seguinte versão discretizada para o  $i$ -ésimo nó  $\xi_i$

$$\begin{aligned} c(\xi_i)u(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \left[ 2\pi \int_{\Gamma_j} p^* \underline{\underline{\bar{\phi}}} r d\Gamma \right] \underline{\underline{u}}^{(n)} &= \\ = \sum_{j=1}^N \left[ 2\pi \int_{\Gamma_j} u^* \underline{\underline{\bar{\phi}}} r d\Gamma \right] \underline{\underline{p}}^{(n)} + \sum_{j=1}^M \left[ 4\pi \int_{\Omega_j} \underline{\underline{\bar{\tau}}}^* \underline{\underline{\bar{\phi}}} r d\Omega \right] \underline{\underline{\varepsilon}}^p(n) & \quad (\text{IV.17}) \end{aligned}$$

As integrais de domínio relativas aos termos plásticos podem ser calculadas numericamente, sem dificuldade, quando a célula não contém o nó fonte. Quando isso acontece, essas integrais apresentam uma singularidade que é eliminada mediante uma mudança de sistema de coordenadas. A integração das células singulares será discutida na próxima seção.

A aplicação da equação (IV.17) aos  $NN$  nós do contorno fornece um sistema de  $NN$  equações com a seguinte representação matricial

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{p} + \underline{D} \underline{\varepsilon}^P \quad (\text{IV.18})$$

na qual as matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são as mesmas já obtidas na análise elástica e a matriz  $\underline{D}$  é a matriz resultante da integração no domínio.

O cálculo das tensões nos pontos internos é efetuado de maneira idêntica. A equação (IV.14), para o ponto  $\xi_i$ , possui a seguinte versão discretizada

$$\begin{aligned} \underline{\tau}(\xi_i) &= \sum_{j=1}^N G \left[ 2\pi \int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{\phi} r d\Gamma \right] \underline{p}^{(n)} + \sum_{j=1}^N G \left[ 2\pi \int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{\phi} r d\Gamma \right] \underline{u}^{(n)} + \\ &+ \sum_{j=1}^M G \left[ 4\pi \int_{\Omega_j} \underline{\tau}^* \underline{\phi} r d\Omega \right] \underline{\varepsilon}^P(n) - G \underline{I} \underline{\varepsilon}^P(\xi_i) \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Na equação acima, as integrais de domínio relativas aos termos plásticos podem ser calculadas numericamente, sem dificuldade, quando a célula não contém o ponto fonte. Quando isso acontece, a integração só é possível no sentido de valor principal; essa integração também será discutida na próxima seção.

A aplicação da equação (IV.19) aos NP pontos internos selecionados fornece um sistema de equações com a seguinte representação matricial

$$\underline{\tau} = \underline{G} \underline{p} - \underline{H} \underline{u} + (\underline{D}' + \underline{C}') \underline{\varepsilon}^P \quad (\text{IV.20})$$

na qual  $\underline{C}'$  é a matriz que representa os "termos livres" e  $\underline{D}'$  é a matriz resultante da integração no domínio. As matrizes  $\underline{G}$  e

'H resultam da integração no contorno e equivalem às matrizes  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  da equação (IV.18).

O cálculo das tensões nos nós do contorno não requer nenhuma integração. As expressões correspondentes às tensões constituem uma extensão daquelas apresentadas em (III.50), levando em consideração a contribuição das deformações plásticas. Obtém-se, então, para  $X \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(X) &= p(X) n_r(X) - G \left[ \frac{du(X)}{d\Gamma(X)} + \frac{u(X)}{r(X)} n_z(X) \right] n_z(X) - \\ &- 2G[\epsilon_{r\theta}^p(X) n_z(X) - \epsilon_{\theta z}^p(X) n_r(X)] n_z(X) \end{aligned} \quad (IV.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}(X) &= p(X) n_z(X) + G \left[ \frac{du(X)}{d\Gamma(X)} + \frac{u(X)}{r(X)} n_z(X) \right] n_r(X) - \\ &- 2G[\epsilon_{\theta z}^p(X) n_r(X) - \epsilon_{r\theta}^p(X) n_z(X)] n_r(X) \end{aligned}$$

A única derivada que aparece continua sendo a do deslocamento, calculada diretamente sobre as funções de interpolação.

A aplicação das equações (IV.21) aos NN nós do contorno fornece um sistema de equações com a seguinte representação matricial

$$\underline{r}^c = \underline{G}^c \underline{p} - \underline{H}^c \underline{u} + \underline{D}^c \underline{\epsilon}^p \quad (IV.22)$$

na qual as matrizes  $\underline{G}^C$ ,  $\underline{H}^C$  e  $\underline{D}^C$  são equivalentes às matrizes  $\underline{G}$ ,  $\underline{H}$  e  $\underline{D}$  apresentadas em (IV.20).

De modo a unificar o procedimento para o cálculo das tensões nos NN nós do contorno e NP pontos internos selecionados, as equações (IV.20) e (IV.22) devem ser agrupadas, estendendo, assim, a representação da equação (IV.20) aos nós do contorno e aos pontos internos selecionados.

A aplicação das NN condições de contorno e a reordenação das NN incógnitas conduz às seguintes representações das equações (IV.18) e (IV.20)

$$\underline{A} \underline{y} = \underline{f} + \underline{D} \underline{\varepsilon}^P \quad (\text{IV.23})$$

e

$$\underline{\tau} = -\underline{A}' \underline{y} + \underline{f}' + \underline{D}^* \underline{\varepsilon}^P \quad (\text{IV.24})$$

nas quais a contribuição dos valores prescritos está incluída em  $\underline{f}$  e  $\underline{f}'$ ,  $\underline{y}$  é o vetor das incógnitas e  $\underline{D}^* = \underline{D}' + \underline{C}'$  (para os nós do contorno  $\underline{C}' = \underline{0}$  - é importante esta observação uma vez que, unificado o procedimento para o cálculo das tensões, a notação utilizada é a apresentada em (IV.20)).

A pré-multiplicação da equação (IV.23) por  $\underline{A}^{-1}$  fornece

$$\underline{y} = \underline{K} \underline{\varepsilon}^P + \underline{m} \quad (\text{IV.25})$$

Se não houvesse deformações plásticas, isto é, se  $\underline{\varepsilon}^P = \underline{0}$ , a equação acima se reduziria a

$$\underline{y} = \underline{m} \quad (\text{IV.26})$$

ou seja, à solução elástica do problema para deslocamentos e forças de superfície no contorno.

Substituindo (IV.25) em (IV.24), obtém-se

$$\underline{\tau} = \underline{B} \underline{\varepsilon}^p + \underline{n} \quad (\text{IV.27})$$

Aqui,  $\underline{n}$  corresponde à solução elástica para as tensões; além disso

$$\underline{K} = \underline{A}^{-1} \underline{D} \quad ; \quad \underline{m} = \underline{A}^{-1} \underline{f} \quad (\text{IV.28})$$

$$\underline{B} = \underline{D}^* - \underline{A}' \underline{K} \quad ; \quad \underline{n} = \underline{f}' - \underline{A}' \underline{m}$$

É importante observar que, uma vez formadas, as equações (IV.27) e (IV.25) são independentes, ou seja, na resolução de problemas que envolvem não linearidade física só é necessária a utilização da equação (IV.27), relativa às tensões. Além disso, o fato de se utilizar equações integrais apropriadas para o cálculo das tensões nos pontos internos proporciona resultados mais precisos e, principalmente, maior eficiência computacional, pois prescinde-se do cálculo dos deslocamentos nos pontos internos selecionados e da sua posterior derivação numérica, como é proposto em [10].

Em termos de eficiência computacional, deve-se observar que a matriz  $\underline{A}$  pode ser formada no campo da matriz  $\underline{B}$ . Após a resolução do sistema de equações - para as incógnitas em

$\underline{y}$  e para  $\underline{K}$  - a matriz  $\underline{B}$  é formada e a equação (IV.27), gerada. Assim, as únicas matrizes que precisam ser armazenadas são as matrizes  $\underline{K}$  e  $\underline{B}$ .

Para a implementação numérica das equações (IV.5), (IV.6) e (IV.14) foram utilizados elementos lineares e células triangulares lineares. A implementação dos elementos lineares já foi discutida no capítulo anterior e o mesmo procedimento foi seguido aqui.

#### IV.3.1 - CÉLULAS TRIANGULARES LINEARES

Para as células triangulares lineares, as funções de interpolação são expressas em termos de um sistema de coordenadas homogêneo  $(\eta_1; \eta_2)$  (Figura IV.1) e o Jacobiano da transformação é igual a duas vezes a área do triângulo. As funções de interpolação  $\bar{\psi}$  e  $\bar{\phi}$  são dadas por

$$\bar{\psi} = \bar{\phi} = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \eta_2 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & \eta_2 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

e

$$\eta_3 = 1 - (\eta_1 + \eta_2) .$$

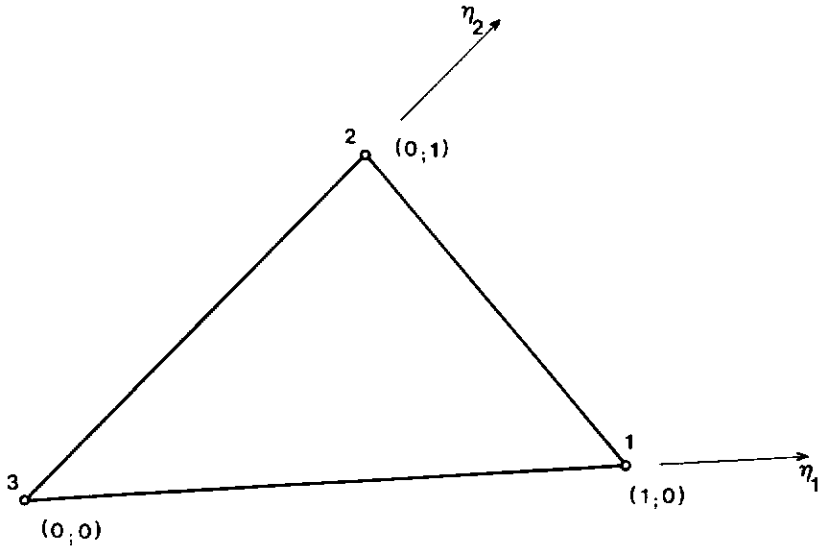


Figura IV.1 - Célula triangular e definição do sistema de coordenadas intrínseco  $(\eta_1; \eta_2)$

Os vetores  $\underline{r}^{(n)}$  e  $\underline{\varepsilon}^{p(n)}$  são formados por subvetores do tipo  $[\underline{i}^{( )} \quad \underline{i}^{( )}]^T$ , que correspondem aos "pontos de tensão"  $i=1,2,3$  localizados nos vértices da célula.

Para a formação da matriz  $\underline{D}$ , cada célula  $\Omega_j$  contribui com uma submatriz  $\underline{d}_{ij}$  de ordem  $(1 \times 6)$  do tipo (o índice  $i$  se refere ao ponto fonte; o índice  $j$ , à célula)

$$\underline{d}_{ij} = 4\pi \int_{\Omega_j} [\underline{\tau}_{i1}^* \eta_1 \quad \underline{\tau}_{i2}^* \eta_2 \quad \underline{\tau}_{i3}^* \eta_3] r d\Omega \quad (\text{IV.30})$$

Para a formação da matriz  $\underline{D}'$  (no que se refere aos pontos internos), cada célula  $\Omega_j$  contribui com uma submatriz  $\underline{d}'_{ij}$  de ordem  $(2 \times 6)$  do tipo

$$\underline{d}_{ij} = 4\pi \int_{\Omega_j} [\tau_{i1}^* \eta_1 \quad \tau_{i2}^* \eta_2 \quad \tau_{i3}^* \eta_3] r d\Omega \quad (\text{IV.31})$$

A integração numérica das células que não contém o ponto fonte (células não singulares) pode ser feita utilizando a quadratura de Hammer, como segue

$$\underline{d}_{ij} = 4\pi \int_{\Omega_j} \tau^* \bar{\Phi} r d\Omega = 8\pi A_j \sum_{k=1}^K (\tau^* \bar{\Phi} r)_k w_k \quad (\text{IV.32})$$

$$\underline{d}_{ij} = 4\pi \int_{\Omega_j} \tau^* \bar{\Phi} r d\Omega = 8\pi A_j \sum_{k=1}^K (\tau^* \bar{\Phi} r)_k w_k$$

onde  $K$  representa o número de pontos de integração,  $w_k$  o peso associado a cada ponto e  $A_j$  representa a área da célula.

Todavia, não é possível proceder assim para o caso em que o ponto fonte coincide com um dos vértices da célula a ser integrada (célula singular). Para se calcular essa integral e obter os elementos das submatrizes  $\underline{d}_{ij}$  e  $\underline{d}'_{ij}$  correspondentes ao nó singular, é necessário efetuar uma mudança de sistema de coordenadas, definindo um sistema de coordenadas polar  $(R; \phi)$  com centro no ponto fonte (ponto  $\gamma$  na Figura IV.2).

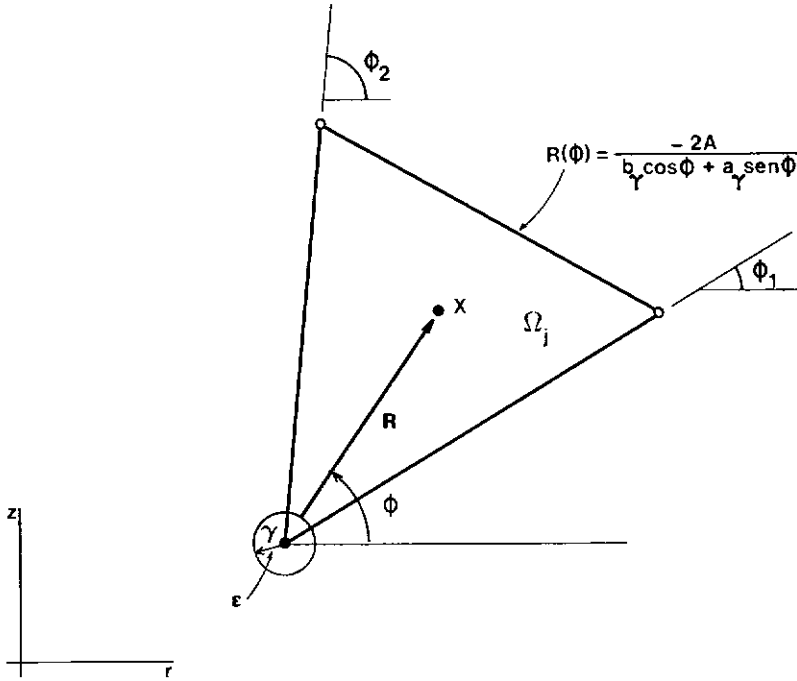


Figura IV.2 - Sistema de coordenadas polar com centro no ponto fonte  $\gamma \in \Omega_j$

Em relação às coordenadas  $r$ - $z$  do sistema cilíndrico definido previamente, as coordenadas homogêneas  $(\eta_1; \eta_2)$  são dadas por

$$\eta_\alpha = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^0 + b_\alpha r + a_\alpha z) \quad (\text{IV.33})$$

O índice  $\alpha$  representa o ponto ao qual se refere a função de interpolação e

$$a_\alpha = r_\gamma - r_\beta \quad ; \quad b_\alpha = z_\beta - z_\gamma \quad (\text{IV.34})$$

$$2A_\alpha^0 = r_\beta z_\gamma - r_\gamma z_\beta$$

$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1)$  é a área da célula

com  $\alpha = 1, 2, 3$  para  $\beta = 2, 3, 1$  e  $\gamma = 3, 1, 2$ .

Em relação ao sistema de coordenadas  $(R; \phi)$ , obtém-se a seguinte expressão para as coordenadas homogêneas  $(\eta_1; \eta_2)$

$$\bar{\eta}_\alpha = \delta_{\alpha\gamma} + \frac{R}{2A} (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \sin\phi) \quad (\text{IV.35})$$

onde  $\delta_{\alpha\gamma}$  é o valor da função de interpolação no ponto singular e

$$\delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } \gamma \neq \alpha \\ 1 & , \quad \text{se } \gamma = \alpha \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

As coordenadas  $r = r(X)$  e  $z = z(X)$  do ponto campo são dadas por

$$\begin{aligned} r &= \rho + R \cos\phi \\ z &= z_0 + R \sin\phi \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Substituindo as expressões acima nas expressões correspondentes às tensões fundamentais, obtém-se (genericamente) a seguinte representação para as tensões fundamentais

$$\tau_{r\theta}^*(\xi; X) = \frac{\Psi_{r\theta}(\xi; X)}{R} ; \quad \tau_{\theta z}^*(\xi; X) = \frac{\Psi_{\theta z}(\xi; X)}{R}$$

ou

$$\underline{\tau}^*(\xi; X) = \frac{1}{R} \underline{\Psi}(\xi; X) \quad (\text{IV.38})$$

É importante mencionar que a singularidade só ocorre nas parcelas de  $\Psi_{r\theta}$  e  $\Psi_{\theta z}$  que são multiplicadas pela integral elíptica  $E(m)$ .

Seja, então, uma submatriz  $\underline{d}_{ij}^\alpha$  de  $\underline{d}_{ij}$ , de ordem  $(1 \times 2)$ , definida por

$$\underline{d}_{ij}^{\alpha} = 4\pi \int_{\Omega_j} \underline{\tau}^* \eta_{\alpha} r d\Omega \quad (\text{IV.39})$$

Em relação ao sistema de coordenadas  $(R; \phi)$ , a expressão acima pode ser escrita como

$$\underline{d}_{ij}^{\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{R} \underline{\psi} \bar{\eta}_{\alpha} r R dR d\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \underline{\psi} \bar{\eta}_{\alpha} r dR d\phi \quad \dots (\text{IV.40})$$

Em (IV.40) fica patente a vantagem de se utilizar o sistema de coordenadas  $(R; \phi)$ , pois o Jacobiano dessa transformação  $|J| = R$  elimina a singularidade. Devido ao comportamento da integral elíptica  $E(m)$  ( $E(m) \rightarrow 1$  quando  $k' \rightarrow 0$ ) a integração não oferece mais nenhuma dificuldade adicional, mesmo quando  $\gamma = \alpha$ .

Em virtude da complexidade das expressões envolvidas, integra-se numericamente em relação a  $R$  e em relação a  $\phi$  utilizando a quadratura de Gauss. Assim,

$$\underline{d}_{ij}^{\alpha} = 4\pi \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{\ell=1}^m (\underline{\psi} \bar{\eta}_{\alpha} r)_{\ell} w_{\ell} \right] \frac{R(\phi_k)}{2} w_k \quad (\text{IV.41})$$

onde

$$\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2} \quad \text{é o Jacobiano para a integração em relação a } \phi \quad (\text{n pontos de Gauss}),$$

$$\frac{R(\phi_k)}{2} \quad \text{é o Jacobiano para a integração em relação a } R \quad (\text{m pontos de Gauss}) \quad \text{e}$$

$w_k$  e  $w_{\ell}$  são os pesos associados aos pontos de integração.

Seja, agora, uma submatriz  $'\underline{d}_{ij}^\alpha$  de  $'\underline{d}_{ij}$ , de ordem (2x2), definida por

$$'d_{ij}^\alpha = 4\pi \int_{\Omega_j} '\underline{\tau}^* \eta_\alpha r d\Omega \quad (\text{IV.42})$$

Em relação ao sistema de coordenadas  $(R; \phi)$ , a matriz  $'\underline{\tau}^*$  pode ser representada como

$$'d_{ij}^* = \frac{1}{R^2} '\underline{\psi} \quad (\text{IV.43})$$

e a expressão (IV.42) pode, então, ser escrita como

$$'d_{ij}^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{R^2} '\underline{\psi}_{\eta_\alpha} r R dR d\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{R} '\underline{\psi}_{\eta_\alpha} r dR d\phi \quad \dots \quad (\text{IV.44})$$

Para  $\gamma \neq \alpha$  tem-se  $\delta_{\alpha\gamma} = 0$ , a singularidade é eliminada e a integração pode ser efetuada normalmente, de maneira análoga à apresentada em (IV.41).

Para o cálculo da submatriz  $'\underline{d}_{ij}^\alpha$  correspondente ao nó singular (isto é, quando  $\gamma = \alpha$ ), a integração apresentada em (IV.44) deve ser efetuada no sentido de valor principal de Cauchy, ou seja, deve-se levar em consideração a contribuição de todas as células adjacentes que contém o ponto  $\gamma$ . Como se integra numericamente nas duas direções, a integral no sentido de valor principal (em relação a  $R$ ) é calculada aplicando-se o conceito de integração por partes finitas apresentado em [1] e no Apêndice F deste trabalho. A integral em relação a  $\phi$  é calculada normalmente, utilizando a quadratura de Gauss.

A integração nas direções radial e angular do sistema  $(R; \phi)$  pode, também, ser utilizada para o caso mais geral, no qual o ponto fonte  $\xi_i$  não coincide com nenhum dos nós da célula. Em relação à Figura (IV.3), as submatrizes  $\tilde{d}_{ij}^\alpha$  e  $'\tilde{d}_{ij}^\alpha$  são obtidas da seguinte maneira

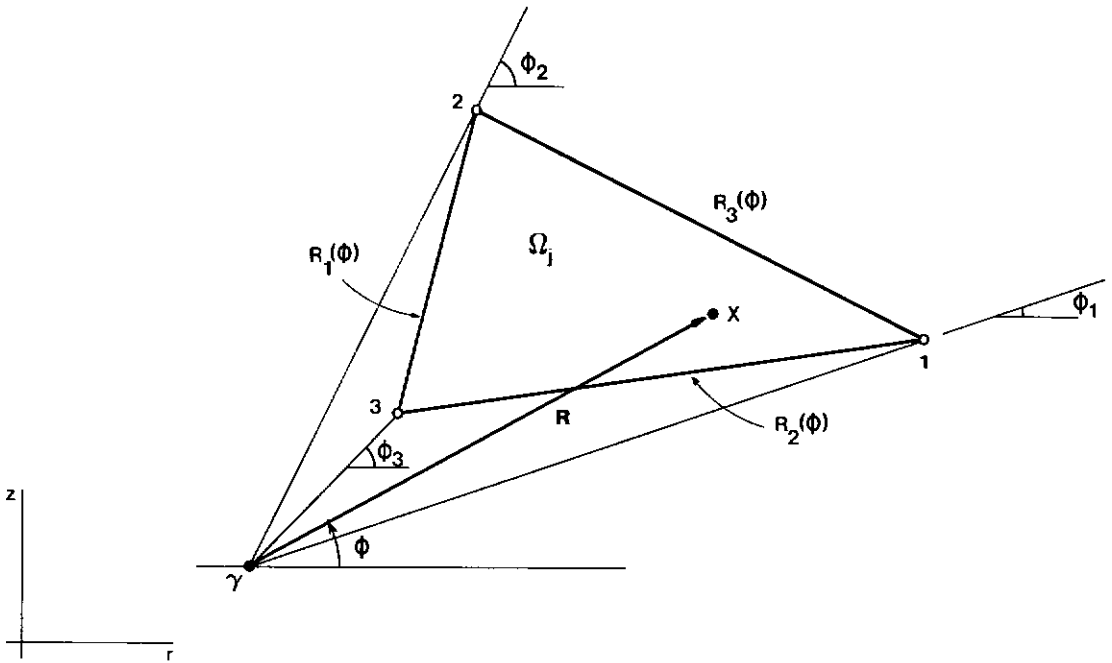


Figura IV.3 - Caso geral para a integração de célula não singular

$$\tilde{d}_{ij}^\alpha = 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \tilde{\psi} \bar{n}_\alpha r dR d\phi + 4\pi \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \tilde{\psi} \bar{n}_\alpha r dR d\phi \dots (IV.45)$$

e

$$' \tilde{d}_{ij}^\alpha = 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \tilde{\psi} \bar{n}_\alpha r \frac{dR}{R} d\phi + 4\pi \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \tilde{\psi} \bar{n}_\alpha r \frac{dR}{R} d\phi \dots (IV.46)$$

Nas expressões acima,  $\bar{n}_\alpha$  continua sendo dado pela

expressão (IV.35) e  $\delta_{\alpha\gamma}$  e  $R_\alpha(\phi)$  são dados pelas expressões abaixo

$$\delta_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2A} (r_\beta z_\gamma - r_\gamma z_\beta + b_\alpha \rho + a_\alpha z_0) \quad (\text{IV.47})$$

$$R_\alpha(\phi) = \frac{-2A \delta_{\alpha\gamma}}{b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \sin\phi} \quad (\text{IV.48})$$

#### IV.3.2 - O MÉTODO DAS SUCESSIVAS APROXIMAÇÕES ELÁSTICAS

As equações (IV.25) e (IV.27) serão resolvidas através de um método incremental-iterativo conhecido como Método das Sucessivas Aproximações Elásticas, descrito nas referências [11] e [8].

Levando em consideração as equações apresentadas na seção (II.2), do Capítulo II, as equações mencionadas acima podem ser escritas da seguinte maneira

$$\underline{y} = \underline{K}(\underline{\varepsilon}^P + \Delta\underline{\varepsilon}^P) + \underline{m} \quad (\text{IV.49})$$

e

$$\underline{\tau} = \underline{B}(\underline{\varepsilon}^P + \Delta\underline{\varepsilon}^P) + \underline{n} \quad (\text{IV.50})$$

Nas equações acima,  $\underline{\varepsilon}^P$  representa o vetor das deformações plásticas acumuladas até a correspondente ao último acréscimo dado ao carregamento (sem incluí-la) e  $\underline{m}$  e  $\underline{n}$  representam as soluções elásticas associadas ao carregamento.

O processo incremental-iterativo para a solução das equações (IV.49) e (IV.50) se inicia a partir da redução da máxima tensão equivalente ( $\sigma_{e,m\acute{a}x}$ ), encontrada nos nós do contorno ou nos pontos internos, à tensão inicial de escoamento  $\sigma_0$ , através de um fator de carga inicial  $\lambda_0$  definido como segue

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{e,m\acute{a}x}} \quad (\text{IV.51})$$

ou seja, o processo se inicia a partir do último nível de carga em relação ao qual o material ainda se comporta elasticamente.

Definindo-se um incremento de carga  $w$ , o fator de carga correspondente ao  $i$ -ésimo incremento é dado por

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \lambda_0 w \quad (\text{IV.52})$$

Note-se que o incremento de carga  $w$  pode variar ao longo do processo; na implementação desenvolvida neste trabalho, entretanto,  $w$  é constante para cada problema.

As equações (IV.49) e (IV.50) podem, então, ser escritas como

$$\underline{y} = \underline{K}(\underline{\varepsilon}^P + \Delta\underline{\varepsilon}^P) + \lambda_i \underline{m} \quad (\text{IV.53})$$

$$\underline{\tau} = \underline{B}(\underline{\varepsilon}^P + \Delta\underline{\varepsilon}^P) + \lambda_i \underline{n} \quad (\text{IV.54})$$

Para um dado valor de  $\lambda_i$ , os incrementos de deformação plástica são determinados iterativamente para cada nó do contorno ou ponto interno selecionado como segue:

a. Cálculo das tensões (equação (IV.54)) ;

b. Cálculo de:

$$\varepsilon'_{r\theta} \text{ e } \varepsilon'_{\theta z} \quad (\text{equação (II.53)})$$

$$\varepsilon_{et} \quad (\text{equação (II.54)})$$

$$\Delta \varepsilon_e^P \geq 0 \quad (\text{equação (II.60)}) ;$$

c. Verificação da convergência: comparação do último valor calculado para  $\Delta \varepsilon_e^P$  como o anterior;

d. Cálculo dos incrementos de deformação plástica

$$\Delta \varepsilon_{r\theta}^P \text{ e } \Delta \varepsilon_{\theta z}^P ;$$

e. Início de uma nova iteração após a consideração de todos os nós do contorno e pontos internos selecionados.

Obtida a convergência,  $\Delta \varepsilon_e^P$  é adicionado a  $\varepsilon_e^P$  e o processo descrito acima tem início para um novo fator de carga.

Deve-se observar que somente a equação (IV.54) é utilizada ao longo do processo incremental-iterativo e que a equação (IV.53) só é utilizada após a obtenção da convergência. Além disso, as matrizes  $\underline{K}$  e  $\underline{B}$  e os vetores  $\underline{m}$  e  $\underline{n}$  são gerados apenas no início do processo e não se alteram, o que representa uma grande economia em termos computacionais.

## IV.4 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

IV.4.1 - CILINDRO VAZADO COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE  
MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO

Impondo-se o campo de deslocamento

$$u = \alpha r z \quad (\text{IV.55})$$

ao cilindro considerado, o momento torçor correspondente ao primeiro escoamento é igual a

$$M_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( a^3 - \frac{b^4}{a} \right) \quad (\text{IV.56})$$

onde  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, os raios externo e interno da seção transversal do cilindro. O fator de proporcionalidade  $\alpha$  associado a esse momento é dado por

$$\alpha_0 = \frac{1}{G a} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{IV.57})$$

Para  $\alpha > \alpha_0$  tem início a plastificação da seção transversal. O momento torçor correspondente ao campo de deslocamento imposto é dado pela seguinte expressão:

$$M = M(\alpha) = \frac{2\pi a^3}{3} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{1}{12\sqrt{3}a^3} \left( \frac{\sigma_0}{G\alpha} \right)^3 \right] - \frac{\pi}{2} G \alpha b^4 \quad (\text{IV.58})$$

Para

$$\alpha = \alpha_p = \frac{1}{G b} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{IV.59})$$

obtém-se o momento torçor correspondente à plastificação de toda a seção transversal:

$$M_p = \frac{2\pi}{3} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} (a^3 - b^3) \quad (\text{IV.60})$$

Para a relação  $b/a = 0,4$ , tem-se  $M_p/M_0 = 1,28$ , ou seja, o máximo momento torçor que pode atuar na seção transversal do cilindro em estudo é 28% maior do que aquele correspondente ao primeiro escoamento. Assim, a imposição de um campo de deslocamento com  $\alpha > \alpha_p$  somente produz um acréscimo de deformações, o valor do momento permanecendo inalterado.

O diagrama  $M/M_0 \times \alpha$ , correspondente à solução exata do problema, e a discretização utilizada para a análise numérica são apresentados na figura a seguir.

Em função dos resultados obtidos para a força de superfície, após a resolução da equação (IV.25), o momento  $M(\alpha)$  foi calculado da seguinte maneira:

$$M(\alpha) = \sum_j 2\pi \int_{\Gamma_j} p(X) r^2(X) d\Gamma(X)$$

onde  $p(X)$  representa a força de superfície interpolada linearmente sobre os elementos da base do cilindro (na superfície lateral,  $p(X) = 0$ ) e  $d\Gamma(X) = dr(X)$ . Para  $\alpha = 0,0025$ , o erro cometido na avaliação do momento foi de 0,17%.

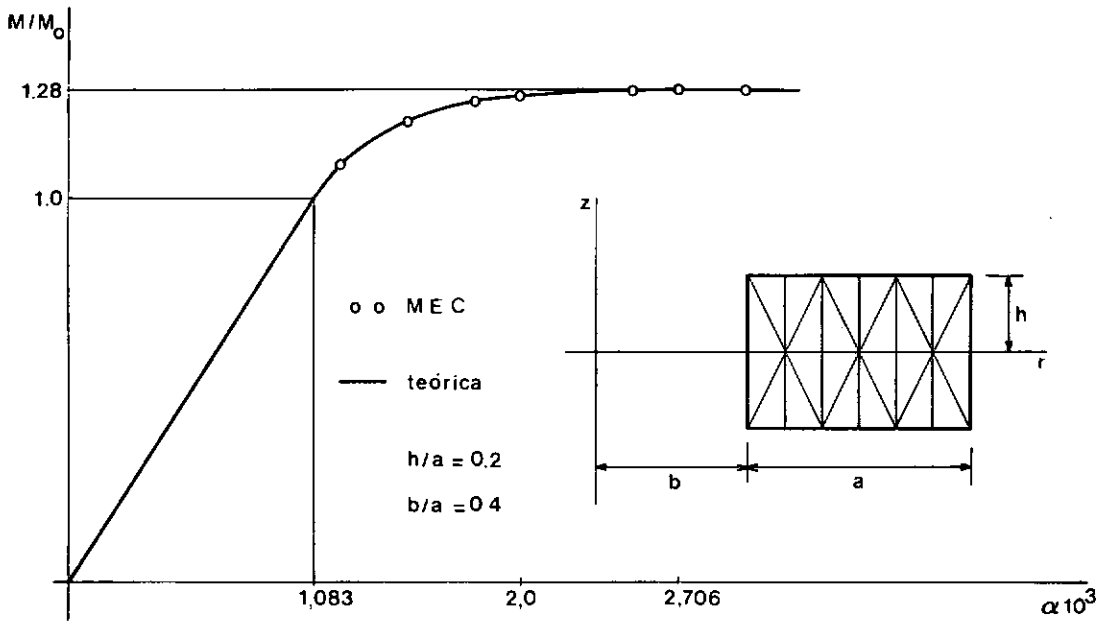


Figura IV.4 - Diagrama  $M/M_0 \times \alpha$  e discretização utilizada na análise

Devido ao comportamento da deformação plástica -  $\epsilon_{\theta z}^P = \epsilon_{\theta z}^P(r)$  - a seção meridional foi melhor discretizada na direção  $r$ .

Na tabela a seguir são apresentados os valores de  $\tau_{\theta z}$  e  $\epsilon_{\theta z}^P$  correspondentes à solução exata do problema [11] e os obtidos numericamente, para  $\alpha = 0,0030$  (a seção transversal está totalmente plastificada), nos pontos de ordenada nula.

Tabela IV.1 - Tensões e deformações plásticas nos pontos sobre o eixo  $r$

$\beta=r/a$	SOLUÇÃO EXATA		M.E.C	
	$\tau_{\theta z}$	$\epsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$	$\tau_{\theta z}$	$\epsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$
0,4	4,330127	0,293671	4,330127	0,293671
0,5	4,330127	1,043671	4,330116	1,054134
0,6	4,330127	1,793671	4,330113	1,820648
0,7	4,330127	2,543671	4,330113	2,560140
0,8	4,330127	3,293671	4,330114	3,331507
0,9	4,330127	4,043671	4,330118	4,054946
1,0	4,330127	4,793671	4,330127	4,793671

Neste problema, o valor adotado para o incremento de carga foi  $w = 5\%$ ; o valor obtido para o fator de carga inicial, para  $\alpha = 0,0030$ , foi  $\lambda_0 = 0,360727$ . Foram necessários, portanto, treze incrementos de carga para restabelecer o campo de deslocamento imposto inicialmente.

IV.4.2 - CILINDRO MACIÇO COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE  
MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO

Analogamente ao problema anterior, o campo de deslocamento

$$u = \alpha r z$$

é imposto ao cilindro considerado. Tomando-se  $b = 0$ , as expressões (IV.56), (IV.57), (IV.58) e (IV.60) são particularizadas para este problema.

A relação  $M_p/M_0 = 1,33$  indica que o máximo momento torçor que pode atuar na seção transversal do cilindro em estudo é 33% maior do que aquele correspondente ao primeiro escoamento. A plastificação de toda a seção transversal corresponde a uma situação limite, pois  $\tau_{\theta z} = 0$  para  $r=0$ . Além disso, a expressão (IV.59) não pode ser particularizada: quando  $b \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ .

O diagrama  $M/M_0 \times \alpha$ , correspondente à solução exata do problema, e a discretização utilizada para a análise numérica são apresentados na figura a seguir. Como no problema anterior,  $M(\alpha)$  foi calculado em função dos resultados obtidos para a força de superfície.

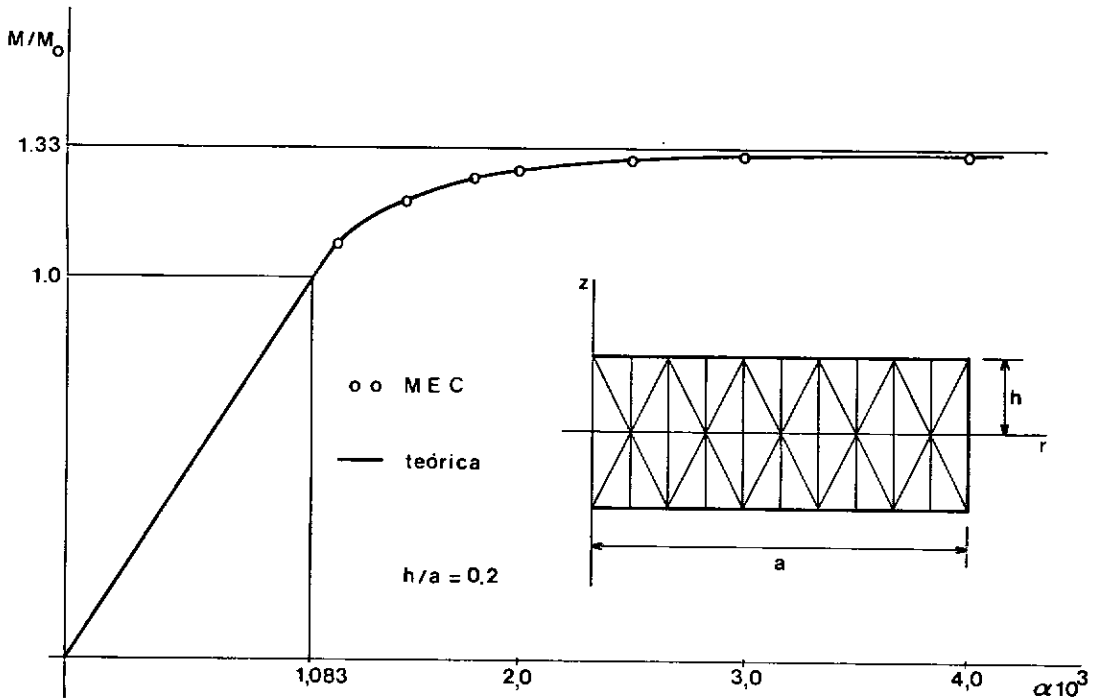


Figura IV.5 - Diagrama  $M/M_0 \times \alpha$  e discretização utilizada na análise

Novamente, a seção meridional foi melhor discretizada na direção  $r$ .

Na tabela a seguir são apresentados os valores de  $\tau_{\theta z}$  e  $\epsilon_{\theta z}^p$  correspondentes à solução exata do problema [11] e os obtidos numericamente, para  $\alpha = 0,0040$ , nos pontos de ordenada nula.

Tabela IV.2 - Tensões e deformações plásticas nos pontos sobre o eixo r

$\beta=r/a$	SOLUÇÃO EXATA		M.E.C.	
	$\tau_{\theta z}$	$\epsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$	$\tau_{\theta z}$	$\epsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$
0,1	1,60	0,00	1,603454	0,00
0,2	3,20	0,00	3,211027	0,00
0,3	4,330127	0,293671	4,330127	0,307779
0,4	4,330127	1,293671	4,330085	1,325528
0,5	4,330127	2,293671	4,330127	2,322294
0,6	4,330127	3,293671	4,330065	3,348276
0,7	4,330127	4,293671	4,330126	4,327085
0,8	4,330127	5,293671	4,330044	5,359634
0,9	4,330127	6,293671	4,330124	6,315230
1,0	4,330127	7,293671	4,330127	7,293671

Neste problema, o valor adotado para o incremento de carga foi  $w=5\%$ ; o valor obtido para o fator de carga inicial, para  $\alpha = 0,0040$ , foi  $\lambda = 0,2705483$ . Foram necessários, portanto, cinquenta e quatro incrementos de carga para restabelecer o campo de deslocamento imposto inicialmente.

IV.4.3 - CILINDRO MACIÇO COM SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE  
MATERIAL COM ENDURECIMENTO LINEAR

Como anteriormente, o campo de deslocamento

$$u = \alpha r z$$

é imposto ao cilindro considerado, possibilitando comparar os resultados obtidos com a solução exata do problema [11].

Neste problema, como nos dois apresentados anteriormente, a fronteira plástica é determinada teoricamente da seguinte maneira:

$$r_p = a \beta_p \quad (\text{IV.61})$$

onde

$$\beta_p = \frac{1}{G \alpha a} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{IV.62})$$

Como a tensão  $\tau_{\theta z}$  varia linearmente com  $r$  -  
 $\tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(r) = G \alpha r$  - até o primeiro escoamento, então  $\lambda_0 = \beta_p$ .

Para os valores abaixo

$$\alpha = 0,0025$$

$$a = 5,0$$

$$\sigma_0 = 7,5$$

$$G = 800$$

$$E = 2000$$

o cilindro começa a plastificar (teoricamente) a partir da posição  $r_p = 2,165$  ( $\beta_p = 0,43301$ ). O valor encontrado para o fator de carga inicial foi  $\lambda_0 = 0,43299$ , o que fornece um erro de 0,005% na determinação da fronteira plástica.

Seja o parâmetro de endurecimento  $m$  e a variável  $\tau_\theta$ , definidos como segue:

$$m = \frac{E_T}{E}$$

e

$$\tau_\theta = \frac{\tau_{\theta z}}{2G\epsilon_0}$$

O diagrama  $\tau_\theta \times \beta$ , para  $m=0,00$ ;  $m=0,10$  e  $m=0,20$ , e a discretização utilizada na análise numérica estão representados na Figura IV.6. É importante observar que somente a região do domínio onde foi prevista a ocorrência de deformações plásticas necessitou ser discretizada.

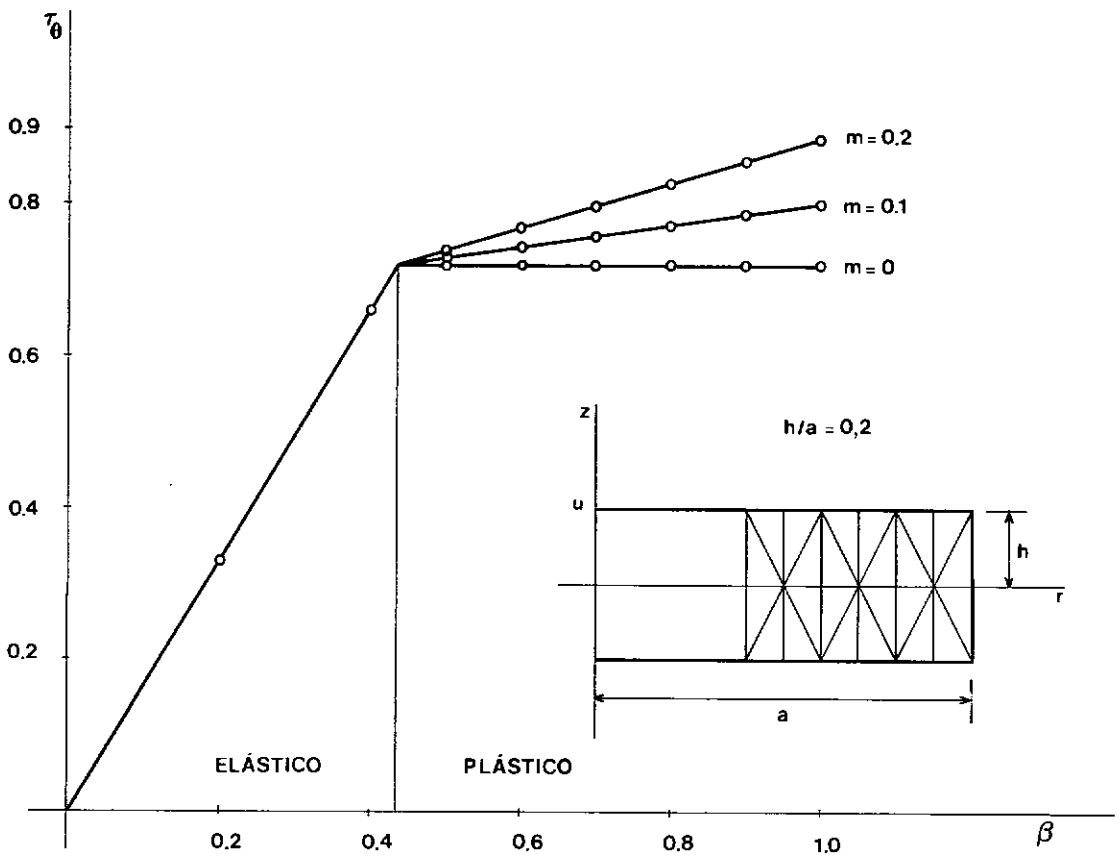


Figura IV.6 - Diagrama  $\tau_\theta \times \beta$  e discretização utilizada na análise

Nas tabelas abaixo são apresentados os valores de  $\tau_{\theta z}$  e de  $\varepsilon_{\theta z}^p$  correspondentes à solução exata do problema e os obtidos numericamente, para  $m=0,04$  e  $m=0,10$ , nos pontos de ordenada nula.

Tabela IV.3 - Tensões e deformações plásticas nos pontos sobre o eixo  $r$  para  $m=0,04$

$\beta=r/a$	SOLUÇÃO EXATA		M.E.C.	
	$\tau_{\theta z}$	$\varepsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$	$\tau_{\theta z}$	$\varepsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$
0,1	1,00	0,00	0,999790	0,00
0,2	2,00	0,00	1,999532	0,00
0,3	3,00	0,00	2,999118	0,00
0,4	4,00	0,00	3,997675	0,00
0,5	4,352606	0,404621	4,352430	0,401206
0,6	4,386163	1,008648	4,385841	1,002460
0,7	4,419720	1,612675	4,419410	1,606661
0,8	4,453277	2,216702	4,452844	2,208516
0,9	4,486834	2,820729	4,486616	2,816527
1,0	4,520391	3,424755	4,520391	3,424755

Tabela IV.4 - Tensões e deformações plásticas nos pontos sobre o eixo  $r$  para  $m=0,10$

$\beta=r/a$	SOLUÇÃO EXATA		M.E.C.	
	$\tau_{\theta z}$	$\epsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$	$\tau_{\theta z}$	$\epsilon_{\theta z}^p \cdot 10^3$
0,1	1,00	0,00	0,999796	0,00
0,2	2,00	0,00	1,999558	0,00
0,3	3,00	0,00	2,999217	0,00
0,4	4,00	0,00	3,998083	0,00
0,5	4,386896	0,383190	4,386568	0,380877
0,6	4,471642	0,955224	4,471024	0,950908
0,7	4,556387	1,527258	4,555813	1,523235
0,8	4,641133	2,099292	4,640258	2,093266
0,9	4,725879	2,671326	4,725467	2,668472
1,0	4,810625	3,243360	4,810625	3,243360

Como os valores adotados para  $m$  são pequenos, ao erro cometido na determinação da tensão  $\tau_{\theta z}$  corresponde um erro maior no resultado obtido para a deformação plástica  $\epsilon_{\theta z}^p$  (comparar os valores apresentados nas Tabelas IV.1 e IV.2, para  $m=0,0$ ).

Neste problema, o valor adotado para o incremento de carga foi  $w=10\%$ . Foram necessários, portanto, quatorze incrementos de carga para restabelecer o campo de deslocamento imposto inicialmente.

#### IV.4.4 - CILINDRO COM CAVIDADE ESFÉRICA MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO

O cilindro do exemplo III.7.2 é novamente analisado, agora com a consideração de que é constituído por um material perfeitamente plástico.

Para  $\alpha = 0,0030$  (o campo de deslocamento imposto é o mesmo da análise elástica) e  $\sigma_0 = 12,5$ , a fronteira plástica está suficientemente distante da cavidade e, consequentemente, da concentração de tensões que ocorre ali, e pode ser determinada de maneira exata, como se o cilindro considerado fosse maciço (Figura IV.7). Sendo  $M_0$  o momento torçor correspondente ao primeiro escoamento, a relação entre o momento elasto-plástico  $M$ , associado ao campo de deslocamento imposto, e  $M_0$  é a seguinte:  $M/M_0 = 1,24$ .

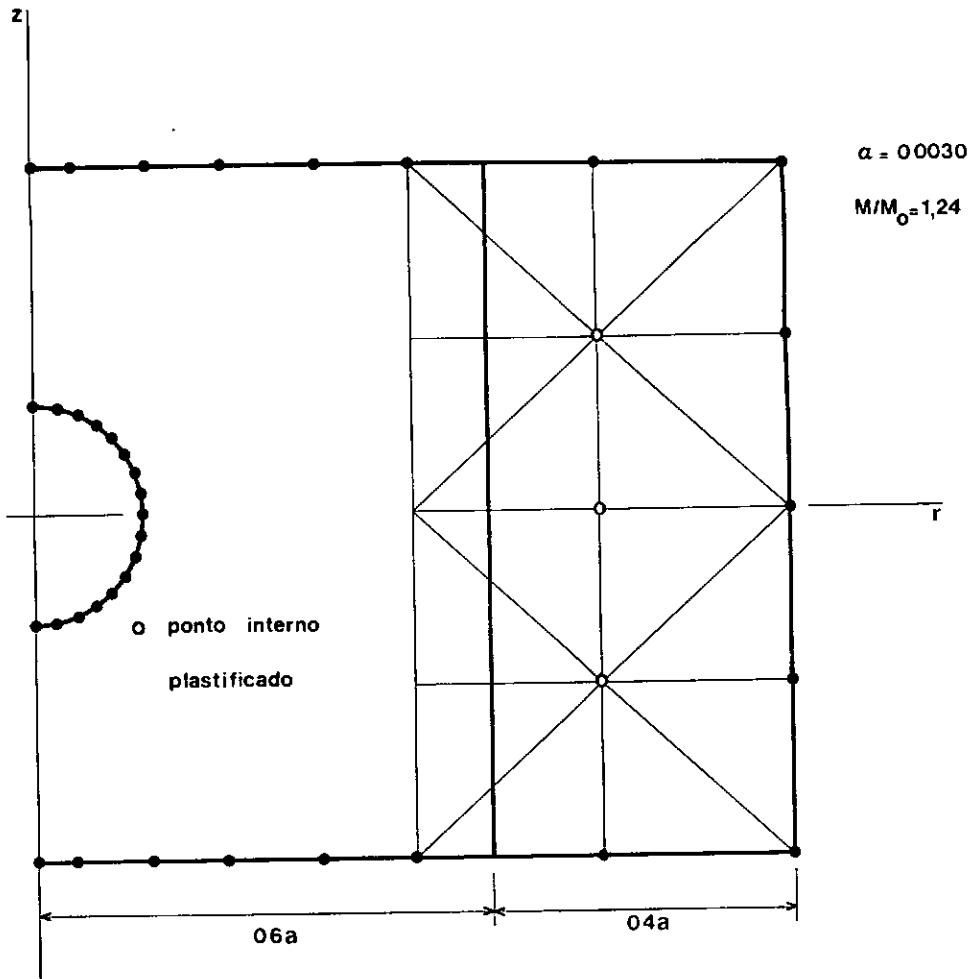


Figura IV.7 - Zona plástica resultante da aplicação do campo de deslocamento  $u = 0,0030 rz$

Em relação à Figura IV.7, deve-se observar o número reduzido de células utilizadas para se efetuar a análise elastoplástica.

As Figuras IV.8 e IV.9 representam as zonas plásticas - obtidas de maneira aproximada - correspondentes aos fatores de proporcionalidade  $\alpha = 0,0054$  e  $\alpha = 0,010$ . A região próxima à cavidade foi melhor discretizada devido à concentração de tensões que ocorre ali.

Para  $\alpha = 0,0054$ ,  $M/M_0 = 1,31$  e o efeito da concentração de tensões já se faz sentir na determinação da fronteira plástica.

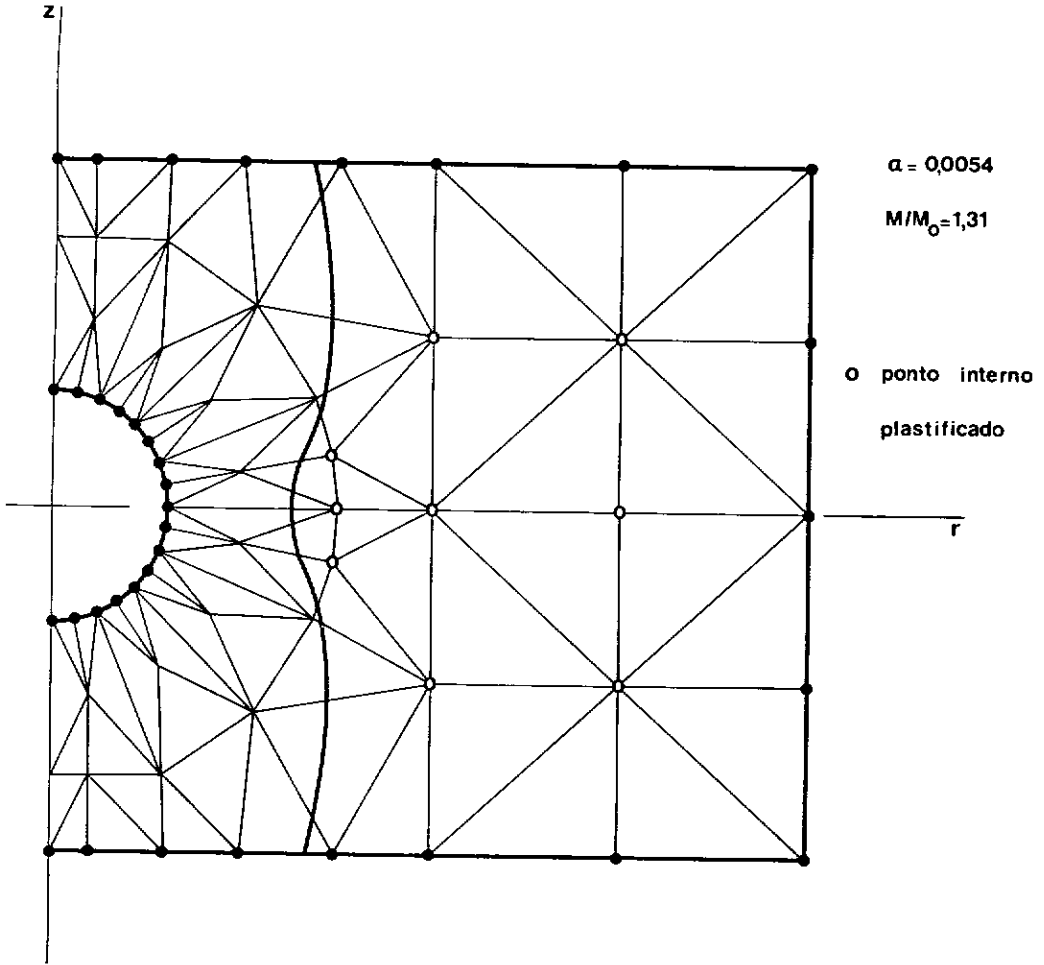


Figura IV.8 - Zona plástica resultante da aplicação do campo de deslocamento  $u = 0,0054 rz$

Para  $\alpha = 0,010$ ,  $M/M_0 = 1,33$  e a seção média já está totalmente plastificada.

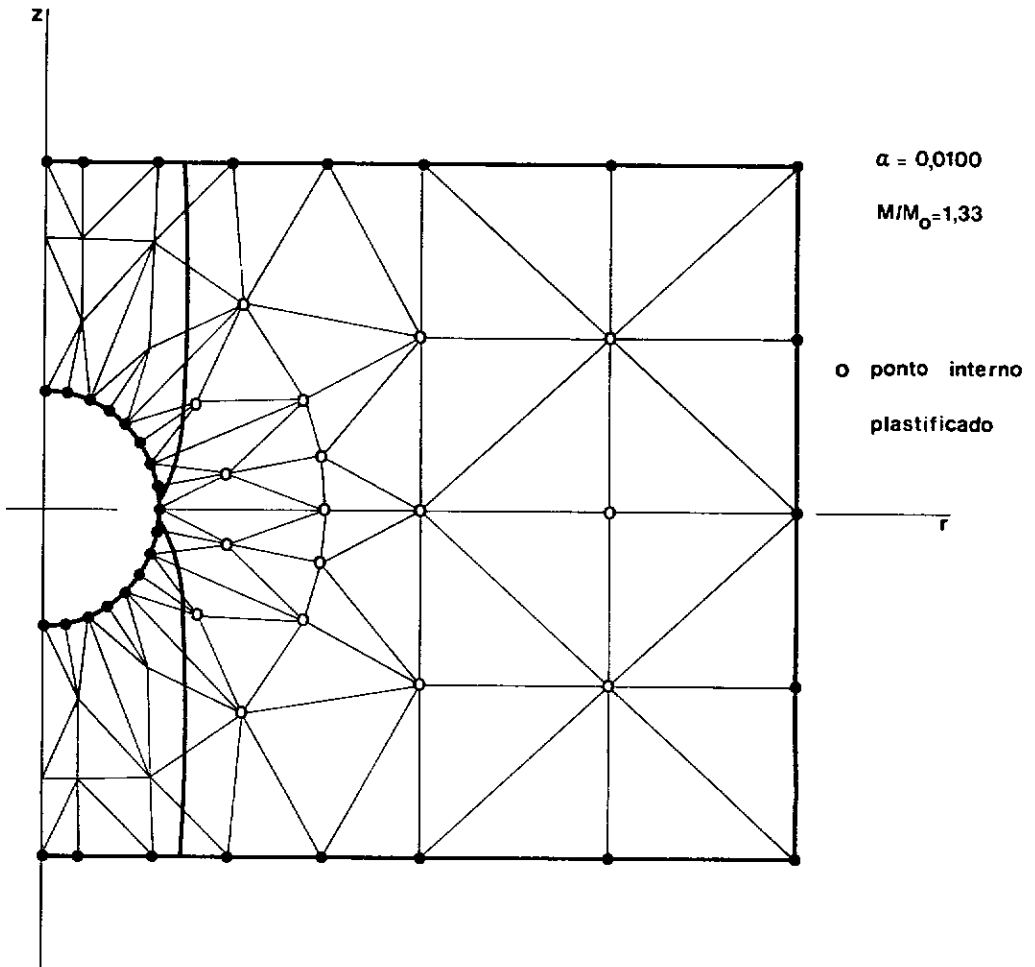


Figura IV.9 - Zona plástica resultante da aplicação do campo de deslocamento  $u = 0,010 rz$

IV.4.5 - CILINDRO COM ENTALHE SEMICIRCULAR  
MATERIAL PERFEITAMENTE PLÁSTICO

Para a análise da torção elastoplástica do cilindro apresentado no exemplo III.7.3, admite-se um material perfeitamente plástico e a imposição do campo de deslocamento

$$u = \alpha r z$$

nas suas extremidades. Na superfície lateral, é prescrito o valor nulo para a força de superfície.

Para  $\sigma_0 = 11,0$ , com os valores adotados para o fator de proporcionalidade  $\alpha$ , somente a região do domínio próxima ao entalhe foi discretizada para se efetuar a análise elastoplástica, devido à grande concentração de tensões que ocorre aí. Assim, para  $\alpha = 0,00105$  foram utilizadas vinte e quatro células; a zona plástica e a discretização estão representadas na Figura IV.10. Para  $\alpha = 0,00152$  foram utilizadas noventa e seis células. Como a zona plástica (Figura IV.11) não se estendeu a todo o domínio discretizado, esse número de células pode ser reduzido, a discretização se restringindo somente à região plasticificada.

Nas Figuras IV.10 e IV.11 também estão representados os valores obtidos para a tensão  $\tau_{\theta z}$  nos pontos da seção média. Os momentos elástico e elastoplástico, associados ao campo de deslocamento imposto, são designados por  $M_e$  e  $M$ , respectivamente;  $M_0$  é o momento correspondente ao primeiro escoamento.

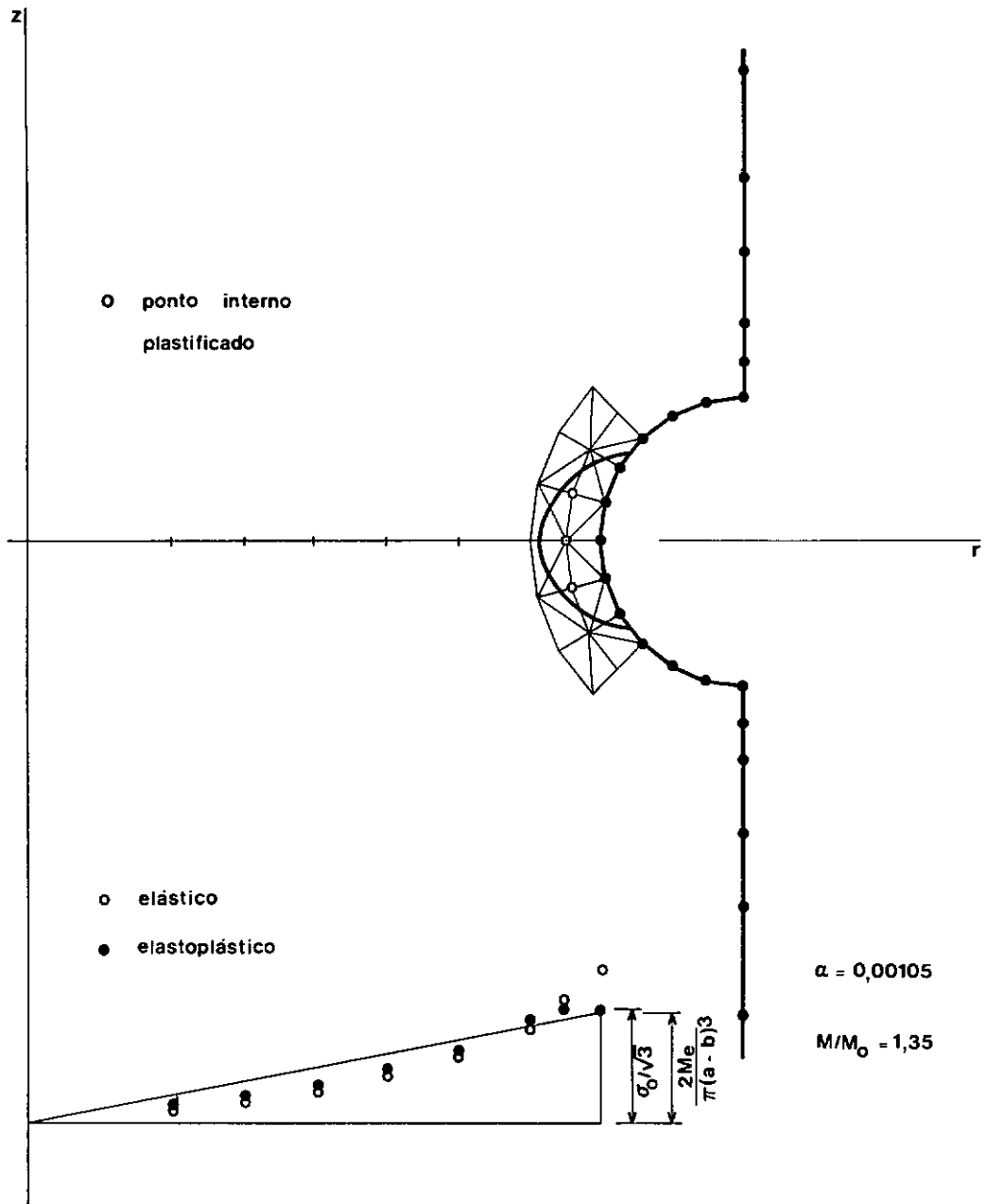


Figura IV.10 - Zona plástica resultante da aplicação do campo de deslocamento  $u = 0,00105 rz$

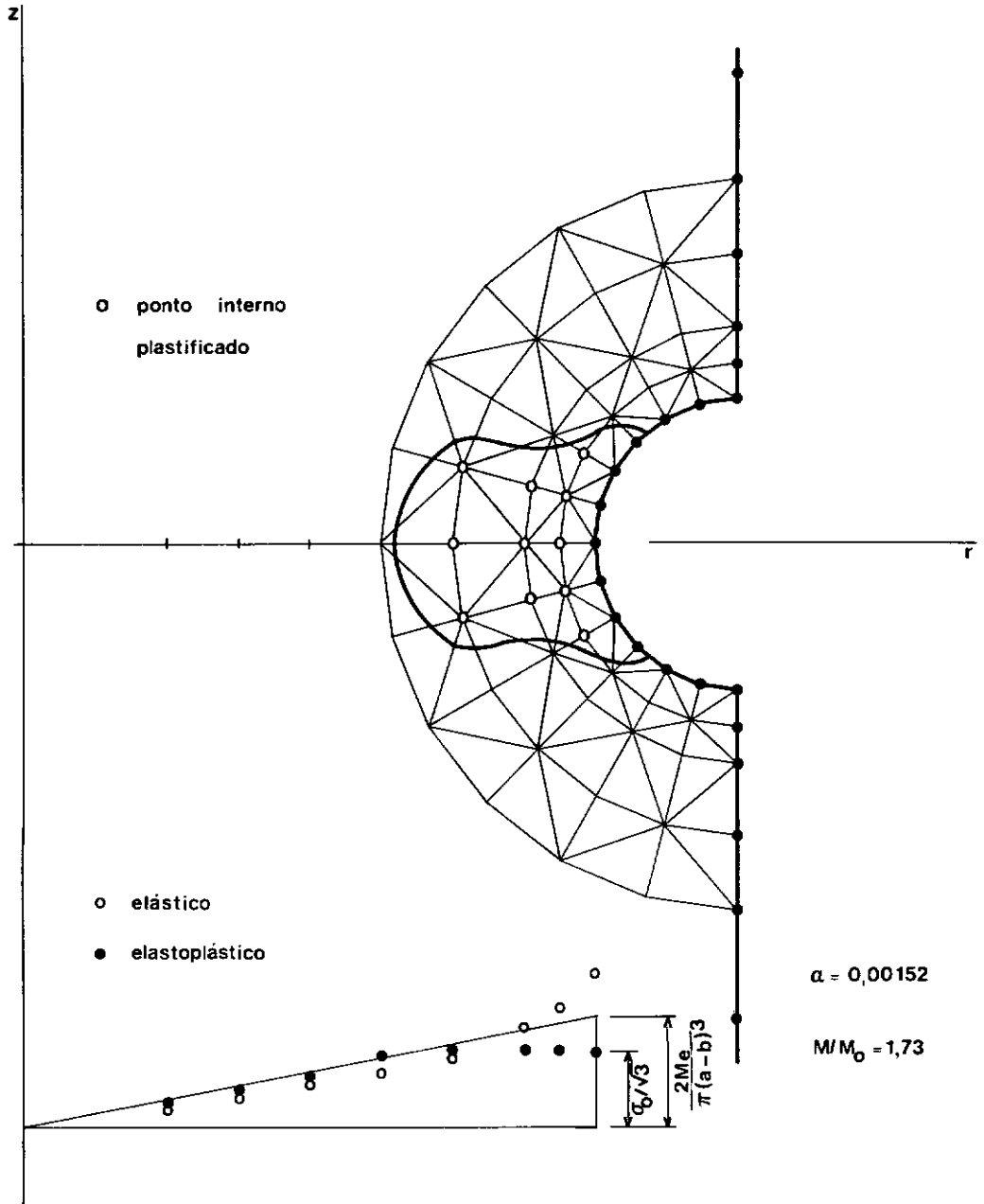


Figura IV.11 - Zona plástica resultante da aplicação do campo de deslocamento  $u = 0,00152 rz$

## CAPÍTULO V

## CONCLUSÕES

A formulação axissimétrica do Método dos Elementos de Contorno conserva a sua eficiência computacional e precisão numérica e traz, também, a vantagem adicional da análise bi-dimensional de problemas tri-dimensionais.

Para se apresentar os resultados relativos aos exemplos dos capítulos III e IV, foram implementados dois programas computacionais em linguagem FORTRAN 77 - um programa para as análises elástica e elastoplástica, no qual foram utilizados elementos e células triangulares lineares; outro somente para a análise elástica, com a utilização do elemento quadrático. Foi utilizado um micro-computador do tipo PC/XT e uma impressora de 132 colunas. Optou-se pela utilização de tal equipamento tendo em vista somente a depuração dos programas; entretanto, a rapidez na execução do programa, para a análise elástica, serviu de estímulo para que a análise elastoplástica também fosse implementada aí. Embora o tempo de processamento tenha aumentado bastante para esse tipo de análise, devido, principalmente, à integração no domínio, isto é, à formação das matrizes  $\underline{K}$  e  $\underline{B}$ , a utilização do micro-computador não se tornou inviável graças às vantagens que o mesmo oferece em comparação com um terminal de computador e também porque as matrizes  $\underline{K}$  e  $\underline{B}$ , como já foi comentado anteriormente, uma vez formadas permanecem inalteradas durante toda a execução do programa.

Tendo em vista a otimização do programa, foi utiliza-

da uma integração seletiva dos elementos na qual o número de pontos de integração é função da distância do ponto fonte ao nó médio (ou, no caso do elemento quadrático, nó intermediário) do elemento a ser integrado. Essa integração seletiva também foi utilizada para as células não singulares, quando se efetua a integração nas direções radial e angular (equações (IV.45) e (IV.46)). Já uma segunda versão do programa, que foi implementada com a fórmula de Hammer, utiliza sempre treze pontos para a integração das células não singulares (equação (IV.32)).

A transformação quadrática efetuada para a obtenção dos elementos da diagonal principal da matriz  $G$ , que permite realizar a integração dos elementos de maneira unificada, evitando a separação das integrais elípticas e o uso de pesos logarítmicos, também contribuiu para a otimização do programa.

Estando de posse das expressões corretas das derivadas das integrais de domínio relativas às deformações plásticas, pôde-se estabelecer as equações integrais apropriadas para o cálculo das tensões nos pontos internos e garantiu-se a filosofia do método, uma vez que o uso da derivação numérica dos deslocamentos para a obtenção das tensões nos pontos internos fica definitivamente descartado. As equações integrais proporcionam maior eficiência computacional e melhor precisão numérica nas aplicações práticas do método, pois as aproximações numéricas das principais incógnitas do problema (deslocamento e força de superfície) são mantidas apenas no contorno, com exceção do campo de deformações plásticas, que é aproximado no domínio. A única derivação numérica que continua sendo utilizada é aquela para o cálculo das tensões nos nós do contorno, procedimento já consagrado em trabalhos anterior-

res ([8], [9]).

Os exemplos relativos à análise elástica permitem a comparação entre os elementos linear e quadrático, comparação esta que mostra as qualidades do elemento linear: a comparação dos resultados obtidos através da discretização (b) no exemplo (II.7.1) com a solução analítica do problema, mostra o quanto o elemento linear é eficiente; evidentemente, o uso de elementos quadráticos, para essa mesma discretização, forneceu resultados melhores. Quando há cavidades ou entalhes no problema analisado, como no caso dos exemplos (III.7.2) e (III.7.3), o elemento quadrático simula melhor a geometria do contorno, sendo menor o número de elementos requeridos para a discretização da cavidade.

A utilização de nós duplos permitiu simular bastante bem a descontinuidade das forças de superfície no contorno, tendo sido também utilizados no caso de mudança brusca da geometria, como no exemplo (III.7.2) no qual os nós inicial e final da circunferência que define o entalhe são nós duplos.

A análise elastoplástica de problemas que apresentam cavidade requereu uma boa discretização do domínio devido à concentração de tensões, que ocorre na vizinhança da cavidade, e à interpolação relativamente simples das células. Optou-se, entretanto, por utilizar um maior número de células a implementar células de ordem superior (quadráticas, por exemplo), o que conduziria ao procedimento alternativo apresentado em [8] e acarretaria um esforço computacional maior. Os exemplos (IV.4.1), (IV.4.2) e (IV.4.3), ainda que envolvam corpos de geometria simples, ilustram a eficiência do método para esse tipo de análise.

Neste trabalho utilizou-se uma formulação tipo deformações iniciais, que é restrita ao critério de escoamento de von Mises; sugere-se, então, que seja desenvolvida uma formulação tipo tensões iniciais, mais geral e que possibilita o uso dos critérios de escoamento de Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. A implementação dessa formulação mais geral permitiria, também, uma comparação com a formulação utilizada aqui.

O que torna bastante atraente a implementação do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas envolvendo não linearidade física, tais como plasticidade, viscoplasticidade e fluência, é o fato de que a solução completa do problema pode ser obtida utilizando-se uma simples relação matricial que envolve as tensões, a sua solução elástica e as deformações inelásticas (equação (IV.54)). De uma maneira geral, as rotinas empregadas para a solução desses problemas são essencialmente procedimentos explícitos nos quais, normalmente, o número de iterações (plasticidade) ou de intervalos de tempo (viscoplasticidade e fluência) requeridos para a convergência é elevado. Devido à sua relativa simplicidade, o que facilita a implementação de várias formulações, o problema da torção elastoplástica poderia ser analisado utilizando-se o procedimento implícito apresentado em [16] e que se caracteriza por um número mínimo de iterações e um maior esforço computacional a cada iteração. A implementação desse procedimento implícito forneceria subsídios para a discussão a respeito dos tipos de problemas aos quais a sua utilização seria vantajosa.

## APÊNDICE A

## OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL AXISSIMÉTRICA

Seja a solução fundamental tri-dimensional de Kelvin

$$u_{ij}^*(\xi; X) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)GR} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{R_i}{R} \frac{R_j}{R} \right] \quad (\text{A.1})$$

que representa o deslocamento do ponto  $X$  na direção  $j$  produzido por uma carga concentrada unitária aplicada no ponto  $\xi$  e na direção  $i$ , na qual:

$$i, j = 1, 2, 3(x, y, z)$$

$$\delta_{ij} \text{ é o delta de Kronecker: } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \neq j \\ 1 & , \text{ se } i = j \end{cases}$$

$R$  é a distância entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $X$ :

$$R = (R_i R_i)^{1/2}$$

e

$$R_i = x_i(X) - x_i(\xi)$$

Definindo-se um sistema de coordenadas cilíndrico  $(r; \phi; z)$ , as soluções fundamentais axissimétricas são aquelas correspondentes a anéis de carga (anéis fonte) de intensidade unitária, com as cargas atuando nas direções radial, circunferencial e axial, e podem ser obtidas da solução fundamental de Kelvin (A.1) utilizando-se o princípio da superposição de efeitos (o material é admitido elástico linear), isto é, integrando-se a mesma (após as transformações necessárias) ao longo de um círculo de raio  $\rho$ .

Para tanto, define-se

$$\underline{\hat{u}}^* = \underline{T}^T(\xi) \underline{P}(\xi) \underline{\bar{u}}^*(\xi; X) \underline{T}(X) \quad (\text{A.2})$$

onde  $\underline{\bar{u}}^*(\xi; X)$  é a representação matricial de (A.1), na qual  $x_1 = r \cos \phi$  ;  $x_2 = r \sin \phi$  e  $x_3 = z$  ;  $\underline{T}$  é a matriz da transformação de sistema de coordenadas e  $\underline{P}$  é a matriz que assegura que  $\underline{u}^*$  corresponda a cargas unitárias nas novas direções.

As matrizes  $\underline{T}$  e  $\underline{P}$  são as seguintes:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1/(\cos \phi + \sin \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\cos \phi - \sin \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, as soluções fundamentais são obtidas integrando-se  $\underline{\hat{u}}^*$  como segue

$$u_{ij}^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_{ij}^*(\xi; X) d\phi(\xi) \quad (\text{A.5})$$

com  $i, j = r, \phi, z$ .

As soluções fundamentais  $u_{ij}^*(\xi; X)$  são, portanto, independentes da variável angular  $\phi$ .

## APÊNDICE B

DERIVADAS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS EM RELAÇÃO ÀS  
COORDENADAS  $\rho$  E  $z_0$  DO ANEL FONTE

As tensões nos pontos internos são calculadas através das equações integrais (III.17), apresentadas abaixo

$$\tau_{r\theta}(\xi) = G \left[ 2\pi \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^*}{\partial \rho} - \frac{u^*}{\rho} \right) \rho r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial p^*}{\partial \rho} - \frac{p^*}{\rho} \right) \rho r d\Gamma \right] \quad (B.1)$$

$$\tau_{\theta z}(\xi) = G \left[ 2\pi \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial z_0} \rho r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*}{\partial z_0} \rho r d\Gamma \right]$$

onde

$$\frac{\partial p^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial \rho} n_r + \frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial \rho} n_z \quad (B.2)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z_0} = \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial z_0} n_r + \frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial z_0} n_z$$

Em função das expressões abaixo

$$S_1 = (r+\rho)^2 + \tilde{z}^2$$

$$S_2 = r^2 + \rho^2 + \tilde{z}^2$$

$$S_3 = 2\rho^2 + r^2 + 2\tilde{z}^2$$

$$S_4 = \rho^2 - r^2 + \tilde{z}^2$$

$$S_5 = (r-\rho)^2 + \tilde{z}^2$$

$$\begin{aligned}
 S_6 &= r^2 - \rho^2 + \bar{z}^2 \\
 S_7 &= \rho(r + \rho) \\
 S_8 &= -2\rho(r - \rho) \\
 S_9 &= -2(r^2 + \bar{z}^2) \\
 S_{10} &= S_1 + S_7 \\
 S_{11} &= S_2 + S_4 \\
 S_0 &= 4\Pi\rho^2 r \sqrt{S_1}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

obtem-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} = \frac{1}{2\rho G S_0} \left\{ S_9 K(m) + \left[ S_1 + \frac{S_2 S_6}{S_5} \right] E(m) \right\} \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z_0} = \frac{1}{G S_0} \bar{z} \left\{ -K(m) + \frac{S_2}{S_5} E(m) \right\}$$

e

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial \rho} = \frac{1}{4\rho r S_1 S_5 S_0} [F_{r\rho} K(m) + G_{r\rho} E(m)]$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial z_0} = \frac{1}{2r S_1 S_5 S_0} [F_{rz} K(m) + G_{rz} E(m)]$$

(B.5)

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial \rho} = \frac{1}{2\rho S_1 S_5 S_0} [F_{z\rho} K(m) + G_{z\rho} E(m)]$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial z_0} = \frac{1}{S_1 S_5 S_0} [F_{zz} K(m) + G_{zz} E(m)]$$

onde

$$F_{r\rho} = S_6 [S_5 (2S_3 - 3S_1) - S_2 S_4] - 4S_5 (4\rho^2 S_1 - S_3 S_{10})$$

$$G_{r\rho} = S_1 S_6 (-2S_3 + 3S_5) + 6S_1 S_5 (S_7 - S_1) + S_2 S_4 S_6 + \\ + \frac{2[2\rho^2 S_1 S_5 S_{11} - S_2 S_4 (S_5 S_{10} + S_1 S_8)]}{S_5}$$

$$F_{rz} = \tilde{z} (5S_1 S_5 - S_2 S_4)$$

$$G_{rz} = \tilde{z} \left\{ S_2 S_4 - 2S_1 S_3 + \frac{[S_2 S_4 (2S_1 + S_5) - 2S_1 S_5 S_{11}]}{S_5} \right\}$$

(B.6)

$$F_{z\rho} = \tilde{z} (S_2 S_6 - 3S_1 S_5)$$

$$G_{z\rho} = \tilde{z} \frac{[2\rho r S_6 (S_5 - 2S_1) + 2S_2 S_5 S_{10}]}{S_5}$$

$$F_{zz} = \tilde{z}^2 S_2 - S_1 S_5$$

$$G_{zz} = \tilde{z}^2 (S_1 - S_2) - \frac{[\tilde{z}^2 S_2 (2S_1 + S_5) - S_1 S_5 (S_2 + 2\tilde{z}^2)]}{S_5}$$

## APÊNDICE C

## EXPANSÃO POLINOMIAL DAS INTEGRAIS ELÍPTICAS K e E

As integrais elípticas completas  $K(m)$  e  $E(m)$ , respectivamente do primeiro e segundo tipos, possuem as seguintes aproximações polinomiais (expressões (III.27)):

$$K(m) \cong \sum_{i=0}^4 a_i \mu^i + \ln \left( \frac{1}{\mu} \right) \sum_{i=0}^4 b_i \mu^i \quad (C.1)$$

$$E(m) \cong \sum_{i=0}^4 c_i \mu^i + \ln \left( \frac{1}{\mu} \right) \sum_{i=0}^4 d_i \mu^i$$

nas quais o parâmetro  $\mu$  dos polinômios é igual ao quadrado do módulo complementar das integrais.

Os coeficientes da aproximação polinomial da integral elíptica  $K(m)$  são dados na tabela abaixo:

$i$	$a_i$		$b_i$	
0	1,386294361		0,5	
1	9,666338350	(-2)	1,249859468	(-1)
2	3,589980090	(-2)	6,880295505	(-2)
3	3,742539571	(-2)	3,328521016	(-2)
4	1,451338556	(-2)	4,418398230	(-3)

Para a aproximação polinomial da integral elíptica  $E(m)$ , os coeficientes são os seguintes

$i$	$c_i$		$d_i$	
0	1,0			
1	4,432515145	(-1)	2,499836641	(-1)
2	6,260761942	(-2)	9,200109374	(-2)
3	4,757404429	(-2)	4,069468414	(-2)
4	1,736314854	(-2)	5,263789328	(-3)

Nota: Os coeficientes devem ser multiplicados pela potência de 10 entre parênteses.

## APÊNDICE D

## TENSÕES NOS NÓS DO CONTORNO

Sejam as equações (II.64) e (II.10), apresentadas abaixo e relativas a um nó qualquer  $X \in \Gamma$  :

$$\tau_{r\theta} = G \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) - 2G\epsilon_{r\theta}^p \quad (D.1)$$

$$\tau_{\theta z} = G \frac{\partial u}{\partial z} - 2G\epsilon_{\theta z}^p$$

$$p = \tau_{r\theta} n_r + \tau_{\theta z} n_z \quad (D.2)$$

Em (D.2),  $n_r$  e  $n_z$  são os cossenos diretores da normal externa ao contorno e, em função da Figura D.1, tem-se:

$$n_r = \cos \alpha \quad ; \quad n_z = \sin \alpha$$

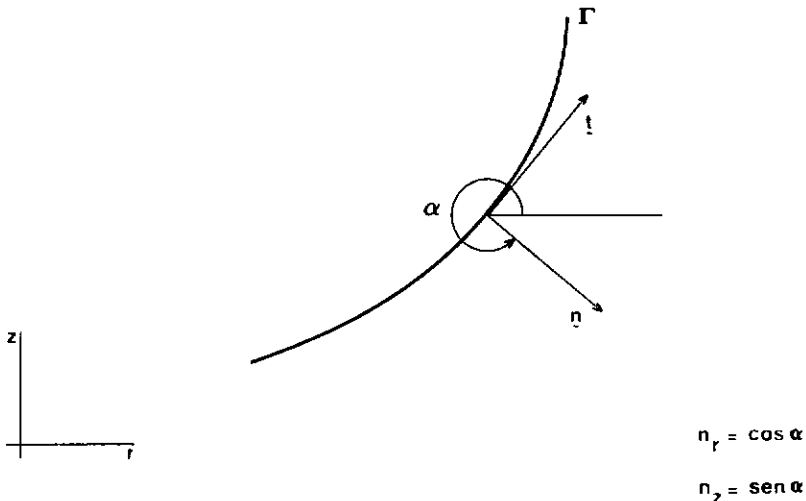


Figura D.1 - Vetores normal ( $\underline{n}$ ) e tangente ( $\underline{t}$ ) ao contorno  $\Gamma$

A substituição de (D.1) em (D.2) conduz à seguinte expressão para a força de superfície

$$p = G \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) n_r + \frac{\partial u}{\partial z} n_z \right] - 2G (\epsilon_{r\theta}^p n_r + \epsilon_{\theta z}^p n_z) \quad (D.3)$$

Seja, agora, a derivada do deslocamento  $u$  na direção tangente ao contorno, que é dada por

$$\frac{du}{d\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial r} n'_r + \frac{\partial u}{\partial z} n'_z \quad (D.4)$$

onde  $n'_r$  e  $n'_z$  são os cossenos diretores da tangente ao contorno. Em função dos cossenos diretores da normal, a expressão (D.4) pode ser escrita como

$$\frac{du}{d\Gamma} = - \frac{\partial u}{\partial r} n_z + \frac{\partial u}{\partial z} n_r \quad (D.5)$$

Combinando (D.5) e (D.3) e resolvendo para  $\frac{\partial u}{\partial r}$  e  $\frac{\partial u}{\partial z}$ , obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{du}{d\Gamma} n_z + \frac{u}{r} n_r^2 + \frac{p}{G} n_r^2 + 2 (\epsilon_{r\theta}^p n_r + \epsilon_{\theta z}^p n_z) n_r \quad (D.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{d\Gamma} n_r + \frac{u}{r} n_r n_z + \frac{p}{G} n_z^2 + 2 (\epsilon_{r\theta}^p n_r + \epsilon_{\theta z}^p n_z) n_z \quad (D.7)$$

A substituição de (D.6) em (D.1) e de (D.7) em (D.2) fornece as seguintes expressões para o cálculo das tensões nos nós do contorno

$$\tau_{r\theta} = pn_r - G\left(\frac{du}{d\Gamma} + \frac{u}{r} n_z\right)n_z - 2G(\epsilon_{r\theta}^P n_z - \epsilon_{\theta z}^P n_r)n_z \quad (D.8)$$

$$\tau_{\theta z} = pn_z + G\left(\frac{du}{d\Gamma} + \frac{u}{r} n_z\right)n_r - 2G(\epsilon_{\theta z}^P n_r - \epsilon_{r\theta}^P n_z)n_r \quad (D.9)$$

As expressões correspondentes à análise elástica são obtidas tomando-se  $\epsilon_{r\theta}^P = 0$  e  $\epsilon_{\theta z}^P = 0$  nas expressões anteriores.

A derivada que aparece nas expressões correspondentes às tensões é calculada diretamente sobre os deslocamentos interpolados, isto é, sobre as funções de interpolação. Assim:

$$\frac{du}{d\Gamma} = \frac{\frac{du}{d\eta}}{\frac{d\Gamma}{d\eta}} \quad (D.10)$$

Para o elemento linear,

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{u_2 - u_1}{2} \quad (D.11)$$

e

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = \frac{\ell}{2} \quad (D.12)$$

As expressões (D.8) e (D.9) são particularizadas de acordo com a posição do nó  $X$ , isto é, se ele coincide com o nó inicial (nó 1) ou o nó final (nó 2) do elemento. É importante observar também que  $n_r$  e  $n_z$  são constantes e dados simplesmente por

$$n_r = \frac{z_2 - z_1}{l} \quad ; \quad n_z = \frac{r_1 - r_2}{l} \quad (D.13)$$

Para o elemento quadrático, conforme o nó em estudo coincida com o seu nó inicial (1), intermediário (2) ou final (3), a derivada apresentada em (D.10) deve ser calculada para  $\eta = -1$ ,  $\eta = 0$  e  $\eta = 1$ , respectivamente. Para o cálculo dos cossenos diretores da normal, o mesmo procedimento deve ser seguido, considerando-se que

$$\alpha = \arctg \left| \frac{-dr/d\eta}{dz/d\eta} \right| \quad (D.14)$$

Os valores finais das tensões, para nós comuns a dois elementos, são iguais à média aritmética dos valores calculados utilizando-se a contribuição de cada elemento.

## APÊNDICE E

## CÁLCULO DE INTEGRAIS SINGULARES USANDO A QUADRATURA DE GAUSS

As integrais associadas aos elementos da diagonal principal da matriz  $\underline{G}$  apresentam uma singularidade logarítmica. Objetivando calcular numericamente essas integrais através da quadratura de Gauss, utilizam-se as transformações não lineares (III.41), (III.43) e (III.49), cuja dedução é apresentada aqui.

Seja, então, uma função qualquer  $f(\eta)$ , singular no ponto  $\bar{\eta}$  e que deve ser integrada numericamente no intervalo  $[-1;1]$  que contém o ponto singular, isto é,  $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$ . Efetua-se a seguinte mudança de variável

$$\eta = a\Psi^2 + b\Psi + c \quad (\text{E.1})$$

e as seguintes condições são impostas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } \eta = -1 ; \Psi = -1 \quad , \\ \text{para } \eta = 1 ; \Psi = 1 \quad , \\ \text{para } \eta = \bar{\eta} ; \frac{d\eta}{d\Psi} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

A equação do segundo grau em  $\Psi$

$$a\Psi^2 + b\Psi + (c-\eta) = 0 \quad (\text{E.3})$$

obtida de (E.1) possui as seguintes raízes:

$$\Psi' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-\eta)}}{2a} \quad (\text{E.4})$$

$$\psi'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-\eta)}}{2a}$$

Assim, para cada valor de  $\eta$  existem dois valores de  $\psi$ .

Impondo as condições de contorno, obtém-se o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

cuja resolução fornece

$$b = 1 \quad ; \quad a = -c \quad (\text{E.6})$$

Da condição de extremo para o ponto singular  $\eta = \bar{\eta}$ , obtém-se

$$2a\bar{\psi} + b = 0 \quad (\text{E.7})$$

e, conseqüentemente,  $b^2 - 4a(c - \bar{\eta}) = 0$  nas expressões de  $\psi'$  e  $\psi''$  correspondentes a  $\eta = \bar{\eta}$ , ou seja,  $\bar{\psi}$  é raiz dupla da equação (E.3) para  $\eta = \bar{\eta}$ .

Se

$$b^2 - 4a(c - \bar{\eta}) = 0 \quad (\text{E.8})$$

então

$$1 - 4a(-a - \bar{\eta}) = 0 \quad (\text{E.9})$$

ou

$$4a^2 + 4a\bar{\eta} + 1 = 0 \quad (\text{E.10})$$

Resolvendo para  $a$ , obtém-se as raízes  $a'$  e  $a''$  e os valores correspondentes  $c'$  e  $c''$ :

$$a' = \frac{-\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} \quad , \quad c' = \frac{\bar{\eta} - \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} \quad (E.11)$$

$$a'' = \frac{-\bar{\eta} - \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} \quad , \quad c'' = \frac{\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

Nota-se que, como  $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$ , a e c só terão valores reais se  $|\bar{\eta}| = 1$ , o que implica em

$$a' = a'' = -\frac{\bar{\eta}}{2} \quad e \quad c' = c'' = \frac{\bar{\eta}}{2} \quad (E.12)$$

A transformação requerida quando a singularidade o corre em um dos extremos do intervalo de integração é, consequentemente, dada por

$$\eta = -\frac{\bar{\eta}}{2} \psi^2 + \psi + \frac{\bar{\eta}}{2} \quad (E.13)$$

ou

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{2} (1 - \psi^2) + \psi \quad (E.14)$$

com

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1 - \bar{\eta}\psi \quad (E.15)$$

A integração fica da seguinte maneira

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f\left[\frac{\bar{\eta}}{2}(1 - \psi^2) + \psi\right] (1 - \bar{\eta}\psi) d\psi \quad (E.16)$$

A substituição de  $\bar{\eta} = -1$  e de  $\bar{\eta} = 1$  em (E.14) fornece, respectivamente, as expressões (III.41) e (III.43) correspondentes à singularidade nos nós inicial e final do elemento.

Quando a singularidade ocorre para  $\eta = \bar{\eta}$  qualquer, a integral deve ser dividida em duas outras, como segue

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^{\bar{\eta}} f(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{E.17})$$

A primeira integral à direita possui singularidade no seu limite superior e a segunda, no seu limite inferior. Introduzindo mudanças de variáveis tais que os limites de integração dessas duas novas integrais coincidam com os da integral original, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta &= \frac{(1+\bar{\eta})}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{(1+\bar{\eta})\rho' + (\bar{\eta}-1)}{2}\right] d\rho' + \\ &+ \frac{(1-\bar{\eta})}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{(1-\bar{\eta})\rho'' + (\bar{\eta}+1)}{2}\right] d\rho'' \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Agora, a primeira integral à direita apresenta singularidade para  $\rho' = 1$  e a segunda, para  $\rho'' = -1$ , o que permite a utilização da transformação quadrática (E.14), e conduz à seguinte expressão para a integral de  $f(\eta)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta &= \frac{(1+\bar{\eta})}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{(1+\bar{\eta})}{2} \left[\frac{1}{2}(1-\Psi^2) + \Psi\right] + \frac{(\bar{\eta}-1)}{2}\right] (1-\Psi) d\Psi + \\ &+ \frac{(1-\bar{\eta})}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{(1-\bar{\eta})}{2} \left[-\frac{1}{2}(1-\Psi^2) + \Psi\right] + \frac{(\bar{\eta}+1)}{2}\right] (1+\Psi) d\Psi \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Para  $\bar{\eta} = 0$ , obtém-se a expressão (III.49) correspondente à singularidade no nó intermediário do elemento quadrático.

## APÊNDICE F

CÁLCULO DO VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY POR INTEGRAÇÃO  
NO SENTIDO DE PARTES FINITAS

O cálculo das integrais no sentido de valor principal de Cauchy pode ser efetuado aplicando-se o conceito de integração no sentido de partes finitas às integrais envolvidas.

Seja a integral no sentido de valor principal abaixo:

$$I = \int_a^b \frac{1}{(r-s)} f(r) dr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{(s-\epsilon)} \frac{f(r)}{(r-s)} dr + \int_{(s+\epsilon)}^b \frac{f(r)}{(r-s)} dr \right\}, \quad a < s < b \quad (F.1)$$

na qual a função  $f(r)$  satisfaz a condição de Hölder\* em  $s$  e  $f(s) \neq 0$ , o que implica que a singularidade é de ordem um.

As duas integrais à direita em (F.1) podem ser calculadas aplicando-se o conceito de integração no sentido de partes finitas, resultando em

$$I = I' + I''$$

onde

---

(\*) Uma função satisfaz a condição de Hölder num ponto  $s$  se:

$$|f(r) - f(s)| \leq A \cdot R^\alpha(r;s)$$

onde  $A$  é uma constante qualquer e  $A > 0$ ,

$$0 < \alpha \leq 1 \quad \text{e}$$

$R(r;s)$  é a "distância" entre  $r$  e  $s$ .

$$I = \int_a^s \frac{f(r)}{(r-s)} dr \quad (F.2)$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(r)}{(r-s)} dr$$

e  $\int$  representa uma integral por partes finitas.

A integral por partes finitas é um funcional linear e contínuo no qual se incluem as integrais regulares; conseqüentemente, muitas propriedades dessas integrais (não todas) são válidas para a aquela [1].

Efetuada uma mudança de variáveis tal que os intervalos de integração nas expressões (F.2) se reduzam a intervalos de comprimento unitário, as seguintes expressões devem ser usadas para o cálculo das integrais  $I'$  e  $I''$ :

$$I' = \int_a^s \frac{f(r)}{(r-s)} dr = - \int_0^1 \frac{f[(a-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln|a-s| \quad (F.3)$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(r)}{(r-s)} dr = \int_0^1 \frac{f[(b-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln|b-s|$$

As fórmulas para a integração numérica das expressões (F.3) foram apresentadas por Kutt (maiores detalhes na referência [1]) e possibilitam uma integração tipo Gauss:  $n$  pontos de Kutt são suficientes para a integração de um polinômio de grau  $(2n-1)$ . Com a utilização de tais fórmulas, as expressões (F.3) tornam-se as seguintes:

$$I' = \int_a^s \frac{f(r)}{(r-s)} dr \approx - \sum_{i=1}^n f[(a-s)t_i+s]w_i - f(s) \ln|a-s| \quad (\text{F.5})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(r)}{(r-s)} dr \approx \sum_{i=1}^n f[(b-s)t_i+s]w_i + f(s) \ln|b-s|$$

onde  $t_i$  e  $w_i$  representam, respectivamente, as coordenadas dos pontos de integração e os pesos associados.

A integração numérica da expressão (IV.44), com a utilização do conceito de integração no sentido de partes finitas no que diz respeito à direção radial, é efetuada como segue:

$$\begin{aligned} 'd_{ij}^\alpha &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{R} ' \psi \bar{n}_\alpha r dR d\phi = 4\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{R(\phi)} \frac{1}{R} ' \psi \bar{n}_\alpha r dR d\phi = \\ &= 4\pi \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2} \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{\ell=1}^n [ (' \psi r \bar{n}_\alpha)_\ell w_\ell ] + ' \psi(0) \ln |R(\phi_k)| \right\} w_k \\ &\dots \quad (\text{F.6}) \end{aligned}$$

onde  $\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2}$  é o Jacobiano para a integração em relação a  $\phi$  e

$w_k$  e  $w_\ell$  são os pesos associados aos pontos de integração de Gauss (m pontos) e de Kutt (n pontos).

Nos exemplos apresentados no Capítulo IV, a utilização de seis pontos de Kutt para a integração na direção radial forneceu resultados satisfatórios, os testes realizados com a utilização de mais pontos indicando ser esse número suficiente. Esses pontos e os pesos associados estão na tabela abaixo.

Tabela F.1 - Pontos e pesos de Kutt para a integração no sentido de partes finitas

$t_i$		$w_i$	
-0,65560816022445	(-2)	-0,33717851540107	(1)
0,93250153550835	(-1)	0,17235190974106	(1)
0,30044628880792		0,81251173429234	
0,55944819710306		0,46830973648468	
0,80082123500722		0,26182782473225	
0,95995583420686		0,10561676109088	

Os números devem ser multiplicados pela potência de 10 entre parênteses.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [2] CRUSE, T.A., SONW, D.W. and WILSON, R.B., "Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity", Comput. Structures, Vol. 7, 445-451, (1977).
- [3] KERMANIDIS, T., "A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems", Int. J. Solids Structures, Vol. 11, 493-500, (1975).
- [4] RIZZO, F.J., GUPTA, A.K. and WU, Y., "A Boundary Integral Equation Method for Torsion of Variable Diameter Circular Shafts and Related Problems", in Proc. 2nd. Int. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Appl. Engng. Sci. (R.P. Shaw et al., Eds.), University of Virginia Press, Charlottesville, (1980).
- [5] MAYR, M., "On the Numerical Solution of Axisymmetric Elasticity Problems Using an Integral Equation Approach", Mechanics Research Communications, Vol. 3, 393-398, (1976).
- [6] MAYR, M. und NEUREITER, W., "Ein Numerisches Verfahren zur Lösung des Axialzylmetrischen Torsionsproblems", Ingenieur-Archiv, Vol. 46, 137-142, (1977).

- [7] BUI, H.D., "Some Remarks About the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 14, 935-939, (1978).
- [8] TELLES, J.C.F., "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems", *Lecture Notes in Engineering*, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [9] TELLES, J.C.F., "A Boundary Element Formulation for Axisymmetric Plasticity", in *Boundary Elements*, Proc. Fifth International Conference, Hiroshima (Brebbia, C.A. et al Eds.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, (1983).
- [10] CHEN Zhen-Sheng, "A Boundary Element Solution to Elastoplastic Torsion of Solids of Revolution", *Int. J. Num. Methods Engng.*, Vol. 19, 1193-1207, (1983).
- [11] MENDELSON, A., "Plasticity: Theory and Application", MacMillan, New York, 1968.
- [12] CODY, W.J., "Chebyshev Approximations for the Complete Elliptic Integral K and E", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, 105-112, (1965).
- [13] ERDELYI, A. et al, "Higher Transcendental Functions", Baethman Manuscript Project, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.

- [14] TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER; J.N., " Teoria da Elasticidade", Guanabara Dois, 3ª edição.
- [15] TELLES, J.C.F. and BREBBIA, C.A., "On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity", Appl. Math. Modelling, Vol. 3, 466-470, (1979).
- [16] TELLES, J.C.F., "On Inelastic Analysis Algorithms for Boundary Elements", in Advanced Topics in Boundary Element Analysis, (Ed. Cruse, T.A., Pifko, A.B. and Armen, H.), AMD - Vol. 72, 35-44, (1985).
- [17] CHAUDONNERET, M., "On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis", Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech-Press, 185-194, (1978).